

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

**Análise comparativa do desempenho mecânico de tipologias
de treliças planas de madeira para classes de resistência distintas
via algoritmo de otimização**

Matheus Henrique Morato de Moraes

São Carlos
2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

**Análise comparativa do desempenho mecânico de tipologias
de treliças planas de madeira para classes de resistência distintas
via algoritmo de otimização**

Matheus Henrique Morato de Moraes

Orientador: André Luís Christoforo

Área de concentração: Estruturas e Geotecnia

São Carlos

2023



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Matheus Henrique Morato de Moraes, realizada em 27/04/2023.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Andre Luis Christoforo (UFSCar)

Prof. Dr. Tulio Hallak Panzera (UFMG)

Prof. Dr. Rodrigo Teixeira Santos Freire (UFSJ)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

RESUMO

A madeira é uma escolha viável para sistemas construtivos, dadas as suas propriedades mecânicas adequadas para aplicações estruturais. Além disso, a madeira é uma fonte renovável, tornando-se ainda mais atraente para uso em diversas aplicações para fim estrutural. Visando compreender o desempenho mecânico de duas treliças planas em diferentes condições de carregamento, foi realizado um estudo comparativo do desempenho mecânico de duas tipologias de treliças - a tipologia Fan modificada e Howe - considerando vãos de 6, 9, 12 e 15 m. A fim de avaliar a influência do material adotado no processo construtivo das treliças, foram caracterizadas as espécies Cambará-rosa, Cupiúba, Angelim-pedra, Garapa e Jatobá, identificadas como espécies ID 01, ID 02, ID 03, ID 04 e ID 05, respectivamente. O estudo baseou-se na ABNT NBR 7190 (2022a) para dimensionamento da treliça, além de aplicar o método de análise matricial para determinação dos esforços internos, deslocamentos nodais e um algoritmo de otimização de inteligência de enxame para minimizar o peso da estrutura. A caracterização das espécies resultou nas classes de resistência D20, D30, D40, D60 e D60, para as espécies denominadas ID 01, ID 02, ID 03, ID 04 e ID 05, respectivamente. Os resultados do processo de otimização indicam que a tipologia Howe apresentou resultados menores para a função objetivo (peso da estrutura) em relação à treliça Fan modificada. Além disso, quando analisada a distribuição dos esforços normais na treliça, observou-se uma correlação com a resistência característica na compressão e na tração das espécies, onde as treliças com espécies de menor resistência mecânica são mais solicitadas, enquanto as treliças com espécies de maior resistência mecânica são menos exigidas. Nesse sentido, é possível notar que a tipologia de treliça Howe apresenta uma amplitude maior em relação à tipologia de treliça Fan Modificada, na maioria das condições adotadas para as restrições do ELU. Ao analisar as restrições associadas à flecha na condição imediata, observou-se que se obtiveram valores próximos a zero, que indica que restrição desta natureza limitaram o processo de otimização. Em síntese, a madeira mostrou-se uma opção sustentável e viável para construções de treliças, e que diferentes espécies de madeira possuem propriedades mecânicas distintas que devem ser consideradas no dimensionamento da estrutura. Os métodos de análise matricial e algoritmos de otimização de inteligência de enxame permitiram avaliar os esforços internos e deslocamentos nodais nas treliças, além de minimizar o peso da estrutura. Além disso, é importante considerar todas as restrições no dimensionamento de estruturas de madeira.

Palavras-chave: Treliça planas de madeira; Otimização; Howe; Fan Modificada.

ABSTRACT

Wood is a viable choice for building systems, given its mechanical properties suitable for structural applications. In addition, wood is a renewable source, making it even more attractive for use in various applications for structural purposes. Aiming to understand the mechanical performance of two plane trusses under different loading conditions, a comparative study of the mechanical performance of two truss typologies - the modified Fan and Howe typologies - considering spans of 6, 9, 12 and 15 m, was carried out. In order to evaluate the influence of the material adopted in the construction process of the trusses, the species Cambará-rosa, Cupiúba, Angelim-pedra, Garapa and Jatobá, identified as species ID 01, ID 02, ID 03, ID 04 and ID 05, respectively, were characterized. The study was based on ABNT NBR 7190 (2022a) for truss dimensioning, besides applying the matrix analysis method for determining internal forces, nodal displacements and a swarm intelligence optimization algorithm to minimize the structure weight. The species characterization resulted in strength classes D20, D30, D40, D60, and D60, for the species named ID 01, ID 02, ID 03, ID 04, and ID 05, respectively. The results of the optimization process indicate that the Howe typology presented lower results for the objective function (weight of structure) in relation to the modified Fan truss. Furthermore, when the distribution of normal forces in the truss was analyzed, a correlation was observed with the characteristic strength in compression and tensile of the species, where the trusses with species of lower mechanical strength are more requested, while the trusses with species of higher mechanical strength are less requested. In this sense, it is possible to note that the Howe truss typology presents a larger amplitude in relation to the Modified Fan truss typology, in most of the conditions adopted for the ULS constraints. When analyzing the constraints associated with a deflection in the immediate condition, it was observed that values close to zero were obtained, which indicates that constraints of this nature limited the optimization process. In summary, wood turned out to be a sustainable and viable option for truss constructions, and that different wood species have distinct mechanical properties that should be considered when designing the structure. The matrix analysis methods and swarm intelligence optimization algorithms allowed the evaluation of internal efforts and nodal displacements in the trusses, as well as minimizing the weight of the structure. In addition, it is important to consider all constraints when dimensioning timber structures.

Keywords: Flat wooden trusses; Optimization; Howe; Modified Fan.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1: Edifícios construídos em madeira na Noruega	13
Figura 1.2: Edifício <i>Ascent</i>	14
Figura 1.3: Madeira em sistemas de cobertura	16
Figura 1.4: Treliças com banzos paralelos	17
Figura 1.5: Treliças trapezoidais	17
Figura 1.6: Treliças triangulares.....	17
Figura 1.7: Representação dos três tipos de otimização estrutural	19
Figura 2.1: Distribuição de resultados por plataforma de busca	25
Figura 2.2: Evolução anual dos artigos conforme as <i>strings</i> de busca.....	25
Figura 2.3: Resumo do número de publicações por periódico.....	26
Figura 2.4: Resumo do número de publicações por país.....	27
Figura 2.5: Treliça de referência, 12 segmentos diagonais alternadas	29
Figura 2.6: Resultado final da otimização (treliça de referência em cinza)	30
Figura 2.7: Representação treliças Villar-García <i>et al.</i> (2019)	32
Figura 2.8: Evolução da função objetivo (FO) de uma treliça completa caracterizada por uma tipologia de treliça n10, 30 m de vão, comprimento de telhado 3 vezes o vão ($3 \times L$), 45 mm de espessura da placa laminada.	35
Figura 3.1: Fluxograma de processos do algoritmo FA.....	46
Figura 3.2: Treliça plana e seu modelo analítico	48
Figura 3.3: Graus de liberdade da treliça.....	49
Figura 3.4: Treliça, forças e deslocamentos no elemento.....	52
Figura 3.5: Elemento submetidos aos deslocamentos.....	53
Figura 3.6: Treliça com seus eixos globais e elemento m com seus eixos locais.....	58
Figura 3.7: Representação do elemento inclinado de uma treliça	63
Figura 3.8: Representação treliça plana arbitrária.....	65
Figura 4.1: Fluxograma da pesquisa.....	71
Figura 4.2: Representação gráfica de variáveis contínuas e discretas.....	73
Figura 4.3: Treliças e suas variáveis de projeto.	74
Figura 4.4: Dimensões galpão.	75
Figura 4.5: Coeficiente de forma externos (C_e)	81
Figura 4.6: Combinações entre os coeficientes de forma externos (C_e) e internos (C_i) no telhado dos galpões	82
Figura 4.7: Forças de vento (w_k) no telhado dos galpões	82
Figura 4.8: Corpo de prova para determinação da umidade da madeira (dimensões em mm)	86
Figura 4.9: Corpo de prova para ensaio de compressão paralelo às fibras da madeira (dimensões em mm).....	88
Figura 4.10: Diagrama de tensão <i>versus</i> deformação específica para determinar a rigidez da madeira.....	89
Figura 4.11: <i>Layout</i> para o ensaio para compressão paralela às fibras, com relógios comparadores (dimensões em mm)	90
Figura 4.12: Diagrama de carregamento para determinação da rigidez da madeira	90
Figura 4.13: Corpo de prova para ensaios de tração paralela às fibras (dimensões em mm)	91
Figura 4.14: <i>Layout</i> de ensaio de tração paralela às fibras (dimensões em mm)	93
Figura 5.1: <i>Box plot</i> da função objetivo penalizada W das treliças Fan modificada em função do vão	102
Figura 5.2: <i>Box plot</i> da função objetivo penalizada W das treliças Howe em função do vão	103
Figura 5.3: Curvas de convergência para o peso mínimo (W) para vão 6, 9, 12 e 15 m para tipologia Fan modificada	107
Figura 5.4: Curvas de convergência para o peso mínimo (W) para vão 6, 9, 12 e 15 m para tipologia Howe	108

Figura 5.5: <i>Box plot</i> comparativo da função objetivo penalizada (W)	109
Figura 5.6: Restrições (g) para vão 6, 9, 12 e 15 m, para a Tipologia Fan modificada.....	111
Figura 5.7: Restrições (g) para vão 6, 9, 12 e 15 m, para a tipologia Howe.....	112
Figura 5.8: <i>Box plot</i> das restrições (g) do ELU para a tipologia Fan modificada.....	114
Figura 5.9: <i>Box plot</i> das restrições (g) do ELU para a tipologia Howe	116
Figura 5.10: <i>Box plot</i> comparativo das restrições (g) do ELU	118
Figura 5.11: Solicitações do ELS	121

LISTA DE TABELAS

Tabela 1.1: Classes de resistência de espécies de florestas nativas definidas em ensaios de corpos de prova isentos de defeitos	16
Tabela 2.1: Critérios de inclusão (I) e exclusão (E) dos artigos.....	24
Tabela 2.2: Resumo resultados RSL	28
Tabela 2.3: Resultados com diferentes funções objetivo	30
Tabela 2.4: Comparação dos resultados da treliça 2D entre a otimização contínua (Otim-C) e discreta	33
Tabela 3.1: Coeficiente de fluência (ϕ).....	39
Tabela 3.2: Valores dos coeficientes KE	42
Tabela 3.3: Flechas limites para elementos correntes fletidos	44
Tabela 4.1: Parâmetros de entrada do FA.....	73
Tabela 4.2: Valores nominais padrão da seção transversal utilizados como variáveis.....	74
Tabela 4.3: Descrição das distâncias nodais da treliça e dimensões dos galpões	75
Tabela 4.4: Especificações para as madeiras utilizadas no processo de dimensionamento	75
Tabela 4.5: Classificação para as dimensões dos galpões	79
Tabela 4.6: Resultados dos fatores meteorológicos e fator $S2$	80
Tabela 4.7: Resultados Vk e q para vento a 0° e 90°	80
Tabela 4.8: Combinações consideradas no dimensionamento.....	84
Tabela 4.9: Identificação, nomes popular e científico das espécies avaliadas	85
Tabela 5.1: Estatísticas com os valores médios amostrais $\rho_{12\%}$ ($\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$).....	95
Tabela 5.2: Estatísticas dos resultados obtidos para a resistência na compressão paralela às fibras f_{c0} (MPa)	96
Tabela 5.3: Estatísticas dos resultados obtidos para o módulo de elasticidade na compressão medido na direção paralela às fibras E_{c0} (MPa)	96
Tabela 5.4: Classes de resistência (CR) e resistência característica para compressão paralela às fibras (f_{c0}, k) (MPa).....	97
Tabela 5.5: Estatísticas dos resultados obtidos para a resistência na tração paralela às fibras f_{t0} (MPa).....	98
Tabela 5.6: Estatísticas dos resultados obtidos para o módulo de elasticidade na tração medido na direção paralela às fibras E_{t0} (MPa)	98
Tabela 5.7: Resultados das resistências características para tração paralela às fibras da madeira (f_{t0}, k)(MPa)	99
Tabela 5.8: Resumo dos resultados obtidos do processo de otimização das treliças Fan modificada	100
Tabela 5.9: Resumo dos resultados obtidos do processo de otimização das treliças Howe	101
Tabela 5.10: Sumarização das variáveis de projeto (Tipologia Fan modificada), medidas em mm.	104
Tabela 5.11: Sumarização das variáveis de projeto (Tipologia Howe), medidas em mm....	105
Tabela 5.12: Sumarização das restrições do ELU para tipologia Fan modificada	115
Tabela 5.13: Sumarização das restrições do ELU para tipologia Howe	117
Tabela 5.14: Sumarização resultados estatística das restrições do ELU para as treliças ...	119

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	12
1.1 OBJETIVOS.....	20
1.2 JUSTIFICATIVA.....	21
1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO	21
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	23
2.1 REVISÃO SISTEMÁTICA DE LITERATURA.....	23
2.1.1 PLANEJAMENTO.....	24
2.1.2 EXECUÇÃO DA REVISÃO SISTEMÁTICA.....	24
2.1.3 EXTRAÇÃO DE DADOS.....	25
2.2 OTIMIZAÇÃO APLICADA A ESTRUTURAS DE MADEIRA	27
2.2.1 OTIMIZAÇÃO GEOMÉTRICA ASSOCIADA A DIMENSIONAL.....	28
2.2.2 OTIMIZAÇÃO DE TRELIÇAS CONSIDERANDO VARIÁVEIS DISCRETAS.....	30
3. ASPECTOS FUNDAMENTAIS	36
3.1 PREMISSAS PARA O PROJETO DE ESTRUTURAS DE COBERTURA SEGUNDO A ABNT NBR 7190 (2022a)	36
3.1.1 ESFORÇOS E DESLOCAMENTOS DE PROJETO	36
3.1.2 COMBINAÇÕES DE AÇÕES PARA O ESTADO LIMITE ÚLTIMO (ELU)	37
3.1.3 COMBINAÇÕES DE AÇÕES PARA O ESTADO LIMITE DE SERVIÇO (ELS)	38
3.1.4 VERIFICAÇÃO DO ELU.....	39
3.1.5 VERIFICAÇÃO DO ELS.....	44
3.2 FUNDAMENTOS DO <i>FIREFLY ALGORITHM</i> (FA)	44
3.3 FUNDAMENTAÇÃO ACERCA DA ANÁLISE MATRICIAL PARA ANÁLISE DE TRELIÇAS PLANAS.	46
3.3.1 SISTEMA DE COORDENADA GLOBAL E LOCAL.....	47
3.3.2 GRAUS DE LIBERDADE	48
3.3.3 VETOR DE CARREGAMENTO NODAL	50
3.3.4 VETOR DE REAÇÃO.....	51
3.3.5 RELAÇÃO DE RIGIDEZ DOS ELEMENTOS NO SISTEMA DE COORDENADAS LOCAIS	51

3.3.6	TRANSFORMAÇÃO DO SISTEMA DE COORDENADAS	57
3.3.7	RELAÇÕES DE RIGIDEZ DOS ELEMENTOS NO SISTEMA DE COORDENADAS GLOBAIS.....	61
3.3.8	RELAÇÕES DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA.....	64
3.3.9	PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE MATRICIAL	68
4.	MATERIAIS E MÉTODOS.....	71
4.1	FUNÇÃO OBJETIVO.....	72
4.2	TRATAMENTO DE RESTRIÇÕES	72
4.3	TIPOS DE VARIÁVEIS PARA PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO.....	73
4.4	PARÂMETROS UTILIZADOS PARA APLICAÇÃO DO FA.....	73
4.5	TIPOLOGIAS E GEOMETRIA.....	74
4.6	CONDIÇÕES DE PROJETO.....	75
4.7	RESTRIÇÕES DE PROJETO	76
4.8	AÇÕES, CARREGAMENTOS E COMBINAÇÕES	77
4.8.1	AÇÕES PERMANENTES	77
4.8.2	AÇÕES VARIÁVEIS.....	78
4.8.3	COMBINAÇÕES CONSIDERADAS	83
4.9	PROPRIEDADES FÍSICAS E MECÂNICAS DA MADEIRA.....	84
4.9.1	DETERMINAÇÃO DOS VALORES CARACTERÍSTICOS	85
4.9.2	TEOR DE UMIDADE.....	86
4.9.3	DENSIDADE.....	87
4.9.4	COMPRESSÃO PARALELA ÀS FIBRAS.....	87
4.9.5	TRAÇÃO PARALELA ÀS FIBRAS.....	91
4.10	ANÁLISE DE VARIÂNCIA (ANOVA).....	93
5.	RESULTADOS E DISCUSSÕES	95
5.1	DENSIDADE APARENTE	95
5.2	COMPRESSÃO PARALELA ÀS FIBRAS.....	96
5.3	TRAÇÃO PARALELA ÀS FIBRAS DA MADEIRA.....	97
5.4	OTIMIZAÇÃO	99

5.4.1	COMPARATIVO DOS RESULTADOS OTIMIZAÇÃO	108
5.4.2	RESTRIÇÕES	110
5.4.3	AVALIAÇÃO DAS RESTRIÇÕES DO ELU	113
5.4.4	AVALIAÇÃO DAS RESTRIÇÕES DO ELS.....	120
6.	CONCLUSÕES.....	123
	REFERÊNCIAS.....	125

1. INTRODUÇÃO

A madeira é um recurso natural amplamente utilizado na construção civil, tanto no Brasil quanto no mundo. Dada sua versatilidade e benefícios econômicos e ambientais, é comum encontrá-la em estruturas de cobertura, pontes e galpões (BATISTA *et al.*, 2023, PIGOZZO *et al.*, 2018, QIN *et al.*, 2021).

De acordo com Fraga (2020), a madeira compete com materiais convencionais da construção civil, como o aço e o concreto, em termos de propriedades mecânicas e resistência estrutural. Comparada a esses materiais, a madeira apresenta uma relação favorável entre resistência mecânica e densidade (CAVALHEIRO *et al.*, 2016, RAMAGE *et al.*, 2017). Estudos realizados por Calil Júnior e Dias (1997) indicam que, em relação ao aço, a madeira apresenta valores de relação entre resistência e densidade cerca de três vezes maiores na tração e até dez vezes maiores na compressão em relação ao concreto armado.

A madeira é um recurso natural renovável e abundante, sobretudo quando consideradas políticas de reflorestamento (KROMOSER, B. *et al.*, 2022), desempenhando um papel crucial na preservação do meio ambiente. Como material estrutural, a madeira pode contribuir para a redução da emissão de gases poluentes, em comparação com materiais convencionais da construção civil, como o aço, o concreto e o alumínio (AMORIM; MANTILLA; CARRASCO, 2018), o que, aliado a suas características ambientais favoráveis, pode torná-la uma opção viável para aplicações estruturais (ANDRADE JUNIOR *et al.*, 2014, CHEN; GUO, 2017).

No hemisfério norte, é comum a utilização da madeira em edificações residenciais, sobretudo nos Estados Unidos da América (EUA). O sistema *wood frame* é utilizado em cerca de 90% das edificações residenciais nos EUA (DE ARAUJO *et al.*, 2016, MASOOMI; AMERI; VAN DE LINDT, 2018), e aproximadamente 80 milhões de edificações unifamiliares possuem estruturas predominantemente em madeira (KIRKHAM; GUPTA; MILLER, 2014). A construção residencial é responsável por cerca de 26% do consumo total de madeira nos Estados Unidos, evidenciando o papel significativo da madeira na cadeia de valor dos produtos florestais (WHERRY; BUEHLMANN, 2014).

Na cidade de Bergen, Noruega, foi erguido o Edifício *Treet* (Figura 1.1a) entre 2007 e 2015. Trata-se de um edifício residencial de 14 andares que se tornou, até 2019, o edifício mais alto do mundo construído em madeira, com uma altura de 49 metros. Tal título foi concedido pelo Conselho de Grandes Edifícios e Habitat Urbano (*Council on Tall Buildings*

and Urban Habitat) (CTBUH, 2022). Segundo Iqbal (2021), o Edifício *Treet* apresenta diversas características inovadoras, desenvolvidas por meio de pesquisas aplicadas específicas para a sua construção. Desta forma, este edifício demonstra a viabilidade da utilização dessas técnicas em edifícios de grande altura. Durante a construção do Edifício *Treet*, foram utilizadas treliças de madeira laminada colada (MLC) e dois níveis intermediários reforçados, visando suportar módulos pré-fabricados de construção acima de uma garagem de concreto.

Já o Edifício *Mjøstårnet* (Figura 1.1b), localizado em *Brumunddal*, Noruega, foi projetado pelo mesmo grupo envolvido com o Edifício *Treet* e apresenta uma estrutura de MLC semelhante, porém cerca de 30 metros mais alto, sem a utilização de módulos de construção. O planejamento do Edifício *Mjøstårnet* teve início em 2015 sendo concluído em março de 2019, apresentando uma altura de 85,4 metros e 18 andares, que se tornou o edifício mais alto construído em madeira, título concedido pelo Conselho de Grandes Edifícios e Habitat Urbano em 2019, que perdurou até 2022.

Figura 1.1: Edifícios construídos em madeira na Noruega



(a) Edifício *Treet*



(b) Edifício *Mjøstårnet*

Fonte: Council on Tall Buildings and Urban Habitat (2022)

O edifício *Ascent*, localizado na cidade de Milwaukee, estado de Wisconsin, nos Estados Unidos, é o atual detentor do recorde de maior edifício híbrido de madeira-concreto do mundo. O prédio possui 86,6 metros de altura, é composto por 25 andares e projetado pela *Korb + Associates Architects*. A estrutura é formada por uma base de concreto, além de contar com um elevador e eixos de escadas também em concreto, enquanto que o restante da construção é feito de madeira laminada colada cruzada (*Cross Laminated Timber - CLT*) e MLC (CTBUH, 2022). A construção do edifício *Ascent* foi certificada como o edifício de madeira mais alto do mundo e o edifício híbrido de madeira-concreto mais alto do mundo pelo

Conselho de Grandes Edifícios e Habitat Urbano, superando o recorde anteriormente detido pelo edifício *Mjøstårnet*.

Figura 1.2: Edifício Ascent



Fonte: Council on Tall Buildings and Urban Habitat (2022)

A ampla utilização da madeira, frequentemente explorada de forma predatória e sem políticas de reflorestamento, causa uma diminuição na área total de florestas no mundo. Conforme a Organização de Alimentos e Agricultura das Nações Unidas (FAO - Food and Agriculture Organization, 2020), estima-se que a área florestal total diminuiu de 4235 milhões de hectares para 4058 milhões de hectares entre 1990 e 2020. A norma brasileira de estrutura de madeira, a ABNT NBR 7190 (2022a) divulga as propriedades de algumas madeiras de florestas nativas para aplicação estrutural, havendo ausência de algumas espécies devido ao uso predatório no passado. Devido ao desmatamento e ao uso predatório, houve uma modificação na relação oferta-demanda, resultando em um aumento no preço da madeira (SANTANA; SANTANA; SANTOS, 2011).

Uma alternativa para conter o desmatamento é utilizar madeira de floresta plantada, que consiste em espécies de rápido crescimento, geralmente pinus e eucaliptos. O cultivo de madeira plantada teve expansão a partir da década de 60 (MOREIRA; SIMIONI; OLIVEIRA, 2017), passando a suprir de forma crescente, inicialmente, a demanda da indústria de celulose e papel e, posteriormente, de outros segmentos. Estima-se que a área de florestas plantadas tenha aumentado de 170 milhões de hectares para 292 milhões de hectares entre 1990 e 2020 (FAO, 2020).

Como mencionado anteriormente, a exploração predatória e sem políticas de reflorestamento pode resultar em danos irreparáveis à floresta nativa. No entanto, existem formas de exploração sustentável e consciente da madeira de floresta nativa, como a exploração associada a programas de plantio e cultivo de novas mudas, visando substituir as

árvores retiradas da natureza em locais de desmatamento controlados e autorizados pelo órgão responsável.

O uso de madeira para aplicações estruturais no Brasil apresenta um potencial significativo devido à grande diversidade de espécies encontradas na flora brasileira, como destacado por Santos *et al.* (2022). Segundo Steege *et al.* (2020), foram catalogadas 11.194 espécies de árvores, 1225 gêneros e 140 famílias na Bacia Amazônica entre os anos de 1707 e 2015. A Floresta Amazônica possui uma área de 6.850.476 km², com uma estimativa de 16.000 espécies arbóreas, sendo que o Brasil detém a maior parte dessa área (4.102.893 km²) e já catalogou 7694 espécies, com uma estimativa de 12.655 espécies. Esse enorme potencial, associado a uma política de exploração sustentável e responsável, possibilita o uso da madeira de floresta nativa para fins estruturais. Entretanto, é preciso superar os preconceitos e a má utilização do material, bem como disseminar as informações tecnológicas disponíveis para evitar problemas de durabilidade nas estruturas, como salientado por Calil Júnior *et al.* (2019).

No Brasil, a norma que estabelece os preceitos básicos para o dimensionamento de estruturas de madeira é a ABNT NBR 7190-1 (2022b), que traz modelos de dimensionamento inspirados no *Euro Code 5 EN 1995-1-1* (2004). No caso de madeiras de floresta plantada, a classe de resistência é obtida por meio do ensaio a flexão estática. No entanto, é importante ressaltar que a ABNT NBR 7190-1 (2022b), ao caracterizar a madeira de floresta nativa, mantém o procedimento padrão com corpos de prova de pequenas dimensões e isentos de defeitos, em que a resistência a compressão determina a classe de resistência. Existem cinco classes de resistência, definidas de acordo com a resistência característica na compressão paralela às fibras ($f_{c0,k}$): D20 ($20 < f_{c0,k} < 30$ MPa), D30 ($30 \leq f_{c0,k} < 40$ MPa), D40 ($40 \leq f_{c0,k} < 50$ MPa), D50 ($50 \leq f_{c0,k} < 60$ MPa) e D60 ($f_{c0,k} > 60$ MPa). A Tabela 1.1 apresenta a resistência característica na compressão paralela às fibras ($f_{c0,k}$), a resistência característica ao cisalhamento paralelo às fibras ($f_{v0,k}$), o valor médio do módulo de elasticidade na compressão medido na direção paralela às fibras da madeira ($E_{c0,med}$) e a densidade com teor de umidade padrão igual a 12% ($\rho_{12\%}$).

Tabela 1.1: Classes de resistência de espécies de florestas nativas definidas em ensaios de corpos de prova isentos de defeitos

Classes	$f_{c0,k}$ (MPa)	$f_{v0,k}$ (MPa)	$E_{c0,med}$ (MPa)	$\rho_{12\%}$
D20	20	4	10000	500
D30	30	5	12000	625
D40	40	6	14500	750
D50	50	7	16500	850
D60	60	8	19500	1000

Fonte: ABNT NBR 7190-1 (2022b)

A utilização da madeira como material construtivo é significativa em regiões que enfrentam temperaturas muito baixas, como é o caso da região sul do Brasil (FRANCK FILHO, 2005). Além disso, a madeira possui propriedades isolantes térmicas naturais, contribuindo para um melhor desempenho térmico da edificação (GIGLIO; BARBOSA, 2006). Entre os sistemas construtivos aplicados, destaca-se o *Wood Frame*, que é amplamente utilizado nos Estados Unidos para construção de residências, apartamentos, edifícios comerciais e industriais em madeira. A aplicação da madeira em coberturas de edificações residenciais, comerciais, industriais e rurais, na forma de treliças planas, é bastante comum. A Figura 1.3 apresenta exemplos de utilização da madeira em sistemas de cobertura.

Figura 1.3: Madeira em sistemas de cobertura



Fonte: Construindo Decor (2022)¹

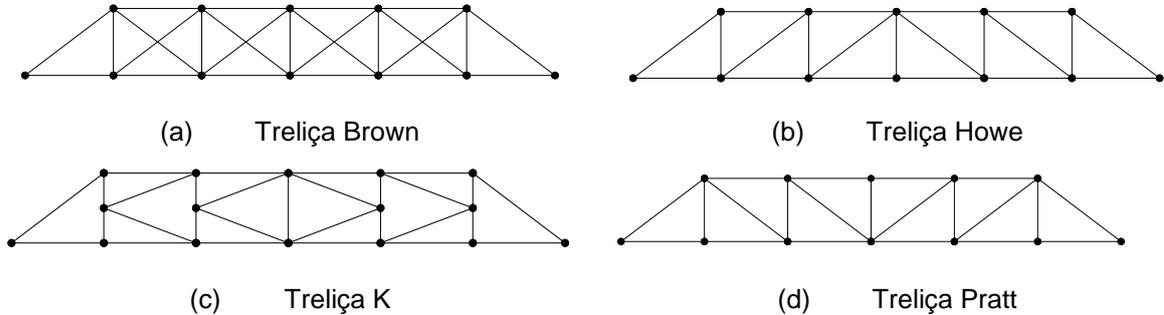
Existem diversas tipologias de treliças, tais como as treliças com banzo paralelo, triangulares e trapezoidais, cada uma com suas particularidades. A fim de conceber projetos racionais, é necessário comparar essas tipologias e escolher a mais adequada para cada caso. Ao realizar o dimensionamento e a verificação dessas diversas tipologias, é preciso contar com o auxílio de inteligência computacional, como um processo de otimização.

A treliça com banzo paralelo é uma tipologia em que os elementos superiores e inferiores da treliça, chamados de banzos, ficam paralelos, enquanto as diagonais seguem um padrão que vai sempre se multiplicando. Em alguns casos, as diagonais são cruzadas,

¹ Construindo Decor (2022). Disponível em: < <https://construindodecor.com.br/tipos-de-madeira-para-telhado/>>. Acesso em: 01 de outubro de 2022.

formando um “X”. Essa tipologia é indicada para vãos maiores, entre 20 m e 100 m. A Figura 1.4 apresenta algumas das treliças com banzos paralelos mais utilizadas.

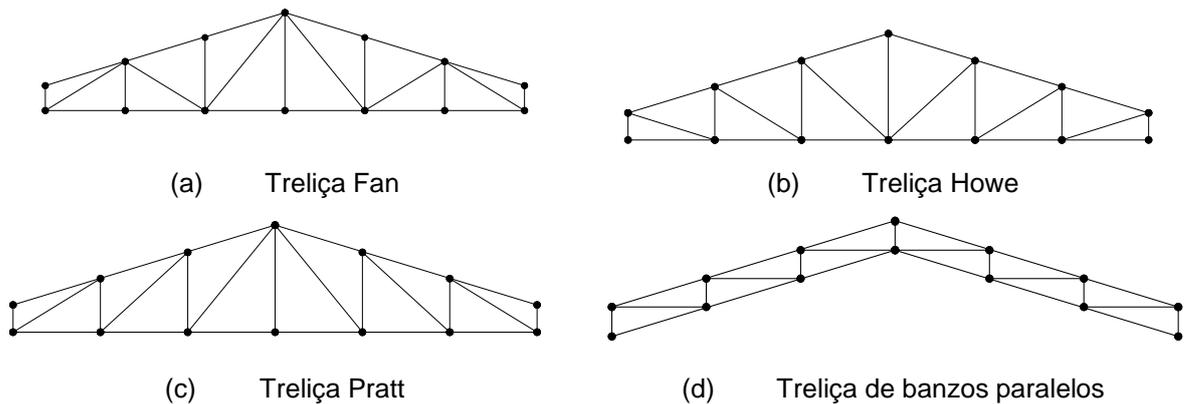
Figura 1.4: Treliças com banzos paralelos



Fonte: Próprio Autor (2023)

As treliças trapezoidais apresentam uma leve inclinação no banzo superior, indicada para coberturas. A Figura 1.5 apresentam exemplos de treliças trapezoidais.

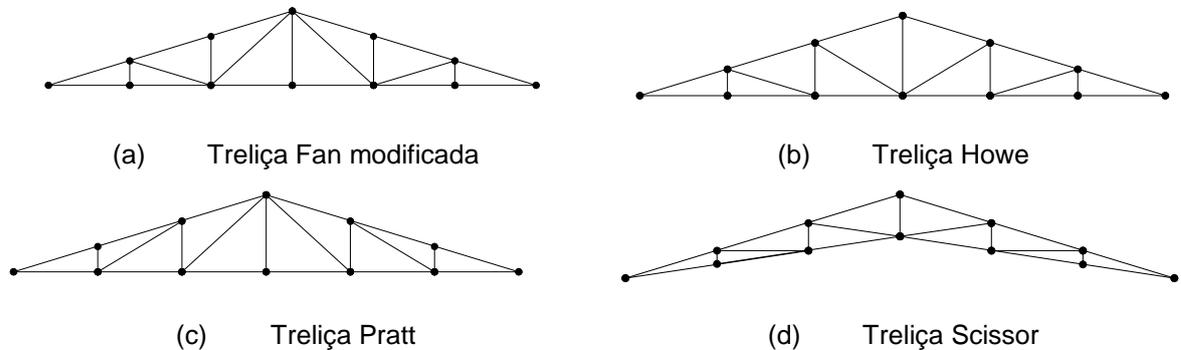
Figura 1.5: Treliças trapezoidais



Fonte: Próprio Autor (2023)

Treliças triangulares são amplamente utilizadas em telhados, sendo indicada para pequenos vãos. A Figura 1.6 apresenta exemplos de treliças triangulares.

Figura 1.6: Treliças triangulares



Fonte: Próprio Autor (2023)

No dimensionamento de projetos de estruturas para o sistema estrutural treliçado, o cálculo manual é uma tarefa complexa e demanda tempo. Geralmente, é associado a uma

metodologia de tentativa e erro, em que os esforços são obtidos por meio de software de análise estrutural, baseado em análise matricial ou método dos elementos finitos (MEF). É importante destacar que não existem diferenças entre os resultados oriundos de ambos os métodos, como a matriz de rigidez e o vetor das forças equivalentes nodais. O engenheiro, baseando-se nas dimensões pré-estabelecidas e com auxílio das respostas (deslocamento, esforços e tensões), estabelece, por meio de tentativas sucessivas, as dimensões das geometrias das seções transversais que atendam a todas as restrições do projeto (KIM *et al.*, 2010). Esse processo demanda a determinação das condições ideais de um sistema estrutural, o que é complexo, uma vez que as condições ideais de projeto podem ser conflitantes, como a redução da massa ou do volume de uma estrutura, que implica a redução da rigidez e resulta em maiores deslocamentos (LEMONGE *et al.*, 2021).

Devido à complexidade desse problema e às muitas variáveis envolvidas, o cálculo manual tem sido substituído por procedimentos de cálculo para projetos estruturais que contam com o auxílio da ciência computacional. Essa abordagem é essencial para agilizar o projeto de estruturas, acelerando o processo de desenvolvimento, reprodução em escala e melhoria da capacidade de teste e refinamento do projeto (MORAES *et al.*, 2022).

Com a evolução do procedimento de dimensionamento a partir de métodos computacionais, a otimização estrutural tornou-se uma ferramenta viável, aplicada em vários sistemas estruturais, incluindo estruturas de madeira, como vigas (MAYENCOURT; MUELLER, 2020, PECH *et al.*, 2019, SCHIETZOLD; GRAF; KALISKE, 2021), pórticos (MAM *et al.*, 2020) e treliças (CHRISTOFORO *et al.*, 2022, MORAES *et al.*, 2022, VILLAR *et al.*, 2016, VILLAR-GARCÍA *et al.*, 2019).

Embora existam algumas aplicações em otimização de estruturas treliçadas (ou outros sistemas estruturais) que seguem os requisitos normativos de desempenho para comparar tipologias, poucos estudos abordaram esse tema. A comparação entre tipologias é necessária para projetos racionais, e o auxílio da inteligência computacional, como um processo de otimização, é necessário para executar o dimensionamento e verificação dessas diversas tipologias.

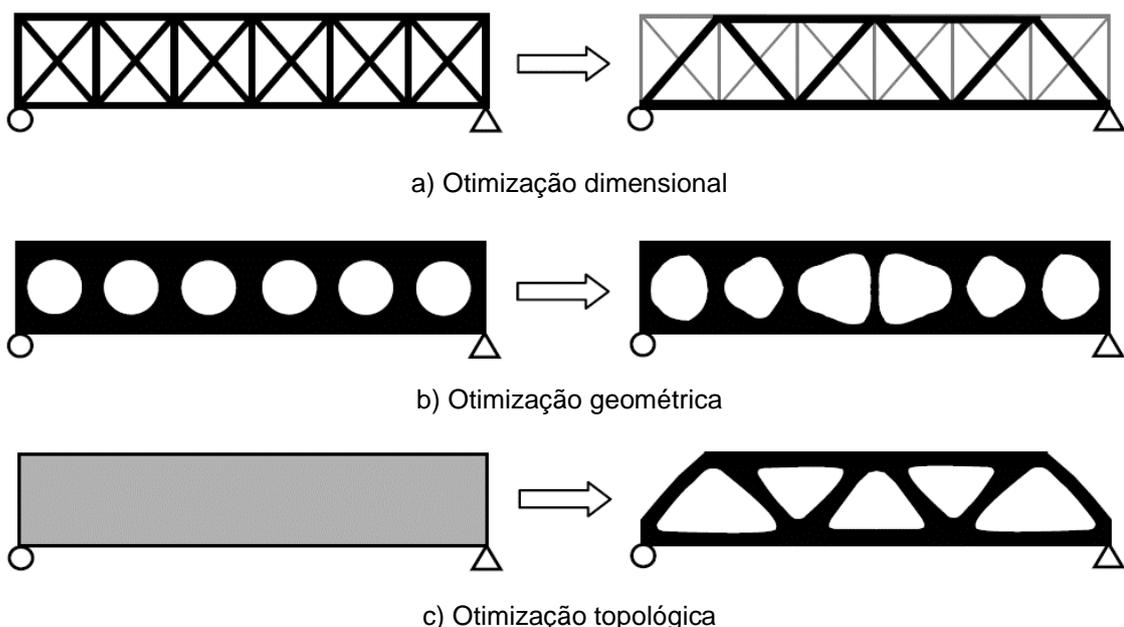
No contexto de processos de otimização, existem dois tipos de algoritmos: probabilísticos e determinísticos (AMARAN *et al.*, 2016). O algoritmo probabilístico inclui aspectos de variações aleatórias em suas formulações, e é frequentemente utilizado para resolver problemas de otimização com um grande número de simulações. No entanto, esses algoritmos são de natureza estocástica e, para alcançar a convergência com alta confiança, muitas simulações são necessárias (GREENHALGH; MARSHALL, 2000, PARSOPOULOS; VRAHATIS, 2002). Por outro lado, os algoritmos determinísticos têm a capacidade de conduzir ou abordar os valores mínimos globais da Função Objetiva (FO), embora o custo computacional seja alto, devido à dificuldade de obtenção das derivadas da FO (LIN; TSAI;

YU, 2012, SEGOVIA-HERNÁNDEZ; HERNÁNDEZ; BONILLA PETRICIOLET, 2015). Os métodos determinísticos sempre produzem a mesma saída para um determinado conjunto de dados de entrada, e atingem o mínimo global da função com menos iterações do que os métodos probabilísticos (HUANG, Changwu; EL HAMI; RADI, 2017, LIN; TSAI; YU, 2012).

Os modelos de otimização são divididos em três tipos: Otimização Dimensional, Otimização de Forma e Otimização Topológica (SOUZA *et al.*, 2016), como apresentado na Figura 1.7.

- A otimização dimensional altera as dimensões das seções transversais dos elementos que compõem a estrutura. O desempenho das estruturas pode ser melhorado por meio das seções transversais ideais. Isto pode resultar em maior rigidez estrutural enquanto diminui o peso estrutural (ISSA, 2019).
- A otimização de forma ou geométrica, altera a posição de determinados nós, ou seja, modifica suas coordenadas. A otimização da forma atinge a forma ideal, modificando os limites pré-determinados (ISSA, 2019).
- A otimização topológica modifica a disposição espacial da estrutura, seja pela retirada de material ou pela alteração do seu padrão estrutural. A otimização topológica é frequentemente aplicada na otimização estrutural. Todas as definições são baseadas em uma análise de modelo. O resultado é a distribuição ótima do material (ISSA, 2019).

Figura 1.7: Representação dos três tipos de otimização estrutural



Fonte: Bendsøe e Sigmund (2004)

A técnica de otimização probabilística consiste em um conjunto de métodos meta-heurísticos, subdivididos em bio-inspirados, cuja formulação matemática é inspirada pela

natureza. Em geral, as meta-heurísticas podem ser classificadas em métodos baseados em soluções únicas e métodos baseados em população (BLUM; ROLI, 2003). Os algoritmos existentes baseados na população se encaixam em três categorias principais: Algoritmo Evolucionário (AE), algoritmos baseados em conceitos físicos e Inteligência de enxame.

A Inteligência de enxame é uma técnica de otimização meta-heurística de inspiração biológica, também conhecida como bio-inspirada, que enfatiza a distribuição de agentes individuais para solucionar problemas complexos. Essa técnica incorpora a filosofia do comportamento coletivo das espécies naturais. Em comparação com os algoritmos baseados em conceitos físicos, os algoritmos baseados em inteligência de enxame enfatizam o comportamento coletivo simples de agentes individuais, em vez de mecanismos de controle complexos (NG *et al.*, 2018). Diferentes algoritmos baseados em inteligência de enxame foram introduzidos em aplicações de algoritmos de otimização, tais como: *Artificial Bee Colony* (ABC), *Ant Colony Optimization* (ACO) *Algorithm*, *Bat Algorithm* (BA), *Particle Swarm Optimization* (PSO) e *Firefly Algorithm* (FA). O *Firefly Algorithm* (FA) é amplamente utilizado em processos de otimização estrutural (CHRISTOFORO *et al.*, 2022, GANDOMI; YANG; ALAVI, 2011, LIEU; DO; LEE, 2018, MORAES *et al.*, 2022, PEREIRA *et al.*, 2020).

Os métodos de otimização têm como objetivo minimizar a massa da estrutura, atendendo simultaneamente a todas as restrições de projeto, possibilitando a comparação do desempenho entre espécies de madeiras distintas, bem como entre tipologias distintas com a mesma forma básica (triangulares, retangulares, trapezoidais, etc.) para uma dada espécie de madeira estabelecida.

1.1 OBJETIVOS

O principal objetivo desta pesquisa é comparar diferentes tipologias, considerando as tipologias Fan modificada e Howe triangulares, a fim de minimizar o consumo de madeira, examinando como diferentes espécies de madeira de florestas nativas afetam esse processo. Além disso, outros objetivos deste estudo incluem:

- Analisar as restrições de projeto para cada tipologia.
- Avaliar quanto solicitada a treliça otimizada está nas verificações de Estado Limite Último (ELU).
- Verificar as condições do Estado Limite de Serviço (ELS), pós-otimização.

1.2 JUSTIFICATIVA

Por meio de uma revisão bibliográfica, constatou-se a existência de pesquisas recentes sobre a utilização da madeira como elemento estrutural. No entanto, observou-se uma escassez de estudos que empreguem o dimensionamento de projeto de estruturas de madeira associado a um algoritmo de otimização que utilize inteligência computacional para a análise e projeto de estruturas de cobertura, especialmente com ênfase no dimensionamento.

Devido à ampla utilização de estruturas de madeira treliçadas em coberturas, um estudo que analise a influência da geometria das treliças para determinadas espécies de madeira e a influência dos modelos de cálculo no dimensionamento previsto em normas terá uma contribuição significativa no estudo comparativo entre espécies e tipologias de treliças.

O Brasil tem passado por um processo de transição na popularização e utilização da madeira em sistemas estruturais. Portanto, essa pesquisa é relevante, pois seus resultados e discussões são pertinentes para o desenvolvimento de projetos com uso racional e técnico da madeira.

Além disso, o estudo se justifica pela falta de pesquisas que empreguem a análise matricial de treliças planas de madeira. Embora a literatura apresente diversos estudos que contemplem os deslocamentos e esforços em estruturas de madeira, a abordagem via análise matricial associada a um algoritmo de otimização voltada ao dimensionamento de estruturas de madeira para coberturas tem pouca recorrência na literatura, sendo passível de novas contribuições.

Quando uma peça de madeira é submetida a uma carga, é comum ocorrer uma deformação elástica inicial. No entanto, se essa carga for mantida por um longo período de tempo, uma deformação adicional, conhecida como fluência, também pode ocorrer. Esse comportamento é caracterizado pela deformação contínua da madeira sob tensões baixas, durante um período prolongado. Vale ressaltar que, em casos de cargas elevadas, pode haver a ruptura da estrutura, também conhecida como ruptura tardia.

A fluência é um fator crucial a ser considerado no projeto e análise de estruturas de madeira, dada a natureza das propriedades da madeira quando submetida a carregamentos de longa duração. Portanto, é fundamental levar em conta os efeitos da fluência ao projetar estruturas de madeira, a fim de garantir sua durabilidade e segurança. Tais efeitos foram considerados para o desenvolvimento do presente trabalho.

1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação foi segmentada em sete capítulos, cujos conteúdos estão listados a

seguir:

- Capítulo 1 – Introdução: Traz uma contextualização acerca da temática proposta, apresentando o potencial da madeira como elemento estrutural e seu valor para o meio ambiente. Apresenta também o cenário atual das estruturas de madeiras construídas no mundo, apresentado conceito introdutórios sobre otimização e inteligência computacional, culminando nos objetivos e justificativas da pesquisa.
- Capítulo 2 – Revisão Bibliográfica: Neste capítulo foram abordados importantes estudos referentes à análise de treliças planas de madeira associado ao uso de algoritmos de otimização determinísticos e heurísticos. Além disso, realiza-se uma análise crítica das pesquisas estudadas, ressaltando a relevância da temática proposta.
- Capítulo 3 – Aspectos Fundamentais: Este capítulo esclarecerá conceitos fundamentais referentes ao projeto de estruturas de cobertura em madeira, método de otimização por meio do *Firefly Algorithm* (FA) e da análise estrutural via análise matricial, sendo fundamental para o entendimento da metodologia aplicada.
- Capítulo 4 – Material e Métodos: Neste capítulo são expostas as condições necessárias para a aplicação de um estudo paramétrico, incluindo os recursos e ferramentas computacionais utilizados no processo de otimização. Serão abordados aspectos importantes como a função objetivo adotada, o método de penalização utilizado para a função objetivo, o método para o tratamento de restrições, bem como os parâmetros adotados para o algoritmo de otimização FA. Adicionalmente, serão discutidos parâmetros e considerações relevantes para o processo de otimização das treliças, bem como as ações atuantes que devem ser consideradas no estudo. Por fim, será apresentada a metodologia utilizada para a caracterização das espécies de madeiras a serem utilizadas no estudo.
- Capítulo 5 – Resultados e Discussões: Resultados da caracterização das espécies, do processo de otimização e do estudo paramétrico efetuado.
- Capítulo 6 – Considerações Finais: Conclusões a respeito dos resultados obtidos.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A revisão bibliográfica é uma ferramenta crucial para a compreensão de um assunto e o desenvolvimento de pesquisas. Este estudo tem como objetivo realizar uma revisão sistemática (RSL) da literatura sobre o uso de métodos de otimização em estruturas de madeira, visando identificar lacunas no conhecimento, vantagens e desvantagens dos métodos utilizados e possíveis soluções para os desafios encontrados. A revisão permitirá avaliar o impacto desses métodos na eficiência, resistência e segurança das estruturas de madeira, contribuindo para o avanço do conhecimento nesta área e estabelecendo uma base sólida para futuras pesquisas.

2.1 REVISÃO SISTEMÁTICA DE LITERATURA

No presente trabalho realizou-se uma RSL com objetivo de apresentar o estado da arte referente ao uso de métodos de otimização em estruturas de madeira. A RSL foi elaborada com base em um levantamento do atual estado da arte do tema, com a identificação e seleção de pesquisas relevantes, seguida pela coleta e análises dos dados nelas apresentados (BIOLCHINI *et al.*, 2007). Foi adotada a metodologia proposta por Brereton (2007) afim de desenvolver a RSL, que se baseia em três etapas: Planejamento, Execução e Extração de dados.

Os critérios de busca adotados para a RSL foram definidos para responder às seguintes perguntas:

- Quais os principais métodos de otimização aplicados a estruturas de madeiras?
- Quais são os tipos de sistemas estruturais em madeira aplicados em estudos de otimização?
- Qual é a abordagem mais comum para a otimização de estruturas de madeira?
- Quais são os principais resultados obtidos nos estudos de otimização de estruturas de madeira?
- Quais são as vantagens e desvantagens dos métodos de otimização aplicados a estruturas de madeira?

A fim de consultar as bases de dados para periódicos científicos, utilizou-se a seguinte String de busca: (Wood OR Timber) AND (Optimiz*) AND (Structur*) AND (Design).

2.1.1 PLANEJAMENTO

O planejamento do método de seleção de trabalhos foi baseado na avaliação do problema de pesquisa, a fim de obter uma visão geral dos trabalhos em andamento e o atual estado da arte do tema em fontes disponíveis, identificadas por meio de uma análise exploratória preliminar. As principais bases de dados, mundialmente reconhecidas pela alta qualidade e selecionadas na RSL, são as seguintes:

- SCOPUS Digital Library (<https://www.scopus.com>);
- Web of Science Digital Library (<https://www.webofknowledge.com>);
- SciELO (<https://scielo.org>);

Os critérios de inclusão e exclusão na revisão sistemática foram estabelecidos com o objetivo de limitar a seleção de trabalhos com base em avaliações qualitativas relevantes ao objetivo da pesquisa. De forma a definir quais artigos deveriam ser incluídos na revisão, foram estabelecidos os seguintes critérios de inclusão (I) e exclusão (E), apresentados na Tabela 5.

Tabela 2.1: Critérios de inclusão (I) e exclusão (E) dos artigos

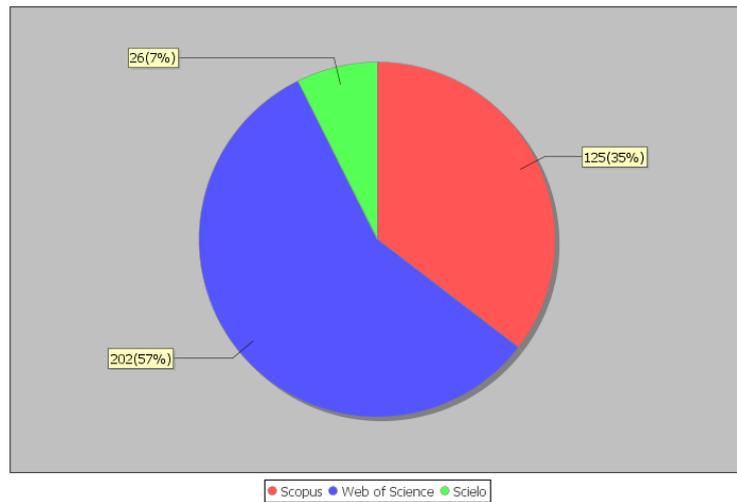
Critério	
Inclusão (I)	Exclusão (E)
Trabalhos disponíveis integralmente em bases de dados científicas ou em versões impressas.	Trabalhos indisponíveis integralmente em bases de dados científicas ou em versões impressas.
Trabalhos que apliquem técnicas de otimização em estrutura de madeira.	Trabalhos que apliquem técnicas de otimização em outras estruturas.
Trabalhos que apliquem otimização dimensional isoladamente ou associada a otimização topológica, ou geométrica.	Trabalhos que apliquem otimização geométrica ou topológica.
Trabalho de revisão da literatura sobre técnicas de otimização aplicadas a estrutura de madeira.	Trabalhos não aderentes a pesquisa.

Fonte: Próprio Autor (2023)

2.1.2 EXECUÇÃO DA REVISÃO SISTEMÁTICA

Com base nos critérios de busca, foram obtidos 2287 resultados em 14 de fevereiro de 2023. Esses resultados foram restritos a documentos em língua inglesa (Artigos técnicos e científicos). Após aplicar os filtros supramencionados, a quantidade de resultados foi reduzida para 353 documentos. A Figura 2.1 apresenta a distribuição desses resultados por plataforma de busca.

Figura 2.1: Distribuição de resultados por plataforma de busca

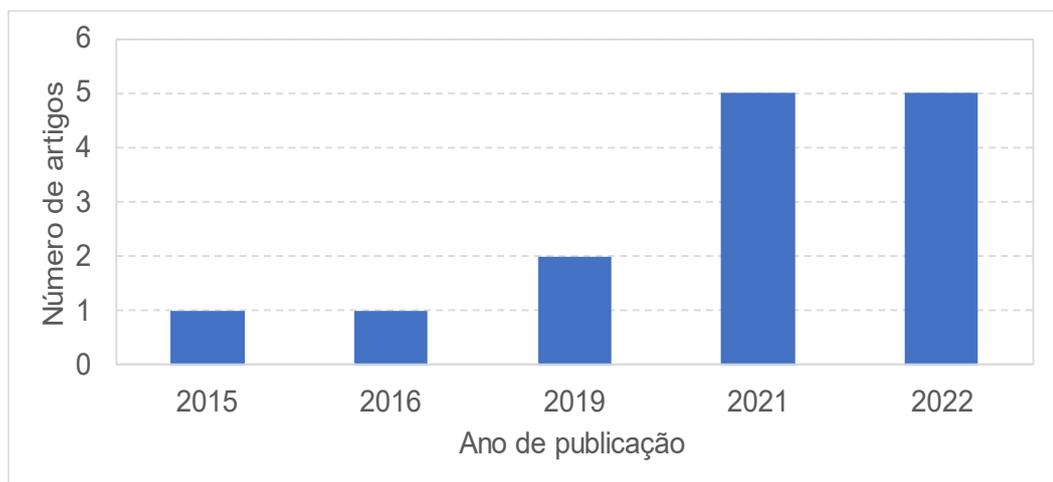


Fonte: Próprio Autor (2023)

2.1.3 EXTRAÇÃO DE DADOS

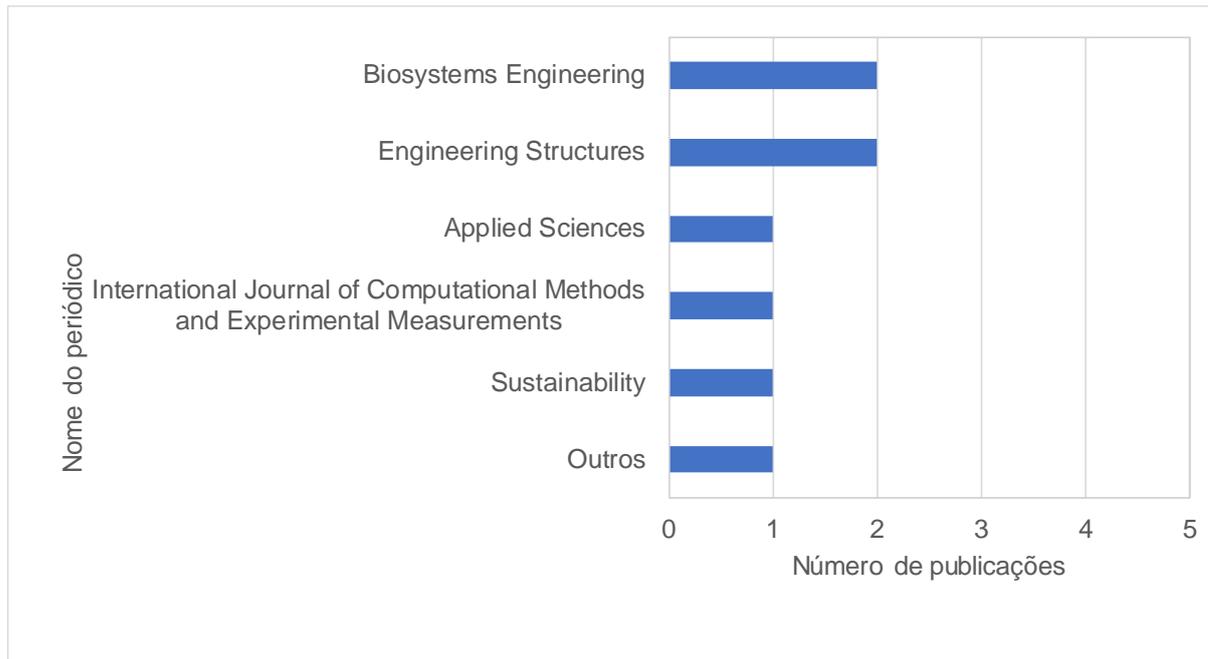
Após a execução da RSL, foram selecionados os trabalhos aderentes ao tema da pesquisa, resultando em um total de 14 artigos. A Figura 2.2 apresenta a evolução da produção anual de artigos relacionados ao tema, indicando um crescimento do número de publicações entre os anos de 2021 e 2022.

Figura 2.2: Evolução anual dos artigos conforme as *strings* de busca



Fonte: Próprio Autor (2023)

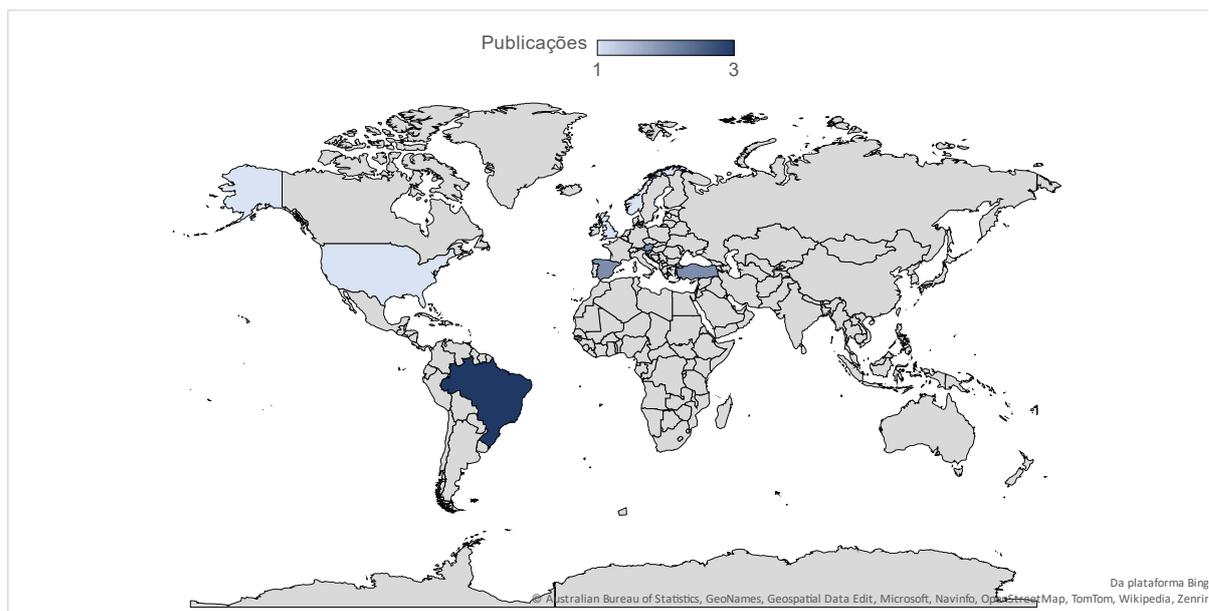
Foi possível, também, identificar os 12 periódicos relevantes sobre a temática nas bases analisadas, os quais são apresentados na Figura 2.3. Destacam-se os periódicos *Engineering Structures*, *Biosystems Engineering*, *International Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*, *Sustainability* e *Applied Sciences*, sendo estes responsáveis por 50% das publicações entre os 14 artigos relacionados.

Figura 2.3: Resumo do número de publicações por periódico

Fonte: Próprio Autor (2023)

A Figura 2.4 apresenta um esboço da quantidade de publicações sobre a temática técnica de otimização aplicada a estruturas de madeira, classificada por país. Dos 14 artigos selecionados, identifica-se a existência de 8 países com maior produção, com destaque para Brasil, Espanha, Turquia, Áustria e Eslovênia, os quais são responsáveis por 78,57% das publicações sobre o tema. É notável a concentração significativa vindas dos continentes europeu e americano. Essas informações foram obtidas a partir da localização da instituição onde o primeiro autor está vinculado.

Figura 2.4: Resumo do número de publicações por país



Fonte: Próprio Autor (2023)

2.2 OTIMIZAÇÃO APLICADA A ESTRUTURAS DE MADEIRA

Nesta sessão, apresentam-se os estudos de otimização aplicados à estrutura de madeira obtidos por meio da RSL. Na Tabela 2.2 são apresentadas as metodologias aplicadas, assim como os principais resultados obtidos nos estudos.

Tabela 2.2: Resumo resultados RSL

Autor	Sistema estrutural otimizado	Tipo de otimização	Método de otimização utilizado
Moraes <i>et al.</i> (2022)	Treliça	Dimensional	<i>Firefly Algorithm (FA)</i>
Christoforo <i>et al.</i> (2022)	Treliça	Dimensional	<i>Firefly Algorithm (FA)</i>
Kromoser <i>et al.</i> (2021)	Treliça	Geométrica e Dimensional	<i>Grasshopper Evolutionary Algorithm Galapagos</i>
Villar-García <i>et al.</i> (2019)	Treliça	Dimensional	<i>Genetic Algorithm (GA)</i>
Villar <i>et al.</i> (2016)	Treliça	Dimensional	<i>Genetic Algorithm (GA)</i>
Jelušič e Kravanja (2017)	Viga	Dimensional	<i>Multi-Parametric Mixed-Integer Non-Linear Programming (MINLP)</i>
Kravanja e Žula (2021)	Pórtico	Dimensional	<i>Multi-Parametric Mixed-Integer Non-Linear Programming (MINLP)</i>
D'amico <i>et al.</i> (2015)	Cascas de grade ondulado para estrutura de cobertura	Dimensional	<i>Local Search</i>
Huang, Pei e Busch (2021)	Paredes de balanço de madeira	Dimensional	<i>Genetic Algorithm (GA)</i>
Pech <i>et al.</i> (2019)	Vigas	Dimensional	<i>Genetic Algorithm (GA)</i>
Ulusoy (2022)	Pórtico	Dimensional	<i>Teaching-Learning-Based Optimization (TLBO)</i>

Fonte: Próprio Autor (2023)

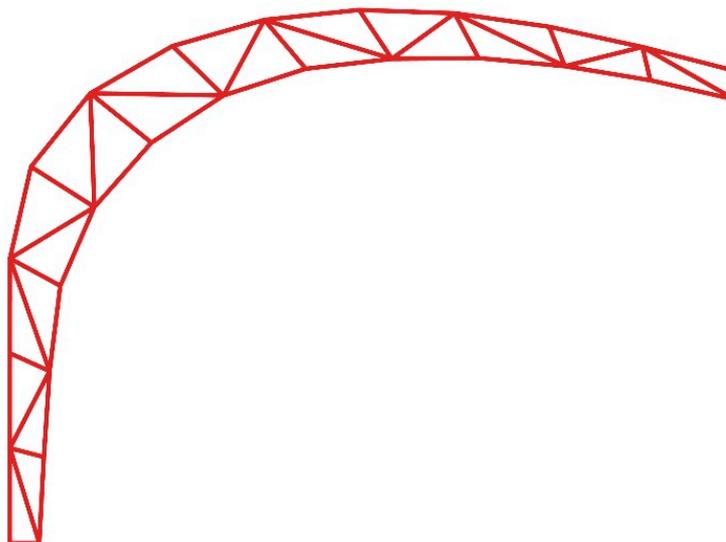
2.2.1 OTIMIZAÇÃO GEOMÉTRICA ASSOCIADA A DIMENSIONAL

No estudo conduzido por Kromoser *et al.* (2021), foram aplicadas técnicas de otimização no projeto de treliças de madeira, considerando o uso exclusivo desse material em todos os componentes da estrutura. O trabalho abrange duas áreas de pesquisa: otimização da geometria das treliças (dimensional e geométrica) e otimização das ligações, utilizando exclusivamente conexões madeira-madeira. Desta forma, os autores adotaram a estratégia baseada em otimização numérica por meio de um projeto paramétrico da treliça, empregando um algoritmo genético visando minimizar o consumo de material.

O processo de otimização iniciou-se com a definição de uma primeira versão da treliça, ilustrada na Figura 2.5, estabelecendo a altura em relação ao piso e ao teto existente, bem como a área de trabalho necessária, utilizadas como condições de contorno. Essa treliça

serviu como modelo de referência para todos os resultados da otimização e apresentava 12 segmentos com espaçamento regular entre as subdivisões.

Figura 2.5: Treliza de referência, 12 segmentos diagonais alternadas



Fonte: Kromoser *et al.* (2021)

Kromoser *et al.* (2021), utilizou o algoritmo evolutivo *Grasshopper Galapagos* para determinar a treliça mais eficiente. Essa estratégia de otimização é baseada no princípio da evolução genética e procura otimizar um valor numérico conhecido como função objetivo. Essa função representa um parâmetro numérico que pode ser otimizado pelo algoritmo, e pode ser tanto minimizado quanto maximizado. No projeto desenvolvido por Kromoser *et al.* (2021), utilizou-se uma otimização simples e com um único objetivo, sendo otimizado apenas um valor numérico em cada processo de cálculo, que pode ser deformação, esforço normal ou massa.

Inicialmente, a deformação foi definida como valor da função objetivo, com o objetivo de alcançar uma treliça com deformação mínima, o que resultou em treliças muito rígidas, com deformações menores que 5 mm, valor inferior ao limite de 32 mm estabelecido pelo Euro Code 5 EN 1995-1-1 (2004). No entanto, a economia de material resultante de 1,4% não foi considerada relevante, uma vez que a deformação passou de 7 para 5 mm.

Em seguida, a esforço normal absoluto máximo foi definida como valor da função objetivo, visando minimizar as forças normais nos elementos de escoras (montantes), diagonais e banzos da treliça. Isso resultou em uma redução de massa de 6,7%, com as forças de compressão reduzidas em 22% e as forças de tração diminuindo ligeiramente (6%). Os valores detalhados podem ser encontrados na Tabela 2.3.

Por fim, a massa total da construção foi definida como valor da função objetivo, resultando em uma redução de 14,9% em relação ao modelo de referência. Isso ocorre porque a massa total é diretamente proporcional ao consumo de madeira. A representação da treliça

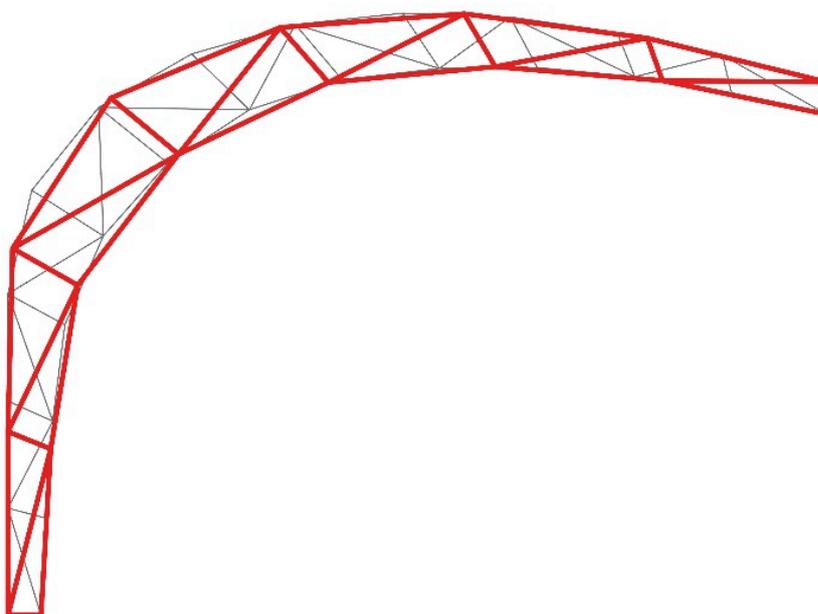
otimizada para a consideração de massa como função objetivo é apresentada na Figura 2.6. Os resultados obtidos por Kromoser *et al.* (2021) são apresentados na Tabela 2.3. Diferentes configurações de treliças são geradas dependendo do valor da função objetivo definido e dos parâmetros liberados para otimização.

Tabela 2.3: Resultados com diferentes funções objetivo

Função Objetivo	Segmentos	Flambagem	Seção transversal	Deformação (mm)	Massa (kg)	Redução de material (%)
Treliça de referência	12	0,46	0,39	7	147,5	-
Deformação	13	0,81	0,30	5	145,4	1,4
Esforço Normal	8	0,70	0,30	8	137,6	6,7
Massa	6	0,90	0,37	7	125,5	14,9

Fonte: Adaptado Kromoser *et al.* (2021)

Figura 2.6: Resultado final da otimização (treliça de referência em cinza)



Fonte: Kromoser *et al.* (2021)

2.2.2 OTIMIZAÇÃO DE TRELIÇAS CONSIDERANDO VARIÁVEIS DISCRETAS

Villar-García *et al.* (2019) desenvolveram um estudo sobre a otimização econômica de treliças de madeira para aplicação em estruturas de cobertura, utilizando algoritmos genéticos. O estudo foi dividido em duas etapas de otimização: a primeira, em duas dimensões, com uma única treliça; e a segunda, em três dimensões, considerando uma estrutura de telhado completa. Ambos os modelos utilizaram uma abordagem discreta, em que a seção transversal foi limitada pelas características das tábuas de MLC disponíveis comercialmente. Isso permitiu avaliar a influência da espessura do laminado na otimização,

comparando com a variação contínua da seção transversal presente na literatura. Foram consideradas diversas configurações de treliças, número de ligações e disposições das treliças. Foram avaliadas as treliças de telhado duplas (Figura 2.7a) compostas por um banzo inferior horizontal e dois banzos superiores inclinados com 10° , todas ligadas por montantes e diagonais. As treliças foram classificadas de acordo com o número (n) de divisões presentes nos banzos superiores.

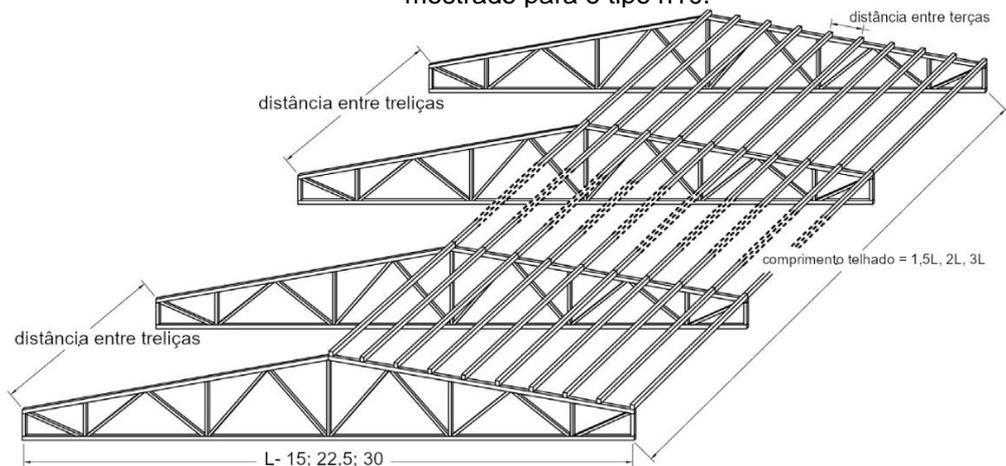
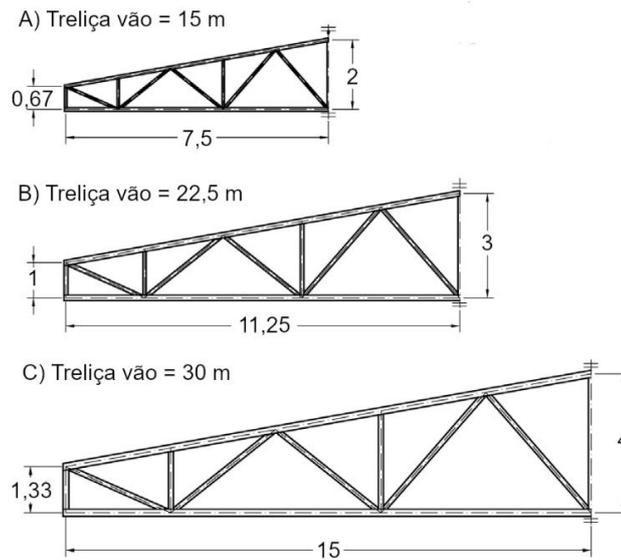
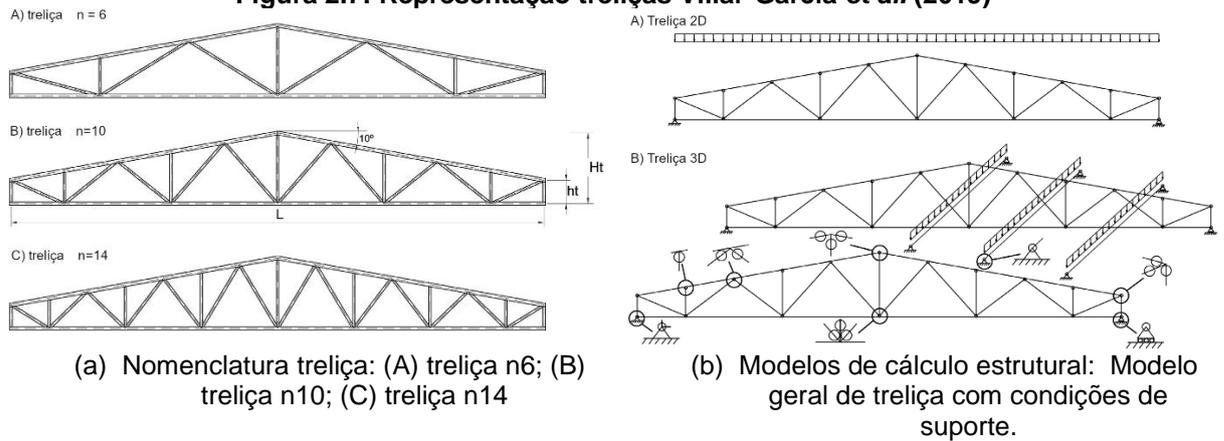
No processo de otimização tridimensional, considerou-se a estrutura do telhado com atuação do carregamento das terças que conectam perpendicularmente as treliças, representada na Figura 2.7b. O material tanto das treliças como das terças foi considerada a madeira laminada colada GL32h. Portanto, foram adotadas as propriedades mecânicas especificadas na norma CEN EN 14080 (2013). Além disso, considerou-se que um invólucro de teto sem função estrutural considerava a carga transferida para a estrutura. No entanto, esta cobertura de teto não foi incluída na otimização econômica, pois nenhuma variação no custo resultaria entre os diferentes casos de estudo.

A otimização da treliça 2D foi realizada considerando-se vãos de 15, 22,5 e 30 m, como mostrado na Figura 2.7c. Além disso, também foi estudado na análise do sistema de cobertura (otimização 3D), conforme representado na Figura 2.7d. O estudo foi baseado em uma abordagem de seção transversal com variáveis discretas, que estabelece uma seção transversal dos elementos de madeira laminada depende da espessura e largura das tábuas empregadas em sua fabricação. Buscando utilizar as espessuras mais usuais para fabricação da madeira laminada, foram considerados os valores múltiplos 35, 40 e 45 mm. Para largura das peças, consideram-se os valores 90, 100, 110, 120, 130, 140, 150, 160, 170, 180, 190, 200, 210 e 220 mm.

A função objetivo é responsável por coletar as variáveis que afetam o projeto, a fim de propor um valor que represente sua eficácia, como volume de material, custo, entre outros. Assim, a solução ótima é alcançada para o valor mínimo da função objetivo. No trabalho realizado por Villar-García *et al.* (2019), foram definidas duas funções objetivo: uma para otimizar as treliças em 2D e outra para otimizar as treliças em 3D, que avaliam o custo total dessas estruturas.

Um dos objetivos de Villar-García *et al.* (2019) foi comparar os resultados obtidos em seu estudo com os resultados anteriores obtidos sob as mesmas condições, porém com variáveis contínuas, resultados obtidos no estudo de Villar-García *et al.* (2016). Essa comparação permitiu avaliar as diferenças entre os resultados obtidos em ambos os estudos.

Figura 2.7: Representação treliças Villar-García *et al.* (2019)



Fonte: Adaptado de Villar-García *et al.* (2019)

Os resultados indicaram que os algoritmos genéticos são uma ferramenta de otimização eficiente para estruturas de madeira em coberturas, com soluções mais econômicas apresentando menor número de ligações nas treliças e menor espessura de

laminado. Adicionalmente, foram determinadas as disposições ideais entre montantes e terças.

A Tabela 2.4 apresenta os resultados obtidos para uma treliça de 22,5 m de vão, incluindo o volume de madeira, seção transversal resultante, deflexão instantânea (levando em conta o deslizamento das juntas no meio do vão) e o custo. Os resultados foram obtidos para três tipos diferentes de treliças (n6, n10 e n14) otimizados por meio da abordagem de seção transversal discreta para cada espessura de laminado, além dos resultados obtidos na otimização contínua realizada por Villar *et al.* (2016). Ao comparar as duas abordagens de otimização, foi observado um aumento tanto no volume de madeira quanto no custo quando a otimização discreta foi aplicada. No entanto, as seções transversais obtidas para ambas as abordagens de otimização foram consistentes e razoáveis para todos os casos, resultando em proporções semelhantes de altura para largura e dimensões totais.

Tabela 2.4: Comparação dos resultados da treliça 2D entre a otimização contínua (Otim-C) e discreta

Vão Treliça (m)	22,5												
Geometria da treliça	n6				n10				n14				
Espessura do laminado	Otim-C	35	40	45	Otim-C	35	40	45	Otim-C	35	40	45	
Dimensões banzo superior (mm)	b	175	180	160	170	165	190	170	190	160	180	170	190
	h	175	175	200	180	170	140	160	135	170	140	160	135
Dimensões banzo inferior (mm)	b	95	100	90	100	85	100	90	90	90	100	90	90
	h	140	140	160	180	150	140	160	180	150	140	160	180
Dimensões elementos intermediários (mm)*	b	90	100	90	100	85	100	90	100	75	90	90	100
	h	70	140	160	135	170	140	160	135	170	140	160	135
Volume de Madeira (m ³)		1,47	1,51	1,54	1,56	1,49	1,52	1,56	1,56	1,52	1,55	1,70	1,66
Acréscimo de volume (%)		-	2,59	4,83	6,13	-	1,76	4,44	4,42	-	1,91	11,71	8,98
Custo total (€)		1917,74	1939,3	1974,8	1886,6	2028,03	2034,93	2070,6	2069,96	2168,77	2174,3	2303,2	2270,38
Acréscimo do custo (%)		-	1,12	2,98	3,59	-	0,34	2,10	2,07	-	0,25	6,20	4,69
Deflexão instantânea (mm)		38,5	35,75	34,98	39,60	38,26	38,26	36,96	35,16	40,50	39,75	38,00	37,00

*Diagonais e Montantes

Fonte: Adaptado de Villar-García *et al.* (2019)

A fim de evitar o aumento do custo pela adição de um maior número de laminados, a otimização discreta ajustou a seção transversal através de incrementos de largura. Em alguns casos, o algoritmo selecionou o número mínimo de laminados necessários para garantir a altura mínima da seção transversal, ajustando em seguida a largura em incrementos de 10 mm para atender às necessidades específicas da seção. Essa abordagem tem um caráter mais condizente com a realidade de que a otimização contínua, onde o algoritmo ajusta a altura para o valor exato exigido pelo cálculo e mantém a largura mínima. A diferença é particularmente notável para os elementos intermediários, onde a otimização discreta mostrou que a largura (b) aumenta antes que a altura aumente com a adição de mais um laminado.

A treliça composta por menos elementos (n6) foi a mais econômica para todas as espessuras de laminados, além de exigir volumes menores de madeira. Esse resultado também foi observado na otimização contínua realizada por Villar *et al.* (2016).

Ao considerar a espessura do laminado, houve um aumento médio de 5,20% no volume de madeira utilizado. Assim, a abordagem discreta resultou em um aumento médio de custo de 2,59% e um aumento máximo de 6,20% para a treliça n14. Esse aumento de custo foi resultado do aumento do volume de madeira.

A espessura do laminado influenciou o custo e, em geral, a espessura de 35 mm foi a solução mais econômica. Embora as espessuras de 40 e 45 mm tenham resultado em custos mais altos, não houve uma tendência clara entre o aumento do custo e a espessura. Além disso, dentro de cada tipologia de treliça (n6, 10, 14), o aumento do custo em função da espessura foi variável. No entanto, a espessura de 35 mm apresentou o menor aumento quando comparada à otimização contínua, o que implica em uma melhor capacidade de adaptação à otimização contínua da seção transversal. Na treliça mais econômica, a n6, e a menor espessura, 35 mm, a abordagem discreta resultou em um aumento de custo de 1,12% comparado à otimização contínua, sendo que a seção transversal e o número de cavilhas foram praticamente semelhantes, enquanto um volume ligeiramente maior de madeira foi necessário. Esses resultados indicam que a discretização da seção transversal para valores de espessura comercial pode não implicar em um grande aumento de custo.

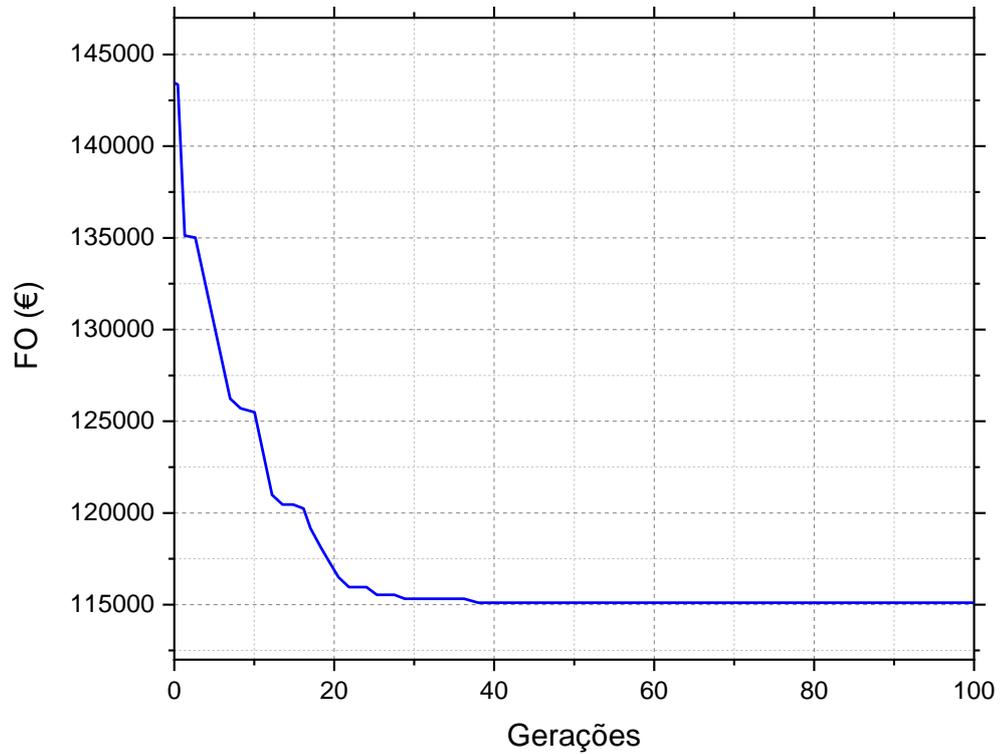
Ao avaliar as razões altura/largura dos elementos estruturais, observou-se que os banzos superiores apresentaram valores próximos à unidade (0,9 em média), enquanto os membros intermediários e inferiores tenderam a cortes retangulares e valores médios de 1,59 e 1,70, respectivamente. Os banzos superiores, submetidos à compressão, exigiam maiores valores de largura para resistir à curvatura compressiva no plano perpendicular à armação, o que não era um problema para os demais membros. Essas diferenças também foram reportadas na otimização contínua, onde proporções semelhantes de altura para largura foram encontradas.

No entanto, no caso dos membros intermediários, o aumento da área da seção transversal através do aumento da largura, em vez do aumento da altura pela adição de uma nova tábu, impediu a obtenção de proporções tão altas quanto na otimização contínua. Adicionalmente, não havia um valor de espessura que se aproximasse muito da relação contínua entre altura e largura, ou seja, uma espessura diferente era mais adequada para cada tipo de membro. Destaca-se, no entanto, que as espessuras de 35 e 40 mm apresentaram os ajustes mais próximos.

A Figura 2.8 ilustra a evolução da função objetivo para a treliça 3D, ou seja, a otimização de toda a estrutura do telhado caracterizada por uma tipologia de treliça n10, uma treliça de 30 m de vão, um comprimento de telhado igual a 3 vezes o vão ($3 \times L$) e uma

espessura de lâmina de 45 mm. A diminuição do custo total para o valor mínimo ocorreu de forma mais acentuada nas primeiras gerações. O resultado ótimo foi alcançado após 46 iterações e, neste caso, o processo concluído por convergência.

Figura 2.8: Evolução da função objetivo (FO) de uma treliça completa caracterizada por uma tipologia de treliça n10, 30 m de vão, comprimento de telhado 3 vezes o vão ($3 \times L$), 45 mm de espessura da placa laminada.



Fonte: Adaptado de Villar-García *et al.* (2019)

3. ASPECTOS FUNDAMENTAIS

Nesta seção, apresentam-se as premissas técnicas que norteiam a metodologia do presente estudo e a fundamentação teórica da análise matricial de estruturas de treliças planas. Cabe destacar que as premissas de dimensionamento consideradas envolvem edificações cujas cargas acidentais não ultrapassam 5 kN/m², devido à consideração das combinações propostas pela ABNT NBR 8681 (2003) para edificações do tipo 2.

3.1 PREMISSAS PARA O PROJETO DE ESTRUTURAS DE COBERTURA SEGUNDO A ABNT NBR 7190 (2022a)

Estruturas de cobertura e telhamento são constituídos de materiais que lhe conferem a propriedade de estanqueidade à água de origem pluvial, tendo como intuito impedir a atuação de intempéries na edificação, e, fornecer privacidade e conforto ao usuário. Na maioria das estruturas de cobertura e telhamento, são aplicados sistemas estruturais baseados em treliças planas, e conjunto com vigas longitudinais (terças) que suportam o sistema de telhas.

A execução de projetos de estrutura de cobertura requer algumas etapas para desenvolvimento: concepção estrutural (geometria), levantamento de ações e carregamentos, análise estrutural, dimensionamento, detalhamento e execução. Portanto, as etapas são baseadas em premissas normativas que foram discutidas ao longo do trabalho.

3.1.1 *ESFORÇOS E DESLOCAMENTOS DE PROJETO*

A ABNT NBR 7190-1 (2022b) estabelece que as ações a serem consideradas no dimensionamento, os elementos em madeira e sistemas de ligações, quando levantadas separadamente (método usual de projeto) necessitam ser combinados entre si. Tais combinações objetivam a majoração dos esforços e deslocamentos atuantes na estrutura para serem projetadas com coeficientes e margem de segurança. Entretanto, a norma não inviabiliza o parâmetro custo-benefício, uma vez que a combinação se baseia em métodos probabilísticos, contrapondo a ideia de um simples acúmulo de valores em uma variável. Logo, nas seções seguintes apresentam-se as metodologias para cálculo de esforço e deslocamento de projeto para estrutura de madeira, baseando-se no método dos estados limites.

3.1.2 COMBINAÇÕES DE AÇÕES PARA O ESTADO LIMITE ÚLTIMO (ELU)

A fim de avaliar e dimensionar estruturas de madeira no Estado Limite Último (ELU) e Estado Limite de Serviço (ELS) a ABNT NBR 7190-1 (2022b) recomenda aplicação da ABNT NBR 8681 (2003).

No dimensionamento do ELU, aplicou-se a combinação última normal, oriunda de situações com probabilidade de ocorrência suficientemente grande, prevista na ABNT NBR 8681 (2003), assim como descrito na Eq. 3.1.

$$F_d = \sum_{i=1}^m \gamma_{gi} \cdot F_{Gi,k} + \gamma_{q1} \cdot F_{Q1,k} + \sum_{j=2}^n \gamma_{qj} \cdot F_{Qj,k} \cdot \psi_{0j} \quad \text{Eq. 3.1}$$

onde F_d é ação combinada, γ_{gi} são os coeficientes de majoração das ações permanentes, $F_{Gi,k}$ são os valores característicos das ações permanentes, γ_{q1} é o coeficiente de majoração da ação variável principal, γ_{qj} são os coeficientes de majoração das ações variáveis secundárias, $F_{Q1,k}$ é o valor característico da ação variável principal, ψ_{0j} são os fatores de combinação das ações variáveis secundárias, $F_{Qj,k}$ é o valor característico das ações variáveis secundárias, m e n são os números de ações permanentes e ações variáveis secundárias.

As ações permanentes e variáveis podem ser analisadas de forma conjunta ou separada. Quando analisadas de forma conjunta, as ações permanentes são calculadas com o mesmo coeficiente de ponderação (γ_g) e as ações variáveis, de forma análoga, com o coeficiente (γ_q). Quando analisadas separadamente, cada ação corresponderá a um coeficiente (γ).

Além da combinação do ELU (combinação última normal), a ABNT NBR 7190-1 (2022b) recomenda a utilização de uma variação da combinação normal última com a redução da ação variável principal, quando o vento é considerado a ação principal e incidem sobre a estrutura apenas duas ações variáveis, de diferentes naturezas. Sob essa condição, a norma ABNT NBR 7190-1 (2022b) permite a redução de 25% da ação do vento ($F_{Qw,k}$) quando ação variável principal, como apresentado na Eq. 3.2. Tal consideração só é permitida em verificações de peças de madeira e não se aplica em verificação de ligações.

$$F_d = \sum_{i=1}^m \gamma_{gi} \cdot F_{Gi,k} + \gamma_{qw} \cdot 0,75 \cdot F_{Qw,k} + \gamma_{q2} \cdot F_{Q2,k} \cdot \psi_{0,q2} \quad \text{Eq. 3.2}$$

onde γ_{qw} é o coeficiente de majoração da ação do vento, γ_{q2} é a coeficiente de majoração do fator de combinação da carga variável secundária e $\psi_{0,q2}$ é a fator de combinação da carga variável secundária.

Fraga (2020) discute que essa redução pode ser questionada quanto a área de confiabilidade e segurança das estruturas sob o viés da inversão de esforços. Ventos de sobrepressão raramente são considerados como ação variável principal em uma combinação de ações, exceto em alguns casos cujo ângulo de inclinação do telhado de duas águas for superior a 40°, como descreve a ABNT NBR 6123 (1988). Por outro lado, quando ocorre a incidência de ventos de sucção, devido a sua atuação contrária a gravidade, a ação do vento pode assumir a condição de protagonismo na combinação crítica, amenizada apenas pelas ações permanentes. Nesse sentido, a redução da ação do vento sob essas condições pode não representar uma consideração conservadora, sobretudo quando se trata das barras do banzo inferior. Portanto, a consideração ou não da referida redução de 25% deve ser ponderada pelo projetista ao se efetuar as combinações de ações.

3.1.3 COMBINAÇÕES DE AÇÕES PARA O ESTADO LIMITE DE SERVIÇO (ELS)

Com o intuito de garantir a usabilidade e evitar que as estruturas de madeira apresentem deformação ou deslocamento excessivo, que afetem a utilização da construção ou em aspectos estéticos, além de vibrações excessivas, a ABNT NBR 7190-1 (2022b) define que as estruturas devem ser verificadas no Estado Limite de Serviço (ELS), que está atrelado a estaticidade, durabilidade e utilização da estrutura.

Ao se avaliar estruturas de cobertura, os deslocamentos máximos podem ser combinados e posteriormente comparados com valores limites estabelecidos por norma. A ABNT NBR 7190-1 (2022b) prevê duas hipóteses, considerando deslocamentos instantâneos (δ_{inst}) ou deslocamentos finais ou efetivos (δ_{fin}).

Levando em conta que a madeira possui características distintas de outros materiais, tal como, a significativa deformação ao longo do tempo (fluência), a ABNT NBR 7190-1 (2022b) estabelece que as verificações quanto aos critérios de segurança em ELS devem ser consideradas adotando a combinação rara de serviço conforme a ABNT NBR 8681 (2003) para a avaliação das flechas instantâneas (δ_{inst}). Os deslocamentos instantâneos, desconsiderando os efeitos da fluência, são deformações que ocorrem na estrutura também conhecido como flechas, calculadas conforme a Eq. 3.3.

$$\delta_{inst} = \sum_{i=1}^m \delta_{inst,Gi,k} + \delta_{inst,Q1,k} + \sum_{j=2}^n \delta_{inst,Qj,k} \cdot \psi_{1,j} \quad \text{Eq. 3.3}$$

onde $\delta_{inst,Gi,k}$ são as flechas instantâneas devido à ação do peso próprio, $\delta_{inst,Q1,k}$ é a flecha devido à ação variável principal, $\delta_{inst,Qj,k}$ são flechas variáveis secundárias e ψ_1 é o fato de redução para condição frequente.

Já para a avaliação das flechas finais (δ_{fin}) a ABNT NBR 7190-1 (2022b) prevê que se deve considerar a combinação quase permanente e os efeitos da fluência conforme a Eq. 3.4:

$$\delta_{fin} = \sum_{i=1}^m \delta_{fin,Gi,k} + \sum_{j=1}^n \delta_{fin,Qj,k} \quad \text{Eq. 3.4}$$

onde $\delta_{fin,Gi,k}$ e $\delta_{fin,Qj,k}$ são as flechas finais devido a ações peso próprio e variáveis, respectivamente, calculadas conforme a Eq. 3.5 e Eq. 3.6, respectivamente.

$$\delta_{fin,Gi,k} = \delta_{inst,Gi,k} + \delta_{creep} = \delta_{inst,Gi,k} \cdot (1 + \phi) \quad \text{Eq. 3.5}$$

$$\delta_{fin,Qj,k} = \delta_{inst,Qj,k} + \delta_{creep} = \delta_{inst,Qj,k} \cdot \psi_2 \cdot (1 + \phi) \quad \text{Eq. 3.6}$$

onde δ_{creep} é a flecha considerando os efeitos da fluência na madeira e ϕ é o coeficiente da madeira dado pelo ABNT NBR 7190-1 (2022b), conforme a Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Coeficiente de fluência (ϕ)

Materiais	Classe de umidade		
	(1)	(2 e 3)	(4)
Madeira serrada, MLC, MLCC, LVL e roliça	0,6	0,8	2,0 ^a
Compensado estrutura	0,8	1,0	2,5
OSB estrutural	1,5	2,25	-

^a Não é permitido o uso de MLCC para a classe de umidade 4.

Fonte: ABNT NBR 7190-1 (2022b)

Segundo a ABNT NBR 7190-1 (2022b) “a madeira possui características distintas de outros materiais de construção como, por exemplo, a significativa deformação ao longo do tempo (fluência)”. Devido a essa condição, faz-se necessária a aplicação do coeficiente de fluência (ϕ) na estimativa dos deslocamentos finais ou efetivos (Eq. 3.5 e Eq. 3.6), sendo estabelecido a partir do material e da classe de umidade a qual o sistema estrutural está exposto. Classes de umidade mais agressivas resultam em flechas mais acentuadas, uma vez observados os coeficientes de fluência apresentados Tabela 3.1.

3.1.4 VERIFICAÇÃO DO ELU

A fim de verificar as solicitações no ELU, a ABNT NBR 7190-1 (2022b) determina que as peças principais isoladas devem ter uma área mínima de seção transversal de 5000 mm² e espessura mínima de 50 mm.

Nos parâmetros de resistência (f) e módulo de elasticidade (E), a norma estabelece classes de resistência para madeira dos grupos das Coníferas e Folhosas, sobre condição padrão de referência, ou seja, teor de umidade (U) igual a 12%.

O método dos estados limites baseia-se na premissa de majoração dos esforços e minoração das resistências (f) e do módulo de elasticidade (E). Os coeficientes de minoração têm o intuito de compensar as incertezas da resistência característica, bem como os efeitos adversos das imperfeições geométricas. A ABNT NBR 7190-1 (2022b) propõe essa minoração através da utilização dos coeficientes de modificação (k_{mod}) e do coeficiente de ponderação da resistência (γ_w), conforme apresentado na Eq. 3.7.

$$X_d = k_{mod} \cdot \frac{X_k}{\gamma_w} \quad \text{Eq. 3.7}$$

Nessa equação, X_k é valor característico da resistência da madeira, k_{mod} é o coeficiente de modificação da madeira. O coeficiente de ponderação da resistência (γ_w) assume o valor de 1,4 para tensões normais e 1,8 para tensões de cisalhamento.

O coeficiente de modificação (k_{mod}) altera os valores característicos das propriedades de resistência da madeira em função da classe de carregamento da estrutura e da classe de umidade admitida, calculado conforme a Eq. 3.8.

$$k_{mod} = k_{mod_1} \cdot k_{mod_2} \quad \text{Eq. 3.8}$$

em que k_{mod_1} é o coeficiente de modificação 1, definido a partir da classe de carregamento e o tipo de madeira conforme o item 5.8.4.1 da ABNT NBR 7190-1 (2022b) e k_{mod_2} é o coeficiente de modificação 2, definido a partir da classe de umidade e o tipo de material utilizado, de acordo o item 5.8.4.2 da ABNT NBR 7190-1 (2022b).

A norma ABNT NBR 7190-1 (2022b) define que, nas verificações de ELU, quando a verificação for referente à estabilidade lateral de vigas, deve ser considerado o valor efetivo para o módulo de elasticidade ($E_{0,ef}$), conforme a Eq. 3.9:

$$E_{0,ef} = k_{mod_1} \cdot k_{mod_2} \cdot E_{0,med} \quad \text{Eq. 3.9}$$

As verificações de ELU referentes à estabilidade de peças comprimidas e flexo comprimidas, exigem o valor característico para o módulo de elasticidade ($E_{0,05}$), definido na norma como 70% do valor médio do módulo de elasticidade ($E_{c0,med}$), assim como apresentado na Eq. 3.10.

$$E_{0,05} = 0,7 \cdot E_{c0,med} \quad \text{Eq. 3.10}$$

Nas verificações de ELS, deve ser considerado o valor médio do módulo de elasticidade ($E_{0,med}$).

3.1.4.1 VERIFICAÇÃO DOS ESFORÇOS NORMAIS

Tomando como base o modelo estrutural treliçado, as barras são solicitadas apenas a esforços normais, sendo necessária sua verificação à tração (Eq. 3.11) e a compressão (Eq. 3.12) simples. Ambas são extraídas da ABNT NBR 7190-1 (2022b).

$$\sigma_{Nt,d} = \frac{N_{t,d}}{A} \leq f_{t0,d} \quad \text{Eq. 3.11}$$

$$\sigma_{Nc,d} = \frac{N_{c,d}}{A} \leq f_{c0,d} \quad \text{Eq. 3.12}$$

Nessas equações, $\sigma_{Nt,d}$ é o valor de cálculo da tensão atuante de tração, $N_{t,d}$ é o valor de cálculo da força de tração, A é a área da seção transversal, $f_{t0,d}$ é o valor de cálculo da resistência à tração paralela às fibras, $\sigma_{Nc,d}$ é o valor de cálculo da tensão atuante de compressão, $N_{c,d}$ é o valor de cálculo da força de compressão.

Cabe destacar que peças submetidas à compressão simples (Eq. 3.12), devem ser verificadas quanto à estabilidade, devido à possibilidade de ocorrência de esforços de segunda ordem à medida que a esbeltez do elemento se eleva, originando excentricidades.

3.1.4.2 ESTABILIDADE DE PEÇAS COMPRIMIDAS OU FLEXO COMPRIMIDAS

As peças submetidas à compressão e à flexocompressão devem ser verificadas no ELU de estabilidade da ABNT NBR 7190-1 (2022b), que foi baseada no processo de verificação do *Euro Code 5* EN 1995-1-1 (2004). É necessário calcular alguns parâmetros geométricos, nas direções x e y, para o dimensionamento estrutural, tais como, o índice de esbeltez da peça (λ_i) (Eq. 3.13 e Eq. 3.14), raio de giração (r_i) (Eq. 3.15 e Eq. 3.16) e comprimento de flambagem ($L_{0,i}$) (Eq. 3.17 e Eq. 3.18), onde a variável i representa a direção na qual a propriedade geométrica está sendo calculada.

$$\lambda_x = \frac{L_{0,x}}{r_x} \quad \text{Eq. 3.13}$$

$$\lambda_y = \frac{L_{0,y}}{r_y} \quad \text{Eq. 3.14}$$

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad \text{Eq. 3.15}$$

$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad \text{Eq. 3.16}$$

$$L_{0,x} = K_E \cdot L_x \quad \text{Eq. 3.17}$$

$$L_{0,y} = K_E \cdot L_y \quad \text{Eq. 3.18}$$

Nessas equações, I_x e I_y são os momentos de inércia da direção x e y, respectivamente. L_x e L_y são o comprimento real das barras nas direções x e y, respectivamente. K_E é o coeficiente de flambagem por flexão definido no item 6.5.3 da ABNT NBR 7190-1 (2022b), assim como apresentado na Tabela 3.2.

Tabela 3.2: Valores dos coeficientes K_E

Modos de flambagem						
Valores de projeto para K_E	0,65	0,80	1,20	1,00	2,10	2,40
Código das condições de extremidade		Rotação e translação lateral impedidas, translação vertical livre				
		Rotação e translação vertical livres, translação lateral impedida				
		Rotação livre e translações impedidas				
		Rotação impedida e translações livres				
		Rotação e translações livres				

Fonte: ABNT NBR 7190-1 (2022b)

Cabe destacar que os índices de esbeltez das peças tem limites máximos estabelecidos por norma, conforme o item 9.3 da ABNT NBR 7190-1 (2022b). As peças sujeitas à compressão axial ou à flexocompressão não podem possuir esbeltez maior que 140 ($\lambda_{lim,c} = 140$). Por outro lado, para peças submetidas à tração ou flexo tração a esbeltez limite é de 173 ($\lambda_{lim,t} = 173$).

Na verificação da condição de estabilidade de peças comprimidas e flexo comprimidas, é necessário calcular o índice de esbeltez relativa, conforme o item 6.5.4 da ABNT NBR 7190-1 (2022b). O índice de esbeltez relativo nas direções x ($\lambda_{rel,x}$) e y ($\lambda_{rel,y}$), são calculados conforme a Eq. 3.19 e Eq. 3.20, respectivamente.

$$\lambda_{rel,x} = \frac{\lambda_x}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{f_{c0,k}}{E_{0,05}}} \quad \text{Eq. 3.19}$$

$$\lambda_{rel,y} = \frac{\lambda_y}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{f_{c0,k}}{E_{0,05}}} \quad \text{Eq. 3.20}$$

A ABNT NBR 7190-1 (2022b) define uma esbeltez relativa crítica com um valor de 0,3 ($\lambda_{rel,cri} = 0,3$). Logo, para as condições em que a esbeltez relativa em x ($\lambda_{rel,x}$) e y ($\lambda_{rel,y}$), forem menores ou iguais à esbeltez relativa crítica ($\lambda_{rel,x} \leq \lambda_{rel,cri}$ ou $\lambda_{rel,y} \leq \lambda_{rel,cri}$),

dispensa-se a verificação do ELU. Na verificação de estabilidade utiliza-se a condição de segurança relativa aos esforços normais de compressão, como apresentado na Eq. 3.11, e na condição de flexocompressão, assim como apresentado no item 6.3.7 da ABNT NBR 7190-1 (2022b).

Nos casos de índice de esbeltez relativa superior a 0,3, em qualquer direção, além das condições de segurança de compressão simples e flexocompressão, devem ser atendidas as condições de estabilidade conforme a Eq. 3.21 e Eq. 3.22.

$$\frac{\sigma_{Nc,d}}{k_{cx} \cdot f_{c0,d}} + \frac{\sigma_{Mx,d}}{f_{m,d}} + k_M \cdot \frac{\sigma_{My,d}}{f_{m,d}} \leq 1 \quad \text{Eq. 3.21}$$

$$\frac{\sigma_{Nc,d}}{k_{cy} \cdot f_{c0,d}} + k_M \cdot \frac{\sigma_{Mx,d}}{f_{m,d}} + \frac{\sigma_{My,d}}{f_{m,d}} \leq 1 \quad \text{Eq. 3.22}$$

onde, $\sigma_{Mi,d}$ é a tensão normal de flexão proveniente do momento fletor de cálculo de primeira ordem devido às forças laterais, excentricidades na aplicação das forças axiais, curvatura inicial da barra, deformações induzidas ou quaisquer outras situações em que há momentos fletores de primeira ordem atuando na barra; k_M é o coeficiente de correção para o qual é adotado um valor de 0,7 para seções retangulares e 1,0 para outras seções transversais.

É importante salientar que, para condições de treliças ideais as tensões normais de flexão devido a momentos fletores de primeira ordem não atuam nas barras das treliças, pois treliças trabalham predominantemente com esforços normais de tração e compressão.

Os coeficientes k_{cx} e k_{cy} são calculados segundo a Eq. 3.23 e Eq. 3.24, respectivamente.

$$k_{cx} = \frac{1}{k_x + \sqrt{(k_x)^2 + (\lambda_{rel,x})^2}} \quad \text{Eq. 3.23}$$

$$k_{cy} = \frac{1}{k_y + \sqrt{(k_y)^2 + (\lambda_{rel,y})^2}} \quad \text{Eq. 3.24}$$

Os coeficientes k_x e k_y , são calculados conforme a Eq. 3.25 e Eq. 3.26, respectivamente.

$$k_x = 0,5 \cdot \left[1 + \beta_c \cdot (\lambda_{rel,x} - 0,3) + (\lambda_{rel,x})^2 \right] \quad \text{Eq. 3.25}$$

$$k_y = 0,5 \cdot \left[1 + \beta_c \cdot (\lambda_{rel,y} - 0,3) + (\lambda_{rel,y})^2 \right] \quad \text{Eq. 3.26}$$

Da Eq. 3.25 e Eq. 3.26, β_c é o fator para peças estruturais que atendam aos limites de divergência de alinhamento, sendo adotado o valor de 0,2 para madeira maciça serrada e peças roliças e 0,1 para madeira lamelada (MLC e MLCC) e madeira laminada (LVL).

3.1.5 VERIFICAÇÃO DO ELS

Na verificação do ELS, a ABNT NBR 7190-1 (2022b) estabelece valores limites para as flechas, onde se tem a flecha instantânea (δ_{inst}) e final (δ_{fin}). Os valores limites dependem da configuração estática da estrutura, cujos valores estão impressos na Tabela 3.3.

Tabela 3.3: Flechas limites para elementos correntes fletidos

Tipo	δ_{inst}	δ_{fin}
Vigas biapoiadas ou contínuas	L/300 a L/500	L/150 a L/300
Vigas em balanço	L/150 a L/250	L/75 a L/150
Treliças	L/300	L/150

Fonte: Adaptado da ABNT NBR 7190-1 (2022b) e Calil Júnior *et al.* (2019).

Logo, o dimensionamento de sistemas estruturais em madeira deve atender esses requisitos normativos.

3.2 FUNDAMENTOS DO FIREFLY ALGORITHM (FA)

O *Firefly Algorithm* (FA) é baseado em um modelo de otimização probabilística de inspiração biológica proposta por Yang (2008). FA é um método de características populacionais, no qual uma partícula (vaga-lumes) percorre o espaço da amostra em busca da solução ótima e viável. Neste método, são utilizados conceitos de variáveis aleatórias para gerar a população inicial, um evento aleatório limitado pelo problema (YANG, 2008).

O algoritmo foi inspirado na bioluminescência e na influência da interação entre os vaga-lumes no período de acasalamento. Portanto, o método de otimização FA baseia-se em como os vaga-lumes podem emitir luz e serem percebidos por outros indivíduos da mesma população.

Ao conceber o algoritmo, Yang (2008) definiu alguns preceitos para auxiliar no desenvolvimento, incluindo: todos os vaga-lumes têm um único gênero e, tendo um único sexo, são atraídos uns pelos outros; a capacidade de atração de cada vaga-lume é proporcional ao seu brilho próprio, mas distâncias maiores entre os indivíduos diminuem tal capacidade.

Quando a população inicial é criada, o vaga-lume (variável de projeto) inicia uma caminhada aleatória, assim como apresentado na Eq. 3.27, de modo que \vec{x} "se move" de acordo com uma função de atualização da variável de projeto ($\vec{\omega}$), na qual \vec{x} é o vetor das variáveis de projeto, $\vec{\omega}$ é o vetor da função de atualização de \vec{x} , e t é o número de iterações.

$$\vec{x}^{t+1} = \vec{x}^t + \vec{\omega}^t$$

Eq. 3.27

Com base nesta nova direção, são originadas novas posições e possíveis soluções para o ponto ideal de projeto (WANG *et al.*, 2017). Assim, os vaga-lumes se movem em cada etapa do processo iterativo descrito na Eq. 3.28.

$$\vec{\omega}^t = \beta \cdot (\vec{x}_j^t - \vec{x}_i^t) + \alpha \cdot (\vec{\eta} - 0,5 \cdot \vec{\epsilon}) \quad \text{Eq. 3.28}$$

onde β é um termo de atração entre os vaga-lumes i e j ; \vec{x}_i se refere ao vaga-lume i ; \vec{x}_j aos vaga-lume j ; $\vec{\eta}$ é o vetor de números aleatórios entre 0 e 1; α é o fator de aleatoriedade (Eq. 3.29); e $\vec{\epsilon}$ é um vetor unitário.

A fim de garantir a aleatoriedade no processo de otimização, é aplicado um fator de aleatoriedade (α), obtido por meio da Eq. 3.29, que segue um comportamento de decaimento exponencial conforme o número de iterações t , o fator θ é constante (0,98), α_{min} e α_{max} são os limites superior e inferior do fator de aleatoriedade (α).

$$\alpha = \alpha_{min} + (\alpha_{max} - \alpha_{min}) \cdot \theta^t \quad \text{Eq. 3.29}$$

β é a atratividade entre os vaga-lumes do enxame, apresentado na Eq. 3.30, no qual β_0 é a atratividade para uma distância $r = 0$; r_{ij} é uma distância euclidiana entre os vaga-lumes i e j (Eq. 3.31); e γ é o parâmetro de absorção de luz (Eq. 3.32).

$$\beta = \beta_0 \cdot e^{\gamma \cdot r_{ij}^2} \cong \frac{\beta_0}{(1 + \gamma \cdot r_{ij}^2)} \quad \text{Eq. 3.30}$$

$$r_{ij} = |\vec{x}_i^t - \vec{x}_j^t| = \sqrt{\sum_{k=1}^d (\vec{x}_{i,k} - \vec{x}_{j,k})^2} \quad \text{Eq. 3.31}$$

$$\gamma = \frac{1}{(x_{max} - x_{min})} \quad \text{Eq. 3.32}$$

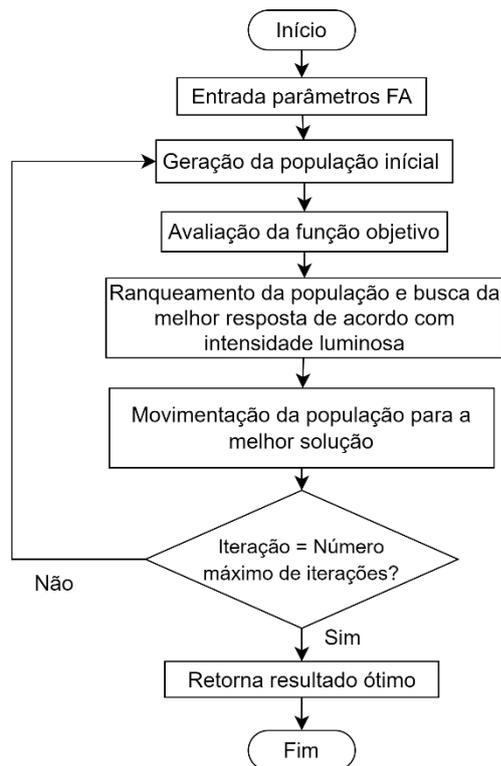
Da Eq. 3.31 e Eq. 3.32, k é o k -ésimo componente do vetor das variáveis de projeto \vec{x} , d é o número de variáveis de projeto, x_{max} é o limite superior das variáveis de projeto e x_{min} é o limite inferior das variáveis de projeto.

FA ou qualquer outro método probabilístico de otimização requer atenção na definição dos parâmetros do algoritmo (atratividade: β e γ ; aleatoriedade: α).

O parâmetro γ é a variação da atratividade por meio da absorção de luz $\{\gamma \in [0, \infty)\}$, essencial para determinar a velocidade de convergência e o comportamento do algoritmo. A maioria varia entre 0,1 e 10 (Yang, 2008).

A representação do fluxo de processos para a otimização via o algoritmo FA é apresentado na Figura 3.1

Figura 3.1: Fluxograma de processos do algoritmo FA



Fonte: Próprio Autor 2023

3.3 FUNDAMENTAÇÃO ACERCA DA ANÁLISE MATRICIAL PARA ANÁLISE DE TRELIÇAS PLANAS.

A treliça plana é uma estrutura bidimensional composta por elementos prismáticos retos conectados em suas extremidades por nós articulados sem atrito. Essa estrutura é sujeita a cargas e reações que atuam somente nos nós, no plano da estrutura, e seus elementos são submetidos somente a forças axiais de compressão ou tração (KASSIMALI, 2021).

O objetivo deste item é fornecer os conceitos básicos para a compreensão da análise matricial de treliças planas, utilizando o método de matriz de rigidez. Esse método pode ser aplicado para determinar estaticamente e indeterminadamente treliças planas de qualquer tamanho e forma.

A análise de treliças planas requer a compreensão de conceitos como coordenadas globais e locais, graus de liberdade, relação força-deslocamento dos elementos estabelecidos no sistema de coordenadas local, formulação dos elementos finitos das relações de rigidez, transformação das forças e deslocamentos dos elementos de um sistema de coordenadas local para um global e vice-versa, relações de rigidez dos elementos no sistema de

coordenadas globais, formulação das relações de rigidez para toda a treliça, combinando as relações de rigidez dos elementos.

3.3.1 SISTEMA DE COORDENADA GLOBAL E LOCAL

No método da rigidez matricial, dois tipos de sistemas de coordenadas são empregados para especificar os dados estruturais de carregamento e para estabelecer as relações de força-deslocamento necessárias. Estes são chamados de sistemas de coordenadas globais (ou estruturais) e os sistemas de coordenadas locais (ou elementos) (KASSIMALI, 2021).

Kassimali (2021) define que, para a condição do sistema de coordenada global a geometria geral e as relações carga-deformação de uma estrutura inteira são descritas com referência a um sistema de coordenadas globais cartesianas ou retangulares. O sistema de coordenadas globais pode ser um sistema tridimensional de estrutura espacial XYZ e bidimensional de estrutura plana no plano XY , sendo o sistema bidimensional adotado no presente trabalho.

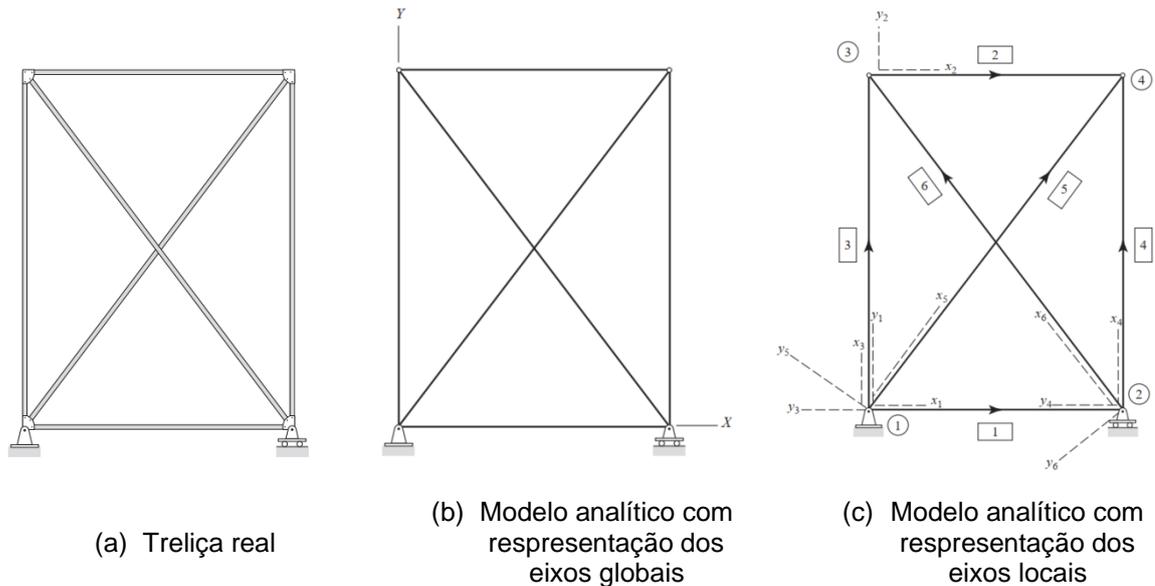
Ao analisar uma estrutura plana (bidimensional), a origem do sistema de coordenadas XY global pode ser localizada em qualquer ponto do plano da estrutura, com os eixos X e Y orientados em quaisquer direções mutuamente perpendiculares no plano da estrutura. Entretanto, geralmente é conveniente localizar a origem em uma junta inferior esquerda da estrutura, com os eixos X e Y orientados nas direções horizontal (positiva para a direita) e vertical (positiva para cima), respectivamente, de modo que as coordenadas X e Y da maioria das juntas sejam positivas.

O sistema de coordenada local é aplicado uma vez que é conveniente derivar as relações básicas de força-deslocamento de elementos em termos de forças e deslocamentos nas direções ao longo e perpendicularmente aos elementos. Um sistema de coordenadas locais é definido para cada elemento da estrutura.

A origem do sistema de coordenadas locais xy para estruturas bidimensionais para um elemento pode ser arbitrariamente localizada em uma das extremidades do elemento em seu estado não deformado, com o eixo x direcionado ao longo do eixo central do elemento. A direção positiva do eixo y é definida ortogonalmente ao eixo x .

A Figura 3.2 ilustra a diferença entre coordenadas globais e locais, onde a Figura 3.2a representa a estrutura real e a Figura 3.2b mostra os eixos globais (X e Y) e a Figura 3.2c os eixos locais dos seis elementos existentes na estrutura, representado por $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4, x_5, y_5, x_6$ e y_6 , respectivamente.

Figura 3.2: Treliza plana e seu modelo analítico



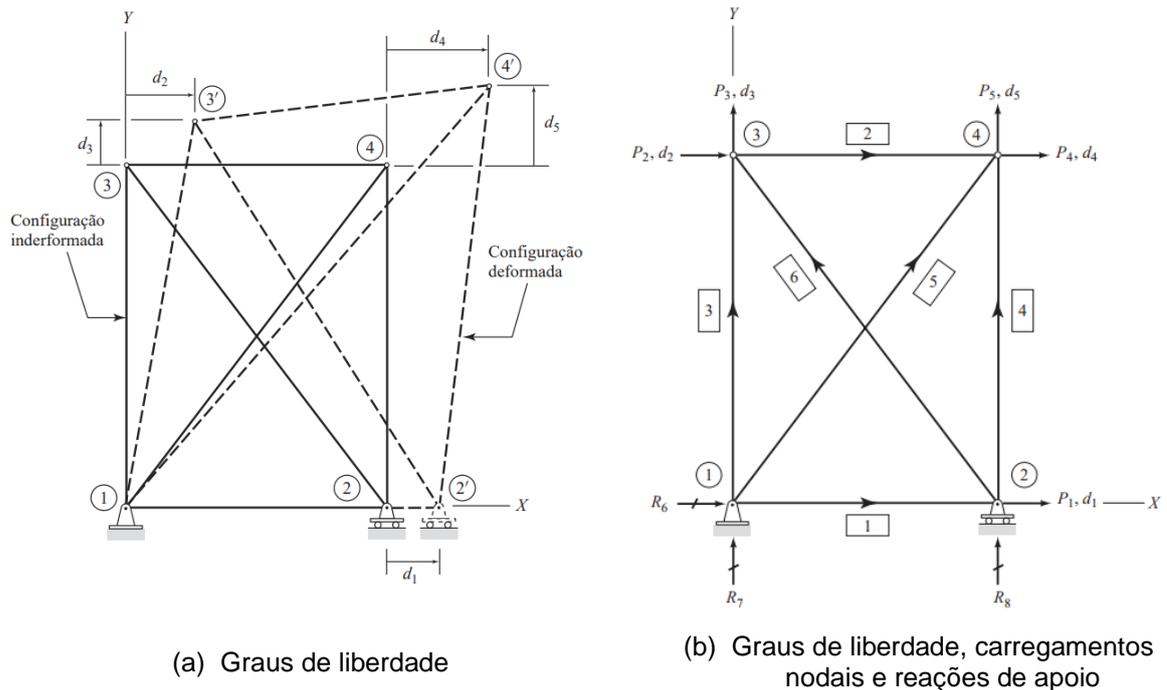
Fonte: Adaptado de Kassimali (2021)

3.3.2 GRAUS DE LIBERDADE

Os graus de liberdade de uma estrutura, em geral, são definidos como os deslocamentos conjuntos independentes (translações e rotações) necessários para especificar a forma deformada da estrutura quando submetida a uma carga arbitrária. Como os nós das treliças são considerados rótulas sem atrito, elas não estão sujeitas a momentos, portanto, suas rotações são zero. Assim, somente translações nodais devem ser consideradas para estabelecer os graus de liberdade das treliças.

A forma deformada da treliça, da Figura 3.2 para uma carga arbitrária é retratada na Figura 3.3a utilizando uma escala ampliada. A partir dela, pode-se observar que o nó 1, ligado ao suporte articulado, não pode transladar-se em nenhuma direção; portanto, não tem graus de liberdade. O nó 2 fixo sobre um suporte articulado, pode transladar-se na direção X , mas não na direção Y , assim, o nó 2 tem apenas um grau de liberdade, designado como d_1 na Figura 3.3. Como o nó 3 não está fixo a um suporte, dois deslocamentos (a saber, as translações d_2 e d_3 nas direções X e Y , respectivamente) são necessários para especificar completamente sua posição deformada $3'$, assim, o nó 3 tem dois graus de liberdade. Da mesma forma, a articulação 4, que também é uma articulação livre, tem dois graus de liberdade, designados d_4 e d_5 , assim como apresentado na Figura 3.3.

Figura 3.3: Grau de liberdade da treliça



Fonte: Adaptado de Kassimali (2021)

Assim, toda a treliça possui um total de cinco graus de liberdade. Como mostrado na Figura 3.3a os deslocamentos da articulação são definidos em relação ao sistema de coordenadas globais, considerados positivos quando nas direções positivas dos eixos X e Y. Observe que todos os deslocamentos das juntas são mostrados no sentido positivo na Figura 3.3. O deslocamento nodal de uma treliça genérica com número de graus de liberdade pode ser escrito coletivamente em formato matricial, assim como apresentado na Eq. 3.33.

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 3.33}$$

sendo \mathbf{d} chamado de vetor de deslocamentos nodais, com o número de linhas (n) igual ao número de graus de liberdade da estrutura.

É importante observar que os cinco deslocamentos conjuntos d_1 até d_n são suficientes para definir a condição deformada da treliça sob qualquer carga arbitrária. Além disso, os deslocamentos dos cinco nós são independentes, no sentido de que cada deslocamento pode variar de forma arbitrária e independente dos outros.

Como mostrado anteriormente, os graus de liberdade de todos os tipos de estruturas, em geral, são os mesmos que os deslocamentos conjuntos reais. Assim, o número de graus de liberdade (NGL) pode ser expresso pela Eq. 3.34.

$$NGL = NGLNO \cdot NN - NR \quad \text{Eq. 3.34}$$

$NGLNO$ representa o número de graus de liberdade de um nó livre (também pode ser considerado o número de coordenadas da estrutura por nó); NN é o número de nós; e NR denota o número de deslocamentos de nós restringidos por suportes ou o número de reações de apoio.

Como um nó livre de uma treliça plana tem dois graus de liberdade ($NGLNO = 2$), que são translações nas direções X e Y , podemos simplificar a expressão para o caso de treliça plana, assim como apresentado na Eq. 3.35.

$$\left. \begin{aligned} NGLNO &= 2 \\ NGL &= 2 \cdot NN - NR \end{aligned} \right\} \text{para treliças planas} \quad \text{Eq. 3.35}$$

Aplicando essa formulação para a treliça apresentada na Figura 3.3, temos que a treliça tem quatro nós (ou seja, $NN = 4$), e o suporte articulado no nó 1 restringe dois deslocamentos nas duas direções, ou seja, as translações nas direções X e Y ; enquanto o suporte do rolete no nó 2 restringe o deslocamento em uma direção, sendo a translação na direção Y . Assim, o número total de deslocamentos do nó restringidos por todos os suportes da treliça é de 3 (ou seja, $NR = 3$). Substituindo os valores numéricos de NN e NR na equação Eq. 3.35, temos que $NGL = 2 \cdot 4 - 3 = 5$, mesmo valor obtido anteriormente com análise visual.

3.3.3 VETOR DE CARREGAMENTO NODAL

As cargas externas aplicadas aos nós das treliças são especificadas como componentes de força nas direções X e Y globais. Esses componentes de carga são considerados positivos quando atuam nas direções positivas dos eixos X e Y . Quaisquer cargas inicialmente dadas nas direções inclinadas devem ser decompostas nas direções X e Y , antes de proceder com a análise (KASSIMALI, 2021).

Em geral, uma carga pode ser aplicada a uma estrutura no local e na direção de cada um de seus graus de liberdade. Por exemplo, uma treliça de cinco graus de liberdade pode ser submetida a um máximo de cinco cargas, P_1 a P_5 , como mostrado na Figura 3.3b. Como indicado ali, os números atribuídos aos graus de liberdade também são usados para identificar as cargas de nó. Em outras palavras, uma carga correspondente a um grau de liberdade d_i é denotada pelo símbolo P_i . O vetor de cargas nodais (\mathbf{P}) da treliça, com o número de linhas (n) é igual ao número de graus de liberdade da estrutura, assim apresentado pela Eq. 3.36.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 3.36}$$

3.3.4 VETOR DE REAÇÃO

Kassimali (2021) define que um suporte que impede a translação de um nó de uma estrutura em uma determinada direção exerce uma força de reação sobre o nó nessa direção. Assim, quando uma treliça é submetida a cargas externas, um componente de força de reação pode se desenvolver no local e na direção de cada uma de suas coordenadas restringidas. Por exemplo, uma treliça com três coordenadas restritas pode desenvolver até três reações, como mostrado na Figura 3.3b. Os números atribuídos às coordenadas restringidas são usados para identificar as reações de apoio. Em outras palavras, uma reação correspondente a uma i -ésima coordenada restrita é denotada pelo símbolo R_i . O vetor de reação (\mathbf{R}) de uma treliça genérica, onde o número de linhas corresponde ao número de reações (k), é apresentado na Eq. 3.37.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \vdots \\ R_k \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 3.37}$$

3.3.5 RELAÇÃO DE RIGIDEZ DOS ELEMENTOS NO SISTEMA DE COORDENADAS LOCAIS

No método matricial de rigidez, os deslocamentos nodais (\mathbf{d}) de uma estrutura devido a uma carga externa (\mathbf{P}) são determinados pela solução de um sistema de equações simultâneas, assim como expresso pela Eq. 3.38 (KASSIMALI, 2021).

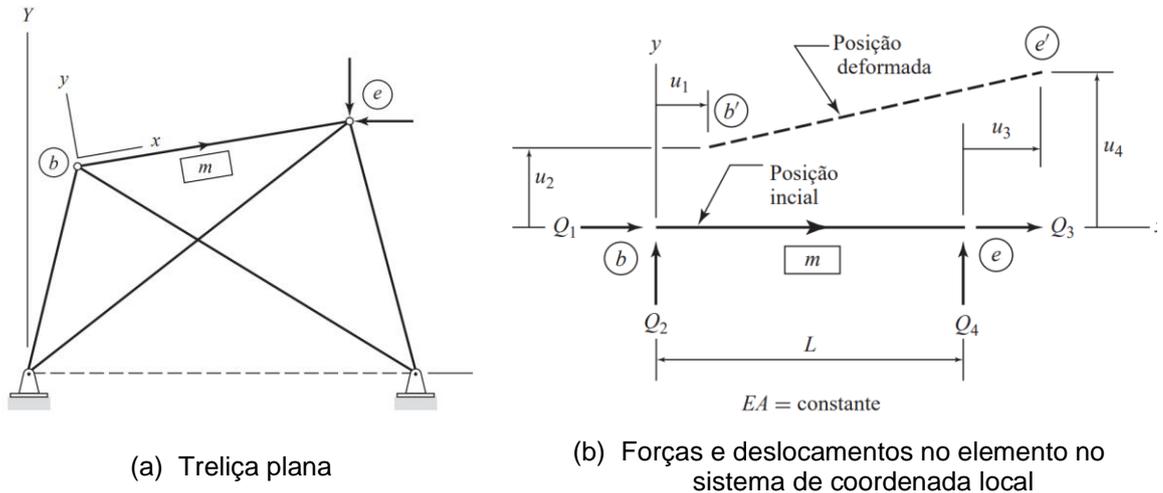
$$\mathbf{P} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{d} \quad \text{Eq. 3.38}$$

na qual \mathbf{S} é a matriz de rigidez da estrutura, sendo formada por uma matriz que engloba as matrizes de rigidez para todos seus elementos individuais. A matriz de rigidez para um elemento expressa as forças nas extremidades do elemento como funções dos deslocamentos dessas extremidades.

Com o intuito de obter a matriz de rigidez de um elemento no sistema de coordenada local é necessário obter a rigidez e comprimento de cada elemento (KASSIMALI, 2021). Quando a treliça é submetida a cargas externas, os elementos se deformam e forças internas são induzidas em suas extremidades. Levando em consideração o elemento m da treliça plana mostrada na Figura 3.4a, as posições inicial e deslocada desse elemento são apresentadas na Figura 3.4b, onde L , E e A denotam, respectivamente, o comprimento, o módulo de elasticidade de Young e a área da seção transversal de m . O elemento é prismático no sentido de que sua rigidez axial, EA , é constante. Como a Figura 3.4b indica, são necessárias duas translações nas direções x e y para especificar completamente a posição deslocada de cada extremidade de m . Assim, m tem um total de quatro deslocamentos de extremidade ou graus de liberdade. Como mostrado na Figura 3.4b, os deslocamentos das

extremidades dos elementos são indicados por u_1 a u_4 , e as forças correspondentes das extremidades dos elementos são indicadas por Q_1 até Q_4 . Observe que estes deslocamentos e forças finais são definidos relativos ao sistema de coordenadas local do elemento, sendo considerados positivos quando nas direções positivas dos eixos locais x e y .

Figura 3.4: Treliça, forças e deslocamentos no elemento

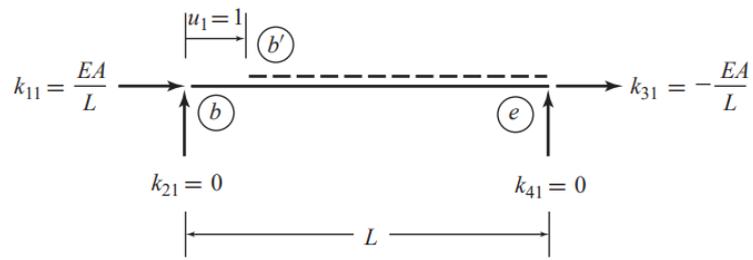


Fonte: Adaptado de Kassimali (2021)

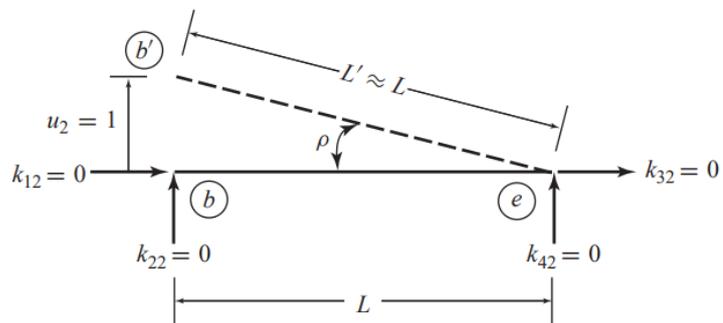
Os deslocamentos e forças dos elementos são numerados pelo início e fim do elemento, designados nó “ b ” e “ e ”. O nó “ b ” é onde está localizada a origem do sistema de coordenadas local, com o deslocamento e a força na direção x numerados primeiro, u_1 e Q_1 , respectivamente, seguido pelo deslocamento e a força na direção y , u_2 e Q_2 , respectivamente. Os deslocamentos e forças no extremo oposto do elemento, designado “ e ”, são então numerados na mesma ordem sequencial, sendo u_3 , u_4 , Q_3 e Q_4 .

Na determinação das relações força-deslocamento no elemento, tais relações podem ser convenientemente estabelecidas submetendo o elemento, separadamente, a cada um dos quatro deslocamentos finais, como mostrado na Figura 3.5. Expressou-se as forças finais totais do elemento como as somas algébricas das forças finais necessárias para causar os deslocamentos finais individuais, por meio do princípio da superposição dos efeitos.

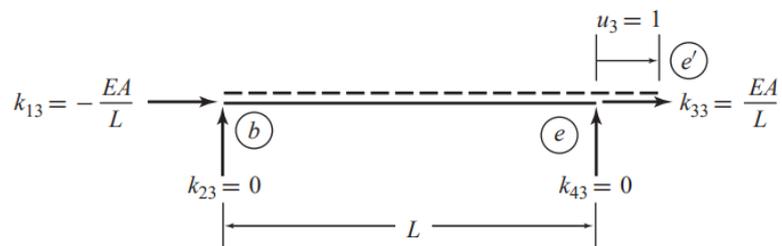
Figura 3.5: Elemento submetidos aos deslocamentos



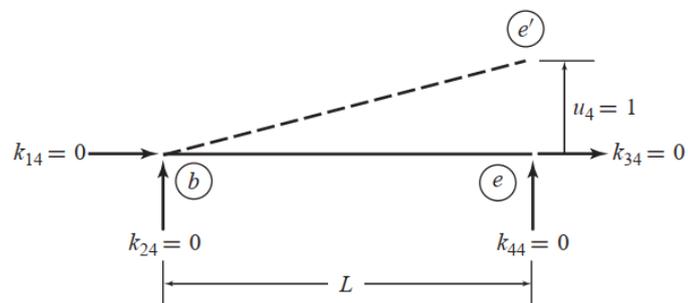
(a) u_1



(b) u_2



(c) u_3



(d) u_4

Fonte: Adaptado de Kassimali (2021)

Considerando o princípio da superposição dos efeitos podemos avaliar as forças finais atuantes no elemento, Q_1 , Q_2 , Q_3 e Q_4 , assim como descrito na Eq. 3.39, Eq. 3.40, Eq. 3.41 e Eq. 3.42, respectivamente.

$$Q_1 = k_{11} \cdot u_1 + k_{12} \cdot u_2 + k_{13} \cdot u_3 + k_{14} \cdot u_4 \quad \text{Eq. 3.39}$$

$$Q_2 = k_{21} \cdot u_1 + k_{22} \cdot u_2 + k_{23} \cdot u_3 + k_{24} \cdot u_4 \quad \text{Eq. 3.40}$$

$$Q_3 = k_{31} \cdot u_1 + k_{32} \cdot u_2 + k_{33} \cdot u_3 + k_{34} \cdot u_4 \quad \text{Eq. 3.41}$$

$$Q_4 = k_{41} \cdot u_1 + k_{42} \cdot u_2 + k_{43} \cdot u_3 + k_{44} \cdot u_4 \quad \text{Eq. 3.42}$$

onde k_{ij} representa a força resultante Q_i no local i , quando aplicado o deslocamento na direção j , com outras forças locais, para causar um valor unitário de deslocamento u_j , enquanto todos os outros deslocamentos finais são zero. Essas forças por unidade de deslocamento são chamadas de coeficientes de rigidez.

A Eq. 3.39, Eq. 3.40, Eq. 3.41 e Eq. 3.42 podem ser representadas de forma matricial ou simbolicamente, assim como descrito na Eq. 3.43 e Eq. 3.44, respectivamente.

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 3.43}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{u} \quad \text{Eq. 3.44}$$

Em que \mathbf{Q} e \mathbf{u} são os vetores de força e deslocamento finais dos elementos, respectivamente, no sistema de coordenadas local e \mathbf{k} é chamado de matriz de rigidez dos elementos no sistema de coordenadas local.

Os coeficientes de rigidez (k_{ij}) podem ser avaliados sujeitando o elemento, isoladamente, a deslocamentos unitários em cada um dos quatro deslocamentos finais. As forças finais dos elementos necessárias para causar os deslocamentos unitários individuais, são então determinadas por meio da aplicação das equações de equilíbrio e pelo uso dos princípios básicos da mecânica dos materiais. As forças finais dos elementos assim obtidas representam os coeficientes de rigidez do elemento.

A fim de determinar os coeficientes de rigidez (k_{ij}) correspondentes ao deslocamento unitário u_j , como mostrado na Figura 3.5, é necessário aplicar as condições de equilíbrio. Uma vez que o elemento m está em equilíbrio, as forças finais k_{11} , k_{21} , k_{31} e k_{41} atuando sobre ele devem satisfazer as três equações de equilíbrio ($\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, e $\Sigma M = 0$). Aplicando as equações de equilíbrio, pode-se obter as relações apresentadas na Eq. 3.45, Eq. 3.46 e Eq. 3.47.

$$+ \rightarrow \quad \Sigma F_x = 0 \quad k_{11} + k_{31} = 0 \quad k_{31} = -k_{11} \quad \text{Eq. 3.45}$$

$$+ \uparrow \quad \Sigma F_y = 0 \quad k_{21} + k_{41} = 0 \quad \text{Eq. 3.46}$$

$$+ \curvearrowright \quad \Sigma M_e = 0 \quad -k_{21} \cdot L = 0 \quad \text{Eq. 3.47}$$

Uma vez que L não é zero, pode-se definir a relação estabelecida na Eq. 3.48.

$$k_{21} = 0 \quad \text{Eq. 3.48}$$

Substituindo a Eq. 3.48 na Eq. 3.46, pode-se inferir a relação apresentada na Eq. 3.49.

$$k_{41} = 0 \quad \text{Eq. 3.49}$$

As Equações 3.45, 3.48 e 3.49 indicam que m está em equilíbrio sob a ação de duas forças axiais, de igual magnitude, mas com sentidos opostos, aplicadas em suas extremidades. Além disso, como o deslocamento $u_1 = 1$ resulta no encurtamento do comprimento do elemento, as duas forças axiais que causam este deslocamento devem ser compressivas; ou seja, k_{11} deve atuar no sentido positivo do eixo x local, e k_{31} (com magnitude igual a k_{11}) deve atuar no sentido negativo do eixo x .

Ao relacionar a força axial k_{11} com a deformação axial unitária ($u_1 = 1$) do elemento m , utilizam-se os princípios da mecânica dos materiais. Cabe mencionar que o elemento m prismático submetido à tensão normal (σ) de compressão ou tração é calculada por meio da relação entre a força axial (k_{11}) e a área da seção transversal (A) do elemento, assim como mostrado na Eq. 3.50, e a deformação normal (ε) é expressa pela relação entre a deformação axial unitária ($u_1 = 1$) e o comprimento do elemento, assim como apresentado pela Eq. 3.51.

$$\sigma = \frac{k_{11}}{A} \quad \text{Eq. 3.50}$$

$$\varepsilon = \frac{u_1}{L} = \frac{1}{L} \quad \text{Eq. 3.51}$$

Em materiais com comportamento linear elástico, a tensão normal no elemento m pode ser obtida pela lei de Hooke (Eq. 3.52):

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \text{Eq. 3.52}$$

Substituindo as Equações 3.50 e 3.51 na Eq. 3.52 pode-se observar a relação expressa na Eq. 3.53.

$$\frac{k_{11}}{A} = E \cdot \left(\frac{1}{L}\right) \quad \text{Eq. 3.53}$$

Por meio da Eq. 3.53 pode-se obter a expressão do coeficiente de rigidez k_{11} , assim como mostrado na Eq. 3.54. Baseado na relação apresentada na Eq. 3.45, pode-se obter o coeficiente de rigidez k_{31} , assim como mostrado na Eq. 3.55.

$$k_{11} = \frac{E \cdot A}{L} \quad \text{Eq. 3.54}$$

$$k_{31} = -k_{11} = -\frac{E \cdot A}{L} \quad \text{Eq. 3.55}$$

O sinal negativo indica que esta força age no sentido negativo do eixo x local do elemento m . A Figura 3.5a mostra as expressões para os quatro coeficientes de rigidez necessários para causar o deslocamento final $u_1 = 1$ do elemento m .

Utilizando uma abordagem semelhante, pode-se mostrar que os coeficientes de rigidez necessários para causar o deslocamento axial $u_3 = 1$ no final (nó “e”) do elemento m (Figura 3.5c), é:

$$k_{13} = -\frac{E \cdot A}{L} \quad k_{23} = 0 \quad k_{33} = \frac{E \cdot A}{L} \quad k_{43} = 0 \quad \text{Eq. 3.56}$$

A forma deformada do elemento m devido a um valor unitário de deslocamento u_2 , enquanto todos os outros deslocamentos são zero, é mostrada na Figura 3.5b. Aplicando as equações de equilíbrio, assim como mostrado na Eq. 3.57, Eq. 3.58 e Eq. 3.59.

$$+ \rightarrow \quad \Sigma F_x = 0 \quad k_{12} + k_{32} = 0 \quad k_{32} = -k_{12} \quad \text{Eq. 3.57}$$

$$+ \uparrow \quad \Sigma F_y = 0 \quad k_{22} + k_{42} = 0 \quad \text{Eq. 3.58}$$

$$+ \curvearrowright \quad \Sigma M_e = 0 \quad -k_{22} \cdot L = 0 \quad \text{Eq. 3.59}$$

Devido ao fato de L não ser nulo, ou seja, possui comprimento real, pode-se definir a relação estabelecida, Eq. 3.60.

$$k_{22} = 0 \quad \text{Eq. 3.60}$$

Substituindo a Eq. 3.60 na Eq. 3.58, pode-se inferir a relação apresentada na Eq. 3.61.

$$k_{42} = 0 \quad \text{Eq. 3.61}$$

Assim, as forças k_{22} e k_{42} , que atuam perpendicularmente ao eixo longitudinal do elemento m , são nulas.

Quanto às forças axiais k_{12} e k_{32} , a Eq. 3.57 indica que elas possuem magnitude igual, mas com sentidos opostos. A partir da Figura 3.5b, pode-se observar que o comprimento deformado do elemento, L' , pode ser expresso em termos de seu comprimento não deformado L assim como descrito na Eq. 3.62.

$$L' = \frac{L}{\cos \rho} \quad \text{Eq. 3.62}$$

O ângulo ρ denota a rotação do elemento devido ao deslocamento final $u_2 = 1$. Como os deslocamentos são assumidos como pequenos, a relação $\cos \rho \approx 1$ pode ser aplicada e a Eq. 3.62 se reduz ao expresso pela Eq. 3.63.

$$L' \approx L \quad \rightarrow \quad L' - L \approx 0 \quad \text{Eq. 3.63}$$

Como apresentado pela Eq. 3.63, a mudança no comprimento do elemento m (ou sua deformação axial) é insignificante, portanto, não se desenvolvem forças axiais nas extremidades do elemento m , assim como apresentado pela Eq. 3.64.

$$k_{12} = k_{32} = 0 \quad \text{Eq. 3.64}$$

Assim, como mostrado na Figura 3.5b, não são necessárias forças finais para produzir o deslocamento $u_2 = 1$ do elemento m .

Da mesma forma, os coeficientes de rigidez necessários para causar o pequeno deslocamento final $u_4 = 1$, na direção perpendicular ao eixo longitudinal do elemento m , também são todos nulos, como mostrado na Figura 3.5b, assim como mostrado na Eq. 3.65.

$$k_{14} = k_{24} = k_{34} = k_{44} = 0 \quad \text{Eq. 3.65}$$

Substituindo os valores obtidos anteriormente dos coeficientes de rigidez na Eq. 3.43, obtemos a matriz de rigidez para os elementos de treliças planas em seus sistemas de coordenadas locais, assim como mostrado na Eq. 3.66.

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{E \cdot A}{L} & 0 & -\frac{E \cdot A}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{E \cdot A}{L} & 0 & \frac{E \cdot A}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{E \cdot A}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 3.66}$$

A partir da Eq. 3.66, pode-se observar que a matriz de rigidez \mathbf{k} é simétrica; ou seja, $k_{ij} = k_{ji}$. Como descreve Kassimali (2021) as matrizes de rigidez para estruturas elásticas lineares são sempre simétricas.

Note que a i -ésima coluna da matriz de rigidez \mathbf{k} do elemento consiste nas forças finais necessárias para causar um valor unitário do deslocamento final u_i , enquanto todos os outros deslocamentos são zero. Tal como se observa na terceira coluna de \mathbf{k} que consiste nas quatro forças finais necessárias para causar o deslocamento $u_3 = 1$, como mostrado na Figura 3.5c, e assim por diante. As unidades dos coeficientes de rigidez são expressas em termos de força dividida pelo comprimento (por exemplo, N/m ou kgf/m). Portanto, ao avaliar uma matriz de rigidez para análise estrutural, é importante utilizar um conjunto consistente de unidades. Considerando o sistema internacional (SI) por exemplo, deve-se considerar módulo de elasticidade (E) expresso em N/m², área da seção transversal (A) em m² e o comprimento do elemento (L) em m.

3.3.6 TRANSFORMAÇÃO DO SISTEMA DE COORDENADAS

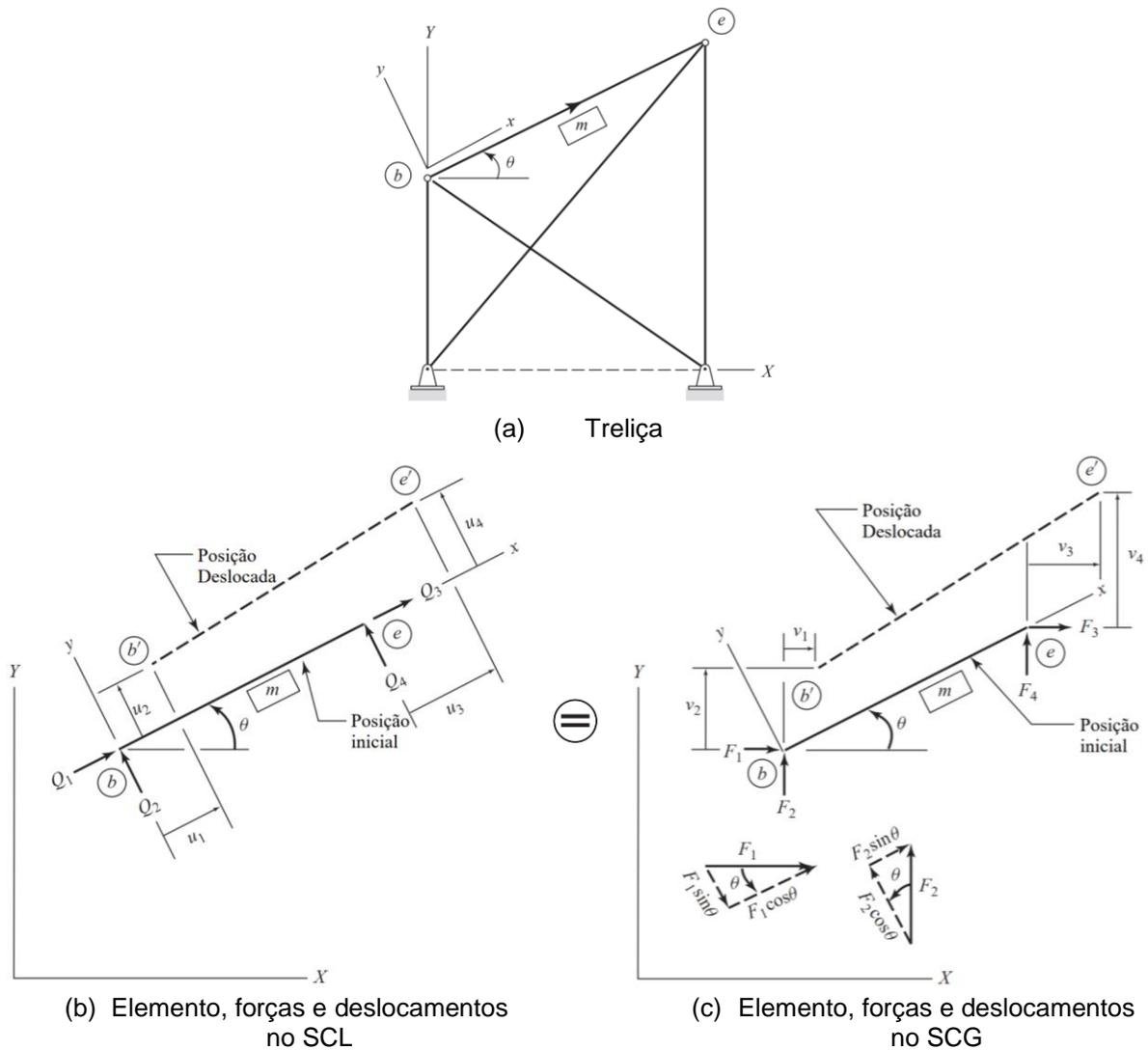
Quando elementos de uma estrutura são orientados em diferentes direções, torna-se necessário transformar as relações de rigidez para cada elemento de seu sistema de coordenadas local (SCL) para um único sistema de coordenadas global (SCG) selecionado para toda a estrutura. As relações de rigidez dos elementos expressas no sistema de

coordenadas globais são então combinadas para estabelecer as relações de rigidez para toda a estrutura.

3.3.6.1 TRANSFORMAÇÃO DE SISTEMAS DE COORDENADAS GLOBAIS PARA LOCAIS

Considerando um elemento m arbitrário de uma treliça plana (Figura 3.6a). Como mostrado na Figura 3.6, a orientação de m em relação ao sistema de coordenadas XY global é definida por um ângulo θ , medido no sentido anti-horário desde a direção positiva do eixo X global até a direção positiva do eixo x local. Cabe destacar que a matriz de rigidez k deriva-se das forças finais do elemento Q e o deslocamento final u descrito com referência ao sistema de coordenadas xy local do elemento, como mostrado na Figura 3.6b.

Figura 3.6: Treliça com seus eixos globais e elemento m com seus eixos locais



Fonte: Adaptado de Kassimali (2021)

Suponha que as forças e deslocamentos finais dos elementos sejam especificados com referência ao sistema global de coordenadas XY (Figura 3.6c), e que se deseja determinar o sistema equivalente de forças e deslocamentos finais, nas coordenadas xy locais, de maneira tal que tenham o mesmo efeito sobre o elemento m .

Como indicado na Figura 3.6c, as forças finais do elemento no SCG são indicadas por F_1 até F_4 , e os deslocamentos finais correspondentes são indicados por v_1 até v_4 . Essas forças finais globais do elemento e os deslocamentos finais são numerados no início e no fim do elemento m , no nó "b" com a força e o deslocamento na direção X numerados primeiro, seguidos da força e do deslocamento na direção Y . As forças e deslocamentos na extremidade oposta do elemento (nó "e") são numerados da mesma maneira.

Comparando a Figura 3.6b e a Figura 3.6c, observa-se que no início do elemento m (nó "b"), a força local Q_1 é a soma algébrica dos componentes das forças globais F_1 e F_2 na direção do eixo local x , assim como descrito na Eq. 3.67.

$$Q_1 = F_1 \cdot \cos \theta + F_2 \cdot \sin \theta \quad \text{Eq. 3.67}$$

De maneira similar, a força local Q_2 é igual à soma algébrica dos componentes de F_1 e F_2 na direção do eixo y local. Desta forma, a força local Q_2 pode ser obtida com a formulação apresentada na Eq. 3.68.

$$Q_2 = -F_1 \cdot \sin \theta + F_2 \cdot \cos \theta \quad \text{Eq. 3.68}$$

Utilizando um raciocínio semelhante no nó "e", expressam-se as forças locais Q_3 e Q_4 em termos das forças globais F_3 e F_4 tal como descrito na Eq. 3.69.

$$Q_3 = F_3 \cdot \cos \theta + F_4 \cdot \sin \theta \quad \text{Eq. 3.69}$$

$$Q_4 = -F_3 \cdot \sin \theta + F_4 \cdot \cos \theta$$

As Equações 3.67, 3.68 e 3.69 podem ser expressas na forma matricial, assim como descrito na Eq. 3.70, e da forma simbólica, assim como apresentado na Eq. 3.71.

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 3.70}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{F} \quad \text{Eq. 3.71}$$

onde \mathbf{T} refere-se a matriz de transformação, assim como descrito na Eq. 3.72.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 3.72}$$

A direção do elemento (θ), necessária para a avaliação de T , pode ser obtida por meio das relações apresentadas na Eq. 3.73, onde X_b e Y_b indicam as coordenadas globais do início do elemento (nó "b"), e X_e e Y_e representam as coordenadas globais do fim do elemento (nó "e").

$$\sin \theta = \frac{Y_e - Y_b}{L} = \frac{Y_e - Y_b}{\sqrt{(X_e - X_b)^2 + (Y_e - Y_b)^2}}$$

$$\cos \theta = \frac{X_e - X_b}{L} = \frac{X_e - X_b}{\sqrt{(X_e - X_b)^2 + (Y_e - Y_b)^2}}$$

Eq. 3.73

Os deslocamentos finais dos elementos, como as forças finais, são vetores, definidos nas mesmas direções que as forças correspondentes. Portanto, a matriz de transformação T (Eq. 3.72), desenvolvida para transformar as forças finais, também pode ser usada para transformar os deslocamentos das extremidades dos elementos do sistema de coordenadas global (v) para o local (u), assim como apresentado na Eq. 3.74.

$$u = T \cdot v$$

Eq. 3.74

3.3.6.2 TRANSFORMAÇÃO DE SISTEMAS DE COORDENADAS LOCAIS PARA GLOBAIS

Na execução da transformação das forças dos elementos e os deslocamentos finais dos sistemas de coordenadas locais para o global é necessário realizar a rotação dos elementos e/ou coordenadas locais em relação ao sistema de coordenadas globais. Isso é feito por meio da aplicação de matrizes de rotação, que transformam as componentes das forças e deslocamentos em relação aos sistemas de coordenadas locais para as componentes em relação aos sistemas de coordenadas globais. A Figura 3.6b e a Figura 3.6c apresentam o SCL e SCL do elemento m , respectivamente, onde no início do elemento (nó "b"), a força global F_1 deve ser igual à soma algébrica dos componentes das forças locais Q_1 e Q_2 na direção do eixo X global, tal como apresentado na Eq. 3.75.

$$F_1 = Q_1 \cdot \cos \theta - Q_2 \cdot \sin \theta$$

Eq. 3.75

De maneira semelhante, a força global F_2 é igual à soma algébrica dos componentes de Q_1 e Q_2 na direção do eixo Y global, tal como descrito na Eq. 3.76.

$$F_2 = Q_1 \cdot \sin \theta + Q_2 \cdot \cos \theta$$

Eq. 3.76

Ao utilizar um raciocínio semelhante no final do elemento m (nó "e"), é possível expressar as forças globais em termos das forças locais, como descrito na Eq. 3.77.

$$F_3 = Q_3 \cdot \cos \theta - Q_4 \cdot \sin \theta$$

Eq. 3.77

$$F_4 = Q_3 \cdot \sin \theta + Q_4 \cdot \cos \theta$$

As equações 3.75, 3.76 e 3.77 podem ser escritas de forma matricial, tal como descrito na Eq. 3.78.

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 3.78}$$

Comparando a Eq. 3.70 e Eq. 3.78, observamos que a matriz de transformação na Eq. 3.78, que transforma as forças do sistema de coordenadas local para o global, é a transposição da matriz de transformação T presente na Eq. 3.70, que transforma as forças do sistema de coordenadas global para o local. Portanto, a Eq. 3.78 pode ser expressa assim com apresentado na Eq. 3.79.

$$F = T^T \cdot Q \quad \text{Eq. 3.79}$$

Além disso, uma comparação da Eq. 3.71 e Eq. 3.79 indica que o inverso da matriz de transformação deve ser igual a sua transposição; isto é, indica que a matriz de transformação T é ortogonal, assim como descrito na Eq. 3.80.

$$T^{-1} = T^T \quad \text{Eq. 3.80}$$

Como discutido anteriormente, como os deslocamentos das extremidades dos elementos também são vetores, definidos nas mesmas direções que as forças correspondentes, a matriz T^T também define a transformação dos deslocamentos das extremidades dos elementos do sistema de coordenadas local para o global; ou seja, o sistema de coordenadas global, tal como descrito na Eq. 3.81.

$$v = T^T \cdot u \quad \text{Eq. 3.81}$$

3.3.7 RELAÇÕES DE RIGIDEZ DOS ELEMENTOS NO SISTEMA DE COORDENADAS GLOBAIS

Usando as relações de rigidez dos elementos no sistema de coordenadas local das seções 3.3.1 e 3.3.5, e as relações de transformação da seção 3.3.6, pode-se estabelecer as relações de rigidez dos elementos no sistema de coordenadas global.

Primeiro, substituem-se as relações de rigidez local $Q = k \cdot u$ (Eq. 3.44) nas relações de transformação de força $F = T^T \cdot Q$ (Eq. 3.79) obtendo a relação apresentada na Eq. 3.82.

$$F = T^T \cdot Q = T^T \cdot k \cdot u \quad \text{Eq. 3.82}$$

Então, substituindo as relações de transformação de deslocamento $u = T \cdot v$ (Eq. 3.74) na Eq. 3.82, determina-se a relação entre as forças finais dos elementos (F) e os deslocamentos finais v , no sistema de coordenadas globais, assim como descrito na Eq. 3.83.

$$F = T^T \cdot k \cdot T \cdot v \quad \text{Eq. 3.83}$$

A Eq. 3.83 pode ser oportunamente expressa como apresentado na Eq. 3.84, na qual a matriz K é chamada de matriz de rigidez dos elementos no sistema de coordenadas globais como mostrado na Eq. 3.85.

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} \quad \text{Eq. 3.84}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{T} \quad \text{Eq. 3.85}$$

A forma explícita de \mathbf{K} pode ser determinada pela substituição de Eq. 3.66 e Eq. 3.72 pela Eq. 3.85, tal como expresso na Eq. 3.86.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 3.86}$$

Realizando as multiplicações da matriz, obtém-se a forma simplificada da matriz de rigidez \mathbf{K} (Eq. 3.87).

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta \\ -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 3.87}$$

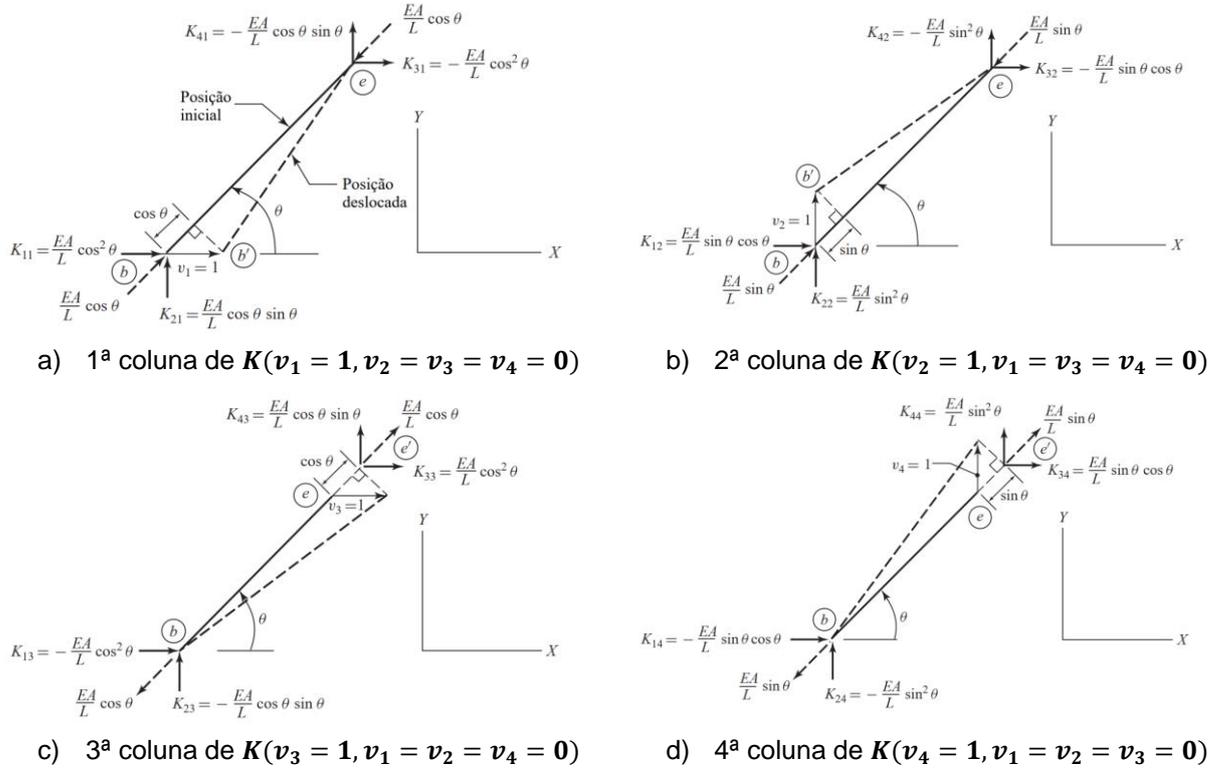
Nota-se que, como a matriz de rigidez local do elemento, a matriz de rigidez global do elemento (\mathbf{K}) é simétrica. A interpretação física da matriz de rigidez global do elemento \mathbf{K} é semelhante à da matriz de rigidez local do elemento; ou seja, o coeficiente de rigidez K_{ij} representa a força no local e na direção de F_i , necessária para causar um valor unitário de deslocamento v_j , enquanto todos os outros deslocamentos finais são zero. Assim, a j -ésima coluna da matriz \mathbf{K} consiste nas forças finais no sistema de coordenadas globais necessárias para causar um valor unitário do deslocamento final v_j , enquanto todos os outros deslocamentos finais são zero.

Como a interpretação anterior indica, a matriz de rigidez global do elemento \mathbf{K} pode ser derivada de um elemento de treliça inclinada, separadamente, a valores unitários de cada um dos quatro deslocamentos finais no sistema de coordenadas globais, como mostrado na Figura 3.7, e avaliando as forças finais no sistema de coordenadas globais necessárias para causar os deslocamentos unitários individuais. Vamos verificar a expressão para \mathbf{K} dada na Eq. 3.87, utilizando uma abordagem alternativa. Considerando um elemento de treliça de plano prismático inclinado em um ângulo θ em relação ao eixo X global, como mostrado na Figura 3.7a. Quando a extremidade do elemento (nó "b") recebe um deslocamento unitário $v_1 = 1$, enquanto os outros deslocamentos finais são mantidos em zero, o elemento encurta e uma força compressiva axial se desenvolve nele. No caso de pequenos deslocamentos, assim como assumido para a dedução da matriz de rigidez, a deformação axial u_a do elemento devido a v_1 é igual ao componente de $v_1 = 1$ na direção não deformada do elemento, assim como mostrado na Eq. 3.88 e na Figura 3.7a.

$$u_a = v_1 \cdot \cos \theta = 1 \cdot \cos \theta = \cos \theta$$

Eq. 3.88

Figura 3.7: Representação do elemento inclinado de uma treliça



Fonte: Adaptado de Kassimali (2021)

A força compressiva axial Q_a no elemento causada pela deformação axial u_a pode ser expressa como na Eq. 3.89.

$$Q_a = \left(\frac{E \cdot A}{L}\right) \cdot u_a = \left(\frac{E \cdot A}{L}\right) \cdot \cos \theta$$

Eq. 3.89

Baseando-se na Figura 3.7a, pode-se observar que os coeficientes de rigidez devem ser iguais aos componentes da força axial do elemento Q_a nas direções dos eixos X e Y globais. Assim, no final do elemento (nó "b"), os coeficientes de rigidez K_{11} e K_{21} podem ser calculados assim com expresso na Eq. 3.90 e Eq. 3.91, respectivamente.

$$K_{11} = Q_a \cdot \cos \theta = \left(\frac{E \cdot A}{L}\right) \cdot \cos^2 \theta$$

Eq. 3.90

$$K_{21} = Q_a \cdot \sin \theta = \left(\frac{E \cdot A}{L}\right) \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta$$

Eq. 3.91

Similarmente, no final do elemento (nó "e"). Nos quais os sinais negativos para K_{31} e K_{41} indicam que estas forças atuam nas direções negativas dos eixos X e Y , respectivamente. Assim como descrito na Eq. 3.92 e Eq. 3.93, respectivamente.

$$K_{31} = -Q_a \cdot \cos \theta = -\left(\frac{E \cdot A}{L}\right) \cdot \cos^2 \theta$$

Eq. 3.92

$$K_{41} = -Q_a \cdot \sin \theta = -\left(\frac{E \cdot A}{L}\right) \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta \quad \text{Eq. 3.93}$$

Observa-se que o elemento deve estar em equilíbrio sob a ação das quatro forças finais, K_{11} , K_{21} , K_{31} e K_{41} . Além disso, é possível notar que as expressões para estes coeficientes de rigidez (Eq. 3.90, Eq. 3.91, Eq. 3.92 e Eq. 3.93) são idênticas àquelas dadas na primeira coluna da matriz \mathbf{K} assim como na Eq. 3.87.

Os coeficientes de rigidez correspondentes aos valores unitários dos deslocamentos finais v_2 , v_3 e v_4 restantes podem ser avaliados de maneira semelhante, apresentados na Figura 3.7b, Figura 3.7c e Figura 3.7d, respectivamente. Como esperado, estes coeficientes de rigidez são os mesmos que os obtidos anteriormente, transformando as relações de rigidez do sistema de coordenadas local para o global (Eq. 3.87).

3.3.8 RELAÇÕES DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA

Tendo determinado as relações força-deslocamento dos elementos no sistema de coordenadas globais, podem ser estabelecidas as relações de rigidez para toda a estrutura. As relações de rigidez da estrutura expressam as cargas externas (\mathbf{P}) atuando nos nós da estrutura, em função dos deslocamentos dos nós (\mathbf{d}).

Tais relações podem ser estabelecidas da seguinte forma:

1. A carga nodal (\mathbf{P}) é expressa em termos das forças finais dos elementos no sistema de coordenadas globais, \mathbf{F} , aplicando as equações de equilíbrio para o nó da estrutura.

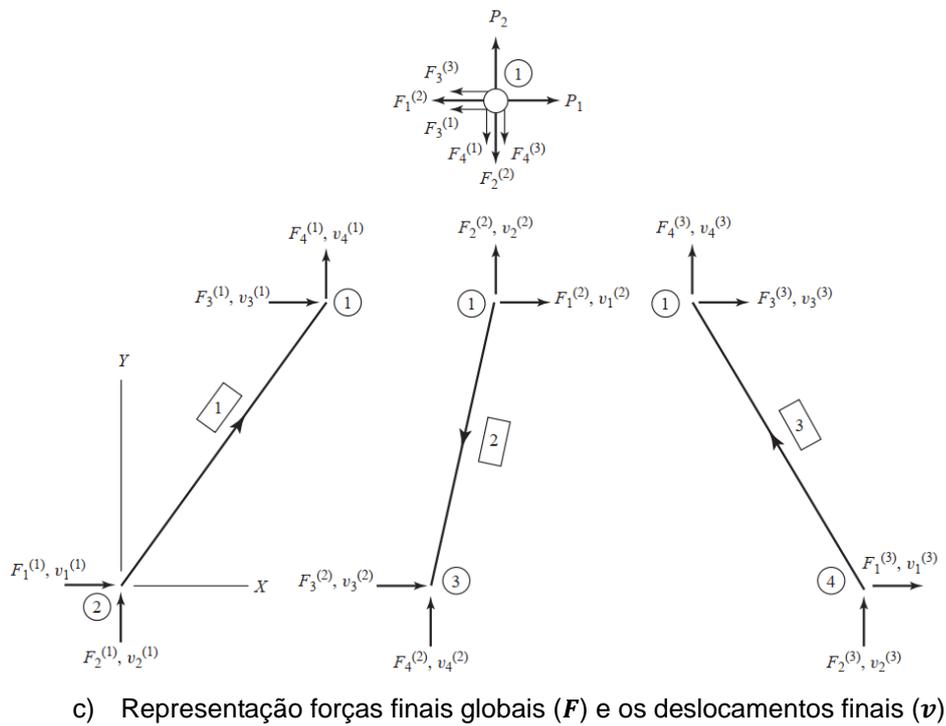
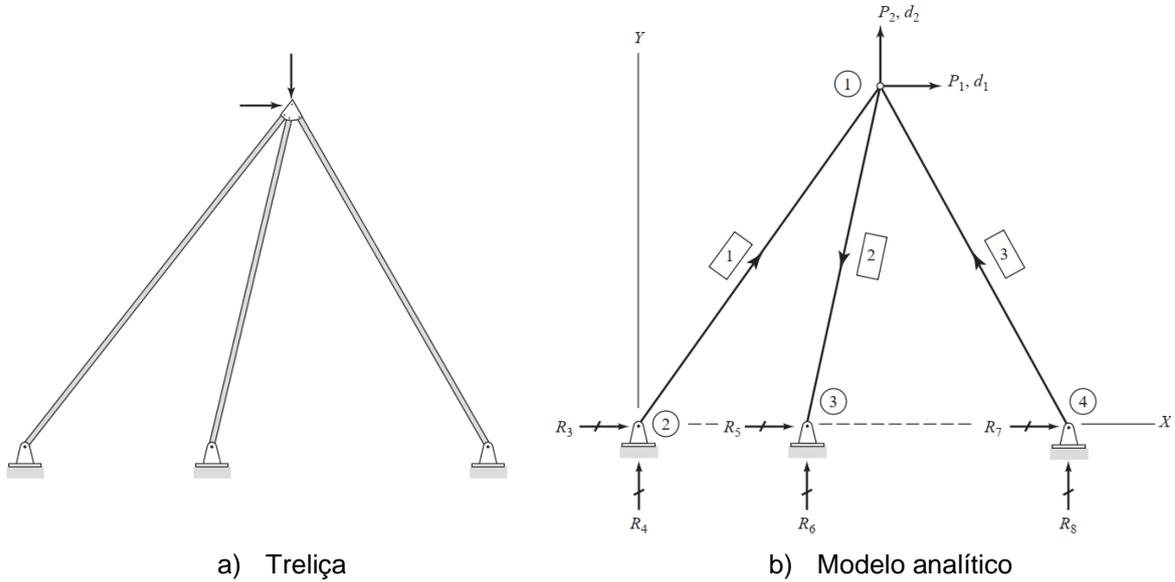
2. Os deslocamentos nodais (\mathbf{d}) estão então relacionados aos deslocamentos das extremidades dos elementos no sistema de coordenadas globais, \mathbf{v} , utilizando as condições de compatibilidade que os deslocamentos das extremidades do elemento devem ser os mesmos que os deslocamentos dos nós correspondentes.

3. Em seguida, as equações de compatibilidade são substituídas nas relações força-deslocamento do elemento, $\mathbf{F} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{v}$, para expressar as forças finais globais do elemento \mathbf{F} em termos dos deslocamentos do nó (\mathbf{d}). As relações $\mathbf{F} - \mathbf{d}$ assim obtidas são então substituídas nas equações de equilíbrio do nó para estabelecer as relações de rigidez da estrutura desejada entre as cargas do nó (\mathbf{P}) e os deslocamentos do nó (\mathbf{d}).

Considerando-se uma treliça plana arbitrária, tal como apresentado na Figura 3.8a, e seu modelo analítico da treliça tal como representado Figura 3.8b, em que a estrutura tem dois graus de liberdade, d_1 e d_2 . As cargas do nó que correspondem a esses graus de liberdade são designadas P_1 e P_2 , respectivamente. As forças finais globais (\mathbf{F}) e os deslocamentos finais (\mathbf{v}) para os três elementos da treliça são mostrados na Figura 3.8c, na qual o sobrescrito (i) denota o número de elemento. Observe que para os elementos 1 e 3, os nós inferiores (ou seja, nós 2 e 4, respectivamente) foram considerados nós iniciais, enquanto,

para o elemento 2, o nó superior 1 é o nó inicial, de forma arbitrária. Conforme comentado, o objetivo é expressar as cargas do nó (\mathbf{P}) como funções do deslocamento do nó (\mathbf{d}).

Figura 3.8: Representação treliça plana arbitrária



c) Representação forças finais globais (\mathbf{F}) e os deslocamentos finais (\mathbf{v})

Fonte: Adaptado de Kassimali (2021)

Ao relacionar as cargas nodais externas (\mathbf{P}) com as forças finais internas do elemento (\mathbf{F}), devem ser aplicadas as duas equações de equilíbrio, $\Sigma F_x = 0$ e $\Sigma F_y = 0$, ao nó 1 mostrado na Figura 3.8c, resultante nas equações de equilíbrio, tal como apresentado na Eq. 3.94 e Eq. 3.95.

$$P_1 = F_3^{(1)} + F_1^{(2)} + F_3^{(3)} \tag{Eq. 3.94}$$

$$P_2 = F_4^{(1)} + F_2^{(2)} + F_4^{(3)} \quad \text{Eq. 3.95}$$

Comparando a Figura 3.8b e Figura 3.8c, observamos que como a extremidade inferior 2 do elemento 1 está conectada ao suporte articulado 2, que não pode transladar-se em nenhuma direção, os dois deslocamentos da extremidade 2 do elemento devem ser iguais a zero. Da mesma forma, como a extremidade 1 deste elemento está conectada ao nó 1, os deslocamentos da extremidade 1 devem ser os mesmos que os deslocamentos do nó 1. Assim, as condições de compatibilidade para o elemento 1 são apresentadas na Eq. 3.96. Similarmente para os elementos 2 e 3, são apresentadas na Eq. 3.97 e Eq. 3.98 .

$$v_1^{(1)} = v_2^{(1)} = 0 \quad v_3^{(1)} = d_1 \quad v_4^{(1)} = d_2 \quad \text{Eq. 3.96}$$

$$v_1^{(2)} = d_1 \quad v_2^{(2)} = d_2 \quad v_3^{(2)} = v_4^{(2)} = 0 \quad \text{Eq. 3.97}$$

$$v_1^{(3)} = v_2^{(3)} = 0 \quad v_3^{(3)} = d_1 \quad v_4^{(3)} = d_2 \quad \text{Eq. 3.98}$$

Dos dois tipos de relações estabelecidas, as equações de equilíbrio (Eq. 3.94 e Eq. 3.95) expressam as cargas nodais em função das cargas finais do elemento, enquanto as equações de compatibilidade (Eq. 3.96, Eq. 3.97 e Eq. 3.98) relacionam os deslocamentos nodais com os deslocamentos finais do elemento. Assim, é possível vincular os dois tipos de relações empregando a relação de rigidez dos elementos no sistema de coordenadas globais derivadas, apresentadas no item 3.3.7. Podemos escrever a relação de rigidez global do elemento $F = K \cdot v$ (Eq. 3.84) de forma ampliada para o elemento 1, tal como apresentado na Eq. 3.99.

$$\begin{bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \\ F_3^{(1)} \\ F_4^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{12}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & K_{23}^{(1)} & K_{24}^{(1)} \\ K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & K_{33}^{(1)} & K_{34}^{(1)} \\ K_{41}^{(1)} & K_{42}^{(1)} & K_{43}^{(1)} & K_{44}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ v_3^{(1)} \\ v_4^{(1)} \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 3.99}$$

A partir da Eq. 3.99 é possível obter as expressões de forças no final do elemento 1, tais como expressas pela Eq. 3.100 e Eq. 3.101.

$$F_3^{(1)} = K_{31}^{(1)} \cdot v_1^{(1)} + K_{32}^{(1)} \cdot v_2^{(1)} + K_{33}^{(1)} \cdot v_3^{(1)} + K_{34}^{(1)} \cdot v_4^{(1)} \quad \text{Eq. 3.100}$$

$$F_4^{(1)} = K_{41}^{(1)} \cdot v_1^{(1)} + K_{42}^{(1)} \cdot v_2^{(1)} + K_{43}^{(1)} \cdot v_3^{(1)} + K_{44}^{(1)} \cdot v_4^{(1)} \quad \text{Eq. 3.101}$$

De maneira similar é possível obter a relação de rigidez para o elemento 2, assim como descrito na Eq. 3.102.

$$\begin{bmatrix} F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \\ F_4^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & K_{12}^{(2)} \\ K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} & K_{24}^{(2)} \\ K_{31}^{(2)} & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} & K_{34}^{(2)} \\ K_{41}^{(2)} & K_{42}^{(2)} & K_{43}^{(2)} & K_{44}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \\ v_3^{(2)} \\ v_4^{(2)} \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 3.102}$$

Por meio da Eq. 3.99 é possível obter as expressões de forças no final do elemento 2, tais como expressas pela Eq. 3.103 e Eq. 3.104.

$$F_3^{(2)} = K_{31}^{(2)} \cdot v_1^{(2)} + K_{32}^{(2)} \cdot v_2^{(2)} + K_{33}^{(2)} \cdot v_3^{(2)} + K_{34}^{(2)} \cdot v_4^{(2)} \quad \text{Eq. 3.103}$$

$$F_4^{(2)} = K_{41}^{(2)} \cdot v_1^{(2)} + K_{42}^{(2)} \cdot v_2^{(2)} + K_{43}^{(2)} \cdot v_3^{(2)} + K_{44}^{(2)} \cdot v_4^{(2)} \quad \text{Eq. 3.104}$$

Da mesma forma, é possível obter a relação de rigidez para o elemento 3, assim como descrito na Eq. 3.105.

$$\begin{bmatrix} F_1^{(3)} \\ F_2^{(3)} \\ F_3^{(3)} \\ F_4^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(3)} & K_{12}^{(3)} & K_{12}^{(3)} \\ K_{21}^{(3)} & K_{22}^{(3)} & K_{23}^{(3)} & K_{24}^{(3)} \\ K_{31}^{(3)} & K_{32}^{(3)} & K_{33}^{(3)} & K_{34}^{(3)} \\ K_{41}^{(3)} & K_{42}^{(3)} & K_{43}^{(3)} & K_{44}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{(3)} \\ v_2^{(3)} \\ v_3^{(3)} \\ v_4^{(3)} \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 3.105}$$

Por meio da Eq. 3.99 é possível obter as expressões de forças no final do elemento 2, tais como expressas pela Eq. 3.103 e Eq. 3.104.

$$F_3^{(3)} = K_{31}^{(3)} \cdot v_1^{(3)} + K_{32}^{(3)} \cdot v_2^{(3)} + K_{33}^{(3)} \cdot v_3^{(3)} + K_{34}^{(3)} \cdot v_4^{(3)} \quad \text{Eq. 3.106}$$

$$F_4^{(3)} = K_{41}^{(3)} \cdot v_1^{(3)} + K_{42}^{(3)} \cdot v_2^{(3)} + K_{43}^{(3)} \cdot v_3^{(3)} + K_{44}^{(3)} \cdot v_4^{(3)} \quad \text{Eq. 3.107}$$

Observa-se que as Equações 3.100, 3.101, 3.103, 3.104, 3.106 e 3.107 expressam as forças finais de seis elementos que aparecem nas equações de equilíbrio do nó (Eq. 3.94 e Eq. 3.95), em termos de deslocamentos das extremidades dos elementos.

A relação entre os deslocamentos nodais (\mathbf{d}) com as forças terminais do elemento (\mathbf{F}) é obtida ao substituir-se as equações de compatibilidade nas relações força- deslocamento do elemento anterior. Assim, substituindo as equações de compatibilidade do elemento 1 (Eq. 3.96) em suas relações força-deslocamento, como dado pela Eq. 3.100 e Eq. 3.101, expressamos as forças finais do elemento $\mathbf{F}^{(1)}$ em termos dos deslocamentos nodais (\mathbf{d}), assim como apresentado na Eq. 3.108 e Eq. 3.109.

$$F_3^{(1)} = K_{33}^{(1)} \cdot d_1 + K_{32}^{(1)} \cdot d_2 \quad \text{Eq. 3.108}$$

$$F_4^{(1)} = K_{43}^{(1)} \cdot d_1 + K_{42}^{(1)} \cdot d_2 \quad \text{Eq. 3.109}$$

Similarmente, para o elemento 2, por meio da substituição da Eq. 3.97 na Eq. 3.103 e Eq. 3.104, obtém-se a Eq. 3.110 e Eq. 3.111.

$$F_1^{(2)} = K_{11}^{(2)} \cdot d_1 + K_{12}^{(2)} \cdot d_2 \quad \text{Eq. 3.110}$$

$$F_2^{(2)} = K_{21}^{(2)} \cdot d_1 + K_{22}^{(2)} \cdot d_2 \quad \text{Eq. 3.111}$$

De maneira análoga, pode-se obter as forças finais para o elemento 3, substituindo a Eq. 3.98 na Eq. 3.106 e Eq. 3.107, assim como apresentado na Eq. 3.112 e Eq. 3.113.

$$F_3^{(3)} = K_{33}^{(3)} \cdot d_1 + K_{34}^{(3)} \cdot d_2 \quad \text{Eq. 3.112}$$

$$F_4^{(3)} = K_{43}^{(3)} \cdot d_1 + K_{44}^{(3)} \cdot d_2 \quad \text{Eq. 3.113}$$

Finalmente, ao substituir Eq. 3.108 a Eq. 3.113 nas equações de equilíbrio conjunto (Eq. 3.94 e Eq. 3.95), deve-se estabelecer as relações desejadas entre as cargas nodais (\mathbf{P}) e os deslocamentos nodais (\mathbf{d}) da treliça, assim como descrito na Eq. 3.114 e Eq. 3.115.

$$P_1 = \left(K_{33}^{(1)} + K_{11}^{(2)} + K_{33}^{(3)} \right) \cdot d_1 + \left(K_{34}^{(1)} + K_{12}^{(2)} + K_{34}^{(3)} \right) \cdot d_2 \quad \text{Eq. 3.114}$$

$$P_2 = \left(K_{43}^{(1)} + K_{21}^{(2)} + K_{43}^{(3)} \right) \cdot d_1 + \left(K_{44}^{(1)} + K_{22}^{(2)} + K_{44}^{(3)} \right) \cdot d_2 \quad \text{Eq. 3.115}$$

A Eq. 3.114 e Eq. 3.115 podem ser convenientemente expressas em forma matricial, tal como descrito na Eq. 3.116, onde \mathbf{S} é a matriz quadrada com o número de linhas e colunas iguais aos número de graus de liberdade (NGL), é chamada de matriz de rigidez da estrutura, assim como apresentado pela Eq. 3.117.

$$\mathbf{P} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{d} \quad \text{Eq. 3.116}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} K_{33}^{(1)} + K_{11}^{(2)} + K_{33}^{(3)} & K_{34}^{(1)} + K_{12}^{(2)} + K_{34}^{(3)} \\ K_{43}^{(1)} + K_{21}^{(2)} + K_{43}^{(3)} & K_{44}^{(1)} + K_{22}^{(2)} + K_{44}^{(3)} \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 3.117}$$

Este método para determinação das relações de rigidez da estrutura através da combinação das relações de rigidez dos elementos é comumente chamado de método de rigidez direta (TURNER *et al.*, 1956).

Como as matrizes de rigidez de elementos, as matrizes de rigidez de estruturas elásticas lineares são sempre simétricas. Observa-se que na Eq. 3.117 os dois elementos fora da diagonal principal da matriz \mathbf{S} são iguais, pois $K_{34}^{(1)} = K_{43}^{(1)}$, $K_{12}^{(2)} = K_{21}^{(2)}$ e $K_{34}^{(3)} = K_{43}^{(3)}$; fazendo assim \mathbf{S} uma matriz simétrica.

3.3.9 PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE MATRICIAL

Com base na discussão apresentada nas seções anteriores, o seguinte procedimento, pode ser desenvolvido para a análise de treliças planas sujeitas a cargas nodais, seguindo as etapas abaixo:

1. Preparar um modelo analítico da treliça da seguinte forma:

a) Representar um diagrama de linha da estrutura, no qual cada nó e elemento é identificado por um número.

b) Estabelecer um sistema global de coordenadas XY , com os eixos X e Y orientados na direção horizontal (positivo para a direita) e vertical (positivo para cima), respectivamente. Geralmente é conveniente localizar a origem do sistema de coordenadas globais em um nó inferior esquerdo da estrutura, para que as coordenadas X e Y da maioria dos nós sejam positivas.

c) Em cada elemento, estabelecer um sistema de coordenadas xy local, selecionando um dos nós em suas extremidades como nó inicial e o outro como nó final. No diagrama de linha da estrutura, indique a direção positiva do eixo x local para cada elemento, desenhando uma seta ao longo do elemento apontando para seu nó final. Nos elementos horizontais, as transformações de coordenadas podem ser evitadas selecionando o nó na extremidade esquerda do elemento como nó inicial.

d) Identificar os graus de liberdade (ou deslocamentos nodais) e as coordenadas restritas da estrutura. Essas quantidades são especificadas no diagrama de linhas, atribuindo números às setas desenhadas nos nós nas direções X e Y . Os graus de liberdade são numerados primeiro, começando pelo nó de menor número e seguindo sequencialmente para o maior. No caso de mais de um grau de liberdade em um nó, o deslocamento em X é numerado primeiro, seguido pelo deslocamento Y . Depois de todos os graus de liberdade terem sido numerados, as coordenadas de restrição são numeradas, começando com um número igual a $NGL + 1$. Começando com o nó de menor número e continuando sequencialmente para o maior, todas as coordenadas restritas da estrutura são numeradas. No caso de mais de uma coordenada restrita em um nó, a coordenada X é numerada primeiro, seguida pela coordenada Y .

2. Avaliar a matriz de rigidez da estrutura (S). O número de linhas e colunas de S deve ser igual ao número de graus de liberdade (NGL) da estrutura. Para cada elemento da treliça, deve-se realizar as seguintes operações.

a) Calcular seu comprimento e direção cosseno. (As expressões para $\cos \theta$ e $\sin \theta$ são dadas na Eq. 3.73).

b) Calcular a matriz de rigidez dos elementos no sistema de coordenadas globais, K , usando a Eq. 3.87.

c) Identificar seus números e índices e armazenar os elementos pertinentes de K em suas devidas posições em S , usando o procedimento descrito na seção 3.3.7.

A matriz completa de rigidez da estrutura, obtida pela montagem dos coeficientes de rigidez de todos os elementos da treliça, deve ser uma matriz simétrica.

3. Formar o vetor de carga nodal \mathbf{P} .

4. Determinar os deslocamentos nodais (\mathbf{d}). Substituir \mathbf{P} e \mathbf{S} nas relações de rigidez da estrutura, $\mathbf{P} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{d}$ (Eq. 3.116), e resolver o sistema resultante de equações simultâneas para os deslocamentos nodais (\mathbf{d}).

A fim de verificar se a solução de equações simultâneas foi realizada corretamente, substituir os valores numéricos de \mathbf{d} de volta nas relações de rigidez da estrutura, $\mathbf{P} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{d}$. Se a solução estiver correta, então as relações de rigidez devem ser satisfeitas. Observe que os deslocamentos nodais são considerados positivos quando nas direções positivas dos eixos globais X e Y ; da mesma forma, os deslocamentos são negativos nas direções negativas.

5. Calcular os deslocamentos terminais e as forças terminais dos elementos e apoiar as reações. Em cada elemento da treliça, é necessário:

a) Obter deslocamentos da extremidade do elemento no sistema de coordenadas global, \mathbf{v} , a partir dos deslocamentos nodais, \mathbf{d} , usando os números de código do elemento.

b) Calcular a matriz de transformação \mathbf{T} do elemento usando a Eq. 3.72, e determinar os deslocamentos da extremidade do elemento no sistema de coordenadas local, \mathbf{u} , usando a relação de transformação $\mathbf{u} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}$ (Eq. 3.74). Em elementos horizontais com eixo x local positivo para a direita (isto é, na mesma direção do eixo X global), os deslocamentos finais do elemento nos sistemas de coordenadas globais e locais são os mesmos; isto é, $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. A deformação axial do elemento, u_a , se desejado, pode ser obtido da relação $u_a = u_1 - u_3$, na qual u_1 e u_3 são o primeiro e terceiro elementos, respectivamente, do vetor \mathbf{u} . Um valor positivo de u_a indica encurtamento do elemento na direção axial, e um valor negativo indica alongamento.

c) Determinar a matriz de rigidez do elemento no sistema de coordenadas local, \mathbf{k} , usando a Eq. 3.66; depois calcular as forças finais do elemento no sistema de coordenadas local, usando a relação de rigidez $\mathbf{Q} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}$ (Eq. 3.44). A força axial do elemento, Q_a , é igual ao primeiro elemento, Q_1 , do vetor \mathbf{Q} (isto é, $Q_a = Q_1$); um valor positivo de Q_a indica que a força axial é compressiva, e um valor negativo indica que a força axial é de tração.

d) Cálculo das forças finais do elemento no sistema de coordenadas globais, \mathbf{F} , usando a relação de transformação $\mathbf{F} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{Q}$ (Eq. 3.79). Nos elementos horizontais com o eixo x local positivo à direita, as forças finais dos elementos nos sistemas de coordenadas locais e globais são as mesmas; ou seja, $\mathbf{F} = \mathbf{Q}$.

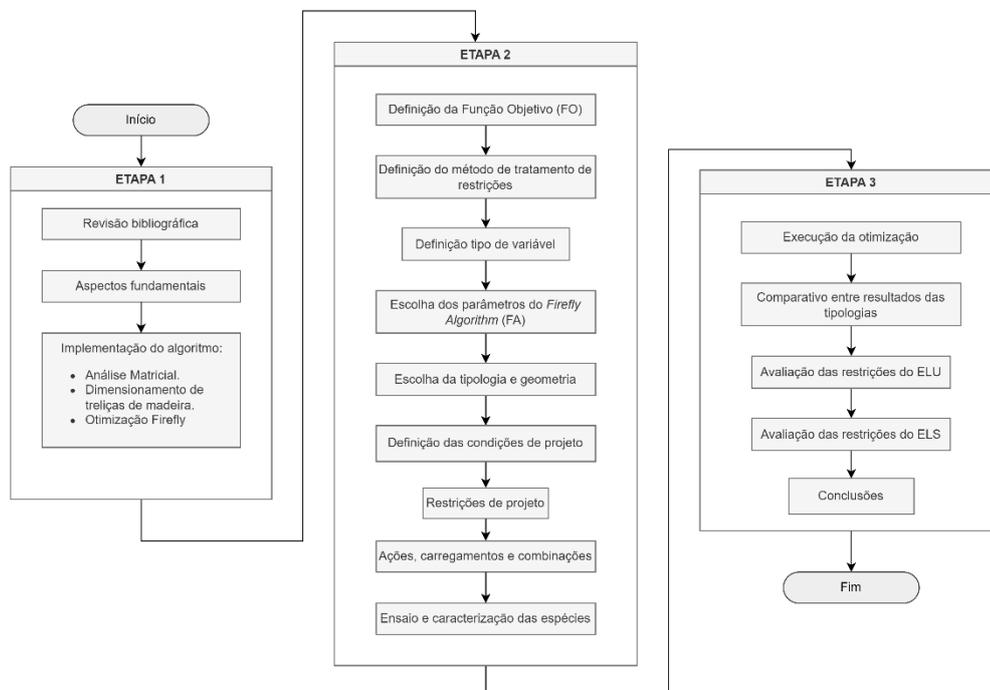
4. MATERIAIS E MÉTODOS

No procedimento de dimensionamento utilizaram-se os preceitos normativos estabelecidos pela ABNT NBR 7190-1 (2022b) para dimensionamento de peças comprimidas e tracionadas, assim como apresentado no item 3.1. O algoritmo FA foi utilizado no processo de otimização seguindo a formulação apresentado no item 3.2. A metodologia de cálculo para a função objetivo (FO), o método de penalização, parâmetros de entrada do FA, detalhes do estudo paramétrico realizado, propriedades de madeira consideradas para o procedimento de otimização e a ferramenta estatística utilizada para comparação das tipologias estudadas, estão descritas neste capítulo.

Cabe destacar, que a formulação clássica da Análise Matricial foi considerada com a dedução da matriz de rigidez considerando elemento de barra (dois nós e quatro graus de liberdade para cada elemento). Com base na solução do sistema de equação de equilíbrio (equilíbrio entre cargas nodais externas e internas), foram determinados os deslocamentos nodais, as tensões e as cargas normais em cada barra de treliça.

Na Figura 4.1 é apresentado o fluxograma que contém todas as etapas da pesquisa.

Figura 4.1: Fluxograma da pesquisa



Fonte: Próprio Autor (2023)

4.1 FUNÇÃO OBJETIVO

O processo de otimização do presente trabalho tem como intuito minimizar o peso total do sistema estrutural treliçado, decisão baseada no estudo feito por Kromoser *et al.* (2021), considerando restrições de deslocamento nodal, resistência mecânica das barras, dimensões mínimas, áreas mínimas e critérios geométricos devido à instabilidade estrutural. A função objetivo (FO) foi formulada de forma a quantificar o peso total da estrutura, apresentado na Eq. 4.1, onde A_i e L_{0_i} são a área da seção transversal e o comprimento da barra i , ρ_i é a densidade do material da barra i e n é o número de barras presentes na treliça.

$$FO(A_i, \rho_i, L_{0_i}) = \sum_i^n A_i \cdot \rho_i \cdot L_{0_i} \quad \text{Eq. 4.1}$$

4.2 TRATAMENTO DE RESTRIÇÕES

Em problemas de otimização, as restrições de restrição devem ser tratadas. Portanto, foi utilizada a técnica da penalidade externa (KURI-MORALES; GUTIÉRREZ-GARCÍA, 2002, YENIAY, 2005), na qual a FO é modificada para se tornar uma pseudo FO, onde g_j representa restrições de desigualdade e restrições h_k sobre igualdade. No método da penalidade externa, a ideia é adicionar termos de penalidade à FO para que as restrições sejam satisfeitas de forma aproximada. Esse termo adicional foi composto pelo produto entre o fator de penalização (R_p) e a função de penalidade estática $P(\vec{x})$ (Eq. 4.2), resultando na FO penalizada (W), conforme a Eq. 4.3. A função de penalidade é uma função não negativa que aumenta à medida que as restrições são violadas, e o fator de penalização é um número positivo que controla a magnitude dos termos de penalidade adicionados.

$$P(\vec{x}) = \sum_{j=1}^m \max[0, g_j(\vec{x})]^2 + \sum_{k=1}^n [h_k(\vec{x})]^2 \quad \text{Eq. 4.2}$$

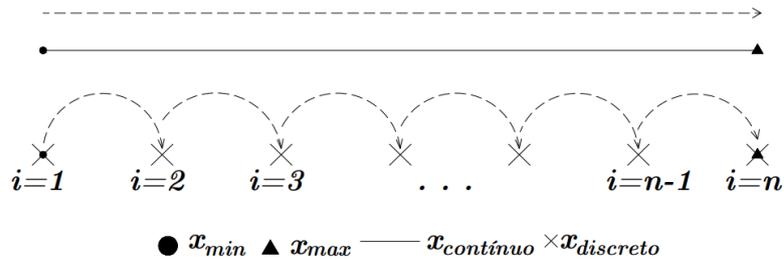
$$W(A_i, \rho_i, L_{0_i}, \vec{x}) = FO(A_i, \rho_i, L_{0_i}) + R_p \cdot P(\vec{x}) \quad \text{Eq. 4.3}$$

em que j e k são j -ésima restrição de desigualdade e k -ésima restrição de igualdade, respectivamente; m e n são o número total de restrições de desigualdade e igualdade, respectivamente; g e h são o conjunto de restrições de desigualdade e igualdade, respectivamente; e \vec{x} é o vetor de solução (população aleatória).

4.3 TIPOS DE VARIÁVEIS PARA PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Em problemas de otimização existem três tipos de variáveis que podem ser adotadas: as contínuas, as discretas e o sistema misto (contínua e discreta). As variáveis contínuas podem assumir infinitos valores em um intervalo, enquanto, para as variáveis discretas tem-se um conjunto finitos de valores admitidos, assim como representado na Figura 4.2.

Figura 4.2: Representação gráfica de variáveis contínuas e discretas



Fonte: Próprio Autor (2023)

Devido à existência de valores predefinidos para seções transversais de madeira serrada que podem catalogadas, por meio de normativas vigentes e limitações construtivas, é usual a aplicação de variáveis discretas (VILLAR-GARCÍA *et al.*, 2019). Desta forma, optou-se por utilizar variáveis discretas na presente pesquisa.

4.4 PARÂMETROS UTILIZADOS PARA APLICAÇÃO DO FA

A Tabela 4.1 apresenta os parâmetros de entrada do FA, utilizados no presente estudo, baseados no estudo de sensibilidade de Pereira *et al.* (2020).

Tabela 4.1: Parâmetros de entrada do FA

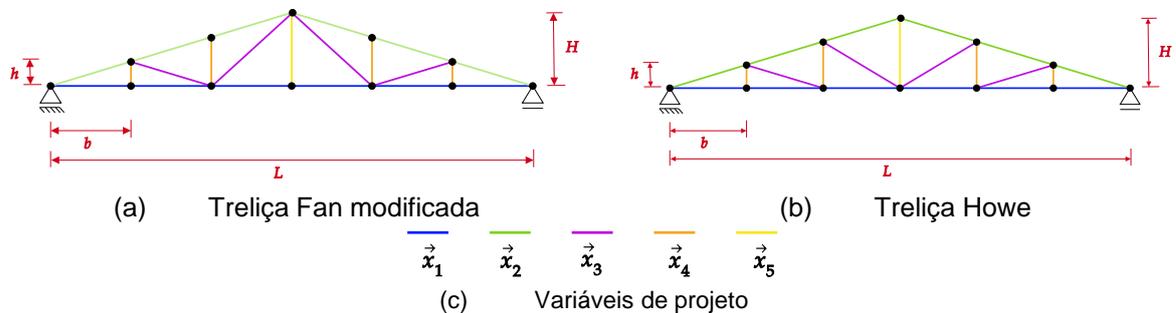
Parâmetro	Significado	Valor adotado
β_0	Atratividade entre vaga-lumes	0,90
N_{ite}	Número de iterações	600
N_{pop}	População da população	120
α_{min}	Fator de aleatoriedade mínimo	0,20
α_{max}	Fator de aleatoriedade máximo	1,00
R_p	Fator de Penalidade	10^5

Fonte: Próprio Autor (2023)

4.5 TIPOLOGIAS E GEOMETRIA

A Figura 4.3 apresenta as treliças Fan modificada e Howe, que foram escolhidas para otimização devido à sua ampla utilização em projetos de cobertura. As treliças foram divididas em quatro vãos com um comprimento total de 6, 9, 12, e 15 metros, a fim de permitir um estudo paramétrico. Cada treliça foi submetida a 30 otimizações distintas para garantir a obtenção de resultados mais precisos e uma melhor compreensão da dispersão dos resultados. Distâncias nodais que obedecem à relação $b = L/6$ e $h = L/24$, foram utilizadas para todas as tipologias, e variáveis de projeto (posição das barras) consideradas \vec{x}_1 , \vec{x}_2 , \vec{x}_3 , \vec{x}_4 e \vec{x}_5 (Figura 4.3c).

Figura 4.3: Treliças e suas variáveis de projeto.



Fonte: Próprio Autor (2023)

O vetor variável de projeto genérico \vec{x}_i está descrito na Eq. 4.4, onde b_i é a espessura da seção transversal e h_i é a altura da seção transversal da variável i . Em cada tipo de barra foi utilizada uma variável de projeto: \vec{x}_1 para o banzo inferior, \vec{x}_2 para o banzo superior, \vec{x}_3 para as diagonais, \vec{x}_4 para os montantes secundários e \vec{x}_5 para o montante principal.

$$\vec{x}_i = (b_i; h_i) \quad \text{Eq. 4.4}$$

Em problemas de otimização, pode ser considerado um conjunto de variáveis distintas, nas quais cada variável tem um conjunto ordenado de valores (HSU, 1985). Portanto, consideramos valores para dimensões nominais para a madeira serrada conforme a ABNT NBR ISO 3179 (2011). Com base nos valores nominais padrão, as variáveis discretas de projeto podem assumir valores nominais padrão da espessura da seção transversal de uma barra genérica i (b_i) e altura da seção transversal de uma barra genérica i (h_i), assumindo os valores apresentados na Tabela 4.2.

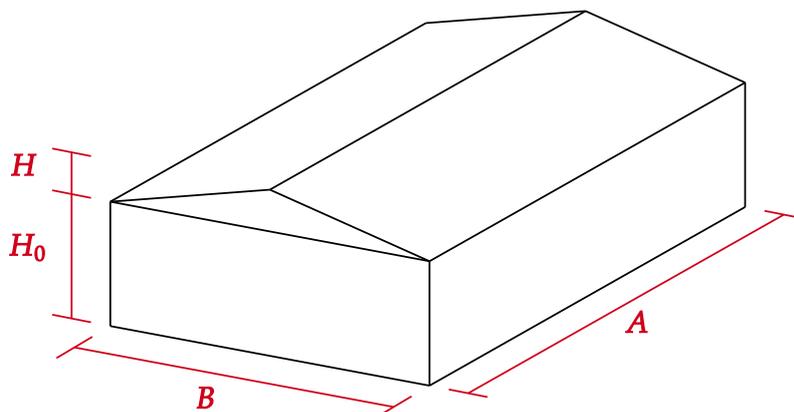
Tabela 4.2: Valores nominais padrão da seção transversal utilizados como variáveis

Dimensão	Valores nominais padrão (mm)
Espessura (b_i)	16, 19, 22, 25, 32, 38, 50, 63, 75, 100, 125, 150, 175, 200, 250 e 300
Altura (h_i)	75, 100, 115, 125, 150, 160, 175, 200, 225, 250, 275 e 300

Fonte: Adaptado da ABNT NBR ISO 3179 (2011)

Foram estabelecidas dimensões para o galpão em cada um dos vãos adotados. A representação gráfica das dimensões do galpão é apresentada na Figura 4.4, assim como os valores das dimensões das treliças e dos galpões na Tabela 4.3.

Figura 4.4: Dimensões galpão.



Fonte: Próprio Autor (2023)

Tabela 4.3: Descrição das distâncias nodais da treliça e dimensões dos galpões

Variável / Galpão	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4
L (m)	6	9	12	15
h (m)	0,25	0,375	0,5	0,625
b (m)	1	1,5	2	2,5
H (m)	0,75	1,125	1,5	1,875
H_0 (m)	5			
Inclinação (%)	25 ^a			
A (m)	20	25	30	35
B (m)	6	9	12	15
Distância entre treliças (m)	5			

^a Valor adotado conforme recomendação do fabricante (TELHA SÃO CARLOS, 2022).

Fonte: Próprio Autor (2023)

4.6 CONDIÇÕES DE PROJETO

No processo de otimização, foram caracterizadas 5 espécies de madeira, cujas propriedades foram caracterizadas segundo a ABNT NBR 7190-3 (2022c), assim como descrito no item 4.9 do presente trabalho. As especificações admitidas para o dimensionamento são apresentadas na Tabela 4.4.

Tabela 4.4: Especificações para as madeiras utilizadas no processo de dimensionamento

Tipo de madeira	Serrada
-----------------	---------

Classe de carregamento	Longa duração
Classe de umidade	II
Umidade de equilíbrio (%)	12
Categoria da madeira	1ª Categoria

Fonte: Próprio Autor (2023)

4.7 RESTRIÇÕES DE PROJETO

Como descrito no item 4.2, os problemas de otimização contam com um método de tratamento de restrição. O presente trabalho utilizou o método de penalidade externa, assim como apresentado nas Equações 4.2 e 4.3, contando com quatro restrições de desigualdade (g_j) e uma restrição de igualdade (h_k).

A primeira restrição de desigualdade (g_j) trata-se da verificação geométrica relacionada a espessura (b_i) das barras da treliça, determinada pela norma ABNT NBR 7190-1 (2022b), que estabelece uma espessura mínima (b_{min}) de 50 mm. A restrição para dimensão mínima é apresentada na Eq. 4.5, onde i é uma barra genérica ($i = 1, 2, 3, \dots, n_{barras}$) e n_{barras} é o número de barras.

$$g_j(\vec{x}) = \frac{b_{min}}{b_i} - 1 \leq 0 \quad j = 87 \text{ a } 107 \quad \text{Eq. 4.5}$$

Da Eq. 4.5, j é o número da restrição para a verificação geométrica de dimensões mínimas, para as quais foram atribuídos os números de 87 a 107.

Posteriormente, a segunda restrição de desigualdade (g_j) é a verificação geométrica da área (A_i) das barras da treliça. A norma ABNT NBR 7190-1 (2022b) estabelece uma área mínima (A_{min}) de 5000 mm². A restrição para área mínima está descrita na Eq. 4.6.

$$g_j(\vec{x}) = \frac{A_{min}}{A_i} - 1 \leq 0 \quad j = 108 \text{ a } 128 \quad \text{Eq. 4.6}$$

em que j é o número da restrição para a verificação geométrica de área mínima, para os quais foram atribuídos os números de 108 a 128.

A Eq. 4.7 apresenta a restrição de desigualdade (g_j), que verifica a condição geométrica da esbeltez das barras (λ_i), onde λ_{lim} é o índice de esbeltez limite, sendo 140 e 173 os valores estabelecidos para barras comprimidas e tracionadas, respectivamente.

$$g_j(\vec{x}) = \frac{\lambda_i}{\lambda_{lim}} - 1 \leq 0 \quad j = 1 \text{ a } 21 \quad \text{Eq. 4.7}$$

onde j é o número da restrição para a verificação geométrica de esbeltez máxima, para os quais foram atribuídos os números de 1 a 21

A Eq. 4.8 é a restrição de desigualdade (g_j) que considera o dimensionamento no ELU para ação de tensão normal (σ_i) na barra de tração ou compressão, onde σ_{lim} é a tensão normal limite assim como descrito no item 3.1.4.

$$g_j(\vec{x}) = \frac{\sigma_i}{\sigma_{lim}} - 1 \leq 0 \quad j = 22 \text{ a } 42, 43 \text{ a } 63, 64 \text{ a } 84 \quad \text{Eq. 4.8}$$

em que j é o número da restrição para a verificação da tensão normal nas barras, para os quais foram atribuídos os números de 22 a 42, 43 a 63 e 64 a 84, que se trata da verificação do ELU quando consideradas as combinações 1, 2 e 3, respectivamente, tal como infracitado no item 4.8.3.

A restrição de desigualdade (g_j) da verificação da flecha nodal máxima (δ_{max}) para o ELS é apresentada na Eq. 4.9, δ_{lim} é o deslocamento limite da treliça, assim como supracitado no item 3.1.5.

$$g_j(\vec{x}) = \frac{\delta_{max}}{\delta_{lim}} - 1 \leq 0 \quad j = 85 \text{ e } 86 \quad \text{Eq. 4.9}$$

onde j é o número da restrição para a verificação da tensão normal nas barras para os quais foram atribuídos os números de 85 e 86, que se trata da verificação do ELS quando consideradas as combinações 4 e 5, respectivamente, tal como infracitado no item 4.8.3.

4.8 AÇÕES, CARREGAMENTOS E COMBINAÇÕES

A determinação das ações atuantes nas treliças segue as exigências das normas ABNT NBR 6120 (2019), 6123 (1988) e 8681 (2003). A fim de facilitar o entendimento, esta seção foi subdividida em dois tópicos: ações permanentes e variáveis.

4.8.1 AÇÕES PERMANENTES

As ações de natureza permanente que atuam nas treliças, são oriundas do peso próprio dos elementos de madeira e de materiais da cobertura.

A estimativa do carregamento oriundo do peso próprio pode ser feita por meio de fórmula empírica ou adoção de perfis para as diferentes posições da treliça. No presente estudo o processo de cálculo do peso próprio se obteve por meio de um processo iterativo, onde foi calculado o peso próprio da treliça (PP) para cada grupo de barras, assim como descrito no item 4.5, onde o valor é atualizado a cada iteração.

Além disso, foi considerado o carregamento de uma telha termoacústica (G) composta por telhas metálicas modelo trapezoidal na parte superior, preenchida com material isolante, o poliuretano (PU) na parte central, e telha metálica modelo forro na parte inferior,

considerando uma carga G de 350 N/m² conforme o catálogo do fabricante (TELHA SÃO CARLOS, 2022).

Na obtenção dos esforços e deslocamento de cálculo, onde as ações permanentes foram consideradas separadamente, assumiram-se os coeficientes de ponderação da ABNT NBR 8681(2003):

- Efeito desfavorável: $\gamma_g = 1,4$ e $\gamma_g = 1,3^2$;
- Efeito favorável: $\gamma_g = 1,0$.

4.8.2 AÇÕES VARIÁVEIS

A ABNT NBR 7190-1 (2022b) estabelece que para coberturas comuns, com inclinação menor ou igual a 3%, que não estejam sujeitas a carregamentos atípicos, e na ausência de especificação em contrário, deve ser prevista uma sobrecarga (Q) vertical característica mínima de 250 N/m² de área construída, em projeção horizontal.

Adicionalmente, a determinação das cargas de vento na estrutura foi obtida por meio das diretrizes estabelecidas pela ABNT NBR 6123 (1988), para galpões retangulares com telhados de duas águas simétricas, assim como mostrado na Figura 4.4 com as dimensões estabelecidas na Tabela 4.3.

As treliças, submetidas ao processo de otimização, foram concebidas com o intuito de compor galpões com a finalidade de ser utilizado para armazenamento de defensivos agrícolas. Considerando a região metropolitana de Goiânia, região sul, sudeste e oeste e do estado de Goiás, determinou-se uma velocidade básica do vento (V_0) de 35 m/s.

A fim de determinar a força de vento atuante na estrutura, é necessário obter a velocidade característica do vento (V_k) (Eq. 4.10), por meio do produto dos fatores S_1 , S_2 e S_3 e a velocidade básica do vento (V_0), além disso, é necessário obter a pressão dinâmica do vento (q), conforme especificado no item 4.2 da ABNT NBR 6123 (1988). Onde V_k e q calculados seguindo a formulação expressa na Eq. 4.10 e Eq. 4.11, respectivamente.

$$V_k = V_0 \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \quad \text{Eq. 4.10}$$

$$q = 0,613 \cdot V_k^2 \quad \text{Eq. 4.11}$$

Abaixo são apresentados os valores considerados para os fatores S_1 , S_2 e S_3 .

A determinação do fator topográfico (S_1) que toma como base as condições do relevo do terreno, pode ser obtido por meio do item 5.2 da ABNT NBR 6123 (1988). O presente trabalho considerou um terreno fracamente acidentado, que resulta em $S_1 = 1,0$.

² Recomendação para casos de ações permanentes diretas consideradas separadamente, para elementos estruturais de madeira segundo o item 6.1 da ABNT NBR 7190-1 (2022b).

O fator estatístico (S_3) que se baseia nos conceitos estatísticos, que considera o grau de segurança requerido e a vida útil da edificação, pode ser obtido por meio do item 5.4 da ABNT NBR 6123 (1988). O presente trabalho considerou uma edificação do grupo 3 que se trata de edificações e instalações industriais com baixo fator de ocupação tal como depósitos ($S_3 = 0,95$).

O fator S_2 considera a influência da rugosidade do terreno, das dimensões da edificação ou parte da edificação em estudo, e de sua altura sobre o terreno, podendo ser obtido por meio do item 5.3 da ABNT NBR 6123 (1988). Esse parâmetro é calculado conforme a Eq. 4.12, onde b é o parâmetro meteorológico usado na determinação de S_2 , F_r é o fator de rajada, z é altura sobre o terreno sendo a soma das dimensões H e H_0 ($z = H + H_0$), p é o expoente da lei de potência de variação de S_2 .

$$S_2 = b \cdot F_r \cdot \left(\frac{z}{10}\right)^p \quad \text{Eq. 4.12}$$

Quanto à rugosidade do terreno, foi estabelecida tomando como base um terreno plano com obstáculos, tais como sebes e muros, poucos quebra-ventos de árvores, edificações baixas e esparsas, classificada como Categoria III de rugosidade. Acerca das dimensões da edificação, todos os tipos de galpões foram classificados segundo o item 5.3.2 da ABNT NBR 6123 (1988), assim como descrito na Tabela 4.5, onde a A e B são a menor e maior dimensão em planta do galpão.

Tabela 4.5: Classificação para as dimensões dos galpões

Galpão	Dimensões			Classe	
	A (m)	B (m)	z (m)	Vento 0°	Vento 90°
Tipo 1	20	6	5,75	Classe A	Classe B
Tipo 2	25	9	6,125		
Tipo 3	30	12	6,5		
Tipo 4	35	15	6,875		

Fonte: Próprio Autor (2023)

Uma vez estabelecidas as classes relacionadas às dimensões dos galpões, assim como a categoria de rugosidade, determinam-se os parâmetros meteorológicos b , F_r e p , obtendo assim o fator S_2 , seguindo a formulação apresentada na Eq. 4.12. Os resultados obtidos para o fator S_2 para o vento a 0° e 90° são apresentados Tabela 4.6.

Tabela 4.6: Resultados dos fatores meteorológicos e fator S_2

Galpão	z (m)	Vento 0°				Vento 90°			
		b	F_r	p	S_2	b	F_r	p	S_2
Tipo 1	5,75	0,94	1,00	0,10	0,889	0,94	0,98	0,105	0,869
Tipo 2	6,125				0,895				0,875
Tipo 3	6,5				0,900				0,880
Tipo 4	6,875				0,905				0,886

Fonte: Próprio Autor (2023)

Os resultados de V_k e q para os galpões nos ventos a 0° e 90° são apresentados na Tabela 4.7.

Tabela 4.7: Resultados V_k e q para vento a 0° e 90°

Galpão	V_0 (m/s)	S_1	S_3	Vento 0°			Vento 90°		
				S_2	V_k (m/s)	q (N/m ²)	S_2	V_k (m/s)	q (N/m ²)
Tipo 1	35	1,00	0,95	0,889	29,572	536,084	0,869	28,901	512,014
Tipo 2	35	1,00	0,95	0,895	29,760	542,901	0,875	29,093	518,852
Tipo 3	35	1,00	0,95	0,900	29,937	549,392	0,880	29,275	525,368
Tipo 4	35	1,00	0,95	0,905	30,106	555,589	0,886	29,448	531,593

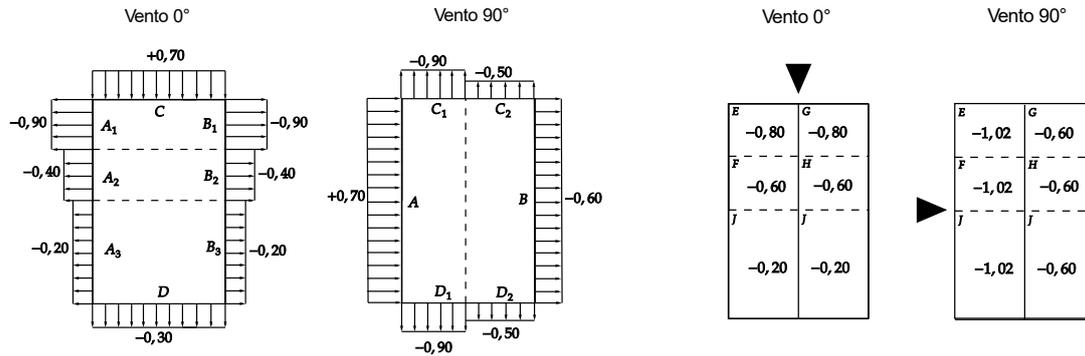
Fonte: Próprio Autor (2023)

No cálculo das ações devido ao vento nos galpões, os valores de pressão dinâmica do vento, em ambas as direções devem ser combinados com os coeficientes de forma e pressão externo e interno. Na determinação da ação do vento atuante (w_k) na estrutura, deve-se fazer o produto entre a diferença dos coeficientes de forma externo (C_e) e interno (C_i) pela pressão dinâmica do vento (q), como apresentado na Eq. 4.13.

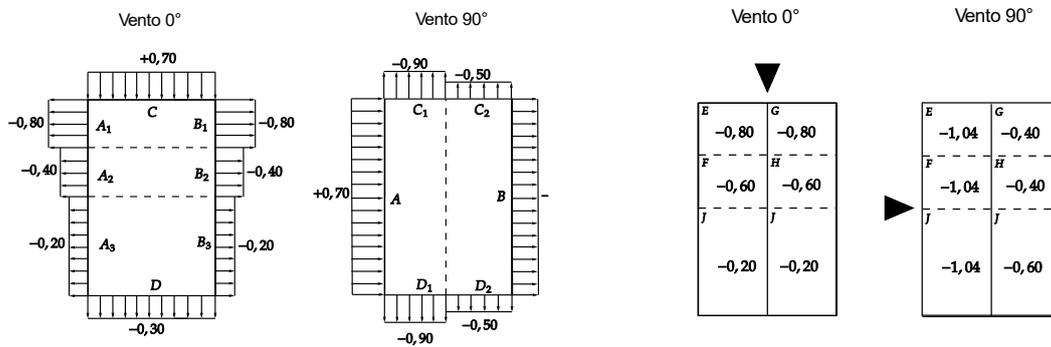
$$w_k = (C_e - C_i) \cdot q \quad \text{Eq. 4.13}$$

O coeficiente de forma externo (C_e) é aplicado para parede e telhado, como prevê a ABNT NBR 6123 (1988), calculados por meio do *software iTruss v.0.0.1*. Os resultados dos coeficientes de forma externos (C_e) de parede e telhado para todos os tipos de galpão são apresentados na Figura 4.5.

Figura 4.5: Coeficiente de forma externos (C_e)



(a) Tipo 1 e Tipo 2

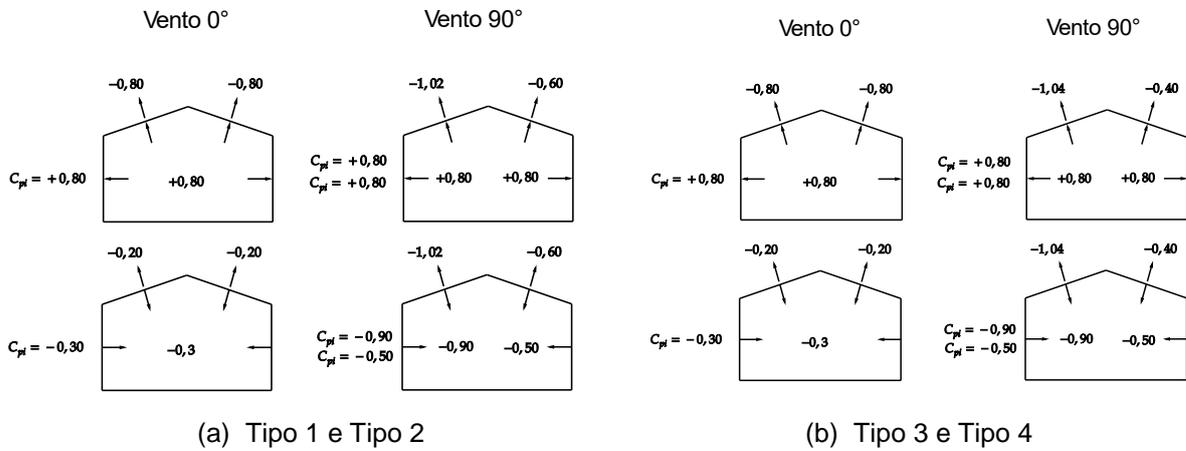


(b) Tipo 3 e Tipo 4

Fonte: Adaptado do *software iTruss v.0.0.1*

O coeficiente de forma interno (C_i) foi obtido a partir da análise da hipótese de aberturas dominantes nas diferentes direções do galpão. Os galpões foram considerados perfeitamente vedados nos encontros de elementos, não possuindo aberturas fixas. Adicionalmente, foram consideradas aberturas móveis de um portão (5 m × 2,5 m) em cada uma das entradas principais e cinco janelas (2 m × 1 m) para cada uma das laterais do galpão, totalizando 12,5 m² e 10 m² para as entradas principais e laterais do galpão respectivamente. Portanto, o coeficiente de forma interno (C_i) foi determinado conforme estabelecido no item 6.2.5 da ABNT NBR 6123 (1988). A Figura 4.6 apresenta os coeficientes de forma externo e interno quantificados, para as combinações críticas para as duas direções (0° e 90°).

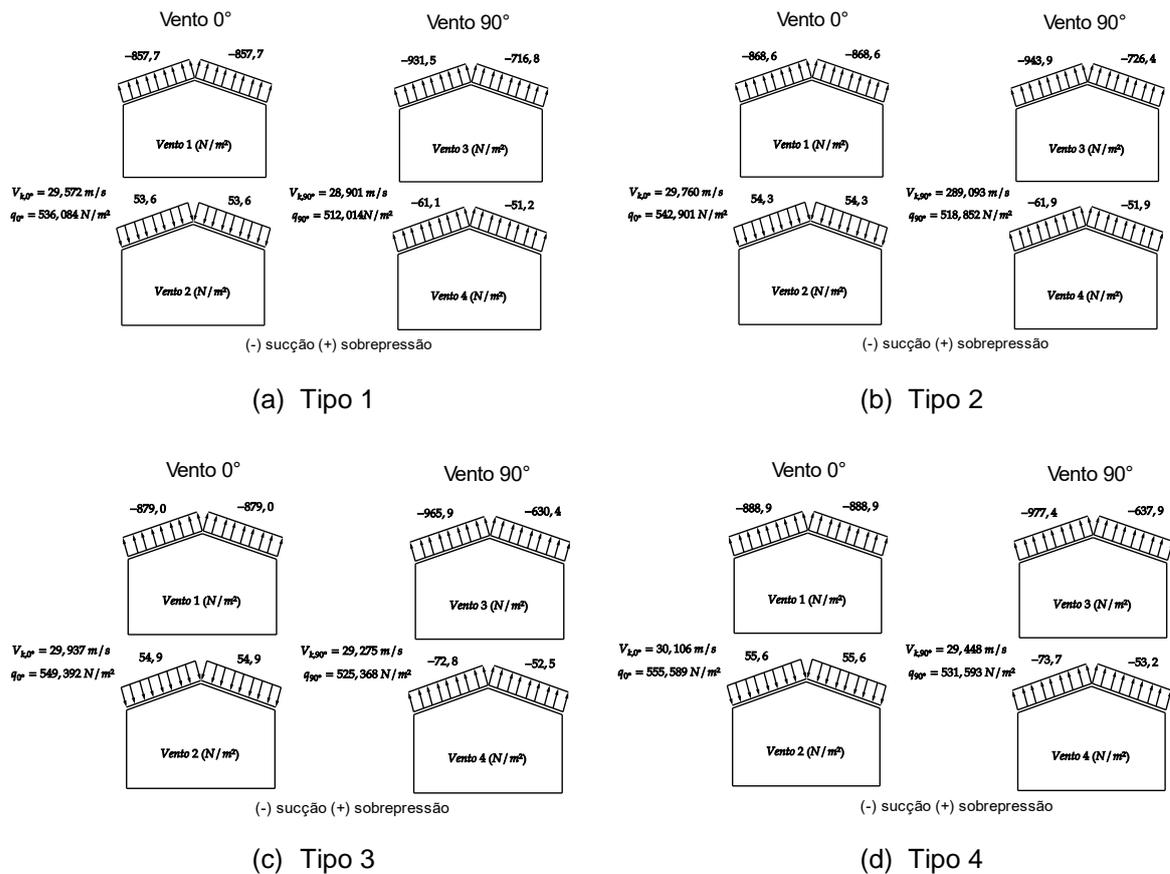
Figura 4.6: Combinações entre os coeficientes de forma externos (C_e) e internos (C_i) no telhado dos galpões



Fonte: Adaptado do software *iTruss* v.0.0.1

De posse de todos os resultados, o carregamento (w_k) foi calculado por meio da Eq. 4.13 e seus resultados são apresentados na Figura 4.7.

Figura 4.7: Forças de vento (w_k) no telhado dos galpões



Fonte: Adaptado do software *iTruss* v.0.0.1

No cálculo dos esforços e deslocamentos de cálculo, assim como as ações permanentes, as ações variáveis foram consideradas separadamente, considerando os seguintes fatores de combinação (ψ_0) e redução (ψ_1 e ψ_2) para carga variáveis conforme a ABNT NBR 8681 (2003):

- Sobrecarga na cobertura de galpão comercial: $\gamma_q = 1,5$; $\psi_0 = 0,7$; $\psi_1 = 0,6$; $\psi_2 = 0,4$;
- Ação do vento: $\gamma_q = 1,4$; $\psi_0 = 0,6$; $\psi_1 = 0,3$; $\psi_2 = 0$.

4.8.3 COMBINAÇÕES CONSIDERADAS

Como descrito nos itens 4.8.1 e 4.8.2, para ações permanentes foram consideradas carga do peso próprio da treliça (PP) e a carga devido à telha termoacústica (G) de 350 N/m², já para ações variáveis foram consideradas a sobrecarga (Q) de 250 N/m² e carga de sucção ou sobrepressão do vento (w_{sob} ou w_{suc}) assim como mostrado na Figura 4.7.

Por meio área de influência é possível transformar as cargas distribuídas em cargas nodais. Utilizou-se um algoritmo de análise matricial para obtenção dos esforços normais nas barras e os deslocamentos nodais, a fim de possibilitar a combinação dos esforços e deslocamentos.

Portanto, as combinações utilizadas para o dimensionamento e avaliação da FO, assim como descrito na Tabela 4.8, com seus respectivos coeficientes de majoração (γ), fator de combinação (ψ_0) e fator de redução para ações variáveis (ψ_1), estão descritos na Tabela 4.8.

Tabela 4.8: Combinações consideradas no dimensionamento

Estado Limite		Ação Permanente	Ação Variável
ELU	Combinação 1	$1,4 \cdot G + 1,3 \cdot PP$	$1,5 \cdot Q + 1,4 \cdot w_{sob} \cdot 0,6$
	Combinação 2	$1,4 \cdot G + 1,3 \cdot PP$	$1,4 \cdot w_{sob} + 1,5 \cdot Q \cdot 0,5$
	Combinação 3	$1,0 \cdot G + 1,0 \cdot PP$	$1,4 \cdot 0,75^a \cdot w_{suc}$
ELS	Combinação 4 ^b	$\delta G_{inst} + \delta PP_{inst}$	$\delta Q_{inst} + 0,3 \cdot \delta w_{sob,inst}$
		$\delta G_{inst} + \delta PP_{inst}$	$\delta w_{sob,inst} + 0,4 \cdot \delta Q_{inst}$
	Combinação 5 ^c	$\delta G_{fin} + \delta PP_{fin}$	δQ_{fin}

^a - Consideração das ações que tenham um tempo de atuação muito reduzido (vento ou a parcela das cargas móveis devida ao impacto), para garantir a condição mais desfavorável a estrutura, podem ser multiplicadas por 0,75.

^b – Condição de flechas instantâneas, assim como apresentado na Eq. 3.3.

^c – Condição de flechas finais considerando o efeito da fluência, assim como apresentado na Eq. 3.4.

Fonte: Próprio Autor (2023)

4.9 PROPRIEDADES FÍSICAS E MECÂNICAS DA MADEIRA

Neste item estão descritos todos os procedimentos e metodologia de ensaio e cálculo para caracterização de madeira de floresta nativa segundo a ABNT NBR 7190-3 (2022c), considerando-se a premissa de lotes considerados homogêneos segundo a ABNT NBR 7190-1 (2022b).

As propriedades mecânicas apresentam valores distintos, variando segundo o tipo de carregamento (flexão, compressão, tração e cisalhamento), assim como a direção da aplicação do carregamento (longitudinal, tangencial e radial) devido a sua composição anisotrópica (MIYOSHI; KOJIRO; FURUTA, 2018). Portanto, a variação entre árvores de uma mesma espécie e a forma de beneficiamento dever ser feita de uma certa amostragem, a fim de estratificá-la estatisticamente.

Nesse sentido, a ABNT NBR 7190-3 (2022c) estabelece os números mínimos de copos de prova (CP) para caracterização de espécies. Logo, para caracterização mínima e simplificada de espécies pouco conhecidas, recomenda-se um número mínimo de 12 e 6 corpos de prova, respectivamente. Tais corpos de provas foram extraídos de lotes (com volume superior a 12 m³) de madeira serrada considerados homogêneos. Além disso, os corpos de prova devem ser retirados de regiões afastadas das extremidades das peças de pelo menos 5 vezes a menor dimensão da seção transversal, mas não inferior a 300 mm.

Todos os ensaios foram realizados nas dependências do laboratório de Madeiras e Estruturas de Madeiras (LaMEM), do Departamento de Engenharia (SET) da Universidade de São Paulo (USP), localizado em São Carlos – SP, onde para cada ensaio foram preparados 12 corpos de prova e ensaiados conforme descrito nos itens infracitados, totalizando 360 corpos de prova ensaiados. A identificação (ID), nome popular e científico das cinco espécies

avaliadas é apresentada na Tabela 4.9. Cabe destacar que as espécies foram adquiridas em empresa do ramo madeireiro situada na região de São Carlos. Essas espécies foram escolhidas com base nas suas respectivas densidades, visando classes de resistências distintas.

Tabela 4.9: Identificação, nomes popular e científico das espécies avaliadas

ID	Nome popular	Nome científico
01	Cambará-rosa	<i>Erisma sp.</i>
02	Cupiúba	<i>Goupia glabra</i>
03	Angelim-pedra	<i>Hymenolobium petraeum</i>
04	Garapa	<i>Apuleia leiocarpa</i>
05	Jatobá	<i>Hymenaea sp.</i>

Fonte: Próprio Autor (2023)

4.9.1 DETERMINAÇÃO DOS VALORES CARACTERÍSTICOS

A norma ABNT NBR 7190-1 (2022b) estabelece a correção para a condição-padrão de referência, em seu item 5.6.1. Nos processos de caracterização das propriedades mecânicas de resistência e rigidez, quando realizados com teor de umidade diferente do padrão, devem ser corrigidos para a umidade padrão de 12%, conforme as Equações 4.14 e 4.15 para resistência e rigidez, respectivamente.

$$f_{12\%} = f_{U\%} \left[1 + \frac{3 \cdot (U\% - 12)}{100} \right] \quad \text{Eq. 4.14}$$

em que $f_{12\%}$ é a resistência corrigida para umidade de 12% e $f_{U\%}$ a resistência para o teor de umidade $U\%$.

$$E_{12\%} = E_{U\%} \left[1 + \frac{2 \cdot (U\% - 12)}{100} \right] \quad \text{Eq. 4.15}$$

em que $E_{12\%}$ é o módulo de resistência corrigido para umidade de 12% e $E_{U\%}$ o módulo de elasticidade para o teor de umidade $U\%$.

A fim de obter a resistência característica (f_{wk}), os resultados obtidos devem ser organizados em ordem crescente ($f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots \leq f_n$), onde n é o número de amostras ensaiadas, f_1 e f_n são a menor e a maior resistência obtida nos ensaios, respectivamente. É necessário calcular a resistência média (f_m), (Eq. 4.16). A ABNT NBR 7190-3 (2022c) determina que em casos de número de resultados ímpares obtidos o maior valor de resistência deve ser desconsiderado.

$$f_m = \frac{f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n}{n} \quad \text{Eq. 4.16}$$

Como recomendado pela ABNT NBR 7190-3 (2022c) a resistência característica (f_{wk}) deve ser calculada conforme a Eq. 4.17, onde não é permitido f_{wk} assumir valores inferiores a f_1 e $0,7 \cdot f_m$ e superiores a f_m .

$$\max[f_1; 0,7 \cdot f_m] \leq f_{wk} = \left(2 \cdot \frac{f_1 + f_2 + \dots + f_{\frac{n}{2}-1}}{\frac{n}{2} - 1} - f_{\frac{n}{2}} \right) \cdot 1,1 \leq f_m \quad \text{Eq. 4.17}$$

Cabe destacar que o valor da resistência característica à compressão paralela às fibras ($f_{c0,k}$) classifica as madeiras de floresta nativa em cinco classes de resistência: D20 ($20 < f_{c0,k} < 30$ MPa), D30 ($30 \leq f_{c0,k} < 40$ MPa), D40 ($40 \leq f_{c0,k} < 50$ MPa), D50 ($50 \leq f_{c0,k} < 60$ MPa) e D60 ($f_{c0,k} > 60$ MPa).

4.9.2 TEOR DE UMIDADE

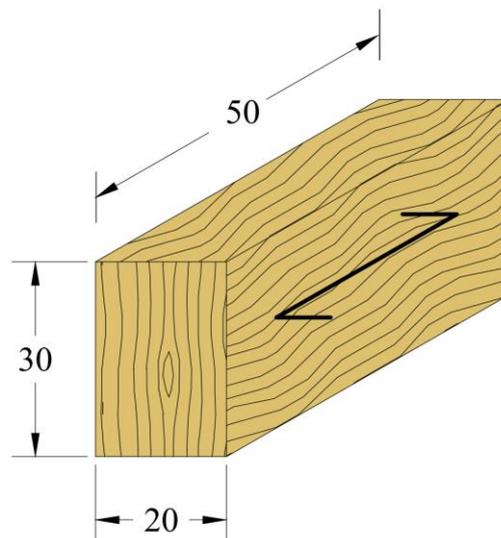
Esta metodologia pode ser aplicada para madeira serrada ou beneficiada, para ajuste das propriedades mecânicas de resistência e de rigidez. Segundo a ABNT NBR 7190-3 (2022c) o teor de umidade da madeira corresponde à relação entre a massa da água nela contida e a massa da madeira seca, podendo ser calculado conforme a Eq. 4.18.

$$U(\%) = \frac{m_i - m_s}{m_s} \cdot 100 \quad \text{Eq. 4.18}$$

Da Eq. 4.18, m_i é a massa inicial do corpo de prova m_s é a massa seca do corpo de prova.

O corpo de prova para determinação do teor de umidade deve ter seção transversal retangular, com dimensões nominais de 20 mm × 30 mm e comprimento, ao longo das fibras, de 50 mm, como indicado na Figura 4.8.

Figura 4.8: Corpo de prova para determinação da umidade da madeira (dimensões em mm)



Fonte: Adaptado da ABNT NBR 7190-3 (2022c)

O procedimento de ensaio para determinação do teor de umidade, segundo a ABNT NBR 7190-3 (2022c), segue os seguintes passos:

- I) Determina-se a massa inicial (m) do corpo de prova com precisão de 0,01 g.
- II) Coloca-se o corpo de prova na câmara de secagem, com temperatura máxima de 103 ± 2 °C.
- III) Durante a secagem, a massa do corpo de prova deve ser medida a cada 6 h, até que ocorra uma variação, entre duas medidas consecutivas, menor ou igual a 0,5% da última massa medida. Esta massa é considerada a massa seca (m_s).
- IV) Determina-se a umidade, conforme equação a Eq. 4.18.

4.9.3 DENSIDADE

A densidade aparente (ρ_{ap}) é uma massa específica convencional, definida pela razão entre a massa e o volume de corpos de prova com teor de umidade de 12%, calculada conforme a Eq. 4.19, onde m_{12} é a massa do corpo de prova a 12% de teor de umidade, V_{12} é o volume do corpo de prova a 12% de teor umidade.

$$\rho_{ap} = \frac{m_{12}}{V_{12}} \quad \text{Eq. 4.19}$$

Os corpos de prova devem ser prismáticos, com seção transversal nominal de 20 mm por 30 mm, e comprimento, ao longo das fibras, de 50 mm, similar ao corpo de prova para determinação do teor de umidade. Se a distância radial entre anéis de crescimento for maior que 4 mm, a seção transversal deve ser aumentada para abranger pelo menos 5 anéis.

O procedimento de ensaio para determinação da densidade aparente, segundo a ABNT NBR 7190-3 (2022c), segue os seguintes passos:

- I) Determina-se a massa e o volume, sendo medidos os corpos de prova com teor de umidade de 12%.
- II) Obtêm-se os valores de m_{12} e de V_{12} , determina-se a densidade aparente conforme a Eq. 4.19.

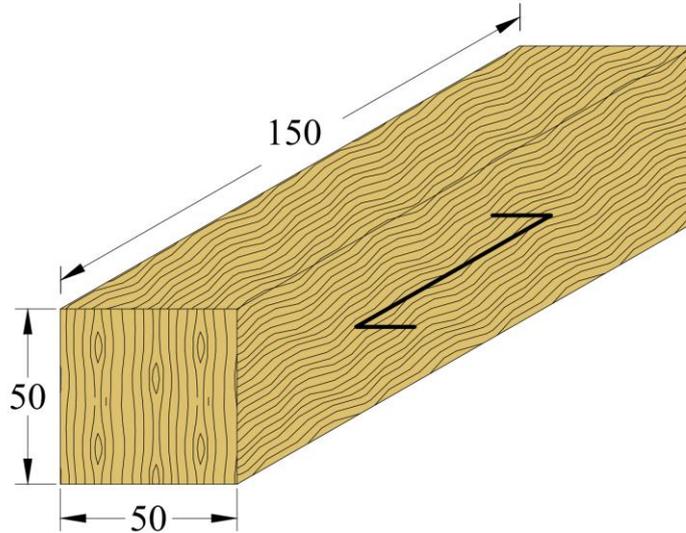
4.9.4 COMPRESSÃO PARALELA ÀS FIBRAS

A metodologia consiste na determinação da resistência e da rigidez à compressão paralela às fibras madeira por ensaio. A resistência à compressão paralela às fibras (f_{c0}) é dada pela máxima tensão de compressão que pode atuar em um corpo de prova com seção transversal quadrada com dimensão nominal de 50 mm de lado e comprimento de 150 mm, assim como mostrado na Figura 4.9, calculada segundo a Eq. 4.20. $F_{c0,max}$ é a máxima força de compressão aplicada ao corpo de prova durante o ensaio e A é a área inicial da seção transversal comprimida.

$$f_{c0} = \frac{F_{c0,max}}{A}$$

Eq. 4.20

Figura 4.9: Corpo de prova para ensaio de compressão paralelo às fibras da madeira (dimensões em mm)



Fonte: Adaptado da ABNT NBR 7190-3 (2022c)

A rigidez da madeira na direção paralela às fibras deve ser determinada por seu módulo de elasticidade, obtido do trecho linear do diagrama de tensão *versus* deformação específica, como indicado na Figura 4.10.

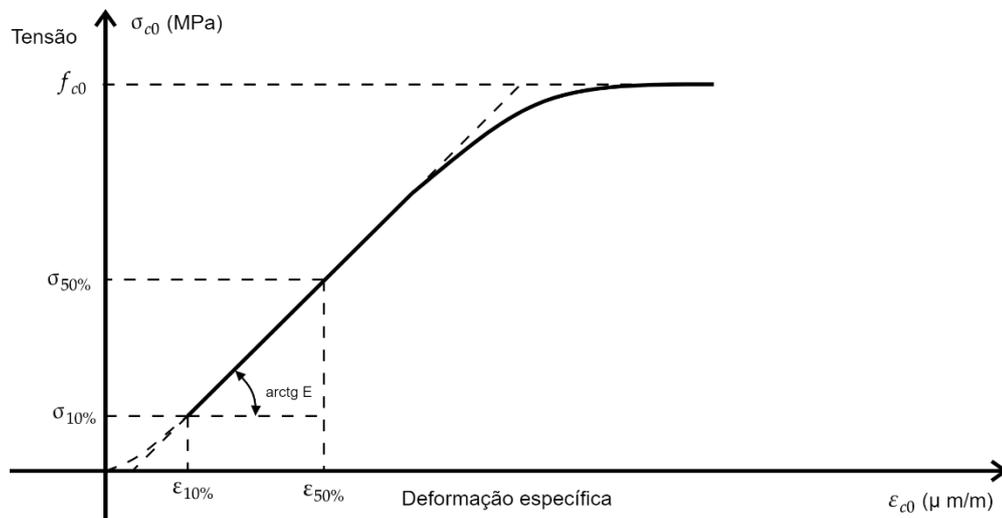
O módulo de elasticidade a compressão paralela às fibras (E_{c0}) deve ser determinado pela inclinação da reta secante à curva de tensão *versus* deformação, definida pelos pontos ($\sigma_{10\%}$ e $\varepsilon_{10\%}$) e ($\sigma_{50\%}$ e $\varepsilon_{50\%}$), correspondentes respectivamente a 10% e 50% da resistência à compressão paralela às fibras, medida no ensaio, calculado conforme a Eq. 4.21.

$$E_{c0} = \frac{\sigma_{50\%} - \sigma_{10\%}}{\varepsilon_{50\%} - \varepsilon_{10\%}}$$

Eq. 4.21

onde $\sigma_{10\%}$ e $\sigma_{50\%}$ são as tensões de compressão correspondentes a 10% e 50% da resistência f_{c0} , representadas pelos pontos 31 e 45 do diagrama de carregamento, ver Figura 4.12. $\varepsilon_{10\%}$ e $\varepsilon_{50\%}$ são as deformações específicas medidas no corpo de prova, correspondentes às tensões de $\sigma_{10\%}$ e $\sigma_{50\%}$, respectivamente.

Figura 4.10: Diagrama de tensão versus deformação específica para determinar a rigidez da madeira



Fonte: Adaptado da ABNT NBR 7190-3 (2022c)

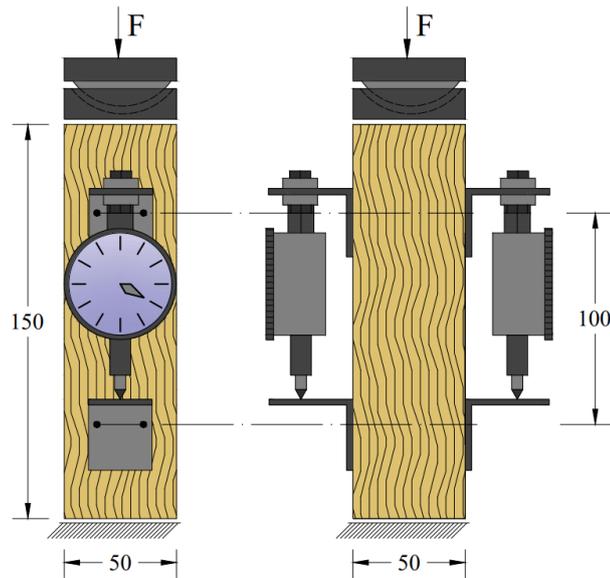
O procedimento de ensaio de compressão paralela às fibras, segundo a ABNT NBR 7190-3 (2022c), segue os seguintes passos:

- I) Deve-se medir os lados do corpo de prova com precisão de 0,1 mm.
- II) Deve-se medir as deformações em pelo menos duas faces opostas do corpo de prova, para determinação do módulo de elasticidade, podendo ser utilizados medidores mecânicos de deformação, com sensibilidade de 0,001 mm, devidamente fixados no corpo de prova, como mostrado na Figura 4.11. Em caso do emprego de extensômetros, as medidas das deformações específicas devem ser feitas com precisão mínima de 50 μ m/m.
- III) No ajuste do corpo de prova à máquina de ensaio, deve-se utilizar uma rótula entre o atuador e o corpo de prova.
- IV) A resistência deve ser determinada com carregamento monotônico crescente com uma taxa em torno de 10 MPa/min.
- V) Na determinação da rigidez, a resistência da madeira deve ser estimada ($f_{c0,est}$) pelo ensaio destrutivo de um corpo de prova selecionado da mesma amostra a ser investigada.
- VI) Obtida a resistência estimada da amostra $f_{c0,est}$, o carregamento deve ser aplicado com ciclos de carga e descarga, conforme o diagrama de carregamento (ver Figura 4.12).
- VII) Os registros das forças e das deformações devem ser feitos para cada ponto do diagrama de carregamento conforme a Figura 4.12.
- VIII) Nos ensaios com instrumentação baseada em extensômetros mecânicos fixados no corpo de prova, devem ser registradas para cada ponto do diagrama de

carregamento mostrado na Figura 4.12, até 70% da força estimada para a ruptura. Em seguida, retira-se a instrumentação e eleva-se a força até a ruptura do corpo de prova.

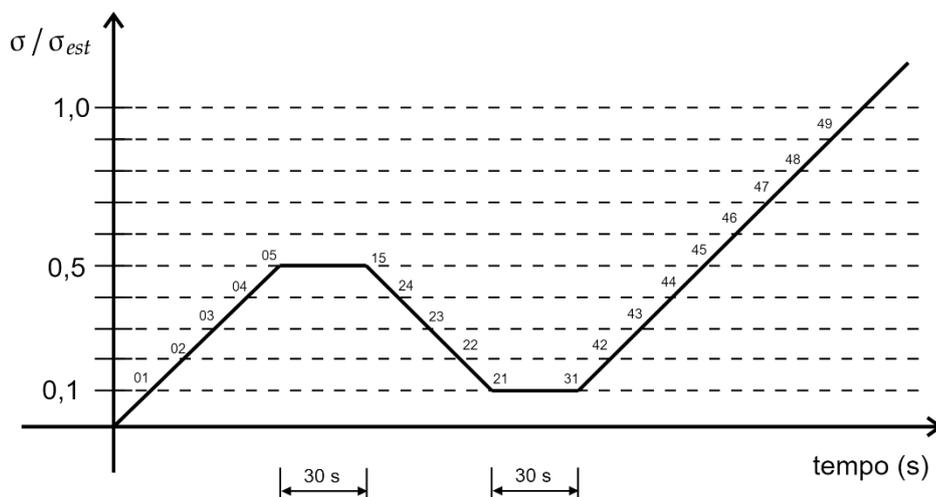
IX) Na caracterização mínima de espécies pouco conhecidas, devem ser utilizadas duas amostras, sendo uma com corpos de prova saturados e outra com corpos de prova com teor de umidade em equilíbrio com ambiente (seco ao ar).

Figura 4.11: Layout para o ensaio para compressão paralela às fibras, com relógios comparadores (dimensões em mm)



Fonte: Adaptado da ABNT NBR 7190-3 (2022c)

Figura 4.12: Diagrama de carregamento para determinação da rigidez da madeira



Fonte: Adaptado da ABNT NBR 7190-3 (2022c)

4.9.5 TRAÇÃO PARALELA ÀS FIBRAS

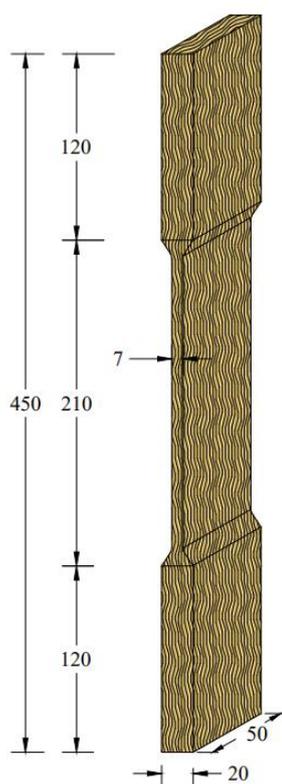
A metodologia consiste na determinação da resistência e da rigidez à tração paralela às fibras da madeira por ensaio. A resistência à tração paralela às fibras (f_{t0}) é dada pela máxima tensão de tração que pode atuar em um corpo de prova alongado com trecho central de seção transversal uniforme de área A e comprimento não menor que $8\sqrt{A}$, com extremidades mais resistentes que o trecho central e com concordâncias que assegurem a ruptura no trecho central, calculada conforme a seguinte equação:

$$f_{t0} = \frac{F_{t0,max}}{A} \quad \text{Eq. 4.22}$$

onde $F_{t0,max}$ é a máxima força de tração aplicada ao corpo de prova durante o ensaio.

Na determinação da resistência e do módulo de elasticidade na tração paralela às fibras utilizou-se o corpo representado na Figura 4.13.

Figura 4.13: Corpo de prova para ensaios de tração paralela às fibras (dimensões em mm)



Fonte: ABNT NBR 7190-3 (2022c)

A rigidez da madeira na direção paralela às fibras deve ser determinada por seu módulo de elasticidade, obtido do trecho linear do diagrama de tensão *versus* deformação específica, assim como no ensaio de compressão paralela às fibras.

O módulo de elasticidade deve ser determinado pela inclinação da reta secante à curva de tensão *versus* deformação, definida pelos pontos ($\sigma_{10\%}$ e $\varepsilon_{10\%}$) e ($\sigma_{50\%}$ e $\varepsilon_{50\%}$) correspondentes, respectivamente, a 10% e 50% da resistência à tração paralela às fibras medida no ensaio, calculado conforme a seguinte equação Eq. 4.23.

$$E_{t0} = \frac{\sigma_{50\%} - \sigma_{10\%}}{\varepsilon_{50\%} - \varepsilon_{10\%}} \quad \text{Eq. 4.23}$$

onde $\sigma_{10\%}$ e $\sigma_{50\%}$ são as tensões de compressão correspondentes a 10% e 50% da resistência f_{c0} , representadas pelos pontos 31 e 45 do diagrama de carregamento. $\varepsilon_{10\%}$ e $\varepsilon_{50\%}$ são as deformações específicas medidas no corpo de prova, correspondentes às tensões de $\sigma_{10\%}$ e $\sigma_{50\%}$, respectivamente.

O procedimento de ensaio de tração paralela às fibras, segundo a ABNT NBR 7190-3 (2022c), segue os seguintes passos:

I) Fixam-se os relógios de medição em duas opostas do corpo de prova, se utilizando medidores de deformação, com sensibilidade 0,001 mm, devidamente fixados no corpo de prova, como exemplificado na Figura 4.14. No caso do emprego de extensômetros, as medidas das deformações específicas devem ser feitas com precisão mínima de 50 $\mu\text{m/m}$.

II) No ajuste do corpo de prova à máquina de ensaios, devem ser utilizados pares simétricos de garras.

III) O carregamento deve ser monotônico crescente correspondente a uma taxa em torno de 10 MPa/min.

IV) Na determinação da rigidez, a resistência da madeira deve ser estimada ($f_{t0,est}$) pelo ensaio destrutivo de um corpo de prova gêmeo, selecionado da mesma amostra a ser investigada.

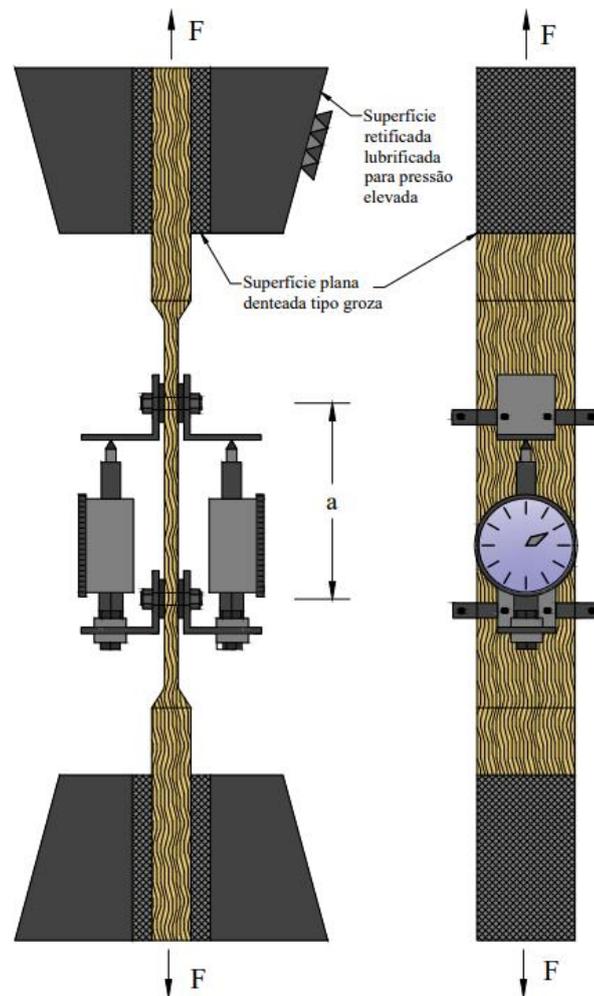
V) Em seguida, o carregamento deve ser aplicado com ciclos de carga e descarga, segundo o diagrama de carregamento da Figura 4.12.

VI) Os registros das forças e das deformações devem ser feitos para cada ponto do diagrama de carregamento mostrado na Figura 4.12.

VII) Nos ensaios com instrumentação baseada em extensômetros mecânicos fixados no corpo de prova, devem ser registrados, para cada ponto do diagrama de carregamento mostrado na Figura 4.12, até 70% da força estimada para a ruptura. Em seguida, retira-se a instrumentação e eleva-se o carregamento até a ruptura do corpo de prova.

VIII) Na caracterização mínima de espécies pouco conhecidas, devem ser utilizadas duas amostras, sendo uma com corpos de prova saturados e outra com corpos de prova com teor de umidade em equilíbrio com ambiente (seco ao ar).

Figura 4.14: *Layout* de ensaio de tração paralela às fibras (dimensões em mm)



Fonte: Adaptado da ABNT NBR 7190-3 (2022c)

4.10 ANÁLISE DE VARIÂNCIA (ANOVA)

Na análise estatística, foi utilizada a formulação da análise de variância (ANOVA), com nível de significância (α) de 5%, sendo utilizada para verificar as diferenças significativas no desempenho mecânico das tipologias de treliças. Desta forma, a ANOVA foi considerada nos resultados das restrições com cargas normais e deslocamentos, assim como descrito no item 4.7. Analisa-se cada vão (6 m, 9 m, 12 m e 15 m) considerando as restrições de tensão (Eq. 4.8) e deslocamento nodal (Eq. 4.9), verificando as equivalências estatísticas entre as tipologias no que diz respeito à restrição média.

No que se refere a ANOVA, a hipótese nula (H_0) consiste na consideração de que determinada variável analisada é equivalente (não há diferenças significativas) para uma mesma variável, considerando-se um conjunto de todos os resultados obtidos, e na diferença

das médias dos grupos analisados. Como hipótese alternativa (H_1) que implica na não equivalência (pelo menos uma das médias dos grupos é diferente das outras). A fim de avaliar tais hipóteses utilizou-se o teste de significância, avaliando a probabilidade de significância p , denominado como p-valor

Walpole (2008) define que o p-valor pode ser definido como a probabilidade da estatística do teste do quão distante o resultado está do esperado. Portanto, o teste tem o intuito de verificar se os dados fornecem evidência suficiente para aceitar como verdadeira a hipótese alternativa, H_1 , com certa segurança de que as diferenças observadas nos dados não são meramente casuais. Logo, o p-valor é o menor nível de significância em que H_0 seria rejeitada, quando um procedimento de teste especificado é usado em um determinado conjunto de dados. Uma vez que o p-valor tenha sido determinado, a conclusão, em qualquer nível de significância α , resulta da comparação do valor P a α , sendo duas possíveis resultados. Logo, p-valor $> 0,05$ implica em assumir a equivalência das médias dos dois grupos (não-rejeição H_0) e p-valor $\leq 0,05$ implica em assumir a não equivalência (rejeição H_0).

Em casos da rejeição da hipótese nula (H_0), a condição de equivalência pode ser verificada por meio do método de Tukey (TUKEY, 1949), que realizar comparações múltiplas para diferentes grupos de valores, com o intuito de identificar se os agrupamentos possuem distinção entre si.

Por fim, antes de assumir a validade dos resultados oriundos da ANOVA, algumas premissas devem ser satisfeitas, incluindo a normalidade na distribuição dos resíduos, a homogeneidade das variâncias e a independência dos resíduos. Estas análises foram realizadas via *software Minitab® Statistical*³.

Assim, a normalidade na distribuição dos resíduos pode ser verificada com o teste de Anderson-Darling, em que um p-valor igual ou superior ao nível de significância (5%) implica em aceitar a normalidade na distribuição e de rejeitar esta hipótese, caso contrário. Já a verificação da igualdade de variância pode ser obtida via método das comparações múltiplas (teste de Bartlett).

³ Minitab® Statistical Software – Versão 19.2020.1 (MINITAB, 2020)

5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo apresenta-se os resultados da caracterização das cinco espécies estudadas e os resultados do processo de otimização para os modelos de treliça Howe e Fan modificada. Ademais, no decorrer do texto, foram apresentadas as discussões envolvendo a caracterização das espécies de madeira e o processo de otimização.

5.1 DENSIDADE APARENTE

A Tabela 5.1 apresenta o valor médio (\bar{x}) da densidade aparente da madeira ($\rho_{12\%}$) em $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ das espécies avaliadas, o desvio padrão (DP), o coeficiente de variação (CV %), o valor mínimo (min) e máximo (max) valor e o intervalo de confiança (IC) do valor médio ao nível de 5% de significância.

Tabela 5.1: Estatísticas com os valores médios amostrais $\rho_{12\%}$ ($\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$)

ID	Espécie	\bar{x}	DP	CV (%)	min	max	IC
01	Cambará-rosa	682,88	41,56	6,09	620,09	740,14	(659,36; 706,39)
02	Cupiúba	846,42	45,73	5,40	778,40	896,13	(820,55; 872,3)
03	Angelim-pedra	695,77	33,12	4,76	644,57	741,89	(677,03; 714,51)
04	Garapa	896,24	41,29	4,61	828,56	953,91	(872,88; 919,61)
05	Jatobá	1054,23	56,79	5,39	998,02	1148,61	(1022,1; 1086,36)

Fonte: Próprio Autor (2023)

Com o intuito de validar os resultados obtidos, é possível verificar valores normativos e comparar com resultados obtidos em outras pesquisas, por meio dos valores médios e o intervalo de confiança (IC). Nesse contexto, para a densidade aparente da madeira ($\rho_{12\%}$), para espécies dicotiledôneas de florestas nativas, quando comparados com os valores apresentados pela ABNT NBR 7190 (1997), observou-se valores próximos aos obtidos no presente estudo em seus intervalos de confianças.

No estudo desenvolvido por Lahr *et al.* (2016a) onde foi executada a caracterização completa da espécie Cambará-rosa (*Erismia sp.*), foi observada uma densidade aparente ($\rho_{12\%}$) de $680 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Similarmente, Silva *et al.* (2018) caracterizaram a espécie Cupiúba (*Goupia glabra*) obtendo uma densidade $840 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Os resultados obtidos para as espécies Angelim-pedra (*Hymenolobium petraeum*) e Jatobá (*Hymenaea sp.*) considerando a densidade obtida por Teixeira *et al.* (2021) e Lahr *et al.* (2016b) de $640 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ e $1050 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, respectivamente. Valores os quais aproximam-se dos resultados obtidos no presente estudo, dentro dos intervalos de confiança.

5.2 COMPRESSÃO PARALELA ÀS FIBRAS

A Tabela 5.2 apresenta o valor médio (\bar{x}) da resistência na compressão paralela às fibras (f_{c0}) em MPa das espécies avaliadas, o desvio padrão (DP), o coeficiente de variação (CV %), o valor mínimo (min) e máximo (max) e o intervalo de confiança (IC) do valor médio ao nível de 5% de significância.

Tabela 5.2: Estatísticas dos resultados obtidos para a resistência na compressão paralela às fibras f_{c0} (MPa)

ID	Espécie	\bar{x}	DP	CV (%)	max	min	IC
01	Cambará-rosa	33,73	5,31	15,74	26,89	42,77	(30,73; 36,73)
02	Cupiúba*	55,12	13,25	24,04	38,59	74,17	(47,63; 62,62)
03	Angelim-pedra	65,26	17,1	26,2	38,3	84,6	(55,58; 74,94)
04	Garapa	71,93	7,32	10,18	62,29	86,97	(67,79; 76,07)
05	Jatobá	100,09	9,88	9,87	79,40	105,78	(94,5; 105,68)

Fonte: Próprio Autor (2023)

Analogamente, a Tabela 5.3 apresenta o valor médio (\bar{x}) do módulo de elasticidade na compressão medido na direção paralela às fibras (E_{c0}) em MPa das espécies avaliadas, o desvio padrão (DP), o coeficiente de variação (CV %), o valor mínimo (max) e máximo (min) e o intervalo de confiança (IC) do valor médio ao nível de 5% de significância.

Tabela 5.3: Estatísticas dos resultados obtidos para o módulo de elasticidade na compressão medido na direção paralela às fibras E_{c0} (MPa)

ID	Espécie	\bar{x}	DP	CV (%)	min	max	IC
01	Cambará-rosa	13000,88	2672,5	20,56	9719,72	16956,5	(11488,77; 14512,99)
02	Cupiúba	13891,98	2674,63	19,25	8847,38	18974,4	(12378,67; 15405,29)
03	Angelim-pedra	11648,41	2254,44	19,35	8274,85	17597,9	(10372,84; 12923,98)
04	Garapa	17498,15	2950,39	16,86	12519,9	21068,1	(15828,81; 19167,49)
05	Jatobá	20466,62	1765,82	8,63	17106,4	23097,2	(19467,51; 21465,72)

Fonte: Próprio Autor (2023)

Na sequência, os valores de resistência característica para compressão paralela às fibras ($f_{c0,k}$), obtidos por meio dos valores amostrais ($f_{c0,1}, f_{c0,2}, \dots, f_{c0,n}$) para $n = 12$ corpos de provas, a resistência na compressão média paralela às fibras ($f_{c0,m}$), por meio da Eq. 4.17, sendo esta essencial para a avaliação da classe de resistência (CR), sendo a classe D20 ($20 < f_{c0,k} < 30$ MPa), D30 ($30 \leq f_{c0,k} < 40$ MPa), D40 ($40 \leq f_{c0,k} < 50$ MPa), D50 ($50 \leq f_{c0,k} < 60$ MPa) e D60 ($f_{c0,k} > 60$ MPa), assim como apresentado na Tabela 5.4.

Tabela 5.4: Classes de resistência (CR) e resistência característica para compressão paralela às fibras ($f_{c0,k}$) (MPa)

ID	Espécie	$f_{c0,1}$	$f_{c0,m}$	$f_{c0,k}$	CR
01	Cambará-rosa	26,89	33,73	26,95	D20
02	Cupiúba*	38,59	55,12	38,59	D30
03	Angelim-pedra*	38,30	65,26	45,68	D40
04	Garapa	62,29	71,93	66,50	D60
05	Jatobá	79,40	100,09	88,43	D60

Fonte: Próprio Autor (2023)

Como o intuito de comparar os resultados obtidos no presente estudo, é possível verificar valores normativos e comparar com resultados obtidos em outras pesquisas, por meio dos valores médios e o intervalo de confiança (IC). Nesse sentido, ao comparar os resultados com os valores médios apresentados pela ABNT NBR 7190, as propriedades de resistência e rigidez na compressão com as espécies presentes na versão anterior da norma de estrutura de madeira, a ABNT NBR 7190 (1997), para espécies dicotiledôneas de florestas nativas, constatou-se valores de resistência e módulo de elasticidade próximos aos valores obtidos no presente estudo em seus intervalos de confianças.

No programa experimental desenvolvido por Lahr *et al.* (2016a) foi executada uma caracterização completa da espécie Cambará-rosa (*Erismia sp.*), em que foi observada uma resistência média na compressão paralela às fibras ($f_{c0,m}$) de 34 MPa e um módulo de elasticidade médio na compressão paralela às fibras de 12764 MPa. Similarmente, Silva *et al.* (2018) caracterizaram a espécie Cupiúba (*Goupia glabra*) e obtiveram uma resistência média na compressão paralela às fibras ($f_{c0,m}$) de 57,42 MPa e um módulo de elasticidade médio na compressão paralela às fibras ($E_{c0,m}$) de 12970 MPa, resultados os quais se aproximam do obtido pelo programa experimental realizado no presente trabalho. Para as espécies Angelim-pedra (*Hymenolobium petraeum*) e Jatobá (*Hymenaea sp.*) a resistência média na compressão paralela às fibras ($f_{c0,m}$) obtida por Teixeira *et al.* (2021) e Lahr *et al.* (2016b) foram de 55,45 e 94,38 MPa, respectivamente, 10850 MPa e 21759 MPa para o módulo de elasticidade médio na compressão paralela às fibras ($E_{c0,m}$), respectivamente. Esses valores os quais aproximam-se dos resultados obtidos no presente estudo, dentro dos intervalos de confiança.

5.3 TRAÇÃO PARALELA ÀS FIBRAS DA MADEIRA

Os valores médios (\bar{x}) da resistência na tração paralela às fibras (f_{t0}) em MPa das espécies avaliadas, o desvio padrão (DP), o coeficiente de variação (CV %), o valor máximo

(*max*) e mínimo (*min*) e o intervalo de confiança (*IC*) do valor médio ao nível de 5% de significância, estão apresentados na Tabela 5.5.

Tabela 5.5: Estatísticas dos resultados obtidos para a resistência na tração paralela às fibras f_{t0} (MPa)

ID	Espécie	\bar{x}	DP	CV (%)	<i>min</i>	<i>max</i>	IC
01	Cambará-rosa	46,05	12,10	26,28	30,23	66,8	(39,2; 52,89)
02	Cupiúba*	72,57	26,89	37,05	41,37	116,5	(57,36; 87,79)
03	Angelim-pedra*	78,17	35,77	45,76	35,53	131,32	(57,93; 98,4)
04	Garapa	117,91	43,33	36,75	71,93	188,7	(93,39; 142,43)
05	Jatobá	160,32	32,81	20,47	115,16	209,85	(127; 156,44)

Fonte: Próprio Autor (2023)

Analogamente, a Tabela 5.6 apresenta o valor médio (\bar{x}) do módulo de elasticidade na tração medido na direção paralela às fibras (E_{t0}) em MPa das espécies avaliadas, o desvio padrão (*DP*), o coeficiente de variação (*CV* %), o valor (*min*) e mínimo (*min*) e o intervalo de confiança (*IC*) do valor médio ao nível de 5% de significância.

Tabela 5.6: Estatísticas dos resultados obtidos para o módulo de elasticidade na tração medido na direção paralela às fibras E_{t0} (MPa)

ID	Espécie	\bar{x}	DP	CV (%)	<i>min</i>	<i>max</i>	IC
01	Cambará-rosa	12908,44	1792,33	13,88	10704,4	15792,8	(11894,33; 13922,54)
02	Cupiúba*	13415,47	2133,75	15,91	11051,2	19311,4	(12208,19; 14622,75)
03	Angelim-pedra*	11611,67	2736,78	23,57	8201,52	19592,8	(10063,19; 13160,15)
04	Garapa	16989,81	2489,66	14,65	12897,1	20517,9	(15581,15; 18398,47)
05	Jatobá	21520,09	3161,65	14,69	16488,8	26413,2	(19731,22; 23308,96)

Fonte: Próprio Autor (2023)

Na sequência, os valores de resistência característica para tração paralela às fibras ($f_{t0,k}$), obtidos por meio dos valores amostrais ($f_{t0,1}, f_{t0,2}, \dots, f_{t0,n}$) para $n = 12$ corpos de provas, a resistência média na tração paralela às fibras ($f_{t0,k}$), por meio da Eq. 4.17, os resultados são apresentados na Tabela 5.7.

Tabela 5.7: Resultados das resistências características para tração paralela às fibras da madeira ($f_{t0,k}$)(MPa)

ID	Espécie	$f_{t0,1}$	$f_{t0,m}$	$f_{t0,k}$
01	Cambará-rosa	30,23	46,05	32,23
02	Cupiúba*	41,37	72,57	50,80
03	Angelim-pedra*	35,53	78,17	54,72
04	Garapa	71,93	117,91	82,54
05	Jatobá	115,16	160,32	123,68

Fonte: Próprio Autor (2023)

Ao comparar os resultados obtidos no presente estudo, é possível verificar valores normativos e comparar com resultados obtidos em outras pesquisas. Por meio dos valores médios e o intervalo de confiança (IC), as propriedades de resistência e rigidez na compressão com as espécies presentes na versão anterior da norma de estrutura de madeira, a ABNT NBR 7190 (1997), para espécies dicotiledôneas de florestas nativas, constatou-se valores de resistência e módulo de elasticidade próximos aos valores obtidos no presente estudo em seus intervalos de confianças.

No programa experimental desenvolvido por Lavra *et al.* (2016a) foi executada uma caracterização completa da espécie Cambará-rosa (*Erismia sp*) onde foi observada uma resistência média na tração paralela às fibras ($f_{t0,m}$) de 45 MPa e um módulo de elasticidade médio na tração paralela às fibras de 12764 MPa. Similarmente, Silva *et al.* (2018) caracterizaram a espécie Cupiúba (*Goupia glabra*) e obtiveram uma resistência média na tração paralela às fibras ($f_{t0,m}$) de 70,58 MPa e um módulo de elasticidade médio na tração paralela às fibras ($E_{t0,m}$) de 12767 MPa, resultados os quais se aproximam do obtido pelo programa experimental realizado no presente trabalho. As espécies Angelim-pedra (*Hymenolobium petraeum*) e Jatobá (*Hymenaea sp.*) a resistência média na tração paralela às fibras ($f_{t0,m}$) obtida por Teixeira *et al.* (2021) e Lahr *et al.* (2016b) foram de 73,25 e 153,46 MPa, respectivamente, 10851 MPa e 21752 MPa para o módulo de elasticidade médio na tração paralela às fibras ($E_{t0,m}$), respectivamente. Valores os quais aproximam-se dos resultados obtidos no presente estudo, dentro dos intervalos de confiança.

5.4 OTIMIZAÇÃO

Nesta seção, são discutidos os resultados obtidos no processo de otimização das treliças avaliadas. A Tabela 5.8 e Tabela 5.9, apresentam os resultados gerais das 30 execuções do algoritmo de otimização para os diferentes tipos de treliças considerados, para a treliça Fan modificado e Howe. Os valores registrados na tabela incluem o valor máximo

W_{max} e mínimo W_{min} da função objetivo penalizada, bem como a amplitude (A), a mediana (μ), a média (\bar{x}), o desvio padrão (σ) e a taxa de factibilidade (TF). A taxa de factibilidade representa a proporção entre o número total de testes em que todas as restrições foram atendidas e o número total de testes realizados (30, neste caso), dado uma substituição de resultados insatisfatórios. Com o intuito de resumir os resultados, adotou-se uma identificação para as treliças do tipo x-y-z. Aqui, “x” indica a tipologia da treliça (por exemplo, H para treliça Howe, F para treliça Fan Modificada), “y” indica o vão da treliça em metros (6, 9, 12 ou 15) e “z” representa a ID da espécie considerada para o processo de dimensionamento.

Tabela 5.8: Resumo dos resultados obtidos do processo de otimização das treliças Fan modificada

Treliça	W_{max} (kg)	W_{min} (kg)	A (kg)	μ (kg)	\bar{x} (kg)	σ (kg)	TF (%)
F-6-1	131,49	115,16	16,33	121,12	121,71	4,23	100%
F-6-2	153,43	134,94	18,49	141,45	142,23	4,51	100%
F-6-3	138,59	127,35	11,24	132,90	132,90	3,20	100%
F-6-4	134,98	112,96	22,01	124,05	124,71	5,79	100%
F-6-5	170,40	129,92	40,48	144,88	144,39	7,79	100%
F-9-1	254,35	238,12	16,23	246,51	245,66	4,48	100%
F-9-2	301,21	277,92	23,30	287,87	288,59	5,51	100%
F-9-3	285,11	267,56	17,55	275,02	275,22	4,15	100%
F-9-4	270,33	242,76	27,58	251,08	252,60	6,89	100%
F-9-5	279,22	259,01	20,21	267,23	268,04	5,55	100%
F-12-1	443,38	417,53	25,86	427,80	428,11	5,54	100%
F-12-2	527,46	495,25	32,21	507,32	507,39	7,06	100%
F-12-3	494,42	470,60	23,82	481,05	481,73	4,53	100%
F-12-4	462,94	425,07	37,87	437,60	440,85	9,99	100%
F-12-5	491,40	446,75	44,65	460,67	461,87	11,96	100%
F-15-1	678,63	653,55	25,08	663,90	663,75	5,43	100%
F-15-2	802,28	768,17	34,11	781,58	781,50	8,74	100%
F-15-3	767,99	741,43	26,56	755,93	754,70	6,90	100%
F-15-4	693,29	644,02	49,27	673,83	672,95	11,25	100%
F-15-5	731,90	682,89	49,01	703,83	704,51	13,68	100%

Fonte: Próprio Autor (2023)

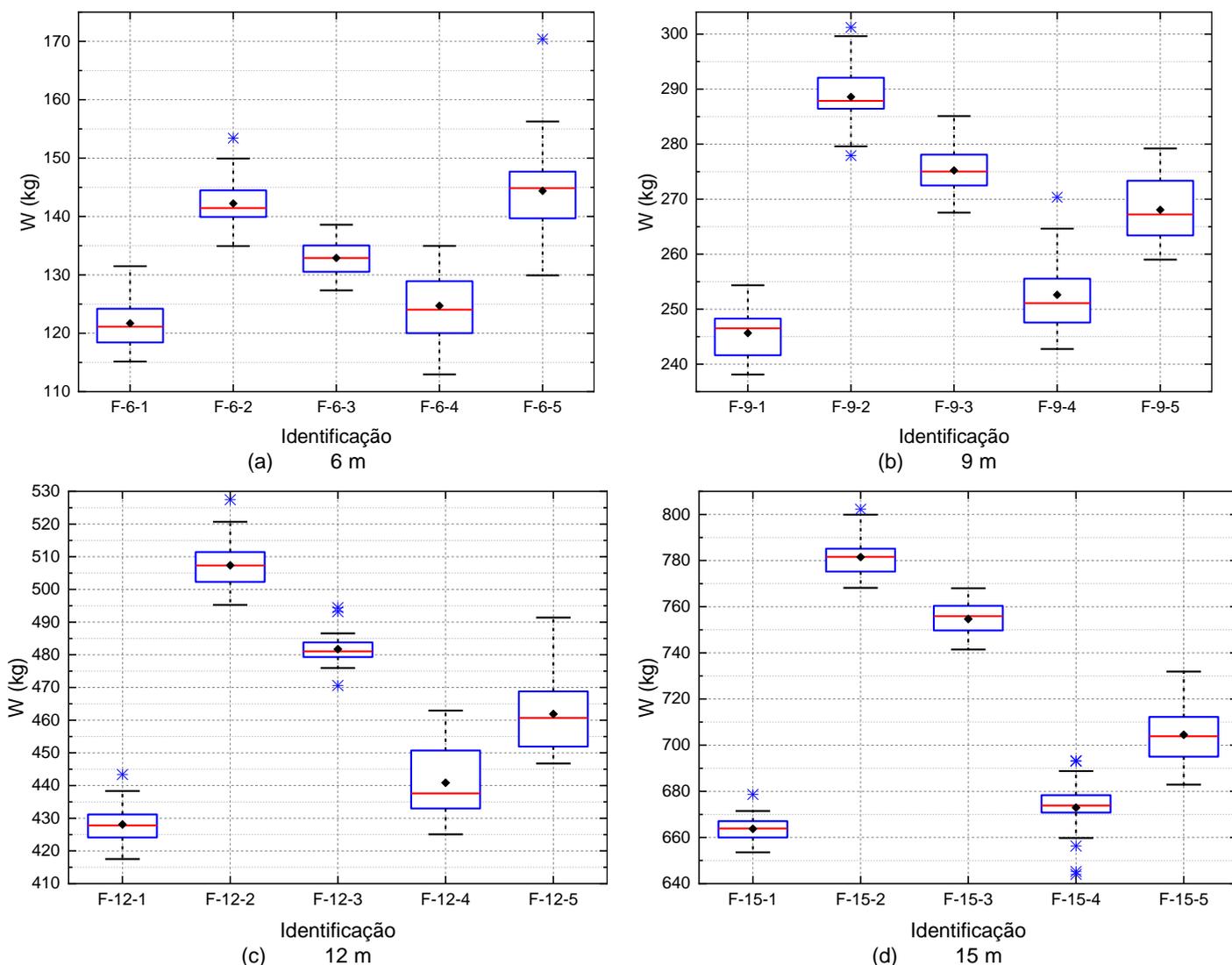
Tabela 5.9: Resumo dos resultados obtidos do processo de otimização das treliças Howe

Treliça	W_{max} (kg)	W_{min} (kg)	A (kg)	μ (kg)	\bar{x} (kg)	σ (kg)	TF (%)
H-6-1	131,09	112,57	18,53	119,56	119,62	3,81	100%
H-6-2	152,64	135,21	17,43	138,95	140,36	4,55	100%
H-6-3	139,68	124,97	14,71	129,57	130,59	3,86	100%
H-6-4	136,15	113,89	22,26	120,88	122,60	6,15	100%
H-6-5	154,38	133,07	21,32	144,85	144,34	5,97	100%
H-9-1	252,46	230,40	22,07	240,85	241,61	5,97	100%
H-9-2	297,67	274,17	23,49	286,06	285,42	6,26	100%
H-9-3	285,36	260,03	25,33	268,79	269,45	4,66	100%
H-9-4	271,02	240,72	30,30	251,44	252,35	7,37	100%
H-9-5	291,82	254,01	37,81	267,03	269,62	9,61	100%
H-12-1	436,97	407,28	29,70	420,54	420,91	6,49	100%
H-12-2	513,22	480,86	32,36	492,48	494,16	8,67	100%
H-12-3	489,47	462,92	26,55	473,52	473,75	6,48	100%
H-12-4	459,56	415,22	44,34	430,88	432,40	10,15	100%
H-12-5	476,20	431,11	45,09	454,29	456,34	10,31	100%
H-15-1	684,94	639,66	45,28	652,33	654,27	10,73	100%
H-15-2	779,43	753,01	26,43	764,72	764,61	6,73	100%
H-15-3	756,54	728,47	28,07	736,00	738,62	7,52	100%
H-15-4	702,68	640,95	61,73	667,75	668,61	13,71	100%
H-15-5	717,32	659,89	57,43	693,91	692,75	15,31	100%

Fonte: Próprio Autor (2023)

A distribuição dos resultados pode ser visualizada por meio de um gráfico de *box plot*, apresentado na Figura 5.1 e Figura 5.2, para as treliças da tipologia Fan modificada e Howe, respectivamente. Em cada vão analisado, foram gerados um gráfico *box plot*, para a tipologia Fan modificada e para a tipologia Howe. Nesse tipo de gráfico, a linha do meio representa a mediana, o ponto em formato de losango representa a média, a caixa representa o intervalo interquartil (IQR), entre o primeiro e o terceiro quartil, as linhas que se estendem a partir da caixa representam os valores mínimo e máximo e os pontos em formato asterisco representam os valores *outliers*.

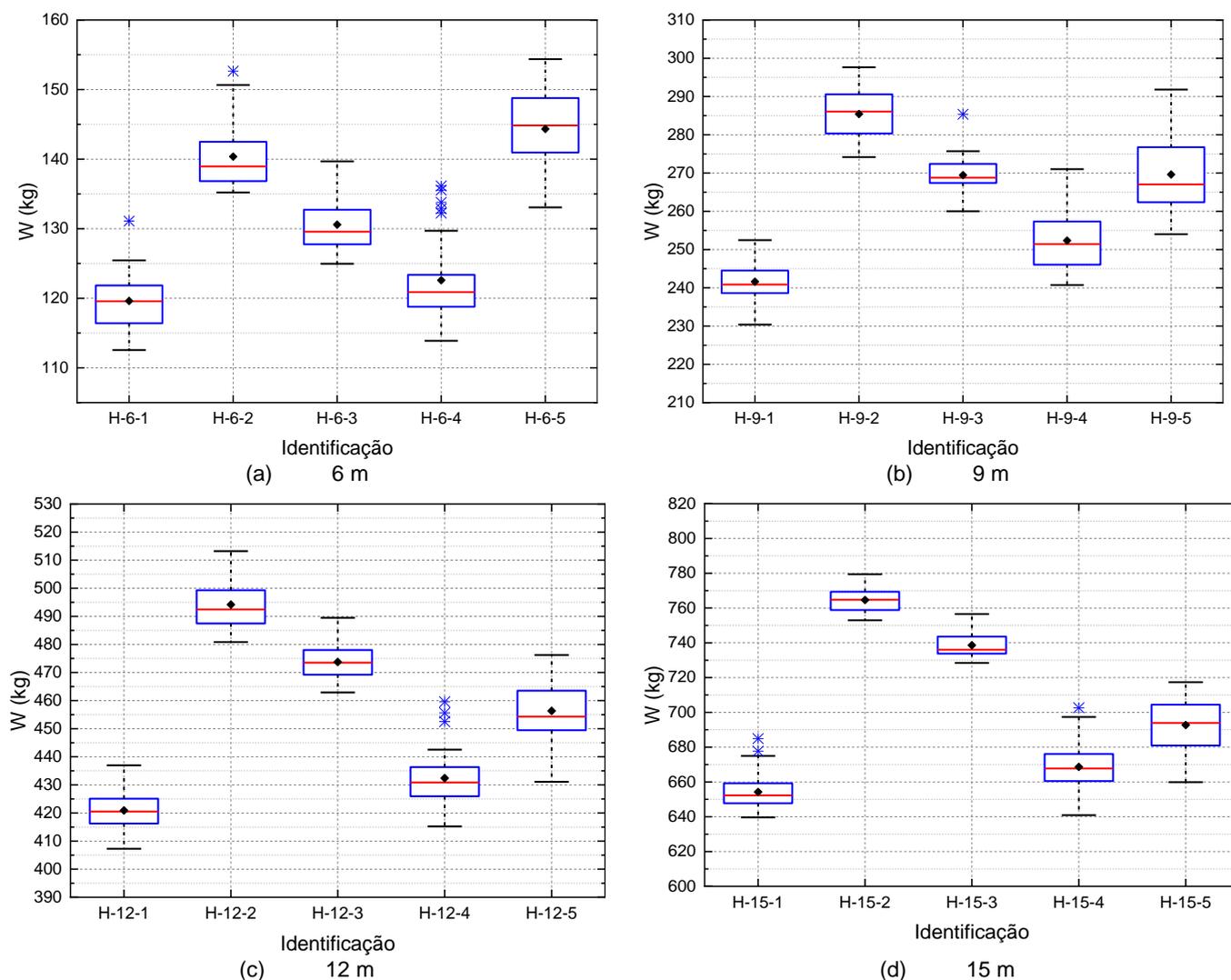
Figura 5.1: Box plot da função objetivo penalizada W das treliças Fan modificada em função do vão



Fonte: Próprio Autor (2023)

Os resultados obtidos por meio da otimização da tipologia Fan modificada, indicam que, para as treliças de comprimento de 6 m, as funções objetivas mínimas variaram entre 112,96 kg e 170,40 kg, enquanto que para treliças de 9 m, a função objetivo mínima variou entre 238,12 kg e 301,21 kg. Para as treliças com comprimento de 12 m, os valores mínimos da função objetivo variaram entre 417,53 kg e 527,46 kg. Por fim, para treliças com comprimento de 15 m, os valores mínimos da função objetivo variaram entre 644,02 kg e 802,28 kg.

Figura 5.2: Box plot da função objetivo penalizada W das treliças Howe em função do vão



Fonte: Próprio Autor (2023)

Similarmente, os resultados obtidos por meio da otimização da tipologia Howe indicam que, as treliças de comprimento de 6 m, as funções objetivas mínimas variaram entre 112,57 kg e 154,38 kg, enquanto para treliças de 9 m, a função objetivo mínima variou entre 230,40 kg e 297,67 kg. Nas treliças com comprimento de 12 m, os valores mínimos da função objetivo variaram entre 407,28 kg e 513,22 kg. Por fim, para treliças com comprimento de 15 m, os valores mínimos da função objetivo variaram entre 639,66 kg e 779,43 kg.

Os resultados indicam que a espécie ID 01 e ID 04 apresentaram os melhores resultados para a função objetivo para ambas as tipologias de treliças. Embora a resistência à solicitação normal tenha sido considerada um fator importante na escolha da madeira para a construção de treliças, a densidade e o módulo de elasticidade também tiveram um papel significativo na determinação do peso mínimo das treliças.

É digno de nota que, para treliças de madeira, é de extrema importância considerar-se múltiplos fatores além da resistência à solicitação normal na escolha das espécies de

madeira e na configuração da treliça. Os resultados também destacam a eficácia da abordagem de otimização na obtenção de soluções de design eficientes e econômicas.

Após o processo de otimização, foi possível obter os valores das variáveis de projeto para cada treliça, respeitando-se as restrições estabelecidas. Os resultados obtidos apresentam uma taxa de factibilidade de 100%. A Tabela 5.10 resume as variáveis de projeto obtidas para a treliça Fan modificada, indicando que as restrições de dimensão e área mínima foram respeitadas.

Tabela 5.10: Sumarização das variáveis de projeto (Tipologia Fan modificada), medidas em mm.

Variável	\bar{x}_1 (mm)		\bar{x}_2 (mm)		\bar{x}_3 (mm)		\bar{x}_4 (mm)		\bar{x}_5 (mm)	
	<i>b</i>	<i>h</i>								
F-6-1	63	175	63	150	50	115	50	175	50	125
F-6-2	75	200	100	160	50	125	50	125	50	150
F-6-3	125	160	125	175	63	115	50	115	63	160
F-6-4	125	200	125	225	75	115	50	125	50	150
F-6-5	50	175	50	200	50	115	63	125	75	125
F-9-1	75	200	63	225	50	115	50	125	50	150
F-9-2	100	175	125	175	63	115	50	160	50	150
F-9-3	125	200	175	150	100	75	50	125	63	150
F-9-4	63	160	63	200	50	125	63	125	50	115
F-9-5	63	250	63	300	75	75	50	160	50	125
F-12-1	150	150	125	200	63	115	50	115	50	160
F-12-2	150	200	175	175	75	115	63	125	50	125
F-12-3	50	150	50	150	50	115	50	125	75	115
F-12-4	63	160	63	200	50	115	50	125	50	175
F-12-5	100	150	63	250	63	115	50	150	63	115
F-15-1	125	160	100	200	75	75	50	125	63	160
F-15-2	50	115	50	150	50	115	63	125	50	115
F-15-3	50	200	63	150	75	75	100	75	75	150
F-15-4	63	225	63	200	75	75	50	160	100	150
F-15-5	100	175	100	160	100	75	63	125	75	160

Fonte: Próprio Autor (2023)

Por meio da Tabela 5.10, é possível observar que várias treliças atingiram a dimensão mínima para os elementos. As treliças F-6-2, F-6-4, F-6-5 e F-9-5 atingiram a dimensão mínima para os banzos inferiores, enquanto as treliças F-6-2, F-6-4 e F-6-5 atingiram a dimensão mínimas para os banzos superiores. Nas diagonais, as treliças F-6-1, F-6-2, F-6-3, F-6-4, F-6-5, F-9-1, F-9-2 e F-9-4 atingiram a dimensão mínima. Nos montantes secundários, as treliças F-6-1, F-6-4, F-9-1, F-9-2, F-9-3, F-9-4, F-12-1, F-12-2, F-12-3, F-12-4, F-12-5, F-

15-1, F-15-2 e F-15-4 atingiram a dimensão mínima. E finalmente, para o montante principal, as treliças F-6-1, F-6-3, F-6-5, F-9-1, F-9-2, F-9-3, F-9-4, F-12-2, F-12-3, F-15-1 e F-15-3 atingiram a dimensão mínima.

A Tabela 5.11 resume as variáveis de projeto obtidas para a treliça Howe, assim como nos resultados apresentados para treliça Fan modificada as restrições de dimensão e área mínima foram respeitadas.

Tabela 5.11: Sumarização das variáveis de projeto (Tipologia Howe), medidas em mm.

Variável	\bar{x}_1 (mm)		\bar{x}_2 (mm)		\bar{x}_3 (mm)		\bar{x}_4 (mm)		\bar{x}_5 (mm)	
	<i>b</i>	<i>h</i>								
H-6-1	50	200	50	200	50	115	63	125	75	115
H-6-2	63	160	50	175	50	115	50	160	75	150
H-6-3	63	175	100	115	50	115	75	115	50	125
H-6-4	63	115	50	160	50	115	50	115	63	175
H-6-5	50	115	50	150	50	115	50	115	100	160
H-9-1	75	200	50	300	50	115	50	115	63	160
H-9-2	100	160	75	175	50	115	50	125	50	125
H-9-3	75	225	75	225	50	125	50	115	63	150
H-9-4	63	175	75	150	50	115	50	160	50	175
H-9-5	63	150	63	160	50	115	50	150	50	150
H-12-1	125	175	125	160	75	75	50	160	63	150
H-12-2	100	200	75	250	63	125	50	115	50	150
H-12-3	150	160	100	225	63	115	50	125	75	160
H-12-4	63	250	125	115	75	75	75	125	50	175
H-12-5	75	160	63	225	75	75	50	160	100	115
H-15-1	125	225	125	200	75	115	50	115	50	150
H-15-2	100	250	150	160	75	115	63	115	75	125
H-15-3	200	160	125	225	100	75	50	115	100	160
H-15-4	175	115	125	150	75	75	63	160	75	175
H-15-5	150	115	75	225	75	75	50	150	63	150

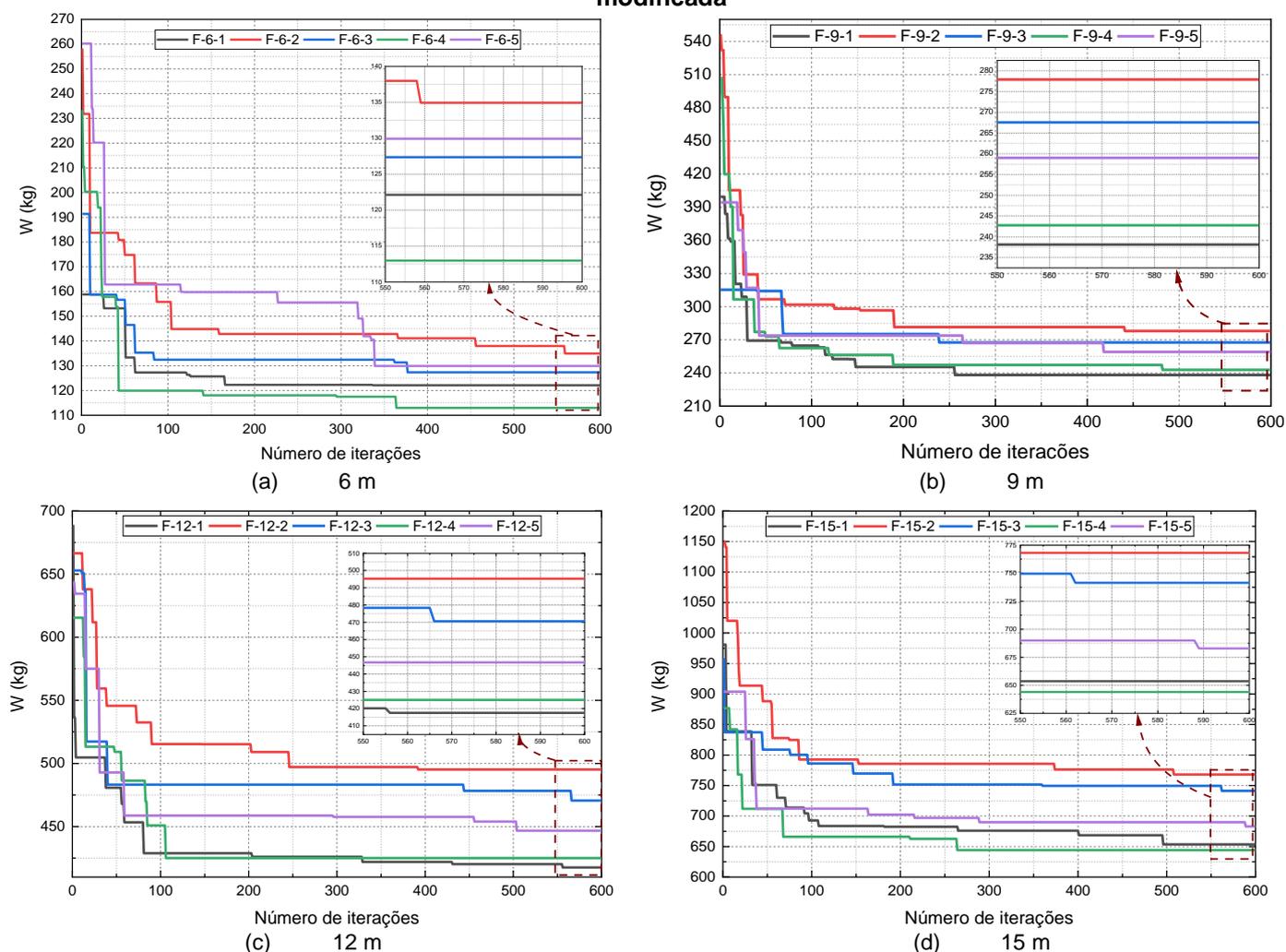
Fonte: Próprio Autor (2023)

Por meio da Tabela 5.11, é possível observar que várias treliças atingiram a dimensão mínima para os elementos. As treliças H-6-1 e H-6-5 atingiram a dimensão mínima para os banzos inferiores, enquanto as treliças H-6-1, H-6-2, H-6-4, H-6-5 e H-9-1 atingiram a dimensão mínimas para os banzos superiores. Nas diagonais, as treliças H-6-1, H-6-2, H-6-3, H-6-4, H-6-5, H-9-1, H-9-2, H-9-3, H-9-4 e H-9-5 atingiram a dimensão mínima. Nos montantes secundários, as treliças H-6-2, H-6-4, H-6-5, H-9-1, H-9-2, H-9-3, H-9-4, H-9-5, H-12-1, H-12-2, H-12-3, H-12-5, H-15-1 e H-15-3 atingiram a dimensão mínima. E finalmente,

para o montante principal, as treliças H-6-3, H-9-2, H-9-4, H-9-5, H-12-2, H-12-4 e H-15-1 atingiram a dimensão mínima.

A Figura 5.3 apresenta os resultados das curvas de convergência das melhores respostas obtidas após 30 repetições do processo de otimização do peso de treliças da tipologia Fan modificada com vãos de 6 m, 9 m, 12 m e 15 m para as espécies ID 01, ID 02, ID 03, ID 04 e ID 05. Considerando uma taxa de tolerância de 10^{-2} , observa-se que a convergência ocorreu na iteração 337, 559, 377, 364 e 339 para as treliças F-6-1, F-6-2, F-6-3, F-6-4 e F-6-5, respectivamente. Nas treliças com vão de 9 m, a convergência ocorreu na iteração 256, 441, 239, 482 e 418 para as treliças F-9-1, F-9-2, F-9-3, F-9-4 e F-9-5, respectivamente. Já para as treliças com vão de 12 m, a convergência ocorreu na iteração 556, 392, 566, 106 e 504 para as treliças F-12-1, F-12-2, F-12-3, F-12-4 e F-12-5, respectivamente. Por fim, para as treliças com vão de 15 m, a convergência ocorreu na iteração 496, 508, 562, 264 e 589 para as treliças F-15-1, F-15-2, F-15-3, F-15-4 e F-15-5, respectivamente.

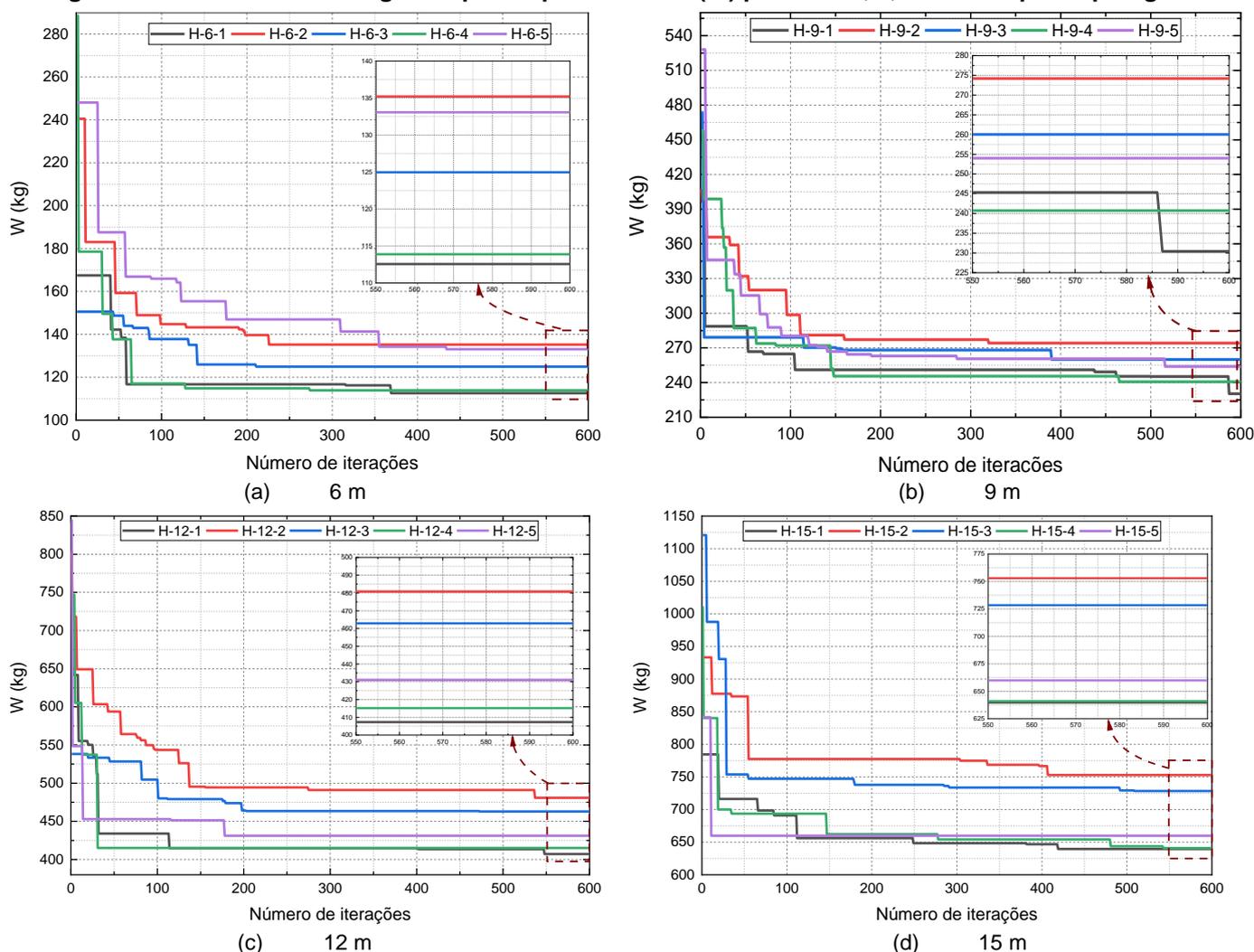
Figura 5.3: Curvas de convergência para o peso mínimo (W) para vão 6, 9, 12 e 15 m para tipologia Fan modificada



Fonte: Próprio Autor (2023)

Similarmente, a Figura 5.4 apresenta os resultados das curvas de convergência para a tipologia Howe. Levando em conta uma taxa de tolerância de 10^{-2} . Observa-se que a convergência ocorreu na iteração 369, 226, 211, 274 e 434 para as treliças H-6-1, H-6-2, H-6-3, H-6-4 e H-6-5, respectivamente. Nas treliças com vão de 9 m, a convergência ocorreu na iteração 587, 320, 390, 465 e 516 para as treliças H-9-1, H-9-2, H-9-3, H-9-4 e H-9-5, respectivamente. Já para as treliças com vão de 12 m, a convergência ocorreu na iteração 548, 537, 473, 31, 178 para as treliças H-12-1, H-12-2, H-12-3, H-12-4 e H-12-5, respectivamente. Por fim, para as treliças com vão de 15 m, a convergência ocorreu na iteração 419, 407, 509, 543 e 11 para as treliças H-15-1, H-15-2, H-15-3, H-15-4 e H-15-5, respectivamente.

Figura 5.4: Curvas de convergência para o peso mínimo (W) para vão 6, 9, 12 e 15 m para tipologia Howe



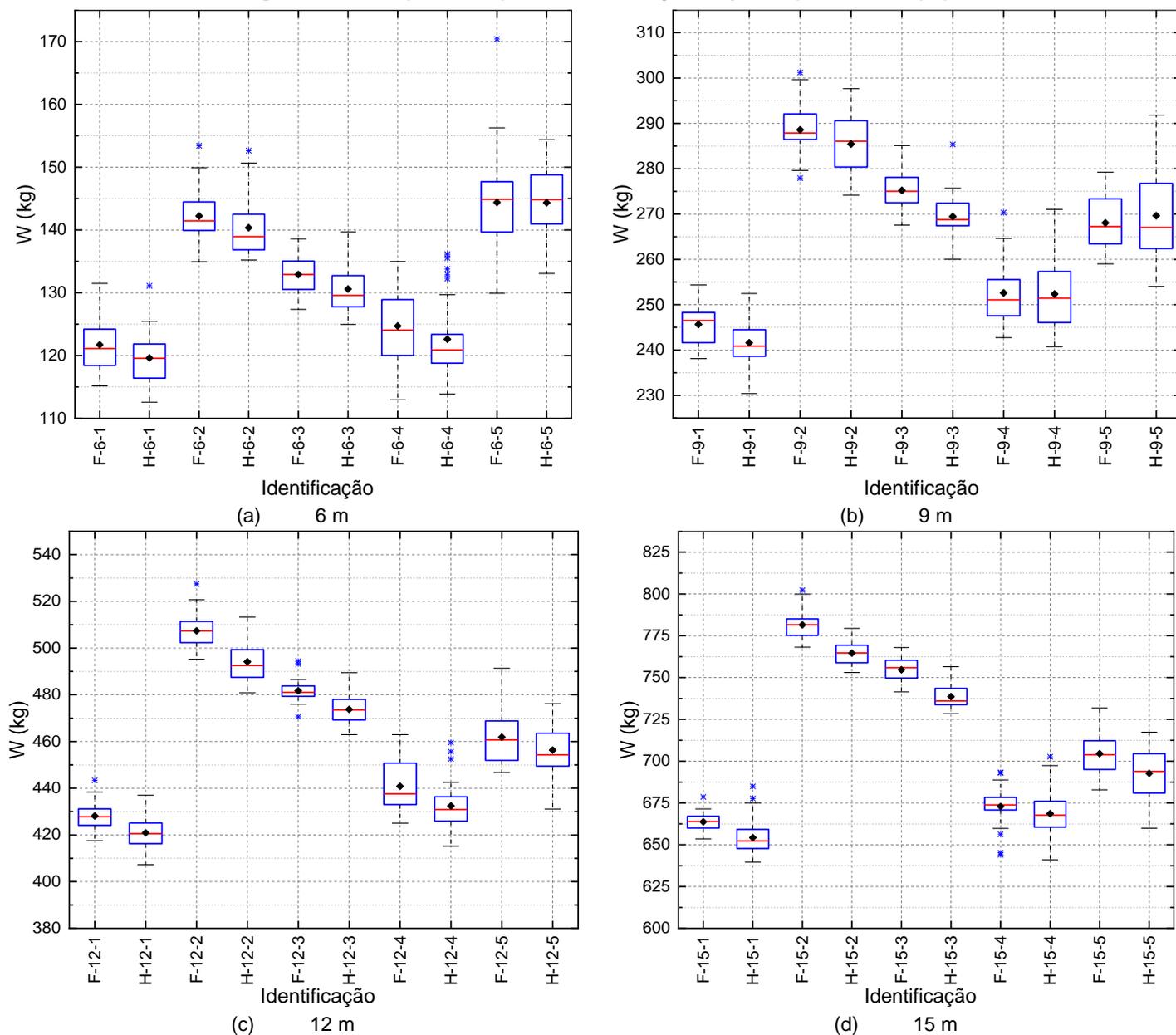
Fonte: Próprio Autor (2023)

5.4.1 COMPARATIVO DOS RESULTADOS OTIMIZAÇÃO

Esta seção tem o intuito de visualizar a distribuição de dados e as medidas estatísticas, como a mediana, quartis e valores extremos possibilitando assim a comparação dos resultados obtidos no processo de otimização, por meio do gráfico *box plot*, para cada comprimento de treliça e para cada tipologia de treliça.

A Figura 5.5 apresenta os resultados da otimização para a tipologia Fan modificada e a tipologia Howe para treliças de comprimento 6m, 9m, 12m e 15m. Em cada vão analisado, foram gerados um gráfico *box plot*, para a tipologia Fan modificada e para a tipologia Howe, em conjunto. Nesse tipo de gráfico, a linha do meio representa a mediana, o ponto em formato de losango representa a média, a caixa representa o intervalo interquartil (IQR), as linhas que se estendem a partir da caixa representam os valores mínimo e máximo e os pontos em formato asterisco representam os valores *outliers*.

Figura 5.5: *Box plot* comparativo da função objetivo penalizada (W)



Fonte: Próprio Autor (2023)

Os resultados mostram que, em geral, a tipologia Howe apresentou resultados menores para a função objetivo mínima em comparação com a tipologia Fan modificada. A exceção ocorre para as treliças com vão de 6 m, para as espécies ID 02, ID 04 e ID 05, onde a tipologia Fan modificada apresentou resultados menores em relação à tipologia Howe.

Observa-se também que, para ambas as tipologias de treliças, a função objetivo mínima aumentou com o comprimento da treliça. Isso indica que é necessário considerar o comprimento da treliça ao projetar uma treliça de madeira, a fim de obter soluções de design eficientes e econômicas.

Em conclusão, a análise por meio do gráfico *box plot* possibilitou a comparação dos resultados da otimização para diferentes comprimentos de treliça e para diferentes tipologias

de treliça. Essa análise permitiu identificar as diferenças entre as tipologias de treliça e destacou a importância de selecionar espécies de madeira adequadas e considerar múltiplos fatores no projeto de treliças de madeira.

A otimização mostrou ser uma ferramenta eficaz na obtenção de soluções de design eficientes e econômicas para ambas as tipologias de treliças.

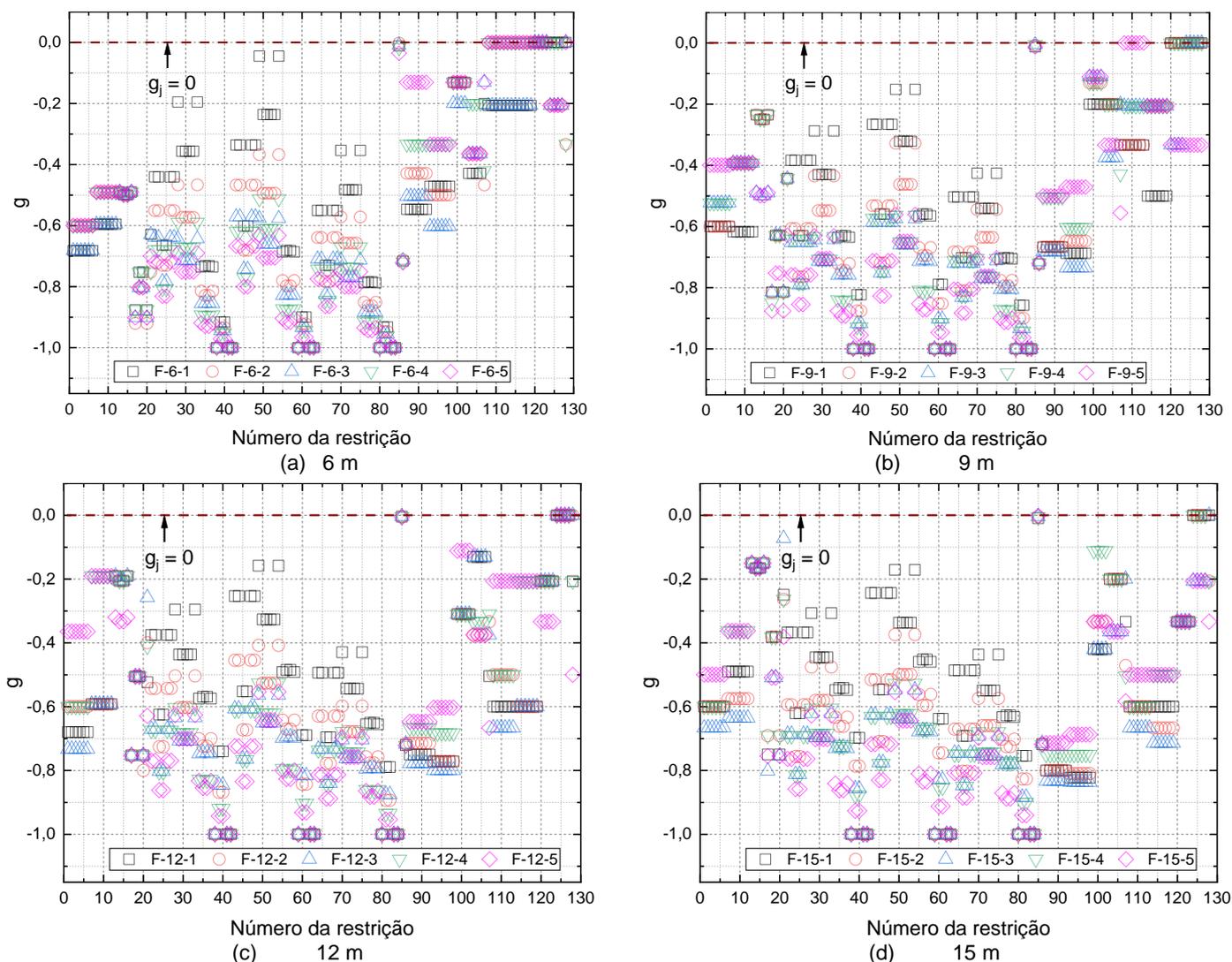
No entanto, é importante notar que os resultados da otimização podem ser sensíveis aos parâmetros de entrada e às restrições impostas. Portanto, é necessário realizar análises adicionais e considerar outras métricas de desempenho antes de tomar uma decisão final sobre o projeto da treliça de madeira.

Para tal análise, foram avaliadas as restrições obtidas dos melhores resultados obtidos pela otimização.

5.4.2 RESTRIÇÕES

As restrições incluem as verificações da dimensão e área mínima, esbeltez limite, dimensionamento no ELU considerando as tensões normais nas barras e o dimensionamento no ELS considerando a deflexão na condição imediata e final. A Figura 5.6 e Figura 5.7 apresenta as restrições de projeto obtidas nas melhores simulações do estudo, para as tipologias Fan Modificada e Howe, respectivamente.

Figura 5.6: Restrições (g) para vão 6, 9, 12 e 15 m, para a Tipologia Fan modificada



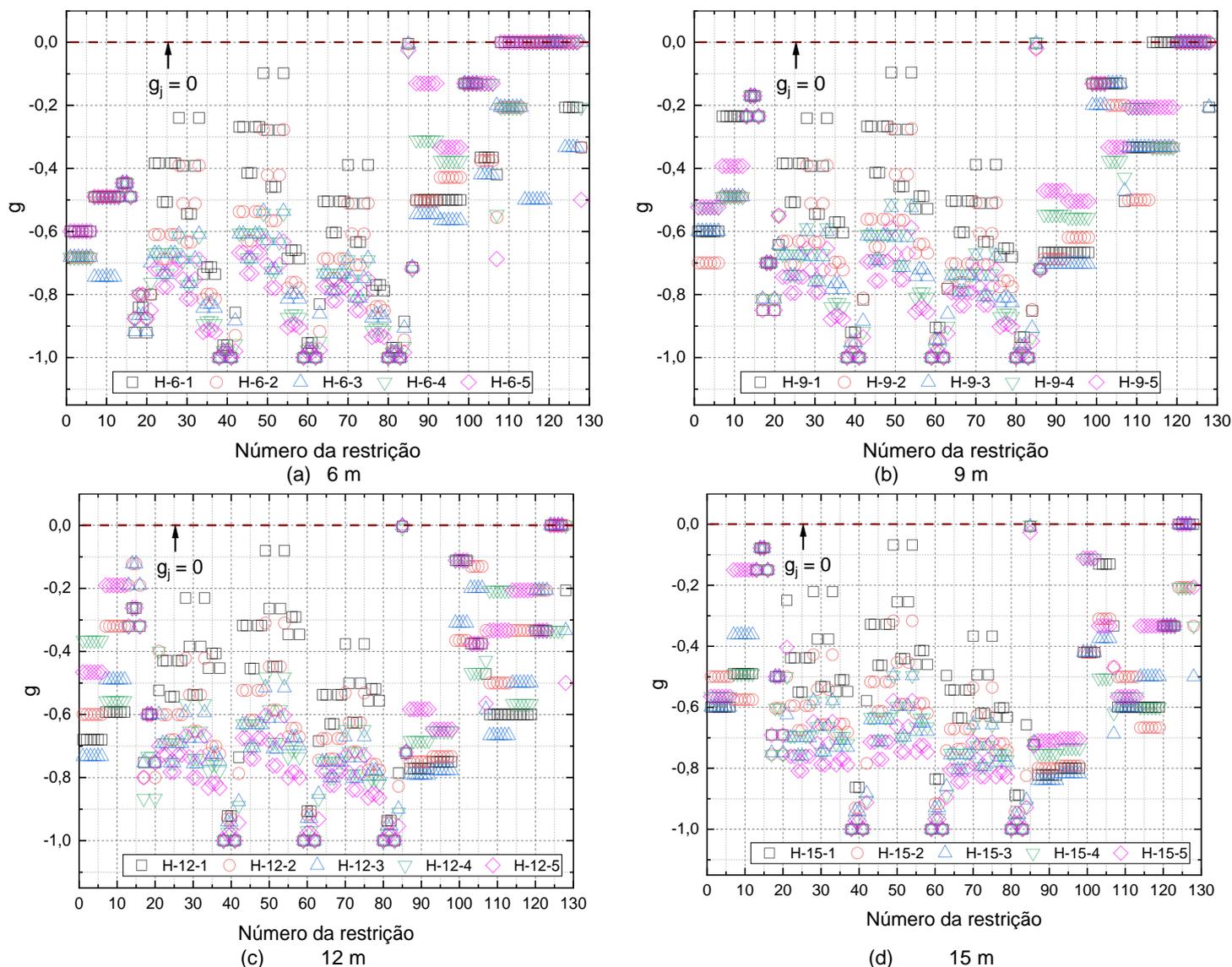
Fonte: Próprio Autor (2023)

Com base na análise das soluções de projeto, pode-se constatar que todas elas atenderam às restrições impostas, o que indica que essas soluções são viáveis em termos de segurança e desempenho. Ao avaliar a Figura 5.6, foi observado que as treliças investigadas apresentaram valores negativos próximos a zero durante a verificação da flecha instantânea do ELS (g_{85}). Essa constatação sugere que essa restrição foi uma das que limitaram o processo de otimização, resultando em valores entre -10^{-3} a -10^{-2} .

Além disso, outras restrições também foram limitadoras para algumas treliças. Por exemplo, as dimensões mínimas foram atingidas nos banzos inferiores (g_{108} a g_{112}) das treliças F-6-2, F-6-4, F-6-5 e F-9-5, para os banzos superiores (g_{113} a g_{119}) das treliças H F-6-2, F-6-4 e F-6-5, para as diagonais (g_{120} a g_{123}) das treliças F-6-1, F-6-2, F-6-3, F-6-4, F-6-5, F-9-1, F-9-2 e F-9-4, para os montantes secundários (g_{124} e g_{127}) as treliças F-6-1, F-6-4, F-9-1, F-9-2, F-9-3, F-9-4, F-12-1, F-12-2, F-12-3, F-12-4, F-12-5, F-15-1, F-15-2 e F-15-4 e

para o montante principal (g_{128}) as treliça F-6-1, F-6-3, F-6-5, F-9-1, F-9-2, F-9-3, F-9-4, F-12-2, F-12-3, F-15-1 e F-15-3, resultaram em restrições iguais a zero.

Figura 5.7: Restrições (g) para vão 6, 9, 12 e 15 m, para a tipologia Howe



Fonte: Próprio Autor (2023)

Analisando as soluções de projeto da tipologia Howe, verificou-se que todas elas atenderam às restrições impostas. Por meio da Figura 5.7, é possível constatar que as treliças investigadas apresentaram valores negativos próximos a zero durante a verificação da flecha instantânea do ELS (g_{85}). Essa constatação sugere que a restrição da flecha instantânea foi um dos fatores que limitaram o processo de otimização, resultando em valores entre -10^{-3} a -10^{-2} .

Além disso, outras restrições também foram limitadoras para algumas treliças. Por exemplo, as dimensões mínimas foram atingidas nos banzos inferiores (g_{108} a g_{112}) das treliças H-6-1 e H-6-5, para os banzos superiores (g_{113} a g_{119}) das treliças H-6-1, H-6-2, H-6-4, H-6-5 e H-9-1, para as diagonais (g_{120} a g_{123}) das treliças H-6-1, H-6-2, H-6-3, H-6-4, H-6-

5, H-9-1, H-9-2, H-9-3, H-9-4 e H-9-5, para os montantes secundários (g_{124} e g_{127}) as treliças H-6-2, H-6-4, H-6-5, H-9-1, H-9-2, H-9-3, H-9-4, H-9-5, H-12-1, H-12-2, H-12-3, H-12-5, H-15-1 e H-15-3 e para o montante principal (g_{128}) as treliças H-6-3, H-9-2, H-9-4, H-9-5, H-12-2, H-12-4 e H-15-1, resultaram em restrições iguais a zero.

Nas verificações do ELU ambas as tipologias as verificações de ELU, as restrições de esbelteza (g_1 a g_{21}) e área mínima (g_{108} a g_{128}) nas barras não resultaram em valores próximas ou iguais a zero, indicando que o dimensionamento não foi limitado por essas restrições, mas sim pela restrição de deslocamento no ELS na condição instantânea. Essa restrição impossibilitou a redução da função objetivo.

Cabe destacar que, as restrições impostas dependem do uso pretendido da treliça de madeira e podem variar de acordo com a aplicação específica. Portanto, é necessário considerar cuidadosamente as restrições específicas da aplicação ao projetar uma treliça de madeira. Além disso, é importante lembrar que a escolha das espécies de madeira também pode afetar as restrições impostas e, portanto, deve ser considerada cuidadosamente.

Em síntese, a análise dos resultados das restrições oriundas do processo de otimização, é possível observar que as restrições impostas possibilitaram obter soluções de design eficientes e seguras para treliças de madeira. No entanto, é importante considerar cuidadosamente as restrições específicas da aplicação e escolher adequadamente as espécies de madeira para obter uma solução de design eficiente e segura.

5.4.3 AVALIAÇÃO DAS RESTRIÇÕES DO ELU

Com o objetivo de avaliar a capacidade de distribuição das cargas normais na treliça, foram realizadas análises das restrições de tensão normal, seguindo a Eq. 4.8. Essas análises foram conduzidas levando em consideração as combinações 1, 2 e 3 para as barras carregadas, conforme indicado na Tabela 4.8.

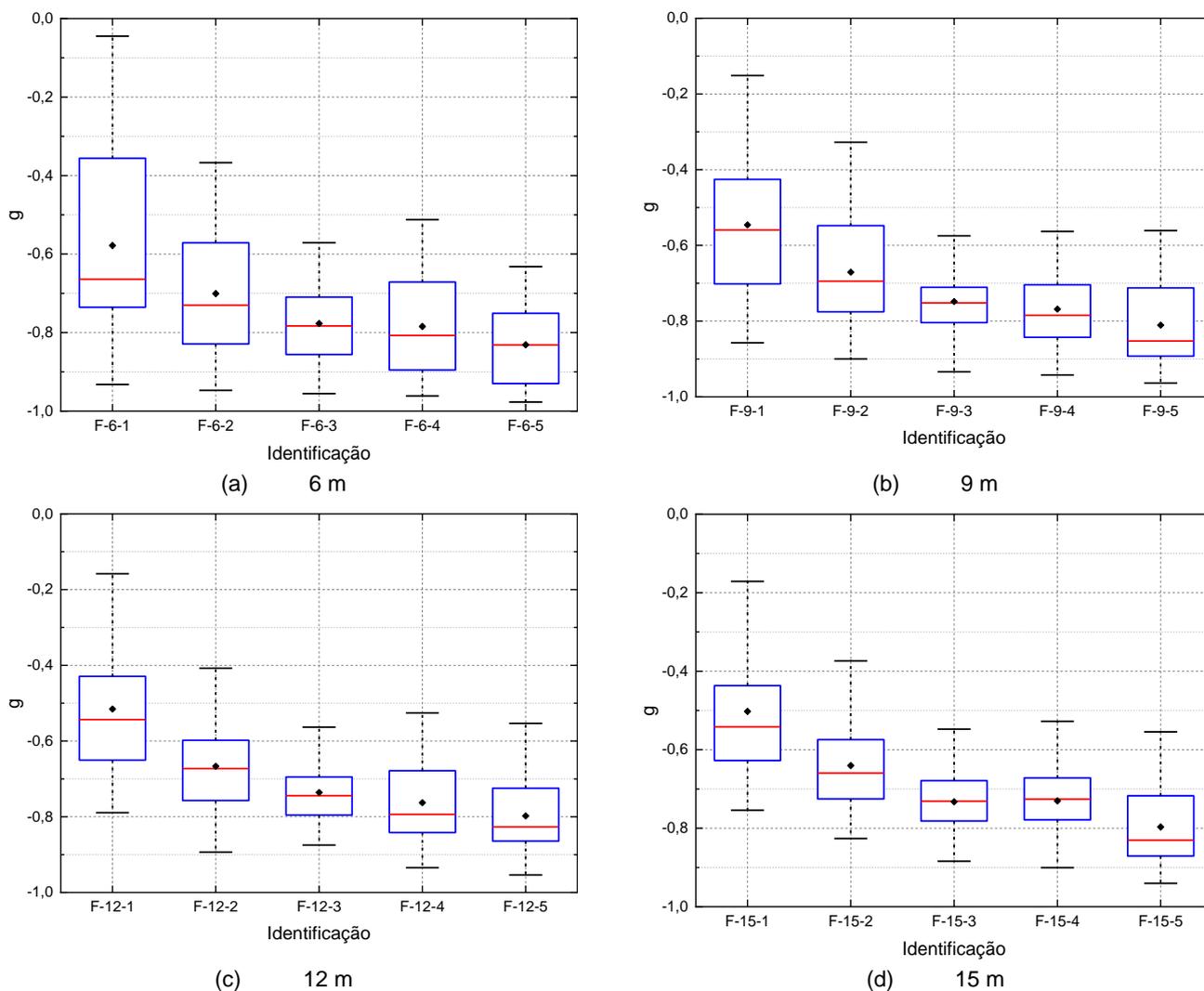
Os resultados dessas análises foram calculados para a média (\bar{x}), o desvio padrão (σ) e o intervalo de confiança (IC) de 95%. Esses valores são apresentados na Tabela 5.12 e Tabela 5.13 para as treliças Fan modificada e Howe, respectivamente. O intervalo de confiança de 95% indica haver uma probabilidade de 95% de que a verdadeira média esteja dentro desse intervalo.

A distribuição dos resultados pode ser visualizada por meio de um gráfico de *box plot*, como apresentado na Figura 5.8 e Figura 5.9 para a tipologia Fan modificada e Howe, respectivamente.

Os resultados obtidos são importantes para verificar se as cargas estão sendo distribuídas adequadamente nas barras da treliça, garantindo que a estrutura suporte as cargas aplicadas de forma segura e eficiente. A análise da distribuição dos resultados também

pode indicar a necessidade de ajustes na estrutura, visando melhorar a sua capacidade de suporte de cargas.

Figura 5.8: Box plot das restrições (g) do ELU para a tipologia Fan modificada



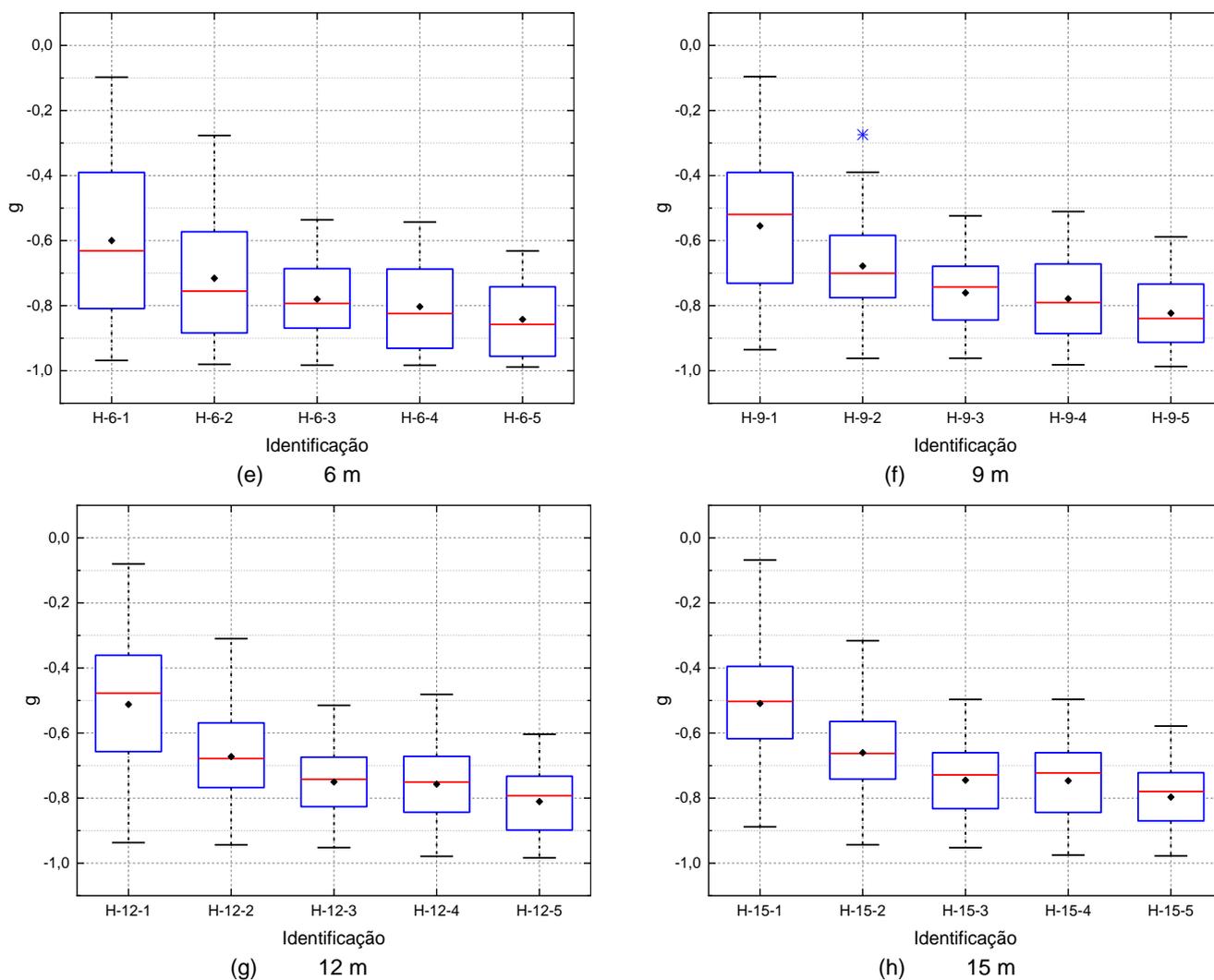
Fonte: Próprio Autor (2023)

Tabela 5.12: Sumarização das restrições do ELU para tipologia Fan modificada

Tipologia	\bar{x}	σ	IC
F-6-1	-0,5783	0,2517	(-0,6501; -0,5064)
F-6-2	-0,7008	0,1719	(-0,7726; -0,6290)
F-6-3	-0,7770	0,1171	(-0,8488; -0,7051)
F-6-4	-0,7846	0,1369	(-0,8564; -0,7127)
F-6-5	-0,8310	0,1110	(-0,9029; -0,7592)
F-9-1	-0,5459	0,1921	(-0,6059; -0,4860)
F-9-2	-0,6709	0,1525	(-0,7308; -0,6109)
F-9-3	-0,7483	0,0984	(-0,8082; -0,6883)
F-9-4	-0,7682	0,1133	(-0,8282; -0,7083)
F-9-5	-0,8106	0,1148	(-0,8705; -0,7506)
F-12-1	-0,5156	0,1677	(-0,5693; -0,4619)
F-12-2	-0,6664	0,1320	(-0,7202; -0,6127)
F-12-3	-0,7357	0,0821	(-0,7894; -0,6819)
F-12-4	-0,7628	0,1140	(-0,8165; -0,7090)
F-12-5	-0,7979	0,1083	(-0,8517; -0,7442)
F-15-1	-0,5025	0,1554	(-0,5522; -0,4527)
F-15-2	-0,6404	0,1175	(-0,6901; -0,5906)
F-15-3	-0,7327	0,0873	(-0,7825; -0,6829)
F-15-4	-0,7303	0,0965	(-0,7801; -0,6805)
F-15-5	-0,7968	0,1058	(-0,8465; -0,7470)

Fonte: Próprio Autor (2023)

Figura 5.9: *Box plot* das restrições (g) do ELU para a tipologia Howe



Fonte: Próprio Autor (2023)

Tabela 5.13: Sumarização das restrições do ELU para tipologia Howe

Tipologia	\bar{x}	σ	IC
H-6-1	-0,5998	0,2544	(-0,6704; -0,5291)
H-6-2	-0,7158	0,2012	(-0,7865; -0,6452)
H-6-3	-0,7804	0,1253	(-0,8511; -0,7098)
H-6-4	-0,8031	0,1400	(-0,8738; -0,7325)
H-6-5	-0,8474	0,1139	(-0,9166; -0,7782)
H-9-1	-0,5549	0,2307	(-0,6189; -0,4908)
H-9-2	-0,6781	0,1747	(-0,7421; -0,6140)
H-9-3	-0,7607	0,1175	(-0,8248; -0,6967)
H-9-4	-0,7790	0,1340	(-0,8430; -0,7149)
H-9-5	-0,8238	0,1032	(-0,8865; -0,7610)
H-12-1	-0,5120	0,2263	(-0,5737; -0,4503)
H-12-2	-0,6725	0,1595	(-0,7342; -0,6108)
H-12-3	-0,7503	0,1148	(-0,8120; -0,6886)
H-12-4	-0,7572	0,1310	(-0,8189; -0,6955)
H-12-5	-0,8100	0,1001	(-0,8705; -0,7496)
H-15-1	-0,5092	0,1955	(-0,5673; -0,4511)
H-15-2	-0,6605	0,1567	(-0,7186; -0,6024)
H-15-3	-0,7450	0,1204	(-0,8031; -0,6869)
H-15-4	-0,7468	0,1314	(-0,8049; -0,6886)
H-15-5	-0,7924	0,0960	(-0,8494; -0,7355)

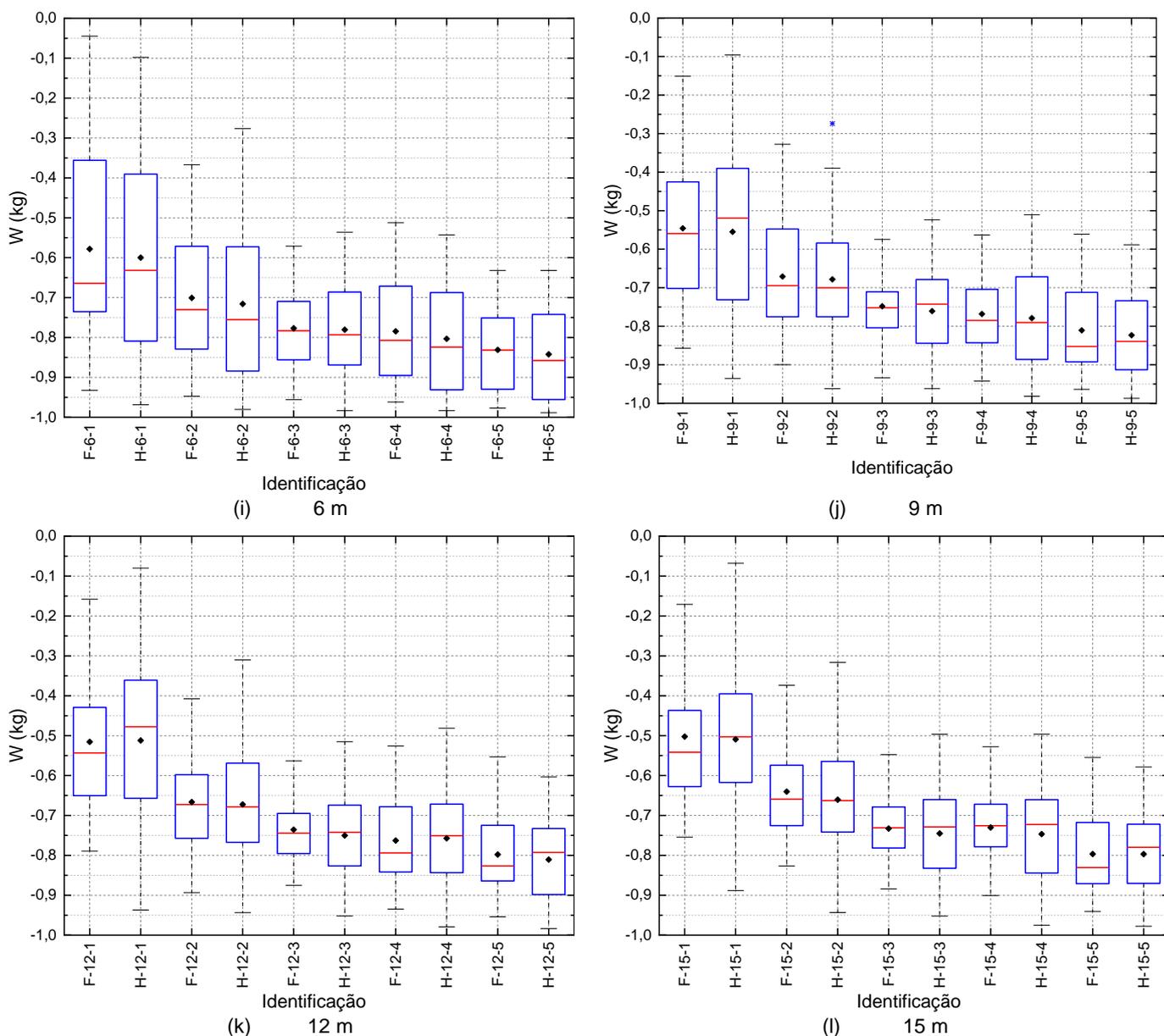
Fonte: Próprio Autor (2023)

Conforme demonstrado pela Eq. 4.8, o valor da restrição indica a proximidade da tensão normal ao limite estabelecido pela normativa. Portanto, quanto mais próximo de zero o resultado da restrição, mais solicitados estão os elementos da treliça. Analisando os resultados apresentados na Tabela 5.12 e Tabela 5.13, observa-se que as treliças compostas pela espécie ID 01 apresentam maior solicitação, indicando uma distribuição mais uniforme das cargas de tensão normal. Verificou-se que as tensões normais atuantes elementos da treliça apresentam correlação com a resistência característica paralela às fibras na compressão ($f_{c0,k}$) e na tração ($f_{t0,k}$), seguindo o padrão de resistência mecânica das espécies. Dessa forma, as treliças com espécies de menor resistência mecânica são mais solicitadas, enquanto as treliças com espécies de maior resistência mecânica são menos exigidas. Desta forma, analisando o valor médio das restrições das tensões normais é possível classificar as treliças em ordem decrescente de solicitação conforme as espécies utilizadas, sendo as treliças das espécies ID 01 e ID 02 as mais solicitadas, seguida pelas espécies ID 03, ID 04 e ID 05. Cabe destacar que para a tipologia Howe as espécies ID 03 e ID 04

apresentaram valores médios próximos, além disso, valores máximos e mínimos similares entre si.

Com o intuito da comparação do desempenho mecânico das tipologias, a Figura 5.8 e a Figura 5.9 foram reunidas em um único gráfico para cada vão analisado, tal como apresentado na Figura 5.10.

Figura 5.10: Box plot comparativo das restrições (g) do ELU



Fonte: Próprio Autor (2023)

Por meio da Figura 5.10, é possível observar que as duas tipologias apresentam valores médios similares para essas restrições.

No entanto, ao analisar os valores máximos e mínimos das restrições, é possível notar que a tipologia de treliça Howe apresenta uma amplitude maior em relação à tipologia de treliça Fan Modificada, na maioria das condições adotadas. Isso sugere que a tipologia de

treliça Howe consegue distribuir os esforços de maneira mais eficiente, resultando em valores mais uniformes de tensões normais.

Essa análise é importante para compreender as diferenças entre as duas tipologias de treliças e identificar qual delas pode ser mais adequada para uma determinada aplicação. Além disso, os resultados obtidos podem ser úteis para o desenvolvimento de normativas e diretrizes relacionadas ao uso de treliças em estruturas de construção.

A fim de avaliar estatisticamente a existência de diferenças significativas entre as médias dos grupos independentemente das restrições do ELU, foram aplicados os testes de Anderson-Darling (A-D) e o Teste de Comparação Múltipla (C-M). O teste de Anderson-Darling é usado para verificar a normalidade dos dados, enquanto o Teste de Comparação Múltipla é usado para verificar a igualdade de variâncias entre os grupos. Esses testes foram usados para avaliar as diferenças entre as médias amostrais dos grupos e verificar se havia variação suficiente entre os grupos para indicar que as diferenças nas médias não eram meramente aleatórias.

Os resultados desses testes são apresentados na Tabela 5.14, permitindo a verificação da existência de diferenças significativas entre as médias dos grupos. Essa análise estatística contribui para a compreensão da relação entre as espécies de madeira utilizadas nas treliças e sua resistência mecânica, permitindo a seleção de espécies mais adequadas para esse tipo de aplicação.

Tabela 5.14: Sumarização resultados estatística das restrições do ELU para as treliças

Tipologia	Vão	P-Valor			Tukey (Agrupamento)				
		ANOVA	A-D	C-M	ID 01	ID 02	ID 03	ID 04	ID 05
Fan	6 m	0,001	0,068	0,132	A	AB	B	B	B
	9 m	0,001	0,271	0,433	A	B	BC	BC	C
	12 m	0,001	0,254	0,067	A	B	BC	BC	C
	15 m	0,001	0,302	0,126	A	B	BC	BC	C
Howe	6 m	0,001	0,107	0,071	A	AB	B	B	B
	9 m	0,001	0,758	0,374	A	AB	BC	BC	C
	12 m	0,001	0,481	0,054	A	B	BC	BC	C
	15 m	0,001	0,150	0,093	A	B	BC	BC	C

Fonte: Próprio Autor (2023)

A análise estatística apresentada na Tabela 27 demonstrou diferenças estatisticamente significativas entre as médias dos grupos em relação às restrições do ELU. O teste de Anderson-Darling (A-D) confirmou que os dados apresentavam distribuição normal, e o Teste de Comparação Múltipla (C-M) evidenciou que havia variação suficiente entre os grupos para justificar a análise. Dessa forma, foi possível identificar os grupos que apresentaram diferenças estatisticamente significativas em relação às médias das restrições

do ELU. No total, foram identificados 2 grupos para as treliças de 6 m, 3 grupos para as treliças de 9 m, 12 m e 15 m.

5.4.4 AVALIAÇÃO DAS RESTRIÇÕES DO ELS

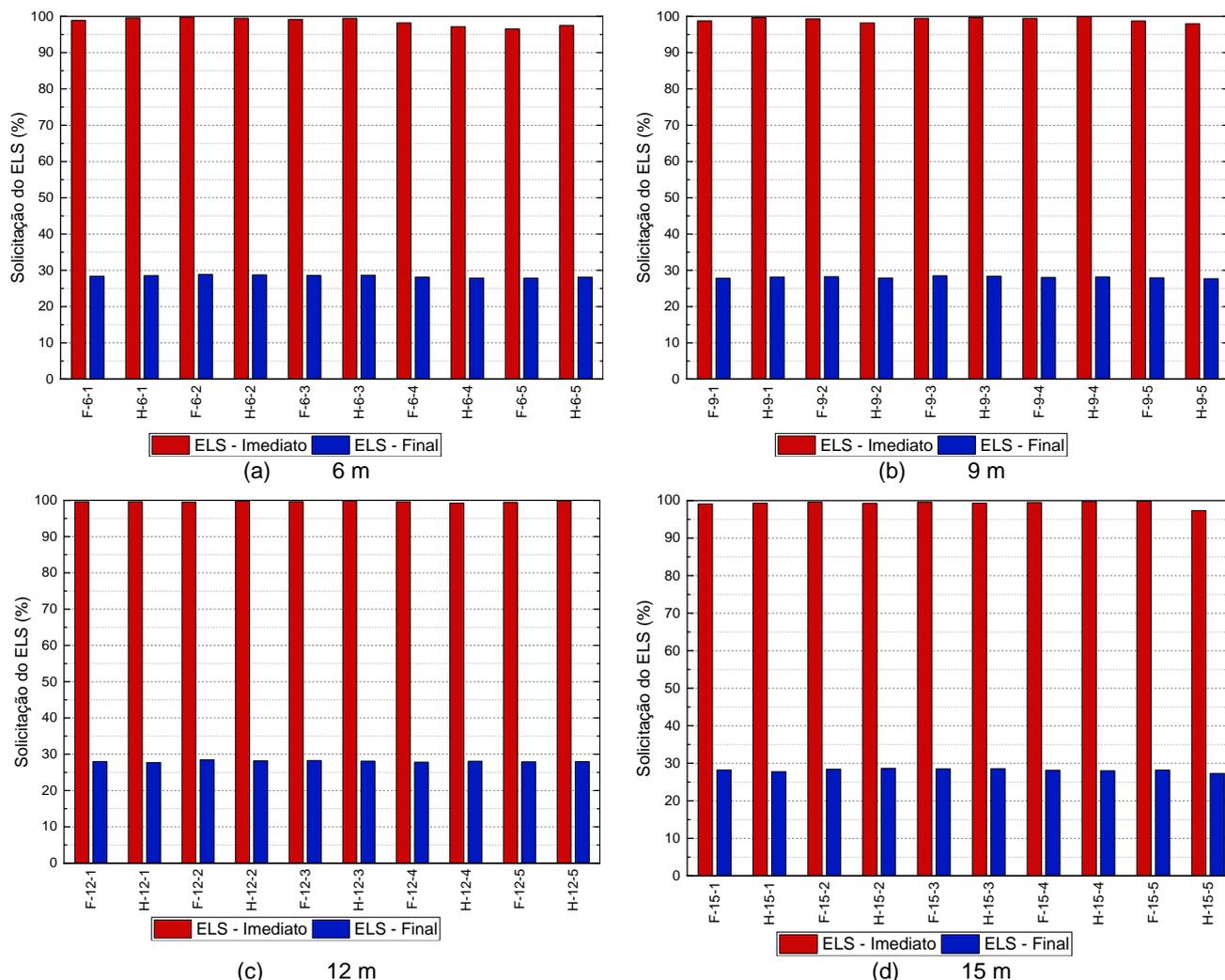
As restrições ELS são parte fundamental do projeto e da construção de estruturas, pois garantem que a estrutura seja capaz de suportar as cargas que serão aplicadas a ela ao longo de sua vida útil, sem sofrer danos excessivos ou inaceitáveis. Essas restrições incluem limitações em vários aspectos do desempenho da estrutura, como deformação, vibração e fadiga, sendo estabelecidas conforme as normas e regulamentações aplicáveis.

Um dos aspectos-chave das restrições do ELS é que elas influenciam diretamente o dimensionamento e o projeto da estrutura. Por exemplo, a escolha dos materiais a serem utilizados na construção da estrutura deve considerar as restrições do ELS, a fim de garantir que a estrutura atenda aos requisitos de desempenho e segurança durante toda a sua vida útil.

A ABNT NBR 7190-1 (2022b), norma brasileira que estabelece as diretrizes para o projeto de estruturas de madeira, estabelece valores limites para as flechas, que são a medida de deformação que ocorre na estrutura. Esses valores limites são diferenciados entre as condições imediata e final da estrutura. A condição imediata refere-se ao estado da estrutura durante a sua construção e imediatamente após a colocação em uso, enquanto a condição final refere-se à estrutura após ter sido submetida a todas as cargas esperadas e envelhecimento, mas ainda dentro de sua vida útil projetada.

Portanto, é essencial que a análise das condições imediata e final seja realizada adequadamente para garantir que a estrutura atenda aos requisitos de desempenho e segurança em todas as fases de sua vida útil, desde a construção até o seu uso diário e envelhecimento. A Figura 5.11 apresenta as restrições do ELS, tanto no estado imediato (g_{85}) quanto no estado final (g_{86}), expressas como uma porcentagem do deslocamento máximo permitido em relação ao limite estabelecido na Tabela 3.3, que é uma medida de segurança que garante que a estrutura consiga suportar as cargas esperadas.

Figura 5.11: Solicitações do ELS



Fonte: Próprio Autor (2023)

Durante a análise do ELS, verificou-se que, para a condição imediata da estrutura, as solicitações estiveram entre 96,51% e 99,92% do limite estabelecido pela norma. Já para a condição final do ELS, as solicitações estiveram entre 27,30% e 28,84% do limite estabelecido. Além disso, é possível observar que todas as treliças apresentaram valores próximos a 100% na condição de flecha imediata do ELS, o que indica que essa restrição foi uma das que limitaram o processo de otimização.

Esses resultados indicam que a estrutura otimizada apresenta boa capacidade portante às cargas esperadas ao longo de sua vida útil. É importante ressaltar a relevância da consideração das restrições do ELS desde a fase de concepção até a operação da estrutura, a fim de garantir que ela seja capaz de suportar as solicitações esperadas sem comprometer a segurança e a durabilidade. Além disso, a análise dos resultados obtidos para as condições imediata e final do ELS permite uma melhor compreensão do comportamento da estrutura ao longo do tempo, orientando possíveis intervenções para garantir sua operação segura e

adequada. Conclui-se, portanto, que a otimização da estrutura foi limitada pelo ELS na condição imediata, mas que sua utilização ao longo de toda a vida útil é possível.

6. CONCLUSÕES

Este trabalho procura comparar diferentes tipologias de estruturas, a fim de determinar o menor consumo de madeira, considerando a influência da utilização de diferentes espécies de madeiras nativas. Foi aplicado o algoritmo de otimização FA por meio de um software de análise estrutural programado com base na análise matricial e na norma ABNT NBR 7190-1(2022b) para o dimensionamento.

A simulação foi realizada em tipologias de treliças Fan modificada e Howe, com vãos de 6, 9, 12 e 15 metros, e considerando diferentes classes de resistência das espécies nativas de madeira.

A análise dos resultados permitiu chegar às seguintes conclusões:

- O processo de otimização foi bem-sucedido e pode ser aplicado em problemas de dimensionamento para projetos de estruturas.
- As condições de serviço do ELS foram garantidas, uma vez que os deslocamentos instantâneos e efetivos ficaram abaixo dos limites normativos de $L/300$ e $L/150$, respectivamente.
- As restrições de projeto do ELS na condição instantânea foram limitantes para todas as treliças durante o processo de otimização.
- Quanto à influência das espécies, constatou-se que a menor Função Objetivo foi resultado da associação de espécies com boas propriedades de densidade aparente, resistência à solicitação normal e módulo de elasticidade. Além disso, verificou-se que a distribuição de esforços segue o padrão de resistência das espécies, onde as treliças com espécies de menor resistência mecânica foram mais solicitadas, enquanto as treliças com espécies de maior resistência mecânica foram menos exigidas. Desse modo, as treliças foram classificadas em ordem decrescente de solicitação conforme as espécies utilizadas, sendo as treliças das espécies ID 01 e ID 02 as mais solicitadas, seguida pelas espécies ID 03, ID 04 e ID 05.
- Quanto a comparação entre as tipologias, a tipologia Howe apresentou resultados menores para a função objetivo em relação à treliça Fan modificada, na maioria dos resultados.
- Ao se analisar a restrições do ELU, ambas tipologias apresentaram resultados similares. No entanto, ao analisar os valores máximos e mínimos das restrições, é possível notar que a tipologia de treliça Howe apresenta uma amplitude maior em relação à tipologia de treliça Fan Modificada, na maioria

das condições adotadas. Isso sugere que a tipologia de treliça Howe é capaz de distribuir os esforços de maneira mais eficiente, resultando em valores mais uniformes de tensões normais.

- Foi possível identificar os grupos que apresentaram diferenças estatisticamente significativas em relação às médias das restrições do ELU. No total, foram identificados 2 grupos para as treliças de 6 m, 3 grupos para as treliças de 9 m, 12 m e 15 m.
- Nas restrições do ELS, verificou-se que para a condição imediata da estrutura, as solicitações estiveram entre 96,51% e 99,92% do limite estabelecido pela norma. Já para a condição final do ELS, as solicitações estiveram entre 27,30% e 28,84% do limite estabelecido.

Em síntese, o estudo apresenta evidências de que a madeira é uma escolha viável e sustentável para sistemas construtivos, especialmente em aplicações estruturais como treliças. A caracterização das propriedades das espécies de madeira utilizadas no estudo permitiu uma análise mais precisa do desempenho das treliças, e a utilização de métodos de análise matricial e algoritmos de otimização de inteligência de enxame permitiu uma avaliação precisa dos esforços internos e deslocamentos nodais nas treliças, além da minimização do peso da estrutura.

Os resultados obtidos indicam que as treliças concebidas com diferentes espécies de madeira apresentam comportamentos distintos, e que possibilita a escolha da espécie mais adequada para cada aplicação específica, considerando suas propriedades mecânicas. Além disso, a análise das restrições associadas à flecha imediata destaca a importância de considerar todas as restrições no dimensionamento de estruturas de madeira.

Portanto, a utilização da madeira em sistemas construtivos, especialmente em treliças, é uma alternativa sustentável e viável, que pode contribuir para a redução do impacto ambiental da construção civil.

REFERÊNCIAS

AMARAN, S.; SAHINIDIS, N. V.; SHARDA, B.; BURY, S. J. "Simulation optimization: a review of algorithms and applications", **Annals of Operations Research**, v. 240, n. 1, p. 351–380, 2016. DOI: 10.1007/s10479-015-2019-x.

AMORIM, S. T. A.; MANTILLA, J. N. R.; CARRASCO, E. V. M. "A madeira laminada cruzada: aspectos tecnológicos, construtivos e de dimensionamento", **Matéria (Rio de Janeiro)**, v. 22, n. suppl 1, 2018. DOI: 10.1590/s1517-707620170005.0273.

ANDRADE JUNIOR, J. R. A.; ALMEIDA, D. H. de; ALMEIDA, T. H. de; CHRISTOFORO, A. L.; STAMATO, G. C.; LAHR, F. A. R. "Avaliação das estruturas de cobertura em madeira de um galpão de estoque de produtos químicos", **Ambiente Construído**, v. 14, n. 3, p. 75–85, 2014. DOI: 10.1590/S1678-86212014000300006.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS - ABNT. **ABNT NBR 6123: Forças devidas ao vento em edificações**. Rio de Janeiro – RJ, ABNT, 1988.

_____. **ABNT NBR 7190: Projeto de estruturas de madeira**. Rio de Janeiro – RJ, ABNT, 1997.

_____. **ABNT NBR 7190: Projeto de estruturas de madeira**. Rio de Janeiro – RJ, ABNT, 2022a.

_____. **ABNT NBR 7190-1: Projeto de estruturas de madeira. Parte 1: Critérios de dimensionamento**. Rio de Janeiro – RJ, ABNT, 2022b.

_____. **ABNT NBR 7190-3: Métodos de ensaio para corpos de prova isentos de defeitos para madeiras de florestas nativas**. Rio de Janeiro – RJ, ABNT, 2022c.

_____. **ABNT NBR 8681: Ações e segurança nas estruturas - Procedimento**. Rio de Janeiro – RJ, ABNT, 2003.

_____. **ABNT NBR ISO 3179: Madeira serrada de coníferas – Dimensões nominais**. Rio de Janeiro – RJ, ABNT, 2011.

BATISTA, M.; AMORIM, A.; SILVA, D. A. L.; AQUINO, V. B. de M.; LAHR, F. A. R.; CHRISTOFORO, A. L. "Representativeness of the fiber parallel elasticity modulus value referring to the Brazilian standard C40 strength class in the design of timber structures", **Ciência Rural**, v. 53, n. 3, p. e20210289, 2023. DOI: 10.1590/0103-8478cr20210289.

BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O., "Topology optimization by distribution of isotropic material". In: BENDSØE, M. P., SIGMUND, O., **Topology Optimization**, Berlin, Heidelberg, Springer Berlin Heidelberg, 2004. p. 1–69. DOI: 10.1007/978-3-662-05086-6_1. Disponível em: http://link.springer.com/10.1007/978-3-662-05086-6_1. Acesso em: 28 set. 2022.

BIOLCHINI, J. C. de A.; MIAN, P. G.; NATALI, A. C. C.; CONTE, T. U.; TRAVASSOS, G. H. "Scientific research ontology to support systematic review in software engineering", **Advanced Engineering Informatics**, v. 21, n. 2, p. 133–151, 2007. DOI: 10.1016/j.aei.2006.11.006.

BLUM, C.; ROLI, A. "Metaheuristics in combinatorial optimization: Overview and conceptual comparison", **ACM Computing Surveys**, v. 35, n. 3, p. 268–308, 2003. DOI: 10.1145/937503.937505.

BRERETON, P.; KITCHENHAM, B. A.; BUDGEN, D.; TURNER, M.; KHALIL, M. "Lessons from applying the systematic literature review process within the software engineering domain", **Journal of Systems and Software**, v. 80, n. 4, p. 571–583, 2007. DOI: 10.1016/j.jss.2006.07.009.

CALIL JÚNIOR, C.; DIAS, A. A. "Utilização da madeira em construções rurais", **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, v. 1, p. 71–77, 1997. DOI: 10.1590/1807-1929/agriambi.v1n1p71-77.

CALIL JÚNIOR, C.; LAHR, F. A. R.; DIAS, A. A.; MARTINS, G. C. A. **Estruturas de madeira: Projetos, Dimensionamento e Exemplos de Cálculo**. 1ª edição ed. Rio de Janeiro – RJ, Elsevier - GEN LTC, 2019.

CAVALHEIRO, R. S.; ALMEIDA, D. H.; ALMEIDA, T. H. de; CHRISTOFORO, A. L.; LAHR, F. A. R. "Density as Estimator of Shrinkage for Some Brazilian Wood Species", **International Journal of Materials Engineering**, v. 6, n. 3, p. 107–112, 2016. DOI: 10.5923/j.ijme.20160603.08.

CHEN, Y.; GUO, W. "Nondestructive Evaluation and Reliability Analysis for Determining the Mechanical Properties of Old Wood of Ancient Timber Structure", **BioResources**, v. 12, n. 2, p. 2310–2325, 2017. DOI: 10.15376/biores.12.2.2310-2325.

CHRISTOFORO, A. L.; MORAES, M. H. M. de; FRAGA, I. F.; PEREIRA JUNIOR, W. M.; LAHR, F. A. R. "Computational Intelligence Applied in Optimal Design of Wooden Plane Trusses", **Engenharia Agrícola**, v. 42, n. spe, p. e20210123, 2022. DOI: 10.1590/1809-4430-eng.agric.v42nepe20210123/2022.

COMITÉ EUROPEU DE NORMALIZAÇÃO - CEN. **EN 14080: Timber structures—glued laminated timber and glued solid timber—requirements**. Bruxelas - Bélgica, European Committee for Standardization CEN, 2013.

CTBUH. **Council on Tall Buildings and Urban Habitat - CTBUH**. 2022. Council on Tall Buildings and Urban Habitat. [Organização]. Disponível em: <https://www.ctbuh.org>. Acesso em: 2 set. 2022.

D'AMICO, B.; KERMANI, A.; ZHANG, H.; SHEPHERD, P.; WILLIAMS, C. J. K. "Optimization of cross-section of actively bent grid shells with strength and geometric compatibility constraints", **Computers & Structures**, v. 154, p. 163-176-163–176, 2015. DOI: 10.1016/j.compstruc.2015.04.006.

DE ARAUJO, V. A.; CORTEZ-BARBOSA, J.; GAVA, M.; GARCIA, J. N.; SOUZA, A. J. D. de; SAVI, A. F.; MORALES, E. A. M.; MOLINA, J. C.; VASCONCELOS, J. S.; CHRISTOFORO, A. L.; LAHR, F. A. R. "Classification of Wooden Housing Building Systems", **BioResources**, v. 11, n. 3, p. 7889–7901, 2016. DOI: 10.15376/biores.11.3.DeAraujo.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **Eurocode 5: Design of timber structures - Part 1-1: General - Common rules and rules for buildings**. Bruxelas - Bélgica, BSI, 2004.

FOOD AND AGRICULTURE ORGANIZATION - FAO. **Global Forest Resources Assessment 2020: Main report**. Rome, Italy, Food and Agriculture Organization - FAO, 2020. Disponível em: <https://www.fao.org/documents/card/en/c/ca9825en/>. Acesso em: 9 set. 2022.

FRAGA, I. F. **Influência dos modelos idealizados de ligações no dimensionamento de treliças planas de madeira**. 2020. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio

Grande do Sul, São Carlos - SP, 2020.

FRANCK FILHO, F. H. **Seleção de espécies arbóreas nativas da região sul do Brasil para reflorestamento e emprego na arquitetura e no design**. 2005. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre - RS, 2005. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/10154>. Acesso em: 20 set. 2022.

GANDOMI, A. H.; YANG, X.-S.; ALAVI, A. H. "Mixed variable structural optimization using Firefly Algorithm", **Computers & Structures**, v. 89, n. 23–24, p. 2325–2336, 2011. DOI: 10.1016/j.compstruc.2011.08.002.

GIGLIO, T. G. F.; BARBOSA, M. J. "Aplicação de métodos de avaliação do desempenho térmico para analisar painéis de vedação em madeira", **Ambiente Construído**, v. 6, n. 3, p. 91–103, 2006. .

GREENHALGH, D.; MARSHALL, S. "Convergence Criteria for Genetic Algorithms", **SIAM Journal on Computing**, v. 30, n. 1, p. 269–282, 2000. DOI: 10.1137/S009753979732565X.

HSU, C. S. "A discrete method of optimal control based upon the cell state space concept", **Journal of Optimization Theory and Applications**, v. 46, n. 4, p. 547–569, 1985. DOI: 10.1007/BF00939159.

HUANG, C.; EL HAMI, A.; RADI, B. "Metamodel-based inverse method for parameter identification: elastic–plastic damage model", **Engineering Optimization**, v. 49, n. 4, p. 633–653, 2017. DOI: 10.1080/0305215X.2016.1206537.

HUANG, D.; PEI, S.; BUSCH, A. "Optimizing displacement-based seismic design of mass timber rocking walls using genetic algorithm", **Engineering Structures**, v. 229, p. 111603–111603, 2021. DOI: 10.1016/j.engstruct.2020.111603.

IQBAL, A. "Developments in Tall Wood and Hybrid Buildings and Environmental Impacts", **Sustainability**, v. 13, n. 21, p. 11881, 2021. DOI: 10.3390/su132111881.

ISSA, M. V. S. **On the Accuracy and Efficiency of Cross-Entropy Method for Structural Optimization**. 2019. 94 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia, Rio de Janeiro – RJ, 2019.

JELUŠIČ, P.; KRAVANJA, S. "Optimal design of timber-concrete composite floors based on the multi-parametric MINLP optimization", **Composite Structures**, v. 179, p. 285–293, 2017. DOI: 10.1016/j.compstruct.2017.07.062.

KASSIMALI, A. **Matrix Analysis of Structures, Si Edition**. 3rd ed. edição ed. [S.l.], Cengage Learning, 2021.

KIM, H.-S.; PARK, Y.-S.; YANG, M.-K.; LEE, M.-H.; KIM, J.-Y. "Initial Shape Design of Space Truss Structure using Density Method", **Journal of Korean Association for Spatial Structures**, v. 10, n. 4, p. 59–66, 2010. .

KIRKHAM, W. J.; GUPTA, R.; MILLER, T. H. "State of the Art: Seismic Behavior of Wood-Frame Residential Structures", **Journal of Structural Engineering**, v. 140, n. 4, p. 04013097, 2014. DOI: 10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0000861.

KRAVANJA, S.; ŽULA, T. "Optimization of a single-storey timber building structure", **International Journal of Computational Methods and Experimental Measurements**, v. 9, n. 2, p. 126-140-126–140, 2021. DOI: 10.2495/cmeme-v9-n2-126-140.

KROMOSER, B.; REICHENBACH, S.; HELLMAYR, R.; MYNA, R.; WIMMER, R. "Circular economy in wood construction – Additive manufacturing of fully recyclable walls made from renewables: Proof of concept and preliminary data", **Construction and Building Materials**, v. 344, p. 128219, 2022. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2022.128219.

KROMOSER, Benjamin; BRAUN, M.; ORTNER, M. "Construction of All-Wood Trusses with Plywood Nodes and Wooden Pegs: A Strategy towards Resource-Efficient Timber Construction", **Applied Sciences**, v. 11, n. 6, p. 2568–2568, 2021. DOI: 10.3390/app11062568.

KURI-MORALES, A. F.; GUTIÉRREZ-GARCÍA, J., "Penalty Function Methods for Constrained Optimization with Genetic Algorithms: A Statistical Analysis". In: COELLO COELLO, C. A., DE ALBORNOZ, A., SUCAR, L. E., BATTISTUTTI, O. C. (Org.), **MICAI 2002: Advances in Artificial Intelligence**, Lecture Notes in Computer Science. Berlin, Heidelberg, Springer Berlin Heidelberg, 2002. v. 2313. p. 108–117. DOI: 10.1007/3-540-46016-0_12. Disponível em: http://link.springer.com/10.1007/3-540-46016-0_12. Acesso em: 19 out. 2022.

LAHR, F. A. R.; ARROYO, F. N.; ALMEIDA, T. H.; ALMEIDA FILHO, F. M.; MENDES, I. S.; CHRISTOFORO, A. L. "Full Characterization of *Erismia uncinatum* Warm Wood Specie", **International Journal of Materials Engineering**, v. 6, n. 5, p. 147–150, 2016a. .

LAHR, F. A. R.; CHRISTOFORO, A. L.; SILVA, C. E. G.; ANDRADE JUNIOR, J. R.; PINHEIRO, R. V. "Avaliação de propriedades físicas e mecânicas de madeiras de Jatobá (*Hymenaea stilbocarpa* Hayne) com diferentes teores de umidade e extraídas de regiões distintas", **Revista Árvore**, v. 40, n. 1, p. 147–154, 2016b. DOI: 10.1590/0100-67622016000100016.

LEMONGE, A. C. C.; CARVALHO, J. P. G.; HALLAK, P. H.; VARGAS, Dênis. E. C. "Multi-objective truss structural optimization considering natural frequencies of vibration and global stability", **Expert Systems with Applications**, v. 165, p. 113777, 2021. DOI: 10.1016/j.eswa.2020.113777.

LIEU, Q. X.; DO, D. T. T.; LEE, J. "An adaptive hybrid evolutionary firefly algorithm for shape and size optimization of truss structures with frequency constraints", **Computers & Structures**, v. 195, p. 99–112, 2018. DOI: 10.1016/j.compstruc.2017.06.016.

LIN, M.-H.; TSAI, J.-F.; YU, C.-S. "A Review of Deterministic Optimization Methods in Engineering and Management", **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2012, p. 1–15, 2012. DOI: 10.1155/2012/756023.

MAM, K.; DOUTHE, C.; LE ROY, R.; CONSIGNY, F. "Shape optimization of braced frames for tall timber buildings: Influence of semi-rigid connections on design and optimization process", **Engineering Structures**, v. 216, p. 110692, 2020. DOI: 10.1016/j.engstruct.2020.110692.

MASOOMI, H.; AMERI, M. R.; VAN DE LINDT, J. W. "Wind Performance Enhancement Strategies for Residential Wood-Frame Buildings", **Journal of Performance of Constructed Facilities**, v. 32, n. 3, p. 04018024, 2018. DOI: 10.1061/(ASCE)CF.1943-5509.0001172.

MAYENCOURT, P.; MUELLER, C. "Hybrid analytical and computational optimization methodology for structural shaping: Material-efficient mass timber beams", **Engineering Structures**, v. 215, p. 110532, 2020. DOI: 10.1016/j.engstruct.2020.110532.

MINITAB. **Minitab® Statistical Software**. , v19.2020.1. State College, Pensilvânia, EUA, Minitab, LLC. Disponível em: <http://www.minitab.com>. , 2020

MIYOSHI, Y.; KOJIRO, K.; FURUTA, Y. "Effects of density and anatomical feature on mechanical properties of various wood species in lateral tension", **Journal of Wood Science**, v. 64, n. 5, p. 509–514, 2018. DOI: 10.1007/s10086-018-1730-z.

MORAES, M. H. M.; FRAGA, I. F.; PEREIRA JUNIOR, W. M.; CHRISTOFORO, A. L. "Comparative analysis of the mechanical performance of timber trusses structural typologies applying computational intelligence", **Revista Árvore**, v. 46, p. e4604, 2022. DOI: 10.1590/1806-908820220000004.

MOREIRA, J. M. M. Á. P.; SIMIONI, F. J.; OLIVEIRA, E. B. de. "Importância e desempenho das florestas plantadas no contexto do agronegócio brasileiro", **Floresta**, v. 47, n. 1, p. 85, 2017. DOI: 10.5380/ufv.v47i1.47687.

NG, K. K. H.; LEE, C. K. M.; CHAN, F. T. S.; LV, Y. "Review on meta-heuristics approaches for airside operation research", **Applied Soft Computing**, v. 66, p. 104–133, 2018. DOI: 10.1016/j.asoc.2018.02.013.

PARSOPOULOS, K. E.; VRAHATIS, M. N. "Recent approaches to global optimization problems through Particle Swarm Optimization", **Natural Computing**, v. 1, n. 2/3, p. 235–306, 2002. DOI: 10.1023/A:1016568309421.

PECH, S.; KANDLER, G.; LUKACEVIC, M.; FÜSSL, J. "Metamodel assisted optimization of glued laminated timber beams by using metaheuristic algorithms", **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, v. 79, p. 129–141, 2019. DOI: 10.1016/j.engappai.2018.12.010.

PEREIRA, L. L. M.; SANTOS, D. C.; MORAES, M. H. M.; GONÇALVES FILHO, G. M.; ANCIOTO JUNIOR, E. M.; PEREIRA JUNIOR, W. M.; DANTAS, M. J. P. "Estudo de Sensibilidade do Algoritmo de Colônia de Vagalumes para um Problema de Engenharia Envolvendo Dimensionamento de Trelças", **TEMA (São Carlos)**, v. 21, n. 3, p. 583, 2020. DOI: 10.5540/tema.2020.021.03.583.

PIGOZZO, J.; ARROYO, F.; CHRISTOFORO, A.; ALMEIDA, D.; JUNIOR, C.; LAHR, F. "Design and Execution of Wood-concrete Deck Bridge", **Current Journal of Applied Science and Technology**, v. 28, n. 3, p. 1–10, 2018. DOI: 10.9734/CJAST/2018/42784.

QIN, R.; ZHOU, A.; CHOW, C. L.; LAU, D. "Structural performance and charring of loaded wood under fire", **Engineering Structures**, v. 228, p. 111491, 2021. DOI: 10.1016/j.engstruct.2020.111491.

RAMAGE, M. H.; BURRIDGE, H.; BUSSE-WICHER, M.; FEREDAY, G.; REYNOLDS, T.; SHAH, D. U.; WU, G.; YU, L.; FLEMING, P.; DENSLEY-TINGLEY, D.; ALLWOOD, J.; DUPREE, P.; LINDEN, P. F.; SCHERMAN, O. "The wood from the trees: The use of timber in construction", **Renewable and Sustainable Energy Reviews**, v. 68, p. 333–359, 2017. DOI: 10.1016/j.rser.2016.09.107.

SANTANA, A. C. de; SANTANA, Á. L. de; SANTOS, M. A. S. dos. "Influência do desmatamento no mercado de madeira em tora da região Mamuru-Arapiuns, Sudoeste do Pará", **Revista de Ciências Agrárias**, v. 54, n. 1, p. 44–53, 2011. DOI: 10.4322/rca.2011.037.

SANTOS, H. F. dos; MORAES, M. H. M. de; OLIVEIRA, I. A. de; FREITAS, L. de; AQUINO, V. B. de M.; MENEZES, I. S.; FRAGA, I. F.; LAHR, F. A. R.; MASCARENHAS, F. J. R.; DE ALMEIDA FILHO, F. M.; CHRISTOFORO, A. L. "Influence of the Harvesting Region on Batch Homogeneity of Ipe Wood (*Tabebuia* sp.) Based on Its Physical and Mechanical Properties", **Forests**, v. 13, n. 9, p. 1385, 2022. DOI: 10.3390/f13091385.

SCHIETZOLD, F. N.; GRAF, W.; KALISKE, M. "Multi-Objective Optimization of Tree Trunk Axes in Glulam Beam Design Considering Fuzzy Probability-Based Random Fields", **ASCE-ASME J Risk and Uncert in Engrg Sys Part B Mech Engrg**, v. 7, n. 2, p. 020913, 2021. DOI: 10.1115/1.4050370.

SEGOVIA-HERNÁNDEZ, J. G.; HERNÁNDEZ, S.; BONILLA PETRICIOLET, A. "Reactive distillation: A review of optimal design using deterministic and stochastic techniques", **Chemical Engineering and Processing: Process Intensification**, v. 97, p. 134–143, 2015. DOI: 10.1016/j.cep.2015.09.004.

SILVA, C. E. G. da; ALMEIDA, D. H.; ALMEIDA, T. H.; CHAHUD, E.; BRANCO, L. A. M. N.; CAMPOS, C. I.; ROCCO LAHR, F. A.; CHRISTOFORO, A. L. "Influence of the Procurement Site on Physical and Mechanical Properties of Cupiúba Wood Species", **BioResources**, v. 13, n. 2, p. 4118–4131, 2018. DOI: 10.15376/biores.13.2.4118-4131.

SOUZA, R. R. de; FADEL MIGUEL, L. F.; LOPEZ, R. H.; MIGUEL, L. F. F.; TORII, A. J. "A procedure for the size, shape and topology optimization of transmission line tower structures", **Engineering Structures**, v. 111, p. 162–184, 2016. DOI: 10.1016/j.engstruct.2015.12.005.

STEEGE, H. ter; PRADO, P. I.; LIMA, R. A. F. de; POS, E.; DE SOUZA COELHO, L.; PICKAVANCE, G.; *et al.* "Biased-corrected richness estimates for the Amazonian tree flora", **Scientific Reports**, v. 10, n. 1, p. 10130, 2020. DOI: 10.1038/s41598-020-66686-3.

TEIXEIRA, J. N.; WOLENSKI, A. R. V.; AQUINO, V. B. de M.; PANZERA, T. H.; SILVA, D. A. L.; CAMPOS, C. I.; SILVA, S. A. M.; LAHR, F. A. R.; CHRISTOFORO, A. L. "Influence of provenance on physical and mechanical properties of Angelim-pedra (*Hymenolobium petraeum* Ducke.) wood species", **European Journal of Wood and Wood Products**, v. 79, n. 5, p. 1241–1251, 2021. DOI: 10.1007/s00107-021-01692-4.

TELHA SÃO CARLOS. **Catálogo de Telhas São Carlos**. 2022. Telha São Carlos. [Comercial]. Disponível em: https://telhasaocarlos.com.br/wp-content/uploads/2019/04/CatalogoTelhaSaoCarlos_2019-compactado.pdf. Acesso em: 22 nov. 2022.

TUKEY, J. W. "Comparing Individual Means in the Analysis of Variance", **Biometrics**, v. 5, n. 2, p. 99, 1949. DOI: 10.2307/3001913.

TURNER, M. J.; CLOUGH, R. W.; MARTIN, H. C.; TOPP, L. J. "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures", **Journal of the Aeronautical Sciences**, v. 23, n. 9, p. 805–823, 1956. DOI: 10.2514/8.3664.

ULUSOY, S. (Org.). "Optimum design of timber structures under fire using metaheuristic algorithm", **Journal of the Croatian Association of Civil Engineers**, v. 74, n. 02, p. 115–124, 2022. DOI: 10.14256/JCE.2911.2020.

VILLAR, J. R.; VIDAL, P.; FERNÁNDEZ, M. S.; GUAITA, M. "Genetic algorithm optimisation of heavy timber trusses with dowel joints according to Eurocode 5", **Biosystems Engineering**, v. 144, p. 115–132, 2016. DOI: 10.1016/j.biosystemseng.2016.02.011.

VILLAR-GARCÍA, J. R.; VIDAL-LÓPEZ, P.; RODRÍGUEZ-ROBLES, D.; GUAITA, M. "Cost optimisation of glued laminated timber roof structures using genetic algorithms", **Biosystems Engineering**, v. 187, p. 258–277, 2019. DOI: 10.1016/j.biosystemseng.2019.09.008.

WALPOLE, R. E.; MYERS, R. H.; MYERS, S. L.; YE, K. **Probabilidade e Estatística para Engenharia e Ciências**. 8ª edição ed. [S.l.], Pearson Universidades, 2008.

WANG, H.; WANG, W.; ZHOU, X.; SUN, H.; ZHAO, J.; YU, X.; CUI, Z. "Firefly algorithm with neighborhood attraction", **Information Sciences**, v. 382–383, p. 374–387, 2017. DOI: 10.1016/j.ins.2016.12.024.

WHERRY, G.; BUEHLMANN, U. "Product Life Cycle of the Manufactured Home Industry", **BioResources**, v. 9, n. 4, p. 6652–6668, 2014. DOI: 10.15376/biores.9.4.6652-6668.

YANG, X.-S. **Nature-inspired metaheuristic algorithms**. Frome, Luniver Press, 2008.

YENIAY, Ö. "Penalty Function Methods for Constrained Optimization with Genetic Algorithms", **Mathematical and Computational Applications**, v. 10, n. 1, p. 45–56, 2005. DOI: 10.3390/mca10010045.