UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS HUMANAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

DANIANA DE COSTA

UMA TERAPIA FILOSÓFICA DA MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SÃO CARLOS
2023

DANIANA DE COSTA

UMA TERAPIA FILOSÓFICA DA MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de São Carlos como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Educação.

Área de concentração: Educação

Linha de Pesquisa: Educação em Ciências e Matemática

Orientador: Professor Dr. Ademir Donizeti Caldeira

SÃO CARLOS

2023

Costa, Daniana de

Uma terapia filosófica da Modelagem Matemática na Educação Matemática / Daniana de Costa -- 2023.
171f.

Tese de Doutorado - Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos
Orientador (a): Ademir Donizeti Caldeira
Banca Examinadora: Carolina Rodrigues de Souza, Cristiane Maria Cornelia Gottschalk, Denise Silva Vilela, João Frederico da Costa Azevedo Meyer, Jussara de Loiola Araújo
Bibliografia

1. Modelagem Matemática. Terapia filosófica de Wittgenstein. Linguagem. . I. Costa, Daniana de. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Ronildo Santos Prado - CRB/8 7325

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Educação e Ciências Humanas
Programa de Pós-Graduação em Educação

Folha de Aprovação

Defesa de Tese de Doutorado da candidata Daniana de Costa, realizada em 27/02/2023.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Ademir Donizeti Caldeira (UFSCar)

Profa. Dra. Denise Silva Vilela (UFSCar)

Profa. Dra. Carolina Rodrigues de Souza (UFSCar)

Profa. Dra. Cristiane Maria Cornelia Gottschalk (USP)

Profa. Dra. Jussara de Loiola Araújo (UFMG)

Prof. Dr. João Frederico da Costa Azevedo Meyer (UNICAMP)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação.

A Deus, "tudo vem de ti, e nós somente devolvemos o que era teu."

(I Crônicas 29:14)

AGRADECIMENTOS

A Deus pela vida, maravilhosa graça, bênçãos, e pela oportunidade para cursar doutorado.
À minha mãe, Idilma, pela força e orações. Menciono o nome do meu pai, Ivo (*in memoriam*).
Ao Miro, pela orientação, confiança, compreensão e aprendizagens. A Sonia, Pedro, Carol e Caio, pela hospitalidade.
Aos professores titulares que compuseram a banca de defesa: Cristiane Gottschalk, Joni, Jussara Araújo, Carolina de Souza e Denise Vilela.
Aos professores suplentes: Ana Paula Malheiros, Paulo Vilhena, Renata Meneguetti, Klinger Ciríaco e Maria do Carmo de Sousa.
Aos professores que fizeram parte da banca de qualificação: Carlos Evaldo Silva e Paulo Sampaio de Oliveira.
À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo auxílio financeiro.
Aos professores das disciplinas que cursei no Programa de Pós-Graduação em Educação (PPGE) da UFSCar e na Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (FEUSP).
Aos professores Maria do Carmo de Sousa e Klinger Ciríaco, pela oportunidade para cursar as disciplinas do Programa de Estágio Supervisionado de Capacitação Docente (PESCD).
À coordenação e secretaria do PPGE da UFSCar, pela atenção e presteza.
Ao Grupo de Pesquisa em Educação Matemática e Cultura (EMAC) da UFSCar.
À professora Cristiane Gottschalk, por me permitir participar no Grupo de Pesquisa Filosofia, Educação, Linguagem e Pragmática (FELP) da FEUSP para ampliar meu conhecimento sobre a filosofia de Wittgenstein.
A todos os queridos e prestimosos colegas do Grupo de Estudos e Pesquisas em Linguagem Matemática (GELIM) da Universidade Federal do Pará (UFPA) pelas discussões e colaboração. Em especial, ao Carlos Evaldo, pelo incentivo, atenção, por sanar dúvidas, pelas reflexões e sugestões. Ao Adauto Cunha, pela atenção, auxílio com compartilhamento de textos, informações importantes e ajuda com traduções. Ao Paulo Vilhena, por me possibilitar continuar participando nesse grupo de pesquisa, por me ouvir e pelas trocas de ideias nos encontros do grupo. Menciono a professora Marisa Rosâni Abreu da Silveira (*in memoriam*), por ter me permitido ingressar no GELIM.

Aos colegas que compartilharam dissertações e teses sobre Modelagem: Everaldo, Betina, Bruna e Maria Rosana.

Aos professores Edival e Anabel, por aceitarem esclarecer dúvidas e contribuir com indicações de leituras.

A Giane, Marcelo, Bia, Vinicius Hideki, Valdecir e família, pela confiança e ajuda.

A Daniele Fernanda, Killara e à Primeira Igreja Batista em São Carlos, em especial, Marcos Valério, Elsani, Gidalth, Carmen e Mirna.

A Tereza Rachel e Jacira, pela amizade, incentivo e orações.

Às colegas do PPGE (UFSCar), Veruska, Hellen e Sara, por gentilmente compartilhar informações e sanar dúvidas.

À equipe e colegas da Revista Eletrônica de Educação (REVEDUC-UFSCar), pelas aprendizagens.

A todos que de alguma forma contribuíram para a realização desta pesquisa.

RESUMO

Com base na filosofia terapêutica de Ludwig Wittgenstein, objetiva-se esclarecer confusões conceituais existentes em eventuais imagens vinculadas ao que é descrito sobre a Modelagem Matemática na Educação Matemática conforme encontrado em dissertações e teses desenvolvidas no Brasil. A abordagem da pesquisa é qualitativa e classifica-se como exploratória e bibliográfica, ao serem exploradas os usos das expressões linguísticas, modelagem matemática e modelo matemático em um material empírico constituído por quarenta e sete dissertações e teses brasileiras do período de 1976 a 2022. A interpretação dos usos dessas expressões linguísticas incorreu na construção de três imagens: 1) na Modelagem, o estudante descobre a Matemática inserida em alguma realidade extralinguística; 2) o modelo matemático é uma representação subjacente à realidade empírica; 3) na Modelagem, os conhecimentos matemáticos teriam origem em construções mentais. Sob inspiração da terapia wittgensteiniana, lançaram-se possíveis esclarecimentos sobre as confusões conceituais imbricadas nessas imagens. Quanto à primeira imagem, verificou-se duas confusões conceituais, indicando que, na Modelagem, a natureza dos enunciados matemáticos são tidos como de igual natureza aos enunciados das Ciências Empíricas e as conclusões dos estudantes (redescobertas ou descobertas pessoais) na Modelagem são de natureza empírica. Como possível esclarecimento, é discutido que os enunciados matemáticos são de natureza normativa que possibilitam a compreensão do mundo empírico. Nesse sentido, o estudante poderá fazer Modelagem, a partir do momento que conhecer as regras da Matemática e da própria Modelagem, podendo agir guiado por essas regras. Quanto à segunda imagem, a confusão é que haveria um isomorfismo entre o modelo matemático e a realidade empírica. Como esclarecimento, é argumentado que, considerando uma perspectiva wittgensteiniana, o modelo matemático pode ser concebido como uma representação *(Darstellung),* tal como um paradigma, um objeto linguístico que organiza, que dá sentido à experiência empírica. Quanto à terceira imagem, a confusão conceitual é que os conhecimentos matemáticos construídos na Modelagem são representações mentais *(Vorstellungen)* de conceitos matemáticos. É explicitado que pode haver um tipo de construção de conhecimentos matemáticos iniciada pelos diversos usos de regras matemáticas apresentadas ao estudante. Ao atentar para os usos das expressões linguísticas modelagem matemática e modelo matemático no material empírico desta pesquisa, salienta-se que na Modelagem existe um uso exclusivo da concepção referencial da linguagem relacionada às acepções empirista e intuicionista da Matemática na Modelagem.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Terapia filosófica de Wittgenstein. Linguagem. Representação. Conhecimento matemático.

ABSTRACT

Based on Ludwig Wittgenstein's therapeutic philosophy, the aim is to clarify conceptual confusions that exist in possible images related to what is described about Mathematical Modelling in Mathematics Education as found in dissertations and theses developed in Brazil. The research approach is qualitative, and it is classified as exploratory and bibliographic, when the uses of the linguistic expressions, mathematical modelling and mathematical model are explored in an empirical material constituted by forty-seven Brazilian dissertations and theses from the period 1976 to 2022. The interpretation of the use of these linguistic expressions occurred in the construction of three images: 1) in Modelling, the student discovers mathematics inserted in some extralinguistic reality; 2) the mathematical model is an underlying representation of empirical reality; 3) in Modelling, mathematical knowledge would originate in mental constructions. Inspired by Wittgenstein's therapy, possible clarifications of the conceptual confusions imbricated in these images were initiated. Concerning the first image, two conceptual confusions were verified, indicating that in Modelling the nature of mathematical statements is taken as equal in nature to the statements of the empirical sciences, and the conclusions of the students (rediscoveries or personal discoveries) in Modelling are of empirical nature. As a possible clarification, it is argued that mathematical statements are of a normative nature that enable the understanding of the empirical world. In this sense, the student will be able to do Modelling from the moment he knows the rules of mathematics and of Modelling itself and is able to act guided by these rules. As for the second image, the confusion is that there would be an isomorphism between the mathematical model and the empirical reality. To clarify, it is argued that, from a Wittgensteinian perspective, the mathematical model can be conceived as representation *(Darstellung),* such as a paradigm, a linguistic object that organizes and gives meaning to empirical experience. As for the third image, the conceptual confusion is that the mathematical knowledge constructed in the Modelling is mental representations *(Vorstellungen)* of mathematical concepts. It is made explicit that there can be a kind of construction of mathematical knowledge initiated by the various uses of mathematical rules presented to the student. Paying attention to the use of the linguistic expressions mathematical modelling and mathematical model in the empirical material of this research, it is pointed out that in Modelling there is an exclusive use of the referential conception of language related to the empiricist and intuitionist meanings of Mathematics.

Keywords: Mathematical Modelling. Wittgenstein's philosophical therapy. Language. Representation. Mathematical knowledge.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Segundo a corrente filosófica essencialista platônica, as coisas[1] possuem essências (SILVA, 2018) existentes *a priori* no mundo inteligível e o papel da linguagem seria o de manifestar essas essências. Assim, o significado de uma palavra seria a essência do objeto a que a palavra se refere e que está localizado no mundo inteligível.

Para outro filósofo grego, Aristóteles, o conteúdo das coisas estaria no mundo empírico. A palavra e a coisa se vinculariam por meio de "*afecções de alma*[2] (SILVA, 2018, p. 19, grifo do autor), possibilitando que o significado de uma palavra fosse uma imagem (na *psique*) de algo que existe no mundo empírico (SILVA, 2018), conduzindo, tal como na filosofia platônica, a uma concepção referencial da linguagem.

Na antiguidade grega, "o mundo, a realidade objetiva e as coisas passam a ser o significado da palavra" (SILVA, 2018, p. 14), ou seja, os significados das palavras estariam relacionados com a existência de algo presente numa realidade inteligível ou empírica. Essa ligação entre significado da palavra e objeto a que ela se refere, acaba se estendendo por toda a filosofia ocidental, "fazendo brotar uma metafísica, a busca pela essência das coisas[3]" (SILVA, 2018, p. 14).

A ideia da existência de essências de coisas que estariam em uma realidade empírica ou transcendental, sendo que essas essências seriam tomadas como significados das palavras, implica um uso exclusivo da concepção referencial da linguagem. Essa concepção é veemente na filosofia de Agostinho durante a Idade Média, segundo a qual "cada palavra possui um significado *(Bedeutung)* e que cada significado corresponde a um objeto" (MULINARI, 2016, p. 82).

A concepção referencial da linguagem, que esteve presente nas correntes filosóficas da antiguidade grega e se alastrou por toda a filosofia ocidental, destacou-se e sofreu variações na Idade Média com o filósofo Agostinho e, inclusive, com outros filósofos do Medievo, tais como Pedro Abelardo e Tomás de Aquino, por exemplo. No século XIX, essas variações continuaram com os matemáticos e filósofos Frege e Russell e se estenderam até o Positivismo Lógico[4] do século XX (SILVA, 2018).

---

[1] Considera-se como coisas "um ato humano qualquer ou, mais exatamente, qualquer objeto com que, de qualquer modo, se deva tratar" (ABBAGNANO, 2007, p. 149).
[2] Quanto aos fenômenos psicológicos na filosofia aristotélica.
[3] Na metafísica clássica esta essência seria imutável. A sua captação seria o conhecimento verdadeiro, passível de ser comunicado pela linguagem (OLIVEIRA, 2006).
[4] Corrente filosófica que discutia a necessidade de sentido para enunciados não formais (que não são da Lógica ou da Matemática) (SILVA, 2018).

Além da concepção referencial da linguagem prevalecer em correntes filosóficas tradicionais, ela também se fez presente no decorrer do século XX, quando o filósofo austríaco Ludwig Wittgenstein escreveu o *Tractatus Lógico-Philosophicus*. Nesse livro, que exprime o primeiro pensamento filosófico de Wittgenstein, a sua filosofia é uma atividade crítica da linguagem, pois ele considera que os enganos (ou confusões) filosóficos surgem quando a linguagem não expressa corretamente o pensamento.

Por conta disso, o filósofo busca uma linguagem perfeita, fundamentada na Lógica, para expressar o pensamento. Tendo em vista essa empreitada, no *Tractatus* é estabelecido o isomorfismo entre a linguagem, constituída por elementos (nomes e proposições), e o mundo. As proposições descrevem fatos do mundo e os nomes descrevem os objetos simples, indicando a presença da concepção referencial da linguagem porque "todos os elementos da linguagem *representam* algo" (MORENO, 2000, p. 14, grifo do autor). Assim, seria possível analisar o mecanismo lógico da linguagem (MORENO, 2000) por meio de uma relação biunívoca entre linguagem e mundo, de modo que é a "análise lógica da linguagem que estabelece os limites entre o que tem sentido e o que não tem" (GUTIERREZ, 2004, p. 208).

Passado algum tempo, após a publicação do *Tractatus*, Wittgenstein escreve os parágrafos que compuseram as *Investigações Filosóficas*, livro que revela seu segundo pensamento filosófico que difere do primeiro.

Nas *Investigações*, sua filosofia caracteriza-se como uma atividade terapêutica, uma autoterapia com o propósito de curar seu próprio pensamento filosófico da imagem[5] relacionada ao *Tractatus,* "Uma *imagem* mantinha-nos prisioneiros. E não podíamos escapar, pois ela residia em nossa linguagem, e esta parecia repeti-la para nós, inexoravelmente" (WITTGENSTEIN, 2014, § 115, grifo do autor)[6].

No contexto tractariano, são identificadas duas imagens (modelos) que guiaram a atividade filosófica de Wittgenstein. A primeira, "corresponde à concepção agostiniana da significação, segundo a qual a linguagem tem uma única função: exprimir pensamentos sobre objetos: casas, mesas, desejos, cores etc." (MORENO, 1995, p. 41). A segunda, "corresponde ao ideal de exatidão, ao exercício da lógica para a construção de linguagens exatas" (MORENO, 1995, p. 42).

---

[5] A palavra "imagem" no *Tractatus* é escrita na língua alemã com a palavra *Bild* que significa "modelo", de modo que o § 2.1 do *Tractatus* "poderia ser traduzido por: fazemos para nós modelos dos fatos" (SIMÕES, 2013, p. 225). A palavra *Bild* é usualmente traduzida por *Picture* (figura) na língua inglesa, por isso, a teoria do significado no *Tractatus* é conhecida como "teoria da figura" (SIMÕES, 2013, p. 225).

[6] As citações dos livros de Wittgenstein são indicadas pelo número do parágrafo (§) e não da página.

Estas imagens levaram o filósofo a pensar de determinada maneira. Em relação à primeira, a consequência para o pensamento é que a existência de palavras, que são sons com significados, está condicionada à existência de objetos. A segunda, conduz o pensamento "no sentido de procurar 'a essência última da linguagem', fixa, imutável" (MORENO, 1995, p. 42).

Neste modo de pensar predomina o uso exclusivo da concepção referencial da linguagem da visão agostiniana (modelo agostiniano) e o uso essencialista da linguagem do modelo lógico do *Tractatus*. Compreende-se que esses usos se constituem como enganos, ou seja, tornam o pensamento confuso, então o filósofo faz a terapia das imagens presentes no pensamento filosófico do *Tractatus* posteriormente nas *Investigações*.

As confusões conceituais eclodem porque os significados das palavras e expressões linguísticas são considerados como extralinguísticos, até mesmo metafísicos, uma vez que a linguagem não trabalha, ela folga, está em ponto morto (WITTGENSTEIN, 2014, § 38; § 132), não sendo considerados, portanto, seus usos efetivos.

Neste sentido, "imagem" é um conceito na filosofia wittgensteiniana. A palavra "imagem" não se refere a imagens mentais, privadas, que são subjetivas. Trata-se de uma ideia pública que vai sendo construída a partir das nossas conclusões, "Para o filósofo austríaco, Ludwig Wittgenstein, **algumas imagens que construímos com a nossa linguagem** podem nos levar a enganos" (GOTTSCHALK, 2018, p. 113, grifo nosso).

A palavra "imagem" pode ser entendida como um uso dogmático, privilegiando determinado uso de um conceito, como se apenas este uso fosse o correto. Se considerarmos a palavra "dor", por exemplo, formam-se imagens desse conceito quando se aceita como usos dessa palavra "o comportamento da dor" ou "a vivência da dor". Assim, poderiam existir como imagens os usos privilegiados desse conceito, de maneira que o significado "dor" fica reduzido ao "comportamento da dor" ou "a vivência da dor". Na imagem cujo uso é "o comportamento da dor" tem-se uma concepção behaviorista do significado, em que esse é àquele comportamento. Na imagem em que se considera esse uso como fundamento último do que é ter dor, "a vivência da dor", então há uma concepção mentalista do significado que fica restrito à "vivência da dor". Há um uso extralinguístico do conceito de "dor" em ambos os casos (MORENO, 1995).

Ao tomar como exemplo a palavra "ler", uma imagem pode ser construída quando se procura identificar a referência dessa palavra. Alguém poderia dizer que ler é uma atividade mental (WITTGENSTEIN, 2014, § 156) ou que é algo que se passa no cérebro e no sistema nervoso humano (WITTGENSTEIN, 2014, § 158). Sob esta perspectiva, é necessário que exista um objeto, "uma ligação determinada, nervosa, ou neural" (MORENO, 1995, p. 38), que corresponda à palavra "ler". Isso demonstra o pensamento preso à concepção agostiniana da linguagem: a palavra deveria corresponder a uma referência no mundo extralinguístico; e não são admitidos outros usos dessa palavra.

Entretanto, a terapia permite liberar o pensamento das imagens, então quando se vê que "ler é uma atividade especial consciente espiritual" (WITTGENSTEIN, 2014, § 156), por exemplo, tem-se que este é apenas um dos usos da palavra "ler", aplicado a algum caso específico quando ocorre a leitura, de mesmo modo, quanto ao conceito de "dor", "o comportamento de dor" ou "a vivência da dor" constituem alguns dos usos desse conceito.

Neste sentido, no § 11 das *Investigações*, Wittgenstein alerta sobre a aparente uniformidade da linguagem que se manifesta oralmente ou nas palavras escritas. Consoante o filósofo, o emprego da linguagem nessas manifestações não nos é tão claro, em especial quando se põe a linguagem sob atividade filosófica.

Mesmo quando Wittgenstein submete seu pensamento à terapia, não é uma tarefa simples desvencilhar-se das imagens constituídas pelo uso exclusivo da concepção referencial da linguagem. Porém, ao lutar contra as imagens, e já com uma nitidez acerca da linguagem, afirma que as palavras possuem diferentes funções, tal como as ferramentas em uma caixa. Assim, as palavras, ou, em sentido amplo, a linguagem, possui funções distintas que podem ser semelhantes, descartando o emprego exclusivo de sua concepção referencial.

> Pense nas ferramentas dentro de uma caixa de ferramentas: encontram-se aí um martelo, um alicate, uma serra, uma chave de fenda, um metro, uma lata de cola, cola, pregos e parafusos. - Assim como são diferentes as funções desses objetos, são diferentes as funções das palavras. (E há semelhanças aqui e ali.)
> **O que nos confunde, sem dúvida, é a uniformidade de sua manifestação, quando as palavras nos são ditas ou se nos apresentam na escrita ou na impressão. Pois, o seu *emprego* não é tão claro assim. Especialmente quando filosofamos!** (WITTGENSTEIN, 2014, § 11, itálico do autor, negrito nosso).

Por isso, ao visar a cura (ou esclarecimento) do seu próprio pensamento, é que a atividade filosófica, do segundo Wittgenstein, se constitui como terapêutica – "recurso da variação de exemplos, ou da representação de casos diferentes" (SPANIOL, 1989, p. 56) – para curar seu pensamento preso às imagens.

Por meio de exemplos, Wittgenstein vê, com seus interlocutores das *Investigações*, como a linguagem é utilizada em diferentes contextos linguísticos, e em decorrência, que os significados são os usos das palavras e expressões linguísticas. O pensamento não é mais "alimentado" pelo uso exclusivo da concepção referencial da linguagem, "esta simples 'variação da dieta' pode livrar-nos da 'doença' de pensar que ter em mente *(meinen)* algo equivale a concentrar a atenção em algum referente" (SPANIOL, 1989, p. 62).

Devido às modificações do pensamento wittgensteiniano pós *Tractatus*, o filósofo passa a compreender que se não há problemas com a linguagem, então não haveria a necessidade de uma linguagem perfeita. Os problemas filosóficos acontecem não porque não poderiam ser expressos claramente por meio da linguagem, mas porque o pensamento está preso às imagens.

As mudanças que ocorreram no pensamento filosófico de Wittgenstein lhe possibilitaram desenvolver uma nova visão no tocante à linguagem. Ele a compara a um jogo, de modo que ela passa a ser concebida como uma atividade regrada e os significados das palavras e expressões linguísticas são seus usos, "Chamarei de 'jogo de linguagem' também a totalidade formada pela linguagem e pelas atividades com as quais ela vem entrelaçada" (WITTGENSTEIN, 2014, § 7).

Ao se conceber a linguagem sob a ótica dos jogos de linguagem (WITTGENSTEIN, 2014, § 7) importa como as palavras e expressões linguísticas são usadas nos diversos contextos linguísticos. Desse modo, é evidenciado que a linguagem não é utilizada apenas para referenciar objetos, fatos ou essências existentes *a priori* em alguma realidade, o que descarta o uso exclusivo da concepção referencial da linguagem, que passa ser apenas um jogo de linguagem.

Por meio de sua filosofia que é terapêutica (terapia wittgensteiniana) – no caso do próprio filósofo, uma autoterapia – Wittgenstein vê para além de uma concepção referencial da linguagem porque constata que a linguagem também organiza, dá condições de sentido para a compreensão do mundo empírico por meio de expressões linguísticas com uma função normativa (MORENO, 1995, GOTTSCHALK, 2004a). Essas expressões são certezas, como por exemplo, "verde é uma cor" é uma certeza do jogo de linguagem das cores, "a soma de dois com três é igual a cinco" compõe o jogo de linguagem da Aritmética. Essas certezas possibilitam descrever situações do mundo empírico, "a árvore é verde", "há cinco maçãs na sacola". Assim, existem jogos de linguagem com expressões linguísticas cuja função é descritiva.

Com as mudanças ocorridas no pensamento de Wittgenstein, a linguagem deixa de ser apenas representativa e comunicativa do conhecimento humano. O filósofo rompe com uma tradição filosófica que se alastra desde a antiguidade grega, pois a linguagem assume outro *status*. Segundo Oliveira (2006), ela passa a ser condição de possibilidade do conhecimento humano.

Para além de uma breve discussão sobre a linguagem no âmbito filosófico, menciono meu interesse pela Modelagem Matemática no campo da Educação Matemática que é o foco de investigação neste trabalho de pesquisa.

Considero que minha pesquisa de mestrado, que versa sobre a Modelagem[7], defendida em 2017, mostrou um vislumbre dessa temática e poderia ser investigada com mais profundidade. Por esse motivo, meu objetivo era dar continuidade aos estudos sobre o tema.

No início do doutorado, ao ingressar no Grupo de Pesquisa de Educação Matemática e Cultura (EMAC) da UFSCar, tive a oportunidade de ter os primeiros contatos com textos que tecem uma interlocução entre aspectos da Educação Matemática e a segunda filosofia de Wittgenstein, os quais acabaram chamando a minha atenção. Dentre eles, menciono alguns: Caldeira (2009), Castro e Caldeira (2017), Vilela (2010), Taschetto e Duarte (2015), Gottschalk (2004a).

Ao ler os textos constatei que esta concepção filosófica contribui para discutir, questionar, problematizar, trazer outras compreensões para diferentes temáticas que pertencem à Educação Matemática, podendo auxiliar o repensar das práticas pedagógicas, do ensino e da aprendizagem da Matemática e das concepções teóricas que subsidiam esses processos educativos.

Porém, logo nas leituras iniciais destes textos percebi que o pensamento filosófico de Wittgenstein não seria de tão fácil compreensão para mim, então senti a necessidade de cursar a disciplina "Filosofia da Linguagem e Suas Concepções Epistemológicas na Educação", ministrada pela professora Cristiane Gottschalk na Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (FEUSP), e, tendo em vista ampliar os estudos sobre o assunto, ingressei no Grupo de Pesquisa Filosofia, Educação, Linguagem e Pragmática (FELP) dessa mesma instituição de ensino que é liderado pela professora mencionada.

Mais tarde, conheci o Grupo de Estudos e Pesquisas em Linguagem Matemática (GELIM) pertencente ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará (UFPA) que também discute assuntos da Educação Matemática valendo-se do pensamento filosófico de Wittgenstein. Com a permissão da professora Marisa Rosâni da Silveira ingressei nesse grupo, o que me possibilitou melhorar a compreensão sobre a filosofia wittgensteiniana e dialogar com os colegas sobre as transposições desse pensamento filosófico para a Educação Matemática.

Diante do exposto, como eu já vinha investigando a Modelagem no mestrado e no doutorado, o intento era dar continuidade aos estudos sobre esse assunto, porém ao me deparar com a filosofia de Wittgenstein, percebi que outras possibilidades de ver a Modelagem se

---

[7] A palavra Modelagem faz menção à Modelagem Matemática na Educação Matemática.

descortinavam, então comecei a levantar questionamentos possibilitados pelo contato com o pensamento filosófico de Wittgenstein no início do doutorado.

Importa esclarecer que os escritos de Wittgenstein não tinham um objetivo pedagógico. Mesmo assim, eles inspiram pesquisadores a pensar a Educação e subsidiar pesquisas, inclusive da Educação Matemática (SILVA et al., 2022). Entre essas pesquisas, há algumas que também se ocupam em dissolver confusões conceituais valendo-se da teria filosófica wittgensteiniana, tais como os trabalhos de Vilela (2010), Teixeira Júnior (2016) e Cardoso (2021).

Vilela (2010) discute a possibilidade de empreender a terapia filosófica wittgensteiniana na Educação Matemática. A autora procura desfazer imagens privilegiadas que apontam para uma representação de Matemática referencial. Para tanto, é realizada uma pesquisa na literatura acadêmica da Educação Matemática sobre como a palavra "matemática" vem sendo usada. Ao descrever alguns usos desse termo, a autora conclui que eles apontam para diversas práticas matemáticas: da escola, da academia, do cotidiano, de grupos de profissionais específicos etc. Logo, esses usos não convergem para uma essência, mas se constituem sistemas de significados que possuem relação com essas práticas.

Teixeira Júnior (2016) também utiliza a terapia wittgensteiniana para dissolver confusões conceituais relacionadas ao ensino de Álgebra. São analisadas dissertações e teses brasileiras que tratam do ensino de Álgebra, escritos de autores nacionais e internacionais que influenciam o seu ensino no Brasil, documentos oficiais publicados pelo Ministério da Educação e livros didáticos de Matemática para compreender os fundamentos filosóficos que causam confusões conceituais no ensino da Álgebra em âmbito escolar. À luz da filosofia wittgensteiniana, o autor entende que o estudante se torna autônomo a partir do momento que conhece e usa as regras da Álgebra escolar nas diversas situações, inclusive naquelas que lhe são desconhecidas.

Na pesquisa de Cardoso (2021), ao valer-se da terapia wittgensteiniana, são verificados os usos da expressão "alfabetização matemática" nos Cadernos do Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC) e a concepção de linguagem ali pressuposta. A autora constata que a concepção referencial da linguagem, impregnada nesses documentos e em algumas atividades sugeridas por eles, não considera a natureza normativa dos enunciados matemáticos, incorrendo numa concepção dogmática de ensino e aprendizagem da Matemática, implicando práticas que obscurecem a natureza do conhecimento matemático podendo levar inclusive a dificuldades na aprendizagem. Por fim, ela propõe outro olhar para a alfabetização matemática que considere o papel da linguagem para a compreensão de enunciados matemáticos e que possibilite novas formas de pensar o seu aprendizado.

No contexto pedagógico, a Modelagem tem como ponto de partida situações da realidade empírica, problematizadas e tratadas matematicamente, para se chegar a uma solução (ou não) dessa realidade, sob a forma de um modelo matemático, tido como "um conjunto de símbolos e relações matemáticas que **representam** de alguma forma o objeto estudado" (BASSANEZI, 1994, p. 20, grifo nosso) ou "**uma representação** simplificada da realidade sob a ótica daqueles que investigam" (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 13, grifo nosso), por exemplo. Porém, tendo em conta uma perspectiva wittgensteiniana da Matemática, concebida como um nexo de jogos de linguagem que possuem enunciados cuja função é normativa (GERRARD, 1991), surgiram indagações que contribuíram para pensar a delimitação da problemática para esta pesquisa: como a Modelagem poderia representar a realidade, supondo-se que os modelos matemáticos são constituídos por enunciados normativos, mas que podem ter um uso empírico no sentido de descrever a realidade? Se a Modelagem é uma representação da realidade, qual é a concepção de linguagem presente na Modelagem?

Em vista disto, levanta-se a hipótese de que, no que é expresso sobre a Modelagem, é possível que existam usos dogmáticos, segundo os quais a linguagem apenas comunicaria e representaria a Matemática e os modelos matemáticos "percebidos" pelos estudantes no processo de Modelagem, sendo que o conhecimento matemático e esses modelos se encontrariam *a priori* na realidade empírica.

Gottschalk (2020) discorre que a imagem agostiniana da linguagem se encontra em diversas teorias (realistas, empiristas, idealistas etc.) que orientam as práticas pedagógicas, ocasionando confusões no ensino de conteúdos escolares e, por conseguinte, dificuldades de aprendizagem. De mesmo modo, supõe-se que as imagens que se formam na Modelagem estão imbricadas de diferentes acepções teórico-filosóficas, podendo ocasionar desdobramentos na própria Modelagem e na Educação Matemática.

Frente a essas indagações e constatações, surgiu a pergunta de pesquisa: Quais são as eventuais imagens que se formam da interpretação de descrições, ou seja, do que aparece, do que é manifesto a respeito da Modelagem na Educação Matemática?

Diante do exposto, foi elaborado o objetivo geral: **Esclarecer confusões conceituais existentes em eventuais imagens vinculadas ao que é descrito sobre a Modelagem Matemática na Educação Matemática conforme encontrado em dissertações e teses desenvolvidas no Brasil.**

Para atingir o objetivo geral, foram formulados os seguintes objetivos específicos:

1. Explorar os usos das expressões linguísticas “modelagem matemática” e “modelo matemático” nas dissertações e teses brasileiras sobre Modelagem na Educação Matemática;
2. Analisar os usos dessas expressões linguísticas, cujas interpretações podem incorrer em imagens;
3. Verificar quais são as possíveis confusões conceituais imbricadas nessas imagens e esclarecê-las.

Trata-se de um estudo de abordagem qualitativa (STRAUSS; CORBIN, 2008) e classificado como exploratório e bibliográfico (GIL, 2008), pois é desenvolvido a partir de fontes bibliográficas: a literatura acadêmica sobre Modelagem na Educação Matemática.

Dessa literatura, o material empírico é constituído por uma seleção de dissertações e teses brasileiras do período de 1976 a 2022. Ao considerar o material empírico, atenta-se para possíveis imagens construídas no que é manifesto a respeito da Modelagem. Sobre tais imagens, aplica-se a terapia de Wittgenstein.

Espera-se que a aplicação da terapia wittgensteiniana contribua para trazer esclarecimentos para a Modelagem, o que sugere compreender as expressões linguísticas “modelagem matemática” e “modelo matemático” para além de usos privilegiados que possam existir nesse contexto. Sobretudo, acredita-se na possibilidade de ampliar discussões quanto aos fundamentos teórico-filosóficos da própria Modelagem, a natureza do conhecimento matemático e a linguagem na Modelagem.

No primeiro capítulo, descreve-se o percurso metodológico da pesquisa e, no segundo, os aspectos metodológicos, históricos e epistemológicos da Modelagem na Educação Matemática. No terceiro capítulo, é explicitado o uso exclusivo da concepção referencial da linguagem em algumas correntes filosóficas tradicionais e no primeiro pensamento filosófico de Wittgenstein. No quarto capítulo, discute-se a filosofia terapêutica de Wittgenstein e, no quinto, os diferentes modos de conceber o conhecimento matemático e algumas observações da Matemática consoante o pensamento desse filósofo. Nos capítulos sexto, sétimo e oitavo, são apresentadas as imagens, as possíveis confusões conceituais e a aplicação da terapia wittgensteiniana. Por fim, são tecidas as considerações.

1 PERCURSO METODOLÓGICO DA PESQUISA

Este capítulo trata da terapia wittgensteiniana como um "método" aplicado para clarificar situações conceitualmente confusas, sobre a caracterização da pesquisa, do material empírico e da fonte de coleta desse material.

Segundo Wittgenstein (2014, § 134, grifo do autor), "Não há *um* método da filosofia, mas sim métodos, como que diferentes terapias" aplicadas para desfazer confusões conceituais concernentes às imagens formadas pelo uso exclusivo da concepção referencial da linguagem.

Consoante Moreno (2000, p. 55), a terapia trata de "descrever as regras [da gramática[8]] que orientam os usos das palavras e enunciados nos jogos de linguagem[9]". O autor exemplifica essa descrição, tida como descrição gramatical: "'O que significa tal palavra?' é o seguinte: **tal palavra significa a explicação que demos de sua significação – e essa explicação corresponde à explicitação do uso que fazemos de tal palavra**" (MORENO, 2000, p. 55, grifo nosso). A descrição gramatical é sobre explicitar, ou seja, descrever os usos de palavras e expressões linguísticas, atentando para "**os detalhes, as nuances e as diferenças**" (MORENO, 2000, p. 55, grifo nosso).

Para tanto, "essa terapia serve-se de determinadas 'regras'" (MORENO, 2000, p. 61), que são orientações gerais passíveis de serem adaptadas a cada situação. Dentre estas orientações, Moreno (2000) menciona algumas: verificar como as palavras são usadas nas mais variadas situações ou teorias; colocar as palavras em situações primitivas de uso (como quando elas foram ensinadas para uma criança que estava aprendendo a língua materna) e, também, em situações inusitadas de uso (que pode ser invenções de usos das palavras). Essas orientações permitem apreender as nuances, múltiplas ligações analógicas e diferentes aspectos dos usos das palavras num mesmo jogo de linguagem.

De modo análogo às orientações de Moreno (2000), Gutierrez (2004) também discorre que a prática filosófica terapêutica se dá por meio da descrição gramatical dos usos das palavras, pois "o que é descrito, é o que aparece" (GUTIERREZ, 2004, p. 208). A descrição gramatical "está inserida num sistema de referência ou teoria empírica, transcendental ou em geral qualquer jogo de linguagem" (GUTIERREZ, 2004, p. 208-209), que possibilita comparar os diferentes usos das palavras e expressões linguísticas.

---

[8] A gramática é constituída por regras que orientam os usos adequados das palavras e expressões linguísticas.

[9] Wittgenstein estabelece uma analogia entre a linguagem e o jogo. Tal como um jogo, a linguagem é tida como uma atividade guiada por regras que não são estratégicas, mas gramaticais para determinar aquilo que é correto ou faz sentido de ser dito (GLOCK, 1998).

Assim, são as descrições da gramática dos usos da linguagem, tal “como falamos das figuras do jogo de xadrez, ao indicarmos regras de jogo para elas e não ao descrevermos suas características físicas” (WITTGENSTEIN, 2004, § 108), que interessa à terapia. Importa “as expressões usadas e a maneira como [inclusive as circunstâncias em que] são usadas” (GUTIERREZ, 2004, p. 208), isso é, “fatos linguísticos [...] nos seus usos efetivos” (GUTIERREZ, 2004, p. 216).

Dessa maneira, é possível ver as diferenças e analogias entre as palavras e expressões linguísticas, o que sugere uma visão sinóptica, ou seja, “ver um conceito como um todo; tal como se veria um objeto nas suas múltiplas perspectivas” (GUTIERREZ, p. 217, 2004; WITTGENSTEIN, 2014, § 122) do que está sob descrição gramatical.

Para além disso, é possível comparar os diversos jogos de linguagem nos quais a palavra é e pode ser usada. Após ter considerado os detalhes de cada jogo de linguagem, então, procura-se inseri-los em jogos de linguagem em que há ligações de semelhança, “por mais distantes que possam estar entre si – como, por exemplo, os jogos da matemática e aqueles da percepção de cores, dos estados mentais, das operações lógicas e, mesmo, das evidências do senso comum” (MORENO, 2000, p. 63).

Entende-se que essas ligações de semelhanças entre os detalhes dos usos das palavras de um jogo de linguagem e sua relação com outros jogos de linguagem (MORENO, 2000) também são contempladas em Moreno (2012), quando ele discute que, ao realizar a terapia, Wittgenstein tratou de descrever os usos das palavras, discutindo-os no âmbito de concepções filosóficas tradicionais ou de opiniões do senso comum.

> Wittgenstein aplicou o procedimento de descrição terapêutica dos usos de palavras – lógica, matemática, linguagem, percepção de cores e de formas, relatos da percepção de sensações externas e internas, no passado, no presente e no futuro etc. – através da discussão de concepções filosóficas tradicionais ou de opiniões do senso comum, das quais se trata de realizar a terapia (MORENO, 2012, p. 74).

À medida que as confusões conceituais são desfeitas, vem à tona esclarecimentos sobre os usos da linguagem em determinados contextos, de modo que, “o fundamento que se atribuía ao sentido [linguístico] nada mais é do que um fundamento convencional elaborado no processo de uso das palavras, sob forma de regras normativas de sentido” (MORENO, 2012, p. 75). Assim, “a terapia conceitual proporciona a tranquilidade de ter conseguido mudar a nossa maneira de ver as coisas e, com isto, ter dissolvido completamente um problema filosófico” (GUTIERREZ, p. 222, 2004).

Moreno (1995, p. 33) exemplifica como se daria a formação de imagens e o seu esclarecimento, tomando como base trechos dos § 186, § 187 e § 189 das *Investigações*, “1. ‘A expressão algébrica determina todas as passagens numéricas'; 2. 'A ordem '+3' determina as passagens entre os números'; 3. 'Ao dar a ordem '+2' eu sabia que seria preciso escrever 1002 após 1000'". Esses enunciados são variantes de uma mesma situação que, ao serem interpretadas filosoficamente, colocando a linguagem em férias ou quando se diz que a linguagem folga[10] (WITTGENSTEIN, 2014, § 38), podem gerar as seguintes imagens:

> 1*. A expressão algébrica é uma significação que antecipa a realidade: ela *realiza* todas as passagens de uma "maneira particular" [...]. 2*. 3*. Ao dar a ordem "+3" ou "+2" meu pensamento *realiza* efetivamente todas as passagens numéricas, *independentemente* de sua realização empírica (MORENO, 1995, p. 34, grifo do autor).

Dessas interpretações, é como se a resolução da expressão algébrica se desse mediante um processo mental, sem que fosse necessário conhecer as técnicas operatórias da Matemática para resolvê-las. Supõe-se que haveria algum tipo de intuição matemática que permitiria essas resoluções, o que acaba incorrendo em confusões conceituais porque os significados linguísticos estariam em alguma realidade matemática, trazendo à tona uma concepção referencial da linguagem. Além disso, segundo Moreno (1995), as imagens orientam o pensamento de modo que não seria possível imaginar o oposto, pois elas exercem uma força sobre o pensamento.

Entende-se que, ao tentar trazer esclarecimentos, o autor explicita como seria a interpretação desses enunciados, sem considerar a linguagem de folga, porque haveria o funcionamento, o emprego da linguagem:

> 1'. As pessoas que aprenderam a técnica de cálculo obtém, todas, os mesmos resultados, quando aplicam a fórmula algébrica em questão. 2'. A ordem '+3' determina inteiramente para as pessoas que aprenderam esta técnica operatória "a passagem de um número ao número seguinte", mas não para aquelas que não aprenderam a técnica. 3'. Se alguém tivesse colocado a questão, quando dei essa ordem, eu seria capaz de responder corretamente (MORENO, 1995, p. 34).

Considerando-se o funcionamento da linguagem, caberia conhecer as técnicas que envolvem este tipo de cálculo. Para resolver as expressões algébricas, torna-se necessário aplicar as técnicas apreendidas. São as técnicas matemáticas, que são linguísticas, que possibilitariam tais resoluções, e não algum tipo de intuição matemática que possua relação com a aplicação exclusivista da concepção referencial da linguagem.

Mediante esse exemplo dado por Moreno (1995), compreende-se que são descritas as imagens – interpretações em que "a linguagem *folga*" (WITTGENSTEIN, 2014, § 38, grifo do

---

[10] A linguagem folga porque falta empregar a linguagem, por isso Wittgenstein (2014, § 432, grifo do autor) diz que "Todo signo *sozinho*, parece morto. O *que* lhe confere vida? - Ele está *vivo* no uso."

autor) – e Moreno (1995) ainda explicita que a função terapêutica se cumpre mediante comparações com outras expressões linguísticas de outros jogos de linguagem.

> **A descrição gramatical cumpre uma função terapêutica enquanto, por meio de comparações com outras expressões linguísticas tomadas de jogos de linguagem muito diferentes, mostra e esclarece as semelhanças de conjunto e de detalhe entre os diversos usos das palavras**; evita, assim a "dieta unilateral" de imagens exclusivistas (MORENO, 1995, p. 39, grifo nosso).

Desse jeito, a descrição gramatical permite mostrar e esclarecer semelhanças entre os usos das palavras e expressões linguísticas nos jogos de linguagem.

Além disso, nessa pesquisa considera-se o que Wittgenstein chama a atenção a respeito da aparente uniformidade da linguagem (WITTGENSTEIN, 2014, § 11). Diante do alerta dado por ele, tem-se que a linguagem é enganosa porque se apresenta como uniforme, mas isso é apenas aparente. Então, importa ver o seu funcionamento, como a linguagem é usada; "Não pense, mas veja!" (WITTGENSTEIN, 2014, § 66) para ir além desta suposta uniformidade.

Frente ao exposto, nesta pesquisa o propósito é ver os usos das expressões linguísticas "modelagem matemática" e "modelo matemático" no que é manifesto sobre a Modelagem, o que sugere adentrar num contexto linguístico muito vasto. Depreende-se que esses usos poderiam ser vistos em estudos teóricos sobre Modelagem, em práticas de Modelagem realizadas ou observadas pelo próprio pesquisador, implementadas por professores ou estudantes, sendo que tais práticas poderiam ser encontradas em artigos, relatos de experiências publicados em revistas científicas ou em anais de eventos do campo da Educação Matemática ou da Educação, dissertações, teses, livros, etc.

Essas possibilidades revelam a amplitude e uma multiplicidade de manifestações das expressões linguísticas "modelagem matemática" e "modelo matemático" no que é expresso sobre a Modelagem. Por esse motivo, não seria possível abarcar todas elas nesta pesquisa. Então, direciona-se o olhar para alguns usos dessas expressões linguísticas encontradas em passagens de dissertações e teses brasileiras.

Nas dissertações e teses, essas expressões são usadas por pesquisadores, estudantes e professores durante a realização de práticas de Modelagem e por estudiosos do assunto que subsidiam teoricamente essas pesquisas. Enfim, nesses materiais existem vozes de personagens distintos que fazem uso dessas expressões linguísticas. Há, portanto, uma polifonia considerável para mostrar os usos das expressões "modelagem matemática" e "modelo matemático", exemplificando como se dá o funcionamento da linguagem no que é manifesto sobre a Modelagem.

Quanto à caracterização desta investigação, trata-se de uma pesquisa de abordagem qualitativa que produz "resultados não alcançados através de procedimentos estatísticos ou de outros meios de quantificação" (STRAUSS, CORBIN, 2008, p. 23). Ela é classificada como exploratória e bibliográfica (GIL, 2008), porque um dos seus objetivos corrobora o que é proposto pela pesquisa exploratória, que é explorar os usos das expressões linguísticas "modelagem matemática" e "modelo matemático" na literatura acadêmica brasileira sobre a Modelagem na Educação Matemática. Pelo fato deste estudo desenvolver-se, exclusivamente, a partir da literatura acadêmica sobre a Modelagem, então a pesquisa enquadra-se como bibliográfica.

O material empírico compreende o período de 1976 até 2022. Na década de 1970 foram elaboradas as primeiras pesquisas sobre Modelagem no país e supõe-se que podem existir interpretações que incorrem em imagens presentes nas pesquisas elaboradas nas primeiras décadas do surgimento da Modelagem no Brasil e que se perpetuam até a atualidade.

Para a delimitação do material empírico, num primeiro momento, foram investigadas as pesquisas contidas na dissertação de Silveira (2007)[11], que apresenta um mapeamento desses trabalhos sobre Modelagem produzidos no Brasil de 1976 até 2005.

Do total de dissertações e teses mapeadas por Silveira (2007), apenas não foram encontradas as dissertações de Alci Ribas Rebonato (1999) e Afrânio Austregésilo (2000), ambos da Universidade Santa Úrsula (USU) - RJ.[12] Com exceção desses dois trabalhos, foi possível adquirir sessenta e dois (62) trabalhos, sendo catorze (14) obtidos com o próprio pesquisador Everaldo Silveira, trinta e dois (32) com as pesquisadoras Betina Cambi[13] e Bruna Zution Dalle Prane[14], e sete (7) com a pesquisadora Maria Rosana Soares[15]. Para a aquisição de nove (9) trabalhos que faltaram, foi necessário contactar, via *e-mail,* a Biblioteca da Universidade Estadual do Centro-Oeste (UNICENTRO), Paraná, a Biblioteca da Universidade Regional de Blumenau (FURB), Santa Catarina e os próprios autores dos trabalhos. A UNICENTRO disponibilizou os trabalhos na íntegra e a FURB apenas o resumo e os capítulos sobre Modelagem. Assim, a partir de Silveira (2007), foram levantadas praticamente todas as pesquisas brasileiras que versam sobre Modelagem do período de 1976 até 2005.

---

[11] Everaldo Silveira é doutor em Educação Científica e Tecnológica pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) e docente do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da UFSC.
[12] O *e-mail* destes autores não foi localizado e, apesar da biblioteca da USU ter sido contatada, foi informado que as suas pesquisas não se encontram em seu acervo.
[13] Doutora em Educação pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) e docente da Educação Básica.
[14] Doutora em Educação pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) e docente do Instituto Federal do Espírito Santo (IFES).
[15] Doutora em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP) e pedagoga da Secretaria de Estado da Educação do Paraná (SEED/PR).

Para dar sequência à busca pelos dados que iriam compor o material empírico, num segundo momento, as fontes para a busca desse material foram modificadas, mas preservou-se o tipo de material (dissertações e teses brasileiras).

Para o período de 2006 a 2022 foi necessário delimitar o material empírico, então foi aplicada a "revisão sistemática da literatura com meta-síntese"[16], devido ao seu rigor metodológico e objetividade para filtrar o material empírico e porque possibilita sintetizar pesquisas sobre um determinado assunto.

Com base em Galvão e Ricarte (2019), seguem as etapas da revisão sistemática da literatura com meta-síntese:

1. Delimitação da pergunta de revisão: a pergunta de revisão guia a busca dos materiais nas bases de dados e sua elaboração é com base na "sigla PICO, onde p é população ou problema, i é intervenção, c é comparação e o é *outcome*/resultado" (GALVÃO; RICARTE, 2019, p. 63). Para elaborá-la, foi necessário, inclusive, voltar-se para um dos objetivos específicos da presente pesquisa e os elementos considerados foram i (intervenção) e p (problema), em que, i = modelo e modelagem; e p = como é usada na Educação Matemática, resultando em: *Como as expressões linguísticas modelo matemático e modelagem matemática são usadas na Educação Matemática?*;

2. Seleção das bases de dados: a base de dados foi o *site* do Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), devido a ser um dos principais repositórios de pesquisas brasileiras em nível de pós-graduação e "é o sistema *online* oficial do governo brasileiro [...] para depósito de teses e dissertações brasileiras, vinculado ao Ministério da Educação - MEC" (CASSOTTA *et al.,* 2017, p. 24);

3. Elaboração da estratégia de busca: foi considerado apenas um idioma, Português (Brasil), e ao atentar para a pergunta de revisão, foram elencadas potenciais palavras e expressões linguísticas que, combinadas com operadores booleanos[17], possibilitaram formular a expressão de busca.

Para a elaboração dessa estratégia, também partiu-se do pressuposto que as eventuais imagens que se formam dos usos das expressões linguísticas "modelagem matemática" e "modelo matemático" estariam atreladas a uma concepção referencial da linguagem cujos significados matemáticos estariam localizados *a priori* em alguma realidade matemática.

---

[16] "Meta-síntese" se refere a uma dentre as classificações deste tipo de pesquisa. Alguns autores também utilizam o termo meta-análise (GALVÃO; RICARTE, 2019).

[17] "AND equivale à intersecção, OR equivale à união e AND NOT equivale à exclusão" (GALVÃO; RICARTE, 2019, p. 67).

Em consequência, considerou-se a possibilidade de que os usos dessas expressões linguísticas estivessem inscritos em abordagens teóricas cognitivistas, à ideia de contextualização que daria sentido à Matemática ou a procedimentos metodológicos empregados em aulas das Ciências da Natureza, que conduziriam os estudantes a descobertas matemáticas, indicando uma realidade matemática mental ou empírica.

Além disso, como se propõe empreender a terapia, então também pensou-se em considerar outros usos das expressões "modelagem matemática" e "modelo matemático", tendo em vista atentar para nuances dessemelhantes num mesmo jogo de linguagem, a saber, o jogo de linguagem da Modelagem. Por isso, também buscou-se por pesquisas de Modelagem realizadas sob outra perspectiva teórico-filosófica, que mencionam os jogos de linguagem.

Tendo em conta o que poderia estar entrelaçado com a construção de imagens nos usos dessas expressões linguísticas, então delimitou-se a expressão de busca, alinhada com a pergunta de revisão:

Pesquisa 1: ("Modelagem Matemática" AND "Educação Matemática");

Pesquisa 2: (("descoberta" OR "descobrir") OR ("construção" OR "construir") OR ("dar significado à Matemática" OR "dar sentido à Matemática") OR ("jogos de linguagem"));

Pesquisa 3: Pesquisa 1 AND *Pesquisa 2*, que resulta em: (("Modelagem Matemática" AND "Educação Matemática") OR ("descoberta" OR "descobrir") OR ("construção" OR "construir") OR ("dar significado à Matemática" OR "dar sentido à Matemática") OR ("jogos de linguagem")).

A expressão de busca da *Pesquisa 3* foi empregada para buscar dados no *site* do Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES;

4. Seleção e sistematização: para selecionar as dissertações e teses, considerou-se a leitura dos títulos, resumos e uma primeira leitura dos capítulos que versam sobre a Modelagem, as práticas pedagógicas desenvolvidas e os resultados e discussões.

A busca foi realizada no *site* do Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, foram selecionadas pesquisas de Doutorado, Mestrado, Mestrado Profissional e Profissionalizante no idioma Português (Brasil), resultando num total de 490 dissertações e teses (registros). Subsequentemente, foram aplicados critérios de inclusão e exclusão que se encontram no próprio *site* do Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES (ano, grande área do conhecimento, área do conhecimento, área de avaliação, área de concentração, nome do programa de pós-graduação) para o refinamento da busca. A aplicação desses critérios resultou em 436 registros[18].

A leitura dos títulos permitiu excluir 173 registros restando 263. Na leitura dos resumos foram consideradas as pesquisas que apresentam alguma expressão linguística[19] relacionada à expressão de busca, possibilitando a exclusão de 207 registros. Ao final, restaram 56 dissertações e teses (Quadro 1).

Quadro 1 - Critérios de inclusão e exclusão para o refinamento da busca

Item	Descrição	Tipo de critério aplicado	Quantidade de registros
Ano	2006 a 2022	Inclusão	461
Grande área do conhecimento	Linguística, Letras e Artes	Exclusão	460
Área do conhecimento	Ciências Ambientais, Engenharia/Tecnologia/Gestão	Exclusão	456
Área de avaliação	Educação, Ensino, Ensino de Ciências e Matemática, Matemática/Probabilidade e Estatística	Inclusão	456
Área de concentração	Ensino das Ciências na Educação Básica, Ensino de Ciências, Educação Profissional e Tecnológica - EPT, Ensino na Educação Brasileira, Pensamento Educacional Brasileiro e Formação de Professores, Projetos Educacionais de Ciências, Sociedade Estado e Educação, Área 2 - Formação de Professores e Políticas Públicas	Exclusão	441
Programa	Educação Agrícola, Ensino de Ciência e Tecnologia, Ensino de Ciências	Exclusão	436
Título do registro	Leitura do título do registro	Exclusão (173 registros)	263
Resumo do registro	Leitura do resumo do registro	Exclusão (207 registros)	**56**

Fonte: Autoria própria (2022).

5. Revisão sistemática de literatura: resulta no conjunto de dissertações e teses do período de 2006 a 2022.

Do resultado da revisão sistemática de literatura, cinquenta e seis (56) dissertações e teses, (2006-2022) ainda foi realizada uma leitura dos capítulos do referencial teórico, de práticas de Modelagem, dos resultados e considerações finais com o propósito de averiguar quais pesquisas seriam pertinentes para a composição do material empírico. O mesmo procedimento também foi aplicado para as sessenta e duas (62) pesquisas do período de 1976 a 2005.

[18] Dentre os 436 registros localizados no *site* da CAPES havia aqueles em que constava a seguinte informação: "Trabalho anterior à Plataforma Sucupira". Por esse motivo, após a leitura do título e resumo, caso o trabalho fosse selecionado para compor o material empírico desta pesquisa, então foi realizada a busca do texto completo da tese ou dissertação na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), "um mecanismo de busca que integra todas as Bibliotecas Digitais de Teses e Dissertações das universidades brasileiras que utilizam o sistema BDTD" (CASSOTTA *et al.,* 2017, p. 23) ou no repositório da universidade que a pesquisa foi elaborada.

[19] Foram consideradas expressões como: "construção do conhecimento", "diferentes significados dos conceitos matemáticos", "construção de significados", "(re)descobrir entendimentos de Matemática", "atribuir significado à Matemática", "jogo de linguagem", por exemplo.

Ao longo destas leituras, procurou-se atentar para os usos das expressões linguísticas "modelagem matemática" e "modelo matemático", visando identificar o que é descrito, ou seja, o que aparece dos usos dessas expressões e cujas interpretações podem incorrer em imagens. Como resultado, o material empírico foi composto por uma seleção de quarenta e sete (47) dissertações e teses brasileiras pertencentes ao período de 1976 a 2022 (Apêndice A).

2 ASPECTOS METODOLÓGICOS, HISTÓRICOS E EPISTEMOLÓGICOS DA MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo são discutidos aspectos metodológicos, históricos e epistemológicos que fazem parte da Modelagem no campo da Educação Matemática.

Inicialmente, é explicitado a respeito da Modelagem na Matemática Aplicada e que a Modelagem na Educação Matemática é originária da Modelagem na Matemática Aplicada. Nesta mesma seção, também são apresentadas abordagens distintas relacionadas a Modelagem na Educação Matemática e algumas dentre as diferentes maneiras de concebê-la e denominá-la.

Na segunda seção, são descritos aspectos da Modelagem em âmbito internacional e apresentados traços da Educação Matemática brasileira no período em que a Modelagem começa a ser disseminada no país.

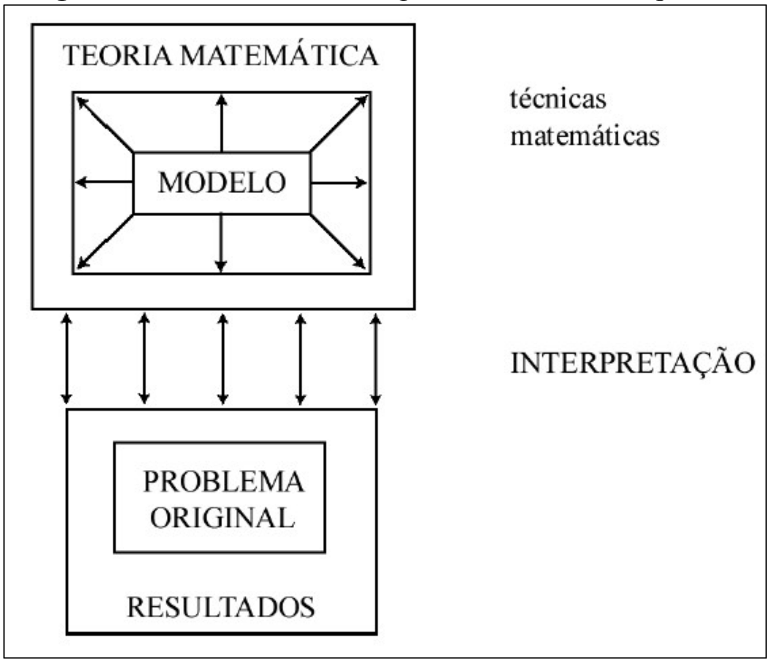
Por fim, são tecidas discussões sobre os aspectos históricos da Modelagem, os principais pioneiros que atuaram para sua expansão no Brasil, a sua disseminação nas pesquisas brasileiras, o entrelaçamento da Modelagem com diversas abordagens teóricas e a sua inserção em documentos que norteiam a Educação Básica no país.

2.1 A Modelagem Matemática na Matemática Aplicada e na Educação Matemática

A palavra "modelagem" reproduz na imaginação o trabalho de um escultor que, ao observar um objeto, molda a argila com a intenção de reproduzi-lo (BIEMBENGUT, 1990). Essa analogia mostra que a palavra "modelagem" está relacionada ao ato de dar forma a algo, nesse caso, a um objeto que está sendo reproduzido e que pode ser concebido como um modelo, uma representação ou interpretação do objeto observado pelo escultor. Essa ideia de "modelagem", concernente à "reprodução", "dar forma a algo", "interpretação" ou "representação", por exemplo, está presente tanto no contexto da Matemática Aplicada quanto na Educação Matemática.

Na Matemática Aplicada, o processo de Modelagem considera o problema original da realidade (Figura 1) e um movimento – processo de intermediação – que tem como ponto de partida a teoria matemática, na qual são criados os modelos matemáticos, tendo em vista a resolução do problema original (situação-problema da realidade), que no que lhe concerne, permite interpretar o modelo e ajustá-lo, se necessário (BASSANEZI, 1994).

Figura 1 - Processo de Modelagem na Matemática Aplicada



Fonte: Bassanezi (1994, p. 25).

A elaboração e estudo dos modelos matemáticos associados às situações-problemas permitem a análise da realidade empírica e do próprio modelo, concebido como "um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto [da realidade] estudado" (BASSANEZI, 1994, p. 20).

Ainda consoante ao autor, no contexto da Modelagem na Matemática Aplicada, espera-se que o modelo matemático seja desenvolvido com base em uma teoria matemática amplamente estudada, entretanto, há a possibilidade de que a teoria matemática adequada para a elaboração do modelo matemático ainda não exista, o que vai exigir do matemático desenvolver essa teoria. Ou, ainda, apesar da obtenção de um modelo matemático, as técnicas e métodos matemáticos que possibilitaram a construção desse modelo podem ser insuficientes para os resultados desejados, o que vai demandar do matemático desenvolver os métodos matemáticos necessários para reelaborar o modelo.

No que tange à Modelagem na Educação Matemática, seus procedimentos são oriundos da Matemática Aplicada, "no interior da qual surgiram os primeiros conceitos e procedimentos em relação ao que caracteriza uma atividade de Modelagem Matemática" (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 12). A partir disso, a Modelagem na Educação Matemática foi e vem se materializando, tendo como ponto de partida "temas do mundo social e físico, através de reflexões, valorizando todo o processo envolvido. A Modelagem na Educação Matemática tem objetivos, dinâmica de trabalho e discussões diferentes dos matemáticos profissionais" (DELLA NINA, 2005, p. 30).

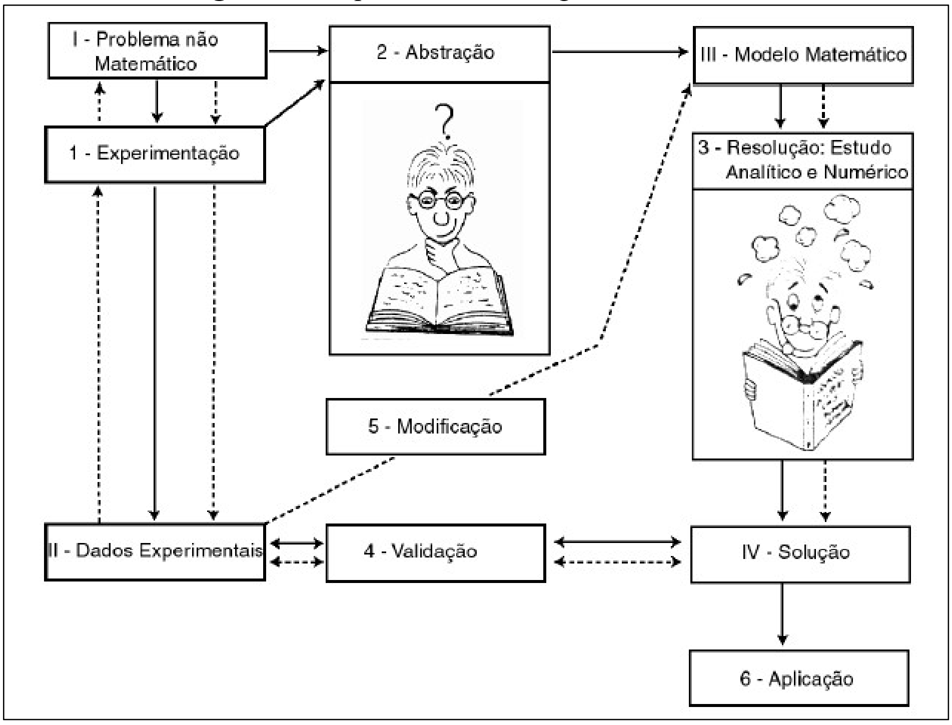
Mediante o exposto, ao considerar a Modelagem, em sentido amplo, há dois grandes grupos: o grupo dos matemáticos que concebem a Modelagem como um método de trabalho; e os educadores matemáticos que veem a Modelagem como um caminho para o ensino e a aprendizagem da Matemática, de modo que, partindo da realidade empírica, objetiva-se buscar situações-problemas que orientarão a construção de possíveis modelos matemáticos (ARAÚJO, 2002).

Bassanezi (1994) disserta que a utilização da Modelagem nas escolas, ou seja, a Modelagem do ponto de vista pedagógico, possibilita um ensino de Matemática com aulas distintas das que apresentam o esquema "enunciado→demonstração→aplicação" (BASSANEZI, 1994, p. 36), em que, num primeiro momento, é apresentado ao estudante o teorema matemático, sua demonstração e, depois, as aplicações desse teorema. Enquanto a gênese desse tipo de aula é o teorema matemático e, somente num momento posterior ocorrem as aplicações matemáticas, em uma aula por Modelagem, "o que poderia ser feito é sua construção na ordem inversa (a mesma que deu origem ao teorema)" (BASSANEZI, 1994, p. 36).

Desse modo, o princípio de uma aula por Modelagem é externo à Matemática, são formuladas e validadas hipóteses, novos questionamentos e, ao final da sua utilização, chega-se a uma ou várias soluções. Assim, há uma inversão nas etapas de uma aula de Matemática quando a Modelagem é empregada, pois o ponto de partida é o mundo empírico, intencionando se chegar a um enunciado matemático condizente a um modelo matemático.

Nesta passagem de Bassanezi (1994, p. 36) são apresentadas algumas etapas (ou fases) que constituem a Modelagem na Educação Matemática: "a formulação de hipóteses, a validação de hipóteses e novos questionamentos". Essas etapas são manuseadas na Modelagem na Educação Matemática, mas têm origem nas etapas da Matemática Aplicada: 1) Experimentação: ocorre a obtenção de dados; 2) Abstração: a. Seleção de variáveis, b. Formulação de problemas, c. Formulação de hipóteses, d. Simplificação: se necessário, voltar ao problema original e simplificá-lo, a fim de obter um problema matemático tratável; 3) Resolução: obtenção do modelo matemático ao substituir a linguagem natural das hipóteses pela linguagem matemática; 4) Validação: as hipóteses e o modelo são confrontados com dados empíricos, tendo em vista a aceitação ou não do modelo; e 5) Modificação: etapa em que ocorre a reformulação do modelo, se necessário (Figura 2).

Figura 2 - Esquema de Modelagem de Bassanezi

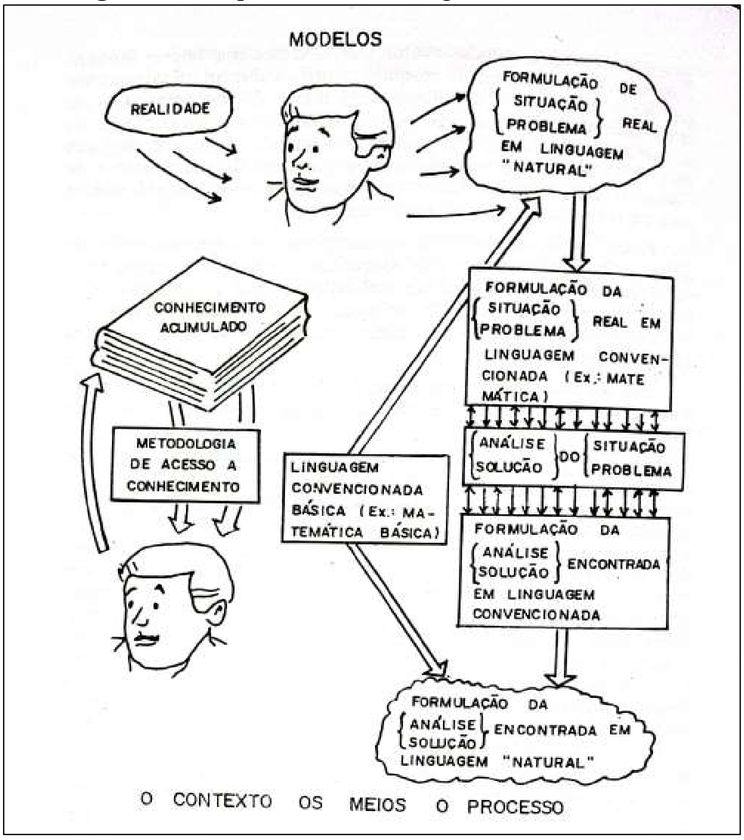


Fonte: Bassanezi (1994, p. 27).

Além de Bassanezi, outros pesquisadores da Modelagem na Educação Matemática propuseram modos para usufruí-la na prática pedagógica. Sob a ótica de Biembengut (1990, p. 18), a concepção de Modelagem de D'Ambrosio “constitui uma das mais fortes defesas da validade do processo de Modelagem Matemática no ensino”. Para D'Ambrosio, a Modelagem é tida como “o processo mediante o qual se definem estratégias de ação” (D'AMBROSIO, 1986, p. 65), de modo que a Modelagem é vista como uma estratégia adequada para capacitar o estudante a analisar a realidade empírica e a agir sobre ela.

Na concepção de Modelagem de D'Ambrosio (Figura 3), os conhecimentos acumulados são quanto aos conhecimentos científico, filosófico, tecnológico, dentre outros conhecimentos da humanidade, que passam por transformações devido à pesquisa científica e a metodologia de acesso aos conhecimentos é concernente ao método científico presente no processo de Modelagem que poderá oportunizar aos estudantes a aquisição de novos conhecimentos.

Figura 3 - Esquema de Modelagem de D'Ambrosio



Fonte: D'Ambrosio (1986, p. 66).

Além disso, o autor menciona que, no processo de Modelagem, inicialmente faz-se a tradução da situação real num problema em uma linguagem convencionada, ou seja, a linguagem matemática. Na análise da situação são levantadas hipóteses, implicando a simplificação da situação-problema. À medida que as hipóteses são fixadas e que outras são acrescentadas, o modelo matemático vai sendo formulado. Ao final, o modelo encontrado é validado.

Com o passar do tempo, pesquisadores da Educação Matemática efetuaram ajustes nas etapas da Modelagem da Matemática Aplicada para operá-la na Educação Matemática. Dionísio Burak[20], por exemplo, no final da década de 1980, ainda sob inspiração de referenciais teóricos da Matemática Aplicada, apresenta a Modelagem para o ensino de Matemática na Educação Básica como uma alternativa constituída por etapas fundamentadas em preceitos positivistas da Ciência Moderna, "a modelagem matemática era apenas uma transposição da modelagem utilizada por pesquisadores nas ciências naturais, a qual tinha poucos vínculos com as ciências

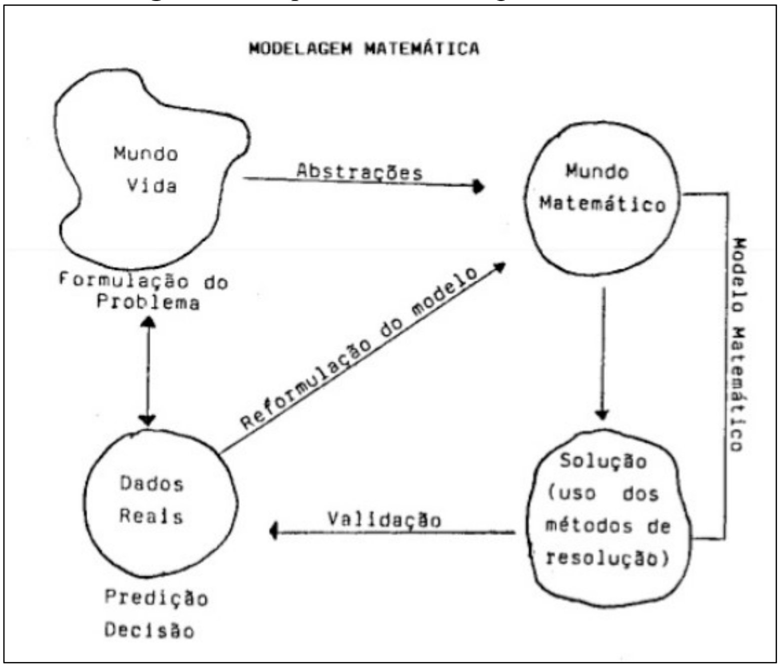
[20] Doutor em Educação pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) e docente do Programa de Pós-Graduação em Ciências Naturais e Matemática da Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG-PR).

humanas” (BURAK, 1987; KLÜBER; BURAK, 2008, p. 20).

Ele esclarece que a Modelagem na Educação Matemática parte “do mundo-vida”, em busca de uma situação-problema plausível de ser investigada através da construção de um modelo matemático, “A Modelagem Matemática na prática tem início com um questionamento ou situação-problema do mundo-vida, isto é, o mundo onde vivemos” (BURAK, 1987, p. 37).

No esquema de Modelagem que ele propõe (Figura 4), a partir do delineamento da situação-problema, então ocorre o processo de abstração, por meio do qual busca-se traduzir a situação-problema para a linguagem matemática. Ao relacionar as variáveis matemáticas da situação em estudo, obtém-se o modelo matemático que é resolvido, validado sob critérios da situação-problema e, se necessário, reformulado (BURAK, 1987).

Figura 4 - Esquema de Modelagem de Burak



Fonte: Burak (1987, p. 38).

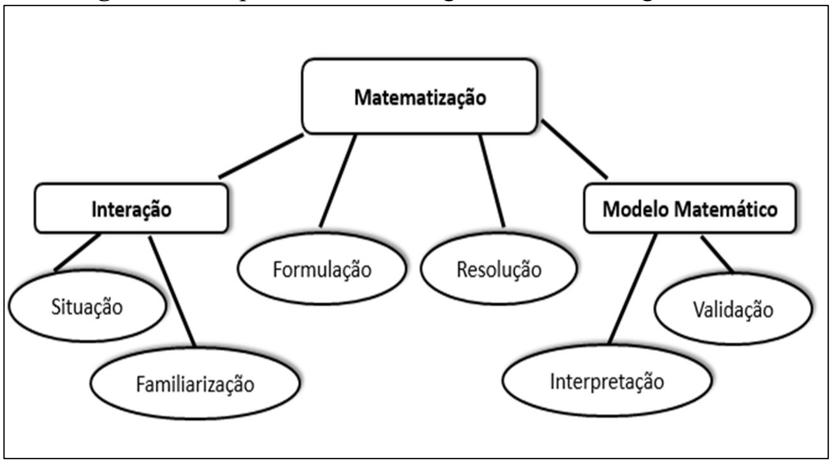
Apesar de Burak considerar que a sua concepção de Modelagem do final da década de 1980 ainda estava pouco vinculado às Ciências Humanas, assim como outros pesquisadores da Modelagem na Educação Matemática, ele intenciona mostrar que o trabalho com Modelagem no âmbito pedagógico se distingue da Modelagem na Matemática Aplicada.

Assim, na década seguinte, Burak modifica estas etapas ao acrescentar dois princípios em sua concepção de Modelagem: um deles evidencia a importância do professor considerar o interesse dos estudantes e o outro é quanto ao envolvimento deles na busca pelos dados no ambiente. Ocorre um avanço teórico na concepção de Modelagem de Burak que se aproxima de um ensino de Matemática por construção e contextualização[21] em decorrência de influências teóricas de Jean Piaget, Lev Vygotsky e David Ausubel (KLÜBER; BURAK, 2008).

Com esses avanços, em trabalhos posteriores, Burak descreve a Modelagem em cinco etapas: 1) escolha do tema: momento em que o professor apresenta temas de pesquisa para os estudantes ou eles mesmos fazem sugestões; 2) pesquisa exploratória: busca de informações sobre o tema escolhido; 3) levantamento dos problemas: elaboração de problemas pelos estudantes, tendo em vista a aplicação ou a aprendizagem de conteúdos matemáticos; 4) resolução dos problemas e o desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema: resolução dos problemas com o auxílio de conteúdos matemáticos que podem ser sistematizados posteriormente; e 5) análise crítica das soluções: verificação quanto à viabilidade e adequação das soluções encontradas (KLÜBER; BURAK, 2008).

Outros autores, tais como Biembengut e Hein (2007), apresentam o processo de Modelagem constituído por um conjunto que envolve as seguintes etapas: 1) Interação: momento em que há o reconhecimento da situação-problema e familiarização com o assunto em investigação; 2) Matematização: são definidas hipóteses e o problema é expresso em linguagem matemática, isso é, sob forma de um modelo matemático; e 3) Modelo matemático: o modelo é avaliado quanto a sua adequabilidade à situação-problema. Caso não atenda às necessidades que o geraram, então é corrigido (Figura 5).

Figura 5 - Esquema de Modelagem de Biembengut e Hein



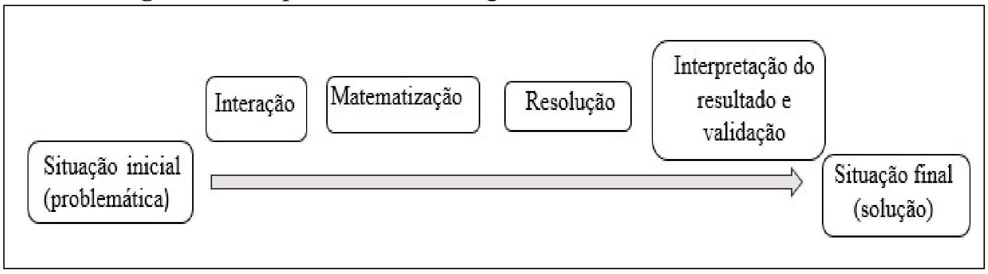
Fonte: Adaptado de Biembengut e Hein (2007).

Semelhantemente, Almeida, Silva e Vertuan (2012) apresentam a Modelagem constituída a partir de uma situação-problema inicial que envolve as seguintes etapas: 1)

[21] A contextualização é entendida por Klüber (2016, p. 48) como "uma postura e uma oportunidade de busca do significado daquilo que se aprende e se faz" com referência na realidade. Para o autor, a contextualização dá significado aos conteúdos matemáticos.

Interação: o estudante passa a ter contato com a situação-problema da realidade, coleta dados, formula o problema e define metas para sua resolução; 2) Matematização: a situação-problema é transposta da linguagem natural para a linguagem matemática; 3) Resolução: o modelo matemático é construído para descrever a situação-problema; e 4) Interpretação de resultados e validação: analisar a resposta para o problema (Figura 6).

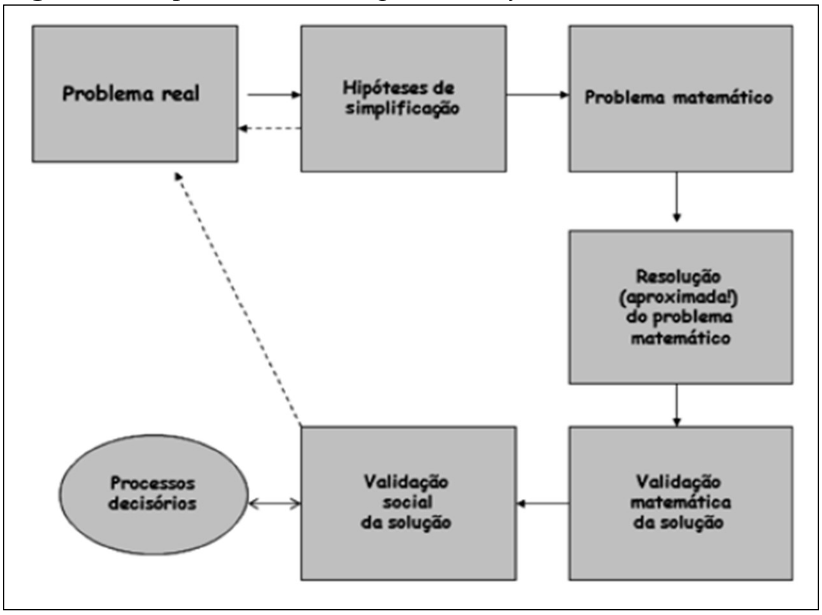
Figura 6 - Esquema de Modelagem de Almeida, Silva e Vertuan



Fonte: Adaptado de Almeida, Silva e Vertuan (2012).

Além desses autores, Meyer, Caldeira e Malheiros (2019, p. 28) explicitam como etapas para a Modelagem: “1) determinar a situação; 2) simplificar as hipóteses dessa situação; 3) resolver o problema matemático decorrente; 4) validar as situações matemáticas de acordo com a situação real e, finalmente, 5) definir a tomada de decisão com base nos resultados”. Eles apresentam o esquema do processo de Modelagem que segue como um exemplo dentre os vários que descrevem esse processo (Figura 7).

Figura 7 - Esquema de Modelagem de Meyer, Caldeira e Malheiros[22]



Fonte: Meyer, Caldeira e Malheiros (2019, p. 41).

[22] Esquema adaptado pelos autores de BURGHES, D. N.; BORRIE, M. S. **Modelling with Differential Equations.** Elis Horwood, 1981.

Esses autores discorrem que, no tocante à definição da situação-problema (etapa inicial), importa para o trabalho com Modelagem considerar uma situação-problema do interesse dos estudantes ou do cotidiano deles, "O primeiro passo a ser dado para se trabalhar com Modelagem é reconhecer a existência de um problema real, no sentido de ser significativo para os alunos e suas comunidades. Por exemplo: a forma da compra de um eletrodoméstico" (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2019, p. 26-27).

Todavia, outros autores, como Pierce e Stacey (2006), explicitam que o professor também pode escolher o tema ou situação-problema da realidade para desenvolver uma aula por Modelagem, sendo que, ao selecionar um problema real, sua escolha pode estar relacionada ao alinhamento entre o conteúdo matemático que ele deseja ensinar e a situação-problema, com a melhoria das atitudes dos estudantes frente à Matemática ou para mostrar aos estudantes a relevância da situação investigada.

Na etapa seguinte da Modelagem, consoante Meyer, Caldeira e Malheiros (2019), são levantadas hipóteses que simplificam o problema. Essa simplificação pode ser feita para facilitar a resolução matemática ou para ajustar o problema no nível dos estudantes. Com isso, o problema pode ser traduzido para a linguagem matemática e resolvido.

> Por exemplo, perto da escola passa um rio, como é que podemos avaliar a sua poluição? É uma fábrica ou são os habitantes do bairro que o poluem? Conforme a chuva ou a seca, como varia a vazão desse rio? Numa primeira aproximação, por exemplo, pode-se considerar a vazão do rio e a quantidade de resíduos tóxicos como uma constante por período de tempo, como fazem as agências de vigilância ambiental (MEYER, CALDEIRA, MALHEIROS, 2019, p. 28).

Ao final, o modelo matemático obtido por meio da resolução do problema necessita ser validado e poderá contribuir como um instrumento para o estudante avaliar e tomar decisões quanto aos aspectos qualitativos e quantitativos da situação-problema inicial.

Para além dos modos de se "fazer" Modelagem no âmbito pedagógico, houve modificações quanto à maneira de compreendê-la na Educação Matemática: como uma metodologia, um ambiente de aprendizagem ou como uma concepção de educar matematicamente (MEYER, CALDEIRA, MALHEIROS, 2011), porém "a essência do processo [Modelagem]: a construção de modelos e a sistematização dos conceitos" (JACOBINI, 1999, p. 44), permanece.

Dentre essas concepções de Modelagem, há aquelas que acabaram se destacando, consolidando e se perpetuando em muitos outros trabalhos com a Modelagem como objeto de estudo. Na sequência, são mencionadas algumas delas:

> A *modelagem matemática* consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real (BASSANEZI, 1994, p. 16, grifo do autor).

> A Modelagem Matemática constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões (BURAK, 1992, p. 62).
>
> [...] **matemática** e **realidade** são dois conjuntos disjuntos e a **Modelagem** é um meio de integrá-los (BIEMBENGUT, 1997, p. 66, grifo da autora).
>
> Modelagem é **um ambiente de aprendizagem** no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade (BARBOSA, 2001, p. 31, grifo nosso).
>
> Modelagem Matemática como uma *concepção de educação matemática* (CALDEIRA, 2009, p. 33, grifo do autor).
>
> [...] uma **atividade de Modelagem Matemática** pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final (ALMEIDA *et al.*, 2012, p. 12, grifo nosso).

Em suma, contrariamente a um ensino de Matemática que parte da teoria para a aplicação, com a Modelagem na Educação Matemática, o ensino parte de uma situação-problema do mundo empírico, intencionando descrevê-la matematicamente. Com base na situação-problema investigada, enseja-se chegar à sua teorização.

Esse processo é orientado por algumas etapas que foram sendo ajustadas por pesquisadores dessa área. Outrossim, outras modificações ocorreram, no que se refere ao modo como os estudiosos denominam e concebem a Modelagem, as quais são fundamentadas em acepções teóricas educacionais e filosóficas distintas.

2.2 A Modelagem na Educação Matemática: breve descrição do cenário internacional e brasileiro

As discussões sobre uma transposição da Modelagem Matemática no campo da Matemática Aplicada para o campo da Educação Matemática iniciam, em nível internacional, na década de 1960 com o Movimento Utilitarista que sustenta a aplicação prática da Matemática para o desenvolvimento da Ciência e da sociedade. Essas discussões impulsionaram a formação de grupos de estudos sobre o tema e a realização de eventos internacionais, dentre eles o *Lausanne Symposium*, que ocorreu em 1968, na Suíça, para discutir sobre como ensinar Matemática de modo que ela seja útil – como utilizar os conhecimentos teóricos da Matemática em situações práticas (FREUDENTHAL, 1968) –, tendo em vista a utilização de situações do cotidiano do aluno que contribuam para desenvolver nele a habilidade para matematizar e modelar.

Com base na ideia de um ensino de Matemática que focalize a utilidade da Matemática, grupos de estudos se consolidaram na Europa, tal como o grupo liderado pelo matemático Hans Freudenthal na Holanda e o grupo coordenado por Bernhelm Booss e Mogens Niss na Dinamarca, que acabaram favorecendo a realização de congressos para discutir essa temática, tal como o congresso sediado na cidade de Roskilde, na Dinamarca, em 1978, cujo tema foi "Matemática e Realidade", e que, por sua vez, contribuiu para a consolidação do Grupo Internacional de Modelagem Matemática e Aplicações – ICTMA em 1983 (BIEMBENGUT, 2009).

Essas discussões foram se expandindo porque a Matemática era considerada indispensável para a compreensão e o controle tecnológico no mundo físico e na estrutura social. Assim, não seria mais possível se calar quanto à defesa de um ensino de Matemática que intencionasse as suas aplicações (FREUDENTHAL, 1968).

Barbosa (2001) também aponta que as aplicações matemáticas ganharam destaque devido ao surgimento do computador e a Modelagem na Matemática Aplicada passou a ser associada ao desenvolvimento econômico-tecnológico, o que levou muitas instituições a reformularem seus cursos de Matemática Aplicada, com vistas para a incorporação de novos métodos matemáticos. Além disso, na década de 1960, um ensino de Matemática voltado para a construção de modelos matemáticos estava sendo experienciado, inclusive em cursos de formação para professores em muitos países (Inglaterra, Áustria, China, por exemplo) (BURAK, 1987).

A ideia da utilidade da Matemática no seu ensino também esteve presente quando a Modelagem surgiu no Brasil, pois se considerava que uma compreensão do estudante quanto à utilidade da Matemática poderia levá-lo a usá-la em contextos extraescolares e o qualificaria para o mercado de trabalho (MAGNUS, 2018). Havia uma preocupação por parte dos pesquisadores da Modelagem e professores de Matemática em levar o estudante a perceber que a Matemática é útil para explicar ou organizar situações da realidade, "Nos tempos atuais, um número cada vez maior de atividades profissionais exige conhecimentos matemáticos. Precisamos evidenciar esse fato aos nossos estudantes" (GAERTNER, 1994, p. 57).

Sendo assim, é em oposição a um ensino centrado em algoritmos e dissociado de qualquer aplicação no mundo real que pesquisadores brasileiros e estrangeiros se voltaram para a busca de diferentes meios para efetivar mudanças na Educação Matemática, e uma das alternativas foi, e tem sido, investigar modos para inserir a Modelagem de maneira regular nas aulas de Matemática (STILLMAN, 2019).

No Brasil, enquanto coexistiam tendências distintas[23] da Educação Matemática, é no contexto da tendência Empírico-Ativista[24] – inspirada pela pedagogia pragmática[25], do norte-americano John Dewey, e que tem Euclides Roxo[26] como um de seus principais representantes –, no período de 1970 e 1980, que foram desenvolvidos projetos por universidades e experiências de ensino por meio da Modelagem em Centros de Ensino de Ciências de diversos estados brasileiros.

Nesse cenário, os professores Ubiratan D'Ambrosio[27], Aristides Camargos Barreto[28] e Rodney Carlos Bassanezi[29] se destacam dentre os precursores[30] da Modelagem. Na década de 1960, D'Ambrosio estava atuando como professor e pesquisador em universidades norte-americanas e conheceu o *Undergraduate Mathematics Application Program – UMAP* cujo objetivo era preparar módulos, que se aproximavam dos modelos matemáticos, tendo em vista a melhoria da aprendizagem no Ensino Superior. Em acordo com o UMAP, a partir da escolha de um tema matemático preparava-se um material didático com aplicações desse tema nas diversas áreas do conhecimento. Em 1972 ele retornou para o Brasil, atuou na UNICAMP, implantou propostas de ensino de Matemática que estavam ocorrendo nos Estados Unidos e na Europa, e teve contato com o professor Barreto[31].

O professor Barreto conheceu a Modelagem na Matemática Aplicada quando cursou Engenharia, na década de 1960. Na metade dos anos de 1970, quando atuava como professor

---

[23] Dentre elas, citam-se as tendências Formalistas Clássica e Moderna prezam pelo uso rigoroso da linguagem matemática, a reprodução e memorização dos conhecimentos matemáticos, e as tendências Tecnicistas valorizam o treino de habilidades técnicas e exercícios do tipo “siga o modelo” (FIORENTINI, 1995).
[24] Essa tendência considera o estudante como sujeito ativo no centro da aprendizagem, o professor como mediador e é sugerida a elaboração do currículo a partir dos interesses dos estudantes (FIORENTINI, 1995).
[25] O pragmatismo norte-americano foi criado pelos pensadores Charles S. Peirce e William James, no final do século XIX. Trata-se de um método originalmente aplicado por Pierce somente a um universo discursivo. Posteriormente, James ampliou o escopo para aplicação do método na determinação do significado de problemas e questões filosóficas. James objetivava saber se uma determinada questão filosófica teria significado autêntico e vital ou se seria uma questão trivial e verbal (DEWEY, 2007).
[26] Euclides Roxo foi professor de Matemática no Colégio Pedro II - RJ. Ele se destaca na história da Educação Matemática devido às suas contribuições para reformas nos programas de Matemática implantados nesse colégio no final da década de 1920 (MIORIM, 1998).
[27] Doutor em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP). Atuou como docente credenciado em Programas de Pós-Graduação da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), da Faculdade de Educação da USP e da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP-Rio Claro).
[28] Doutor em Matemática Pura pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA).
[29] Doutor em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) e docente do Programa de Pós-Graduação do Centro de Matemática, Computação e Cognição da Universidade Federal do ABC (UFABC/SP).
[30] Os professores Eduardo Sebastiani Ferreira, João Frederico Mayer e Marineusa Gazzetta também desempenharam um papel muito importante para o avanço da Modelagem no país (BIEMBENGUT, 2009).
[31] Esta informação estava disponível no site no *site* do Centro de Referência de Modelagem Matemática no Ensino (CREMM), https://www.furb.br/cremm/portugues/cremm.php?secao=Precursores.

na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro - PUC/RJ, realizou as primeiras experiências com Modelagem na Educação Matemática e orientou as primeiras dissertações sobre esse tema na PUC (RJ). Nessas dissertações a expressão "Modelagem Matemática" ainda não havia sido utilizada, os pesquisadores usam a expressão "modelo matemático" (WILMER, 1976; SÁNCHEZ, 1979).

Quanto à disseminação da Modelagem no país, o professor Bassanezi, que teve contato com os professores D'Ambrosio e Barreto, no período em que a Modelagem estava sendo experienciada no país, é considerado um dos seus maiores disseminadores, devido a sua atuação em cursos de formação continuada para professores e na coordenação de cursos de pós-graduação sobre Modelagem (BIEMBENGUT, 2009).

Com a expansão da Modelagem em âmbito nacional, decorrente da realização de cursos de formação continuada para professores e a oferta de cursos de Pós-Graduação *Lato Sensu* e *Stricto Sensu*, a expressão "Modelagem Matemática" passou a ser empregada na Educação Matemática brasileira. Porém, ela aparece pela primeira vez somente em 1986, na pesquisa de Maria Cândida Muller, orientada pelo professor Lafayette de Moraes no Programa de Pós-Graduação em Educação da UNICAMP (MULLER, 1986).

A dissertação de Wilmer (1976) defende a utilização de modelos matemáticos na Educação Matemática, pois considera que o ensino por modelos matemáticos estimula o conhecimento teórico matemático e sua aplicação. Sua pesquisa é fundamentada em aspectos das ideias de Pólya[32] e no construtivismo de Piaget. Por fim, sustenta que os mecanismos operatórios no nível conceitual são facilitados pelas ações no nível concreto e representações no nível gráfico, o que seria possível mediante a utilização de modelos matemáticos para a aprendizagem da Matemática.

A pesquisa de Sánchez (1976) explora o uso de módulos instrucionais combinados com o uso de modelos matemáticos interdisciplinares como uma alternativa frente às aulas expositivas da pedagogia tradicional. Uma das ideias teóricas que permeia sua dissertação é a de instrução educativa da pedagogia escolanovista, do alemão Johann Herbart[33].

Os trabalhos de Wilmer (1976) e Sánchez (1976) mostram as primeiras aproximações da ideia de modelo matemático da Matemática Aplicada com o campo da Educação

[32] O autor se fundamenta no livro *Mathematical Discovery: on understanding, learning and teaching problem solving*, do matemático húngaro George Pólya. O matemático apresenta um roteiro de resolução de problemas matemáticos em quatro etapas: compreensão do problema, construção de um plano de ação, execução do plano e revisão da solução.

[33] A instrução educativa defende os interesses dos estudantes relacionados com suas aprendizagens anteriores (HILGENHEGER, 2010).

Matemática. O método da Resolução de Problemas de Pólya, o construtivismo de Piaget e a pedagogia de Herbart, por exemplo, fundamentam a aplicação de modelos matemáticos para o ensino e a aprendizagem da Matemática. Além disso, essas dissertações explicitam o contexto Empírico-Ativista no qual a Modelagem se origina pelo fato de remeter a autores da Escola Nova[34].

Muller (1986), em sua dissertação, apresenta três concepções de modelo matemático inspiradas nos pesquisadores Barreto, D'Ambrosio e Jan de Lange, pois considera que essas três caracterizações de modelo trazem, implicitamente, o processo de Modelagem.

A autora também fundamenta suas ideias na concepção de Modelagem da Matemática Aplicada dos autores Daniel P. Maki e Maynard Thompson, por considerá-la minuciosa e porque essa concepção abrange as três caracterizações apresentadas sobre modelo matemático. O processo de Modelagem de Maki e Thompson é orientado pelas etapas: 1) Observação de uma situação real; 2) Seleção de aspectos relevantes para o objetivo da investigação; 3) Identificação de processos operativos para a codificação do problema na linguagem matemática; 4) Uso de técnicas específicas para a formulação matemática do problema. A observação da situação real é o ponto de partida, pois a partir da observação são extraídos os dados e identificados os objetos matemáticos possíveis para a obtenção de uma representação matemática, ou seja, um modelo matemático.

Ao considerar as primeiras pesquisas que versam sobre o emprego de modelos matemáticos no ensino de Matemática e sobre a Modelagem, conforme Wilmer (1976), Sánchez (1976) e Muller (1986), constata-se que a Modelagem no contexto da Educação Matemática começa a ser tecida do entrelaçamento entre a Matemática Aplicada, aspectos de teorias de cunho escolanovista e do construtivismo piagetiano.

Em pesquisas de Modelagem realizadas posteriormente, há indícios de que a incorporação da Modelagem na Educação Matemática não se limita a um ensino voltado para a utilidade da Matemática – foco de atenção dos pesquisadores e professores da década de 1960 – ou para a ampliação do conhecimento matemático dos estudantes. O ensino de Matemática mediante a utilização da Modelagem volta-se, inclusive, para os interesses e necessidades do meio social onde os estudantes pertencem, “não é apenas uma questão de ampliar o conhecimento em matemática, mas, sobretudo, de se estruturar a maneira de pensar e agir [...]

[34] O Movimento da Escola Nova reuniu teóricos de diferentes nacionalidades da Europa e dos Estados Unidos, é inspirado principalmente pelas ideias do pensador da educação Jean-Jacques Rousseau (século XVIII) e se volta para as necessidades da criança (GAUTHIER, 2010).

o ensino deve estar voltado para os interesses e necessidades práticas da comunidade" (BIEMBENGUT, 1990, p. 18).

Além disso, outras pesquisas sobre Modelagem mostram que os diferentes modos de concebê-la também estão relacionados com mudanças no ensino de Matemática ocorridas no país, marcadas fortemente pelo construtivismo (CAMBI, 2020).

> ***Percebemos forte ressonância discursiva do construtivismo no campo da Modelagem*** quando olhamos para a importância da ***construção do conhecimento*** matemático pelo aluno no processo de ensino, engendrando-se um discurso no qual alcança-se o conhecimento por meio da ação, da prática, da atividade – da construção; é processual (CAMBI, 2020, p. 150, grifo da autora).

Na década de 2000, Barbosa (2001) traz para a Modelagem aspectos da Educação Matemática Crítica (EMC)[35], que defende um ensino de Matemática que contribui para a superação das diferenças sociais. A EMC põe em xeque a "ideologia[36] da certeza matemática" que sustenta a visão da Matemática como um sistema perfeito, como uma ferramenta infalível que pode ser utilizada para o controle político (BORBA; SKOVSMOSE, 2001).

Respaldado pela EMC, Barbosa (2001) elabora uma concepção de Modelagem denominada sociocrítica, com possibilidade de abranger conhecimentos da Matemática, da Modelagem e o reflexivo, relacionado a interpretações dos modelos das situações-problemas e à orientação de como agir diante de uma situação matematizada. Assim, o objetivo é questionar aspectos da realidade por meio de métodos matemáticos, com vistas aos aspectos cultural e social da Matemática.

Nesse período, além de Barbosa (2001), outros pesquisadores desenvolveram suas pesquisas baseados na EMC. Dentre eles, Araújo (2002), por exemplo, desenvolve sua tese de doutorado amparada nessa acepção teórica. Sob seu ponto de vista, um trabalho com Modelagem, mais especificamente, um projeto de Modelagem, conforme orientação dos pressupostos teóricos da EMC, abarca a discussão de "questões políticas, econômicas, ambientais, nas quais a matemática serve como suporte tecnológico" (ARAÚJO, 2009, p. 55). Nesse sentido, segundo a autora, seria possível tecer uma crítica à própria Matemática, ao seu uso na sociedade e não haveria uma preocupação apenas com o desenvolvimento de habilidades em cálculos matemáticos.

---

[35] A EMC surge no Brasil a partir de 1980 com o professor dinamarquês Ole Skovsmose. Na abordagem crítica, o próprio conceito "crítica" está relacionado com a identificação, avaliação e uma reação frente aos problemas sociais; esse conceito "indica demanda sobre auto-reflexões, reflexões e reações" (SKOVSMOSE, 2001, p. 101).

[36] "concebemos uma ideologia como um sistema de crenças que tende a esconder, disfarçar ou filtrar uma série de questões ligadas a uma situação problemática para grupos sociais" (BORBA; SKOVSMOSE, 2001, p. 128).

As pesquisas de Modelagem subsidiadas pela EMC são crescentes e, além dessa acepção teórica, outras perspectivas teóricas têm se entrelaçado com a Modelagem: as teorias cognitivistas, sociointeracionistas, o pensamento de Paulo Freire, a abordagem fenomenológica, Ciência, Tecnologia, Sociedade e Ambiente (CTSA), autores da Escola Nova, a filosofia de Wittgenstein, dentre outras[37].

No que tange aos documentos que norteiam a Educação Básica no país, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1997), mencionam a Resolução de Problemas, a História da Matemática, as Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), e os Jogos para o ensino de Matemática, porém a Modelagem não é mencionada explicitamente. O documento destaca como um dos aspectos básicos no ensino de Matemática "relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras)" (BRASIL, 1997, p. 19), remetendo a princípios de práticas pedagógicas que se valem da Modelagem.

Esses princípios contidos no PCN colaboram para intensificar a utilização da Modelagem no contexto escolar e nas pesquisas (QUARTIERI, 2012). Ainda assim, a Modelagem integra, explicitamente, os documentos oficiais do Governo Federal que norteiam a educação brasileira somente em 2006 nas Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Esse documento discute que estudos em Educação Matemática apontam para a Modelagem "como um caminho para se trabalhar a Matemática na escola" (BRASIL, 2006, p. 84), sendo que, por meio dessa estratégia de ensino problemas da realidade são transformados em problemas matemáticos (BRASIL, 2006).

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018), é dissertado sobre a construção de modelos matemáticos na Matemática do Ensino Médio,

> [...] no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Consequentemente, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio – impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. [...] Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos **processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas** (BRASIL, 2018, p. 528-529, grifo em negrito dos autores).

Concernente aos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, são mencionadas as aplicações matemáticas para a aprendizagem da Matemática, tendo em vista o cotidiano do estudante. Nos

---

[37] Essa informação possui respaldo nas leituras realizadas durante o processo de seleção de dissertações e teses brasileiras sobre Modelagem que compuseram o material empírico desta pesquisa apresentado no primeiro capítulo.

Anos Finais do Ensino Fundamental, a Modelagem é apresentada implicitamente ao fazer alusão às observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade.

> Portanto, a BNCC orienta-se pelo pressuposto de que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos (BRASIL, 2018, p. 276).

> Para o desenvolvimento das habilidades previstas para o Ensino Fundamental – Anos Finais, é imprescindível levar em conta às experiências e os conhecimentos matemáticos já vivenciados pelos alunos, criando situações nas quais possam fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles e desenvolvendo ideias mais complexas (BRASIL, 2018, p. 298).

Para finalizar, com base no que foi descrito, constata-se que o surgimento da Modelagem no Brasil possui relação com movimentos, grupos de estudos e eventos internacionais, da década de 1960, que valorizam um ensino de Matemática com aplicações. O que é discutido nesses movimentos é aceito no país, pois contribui para um tipo de ensino de Matemática desgarrado do modelo euclidiano presente nas tendências Formalistas da Educação Matemática.

3 A CONCEPÇÃO REFERENCIAL DA LINGUAGEM

Este capítulo trata do uso exclusivo da concepção referencial da linguagem, que concebe o significado das palavras e expressões linguísticas como sendo extralinguístico. Na primeira seção, disserta-se sobre essa concepção de linguagem em algumas correntes filosóficas tradicionais. Dentre elas, a filosofia de Agostinho e a filosofia platônica, em especial no diálogo *Mênon.*

Na segunda seção, explicita-se sobre a concepção referencial da linguagem no primeiro pensamento filosófico de Wittgenstein.

3.1 A concepção referencial da linguagem em correntes filosóficas tradicionais

No contexto filosófico da antiguidade grega, os discursos mitológicos não foram extintos repentinamente. Os mitos, que exerceram influência no pensamento de Platão[38], são expressos em seus escritos que compuseram *A República.* No livro VII da referida obra, é narrado o Mito da Reminiscência (ou de Er), o qual exprime, assim como o diálogo platônico *Mênon*[39], que conhecer é lembrar o que a alma aprendeu antes da encarnação (CHAUI, 2002).

De acordo com o Mito da Reminiscência, as almas dos mortos contemplaram ideias no *Hades* (reino dos mortos) e foram levadas para escolher a nova vida terrena. Após terem feito sua escolha, foram conduzidas para uma planície onde correm as águas do rio *Léthe*[40]. Aqueles que escolheram uma vida de poder, riqueza, fama ou prazer, bebem abundantemente das águas do *Léthe*, assim esquecem as ideias que haviam contemplado. Os que escolheram a sabedoria bebem das águas em menor quantidade; desse modo, na vida terrena, podem lembrar-se das ideias que contemplaram e alcançam o conhecimento verdadeiro (CHAUI, 2002).

Por meio da contemplação que ocorreu no *Hades*, as almas teriam assimilado as ideias do mundo inteligível[41]; então, o saber adquirido necessitaria ser rememorado no mundo sensível[42]. A rememoração, mediante a força do diálogo, da investigação conduzida por

---

[38] O filósofo grego Platão (428 a.C.) tinha Sócrates como mentor, um dos grandes precursores da Filosofia Ocidental. Sócrates gostava de conversar, por este motivo se valia de questionamentos e debates para desenvolver sua atividade filosófica. Como ele se recusava a escrever, seu aluno Platão registrou uma série de diálogos socráticos que acabaram fazendo parte da obra de Platão (WARBURTON, 2012).

[39] *Mênon,* que será discutido na sequência deste texto, é um diálogo de juventude que trata da virtude e do saber; além disso, expõe pela primeira vez a reminiscência. *A República* apresenta diálogos da maturidade que versam sobre justiça na ética e na política, e trata também da reminiscência (CHAUI, 2002).

[40] No grego, este termo significa “esquecimento”.

[41] O mundo inteligível, mundo das ideias ou lugar celestial (GOTTSCHALK, 2010a); é onde estariam as formas, ideias e objetos matemáticos (CHAUI, 2002).

[42] Mundo físico e ético (CHAUI, 2002).

estratégias adequadas, poderia trazer as verdades à tona. Por conta disso, na vida terrena, o conhecimento se daria ao "reativar um saber que estaria em estado latente na razão[43]. Procurar e aprender é reencontrar um saber já adquirido que está esquecido" (CHAUI, 2002, p. 266). Ao tomar como base o Mito da Reminiscência, entende-se que o conhecimento está relacionado com uma vaga recordação ou lembrança de algo.

A reminiscência é também identificada no diálogo platônico de juventude, intitulado *Mênon*. A primeira parte desse diálogo ocorre entre os personagens Mênon e Sócrates, e versa sobre a virtude. Indagando o mestre Sócrates, o estudante Mênon questiona se a virtude poderia ser adquirida pelo ensino ou se ela existe nos homens como um dom natural, inato, portanto não ensinável (PLATÃO, 2001).

Sócrates emprega seu método dialético[44] de investigação, que ocorre sob a forma de diálogo: o método socrático. Na primeira parte do seu método, denominada ironia, ele convida o interlocutor a buscar a verdade e, para tanto, elabora uma pergunta. Sócrates comenta as respostas e mostra que estas se tratam de preconceitos e imagens mentais provocadas pela experiência sensorial ou por opiniões, mas que não se trata da definição do conceito em questão. Essas respostas são refutadas pelo mestre. Na segunda parte, chamada maiêutica – arte de realizar um parto –, Sócrates elabora perguntas visando conduzir seu interlocutor a encontrar a definição do que está sendo procurado. Por conseguinte, diz-se que ocorre o parto de uma ideia verdadeira (CHAUI, 2002).

No diálogo *Mênon*, para responder à pergunta do aprendiz a respeito da virtude, o mestre exercita seu método. Então, na parte da ironia, ele pergunta para Mênon o que é a virtude. Sócrates insiste para que ele apresente uma definição precisa para o conceito de virtude, mas Mênon descreve exemplos de virtudes: a do homem é administrar bem a cidade, favorecendo os amigos e prejudicando os inimigos; a virtude da mulher é governar bem a casa e ser obediente ao marido; há também virtudes distintas, específicas para as crianças, os anciãos, os escravos e os homens livres.

Suas respostas foram criticadas pelo mestre; então, em outro trecho do diálogo o aprendiz afirma que a coragem, a sabedoria, a prudência e a grandeza da alma também são virtudes. Entretanto, ele não consegue definir o conceito de virtude; não apreende a unidade da

[43] Segundo Abbagnano (2007, p. 824), "uma 'faculdade' própria do homem, que o distingue dos animais".

[44] Em Platão, a palavra dialética é concernente "a técnica da investigação conjunta, feita através da colaboração de duas ou mais pessoas, segundo o procedimento socrático de perguntar e responder" (ABBAGNANO, 2007, p. 269).

multiplicidade; a essência da virtude (PLATÃO, 2001). Suas respostas, que são suas certezas, são postas em dúvida e contestadas pelo mestre. Assim, o interlocutor encontra-se sem rumo e aceita o caminho sugerido por Sócrates (GOTTSCHALK, 2007a), dado na maiêutica.

Com a intenção de mostrar para Mênon a possibilidade de um conhecimento verdadeiro, Sócrates fala ao aprendiz sobre a imortalidade da alma, que tendo estado no Hades e visto muitas coisas ali, não há o que não tenha aprendido. Tendo a alma aprendido todas as coisas, o aprendizado seria uma rememoração e Mênon pede para Sócrates lhe ensinar como se daria o aprendizado dessa maneira (PLATÃO, 2001).

Para atender o pedido de Mênon, na segunda parte desse diálogo, Platão mostra, por meio do personagem Sócrates, que existe a possibilidade de acessar um conhecimento verdadeiro por meio da rememoração de saberes já contemplados pela alma. Eles interrompem a investigação sobre a essência da virtude e Sócrates dialoga com um escravo de Mênon, que nunca havia recebido aulas de geometria, a fim de lhe mostrar, por meio da rememoração conduzida pelo mestre, que o Teorema de Pitágoras poderia ser deduzido pelo escravo (PLATÃO, 2001).

Novamente, o personagem Sócrates vale-se do método dialético para que seu interlocutor chegue à verdade das coisas. O mestre desenha um quadrado com lados medindo dois pés e questiona o escravo sobre o comprimento do lado de um quadrado cuja área fosse o dobro do quadrado inicial. O escravo responde que a área do quadrado maior é oito pés e a medida do lado é o dobro da medida do lado do quadrado inicial (PLATÃO, 2001).

Neste primeiro momento, da ironia, Sócrates refuta as certezas iniciais do escravo. Sócrates tenta desestabilizar o seu interlocutor, levando-o a contradições que o obriguem a reformular suas convicções iniciais até que ele esteja convencido de sua ignorância (GOTTSCHALK, 2007a): “Mas, por Zeus, Sócrates, eu não sei!” (PLATÃO, 2001, 84).

Na etapa da maiêutica, o mestre conduz o escravo, paulatinamente, por meio de perguntas – e não pelo ensino – a descobrir a solução do problema matemático; “Examina[,] pois a partir dessa aporia[,] o que ele vai certamente descobrir, procurando comigo, que nada <estarei fazendo> senão perguntando, e não ensinando” (PLATÃO, 2001, 84d). Sócrates alega que não estava ensinando nada ao rapaz, mas apenas extraindo o que ele já sabia (HAMLYN, 1990).

Para auxiliar na descoberta da solução, Sócrates junta a figura inicial com três figuras de medidas iguais à do início e pergunta ao escravo quantas vezes maior é a medida da área da figura total em relação à medida da área da figura inicial. Ao desenhar as diagonais das figuras que constituem a figura total, o mestre questiona sobre as medidas das superfícies de cada uma das metades que se formam. O escravo é levado a visualizar que, a partir das diagonais, as metades totalizam uma superfície de oito pés e que a superfície total da figura é quatro vezes maior que a superfície da figura inicial, contradizendo o que o escravo havia dito, que seria o dobro (PLATÃO, 2001, 85b). Nessa resolução, "o lado desta última figura tem como medida a hipotenusa do triângulo retângulo contido no quadrado inicial, configurando-se, assim, uma das possíveis demonstrações geométricas do já conhecido teorema de Pitágoras" (GOTTSCHALK, 2010a, p. 67).

Coube ao mestre interrogar o aprendiz, refutando suas ideias iniciais, para que, num momento posterior, ele recordasse o que aprendeu no mundo das ideias. Para Platão, "os objetos matemáticos estariam situados em um mundo celestial, e o papel do mestre seria conduzir o seu discípulo por meio de um diálogo, aproximando-o desses entes ideais" (GOTTSCHALK, 2008, p. 76).

Na antiguidade grega, o método socrático era um dos meios que possibilitaria atingir o conhecimento verdadeiro, que estaria no mundo das ideias, onde haveria essências existentes *a priori* acerca dos objetos do mundo sensível. Nesse sentido, "'aprender é recordar' essências existentes *a priori* em um lugar celestial" (GOTTSCHALK, 2010a, p. 67).

Na primeira parte do diálogo platônico *Mênon,* o objetivo é averiguar acerca da essência da virtude – uma definição do que seria a virtude – que estaria no mundo das ideias. Na segunda parte, tal como suposto na primeira, o conhecimento matemático também estaria situado nesse lugar. A concepção essencialista do conhecimento na filosofia platônica indica que a linguagem manifesta a essência dos conceitos, cujos significados são precisos e exatos. Essas essências, que se encontrariam no mundo das ideias, são tidas como os referentes das palavras e expressões linguísticas, remetendo a uma concepção referencial da linguagem, segundo a qual, os significados linguísticos são essências situadas no mundo inteligível.

As ideias platônicas, por meio do filósofo grego neoplatônico Plotino (204-269 d.C.), influenciaram a metafísica do filósofo medieval Agostinho (354-430 d.C.). Na filosofia agostiniana, o mundo das ideias de Platão é interpretado como os pensamentos na mente de Deus e todo o conhecimento é concebido como advindo da iluminação divina (HAMLYN, 1990): "[...] Agostinho reforma Platão em dois pontos: 1) faz das Ideias os pensamentos de Deus [...]; 2) rejeita a doutrina da reminiscência [...]" (REALE; ANTISERI, 1990, p. 442-443).

Agostinho transforma a Teoria da Reminiscência na Teoria da Iluminação. Ele admite que Deus existe, é um ser inteligível e que torna inteligíveis todas as coisas (REALE; ANTISERI, 1990). Em sua teoria, Deus é considerado a fonte do conhecimento e o homem, como ser criado por Deus, teria dentro de si a centelha divina. Trata-se de uma centelha (fagulha) do intelecto divino que Deus havia depositado na inteligência humana durante o ato da criação; por esse motivo, o conhecimento existiria no interior de todos os seres humanos (PEREIRA, 2020).

Para esse filósofo, Cristo é o único Mestre interior que ensina, que concede ao homem o entendimento para compreender o conhecimento; “[...] o verdadeiro e único Mestre de todos nós está no céu” (AGOSTINHO, 1980, cap. XIV). A mente humana, ao conectar-se com Deus, e por conter a centelha divina, acessaria o conhecimento por meio da iluminação divina; “a doutrina da iluminação entende-se como uma luz impulsionadora, um processo de interiorização em que Deus ilumina a mente humana para receber o conhecimento imperceptível aos sentidos” (PEREIRA, 2020, p. 84).

Portanto, o conhecimento seria revelado por Deus e haveria um processo reflexivo que ocorre no interior do ser humano, independentemente do que é dito pelo professor, que se configura como condição para a aprendizagem. Como os significados das palavras já estariam no interior do aprendiz – porque, como mencionado, o intelecto humano teria uma fagulha do Divino –, então as palavras apenas evocariam esses significados (GOTTSCHALK, 2015).

No livro escrito por Agostinho, *Do Mestre* (*De Magistro),* é apresentado um diálogo entre esse filósofo e seu filho de quinze anos, Adeodato. Nessa interlocução, explora-se como seria possível a comunicação do conhecimento, as finalidades da linguagem e suas relações com o ensino (GOTTSCHALK, 2020). Além disso, nesse livro, consoante Araújo (2004, p. 21), Agostinho contribui para uma discussão que relaciona o signo (ou sinal)[45] e a realidade.

Em *Do Mestre,* é exposto que as palavras e os nomes são sinais com significado: “as palavras nada mais são do que sinais e que não pode existir sinal sem significar algo” (AGOSTINHO, 1980, cap. VII). As palavras servem para ensinar, suscitar recordações e pensar, que nesse contexto significa, segundo Wittgenstein (2014, § 32), “falar para si mesmo”; trata-se de uma fala interior. A escrita são sinais de palavras; a fala é considerada uma exteriorização da vontade do homem por meio do som, e o significado das palavras são as coisas que vêm à mente (AGOSTINHO, 1980, cap. I).

No decorrer do diálogo, Agostinho provoca seu filho para que mostre as coisas que são significados das palavras em vez de apenas explicar palavras com outras palavras. Nesse trecho, é possível perceber a concepção de linguagem agostiniana, que é a referencial: “gostaria que, se pudesses, me mostrasses **as coisas mesmas que são os sinais**” (AGOSTINHO, 1980, cap.

[45] Um signo ou sinal pode ser verbal (letras ou palavras) ou não verbais (signos visuais, como os gestos, por exemplo).

II, grifo nosso). Nessa concepção, "o signo de que fala Agostinho é a própria palavra e o significado é a própria coisa" (SILVA, 2018, p. 17). Assim, as coisas são os significados; por conseguinte, as palavras servem apenas para "etiquetá-las".

Prosseguindo, o filósofo diz que o significado da palavra "parede" poderia ser mostrado ao apontar com o dedo para uma parede, porém Adeodato questiona acerca das palavras cujos significados não podem ser visualizados, tais como "som", "cheiro", "sabor" e "gravidade". Agostinho cita que os gestos são utilizados na comunicação entre surdos, atores em peças teatrais e comediantes, o que acaba explicitando que, ao valer-se somente de gestos, haveria ensino. Em relação aos verbos, ele afirma que seria possível mostrar seus significados ao realizar a ação: "Se, porém, eu te perguntasse o que é caminhar e tu te levantasses e fizesses aquela ação, não usarias da própria coisa para ensinar-me isto, em vez de palavras ou de outros sinais?" (AGOSTINHO, 1980, cap. III).

Nesse sentido, na perspectiva agostiniana, a experiência empírica antecede a linguagem porque, mediante gestos ou ações, seria possível ensinar, o que pressupõe alcançar o conhecimento. Ademais, somente ouvir as palavras não é condição para conhecê-las; é o conhecimento das coisas que possibilita conhecer as palavras (AGOSTINHO, 1980, cap. XI).

Por fim, discutem que não basta ao mestre exterior (professor) apenas ensinar o conhecimento ao aprendiz sem que haja um processo de contemplação interior por parte do principiante. Para que haja aprendizagem, torna-se necessário verificar se as coisas ditas pelo professor são verdadeiras, o que se daria mediante esse processo reflexivo (contemplação interior). Assim, as palavras ditas pelo mestre exterior serviriam apenas para estimular o aprendizado (AGOSTINHO, 1980, cap. XIV).

Nessa perspectiva filosófica, o significado da palavra é algo no mundo empírico ou num mundo interior ao ser humano. Em *O Mestre,* o filósofo argumenta que seria possível mostrar o significado de uma palavra ao apontar para aquilo a que ela se refere – ao usar o gesto ostensivo –, ou seja, o significado é o próprio objeto, e o significado de um sinal não pode ser outro sinal. Em relação às palavras abstratas (dor, felicidade, amor etc.), seus significados necessitam ser rememorados, pois estariam no interior do ser humano (GOTTSCHALK, 2020).

Na concepção agostiniana da linguagem, o significado da palavra é restrito ao próprio objeto (referência), de modo que o significado é a própria referência, ou seja, tem-se uma concepção referencial da linguagem. Como o significado da palavra, segundo Agostinho, advém do conhecimento da coisa significada, então "o conhecimento não vem das palavras que significam os objetos, mas dos próprios objetos" (ARAÚJO, 2004, p. 22).

Como dissertado, o mundo das ideias de Platão foi interpretado por Agostinho como os pensamentos na mente de Deus. Na Modernidade, o filósofo francês René Descartes (1596-1650) rompe com essa concepção ontológica platônico-agostiniana. Para Descartes, os conteúdos da mente divina sobre os quais Agostinho se referia em sua filosofia passaram a constituir o termo "ideia", que expressa o "conteúdo na mente do próprio sujeito cognoscente, i. e., a 'ideia' cartesiana torna-se um ente mental ou psicológico" (TEIXEIRA, 2016, p. 489).

As ideias, "representações mentais" (DESCARTES, 2005, p. 58), são categorizadas pelo filósofo como inatas, adventícias ou produzidas pelo próprio ser humano[46]. Elas são concebidas como entidades mentais ou psicológicas, são conteúdos que fazem parte da mente humana, são intrínsecos a ela.

O filósofo francês sustenta o inatismo – não como Platão, que concebe o conhecimento pronto e acabado presente no mundo inteligível, bastando ao homem rememorá-lo –, mas como uma propensão para o saber, pois entende que a capacidade de pensar e de compreender as essências imutáveis e eternas é inata[47]. A mente possuiria certos atributos inatos sobre Deus, a alma, a existência do próprio sujeito e das entidades geométricas, os quais não necessitariam de auxílio externo para serem produzidos (PEREIRA, 2004; TEIXEIRA, 2016).

Nesse período histórico, além da ruptura provocada por Descartes em relação à concepção platônico-agostiniana, ocorre também um rompimento quanto às ideias inatistas de Platão e Descartes, com o surgimento do Empirismo fundado pelo inglês John Locke (1632-1704).

Segundo a doutrina empirista, todo o conhecimento, exceto o da lógica e da matemática, deriva da experiência. Entretanto, dentre os empiristas, o filósofo inglês John Stuart Mill (1806-1873) propôs uma teoria empírica do conhecimento matemático. Em acordo com sua teoria, "sabemos que $3 + 4 = 7$[,] pois observamos que, unindo uma pilha de três botões a uma pilha de 4 botões, obtemos uma pilha de sete botões" (DAVIS; HERSH, 1989, p. 369). Entende-se que o conhecimento matemático é fundamentado na experiência empírica, "é transmitido por pressão do meio sobre uma *tabula rasa* (aprende-se porque o meio ensina, no sentido amplo)" (BECKER, 2012, p. 19, grifo do autor). Mais tarde, o Empirismo de Mill é criticado pelo filósofo alemão Frege.

[46] Entende-se que as ideias inatas já estão no ser humano desde seu nascimento, as adventícias são formadas a partir das experiências sensoriais, e as que são produzidas pelo homem ocorrem mediante a sua fantasia ou imaginação.

[47] Pode-se dizer que essa concepção se assemelha com o que é dito por Becker (2012, p. 19): "uma predisposição genética (talento, dom)."

Para Locke[48], a mente é como um papel em branco, ou "tabula rasa", desprovida de ideias, mas que poderá ser preenchida somente com o conhecimento fundamentado pela experiência. As ideias, advindas da experiência, têm origem em duas fontes: das sensações (sentido externo) e da percepção do operar da mente, denominado sentido interno (RUSSELL, 2015), que pode ser entendido como a reflexão.

As tradições inatistas e empiristas, as quais evidenciam em suas discussões o objeto do conhecimento, são recusadas pelo filósofo alemão Immanuel Kant (1724-1804). A filosofia kantiana traz para o centro da discussão filosófica o sujeito do conhecimento como um ser dotado de razão, uma faculdade da mente humana ativa e mediadora para a elaboração do conhecimento. Suas ideias provocam uma verdadeira revolução ou "giro copernicano" na filosofia. Segundo Davis e Hersh (1989), Kant realiza um importante trabalho porque tenta unificar o racionalismo[49] e o empirismo.

Esse filósofo acredita que existem ideias *a priori*, ou seja, que independem da experiência, e que há conhecimentos em que a experiência se constitui como condição necessária para obtê-los, mas não suficiente. Além disso, a faculdade de compreender, que permitiria a formulação de juízos, necessitaria da faculdade da sensibilidade para o fornecimento das experiências. Assim, o filósofo intenta criticar uma suposta faculdade de razão pura que permitiria ao homem chegar ao conhecimento independentemente da experiência. Apesar disso, o entendimento sobre o mundo depende de categorias formais e *a priori* (HAMLYN, 1990). Essas categorias são condições necessárias para a elaboração do conhecimento classificado por Kant como analítico ou sintético.

Sob a ótica kantiana, saber algo é ter elaborado um juízo, "um ato de ligação de conceitos, reunidos na consciência" (BARKER, 1969, p. 19), analítico ou sintético. Um juízo é analítico se, e somente se, a reflexão em torno dos conceitos e da forma de combiná-los for necessária para saber se ele é verdadeiro. Nesse tipo de juízo, o predicado é parte do sujeito (RUSSELL, 2015), como, por exemplo: "um homem alto é um homem", "todos os solteiros são não casados".

Um juízo é sintético *a posteriori*, tal como, "esta cadeira é azul", quando sua veracidade não se dá mediante análise de conceitos (RUSSELL, 2015), o que leva Kant a questionar sobre como saber se são verdadeiros. O filósofo admite que os juízos sintéticos de caráter empírico

---

[48] No seu livro *Ensaio acerca do entendimento humano.*

[49] Dentre os filósofos racionalistas, encontram-se Platão e Descartes; "os racionalistas consideravam a faculdade da Razão como um traço inato da mente humana, pela qual as verdades podiam ser percebidas *a priori*, independentemente da observação" (DAVIS; HERSH, 1989, p. 367).

poderiam ser justificados pela experiência sensorial, mas o problema seria justificar os juízos sintéticos *a priori* – cujos exemplos mais claros, segundo Kant, se encontravam na Matemática –, os quais não são justificáveis pela experiência sensorial nem pela conexão intrínseca dos conceitos (BARKER, 1969).

Embora essas proposições pudessem ser obtidas a partir da experiência, quando conhecidas revelam ter algo além da experiência. Uma criança após ter entendido a proposição geral "dois mais dois são quatro" não mais necessitará de exemplos que a confirmem. Essas proposições carregam uma certeza que não poderá ser conferida a uma lei geral mediante indução (RUSSELL, 2015).

As filosofias que precederam a kantiana tinham "a linguagem como instrumento ou meio secundário pelo qual o conhecimento, uma vez formado, recebia expressão pública" (JANIK; TOULMIN, 1991, p. 133). Na filosofia de Kant, a maneira de conceber o conhecimento "contestou implicitamente o papel subsidiário até então conferido à linguagem" (JANIK; TOULMIN, 1991, p. 134). O conhecimento, caracterizado em termos de juízos, é também expresso sob forma de representações sensoriais estruturadas, o que acaba implicando os limites da razão como sendo, implicitamente, os limites dessas representações e da linguagem.

Em síntese, na antiguidade grega, com Platão, havia a compreensão de que o significado das palavras seriam suas essências situadas no mundo inteligível. O conhecimento verdadeiro seria atingido quando o ser humano obtivesse uma definição precisa, exata, de um conceito, o que se daria por meio da rememoração.

A concepção referencial da linguagem permanece na filosofia tradicional, é marcante no Medievo com Agostinho, o qual associa o significado da palavra a algo no mundo empírico, de modo que cada palavra corresponde a um objeto, ou que o significado está no mundo interior e o espírito traz a imagem do objeto. Nesse contexto, o conhecimento verdadeiro seria possível por meio da iluminação divina.

Com Kant, os desdobramentos da sua filosofia gradualmente acabaram dominando a filosofia e a ciência natural alemãs, e cerca de um século depois, no final do século XIX, os problemas da linguagem se tornaram centrais no contexto filosófico (JANIK; TOULMIN, 1991)[50]. Nesse século, destacam-se o filósofo alemão Gottlob Frege (1848-1925), o inglês Bertrand Russell (1872-1970) e o austríaco Ludwig Wittgenstein (1889-1951), que

[50] Esse assunto será retomado e discutido com mais profundidade no sétimo capítulo.

apresentaram soluções distintas para a problemática que relaciona pensamento, linguagem e mundo.

3.2 A concepção referencial da linguagem no primeiro pensamento filosófico de Wittgenstein

O pensamento de Frege e Russell influenciaram Wittgenstein, um filósofo vienense que estudou Engenharia Aeronáutica na Inglaterra, mas que se interessou pela filosofia quando se deparou com problemas sobre os fundamentos da Matemática.[51] Ele é considerado um dos mais importantes e influentes filósofos do século XX e é autor de duas filosofias distintas, sendo que sua primeira filosofia respalda o desenvolvimento da segunda (MORENO, 2000).

Na primeira fase do pensamento filosófico de Wittgenstein, ou seja, em sua primeira filosofia, é escrito o *Tractatus Lógico-Philosophicus*[52], publicado pela primeira vez em 1921. Sua segunda filosofia é marcada pelos escritos que compuseram as *Investigações Filosóficas*, publicado após sua morte em 1953.

Wittgenstein, apesar de não ter tido uma formação em filosofia, desenvolve no *Tractatus* uma teoria sofisticada que relaciona linguagem e mundo, que sintetizou e modificou as perspectivas de Frege e Russell (MILLER, 2010).

Frege foi um dos principais fundadores da lógica moderna ao criar as condições de ligação entre Lógica e Matemática. Ele tentou provar que os fundamentos da Matemática poderiam ser reduzidos a uma parte da Lógica e uma de suas tarefas foi elaborar uma ideografia – escrita conceitual perfeita[53] – que reproduzisse as relações matemáticas em relações lógicas, sem ambiguidades e imprecisões (MORENO, 2000).

Embora seja considerado o fundador da Filosofia da Linguagem, Frege repetia que a sua principal preocupação teórica não era com a linguagem em si – considerada por ele apenas como meio para exprimir o pensamento, mas que por vezes poderia obscurecê-lo –, e sim com

---

[51] Discutidos na obra de Russell, *The Principles of Mathematics.* Na primeira década de 1900, Wittgenstein foi a Manchester para dedicar-se a pesquisas aeronáuticas. Uma noite por semana, ele e outros colegas se reuniam para estudar Matemática. Dentre os assuntos, resolveram estudar os problemas relacionados aos fundamentos lógicos da Matemática. Um colega indicou a obra *The Principles of Mathematics* e Wittgenstein ficou cada vez mais obcecado pelos problemas discutidos por Russell e desencantado com a aeronáutica (MONK, 1995).

[52] O *Tractatus* consiste em sete proposições principais e as demais são comentários sobre essas proposições (MILLER, 2010).

[53] Posteriormente, a escrita ideográfica foi desenvolvida por Russell e Alfred Whitehead nos *Principia Mathematica* e a ideia foi assumida por Wittgenstein no *Tractatus* (MORENO, 2000).

o pensamento e a verdade. A sua discussão voltava-se para a compreensão do pensamento, o que seria possível ao se olhar para a linguagem (MIGUENS, 2007).

A ideografia criada por ele daria condições para a elaboração de um "*cálculo* por meio de signos" (MORENO, 2000, p. 37, grifo do autor) que substituiria o pensamento com exatidão. Esse trabalho de Frege resultou na invenção da linguagem da lógica simbólica moderna, em que os argumentos em linguagem natural são traduzidos para a notação lógico-formal e sobre os quais são aplicados métodos lógicos (MILLER, 2010).

Parte-se do princípio de que os pensamentos são expressos por frases e, para compreender a sua estrutura lógica, é necessário compreender as suas partes. Nessa análise, ao aplicar os métodos lógicos, o valor de verdade – ou valor semântico – de uma proposição ou sentença depende do seu significado, considerado como sendo o objeto ao qual ela se refere (MILLER, 2010). Para Frege, os objetos podem ser físicos (Sócrates, mesas, livros…), entidades mentais (representações) e entidades abstratas não situadas no tempo e espaço (números, verdade, falsidade…) (MIGUENS, 2007).

Porém, ao se deparar com sentenças que contêm nomes sem portador, ou seja, sem uma referência no mundo empírico, porque é ficcional, por exemplo, Frege percebe que ali existia um problema. Para solucionar esse problema, ele introduziu a noção de sentido que se distingue da noção de significado (MILLER, 2010).

Na sentença "Ulisses foi desembarcado em Ítaca enquanto dormia profundamente" (MILLER, 2010, p. 34), o nome Ulisses é fictício, então não tem portador, logo não tem significado, mas, como a sentença é bem articulada e transmite uma informação, que pode ser compreendida por alguém, ela tem sentido. Desse modo, Frege constata que o sentido de uma sentença pode existir independentemente da existência ou não do fato, e isso explica a possibilidade de se entender uma sentença ou proposição sem saber seu valor de verdade (MILLER, 2010).

Russell e o filósofo britânico Alfred Whitehead (1861-1947) também trabalharam para reduzir toda a Matemática à Lógica, tendo em vista a relevância da ideografia de Frege (MORENO, 2000). No entanto, Russell criticou aspectos relacionados ao valor semântico e à noção de sentido de Frege. Diante das sistematizações do filósofo alemão, Russell propôs outras modificações (MILLER, 2010). Para esse filósofo, uma análise da linguagem conduz a uma estrutura lógica que, por sua vez, estabelece uma correspondência com o mundo. A análise lógica das sentenças ou proposições resultaria em átomos linguísticos, sentenças que não poderiam ser mais decompostas, as quais seriam referentes às coisas do mundo empírico.

Essa análise revelaria em sua estrutura uma identidade com a realidade, de modo que os átomos linguísticos estariam em correspondência com átomos extralinguísticos, prefigurando o isomorfismo contido no *Tractatus* de Wittgenstein (MIGUENS, 2007).

Essas discussões criticam radicalmente a capacidade da linguagem natural de expressar o pensamento com exatidão, e os enganos e falsos problemas produzidos por ela. É por isso que esses filósofos buscaram construir para a filosofia uma linguagem de caráter científico, exata, para eliminar qualquer conteúdo metafísico (MORENO, 2000).

No *Tractatus,* Wittgenstein se apropria de resultados do projeto lógico moderno oriundos principalmente das pesquisas de Frege e Russell, e do criticismo de Kant (a respeito dos limites do conhecimento), o qual é incorporado à análise lógico-linguística das proposições (ARRUDA JÚNIOR, 2017). Esse livro aborda temas que "vão desde a natureza do pensamento, da lógica e da linguagem (temas compartilhados com Frege e Russell), até a natureza da subjetividade, da filosofia e do 'ético-estético-místico'" (MIGUENS, 2007, p. 128).

Sob a ótica tractariana, os problemas filosóficos têm suas origens no mau entendimento da lógica da linguagem, "a linguagem natural camufla a forma lógica[54] real das proposições. Supõe-se, assim, que a forma gramatical de uma proposição não reflete de maneira adequada sua forma lógica, e isso é o que gera várias confusões linguísticas" (ARRUDA JÚNIOR, 2017, p. 19), de modo que a linguagem seria como um "traje que disfarça o pensamento" (ARRUDA JÚNIOR, 2017, p. 19).

A fim de solucionar os problemas filosóficos, tendo em vista que "a forma aparentemente lógica da proposição não deve ser sua forma real" (WITTGENSTEIN, 1968, § 4.0031), Wittgenstein objetiva colocar um limite ao pensamento expresso linguisticamente, incidindo sobre a linguagem (FANN, 1992).

A sua primeira filosofia é concebida "como crítica da linguagem, através da análise lógica da proposição"[55] (MORENO, 2010, p. 12) que, no fundo demarcaria o que poderia, com sentido, ser dito (ARRUDA JÚNIOR, 2017).

Na perspectiva tractariana, é suposta uma correspondência isomorfa entre a estrutura lógica da proposição e a estrutura lógica dos fatos do mundo. Assim, seria possível analisar o mecanismo lógico da linguagem, de modo que seria estabelecida uma relação biunívoca entre linguagem e mundo (MORENO, 2000). As proposições complexas, que são os fatos do mundo, poderiam ser compreendidas por meio das proposições elementares, que são os estados de

[54] A forma lógica da linguagem é "considerada como capaz de nos dar o 'esqueleto do pensamento'" (MIGUENS, 2007, p. 129).
[55] No *Tractatus,* "uma proposição representa ponto a ponto um fato" (MORENO, 2000, p. 16).

coisas[56]. O valor de verdade das proposições elementares – uma concatenação de nomes[57] – permitiria a análise das proposições complexas (FANN, 1992).

As proposições com sentido estariam sujeitas à análise lógica, que se daria por meio de um processo de decomposição das proposições e dos fatos do mundo (GOTTSCHALK, 2021). Pode-se imaginar que, se uma proposição p estaria relacionada a um fato qualquer do mundo denominado por f, então tal proposição poderia ser decomposta em proposições mais simples, p_1, p_2, ..., p_n, sendo que cada umas dessas proposições decompostas estariam biunivocamente relacionadas com a decomposição do fato em fatos mais simples, f_1, f_2, ...f_n.

Ainda seria possível continuar com o processo de decomposição de maneira que, das proposições, seria possível obter proposições elementares que seriam enunciados constituídos apenas por nomes, n_1, n_2, ...n_n, e dos fatos do mundo, seria possível chegar a fatos atômicos que seriam combinações de objetos simples, o_1, o_2,...,o_n. Nesse nível, já não seria possível prosseguir com o processo de decomposição e há a substituição do objeto pelo nome que serve como uma "etiqueta" para o objeto. O objeto, tido como referência, é o significado do nome. Desse modo é que se pode falar de uma concepção referencial da linguagem no *Tractatus*.

Assim como Frege, na primeira fase do seu pensamento filosófico Wittgenstein também distingue significado e sentido: "Só a proposição possui sentido; só em conexão com a proposição um nome tem denotação [significado]" (WITTGENSTEIN, 1968, § 3.3). Se os objetos não existissem, então os nomes das proposições elementares não teriam significado. Contudo, as proposições elementares poderiam ter sentido (FANN, 1992), pois o sentido está relacionado com o "espaço lógico".

No *Tractatus,* os objetos estariam vinculados entre si num universo lógico denominado "espaço lógico", que delineia todas as combinações possíveis entre objetos. Como o sentido da proposição está relacionado com o seu valor de verdade no "espaço lógico", então "ainda que falsos, os conjuntos de enunciados sem referência factual tinham garantido o seu sentido" (MORENO, 2019, p. 26).

As proposições que não figuram um fato do mundo e a possibilidade de um valor de verdade são consideradas desprovidas de sentido, sendo denominadas pseudoproposições. Dentre elas, citam-se os enunciados éticos, estéticos ou religiosos e aqueles cujo valor de verdade é uma tautologia ou uma contradição, demarcando os limites do espaço lógico. Assim, é o espaço lógico que fornece os critérios para o sentido linguístico (MORENO, 2019).

[56] "é uma ligação de objetos (coisas)" (WITTGENSTEIN, 1968, § 2.01).
[57] "O nome denota [significa] o objeto" (WITTGENSTEIN, 1968, § 3.203).

Por tudo isso, a linguagem se torna central nas filosofias de Russell, Frege e Wittgenstein. Porém, apesar da centralidade em seus pensamentos filosóficos, a concepção referencial da linguagem é presente quando eles consideram o significado como sendo o objeto referido.

A concepção referencial da linguagem deixa de ser hegemônica na segunda filosofia de Wittgenstein, quando ele desenvolve uma nova perspectiva linguística, na qual a linguagem tem outras funções além da referencial. Desse modo, o *status* da linguagem no cenário filosófico se altera, pois ela passa a ser considerada como condição para a constituição do conhecimento, desempenhando um papel transcendental.

4 O SEGUNDO PENSAMENTO FILOSÓFICO DE WITTGENSTEIN

Na primeira seção, a partir da atividade filosófica de Wittgenstein, tida como terapêutica do pensamento, é exposto outro modo de pensar a linguagem: os significados das palavras e expressões linguísticas são seus usos nos diversos jogos de linguagem. Na segunda seção, é discutido sobre os usos dos enunciados, os quais podem oscilar, apresentando-se como proposições gramaticais ou empíricas.

4.1 A terapia filosófica de Wittgenstein e os jogos de linguagem

Desde a antiguidade grega, a linguagem é vista como um instrumento secundário do conhecimento, de modo que é apenas utilizada para comunicá-lo e para descrever as coisas. Em razão disso, para saber o significado das palavras é necessário conhecer o mundo. Logo, pode-se dizer que o conhecimento do mundo é *a priori,* independente da linguagem, e que na filosofia tradicional ela é tida como um instrumento para mediação do conhecimento (OLIVEIRA, 2006).

No *Tractatus,* Wittgenstein, como crítico da linguagem, discute que há incompreensões na filosofia porque os conteúdos do pensamento não poderiam ser expressos claramente por meio da linguagem. Por isso, ele propõe uma linguagem perfeita que solucione os problemas filosóficos e estabeleça uma relação que determina mutuamente pensamento e linguagem. Segundo Oliveira (2006), nesse livro, o caráter da linguagem é denotativo. Ela é considerada reflexo de um tipo de mundo, dado independente da linguagem, que no que lhe concerne, é construída segundo o modelo de um cálculo lógico, possibilitando, de modo muito preciso, exprimir o mundo. O *Tractatus* configura uma virada no contexto linguístico filosófico, sobretudo, com sua escrita, Wittgenstein julgou ter solucionado todos os problemas filosóficos e acreditou que não havia mais nada para ser feito em filosofia, o que o levou a se afastar da atividade filosófica.

É somente após ter se envolvido, por cerca de dez anos, em atividades de docência em escola primária e em trabalhos braçais que Wittgenstein retoma seus estudos em filosofia e, em 1929, apresenta o *Tractatus* como tese de doutorado na Universidade de Cambridge (MORENO, 2000). Durante os estudos de revisão desse livro, por conta da submissão para obtenção do título de doutor, ele começa a perceber alguns equívocos quanto ao seu primeiro pensamento filosófico, levando-o a modificar a ideia que a linguagem poderia ser concebida sob a forma lógica de proposições, cujo sentido estaria condicionado à representação de fatos do mundo pela proposição e à atribuição de um valor de verdade.

A segunda filosofia de Wittgenstein é desenvolvida tendo como pano de fundo seu antigo modo de pensar, expresso no *Tractatus.* Ela se constitui como uma terapia filosófica que o autor aplica sobre si mesmo (autoterapia), ao "criticar o uso *dogmático* que havia feito do modelo lógico no *Tractatus* para analisar a linguagem" (MORENO, 2015, p. 98, grifo do autor). Ratifica-se, portanto, que ele empreende "a *terapia* das interpretações unilaterais da significação" (MORENO, 2003, p. 119, grifo do autor) que desconsideram outras aplicações igualmente legítimas de uma mesma palavra (GOTTSCHALK, 2014). Tais interpretações, relacionadas a referências extralinguísticas, se constituem como imagens que obscureceram seu pensamento (MORENO, 2012).

> [...] tratou-se sempre, para Wittgenstein, após o *Tractatus*, de desfazer as consequências do uso dogmático da imagem que havia, como que, cegado o seu próprio pensamento à época do livro – imagem segundo a qual o sentido de uma palavra corresponde ao objeto que ela substitui, i.e., que o sentido se reduz à referência extralinguística, mental, empírica ou formal, das palavras e dos conceitos (MORENO, 2012, p. 12).

Dado que sua atividade filosófica é terapêutica, então nas *Investigações Filosóficas,* álbum constituído pelos escritos do seu segundo pensamento, Wittgenstein afirma que "A filosofia é uma luta contra o enfeitiçamento de nosso intelecto pelos meios de nossa linguagem" (WITTGENSTEIN, 2014, § 109), porque entende que os problemas filosóficos, contrariamente ao que ele sustenta no *Tractatus*, não têm origem na linguagem. Eles "surgem quando a linguagem está de folga" (WITTGENSTEIN, 2014, § 38) e o pensamento é tido como dogmático, por estar enrijecido por uma concepção referencial da linguagem.[58] À vista disso, sua atividade filosófica, nas *Investigações*, é terapêutica do pensamento confuso, expresso linguisticamente,[59] cujo significado da palavra se reduz à referência.

Os esclarecimentos filosóficos[60] do seu próprio pensamento levou Wittgenstein a perceber que o modelo lógico não mais poderia ser considerado "como preconceito ao qual a realidade *tem que* corresponder" (WITTGENSTEIN, 2014, § 131, grifo do autor) para a concepção dos significados linguísticos. Após o *Tractatus*, no que tange aos significados, é levado em conta a multiplicidade de usos das palavras e enunciados e o mecanismo referencial é considerado apenas um dos usos possíveis (MORENO, 2000). Além disso, do ponto de vista de Gottschalk (2020), o segundo pensamento filosófico de Wittgenstein, que investiga a

[58] Também denominado modelo referencial da linguagem.
[59] Compreende-se que a expressão "pensamento confuso expresso linguisticamente" também pode ser denominada "equívocos de natureza conceitual", "confusões conceituais" ou "confusões metafísicas da linguagem".
[60] Também compreendidos como "tratamento do pensamento" (MORENO, 2012, p. 74).

multiplicidade de usos linguísticos em diferentes situações, configura uma segunda virada linguística com desdobramentos inclusive no campo educacional.

No § 1 das *Investigações,* Wittgenstein discute um trecho das *Confissões* do filósofo Agostinho com intuito de ilustrar que no modo como esse filósofo medieval descreve o aprendizado da linguagem poderiam estar as raízes da ideia que o objeto é o significado da palavra (SPANIOL, 1989).

> Nestas palavras temos, ao que parece, uma determinada imagem da essência da linguagem humana, a saber: as palavras da linguagem denominam objetos [...] - Nesta imagem da linguagem encontramos as raízes da ideia: toda palavra tem um significado. Este significado é atribuído à palavra. Ele é o objeto que a palavra designa (WITTGENSTEIN, 2014, § 1).

Na acepção agostiniana, ao nomear um objeto, o adulto aponta para o artefato e emite sons. Wittgenstein discorre que quem descreve o aprendizado de uma linguagem da maneira como foi proposta por Agostinho, pensa, primeiramente, em palavras que denotam objetos físicos. Somente num segundo momento, considera outras espécies de palavras. Na sequência do § 1 das *Investigações*, Wittgenstein testa esse pensamento de Agostinho.

> Pense agora no seguinte emprego da linguagem: eu envio alguém às compras. Dou-lhe uma folha de papel onde se encontram os signos: "cinco maçãs vermelhas". Ele leva o papel ao comerciante. Este abre a gaveta sobre a qual está o signo "maçã". Ele procura a palavra "vermelho" numa tabela e encontra defronte a ela uma amostra de cores. Ele diz a sequência dos numerais - suponho que ele a saiba de cor - até à palavra "cinco", e a cada número tira da gaveta uma maçã que tem a cor da amostra. - Da mesma forma, operamos com palavras. - "Como ele sabe onde e como deve procurar a palavra 'vermelho' e o que tem que fazer com a palavra 'cinco'?" - Ora, suponho que ele *aja* conforme descrevi. As explicações encontram um fim em algum lugar. - Qual é o significado da palavra 'cinco'? - Aqui não se falou disso, mas somente de como a palavra "cinco" é usada (WITTGENSTEIN, 2014, § 1, grifo do autor).

Ao considerar o pensamento dogmático, vinculado à concepção referencial da linguagem do modelo agostiniano, Wittgenstein tenta esclarecê-lo. Para tanto, exemplifica com uma situação na qual a linguagem é utilizada quando alguém vai às compras e lhe é dada uma folha de papel que contém a expressão "cinco maçãs vermelhas".

O filósofo descreve as ações e o uso da linguagem – nesse caso, de cada uma dessas palavras –, visando dissolver e esclarecer equívocos de natureza conceitual. Sob a concepção referencial da linguagem, presente na filosofia de Agostinho, o significado de cada uma das palavras escritas no papel deveria corresponder a um objeto: um número, uma fruta, uma cor (CARDOSO, 2021).

Porém, Wittgenstein questiona sobre o significado da palavra "cinco", pois para esse termo não foi apresentado nenhum objeto, diferente do exemplo das palavras "maçãs" e "vermelhas". Para a palavra "cinco" foi somente apresentado como essa é usada, o que pressupõe que o significado de uma palavra nem sempre é o objeto a que designa. Por conseguinte, a ideia de que o objeto é o significado da palavra não se mantém (SPANIOL, 1989).

Devido à aplicação exclusiva da concepção referencial da linguagem, o pensamento se torna confuso – ou seja, as confusões conceituais surgem – porque se acredita que deve haver objetos que correspondem às palavras. Diante disso, a filosofia de Wittgenstein, de caráter terapêutico, que se dá por meio da descrição gramatical dos usos das palavras, tal como aplicada no exemplo apresentado no § 1 das *Investigações,* possibilita desfazer as confusões conceituais e liberar o pensamento das imagens advindas "da aplicação exclusivista do modelo referencial" (MORENO, 1995, p. 38).

Wittgenstein aplica este procedimento para outros termos: lógica, matemática, linguagem, percepção de cores e de formas, relatos da percepção de sensações externas e internas. São descritos os usos dessas palavras e expressões linguísticas, discutindo-os à luz de concepções filosóficas tradicionais ou de opiniões do senso comum (MORENO, 2012) para procurar dissolver problemas filosóficos gerados pelo uso dogmático de imagens veiculadas pela linguagem (GOTTSCHALK, 2014). A terapia, que não é uma análise psicológica ou empírica, consiste em uma reflexão filosófica que objetiva desfazer confusões do pensamento por meio do esclarecimento dos significados dos conceitos (MORENO, 2012).

Nos trechos iniciais do artigo de Gottschalk (2014) são descritos alguns usos da palavra "três" no dia a dia. A autora menciona as proposições: "há três copos em cima da mesa", "há três maçãs na cesta", "alguém desenhou três riscos na parede", por exemplo. Com essas proposições se aprende que a palavra "três" é um nome que denota uma quantidade de coisas, "'três' é o número de algo" (GOTTSCHALK, 2014, p. 58), descrevendo fatos da experiência.

Entretanto, segundo a autora, na escola aprende-se enunciados que expressam sobre a existência de equações matemáticas com "três" raízes, por exemplo. Com isso, o estudante depara-se com um novo uso da palavra "três" que não é quanto à contagem de objetos empíricos.

A confusão conceitual se instala quando persiste a ideia, isto é, quando o pensamento continua preso à imagem que a palavra "três" deve significar uma quantidade de coisas (maçãs, copos, riscos na parede). Supondo-se que o pensamento continue preso a essa imagem, entende-se que, quando o estudante aprende que existem equações com "três" raízes, então a palavra "três" também deveria ser o número de alguma coisa, indicando o uso dessa palavra como sendo descritivo.

Nos enunciados que mostram os usos da palavra "três" no dia a dia, existe uma concepção referencial da linguagem. Porém, essa concepção de linguagem não é predominante em todos os usos da palavra "três", como no exemplo de uso dessa palavra na Matemática que é concernente ao grau da equação, dado por definição ou prova matemática, estabelecendo "uma relação interna entre a expressão 'equação do terceiro grau' e a expressão 'tem três raízes'" (GOTTSCHALK, 2014, p. 74). Essa é uma situação em que há outro uso da palavra "três", número esse obtido pelo matemático por meio de uma prova matemática. Contrariamente às situações anteriores, "três" não denota nenhum tipo de objeto.

O que se quer evidenciar com esses exemplos é que uma confusão conceitual pode se instalar quando se está preso ao uso dogmático de uma palavra ou enunciado, como no enunciado "há três maçãs na cesta", em que o uso da palavra "três" "deve ser o número de *algo* (de maçãs, de copos, de riscos na parede…)" (GOTTSCHALK, 2014, p. 59, grifo da autora). Desse modo, o pensamento expresso linguisticamente fica confuso porque exprime usos privilegiados da palavra "três" que refletem exclusivamente uma concepção referencial da linguagem. A dissolução dessas confusões se dão a partir do momento em que se percebe e se aceita as diferenças de usos das palavras.

Nesse sentido, a terapia, por meio das descrições dos usos das palavras, permite mostrar que nem sempre os significados são os objetos pelos quais elas se referem, mas os significados são os usos das palavras e expressões linguísticas, "o significado de uma palavra é seu uso na linguagem" (WITTGENSTEIN, 2014, § 43). É por isso que, ao colocar-se sob terapia, Wittgenstein compreende que a linguagem não é unilateral, mas passa a ter diversas perspectivas de significados que dependem dos seus usos (MORENO, 2012).

No § 66 das *Investigações,* o filósofo diz: "Não pense, mas veja!". Trata-se de ver o funcionamento da linguagem, como ela é usada, tal como funciona um jogo. Wittgenstein cria uma metáfora, a do "jogo de linguagem", para caracterizar sua nova concepção de linguagem (MORENO, 2000). Ele compara a linguagem a um jogo e utiliza a expressão "jogo de linguagem" para se referir a ela: "Chamarei 'jogo de linguagem' também a totalidade formada pela linguagem e pelas atividades com as quais ela vem entrelaçada" (WITTGENSTEIN, 2014, § 7) e no § 23 menciona exemplos de jogos de linguagem:

> Ordenar, e agir segundo as ordens -
> Descrever um objeto pela aparência ou pelas suas medidas -
> Produzir um objeto de acordo com uma descrição (desenho) -
> Relatar um acontecimento -
> Fazer suposições sobre o acontecimento -
> Levantar uma hipótese e examiná-la -
> Apresentar um resultado de um experimento por meio de tabelas e diagramas-
> Inventar uma história; e ler -
> Representar teatro -
> Cantar cantiga de roda -
> Adivinhar enigmas -
> Fazer uma anedota; contar -

> Resolver uma tarefa de cálculo aplicado -
> Traduzir de uma língua para outra -
> Pedir, agradecer, praguejar, cumprimentar, rezar (WITTGENSTEIN, 2014, § 23).

Portanto, nas *Investigações,* o sentido das proposições e o significado das palavras não é mais determinado pelo modelo lógico da linguagem, fixo e imutável, como é no *Tractatus*, mas os significados linguísticos se dão pelos seus usos nos distintos jogos de linguagem. Sob essa nova perspectiva linguística, a função referencial da linguagem passa a ser apenas um jogo de linguagem, dentre muitos outros. Ao comparar a linguagem a um jogo, então a linguagem é "um conjunto aberto de diferentes atividades envolvendo palavras" (MORENO, 1995, p. 15) e o contexto ou ambiente da prática da linguagem é considerado pragmático[61] (MORENO, 2015; 1995).

Wittgenstein evita chamar a linguagem com a palavra "linguagem" justamente para o entendimento não sofrer as consequências de absurdos quando se delimita fronteiras precisas para a linguagem, assim como ocorreu no *Tractatus* (MORENO, 2000). Por meio de uma relação de analogia entre as palavras "linguagem" e "jogo", Wittgenstein observa que a palavra "jogo" pode ser empregada em diversas situações da linguagem: jogo de xadrez, jogo de futebol, jogo de cartas, jogo da velha, jogo da tabuada. Não há uma essência para a palavra "jogo" porque seus diferentes significados se relacionam por meio de "semelhanças de família" observadas na diversidade de jogos, "vemos uma complicada rede de semelhanças que se sobrepõem umas às outras e se entrecruzam. Semelhanças em grande e pequena escala" (WITTGENSTEIN, 2014, § 66).

Assim como não há uma definição precisa para o conceito de "jogo", pois Wittgenstein caracteriza o conceito da palavra "conceito" como não exato, mas que possui "uma camada mínima, mas precisa, de significação" (MORENO, 2000, p. 51), para o terapeuta não há uma definição precisa para o conceito de "linguagem". A palavra "linguagem" é tal como a palavra "jogo" que apresenta uma multiplicidade de possibilidades de significados. Segundo o filósofo austríaco há uma relação de "parentesco" entre as palavras "linguagem" e "jogo", por isso Wittgenstein emprega o conceito "jogos de linguagem", e não "linguagem".

Ainda, sob essa nova visão, os significados linguísticos são partes da extensão dos conceitos nos jogos de linguagem. Isso não implica dizer que o significado de algum conceito é dado pela soma de conceitos individuais, conforme o filósofo exemplifica valendo-se do

---

[61] O pragmatismo concernente à Wittgenstein não está relacionado com o pragmatismo norte-americano, uma corrente filosófica que considera a ideia de utilidade (MORENO, 2015).

conceito de número no § 68 das *Investigações*. Se considerada a ideia de soma de conceitos individuais, o conceito passa a ter limites rígidos. Contudo, Wittgenstein sustenta que é possível apenas traçar alguns limites dos conceitos porque há regras que não são fixas como no caso do jogo de tênis: não há uma regra quanto a medida da altura ou a força para o arremesso da bola.

> "Muito bem; assim está explicado para você o conceito de número como a soma lógica daqueles conceitos individuais aparentados: número cardinal, número racional, número real etc. e, igualmente, o conceito de jogo como a soma lógica dos conceitos parciais correspondentes. "-Não, necessariamente. Pois assim eu posso conferir limites rígidos ao conceito 'número', isto é, usar a palavra 'número' como designação de conceito limitado rigidamente, mas posso usá-la também de tal modo que a extensão do conceito não seja fechada por um limite. E é assim que empregamos a palavra "jogo". De que modo está fechado o conceito de jogo? O que é ainda um jogo e o que não o é mais? Você pode indicar os limites? Não. Você pode traçar alguns: pois ainda não se traçou nenhum. (Mas isto jamais o incomodou ao empregar a palavra "jogo"). "Mas então não está regularizado o emprego da palavra; não está regularizado o 'jogo' que jogamos com ela." -Não está delimitado por regras em toda parte; mas também não há, no jogo de tênis, regras que determinem, p. ex., a que altura ou com que força se é permitido arremessar a bola, mas o tênis é de fato um jogo, e também possui regras (WITTGENSTEIN, 2014, § 68).

À luz desse pensamento, o que regula os significados são "rotinas de ação, hábitos linguísticos, convenções sociais ou, como diz Wittgenstein, a *práxis* da linguagem" (MORENO, 2019, p. 33), de modo que "o significado consiste [...] no conjunto dos usos que fazemos dos enunciados, e cada situação de seu emprego revela uma parcela, um aspecto desse conjunto, a ele ligado por semelhanças de família" (MORENO, 2000, p. 49). Tem-se uma "perspectiva pragmática da linguagem" em que o significado vai se constituindo nos usos das palavras.

> Assim, temos aqui uma perspectiva pragmática da linguagem, na medida que o significado das nossas expressões linguísticas depende do uso e do contexto. O significado da palavra vai sendo construído a partir de suas aplicações em uma variedade de situações, que se relacionam através de "semelhanças de família" (GOTTSCHALK, 2007b, p. 118).

Os significados das palavras e expressões linguísticas são distintos devido aos usos nos diferentes jogos de linguagem que, por sua vez, repousam nas diversas "formas de vida", "diversas atividades humanas. O modo como andamos, bebemos, ou falamos já faz parte de uma *forma de vida*" (GOTTSCHALK, 2016, p. 55, grifo da autora). Ou, como Moreno (2005) presume, que se referem às práticas sociais; "Na qualidade de 'formas de vida' as práticas sociais podem variar além dos limites da nossa imaginação, por ser, ela também gramaticalmente construída" (MORENO, 2005, p. 266).

A título de exemplo, na forma de vida dos pedreiros o significado da expressão "Laje!" pode ser a frase "Traga-me uma laje!" (WITTGENSTEIN, 2014, § 19), enquanto na forma de vida dos moradores de uma comunidade, o significado da palavra "laje" pode ser "área de lazer".

Além disso, o que difere os jogos de linguagem são suas regras, pois cada jogo de linguagem tem regras próprias que dependem dos usos das palavras. Por isso, o que estabelece o significado das palavras e expressões são seus usos orientados por regras, que "não são as regras da ortografia gramatical [...], mas são regras que fundamentam, num sentido filosófico, o uso e a prática de tudo aquilo a que chamamos 'linguagem' [jogos de linguagem]" (ARRUDA JÚNIOR, 2017, p. 48).

As regras dos jogos de linguagem são específicas de cada jogo e são criadas na ação – no ambiente pragmático – para reger/regular os usos das palavras, constituindo assim uma "gramática", "conjunto de usos que fazemos das palavras que podem ser expressos sob a forma de um sistema de regras" (MORENO, 2003, p. 116). Sendo assim, "A atividade linguística é governada por regras da mesma forma que a execução de um jogo é regida por regras" (LYCAN, 2000, p. 78, tradução nossa)[62] e o autor exemplifica valendo-se do jogo de xadrez:

> Um "peão," ou uma "torre," é definido pelas regras do xadrez que regem a sua posição inicial e os movimentos permitidos subsequentes; o que faz de um cavalo um cavalo é o modo característico como ele se move de acordo com as regras convencionalmente instituídas do jogo (LYCAN, 2000, p. 78, tradução nossa)[63].

Em síntese, no segundo pensamento de Wittgenstein, a atividade filosófica não é o de dar explicações, mas dissipar possíveis mal-entendidos no âmbito filosófico por meio da descrição dos usos das palavras e expressões linguísticas, "A filosofia não deve, de forma alguma, tocar [interferir] o uso real da linguagem; o que pode, enfim, é apenas descrevê-lo" (WITTGENSTEIN, 2014, § 124). Em consequência, o filósofo compreende que a linguagem não é só representativa das coisas, então a concepção referencial da linguagem é considerada reducionista e a representação é apenas um uso da linguagem, ou seja, um uso particular da linguagem.

4.2 Proposições gramaticais e empíricas: possibilidades de oscilação

No primeiro pensamento filosófico de Wittgenstein existe uma relação isomorfa entre linguagem e mundo, possibilitando estabelecer uma correspondência biunívoca entre as

---

[62] "Linguistic activity is governed by rules in much the way that the playing of a game is governed by rules" (LYCAN, 2000, p. 78).

[63] A "pawn" or a "rook" is defined by the chess rules that govern its initial position and subsequent legal moves; what makes a knight a knight is the way in which it characteristically moves according to the game's conventionally instituted rules (LYCAN, 2000, p. 78).

proposições e os fatos do mundo. O estabelecimento dessa correspondência tornaria uma proposição com sentido, independentemente da ocorrência ou não do fato. Quanto ao valor de verdade da proposição, se o fato ocorresse no mundo, então a proposição seria verdadeira e, em caso contrário, falsa (GOTTSCHALK, 2021).

Além disso, os nomes seriam “as antenas dos elementos da figuração, com as quais esta [a linguagem] toca a realidade” (WITTGENSTEIN, 1968, 2.1515), isto é, “os nomes seriam ‘as antenas da linguagem’ no mundo” (GOTTSCHALK, 2021, p. 3, tradução nossa).[64] Nesse último nível da decomposição das proposições e dos fatos do mundo, a linguagem desempenha o papel de nomeação e toca o mundo, “essa relação de substituição [do objeto pelo nome] seria o ponto de contato efetivo entre linguagem, pensamento e mundo, condição para a existência de uma proposição com significado” (GOTTSCHALK, 2021, p. 3, tradução nossa).[65]

Essa forma atomista de conceber o funcionamento da linguagem acabou deixando problemas filosóficos em aberto para Wittgenstein, como o da natureza dos objetos simples, os quais foram retomados por ele no final de 1930, quando atuava como professor da Universidade de Cambridge. Gradualmente o filósofo foi percebendo que a linguagem não desempenha apenas a função referencial, tal como explicitado no *Tractatus*, mas sim uma multiplicidade de funções, de maneira que a nomeação exerce outra função: a de preparação para o sentido linguístico (GOTTSCHALK, 2021).

Nas *Investigações* é proposta uma ideia para o processo de nomeação, que o objeto empírico deve “‘permanecer dentro da linguagem’” (BAKER; HACKER, 2005, p. 357, tradução nossa)[66]. Assim, o objeto empírico, que no § 50 das *Investigações,* Wittgenstein exemplifica citando o metro-padrão de Paris (uma barra de platina iridiada), uma amostra de cor sépia conservada a vácuo e um quadrado colorido de um complexo com o formato de um tabuleiro de xadrez, exerce uma função dentro da linguagem: o de paradigma.

> De uma coisa não se pode afirmar que tenha 1 m de comprimento nem que não tenha 1 m de comprimento: do metro-padrão de Paris. Com isso não estamos atribuindo a este uma propriedade estranha, mas apenas caracterizamos o seu papel peculiar no jogo de medir com o metro. Imaginemos que em Paris seja conservado o padrão de cores do mesmo modo que o metro-padrão. Assim explicamos: Chama-se "sépia" a cor sépia padrão que lá se encontra conservada a vácuo. Não terá sentido então afirmar acerca deste padrão que ele tem nem que ele não tem esta cor. Podemos exprimir isto da seguinte maneira: **Este padrão é um instrumento da linguagem com a qual fazemos afirmações sobre as cores. Neste jogo não há algo exposto, mas um meio de exposição.** E exatamente isso se aplica para um elemento no jogo de linguagem (48) [em que quadrados coloridos são substituídos por nomes de cores] quando,

[64] “names would be the ‘antennae of language’ in the world” (GOTTSCHALK, 2021, p. 3).
[65] “as this relation of substitution would be the effective point of contact between language, thought and the world, a condition for the existence of a meaningful proposition” (GOTTSCHALK, 2021, p. 3).
[66] “‘remaining within language’” (BAKER; HACKER, 2005, p. 357).

> denominando-o, proferimos a palavra "R" [sobre a cor rubro]: com isso demos a esta coisa [um quadrado colorido] um papel no nosso jogo de linguagem; ela é agora meio de exposição. E dizer "Se ele não existisse, não poderia ter nome", diz tanto ou tão pouco quanto: se não houvesse essa coisa, não a poderíamos empregar em nosso jogo. Aquilo que, aparentemente, tem que haver, pertence à linguagem. **Existe um paradigma em nosso jogo; algo com que se compara.** E constatar isso pode significar fazer uma constatação importante; mas é, todavia, uma constatação que diz respeito ao nosso jogo de linguagem - ao nosso modo de exposição (WITTGENSTEIN, 2014, § 50, grifo nosso).

Mas, como um objeto empírico exerce uma função de paradigma dentro da linguagem? Não se trata de questionar as propriedades físicas do objeto, se o metro-padrão de Paris é o mais preciso. O metro-padrão poderia ser outra barra, constituída por outro material e com dimensão distinta da barra de platina que já existe. O metro-padrão, a mancha de cor conservada a vácuo e o quadrado colorido são substituídos por nomes, "Chama-se 'sépia' a cor sépia padrão que lá se encontra conservada a vácuo. Não terá sentido, então, afirmar acerca deste padrão que ele tem nem que ele não tem esta cor" (WITTGENSTEIN, 2014, § 50).

Não importa qual é a mancha e a frequência de onda que ela reflete, importa que esta mancha de cor, que reflete esta onda e que está conservada a vácuo, foi convencionalmente nomeada com a palavra "sépia". Os objetos metro-padrão, a mancha de cor conservada a vácuo e o quadrado colorido pertencem à linguagem por meio da nomeação, e ali se tornam instrumentos da linguagem que assumem a função de paradigmas, que operam como regras normativas, "algo com que se compara" (WITTGENSTEIN, 2014, § 50); "atribuir funções simbólicas ao empírico faz com que ele opere como regra normativa nos processos de organização da experiência, sendo incorporado, assim, à linguagem como um de seus instrumentos" (MORENO, 2012, p. 81)[67].

No que tange ao processo de nomeação, quando alguém aponta para um objeto qualquer, uma bola, por exemplo, e diz para uma criança "Isto é uma bola!", agora está sendo apresentado a ela uma amostra do objeto bola que servirá de modelo para o uso da palavra "bola". Desse modo, o objeto bola exerce uma função de paradigma na linguagem. Assim, por meio do gesto ostensivo de apontar, o objeto empírico (bola) é introduzido e tem uma função na linguagem (GOTTSCHALK, 2021), "ambos signos (o gesto e o objeto) exercem função de regras formais que participam da construção do significado de 'x' [bola]" (GOTTSCHALK, 2007b, p. 120).

As diferentes bolas que foram apresentadas à criança assumiram o papel de paradigmas, isto é, regras de uso da palavra "bola", que regulam – normatizam – procedimentos e ações que a bola estará envolvida. Trata-se da função reguladora da norma, "Regulam as normas para

---

[67] Para essa discussão recorremos aos escritos sobre a epistemologia do uso, inspirada em Wittgenstein, e desenvolvida pelo filósofo brasileiro Arley Ramos Moreno.

incorporar *significativamente* elementos do mundo à linguagem, apresentando-os como candidatos à aplicação de nomes: 'isto é verde' (MORENO, 2012, p. 89, grifo do autor).

Além disso, é necessário que a criança memorize a palavra, e para isso, a ela são apresentados objetos semelhantes (bola de futebol, bola de tênis) para que, por meio do treino, associe a mesma palavra (bola) a esses objetos. Enquanto isso, a criança, ao ouvir o som da palavra em diferentes situações, começa a constituir o conceito do objeto (do que é ser uma bola: "bola é um objeto esférico") (GOTTSCHALK, 2021). Essa definição, é uma "'regra de representação' que pertence às **conexões internas** do que está sendo apresentado" (GOTTSCHALK, 2004a, p. 314, grifo nosso), assim "bola" é um valor possível para a variável "objeto esférico", e essa regra pode ser ensinada para a criança, pois promove uma nova referência dessa variável (GOTTSCHALK, 2021).

Por isso, a nomeação é considerada apenas como uma preparação para o sentido linguístico, enquanto que a regra exerce a função constitutiva do sentido, "*constituem* o sentido do que é ser um objeto, apresentando-o como o contexto da aplicação do nome: 'verde é uma cor'" (MORENO, 2012, p. 89, grifo do autor). Assim, no segundo pensamento de Wittgenstein, é esclarecido um dos problemas filosóficos que ficaram abertos, o da natureza dos objetos simples do *Tractatus,* que agora passam a exercer a função de paradigmas.

> [...] o paradigma desempenha o papel de regra, análogo às regras do xadrez. Também no jogo de xadrez, temos regras que dizem os nomes das peças e como movê-las no tabuleiro, independentemente de suas propriedades empíricas. Mas neste primeiro nível de aprendizado das regras do xadrez, o jogo ainda não está sendo jogado, são apenas regras preparatórias (GOTTSCHALK, 2021, p. 5, tradução nossa).[68]

No jogo da nomeação, que é um jogo de linguagem primitivo (ou elementar), há um "treinamento", "Ensinar a linguagem aqui não é explicar, mas treinar" (WITTGENSTEIN, 2014, § 5), que ocorre por meio de técnicas preparatórias. Uma destas técnicas é o ensino ostensivo das palavras, que envolve objetos extralinguísticos e o gesto ostensivo, como por exemplo, apontar para uma bola e dizer para uma criança "Isto é uma bola!".

Numa aula de Matemática, muitas vezes o professor recorre a essa técnica quando aponta para números, sinais das operações matemáticas, figuras geométricas, gráficos, e diz para seus estudantes: "Este é o número um!", "Este é o sinal de adição!", "Esta figura é um quadrado!", "Este é um gráfico de colunas!". Por meio do ensino ostensivo, uma criança aprende a utilizar as palavras concernentes aos números, figuras geométricas, operações.

---

[68] [...] the paradigm performs the role of rule, analogous to the rules of chess. Also in the game of chess, we have rules that say the names of the pieces and how to move them on the board, regardless of their empirical properties. But at this first level of learning the rules of chess, the game is not yet being played, these are just preparatory rules (GOTTSCHALK, 2021, p. 5).

Imaginemos que em uma aula de Matemática, o professor aponte para um cartaz com o "número dois", escrito na cor vermelha, e diga para a turma: "Isto é dois!". O que garante que os estudantes compreendem que o que está sendo ensinado a eles é o nome do numeral e não sua cor ou forma sinuosa? Wittgenstein esclarece:

> Talvez se diga: o dois pode ser definido ostensivamente somente *desta maneira*: "Este *número* se chama 'dois'". A palavra número indica aqui em que *lugar* da linguagem, da gramática, colocamos a palavra. Mas isto quer dizer que a palavra número tem que ser explicada antes que a definição ostensiva possa ser compreendida (WITTGENSTEIN, 2014, § 29, grifo do autor).

Por isso, pode ser necessário orientar as crianças quanto ao lugar que a palavra ocupa (CARDOSO, 2021), dizendo a elas que, nesse caso, o "número dois" diz respeito ao nome do numeral. Desse modo, além do ensino ostensivo, é utilizada a definição (ou esclarecimento ostensivo) para que se consiga esclarecer acerca dos usos das palavras (WITTGENSTEIN, 2014, § 28; § 29).

A filosofia terapêutica de Wittgenstein mostra que nos usos da linguagem são construídas as relações entre linguagem e mundo, as quais são de natureza gramatical. Conforme essa natureza, contrária à da filosofia tradicional, entende-se que na relação linguagem e mundo há ligações internas que envolvem os domínios empírico e simbólico (MORENO, 2012).

As técnicas preparatórias dão subsídios para operar nos jogos mais complexos, os jogos descritivos, nos quais as palavras e expressões linguísticas são aplicadas para descrições de processos factuais (MORENO, 2012). Então, nas descrições, a criança consegue operar com as palavras de outras maneiras, estabelecendo uma "conexão externa" entre um objeto e a sua cor, como por exemplo, "a bola é azul". Ou ainda, poderá realizar outras descrições: "a minha pulseira é de bolas", "as bolas da árvore de natal são brilhantes", porque a criança aprendeu a seguir as regras de uso da palavra bola.

Portanto, pode-se dizer, por exemplo, que é somente "quando tiver aprendido o que significa 'vermelho', isto é, quando tiver aprendido a técnica[69] de utilizar a palavra" (WITTGENSTEIN, 1981, § 418) que a criança conseguirá usar a palavra vermelho para descrições: "Minha blusa é vermelha", "A rosa é vermelha". Essas proposições indicam que a criança aprendeu a técnica de uso da palavra vermelho. Pelo fato de ter sido apresentada a ela

[69] Em seu sentido geral, a palavra técnica é "um conjunto de regras aptas a dirigir eficazmente uma atividade qualquer" (ABBAGNANO, 2007, p. 939). Neste exemplo, a aprendizagem das técnicas de uso das palavras que substituem as cores, é concernente à aprendizagem de seguir as regras da gramática das cores. Sobre "gramática" é explicitado no decorrer desta seção.

a regra, “vermelho é uma cor”, que propicia uma “conexão interna” entre “cor” e “vermelho”, sendo impossível pensar a variável (cor) sem alguma referência dessa variável (vermelho), então a criança consegue estabelecer “conexões externas” entre coisas (uma blusa ou rosa) e cores (vermelho).

> Queria dizer que, se houvesse somente uma conexão externa, nenhuma conexão poderia ser descrita, já que só descrevemos a conexão externa por meio da interna. Se esta se acha ausente, perdemos a base de que precisamos para descrever qualquer coisa – da mesma maneira como não podemos mover coisa alguma com as mãos a menos que os pés estejam firmemente apoiados no chão (WITTGENSTEIN, 2005, III, § 26).

O que foi dissertado até então, é concernente às etapas elementares de articulação do significado. O nível subsequente é proposicional, e “Wittgenstein denomina “‘cálculo com a linguagem’”” (MORENO, 2015, p. 102), “se *conta* [calcula], se opera com as palavras” (WITTGENSTEIN, 2014, § 449, grifo do autor). Nesse nível, as expressões linguísticas são portadoras de necessidade, pois parece que o significado não pode ser negado e nem pensado diferentemente; elas “descrevem situações que parecem não poder ser negadas – com o risco de gerarem contradições ou perderem o sentido” (MORENO, 2012, p. 82).

Trata-se de proposições com a função normativa, concebidas como padrões de sentido ou de critérios de referência para a ação linguística. Elas conservam apenas a necessidade das convenções, tais como: “Esta é a minha mão”, “Vejo que chove”, “Estou com dor de cabeça” (MORENO, 2012, p. 91-92). Portanto, exprimem o conhecimento das convenções linguísticas de nossa percepção e, por meio desse conhecimento, é possível agir com certeza. Além dessas, as proposições “somos seres humanos”, “a Terra existe há muitos anos” (GLOCK, 1998, p. 73), por exemplo, fundamentam-se em evidências, embora nem sempre determinadas, e são as certezas que fundamentam o conhecimento.

Assim como os paradigmas e definições, essas proposições, que expressam certezas inquestionáveis, também assumem o papel de regras. Essas também contêm uma necessidade, não é possível imaginar o oposto do que expressam, são legitimadas nas formas de vida e não exprimem conhecimentos porque não podem ser falseadas.

Embora essas proposições possuam uma natureza sintética[70], exercem uma função, “elas são construídas a *parte post*” (MORENO, 2015, p. 92; MORENO, 1995), ou seja, quando usadas no contexto pragmático. Essas proposições são regras constitutivas da linguagem, têm função paradigmática, e a elas Wittgenstein chama de proposições gramaticais (WITTGENSTEIN, 2014, § 295; § 458). Assim, Wittgenstein emprega a palavra “gramática”,

[70] A natureza sintética das proposições gramaticais é com base na filosofia kantiana. No terceiro capítulo é discutido que os juízos sintéticos *a priori* independem da experiência e a combinação entre os conceitos apresentados no enunciado se constitui como condição necessária para sua veracidade (BARKER, 1969).

mas não em seu sentido usual, para se referir a um "conjunto de usos efetivos e/ou possíveis de palavras interligadas de diferentes maneiras, que desempenham um papel normativo" (GOTTSCHALK, 2019, p. 246, tradução nossa)[71].

Ainda sobre o exemplo dado, no qual a criança aprendeu a usar a palavra "vermelho", o gesto ostensivo, os objetos vermelhos, a definição de vermelho, são regras que constituem a "gramática" das cores. À medida em que a criança vai aprendendo a seguir as regras de uso das palavras vermelho, azul, verde – "que envolvem fragmentos do empírico (objetos, ações) com função linguística" –, está incorporando a "gramática" das cores (GOTTSCHALK, 2013, p. 66).

A partir dos diversos usos das palavras vermelho, azul, verde, é definido o que é vermelho, azul, verde, pois "é a gramática que define o que é o objeto, e não algo exterior ao uso das palavras" (MORENO, 2012, p. 75); "A gramática diz que espécie de objeto uma coisa é" (WITTGENSTEIN, 2014, § 373). Essas proposições, que fazem parte da gramática, não são empiricamente verificáveis quando confrontadas com a realidade, pois são tais proposições condicionam o significado e o valor de verdade de outras proposições com função descritiva e, por isso, são contingentes: as proposições empíricas (CHAUVIRÉ, 1994).

Contudo, não há uma divisão precisa entre proposições empíricas e gramaticais nos jogos de linguagem, o que existe são possibilidades de oscilações quanto aos usos dessas proposições, de modo que elas flutuam entre os usos empírico e o gramatical. A proposição "a água pura ferve no nível do mar a 100ºC"[72] (WITTGENSTEIN, 2014, § 293), embora inicialmente considerada com uma função descritiva, em algum momento da história da Ciência, passou a ser usada pelos cientistas com a função gramatical, "como critério para o que significa ser água, ou seja, essa afirmação agora tem um uso gramatical em invés de um uso empírico" (GOTTSCHALK, 2022a, p. 31, tradução nossa)[73].

Pode-se dizer que houve uma oscilação quanto à função dessa proposição, do empírico para o gramatical, quando a comunidade científica legitimou "a água pura ferve no nível do mar a 100ºC" como um dos critérios para o que é ser água. Entende-se que essa proposição é uma regra, que fundamenta a construção de outros jogos de linguagem (FATTURI, 2014) da Física ou da Química que apresentam proposições empíricas. Porém, cabe ressaltar que, "não é

---

[71] "the set of effective and/or possible uses of words interconnected in different ways, which play a normative role" (GOTTSCHALK, 2019, p. 246). Esses elementos constituem uma gramática, especificada como "profunda" (WITTGENSTEIN, 2014, § 664).
[72] No § 293 do livro *Da Certeza*, Wittgenstein apresenta esta proposição escrita da seguinte maneira: "A água ferve a 100ºC".
[73] "as a criterion for what it means to be water, that is, what statement now has a grammatical rather than an empirical use" (GOTTSCHALK, 2022a, p. 31)

apenas uma evolução histórica no uso de nossos conceitos, mas diferentes usos da mesma proposição *em diferentes contextos*"[74] (GOTTSCHALK, 2022a, p. 31-32, tradução nossa, grifo da autora). Para isso, Wittgenstein estabelece uma analogia entre a linguagem e o rio,

> Poderia imaginar-se que algumas proposições, com a forma de proposições empíricas, se tornavam rígidas e funcionavam como canais para as proposições empíricas que não endureciam e eram fluidas, e que esta relação se alterava com o tempo, de modo que as proposições fluidas se tornavam rígidas e vice-versa (WITTGENSTEIN, 1969, § 96).

Sob a ótica do filósofo, as proposições empíricas estariam no fluxo do rio e as proposições gramaticais se encontrariam enrijecidas no leito do rio, de modo que "as proposições fluidas se tornavam rígidas e vice-versa" (WITTGENSTEIN, 1969, § 96). Nesse sentido, entende-se que há possibilidade de oscilação entre essas proposições, sendo que as proposições empíricas expressam o conhecimento humano que é duvidoso, enquanto as proposições gramaticais moldam esse conhecimento (GOTTSCHALK, 2022a).

Além desses exemplos, Gottschalk (2002) também explicita sobre a oscilação de uma mesma proposição. Segundo a autora, entende-se que quando alguém diz para uma criança "Isto é vermelho!", trata-se de uma proposição gramatical, visto que está sendo apresentado para ela o que é vermelho, ou seja, refere-se a uma regra de apresentação do que é vermelho. Contudo, quando a criança olha para objetos vermelhos e diz "Isto é vermelho!", há uma proposição empírica: ela está descrevendo objetos, sendo que para conseguir fazer a descrição de objetos, mediante o uso da palavra "vermelho", a criança precisa ser ensinada que vermelho é uma cor. As proposições gramaticais não anunciam pressupostos tão evidentes e nem são naturais que dispensem algum tipo de ensino.

Desse modo, Wittgenstein mostra que é possível distinguir as funções da linguagem como descritiva (ou representativa) e normativa, as quais se apresentam nos usos da linguagem que não são fixos, mas que flutuam. Por conta disso, uma mesma palavra ou expressão linguística pode assumir ambas as funções, ou seja, ela pode oscilar entre a função descritiva e a normativa, a depender do jogo de linguagem onde se encontra.

Diante das proposições gramaticais, segue-se a regra (WITTGENSTEIN, 2014, § 219), tendo em vista a existência da "pretensa obediência à regra [que] é criação nossa", trata-se de uma criação normativa. Seguir ou aplicar uma regra não é concernente a um conhecimento tácito ou inconsciente, ou até mesmo de se ter a impressão de obedecer uma voz interior (CHAUVIRÉ, 1991, p. 97). Não há como não seguir as regras, pois essas orientam e justificam

---

[74] "it is not just a historical evolution in the use of our concepts, but different uses of the same proposition *in different contexts*" (GOTTSCHALK, 2022a, p. 31-32, grifo da autora).

a maneira de agir “para justificar *minha maneira de agir* de acordo com a regra” (WITTGENSTEIN, 2014, § 217, grifo do autor).

Por fim, com essa discussão, o que se quer chamar a atenção é que, nos jogos de linguagem, os paradigmas e as definições servem como um padrão de correção e fornecem uma razão para agir de certa maneira (BAKER; HACKER, 2005). Os paradigmas não incluem somente objetos físicos, mas as sensações, gestos, comportamentos, incorporados como meio de apresentação na linguagem (MORENO, 2012); e as definições são regras (ou normas), que, por sua vez, não significam comandos e ordens, mas “nos dizem o que é falar corretamente ou com sentido” (GOTTSCHALK, 2002, p. 53).

Importa salientar que, no contexto linguístico é possível distinguir entre o papel gramatical e o empírico das proposições, embora não seja uma demarcação muito nítida; “Mas eu distingo entre o movimento das águas no leito do rio e o desvio do próprio leito; ainda que não haja uma nítida demarcação entre eles” (WITTGENSTEIN, 1969, § 97). Entretanto, o fato de não se fazer a distinção entre o papel das proposições nos diferentes contextos é uma das fontes de confusões conceituais (GOTTSCHALK, 2022a).

5 CONCEPÇÕES FILOSÓFICAS DA MATEMÁTICA E O PONTO DE VISTA DE WITTGENSTEIN

Inicialmente, este capítulo aborda brevemente alguns aspectos de diferentes modos de conceber o conhecimento matemático, perpassando o ponto de vista de alguns filósofos da antiguidade grega, de Kant e das principais correntes filosóficas da Matemática (intuicionismo, formalismo e logicismo). Na sequência, são apresentadas algumas observações da Matemática consoantes com o pensamento de Wittgenstein.

A Matemática entrou na cultura dos povos antigos como uma técnica de fazer cálculos aritméticos e geométricos elementares, mas ainda lhe faltava “o caráter sistemático, rigoroso, puro – isto é, não empírico” (SILVA, 2007, p. 31). Na antiguidade grega, em específico, a Matemática era predominantemente Geometria e ela já havia se tornado uma das grandes fontes de indagações (BARKER, 1969). Desse modo, as questões suscitadas em torno da Matemática contribuíram para filósofos e matemáticos gregos se ocuparem com reflexões sobre os modos de conceber a Matemática, sobre o estatuto atribuído aos seus objetos, como conhecê-los e aplicá-los no mundo real (SILVA, 2007). A partir daí, a natureza do conhecimento matemático é explicada por diversas correntes filosóficas.

Na perspectiva de Platão (platonismo), a existência da Matemática independe dos seres humanos. Os objetos matemáticos preexistem no mundo das ideias matemáticas, são universais e podem ser acessados somente por meio das faculdades da inteligência: a razão e o entendimento, dispensando o uso dos sentidos. Desse modo, os objetos matemáticos existem fora do espaço e tempo da experiência física, são imutáveis: não foram criados e nem desaparecerão (DAVIS; HERSH, 1989). O mundo empírico é um mundo de aparências que apenas reflete imperfeitamente as ideias e essências perfeitas (SILVA, 2007), que são modelos ideais de objetos ou de situações do mundo sensível, suscetíveis de uma definição precisa (MACHADO, 1987).

Portanto, para o platonismo, o conhecimento consiste em acessar as ideias que estão no mundo sensível por meio da razão e do entendimento. Assim, a Matemática se apresenta ao mundo empírico como descritiva de entes que têm uma existência *a priori,* de modo que os enunciados matemáticos são verdades representativas desses entes descobertos pelos matemáticos. Em outras palavras, “o matemático não pode criar ou inventar os objetos acerca dos quais fala; esses objetos estão aí para serem descobertos e descritos" (BARKER, 1969, p. 105)[75].

No pensamento filosófico de Aristóteles (empirismo), os objetos matemáticos são idealizações dos objetos empíricos, pois somente as suas essências são retidas dos objetos empíricos (MACHADO, 1987). Além dessa interpretação, em consonância com Silva (2007), os objetos matemáticos podem ser concebidos apenas como abstrações de objetos empíricos. Nesse caso, a abstração pode ser entendida como um processo lógico-linguístico que possibilita falar e atribuir propriedades a algum aspecto de um objeto empírico. A forma geométrica esférica, por exemplo, seria uma abstração de algum tipo de bola; e a adição é uma abstração relacionada à quantidade total de livros existentes em uma determinada coleção, por exemplo.

Deste ponto de vista, a Matemática é constituída a partir da experiência sensorial do mundo empírico, ou seja, os objetos matemáticos são abstraídos por meio dos sentidos e objetos empíricos. Porém, segundo Machado (1987), Aristóteles não corrobora com Platão sobre os enunciados matemáticos serem verdades que descrevem os objetos matemáticos, mesmo os do mundo empírico. Para Aristóteles, os enunciados matemáticos são representações mais ou menos adequadas destes objetos, a depender do fim que se objetiva. Com isso, ele consegue atentar para a estrutura lógica dos sistemas de proposições e para as demonstrações matemáticas. Assim, o filósofo reabilita o mundo empírico e vislumbra a possibilidade de o matemático criar os objetos matemáticos (MACHADO, 1987).

Kant, por sua vez, desloca o foco do conhecimento matemático ao transpor os domínios matemáticos – mundo transcendente de Platão e mundo empírico de Aristóteles – para o interior do intelecto humano (SILVA, 2007) e se torna o mais ilustre representante da corrente conceitualista.[76]

Segundo o pensamento kantiano, a Matemática (leis da Aritmética e da Geometria Euclidiana) é tida como um corpo de conhecimento sintético *a priori*[77] que se assenta numa forma pura de intuição. Esse tipo de intuição, categorizada em espaço e tempo, é considerada por Kant como inerente à mente humana, que independe da experiência sensorial. Neste sentido,

---

[75] O platonismo, com variações, perdurou. O matemático austríaco do século XX, Gödel, por exemplo, concebe o mundo das ideias matemáticas como o universo da Teoria de Conjuntos (DAVIS; HERSH, 1989). O matemático inglês Hardy também sustenta a existência de uma realidade matemática *a priori*. Sob sua ótica, a realidade matemática reside fora do ser humano e é função do homem descobri-la. Desse modo, as demonstrações dos teoremas são simplesmente registros das observações humanas (COBB, 1996).

[76] Barker (1969) utiliza o termo *conceptualismo* e, segundo Gottschalk (2002, p. 43), Kant é denominado "conceitualista", pois considera "'o mundo em si' inacessível para nós". Além disso, para a filosofia kantiana, os objetos matemáticos são decorrentes do pensar, eles não têm uma existência independente, mas possuem um tipo de realidade (GOTTSCHALK, 2002).

[77] Este tipo de conhecimento envolve certezas que não são justificáveis pela experiência sensorial e nem pela conexão intrínseca dos conceitos (BARKER, 1969). O assunto é também discutido no terceiro capítulo.

as intuições de espaço e tempo são faculdades mentais universalmente válidas para todas as mentes humanas (DAVIS; HERSH, 1989).

Sendo assim, é o funcionamento da mente que possibilitaria atingir as verdades matemáticas. Entende-se que os conceitos numéricos consistem em representações mentais[78] da contagem e, da mesma forma, os conceitos da Geometria Euclidiana também são representações mentais passíveis de constituição por meio das intuições puras. Por exemplo, embora triângulos imperfeitos sejam traçados no mundo empírico, a imaginação permitiria visualizar triângulos perfeitos. Essa ideia de construção é fundamental em todas as variantes construtivistas da Matemática, ou seja, nas que defendem que a Matemática é construída, e não descoberta (SILVA, 2007).

O caráter sintético *a priori* da Matemática presente na filosofia kantiana inspira o matemático holandês Luitzen Brouwer (1881-1966), que também sustenta a ideia de pura intuição para a contagem como ponto de partida para a Matemática do número. Por isso, a filosofia do grupo de matemáticos liderado por Brouwer, desenvolvida na década de 1920, é denominada intuicionista: "O intuicionista acredita que os números sejam criações do espírito e admite, com Kant, que a mente pode conhecer cabalmente aquilo que ela mesma gera" (BARKER, 1969, p. 102).

Os intuicionistas consideram a Matemática como uma construção de entidades abstratas que não são preexistentes, nem emergem do empírico. Essa estruturação constitui um mundo à parte, oriundo da intuição do matemático, e é reduzida a uma linguagem lógica ou a uma formalização rigorosa de um sistema dedutivo (MACHADO, 1987).

A concepção filosófica kantiana da Matemática inspirou os intuicionistas, mas algumas conclusões de Kant são questionadas por diversos matemáticos. Gottlob Frege, por exemplo, acredita que as verdades aritméticas são analíticas, mas sua analiticidade é distinta da kantiana (SILVA, 2007). Para Frege, o conhecimento analítico vai além da compreensão da linguagem, pois o conhecimento dos números existe *a priori,* ou seja, seria possível compreender a linguagem dos números sem, contudo, saber suas leis (BARKER, 1969). Além disso, o matemático sustenta a ideia de que a Aritmética poderia ser reduzida à Lógica (SILVA, 2007).

Posteriormente, a tese logicista de Frege foi reforçada minuciosamente por Russell e Whitehead. Cabe mencionar que o logicismo é uma perspectiva filosófica da Matemática que visa estabelecer a Lógica como um fundamento seguro para a Matemática (BARKER, 1969).

[78] Como se fossem cópias de objetos na mente (SILVA, 2007).

Dessa forma, os conceitos da Matemática são definidos sob a forma de conceitos lógicos, e as proposições derivam de princípios lógicos via dedução lógica (GLOCK, 1998).

Não muito tempo após Frege, o matemático alemão e contemporâneo de Brouwer, David Hilbert (1862-1943), destaca-se principalmente pela defesa do método axiomático (SILVA, 2007). Ele se torna o principal representante do formalismo que, contrariamente ao intuicionismo, não considera os números como construções mentais, mas como símbolos, objetos abstratos incorporados como objetos concretos e que, por isso, são chamados de objetos quase concretos (HORSTEN, 2022).

O formalismo não considera os objetos matemáticos como preexistentes, mas decorrentes da manipulação de símbolos de acordo com regras. Isso se assemelha a dizer que a Matemática equivale a axiomas, definições e teoremas, ou seja, consiste em fórmulas que também podem ser aplicadas aos problemas físicos. Segundo a interpretação física, a fórmula adquire significado e pode ser considerada verdadeira ou falsa somente por meio da aplicação. Logo, a fórmula puramente matemática não tem significado e não pode ser considerada verdadeira ou falsa.

Estas três concepções filosóficas da Matemática – intuicionismo, logicismo e formalismo – abordam o conhecimento matemático distintamente: como criação das formas da pura intuição (intuicionismo); como leis gerais do pensamento, ou seja, leis lógicas (logicismo); ou como um conjunto de sistemas formais (formalismo). Apesar do esforço empregado por essas correntes filosóficas, o intuicionismo contém uma lacuna no que tange à compreensão das formas puras da intuição para as construções matemáticas. Da mesma forma, ao logicismo faltam explicações sobre a origem das leis lógicas, e o formalismo não investigou uma possível concordância entre os sistemas formais (abstratos) com o real (DAVIS; HERSH, 1989).

Na década de 1920, enquanto o intuicionismo, o logicismo e o formalismo[79] desenvolvem suas discussões sobre a Matemática, Wittgenstein publica o *Tractatus*. E apesar de ter sido discípulo do logicista Russell em Cambridge, Wittgenstein não foi um logicista em sua primeira filosofia.[80]

---

[79] Do logicismo, “Wittgenstein conservou, no entanto, a ideia de que há uma diferença entre as tautologias da lógica, que nada dizem, e não podem, portanto, expressar uma regra, e as proposições matemáticas, que por si só expressam regras” (GLOCK, 1998, p. 244). Quanto ao intuicionismo, o pensamento wittgensteiniano se distingue da concepção da Matemática como criação de intuições puras (espaço e tempo), de modo que os objetos matemáticos são considerados representações mentais e a linguagem serve apenas para comunicá-las. Wittgenstein também evita o formalismo, então não concebe a existência dos objetos matemáticos como oriundos da manipulação de símbolos que por si só não possuem significados, sendo governada por regras encontradas no próprio simbolismo, ou seja, no método axiomático (GLOCK, 1998).

[80] A tendência é de se pensar que o primeiro Wittgenstein tenha sido um logicista, porém, a tentativa de fundamentação da Aritmética de Wittgenstein difere de Russell (ALVES, 1989).

Posteriormente ao *Tractatus,* a partir de 1929, o pensamento de Wittgenstein se modifica. O próprio filósofo atribui as alterações em seu modo de pensar às conversas que ele teve com seu amigo e matemático inglês Frank Ramsey e às suas reflexões sobre as disciplinas que ele ministrava na Universidade de Cambridge.

Há escritos do período pós *Tractatus* até os que compõem parte das *Investigações* que compreendem a Filosofia da Matemática de Wittgenstein, a qual sofre variações. O período pós *Tractatus* é marcado por dois momentos: o primeiro, denominado "concepção do cálculo"[81], entre 1929 a 1930, e o segundo, denominado "concepção de jogo de linguagem", dos meados de 1930 até o início de 1940.

A retomada de Wittgenstein de seus estudos em filosofia no final de 1920 marca a transição da defesa do mundo da forma lógica e definição de sentido do *Tractatus* para a abordagem dos jogos de linguagem e formas de vida nas *Investigações*. Desse modo, as mudanças ocorridas não abarcam apenas a sua Filosofia da Matemática, mas também uma compreensão mais completa da linguagem e do significado em sentido amplo, isto é, que não se restringe apenas à Matemática (GERRARD, 1987).

Contudo, apesar de todas as transformações do pensamento de Wittgenstein, existem alguns pontos no seu modo de pensar a Matemática que não se alteraram. Em todos os momentos, ele se opôs e tentou minar uma imagem enganosa da natureza da Matemática, identificada por Wittgenstein nos escritos do seu contemporâneo, o matemático platônico Hardy. Tal imagem concerne à existência de uma realidade matemática subjacente, independente da prática matemática, e essa realidade é tomada como critério de correção dessa mesma prática. Assim, a concepção se assemelha à imagem agostiniana da linguagem no âmbito do pensamento filosófico de Wittgenstein. Com ela em mente, tratava-se, pois, da "imagem hardyiana", assim denominada em homenagem a Hardy, e tentava afastar-se de suas tentações e confusões.

Vale ressaltar que Wittgenstein não está se opondo à ideia da existência de uma realidade matemática. Entretanto, tendo em vista a imagem hardyana, ele contesta que uma realidade matemática independente da prática matemática e da linguagem possa servir como critério de correção da prática matemática. Do ponto de vista wittgensteiniano, critérios externos não poderiam ser utilizados para julgar a prática matemática, pois são considerados apenas critérios e questões internas para correção de cálculos e argumentos matemáticos (GERRARD, 1987; 1991).

[81] Na "concepção do cálculo" a linguagem matemática é reduzida a meras regras sintáticas, sem interpretação, e desconexa das práticas humanas (GERRARD, 1987). Nesta discussão, o foco é a "concepção jogo de linguagem".

Conforme a imagem hardyiana, no que tange à prática matemática, considera-se uma verificação adicional, tendo em vista uma correspondência entre a prova matemática e uma realidade matemática. O problema em questão não é restrito à existência desses critérios, mas à ideia de que "as provas são apenas artifícios psicológicos para nos levar a ver a realidade matemática com mais clareza. **A garantia real para a verdade de nossas proposições matemáticas não vem da prova, mas dessa realidade**" (GERRARD, 1991, p. 129, tradução nossa, grifo nosso)[82]. Assim, o matemático Hardy compara as provas matemáticas aos floreios retóricos para afetar a mente ou aos dispositivos para estimular a imaginação dos estudantes, pois o que interessa de fato é uma suposta realidade matemática que serviria como critério de correção para a Matemática.

Na imagem agostiniana, o significado da palavra é o objeto que se refere a ela, ou seja, o significado é extralinguístico. Nesse sentido, o mesmo ocorre na imagem hardyiana: a prova aponta para uma realidade matemática e, se esta realidade difere da prova, então a prova está errada. Entende-se que a suposta realidade matemática é imutável e serve como padrão de correção para a prova. Diante disso, Wittgenstein questiona se faria sentido algo que anule a linguagem e a prática matemática. A questão não é se essa realidade é perceptível, mas se ela poderia servir de critério para a veracidade dos cálculos e das provas, implicando em significados extralinguísticos dos termos matemáticos (GERRARD, 1991).

Nesta imagem, ainda há o aspecto segundo o qual o matemático descobriria a realidade matemática. Assim, a Matemática é tratada como uma descoberta de objetos preexistentes, obscurecendo a diferença entre a Matemática e as Ciências Empíricas. Porém, para Wittgenstein, a Matemática é concebida como uma invenção humana e não como uma descoberta de objetos matemáticos existentes *a priori.*

> Fala-se de descobertas matemáticas. **Tentarei repetidamente mostrar que o que é chamado de descoberta matemática seria muito melhor ser chamado de invenção matemática.** Em alguns dos casos que aponto, talvez você se sinta inclinado a dizer: "Sim, é melhor chamá-los de invenções"; em outros casos, talvez você esteja inclinado a dizer: "Bem, é difícil dizer se neste caso algo foi descoberto ou inventado" (WITTGENSTEIN, 1939, p. 22, tradução nossa, grifo nosso).[83]

Diante do exposto, quando alguém resolve uma operação matemática – $22 + 46$, por exemplo – não se está inventando nem descobrindo nada. Como foram estabelecidos os critérios

[82] "(…) proofs are only psychological devices to get us to see mathematical reality more clearly. The real warrant for the truth of our mathematical propositions comes not from proof, but from this reality" (GERRARD, 1991, p. 129).
[83] One speaks of mathematical discoveries. I will try again and again to show that what is called a mathematical discovery would much better be called a mathematical invention. In some of the cases I point out, you may feel inclined to say, "Yes, it is better to call them inventions"; in other cases, you may be inclined to say, "Well, it's hard to say whether in this case something was discovered or invented" (WITTGENSTEIN, 1939, p. 22).

e as regras matemáticas, obter o resultado correto (68) faz parte do critério da própria prática Matemática (GERRARD, 1987). A inventividade de que fala Wittgenstein surge quando novos procedimentos, conceitos ou princípios são introduzidos "depois da assimilação e concordância na comunidade matemática (...)" (GERRARD, 1987, p. 21, tradução nossa).[84]

Nos escritos do período de transição do *Tratactus* para as *Investigações*, Wittgenstein discute sobre o perigo de tratar a natureza da Matemática tal como a das Ciências Empíricas (Zoologia, Mineralogia, Pomologia). Ao se reportar à Física, ele também identifica a imagem hardyiana: "O professor Hardy está comparando proposições matemáticas com proposições da física. Essa comparação é extremamente enganosa" (WITTGENSTEIN, 1939, p. 240)[85]. Assim, a Matemática investigaria propriedades de objetos matemáticos abstratos que são absolutamente precisos, e o matemático, por meio da observação, os descobriria (GERRARD, 1987).

Em todo o período de transição, Wittgenstein procurou dissolver mal-entendidos decorrentes da imagem hardyiana. Na segunda fase dessa transição, chamada "concepção de jogo de linguagem", ocorre uma mudança profunda na perspectiva de Wittgenstein sobre o funcionamento da linguagem.

Nesta fase, princípios da "concepção de cálculo" são modificados ou descartados conforme as noções de jogos de linguagem e formas de vida se revelam. As regras são enfatizadas, mas agora num contexto de uso. Ademais, com as adequações, a noção de um significado extralinguístico é negada (GERRARD, 1991), pois os significados das proposições matemáticas são seus usos no próprio cálculo (WITTGENSTEIN, 2010, §27).

> Um nome tem significado, uma proposição tem sentido no cálculo ao qual pertence. O cálculo é, por assim dizer, autônomo. A linguagem deve falar por si mesma. Eu poderia dizer: a única coisa que é de interesse para mim é o conteúdo de uma proposição, e o conteúdo de uma proposição é algo interior a ela. Uma proposição tem seu conteúdo como parte de um cálculo.
> **O significado é o papel da palavra no cálculo** (WITTGENSTEIN, 2010, §27, grifo nosso).

Na "concepção de jogo de linguagem", Wittgenstein também menciona o jogo de xadrez para afirmar que "o significado de uma peça (uma figura) é seu papel no jogo [de xadrez]" (WITTGENSTEIN, 2014, § 563). Assim, ele acrescenta que as regras devem ser inseridas no contexto da atividade humana. Sob essa concepção, os cálculos não são sistemas isolados de regras, mas são sistemas de regras que têm algum papel em algum contexto da atividade

[84] "(…) new concepts or principles which after assimilation and agreement by the mathematical community will become new criteria for doing mathematics." (GERRARD, 1987, p. 21).
[85] Professor Hardy is comparing mathematical propositions to propositions of physics. This comparison is extremely misleading (WITTGENSTEIN, 1939, p. 240).

humana. Além disso, o cálculo não pode ser separado do uso prático ou do seguimento de regras, uma vez que já implica um sentido de aplicação que envolve, justamente, seguir procedimentos e regras (GERRARD, 1991).

Nas *Investigações*, a Matemática é vista como um nexo de jogos de linguagem, relacionados entre si e ancorados nas formas de vida (GERRARD, 1991). Wittgenstein defende um "construtivismo" segundo o qual a Matemática é inventada, construída: "ele [o matemático] inventa, ou melhor, *constrói* conexões entre conceitos que não preexistem de maneira alguma a seu ato construtivo" (CHAUVIRÉ, 1991, p. 98, grifo da autora).

Para o filósofo, a Matemática se constitui à medida que são estabelecidas novas conexões entre conceitos matemáticos (WITTGENSTEIN, 2022, III, § 31), que se apresentam sob forma de proposições matemáticas com "o caráter de normas, regras a serem seguidas, obtidas por definição ou através da prova matemática" (GOTTSCHALK, 2014, p. 62).

> Quando disse que uma demonstração introduz um novo conceito, quis dizer algo como: **a demonstração coloca um novo paradigma para os paradigmas da linguagem**; assim como quando se mistura um azul avermelhado, de algum modo se estabelece uma particular mistura de cores e se lhe dá um nome. Mas mesmo quando estamos inclinados a nomear uma demonstração como um novo paradigma assim - qual é a exata similaridade de uma demonstração com um modelo de conceito assim? Gostaríamos de dizer: **a demonstração modifica a gramática da nossa linguagem, muda os nossos conceitos. Ela forma novas conexões e cria o conceito destas conexões.** (Ela não estabelece que elas estão lá, mas elas não estão lá antes que a demonstração as forme.) (WITTGENSTEIN, 2022, III, § 31, grifo nosso).

Portanto, a Matemática não é concebida como um sistema autônomo fechado, tal como na "concepção do cálculo" (GERRARD, 1991). No § 23 das *Investigações,* o filósofo discorre sobre a dinamicidade dos jogos de linguagem e, consequentemente, sobre a dinamicidade da Matemática, uma vez que esta é constituída por uma multiplicidade de jogos de linguagem: "E essa variedade não é algo fixo [...]; mas, podemos dizer, novos tipos de linguagem, novos jogos de linguagem surgem, outros envelhecem e são esquecidos" (WITTGENSTEIN, 2014, § 23).

Além de Wittgenstein abordar a Matemática como uma miscelânea de jogos de linguagem, também especificou a natureza desses jogos ao examinar o papel desempenhado pela Matemática na vida humana e em relação a outros jogos de linguagem (GERRARD, 1987).

Nesse sentido, enquanto prática, a Matemática requer uma regularidade, um uso contínuo; "alguém só se orienta por uma placa de orientação na medida em que houver um uso contínuo" (WITTGENSTEIN, 2014, § 198). Caso contrário, haveriam confusões e resultados absurdos. Por isso, para Wittgenstein, as proposições matemáticas adquirem um papel especial semelhante ao da barra do metro padrão, pois "a matemática é, como tal, sempre a medida e não o medido" (WITTGENSTEIN, 2022, III, § 75).

Assim, as proposições matemáticas são normativas[86] e os critérios de correção são internos à prática matemática (GERRARD, 1987). Como as proposições matemáticas são normativas porque servem como padrão de correção – tal como é a barra de medição padrão – para definir o que faz sentido ou não, então elas são tidas como regras de uso da linguagem e compõem uma "gramática matemática" que depende apenas das decisões humanas, é autônoma e não diz nada sobre nenhuma realidade (CHAUVIRÉ, 1991, p. 104).

Em síntese, "As regras [proposições] matemáticas *não falam diretamente sobre a realidade, nenhuma realidade,* como uma realidade platônica abstrata de objetos ideais. As regras matemáticas estabelecem novos critérios para o emprego de termos antigos, alterando assim, seus sentidos" (PORTO, 2007, p. 83, grifo do autor), o que implica que as proposições matemáticas não descrevem objetos de uma realidade empírica, transcendental ou mental. Entende-se que assim como outras proposições gramaticais, as proposições matemáticas regulam procedimentos e ações nas quais elas estão envolvidas e também constituem o sentido de proposições empíricas, de modo que são consideradas fundamento para este outro tipo de proposição (MORENO, 2012).

Em um exemplo dado por Wittgenstein, na proposição $25 \times 25 = 625$ existe uma conexão interna entre os dois lados da igualdade estabelecida pela técnica da multiplicação, de maneira que a multiplicação de 25 por 25 "deve" ser igual a 625. Assim, segundo Gottschalk (2014), a proposição matemática $25 \times 25 = 625$ não é uma hipótese que pode ser verificada via experimento. Os resultados das proposições matemáticas não decorrem de experimentos, nos quais verificamos hipóteses. As proposições matemáticas, "uma vez provada[s], passa[m] a desempenhar a função de regra" (GOTTSCHALK, 2014, p. 63) e, por isso, não se questiona a certeza expressa por tais proposições.

Assim como $25 \times 25 = 625$ é uma proposição de natureza gramatical, dizer que "existem equações que têm três raízes" também é. As proposições matemáticas podem ser utilizadas para a descrição de fatos empíricos e, assim, exercem uma função descritiva, tal como a proposição empírica "há três maçãs na cesta" (GOTTSCHALK, 2013).

Quando alguém diz "10 laranjas mais 5 laranjas são 15 laranjas", uma conexão externa entre conceitos aritméticos e objetos empíricos (laranjas) é estabelecida. Há uma proposição empírica sobre juntar quantidades de laranjas, é possível contar todas as laranjas e verificar empiricamente se existem 15 laranjas, o que difere da proposição "a soma de 10 com 5 deve ser igual a 15", uma situação matemática que expressa o resultado da soma de 10 com 5,

[86] "O que digo provém do fato de que a matemática é normativa" (WITTGENSTEIN, 2022, VII, § 61).

independentemente de constatações empíricas. Essa proposição matemática permite descrever um fato empírico, a junção de quantidades de laranjas, pois "Para o filósofo, as proposições da Matemática têm uma função essencialmente normativa, e não descritiva. [...] essas proposições são *condições de sentido* para as proposições empíricas, e não se confundem com elas" (GOTTSCHALK, 2002, p. 65, grifo da autora).

No entanto, ao se pensar que a natureza da proposição "a soma de 10 com 5 deve ser igual a 15" é empírica, verifica-se uma confusão conceitual, pois essa proposição é de natureza gramatical. A dissolução da confusão ocorre quando se aceita que a natureza da atividade matemática não é igual à natureza da atividade das Ciências Empíricas, cujas proposições são essencialmente descritivas de fatos ou fenômenos. Além disso, "A própria linguagem matemática, [...] uma ciência exata por excelência, não tem como pretensão ser descritiva de nosso mundo empírico" (GOTTSCHALK, 2002, p. 65).

Desse modo, a Matemática oscila entre o transcendental puro, quando faz menção às proposições gramaticais, e o empírico, quando se refere às descrições de fatos, a depender dos usos dos conceitos matemáticos nos jogos de linguagem (GOTTSCHALK, 2014). Em outras palavras, "(...) a mesma proposição pode ser tratada uma vez como coisa a verificar pela experiência, outra vez como regra de verificação" (WITTGENSTEIN, 1969, § 98).

É possível que proposições na Matemática sejam oriundas de remotas situações do empírico. A Geometria Euclidiana, por exemplo, tem origem em formas de vida que utilizavam diversas maneiras de medição. Em operações matemáticas – como visto na adição de Números Naturais – existe uma técnica: o algoritmo do tipo "conta em pé", o emprego de um ábaco, uma contagem. E isso não quer dizer que os fundamentos matemáticos são empíricos, mas que podem existir razões empíricas para se chegar às formulações matemáticas (GOTTSCHALK, 2002).

Os novos aspectos de determinados conceitos surgem por meio de seus usos, sendo que, dessa forma, seus espectros de significados são ampliados. Na Matemática, quando o conceito de "igualdade" é definido como a correspondência "um a um" entre elementos de dois conjuntos, sugere-se outro modo de ver a "igualdade". Assim, os significados matemáticos se constituem gradualmente (GOTTSCHALK, 2007b), e a proposição se cristaliza como gramatical por meio da utilização das palavras que fazem parte dos diferentes enunciados matemáticos em diversos contextos. Com isso, trata-se de ver outro aspecto do conceito de igualdade (GOTTSCHALK, 2007b) ou da potenciação, como explicita Wittgenstein,

> Quando pergunto: "O que é o novo no 'novo tipo de cálculo' da potenciação" – é difícil de dizer. A locução 'aspecto novo' é vaga. Significa que vemos a coisa agora como diferente – mas a questão é: o que é o essencial, a expressão relevante deste

> ‘ver-diferente’? [..] – Bem, antes de tudo talvez o assente numa notação. Assim escreveria, por exemplo, em vez de ‘a x a’, ‘a^2’. Com isto me referiria à série de números (aludiria a ela), o que antes não havia ocorrido. Estabeleço, portanto, uma nova conexão! – Uma conexão – entre que coisas? Entre a técnica da contagem de fatores e a técnica da multiplicação (WITTGENSTEIN, 2022, III, § 47).

Por conseguinte, tenta-se persuadir[87] (o estudante, por exemplo) ao dizer que o conceito de “igualdade” ou de “potenciação” pode ser visto diferentemente nos jogos de linguagem da Matemática.

Em suma, Wittgenstein descarta ideias de outras concepções filosóficas da Matemática. Para ele, as proposições matemáticas não são descritivas de objetos pertencentes a algum tipo de realidade, transcendental ou empírica. Além disso, a Matemática não necessita estar fundamentada na Lógica e, como mencionado por Gottschalk (2014), o filósofo desconsidera a ideia de que as proposições matemáticas encontrem-se nos processos mentais ou nos signos.

A filosofia da Matemática de Wittgenstein difere das demais. Na tentativa de se afastar da imagem hardyiana, seu fazer filosófico configura-se como uma atividade terapêutica do pensamento confuso. Como resultado, a Matemática é concebida por Wittgenstein como uma construção resultante da conexão de conceitos, pois “O essencial das matemáticas consiste, portanto, em regras produzidas com a ajuda de outras anteriormente adotadas” (CHAUVIRÉ, 1991, p. 98) que se cristalizam como proposições gramaticais. Nesse sentido, a Matemática é uma atividade humana, governada por regras no contexto das práticas linguísticas que podem ser utilizadas para descrever fatos empíricos.

[87] Em Wittgenstein, a persuasão se dá por meio de razões que são as regras que justificam o modo de agir. Não se trata de abarcar causas, que podem ser de natureza empírica, histórica ou social e que levaram a algum tipo de convencimento (GOTTSCHALK, 2007b).

6 PRIMEIRA IMAGEM: NA MODELAGEM O ESTUDANTE DESCOBRE A MATEMÁTICA INSERIDA EM ALGUMA REALIDADE EXTRALINGUÍSTICA

Este capítulo é concernente à primeira imagem e possíveis esclarecimentos de confusões conceituais dos usos da expressão linguística "modelagem matemática" encontrados no material empírico. Dessa imagem, que exprime que **na Modelagem o estudante descobre a Matemática inserida em alguma realidade extralinguística,** surgem confusões conceituais que indicam que, *na Modelagem, a natureza dos enunciados matemáticos são tidos como de igual natureza aos enunciados das Ciências Empíricas*[88] e que *as conclusões dos estudantes (redescobertas ou descobertas pessoais) na Modelagem são de natureza empírica*.

Com base na terapia wittgensteiniana, inicia-se a descrição dos usos da expressão linguística "modelagem matemática", atentando para seu uso em um enunciado da dissertação de Scheffer (1995). A autora cita Gustineli (1990) para discutir a diferença entre o ensino de Matemática, realizado mediante o emprego de modelos matemáticos e o ensino de Matemática por Modelagem. Segundo Scheffer (1995), no ensino por modelos o estudante apenas apresenta justificativas para um modelo matemático oferecido a ele pelo professor. No ensino por Modelagem, o estudante utiliza esse procedimento metodológico para descobrir um modelo matemático. Por esse motivo, a autora relaciona a Modelagem como um processo de descoberta.

> [...] estabelece uma diferença entre ensino de modelos e Modelagem, **relacionando à Modelagem um processo de descoberta** enquanto que no ensino de modelos apenas busca-se uma justificação para um modelo já resolvido: *"o ensino de modelos é diferente do ensino de Modelagem, pois existe distinção entre justificar um modelo já resolvido e descobri-lo"* (GUSTINELI, 1990 *apud* SCHEFFER, 1995, p. 64, grifo da autora em itálico, negrito nosso).

O uso da expressão "modelagem matemática", que explicita uma concepção do ensino de Matemática como um processo de descoberta, é identificado em outras passagens dessa pesquisa, em que é mencionado sobre "tentativas experimentais proporcionadas pela Modelagem" (SCHEFFER, 1995, p. 144), e que o estudante descobre relações, as quais são concebidas pela autora como noções matemáticas decorrentes da experimentação de situações reais que foram identificadas nas falas dos estudantes, "O quadro de giz é um retângulo. A tampa da caixa de sapato é um retângulo. A bola é uma figura geométrica" (SCHEFFER, 1995, p. 144),

> A passagem da linguagem verbal para a escrita e representação ocorria quando os alunos tomam consciência da situação, ao **descobrir relações**, compreender o meio e raciocinar sobre suas experiências, **processo natural das tentativas experimentais**

[88] Considera-se que as Ciências Empíricas abarcam as Ciências da Natureza (Física, Química, Biologia) e as Ciências Sociais (Geografia, Antropologia, Psicologia, dentre outras).

> **proporcionadas pela Modelagem Matemática** (SCHEFFER, 1995, p. 144, grifo nosso).

O uso da expressão linguística “modelagem matemática”, que mostra uma concepção de ensino por Modelagem como um processo de descoberta, se assemelha a um dos usos extraídos de Oliveira (2004), no qual é dissertado que o ensino da Matemática, por Modelagem, fornece caminhos para o estudante sintetizar ideias que estão implícitas em situações do mundo empírico sob a forma de modelos matemáticos.

> O ensino de Matemática, na perspectiva da Modelagem, busca fornecer caminhos para que **o aluno sintetize as ideias que estão implícitas nas situações do mundo e nas informações por elas fornecidas.** Essa síntese se dá através da criação de um modelo que expresse a situação [...] (OLIVEIRA, 2004, p. 149, grifo nosso).

Esses usos possuem parentesco com um enunciado contido numa passagem de Biembengut (1990, p. 116), em que é dito que a Modelagem é “uma estrutura que tenta refazer o caminho da redescoberta matemática” e com a de Gustineli (1990, p. 64), em que é argumentado em favor de desenvolver no estudante a postura “de descobrir, de redescobrir” durante as aulas de Matemática.

> [...] **encaramos a Modelagem Matemática como uma estrutura que tenta refazer o caminho da redescoberta matemática**, tornando o aluno muito mais participante no processo de ensino-aprendizagem (BIEMBENGUT, 1990, p. 116, grifo nosso).

> Se, no quotidiano em que o homem vive, a Matemática é fundamental e necessária para sua locomoção em termos de vida, nada mais plausível desenvolver esta postura de buscar, **de descobrir, de redescobrir,** de pensar, de refletir, de criar, em aulas de Matemática (GUSTINELI, 1990, p. 64, grifo nosso).

Entende-se que a Modelagem como “uma estrutura” (BIEMBENGUT, 1990, p. 116), seria um subsídio metodológico, “um caminho” que possibilitaria recriar situações-problemas, parecidas com as que levaram matemáticos a descobrir verdades matemáticas no passado, para serem redescobertas pelos estudantes nas aulas de Matemática, corroborando uma atividade de redescoberta.

O aspecto sobre descobrir ou redescobrir a Matemática nas aulas é, também, encontrado na passagem de Gustinelli (1990), na qual é sustentado que, como a Matemática é fundamental no cotidiano do ser humano, então é plausível desenvolver a postura de descobri-la ou redescobri-la em aulas de Matemática.

O que é mencionado por Biembengut (1990), no tocante à Modelagem como uma estrutura, ou seja, como se fosse “um caminho” para “fazer Modelagem” e se chegar a redescobertas, vem ao encontro da passagem de Almeida (1993) que menciona sobre o método da Modelagem. O uso da expressão “modelagem matemática” em Almeida (1993) exprime uma compreensão de que a ela segue os preceitos do método dedutivo[89], remetendo à ideia de um processo de descoberta empregado nas Ciências Empíricas.

> A Modelagem segue à risca o processo que a humanidade utilizou desde a antiguidade até a era moderna, **utilizando o método dedutivo até chegar a uma lei** (ALMEIDA, 1993, p. 4, grifo nosso).

A fim de entender melhor a relação entre o método dedutivo e a Modelagem (ALMEIDA, 1993), recorre-se a Souza e Espírito Santo (2008). Segundo esses autores, ao valer-se do método dedutivo na Modelagem, a análise da situação-problema se daria mediante a decomposição da realidade em porções menores. Com isso, seria possível avaliar melhor como as variáveis estabelecidas no processo de Modelagem se relacionam entre si e com o fato observado.

Diante do modo como o método dedutivo pode ser percebido na Modelagem (SOUZA; ESPÍRITO SANTO, 2008), e ao considerar Almeida (1993), é possível apreender uma nuance no que tange ao uso da expressão “modelagem matemática”: haveria uma aproximação entre o processo de Modelagem e procedimentos metodológicos utilizados em aulas das Ciências da Natureza[90].

Tendo em vista o método dedutivo na Modelagem, a partir da realidade decomposta em porções menores (SOUZA; ESPÍRITO SANTO, 2008), seriam levantadas hipóteses e o problema é expresso sob a forma de um modelo matemático. O modelo poderia ser tomado como um “argumento particular”, que seria validado a partir de “argumentos gerais” válidos da situação real em investigação, passando, então, para o *status* de “lei” que representa a situação-problema do mundo empírico.

Segundo as passagens de Monteiro (1991), quando a Modelagem é voltada para o ensino, então as fases do processo de Modelagem são tidas como algo natural, até secundário, porque decorrem do desejo do estudante de descobrir a Matemática. Além disso, o método da Modelagem é fundamentado numa concepção de Matemática inserida na realidade (empírica).

> Assim, acreditamos que quando voltada para o ensino, [a] Modelagem Matemática adquire esta nova dimensão, onde **as fases do processo** é algo natural e até secundário; digamos que **é consequência de um desejo de se descobrir a matemática à medida que se aprofunda a análise da realidade vivida pelos educandos** (MONTEIRO, 1991, p. 122, grifo nosso).

> [...] **o método** da Modelagem Matemática se fundamenta numa visão de **matemática** que a vê **inserida na realidade** (MONTEIRO, 1991, p. 122, grifo nosso).

---

[89] Nas Ciências Empíricas, com base no método dedutivo, uma lei é compreendida como um argumento particular válido ao ser deduzido a partir do valor de verdade de premissas gerais acerca de um determinado fenômeno (HEMPEL, 1974).

[90] Considera-se que as Ciências da Natureza compreendem as disciplinas de Física, Química e Biologia.

Quanto à primeira passagem de Monteiro (1991), compreende-se que o desejo no estudante de conhecer, descobrir a Matemática, é alimentado pelo prazer da observação da realidade, o que é respaldado pelo filósofo empirista Aristóteles quando ele enaltece, dentre os cinco sentidos, a visão: “ela é, de todos os sentidos, o que melhor nos faz conhecer as coisas” (ARISTÓTELES, 1984, p. 11).

Além disso, importa considerar que é mencionado que as fases (etapas) para o desenvolvimento da Modelagem são tidas como secundárias, como algo que flui naturalmente nesse processo, pois são consequentes do desejo do estudante descobrir a Matemática à medida que ele vai explorando com mais profundidade a sua realidade. Ou seja, dá a entender que, pelo fato do estudante estar mais envolvido em buscar, verificar “qual Matemática” (qual/quais conceito(s), conteúdo(s) matemático(s) ou modelo(s) matemático(s), por exemplo) seria extraído desse exame da sua realidade, então as etapas do processo de Modelagem fluiriam naturalmente no decorrer desta procura.

Além dos usos da expressão “modelagem matemática” encontrados nos enunciados das passagens mencionadas, Anastacio (1990) disserta que, dentre as pessoas que trabalham com Modelagem, existe uma concepção sobre a Matemática presente na realidade. O que essas pessoas relatam sobre o trabalho com Modelagem corrobora o que é dito por Eduardo Sebastiani Ferreira, um dos pioneiros da Modelagem no Brasil, que expressa sobre a necessidade de desvendar a Matemática existente na realidade quando se trabalha com Modelagem (ANASTACIO, 1990).

> A concepção de matemática presente no que as pessoas que trabalham com MM relataram-me é essencialmente a da matemática como uma estratégia de ação na realidade, **sendo a própria matemática presente na realidade**. A leitura do relato traz as seguintes citações [...]. **“Para trabalhar com a MM é preciso desvendar a matemática presente na realidade que se deseja pesquisar”** (FERREIRA, 1985 a*pud* ANASTACIO, 1990, p. 31, grifo nosso).

A passagem de Anastacio (1990) trata da Matemática presente na realidade que se deseja pesquisar e que, ao se utilizar a Modelagem, essa realidade é investigada para desvendar a Matemática. Essa autora menciona acerca da realidade empírica na Modelagem e Araújo (2002), nas passagens seguintes, problematiza a temática da realidade e da Matemática na Modelagem à luz do platonismo e do formalismo.

> Uma compreensão da Modelagem Matemática nesse sentido [segundo a filosofia de Platão] seria, então, uma forma de descrever a realidade por meio da matemática. Assim, diante de um “problema da realidade”, os objetos que o constituem e suas relações se aproximariam de Formas matemáticas e suas relações. **A partir das verdades estabelecidas no mundo das Formas entre esses últimos, poderíamos descrever a situação no “problema da realidade”** (sensorial) tudo por meio da razão. Essa compreensão (geral) da Modelagem Matemática baseada no platonismo

> tem, também, sua versão na Educação Matemática (ARAÚJO, 2002, p. 25, grifo nosso).
>
> [...] uma compreensão da Modelagem Matemática inspirada no platonismo seria uma forma de descrever a realidade por meio da matemática. Já no que diz respeito ao **formalismo**, a Modelagem Matemática consistiria em **utilizar alguma teoria formal matemática já existente para resolver um problema da realidade, ou em construir alguma teoria para tal**, caso necessário (ARAÚJO, 2002, p. 30, grifo nosso).

Das passagens anteriores às de Araújo (2002), os usos da expressão "modelagem matemática" explicitam a ideia de que o modelo matemático descoberto pelo estudante é extraído da realidade dele, o que indica a existência de uma realidade matemática *a priori* no próprio mundo empírico, cujos aspectos matemáticos dessa realidade seriam passíveis de serem extraídos, tal como preconizado pela perspectiva empirista da Matemática.

Na passagem de Araújo (2002), é discutido que, na Modelagem à luz do platonismo, ao valer-se da razão, os objetos matemáticos existentes *a priori* no mundo das Formas descreveriam situações-problemas do mundo empírico. Diante do exposto, entende-se que, quando é considerada a realidade matemática transcendental da filosofia platônica, existe um processo de descoberta e descrição dos entes matemáticos (BARKER, 1969). Por isso, nessa problematização de Araújo (2002), embora não esteja explícito que o estudante descobre esses entes ao ter em conta uma perspectiva platônica da Matemática na Modelagem, entende-se que uma compreensão da Modelagem baseada no platonismo conduziria o estudante a crer que, os entes matemáticos que "surgem" no processo de Modelagem, são descobertas concernentes a uma Matemática preexistente numa realidade que não é empírica. Desse modo, a Matemática não seria uma invenção humana, mas apenas descreveria entes matemáticos transcendentais passíveis de serem descobertos.

Além disso, outra possibilidade discutida na Modelagem é que, se considerado o formalismo, então teorias matemáticas já existentes ou que poderiam ser construídas, se necessário, seriam utilizadas para resolver situações-problemas do mundo empírico, aproximando-se de uma aplicação matemática (ARAÚJO, 2002). Novamente, mesmo não sendo explícito na passagem que o estudante descobriria a Matemática na Modelagem, uma compreensão da Modelagem fundamentada no formalismo, poderia levar o estudante a crer que a Matemática é "vazia", não possui significado – trata-se de uma Matemática decorrente da manipulação de símbolos de acordo com regras (DAVIS; HERSH, 1989) –, porém, a utilização da Modelagem nas aulas possibilitaria a ele descobrir uma Matemática que "ganharia" algum significado, porque a Modelagem conectaria a Matemática de uma realidade simbólica (das teorias matemáticas) com a realidade dele. Assim, a Matemática que emerge no processo de

Modelagem seria aquela Matemática simbólica, pertencente a uma perspectiva formalista, mas que ganharia um significado porque descreveria situações-problemas da realidade do estudante.

Os usos da expressão “modelagem matemática” em enunciados das passagens de Araújo (2002) e nas passagens de outros autores apresentados, se assemelham ao que é expresso por Franchi (2002, p. 63, grifo nosso), ao dizer que, na Modelagem, “A compreensão da Matemática presente nas situações da realidade se dá a partir do **relacionamento das pessoas com os entes matemáticos**”. Desse enunciado, entende-se que os pesquisadores, professores e/ou estudantes envolvidos no processo de Modelagem, relacionam-se com entes matemáticos que estão em alguma realidade matemática: empírica (dos próprios envolvidos no processo de Modelagem), transcendental (mundo das Formas) ou simbólica (das teorias matemáticas). Portanto, apreende-se a possibilidade da existência de aspectos do empirismo, platonismo e do formalismo na Modelagem.

A título de exemplo, quanto a um dos usos efetivos da Modelagem, apresentam-se trechos da dissertação de Baraldi (2018), nos quais foi investigado por qual razão a forma geométrica da base dos alvéolos de cera produzidos por abelhas tem a forma hexagonal.

Num primeiro momento da aula realizada no Ensino Médio, a professora pesquisadora leu um texto com a turma que trata da forma geométrica dos alvéolos de cera de abelhas (hexagonal) e, posteriormente, ela convidou os estudantes para tentar encaixar cilindros, confeccionados de papel, um ao lado do outro e proceder da mesma forma com prismas de base hexagonal de papel. Com isso, a intenção dela era levar os estudantes a perceber que os prismas de base hexagonal se encaixam, enquanto os cilindros, não.

Diante do exposto pela professora, um dos estudantes perguntou se o encaixe acontece apenas quando a base do sólido geométrico é hexagonal ou se o encaixe é possível quando a base é outro tipo de polígono regular. Para ajudar a responder o questionamento e, ao sanar essa dúvida, dar prosseguimento com o processo de Modelagem, a professora entregou para a turma polígonos regulares distintos e solicitou que tentassem ladrilhar folhas de sulfite com esses polígonos com o intento de verificar quais desses polígonos possibilitariam o ladrilhamento. Em decorrência, “Descobriram com esta atividade que ocorre o mesmo com os triângulos e com os quadrados” e “Isto acontece porque os três polígonos têm ângulos internos cujas medidas são divisores de 360º” (BARALDI, 2018, p. 64).

Ao atentar para essas descrições, ou seja, para o que aparece no que tange aos usos da expressão “modelagem matemática” nessas passagens de dissertações e teses, tem-se regras que orientam os usos dessa expressão linguística: a Modelagem é um processo de descoberta; ela proporciona a descoberta de relações matemáticas (SCHEFFER, 1995); na Modelagem os modelos matemáticos são concebidos como a sintetização da Matemática manifesta em situações do mundo empírico (OLIVEIRA, 2004); a Modelagem é uma estrutura que refaz o caminho para o redescobrimento da Matemática (BIEMBENGUT, 1990); ela segue o método dedutivo (ALMEIDA, 1993); é um processo que flui naturalmente, tendo em vista a descoberta da Matemática passível de ser extraída da realidade do estudante; é fundamentada numa visão de Matemática inserida na realidade (empírica) (MONTEIRO, 1991); a utilização da Modelagem permite investigar a realidade e desvendar a Matemática ali presente (ANASTACIO, 1990); na Modelagem, objetos matemáticos ideais ou teorias matemáticas descreveriam situações-problemas do mundo empírico (ARAÚJO, 2002) e a Modelagem estabelece um relacionamento entre pessoas e os entes matemáticos (FRANCHI, 2002). E, em um dos usos efetivos da Modelagem, é observado que numa das aulas de Modelagem realizadas por Baraldi (2018), os estudantes descobrem um enunciado matemático concernente à condição para existir um ladrilhamento regular.

Tendo em vista esses usos da expressão “modelagem matemática”, cada um deles à sua maneira, explicita o processo de Modelagem à descoberta da Matemática que poderia estar em uma realidade extralinguística: empírica (do cotidiano do estudante, por exemplo), transcendental (no mundo das ideias matemáticas) ou das teorias matemáticas (sob uma concepção formalista da Matemática).

Esses usos possuem detalhes que os distinguem, entretanto, convergem para um significado privilegiado da expressão linguística “modelagem matemática” que diz sobre um tipo de descoberta matemática que acontece na Modelagem, incorrendo na **imagem: na Modelagem o estudante descobre a Matemática inserida em alguma realidade extralinguística.**

Ao interpretar esses usos, essa imagem é formada porque se constata, nos enunciados dessas dissertações e teses selecionadas, que a Modelagem possibilitaria descobrir a Matemática tal como se ocorresse uma descoberta empírica. Desse modo, a Matemática se encontraria em alguma realidade e a linguagem teria um uso meramente referencial para comunicar objetos matemáticos pertencentes a essa realidade matemática.

Frente aos usos da expressão linguística “modelagem matemática” nessas passagens de dissertações e teses, e tendo constatado que desses usos é construída uma imagem, subsequentemente, a intenção é verificar e esclarecer possíveis confusões conceituais, discutindo detalhes desses usos em jogos de linguagem que há ligação de semelhança com o jogo de linguagem da Modelagem, por mais distantes que estejam entre si.

6.1 Confusões conceituais

Dentre as descrições dos usos da expressão linguística "modelagem matemática" que explicitam a ideia que a Modelagem possibilita ao estudante descobrir a Matemática, salienta-se: a Modelagem é um processo de descoberta de modelos (SCHEFFER, 1995), "[...] ao descobrir relações [noções matemáticas], [...], **processo natural** das tentativas experimentais proporcionadas pela Modelagem Matemática (SCHEFFER, 1995, p. 144, grifo nosso); a Modelagem segue o método dedutivo (ALMEIDA, 1993), "**as fases** do processo [de Modelagem] **é algo natural** e até secundário" (MONTEIRO, 1991, p. 122, grifo nosso), tendo em vista a descoberta da Matemática, "[...] o método da Modelagem Matemática se fundamenta numa visão de matemática que a vê inserida na realidade" (MONTEIRO, 1991, p. 122).

Desses usos, interpreta-se a descoberta da Matemática na Modelagem como a descoberta empírica de modelos matemáticos, os quais são obtidos por meio da aplicação das fases do método da Modelagem que, no que lhe concerne, seria um processo muito natural, até secundário. Ou seja, é como se a aplicação do método ocorresse de modo muito fluído, resultando na descoberta de modelos matemáticos.

Ao comparar nuances desses usos com uma concepção de descoberta científica sob uma leitura empirista, no âmbito da Filosofia da Ciência[91], é como se o estudante assumisse o papel de cientista empirista que segue um conjunto sequenciado de etapas, o método[92], que o conduziria a uma descoberta empírica – um modelo matemático –, indicando uma acepção empirista da própria Modelagem.

Numa leitura empirista de descoberta científica, a descoberta é o produto da utilização de um único e hegemônico método – o método científico[93] – geralmente apresentado sob o esquema "observação, hipótese, experiência, resultados, interpretação, conclusão" (PEDUZZI; RAICIK, 2020, p. 33), interpretado como um procedimento definido, uma maneira segura de se chegar a resultados – a descobertas (MOREIRA; OSTERMANN, 1993).

---

[91] A leitura empirista de descoberta científica é subsidiada por uma concepção empirista sobre o conhecimento científico. De acordo com essa perspectiva, "os cientistas obtêm teorias científicas (leis, princípios, etc.) a partir *da observação, da experimentação e de medidas.* Ao relatar um episódio de *descoberta científica, a história da ciência empirista* apresenta *os dados e os resultados observacionais/experimentais* a partir dos quais o cientista, aplicando as regras do *método científico,* produziu conhecimento" (SILVEIRA; PEDUZZI, 2006, p. 27, grifo do autor). No entanto, é importante esclarecer que a descoberta empírica vista como produto da utilização das etapas do método é uma visão já superada, não mais condizente com uma perspectiva contemporânea de descoberta científica (RAICIK; PEDUZZI, 2016).

[92] Laudan (2000, p. 13) entende por método científico "simplesmente as técnicas e procedimentos que um cientista utiliza ao realizar experimentos ou construir teorias".

[93] Importa destacar que o imperativo do método e sua infalibilidade nas Ciências Empíricas é uma falácia (PEDUZZI; RAICIK, 2020).

Ao considerar essa perspectiva de descoberta científica, os modelos matemáticos seriam decorrentes da utilização do método da Modelagem, fundamentado em princípios do método dedutivo (ALMEIDA, 1993), com etapas sucessivas e interligadas, geralmente apresentadas da seguinte maneira: experimentação, abstração, resolução, validação e modificação (BASSANEZI, 1994).

Por conseguinte, a descoberta da Matemática tida como um modelo matemático radicado no mundo empírico poderia resultar numa possível confusão conceitual: *na Modelagem, a natureza dos enunciados matemáticos são tidos como de igual natureza aos enunciados das Ciências Empíricas (I).* Com isso, se quer dizer que não há um discernimento quanto aos usos feitos dos enunciados matemáticos na Modelagem. Eles são tomados como os enunciados das Ciências Empíricas que descrevem fenômenos do mundo empírico, pois o pensamento está preso à concepção referencial da linguagem, "a confusão se instaura quando não discernimos qual é o uso que estamos fazendo de nossos conceitos, descritivo ou normativo, e tomamos por empírico o que de fato é de natureza gramatical, presos a uma concepção referencial da linguagem" (GOTTSCHALK, 2018, p. 118).

Pelo fato do processo de Modelagem se iniciar com a observação e análise da realidade empírica, tendo em vista a construção dos modelos matemáticos que responderão à situação-problema, então a Matemática contida nos modelos é tida como abstrações da realidade empírica. À luz de outras perspectivas filosóficas do conhecimento matemático, ao se considerar uma realidade matemática (transcendental ou das teorias matemáticas), na Modelagem, os entes matemáticos seriam acessados por meio da razão ou o simbolismo matemático seria aplicado em situações-problemas da realidade. Em todas essas compreensões da Modelagem, é possível que o estudante seja conduzido a crer que os objetos matemáticos podem ser descobertos porque eles existiriam em alguma realidade: empírica, transcendental ou das teorias matemáticas. Assim, consoante ao que é manifesto nas passagens das pesquisas mencionadas, a Matemática descoberta na Modelagem, que pode ser um modelo matemático concernente à situação-problema em investigação e/ou enunciados matemáticos concernentes aos conteúdos, conceitos, definições matemáticas é como uma descoberta empírica.

Ao atentar para outros usos da expressão linguística "modelagem matemática" encontrados nas passagens selecionadas, tem-se nos usos alusivos à redescoberta da Matemática em aulas por Modelagem (BIEMBENGUT, 1990) uma ligação de semelhança com uma situação de aula de Matemática por redescoberta, exemplificada por Sá (1999).

Sá (1999) expõe uma situação de redescoberta matemática da seguinte maneira: solicita-se ao estudante para marcar um ponto no papel e traçar com a régua o maior número possível de retas que passam pelo ponto. Feito isso, na sequência, são-lhe apresentados questionamentos sobre quantas retas ele conseguiu traçar, quantas outras poderia traçar e quais são suas conclusões. Com essa atividade, espera-se que o estudante redescubra o postulado de Euclides "por um ponto passam infinitas retas" e que sejam desenvolvidas no estudante "as habilidades de observar, coletar dados, analisar e concluir" (SÁ, 1999, p. 79).

Em outros usos da expressão "modelagem matemática" das passagens, nas quais é explicitada a descoberta da Matemática em aulas por Modelagem (SCHEFFER, 1995, BARALDI, 2018), há uma similaridade com o tipo de aulas que objetivam a aprendizagem por descoberta, comumente das disciplinas de Ciências da Natureza. Sob essa abordagem teórica, o ambiente para a aprendizagem por descoberta deve proporcionar alternativas para o aprendiz descobrir princípios ou relações. A aprendizagem é experiencial, ocorre um processo muito semelhante ao do cientista quando faz descobertas em seu laboratório (MOREIRA, 1999).

Em aulas que envolvem atividades por descoberta, o objetivo é que o estudante descubra e depois adquira as propriedades ou conceitos matemáticos. Por isso, coloca-se o estudante numa situação de descoberta, como numa atividade de ladrilhamento (BARALDI, 2018), em que ele manipula polígonos de papel e depois abstrai algum conceito matemático. A ideia concernente à descoberta matemática é criticada, inclusive, por Baruk (1996, p. 62, itálico da autora)[94], "Não sei exatamente quando é que a palavra de ordem foi lançada, mas hoje importa antes de mais nada que as matemáticas [...] *sejam* descobertas (como um monumento no dia da sua inauguração)". Segundo essa autora, nessas situações, é dito que o estudante descobriu experimentalmente algum conceito ou propriedade matemática, o que não significa que ele consiga explicar a sua descoberta, mas saberá servir-se dela e, no contexto de descoberta, isso é o mais importante.

Em aulas que a Modelagem é concebida como um meio para o estudante redescobrir ou descobrir a Matemática, ou quando se fala que "O ensino de Matemática, na perspectiva da Modelagem, busca fornecer caminhos para que o aluno sintetize as ideias que estão implícitas nas situações do mundo" (OLIVEIRA, 2004, p. 149), o estudante pode estar sendo conduzido a crer que o conhecimento matemático está em algum lugar do mundo empírico e é passível de ser redescoberto ou descoberto por ele.

No exemplo extraído de Sá (1999), a redescoberta que se espera, é que o estudante

[94] Baruk (1996) tece suas críticas ao atentar para práticas pedagógicas inspiradas nas ideias do educador matemático húngaro Zoltán Paul Dienes (1916-2014), que na década de 1960 trabalhou como pesquisador na Universidade de Harvard ao lado de Jerome Bruner. Segundo Fiorentini (1995), durante as décadas de 1960 e 1970 o construtivismo piagetiano é disseminado no Brasil, tendo Dienes como o principal divulgador desse ideário.

chegue ao postulado matemático “por um ponto passam infinitas retas”. De mesmo modo, na passagem de Baraldi (2018), há uma expectativa por parte do professor que o estudante descubra o enunciado matemático que diz respeito à condição para a existência de um ladrilhamento regular – “a soma dos ângulos que se posicionam em torno de cada vértice dos polígonos é um ângulo de 360º” – que, na atividade pode ter sido explicitada com outras palavras pelos estudantes.

Contudo, levanta-se o questionamento: será que o estudante, por si só, conseguirá chegar a essas conclusões matemáticas? Como dito, existe uma expectativa por parte do professor que o estudante chegará a essas conclusões, mas é possível que ele chegue a outras conclusões e não diga o que o professor espera. Por isso, nesse tipo de aula, se começa “por procurar sem saber aquilo que se vai encontrar” (BARUK, 1996, p. 77).

Tendo em vista aspectos da abordagem de aulas por redescoberta ou descoberta em aulas por Modelagem, pode ser gerada a seguinte confusão conceitual: *as conclusões dos estudantes (redescobertas ou descobertas pessoais) na Modelagem são de natureza empírica (II),* indo ao encontro da confusão conceitual *(I) na Modelagem, a natureza dos enunciados matemáticos é tida como de igual natureza aos enunciados das Ciências Empíricas.* Constata-se, novamente, que não há um discernimento quanto aos usos das proposições matemáticas, pois elas são tomadas tão somente com a função descritiva.

6.2 Possíveis esclarecimentos

Com o intento de trazer esclarecimentos no que se refere a primeira confusão conceitual, *(I) na Modelagem, a natureza dos enunciados matemáticos é tida como de igual natureza aos enunciados das Ciências Empíricas*, inicialmente atenta-se para o papel da observação nas Ciências Empíricas.

Nas Ciências Empíricas, durante uma investigação científica, “a experiência visual [a observação] que alguém tem ao ver um objeto depende de seus conhecimentos, de suas vivências, de suas expectativas, de suas interpretações” (PEDUZZI; RAICIK, 2020, p. 22), e para reforçar, “o ato de observar é influenciado pelo conhecimento prévio e está <u>impregnado de teorias</u>. O percebido não depende apenas da realidade externa, mas também de nossas teorias, conhecimentos prévios” (MOREIRA, OSTERMANN, 1993, p. 114, grifo dos autores).

Assim, um mesmo objeto, visto por mais de um pesquisador, poderá resultar em observações distintas, porque a observação depende dos conhecimentos prévios, teorias, elementos subjetivos, dentre outros elementos do pesquisador. As ideias que podem surgir durante uma investigação são decorrentes da observação que, por sua vez, é complexa.

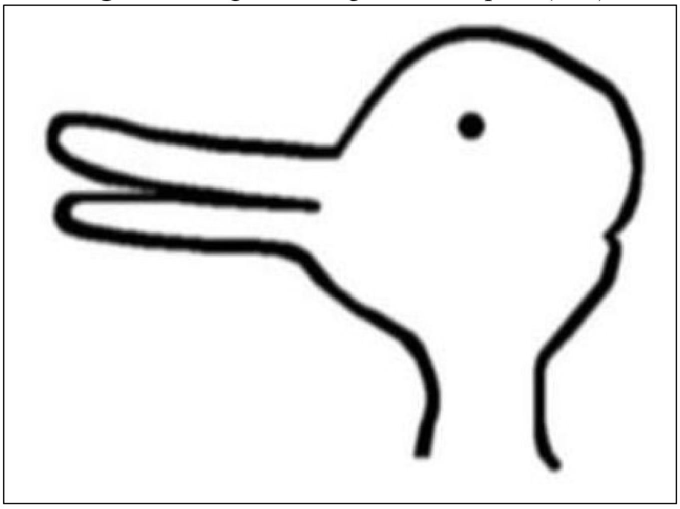
Esse papel da observação também necessita ser ponderado na Modelagem, pois sustentamos que a "lente" com a qual o estudante observa a realidade empírica na Modelagem é a "lente" formada pelos conhecimentos matemáticos que ele possui ou que ainda lhe serão apresentados no transcorrer do processo de Modelagem. Nesse sentido, a situação-problema de Modelagem seria desenvolvida com base nos conhecimentos do observador, sendo que tais conhecimentos matemáticos não são inatos, produções mentais que ocorrem por si só na mente do estudante, sob uma perspectiva intuicionista da Matemática, e tampouco são abstrações da realidade empírica, tendo em vista uma concepção empirista da Matemática.

Com base nas discussões tecidas quanto à observação nas Ciências Empíricas (PEDUZZI; RAICIK, 2020, MOREIRA; OSTERMANN, 1993), na Modelagem, é relevante a ideia: "Quem nada aprendeu, nada pode observar" (HANSON, 1975, p. 134).

Ver difere de observar. O verbo ver é concernente a captação de dados ópticos, que estão no campo visual do sujeito. A observação está relacionada com o fato dos elementos do campo visual estarem ou não organizados para a observação, sendo que essa organização tem relação com o que se sabe a respeito do que está no campo de visão (HANSON, 1975). A título de exemplo, se for considerada uma sala de aula com estudantes que não tenham deficiências quanto à captação de dados ópticos, então todos eles veem os mesmos objetos, porém as suas observações podem ser distintas, porque estão relacionadas com os seus conhecimentos.

O que é exposto por Hanson (1975) lembra o emprego do par conceitual "ver e ver como", ilustrado por Wittgenstein com a utilização da figura ambígua coelho-pato (C-P) (Figura 8).

Figura 8 - Figura ambígua coelho-pato (C-P)



Fonte: Wittgenstein (2014, XI, p. 255).

Consoante Gottschalk (2006), alguém poderia ver imediatamente um coelho na figura C-P porque já foram lhe apresentados coelhos. Assim, a pessoa que vê sabe que se trata de um animal com orelhas grandes, que come cenouras etc., "são esses diversos empregos da palavra 'coelho' que nos permitem atribuir significado aos traços empíricos diante de nossos olhos e atribuir significado à figura" (GOTTSCHALK, 2006, p. 75). Também seria possível vê-la como um pato se a pessoa que vê a figura C-P, de antemão, soubesse os usos da palavra pato, "'Vê os aspectos C e P [coelho e pato]' somente quem possui as formas daqueles dois animais" (WITTGENSTEIN, 2014, XI, p. 271).

Com isso, entende-se que, para Wittgenstein, o "ver e ver como" são de naturezas conceituais. Mediante o exposto, em uma sala de aula, por exemplo, todos os estudantes veem lousa, livros, cadernos, etc., porque já foram apresentados a eles diversos usos dessas palavras. Porém, eles poderiam ver uma lousa como um retângulo se soubessem de antemão alguns usos da palavra "retângulo": que se trata de uma figura geométrica plana, que possui quatro lados, que seus lados opostos são paralelos e possuem mesma medida etc.; logo, "o *ver como* permite a introdução de um aspecto dinâmico na construção do conhecimento" (GOTTSCHALK, 2006, p. 78, grifo da autora).

Ao retomar passagens da pesquisa de Scheffer (1995, p. 144), é expresso que, na Modelagem, as noções matemáticas decorrem da experimentação de situações reais, "O quadro de giz é um retângulo. A tampa da caixa de sapato é um retângulo. A bola é uma figura geométrica". Segundo as discussões apresentadas, entende-se que essas noções matemáticas não resultam puramente da experimentação, como se fossem abstrações empíricas, alinhadas a uma perspectiva empirista do conhecimento matemático.

Ao se deparar com a tampa da caixa de sapatos (SCHEFFER, 1995), o estudante observa nessa tampa um retângulo, ou vê essa tampa como um retângulo, pois lhe foram apresentadas regras sobre as figuras geométricas planas (figuras que estão dispostas completamente em um plano, bidimensionais, ou seja, figuras que possuem apenas duas dimensões: comprimento e largura).

A partir do momento que lhe são apresentadas outras regras matemáticas, como as dos corpos redondos (sólidos geométricos que possuem superfície curva, por exemplo), então o estudante poderá observar uma figura geométrica numa bola ou ver a bola como uma figura geométrica. As suposições do estudante – ou noções matemáticas, como menciona Scheffer (1995) – a respeito da tampa da caixa de sapato e da bola, dizem respeito a sua experiência visual, que abrange as regras matemáticas apreendidas por ele.

Ao retomar o trabalho de Baraldi (2018) e a discussão tecida sobre a observação, considera-se que o material manipulativo (os polígonos de papel) pode ter auxiliado o estudante a chegar a essa conclusão (descoberta pessoal) – os três tipos de polígonos que possibilitam um ladrilhamento regular têm algo em comum, "as medidas de seus ângulos internos são divisores de 360º" –, porém, advoga-se que, a observação do estudante que implicou nessa suposta descoberta pessoal só foi possível porque ele conhecia regras matemáticas sobre polígonos, ângulos, divisores de um número, por exemplo.

A seguir são apresentadas passagens da dissertação de Santiago (2018) que possibilitam visualizar o que foi discutido sobre a observação. Trata-se de um uso efetivo da Modelagem, mas que é dessemelhante no que se refere ao tipo de descoberta da Matemática na Modelagem.

Na pesquisa de Santiago (2018), as aulas de Matemática realizadas mediante o emprego da Modelagem, foram implementadas em uma turma do Ensino Médio sendo proposto aos estudantes a construção de maquetes que representam sólidos geométricos, a fim de que eles tentassem transformar ideias advindas da investigação dessas maquetes em expressões matemáticas, "Uma das metas foi perceber se o estudante investiga o modelo matemático e logo ver se as ideias as transformam [sic] em expressões matemáticas associando aos conhecimentos já adquiridos em sala de aula" (SANTIAGO, 2018, p. 42).

O autor ainda relata que, numa aula subsequente, o objetivo era calcular o volume de água da piscina do clube aquático e, para resolver essa situação-problema, os estudantes conseguiram "descobrir" a expressão matemática para o cálculo do volume da piscina com a forma de um paralelepípedo. Com a aplicação da fórmula do cálculo do volume e dispondo das dimensões da piscina, então os estudantes calcularam o volume de água dessa piscina.

> Mas a euforia maior era em saber qual seria o volume da piscina do clube aquático pesquisado, e **conseguiram descobrir que a expressão que leva ao volume da piscina que tem o formato de um paralelepípedo e esse ser um prismas [sic] resulta na mesma expressão do volume do cilindro comentado anteriormente** ($V = Ab.H$), onde Ab é a área da base e H é altura, mudando que a base do prisma pode ser outra figura geométrica, logo a do paralelepípedo é sempre um retângulo cuja área é definida pela expressão A=B.H, sendo B é comprimento e H a largura do retângulo (SANTIAGO, 2018, p. 49, grifo nosso).

Nessa aula, verifica-se que o que levou os estudantes a descobrirem a fórmula do volume do paralelepípedo foi o conhecimento deles sobre a fórmula para o cálculo do volume do cilindro. Os estudantes conheciam a fórmula $V = Ab.H$, assim, conjecturaram que, pelo fato do paralelepípedo também ser um sólido geométrico, então o cálculo do seu volume poderia ser semelhante ao cálculo do volume do cilindro, a diferença seria apenas quanto à fórmula do cálculo da área da base de cada um desses sólidos.

Portanto, nessa atividade, considera-se que os estudantes conseguiram descobrir a fórmula para o cálculo do volume da piscina porque conseguiram **ver** a fórmula para o cálculo do volume do cilindro **como** a fórmula para o volume do cálculo do paralelepípedo; trata-se, pois de uma descoberta matemática. O conhecimento da regra matemática $(\mathrm{V} = \mathrm{Ab.H})$ permitiu aos estudantes estabelecer um comparativo entre o cilindro e o paralelepípedo, de modo que ele observa que, para o cálculo do volume da piscina, poderiam existir aspectos semelhantes ao cálculo do volume de um cilindro.

Portanto, sustentamos que, na Modelagem, a descoberta da Matemática não implicaria puramente da observação empírica e da abstração de objetos matemáticos da realidade empírica. A descoberta estaria relacionada à observação impregnada de conhecimentos matemáticos que o estudante "domina" e com o "ver como", que é conceitual.

Ainda no âmbito da confusão conceitual *(I) na Modelagem, a natureza dos enunciados matemáticos é tida como de igual natureza aos enunciados das Ciências Empíricas,* outra questão que se levanta em torno da Modelagem, como tendo um dos seus usos a descoberta da Matemática é: bastaria seguir as etapas do método da Modelagem para descobrir o modelo matemático? Com base nas Ciências Empíricas e, contrariamente a uma leitura empirista de descoberta, o método científico não é uma sequência linear de etapas que conduz a uma descoberta (MOREIRA; OSTERMANN, 1993). Além disso, a produção do conhecimento científico não pode ser concebida como decorrente de uma concepção empirista (SILVEIRA; PEDUZZI, 2006).

> [...] o método científico não é uma receita, uma sequência linear de passos que necessariamente conduz a uma descoberta, ou pelo menos, a uma conclusão ou a um resultado (MOREIRA, OSTERMANN, 1993, p. 114).

> A produção do conhecimento científico não pode ser entendida através da *epistemologia empirista* [...] e não pode ser descrita como consequência da aplicação de um *método científico* que começa com resultados observacionais/experimentais (SILVEIRA, PEDUZZI, 2006, p. 47, grifo do autores).

Ao transpor as ideias desses autores para a Modelagem, o fato de seguir as etapas do método da Modelagem não garante a obtenção de um modelo matemático. Dessa maneira, não é a aplicação dessas etapas que, necessariamente, implica num modelo, como se utilizar a Modelagem nas aulas de Matemática fosse seguir uma receita ou um passo a passo, que conduz à obtenção de um modelo que está na realidade empírica ou em alguma realidade matemática (transcendental ou de teorias matemáticas).

Argumentamos que a Modelagem, como um procedimento metodológico que possui uma estrutura, requer do estudante agir de certa maneira (observar, coletar dados, hipotetizar, fazer questionamentos, resolver problemas, etc.). As ações que o estudante desenvolve em cada fase da Modelagem não são intrínsecas a ele; a Modelagem não "produz" nele a capacidade de observar, coletar dados, formular situações-problemas, levantar hipóteses, entre outros, e ele também não descobre por si só como agir em cada uma dessas fases.

Ao considerar uma perspectiva wittgensteiniana, considera-se, inclusive na Modelagem, a existência de regras concernentes a cada uma das fases da Modelagem, as quais constituem o jogo de linguagem da Modelagem, "a prática de modelagem matemática no âmbito da Educação Matemática pode ser entendida como um *jogo de linguagem* associado ao fazer matemática, e como tal envolve regras que precisam ser seguidas" (TORTOLA, 2016, p. 267, grifo do autor).

Depreende-se que, ao objetivar modelar uma situação-problema, o estudante necessita conhecer as regras do jogo de linguagem da Modelagem e da Matemática, e agir de acordo com a orientação dessas regras, isso é, seguir regras que "é uma prática: o que está de acordo com uma regra [...] é algo determinado por aquilo que denominamos 'seguir a regra'" (GLOCK, 1998, p. 35)[95].

Sob a ótica de Souza (2018, p. 187, grifo da autora), "*seguir as regras* do *fazer* Modelagem Matemática é, em nosso caso, compreender o *fazer* Modelagem Matemática para o *jogo de linguagem* específico [da Modelagem]", mas para tanto, sugere-se que as regras da Modelagem sejam apresentadas ao estudante mediante os mais variados usos das palavras em contextos distintos.

Leva-se em conta que "compreender o *fazer* Modelagem" (SOUZA, 2018, p. 187, grifo da autora) é no tocante à aprendizagem da técnica de utilizar as palavras (WITTGENSTEIN, 1981, § 418) que compõe o processo de Modelagem: observar, coletar dados, hipotetizar, formular situações-problemas, matematizar, elaborar e validar o modelo matemático. Seria por meio de explicações e exemplos dos mais variados usos que poderiam ser mostrados aos estudantes os seus significados dessas palavras presentes no jogo de linguagem da Modelagem. Por conseguinte, eles estariam sendo capacitados a seguir regras na Modelagem, pois é o contexto linguístico que nos dirige, dando-nos orientações de como agir (GOTTSCHALK, 2022b).

> É o contexto linguístico que nos dirige, sem determinar nossa ação, mas orientando-a dentro do campo de possibilidades dado pelos signos que os constituem. Em outras palavras, estamos imersos em um mundo se signos que expressam nossas instituições humanas (GOTTSCHALK, 2022b, p. 43).

---

[95] Seguir regras não se trata de uma "ação mecânica", mas envolve julgamento, interpretação e avaliação, "Por exemplo, um seguidor de regra pode precisar julgar se alguma situação é ou não aquela em que uma determinada regra se aplica; [...] e pode precisar avaliar o quão bem ele conseguiu seguir uma regra" (WINCH, 1995, p. 324, tradução nossa).
"For example, a rule follower may need to judge whether or not some situation is one in which a given rule applies; [...] and may need to assess how well he was able to follow a rule" (WINCH, 1995, p. 324).

Além disso, é considerável frisar que o estudante vai se familiarizando com essas regras à medida que a Modelagem é inserida gradativamente nas aulas, “a inserção gradativa de atividades de modelagem matemática em sala de aula permite ampliar a familiaridade de uso de técnicas e regras da modelagem” (OLIVEIRA, 2018, p. 200) e também da Matemática envolvida nas situações-problemas.

Para finalizar os esclarecimentos quanto à primeira confusão que se estabeleceu *(I) na Modelagem, a natureza dos enunciados matemáticos é tida como de igual natureza aos enunciados das Ciências Empíricas,* e esclarecer a segunda, *(II) as conclusões dos estudantes (redescobertas ou descobertas pessoais) na Modelagem são de natureza empírica,* importa frisar que, consoante o pensamento de Wittgenstein, a Matemática não pode ser considerada uma espécie de Ciência Natural – o filósofo cita a Mineralogia, Zoologia, Pomologia, a Física –, mas é um tipo de conhecimento que se constitui por um nexo de jogos de linguagem (GERRARD, 1987).

Quando se busca o entendimento de uma epistemologia da Matemática fundamentada pela filosofia da linguagem, em específico, a do segundo pensamento de Wittgenstein, a Matemática é concebida como nexos de jogos de linguagem constituídos por regras inventadas, construídas pela humanidade.

Segundo Gerrard (1987), os jogos de linguagem da Matemática expressam certezas, sobre as quais o próprio filósofo exime explicações psicológicas. Wittgenstein combate explicações psicológicas acerca das proposições matemáticas, contrariando seu interlocutor:

> Posso estar tão *certo* da sensação de outrem quanto de um fato qualquer. Mas, com isso, as proposições "Ele está gravemente deprimido", "$25x25 = 625$" e "Tenho 60 anos de idade" não se tomaram instrumentos semelhantes. É de se supor a explicação: a certeza é de uma *espécie* diferente. - Ela *parece* apontar para uma diferença psicológica. Mas trata-se de uma diferença lógica (WITTGENSTEIN, 2014, II, p. 289, grifo do autor).

Levando em conta as certezas matemáticas, elas são proposições do tipo que não podem ser falseadas, tal como as proposições empíricas que descrevem fenômenos da realidade empírica. Essas certezas fundamentam a construção de outros jogos de linguagem (FATTURI, 2014), dentre eles, podem ser citados os jogos de linguagem das Ciências Empíricas.

Como ilustração, não se trata de considerar que $2 + 2$ pode ser igual 4 porque o resultado 4 está condicionado, segundo Gerrard (1987), à existência de uma realidade matemática independente da prática matemática e que é tomada como critério de correção desta. Em oposição, $2 + 2$ deve ser igual a 4, pois foram estabelecidos critérios e regras matemáticas que fazem parte da própria prática matemática para a obtenção do resultado 4.

As certezas matemáticas podem ser utilizadas para descrever fatos empíricos (GOTTSCHALK, 2013), o que não implica que a natureza da Matemática seja descritiva e preditiva, tal como a das Ciências Empíricas (GOTTSCHALK, 2004b). A natureza da Matemática é normativa, suas "proposições são *condições de sentido* para as proposições empíricas, e não se confundem com elas" (GOTTSCHALK, 2004b, p. 66, itálico da autora), assim, por meio das proposições matemáticas, é possível compreender acontecimentos empíricos. Dito de outro modo, as proposições matemáticas "informam a respeito das convenções que aceitamos e em função das quais nos *dispomos* a conhecer os fatos; elas fornecem, como diz Wittgenstein, o 'quadro de referência para a descrição' dos fatos" (MORENO, 1995, p. 94, itálico do autor).

Desse modo, é um engano considerar *(I) na Modelagem, a natureza dos enunciados matemáticos é tida como de igual natureza aos enunciados das Ciências Empíricas*, pois a Matemática é de natureza normativa, sendo suas proposições condições para organizar ou compreender fatos do mundo empírico, inclusive as próprias situações-problemas da Modelagem.

Com vistas para *(II) as conclusões dos estudantes (redescobertas ou descobertas pessoais) na Modelagem são de natureza empírica*, tem-se a Modelagem com características da perspectiva empirista da Matemática, segundo a qual os objetos matemáticos (conceitos, propriedades, conteúdos, modelos matemáticos) estariam na realidade empírica e os estudantes poderiam descobri-los ou redescobri-los por meio da experiência sensorial. A linguagem seria representativa desses objetos matemáticos, servindo para "etiquetá-los". As proposições matemáticas exercem a função descritiva de objetos da realidade empírica.

Porém, corroborando o que foi explicitado sobre a Matemática do ponto de vista de Wittgenstein, então, a redescoberta pessoal, "por um ponto passam infinitas retas" (SÁ, 1999), não pode ser concebida como uma proposição empírica, mas uma regra matemática, portanto uma proposição gramatical. Na passagem de Baraldi (2018), o enunciado matemático que diz respeito à condição para existir um ladrilhamento regular – "a soma dos ângulos que se posicionam em torno de cada vértice dos polígonos é um ângulo de 360º" –, que na atividade pode ter sido explicitada com outras palavras pelos estudantes, também não é uma proposição empírica, mas gramatical.

A Matemática, vista sob a perspectiva wittgensteiniana, não pode ser julgada por critérios externos à própria prática matemática (GERRARD, 1991). Dessa maneira, não se faz necessária uma validação empírica para chegar à conclusão de que "por um ponto passam infinitas retas" ou "a soma dos ângulos que se posicionam em torno de cada vértice dos polígonos é um ângulo de 360º", pois isso é uma regra justificada pelos próprios critérios da prática matemática. Porém, quando se coloca o estudante a exercitar esse conceito matemático empiricamente, pode-se estar conduzindo-o à crença de que ele precisa provar empiricamente que isso realmente acontece para aceitar que se trata de uma certeza matemática.

Como dissertado, sob a ótica wittgensteiniana, as proposições matemáticas se distinguem das proposições das Ciências Empíricas, pois exercem função normativa, elas se constituem como regras pertencentes aos diversos jogos de linguagem da Matemática, como, por exemplo, o jogo de linguagem da Aritmética, "A aritmética é um sistema de regras para a transformação de proposições empíricas que versam sobre quantidades e grandezas" (GLOCK, 1998, p. 33).

Contudo, o pensamento se torna confuso quando uma proposição matemática "a soma de 2 com 2 deve ser igual a 4" e uma proposição empírica "a soma de 2 palitos com 2 palitos são 4 palitos" são concebidas como proposições de mesma natureza. Entretanto, a proposição matemática (a soma de 2 com 2 deve ser igual a 4) é normativa, o resultado dessa adição uma vez estabelecido na prática matemática independe de critérios extralinguísticos para sua correção.

A proposição matemática "a soma de 2 com 2 deve ser igual a 4", mesmo que seja com a utilização de objetos (palitos ou qualquer outra coisa), não necessita ser validada na realidade empírica, tais como as proposições empíricas verificadas experimentalmente. Essa proposição serve de norma para compreender o sentido de acontecimentos do mundo empírico (GOTTSCHALK, 2002), nesse caso, um acontecimento sobre quantidade de palitos (a soma de 2 palitos com 2 palitos são 4 palitos).

Como as proposições matemáticas dão condições para a compreensão dos acontecimentos empíricos, então, anteriormente ou durante o processo de Modelagem, torna-se necessário apresentar para os estudantes as proposições matemáticas e como operar com elas. Dessa maneira, o estudante, com seus colegas de classe e/ou o professor, conseguirá obter modelos matemáticos decorrentes dessas regras matemáticas. Essas regras darão sentido às situações-problema de Modelagem.

Segundo Winch (1995), quando um estudante aprende a seguir a regra de uma série numérica, por exemplo, então ele consegue obter os diversos termos dessa série. Na Modelagem, à medida que ele apreende as regras da Modelagem e dos jogos de linguagem da Matemática, então ele consegue avançar, no sentido de atuar em situações de Modelagem mais complexas, elaborar modelos matemáticos mais sofisticados ou conseguir elaborar modelos distintos para uma mesma situação-problema. Ou seja, ao aprender seguir uma regra, o estudante aprende a seguir em frente (WINCH, 1995).

Subsequentemente, também são mostradas passagens de uma pesquisa em que é visto um aspecto dessemelhante no tocante ao uso da expressão linguística "modelagem matemática", que diz sobre a descoberta da Matemática na Modelagem.

Num dos trechos da pesquisa de Carvalho (2020), o autor constata que a Modelagem propicia aprendizagem por descobertas ao permitir que os estudantes explorem alternativas distintas para a resolução das situações-problema.

> A aprendizagem se tornou significativa para os alunos, pois não se limitaram a apenas decorar ou aplicar os modelos matemáticos, mas realizaram pesquisas e procuraram compreender os problemas, para depois solucioná-los. Os alunos também **aprenderam por descobertas,** pois exploraram alternativas para resolverem os problemas, apresentando até mais de uma maneira de resolvê-los (CARVALHO, 2020, p. 121, grifo nosso).

Uma das práticas de Modelagem implementadas no Ensino Médio por este professor pesquisador era sobre Juros Simples. Foram apresentadas aos estudantes três promoções de um certo produto de um supermercado para verificarem qual dessas promoções seria a mais e a menos vantajosa para o consumidor. Diante da situação-problema proposta, um dos estudantes comentou que, no tocante à promoção "pague 4 leve 5", "descobriria" o desconto do produto utilizando a Regra de Três Simples ou a "lógica" que, conforme seu modo de pensar, seria o cálculo da divisão entre a quantidade de produtos que o consumidor levaria gratuitamente na promoção (um produto) pelo total de produtos que o consumidor deveria comprar para satisfazer a promoção (cinco produtos) (CARVALHO, 2020, p. 85).

Nessa passagem de Carvalho (2020), entende-se que o estudante resolveu a situação-problema sobre a promoção "pague 4 leve 5" utilizando regras matemáticas distintas que haviam sido apresentadas para ele. Caso o estudante não soubesse agir conforme a Regra de Três Simples, possivelmente não apresentaria duas alternativas de resolução para a mesma situação-problema. Ele apenas aplicou técnicas de resolução de problemas (regra de três e divisão) que já sabia. Utilizando as regras matemáticas implícitas nessas técnicas, as resoluções apresentadas por ele são respaldadas pelo seu conhecimento sobre tais regras. O que o estudante descobriu foi que, por uma ou por outra regra matemática, se pode chegar ao mesmo resultado, o que não se trata de uma descoberta empírica e nem mesmo da descoberta das regras da proporcionalidade ou da divisão.

Por fim, os usos da expressão linguística "modelagem matemática" vinculado à descoberta da Matemática em enunciados de dissertações e teses exprimem um uso dogmático, **na Modelagem o estudante descobre a Matemática inserida em alguma realidade**

extralinguística. Porém, na tentativa de dissolver confusões imbricadas nessa imagem, é averiguada a existência de outras possibilidades de usos da expressão linguística “modelagem matemática” relacionadas à descoberta da Matemática.

A descoberta da Matemática na Modelagem pode estar atrelada à experiência visual e, nesse contexto, quando o estudante vê aspectos de uma situação-problema de Modelagem como aspectos do conhecimento matemático que ele já sabe. Além disso, outro uso da expressão “modelagem matemática”, quanto à descoberta da Matemática, é no tocante ao seguir em frente quando o estudante sabe seguir regras do jogo de linguagem da Modelagem e da própria Matemática. Dessa maneira, é concebível que o estudante “descubra” modos distintos para resolver uma mesma situação-problema de Modelagem, ou seja, que explore diferentes alternativas para chegar à solução de uma mesma situação-problema ou que consiga participar de situações-problemas de Modelagem mais complexas.

7 SEGUNDA IMAGEM: O MODELO MATEMÁTICO É UMA REPRESENTAÇÃO SUBJACENTE À REALIDADE EMPÍRICA

Sob a perspectiva de Wittgenstein, os significados dos enunciados matemáticos não dependem de nenhuma realidade. Eles deixam de ser apenas marcas de tinta ou grunhidos no contexto de nossa prática linguística (GERRARD, 1991). Com isso, entende-se que as proposições matemáticas adquirem significado na própria atividade matemática, ou seja, nos jogos de linguagem da Matemática, onde se constituem como regras.

As proposições matemáticas são de caráter normativo, sendo apenas condições para possíveis descrições, "são *normas* de descrição [regras de representação] de 'realidades'" (GOTTSCHALK, 2004b, p. 68, grifo da autora), de modo que essas "realidades" não são essências – realidades últimas – do que está sendo descrito, e é com base numa perspectiva wittgensteiniana da Matemática que se pretende lançar luz sobre as descrições dos usos da expressão linguística "modelo matemático" no contexto da Modelagem.

Nas primeiras dissertações sobre a Modelagem elaboradas no Brasil (WILMER, 1976, SÁNCHEZ, 1979), existem passagens em que os usos da expressão "modelo matemático" estão relacionados com a abstração da realidade empírica. Em outras dissertações, é expresso que, na Modelagem, da abstração de dados da realidade, chega-se a um modelo matemático (ANASTACIO, 1990) ou que da apreensão da realidade empírica, onde a Matemática estaria presente, um modelo matemático é produzido (MAGALHÃES OLIVEIRA, 2018).

> O modelo matemático **abstrai a situação concreta** (WILMER, 1976, p. 26, grifo nosso).
>
> Modelo é uma **abstração da realidade** (SÁNCHEZ, 1979, p. 25, grifo nosso).
>
> [a Modelagem] como um processo de **abstração**, no qual, **a partir de um problema e de dados da realidade**, chegar-se-á a um modelo matemático (ANASTACIO,1990, p. 30, grifo nosso).
>
> O modelo produzido **é um modelo de apreensão da realidade** objetiva e subjetiva. O estudante cria uma estrutura nova de pensamento sobre a Matemática e com a Matemática. Sobre a Matemática, à medida que ele consegue entender que ela está presente em determinado contexto do mundo real. Com a Matemática, à medida que ele aprende a lidar com a Matemática que surge no contexto das situações controladas pelo professor (MAGALHÃES OLIVEIRA, 2018, p. 42-43).

Nas passagens da dissertação de Gazzeta (1989), os conceitos e teoremas matemáticos são modelos de alguma realidade, bem como são as teorias matemáticas que representam abstratamente situações-problemas do mundo empírico.

> Modelos matemáticos podem ser encontrados no início do desenvolvimento da Matemática. Certamente **conceitos** tais como número, linha, plano, conjunto, função, probabilidade, etc., **são modelos de alguma realidade** e também o são o **Teorema de Pitágoras, semelhança de triângulos, séries geométricas, as leis de movimento**

> **de Newton e muitos outros conceitos e teoremas matemáticos** (GAZZETTA, 1989, p. 16, grifo nosso).
>
> A Aritmética como **teoria matemática é um modelo** que representa abstratamente problemas de medida, cálculos financeiros, censo demográfico… (GAZZETTA, 1989, p. 19, grifo nosso).

Em outras pesquisas, o modelo matemático é tido como uma representação da situação-problema mediante o emprego da Matemática, concebida como linguagem e lógica simbólicas (DOLIS, 1989), ou que o modelo traduz um estudo de situações concretas, representando-as numa linguagem matemática (MARTINELLO, 1994). Em outros trabalhos, o modelo matemático é uma representação abstrata do mundo empírico, por meio da utilização de estruturas e conceitos matemáticos (FRANCHI, 2002), um sistema artificial de uma porção da realidade empírica (BORSSOI, 2013) ou uma formalização, mediante o simbolismo da linguagem matemática (VIDIGAL, 2013), conforme apresentados a seguir:

> **O uso da Matemática como linguagem e lógica simbólica, conduz assim, a uma representação da situação problema em termos matemáticos**, ou seja, a formulação de um *modelo matemático* (DOLIS, 1989, p. 6, grifo da autora, negrito nosso).
>
> Os modelos matemáticos traduzem um estudo aprofundado das situações concretas trabalhadas, representando as mesmas numa linguagem matemática (MARTINELLO, 1994, p. 71).
>
> [...] um modelo matemático pode ser entendido como uma **representação abstrata de uma parte do mundo real, através de estruturas e conceitos matemáticos** (FRANCHI, 2002, p. 56, negrito nosso).
>
> **O modelo pode ser entendido como um sistema artificial, uma formalização de uma porção da realidade,** de um sistema do qual se seleciona aspectos essenciais como argumentos ou parâmetros (BORSSOI, 2013, p. 49, grifo nosso).
>
> Assim, **concebemos modelo matemático**, resultado esperado de uma modelagem matemática, **como uma formalização, por meio construção simbólica expressa em linguagem matemática** [sic], referente a uma situação que tem objetivos e conceitos especificados segundo interesses de seu autor permitindo interpretar, compreender e/ou tomar decisões acerca da situação (VIDIGAL, 2013, p. 34, grifo nosso).

Segundo essas descrições, há regras que orientam os usos da expressão linguística “modelo matemático”: ele é uma abstração da realidade empírica (WILMER, 1976, SÁNCHEZ, 1979, ANASTACIO, 1990), é uma apreensão da realidade empírica (MAGALHÃES OLIVEIRA, 2018), teoremas ou conceitos matemáticos são modelos matemáticos (GAZZETTA, 1989), o modelo matemático é uma representação mediante o emprego da linguagem matemática (DOLIS, 1989, MARTINELLO, 1994, VIDIGAL, 2013) ou de estruturas ou conceitos matemáticos (FRANCHI, 2002), é um sistema artificial da realidade empírica (BORSOI, 2013).

Olhando para estas descrições, ou seja, para o que aparece concernente à expressão “modelo matemático” pertencente às passagens selecionadas, existe um uso privilegiado: na

Modelagem, o modelo matemático é uma representação matemática de uma situação-problema do mundo empírico.

Neste contexto, o que chama a atenção é a palavra "representação" relacionada com a expressão linguística "modelo matemático". Nestas passagens e, em geral, em descrições sobre a Modelagem, a ideia de "representação" supõe que o modelo matemático teria um uso referencial, de modo que ao ser utilizado em situações cotidianas refere-se a algo no mundo empírico, escrito de uma maneira simplificada, por meio da linguagem matemática. Essa interpretação acerca dos usos da expressão "modelo matemático" constrói uma das eventuais **imagens** vinculadas a essa expressão linguística: **o modelo matemático é uma representação subjacente à realidade empírica.**

7.1 Confusões conceituais

Retomando a concepção wittgensteiniana da Matemática, segundo a qual, as proposições matemáticas são de caráter normativo, questiona-se: ao se afirmar que o modelo matemático é constituído por proposições matemáticas normativas, então como ele poderia ter como função a "representação" da realidade empírica?

Considerando aspectos da Filosofia da Ciência, Gottschalk (2004b) disserta que no século XV, o filósofo e cientista Leonardo da Vinci complementa as ideias do filósofo Rogério Bacon[96] ao observar que a investigação empírica não seria suficiente para a aquisição da verdade. Essas investigações deveriam inclusive passar pela demonstração matemática. Paulatinamente, a observação e investigação do mundo empírico são submetidas aos processos matemáticos, indicando o estabelecimento de um novo método para investigação e representação de fenômenos no âmbito das Ciências Empíricas.

Segundo a autora, a representação de leis naturais de uma forma mais rigorosa e a consideração dos aspectos dinâmicos da natureza levou o matemático e físico inglês Isaac Newton, que viveu no século XVII, a introduzir os conceitos de "variável" e "função" na Matemática, de modo que fosse possível relacionar grandezas como "tempo" e "espaço", que deixaram de ser consideradas formas estanques, mas como fluxos contínuos, de caráter dinâmico.

[96] Este filósofo inglês do século XIII sugere que as conclusões advindas dos métodos da razão deveriam ser controladas por métodos experimentais (GOTTSCHALK, 2004b).

Para resolver problemas relacionados ao movimento dos corpos, o físico inglês representa os instantes de tempo pela variável t e as suas correspondentes localizações no espaço pela variável x. Com isso, seria possível descrever determinados movimentos dos corpos, como, por exemplo, o movimento da queda de um corpo num determinado intervalo de tempo, o que parece mostrar que a realidade poderia ser descrita em termos precisos por meio das novas ferramentas da Matemática.

Apesar dos avanços na Física e na Matemática, no campo filosófico, a crença em uma representação fiel da realidade, decorrente dos avanços dessas áreas, vem à tona de modo mais intenso. Tanto a pretensão de Newton de representar precisamente os fenômenos físicos por meio de instrumentos matemáticos, quanto a posição cética de que seria impossível uma representação fiel da realidade, pressupõem a representação de uma realidade preexistente e indicam uma concepção referencial da linguagem que representa a realidade precisamente ou vagamente.

Embora a posição cética conceba a representação da realidade como sendo vaga, mesmo assim as "aproximações" da realidade que essa posição pressupõe são, quanto à existência de uma realidade subjacente, ideais, exatas. Tais "aproximações" estariam "mais ou menos" próximas dessa realidade subjacente que seria uma realidade última que balizaria a descrição. De acordo com Gottschalk (2004b), temos:

> Em outras palavras, o fato de estimarmos o comprimento de uma mesa como sendo de aproximadamente dois metros pressupõe que a mesa tenha uma medida exata. No entanto, ao utilizarmos esse mesmo termo (aproximadamente) ou palavras semelhantes para descrevermos a realidade "em geral", somos levados pela crença de que haja uma realidade última que balizaria a descrição (GOTTSCHALK, 2004b, p. 64).

Sabe-se que a pretensão de Newton, ao representar os fenômenos físicos matematicamente, trouxe grandes contribuições para pensar a natureza, contudo chama a atenção o que afirma Silva (2012, p. 26), Newton "forçosamente, quer transformar tempo e espaço em entidades reais e absolutas que existem independentemente da mente humana (ontologia), entidades nas quais o movimento e suas forças geradoras funcionam na mais perfeita harmonia". Ao querer transformar tempo e espaço em entidades reais é de fato evidenciado o que é dito por Gottschalk (2004b), que haveria uma realidade preexistente nessas entidades que são independentes da mente humana, e as leis da Física descreveriam matematicamente as relações entre elas. Nesse âmbito, a linguagem matemática representaria entidades reais preexistentes, o que também corroboraria o realismo científico que, segundo Carvalho (2007), levaria o cientista a crer que as teorias físicas revelariam a essência das coisas.

No século XIX, ideias firmemente estabelecidas no contexto científico são debatidas e criticadas, e novas ideias surgem com outras fundamentações (CARVALHO, 2007). Cientistas e filósofos alemães[97] fomentam uma grande discussão sobre a validade do conhecimento científico e as várias formas de representá-lo. Com isso, a palavra “representação”, colocada em circulação por Kant e o filósofo alemão Arthur Schopenhauer (1788-1860) se destaca entre filósofos e cientistas daquele período (JANIK; TOULMIN, 1991).

A palavra “representação” unia duas noções que não eram claramente distintas naquela época e, inclusive, atualmente. Uma das noções é quanto ao uso dessa palavra relacionada à experiência sensorial, às percepções, ela é presente na psicologia do austríaco Ernst Mach (1838-1916) e nas filosofias empíricas de Locke e Hume, por exemplo. O outro uso da palavra “representação” expressa um significado público ou linguístico, sendo empregado na mecânica do alemão Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894) (JANIK; TOULMIN, 1991).

Neste contexto de discussões, havia cientistas convictos que a Mecânica de Newton deveria ser a base de apoio para os demais ramos da Física. Porém, dentre os físicos, Hertz, por exemplo, adotou a Mecânica de Newton de forma crítica e Mach elaborou uma análise crítica rigorosa das concepções newtonianas de tempo, espaço e movimento absolutos, expondo que a ideia da existência de tempo absoluto, independente da observação de mudanças de movimento, é destituída de sentido, trata-se de uma concepção metafísica. Sob a compreensão de Mach, o tempo é uma abstração que chega ao homem por meio das mudanças das coisas (CARVALHO, 2007).

Nestas análises, Mach constitui seu ponto de vista epistemológico para as Ciências Naturais (CARVALHO, 2007) e trata da natureza da “representação” na Física (JANIK; TOULMIN, 1991). Ele concebe que “todo o conhecimento se reduz a sensações e a tarefa da ciência consiste em descrever, da maneira mais simples ou mais econômica os dados dos sentidos” (CARVALHO, 2007, p. 25). Sob sua perspectiva, as teorias científicas eram tidas como descrições de dados dos sentidos, chamados por ele de “elementos” (JANIK; TOULMIN, 1991, p. 149), os quais permitiriam a antecipação de eventos futuros, e a Matemática teria como função organizar e simplificar o que é “captado” pela experiência sensorial, ou seja, esses elementos.

Assim, para Mach, “Concepções abstratas, ideias, representações, são igualmente reduzidas a dados sensoriais, ao serem identificadas como conceitos especiais que nos habilitam

[97] Dentre eles, são mencionados Gustav Kirchhoff, Hermann von Helmholtz, Ernest Mach, Heinrich Hertz e Ludwig Boltzmann (JANIK; TOULMIN, 1991).

a lidar eficientemente com grupos de 'elementos'" (JANIK; TOULMIN, 1991, p. 149). Além disso, como um fenomenista radical, Mach não admitia a coexistência de teorias rivais e diferentes esquemas conceituais para a descrição de um mesmo fenômeno (CARVALHO, 2007).

Em Mach o uso da palavra "representação" está relacionado à ideia mentalista do termo, concernente ao aspecto sensorial, perceptivo, porque ele utiliza a palavra na língua alemã *Vorstellung*. A palavra *Vorstellung,* "tradução alemã corrente para o termo lockiano 'ideia'" (JANIK; TOULMIN, 1991, p. 148) expressa uma mera reprodução mental de impressões sensoriais e de fundamento psicológico.

Contemporâneo de Mach, destaca-se o físico Hertz ao propor em seu livro *Os Princípios da Mecânica*[98] "o que ele mesmo denomina uma *terceira representação da mecânica*[99], como alternativa à representação newtoniana tradicional" (CARVALHO, 2007, p. 15, grifo do autor). Ele objetiva um novo modo de representação da Mecânica, sendo que um dos motivos que o levou a esta empreitada foram os sinais de inadequação da mecânica newtoniana – um modelo privilegiado – para o estudo de determinados fenômenos.

Com amparo em Carvalho (2007), entende-se que Hertz é considerado um dos mecanicistas que não corroborava o realismo científico e durante suas análises sobre a mecânica tradicional (de Newton), ele questiona a correspondência de representações matemáticas e os fenômenos físicos, em geral. Hertz foi influenciado pela filosofia kantiana e por um de seus mestres, o físico alemão Hermann von Helmholtz (1821-1894), um dos primeiros cientistas que criticou a objetividade das teorias científicas ao negar que os conceitos teóricos descrevem objetos físicos reais.

O físico austríaco não pretendia fundar uma nova mecânica, a novidade em sua empreitada seria quanto a "o arranjo e a concatenação do todo – o aspecto lógico ou filosófico do assunto" (HERTZ, 1956, prefácio *apud* CARVALHO, 2007, p. 60). Em seu livro *The Principles of Mechanics*, Hertz afirma que o objetivo da sistematização do conhecimento da natureza seria antecipar eventos futuros para que, com base nessa antecipação, fosse possível organizar o presente.

[98] HERTZ, Heinrich. **The Principles of Mechanics.** New York: Dover, 1956.
[99] "À época de Hertz duas representações da mecânica estavam disponíveis: uma derivada da mecânica newtoniana [mecânica tradicional], que tinha o conceito de força como um de seus elementos fundamentais e a outra, baseada no Princípio da Conservação da Energia, que partia dos mesmos fundamentos da primeira, com exceção do conceito de força que fora substituído pelo de energia" (CARVALHO, 2007, p. 39).

Ele sustentava que o homem forma imagens[100] das coisas, entretanto, não saberia se essas imagens estão em conformidade com as coisas. Seria possível a existência de várias imagens de uma mesma coisa, sendo que elas pressupõem um isomorfismo[101] entre pensamento e natureza, então a questão seria definir a melhor imagem. Para essa definição, Hertz estabelece critérios: permissibilidade lógica, correção e adequação[102] que permitiriam saber qual das imagens possíveis estaria conforme as coisas (CARVALHO, 2007, JANIK; TOULMIN, 1991).

Hertz constrói "a ideia de *representação científica* destas imagens" (CARVALHO, 2007, p. 62, grifo do autor), sendo que o termo "imagem" foi designado com a palavra *Bild*, cujo significado é vago, na edição original em alemão de *The Principles of Mechanics*. Posteriormente, o uso da palavra *Bild* por Hertz acabou causando interpretações incorretas. Mach foi um dos que afirmou que a *Bild* herteziana exprimia a noção empírica de "ideias", o que mostraria que Hertz estaria distante de uma influência kantiana (JANIK; TOULMIN, 1991).

Segundo Carvalho (2007), identifica-se em Hertz múltiplas possibilidades de interpretação das palavras "imagem" e "representação" que são fundamentais na sua concepção de teoria científica. Em sua abordagem teórica, para o termo "representação" é empregada a palavra da língua alemã *Darstellung* que indica a possibilidade da existência de várias representações do mesmo fenômeno. O significado de "*Darstellung* é associado a representações 'externas', públicas, construídas conscientemente, como, por exemplo, as representações artísticas ou os modelos matemáticos científicos" (CARVALHO, 2007, p. 63) e ele compara a *Darstellung* a uma "gramática sistemática" (JANIK; TOULMIN, 1991, p. 157) que possuiria relação com a gramática de uma língua, "uma gramática criada com o propósito de habilitar os aprendizes a familiarizar-se o mais rápido possível com aquilo que lhes é exigido na vida cotidiana" (HERTZ, 1956, prefácio *apud* JANIK; TOULMIN, 1991, p. 157). [103]

Com este trabalho, Hertz se torna um dos primeiros físicos que apresenta uma teoria de modelos matemáticos com raízes kantianas (GOTTSCHALK, 2002). Seus modelos da Mecânica não se constituem como cópias da realidade empírica e seus elementos não são

[100] "as imagens [ou modelos, que na língua alemã é *Bilder*] a que ele [Hertz] se refere são nossas concepções das coisas" (CARVALHO, 2007, p. 61).

[101] Um isomorfismo inato entre pensamento e natureza possibilitaria compreender como as experiências sensíveis se apresentam ao ser humano: com uma estrutura epistêmica e não como impressões sensoriais não processadas, tal como concebe a perspectiva empirista. Essa ideia quanto à perspectiva epistêmica é adotada por Kant e Hertz (JANIK; TOULMIN, 1991, CARVALHO, 2007).

[102] As imagens não podem ser logicamente contraditórias; deve haver compatibilidade com dados da experiência; é quanto à clareza e simplicidade dos conceitos e leis utilizados para expressar os fenômenos (SILVA, 2012).

[103] "Hertz se referisse [refere] à gramática normalizadora de uma língua qualquer e não à gramática no sentido filosófico estipulado por Wittgenstein" (CONDÉ, 2004a, p. 8).

derivados da percepção sensorial. Eles possuem fundamento lógico-matemático. Seriam as fórmulas matemáticas que forneceriam um quadro de referência para tratar dos problemas da Física, de modo que a realidade empírica seria dotada de uma estrutura lógica (JANIK; TOULMIN, 1991).

> Os modelos de Hertz, cuja própria estrutura prescreve sua esfera de aplicação, assinalam um grande progresso sobre o sistema conceptual básico que Mach tinha utilizado – isto é, símbolos que são "cópias" ou "nomes" da experiência sensorial concreta – **porque o fundamento desses modelos não é psicológico e descritivo, mas lógico-matemático** (JANIK; TOULMIN, 1991, p. 158, grifo nosso).

Em suma, para Hertz, diversos modelos mecânicos – "representações" (*Darstellung)*, tal como uma "gramática sistemática" (JANIK; TOULMIN, 1991, p. 157) de fundamento lógico-matemático – explicariam os mesmos fenômenos, apontando para o funcionamento da linguagem na prática científica porque esse físico não mais concebe um modelo como uma reprodução de impressões sensoriais de fundamento psicológico, conforme os cientistas de uma perspectiva empirista.

Mais tarde, a *Darstellung* herteziana inspira o Wittgenstein do *Tractatus* que assume a palavra "representação" com o termo na língua alemã *Bild*,

> *Bild* ou *picture* é, para Wittgenstein, algo que fazemos, ou produzimos, como um artefato; assim como um pintor cria uma 'representação artística' de uma cena ou pessoa, também **nós construímos, em linguagem, 'proposições' que têm as mesmas formas dos fatos que representam** (JANIK, TOULMIN, 1991, p. 211, grifo nosso).

Com este termo ele trata do modelo lógico, construções lógicas, a que a realidade "deve" corresponder, ao se supor a existência de um isomorfismo entre linguagem e realidade, de modo que "É através da teoria da linguagem como *Bild* (modelo) que Wittgenstein dá conta da natureza do sentido de proposições" (MIGUENS, 2007, p. 135).

Nas *Investigações*, o interesse de Wittgenstein não é mais "a 'estrutura formal' da linguagem ou qualquer suposta semelhança de estrutura entre 'proposições' e 'fatos'" (JANIK, TOULMIN, 1991, p. 262), mas voltar-se para a linguagem, estabelecendo que os significados das palavras e expressões linguísticas são seus usos nos distintos jogos de linguagem.

Diferentemente do *Tractatus,* "a linguagem não é mais uma representação do mundo, mas uma forma de interagir no mundo" (CONDÉ, 2004b, p. 82) e nessa perspectiva pragmática, segundo Glock (1998), é identificada novamente a influência de Hertz, quando Wittgenstein defende a clara visão de uso das palavras (visão sinóptica), "entendida como a descrição da totalidade da gramática de um conceito" (GUTIERREZ, p. 217, 2004), como um remédio para as confusões conceituais.

> Wittgenstein inspira-se mais em Hertz, para quem as questões relativas a conceitos como o de força não devem ser respondidas por meio de novas informações ou

> definições científicas, precisando antes ser dissolvidas por meio de uma compreensão mais clara das informações e das definições existentes (GLOCK, 1998, p. 374).

Por meio desta visão sinóptica (GUTIERREZ, 2004) são vistas as regras gramaticais das nossas práticas linguísticas e seria possível "lançar luz sobre uma enorme diversidade de fenômenos sem que, para isso, seja preciso descobrir algo de novo, bastando organizar o que já é conhecido, de um modo que esclareça às ligações ou interconexões" (GLOCK, 1998, p. 375) semelhantemente ao trabalho de Hertz quando propôs uma "representação" *Darstellung* para os fenômenos físicos.

Ao retomar a pergunta formulada no início desta seção, "ao se afirmar que o modelo matemático é constituído por proposições matemáticas normativas, então como ele poderia ter como função a "representação" da realidade empírica?", entende-se que uma das repostas está relacionada aos fundamentos do modelo matemático.

Como apontado anteriormente, consoante as passagens consideradas e nas descrições sobre Modelagem, em geral, **o modelo matemático é uma representação subjacente à realidade empírica,** constituindo **uma imagem**, pois se pressupõe que a linguagem matemática apenas descreveria a realidade empírica. O modelo matemático, embora não sendo uma descrição fiel da realidade, expressaria uma realidade subjacente sobre a qual fala Gottschalk (2004b), como sendo uma realidade última que balizaria a descrição. Deste modo, há uma possível confusão conceitual *quanto à existência de um isomorfismo entre o modelo matemático e a realidade empírica.*

Tendo em conta que nas passagens de Wilmer (1976), Sánchez (1979) e Anastacio (1990), o modelo matemático é concebido como uma abstração da realidade empírica, e que em Magalhães Oliveira (2018), o modelo é uma apreensão da realidade empírica onde a Matemática está presente, visualiza-se uma concepção empirista da Matemática que considera os entes matemáticos como abstrações de objetos do mundo empírico (SILVA, 2007).

Nas passagens de Gazzetta (1989), constatam-se aspectos do formalismo, pois, segundo essa autora, haveria uma realidade matemática, simbólica e abstrata que contêm conceitos e teoremas matemáticos, os quais seriam modelos matemáticos que representariam situações-problemas do mundo empírico.

As passagens subsequentes também dão indícios de uma concepção formalista da Matemática, segundo a qual a Matemática é um conjunto de sistemas formais, de símbolos matemáticos vazios, que podem ser manipulados de acordo com certas regras, mas que só adquirem significado quando aplicados aos problemas físicos (DAVIS; HERSH, 1989).

Os usos da expressão “modelo matemático”, encontrados nas pesquisas de Dolis (1989), Martinello (1994), Franchi (2002), Borssoi (2013) e Vidigal (2013), exibem entre si ligações analógicas concernentes ao modelo matemático como uma representação de uma situação-problema do mundo empírico mediante a utilização da Matemática, concebida como uma linguagem, até mesmo com características de uma perspectiva formalista: “Matemática como linguagem e lógica simbólica” (DOLIS, 1989, p. 6), “linguagem matemática” (MARTINELLO, 1994, p. 71), “através de estruturas e conceitos matemáticos”[104] (FRANCHI, 2002, p. 56), “um sistema artificial, uma formalização” (BORSSOI, 2013, p. 49), “como uma formalização, por meio construção simbólica expressa em linguagem matemática [sic]” (VIDIGAL, 2013, p. 34).

Portanto, nos usos da expressão linguística “modelo matemático” destas passagens, são identificadas nuances de uma concepção formalista da Matemática, pois seria possível operar com teorias ou conceitos matemáticos de uma realidade simbólica, vazia de significado, para descrever situações-problemas do mundo empírico. Logo, a descrição, mediante uma linguagem matemática simbólica, seria o modelo matemático.

Além disso, como se mostra nas passagens mencionadas, verificam-se aspectos de uma concepção empirista porque existe a ideia de que o modelo matemático estaria na realidade empírica, bastaria abstraí-lo, apreendê-lo por meio da experiência sensorial. Assim, o modelo seria perceptível nas situações-problemas ou nos fenômenos do mundo empírico. Entende-se que o modelo matemático seria decorrente de abstrações empíricas e que a linguagem matemática seria utilizada para comunicá-las, representá-las.

Das passagens com aspectos do formalismo, entende-se que os conceitos, teoremas, teorias matemáticas, um sistema artificial, uma estrutura ou formalização matemática, tidos como modelos matemáticos, estabelecem uma correspondência com a realidade empírica, possibilitando a descrição matemática dessa realidade e implicando no modelo. Desse modo, a linguagem simbólica do formalismo, que é o modelo matemático, descreveria situações-problemas do mundo empírico.

Em conclusão, os usos apresentados da expressão “modelo matemático” mostram uma concepção referencial da linguagem, onde a linguagem matemática, situada numa realidade simbólica ou empírica, seria representativa do mundo empírico.

---

[104] Que também podem ser interpretados como expressões formais da Matemática tida como uma linguagem formal e rigorosa.

Embora nas passagens não seja explicitado que o modelo matemático é uma representação fiel da realidade empírica, mas aproximada, haveria uma realidade matemática, empírica ou simbólica, fazendo supor um isomorfismo entre os modelos matemáticos e a realidade empírica.

Ao se supor esse isomorfismo é passível de ser estabelecida uma analogia destes modelos matemáticos com o modelo lógico *(Bild)* do *Tractatus* que representa os fatos do mundo. Considerando a perspectiva tractariana, os modelos matemáticos seriam "como preconceito ao qual a realidade *tem que* corresponder" (WITTGENSTEIN, 2014, § 131, grifo do autor), apontando para a confusão conceitual *quanto à existência de um isomorfismo entre o modelo matemático e a realidade empírica.*

7.2 Possíveis esclarecimentos

Num primeiro momento, frente ao questionamento, "ao se afirmar que o modelo matemático é constituído por proposições matemáticas normativas, então como ele poderia ter como função a "representação" da realidade empírica?", argumenta-se que o modelo matemático, constituído por proposições matemáticas, não é meramente uma descrição simbólica de objetos matemáticos abstraídos do empírico, mas é um tipo de "representação" de situações-problemas do mundo empírico, de natureza gramatical.

Em defesa deste argumento, intenta-se também estabelecer um comparativo entre as hipóteses nas Ciências Empíricas e na Modelagem. Para tanto, considera-se como subsídio uma discussão acerca dos diferentes aspectos de uma hipótese: o probabilístico e aquele que trata de certezas que pertencem ao campo gramatical da hipótese (GOTTSCHALK, 2004b).

Nas Ciências Empíricas, as leis, "explicações para os fatos [ou fenômenos] particulares" (GOTTSCHALK, 2004b, p. 69), decorrem das verificações das implicações de hipóteses levantadas acerca de algum fenômeno particular, "uma vez que nunca ela é completamente verificada. É apenas confirmada, em maior ou menor grau" (GOTTSCHALK, 2004b, p. 70). Na Modelagem, o modelo matemático é obtido por meio da formulação de hipóteses a respeito da situação-problema em investigação, que, por sua vez, é também verificado (validado) repetidamente, tendo em vista sua reformulação, se necessário.

Neste sentido, não haveria semelhanças entre uma lei que se estabelece nas Ciências Empíricas e um modelo matemático. As hipóteses nas Ciências Empíricas, se confirmadas, transformam-se numa lei que descreve algum fenômeno natural e, na Modelagem, um modelo matemático ao ser validado teria como função "representar" uma situação-problema do mundo empírico em estudo.

Porém, ao se estabelecer este comparativo, também vem à tona um questionamento no tocante às proposições matemáticas que fazem parte das leis das Ciências Empíricas e dos modelos matemáticos na Modelagem. Se essas proposições são normativas, de que maneira elas estariam "descrevendo" algum fenômeno natural nas Ciências Empíricas ou alguma situação-problema do mundo empírico na Modelagem? Para trazer luz a esse questionamento, atentaremos para uma discussão sobre os aspectos de uma hipótese tecida por Gottschalk (2004b).

Quanto ao aspecto probabilístico das hipóteses, nas *Observações Filosóficas*, Wittgenstein afirma que "O que é essencial para uma hipótese, creio, é que ela suscite uma expectativa ao admitir uma futura confirmação. Ou seja, é da natureza de uma hipótese que sua confirmação nunca termine" (WITTGENSTEIN, 2005, XXII, 228). Para o filósofo, as hipóteses dizem respeito a expectativas quanto a uma confirmação futura sobre a realidade empírica, porém essa confirmação nunca é completa, "Ela tem, por conseguinte, um grau probabilístico. Nunca terá um grau de certeza absoluto, pois sempre pode haver a possibilidade de ser refutada em algum momento" (GOTTSCHALK, 2004b, p. 70). Segundo a autora, uma hipótese terá maior possibilidade de ser considerada uma lei devido ao seu caráter probabilístico, isto é, à medida que uma quantidade maior de implicações dessa hipótese for verificada. Para além disto, o que se quer chamar à atenção é que, sob uma perspectiva wittgensteiniana, – "Ter uma expectativa está ligado a procurar: procurar alguma coisa pressupõe saber o que eu estou procurando, sem que o que procuro tenha que existir" (WITTGENSTEIN, 2005, III, 28) – "estabelece um 'campo gramatical'" (GOTTSCHALK, 2004b, p. 71) porque "Nossa **expectativa** antecipa o evento. Nesse sentido, ela **cria um modelo do evento**" (WITTGENSTEIN, 2005, III, 34, grifo nosso). E ainda, "**A expectativa**, por assim dizer, **prepara um padrão para medir o evento** quando ele acontece e, mais do que isso, ela o faz de modo tal que vai ser necessariamente possível medir um com relação ao outro, quer o evento coincida com a graduação esperada, quer não" (WITTGENSTEIN, 2005, III, 33, grifo nosso).

Com estes aforismos, Wittgenstein salienta os aspectos probabilísticos e aqueles que tratam de algumas certezas que pertencem ao campo gramatical do qual fazem parte as hipóteses, implicando seu caráter híbrido (GOTTSCHALK, 2004b).

No aforismo das *Observações Filosóficas* (WITTGENSTEIN, 2005), a hipótese que a altura da pessoa seja 1,70 metros "pressupõe uma gramática que me permite medir precisamente sua altura, dentro de certa margem de erro" (GOTTSCHALK, 2004b, p. 72).

> É, digamos, como se eu adivinhasse a altura de uma pessoa olhando para ela e dizendo: "Acredito que ela tenha 1,70 metro", e depois começasse a medi-la com uma fita métrica. Mesmo sem saber a altura da pessoa, ainda sei que a sua altura é medida com uma fita métrica e não com uma máquina de pesar (WITTGENSTEIN, 2005, III, 33).

Ainda segundo Gottschalk (2004b), o campo gramatical (a gramática) da hipótese é constituído por certezas, constitui-se por uma parte fixa, *a priori,* que dá sentido ao que é dito e à maneira como agimos.

> **Esta régua [padrão para medir] a que Wittgenstein se refere pode ser entendida como um paradigma de nossa linguagem que possibilita determinadas descrições,** mas não é em si mesma uma descrição. Em suma, só posso descrever de posse de uma gramática. E **são as expectativas que vão determinar as gramáticas a serem empregadas para "figurar" a realidade (como as réguas apostas à realidade).** A expectativa de se determinar a altura de um homem mobiliza um campo gramatical diferente de quando intencionamos medir seu peso. Assim, toda hipótese pressupõe uma parte fixa, *a priori*, que nos diz o que tem e o que não tem sentido dizer (GOTTSCHALK, 2004b, p. 72, grifo nosso).

A autora exemplifica que ao se considerar "a lei da termodinâmica[105], que expressa o comportamento das moléculas através da relação $V = c.T/P$" (GOTTSCHALK, 2004b, p. 73), não é a proposição matemática $V = c.T/P$ que é verificada, ela apenas expressa a lei natural que, no que lhe concerne, é a parte da hipótese que é testada. Devido ao caráter híbrido das hipóteses, o físico testa a lei natural se de fato esta lei é satisfeita por este tipo de cálculo, mas não se trata de testar a proposição matemática, "o que se confirma numa hipótese são as leis naturais que a suportam, e não o cálculo" (GOTTSCHALK, 2004b, p. 73).

Contudo, pelo fato das hipóteses das Ciências Empíricas serem expressas por proposições matemáticas, perpetua-se a crença de que a Matemática também seria preditiva e descritiva do mundo empírico. Mas, as proposições matemáticas são normativas e prescritivas, ou seja, organizam a experiência empírica. Elas são condições de sentido para as proposições empíricas (GOTTSCHALK, 2004b).

Pode-se dizer que as proposições matemáticas são como a régua (padrão para medir) (WITTGENSTEIN, 2005, III, 33). Além disso, segundo Wittgenstein (2014, § 131), o modelo "é, como objeto de comparação – por assim dizer, como medida". Sob essa perspectiva, os modelos matemáticos, constituídos por proposições matemáticas, são como que paradigmas da gramática da Matemática. Ao retomar o exemplo da lei da termodinâmica, o modelo

---

[105] Lei que expressa o comportamento das moléculas, sendo as variáveis volume (V), temperatura (T), pressão do gás (P) e uma constante (c) (GOTTSCHALK, 2004b).

matemático $V = c.T/P$ expressa uma lei natural que é testada; verifica-se se essa lei é satisfeita por esse modelo matemático. Desse mesmo modo, na Modelagem, não é o cálculo que é testado, mas verifica-se se o que envolve a situação-problema do mundo empírico em investigação é compatível ou é satisfeito pelo modelo matemático obtido.

O modelo matemático como um paradigma da gramática da Matemática é similar às "representações" de Hertz que se valiam do quadro de referência composto por fórmulas matemáticas para tratar dos problemas da Mecânica. Neste sentido, o modelo matemático pode ser tomado com função de paradigma, "representação" (*Darstellung*), tal como o metro-padrão (WITTGESNTEIN, 2014, § 50). Assim, o modelo matemático é um objeto linguístico que organiza a experiência empírica, que dá sentido ao que é dito acerca da situação-problema em investigação.

Souza (2012), em sua pesquisa, discute que a Modelagem pode ser compreendida a partir da Matemática como um sistema normativo, isto é, composta por proposições normativas que organizariam as experiências humanas, e ela ilustra essa ideia a partir de uma situação-problema de Modelagem extraída do artigo de Mogens Niss[106].

Segundo Souza (2012, p. 45), Niss propõe identificar "a altura que se deve encher de vinho uma taça para que ela seja preenchida em dois terços de seu volume total". Ela discorre que no âmbito escolar, tendo em vista a matematização dessa situação-problema, um dos primeiros encaminhamentos seria identificar quais proposições matemáticas organizariam essa experiência.

Niss utilizou proposições geométricas, mais especificamente aquelas relacionadas ao cone. Valendo-se dessas proposições, calculou o volume do cone, a sua altura, área lateral etc. Ao final, Niss conclui que "a *taça de vinho* seria preenchida em dois terços de volume de seu total, se fosse inserido vinho a uma altura que corresponderia a 0,79 da altura total da taça" (SOUZA, 2012, p. 46, grifo da autora).

A autora compreende que, na Modelagem, o sistema normativo – neste caso, de proposições geométricas – matematiza situações de natureza empírica, as quais podem ser refutadas e falseadas, a partir da análise dos fatos; "Com isso, apontamos que podemos conferir, por meio dos fatos, observando se a taça de vinho está preenchida em dois terços de sua capacidade, por exemplo" (SOUZA, 2012, p. 46). Não se trata de refutar a Matemática quando

[106] NISS, Mogens. Modeling a crucial aspect of student's mathematical modeling. *In:* LESS *et al.* (Orgs). **Modeling student mathematical modeling competences:** 13 ICTMA. New York: Springer, 2010. p. 43-59.

os cálculos não correspondem com os fatos analisados, "Não se reelabora uma nova fórmula para os cálculos do volume do cone, nem se modifica a figura geométrica que possui esse nome, por exemplo" (SOUZA, 2012, p. 46-47).

Tendo em vista uma matematização cujos resultados sejam os mais fiéis possíveis em relação aos fatos, pois se considera que eles não são representações fiéis dos fatos, então é possível buscar outras proposições matemáticas, mas essa procura não as modifica. Os resultados encontrados são aproximações da realidade, assim, a Matemática não descreve a realidade porque não há uma correspondência biunívoca entre a Matemática e a realidade. No contexto da Modelagem, a matematização corresponde a um modo de ver as situações empíricas (SOUZA, 2012).

> Como sistema normativo, a matematização corresponde a um modo de *ver* as situações empíricas e, a depender das proposições matemáticas adotadas, esse modo de *ver* se modifica. Assim, os diferentes resultados matemáticos possíveis de serem encontrados relativos à matematização de um problema em modelagem, podem ser compreendidos como diferentes maneiras de organizar experiências de natureza empírica (SOUZA, 2012, p. 47, grifo da autora).

Frente à confusão conceitual *quanto à existência de um isomorfismo entre o modelo matemático e a realidade empírica,* ao considerar os diferentes modos de ver as situações-empíricas (SOUZA, 2012) e a "representação" *(Darstellung)* de natureza gramatical, tal como ocorre na Mecânica de Hertz, diversos modelos matemáticos poderiam "representar" a mesma situação-problema. Além disso, a confusão quanto ao isomorfismo que se estabelece entre linguagem e realidade, o "preconceito ao qual a realidade *tem que* corresponder" (WITTGENSTEIN, 2014, § 131, grifo do autor) é dissolvida.

Relembrando que um dos usos privilegiados da expressão linguística "modelagem matemática", discutido no capítulo anterior, é quanto a um tipo de descoberta relativa a modelos matemáticos inseridos em alguma realidade matemática, então, contrariamente a esse tipo de descoberta, frente às discussões tecidas no presente capítulo, o que se pode dizer é que o estudante descobriria "um" (e não "o") modelo matemático relacionado à situação-problema em investigação. Porém, essa descoberta estaria atrelada ao seu conhecimento quanto às proposições da Matemática, "a parte fixa*, a priori"* (GOTTSCHALK, 2004b, p. 72) da hipótese. Logo, os modelos matemáticos não seriam descobertos pelo estudante intuitivamente, pela razão ou por acaso, por exemplo.

Ao retomar a ideia de que é a procura por algo que estabelece um campo gramatical, quando o estudante se propõe a "procurar" um modelo matemático, a elaboração desse modelo se dará, então, conforme o campo gramatical, "a régua", que ele possui. Ou ainda, são as proposições matemáticas que o estudante conhece que o capacitarão a ver a situação empírica (SOUZA, 2012) e organizá-la de determinada maneira.

Assim, um modelo matemático não trata meramente de uma correspondência entre objetos matemáticos de uma realidade simbólica e o mundo empírico. Um modelo matemático é concernente às regras matemáticas que o estudante domina, pois são elas que lhe possibilitarão "uma" representação aproximada da situação-problema, uma representação de natureza gramatical. Em consequência, a Modelagem se constituiria como um meio para mostrar diversos usos dos conceitos matemáticos, de modo que, o estudante compreenderia a realidade empírica a partir das regras matemáticas, formulando modelos matemáticos com um fundamento linguístico (*Darstellung*).

8 TERCEIRA IMAGEM: NA MODELAGEM OS CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS TERIAM ORIGEM EM CONTRUÇÕES MENTAIS

Este capítulo versa sobre a imagem e possíveis esclarecimentos de confusões conceituais dos usos da expressão linguística “modelagem matemática” encontradas em passagens de teses e dissertações[107] que expressam uma relação entre a Modelagem e uma maneira de construir conhecimentos matemáticos que se dá no processo de Modelagem.

Estes usos da expressão “modelagem matemática” estão vinculados à **imagem** que **na Modelagem os conhecimentos matemáticos teriam origem em construções mentais.** Dessa imagem, uma confusão conceitual que se instala é que *os conhecimentos matemáticos construídos na Modelagem são representações mentais (Vorstellungen) de conceitos matemáticos,* revelando uma concepção referencial mentalista da linguagem.

A descrição dos usos da expressão linguística “modelagem matemática” inicia-se com passagens de dissertações e teses que mostram o seguinte aspecto: as aulas por Modelagem contrapõem aulas respaldadas por uma abordagem tradicional. E, devido às características do tipo de aula que se configura com a utilização da Modelagem, então são possibilitadas condições ao estudante para a construção de conhecimentos matemáticos.

Em uma passagem de Mazur (2021) o uso da expressão linguística “modelagem matemática” indica a Modelagem como uma metodologia de ensino que considera o estudante, ela desloca-se do método tradicional, possibilitando a construção do conhecimento. Em Camilo (2002), o uso da expressão “modelagem matemática” explicita que, diferentemente do que ocorre em aulas tradicionais, em que não são oferecidas oportunidades para o estudante refletir e construir conceitos matemáticos, em aulas por Modelagem, ele é co-produtor do seu conhecimento. Corroborando o que é dito na passagem de Camilo (2002), segundo Ferruzzi (2003), em aulas expositivas não é oportunizado ao estudante a construção de conceitos matemáticos, mas a Modelagem propicia essa construção que se dá mediante a utilização da

[107] Na maioria das pesquisas selecionadas deste capítulo, apesar das passagens mencionarem uma relação entre a Modelagem e a construção de conhecimentos matemáticos, os trabalhos não apresentam um referencial teórico de autores cognitivistas ou sócio interacionistas. Seus referenciais teóricos são fundamentados por pesquisadores da Modelagem e algumas pesquisas também discorrem sobre a Educação Matemática Crítica. Dentre as pesquisas selecionadas, Hammes (2000), Camilo (2002) e Silva (2021) mencionam em seus referenciais teóricos David Ausubel, Almeida (1993) e Martinello (1994) discorrem sobre as acepções teóricas de Jean Piaget, David Ausubel e Lev Vygotsky e Franchi (1993) disserta sobre Alexander Luria. Apesar desses trabalhos possuírem referenciais teóricos com autores díspares, considera-se que as passagens extraídas dessas pesquisas não são comprometedoras em relação as demais passagens mencionadas neste capítulo para se tratar das confusões conceituais que se instalam na Modelagem.

estrutura cognitiva do estudante. Nas passagens de Hammes (2000) e Machado Júnior (2005) é dissertado que, na Modelagem, o conhecimento concebido como pronto e acabado é deixado de lado, pois o conhecimento passa a ser construído pelo estudante.

> Quando dizemos “Modelagem Matemática na Educação Matemática”, queremos dizer que esta **é uma metodologia de ensino que leva em consideração o sujeito que aprende, deslocando-se do método tradicional, possibilitando** a interação, cooperação, criticidade, **construção do conhecimento** [...] (MAZUR, 2021, p. 31, grifo nosso).

> Assim, na metodologia tradicional, não são oferecidas oportunidades para se refletir e para se construir novos conceitos, situação essa diferente no método da **Modelagem, na qual o aluno deve ser o co-produtor do seu conhecimento, ou seja, deve ser o centro do processo;** o professor como mediador (CAMILO, 2002, p. 128, grifo nosso).

> Em aulas expositivas, onde o professor apresenta o conteúdo, não é oferecido ao aluno a oportunidade de construir os conceitos. **Se o conceito for construído pelo aluno será facilmente resgatado quando necessário, uma vez que para construir este conceito o aluno utilizou sua estrutura cognitiva e a Modelagem Matemática propicia esta construção** (FERRUZZI, 2003, p. 51, grifo nosso).

> Através da **Modelagem Matemática também possibilitamos ao aluno que desenvolvesse sua forma própria de pensar.** Ao oportunizarmos o aluno a pensar, deixamos o saber pronto e acabado de lado, **para participar mais intensamente com nosso aluno num processo de permanente construção e reconstrução do conhecimento** (HAMMES, 2000, p. 167, grifo nosso).

> [...] **a Modelagem Matemática é uma forma de vivenciar a matemática** não como um conhecimento pronto e acabado, mas como uma forma **de construir este conhecimento** (MACHADO JÚNIOR, 2005, p. 77, grifo nosso).

Nas passagens subsequentes, também são evidenciadas características de aulas por Modelagem que favorecem a construção de conhecimentos matemáticos. Na passagem de Roma (2002), o uso da expressão linguística “modelagem matemática” exprime que a Modelagem leva o estudante a deixar a passividade, torna-o crítico, participativo, ativo e construtor do seu conhecimento. Numa passagem de Kaczmarek (2019), é inclusive expressa uma diferenciação entre a Modelagem na Matemática Aplicada e a Modelagem no ensino e aprendizagem da Matemática. Contrariamente ao que acontece na Modelagem no contexto da Matemática Aplicada, a utilização da Modelagem na prática pedagógica preocupa-se com a construção dos conceitos matemáticos (KACZMAREK, 2019). Domingos (2019) explicita que, no espaço colaborativo com a construção de novos saberes, promovido pela Modelagem, os estudantes constroem seu próprio conhecimento.

> [...] com a Modelagem, a Educação e, consequentemente, o ensino, passam a ser ‘vistos’ no sentido de estimular e desenvolver o educando em sua plenitude, **levando-o a deixar a passividade e tornando-se crítico, ativo, participativo e construtor do seu próprio conhecimento** (ROMA, 2002, p. 178, grifo nosso).

> Nesse sentido, na Matemática Aplicada o uso da Modelagem Matemática se faz a partir de conhecimentos matemáticos já existentes. Por outro lado, quando **a preocupação é a construção dos conceitos matemáticos**, com a efetivação do processo de ensino e aprendizagem da Matemática, a perspectiva da sua utilização precisa, necessariamente, ser outra (KACZMAREK, 2019, p. 75, grifo nosso).

> [...] a prática com **Modelagem Matemática promove um espaço colaborativo com a construção de novos saberes, no qual os estudantes são os construtores do seu próprio conhecimento**, o que proporcionou a eles compreender que a Matemática pode ser utilizada em diversas situações reais e não apenas nos conteúdos voltados ao cotidiano escolar (DOMINGOS, 2019, p. 102, grifo nosso).

Há passagens que também mencionam que a Modelação[108], tal como a Modelagem, oportuniza, a partir de situações-problemas do mundo real, a reinvenção ou reconstrução de ideias e conceitos matemáticos (MARTINELLO, 1994), que ela possibilita ao estudante aprender com prazer construindo seus conhecimentos (MACINTYRE, 2002) ou que leva o estudante a construir conhecimentos (LEAL, 1999).

> Um dos elementos essenciais desse processo de modelação matemática é a oportunidade que é oferecida aos alunos de **reinventarem ou reconstruírem ideias e conceitos matemáticos**, quando são colocados diversos problemas do “mundo real” em situações que podem ser estruturadas matematicamente (MARTINELLO, 1994, p. 83).

> Através da modelação matemática **vimos a possibilidade do estudante** [...] **aprender com prazer construindo seus conhecimentos** (MACINTYRE, 2002, p. 98, grifo nosso).

> É importante colocar que do ponto de vista cognitivo o processo de Modelação Matemática proposto por BIEMBENGUT pode ser visto como uma maneira ergonômica de **levar o aluno à construção do conhecimento** (LEAL, 1999, p. 33, grifo nosso).

Em outras passagens é ressaltada uma nuance quanto ao aspecto cognitivo do estudante, no sentido de que a Modelagem daria oportunidade para ele organizar suas estruturas mentais, refletir e/ou raciocinar, o que implicaria na construção de conhecimentos matemáticos.

A pesquisa de Soistak (2006) explicita que é chegado o tempo do professor deixar de ser o centro no processo de ensino e aprendizagem e oferecer aos estudantes situações que “mexam” em suas estruturas mentais. Com a Modelagem, a Matemática pode ser vista de outra maneira porque ela oportuniza ao estudante pensar e organizar suas estruturas mentais. Na passagem de Costa (2000), é expresso que a Modelagem motiva o estudante a pensar, raciocinar, dá oportunidade para construir conhecimentos, na de Burak (1987), a Modelagem se constitui na ação de refletir, construir, o autor menciona a maneira natural de pensar do

[108] Biembengut (1990) adapta a Modelagem para o ensino de Matemática e denomina Modelação Matemática.

estudante. Em Sodré (2013), a Modelagem, sob uma perspectiva crítica, ao possibilitar a reflexão e debate, contribui para a construção de conhecimentos.

> Está na hora de deixarmos o papel central no processo de ensino e aprendizagem e **passarmos a oferecer ao aluno situações que "mexam" em suas estruturas mentais, que deem a ele a oportunidade de refletir e construir seu conhecimento.** A aplicação da Modelagem Matemática trouxe mudanças sobre a visão que muitos tinham sobre a Matemática, **pois através dela houve a oportunidade de pensar e organizar as estruturas mentais** (SOISTAK, 2006, p. 102, grifo nosso).

> A aplicação da MM [...] **motivando-os a pensar, a raciocinar** e fazer Matemática. Em outras palavras, **aqueles alunos tiveram, através daquela abordagem, a oportunidade de construir seus próprios conhecimentos matemáticos** (COSTA, 2000, p. 141, grifo nosso).

> **No estudo da Matemática através da modelagem, as atividades se constituem na ação de refletir, de fazer, de construir, de concluir e de generalizar.** Esta é a liberdade que essa prática educativa parece permitir a cada participante do processo, ao favorecer o uso de suas próprias estratégias, **na sua maneira natural de pensar**, sentir e agir (BURAK, 1987, p. 32, grifo nosso).

> [na Modelagem é dada] ao aluno liberdade para que **faça uso das suas potencialidades, suas estratégias próprias, de sua intuição, da sua maneira de pensar** e associar ideias e experiências diante de uma situação-problema (BURAK, 1987, p. 53).

> [...] **a modelagem matemática crítica como atividade de ensino e investigação pode contribuir significativamente com o processo de construção de conhecimento ao possibilitar espaço para reflexão, debate** [...] (SODRÉ, 2013, p. 10, grifo nosso).

Outro aspecto constatado nas passagens está relacionado à atividade (ação) do estudante em aulas por Modelagem, tendo em vista a construção de conhecimentos matemáticos, conforme dito por Franchi (1993), Roma (2002), Kaviatkovski (2012), Tessaro (2015) e Komar (2017).

> **O saber construído através dos modelos é um saber contextualizado e com significado.** Sem dúvida, é o aluno o agente desse processo de construção (FRANCHI, 1993, p. 106, grifo nosso).

> **As aulas em que há utilização da modelagem são mais ativas, pois os alunos estão participando ativamente** da construção do conhecimento matemático (ROMA, 2002, p. 177, grifo nosso).

> [...] a Modelagem como uma metodologia que favorece a aprendizagem dos estudantes uma vez que ela possibilita que esse [sic] **participe de maneira ativa na construção do seu conhecimento matemático** (KAVIATKOVSKI, 2012, p. 15, grifo nosso).

> [...] é possível estudar matemática de outro modo, a partir de situações reais, **inserindo-os como participantes ativos na construção do conhecimento** ensinado (TESSARO, 2015, p. 56, grifo nosso).

> O foco da investigação oportunizou admitir a Modelagem como uma metodologia de ensino e aprendizagem da Matemática, a partir da análise dos elementos proporcionados pelas ações e interações dos estudantes e professor, no

> desenvolvimento de atividades identificando e analisando aspectos pedagógicos, psicológicos e comportamentais percebidos nos estudantes quando envolvidos nas atividades de Modelagem Matemática, não só dos conteúdos matemáticos, mas das aprendizagens de outros campos do conhecimento, **beneficiando o estudante a assumir um papel ativo, como protagonista nesta construção** (KOMAR, 2017, p. 92, grifo nosso).

Segundo Frachi (1993), na Modelagem, o estudante é o agente do processo de construção, na passagem de Roma (2002), as aulas por Modelagem são mais ativas porque os estudantes participam ativamente da construção do conhecimento matemático. Essa ideia também é constatada em Kaviatkovski (2012), que exprime que a Modelagem favorece a aprendizagem, pois os estudantes participam ativamente. De modo análogo, consoante Tessaro (2015), o estudo da Matemática, a partir de situações reais, insere os estudantes como participantes ativos na construção do conhecimento. E, para Komar (2017), a Modelagem beneficia o estudante a assumir um papel ativo, como protagonista da construção do conhecimento. Dá a entender que, mediante o emprego da Modelagem nas aulas, os estudantes estariam envolvidos em ações práticas e mentais, ou seja, estariam interagindo, resultando na construção de conhecimentos, isso é, na aprendizagem da Matemática.

Em outras passagens, os usos da expressão linguística “modelagem matemática” revelam o protagonismo do estudante e a atuação do professor como mediador, tal como identificado nas passagens de Jacoski (2020), Almeida (1993), Silva (2019) e Dente (2017).

> [...] **a pesquisa revelou:** o protagonismo, a criatividade e a cooperação entre as crianças, o envolvimento da família, a integração família escola, **a mediação do professor,** a interdisciplinaridade, o uso de tecnologia e a construção de conhecimentos matemáticos que permearam as etapas do trabalho (JACOSKI, 2020, p. 82, grifo nosso).

> [...] à tarefa do Educador Matemático que, **atuando como agente mediador,** através do uso da Modelagem como metodologia, **propicia ao estudante a construção do seu conhecimento matemático** (ALMEIDA, 1993, p. 76, grifo nosso).

> O ensino-aprendizagem no contexto da modelagem matemática requer certos cuidados, principalmente em **deixar o aluno produzir e ter autonomia para buscar ou construir seu próprio conhecimento, cabendo ao professor apenas mediar esse processo** (SILVA, 2019, p. 207, grifo nosso).

> Nessa passagem visualizo, com clareza, os papéis assumidos pelos envolvidos em uma prática de Modelagem Matemática. **Eu, no papel de mediadora, auxiliando e questionando os discentes, instigando o afloramento de novos conhecimentos** (DENTE, 2017, p. 55, grifo nosso).

A pesquisa de Jacoski (2020) revela que, a mediação do professor faz parte do trabalho com Modelagem. Segundo Almeida (1993), na Modelagem, o professor atua como mediador e propicia ao estudante construir conhecimentos matemáticos. Silva (2019) explicita que, na Modelagem, cabe ao professor apenas mediar o processo e deixar o estudante produzir e ter autonomia para construção do próprio conhecimento, já Dente (2017) discorre que, como mediador, o professor auxilia e questiona os estudantes, e instiga o "afloramento de novos conhecimentos" (DENTE, 2017, p. 55).

Considerando as descrições dos usos da expressão "modelagem matemática" nessas passagens, identificam-se algumas regras que orientam os usos dessa expressão linguística. Dentre essas regras, algumas apresentam como aspecto característico de aulas por Modelagem que acabam estabelecendo uma contraposição entre aulas por Modelagem e aulas respaldadas por uma abordagem tradicional: a Modelagem considera o estudante, ela desloca-se do método tradicional (MAZUR, 2021), na Modelagem o estudante é co-produtor do seu conhecimento (CAMILO, 2002), a construção do conhecimento se dá mediante a utilização da estrutura cognitiva do estudante (FERRUZZI, 2003), o conhecimento pronto e acabado é deixado de lado (HAMMES, 2000, MACHADO JÚNIOR, 2005), o estudante deixa de ser passivo, torna-se ativo (ROMA, 2002), os estudantes constroem seu próprio conhecimento num ambiente colaborativo com a construção de novos saberes (DOMINGOS, 2019), a Modelagem, no contexto pedagógico, preocupa-se com a construção de conhecimentos matemáticos (KACZMAREK, 2019).

Outras regras são quanto à Modelação. Assim como a Modelagem possibilita a construção de conhecimentos matemáticos, é expresso nessas passagens que a Modelação também favorece essa construção: na Modelação, a partir de situações-problemas reais é oportunizada a reconstrução de conhecimentos matemáticos (MARTINELLO, 1994), a Modelação possibilita ou leva o estudante a construir conhecimentos (LEAL, 1999, MACINTYRE, 2002).

Há regras consoantes ao aspecto cognitivo do estudante, a reflexão, o raciocínio em aulas por Modelagem: na Modelagem, há oportunidade para pensar e organizar as estruturas mentais (SOISTAK, 2006), a Modelagem se constitui na ação de refletir; o estudante tem liberdade para usar suas potencialidades, intuição, maneira de pensar (BURAK, 1987), ela motiva os estudantes a pensar, raciocinar (COSTA, 2000), a Modelagem, ao possibilitar reflexão e debate, contribui com a construção de conhecimentos (SODRÉ, 2013).

Em outros usos da expressão linguística "modelagem matemática" tem-se regras que explicitam que, em aulas por Modelagem, o estudante é ativo: na Modelagem, o estudante é o agente do processo de construção (FRANCHI, 1993), ele participa mais ativamente (KAVIATKOVSKI, 2012, TESSARO, 2015), assume o papel ativo, é protagonista (KOMAR, 2017), as aulas por Modelagem são mais ativas (ROMA, 2002).

Por fim, foram identificados usos da expressão "modelagem matemática" que apresentam regras sobre o papel do professor na Modelagem: na Modelagem o professor atua como mediador (DENTE, 2017, JACOSKI, 2020, ALMEIDA, 1993), o professor apenas media o processo (SILVA, 2019).

Diante de todas as passagens de dissertações e teses apresentadas neste capítulo, pode-se dizer que, diferentemente do que ocorre numa aula tradicional, as aulas por Modelagem favoreceriam a construção de conhecimentos matemáticos porque, nesse tipo de aula, o estudante deixa de ser passivo, torna-se ativo, participativo, ele reflete, utiliza as suas estruturas cognitivas, potencialidades, estratégias próprias, a sua intuição e sua maneira de pensar. O estudante é o protagonista e o professor é mediador nesse processo de construção. Outrossim, é como se, em decorrência da utilização da Modelagem, a aprendizagem matemática ocorresse muito naturalmente. A Modelagem "levaria" o estudante a construir seus conhecimentos, é como se a construção de conhecimentos matemáticos fosse próprio da Modelagem.

Nesse sentido, esses usos da expressão "modelagem matemática" exprimem um dogmatismo no tocante a uma maneira de construir conhecimentos matemáticos que se dá no processo de Modelagem.

A apreensão desses detalhes quanto aos usos da expressão "modelagem matemática" dão indícios da construção de conhecimentos matemáticos na Modelagem sob uma acepção construtivista piagetiana. Compreende-se que, em aulas por Modelagem, tendo em vista o estudante como ativo, então supõe-se que ele estaria envolvido em ações práticas e mentais que implicariam a construção de conhecimentos matemáticos.

Dessa interação do estudante com o meio, que seria a situação-problema de Modelagem, cuja "apropriação" de conhecimentos matemáticos seria mediante processos cognitivos, forma-se a **imagem: na Modelagem os conhecimentos matemáticos são construções mentais.** A linguagem folga, pois teria um uso exclusivamente referencial, sendo os significados matemáticos extralinguísticos, situados em alguma realidade matemática.

Em seguida, objetiva-se tratar de possíveis confusões conceituais, discutindo detalhes desses usos em jogos de linguagem nos quais há ligação de semelhança com o jogo de linguagem da Modelagem.

8.1 Confusões conceituais

Os usos da expressão linguística "modelagem matemática" que explicitam características de aulas por Modelagem contrapondo-as às aulas respaldadas por uma abordagem tradicional nos remetem às críticas de Piaget quanto aos procedimentos metodológicos utilizados em aulas tradicionais. O epistemólogo se opunha a um tipo de ensino de Matemática em que há apenas a transmissão de informações e, para tanto, a linguagem abstrata e os símbolos operatórios são utilizados para acessar as verdades matemáticas.

Sob sua ótica, esse tipo de ensino, que não é iniciado pela ação real e material para envolver o pensamento do estudante na abstração reflexiva[109], seria a causa dos fracassos na educação formal: "A verdadeira causa dos fracassos na educação formal decorre pois [sic] essencialmente do fato de se principiar pela linguagem (acompanhada de desenhos, de ações fictícias, ou narradas etc.) ao invés de o fazer pela ação real e material" (PIAGET, 1973, p. 67).

Ao exceder os limites do contexto de suas investigações, em seus textos educacionais, Piaget critica e prescreve procedimentos de ensino para instituições escolares. Seus escritos pedagógicos "partem de uma visão dicotômica das instituições escolares, classificando-as como 'tradicionais' ou 'ativas'" (CARVALHO, 2001, p. 77), sendo que as escolas ativas (ou métodos ativos)[110] seriam aqueles que se ajustavam melhor aos resultados das investigações piagetianas em psicologia. Essa dicotomia de que se vale Piaget para compreender as instituições escolares e expressar-se sobre as características e resultados de seus procedimentos didáticos acabou se cristalizando, inclusive nos discursos educacionais brasileiros (CARVALHO, 2001).

Assim como na concepção piagetiana que, em detrimento da escola tradicional, a escola ativa (ou os métodos ativos) seriam favoráveis para o desenvolvimento das estruturas mentais que constituem o sujeito epistêmico, em algumas passagens das dissertações e teses pesquisadas, o uso da expressão linguística "modelagem matemática" também expressa que, em aulas expositivas, o professor apresenta o conteúdo e não é oferecida oportunidade para o estudante construir conceitos (FERRUZZI, 2003), e nem refletir (CAMILO, 2002), mas que, nas aulas por Modelagem, é diferente (CAMILO, 2002), o saber pronto e acabado é deixado de lado, a Matemática também não é vivenciada de modo pronto e acabado (HAMMES, 2000, JÚNIOR, 2005) e o estudante deixa de ser passivo (ROMA, 2002).

Contrapondo-se à abordagem tradicional, nas aulas por Modelagem, há interação, cooperação, criticidade (MAZUR, 2021), o estudante desenvolve sua forma própria de pensar

---

[109] Na experiência lógico-matemática, o sujeito retira, por meio da abstração reflexiva, informações das suas ações endógenas sobre os objetos (quantificar, enumerar, ordenar, etc.) (BECKER, 2012). Essas informações retiradas dos objetos não são observáveis, apenas inferidas.

[110] Os métodos ativos também são característicos das abordagens teóricas da Escola Nova, um movimento fortemente influenciado pelo filósofo suíço Jean-Jacques Rousseau (1712-1778), no qual o estudante é considerado participante da sua aprendizagem quando o educador dá a ele condições para conhecer por si mesmo, por meio da observação e experimentação (MARTINEAU, 2010). Ele elaborou uma pedagogia ativa que se repercutiu na Escola Nova e inspirou o pensamento de Piaget (MACHADO, 2017).

(HAMMES, 2000), ele é ativo, participativo (ROMA, 2002) e utiliza sua estrutura cognitiva (FERRUZZI, 2003). Logo, as aulas por Modelagem, em detrimento das aulas tradicionais, favorecem a construção de conhecimentos matemáticos.

Exemplifica-se como um dos usos efetivos da Modelagem uma das atividades da pesquisa de Caldeira (1998), que versa sobre a construção da cobertura da quadra poliesportiva da escola sendo realizada numa turma da 5ª série do Ensino Fundamental.

Após terem delineado a situação-problema, os estudantes foram questionados sobre o que eles consideravam que seria necessário para a cobertura da quadra poliesportiva. Diante do que foi elencado pelos estudantes (cimento, tijolo, areia, vidro, tempo para construção...), o professor pesquisador (Caldeira), que atuou junto com a professora da turma, menciona que seria necessário "encaixar" os conteúdos matemáticos da 5ª série no que os estudantes conheciam sobre construção e que foi relatado por eles, tendo em vista, inclusive, a percepção da utilidade desses conteúdos matemáticos pelos estudantes.

Visando verificar quais formas geométricas os estudantes já conheciam, então eles foram levados para observar a quadra poliesportiva e depois foi solicitado a eles que desenhassem como gostariam que fosse o formato da cobertura dessa quadra. Em outro momento, incumbiram os estudantes para encontrar plantas baixas da quadra poliesportiva da escola, de uma cobertura para ter como exemplo e contatar um engenheiro ou mestre de obras para terem mais informações sobre a temática.

Na palestra com um mestre de obras, foi explicado aos estudantes e dado algumas "dicas" de como eles poderiam proceder no trabalho de cobertura dessa quadra. Assim, os ensinamentos da palestra auxiliariam o processo de Modelagem.

Considerando o "encaixe" dos conteúdos matemáticos e a situação-problema, o professor pesquisador e a professora da turma decidiram que poderiam começar o trabalho com a Geometria Plana, em específico, com as formas geométricas.

Para tanto, a professora tentou realizar uma atividade na qual eram obtidas figuras geométricas do recorte e/ou encaixe de outras figuras (um triângulo a partir do retângulo, por exemplo) e, na sequência, apresentava a sua definição. No entanto, essa atividade não foi muito exitosa.

O professor pesquisador propôs para a professora da turma outro tipo de atividade: sugerir aos estudantes que tentassem perceber a existência de conceitos matemáticos no ambiente (quadra poliesportiva da escola) e, somente depois, formalizá-los matematicamente.

> Disse [professor pesquisador] que **antes de formalizarmos uma definição poderíamos perceber primeiro o conceito procurado**, **para depois defini-lo matematicamente.** Coloquei que uma maneira de percebermos isso seria sair da sala

> para que **os alunos medissem a quadra e depois, em decorrência dessa ação, perceberíamos quais as formas [geométricas] que aparecem nela** e somente depois trabalharíamos esses conceitos sob o ponto de vista matemático formal (CALDEIRA, 1998, p. 159, grifo nosso).

Para iniciar as medições, foi solicitado aos estudantes que, organizados em grupos, medissem "o que achava que era importante" (CALDEIRA, 1998, p. 160). Na sala de aula, os estudantes ditavam o valor das medidas encontradas e o professor pesquisador reproduzia na lousa o desenho encontrado.

> Voltamos para a sala de aula e **reproduzimos na lousa o que havíamos feito na prática.** Enquanto eu reproduzia na lousa o desenho da quadra, os alunos ditavam as dimensões. Algumas medidas coincidiam de um grupo para outro e outras não, procurei seguir um grupo que eu acompanhei durante a medição sem que os outros percebessem disso. De um modo geral, **os alunos mediram as dimensões da quadra, e através dela, definiram o seu formato.** Agora o formato da quadra poderia ser discutido e definido se fosse o caso, e a partir desse formato, definir outros (CALDEIRA, 1998, p. 160, grifo nosso).

Nesse contexto de aula, foram as percepções dos estudantes decorrentes das medições efetuadas na quadra poliesportiva da escola que indicam ter possibilitado construir o formato da quadra poliesportiva, o que, no caso, se refere à construção do conceito de retângulo. Além disso, o autor discorre que as atividades de Modelagem permitiram ao estudante construir outros conceitos matemáticos, tais como os de perímetro e área de figuras planas.

Caldeira (1998) explicita que, num primeiro momento da aula, ao invés de formalizar definições matemáticas, seria uma melhor alternativa perceber o conceito procurado para depois defini-lo matematicamente. Assim, entende-se que, nessa etapa da Modelagem, as ações dos estudantes (efetuar medições na quadra poliesportiva da escola, por exemplo) para a construção de conceitos da Geometria Plana ilustram a dicotomia conceitual piagetiana entre "escola tradicional" em comparação à "escola ativa" (CARVALHO, 2001) e a construção de conhecimentos matemáticos, "Depois dos alunos elaborarem a construção dos conhecimentos das medidas da quadra, e consequentemente, a construção do conceito de medidas de comprimento e suas subdivisões, construíram também o conceito de retângulo, do quadrado" (CALDEIRA, 1998, p. 161).

Os detalhes expressos no tocante aos usos da expressão linguística "modelagem matemática" – o estudante é participativo, ativo, há interação, ele utiliza suas estruturas cognitivas, etc. – possuem ligações analógicas com os preceitos dos métodos ativos em que há a ideia do "aprender por si próprio a conquista do verdadeiro" (PIAGET, 1973, p. 69), sob orientação e estímulo do professor, sendo que tais possibilidades ofertadas para o estudante não seriam possíveis numa aula tradicional.

Nas passagens de Franchi (1993), Kaviatkovski (2012), Tessaro (2015) e Komar (2017), os usos da expressão “modelagem matemática” exprimem que, em aulas por Modelagem, o estudante é o agente desse processo, é protagonista, é ativo, mostrando a existência de uma analogia entre a Modelagem e os métodos ativos, cujas aulas “baseia[m]-se na ideia de que as matérias a serem ensinadas à criança não devem ser impostas de fora, mas redescobertas pela criança por meio de uma verdadeira investigação e de uma atividade espontânea” (PIAGET, 2010, p. 53). O estudante não estaria numa postura passiva, apenas recebendo informações, mas em ação, “buscando” seu conhecimento. Piaget pontua alguns traços desse tipo de aula: a pesquisa espontânea do estudante, a reinvenção ou reconstrução das verdades (dos conhecimentos),

> [...] é naturalmente o recurso aos métodos ativos, conferindo-se especial relevo à pesquisa espontânea da criança ou do adolescente e exigindo-se que toda verdade a ser adquirida seja reinventada pelo aluno, ou pelo menos reconstruída e não simplesmente transmitida [...] o *princípio fundamental dos métodos ativos* [...] pode ser expresso: *compreender é inventar, ou reconstruir através da reinvenção*, e será preciso curvar-se ante tais necessidades se o que se pretende, para o futuro, é moldar indivíduos capazes de produzir ou de criar, e não apenas de repetir (PIAGET, 1973, p. 18-20, grifo do autor).

O que é dissertado sobre os métodos ativos também possui relação com a aprendizagem por redescoberta, em que são criadas ou recriadas situações para a redescoberta de princípios ou relações.

Piaget (1973) ilustra acerca desse tipo de aprendizagem, apontando a redescoberta da existência e demonstração do teorema de Pitágoras como uma maneira de exercitar a inteligência pessoal, que implicaria a construção de conhecimentos matemáticos. Nessa situação, não bastaria ao professor repassar ao estudante esse conhecimento matemático, mas entende-se que “o caminho da redescoberta” precisaria ser refeito pelo estudante. Então, numa aula como essa, concebida como ativa, é o estudante que precisaria redescobrir a existência e demonstração o teorema de Pitágoras, o que, supostamente, demandaria dele pesquisar em fontes diversas, coletar dados, fazer questionamentos, hipotetizar, testar hipóteses, etc.

> **Não é o conhecimento do teorema de Pitágoras que irá assegurar o livre exercício da inteligência pessoal: é o fato de haver redescoberto a sua existência e sua demonstração.** O objetivo da educação intelectual não é saber repetir ou conservar verdades acabadas, pois uma verdade que é reproduzida não passa de uma semi verdade: é aprender por si próprio a conquista do verdadeiro, correndo o risco de despender tempo nisso e de passar por todos os rodeios que uma atividade real supõe (PIAGET, 1973, p. 68-69, grifo nosso).

Nesse contexto, o estudante aprenderia por si próprio (PIAGET, 1973) ou construiria conhecimentos matemáticos porque se encontraria numa situação de aprendizagem que lhe possibilitaria uma experiência lógico-matemática que envolveria seu pensamento numa abstração reflexiva consistindo em ações sobre as coisas e ações mentais (BECKER, 2012), como explica Piaget (1973):

> A Matemática porém consiste em primeiro lugar, e acima de tudo, em ações exercidas sobre as coisas, e as próprias operações são também sempre ações, mas bem coordenadas entre si e simplesmente imaginadas, ao invés de serem executadas materialmente (PIAGET, 1973, p. 67).

Em contraste, numa aula tradicional, supõe-se que são dadas condições para que, cognitivamente, o estudante apenas receba informações para acumular, memorizar e reproduzir. Não haveria interações e modificações em sua estrutura cognitiva, por conseguinte, ele não construiria conhecimentos.

O tipo de aula que se configura no âmbito dos métodos ativos requer a atuação do estudante como protagonista, é o estudante que necessita atuar como um sujeito ativo, o que supõe que ele deve estar no centro do que acontece em sala de aula, porque o seu desenvolvimento cognitivo deve ser considerado. Dessa maneira, é dada a oportunidade para o estudante organizar suas estruturas mentais, pensar, raciocinar, refletir, tal como é visto nos usos da expressão linguística modelagem em Soistak (2006), Costa (2000), Sodré (2013) e Burak (1987).

Num dos usos efetivos da Modelagem (KOMAR, 2017), o pesquisador menciona que o papel ativo dos estudantes em aulas por Modelagem se revela pelas leituras realizadas por eles, pela curiosidade e motivação na tentativa de buscar respostas para as situações-problemas relacionadas aos subtemas pesquisados na Modelagem.

> Em todas as atividades [de Modelagem] mediadas foi constatado o compromisso dos estudantes em assumir seu papel ativo, expresso pelas leituras, pela curiosidade, pela motivação em que tentavam buscar respostas para os sub temas pesquisados, tornando-os protagonistas de sua própria história (KOMAR, 2017, p. 89).

Em uma das atividades de Modelagem sobre *Fast food* desenvolvida numa turma de 9º ano do Ensino Fundamental, esse autor relata que os estudantes pesquisaram em revistas, jornais e *sites* para obter informações sobre o valor energético (kcal) desses alimentos. A partir dessas informações, refletiram sobre os problemas relacionados à saúde, que podem estar atrelados ao consumo de *fast food* e, então, propuseram a elaboração de um cardápio semanal saudável baseado nas informações contidas na pirâmide alimentar. Além disso, das pesquisas em *sites*, também encontraram a equação da Taxa de Metabolismo Basal (TMB), medida pela quantidade de energia (kcal) necessária para manter as funções vitais do organismo em repouso (KOMAR, 2017).

O autor concebe que a curiosidade, a motivação dos estudantes em relação aos subtemas da Modelagem os levaram a pesquisar sobre o assunto em fontes distintas. Ele atribui ao protagonismo dos estudantes no processo educativo e na busca de informações a aquisição de alguns conhecimentos necessários, dando a entender que a Modelagem se aproxima dos métodos ativos devido à utilização de pesquisas, a inventividade dos estudantes, a criação de meios para chegar a compreensão de conceitos.

A partir do explicitado por Komar (2017), se pressupõe que o papel ativo do estudante representado pelas pesquisas, leituras, expresso por sua curiosidade e motivação, tendo em vista respostas para os subtemas pesquisados – nesse caso, *fast food* – seriam ações práticas (ou de primeiro grau) (BECKER, 1993), as quais conduziriam o estudante a algum tipo de ação cognitiva. A Matemática se tornaria objeto de conhecimento para o estudante, não apenas devido às suas ações práticas, mas porque suas estruturas mentais estariam engajadas em processos (ações) cognitivos decorrentes da abstração reflexiva (BECKER, 2017; 1993).

Em consequência, nesse tipo de aula, o papel do professor é mediar esse processo de construção de conhecimentos. Silva (2019) explicita que, na Modelagem, cabe ao professor apenas mediar o processo e deixar o estudante produzir e ter autonomia para construção do próprio conhecimento, Dente (2017, p. 55) discorre que, como mediador, o professor auxilia e questiona os estudantes, e instiga o "afloramento de novos conhecimentos", já em Komar (2017), o professor levanta questionamentos, propõe desafios aos estudantes ou tenta promover a reflexão acerca da situação-problema em investigação.

Na pesquisa de Komar (2017, p. 43, grifo do autor), diante de um questionamento de um estudante (identificado como B3), "*o que vamos fazer professor com este material reciclado que foi colhido pelos colegas?[sic]",* o professor mediador responde o estudante com outro questionamento: "[professor] *o que vocês acham que poderíamos fazer? [sic]".* O estudante (identificado como D3), manifesta-se: "*será que podemos vender estes materiais e arrecadar fundos para a APMF*[111] *do Colégio? [sic]".* Nesse caso, observa-se que, diante da resposta do professor, sob forma de questionamento, D3 se pronuncia com outra pergunta.

Numa outra pesquisa, a de Nogueira (2014), implementada numa turma de 9º ano e que versa sobre a planta baixa de uma casa, os estudantes organizaram-se em equipes e, como o professor atuou como mediador, fez sugestões para os estudantes, sendo que uma delas foi sobre a etapa da pesquisa exploratória. Os estudantes foram orientados a buscar informações sobre esse tema na planta baixa de suas próprias casas ou na casa de outrem, visitar imobiliárias,

[111] APMF (Associação de Pais, Mestres e Funcionários), um dos órgãos do colegiado da escola onde foi realizada a pesquisa (KOMAR, 2017).

conversar com um engenheiro, entre outros, e numa aula posterior alguns dos grupos socializaram os resultados de suas buscas.

Num outro momento, os grupos começaram a analisar a planta baixa da escola e se propuseram a medir alguns cômodos da escola. A partir de dados coletados nessa planta baixa e das medidas dos cômodos da escola, então levantaram situações-problemas, tais como: “Qual é a relação existente entre as medidas utilizadas na planta baixa e as medidas reais dos cômodos? [...] Como devemos proceder para calcular a quantidade de cerâmica utilizada em cada cômodo da casa?” (NOGUEIRA, 2014, p. 85).

Diante das situações-problemas levantadas pelos estudantes, o professor teceu um diálogo com a turma sobre unidades de medida de comprimento, de área e figuras geométricas encontradas na planta baixa, a fim de detectar o que os estudantes sabiam sobre esses conteúdos matemáticos (propriedades das figuras geométricas planas, classificação dos triângulos e seus pontos notáveis, por exemplo) e, após esse diálogo, os estudantes foram orientados a buscar informações em livros didáticos de Matemática sobre os assuntos discutidos.

Durante as resoluções das situações-problemas, os estudantes se depararam com dúvidas sobre como proceder com a resolução, o professor intervinha os aconselhando para realizarem buscas no livro didático de Matemática, assim, a partir de informações extraídas nos livros, eles começaram a dar opiniões sobre como proceder com as resoluções, “Após essas questões, pairaram muitas dúvidas no ar. Por isso, aconselhamos os participantes a folhearam os livros didáticos. Após alguns minutos, começaram a surgir algumas opiniões” (NOGUEIRA, 2014, p. 89). Ao final, os grupos compartilharam as soluções obtidas e houve discussões se elas estavam corretas ou não.

Nas passagens de Nogueira (2014), o professor, na condição de mediador, orienta os estudantes a agir de certa maneira: buscar informações em determinadas fontes ou lugares e analisar a planta da baixa da escola (NOGUEIRA, 2014), de modo que ele atua como um coadjuvante em sala de aula, e o estudante é o protagonista, no sentido de quem faz, busca, age.

Portanto, dos usos da expressão linguística “modelagem matemática” é possível interpretar que a utilização da Modelagem nas aulas, não apenas favoreceria a construção de conhecimentos matemáticos porque seria possibilitado ao estudante uma experiência lógico-matemática, mas que o tipo de aula configurado por meio da Modelagem, não teria como não implicar na construção de conhecimentos matemáticos. As passagens indicam uma relação muito intrínseca entre a Modelagem e construção de conhecimentos matemáticos.

A ideia expressa nessas passagens, de que o estudante constrói conhecimentos matemáticos em aulas por Modelagem, indica a presença do construtivismo piagetiano, que sustenta que todo ser humano seria dotado das estruturas da inteligência – as bases universais e necessárias – que possibilitariam a construção de qualquer conhecimento, empírico ou lógico-matemático, que se dá por meio da reorganização e equilibração de estruturas cognitivas (CARVALHO, 2001).

Diante do exposto, ao considerar a construção de conhecimentos matemáticos em aulas por Modelagem, uma das confusões conceituais que se instala é no tocante à ideia de que o conhecimento matemático se desenvolve na mente do estudante "por meio de um processo natural que relaciona o cognitivo, o meio físico e social" (SILVA *et al.*, 2022, p. 170). Assim, define-se essa confusão como sendo, *os conhecimentos matemáticos construídos na Modelagem são representações mentais (Vorstellungen)*[112] *de conceitos matemáticos,* denunciando uma concepção de linguagem cujos significados são extralinguísticos, situados em alguma realidade matemática. Esse tipo de confusão se estabelece porque a construção dos conhecimentos matemáticos considera uma experiência endógena, decorrente da ação do estudante com o objeto ou com experiências empíricas.

8.2 Possíveis esclarecimentos

No intento de trazer possíveis esclarecimentos para a confusão conceitual, *os conhecimentos matemáticos construídos na Modelagem são representações mentais (Vorstellungen) de conceitos matemáticos,* amplia-se a discussão sobre alguns aspectos do construtivismo piagetiano, tendo em vista uma melhor compreensão acerca da concepção de linguagem que ali se encontra.

O modo de conceber o conhecimento, apresentado por Piaget, pode ser entendido como uma forma atualizada e "sobre novas bases da tese estruturalista de Kant, já que ambas propõem que todo conhecimento e toda experiência do sujeito se organizam a partir de estruturas universais e necessárias desenvolvidas de forma progressiva pelo indivíduo" (CARVALHO, 2001, p. 105) que, na filosofia kantiana seriam representadas pelas "intuições 'puras', como a nossa consciência do espaço e do tempo" (GOTTSCHALK, 2002, p. 21) e, na epistemologia piagetiana, pelas estruturas mentais universais da inteligência humana.

Nas acepções kantiana e piagetiana os conhecimentos construídos a partir dessas estruturas não ocorrem meramente pela internalização de dados advindos de uma experiência sensorial, mas "da ação do sujeito na organização e estruturação de suas experiências"

[112] A expressão "representação mental" na língua alemã se apresenta com o termo *Vorstellung*, utilizado por Kant, Locke e Piaget (CARVALHO, 2001), também discutido no sétimo capítulo.

(CARVALHO, 2001, p. 106), de modo que, é o próprio sujeito que organiza seu mundo interno de percepções e pensamentos (CARVALHO, 2001).

Na filosofia kantiana, os objetos matemáticos são produtos do pensamento (GOTTSCHALK, 2002), então eles não têm uma existência independente da mente[113]. No construtivismo de Piaget, o conhecimento humano (e o matemático, inclusive) são compreendidos "a partir da elaboração de um modelo de formação e desenvolvimento das estruturas organizadoras do sujeito e da construção progressiva de *conceitos* e *representações mentais* no *indivíduo"* (CARVALHO, 2001, p. 106, grifo do autor em itálico), que só são possíveis devido à interação do sujeito sobre o meio.

Diante do exposto, o que se quer chamar a atenção é quanto às representações mentais porque elas estão ancoradas numa "concepção mentalista do significado" (GOTTSCHALK, 2002, p. 99), indicando uma concepção referencial da linguagem, pois o significado de uma palavra seria uma imagem mental (GOTTSCHALK, 2002).

A concepção mentalista, que se repercute no campo filosófico e também no construtivismo piagetiano, é concebida como problemática na maneira como "o segundo" Wittgenstein pensa a linguagem. Donat (2022) discorre que o filósofo austríaco problematiza essa concepção de significado no § 6 das *Investigações*. Nesse parágrafo, sob a perspectiva da visão agostiniana da linguagem, ele se volta para o ensino ostensivo – que conecta a palavra ao objeto apontado como sendo seu significado – e as imagens mentais.

> Pode-se dizer que esse ensino ostensivo das palavras estabelece uma ligação associativa entre a palavra e a coisa: mas o que isto quer dizer? Ora, pode significar diferentes coisas; mas pensa-se, em primeiro lugar, que a imagem da coisa se apresenta à mente da criança quando ela ouve a palavra (WITTGENSTEIN, 2014, § 6).

Nesse parágrafo das *Investigações*, Wittgenstein levanta uma problemática porque, ao dizer uma palavra e apontar para o objeto associado à ela, acredita-se que a criança compreenderá que o significado da palavra será, de fato, o objeto apontado. Supõe-se que em sua mente se formará uma imagem do objeto apontado; "pensa-se, em primeiro lugar, que a imagem da coisa se apresenta à mente da criança quando ela ouve a palavra" (WITTGENSTEIN, 2014, § 6).

Porém, chama a atenção a parte inicial da resposta do filósofo nesse parágrafo, "Ora, pode significar diferentes coisas" (WITTGENSTEIN, 2014, § 6). Com isso, entende-se que, mediante o pronunciar de uma palavra e o apontar para um objeto, então, para uma criança que

[113] O conhecimento matemático, do ponto de vista da filosofia kantiana, é também discutido quando é explicitado sobre o intuicionismo.

está na condição de ouvinte, o significado dessa palavra nem sempre poderá corresponder com a imagem mental do objeto apontado. O filósofo adverte que o gesto ostensivo pode significar coisas diferentes. Contudo, na visão agostiniana da linguagem, a qual é uma concepção referencial, admite-se que o significado da palavra é o objeto apontado, formando na mente do aprendiz a imagem desse objeto.

Essa imagem mental é sobre uma linguagem psicológica (DONAT, 2022), que é privada, assim, ao considerar o § 6 das *Investigações*, compreende-se que somente a criança saberia qual imagem de fato se forma em sua mente quando alguém pronuncia uma palavra e aponta para um objeto associado a ela. Por conta da possibilidade da imagem mental "não estar adequada", digamos, com a palavra pronunciada, então entende-se que se torna necessária uma interpretação dessa imagem. Gottschalk (2002) exemplifica que, quando alguém pronuncia a palavra "cadeira", vem à mente a imagem de uma cadeira, mas que essa imagem ainda precisaria ser interpretada.

> Ao pronunciar a palavra "cadeira", vem a imagem de uma cadeira. Mas, qual o significado da imagem da cadeira? A imagem também tem que ser interpretada! O processo parece ser infinito, se considerarmos que o significado sempre depende de uma referência (seja mental ou empírica) (GOTTSCHALK, 2002, p. 99).

Tendo em vista esta concepção mentalista do significado, Donat (2022) também ilustra que aprender o significado de uma palavra seria formar uma imagem mental (DONAT, 2022):

> Aprender o significado de uma palavra seria [...] formar uma imagem mental do objeto com que a criança interage, tendo dele experiências como ver, tocar, etc. A formação desta imagem mental é o que se entende por representação e "querer dizer" algo seria formar esta imagem na mente, dotando a palavra de significação" (DONAT, 2022, p. 19).

Nesse âmbito, a linguagem é meramente descritiva e comunicativa dessa imagem mental, a linguagem está "imbricada com conteúdos mentais como forma de descrição da minha vida interior" (SILVA, 2018, p. 43). É nesse "querer dizer" (DONAT, 2022, p. 19), como se fosse uma "tradução" da imagem, que se utiliza a linguagem para expressá-la, descrevendo-a, sendo que a própria imagem é o significado da palavra que está sendo aprendida por alguém. Assim, a concepção de que o conhecimento é resultante de operações mentais privadas do sujeito quando ele interage com o meio e daí tem-se a formação de representações mentais "despreza o fato primordial e decisivo de que o conhecimento é *necessariamente* formulado em uma *linguagem pública* compartilhável" (CARVALHO, 2001, p. 108, grifo do autor).

Tal como o exemplo dado por Donat (2022), Gottschalk (2010b) se reporta à obra de Dewey, denominada *Experiência e Educação*[114], para explicitar que, nessa obra, as crianças são

[114] DEWEY, John. **Experiência e Educação**. São Paulo: Nacional, 1971.

expostas a experiências empíricas para a construção dos significados das palavras. É relatado que "uma criança apreende o significado de uma chama de fogo interagindo com ela, em diversas situações" (GOTTSCHALK, 2010b, p. 119). Assim, para Dewey, é somente após a ação da criança em muitas experiências empíricas que ela aprende que a chama de fogo significa luz e calor.

Nesse contexto de ensino, "A linguagem apenas fornece um revestimento para um significado já construído" (GOTTSCHALK, 2010b, p. 119). Desse modo, os significados não são os usos das palavras, mas trata-se de um significado extralinguístico, de modo que, consoante à autora, supõe-se que todas as crianças, ao estarem inseridas nessa mesma experiência empírica, teriam uma mesma experiência interna (mental) que implicaria no significado: fogo é luz e calor.

Ao considerar a ideia de que o estudante constrói conhecimentos matemáticos na Modelagem, então, depreende-se que ele formaria representações mentais acerca de conceitos matemáticos. Segundo Cobb (1996, p. 174), no contexto cognitivista o significado matemático "está na mente do indivíduo", assim no processo de construção desses conhecimentos os significados dos conceitos matemáticos são extralinguísticos, existentes numa realidade matemática.

Como o construtivismo piagetiano possui raízes na filosofia kantiana, então pressupõe-se a existência de uma realidade matemática atrelada a uma concepção intuicionista da Matemática. Sob essa perspectiva filosófica do conhecimento matemático, é como se existisse uma realidade matemática na mente humana que, segundo Gottschalk (2002), independe do conhecimento empírico, pois, com Kant, os domínios matemáticos são transpostos para o interior do intelecto humano (SILVA, 2007).

Os conhecimentos matemáticos construídos na mente do estudante seriam representações mentais, nas quais os significados matemáticos estariam numa realidade matemática no interior do intelecto humano. Como a linguagem serviria apenas para descrição e comunicação desses significados, então, a formalização do conceito não antecede a construção da noção do conceito, acabando por não considerar o papel da linguagem como primordial para o conhecimento (CARVALHO, 2001) dando origem a confusões conceituais, tais como, *os conhecimentos matemáticos construídos na Modelagem são representações mentais (Vorstellungen) de conceitos matemáticos*.

Ao retomar o exemplo das aulas por Modelagem implementadas na pesquisa de Caldeira (1998), é levado em conta o que os estudantes perceberam quando efetuaram as medições na quadra poliesportiva da escola. Desse modo, entende-se que essas percepções seriam noções matemáticas, representações mentais dos estudantes formadas ao efetuarem medições nessa quadra. O significado do conceito de retângulo, por exemplo, corresponderia a imagens mentais dessa figura geométrica plana que foram sendo construídas mentalmente durante o processo de medição da quadra poliesportiva da escola. Ao se reportar para Gottschalk (2010b), supõe-se que, pelo fato de todos os estudantes terem participado da mesma aula por Modelagem, ou seja, do mesmo tipo de experiência empírica, então teriam tido as mesmas experiências internas, o que implicaria a construção dos mesmos conhecimentos matemáticos que seriam os significados para o conceito de retângulo.

A formalização do conceito de retângulo, que acontece posteriormente, é como se ocorresse no transcorrer do diálogo com a turma. Nesse diálogo, ao objetivar a formalização desse conceito, é como se o professor tentasse "traduzir" os significados das representações mentais dos estudantes, formadas ao medirem a quadra poliesportiva da escola. É como se houvesse uma tentativa de aproximar as representações mentais dos estudantes com a definição formal de retângulo, o que resultaria um conhecimento objetivo que seria a adequação da representação mental, "a 'objetividade racional' dos conhecimentos – vista como adequação entre a representação mental e o mundo exterior – [...] [seria] um ideal do qual o conhecimento humano se acerca por aproximações sucessivas" (CARVALHO, 2001, p. 106).

Desse mesmo modo, ao retomar a pesquisa de Komar (2017), da ação dos estudantes na de Modelagem, eles teriam formado as mesmas representações mentais sobre unidade de medida de energia (kcal) e de outras fórmulas envolvidas na situação-problema de Modelagem. Existiria um significado mental, igual em todos os estudantes, o qual seria comunicado pela linguagem. De uma mesma experiência de Modelagem, todos os estudantes ali envolvidos teriam construído os mesmos conhecimentos matemáticos relacionados à situação-problema em investigação.

Na tentativa de dissolver essa confusão conceitual, argumenta-se que é possível construir conhecimentos matemáticos na Modelagem, porém essa construção não prescinde a linguagem, o que pressupõe que os conceitos matemáticos são construídos à medida que o estudante é introduzido nos jogos de linguagem da Matemática.

Ao retomar o exemplo de Gottschalk (2010b), sob uma perspectiva wittgensteiniana, "o significado de 'chama' não é causado pela experiência de ser queimado (consequência da minha ação sobre ela), porém, essa experiência/vivência de dor é apenas um dos aspectos possíveis na construção do seu significado" (GOTTSCHALK, 2010b, p. 120). Assim, também na Modelagem, pode-se dizer que a experiência vivenciada na Modelagem pode apontar para algum aspecto ou noção relacionada ao conhecimento matemático. Porém, há de se pensar que a experiência endógena do sujeito pode estar longe de causar os mesmos significados dos conceitos matemáticos convencionados nos jogos de linguagem da Matemática.

As construções mentais de conceitos matemáticos, tal como expresso nas passagens investigadas, são representações mentais *(Vorstellungen)*, mas o que ser quer sustentar é que, quando não há um uso exclusivista da concepção referencial da linguagem, pode haver um tipo de construção de conhecimentos matemáticos em que se formam representações mentais principiadas pelos diversos usos das regras matemáticas apresentadas ao estudante. Assim ele construiria conceitos matemáticos à medida que apreende as regras dos jogos de linguagem da Matemática, o que implica saber operar com essas regras.

Desse modo, ao se dizer que uma pessoa apreendeu certas regras matemáticas de um mesmo jogo de linguagem, então se supõe que ela "domina" algum conceito matemático desse jogo de linguagem e isso é demonstrado ao expressar a sua capacidade de utilizá-lo corretamente em diversos contextos da Matemática.

Ao ter em vista a construção de conhecimentos matemáticos principiada pela linguagem, a expressão algébrica $a + a = 2a$ pode ser tomada como uma generalização da Aritmética, devido às regras estabelecidas na Aritmética e na Álgebra, as quais são finitas. São essas regras matemáticas que capacitariam o estudante a ver as relações entre esses dois jogos de linguagem e chegar à generalização algébrica $a + a = 2a$. Essa generalização não seria apenas uma, dentre infinitas generalizações possíveis, produzida por uma intuição matemática (um processo subjetivo) (SILVA *et al.,* 2022).

> Assim, numa concepção wittgensteiniana, poderíamos ver a relação da aritmética com a álgebra [$a + a = 2a$], mas isso não seria algo dado (devido a uma possível intuição), mas algo que depende da definição realizada na linguagem (apresentação da regra); isso não seria infinito (se um aluno intui uma determinada relação, poderia intuir diversas outras), mas seria finito (a apresentação de uma regra não leva ao conhecimento de outras ainda não apresentadas) (SILVA *et al.,* 2022, p. 168-169).

Sob esta perspectiva, "um aluno não 'extrai', 'abstrai', ou 'constrói' seu conhecimento por meio da simples ação ou observação 'da realidade'" (CARVALHO, 2001, p. 108), torna-se necessário iniciar o estudante nos jogos de linguagem da Matemática, ou seja, ensiná-lo a "seguir as regras" matemáticas, que são públicas, para que ele possa construir e dominar os conceitos matemáticos.

Por isso, concorda-se com Passmore (2010), quando ele menciona que a instrução desempenha um papel importante nos sistemas escolares, sendo necessário aos estudantes aprender uma variedade de regras apresentadas pelo professor. Essa ideia é ilustrada com o conhecimento acerca das regras do jogo de xadrez para poder jogá-lo,

> Para jogar, devemos primeiro ser ensinados como as peças são colocadas no tabuleiro; qual movimento cada peça pode fazer; sob o que circunstâncias as peças do nosso oponente podem ser movidas do tabuleiro; que o rei não pode ser levado; que é permitido fazer roque e assim por diante. Essas regras podem ser ensinadas por um instrutor ou podemos lê-los por nós mesmos em um livro, mas em ambos os casos elas simplesmente precisam ser aprendidas. Por mais espertos que sejamos, nunca poderíamos decifrá-las por nós mesmos; apresentados um tabuleiro de xadrez e um conjunto de peças, e disse que eles são usados para jogar um jogo, que não poderíamos possivelmente deduzir como o xadrez é jogado (PASSMORE, 2010, p. 140, tradução nossa)[115].

Em consonância, Dearden (2010) também explicita quanto à instrução, a qual exige o uso da linguagem e pode assumir formas distintas. A instrução não se limita a uma exposição de informações, mas inclui explicações fundamentadas ou algum tipo de demonstração experimental (excursão a algum museu, galeria, local histórico, entre outros). Além disso, a utilização de lições em livro texto ou de recursos da informática, pode, inclusive, configurar uma instrução não verbal.

Quando se pensa em instrução, é possível que se pense quanto a um tipo de aula expositiva em que há apenas transmissão de conteúdos escolares. Mas, Carvalho (2001) adverte que uma aula expositiva vai além da transmissão de informações. Os procedimentos verbais não fornecem apenas informações, mas outros elementos (o professor demonstra procedimentos para resolver um problema, enfatiza aspectos e raciocínios, efetua correções, chama a atenção para algo que está sendo ensinado, adverte os estudantes frente aos erros) que constituem os conhecimentos, competências e habilidades que podem ser desenvolvidas nos estudantes.

Com isso, não se está assumindo uma posição que privilegie um tipo de procedimento para a prática pedagógica, mas ao ter em vista aulas por Modelagem sob uma perspectiva que considera a linguagem como promotora da construção de conhecimentos matemáticos, argumenta-se que a utilização episódica da instrução (PASSMORE, 2010, DEARDEN, 2010) e dos procedimentos verbais (CARVALHO, 2001) são fundamentais para o estudante “seguir regras” nos jogos de linguagem da Matemática, da Modelagem e nos que são concernentes à temática da situação-problema em investigação.

Ao atentar para as regras pertencentes aos jogos de linguagem da Matemática, importa salientar que elas não são enunciados extralinguísticos, cujos significados podem estar em

---

[115] In order to play we must first be taught how the pieces are placed on the board; what move each piece can make; under what circumstances our opponent’s pieces can be moved from the board; that the king cannot be taken; that it is allowable to castle and so on. These rules we can be taught by an instructor or we can read them for ourselves in a book, but in either case they have simply to be learnt. No matter how clever we are we could never work them out for ourselves; presented with a chessboard and a set of pieces and told that they are used to play a game we could not possibly deduce how chess is played (PASSMORE, 2010, p. 140).

alguma realidade matemática. Elas são enunciados de natureza normativa e Gottschalk (2022b) exemplifica:

> [...] "um triângulo é um polígono de três lados", "a soma dos lados internos de um triângulo é 180º", entre outras, não são descrições, mas **definições de triângulo, isto é, regras para a aplicação da palavra "triângulo"**, que tem emprego distinto das palavras círculo, elipse, ou mesmo de outros polígonos (GOTTSCHALK, 2022b, p. 43, grifo nosso).

Essas regras (definições de triângulo, por exemplo), constituem o significado da palavra "triângulo" no jogo de linguagem da Geometria Plana e "compreendê-la [a palavra triângulo], portanto, é ser capaz de seguir pelo menos uma destas regras de utilização da palavra [...]. Todas essas regras que seguimos constituem 'o que é ser triângulo', constituem a gramática deste conceito" (GOTTSCHALK, 2022b, p. 44). Assim, o significado da palavra "triangulo" não é extralinguístico, um ente ideal em um céu platônico ou em alguma realidade matemática, seja ela empírica ou mental, por exemplo, mas é apenas uma dessas regras de uso da palavra "triângulo" (GOTTSCHALK, 2014).

Essas regras não são percebidas pelo estudante, ou, como diz Passmore (2010), nem poderiam ser decifradas, por isso, as regras precisam ser ensinadas, o estudante necessita ser instruído para poder "fazer lances" nos diversos jogos de linguagem que ele estiver inserido durante as aulas, tal como se faz lances no jogo de xadrez (PASSMORE, 2010), "Não se pode dizer que o aluno não possa 'fazer lances' no jogo, mas tal só é possível a partir de um conhecimento prévio de algumas regras" (SILVA *et al.*, 2022, p. 172).

Então, sob esse ponto de vista, é um equívoco considerar que a Modelagem "levaria" o estudante a construir conhecimentos matemáticos, como se fosse algo natural da utilização desse procedimento metodológico, pois os conhecimentos matemáticos são regras que precisam ser ensinadas pelo professor. Diante de tais regras, que são invenções humanas, não cabe ao professor exigir que elas sejam descobertas pelos estudantes mediante algum tipo de experiência, que pode ser, inclusive, sob uma abordagem construtivista (GOTTSCHALK, 2007c).

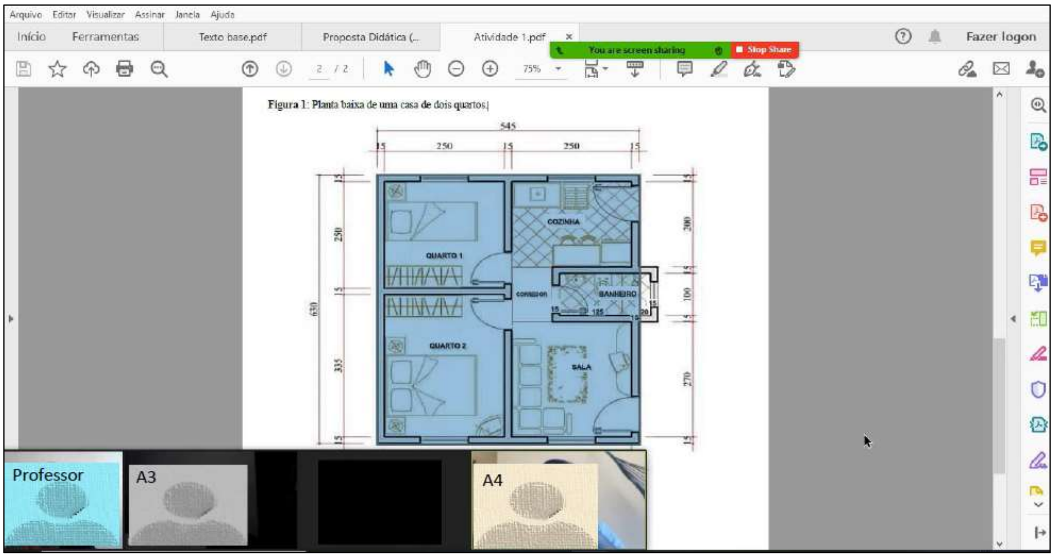
> [...] não cabe ao professor exigir que o aluno as descubra, seja por meio de experiências empíricas ou subjetivas, ou até mesmo a partir de uma combinação entre essas experiências nos moldes das teorias psicogenéticas sobre ensino e aprendizagem (interação de estruturas cognitivas com o meio empírico) (GOTTSCHALK, 2007c, p. 469).

Ademais, salienta-se que, numa aula por Modelagem, o estudante precisa ser instruído quanto ao "seguir regras matemáticas" para ele conseguir ver aspectos matemáticos nas situações-problemas da realidade empírica, em investigação. Sobretudo porque, como dissertado em capítulo anterior, a observação (HANSON, 1975) e o "ver e ver como" wittgensteiniano nas situações da realidade no contexto da Modelagem, não estão dissociados do conhecimento matemático que o estudante possui. Ele consegue observar ou “ver e ver como” aspectos da Matemática na realidade, com base nos seus conhecimentos matemáticos. É nesse sentido que se justifica dizer, “Ao estudar matemática, com certo tempo de estudo, podemos enxergá-la ao nosso redor” (SILVA *et al.*, 2022, p. 172).

Como um dos usos efetivos da Modelagem, são apresentadas passagens da pesquisa de Silva (2021), realizada em uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental no contexto remoto.

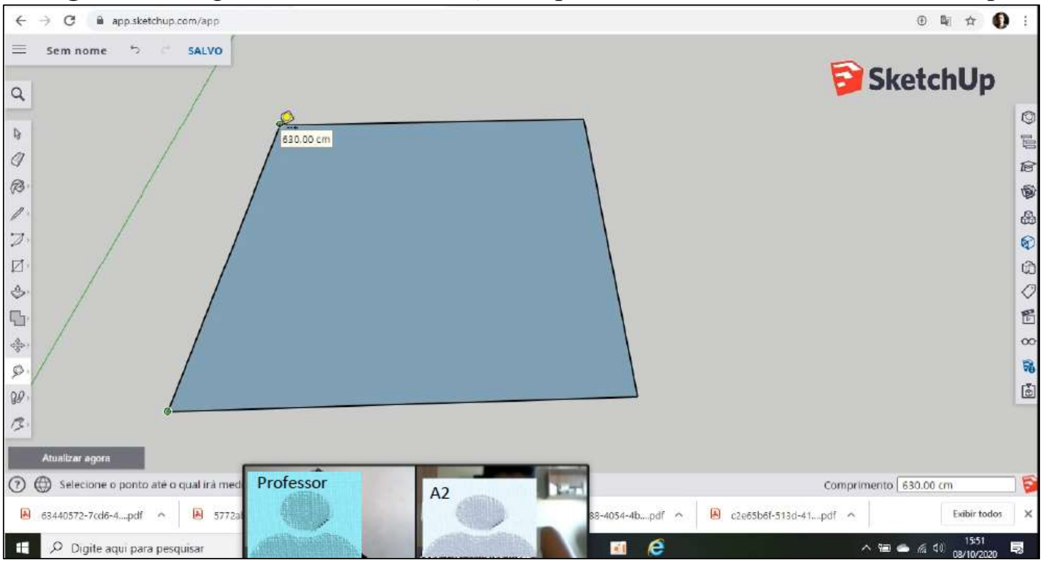
Nas aulas de Modelagem, foi utilizado o *software SketchUp* para iniciar a construção da planta baixa de uma casa (Figura 10), semelhante à planta baixa que se encontrava no texto base preparado para a aula (Figura 9).

Figura 9 - Planta baixa de uma casa do texto base para a aula



Fonte: Silva (2021, p. 83).

Figura 10 - Figura inicial da construção da planta baixa de uma casa no *SketchUp*



Fonte: Silva (2021, p. 84).

Ao iniciar a construção do desenho da planta baixa (Figura 10), os estudantes começaram a levantar questionamentos a respeito da figura desenhada e sobre suas características:

> PROFESSOR E ALUNO A1
> A1: O lado direito tem 630 [cm], o lado esquerdo também?
> Professor: Será que tem?
> A1: Eu vou somar, pode ser?
> Professor: Pode sim. Você vai somar esse lado do banheiro?
> A1: Isso. [O aluno somou as medidas do lado]
> A1: Tem 630.
> Professor: Então, o que podemos perceber?
> A1: Não é bem um quadrado né professor?
> Professor: Por que não é bem um quadrado A1?
> **A1: Um quadrado tem todos… as medidas de todos os lados são iguais.**
>
> PROFESSOR E ALUNOS A3 E A4
> Professor: O que vocês me dizem sobre essa área selecionada na planta baixa? [Mostrando o arquivo da planta baixa em PDF e a seleção da área total da mesma] Ela tem que forma?
> A4: É um retângulo professor.
> **Professor: Por que é um retângulo A3?**
> **A3: Porque eles têm… não é igual ao quadrado que tem medidas tipo certinhas assim. Ele é diferente em cada lado.**
> **Professor: Mas todos os lados dele são diferentes?**
> **A3: Não. Só dois, porque um é do mesmo tamanho que o outro** (SILVA, 2021, p. 84-85, grifo nosso).

Segundo Silva (2021, p. 85), ao explorar a imagem e seus elementos, os movimentos dos estudantes "denotam a realização de processos cognitivos em direção à aprendizagem em geometria. [...] observa-se a construção do conceito de retângulo a partir de algo que parece familiar aos alunos, o entendimento de que o quadrado possui lados iguais".

Mais adiante, em outro trecho dessa pesquisa, é explicitado que as perguntas formuladas pelo professor também auxiliaram a observação dos estudantes, "No entanto, a aproximação com a definição de que os retângulos possuem lados iguais dois a dois, tal qual o conceito formal observado nos livros, por exemplo, foi construído pela própria observação do aluno a partir das perguntas demandadas" (SILVA, 2021, p. 85).

Esse contexto ilustra a confusão conceitual, *os conhecimentos matemáticos construídos na Modelagem são representações mentais (Vorstellungen) de conceitos matemáticos,* pois a construção do conceito de retângulo decorreria de uma adequação de uma imagem mental – "algo que parece familiar aos alunos, o entendimento de que o quadrado possui lados iguais" (SILVA, 2021, p. 85) – já existente na estrutura cognitiva do estudante, que é quanto à noção de quadrado. Esse "entendimento" dos estudantes sobre a figura geométrica plana quadrado trata-se de uma representação mental e ali se encontra uma concepção referencial da linguagem.

Tendo vem vista uma perspectiva wittgensteiniana, o "entendimento" dos estudantes de que o quadrado possui a medida de todos os lados iguais, seria um dos usos da palavra "quadrado", já conhecido por eles, no jogo de linguagem da Geometria Plana. Retomando o "ver e ver como" em Wittgenstein, esse seria um aspecto da figura geométrica plana quadrado, "um quadrilátero com todos os lados iguais", tal como explicitado pelo estudante, "A1: Um quadrado tem todos… as medidas de todos os lados são iguais" (SILVA, 2021, p. 84).

Mediante a exploração da imagem e seus elementos por parte dos estudantes, e as perguntas formuladas pelo professor (SILVA, 2021), compreende-se que foi dada a oportunidade para eles compararem e identificarem traços comuns e dessemelhantes entre a noção de quadrado e as imagens: que são quadriláteros, possuem lados opostos paralelos, seus ângulos internos são retos, mas os lados da imagem (Figura 10) não possuem todas as medidas iguais. Os estudantes constataram que os pares de lados paralelos da imagem possuem mesmas medidas, o que não configuraria um quadrado, mas um dos aspectos do retângulo, "os retângulos possuem lados iguais dois a dois" (SILVA, 2021, p. 85), assim como consta na fala do estudante "A3: Não. Só dois, porque um [lado] é do mesmo tamanho que o outro" (SILVA, 2021, p. 85).

Portanto, consoante uma perspectiva wittgensteiniana, a construção do conceito de retângulo (SILVA, 2021), não seria uma produção mental dos estudantes, pois o conceito de retângulo é uma regra matemática e "as regras [matemáticas] não são fruto de uma intuição, e muito menos vêm da experiência empírica" (GOTTSCHALK, 2006, p. 82).

Dá para se dizer que, nessa aula de Matemática, a utilização da imagem da planta baixa da casa (Figura 9) e imagem sobre o início da construção de uma planta baixa semelhante àquela do texto base (Figura 10), possibilitaram aos estudantes ampliar seus conhecimentos quanto aos aspectos que constituem o conceito de retângulo ou, até mesmo, relembrar aspectos que os estudantes já sabiam acerca desse conceito.

Diante do exposto, ressalta-se que o estudante necessita ser inserido nos jogos de linguagem da Matemática para ele ser capaz de agir consoante às regras matemáticas, "seguir regras". Desse modo, pode-se dizer que, de fato, o estudante participaria do jogo de linguagem da Modelagem e construiria conhecimentos matemáticos, mas sob uma perspectiva conceitual, linguística, pois o arcabouço de significados matemáticos dos estudantes é ampliado e, por esse motivo, chama-se atenção para o papel do professor na Modelagem.

Argumenta-se que o papel do professor não seria apenas de organizar situações de aprendizagem, mas de capacitar o estudante a "seguir regras", pondo em evidência o docente, inclusive na Modelagem.

Com um posicionamento um tanto distinto das pesquisas já apresentadas, na pesquisa de Oliveira (2018) é dissertado que o professor utilizou a técnica da definição ostensiva para desenvolver a atividade de Modelagem.

> Nesta primeira atividade de modelagem matemática, a professora lançou mão de variadas técnicas para auxiliar na compreensão do conteúdo de funções. Iniciou a discussão com um conteúdo que os alunos já apresentavam familiaridade, ou seja, de função linear, para definir o modelo matemático do custo de energia elétrica. Em seguida, **definiu de forma ostensiva o modelo matemático do custo da lâmpada halógena,** por meio do uso da função menor inteiro (OLIVEIRA, 2018, p. 124, grifo nosso).

Para dar início às aulas por Modelagem numa turma do Ensino Superior, os estudantes assistiram a um vídeo que indica as diferentes características dos tipos de lâmpadas (LED, fluorescente ou halógena) e, após discussões com a professora, elaboraram a seguinte situação-problema: Qual o melhor tipo de lâmpada: halógena, fluorescente ou LED? Na sequência, a professora e os estudantes definiram algumas suposições que guiaram a atividade, também algumas variáveis necessárias para a elaboração dos modelos matemáticos.

Para determinar o modelo que relaciona o tempo de uso e o custo da lâmpada halógena, a professora iniciou com questionamentos e, com base nas respostas dos estudantes, que muitas vezes também se apresentavam sob forma de questionamentos, ela ia apresentando e esclarecendo os usos de regras matemáticas necessárias para a elaboração do modelo, como por exemplo, “Então na verdade o custo é o consumo multiplicado pela tarifa” (OLIVEIRA, 2018, p. 103), que o consumo pode ser calculado como “Potência multiplicada pelo tempo de horas de uso” (OLIVEIRA, 2018, p. 104). Em outros momentos, ela elaborou tabelas e gráficos, capacitando os estudantes a “fazer lances” no jogo de linguagem da Modelagem. É por conta disso que entende-se que o modelo matemático relacionado à lâmpada halógena foi definido ostensivamente, pois a professora atuava trazendo esclarecimentos quanto aos usos das regras matemáticas necessárias para a formulação desse modelo.

Nesta pesquisa também é mencionado o papel do professor para persuadir os estudantes a ver de outros modos a situação-problema em investigação, “O papel da professora da disciplina foi relevante nessa orientação do desenvolvimento das atividades de modelagem: persuadindo os alunos a outros modos de ver [...]” (OLIVEIRA, 2018, p. 189). Nesse caso, a professora se refere à atividade de Modelagem sobre o modelo que relaciona o tempo de uso e o custo da lâmpada halógena. Num dos momentos iniciais dessa atividade, frente aos questionamentos da professora, os estudantes responderam que a resolveriam empregando a regra de três, “A6 [estudante]: Só sei usar regra de três professora!”, “A9: Tudo precisa se adequar na regra de três!” (OLIVEIRA, 2018, p. 189).

Os estudantes viam a situação-problema de Modelagem pautados na regra matemática que já dominavam (regra de três), mas a professora tentou persuadi-los a ver a situação-problema de outra forma, pois ela apresentou novas regras matemáticas para a formulação do modelo matemático.

Nesse mesmo sentido, na passagem de Souza (2018), também se visualiza que, nas aulas por Modelagem implementadas no Ensino Superior, as ações do professor indicam esse treinamento. Consoante Souza (2018), a ação principal é do professor, a qual está relacionada ao treinamento de regras. O autor discorre que, se há prática da regra, se o estudante age na Modelagem, então é porque, assim como o professor, ele também segue a regra.

> Quando são realizadas ações conjuntas entre professor e alunos, a ação do professor indica *treinamento da regra*... **se há prática da regra, se o aluno determina tal ação no *fazer* Modelagem Matemática, então, ele também segue a regra... a ação principal é do professor e está relacionada ao *treinamento da regra*** (SOUZA, 2018, p. 71, grifo do autor, negrito nosso).

Nessas passagens, percebe-se que o professor, mesmo na condição de mediador, não pode ser simplesmente um articulador de situações de aprendizagem. O professor pode até organizar situações em que o estudante esteja mais envolvido e participe mais nas aulas, mas ele não deve deixar de instruir e treinar o estudante quanto aos usos das regras que constituem o conhecimento matemático e a própria Modelagem, inclusive.

Como visto, o professor pode interferir ao valer-se de diferentes técnicas: definição ostensiva, persuasão, descrição de diferentes usos dos conteúdos (OLIVEIRA, 2018) e conceitos matemáticos, tendo em vista o treinamento das regras (SOUZA, 2018) para que os estudantes consigam ampliar a gramática dos usos destes conceitos; "os alunos estão ampliando a gramática dos usos do conteúdo de *funções"* (OLIVEIRA, 2018, p. 165, grifo da autora).

Sob uma perspectiva de que o conhecimento é construído na e pela linguagem, em sentido amplo, compreende-se que é possível que o estudante construa seu conhecimento, mas por meio dos usos das palavras e expressões linguísticas nos diferentes jogos de linguagem. O mesmo ocorre quanto à Matemática, o estudante poderá "construir" seu conhecimento matemático por meio dos usos das regras matemáticas que constituem a diversidade de jogos de linguagem da Matemática.

Dessa maneira, e em oposição às abordagens construtivistas, "As proposições matemáticas institucionalizadas é que dão sentido à atividade matemática, e não que sejam geradas por ela, através de processos empíricos (mentais ou consensuais)" (GOTTSCHALK, 2004a, p. 313). Portanto, as proposições matemáticas não seriam meras representações mentais de objetos matemáticos de algum tipo de realidade matemática. As proposições matemáticas não dizem sobre uma realidade matemática, elas não descrevem o que acontece numa realidade, são independentes, pois são jogos de linguagem inventados no contexto pragmático, que estão relacionados à prática humana, o modo de agir.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pergunta que norteou esta pesquisa questiona quais são as eventuais imagens que se formam da interpretação de descrições, ou seja, do que aparece a respeito da Modelagem na Educação Matemática.

Levantou-se como hipótese que, no que é expresso sobre a Modelagem, é possível que existam usos dogmáticos, nos quais a linguagem apenas comunicaria e representaria a Matemática e os modelos matemáticos "percebidos" pelos estudantes no processo de Modelagem, sendo que o conhecimento matemático e esses modelos se encontrariam *a priori* na realidade empírica.

Diante do exposto, objetivou-se esclarecer confusões conceituais existentes em eventuais imagens vinculadas ao que é descrito sobre a Modelagem Matemática na Educação Matemática conforme encontrado em dissertações e teses desenvolvidas no Brasil.

A fim de atender esse objetivo, nos inspiramos na filosofia terapêutica de Wittgenstein. Em sua filosofia tardia, Wittgenstein atesta que uma das origens das confusões conceituais é o "enfeitiçamento de nosso intelecto" (WITTGENSTEIN, 1994, § 109), pois este está preso às imagens, que podem ser concebidas como interpretações dos usos da linguagem nas quais a linguagem folga, indicando o emprego exclusivista da concepção referencial da linguagem.

Então, a sua atividade filosófica nas *Investigações* é terapêutica do pensamento confuso expresso linguisticamente porque visa a cura (o esclarecimento) do pensamento mediante uma variação de exemplos dos usos das palavras e expressões linguísticas nos jogos de linguagem. A terapia acaba mostrando que nem todos esses usos estariam atrelados a um uso exclusivo da concepção referencial da linguagem, mas que os significados das palavras e expressões linguísticas são seus usos nos jogos de linguagem.

Assim, a terapia wittgensteiniana possibilitou curar o próprio pensamento filosófico de Wittgenstein preso às imagens relacionadas à concepção agostiniana da significação e ao ideal de exatidão do *Tractatus*. E, à mesma maneira, ao ser aplicada no que é expresso sobre a Modelagem, a terapia teria um potencial para auxiliar na clarificação de situações conceitualmente confusas presentes no âmbito da Modelagem.

Inicialmente foram explorados os usos das expressões linguísticas "modelagem matemática" e "modelo matemático": as maneiras e as circunstâncias em que elas são utilizadas em passagens de dissertações e teses brasileiras que compuseram o material empírico, tendo em vista atentar para possíveis imagens que se formam a partir da interpretação dos usos dessas expressões linguísticas.

A análise da interpretação dos usos das expressões linguísticas "modelagem matemática" e "modelo matemático" resultou em três imagens: 1) na Modelagem, o estudante descobre a Matemática inserida em alguma realidade extralinguística; 2) o modelo matemático é uma representação subjacente à realidade empírica; 3) na Modelagem, os conhecimentos matemáticos teriam origens em construções mentais.

Além disso, foram verificadas possíveis confusões conceituais imbricadas nessas imagens. Elas são apresentadas na sequência deste texto, juntamente com esclarecimentos que intencionam dissolvê-las.

Quanto à **primeira imagem – na Modelagem, o estudante descobre a Matemática inserida em alguma realidade extralinguística –**, foram identificadas duas confusões conceituais: *na Modelagem, a natureza dos enunciados matemáticos são tidos como de igual natureza aos enunciados das Ciências Empíricas* e *as conclusões dos estudantes (redescobertas ou descobertas pessoais) na Modelagem são de natureza empírica.*

Intencionando lançar alguns esclarecimentos, é tecida uma discussão sobre a observação na Modelagem, sustentando que haveria um tipo de descoberta da Matemática na Modelagem relacionada com a observação impregnada de conhecimentos matemáticos que o estudante "domina" e com o "ver como", que é conceitual. Sob essa perspectiva, o estudante "perceberia" a Matemática na realidade empírica a partir do momento em que lhe são apresentadas as regras matemáticas. Porém, isso não quer dizer que a Matemática se encontra *a priori* na realidade empírica, mas que é o conhecimento matemático que o estudante possui que o capacitará a observar aspectos matemáticos nessa realidade.

Enfatiza-se que, consoante o pensamento de Wittgenstein, a natureza da Matemática difere da natureza das Ciências Empíricas, pois a Matemática é concebida como um nexo de jogos de linguagem constituídos por enunciados com função normativa. Esses enunciados expressam certezas matemáticas que possibilitam compreender os acontecimentos empíricos e descrevê-los.

Portanto, ao considerar uma perspectiva wittgensteiniana e aspectos de uma leitura não empirista da Filosofia da Ciência, no processo de Modelagem, a descoberta da Matemática – de conhecimentos matemáticos e modelos matemáticos – não se caracteriza como uma abstração do mundo empírico, decorrente da utilização das etapas do método da Modelagem, tampouco é concernente a produções mentais que, quando comunicadas por meio da linguagem, descrevem o mundo empírico. Essa descoberta também não se relaciona a objetos matemáticos ideais ou a um conjunto de símbolos matemáticos vazios aplicados para descrição do mundo empírico.

O estudante descobriria a Matemática na Modelagem a partir da operação das regras matemáticas que já são conhecidas por ele ou que lhe são apresentadas durante o processo de Modelagem, pois, devido à sua natureza normativa, as regras matemáticas são condições de sentido para se pensar uma situação-problema do mundo empírico.

Além disso, essa descoberta está atrelada ao conhecimento e à ação do estudante orientado pelas regras do jogo de linguagem da Modelagem. Pode-se inclusive dizer que a Modelagem proporciona aprendizagens por descobertas, quando o estudante descobre modos distintos para resolver uma mesma situação-problema ou avança no sentido de resolver situações-problemas de Modelagem mais complexas.

No que tange aos usos da expressão linguística "modelo matemático", forma-se a **segunda imagem – o modelo matemático é uma representação subjacente à realidade empírica –**, implicando numa possível confusão conceitual *quanto à existência de um isomorfismo entre o modelo matemático e a realidade empírica.*

Como possível esclarecimento, sustenta-se que o modelo matemático como um paradigma da gramática da Matemática é tal como as "representações" de Hertz, que se valiam do quadro de referência composto por fórmulas matemáticas para tratar dos problemas da Mecânica. Nesse sentido, o modelo matemático pode ser tomado como paradigma, "representação" (*Darstellung*); trata-se, pois, de um objeto linguístico que organiza a experiência empírica, que dá sentido ao que é dito acerca da situação-problema em investigação.

Ao considerar a "representação" *(Darstellung)* de natureza gramatical, então, tal como ocorre na Mecânica de Hertz, diversos modelos matemáticos poderiam "representar" a mesma situação-problema, dissolvendo assim a confusão quanto ao isomorfismo que se estabelece entre linguagem e realidade.

Em outras passagens das dissertações e teses, os usos da expressão linguística "modelagem matemática" estão vinculados a uma **terceira imagem: na Modelagem, os conhecimentos matemáticos teriam origem em construções mentais.** Uma confusão conceitual que se instala é que *os conhecimentos matemáticos construídos na Modelagem são representações mentais (Vorstellungen) de conceitos matemáticos.*

Do ponto de vista wittgensteiniano, sustenta-se que pode haver um tipo de construção de conhecimentos matemáticos, mas tendo vista a formação de representações mentais principiadas pelos diversos usos das regras matemáticas apresentadas ao estudante, de modo que os conceitos matemáticos seriam construídos à medida que o estudante apreende as regras dos jogos de linguagem da Matemática, o que implica saber operar com essas regras. Por esse motivo, também salienta-se o papel do professor na Modelagem como alguém que instrui o estudante, capacitando-o a seguir as regras dos jogos de linguagem para "fazer lances" na Modelagem.

Por fim, tendo em conta os usos das expressões linguísticas "modelagem matemática" e "modelo matemático" encontrados no material empírico desta pesquisa, salienta-se que na Modelagem existe um uso exclusivo da concepção referencial da linguagem, devido, principalmente, às concepções empirista e intuicionista da Matemática presente na Modelagem. Entretanto, pode-se dizer que uma visão panorâmica dos usos dessas expressões linguísticas propiciadas pela terapia filosófica apresentada nesta pesquisa contribui no sentido de auxiliar, tal como um tratamento curativo, para dissolver a "ideia de que o ideal '*tem que* se encontrar na realidade'. Ao passo que não se vê ainda como ele se encontra aí, e não se entende a essência deste 'tem que'" (WITTGENSTEIN, 2014, § 101, grifo do autor), sendo que essa "ideia está colocada, por assim dizer, como óculos sobre o nosso nariz, e o que vemos, vemo-lo através deles. Não nos ocorre tirá-los" (WITTGENSTEIN, 2014, § 103).

Nesse sentido, esta pesquisa contribui para pensar de outros modos a respeito de elementos que perpassam a Modelagem, tais como a natureza do conhecimento matemático, a concepção de linguagem e acepções teóricas e filosóficas que estão neste contexto, de modo que nos seja possível tirar os óculos por meio dos quais vemos a Modelagem. No que se refere a um contexto prático, entendemos que não só as aulas de Matemática que são desenvolvidas mediante a utilização da Modelagem, mas também aquelas subsidiadas por outros procedimentos metodológicos, podem ser afetadas positivamente quando se considera que o conhecimento matemático é constituído num processo que se dá na e pela linguagem de modo que o professor pode encaminhar o estudante na "produção" de conceitos matemáticos.

Sobre recomendações para pesquisas futuras, haveria a possibilidade de aprofundar estudos relacionados às práticas de Modelagem, considerando a linguagem como condição para a constituição do conhecimento matemático.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, Nicola. **Dicionário de Filosofia.** 5. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

AGOSTINHO. **Confissões.** *De Magistro* (Do Mestre). 2. ed. São Paulo: Abril Cultural, 1980. Coleção Os Pensadores.

ALMEIDA, Lourdes Werle de; SILVA, Karina Pessôa da Silva; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Modelagem Matemática na Educação Matemática.** São Paulo: Contexto, 2012. 157 p.

ALVES, Vitorino de Sousa. A Filosofia da Matemática em Wittgenstein. **Revista Portuguesa de Filosofia**, Braga, T. 45, Fasc. 2, p. 161-188, abr./jun. 1989.

ARAÚJO, Inês Lacerda. **Do signo ao discurso:** introdução à filosofia da linguagem. São Paulo: Parábola Editorial, 2004.

ARAÚJO, Jussara de Loiola. **Cálculo, Tecnologias e Modelagem Matemática:** as discussões dos alunos. 2002. 174 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2002.

ARAÚJO, Jussara de Loiola. Uma abordagem sócio-crítica da Modelagem Matemática: a perspectiva da educação matemática crítica. **Alexandria,** Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 55-68, jul. 2009.

ARISTÓTELES. **A Metafísica.** Tradução Vicenzo Cocco. São Paulo: Abril Cultural, 1984. Coleção Os Pensadores.

ARRUDA JÚNIOR, Gerson Francisco de. **10 lições sobre Wittgenstein.** Rio de Janeiro: Vozes, 2017. Coleção 10 Lições.

BAKER, Gordon P.; HACKER, Peter M. S. **Wittgenstein:** understanding and meaning. Oxford: Blackwell Publishing, 2005.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. **Modelagem Matemática:** concepções e experiências de futuros professores. 2001. 253 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2001.

BARKER, Stephen F. **Filosofia da Matemática.** Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1969.

BARUK, Stella. **Insucesso e Matemáticas.** Lisboa: Relógio d'Água Editores, 1996.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática:** uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 1994.

BECKER, Fernando. Modelos pedagógicos e modelos epistemológicos. **Educação e Realidade**, Porto Alegre, v. 19, n. 1, p. 89-96, jan./jun. 1993.

BECKER, Fernando. **Epistemologia do professor de Matemática.** Petrópolis: Vozes, 2012.

BECKER, Fernando. Abstração pseudo empírica: significado epistemológico e impacto metodológico. **Educação & Realidade,** Porto Alegre, v. 42, n. 1, p. 371-393, jan./mar. 2017.

BIEMBENGUT, Maria Salett. **Modelação Matemática como método de ensino-aprendizagem de matemática em curso de 1º e 2º graus.** 1990. 134 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 1990.

BIEMBENGUT, Maria Salett. **Qualidade no ensino de Matemática na Engenharia:** uma proposta metodológica curricular. 1997. 239 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção e Sistemas). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1997.

BIEMBENGUT, Maria Salett. 30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 2, n. 2, p. 7-32, jul. 2009.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino.** São Paulo: Contexto, 2007.

BORBA, Marcelo C.; SKOVSMOSE, Ole. A ideologia da certeza em Educação Matemática. In: SKOVSMOSE, Ole. **Educação Matemática crítica:** a questão da democracia. Campinas: Papirus, 2001. p. 127-148.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf Acesso em: 20 dez. 2022.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**, v. 2. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, 2006. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf Acesso em: 20 dez. 2022.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf Acesso em: 20 dez. 2022.

BURAK, Dionísio. **Modelagem Matemática:** uma metodologia alternativa para o ensino de matemática na 5ª série. 1987. 186 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 1987.

BURAK, Dionísio. **Modelagem Matemática:** ações e interações no processo de ensino-aprendizagem. 1992. 460 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1992.

CALDEIRA, Ademir Donizetti. Modelagem Matemática: um outro olhar. **Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 33-54, jul. 2009.

CAMBI, Betina. **O professor mediador-orientador na modelagem matemática:** movimentos de constituição de uma representação docente. 2021. 202 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2021.

CARDOSO, Cíntia Maria. **Um olhar wittgensteiniano sobre a Alfabetização Matemática.** 2021. 170 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de São Paulo, São Paulo, 2021.

CARVALHO, José Sérgio Fonseca de. **Construtivismo:** uma pedagogia esquecida da escola. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

CARVALHO, Marco Antônio Alves de. **O conceito de representação na Física de Heinrich Hertz:** uma abordagem histórica. 2007. 101 f. Dissertação (Mestrado em História). Universidade Federal de Minas de Gerais, Belo Horizonte, 2007.

CASSOTTA, Maria Luiza Jurema; LUCAS, Alexandre; BLATTMANN, Ursula; VIEIRA, Angel Freddy Godoy. Recursos do conhecimento: colaboração, participação e compartilhamento de informação científica e acadêmica. **Informação e Sociedade: Estudos,** João Pessoa, v. 27, n. 1, p. 17-34, jan./abr. 2017.

CASTRO, Raimundo Santos de; CALDEIRA, Ademir Donizeti. Entrelaçamentos e possibilidades dos jogos de linguagem matemáticos: seus usos na comunidade remanescente de Quilombos da Agrovila de Espera, Alcântara – MA. **Revista Exitus**, Santarém, v. 7, n. 2, p. 32-54, maio/ago. 2017.

CHAUI, Marilena. **Introdução à história da filosofia:** dos pré-socráticos a Aristóteles. Vol. 1. 2. ed. São Paulo: Companhia das Letras, 2002.

CHAUVIRÉ, Christiane. **Wittgenstein.** Trad. Maria Luiza X. de A. Borges. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1991. 196 p.

COBB, Paul. Perspectivas Experimental, Cognitivista e Antropológica em Educação Matemática. **Zetetiké**, Campinas, v. 4, n. 6, p. 153-180, 1996.

CONDÉ, Mauro Lúcio Leitão. Wittgenstein e a gramática da ciência. **Unimontes Científica,** Montes Claros, v. 6, n. 1, p. 1-12, jan./jun. 2004a.

CONDÉ, Mauro Lúcio Leitão. **As teias da razão:** Wittgenstein e a crise da racionalidade moderna. Belo Horizonte: Argvmentvm Editora, 2004b.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Da realidade à ação:** reflexões sobre educação e matemática. São Paulo: SUMMUS/UNICAMP, 1986.

DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben. **A experiência matemática.** Tradução Fernando Miguel Louro e Ruy Miguel Ribeiro. Lisboa: Gradiva, 1989.

DEARDEN, R. F. Instruction and learning by discovery. In: PETERS, R. S. (org.). **The concept of Education.** London and New York: Routledge, 2010. p. 93-106.

DELLA NINA, Clarissa Trojack. **Modelagem Matemática e novas tecnologias:** uma alternativa para mudança de concepções em Matemática. 2005. 168 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2005.

DESCARTES, René. **Meditações metafísicas.** Tradução: Maria Ermanlina de Almeida Prado Galvão e Homero Santiago. 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2005. Coleção Clássicos.

DEWEY, John. O desenvolvimento do pragmatismo americano. **Scientiae Studia**, São Paulo, v. 5, n. 2, p. 227-243, 2007.

DONAT, Mirian. Expressividade e representação no jogo de linguagem das sensações. **Guairacá Revista de Filosofia**, Guarapuava, v. 38, n. 1, p. 16-27, 2022.

FANN, K. T. **El concepto de filosofia en Wittgenstein.** Madrid: Tecnos, 1992.

FATTURI, Arturo. Wittgenstein e Moore: sobre a certeza. **Revista de Filosofia Aurora**, Curitiba, v. 26, n. 39, p. 671-691, jul./dez. 2014.

FIORENTINI, Dario. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetiké,** Campinas, v. 3, n. 4, p. 1-37, 1995.

FREUDENTHAL, Hans. Why to teach Mathematics so as to be useful. **Estudos Educacionais em Matemática,** v. 1, n. 1-2, p. 3-8, 1968.

GAERTNER, Rosinete. **Modelação Matemática no 3º grau:** uma estratégia de ensino-aprendizagem de matemática no curso de Administração de Empresas. 1994. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, 1994.

GALVÃO, Maria Cristiane Barbosa; RICARTE, Ivan Luiz Marques. Revisão sistemática da literatura: conceituação, produção e publicação. **Logeion: Filosofia da Informação,** v. 6, n. 1, p. 57-73, 15 set. 2019.

GAUTHIER, Clermont. Da pedagogia tradicional à pedagogia nova. In: GAUTHIER, Clermont; TARDIF, Maurice. (orgs.). **A Pedagogia:** teorias e práticas da Antiguidade aos nossos dias. Petrópolis: Vozes, 2010. p. 175-202.

GERRARD, Steve. **Wittgenstein in transition:** the Philosophy of Mathematics. 1987. 136 f. Tese (Doutorado em Filosofia). Universidade de Chicago, Illinois, 1987.

GERRARD, Steve. Wittgenstein's Philosophies of Mathematics. **Synthese,** Países Baixos, v. 87, n. 1, p. 125-142, 1991.

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008. 200p.

GLOCK, Hans Johann. **Dicionário Wittgenstein.** Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1998.

GOTTSCHALK, Cristiane Maria Cornelia. **Uma reflexão filosófica sobre a matemática nos PCN.** 2002. 170 f. Tese (Doutorado em Filosofia da Educação). Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.

GOTTSCHALK, Cristiane Maria Cornelia. A natureza do conhecimento matemático sob a perspectiva de Wittgenstein: algumas implicações educacionais. **Cadernos de História e Filosofia da Ciência**, Campinas, v. 14, n. 2, p. 305-334, jul./dez. 2004a.

GOTTSCHALK, Cristiane Maria Cornelia. O papel da hipótese na atividade científica e suas relações com as proposições matemáticas sob a perspectiva de Wittgenstein. In: SEMANA DE FILOSOFIA, 4, 2004, Ilhéus. **Anais…** Ilhéus: Editora da UESC, 2004b. p. 59-79.

GOTTSCHALK, Cristiane Maria Cornelia. Ver e ver como na construção do conhecimento matemático. In: IMAGUIRE, Guido; MONTENEGRO, Maria Aparecida; PEQUENO, Tarcísio. (orgs.). **Colóquio Wittgenstein - Série Filosofia**. v. 3. 1. ed. Fortaleza: UFC, 2006. p. 73-93.

GOTTSCHALK, Cristiane Maria Cornelia. O papel do mestre: *Mênon* revisitado sob uma perspectiva wittgensteiniana. **Revista Internacional d´Humanitats,** São Paulo, ano X, n. 11, p. 13-11, 2007a.

GOTTSCHALK, Cristiane Maria Cornelia. Três concepções de significado na Matemática: Bloor, Granger e Wittgenstein. In: MORENO, Arley Ramos (org.). **Wittgenstein:** aspectos pragmáticos. v. 49. Campinas: Editora da Unicamp, 2007b. p. 95-133. Coleção CLE.

GOTTSCHALK, Cristiane Maria Cornelia. Uma concepção pragmática de ensino e aprendizagem**. Educação e Pesquisa,** São Paulo, v. 33, n. 3, p. 459-470, set./dez. 2007c.

GOTTSCHALK, Cristiane Maria Cornelia. A construção e transmissão do conhecimento matemático sob uma perspectiva wittgensteiniana. **Caderno Cedes**, Campinas, v. 28, n. 74, p. 75-96, 2008.

GOTTSCHALK, Cristiane Maria Cornelia. O papel do método no ensino: da maiêutica socrática à terapia wittgensteiniana. **ETD – Educação Temática Digital,** Campinas, v. 12, n. 1, p. 64-81, jul./dez. 2010a.

GOTTSCHALK, Cristiane Maria Cornelia. As relações entre linguagem e experiência na perspectiva de Wittgenstein e as implicações para a educação. In: PAGNI, Pedro Angelo; GELAMO, Rodrigo Pelloso (orgs.). **Experiência, educação e contemporaneidade.** Marília: Poiesis Editora, 2010b. p. 105-126.

GOTTSCHALK, Cristiane Maria Cornelia. A inserção nos jogos de linguagem da perspectiva de uma epistemologia do uso. **International Studies on Law and Education**, São Paulo, n. 15, p. 63-70, 2013.

GOTTSCHALK, Cristiane Maria Cornelia. A compreensão de significados matemáticos: entre o transcendental e o empírico. In: MORENO, Arley Ramos (org.). **Wittgenstein** - Compreensão: adestramento, treinamento, definição. v. 68. Campinas: Editora da Unicamp, 2014. p. 55-77. Coleção CLE.

GOTTSCHALK, Cristiane Maria Cornelia. A terapia wittgensteiniana como esclarecedora de conceitos fundamentais do campo educacional. **IXTLI - Revista Latinoamericana de Filosofía de la Educación,** Buenos Aires, v. 2, n. 4, p. 299-315, 2015.

GOTTSCHALK, Cristiane Maria Cornelia. A perspectiva antropológica filosófica de Wittgenstein e o conceito de homem na educação. **International Studies on Law and Education**, São Paulo, n. 23, p. 51-60, maio/ago. 2016.

GOTTSCHALK, Cristiane Maria Cornelia. Conhecimento e valores: algumas confusões conceituais no campo da educação. **International Studies on Law and Education,** São Paulo, n. 28, jan./abr. 2018.

GOTTSCHALK, Cristiane Maria Cornelia. A broader sense of the concept of translation inspired by Wittgenstein – from the classroom to cultural issues. In: OLIVEIRA, Paulo; PICHLER, Alois; MORENO, Arley Ramos (orgs.). **Wittgenstein in/on translation.** v. 86. Campinas: Editora da Unicamp, 2019. p. 239-263. Coleção CLE.

GOTTSCHALK, Cristiane Maria Cornelia. Uma reflexão sobre o sentido linguístico rumo a uma pedagogia de inspiração wittgensteiniana. **Educação & Realidade,** Porto Alegre, v. 45, n. 3, p. 1-22, 2020.

GOTTSCHALK, Cristiane Maria Cornelia. Paradigm and objectivity in the sciences: pedagogical repercussions from a Wittgensteinian perspective. **Transversal: International Journal for the Historiography of Science**, Belo Horizonte, v. 10, p. 1-17, 2021.

GOTTSCHALK, Cristiane Maria Cornelia. Unfounded foundations, grammatical relativism and Wittgenstein, the educator. **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática - RIPEM**, v. 12, n. 2, p. 23-37, 2022a.

GOTTSCHALK, Cristiane Maria Cornelia. Repercussões do pensamento de Wittgenstein no ensino e na aprendizagem da Matemática. In: SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da; SILVA, Paulo Vilhena da; TEIXEIRA JÚNIOR, Valdomiro Pinheiro (orgs.). **Linguagem e Educação Matemática.** São Paulo: Livraria da Física, 2022b. p. 39-57.

GUTIERREZ, Susana Gómez. Sobre a Filosofia como uma Atividade Terapêutica. **Cadernos de História e Filosofia da Ciência**, Campinas, v. 14, n. 2, p. 203-226, jul./dez. 2004.

HAMLYN, David Walter. **Uma história da filosofia ocidental.** Tradução de Ruy Jungmann. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1990. 308p.

HANSON, N. Russell. Observação e interpretação. In: MORGENBESSER, S. (org.). **Filosofia da Ciência.** São Paulo: Cultrix, 1975. p. 128-136.

HEMPEL, Carl. **Filosofia da ciência natural.** Rio de Janeiro: Zahar, 1974.

HILGENHEGER, Norbert. **Johann Herbart.** Recife: Fundação Joaquim Nabuco, Editora Massangana, 2010. 148 p. Coleção Educadores.

HORSTEN, Leon. **Philosophy of Mathematics.** The Stanford Encyclopedia of Philosophy. 2022. Disponível em: https://plato.stanford.edu/entries/philosophy-mathematics/ Acesso em: 08 jul. 2022.

JACOBINI, Otávio Roberto. **A Modelação Matemática Aplicada no Ensino de Estatística em Cursos de Graduação.** 1999. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 1999.

JANIK, Allan; TOULMIN, Stephen. **A Viena de Wittgenstein.** Tradução Álvaro Cabral. Rio de Janeiro: Campus, 1991. 357 p.

KLÜBLER, Tiago Emanuel. Modelagem Matemática: revisitando aspectos que justificam a sua utilização no ensino. In: BRANDT, Celia Finck; BURAK, Dionísio; KLÜBLER, Tiago. Emanuel (orgs.). **Modelagem Matemática:** uma perspectiva para a Educação Básica. Ponta Grossa: UEPG, 2016. p. 41-57.

KLÜBER, Tiago Emanuel; BURAK, Dionísio. Concepções de Modelagem Matemática: contribuições teóricas. **Educação Matemática Pesquisa,** São Paulo, v. 10, n. 1, p. 17-34, 2008.

LAUDAN, Larry. Teorias do método: de Platão a Mach. **Cadernos de História e Filosofia da Ciência**, Campinas, v. 10, n. 2, p. 9-140, 2000.

LYCAN, Willian G. **Philosophy of language:** a contemporary introduction. 2nd ed. UK: Routledge, 2008.

MACHADO, Diandra Dal Sent. Jean-Jacques Rousseau, Édouard Claparède e Jean Piaget: apontamentos acerca da ideia de educação funcional. **Schème Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas,** Marília, v. 9, n. 2, p. 165-188, ago./dez. 2017.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e realidade:** análise dos pressupostos filosóficos que fundamentam o ensino da matemática. São Paulo: Cortez, 1987.

MAGNUS, Maria Carolina Machado. **Modelagem Matemática na Educação Matemática brasileira:** histórias em movimento. 2018. 227 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2018.

MARTINEAU, Stéphane. Jean-Jacques Rousseau: o Copérnico da pedagogia. In: GAUTHIER, Clermont; TARDIF, Maurice (orgs.). **A Pedagogia:** teorias e práticas da Antiguidade aos nossos dias. Petrópolis: Vozes, 2010. p. 149-171.

MEYER, João Frederico da Costa de Azevedo; CALDEIRA, Ademir Donizetti; MALHEIROS, Ana Paula dos Santos. **Modelagem em Educação Matemática.** Belo Horizonte, MG: Autêntica Editora, 2019.

MIGUENS, Sofia. **Filosofia da Linguagem:** uma introdução. Porto: Faculdade de Letras da Universidade do Porto, 2007.

MILLER, Alexander. **Filosofia da linguagem**. Tradução Evandro Luis Gomes, Christian Marcel de Amorin, Perret Gentil Dit Maillard. São Paulo: Paulus, 2010. Coleção Filosofia.

MIORIM, Maria Ângela. **Introdução à história da Educação Matemática.** São Paulo: Atual Editora, 1998.

MONK, Ray. **Wittgenstein:** o dever do gênio. Tradução de Carlos Afonso Malferrari. São Paulo: Companhia das Letras, 1995.

MOREIRA, Marco Antonio. **Teorias de Aprendizagem.** São Paulo: EPU, 1999.

MOREIRA, Marco Antonio; OSTERMANN, Fernanda. Sobre o ensino do método científico. **Caderno Catarinense do Ensino de Física,** Florianópolis, v. 10, n. 2, p. 108-117, 1993.

MORENO, Arley Ramos. **Wittgenstein** – através das imagens. Campinas: Editora da Unicamp, 1995. 142 p.

MORENO, Arley Ramos. **Wittgenstein:** os labirintos da linguagem ensaio introdutório. São Paulo: Moderna, 2000. 112 p. Coleção *Logos.*

MORENO, Arley Ramos. Descrição fenomenológica e descrição gramatical: ideias para uma pragmática filosófica. **Revista Olhar,** São Carlos, ano 4, n. 7, p. 93-139, jul./dez. 2003.

MORENO, Arley Ramos. Wittgenstein: Um projeto epistemológico? Em direção a uma epistemologia do uso. In: MORENO, Arley Ramos (org.). **Wittgenstein**: Certeza? Campinas: Editora da Unicamp, 2010. p. 11-47. Coleção CLE.

MORENO, Arley Ramos. Introdução a uma Epistemologia do Uso. **Caderno CRH**, Salvador, v. 25, n. 2, p. 73-95, 2012.

MORENO, Arley Ramos. **Por uma epistemologia do uso**. In*:* Wittgenstein e seus aspectos. Campinas: UNICAMP, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 2015.

MORENO, Arley Ramos. Wittgenstein e os valores: do solipsismo à intersubjetividade. In: MARCOS, António; CADILHA, Susana (orgs.). **Wittgenstein sobre Ética.** Lisboa: Universidade Nova de Lisboa, 2019. p. 25-67.

MULINARI, Filicio. A crítica de Wittgenstein ao ideal de linguagem agostiniano. **Revista Reflexões**, Fortaleza, ano 5, n. 9, p. 80-87, jul./dez. 2016.

MULLER, Maria Candida. **Modelos matemáticos no ensino da Matemática.** 1986. 130 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1986.

OLIVEIRA, Manfredo A. de. **Reviravolta linguístico-pragmática na filosofia contemporânea.** 3. ed. São Paulo: Loyola, 2006.

QUARTIERI, Marli Teresinha. **A Modelagem Matemática na educação básica:** a mobilização do interesse do aluno e o privilegiamento da matemática escolar. 2012. 199 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade do Vale do Rio dos Sinos, São Leopoldo, 2012.

PASSMORE, John. On teaching to be critical. In: PETERS, R. S. (org.). **The concept of Education.** London and New York: Routledge, 2010. p. 134-147.

PEDUZZI, Luiz Orlando de Quadro; RAICIK, Anabel Cardoso. Sobre a natureza da ciência: asserções comentadas para uma articulação com a história da ciência. **Investigações em Ensino de Ciências,** Porto Alegre, v. 25, n. 2, p. 19-55, 2020.

PEREIRA, Adriana. Descartes defensor *Avant la lettre* do “inatismo moderado”. **Revista de Iniciação Científica da FFC**, Marília, v. 4, n. 2, p. 115-124, 2004.

PEREIRA, Tatiana de Mello. **A doutrina da iluminação divina:** a investigação de Agostinho de Hipona a verdade transmitida à intelectualidade do homem por intermédio da luz divina. 2020. 134 f. Dissertação (Mestrado em Filosofia). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

PIAGET, Jean. **Para onde vai a Educação?** Tradução Ivette Braga. Rio de Janeiro: Livraria José Olympio Editora, 1973.

PIAGET, Jean. Sobre a Pedagogia: textos inéditos. In: SAHEB, Daniele (org.). **Jean Piaget.** Recife: Fundação Joaquim Nabuco/Editora Massangana, 2010. p. 44-68. Coleção Educadores.

PIERCE, Robyn; STACEY, Kaye. Enhancing the image of mathematics by association with simple pleasures from real world contexts. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematick - ZDM,** v. 38, n. 3, p. 214-225, 2006.

PLATÃO. **Mênon.** Tradução Maura Iglésias. Rio de Janeiro: Loyola, 2001.

PORTO, André. Wittgenstein e a medida da circunferência. **Philósophos - Revista de Filosofia**, Goiânia, v. 12, n. 2, p. 55-85, jan./jun. 2007.

RAICIK, Anabel Cardoso; PEDUZZI, Luiz Orlando de Quadro. A estrutura conceitual e epistemológica de uma descoberta científica: reflexões para o ensino de Ciências. **Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia,** Florianópolis, v. 9, n. 2, p. 149-176, nov. 2016.

REALE, Giovanni; ANTISERI, Dario. **História da filosofia:** Antiguidade e Idade Média. Vol 1. São Paulo: Paulus, 1990. Coleção Filosofia.

RUSSELL, Bertrand. **História da filosofia ocidental.** A filosofia antiga. Tradução de Brenno Silveira. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 2015.

SÁ, Pedro Franco de. Ensinando Matemática através da redescoberta. **Traços,** Belém, v. 2, n. 3, p. 77-81, ago. 1999.

SANCHEZ, Jorge Enrique Pardo. **Estratégia combinada de módulos instrucionais e Modelos Matemáticos interdisciplinares para ensino-aprendizagem de matemática a nível de segundo grau** - um estudo exploratório. 1979. 273 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1979.

SILVA, Eduardo Simões. ***Darstellungen* nos Princípios da Mecânica e no Tractatus:** a representação dos objetos e a figuração do mundo em Hertz e Wittgenstein. 2012. 174 f. Tese (Doutorado em Filosofia e Metodologia da Ciência). Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2012.

SILVA, Jairo José da. **Filosofias da Matemática.** São Paulo: Editora Unesp, 2007.

SILVA, Marconi Oliveira da. **Wittgenstein:** para além da linguagem agostiniana. São Paulo: Intermeios, 2018.

SILVA, Paulo Vilhena da; TEIXEIRA JÚNIOR, Valdomiro Pinheiro; COSTA, Daniana de; DIAS, Alyne Maria Rosa de Araújo. Uma filosofia da Educação Matemática na perspectiva de Wittgenstein. **Educação Matemática Pesquisa,** São Paulo, v. 24, n. 2, p. 147-179, 2022.

SILVEIRA, Fernando Lang da; PEDUZZI, Luiz Orlando Quadro. Três episódios de descoberta científica: da caricatura empirista a uma outra história. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, Florianópolis, v. 23, n. 1, p. 26-52, abr. 2006.

SIMÕES, Eduardo. *Darstellungen* nos Princípios da Mecânica e no *Tractatus*: a representação dos objetos e a figuração do mundo em Hertz e em Wittgenstein. In: MORENO, Arley Ramos (org.). **Wittgenstein e a epistemologia**. v. 63. Campinas: Editora da Unicamp, 2013. p. 223-245. Coleção CLE.

SKOVSMOSE, Ole. Towards a critical mathematics education. In: SKOVSMOSE, Ole (org.). **Educação Matemática crítica:** a questão da democracia. Campinas: Papirus, 2001. p. 97-125.

SOUZA, Ednilson Sergio Ramalho de; ESPÍRITO SANTO, Adilson Oliveira do. Modelagem matemática: uma visão holística da realidade? In: ENCONTRO PARAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8, 03-05 set. 2008. Belém. **Anais...** Belém: Universidade do Estado do Pará, 2008. p. 1-9.

SPANIOL, Werner. **Filosofia e método no segundo Wittgenstein:** uma luta contra o enfeitiçamento do nosso entendimento. São Paulo: Loyola, 1989. Coleção Filosofia.

STILLMAN, Gloria Ann. State of the Art on Modelling in Mathematics Education - Lines of Inquiry. In: STILLMAN, Gloria Ann; BROWN, Jill P. (eds.). **Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education.** Switzerland: Springer Open, 2019, p. 1-20.

STRAUSS, Anselm; CORBIN, Juliet. **Pesquisa qualitativa:** técnicas e procedimentos para o desenvolvimento de teoria fundamentada. Trad. Luciane de Oliveira da Rocha. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2008.

TASCHETTO, Leonidas Roberto; DUARTE, Claudia Glavam. Educação Matemática e jogos de linguagem na escola: reverberações. **Revista Reflexão e Ação,** Santa Cruz do Sul, v. 23, n. 1, p. 186-203, jan./jun. 2015.

TEIXEIRA, William de Jesus. Teoria das ideias, inatismo e teoria da percepção em Descartes. **Cadernos Espinosanos,** São Paulo, n. 35, p. 487-516, jul./dez. 2016.

TEIXEIRA JÚNIOR, Valdomiro Pinheiro. **A terapia de Wittgenstein e o ensino de Álgebra.** 2016. 357 f. Tese (Doutorado em Ciências e Matemáticas). Universidade Federal do Pará, Belém, 2016.

VILELA, Denise Silva. A terapia filosófica de Wittgenstein e a Educação Matemática. **Educação e Filosofia**, Uberlândia, v. 24, n. 48, p. 435-456, jul./dez. 2010.

WARBURTON, Nigel. **Uma breve história da filosofia.** Tradução Rogério Bettoni. Porto Alegre: L&PM Editores, 2012.

WILMER, Carlos Braga. **Modelos na aprendizagem da matemática.** 1976. 150 f. Dissertação (Mestrado em Ciências da Matemática). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1976.

WINCH, Christopher. Education needs training. **Oxford Review of Education**, London, v. 21, n. 3, p. 315-325, 1995.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics**. Cambridge: Harvester Press, 1939.

WITTGENSTEIN, Ludwig. ***Tractatus Logico-Philosophicus.*** Tradução José Arthur Giannotti. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1968.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Da certeza.** Tradução Maria Elisa Costa. Lisboa: Edições 70, 1969.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Das fichas.** Tradução Ana Berhan da Costa. Lisboa: Edições 70, 1981.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Observações filosóficas.** São Paulo: Edições Loyola, 2005.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Gramática filosófica.** São Paulo: Edições Loyola, 2010.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Investigações filosóficas.** Tradução Marcos G. Montagnoli. Petrópolis: Vozes, 2014.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Observações sobre os fundamentos da Matemática.** E-book. Trad. João José Almeida. 1. ed. Curitiba: Horle Books, 2022.

APÊNDICE A – MATERIAL EMPÍRICO

ALMEIDA, Gisélia Clarice Eirado de. **A Matemática nas Ciências Aplicadas:** uma proposta metodológica. 1993. 85 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro, 1993.

ANASTACIO, Maria Queiroga Amoroso. **Considerações sobre a Modelagem e a Educação Matemática.** 1990. 100 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 1990.

ARAÚJO, Jussara de Loiola. **Cálculo, tecnologias e Modelagem Matemática:** as discussões dos alunos. 2002. 174 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2002.

BARALDI, Angela Pereira. **Modelagem Matemática:** um recurso facilitador no processo ensino-aprendizagem. 2018. 101 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional). Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Três Lagoas, 2018.

BIEMBENGUT, Maria Salett. **Modelação Matemática como método de ensino-aprendizagem de matemática em curso de 1º e 2º graus.** 1990. 134 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 1990.

BORSSOI, Adriana Helena. **Modelagem Matemática, aprendizagem significativa e tecnologias:** articulações em diferentes contextos educacionais. 2013. 255 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

BURAK, Dionísio. **Modelagem Matemática:** uma metodologia alternativa para o ensino de matemática na 5ª série. 1987. 186 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 1987.

CALDEIRA, Ademir Donizeti. **Educação Matemática e ambiental:** um contexto de mudança. 1998. 553 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998.

CAMILO, Antonio Valmir. **Modelagem Matemática:** uma perspectiva para o ensino de matemática no Ensino Médio. 2002. 139 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade do Contestado, Caçador, 2002.

CARVALHO, Daniel Santos de. **Modelagem Matemática na perspectiva da Teoria Desenvolvimental.** 2020. 163 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática). Universidade Federal de Mato Grosso, Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática, Cuiabá, 2020.

COSTA, Eliana Junqueira Barbosa. **Modelagem Matemática** – uma metodologia alternativa para ensinar geometria: reflexos na formação docente. 2000. 149 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Pontifícia Universidade Católica de Campinas, Campinas, 2000.

DENTE, Elise Cândida. **Modelagem Matemática e suas implicações para o ensino e a**

aprendizagem da Matemática no 5º ano do Ensino Fundamental em duas escolas públicas do Vale do Taquari. 2017. 136 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas). Centro Universitário Univates, Lajeado, 2017.

DOLIS, Maria. **Ensino de Cálculo e o processo de Modelagem.** 1989. 34 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 1989.

DOMINGOS, Thaísa C. Machoski. **Modelagem Matemática na Educação Matemática:** uma perspectiva na Educação de Jovens e Adultos. 2019. 163 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática). Universidade Estadual do Centro-Oeste, Guarapuava, 2019.

FERRUZZI, Elaine Cristina. **A Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos Cursos Superiores de Tecnologia.** 2003. 154 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia da Produção e Sistemas). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.

FRANCHI, Regina Helena de Oliveira Lino. **A Modelagem Matemática como estratégia de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos Cursos de Engenharia.** 1993. 159 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 1993.

FRANCHI, Regina Helena de Oliveira Lino. **Uma proposta curricular de Matemática para cursos de Engenharia utilizando a Modelagem Matemática e Informática.** 2002. 175 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2002.

GAZZETTA, Marineusa. **A Modelagem como estratégia de aprendizagem de matemática em cursos de aperfeiçoamento de professores.** 1989. 150 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 1989.

HAMMES, Ofelia Oro. **Modelagem Matemática:** aspectos psicopedagógicos favorecidos no processo de ensino e aprendizagem da matemática. 2000. 171 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Estadual de Campinas e Universidade Estadual do Centro-Oeste do Paraná, Campinas, 2000.

JOCOSKI, Juares. **Modelagem matemática nos anos iniciais do ensino fundamental:** possibilidades para o ensino de matemática. 2020. 100 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e em Matemática). Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2020.

KACZMAREK, Derli. **Práticas curriculares com Modelagem numa perspectiva da Educação Matemática:** um olhar para suas dimensões. 2019. 192 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2019.

KAVIATKOVSKI, Marinês Avila Chaves. **A modelagem matemática como metodologia de ensino e aprendizagem nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2012. 136 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2012.

KOMAR, Marcelo Fabricio Chociai. **A modelagem matemática no processo de ensino e aprendizagem da matemática no Ensino Fundamental:** ações e interações. 2017. 128 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática). Universidade Estadual do Centro-Oeste, Guarapuava, 2017.

LEAL, Simone. **Modelação Matemática uma proposta metodológica para o curso de Economia.** 1999. 185 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1999.

MACHADO JUNIOR, Arthur Gonçalves. **Modelagem Matemática no ensino-aprendizagem:** ação e resultados. 2005. 125 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas). Universidade Federal do Pará, Belém, 2005.

MACINTYRE, Ana Beatriz Lott. **Tecnologia e prazer**: o ensino da matemática aplicada à administração. 2002. 107 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2002.

MAGALHÃES OLIVEIRA, Ana Cristina. **Modelagem matemática em sala de aula:** perspectivas para o Ensino Fundamental. 2018. 112 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuru, Teófilo Otoni, 2018.

MARTINELLO, Darci. **Modelação Matemática:** uma alternativa para o ensino de Matemática, no 1º grau. 1994. 130 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, 1994.

MAZUR, Maria. **Modelagem na Educação Matemática**: implicações na formação do ser e do saber. 2021. 158 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática). Universidade Estadual do Centro-Oeste, Guarapuava, 2021.

MONTEIRO, Alexandrina. **O ensino de matemática para adultos através do método da Modelagem Matemática.** 1991. 198 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 1991.

NOGUEIRA, Laercio Conceição Pedrosa. **Utilizando a Modelagem Matemática no processo de ensino para a aprendizagem no 9º ano do Ensino Fundamental sob uma perspectiva de Educação Matemática sócio-construtivista-interacionista.** 2014. 214 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2014.

OLIVEIRA, Camila Fogaça de. **A terapia de Wittgenstein e o conceito de função:** uma investigação com Modelagem Matemática. 2018. 216 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

OLIVEIRA, Rosalba Lopes de. **A Modelagem Matemática como alternativa de ensino e aprendizagem da geometria na Educação de Jovens e Adultos.** 2004. 180 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2004.

ROMA, José Eduardo. **O Curso de Especialização em Educação Matemática da PUC-Campinas:** reflexões na prática pedagógica dos egressos. 2002. 208 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Pontifícia Universidade Católica de Campinas, Campinas, 2002.

SANCHEZ, Jorge Enrique Pardo. **Estratégia combinada de módulos instrucionais e Modelos Matemáticos interdisciplinares para ensino-aprendizagem de matemática a nível de segundo grau** - um estudo exploratório. 1979. 273 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1979.

SANTIAGO, Thiago Lopes Nascimento. **O ensino dos sólidos geométricos:** um estudo utilizando a Modelagem Matemática. 2018. 70 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro, 2018.

SCHEFFER, Nilce Fátima. **O encontro da Educação Matemática com a Pedagogia Freinet.** 1995. 158 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 1995.

SILVA, Izaias Nário da. **O Ensino-aprendizagem das funções de várias variáveis através de modelos matemáticos:** uma investigação qualitativa em sala de aula. 2019. 230 f. Dissertação (Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2019.

SILVA, José Augusto Lopes da. **Modelagem Matemática e o ensino da Geometria Plana em atividades remotas para o 8º ano.** 2021. 139 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade do Estado do Pará, Belém, 2021.

SODRÉ, Gleison de Jesus Marinho. **Modelagem Matemática Crítica como atividade de ensino e investigação.** 2013. 76 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas). Universidade Federal do Pará, Belém, 2013.

SOISTAK, Alzenir Virginia Ferreira. **A Modelagem Matemática no Contexto do Ensino Médio:** possibilidades de relação da Matemática com o cotidiano. 98 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2006.

SOUZA, Elizabeth Gomes. **A aprendizagem matemática na Modelagem Matemática**. 2012. 143 f. Tese (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências). Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2012.

SOUZA, Henrique Cristiano Thomas de. **Um olhar sobre o *fazer* Modelagem Matemática à luz da filosofia de Wittgenstein**. 2018. 210 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

TESSARO, André. **Modelagem Matemática como ambiente de aprendizagem e as representações emergidas de um grupo de alunos do ensino médio sobre suas aulas de Matemática.** 2015. 89 f. Dissertação (Mestrado em Ensino na Educação Básica). Universidade Federal do Espírito Santo, São Mateus, 2015.

TORTOLA, Emerson. **Configurações de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2016. 304 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação

Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

VIDIGAL, Cássio Luiz. **Desenvolvendo criticidade e criatividade com estudantes de Geografia por meio de Modelagem**.2013. 148 f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2013.

WILMER, Celso Braga. **Modelos na aprendizagem da Matemática.** 1976. 150 f. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática). Pontifícia Católica Universidade do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1976.