UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

LUIS FELIPE DOS SANTOS LUCCAS

UMA BREVE INTRODUÇÃO À TEORIA DAS PI-ÁLGEBRAS.

SÃO CARLOS
2023

LUIS FELIPE DOS SANTOS LUCCAS

UMA BREVE INTRODUÇÃO À TEORIA DAS PI-ÁLGEBRAS.

Monografia apresentada ao Curso de Bacharelado em Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

Orientador: Prof. Dr. Dimas José Gonçalves

SÃO CARLOS
2023

Dedico esse trabalho a Deus, a minha família que sempre me apoiou e aos meus amigos que sempre me inspiraram.

RESUMO

O objetivo deste Trabalho de Conclusão de Curso é estudar alguns conceitos e resultados introdutórios da Teoria de PI-álgebras. Em particular, como resultados principais, descrevemos as identidades polinomiais das álgebras de Grassmann e das matrizes triangulares superiores 2×2 quando o corpo é infinito, estudamos o Teorema de Amitsur-Levitzki sobre as identidades da álgebra de matrizes, e estudamos os Teoremas de Regev sobre a codimensão e produto tensorial de duas PI-álgebras.

Palavras-chave: PI-álgebra. Álgebra de Grassmann. Matrizes triangulares superiores. Teorema de Amitsur-Levitzki. Teorema da codimensão de Regev.

ABSTRACT

The goal of this undergraduate thesis is to study some introdutory concepts and results of the PI-algebras theory. In particular, as main results, we describe the polinomial identities of the Grassmann algebra and 2×2 upper triangular matrix algebra when the field is infinite, we study the Amitsur-Levitzki Theorem about identities on the matrix algebra, and Regev's Theorems about the codimension and the tensor product of two PI-algebras.

Keywords: PI-algebras. Grassmann Algebra. Upper triangular matrices. Amitsur-Levitzki Theorem. Codimension Theorem of Regev.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O assunto tratado neste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) está inserido dentro da área de álgebra, mais especificamente dentro da Teoria das PI-álgebras.

Um polinômio $f(x_1, \dots, x_n)$ nas variáveis não comutativas $x_1, \dots, x_n$ e com coeficientes num corpo K é uma identidade polinomial para uma álgebra A se ele se anula sempre que trocarmos as suas variáveis por quaisquer elementos de A. Se existe tal polinômio não nulo, dizemos que A é uma PI-álgebra. São exemplos de PI-álgebras as álgebras comutativas, as álgebras de dimensão finita e outras mais, como por exemplo a álgebra de Grassmann que é um dos assuntos principais deste trabalho. Vale ressaltar que nem toda álgebra é uma PI-álgebra, por exemplo, a álgebra associativa livre.

Um dos trabalhos pioneiros da área deve-se a Amitsur e Levitzki que provaram que o grau mínimo de uma identidade polinomial para a álgebra de matrizes $M_n(K)$ é igual a $2n$. Tal identidade polinomial de grau $2n$ é conhecida como polinômio Standard. Este resultado foi explorado por vários outros, dentre eles estão Rosset e Razmyslov que apresentaram duas outras demonstrações para tal teorema.

A álgebra das matrizes triangulares superiores $U_n(K)$ é uma álgebra de dimensão finita e portanto uma PI-álgebra. Uma pergunta natural seria: quais são todas as identidades polinomiais de $U_n(K)$? Esta pergunta já foi respondida por Maltsev em (MALTSEV, 1971) quando o corpo K é de característica zero, e por Siderov em (SIDEROV, 1981) para um corpo K qualquer (finito ou infinito).

No parágrafo anterior falamos de uma álgebra de dimensão finita específica. Agora falaremos de uma de dimensão infinita: a álgebra de Grassmann infinitamente gerada. Ela também é uma PI-álgebra pois admite um polinômio, chamado de comutador triplo, como identidade polinomial. As suas identidades polinomiais foram descritas para qualquer corpo, mas vale ressaltar o trabalho de Krakowski e Regev quando o corpo é de característica zero. Veja (KRAKOWSKI; REGEV, 1973) para maiores detalhes.

Outro trabalho importante na área, que também foi estudado por Regev, é sobre as codimensões e o produto tensorial entre duas PI-álgebras. Sabendo que R_1 e R_2 são PI-álgebras, é normal se perguntar se $R_1 \otimes R_2$ também será. Regev utiliza de um resultado quantitativo sobre codimensões para demonstrar que, de fato, tal produto é uma PI-álgebra.

Os cinco primeiros capítulos deste trabalho têm como objetivo estudar as identidades polinomiais das álgebras de Grassmann e da álgebra $U_2(K)$. Além disto, eles servem de base para os dois últimos capítulos deste trabalho que, por sua vez, têm como objetivo apresentar o Teorema de Amitsur-Levitzki, discutido anteriormente, e os Teoremas de Regev sobre codimensões e produto tensorial de duas PI-álgebras. Para isso, dividimos o assunto ao longo dos capítulos como abaixo:

No Capítulo 1 veremos as propriedades básicas de álgebras em geral, já apresentando as álgebras de Grassmann e $U_2(K)$, para que possamos ter uma boa base para avançarmos no assunto.

No Capítulo 2 veremos de maneira rigorosa o conceito de PI-álgebra, alguns exemplos e um pouco de T-ideais.

No Capítulo 3 veremos conjuntos de polinômios “mais adequados” que venham a nos ajudar a descrever um T-ideal.

No Capítulo 4 encontramos conjuntos geradores dos T-ideais das identidades polinomiais das álgebras de Grassmann e de $U_2(K)$ quando o corpo K é infinito.

No Capítulo 5 veremos um pouco mais a fundo a álgebra $M_k(K)$, apresentando o resultado de Amitsur-Levitzki e duas demonstrações diferentes.

Por fim, no Capítulo 6 provaremos o resultado sobre codimensões de Regev, e usaremos ele para provar outro resultado de Regev que diz respeito ao produto tensorial de duas PI-álgebras.

Os capítulos de 1 a 4 constituem o TCC A deste trabalho, enquanto que os capítulos 5 e 6 constituem o TCC B.

A principal referência utilizada neste trabalho foi (DRENSKY, 2000). As referências complementares são (GIAMBRUNO; ZAICEV, 2005), (SANTOS; VIEIRA, 2021), (BREšAR, 2014), (REGEV, 1972).

1 ÁLGEBRAS ASSOCIATIVAS

Neste capítulo introduziremos o conceito de álgebra, estudaremos alguns exemplos, bem como propriedades para que então possamos entender o que são álgebras associativas. Além disso, apresentaremos a álgebra livre e a álgebra de Grassmann, duas álgebras importantes para a sequência dos nossos estudos em PI-álgebras.

1.1 PROPRIEDADES BÁSICAS

Ao longo do texto, K denotará um corpo. Começamos com a seguinte definição:

Definição 1.1.1. Um K-espaço vetorial R é uma K-álgebra (ou uma álgebra) se existir uma operação binária $*$ em R, chamada de multiplicação, tal que para cada $a,\ b,\ c \in R$ e $\alpha \in K$ valem as seguintes igualdades:

$$a * (b + c) = a * b + a * c,$$

$$(a + b) * c = a * c + b * c,$$

$$\alpha(a * b) = (\alpha a) * b = a * (\alpha b).$$

A menos que seja dito o contrário, todas as álgebras e espaços vetoriais serão sobre K.

Exemplo 1.1.2. São exemplos bem conhecidos de K-álgebras:

i) Qualquer corpo que é uma extensão do corpo K.

ii) O K-espaço vetorial dos polinômios nas variáveis comutativas $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ com coeficientes em K e produto usual de polinômios. Denotaremos tal álgebra por $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

iii) O K-espaço vetorial $M_n(K)$ das matrizes quadradas $n \times n$, cujas entradas estão em K, com a multiplicação usual de matrizes. Aqui vale relembrar uma base importante e que será utilizada nesta monografia: a base canônica de $M_n(K)$, ou seja, a base formada pelos n^2 elementos e_{ij}, onde $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq n$, sendo que o elemento e_{ij} é a matriz cujas entradas são nulas exceto a entrada da linha i e coluna j que será 1. Note que dados dois elementos da base e_{ij} e e_{kl}, o produto entre eles é dado por:

$$e_{ij} \cdot e_{kl} = \begin{cases} e_{il} & \text{se } j = k, \\ 0 & \text{se } j \neq k. \end{cases}$$

iv) O subespaço vetorial $sl_n(K)$ de $M_n(K)$ formado pelas matrizes com traço 0 (zero) e multiplicação:

$$[r_1, r_2] = r_1 \cdot r_2 - r_2 \cdot r_1,\ r_1, r_2 \in sl_n(K),$$

onde $\cdot$ é a multiplicação usual de matrizes. Note que $sl_n(K)$ com a multiplicação usual de matrizes não é uma álgebra, pois tal multiplicação não é uma operação binária em $sl_n(K)$, por exemplo $e_{12},\ e_{21} \in sl_n(K)$, mas $e_{12} \cdot e_{21} = e_{11} \notin sl_n(K)$. Porém, ao usarmos a multiplicação [,], temos uma álgebra.

No geral, dada uma álgebra R com multiplicação $\cdot$, ao elemento

$$[r_1, r_2] = r_1 \cdot r_2 - r_2 \cdot r_1,\ r_1, r_2 \in R,$$

damos o nome de comutador. Ele é um produto usado para construir as álgebras de Lie que veremos mais tarde.

v) O K-espaço vetorial KG cuja base são os elementos de um grupo finito G com a multiplicação $\cdot$ definida por:

$$\left(\sum_{g\in G} \alpha_g g\right) \cdot \left(\sum_{h\in G} \beta_h h\right) = \left(\sum_{g,h\in G} \alpha_g \beta_h gh\right), \alpha_g, \beta_h \in K,$$

onde gh é a multiplicação de g e h no grupo G. Esta álgebra é chamada de álgebra grupo de G.

Exemplo 1.1.3. Veremos agora como transformar um espaço vetorial numa álgebra a partir de sua base. Em um K-espaço vetorial R com base $\{e_k | k \in I\}$, para cada par e_i, e_j definimos a multiplicação $e_i \cdot e_j$ como

$$e_i \cdot e_j = \sum_{k\in I} \alpha_{ij}^k e_k,$$

onde $\alpha_{ij}^k \in K$ são nulos, a menos de uma quantidade finita de índices k. A partir disso, definimos a multiplicação de dois elementos quaisquer de R como

$$\left(\sum_{i\in I} \xi_i e_i\right) \cdot \left(\sum_{j\in I} \eta_j e_j\right) = \sum_{i,j\in I} \xi_i \eta_j (e_i \cdot e_j). \tag{1.1}$$

Desta forma, temos que o espaço vetorial R munido da multiplicação $\cdot$ é uma álgebra. De fato, tomando três elementos de R teremos que:

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i\in I}\xi_i e_i\right)\cdot\left(\left(\sum_{j\in I}\eta_j e_j\right)+\left(\sum_{k\in I}\psi_k e_k\right)\right)\\
&=\left(\sum_{i\in I}\xi_i e_i\right)\cdot\left(\sum_{j\in I}(\eta_j+\psi_j)e_j\right)\\
&=\sum_{i,j\in I}\xi_i(\eta_j+\psi_j)(e_i\cdot e_j)\\
&=\sum_{i,j\in I}(\xi_i\eta_j+\xi_i\psi_j)(e_i\cdot e_j)\\
&=\sum_{i,j\in I}\xi_i\eta_j(e_i\cdot e_j)+\sum_{i,k\in I}\xi_i\psi_k(e_i\cdot e_k)\\
&=\left(\sum_{i\in I}\xi_i e_i\right)\cdot\left(\sum_{j\in I}\eta_j e_j\right)+\left(\sum_{i\in I}\xi_i e_i\right)\cdot\left(\sum_{k\in I}\psi_k e_k\right).
\end{aligned}$$

De maneira semelhante provamos que:

$$\begin{aligned}
&\left(\left(\sum_{j\in I}\eta_j e_j\right)+\left(\sum_{k\in I}\psi_k e_k\right)\right)\cdot\left(\sum_{i\in I}\xi_i e_i\right)\\
&=\left(\sum_{j\in I}\eta_j e_j\right)\cdot\left(\sum_{i\in I}\xi_i e_i\right)+\left(\sum_{k\in I}\psi_k e_k\right)\cdot\left(\sum_{i\in I}\xi_i e_i\right).
\end{aligned}$$

Além disso, é fácil notar que se $\alpha\in K$, então:

$$\begin{aligned}
\alpha\left(\left(\sum_{i\in I}\xi_i e_i\right)\cdot\left(\sum_{j\in I}\eta_j e_j\right)\right)&=\left(\alpha\left(\sum_{i\in I}\xi_i e_i\right)\right)\cdot\left(\sum_{j\in I}\eta_j e_j\right)\\
&=\left(\sum_{i\in I}\xi_i e_i\right)\cdot\left(\alpha\left(\sum_{j\in I}\eta_j e_j\right)\right).
\end{aligned}$$

Desta forma, dado um espaço vetorial, sempre conseguimos criar nele uma estrutura de álgebra, bastando para isso dizer quem é o produto entre quaisquer dois elementos da sua base.

Seguiremos agora com a definição de subálgebra:

Definição 1.1.4. Um subespaço vetorial S da álgebra R é chamado de subálgebra se for fechado com respeito a multiplicação $\cdot$ de R, isto é, se $s_1, s_2\in S$ então $s_1\cdot s_2\in S$.

Exemplo 1.1.5. O subespaço vetorial $U_n(K)$ das matrizes triangulares superiores $n\times n$ é uma subálgebra de $M_n(K)$.

Demonstração. Temos que uma base de $U_n(K)$ é o conjunto dos elementos e_{ij} tais que $i\leq j$. Se e_{ij} e e_{kl} são dois elementos quaisquer da base e $e_{ij}\cdot e_{kl}$ estiver em $U_n(K)$ então a multiplicação de quaisquer dois elementos de $U_n(K)$ também estará, pois pela propriedade distributiva esta será uma combinação linear de elementos da forma $e_{ij} \cdot e_{kl}$. Com isso, precisamos apenas provar que a multiplicação é fechada para os elementos da base.

Se e_{ij} e e_{kl} são da base então $i \leq j$ e $k \leq l$. A única maneira de $e_{ij} \cdot e_{kl}$ ser não nulo será se $j = k$. Neste caso, $e_{ij} \cdot e_{kl} = e_{il}$ com $i \leq j = k \leq l$ e portanto, $e_{ij} \cdot e_{kl}$ é um dos elementos da base de $U_n(K)$. □

Definição 1.1.6. Dada uma álgebra R com multiplicação $\cdot$, um subespaço vetorial I de R é chamado de Ideal à esquerda de R se $R \cdot I \subseteq I$ isto é, $r \cdot i \in I$ para todo $r \in R$ e $i \in I$. De forma análoga definimos ideal à direita de R. Um ideal bilateral (ou simplesmente ideal) de R é um subespaço vetorial I de R que é ao mesmo tempo um ideal à esquerda e à direita.

Note que a própria álgebra R e o subespaço $\{0\}$ sempre serão ideais bilaterais de R, chamados de ideais triviais.

Exemplo 1.1.7. Veremos agora alguns exemplos de ideais.

(1) O subespaço L_1 de $M_n(K)$ definido por $L_1 = \{B = (b_{ij}) \in M_n(K) \mid b_{ij} = 0 \text{ para todo } i \neq 1\}$ é um ideal à direita de $M_n(K)$ e o subespaço C_1 de $M_n(K)$ definida por $C_1 = \{C = (c_{ij}) \in M_n(K) \mid c_{ij} = 0 \text{ para todo } j \neq 1\}$ é um ideal à esquerda de $M_n(K)$.

(2) O subespaço $V_n(K)$ das matrizes triangulares superiores com diagonal principal nula é um ideal bilateral de $U_n(K)$.

Da mesma forma que se define anel quociente baseado em seus ideais, podemos definir a álgebra quociente da seguinte forma.

Definição 1.1.8. Dada uma álgebra R com multiplicação $\cdot$, seja I um ideal bilateral de R. Definimos a álgebra quociente R/I como a álgebra formada pelas classes $\overline{r} = r + I$, onde $r \in R$, definidas de forma que

$$\overline{r_1} = \overline{r_2} \iff r_1 - r_2 \in I.$$

A soma e multiplicação em R/I são definidas, respectivamente, por

$$(r_1 + I) + (r_2 + I) = (r_1 + r_1) + I \;\text{ e }\; (r_1 + I)(r_2 + I) = (r_1 \cdot r_1) + I.$$

Note que $\overline{r} = \overline{0}$ se, e somente se, $r \in I$. Além disso, se $\alpha \in K$, então definimos

$$\alpha(r + I) = \alpha r + I.$$

Quando dois elementos $r_i, r_j \in R$ estão em uma mesma classe $\overline{r}$ de R/I, dizemos que r_i e r_j são côngruos módulo I.

Em breve construiremos um exemplo importante de álgebra quociente: a álgebra de Grassmann. Continuando com as nossas definições, temos:

Definição 1.1.9. Uma transformação linear $\phi : R_1 \to R_2$, onde R_1 e R_2 são álgebras, é chamada de homomorfismo de álgebras se para todos $x, y \in R_1$ temos

$$\phi(x \cdot y) = \phi(x) \times \phi(y)$$

onde $\cdot$ é o produto em R_1 e $\times$ é o produto em R_2.

Um isomorfismo de álgebras é um homomorfismo de álgebras que é bijetor, um endomorfismo é um homomorfismo de uma álgebra nela mesma, um automorfismo é um isomorfismo de uma álgebra nela mesma.

Podemos classificar algumas álgebras importantes conforme abaixo:

Definição 1.1.10. Seja R uma álgebra com multiplicação $\cdot$.

(I) R é uma álgebra associativa se $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, para todos $a, b, c \in R$.

(II) R é uma álgebra comutativa se $a \cdot b = b \cdot a$, para todos $a, b \in R$.

(III) R é uma álgebra unitária se ela possuir um elemento e (ou 1) tal que $e \cdot r = r \cdot e = r$, para todo $r \in R$.

(IV) R será uma álgebra de Lie se, para todos $a, b, c \in R$:

$$a \cdot a = 0 \quad \text{- lei alternante,}$$
$$(a \cdot b) \cdot c + (b \cdot c) \cdot a + (c \cdot a) \cdot b = 0 \quad \text{- identidade de Jacobi.}$$

Por convenção, se não for explicitado do contrário, consideraremos que todas as álgebras associativas neste trabalho possuem unidade. Neste caso, diremos apenas álgebra associativa ao invés de álgebra associativa unitária.

Lema 1.1.11. *A lei alternante implica a lei anti-simétrica:*

$$a \cdot b = -(b \cdot a),$$

para todos $a, b \in R$. Se $char(K) \neq 2$, então as duas leis são equivalentes.

Demonstração. De fato se $r \cdot r = 0$ para qualquer $r \in R$, então, em particular,

$$(a + b) \cdot (a + b) = 0.$$

Logo

$$0 = a \cdot a + b \cdot a + a \cdot b + b \cdot b = b \cdot a + a \cdot b,$$

e portanto $a \cdot b = -(b \cdot a)$.

Reciprocamente se $a \cdot b = -(b \cdot a)$ para todos $a,\ b \in R$ temos que, particularmente:

$$a \cdot a = -(a \cdot a) \Rightarrow a \cdot a + a \cdot a = 0 \Rightarrow 2(a \cdot a) = 0.$$

Como $char(K) \neq 2$ então $a \cdot a = 0$. $\square$

Proposição 1.1.12. *Se R é uma álgebra associativa com multiplicação $\cdot$ então o espaço vetorial R com o produto $[\ ,\ ] : R \times R \to R$ dado por*

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$$

é uma álgebra de Lie, denotada por $R^{(-)}$.

Demonstração. Primeiro temos que provar que $R^{(-)}$ é uma álgebra. Sejam $a, b, c \in R^{(-)}$, como R é uma álgebra temos que

$$[a + b, c] = (a + b)c - c(a + b) = ac + bc - ca - cb = (ac - ca) + (bc - cb) = [a, c] + [b, c].$$

De forma análoga temos que

$$[c, a + b] = [c, a] + [c, b].$$

Precisamos agora provar que se $a, b \in R^{(-)}$ e $\alpha \in K$, então

$$\alpha[a, b] = [\alpha a, b] = [a, \alpha b].$$

De fato, temos

$$\alpha[a, b] = \alpha(a \cdot b - b \cdot a) = (\alpha a) \cdot b - b \cdot (\alpha a) = [\alpha a, b] \text{ e}$$

$$\alpha[a, b] = \alpha(a \cdot b - b \cdot a) = a \cdot (\alpha b) - (\alpha b) \cdot a = [a, \alpha b],$$

portanto $R^{(-)}$ é uma álgebra.

Em seguida devemos provar que $R^{(-)}$ é de Lie, ou seja, devemos provar que valem a lei alternante e a identidade de Jacobi. Para todo $a \in R^{(-)}$ temos que:

$$[a, a] = a \cdot a - a \cdot a = 0.$$

Portanto, temos que a lei alternante é válida.

Agora provaremos a identidade de Jacobi: Sejam $a, b, c \in R^{(-)}$, temos que:

$$\begin{aligned}
[[a,b],c]+[[b,c],a]+[[c,a],b] =& [a\cdot b - b\cdot a, c]+[b\cdot c - c\cdot b, a]+[c\cdot a - a\cdot c, b]\\
=& ((a\cdot b - b\cdot a)\cdot c - c\cdot(a\cdot b - b\cdot a))\\
&+((b\cdot c - c\cdot b)\cdot a - a\cdot(b\cdot c - c\cdot b))\\
&+((c\cdot a - a\cdot c)\cdot b - b\cdot(c\cdot a - a\cdot c))\\
=& (a\cdot b\cdot c - b\cdot a\cdot c)-(c\cdot a\cdot b - c\cdot b\cdot a)\\
&+(b\cdot c\cdot a - c\cdot b\cdot a)-(a\cdot b\cdot c - a\cdot c\cdot b)\\
&+(c\cdot a\cdot b - a\cdot c\cdot b)-(b\cdot c\cdot a - b\cdot a\cdot c)=0
\end{aligned}$$

Logo a Identidade de Jacobi é válida e, portanto, $R^{(-)}$ é de Lie. □

1.2 ÁLGEBRA LIVRE E ÁLGEBRA DE GRASSMANN

Definiremos a seguir o conceito de subálgebra gerada por um conjunto.

Definição 1.2.1. Dado um subconjunto $X \neq \emptyset$ de uma álgebra A, definimos a subálgebra de A gerada por X como sendo a interseção de todas as subálgebras de A que contêm X.

Pode-se dizer que a subálgebra gerada por X é a menor subálgebra de A que contém o conjunto X. É fácil notar que ela é de fato uma álgebra, e podemos descrevê-la de uma forma mais precisa como abaixo.

Proposição 1.2.2. *Dado um subconjunto $X \neq \emptyset$ de uma álgebra associativa A, a subálgebra de A gerada por X é a álgebra formada por todos os elementos da forma*

$$\sum_i \alpha_i x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n},$$

onde $\alpha_i \in K$, $i = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$, $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n} \in X$ e $n \geq 0$.

Demonstração. Denote por R o subconjunto de A formado por todos os elementos da forma

$$\sum_i \alpha_i x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n},$$

onde $\alpha_i \in K$, $i = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$, $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n} \in X$ e $n \geq 0$. Note que toda subálgebra de A que contém X necessariamente contém R. Agora basta observar que R por si só também é uma subálgebra de A. □

Definido álgebra gerada, podemos agora seguir com a definição de álgebra livremente gerada.

Definição 1.2.3. Seja $\mathbb{D}$ uma classe de álgebras e seja $F \in \mathbb{D}$ uma álgebra gerada por um conjunto X. F será uma álgebra livre em $\mathbb{D}$, livremente gerada por X, se para toda álgebra $R \in \mathbb{D}$, toda aplicação f de X em R pode ser estendida para um homomorfismo ϕ de F em R.

A ideia de uma álgebra livre numa classe $\mathbb{D}$ é ser uma álgebra livre de propriedades, exceto aquelas propriedades que todas as álgebras na classe $\mathbb{D}$ possuem simultaneamente. Um exemplo de álgebra livre que trabalharemos muito é a álgebra associativa livre.

Exemplo 1.2.4. Seja X um conjunto infinito enumerável de letras $\{x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n, \ldots\}$. Definimos uma palavra como uma sequência finita de letras concatenadas, isto é, $x_{n_1}x_{n_2}\cdots x_{n_k}$, em que as letras podem se repetir porém letras diferentes não podem comutar. Definimos a álgebra $K\langle X\rangle$ como a álgebra cuja base são todas as palavras

$$x_{n_1}x_{n_2}\cdots x_{n_k}, x_{n_j} \in X,\ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

e com multiplicação definida por justaposição, ou seja,

$$(x_{n_1}x_{n_2}\cdots x_{n_k})(x_{m_1}x_{m_2}\cdots x_{m_l}) = x_{n_1}x_{n_2}\cdots x_{n_k}x_{m_1}x_{m_2}\cdots x_{m_l}.$$

Vale ressaltar que $K\langle X\rangle$ é unitária, assumindo que 1 é a palavra de comprimento zero.

Note que todo elemento de $K\langle X\rangle$ é escrito de maneira única como combinação linear de palavras e o produto entre quaisquer dois elementos de $K\langle X\rangle$ é obtido como no Exemplo 1.1.3. Vamos chamar os elementos $f \in K\langle X\rangle$ de polinômios

Proposição 1.2.5. *A álgebra $K\langle X\rangle$ é uma álgebra livre na classe de todas as álgebras associativas, livremente gerada pelo conjunto X.*

Demonstração. Seja R uma álgebra associativa e Φ uma aplicação de X em R. Considere a transformação linear $\phi : K\langle X\rangle \to R$ que age sobre a base da seguinte maneira:

$$\phi(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}) = \Phi(x_{i_1})\Phi(x_{i_2})\cdots\Phi(x_{i_n}).$$

Tal função é um homomorfismo de álgebras. De fato, temos que

$$\begin{aligned}
\phi((x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n})(x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m})) &= \phi(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m})\\
&= \Phi(x_{i_1})\Phi(x_{i_2})\cdots\Phi(x_{i_n})\Phi(x_{j_1})\Phi(x_{j_2})\cdots\Phi(x_{j_m})\\
&= \big(\Phi(x_{i_1})\Phi(x_{i_2})\cdots\Phi(x_{i_n})\big)\big(\Phi(x_{j_1})\Phi(x_{j_2})\cdots\Phi(x_{j_m})\big)\\
&= \phi(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n})\phi(x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}).
\end{aligned}$$

Além disto, $\phi(x_i) = \Phi(x_i)$ para todo $x_i \in X$, como era o desejado. □

Definição 1.2.6. Dada uma palavra $p = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$ definimos o grau de p em relação a x_i como:

$$\deg_{x_i} p \ = \ (\text{número de vezes que } x_i \text{ aparece em } p).$$

Denotaremos por $K\langle X\rangle^{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}$ o subespaço vetorial de $K\langle X\rangle$ gerado pelas palavras que possuem grau α_i na letra x_i para todo $1 \leq i \leq n$ e grau zero nas demais letras.

Definição 1.2.7. Se $f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X\rangle^{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}$, dizemos que f é multi-homogêneo com multigrau $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Se $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 1$, denotaremos por P_n o espaço vetorial $K\langle X\rangle^{(1,\dots,1)}$, e se $f \in P_n$ dizemos que f é multilinear.

Note que $f(x_1, \dots, x_n)$ é multilinear se, e somente se, existem $\beta_\sigma \in K$ tais que

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \beta_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)},$$

onde S_n é o grupo simétrico de grau n. Além disto, se substituirmos uma de suas letras por uma combinação linear de outras teremos uma combinação linear de polinômios, isto é, dado $\alpha, \beta \in K$

$$f(x_1, x_2, \dots, \alpha x_j' + \beta x_j'', \dots, x_n) = \alpha f(x_1, x_2, \dots, x_j', \dots, x_n) + \beta f(x_1, x_2, \dots, x_j'', \dots, x_n).$$

Definição 1.2.8. Denote por P o conjunto das palavras de $K\langle X\rangle$. Dado um polinômio $f \in K\langle X\rangle$,

$$f = \sum_{p \in P} \alpha_p p,$$

onde $\alpha_p \in K$, definimos o grau de f na variável x_i por

$$\deg_{x_i} f = \max\{\deg_{x_i} p \mid p \in P \text{ e } \alpha_p \neq 0\}.$$

Veremos agora uma álgebra que será um objeto central de nossos estudos, a álgebra de Grassmann.

Exemplo 1.2.9. Seja K um corpo de característica *char* $K \neq 2$. Dado $X = \{x_1, x_2, \dots\}$, denote por J o ideal de $K\langle X\rangle$ gerado pelos polinômios

$$x_i x_j + x_j x_i,$$

onde $i, j \geq 1$. A álgebra quociente $E = K\langle X\rangle / J$ é chamada de álgebra de Grassmann. Denotando $e_i = x_i + J$ note que o conjunto $\{e_1, e_2, \dots\}$ gera a álgebra E e valem as relações:

$$e_i e_j = -e_j e_i \;\text{ e }\; e_i^2 = 0$$

para todos i, j.

Uma propriedade importante da álgebra de Grassmann é que se uma palavra possui um número par de letras e_i's então ela comutará com qualquer outra palavra, e se ela possui um número ímpar de letras então ela anticomuta com qualquer outra palavra com um número ímpar de letras. De fato para transferir uma letra de um lado de uma palavra de tamanho k para o outro serão necessárias k permutações, portanto para transferir uma palavra de tamanho l de um lado ao outro de uma palavra de tamanho k serão necessárias kl permutações e, portanto kl mudanças de sinal:

$$e_{i_1} \cdots e_{i_k} e_{j_1} \cdots e_{j_l} = (-1)^{kl} e_{j_1} \cdots e_{j_l} e_{i_1} \cdots e_{i_k}.$$

Desta forma, se k ou l for par, kl também será e teremos um número par de mudanças de sinal, resultando no mesmo sinal do começo, porém se k e l forem ímpares então kl também será e acabaremos com o sinal invertido. No geral, teremos que

$$e_{\sigma(1)} e_{\sigma(2)} \cdots e_{\sigma(n)} = (-1)^{\sigma} e_1 e_2 \cdots e_n,$$

onde $\sigma \in S_n$ e $(-1)^{\sigma}$ é o sinal da permutação.

Pelo processo usado anteriormente, toda palavra nas letras (geradores) e_i's da álgebra de Grassmann pode ser escrita como

$$e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_n} \text{ ou } - e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_n},$$

com $i_1 < i_2 < ... < i_n$. De fato, não podemos ter um $i_k = i_{k+1}$, pois neste caso teríamos um $e_{i_k}^2$ no meio da palavra e então ela seria nula. Desta forma, temos que as palavras da forma

$$e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_n}, \ i_1 < i_2 < ... < i_n, \ n \geq 0,$$

formam uma base da álgebra de Grassmann.

2 PI-ÁLGEBRAS

Neste capítulo, K denotará um corpo e todas as álgebras serão associativas unitárias. O objetivo aqui é definir e dar exemplos de PI-álgebras. Além disso, falaremos um pouco de T-ideal e suas propriedades.

2.1 DEFINIÇÃO E EXEMPLOS.

Os objetos centrais do nosso estudo são as PI-álgebras. Começamos com a sua definição.

Definição 2.1.1. Sejam $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K\langle X\rangle$ e R uma álgebra. Dizemos que f é uma identidade polinomial de R se

$$f(r_1, r_2, \dots, r_n) = 0 \text{ para todos } r_1, r_2, \dots, r_n \in R.$$

Denotamos por $T(R)$ o conjunto das identidades polinomiais de R. Se $T(R) \neq \{0\}$ dizemos que R é uma PI-álgebra.

Um exemplo básico de identidade polinomial e de PI-álgebra é:

Exemplo 2.1.2. Dada uma álgebra R comutativa, temos que:

$$[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$$

é uma identidade polinomial de R. Logo, toda álgebra comutativa é uma PI-álgebra.

Proposição 2.1.3. *Seja $f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X\rangle$ um polinômio multilinear e seja A uma álgebra com base β. Então $f(x_1, \dots, x_n) \in T(A)$ se, e somente se,*

$$f(a_1, \dots, a_n) = 0$$

para todos $a_1, \dots, a_n \in \beta$.

Demonstração. Se $f(x_1, \dots, x_n) \in T(A)$, então por definição temos $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ para todos $a_1, \dots, a_n \in \beta$.

Para a recíproca, vamos supor que $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ para todos $a_1, \dots, a_n \in \beta$, onde β é uma base da álgebra A. Sejam $r_1, \dots, r_n \in A$. Como f é multilinear e r_k é combinação linear de elementos da base β, segue que $f(r_1, \dots, r_k, \dots, r_n)$ será uma combinação linear de elementos da forma $f(r_1, \dots, a_k, \dots, r_n)$ onde $a_k \in \beta$. Desta forma, se repetirmos o processo para todas as n variáveis de f, teremos que $f(r_1, \dots, r_n)$ será uma combinação linear de elementos da forma $f(a_1, \dots, a_n)$, onde $a_1, \dots, a_n \in \beta$. Porém, pela hipótese, $f(a_1, \dots, a_n) = 0$, implicando assim em $f(r_1, \dots, r_n) = 0$ para todos $r_1, \dots, r_n \in A$ e $f \in T(A)$. $\square$

Mostraremos agora que a álgebra de Grassmann é uma PI-álgebra.

Exemplo 2.1.4. O polinômio

$$[[x_1, x_2], x_3],$$

é uma identidade polinomial da álgebra de Grassmann.

Demonstração. Por definição este polinômio é multilinear, portanto precisamos apenas avaliar o polinômio na base

$$\beta = \{e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_n} \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_n \text{ e } n \geq 0\}$$

de E. Sejam $r_1, r_2, r_3 \in \beta$. Se r_1 ou r_2 tem comprimento par, então r_1 e r_2 comutam. Neste caso, $[r_1, r_2] = 0$ e então

$$[[r_1, r_2], r_3] = [0, r_3] = 0.$$

Porém, se r_1 e r_2 tiverem comprimento ímpar, então $r_1 r_2 = -r_2 r_1$, $r_1 r_2$ terá comprimento par e, portanto,

$$[[r_1, r_2], r_3] = [2r_1 r_2, r_3] = 2[r_1 r_2, r_3] = 0.$$

Completamos a demonstração. □

Podemos definir o polinômio anterior como o comutador de comprimento 3 e escrevê-lo da forma $[x_1, x_2, x_3]$. Indutivamente podemos definir o polinômio comutador de comprimento $n \geq 2$ como abaixo .

Definição 2.1.5. O polinômio comutador de comprimento 2 é definido como o polinômio comutador

$$[x_1, x_2] = x_1 x_2 - x_2 x_1.$$

O polinômio comutador de comprimento $n \geq 3$ é definido indutivamente como o polinômio

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n] = [[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}], x_n].$$

De um modo geral, todo polinômio da forma $[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}]$ é chamado de comutador de comprimento n.

Saindo um pouco dos polinômios comutadores temos que outro polinômio importante é o standard de grau n, definido por:

$$St_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)}.$$

Uma propriedade importante do polinômio $St_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é que ele se anulará se trocarmos duas das suas variáveis por uma mesma variável, isto é,

$$St_n(x_1, \dots, x_t, \dots, x_t, \dots, x_n) = 0.$$

Para provar isso, basta notar que $St_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é a soma de $n!/2$ elementos da forma

$$(-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(i)} \cdots x_{\sigma(j)} \cdots x_{\sigma(n)} - (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(j)} \cdots x_{\sigma(i)} \cdots x_{\sigma(n)}.$$

Note que a permutação $\gamma = (\sigma(i)\ \ \sigma(j))\sigma$ produziu o monômio do lado direito e $(-1)^\gamma = -(-1)^\sigma$. Logo, $St_n(x_1, \dots, x_t, \dots, x_t, \dots, x_n)$ é a soma de $n!/2$ elementos da forma

$$(-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_t \cdots x_t \cdots x_{\sigma(n)} - (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_t \cdots x_t \cdots x_{\sigma(n)} = 0.$$

Usando isto podemos provar a seguinte proposição:

Proposição 2.1.6. *Se R é uma álgebra de dimensão menor que n, então $St_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é uma identidade polinomial de R. Em particular, toda álgebra de dimensão finita é uma PI-álgebra.*

Demonstração. Seja $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ uma base de R, onde $k < n$. Como $St_n(x_1, \dots, x_n)$ é multilinear, precisamos provar apenas que

$$St_n(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = 0.$$

Como a dimensão de R é menor que n, pelo menos um elemento na lista $e_{i_1}, \dots, e_{i_n}$ estará repetido. Logo, pelo o que acabamos de ver, $St_n(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = 0$. □

Como consequência da proposição anterior, temos que $U_n(K)$ é uma PI-álgebra. No exemplo abaixo veremos uma outra identidade que é importante para tal álgebra.

Exemplo 2.1.7. A álgebra $U_n(K)$ das matrizes triangulares superiores $n \times n$ satisfaz a identidade

$$[x_1, x_2][x_3, x_4] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}].$$

Demonstração. Começamos provando que se $A,\ B \in U_n(K)$, então $[A, B]$ possui a diagonal nula. De fato, se $\{e_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ é a base canônica da álgebra $M_n(K)$,

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} e_{ij} \ \text{ e } \ B = \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij} e_{ij},$$

onde $\alpha_{ij} = \beta_{ij} = 0$ para todo $j < i$, temos que

$$A \cdot B = \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_{ij} e_{ij}, \quad \text{onde} \quad \gamma_{ij} = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{il}\beta_{lj}.$$

Desta forma, a diagonal principal será formada pelos elementos da forma $\gamma_{ii} = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{il}\beta_{li}$.

Tomando $i < l$ teremos $\beta_{li} = 0$ e $\alpha_{il}\beta_{li} = 0$. Da mesma forma, se $i > l$, então $\alpha_{il} = 0$ e $\alpha_{il}\beta_{li} = 0$. Portanto $\gamma_{ii} = \alpha_{ii}\beta_{ii}$. Analogamente, o elemento γ'_{ii} da diagonal principal de $B \cdot A$ será o elemento $\beta_{ii}\alpha_{ii}$.

Com isso temos que a diagonal principal de $[A, B] = A \cdot B - B \cdot A$ será formada pelos elementos da forma $\alpha_{ii}\beta_{ii} - \beta_{ii}\alpha_{ii} = 0$, ou seja, será nula.

Portanto, se $r_1, \ldots, r_{2n} \in U_n(K)$, então

$$[r_1, r_2][r_3, r_4] \cdots [r_{2n-1}, r_{2n}]$$

é uma multiplicação de n matrizes em $U_n(K)$ com diagonal principal nula. Basta então provarmos que tal multiplicação sempre resultará na matriz nula. Os elementos de $U_n(K)$ com diagonal principal nula são combinações lineares de elementos e_{ij} onde $1 \leq i < j \leq n$. Portanto, é suficiente provar que

$$e_{i_1 j_1} e_{i_2 j_2} \cdots e_{i_n j_n} = 0$$

onde $i_l < j_l$ para todo $l = 1, \ldots, n$. Se $e_{i_1 j_1} e_{i_2 j_2} \cdots e_{i_n j_n} \neq 0$, então

$$i_1 < j_1 = i_2 < j_2 = i_3 < j_3 \;\cdots\; i_n < j_n.$$

Assim, temos $n + 1$ elementos distintos $i_1, i_2, \ldots, i_n, j_n$ em $\{1, \ldots, n\}$, o que é um absurdo. □

2.2 T-IDEAIS, VARIEDADES E ÁLGEBRAS RELATIVAMENTE LIVRES.

Dada uma álgebra R, relembramos que $T(R)$ é o conjunto de todas as identidades polinomiais de R. Como motivação para a próxima definição veremos algumas propriedades que $T(R)$ possui.

Se u_1 e u_2 são polinômios quaisquer e se $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T(R)$, então $u_1 f u_2 \in T(R)$. Portanto $T(R)$ é um ideal (bilateral) de $K\langle X\rangle$. Além disto, se $g_1, g_2, \ldots, g_n$ são polinômios quaisquer, temos que $f(g_1, g_2, \ldots, g_n) \in T(R)$. Podemos interpretar esta última informação da seguinte maneira: considere o endomorfismo φ de $K\langle X\rangle$ tal que

$$\varphi(x_1) = g_1, \ \ldots, \ \varphi(x_n) = g_n, \ \varphi(x_{n+1}) = 0, \ \varphi(x_{n+2}) = 0, \ \ldots$$

Ele existe, pois $K\langle X\rangle$ é a álgebra associativa livre. Além disso,

$$\varphi(f(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)) = f(g_1,\ g_2,\ \dots,\ g_n).$$

De um modo geral, para todo endomorfismo ψ de $K\langle X\rangle$ temos

$$\psi(f(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)) = f(\psi(x_1),\ \psi(x_2),\ \dots,\ \psi(x_n)),$$

mostrando que $T(R)$ é invariante por endomorfismos. Disso tiramos a definição de T-ideal.

Definição 2.2.1. Um ideal I de $K\langle X\rangle$ é chamado de T-ideal se ele é invariante por todos os endomorfismos de $K\langle X\rangle$, isto é, se $\psi(I) \subseteq I$ para todo endomorfismo ψ de $K\langle X\rangle$.

Antes da demonstração mostramos que se R é uma álgebra, então $T(R)$ é um T-ideal. Reciprocamente, se I é um T-ideal, então para a álgebra quociente $K\langle X\rangle/I$ temos $T(K\langle X\rangle/I) = I$. Ou seja, todo T-ideal é o conjunto das identidades polinomiais de alguma álgebra.

Sabemos que para cada álgebra existe um T-ideal, porém duas álgebras distintas podem formar o mesmo T-ideal. Do ponto de vista de identidades polinomiais classificamos tais álgebras por meio do conceito de variedade.

Definição 2.2.2. Dado $S \subset K\langle X\rangle$, $S \neq \emptyset$, a classe $\mathbb{D}$ de todas as álgebras R tais que f é uma identidade polinomial de R para toda $f \in S$ é chamada de variedade determinada por S.

Exemplo 2.2.3. A classe das álgebras comutativas é a variedade determinada por $\{[x_1, x_2]\}$.

Para falar de objetos livres em variedades precisamos do conceito abaixo:

Definição 2.2.4. Dado $S \subset K\langle X\rangle$, $S \neq \emptyset$, dizemos que a interseção de todos os T-ideais que contêm S é o T-ideal gerado por S. Denotamos ele por $\langle S\rangle^T$.

Note da definição que $\langle S\rangle^T$ é o menor T-ideal que contém S.

Teorema 2.2.5. *Se $S \subset K\langle X\rangle$, $S \neq \emptyset$, então $\langle S\rangle^T$ é o subespaço vetorial de $K\langle X\rangle$ gerado por todos os polinômios*

$$u_1 f(g_1, \dots, g_n)u_2,$$

onde $u_1, u_2, g_1, \dots, g_n \in K\langle X\rangle$ e $f(x_1, \dots, x_n) \in S$. Além disso, a álgebra quociente $K\langle X\rangle/\langle S\rangle^T$ é livre na variedade determinada por S, livremente gerada por $\overline{X} = \{\overline{x_1},\ \overline{x_2}, \dots\}$, onde $\overline{x} = x + \langle S\rangle^T$.

Demonstração. Denote por I o subespaço vetorial de $K\langle X\rangle$ gerado por todos os polinômios

$$u_1 f(g_1, \dots, g_n)u_2,$$

onde $u_1, u_2, g_1, \dots, g_n \in K\langle X\rangle$ e $f(x_1, \dots, x_n) \in S$. Temos que I é um ideal de $K\langle X\rangle$. Além disso, se ψ é um endomorfismo de $K\langle X\rangle$, então

$$\psi(u_1 f(g_1, \dots, g_n)u_2) = \psi(u_1)f(\psi(g_1), \dots, \psi(g_n))\psi(u_2),$$

onde $\psi(u_1), \psi(g_1), \dots, \psi(g_n), \psi(u_2) \in K\langle X\rangle$. Logo, I é um T-ideal que contém S. Como todo T-ideal que contém S também contém I, segue que $I = \langle S\rangle^T$.

Vamos provar que a álgebra $F = K\langle X\rangle/\langle S\rangle^T$ é uma álgebra livre, livremente gerada por $\overline{X} = \{\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots\}$, na variedade $\mathbb{D}$ determinada por S. Primeiro note que $F \in \mathbb{D}$, pois se $f(x_1, \dots, x_n) \in S$ e $\overline{g_1}, \dots, \overline{g_n} \in F$, então

$$f(\overline{g_1}, \dots, \overline{g_n}) = \overline{f(g_1, \dots, g_n)} = \overline{0},$$

uma vez que $f(g_1, \dots, g_n) \in \langle S\rangle^T$. Agora, seja R uma álgebra de $\mathbb{D}$ e seja $\phi : \overline{X} \to R$ uma aplicação qualquer. Definimos uma aplicação $\theta : X \to R$ por $\theta(x_i) = \phi(\overline{x_i})$ para todo $x_i \in X$. Como $K\langle X\rangle$ é a álgebra associativa livre podemos estender θ para um homomorfismo $\theta^* : K\langle X\rangle \to R$. Como $T(R)$ é um T-ideal e $S \subseteq T(R)$, segue que $\langle S\rangle^T \subseteq T(R) \subseteq Ker\ \theta^*$. Logo, a função $\tilde{\theta} : F \to R$ dada por

$$\tilde{\theta}(\overline{h}) = \theta^*(h),\ \ h \in K\langle X\rangle,$$

é um homomorfismo e

$$\tilde{\theta}(\overline{x_i}) = \theta^*(x_i) = \theta(x_i) = \phi(\overline{x_i}),$$

como era o desejado. □

Definição 2.2.6. Dado $S \subset K\langle X\rangle$, $S \neq \emptyset$, se $\mathbb{D}$ é a variedade determinada por S, então a álgebra $K\langle X\rangle/\langle S\rangle^T$ é chamada de álgebra relativamente livre de $\mathbb{D}$.

3 GERADORES DE T-IDEAIS

Dada uma álgebra R, como por exemplo a de Grassmann ou triangular superior, desejamos descrever todas as suas identidades polinomiais. Mais especificamente, queremos encontrar um conjunto S tal que $\langle S \rangle^T = T(R)$. Neste capítulo veremos que é suficiente procurar por geradores especiais, que chamamos de próprios multi-homogêneos, quando o corpo é infinito. Além disso veremos o conceito de sequência de codimensões de um T-ideal. Ao longo de todo o capítulo todas as álgebras consideradas serão associativas com unidade.

3.1 IDENTIDADES POLINOMIAIS MULTI-HOMOGÊNEAS E MULTILINEARES

Para começar precisamos definir o que vem a ser uma equivalência entre dois conjuntos de identidades polinomiais.

Definição 3.1.1. Dois subconjuntos de $K\langle X \rangle$ são PI-equivalentes se eles geram o mesmo T-ideal.

Proposição 3.1.2. *Seja*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

onde $f_i \in K\langle X \rangle$ é homogêneo de grau i em x_1 para todo $0 \leq i \leq n$.

(i) Se o corpo K possui mais de n elementos, isto é, $|K| \geq n + 1$, então

$$\langle f \rangle^T = \langle f_0,\ f_1,\ \dots,\ f_n \rangle^T.$$

(ii) Se o corpo K é infinito, então $\{f\}$ é PI-equivalente a um conjunto de polinômios multi-homogêneos. Se o corpo K tem característica zero, então $\{f\}$ é PI-equivalente a um conjunto de polinômios multilineares.

Demonstração. (i) Sejam $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \dots,\ \alpha_n \in K$ distintos entre si. Pela definição de f temos que

$$f(\alpha_j x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n) = \sum_{i=0}^{n} f_i(\alpha_j x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n).$$

Como f_i é homogênea de grau i em x_1, obtemos

$$f(\alpha_j x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_j^i f_i(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$$

e, pela definição de T-ideal gerado, sabemos que $f(\alpha_j x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n) \in \langle f \rangle^T$ para todo $0 \leq j \leq n$. Listemos as $n+1$ igualdades acima possíveis:

$$
\begin{aligned}
f(\alpha_0 x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n) &= \sum_{i=0}^{n} \alpha_0^i f_i(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n),\\
f(\alpha_1 x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n) &= \sum_{i=0}^{n} \alpha_1^i f_i(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n),\\
&\vdots\\
f(\alpha_n x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n) &= \sum_{i=0}^{n} \alpha_n^i f_i(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n).
\end{aligned}
$$

Se denotarmos $f(\alpha_j x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n) = g_j$ teremos então que o sistema anterior pode ser reajustado e montado na forma matricial

$$
\begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & \dots & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.
$$

Pelo teorema de Vandermonde temos que o determinante da matriz

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & \dots & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^n \end{pmatrix}
$$

será

$$
det(A) = \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j) \neq 0.
$$

Portanto a matriz A é inversível e podemos reescrever o sistema da seguinte forma:

$$
A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.
$$

Desta forma, temos que os polinômios f_i podem ser escritos como combinação linear dos polinômios g_i. Logo,

$$\langle f_0,\ f_1,\ \dots,\ f_n\rangle^T \subseteq \langle g_0,\ g_1,\ \dots,\ g_n\rangle^T \subseteq \langle f\rangle^T \subseteq \langle f_0,\ f_1,\ \dots,\ f_n\rangle^T,$$

ou seja, $\langle f\rangle^T = \langle f_0, f_1, \dots, f_n\rangle^T$.

(ii) Suponha que K seja infinito. Escreva

$$f = \sum_{d=(d_1,\dots,d_n)\in D} f^{(d_1,\dots,d_n)},$$

onde $f^{(d_1,\dots,d_n)}$ é multi-homogêneo com multigrau $d = (d_1, \dots, d_n)$. Note que D é um conjunto finito de n-uplas. Aplicando sucessivamente o item (i) nas demais variáveis, teremos

$$\langle f\rangle^T = \langle f^{(d)} | d \in D\rangle^T.$$

Assim, a primeira parte do item (ii) está provada.

Para a segunda parte, basta provar que cada $\{f^{(d)}\}$ é PI-equivalente a um conjunto formado por um polinômio multilinear e fazer a união de tais conjuntos para finalizar a demonstração. Assim, sem perda de generalidade, assumiremos que $f = f(x_1, \dots, x_n)$ é multi-homogêneo com multigrau $(d_1, \dots, d_n)$. Faremos aqui o que chamamos de processo de linearização. Vamos supor que $d_1 > 1$. Neste caso, definimos um novo polinômio g da seguinte forma:

$$g(y_1,\ y_2,\ x_2,\ \dots,\ x_n) = f(y_1+y_2,\ x_2,\ \dots,\ x_n) - f(y_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n) - f(\ y_2,\ x_2,\ \dots,\ x_n).$$

Note que $\deg_{y_1}(g) < d_1$ e $\deg_{y_2}(g) < d_1$. De fato, quando aplicarmos a distributiva, os monômios de $f(y_1 + y_2,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$ com grau d_1 na variável y_1 serão exatamente os monômios que formam $f(y_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$, e os de grau d_1 na variável y_2 serão os de $f(y_2,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$, sendo ambos cancelados em g. Denote por $h = h(y_1, y_2, x_2, \dots, x_n)$ a componente multi-homogênea de $g(y_1,\ y_2,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$ com

$$\deg_{y_1} h = 1,\ \deg_{y_2} h = d_1 - 1,\ \deg_{x_2} h = d_2,\ \dots,\ \deg_{x_n} h = d_n.$$

Como o corpo é infinito temos que $h \in \langle g\rangle^T \subseteq \langle f\rangle^T$. Por outro lado,

$$h(x_1, x_1, x_2, \dots, x_n) = d_1 f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Como a característica do corpo é 0, segue que $d_1 \neq 0$ e, portanto, $f \in \langle h\rangle^T$. Assim, $\langle f\rangle^T = \langle h\rangle^T$. Agora repetimos o processo com o polinômio h e a variável y_2 se $d_1 - 1 > 1$. Após alguns passos repetindo o processo nos "novos" polinômios e nas variáveis com grau > 1, encontraremos um polinômio multilinear PI-equivalente a f.

$\square$

Veremos agora um exemplo de linearização de um monômio.

Exemplo 3.1.3. Dado o polinômio $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3x_1x_2x_2$, temos que

$$\begin{aligned} g(y_1, y_2, x_2, x_3) = & \; f(y_1 + y_2, x_2, x_3) - f(y_1, x_2, x_3) - f(y_2, x_2, x_3) \\ = & \; (y_1 + y_2)x_3(y_1 + y_2)x_2x_2 - y_1x_3y_1x_2x_2 - y_2x_3y_2x_2x_2 \\ = & \; y_1x_3y_1x_2x_2 + y_1x_3y_2x_2x_2 + y_2x_3y_1x_2x_2 + y_2x_3y_2x_2x_2 - y_1x_3y_1x_2x_2 \\ & -y_2x_3y_2x_2x_2 \\ = & \; y_1x_3y_2x_2x_2 + y_2x_3y_1x_2x_2. \end{aligned}$$

Repetindo o processo para g e x_2, isto é, fazendo

$$h(y_1, y_2, z_1, z_2, x_3) = g(y_1, y_2, z_1 + z_2, x_3) - g(y_1, y_2, z_1, x_3) - g(y_1, y_2, z_2, x_3)$$

obteremos a linearização h desejada dada por

$$h(y_1, y_2, z_1, z_2, x_3) = y_1x_3y_2z_1z_2 + y_1x_3y_2z_2z_1 + y_2x_3y_1z_1z_2 + y_2x_3y_1z_2z_1.$$

Note que $h \in \langle g\rangle^T \subseteq \langle f\rangle^T$. Além disso, se a característica do corpo é 0, então de

$$h(x_1, x_1, x_2, x_2, x_3) = (2)(2)f(x_1, x_2, x_3)$$

teremos $f \in \langle h\rangle^T$ e, consequentemente, $\langle f\rangle^T = \langle h\rangle^T$ com h sendo multilinear.

Provado isso seguimos definindo o conceito de codimensão.

Definição 3.1.4. Seja R uma PI-álgebra com T-ideal $T(R)$. A dimensão dos polinômios multilineares de grau n em $K\langle X\rangle$ módulo as identidades polinomiais de R é chamada de n-ésima codimensão do T-ideal $T(R)$ e é denotada por $c_n(R)$, isto é,

$$c_n(R) = \dim \left[\frac{P_n}{P_n \cap T(R)}\right].$$

Chamamos a sequência $(c_n(R))_{n\in\mathbb{N}}$ de sequência de codimensões de $T(R)$.

3.2 IDENTIDADES POLINOMIAIS PRÓPRIAS

Definição 3.2.1. Um polinômio $f \in K\langle X\rangle$ é chamado de próprio se for uma combinação linear de produtos de comutadores. Denotamos o conjunto de todos os polinômios próprios de $K\langle X\rangle$ por B, e o conjunto de todos os polinômios próprios multilineares de grau n por Γ_n, isto é,

$$\Gamma_n = B \cap P_n.$$

Por exemplo, os polinômios abaixo são próprios:

$$[x_1, x_2, x_1], \quad [x_1, x_2, x_1][x_5, x_2] + 2[x_3, x_1][x_1, x_4][x_5, x_2, x_2, x_2] + 7[x_4, x_1].$$

Por um abuso de linguagem, dizemos que os elementos de K também são polinômios próprios.

Proposição 3.2.2. *Seja $L(X)$ o subespaço vetorial de $K\langle X\rangle$ gerado por todas as variáveis de X e todos comutadores. Considere uma base ordenada β de $L(X)$ conforme abaixo*

$$x_1,\ x_2,\ \dots,\ [x_{i_1},\ x_{i_2}],\ [x_{j_1},\ x_{j_2}],\ \dots,\ [x_{k_1},\ x_{k_2},\ x_{k_3}],\ [x_{l_1},\ x_{l_2},\ x_{l_3}], \dots .$$

Então o espaço vetorial $K\langle X\rangle$ possui uma base β' formada por elementos do tipo

$$x_1^{a_1}\ \cdots\ x_m^{a_m}\ [x_{i_1},\ x_{i_2}]^{b_1}\ [x_{j_1},\ x_{j_2}]^{b_2}\ \cdots\ [x_{t_1},\ \dots,\ x_{t_p}]^{c},$$

onde $a_1, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, c \geq 0$ e $m \geq 0$. Os elementos de β' com $a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0$ formam uma base de B.

Demonstração. Este resultado é consequência do famoso Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt. Para a demonstração ver o (DRENSKY, 2000, Proposição 4.3.3). □

Por exemplo, escreveremos o elemento $x_3x_2x_1$ como combinação linear dos elementos da base β' da proposição acima:

$$\begin{aligned}
x_3x_2x_1 &= x_3x_1x_2 + x_3[x_2, x_1]\\
&= x_1x_3x_2 + [x_3, x_1]x_2 + x_3[x_2, x_1]\\
&= x_1x_2x_3 + x_1[x_3, x_2] + x_2[x_3, x_1] + [x_3, x_1, x_2] + x_3[x_2, x_1]\\
&= x_1x_2x_3 + x_1[x_3, x_2] + x_2[x_3, x_1] + x_3[x_2, x_1] + [x_3, x_1, x_2].
\end{aligned}$$

Proposição 3.2.3. *Se R é uma PI-álgebra sobre um corpo K infinito, então $T(R)$ é gerado por seus elementos próprios multi-homogêneos. Se a característica de K é igual a zero, então $T(R)$ é gerado por seus elementos próprios multilineares.*

Demonstração. Para a demonstração, ver (DRENSKY, 2000, Proposição 4.3.3). □

Abaixo faremos um exemplo de como seria a demonstração do resultado acima.

Exemplo 3.2.4. Considere o polinômio

$$f(x_1, x_2) = x_1^3x_2[x_2, x_1][x_2, x_1, x_2] + x_1x_2^2[x_2, x_1, x_1, x_1, x_1, x_2].$$

Se K é infinito, provaremos que

$$\langle f\rangle^T = \big\langle\ [x_2, x_1][x_2, x_1, x_2],\ \ [x_2, x_1, x_1, x_1, x_1, x_2]\ \big\rangle^T.$$

Demonstração. Por definição, $f(x_1+1, x_2) \in \langle f \rangle^T$, ou seja,

$$f(x_1+1, x_2) = (x_1+1)^3 x_2[x_2, x_1][x_2, x_1, x_2] + (x_1+1)x_2^2[x_2, x_1, x_1, x_1, x_1, x_2] \in \langle f \rangle^T.$$

Note que na igualdade acima, usamos o fato que quando um dos elementos de um comutador for igual a 1, então o comutador se anulará. Fazendo a distributiva teremos

$$\begin{aligned} &x_1^3 x_2[x_2, x_1][x_2, x_1, x_2] + 3x_1^2 x_2[x_2, x_1][x_2, x_1, x_2] \\ &+3x_1 x_2[x_2, x_1][x_2, x_1, x_2] + x_2[x_2, x_1][x_2, x_1, x_2] \\ &+x_1 x_2^2[x_2, x_1, x_1, x_1, x_1, x_2] + x_2^2[x_2, x_1, x_1, x_1, x_1, x_2] \in \langle f \rangle^T. \end{aligned}$$

Como K é infinito temos que a componente multi-homogênea

$$g(x_1, x_2) = x_2[x_2, x_1][x_2, x_1, x_2] \in \langle f \rangle^T.$$

Fazendo $g(x_1, x_2+1)$ teremos

$$(x_2+1)[x_2, x_1][x_2, x_1, x_2] \in \langle f \rangle^T,$$

e, pela distributiva,

$$x_2[x_2, x_1][x_2, x_1, x_2] + [x_2, x_1][x_2, x_1, x_2] \in \langle f \rangle^T.$$

Como K é infinito temos que a componente multi-homogênea $[x_2, x_1][x_2, x_1, x_2] \in \langle f \rangle^T$. Em particular,

$$f(x_1, x_2) - x_1^3 x_2[x_2, x_1][x_2, x_1, x_2] = x_1 x_2^2[x_2, x_1, x_1, x_1, x_1, x_2] \in \langle f \rangle^T.$$

Agora usamos o mesmo argumento em $x_1 x_2^2[x_2, x_1, x_1, x_1, x_1, x_2]$ para concluir que

$$[x_2, x_1, x_1, x_1, x_1, x_2] \in \langle f \rangle^T.$$

Note que provamos

$$\langle f \rangle^T \supseteq \langle\, [x_2, x_1][x_2, x_1, x_2],\ \ [x_2, x_1, x_1, x_1, x_1, x_2]\, \rangle^T.$$

A outra inclusão $\subseteq$ é óbvia. $\square$

De forma análoga a como definimos codimensão na Definição 3.1.4, podemos definir codimensão própria.

Definição 3.2.5. Dado o espaço vetorial

$$\Gamma_m(R) = \left[\frac{\Gamma_m}{\Gamma_m \cap T(R)}\right],$$

definimos a n-ésima codimensão própria de $T(R)$ por

$$\gamma_m = \dim(\Gamma_m(R)).$$

Chamamos a sequência $(\gamma_m(R))_{m\in\mathbb{N}}$ de sequência de codimensões próprias de $T(R)$. Pode ser provado que

$$c_n(R) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \gamma_k(R),$$

quando o corpo K é infinito. Para mais detalhes ver (DRENSKY, 2000, Teorema 4.3.12).

4 IDENTIDADES POLINOMIAIS DE DUAS IMPORTANTES ÁLGEBRAS

O objetivo deste capítulo é descrever um conjunto gerador do T-ideal das identidades polinomiais das álgebras de Grassmann e das matrizes triangulares superiores 2×2 quando o corpo é infinito.

4.1 IDENTIDADES POLINOMIAIS DA ÁLGEBRA DE GRASSMANN

Antes de provarmos o próximo teorema, que é um dos principais resultados deste trabalho, precisamos do seguinte lema e de uma proposição.

Lema 4.1.1. *Seja $G = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$ o T-ideal de $K\langle X \rangle$ gerado por $[x_1, x_2, x_3]$, onde K é infinito de característica diferente de 2. Então os polinômios*

$$[x_1, x_2][x_2, x_3] \text{ e } [x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_3][x_2, x_4]$$

pertencem a G.

Demonstração. Antes de começar precisamos provar a seguinte propriedade do produto comutador:

$$[z_1, z_2z_3] = z_2[z_1, z_3] + [z_1, z_2]z_3.$$

Para provarmos isto basta expandirmos o lado direito da igualdade acima:

$$\begin{aligned} z_2[z_1, z_3] + [z_1, z_2]z_3 &= z_2(z_1z_3 - z_3z_1) + (z_1z_2 - z_2z_1)z_3 \\ &= z_2z_1z_3 - z_2z_3z_1 + z_1z_2z_3 - z_2z_1z_3 \\ &= z_1(z_2z_3) - (z_2z_3)z_1 \\ &= [z_1, z_2z_3]. \end{aligned}$$

De maneira semelhante teremos

$$[z_1z_2, z_3] = z_1[z_2, z_3] + [z_1, z_3]z_2,$$

Com isso podemos seguir com a demonstração.

Como $[[x_1, x_2], x_3] \in G$ temos que $[[x_1, x_2x_2], x_3] \in G$ pois apenas substituímos uma das variáveis por um polinômio. Desta forma temos que, aplicando a propriedade anterior,

$$\begin{aligned} [[x_1, x_2x_2], x_3] &= [([x_1, x_2]x_2 + x_2[x_1, x_2]), x_3] \\ &= [([x_1, x_2]x_2), x_3] + [(x_2[x_1, x_2]), x_3]. \end{aligned}$$

Novamente pela mesma propriedade temos que

$$\begin{aligned}[([x_1,x_2]x_2),x_3]+[(x_2[x_1,x_2]),x_3] =&([x_1,x_2][x_2,x_3]+[[x_1,x_2],x_3]x_2)\\ &+(x_2[[x_1,x_2],x_3]+[x_2,x_3][x_1,x_2]).\end{aligned}$$

Sabemos, porém, que $[[x_1,x_2],x_3]x_2$ e $x_2[[x_1,x_2],x_3]$ estão em G. Logo,

$$([x_1,x_2][x_2,x_3]+[x_2,x_3][x_1,x_2])\in G.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}[x_1,x_2][x_2,x_3]+[x_2,x_3][x_1,x_2] =&[x_1,x_2][x_2,x_3]+([x_1,x_2][x_2,x_3]+[[x_2,x_3],[x_1,x_2]])\\ =&2[x_1,x_2][x_2,x_3]+[x_2,x_3,[x_1,x_2]].\end{aligned}$$

Novamente temos que $[x_2,x_3,[x_1,x_2]]\in G$ e, portanto, $[x_1,x_2][x_2,x_3]\in G$.

Para provarmos que $[x_1,x_2][x_3,x_4]+[x_1,x_3][x_2,x_4]\in G$ basta usarmos o processo de linearização no polinômio $[x_1,x_2][x_2,x_3]$ e chegaremos exatamente no polinômio desejado. $\square$

Proposição 4.1.2. *Sejam $U\subseteq V$ dois subespaços vetoriais de um K-espaço vetorial W. Suponha que β é um subconjunto de W*

$$\overline{\beta}=\{\overline{f}=f+U\mid f\in\beta\}$$

gera o espaço vetorial quociente W/U. Se

$$\overline{\overline{\beta}}=\left\{\overline{\overline{f}}=f+V\mid f\in\beta\right\}$$

é linearmente independente em W/V, então $U=V$ e $\overline{\overline{\beta}}$ é base de W/V.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $U\neq V$. Então existe $v\in V$ tal que $v\notin U$ e, desta forma, temos que $\overline{v}\in W/U$ não será a classe nula em W/U. Assim, existem $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n\in K$ não todos nulos e $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n\in\beta$ tais que

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overline{f_i}=\overline{v}.$$

Como W/U é um espaço vetorial, temos que

$$\overline{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i}=\overline{v}\Rightarrow\overline{v}-\overline{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i}=\overline{0}\Rightarrow v-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i\in U.$$

No entanto, como $U \subseteq V$, temos que

$$v - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \in V \Rightarrow \overline{\overline{v}} - \overline{\overline{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i}} = \overline{\overline{0}} \Rightarrow \overline{\overline{v}} = \overline{\overline{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i}}.$$

Mas como $v \in V$ temos que $\overline{\overline{v}} = \overline{\overline{0}}$ e portanto

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\overline{f_i}} = \overline{\overline{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i}} = \overline{\overline{0}}.$$

Logo, $\overline{\overline{\beta}}$ é linearmente dependente em W/V, o que é um absurdo. $\square$

Teorema 4.1.3. *Seja K um corpo infinito de característica diferente de 2 e seja E a álgebra de Grassmann.*

(1) O T-ideal $T(E)$ é gerado por $[x_1,\ x_2,\ x_3]$, isto é,

$$T(E) = \langle [x_1,\ x_2,\ x_3] \rangle^T.$$

(2) As codimensões das identidades de E satisfazem

$$c_n(E) = 2^{n-1}.$$

Demonstração. (1) Seja $I = \langle [x_1,\ x_2,\ x_3] \rangle^T$. Claramente $I \subseteq T(E) \subseteq K\langle X \rangle$. Para provarmos o item (1) encontraremos um conjunto gerador de $K\langle X \rangle / I$ que é linearmente independente em $K\langle X \rangle / T(E)$ e, pela Proposição 4.1.2, teremos que $I = T(E)$.

Se $f \in K\langle X \rangle$, então pela Proposição 3.2.2,

$$f = \sum_{n,p} \alpha_{n,p} x_1^{n_1} \cdots x_m^{n_m} p,$$

onde $n = (n_1,\ \ldots,\ n_m)$, $\alpha_{n,p} \in K$ e p é próprio. Note que se em p tivermos um comutador de comprimento maior ou igual a 3 então $p \in I$. Logo, para encontrarmos um conjunto gerador de $K\langle X \rangle / I$ consideraremos que $p = 1$ ou p é um produto de comutadores de comprimento 2.

Do Lema 4.1.1 temos que se $\sigma \in S_{2t}$, então

$$[x_{\sigma(1)},\ x_{\sigma(2)}] \cdots [x_{\sigma(2t-1)},\ x_{\sigma(2t)}] + I = (-1)^{\sigma} [x_1,\ x_2] \cdots [x_{2t-1},\ x_{2t}] + I,$$

onde $\sigma \in S_{2t}$. Portanto podemos novamente restringir nossos p's de forma a analisar apenas os casos em que $p = [x_{i_1}, x_{i_2}] \cdots [x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}]$ onde $i_1 < i_2 < \ldots < i_{2t}$. Desta forma, seja β o conjunto dos polinômios

$$x_1^{n_1}\cdots x_m^{n_m}[x_{i_1},x_{i_2}]\cdots[x_{i_{2t-1}},x_{i_{2t}}]$$

com $i_1 < i_2 < ... < i_{2t}$. Pelo o que acabamos de provar, temos que o conjunto $\overline{\beta} = \beta + I$ gera o espaço vetorial $K\langle X\rangle/I$.

Seja $\sum\limits_{f\in\beta}\alpha_f\overline{\overline{f}} = \overline{\overline{0}}$ onde $\overline{\overline{f}} = f + T(E)$ e $\alpha_f \in K$ para todo $f \in \beta$. Então

$$\overline{\overline{\sum_{f\in\beta}\alpha_f f}} = \overline{\overline{0}} \Rightarrow \sum_{f\in\beta}\alpha_f f \in T(E).$$

Como K é infinito, podemos supor que $\sum\limits_{f\in\beta}\alpha_f f$ é multi-homogêneo e está em $T(E)$. Como $f \in \beta$ podemos escrever o somatório como

$$\sum_n \alpha_n x_1^{n_1}\cdots x_m^{n_m}[x_{i_1},x_{i_2}]\cdots[x_{i_{2t-1}},x_{i_{2t}}] = \sum_n x_1^{n_1}\cdots x_m^{n_m}(\alpha_n[x_{i_1},x_{i_2}]\cdots[x_{i_{2t-1}},x_{i_{2t}}]),$$

com $n = (n_1,\ n_2,\ ...,\ n_m)$, $i_1 < i_2 < ... < i_{2t}$ e $\alpha_n \in K$.

Usando a mesma técnica do Exemplo 3.2.4, temos que $\alpha_n[x_{i_1},x_{i_2}]\cdots[x_{i_{2t-1}},x_{i_{2t}}] \in T(E)$ para todos $x_{i_1},\ x_{i_2},...,x_{i_{2t}}$. Em particular, para os elementos $e_1,\ e_2,...,\ e_{2t}$ do conjunto gerador da álgebra de Grassmann temos

$$[e_i,\ e_j] = e_ie_j - e_je_i = e_ie_j + e_ie_j = 2e_ie_j,$$

e portanto

$$0 = \alpha_n[e_1,e_2]\cdots[e_{2t-1},e_{2t}] = \alpha_n 2^t e_1e_2\cdots e_{2t-1}e_{2t}.$$

Como a característica de K é diferente de 2 teremos que $\alpha_n = 0$ para todo n. Logo $\overline{\overline{\beta}} = \beta + T(E)$ é linearmente independente em $K\langle X\rangle/T(E)$ e, portanto, pela Proposição 4.1.2 temos que $T(E) = \langle[x_1,x_2,x_3]\rangle^T$.

(2) Da demonstração do item (1) podemos tirar que $\Gamma_n(E)$ é gerado por

$$[x_1,x_2]\cdots[x_{2k-1},x_{2k}],$$

quando $n = 2k$ e $\Gamma_n(E) = 0$ quando n for ímpar. Logo $\gamma_n(E) = 1$ para n par e $\gamma_n(E) = 0$ para n ímpar, ou seja

$$\gamma_n(E) = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n).$$

Logo,

$$c_n(E) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \gamma_k(R) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2}(1 + (-1)^k) = 2^{n-1}.$$

□

4.2 IDENTIDADES POLINOMIAIS DA ÁLGEBRA DAS MATRIZES TRIANGULARES SUPERIORES

Finalizamos este capítulo com o nosso segundo resultado principal.

Teorema 4.2.1. *Seja K um corpo infinito e seja $U_m(K)$ a álgebra das matrizes triangulares superiores $m \times m$. O T-ideal $T(U_m(K))$ é gerado por*

$$[x_1,\ x_2] \cdots [x_{2m-1},\ x_{2m}].$$

Demonstração. Faremos a demonstração apenas para o caso $m = 2$.

Seja $I = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle^T$ e denote por $B^{(m_1,\dots,m_n)}$ o subespaço de B formado pelos polinômios próprios multi-homogêneos de multigrau $(m_1, \dots, m_n)$. Como o corpo é infinito, é suficiente provar que

$$I \cap B^{(m_1,\dots,m_n)} = \left[T(U_2(K)) \cap B^{(m_1,\dots,m_n)}\right].$$

Já provamos no Exemplo 2.1.7 que o polinômio $[x_1, x_2][x_3, x_4]$ é uma identidade de $U_2(K)$. Logo,

$$I \cap B^{(m_1,\dots,m_n)} \subseteq \left[T(U_2(K)) \cap B^{(m_1,\dots,m_n)}\right].$$

Usaremos, novamente, a Proposição 4.1.2. Para isso precisamos encontrar um conjunto gerador de $B^{(m_1,\dots,m_n)}/(I \cap B^{(m_1,\dots,m_n)})$.

Sabemos da Proposição 3.2.2 que $B^{(m_1,\dots,m_n)}/(I \cap B^{(m_1,\dots,m_n)})$ é gerado por todos os comutadores da forma

$$\overline{[x_{i_1}, \dots, x_{i_n}]} = [x_{i_1}, \dots, x_{i_n}] + (I \cap B^{(m_1,\dots,m_n)}).$$

Para montarmos um "bom" conjunto gerador precisaremos da seguinte identidade:

$$\overline{[x_1, x_2, x_3, x_4]} = \overline{[x_1, x_2, x_4, x_3]}.$$

Para prová-la basta notar que

$$\overline{0} = \overline{[[x_3, x_4], [x_1, x_2]]} = \overline{[x_3, x_4, [x_1, x_2]]},$$

e pela identidade de Jacobi

$$\overline{0} = \overline{[x_3, x_4, [x_1, x_2]]} = -\overline{[x_4, [x_1, x_2], x_3]} - \overline{[[x_1, x_2], x_3, x_4]}.$$

Aplicando a anticomutatividade dos dois primeiros elementos do comutador temos

$$\overline{0} = \overline{[[x_1, x_2], x_4, x_3]} - \overline{[[x_1, x_2], x_3, x_4]},$$

ou seja,

$$\overline{[x_1, x_2, x_3, x_4]} = \overline{[x_1, x_2, x_4, x_3]},$$

como era o desejado. Usando esta identidade temos que

$$\overline{[y_1, y_2, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}]} = \overline{[y_1, y_2, x_1, \dots, x_n]}.$$

Agora, pela anticomutatividade e pela identidade de Jacobi, podemos mudar a ordem das três primeiras variáveis. Portanto, podemos reorganizar as variáveis de qualquer comutador, módulo $I \cap B^{(m_1, m_2, \dots, m_n)}$, para a forma

$$[x_i, \underbrace{x_1, x_1, \dots, x_1}_{m_1}, \dots, \underbrace{x_i, x_i, \dots, x_i}_{m_i - 1}, \dots, \underbrace{x_n, x_n, \dots, x_n}_{m_n}],$$

com $i = 2, \dots, n$. Seja β o conjunto dos polinômios desta forma. Pelo o que acabamos de provar, o conjunto $B^{(m_1, \dots, m_n)}/(I \cap B^{(m_1, \dots, m_n)})$ é gerado por $\overline{\beta} = \beta + (I \cap B^{(m_1, \dots, m_n)})$.

Queremos provar que $\overline{\overline{\beta}} = \beta + \left[T(U_2(K)) \cap B^{(m_1, \dots, m_n)}\right]$ é linearmente independente em

$$B^{(m_1, \dots, m_n)} / \left[T(U_2(K)) \cap B^{(m_1, \dots, m_n)}\right],$$

ou seja, queremos provar que se

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i [x_i, \underbrace{x_1, x_1, \dots, x_1}_{m_1}, \dots, \underbrace{x_i, x_i, \dots, x_i}_{m_i - 1}, \dots, \underbrace{x_n, x_n, \dots, x_n}_{m_n}] \in T(U_2(K)),$$

então $\alpha_i = 0$ para $i = 2, \dots, n$. Pois bem, suponha $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in T(U_2(K))$ como acima. Para um k fixo, se tomarmos $X_i = e_{11}$ para $i \neq k$, e $X_i = e_{11} + e_{12}$ para $i = k$, onde $e_{11},\ e_{12},\ e_{21},\ e_{22}$

são os elementos da base canônica de $M_2(K)$, teremos

$$
\begin{aligned}
0 =& f(X_1, X_2, \dots, X_n) \\
=& \sum_{i=2}^{n} \alpha_i [X_i, \underbrace{X_1, X_1, \dots, X_1}_{m_1}, \dots, \underbrace{X_i, X_i, \dots, X_i}_{m_i - 1}, \dots, \underbrace{X_n, X_n, \dots, X_n}_{m_n}] \\
=& \alpha_k [e_{11} + e_{12}, \underbrace{e_{11}, e_{11}, \dots, e_{11}}_{m_1}, \dots, \underbrace{e_{11} + e_{12}, e_{11} + e_{12}, \dots, e_{11} + e_{12}}_{m_k - 1}, \dots, \underbrace{e_{11}, e_{11}, \dots, e_{11}}_{m_n}] \\
=& -\alpha_k [e_{12}, \underbrace{e_{11}, e_{11}, \dots, e_{11}}_{m_1}, \dots, \underbrace{e_{11} + e_{12}, e_{11} + e_{12}, \dots, e_{11} + e_{12}}_{m_k - 1}, \dots, \underbrace{e_{11}, e_{11}, \dots, e_{11}}_{m_n}] \\
=& \pm \alpha_k [e_{12}, e_{11} + e_{12}, e_{11} + e_{12}, \dots, e_{11} + e_{12}, \dots, e_{11}, e_{11}, \dots, e_{11}] = \pm \alpha_k e_{12}.
\end{aligned}
$$

Logo, $\alpha_k = 0$ e, então, $\overline{\overline{\beta}}$ é linearmente independente em $B^{(m_1,\dots,m_n)} / \left[T(U_2(K)) \cap B^{(m_1,\dots,m_n)}\right]$. Pela Proposição 4.1.2, $I \cap B^{(m_1,\dots,m_n)} = T(U_2(K)) \cap B^{(m_1,\dots,m_n)}$ e, pela Proposição 3.2.3, $I = T(U_2(K))$. $\square$

5 IDENTIDADES POLINOMIAIS DA ÁLGEBRA DE MATRIZES

Em vários campos da matemática encontramos as matrizes sendo aplicadas, portanto é de se esperar que a álgebra de matrizes seja explorada nos estudos de PI-álgebras. Veremos neste capítulo um importante resultado sobre existência e minimalidade do grau das identidades polinomiais desta álgebra. Tal resultado possui várias demonstrações diferentes, estudaremos algumas e falaremos algo sobre as outras. O teorema original pode ser encontrado em (AMITSUR; LEVITZKI, 1950), porém veremos as demonstrações de (RAZMYSLOV, 1974) e (ROSSET, 1976). Antes, porém, veremos uma aplicação interessante da teoria de grafos na multiplicação de elementos da base canônica de $M_k(K)$.

5.1 GRAFOS E A MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

Veremos aqui uma interpretação da multiplicação dos elementos da base canônica de $M_n(K)$ em teoria dos grafos, a qual será útil para facilitar alguns cálculos. Tal interpretação pode ser encontrada em (DRENSKY, 2000) e com mais detalhes em (GONçALVES; SCHüTZER; TALPO, 2016).

Seja U um subconjunto da base canônica de $M_n(K)$. Definimos o grafo orientado Υ_U como o conjunto de vértices $V = \{1, 2, \dots, n\}$ e as arestas orientadas $E = \{(i, j) | e_{ij} \in U\}$. Note que relacionamos o elemento e_{ij} da base canônica com a "aresta" orientada que sai do vértice i e chega no vértice j.

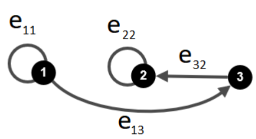
Relembramos que a multiplicação $e_{i_1j_1}e_{i_2j_2}$ será não nula se, e somente se, $j_1 = i_2$; neste caso, $e_{i_1j_1}e_{i_2j_2} = e_{i_1j_2}$. Logo, a multiplicação $e_{i_1j_1}e_{i_2j_2}$ será não nula se, e somente se, $(i_1, j_1), (i_2, j_2)$ formar um caminho no grafo Υ_U. Podemos generalizar este caso para uma multiplicação finita qualquer:

$$e_{i_1j_1} \cdots e_{i_kj_k} \neq 0 \iff (i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k) \text{ formam um caminho em } \Upsilon_U;$$

neste caso, a multiplicação resultará em $e_{i_1j_k}$, onde i_1 é o primeiro vértice do caminho e j_k o último.

A seguir vemos um exemplo de grafo Υ_U formado pelo subconjunto $U = \{e_{11}, e_{22}, e_{13}, e_{32}\}$ da base canônica de $M_3(K)$.

Figura 5.1 – Grafo Υ_U, $U = \{e_{11}, e_{22}, e_{13}, e_{32}\}$



Fonte: Elaborada pelo autor

Note que a multiplicação $e_{11}e_{13}e_{32}e_{22}$ será não nula pois forma um caminho no grafo Υ_U, ou seja, você pode percorrer as arestas (flechas e laços) com uma caneta, seguindo a orientação indicada, sem retirar a caneta do papel. Tal multiplicação resulta em e_{12}, porém a multiplicação $e_{11}e_{32}$ não formará um caminho, logo será nula.

5.2 O TEOREMA DE AMITSUR-LEVITZKI

Enunciaremos nesta seção o teorema de Amitsur-Levitzki, porém antes veremos dois lemas que ajudarão a demonstrar a importância de tal resultado.

Lema 5.2.1. *A álgebra de matrizes $M_k(K)$ não satisfaça uma identidade polinomial de grau menor que $2k$.*

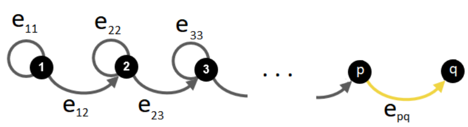
Demonstração. Suponha, por absurdo, que $M_k(K)$ satisfaz uma identidade polinomial de grau $m < 2k$. Por causa do processo de multi-linearização, ela satisfaz uma identidade multilinear de grau $n \leq m < 2k$, ou seja, uma identidade da forma:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}, \ \alpha_\sigma \in K.$$

A menos de uma troca de variáveis temos $\alpha_\epsilon \neq 0$, onde ϵ é a permutação identidade.

Usaremos aqui uma estratégia chamada de "argumento de escada", ou seja, substituiremos as variáveis de f conforme o grafo abaixo:

Figura 5.2 – É possível que ocorra $p = q$, neste caso os dois últimos vértices serão o mesmo.



Fonte: Elaborada pelo autor

Desta forma,

$$0 = f(e_{11}, e_{12}, e_{22}, e_{23}, \dots, e_{pq}) = \alpha_\epsilon e_{1q},$$

e portanto $\alpha_\epsilon = 0$, absurdo. □

Lema 5.2.2. *Se $f(x_1, x_2, \dots, x_{2k})$ é uma identidade polinomial multilinear de $M_k(K)$, então*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{2k}) = \alpha St_{2k}(x_1, x_2, \dots, x_{2k}),$$

para algum $\alpha \in K$.

Demonstração. Se $f(x_1, x_2, \dots, x_{2k})$ é uma identidade polinomial multilinear de $M_k(K)$, então

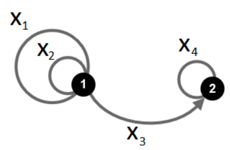
$$f(x_1, \dots, x_{2k}) = \sum_{\sigma \in S_{2k}} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(2k)}, \ \alpha_\sigma \in K.$$

Para facilitar o entendimento, faremos apenas o estudo de $M_2(K)$. Neste caso, escreva

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{\sigma \in S_4} \left(\alpha_{\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)\sigma(4)}\right) x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)}, \ \left(\alpha_{\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)\sigma(4)}\right) \in K.$$

Olhando para o grafo

Figura 5.3 – Grafo associado a $x_1 = e_{11}, x_2 = e_{11}, x_3 = e_{12}, x_4 = e_{22}$



Fonte: Elaborada pelo autor

podemos ver que

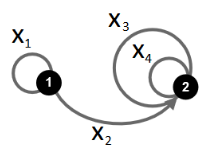
$$0 = f(e_{11}, e_{11}, e_{12}, e_{22}) = (\alpha_{1234} + \alpha_{2134})e_{12},$$

ou seja, $\alpha_{2134} = -\alpha_{1234}$, pois os únicos caminhos possíveis que passam por todas as arestas no grafo serão $x_1x_2x_3x_4$ e $x_2x_1x_3x_4$, logo estas serão as únicas parcelas da soma que não se anularão. A menos de uma mudança de variáveis, podemos usar o mesmo argumento para garantir que

$$\left(\alpha_{\sigma(2)\sigma(1)\sigma(3)\sigma(4)}\right) = -\left(\alpha_{\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)\sigma(4)}\right)$$

para toda permutação σ. Olhando para o grafo

Figura 5.4 – Grafo associado a $x_1 = e_{11}, x_2 = e_{12}, x_3 = e_{22}, x_4 = e_{22}$



Fonte: Elaborada pelo autor

podemos ver que

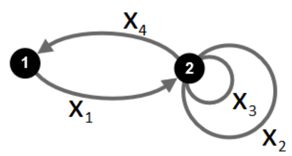
$$0 = f(e_{11}, e_{12}, e_{22}, e_{22}) = (\alpha_{1234} + \alpha_{1243})e_{12},$$

ou seja, $\alpha_{1243} = -\alpha_{1234}$. A menos de uma mudança de variáveis, podemos usar o mesmo argumento para garantir que

$$\left(\alpha_{\sigma(1)\sigma(2)\sigma(4)\sigma(3)}\right) = -\left(\alpha_{\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)\sigma(4)}\right)$$

para toda permutação σ. Olhando para o grafo

Figura 5.5 – Grafo associado a $x_1 = e_{12}, x_2 = e_{22}, x_3 = e_{22}, x_4 = e_{21}$



Fonte: Elaborada pelo autor

podemos ver que

$$0 = f(e_{12}, e_{22}, e_{22}, e_{21}) = (\alpha_{1234} + \alpha_{1324})e_{11} + \gamma e_{22},\ \gamma \in K.$$

Note que a segunda igualdade acima decorre do fato que os únicos caminhos que saem do vértice 1 e terminam no mesmo passando por todas as arestas serão $x_1x_2x_3x_4$ e $x_1x_3x_2x_4$. Como o conjunto $\{e_{11}, e_{22}\}$ é L.I. segue que $\alpha_{1234} + \alpha_{1324} = \gamma = 0$, ou seja, $\alpha_{1324} = -\alpha_{1234}$. A menos de uma mudança de variáveis, podemos usar o mesmo argumento para garantir que

$$\left(\alpha_{\sigma(1)\sigma(3)\sigma(2)\sigma(4)}\right) = -\left(\alpha_{\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)\sigma(4)}\right)$$

para toda permutação σ.

Provamos que

$$-\alpha_{abcd} = \alpha_{bacd} = \alpha_{acbd} = \alpha_{abdc}$$

sempre. Logo,

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\alpha_{1234})\, St_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

como era o desejado. $\square$

Esses dois lemas juntos nos dizem que se $M_k(K)$ satisfaz uma identidade polinomial multilinear de grau $2k$, então esta será a identidade de menor grau que $M_k(K)$ satisfaz e, além disto, ela será da forma $\alpha St_{2k}(x_1, x_2, \dots, x_{2k})$ para algum $\alpha \in K$. O Teorema de Amitsur-Levitzki nos garante que, de fato, $M_k(K)$ satisfaz tal identidade.

Teorema 5.2.3 (Amitsur-Levitzki)**.** *O polinômio standard $St_{2k}(x_1, \dots, x_{2k})$ é uma identidade polinomial para a álgebra $M_k(K)$.*

Existem várias demonstrações diferentes deste teorema, veremos neste capítulo duas delas, a de Razmyslov e a de Rosset.

5.3 A DEMONSTRAÇÃO DE RAZMYSLOV

Para a nossa primeira demonstração precisamos de mais alguns lemas:

Lema 5.3.1. *Se o teorema de Amitsur-Levitzki é válido para $M_k(\mathbb{Q})$, então ele é válido para $M_k(K)$ para qualquer corpo K.*

Demonstração. Se o teorema for válido para $M_k(\mathbb{Q})$, então ele será válido para $M_k(\mathbb{Z})$. Denotaremos por $\overline{e_{ij}}$ e $\overline{\overline{e_{ij}}}$ a matriz e_{ij} de $M_k(\mathbb{Z})$ e $M_k(K)$, respectivamente. Temos

$$St_{2k}\left(\overline{e_{i_1j_1}}, \dots, \overline{e_{i_{2k}j_{2k}}}\right) = 0.$$

Seja ϕ o homomorfismo de anéis definido por

$$\begin{aligned} \phi : M_k(\mathbb{Z}) &\rightarrow M_k(K), \\ \phi\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\alpha_{ij}\overline{e_{ij}}\right) &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\alpha_{ij}\overline{\overline{e_{ij}}}, \end{aligned}$$

onde $\alpha_{ij} \in \mathbb{Z}$. Temos que

$$St_{2k}\left(\overline{\overline{e_{i_1j_1}}}, \dots, \overline{\overline{e_{i_{2k}j_{2k}}}}\right) = St_{2k}\left(\phi(\overline{e_{i_1j_1}}), \dots, \phi(\overline{e_{i_{2k}j_{2k}}})\right) = \phi\left(St_{2k}\left(\overline{e_{i_1j_1}}, \dots, \overline{e_{i_{2k}j_{2k}}}\right)\right) = \phi(0) = 0.$$

Logo, como St_{2k} é um polinômio multilinear, segue que St_{2k} é uma identidade polinomial de $M_k(K)$. $\square$

Relembraremos aqui uma definição que usaremos para provar o próximo lema.

Definição 5.3.2. O q-ésimo polinômio simétrico elementar sobre as n variáveis comutativas $(x_1, \dots, x_n)$, denotado por $e_q(x_1, \dots, x_n)$, é o polinômio

$$e_q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_q}.$$

Lema 5.3.3. *Sejam $\xi_1, \ldots, \xi_k$ os autovalores da matriz $a \in M_k(K)$ e seja $e_q(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ o q-ésimo polinômio simétrico elementar sobre $\xi_1, \ldots, \xi_k$. Então*

$$a^k + \sum_{q=1}^{k}(-1)^q e_q(\xi_1, \ldots, \xi_k)a^{k-q} = 0,$$

$$tr(a^q) = \xi_1^q + \cdots + \xi_k^q.$$

Demonstração. Denote por $p(x)$ o polinômio característico da matriz $a \in M_k(K)$, e seja F o seu corpo de decomposição sobre K. Se $\xi_1, \ldots, \xi_k$ são os autovalores da matriz a, então

$$p(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2)\cdots(x - \xi_k).$$

Fazendo a distributiva,

$$p(x) = x^k + \left((-1)^1 x^{k-1} \sum_{1 \le j \le k} \xi_j\right) + \left((-1)^2 x^{k-2} \sum_{1 \le j < l \le k} \xi_j \xi_l\right) + \cdots + \left((-1)^k(\xi_1\xi_2\cdots\xi_k)\right),$$

ou seja,

$$p(x) = x^k + \sum_{q=1}^{k}(-1)^q e_q(\xi_1, \ldots, \xi_k)x^{k-q}.$$

Pelo teorema de Cayley-Hamilton temos que

$$p(a) = a^k + \sum_{q=1}^{k}(-1)^q e_q(\xi_1, \ldots, \xi_k)a^{k-q} = 0.$$

Agora, para provarmos a segunda igualdade do enunciado do lema, usaremos a seguinte propriedade da função traço:

$$tr(AB) = tr(BA).$$

Seja T a matriz invertível de $M_k(F)$ tal que TaT^{-1} é a forma de Jordan de a. Note que TaT^{-1} é uma matriz triangular superior cuja diagonal é formada por $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots, \xi_k$. Pela propriedade anterior temos que

$$tr(TaT^{-1}) = tr(T^{-1}Ta) = tr(a)$$

e, portanto, $tr(a) = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_k$. Como TaT^{-1} é uma matriz triangular superior, segue que $(TaT^{-1})^2$ também é triangular superior com diagonal $\xi_1^2,\ \xi_2^2,\ \ldots, \xi_k^2$. Logo,

$$tr(a^2) = tr(T^{-1}Ta^2) = tr(Ta^2T^{-1}) = tr((TaT^{-1})^2) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_k^2.$$

Seguindo esta lógica, teremos que

$$tr(a^q) = \xi_1^q + \cdots + \xi_k^q$$

para qualquer q natural. $\square$

Com isso podemos seguir com a primeira prova do teorema de Amitsur-Levitzki, a prova de Razmyslov.

A demonstração de Razmyslov. Faremos a demonstração para o caso 2×2, porém o caso geral é semelhante com apenas algumas contas a mais.

Pelo Lema 5.3.1, é suficiente provar o teorema para $K = \mathbb{Q}$. Seja $e_q(\xi_1, \dots, \xi_k)$ o q-ésimo polinômio simétrico elementar sobre $\xi_1, \dots, \xi_k$ e $p_q(\xi_1, \dots, \xi_k) = \xi_1^q + \cdots + \xi_k^q$. Na demonstração anterior mostramos que se $\xi_1, \dots, \xi_k$ são os autovalores de a, então $p_q(\xi_1, \dots, \xi_k) = tr(a^q)$. A identidade de Newton, que pode ser encontrada com mais detalhes em (MEAD, 1992), nos diz que

$$p_q - p_{q-1}e_1 + p_{q-2}e_2 + \cdots + (-1)^{q-1}p_1e_{q-1} + (-1)^q qe_q = 0.$$

Desta forma,

$$e_1 = p_1 \quad \text{e} \quad e_2 = \frac{1}{2}(p_1e_1 - p_2) = \frac{1}{2}\left(p_1^2 - p_2\right).$$

De um modo geral, conseguimos escrever e_q como um polinômio nas "variáveis" $p_1, \dots, p_q$ com coeficientes em $\mathbb{Q}$. Para mais informações ver (MACDONALD, 1998).

Para qualquer matriz $a \in M_2(\mathbb{Q})$ com autovalores ξ_1 e ξ_2, o Lema 5.3.3 nos diz que

$$a^2 - e_1(\xi_1, \xi_2)a + e_2(\xi_1, \xi_2)E = 0,$$

onde E é a matriz identidade. Logo, substituindo os e_i teremos

$$a^2 - p_1(\xi_1, \xi_2)a + \frac{1}{2}\left((p_1(\xi_1, \xi_2))^2 - p_2(\xi_1, \xi_2)\right)E = 0.$$

Novamente pelo Lema 5.3.3,

$$a^2 - tr(a)a + \frac{1}{2}\left((tr(a))^2 - tr(a^2)\right)E = 0.$$

Desta forma,

$$x^2 - tr(x)x + \frac{1}{2}\left((tr(x))^2 - tr(x^2)\right)E = 0$$

será uma identidade polinomial "traço" de $M_2(\mathbb{Q})$, ou seja, sempre que substituirmos x por uma matriz $a \in M_2(\mathbb{Q})$ a igualdade será satisfeita. Substituindo x por $y_1 + y_2$ na identidade traço e fazendo os cancelamentos adequados, isto é, linearizando a identidade traço, teremos que

$$\begin{aligned} &(y_1y_2 + y_2y_1) - (tr(y_1)y_2 + tr(y_2)y_1) + \\ \frac{1}{2}&\left((tr(y_1)tr(y_2) + tr(y_2)tr(y_1)) - tr(y_1y_2 + y_2y_1)\right) E = 0. \end{aligned}$$

Como $tr(y_1)tr(y_2) = tr(y_2)tr(y_1)$, $tr(y_1y_2 + y_2y_1) = tr(y_1y_2) + tr(y_2y_1)$ e $tr(y_1y_2) = tr(y_2y_1)$, segue que $M_2(\mathbb{Q})$ satisfaz a identidade

$$f(y_1, y_2) = (y_1y_2 + y_2y_1) - (tr(y_1)y_2 + tr(y_2)y_1) + (tr(y_1)tr(y_2) - tr(y_1y_2)) E = 0.$$

Se substituirmos y_1 por $x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}$, y_2 por $x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}$ e tomarmos a soma alternada em $\sigma \in S_4$ teremos:

$$0 = \sum_{\sigma \in S_4} (-1)^{\sigma} f(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 0 = &+ \sum_{\sigma \in S_4} (-1)^{\sigma} (x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)} + x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}) + \\ &- \sum_{\sigma \in S_4} (-1)^{\sigma} (tr(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)})x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)} + tr(x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)})x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}) + \\ &+ \sum_{\sigma \in S_4} (-1)^{\sigma} \left(tr(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)})tr(x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}) - tr(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)})\right) E. \end{aligned}$$

Em decorrência de repetições de somandos nas linhas 1 e 2, podemos reescrever a igualdade acima como

$$\begin{aligned} 0 = &+ 2\sum_{\sigma \in S_4} (-1)^{\sigma} (x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}) + \\ &- 2\sum_{\sigma \in S_4} (-1)^{\sigma} (tr(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)})x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}) + \\ &+ \sum_{\sigma \in S_4} (-1)^{\sigma} \left(tr(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)})tr(x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}) - tr(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)})\right) E. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Uma vez que

$$tr(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}) = tr(x_{\sigma(2)}x_{\sigma(1)}) \ \ , \ \ tr(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}) = tr(x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}x_{\sigma(1)})$$

e as permutações, dentro do traço, têm paridades diferentes, segue que as parcelas de (5.1) que possuem um traço se anularão. Logo,

$$0 = +2 \sum_{\sigma \in S_4} (-1)^{\sigma} (x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)}) = 2St_4(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Provamos que St_4 é uma identidade polinomial de $M_2(\mathbb{Q})$ e, portanto, St_4 é uma identidade polinomial de $M_2(K)$. $\square$

5.4 A DEMONSTRAÇÃO DE ROSSET

Para a segunda prova, esta por Rosset, precisamos de mais um lema:

Lema 5.4.1. *Seja C uma álgebra comutativa sobre $\mathbb{Q}$ e seja $a \in M_k(C)$. Se $tr(a^r) = 0$ para todo $r = 1, 2, \ldots, k$ então $a^k = 0$.*

Demonstração. Seja $a \in M_k(F)$, onde F é um corpo de característica 0. Assim como na demonstração de Razmyslov, o Lema 5.3.3 e a identidade de Newton fornecem

$$a^k = \sum_{q=1}^{k} \alpha_q a^{k-q}, \tag{5.2}$$

onde α_q é um polinômio com coeficientes racionais nas "variáveis" $tr(a^r)$, sendo $r = 1, 2, \ldots, k$. Com esta fórmula, se $tr(a^r) = 0$ para todo $r = 1, 2, \ldots, k$, então $\alpha_q = 0$ para todo q e, portanto, $a^k = 0$. Porém queremos provar isto para toda álgebra comutativa C sobre $\mathbb{Q}$. Dado um conjunto de variáveis Y, sabemos que a álgebra comutativa livre de polinômios $\mathbb{Q}[Y]$ pode ser mergulhada no seu corpo de frações F. Logo, a igualdade (5.2) também é válida para $a \in M_k(\mathbb{Q}[Y])$.

Considere agora uma álgebra comutativa qualquer C sobre $\mathbb{Q}$, e seja $c = (c_{ij})_{k \times k}$ uma matriz em $M_k(C)$. Considere o conjunto com k^2 variáveis $Y = \{y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{kk}\}$. Como $\mathbb{Q}[Y]$ é uma álgebra comutativa livre, existe um homomorfismo de $\mathbb{Q}$-álgebras $\phi : \mathbb{Q}[Y] \to C$ tal que $\phi(y_{ij}) = c_{ij}$ para todos i, j. Utilizando ϕ podemos construir um homomorfismo $\phi^* : M_k(\mathbb{Q}[Y]) \to M_k(C)$ da seguinte forma: dada $a \in M_k(\mathbb{Q}[Y])$ tal que

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix},$$

então

$$\phi^*(a) = \begin{pmatrix} \phi(a_{11}) & \phi(a_{12}) & \cdots & \phi(a_{1k}) \\ \phi(a_{21}) & \phi(a_{22}) & \cdots & \phi(a_{2k}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(a_{k1}) & \phi(a_{k2}) & \cdots & \phi(a_{kk}) \end{pmatrix}.$$

Note que,

$$tr((\phi^*(a))^r) = tr(\phi^*(a^r)) = \phi(tr(a^r)). \tag{5.3}$$

Assim, se $\phi^*(a) = c$, então

$$c^k = (\phi^*(a))^k = \phi^*(a^k) = \phi^*\left(\sum_{q=1}^{k} \alpha_q a^{k-q}\right) = \sum_{q=1}^{k} \phi^*(\alpha_q a^{k-q}) = \sum_{q=1}^{k} \phi(\alpha_q) c^{k-q},$$

onde na terceira igualdade usamos (5.2). Por (5.3), $\phi(\alpha_q)$ é um polinômio nas "variáveis" $tr(c^r)$, onde $r = 1, 2, \dots, k$. Logo, se $tr(c^r) = 0$ para todo $r = 1, 2, \dots, k$, então $c^k = 0$. □

A demonstração de Rosset. Novamente pelo Lema 5.3.1, é suficiente provar o teorema para $K = \mathbb{Q}$. Seja E a álgebra de Grassmann gerada por $e_1, e_2, \dots$, e seja E_0 o subespaço vetorial de E gerado pelos produtos $e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}$ onde k é par. Pela Seção 1.2, temos que E_0 é uma subálgebra comutativa de E. Sejam $r_1, \dots, r_{2k}$ matrizes em $M_k(\mathbb{Q})$ e defina

$$b = r_1 e_1 + \cdots + r_{2k} e_{2k}.$$

Note que b é uma matriz $k \times k$ com entradas na álgebra de Grassmann, que não é comutativa. Sabemos, da definição de álgebra de Grassmann, que $e_i e_j = -e_j e_i$. Logo, de

$$a = b^2 = \sum_{i=1}^{2k} \sum_{j=1}^{2k} r_i r_j e_i e_j$$

temos os seguintes comentários: quando $i > j$ vale $r_i r_j e_i e_j = -r_i r_j e_j e_i$, e quando $i = j$ vale $r_i r_j e_i e_j = 0$. Logo, podemos rearranjar o somatório da seguinte forma:

$$a = \sum_{1 \le i < j \le 2k} (r_i r_j - r_j r_i) e_i e_j.$$

Assim, a é uma matriz com entradas na álgebra comutativa E_0. Temos

$$a^q = b^{2q} = \sum r_{i_1} \cdots r_{i_{2q}} e_{i_1} \cdots e_{i_{2q}} = \sum_{i_1 < \cdots < i_{2q}} St_{2q}(r_{i_1}, \dots, r_{i_{2q}}) e_{i_1} \cdots e_{i_{2q}}$$

$$\text{e} \;\; tr(a^q) = \sum_{i_1<\cdots<i_{2q}} tr\left(St_{2q}(r_{i_1}, \ldots, r_{i_{2q}})\right) e_{i_1} \cdots e_{i_{2q}}.$$

Assim como na demonstração de Razmyslov, temos que $tr\left(St_{2q}(r_{i_1}, \ldots, r_{i_{2q}})\right) = 0$. Logo, $tr(a^q) = 0$ para todo $q = 1, \ldots, k$ e, pelo Lema 5.4.1, $a^k = 0$. Ou seja,

$$0 = a^k = \sum_{i_1<\cdots<i_{2k}} St_{2k}(r_{i_1}, \ldots, r_{i_{2k}}) e_{i_1} \cdots e_{i_{2k}},$$

porém, como temos apenas $2k$ possíveis valores de i_j, então

$$0 = St_{2k}(r_1, \ldots, r_{2k}) e_1 \cdots e_{2k}.$$

Como $e_1 \cdots e_{2k} \neq 0$ então

$$St_{2k}(r_1, \ldots, r_{2k}) = 0,$$

o que prova o teorema. $\square$

6 O TEOREMA DA CODIMENSÃO DE REGEV

Neste capítulo consideraremos que o corpo K é arbitrário. Nosso objetivo aqui é provar o Teorema de Regev sobre o crescimento exponencial da sequência de codimensão de uma PI-álgebra, tal teorema pode ser encontrado em (REGEV, 1972). Veremos a prova de (LATYSHEV, 1972) baseada no estudo de (DILWORTH, 1950) que é tida hoje em dia como a prova padrão de tal teorema. Além disso, provaremos que o produto tensorial de duas PI-álgebras é uma PI-álgebra.

6.1 CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS

Definiremos aqui o que são conjuntos parcialmente ordenados, daremos alguns exemplos e mostraremos uma importante técnica que será usada para provar um teorema mais a frente.

Definição 6.1.1. Um conjunto P com uma relação binária $\leq^*$ é chamado de parcialmente ordenado (POSET), e denotado por $(P, \leq^*)$, se para todos $a, b, c \in P$ valem:

(1) $a \leq^* a$ (reflexividade);

(2) $a \leq^* b$ e $b \leq^* a \to a = b$ (anti-simetria);

(3) $a \leq^* b$ e $b \leq^* c \to a \leq^* c$ (transitividade).

Chamamos a relação $\leq^*$ de relação de ordem parcial.

Se P é um POSET, dizemos que $a_1, a_2, \ldots, a_k \in P$ formam uma cadeia se

$$a_1 \leq^* a_2 \leq^* \cdots \leq^* a_k,$$

e formam uma anticadeia se $a_i \leq^* a_j$ não ocorre para nenhum $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ com $i \neq j$.

Vejamos alguns exemplos de conjuntos parcialmente ordenados. Um exemplo básico é o $\mathbb{R}^2$ com a relação a seguir.

Exemplo 6.1.2. Defina em $\mathbb{R}^2$ a relação $\leq_1$ em que

$$(a_1, a_2) \leq_1 (b_1, b_2) \text{ se, e somente se, } a_1 \leq b_1 \text{ e } a_2 = b_2,$$

onde $\leq$ é a relação usual de ordem nos reais. Então, $(\mathbb{R}^2, \leq_1)$ é um POSET. Note que as cadeias finitas deste conjunto serão formadas por elementos que estão numa mesma reta horizontal de $\mathbb{R}^2$, e as anticadeias serão compostas por elementos que não estão, dois a dois, numa mesma reta horizontal.

Veremos, agora, uma relação de ordem parcial importante tanto para as permutações quanto para os monômios.

Exemplo 6.1.3. Dado $n \geq 1$, seja $<_{lx}$ a relação binária em S_n definida por: $\sigma <_{lx} \tau$ se, e somente se, existe $0 \leq k \leq n-1$ tal que

$$\sigma(i) = \tau(i) \text{ se } 1 \leq i \leq k, \text{ e } \sigma(k+1) < \tau(k+1).$$

Agora defina $\sigma \leq_{lx} \tau$ se, e somente se, $\sigma = \tau$ ou $\sigma <_{lx} \tau$. Temos que $(S_n, \leq_{lx})$ é um conjunto parcialmente ordenado, cuja ordem é chamada de lexicográfica à esquerda. Provaremos que, de fato, trata-se de um POSET:

(1) Se $\sigma, \tau, \pi \in S_n$, $\sigma <_{lx} \tau$ e $\tau <_{lx} \pi$, então existem k_1 e k_2 tais que

$$\sigma(i) = \tau(i) \text{ se } i \leq k_1, \text{ e } \sigma(k_1+1) < \tau(k_1+1),$$

$$\tau(i) = \pi(i) \text{ se } i \leq k_2, \text{ e } \tau(k_2+1) < \pi(k_2+1).$$

Supondo $k_1 \leq k_2$, teremos

$$\sigma(i) = \tau(i) = \pi(i) \text{ se } i \leq k_1, \ \sigma(k_1+1) < \tau(k_1+1) \leq \pi(k_1+1),$$

e portanto $\sigma <_{lx} \pi$. Supondo $k_2 < k_1$, teremos

$$\sigma(i) = \tau(i) = \pi(i) \text{ se } i \leq k_2, \ \sigma(k_2+1) = \tau(k_2+1) < \pi(k_2+1),$$

e portanto $\sigma <_{lx} \pi$.

(2) Se $\sigma \leq_{lx} \tau$, $\tau \leq_{lx} \sigma$ e $\sigma \neq \tau$, então $\sigma <_{lx} \tau$, $\tau <_{lx} \sigma$ e, pelo item anterior, $\sigma <_{lx} \sigma$. Assim, existe um k tal que $\sigma(k+1) < \sigma(k+1)$, o que é um absurdo.

Note que a relação $\leq_{lx}$ induz uma relação nos monômios multilineares de P_n tornado-o um POSET, como segue:

$$x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)} \leq_{lx} x_{\tau(1)}x_{\tau(2)} \cdots x_{\tau(n)}$$

se, e somente se, os monômios são iguais ou existe $0 \leq k \leq n-1$ tal que

$$\sigma(i) = \tau(i) \text{ se } 1 \leq i \leq k, \text{ e } \sigma(k+1) < \tau(k+1).$$

Veremos agora uma técnica que, embora não receba este nome na literatura, achamos adequado chamá-la de *técnica de organização de bagunça*. Esta técnica nos ajudará a reduzir a bagunça existente na ordem das variáveis de um monômio e tem uma importante relação com a ordenação lexicográfica que será utilizada para demonstrar o Teorema 6.2.7.

Seja $h \in P_n$ um monômio dado por

$$h = h_0 x_{j_1} h_1 x_{j_2} h_2 \cdots h_{d-1} x_{j_d} h_d \text{ tal que } j_1 > j_2 > \cdots > j_d,$$

onde cada h_i é um monômio. Dizemos que $(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_d})$ é uma bagunça em h de tamanho d. Por exemplo, o monômio $x_1x_6x_5x_4x_2x_3$ tem, entre outras menores, as bagunças (x_6, x_5, x_4, x_2) e (x_6, x_5, x_4, x_3) de tamanho 4, porém não terá nenhuma de tamanho 5.

Suponha que R seja uma PI-álgebra que satisfaz a identidade polinomial

$$x_1x_2x_4x_3 - x_3x_1x_2x_4 - x_4x_3x_2x_1,$$

e denote $J = T(R)$. Então, no quociente R/J

$$x_1x_2x_4x_3 - x_3x_1x_2x_4 - x_4x_3x_2x_1 + J = 0 + J$$

e portanto

$$x_4x_3x_2x_1 + J = x_1x_2x_4x_3 - x_3x_1x_2x_4 + J. \tag{6.1}$$

Note que, por meio da identidade polinomial de R foi possível escrever, módulo J, um monômio com bagunça de tamanho 4 como uma combinação linear de monômios cujas bagunças têm tamanho < 4. Faremos mais um exemplo com o monômio $x_1x_6x_5x_4x_2x_3$, comentado no início do assunto. Podemos escrevê-lo como

$$x_1x_6x_5x_4x_2x_3 = x_1(x_6x_5(x_4x_2)x_3) = x_1y_4y_3y_2y_1,$$

onde $x_6 = y_4$, $x_5 = y_3$, $x_4x_2 = y_2$ e $x_3 = y_1$. Substituindo as variáveis de (6.1) por

$$x_4 \to y_4,\ x_3 \to y_3,\ x_2 \to y_2,\ x_1 \to y_1,$$

obtemos

$$\begin{aligned} x_1x_6x_5x_4x_2x_3 + J &= x_1y_4y_3y_2y_1 + J \\ &= x_1(y_1y_2y_4y_3 - y_3y_1y_2y_4) + J \\ &= x_1x_3x_4x_2x_6x_5 - x_1x_5x_3x_4x_2x_6 + J \end{aligned}$$

Logo, $x_1x_6x_5x_4x_2x_3$ é, módulo J, uma combinação linear de monômios com "menos" bagunça, isto é, com bagunças de tamanho < 4.

Podemos generalizar este processo da seguinte forma:

Exemplo 6.1.4 (Técnica de organização de bagunça)**.** Seja

$$f = \sum_{\sigma \in S_d} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(d)}$$

uma identidade polinomial de R, onde $\alpha_\sigma \neq 0$ para algum $\sigma \in S_d$. A menos de uma mudança de variáveis, podemos supor, sem perda de generalidade, $\alpha_\delta \neq 0$ onde

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & d-1 & d \\ d & d-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$x_d x_{d-1} \cdots x_2 x_1 + J = \sum_{\sigma \in S_d,\ \sigma \neq \delta} \alpha^*_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(d)} + J, \tag{6.2}$$

onde $\alpha^*_\sigma = -\dfrac{\alpha_\sigma}{\alpha_\delta}$ e $J = T(R)$.

Seja $h = x_{\pi(1)} x_{\pi(2)} \cdots x_{\pi(n)} \in P_n$ um monômio com uma bagunça de tamanho d, isto é,

$$h = h_0 x_{\pi(i_1)} h_1 x_{\pi(i_2)} h_2 \cdots x_{\pi(i_d)} h_d,$$

onde $i_1 < i_2 < \cdots < i_d$ e $\pi(i_1) > \pi(i_2) > \cdots > \pi(i_d)$. Tomando

$$y_d = x_{\pi(i_1)} h_1,\ y_{d-1} = x_{\pi(i_2)} h_2,\ \ldots,\ y_1 = x_{\pi(i_d)} h_d,$$

teremos que $h = h_0 y_d y_{d-1} \cdots y_1$. Substituindo as variáveis de (6.2) por

$$x_d \to y_d,\ x_{d-1} \to y_{d-1},\ \ldots\ ,\ x_2 \to y_2,\ x_1 \to y_1$$

teremos

$$h + J = h_0 y_d y_{d-1} \cdots y_1 + J = \sum_{\sigma \in S_d,\ \sigma \neq \delta} \alpha^*_\sigma h_0 y_{\sigma(1)} y_{\sigma(2)} \cdots y_{\sigma(d)} + J.$$

Note que

$$h = h_0 y_d y_{d-1} \cdots y_1 >_{lx} h_0 y_{\sigma(1)} y_{\sigma(2)} \cdots y_{\sigma(d)}$$

na ordem parcial induzida da lexicográfica à esquerda vista em 6.1.3. Assim, se h tem uma bagunça de tamanho d, então podemos escrever h como uma combinação linear de monômios, módulo J, menores do que h nesta ordem parcial. Se um somando $h_0 y_{\sigma(1)} y_{\sigma(2)} \cdots y_{\sigma(d)}$ desta combinação linear ainda tem uma bagunça de tamanho d, então escrevemos ele como uma combinação linear de monômios, módulo J, menores do que ele como fizemos no processo acima. A quantidade de monômios em P_n é finita, então após alguns passos este processo tem que acabar, ou seja, após alguns passos h será uma combinação linear de monômios, módulo J, com bagunças de tamanho $< d$.

6.2 TEOREMAS DE DILWORTH E LATYSHEV

Veremos, primeiramente, o resultado que Dilworth estudou em (DILWORTH, 1950) que relaciona o número de elementos na maior anticadeia de um conjunto parcialmente ordenado com o número de cadeias que o particiona. Dado um POSET finito, escreva ele como uma união disjunta de n cadeias, e denote por m o número máximo de elementos que uma anticadeia do POSET pode ter. Como cada elemento da anticadeia pertence a uma das cadeias, e como os elementos de uma mesma cadeia são comparáveis, temos que $m \leq n$. O teorema de Dilworth garante a existência de uma decomposição do POSET em cadeias tal que $m = n$.

Teorema 6.2.1 (Dilworth). *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito, e seja m o número máximo de elementos em uma anticadeia sua. Então P é uma união disjunta de m cadeias.*

Demonstração. Veremos a demonstração que pode ser encontrada em (GALVIN, 1994). Ela será por indução na cardinalidade de P. O primeiro passo de indução, isto é, quando P tem apenas um elemento, é trivial.

Por comodidade, chamamos de *largura* do conjunto P o número máximo de elementos que suas anticadeias podem ter. Com base nisso, seja a um elemento maximal de P e suponha que $P' = P/\{a\}$ tem largura n. Por indução, P' é uma união disjunta de n cadeias $C_1, \ldots, C_n$. Precisamos provar que P possui uma anticadeia com $n+1$ elementos ou P é uma união disjunta de n cadeias.

Como já foi comentado na introdução desta seção, toda anticadeia de P' com n elementos tem a propriedade que cada um de seus elementos pertence a apenas um C_i, e quaisquer dois elementos distintos da anticadeia pertencem a distintas cadeias C_i. Seja a_i o elemento maximal do conjunto

$$\{x_i \in C_i : x_i \text{ pertence a uma anticadeia de } P' \text{ com } n \text{ elementos } \}.$$

Note que $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ é uma anticadeia de P' com n elementos. Denotando $B = A \cup \{a\}$, temos dois casos para analisar:

(a) Se B é uma anticadeia de P, então P possui uma anticadeia com $n+1$ elementos, conforme gostaríamos.

(b) Se B não é uma anticadeia de P, então $a > a_i$ para algum i. Neste caso, $K = \{a\} \cup \{x \in C_i : x \leq a_i\}$ é uma cadeia e não haverá nenhuma anticadeia em P/K com n elementos. Logo, pela hipótese de indução, P/K será uma união disjunta de $n-1$ cadeias $C'_1, \ldots, C'_{n-1}$, e $P = (P/K) \cup K$ será a união disjunta das n cadeias $C'_1, \ldots, C'_{n-1}, K$.

A demonstração do teorema está finalizada. □

Definição 6.2.2. Para uma permutação $\pi \in S_n$ denotamos por $d(\pi)$ o maior número d para o qual existem d inteiros $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_d \leq n$ tais que $\pi(i_1) > \pi(i_2) > \cdots > \pi(i_d)$. Para um inteiro $b > 1$ fixo, a permutação π é chamada de b-boa se $d(\pi) < b$.

Outra forma equivalente de definir $d(\pi)$ e permutação b-boa é a seguinte: Para uma permutação fixa $\pi \in S_n$ introduzimos a relação binária $\leq_\pi$ no conjunto $P = \{1, 2, \ldots, n\}$ da seguinte forma:

$$i \leq_\pi j \iff \pi(i) \leq \pi(j) \ \text{ e } \ i \leq j,$$

onde $\leq$ é a relação de ordem usual nos inteiros. Note que $(P, \leq_\pi)$ é um conjunto parcialmente ordenado. Então $d(\pi)$ será o número máximo de elementos em uma anticadeia de $(P, \leq_\pi)$, e π será b-boa se toda anticadeia em $(P, \leq_\pi)$ tem menos que b elementos.

Exemplo 6.2.3. Se

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

então $d(\pi) = 3$ pois

$$2 < 3 < 5 \ \text{ e } \ \pi(2) = 6 > \pi(3) = 4 > \pi(5) = 3,$$

e toda anticadeia de $(P, \leq_\pi)$ tem uma cardinalidade ≤ 3. Além disto, π é 6-boa, 5-boa, 4-boa, mas não é 3-boa.

Definição 6.2.4. Para uma permutação $\pi \in S_n$ construímos um par de tabelas $T_1(\pi)$, $T_2(\pi)$ da seguinte forma: sejam $t_{i,j}$ o elemento da linha i e coluna j de $T_1(\pi)$, e $u_{i,j}$ o elemento da linha i e coluna j de $T_2(\pi)$. O primeiro elemento $t_{1,1}$ da tabela $T_1(\pi)$ é sempre igual a 1, e o primeiro elemento $u_{1,1}$ da tabela $T_2(\pi)$ é igual a $\pi(1)$. A partir disto temos que $t_{1,j}$ será o menor k, caso exista, tal que

$$t_{1,(j-1)} < k \leq n \ \text{ e } \ u_{1,(j-1)} < \pi(k);$$

$u_{1,j}$ será igual a $\pi(t_{1,j})$. Caso não exista k conforme acima, seguimos para a segunda linha em ambas as tabelas. O elemento $t_{2,1}$ será o menor inteiro k tal que $1 \leq k \leq n$ e k não pertence a primeira linha de $T_1(\pi)$, e $u_{2,1}$ será igual a $\pi(t_{2,1})$. A partir disto temos que $t_{2,j}$ será o menor k, caso exista, tal que k não está na primeira linha de $T_{1,\pi}$,

$$t_{2,(j-1)} < k \leq n \ \text{ e } \ u_{2,(j-1)} < \pi(k);$$

$u_{2,j}$ será igual a $\pi(t_{2,j})$. Caso não exista k conforme acima, seguimos para a terceira linha em ambas as tabelas. Procedemos assim com a terceira e demais linhas de ambas as tabelas até usarmos todos os inteiros possíveis no intervalo de 1 a n.

Note que se $\pi_1 \neq \pi_2$ então

$$(T_1(\pi_1), T_2(\pi_1)) \neq (T_1(\pi_2), T_2(\pi_2)),$$

ou seja, cada par $(T_1(\pi), T_2(\pi))$ representa unicamente uma permutação π.

Exemplo 6.2.5. Sejam $n = 7$ e

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 1 & 7 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Por definição temos $t_{1,1} = 1$, $u_{1,1} = \pi(1) = 5$,

$$T_1(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots \\ \vdots & \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad T_2(\pi) = \begin{pmatrix} 5 & \cdots \\ \vdots & \end{pmatrix}.$$

Seguindo a construção, o menor inteiro k tal que $\pi(k) > 5$ é o 4. Logo, $t_{1,2} = 4$, $u_{1,2} = \pi(4) = 7$,

$$T_1(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad T_2(\pi) = \begin{pmatrix} 5 & 7 & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix}.$$

Note que não é possível achar nenhum inteiro $4 < k \leq 7$ tal que $\pi(k) > 7$, seguimos então para a segunda linha em ambas as tabelas. O menor inteiro que ainda não foi usado na tabela $T_1(\pi)$ é 2. Logo, $t_{2,1} = 2$, $u_{2,1} = \pi(2) = 4$,

$$T_1(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & \cdots \\ \vdots & \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad T_2(\pi) = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & \cdots \\ \vdots & \end{pmatrix}.$$

Seguindo o processo teremos

$$T_1(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \\ 2 & 6 & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad T_2(\pi) = \begin{pmatrix} 5 & 7 & \\ 4 & 6 & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix}.$$

Seguindo para a terceira linha teremos

$$T_1(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \\ 2 & 6 & \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad T_2(\pi) = \begin{pmatrix} 5 & 7 & \\ 4 & 6 & \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Como não há mais inteiros disponíveis no nosso intervalo, terminamos a construção das duas tabelas.

Vale ressaltar que $T_1(\pi)$ e $T_2(\pi)$ não são matrizes, portanto, como no exemplo, as linhas não precisam ter a mesma quantidade de elementos.

O próximo lema usa algumas ideias do teorema de Dilworth.

Lema 6.2.6 (Amitsur)**.** *Para uma permutação $\pi \in S_n$, o inteiro $d(\pi)$ é igual ao número d de linhas de $T_1(\pi)$.*

Demonstração. Pela construção das tabelas $T_1(\pi)$ e $T_2(\pi)$, temos que se

$$i_1 < i_2 < \cdots < i_{d(\pi)} \text{ e } \pi(i_1) > \pi(i_2) > \cdots > \pi(i_{d(\pi)}),$$

então cada índice i_k estará em uma linha da tabela $T_1(\pi)$, e dois índices distintos estarão em duas linhas distintas da tabela $T_1(\pi)$. Logo, $d(\pi) \leq d$.

Para mostrar que $d(\pi) \geq d$, construiremos uma sequência $i_1, i_2, \ldots, i_d$ de tal forma que

$$i_1 < i_2 < \cdots < i_d \text{ e } \pi(i_1) > \pi(i_2) > \cdots > \pi(i_d).$$

Isso será feito de maneira recursiva: Primeiro escrevemos $i_d = t_{d,1}$. Tendo já construído i_{k+1}, definimos i_k como sendo o maior elemento da linha k de $T_1(\pi)$ que é menor que i_{k+1}, ou seja, escrevemos $i_k = t_{k,j}$ para o maior j tal que $t_{k,j} < i_{k+1}$. Se $\pi(i_k) = u_{k,j} < \pi(i_{k+1})$, então i_{k+1} deveria estar na k-ésima linha de $T_1(\pi)$, o que é um absurdo. Logo, $\pi(i_k) > \pi(i_{k+1})$. Desta forma, teremos a sequência desejada e $d(\pi) = d$. □

O próximo resultado pode ser encontrado em (LATYSHEV, 1972).

Teorema 6.2.7 (Latyshev)**.** *Se uma PI-álgebra R satisfaz uma identidade polinomial de grau b, então o espaço vetorial $P_n(R) = \dfrac{P_n}{P_n \cap T(R)}$ é gerado pelos monômios*

$$x_{\pi(1)}x_{\pi(2)}\cdots x_{\pi(n)} + P_n \cap T(R), \quad \textit{onde} \quad \pi \in S_n \ \textit{é} \ b-\textit{boa}.$$

Demonstração. Como R possui uma identidade polinomial de grau b, pelo processo de linearização também possui uma identidade polinomial multilinear de grau $d \leq b$, ou seja, $T(R)$ tem um elemento da forma

$$f = \sum_{\sigma \in S_d} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(d)},$$

onde $\alpha_\sigma \neq 0$ para algum $\sigma \in S_d$.

Se $\pi \in S_n$ é d-boa, então π é b-boa. Logo, é suficiente provarmos que $P_n(R)$ é gerado pelos monômios

$$x_{\pi(1)}x_{\pi(2)}\cdots x_{\pi(n)} + P_n \cap T(R), \quad \text{onde} \quad \pi \in S_n \ \text{é} \ d-\text{boa}.$$

Observe que π é d-boa se, e somente se, as bagunças no monômio $x_{\pi(1)}x_{\pi(2)}\cdots x_{\pi(n)}$ têm tamanho $< d$. Se $J = P_n \cap T(R)$, então pela técnica de organização de bagunça visto no Exemplo 6.1.4 temos que todo monômio $h \in P_n$ é uma combinação linear de monômios, módulo J, com bagunças de tamanho $< d$, ou seja, todo monômio $h \in P_n$ é uma combinação linear de monômios, módulo J, cuja permutação associada é d-boa.

A demonstração está completa. □

6.3 OS TEOREMAS DE REGEV

Finalizamos nossos estudos vendo dois resultados importantes, ambos de Regev. O primeiro resultado é um resultado quantitativo sobre as codimensões de uma PI-álgebra, já o segundo resultado é um resultado qualitativo sobre o produto tensorial de duas PI-álgebras. O interessante nestes resultados é que um implica no outro, ou seja, temos um resultado puramente qualitativo derivado de um resultado puramente quantitativo. Ambos resultados podem ser encontrados em (REGEV, 1972).

Teorema 6.3.1 (Regev)**.** *Seja R uma PI-álgebra que satisfaz uma identidade polinomial de grau d. Então a sequência de codimensão das identidades polinomiais de R satisfaz*

$$c_n(R) \leq (d-1)^{2n}$$

para todo $n \geq 1$.

Demonstração. Relembramos que

$$c_n(R) = \dim \left[\frac{P_n}{P_n \cap T(R)} \right].$$

Pelo Teorema 6.2.7 basta provar que o número de permutações d-boas em S_n é menor que $(d-1)^{2n}$. Pelo Lema 6.2.6, as tabelas $T_1(\pi)$ e $T_2(\pi)$ construídas na Definição 6.2.4 têm menos de d linhas se, e somente se, π é permutação d-boa. Como cada permutação π é unicamente definida pelo par de tabelas $(T_1(\pi), T_2(\pi))$, basta encontrarmos o número de tabelas T_1 e T_2 possíveis de se criar com menos de d linhas. Sabemos que os inteiros na mesma linha das tabelas estão em ordem crescente. Cada inteiro entre 1 e n pode ser colocado em apenas uma das $d-1$ linhas de $T_1(\pi)$ e em apenas uma das $d-1$ linha de $T_2(\pi)$, havendo assim $(d-1)^2$ possibilidades de preenchimento para cada inteiro. Disso, temos que o número de pares de tabelas $(T_1(\pi), T_2(\pi))$ é menor que $(d-1)^{2n}$. □

Teorema 6.3.2 (Regev)**.** *Se R_1 e R_2 são PI-álgebras, então o produto tensorial $R_1 \otimes_K R_2$ é uma PI-álgebra.*

Demonstração. Suponha que R_1 e R_2 satisfazem identidades polinomiais de grau d_1 e d_2 respectivamente. Pelo Teorema 6.3.1 temos que

$$c' = c_n(R_1) \leq (d_1 - 1)^{2n} \quad \text{e} \quad c'' = c_n(R_2) \leq (d_2 - 1)^{2n}.$$

Como $a^n < n!$ para um n suficientemente grande, temos que existe um n tal que

$$c'c'' \leq (d_1 - 1)^{2n}(d_2 - 1)^{2n} = ((d_1 - 1)^2(d_2 - 1)^2)^n < n!.$$

Fixe um tal n e sejam $\{g_1, g_2, \ldots, g_{c'}\}$ e $\{h_1, h_2, \ldots, h_{c''}\}$ bases de $P_n(R_1)$ e $P_n(R_2)$ respectivamente. Então para toda permutação $\pi \in S_n$ existem $\beta_{\pi i}, \gamma_{\pi j} \in K$ tais que

$$x_{\pi(1)}x_{\pi(2)} \cdots x_{\pi(n)} + P_n \cap T(R_1) = \sum_{i=1}^{c'} \beta_{\pi i} g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) + P_n \cap T(R_1),$$

$$x_{\pi(1)}x_{\pi(2)} \cdots x_{\pi(n)} + P_n \cap T(R_2) = \sum_{j=1}^{c''} \gamma_{\pi j} h_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) + P_n \cap T(R_2).$$

Isto significa que ao substituir as variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ por elementos $u_1, u_2, \ldots, u_n \in R_1$ e $v_1, v_2, \ldots, v_n \in R_2$ obteremos as seguintes igualdades em R_1 e R_2:

$$u_{\pi(1)}u_{\pi(2)} \cdots u_{\pi(n)} = \sum_{i=1}^{c'} \beta_{\pi i} g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

$$v_{\pi(1)}v_{\pi(2)} \cdots v_{\pi(n)} = \sum_{j=1}^{c''} \gamma_{\pi j} h_j(v_1, v_2, \ldots, v_n).$$

Queremos exibir um polinômio não nulo

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\pi \in S_n} \xi_\pi x_{\pi(1)}x_{\pi(2)} \cdots x_{\pi(n)}$$

que seja uma identidade polinomial para $R = R_1 \otimes_K R_2$. Neste caso, vamos interpretar os elementos ξ_π como incógnitas a serem determinadas. Como f é multilinear, para que seja uma identidade polinomial de R basta que

$$f(u_1 \otimes v_1, u_2 \otimes v_2, \ldots, u_n \otimes v_n) = 0$$

para todos $u_1, u_2, \ldots, u_n \in R_1$ e $v_1, v_2, \ldots, v_n \in R_2$. Temos que

$$\begin{aligned} f(u_1 \otimes v_1, \ldots, u_n \otimes v_n) &= \sum_{\pi \in S_n} \xi_\pi (u_{\pi(1)} \otimes v_{\pi(1)}) \cdots (u_{\pi(n)} \otimes v_{\pi(n)}) \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \xi_\pi (u_{\pi(1)} \cdots u_{\pi(n)}) \otimes (v_{\pi(1)} \cdots v_{\pi(n)}) = 0. \end{aligned}$$

Aplicando as igualdades anteriores envolvendo $u_{\pi(1)} \cdots u_{\pi(n)}$ e $v_{\pi(1)} \cdots v_{\pi(n)}$ obtemos

$$f = \sum_{\pi \in S_n} \sum_{i=1}^{c'} \sum_{j=1}^{c''} \xi_\pi \beta_{\pi i} \gamma_{\pi j} g_i(u_1, u_2, \dots, u_n) h_j(v_1, v_2 \dots, v_n) = 0.$$

Rearranjando os somatórios teremos que

$$\sum_{i=1}^{c'} \sum_{j=1}^{c''} \left(\sum_{\pi \in S_n} \xi_\pi \beta_{\pi i} \gamma_{\pi j} \right) g_i(u_1, u_2, \dots, u_n) h_j(v_1, v_2 \dots, v_n) = 0.$$

Portanto, se resolvermos o sistema nas incógnitas ξ_π:

$$\sum_{\pi \in S_n} \xi_\pi \beta_{\pi i} \gamma_{\pi j} = 0, \; i = 1, \dots, c', \; j = 1, \dots, c'',$$

teremos a identidades polinomial f de R desejada. A cardinalidade de S_n é $n!$ e portanto o número de incógnitas ξ_π também é $n!$. Porém, o número de equações neste sistema "homogêneo" é $c'c'' = c_n(R_1)c_n(R_2) < n!$. Portanto o sistema possui uma solução não trivial, garantindo assim a existência de uma identidade polinomial não nula para $R = R_1 \otimes_K R_2$. $\square$

REFERÊNCIAS

AMITSUR, S. A.; LEVITZKI, J. **Minimal identities for algebras**. [S.l.]: Proc. Amer. Math. Soc. 1, 1950. Citado na página 38.

BREšAR, M. **Introduction to Noncommutative Algebra**. 1. ed. [S.l.]: Springer International Publishing, 2014. (Universitext). Citado na página 7.

DILWORTH, R. **A decomposition theorem for partially ordered sets**. [S.l.]: Ann. of Math. **51**, 161-166, 1950. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 53.

DRENSKY, V. **Free Algebras and PI-Algebras**. [S.l.]: Springer-Verlag, 2000. (Advanced Courses in Mathematics CRM Barcelona). Citado 4 vezes nas páginas 7, 28, 30 e 38.

GALVIN, F. **A Proof of Dilworth's Chain Decomposition Theorem**. [S.l.]: American Mathematical Monthly, 101:4, 352-353, 1994. Citado na página 53.

GIAMBRUNO, A.; ZAICEV, M. **Polynomial identities and asymptotic methods**. [S.l.]: American Mathematical Society, 2005. (American Mathematical Society Mathematical Surveys and Monographs, Volume 122). Citado na página 7.

GONçALVES, D. J.; SCHüTZER, W.; TALPO, H. L. **A-identities for the** 2×2 **matrix algebra**. [S.l.]: Arch. Math. 106, 417–429, 2016. Citado na página 38.

KRAKOWSKI, D.; REGEV, A. **The polynomial identities of the Grassmann algebra**. [S.l.]: Trans. Amer. Math. Soc. 181, 1973. Citado na página 6.

LATYSHEV, V. N. **On Regev's theorem on identities in a tensor product of PI-algebras (Russian)**. [S.l.]: Usp. Mat. Nauk, **27**, No.4, 213–214, 1972. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 56.

MACDONALD, I. G. **Symmetric Functions and Orthogonal Polynomials**. [S.l.]: American Mathematical Society, 1998. (University lecture series 12). Citado na página 44.

MALTSEV, Y. **A basis for the identities of the algebra of upper triangular matrices**. [S.l.]: Algebra and Logic 10, 1971. Citado na página 6.

MEAD, D. G. **Newton's Identities**. [S.l.]: The American Mathematical Monthly 99, no. 8: 749–51., 1992. Citado na página 44.

RAZMYSLOV, Y. P. **Trace identities of full matrix algebras over a field of characteristic zero**. [S.l.]: Izv. Akad. Nauk SSSR, 1974. (Ser. Mat. 38, 723-756). Citado na página 38.

REGEV, A. **Existence of identities in** $A \otimes B$. [S.l.]: Israel J Math, **11**, 131-152, 1972. Citado 3 vezes nas páginas 7, 49 e 57.

ROSSET, S. **A new proof of the Amitsur-Levitzki identity**. [S.l.]: Israel J. Math. 23, 187-188, 1976. Citado na página 38.

SANTOS, R. B. dos; VIEIRA, A. C. **PI-álgebras: uma introdução à PI-teoria**. [S.l.]: IMPA, 2021. Citado na página 7.

SIDEROV, P. **A basis for the identities of an algebra of triangular matrices over an arbitrary field**. [S.l.]: Pliska, Stud. Math. Bulg. 2, 1981. Citado na página 6.