



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

**Laplaciano de Dirichlet e Dirichlet-Neumann  
em faixas ilimitadas**

Rafael Toledo Amorim

São Carlos - SP  
Abril de 2023





UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

## Laplaciano de Dirichlet e Dirichlet-Neumann em faixas ilimitadas

Rafael Toledo Amorim

Orientador(a): Prof(a). Dr(a). Alessandra Aparecida Verri

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Doutor em Ciências, área de concentração: Análise Matemática.

**“VERSÃO REVISADA APÓS A DEFESA”**

Data da defesa: 27/04/2023

Visto do(a) orientador(a):

São Carlos - SP

Abril de 2023





## UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

---

### Folha de Aprovação

---

Defesa de Tese de Doutorado do candidato Rafael Toledo Amorim, realizada em 27/04/2023.

#### Comissão Julgadora:

Profa. Dra. Alessandra Aparecida Verri (UFSCar)

Prof. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki (UFSCar)

Prof. Dr. Luiz Roberto Hartmann Junior (UFSCar)

Prof. Dr. Marcus Antonio Mendonça Marrocos (UFAM)

Prof. Dr. Marcone Correa Pereira (USP)



*Dedico este trabalho aos meus pais,  
Emília e Rogério (in memoriam).*



---

# Agradecimentos

---

Agradeço inicialmente à minha mãe, Emília, e aos meus irmãos, Rodrigo e Rosinéia, por todo apoio, incentivo, educação, amor e carinho ao longo deste percurso. Ao meu pai, Rogério (*in memoriam*), porque sei que, onde quer que estejas, estará feliz e orgulhoso por eu ter realizado os teus sonhos e os meus. Agradeço também aos demais familiares, pelas palavras de incentivo e apoio de sempre.

À minha orientadora, Professora Alessandra Aparecida Verri, por toda a disponibilidade, paciência e imprescindível apoio que sempre demonstrou em todas as reuniões. Obrigada por toda dedicação, correções, incentivo e todo o aprendizado que me proporcionou.

Aos professores e funcionários da UFSCar, que de alguma forma me ajudaram neste caminho. Em especial, aos professores com os quais tive o privilégio de ter aulas, pelos ensinamentos passados que contribuíram muito para a minha formação.

Aos membros da banca examinadora pela presença na defesa e pelas correções, críticas e inúmeras contribuições propostas.

A todos os amigos que fiz no caminho, pela companhia, pelas palavras de conforto, pelo apoio nos momentos difíceis, pelas boas conversas e momentos de alegria.

Este trabalho contou com o apoio financeiro do CNPq (número do processo: 141842/2019-9).



---

# Resumo

---

Seja  $\Omega$  uma faixa bidimensional e ilimitada em uma superfície regrada em  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ . Considere  $-\Delta_{\Omega}^D$  o operador Laplaciano de Dirichlet restrito à faixa  $\Omega$  e  $-\Delta_{\Omega}^{DN}$  o Laplaciano em  $\Omega$  com condições de contorno de Dirichlet e Neumann em lados opostos de  $\Omega$ . Neste trabalho, apresentamos uma análise detalhada do espectro de  $-\Delta_{\Omega}^j$ ,  $j \in \{D, DN\}$ . Em particular, obtemos informações sobre o espectro essencial e discreto dos operadores; esses resultados obtidos são influenciados pela geometria da faixa e pelas condições de contorno na fronteira de  $\Omega$ . Além disso, em algumas situações, encontramos um comportamento assintótico para os autovalores de  $-\Delta_{\Omega}^j$ ,  $j \in \{D, DN\}$ , quando  $\Omega$  possui largura suficientemente pequena.

**Palavras-chave:** Laplaciano de Dirichlet; Laplaciano de Neumann; Laplaciano de Dirichlet-Neumann; espectro essencial; espectro discreto; superfícies regradadas.



---

# Abstract

---

Let  $\Omega$  be an unbounded two dimensional strip on a ruled surface in  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ . Consider  $-\Delta_{\Omega}^D$  the Dirichlet Laplacian operator restricted to  $\Omega$  and  $-\Delta_{\Omega}^{DN}$  the Laplacian in  $\Omega$  with Dirichlet and Neumann boundary conditions on opposite sides of  $\Omega$ . In this work, we performed a detailed spectral study of  $-\Delta_{\Omega}^j$ ,  $j \in \{D, DN\}$ . In particular, we find information about the essential and discrete spectrum of operators; these results are influenced by the geometry of strip and the boundary conditions on  $\partial\Omega$ . Furthermore, in some situations, we find an asymptotic behavior for the eigenvalues of  $-\Delta_{\Omega}^j$ ,  $j \in \{D, DN\}$ , when the width of  $\Omega$  is small enough.

**Keywords:** Dirichlet Laplacian; Neumann Laplacian; Dirichlet-Neumann Laplacian; essential spectrum; discrete spectrum; ruled surfaces.



---

# Sumário

---

<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>1 Geometria da faixa</b>	<b>9</b>
1.1 Construção da faixa . . . . .	9
1.2 A faixa como uma variedade Riemanniana . . . . .	12
1.3 Formas quadráticas e mudança de variáveis . . . . .	13
<b>2 Laplaciano de Dirichlet</b>	<b>15</b>
2.1 Uma outra mudança de variável . . . . .	16
2.2 Espectro Essencial . . . . .	16
2.3 Espectro Discreto . . . . .	19
<b>3 Laplaciano de Dirichlet em faixas finas</b>	<b>23</b>
3.1 Geometria da faixa . . . . .	24
3.2 Exemplos e observações . . . . .	25
3.3 Formas quadráticas . . . . .	26
3.4 Comportamento assintótico dos autovalores . . . . .	26
3.4.1 Limitação superior . . . . .	27
3.4.2 Limitação inferior . . . . .	28
3.4.3 Prova do Teorema 3.6 . . . . .	30
<b>4 Laplaciano de Dirichlet-Neumann</b>	<b>33</b>
4.1 Espectro Essencial . . . . .	33
4.2 Existência de autovalores discretos . . . . .	34
4.3 Ausência de espectro discreto . . . . .	35
<b>5 Laplaciano de Dirichlet-Neumann em faixas finas</b>	<b>43</b>
5.1 Faixas finas . . . . .	43
5.2 Faixas finas puramente torcidas . . . . .	52
5.3 Faixas com escala . . . . .	54

---

<b>6</b>	<b>Laplaciano de Dirichlet em faixas cortadas</b>	<b>57</b>
6.1	Geometria da faixa e mudança de variáveis . . . . .	57
6.2	Espectro essencial . . . . .	58
6.3	Espectro discreto . . . . .	62
6.4	Número de autovalores discretos . . . . .	64
<b>A</b>	<b>Alguns resultados clássicos</b>	<b>67</b>
A.1	Princípio do Minimax . . . . .	67
A.2	Família analítica do tipo A . . . . .	68
A.3	Operadores de Schrödinger . . . . .	69
<b>B</b>	<b>Prova da Proposição 2.2</b>	<b>71</b>
<b>C</b>	<b>Prova da Proposição 6.2</b>	<b>75</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>77</b>

---

## Lista de Figuras

---

1.1	Uma faixa simultaneamente curvada e torcida. . . . .	10
1.2	Uma faixa puramente curvada. . . . .	10
1.3	Uma faixa puramente torcida. . . . .	11
1.4	Uma faixa não curvada e não torcida. . . . .	11
1.5	Faixas não planas. . . . .	12



---

# Introdução

---

Seja  $\Omega$  uma faixa bidimensional e ilimitada em uma superfície regrada em  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ , e considere o operador Laplaciano restrito a  $\Omega$ . Na fronteira  $\partial\Omega$ , assumamos as condições de Dirichlet ou Neumann, ou uma combinação destas. O espectro dessa classe de operadores tem sido amplamente estudado nos últimos anos [4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 18, 19, 23, 24, 26, 27, 29, 32, 33, 37, 38, 39, 41, 44]. Em particular, a existência de autovalores discretos é uma propriedade que depende da geometria de  $\Omega$  e das condições de contorno em  $\partial\Omega$ .

Inicialmente, suponhamos que  $\Omega$  seja uma faixa reta e ilimitada em  $\mathbb{R}^2$ . Neste caso, sabe-se que o espectro do operador Laplaciano de Dirichlet (resp. Neumann) em  $\Omega$  é puramente essencial. No entanto, a análise espectral do operador Laplaciano não é um problema trivial se considerarmos combinações das condições de Dirichlet e Neumann em diferentes partes da fronteira  $\partial\Omega$  [6, 10, 42]. Por exemplo, os autores de [6] provaram a existência de espectro discreto para o operador Laplaciano em  $\Omega = \mathbb{R} \times (0, 1)$  com condições de Neumann no segmento  $(a, b) \times \{1\}$ ,  $-\infty < a < b < \infty$ , e condições de Dirichlet em  $\partial\Omega \setminus \{(a, b) \times \{1\}\}$ . Ao tomar  $\Omega = \mathbb{R} \times (0, d)$ ,  $0 < d < \infty$ , um dos resultados de [10] garante a existência de pelo menos um autovalor discreto para o Laplaciano em  $\Omega$  com as condições de Dirichlet em  $\{(x, d); |x| > a\}$ , para algum  $a > 0$ , e as condições de Neumann em  $\partial\Omega \setminus \{(x, d); |x| \geq a\}$ . Por outro lado, em [42], o resultado principal é uma desigualdade do tipo Hardy para o Laplaciano em  $\mathbb{R} \times (-d, d)$ , sujeito às condições de Dirichlet nos segmentos  $(-\infty, 0) \times \{-d\}$  e  $(0, \infty) \times \{d\}$ , e condições de Neumann nos segmentos  $(-\infty, 0) \times \{d\}$  e  $(0, \infty) \times \{-d\}$ .

Agora, seja  $T$  um operador autoadjunto e limitado inferiormente. Denote por  $\{\lambda_j(T)\}_{j \in \mathbb{N}}$  a sequência não decrescente de números correspondente ao espectro de  $T$  de acordo com o Princípio do Minimax; para mais detalhes, veja o Teorema A.2 do Apêndice A. Há duas possibilidades para cada  $\lambda_j(T)$ , ou ele representa um autovalor discreto, que é menor que o ínfimo do espectro essencial de  $T$ , ou ele é igual ao ínfimo do espectro essencial do operador. Ao longo do texto,  $-\Delta_{\mathbb{R}}$  denota o operador Laplaciano unidimensional em  $\mathbb{R}$  e  $\mathbf{1}$  o operador de identidade.

Seja  $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva plana parametrizada por seu comprimento de arco  $s$  e denote por  $\kappa(s)$  sua curvatura com sinal em  $s$ ;  $\Gamma$  deve satisfazer algumas condições de regularidade que não serão detalhadas nesta introdução. Considere o caso em que  $\Omega$  é uma faixa plana e ilimitada obtida ao mover o segmento  $(0, \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ , ao longo de  $\Gamma$  com respeito ao seu campo vetorial normal. Inicialmente, seja  $-\Delta_{\Omega}^D$  o Laplaciano de Dirichlet em  $\Omega$ . Se  $\Omega$  é assintoticamente reta no infinito (ou seja,  $\kappa(s) \rightarrow 0$ , quando  $|s| \rightarrow \infty$ ), então  $(\pi/\varepsilon)^2$  é o ínfimo do espectro essencial de  $-\Delta_{\Omega}^D$ . Além disso, se  $\kappa(s) \neq 0$ ,

então o espectro discreto é não vazio. Se  $\Omega$  é suficientemente fino, ou seja, se  $\varepsilon$  é suficientemente pequeno, tem-se

$$\lambda_j(-\Delta_\Omega^D) = \left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right)^2 + \lambda_j\left(-\Delta_{\mathbb{R}} - \frac{\kappa^2}{4}\mathbf{1}\right) + O(\varepsilon). \quad (1)$$

No entanto, o Laplaciano de Neumann, denotado por  $-\Delta_\Omega^N$ , tem um espectro puramente essencial, dado por  $[0, \infty)$ , mesmo no caso de  $\kappa(s) \neq 0$ . Se  $\varepsilon$  é suficientemente pequeno, então

$$\lambda_j(-\Delta_\Omega^N) = \lambda_j(-\Delta_{\mathbb{R}}) + O(\varepsilon). \quad (2)$$

Veja, por exemplo, [19, 23, 29, 38] para saber mais sobre esses resultados. Agora, seja  $-\Delta_\Omega^{DN}$  o operador Laplaciano com condições de Dirichlet em  $\Gamma(\mathbb{R})$  e condições de Neumann em  $\partial\Omega \setminus \Gamma(\mathbb{R})$  (ou seja, as condições de contorno de Dirichlet e Neumann estão em lados opostos de  $\Omega$ ). Essa situação foi estudada em [11, 33, 38]. Se  $\Omega$  é uma faixa assintoticamente reta no infinito,  $(\pi/2\varepsilon)^2$  é o ínfimo do espectro essencial. Suponha que  $\kappa$  tenha suporte compacto, os resultados de [11] garantem que se  $\int_{\mathbb{R}} \kappa(s)ds < 0$ , então o espectro discreto do operador é não vazio. Por outro lado, se  $\kappa(s) \geq 0$ , para todo  $s \in \mathbb{R}$ , então não existe autovalor discreto. Em [38], os autores obtiveram resultados semelhantes com menos restrições sobre  $\kappa$ . Em particular, eles provaram que se  $\Omega$  é assintoticamente reta no infinito,  $\kappa \neq 0$ ,  $\kappa \in L^1(\mathbb{R})$  e  $\int_{\mathbb{R}} \kappa(s)ds \leq 0$ , então o espectro discreto do operador é não vazio. Além disso, eles mostraram que o número de autovalores pode ser arbitrariamente grande se  $\Omega$  é suficientemente fina. Em [33], o autor encontrou o seguinte comportamento assintótico, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno,

$$\begin{aligned} \lambda_j(-\Delta_\Omega^{DN}) &= \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 + \lambda_j\left(-\Delta_{\mathbb{R}} + \frac{\kappa}{\varepsilon}\mathbf{1}\right) + O(1) \\ &= \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 + \frac{\inf \kappa}{\varepsilon} + o(\varepsilon^{-1}). \end{aligned} \quad (3)$$

Conforme discutido nesse mesmo artigo, a expansão (3) garante a existência de autovalores discretos, se  $\Omega$  é assintoticamente reta no infinito e  $\kappa(s)$  assume algum valor negativo; o número de autovalores se torna arbitrariamente grande quando  $\varepsilon$  se aproxima de zero. Observe que, localmente, a condição  $\kappa < 0$  significa que o raio de curvatura da fronteira com condições de Neumann é maior que o raio de curvatura da fronteira com condições de Dirichlet.

Alguns resultados para faixas em superfícies regradas podem ser estendidos para dimensões maiores. Focaremos agora no caso em que  $\Omega$  é uma faixa bidimensional (superfície) em  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ , obtida pela translação de um segmento limitado  $I_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , ao longo de uma curva ilimitada em relação a um referencial apropriado; ao longo deste texto trabalhamos apenas com duas situações, para o caso puramente de Dirichlet adote  $I_\varepsilon := (-\varepsilon, \varepsilon)$  e para o caso Dirichlet-Neumann considere  $I_\varepsilon := (0, \varepsilon)$ . Em outras palavras,  $\Omega$  é uma faixa bidimensional curvada e torcida mergulhada em  $\mathbb{R}^d$ , em que  $k \cdot \Theta$  e  $|\Theta'|$  denotam os efeitos de curvatura e torção, respectivamente; os detalhes desta construção pode ser encontrados na Seção 1.1. Inicialmente, considere o segmento simétrico  $I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Um modelo deste tipo foi previamente introduzido em [41], onde os autores realizaram um estudo espectral detalhado

do Laplaciano de Dirichlet  $-\Delta_{\Omega}^D$ . Em particular, sob as condições  $k \cdot \Theta \in L^{\infty}(\mathbb{R})$  e  $\varepsilon \|k \cdot \Theta\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})} < 1$ , eles provaram que

- (i) se  $\Omega$  é assintoticamente reta no infinito (ou seja,  $(k \cdot \Theta)(s) \rightarrow 0$  e  $|\Theta'(s)| \rightarrow 0$ , quando  $|s| \rightarrow \infty$ ), então  $(\pi/2\varepsilon)^2$  é o ínfimo do espectro essencial de  $-\Delta_{\Omega}^D$ . Além disso,

$$\sigma_{ess}(-\Delta_{\Omega}^D) = [(\pi/2\varepsilon)^2, \infty);$$

- (ii) se  $\Theta' = 0$  e  $k \cdot \Theta \neq 0$ , então  $\inf \sigma(-\Delta_{\Omega}^D) < (\pi/2\varepsilon)^2$ ;

- (iii) se  $k \cdot \Theta = 0$  (resp.  $|(k \cdot \Theta)(s)| \leq \delta/(1+s^2)$ , para algum  $\delta > 0$  suficientemente pequeno) e  $\Theta' \neq 0$  com  $\varepsilon \sup |\Theta'| \leq \sqrt{2}$ , então

$$-\Delta_{\Omega}^D \geq \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2,$$

no sentido das formas quadráticas.

As condições em (i) e (ii) garantem que o efeito de curvatura gera autovalores discretos para  $-\Delta_{\Omega}^D$ . Enquanto, as condições em (i) e (iii) mostram uma situação em que existe um efeito de torção, porém o operador não possui autovalores discretos. Uma questão natural é saber se existe algum efeito de torção apropriado que pode ser usado para gerar autovalores discretos para  $-\Delta_{\Omega}^D$ . Esse tema será abordado no Capítulo 2, onde respondemos esta pergunta. Além disso, se  $k \cdot \Theta, (k \cdot \Theta)', |\Theta'|, |\Theta''| \in L^{\infty}(\mathbb{R})$  e  $\varepsilon \|k \cdot \Theta\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})} < 1$ , os autores de [41] também encontraram o seguinte comportamento assintótico para os autovalores

$$\lambda_j(-\Delta_{\Omega}^D) = \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 + \lambda_j \left( -\Delta_{\mathbb{R}} + \left( -\frac{(k \cdot \Theta)^2}{4} + \frac{|\Theta'|^2}{2} \right) \mathbf{1} \right) + O(\varepsilon). \quad (4)$$

para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno. Mais precisamente, (4) é uma consequência da convergência no sentido da norma dos resolventes do operador  $-\Delta_{\Omega}^D$ , no limite quando a largura da faixa tende a zero.

Considerando  $\Omega$  como a faixa bidimensional definida em [41], com  $I_{\varepsilon} = (-\varepsilon, \varepsilon)$ , o objetivo da primeira parte deste trabalho, dividida nos Capítulos 2 e 3, é encontrar informações adicionais sobre o espectro do operador Laplaciano de Dirichlet em  $\Omega$ . Em particular, se  $\Omega$  é uma faixa puramente torcida, mostramos que um efeito de torção adequado pode criar autovalores discretos para o operador. Mais precisamente, sob as seguintes condições

$$\Gamma \in C^{1,1}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^{n+1}), \quad \Theta \in C^{1,1}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n), \quad (k \cdot \Theta)(s) = 0, \quad |\Theta'(s)| = \gamma - \beta(s),$$

para todo  $s \in \mathbb{R}$ , em que  $\gamma$  é um número positivo e  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, diferenciável em quase todo ponto, com suporte compacto e  $\beta' \in L^{\infty}(\mathbb{R})$ . No Capítulo 2, mostramos que  $\sigma_{ess}(-\Delta_{\Omega_{\varepsilon}}^D) = [\lambda_{\varepsilon,1}(0), \infty)$  e, se  $\int_{\text{supp } \beta} (|\Theta'(s)|^2 - \gamma^2) ds \leq 0$ , então o espectro discreto de  $-\Delta_{\Omega}^D$  é não vazio;  $\lambda_{\varepsilon,1}(0)$  é o primeiro autovalor associado ao operador  $D_{\varepsilon}(0)$  dado por (2.3). Além disso, estudamos o caso em que o efeito de torção “cresce” no infinito enquanto a largura da faixa tende para zero. Nesta

situação, construímos  $\tilde{\Omega}_\varepsilon$  sob certas condições adicionais apresentadas no Capítulo 3 deste trabalho e encontramos o seguinte comportamento assintótico para os autovalores

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \lambda_j(-\Delta_{\tilde{\Omega}_\varepsilon}^D) - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \right] = \lambda_j \left( -\Delta_{\mathbb{R}} + \frac{|\Theta'(s)|^2}{2} \mathbf{1} \right).$$

Essas são algumas das nossas contribuições para o tema; que também podem ser encontrados em [1].

Na segunda parte deste trabalho, dividida nos Capítulos 4 e 5, inspirado em [11, 33, 38, 41], nosso objetivo é estudar o problema espectral do operador Laplaciano com condições de Dirichlet e Neumann em lados opostos de uma faixa bidimensional como aquela definida em [41]; nesta nova situação, considere  $I_\varepsilon = (0, \varepsilon)$ . Nossa principal contribuição ao assunto é apresentada em [2]. Neste trabalho, encontramos alguns resultados sobre a existência e ausência de espectro discreto do operador, os quais são influenciados pelo efeito de torção e curvatura de  $\Omega$ . Em particular, sob as condições  $k \cdot \Theta \in L^\infty(\mathbb{R})$  e  $\varepsilon \|k \cdot \Theta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < 1$ , obtemos os seguintes resultados

- (i) se  $\Omega$  é assintoticamente reta no infinito, então  $(\pi/2\varepsilon)^2$  é o ínfimo do espectro essencial de  $-\Delta_{\Omega}^{DN}$ . Além disso,

$$\sigma_{ess}(-\Delta_{\Omega}^{DN}) = [(\pi/2\varepsilon)^2, \infty);$$

- (ii) se  $k \cdot \Theta = 0$  e  $\Theta' \neq 0$ , então  $\inf \sigma(-\Delta_{\Omega}^{DN}) < (\pi/2\varepsilon)^2$ ;

- (iii) se  $\Theta' = 0$  (resp.  $|\Theta'(s)| \leq \delta/(1+s^2)$ , para algum  $\delta > 0$  suficientemente pequeno) e  $k \cdot \Theta \neq 0$  com  $k \cdot \Theta \geq 0$  e  $\varepsilon \sup |k \cdot \Theta| \leq x_0$ , então

$$-\Delta_{\Omega}^D \geq \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2,$$

no sentido das formas quadráticas;  $x_0 \in (0, 4/5)$  é tal que  $r(x_0) = (\pi/2)^2$ , em que  $r$  é dado por (4.8) no Capítulo 4.

Esses resultados estão enunciados e demonstrados no Capítulo 4. Na Observação 4.6, deste mesmo capítulo, apresentamos uma discussão detalhada sobre as diferenças entre os casos puramente Dirichlet e Dirichlet-Neumann. Além disso, desde que  $\Omega$  seja suficientemente fina, encontramos também um comportamento assintótico para os autovalores. Mais precisamente, o Teorema 5.1 do Capítulo 5 mostra que se  $k \cdot \Theta \neq 0$ , então

$$\begin{aligned} \lambda_j(-\Delta_{\Omega}^{DN}) &= \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 + \lambda_j \left( -\Delta_{\mathbb{R}} + \frac{k \cdot \Theta}{\varepsilon} \mathbf{1} \right) + O(1) \\ &= \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 + \frac{\inf(k \cdot \Theta)}{\varepsilon} + o(\varepsilon^{-1}), \end{aligned} \quad (5)$$

para todo  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno. Diferente do caso puramente Dirichlet, o efeito de torção não influencia na expansão (5). Por outro lado, se  $k \cdot \Theta = 0$ , o Teorema 5.8 garante que

$$\lambda_j(-\Delta_{\Omega}^{DN}) = \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 + \lambda_j \left( -\Delta_{\mathbb{R}} - \frac{|\Theta'|^2}{2} \mathbf{1} \right) + O(\varepsilon),$$

para todo  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno. Por fim, realizamos uma dilatação apropriada em  $\Omega$  com a finalidade de eliminar a dependência do parâmetro  $\varepsilon$  no “operador efetivo” encontrado em (5). Neste processo construímos uma faixa  $\tilde{\Omega}$ , como apresentado na Seção 5.3, e encontramos a seguinte expansão

$$\lambda_j(-\Delta_{\tilde{\Omega}}^{DN}) = \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 + \frac{1}{\varepsilon}\lambda_j\left(-\Delta_{\mathbb{R}} + \left(k \cdot \Theta - \frac{|\Theta'|^2}{2}\right)\mathbf{1}\right) + O(1),$$

para todo  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno.

Agora, introduziremos um novo modelo de faixas bidimensionais. Sejam  $\varepsilon > 0$  e  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, defina a faixa  $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) < y < f(x) + \varepsilon\}$ ; observe que  $\Omega$  é construída pela translação do segmento  $(0, \varepsilon)$  orientado pelo vetor constante  $u := (0, 1)$  ao longo da curva gerada pelo gráfico de  $f$ . Em [7], os autores estudaram o espectro do operador Laplaciano de Dirichlet restrito a  $\Omega$ . Em particular, eles mostraram que  $(1 + p^2)(\pi/\varepsilon)^2$  é o ínfimo do espectro essencial de  $-\Delta_{\Omega}^D$ , em que

$$p := \lim_{|x| \rightarrow \infty} f'(x).$$

Além disso, se  $V := f'^2 - p^2 \in L^2(\mathbb{R})$  satisfaz  $\int_{\mathbb{R}} V(x)dx < 0$ , então o espectro discreto do operador é não vazio. Ao mesmo tempo, se  $V \in L^2(\mathbb{R})$  com  $\int_{\mathbb{R}} V(x)dx = 0$ ,  $f'$  é não constante e  $f'' \in L^\infty(\mathbb{R})$ , implica que o espectro discreto também é não vazio.

Seja  $\Pi$  uma faixa bidimensional obtida pela translação de um segmento ao longo de uma curva ilimitada em  $\mathbb{R}^3$  com respeito a um vetor constante  $u \in \mathbb{R}^3$ . Em particular, temos uma faixa bidimensional, curvada e torcida em  $\mathbb{R}^3$ ; neste novo modelo, diferente do caso em  $\mathbb{R}^2$ , temos um efeito adicional de torção. Nossa proposta para a última parte deste trabalho é estudar  $-\Delta_{\Pi}^D$  o operador Laplaciano restrito a faixa  $\Pi$  com a condição de contorno de Dirichlet em  $\partial\Pi$ . Esta nova situação é o tema principal do Capítulo 6 deste trabalho, onde apresentamos a construção da faixa e encontramos informações sobre o espectro essencial e discreto do operador. Mais precisamente, seja  $\tau$  o produto interno entre  $u$  e o vetor tangente unitário da curva, mostramos que

(i)  $\sigma_{ess}(-\Delta_{\Pi}^D) = [\lambda_1(0), \infty)$ , em que

$$\lambda_1(0) := \frac{1}{1 - \tau_0^2} \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2, \quad \tau_0 := \lim_{|s| \rightarrow \infty} \tau(s);$$

(ii) se  $V := (\tau^2 - \tau_0^2)/((1 - \tau^2)^{1/2}(1 - \tau_0^2)) \in L^1(\mathbb{R})$  tal que  $\int_{\mathbb{R}} V(s)ds < 0$ , então  $\inf \sigma(-\Delta_{\Pi}^D) < \lambda_1(0)$ ;

(iii) se  $\tau$  é uma função não constante tal que  $\tau' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ ,  $V \in L^1(\mathbb{R})$  e  $\int_{\mathbb{R}} V(s)ds = 0$ , então  $\inf \sigma(-\Delta_{\Pi}^D) < \lambda_1(0)$ .

Além disso, obtemos informações sobre o número de autovalores discretos. Um fato interessante é que os resultados obtidos são influenciados pelo ângulo formado entre  $u$  e o vetor tangente da curva. Denote por  $\theta(u, s)$  o ângulo entre o vetor  $u$  e a reta tangente à curva na posição  $s$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

existe  $\theta_n \in (0, \pi/2]$  tal que, para todo  $u \in \mathbb{R}^3$  com  $\lim_{|s| \rightarrow \infty} \theta(u, s) < \theta_n$ , tem-se  $N(-\Delta_{\Pi}^D) \geq n$ , em que  $N(-\Delta_{\Pi}^D)$  denota o número de autovalores discretos de  $-\Delta_{\Pi}^D$ , contando a multiplicidade. Essas foram as nossas contribuições ao tema.

Resumidamente, este trabalho é dividido em seis capítulos. No Capítulo 1 apresentamos a construção e a geometria de faixas bidimensionais torcidas e curvadas mergulhadas em  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $n \geq 1$ . Além disso, definimos de forma mais precisa os operadores  $-\Delta_{\Omega}^D$  e  $-\Delta_{\Omega}^{DN}$  e realizamos uma tradicional mudança de variáveis com a finalidade de trabalharmos sempre com uma faixa reta em  $\mathbb{R}^2$ . Os Capítulos 2 e 3 são dedicados ao estudo do espectro do operador  $-\Delta_{\Omega}^D$ . Enquanto os Capítulos 4 e 5 são dedicados ao estudo do espectro do operador  $-\Delta_{\Omega}^{DN}$ . No Capítulo 6, analisamos o espectro do operador Laplaciano de Dirichlet em um novo modelo de faixa bidimensional, como descrita no parágrafo anterior. Por fim, terminamos este trabalho com três apêndices com resultados que foram usados ao longo do desenvolvimento dessas análises.

---

## Geometria da faixa

---

A primeira parte deste trabalho é dedicada à análise do espectro do operador Laplaciano restrito a uma faixa bidimensional  $\Omega_\varepsilon$  mergulhada em  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $n \geq 1$ , com a condição de Dirichlet em toda a fronteira  $\partial\Omega_\varepsilon$ , ou com as condições de Dirichlet e Neumann em lados opostos de  $\partial\Omega_\varepsilon$ ; o parâmetro  $\varepsilon$  está relacionado com a “largura” da faixa. Neste capítulo, apresentamos uma construção detalhada da região  $\Omega_\varepsilon$  e, usando formas quadráticas, definimos o operador Laplaciano nessa região. Algumas mudanças de variáveis que serão úteis ao longo do texto também são apresentadas. Como comentado na Introdução, vale reforçar que a construção da região apresentado neste capítulo é inspirado em [41].

### 1.1 Construção da faixa

Seja  $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma curva de classe  $C^{1,1}$  parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ , isto é,  $|\Gamma'(s)| = 1$ , para todo  $s \in \mathbb{R}$ . O vetor  $T(s) := \Gamma'(s)$  denota o vetor tangente unitário no ponto  $\Gamma(s)$  e o número  $\kappa(s) := |\Gamma''(s)|$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , é chamado de curvatura de  $\Gamma$  na posição  $\Gamma(s)$ . Note que  $T$  é uma aplicação contínua, localmente Lipschitz e diferenciável em quase todo ponto de  $\mathbb{R}$ .

Um referencial de Frenet para a curva  $\Gamma$  não necessariamente precisa existir. Garantir a sua existência requer condições adicionais como, por exemplo,  $\Gamma$  uma curva de classe  $C^{n+1}$  e  $\kappa > 0$ . Contudo, no Apêndice A de [41], os autores provaram a existência de uma *referencial relativamente paralelo adaptado* para a curva  $\Gamma$ , o qual sempre existe sob a hipótese mínima de classe  $C^{1,1}$ . Mais precisamente, foi mostrado que existem  $n$  campos de vetores normais diferenciáveis em quase todo ponto, denotados por  $N_1, \dots, N_n$ , de modo que

$$\begin{pmatrix} T \\ N_1 \\ \vdots \\ N_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & \cdots & k_n \\ -k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -k_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N_1 \\ \vdots \\ N_n \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

em que  $k_1, \dots, k_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são funções localmente diferenciáveis. Em particular, o vetor  $k := (k_1, \dots, k_n)$  é chamada de *vetor curvatura* e satisfaz  $\kappa^2 = k_1^2 + \dots + k_n^2$ . Ao longo deste trabalho, adotamos o referencial adaptado dado por (1.1).

Sejam  $\Theta_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ , funções de classe  $C^{0,1}$  que satisfazem

$$\Theta_1^2 + \dots + \Theta_n^2 = 1. \quad (1.2)$$

O vetor  $\Theta := (\Theta_1, \dots, \Theta_n)$  é chamado de *vetor torção*. Assim, defina o campo normal

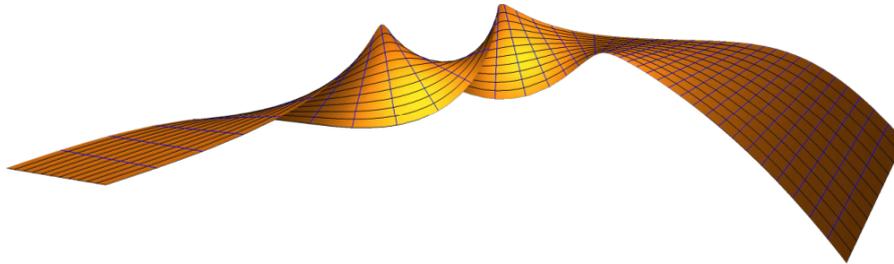
$$N_\Theta := \Theta_1 N_1 + \dots + \Theta_n N_n. \quad (1.3)$$

Considere a faixa reta  $\Lambda := \mathbb{R} \times (a, b)$ , em que  $-\infty < a < b < +\infty$ , e seja  $\varepsilon > 0$  um número real. Finalmente, defina a faixa

$$\Omega_\varepsilon = \{\Gamma(s) + \varepsilon t N_\Theta(s) : (s, t) \in \Lambda\}. \quad (1.4)$$

A grosso modo,  $\Omega_\varepsilon$  é obtido pela translação do segmento  $(a\varepsilon, b\varepsilon)$  ao longo de  $\Gamma$  com respeito ao campo normal (1.3). Além disso,  $\Omega_\varepsilon$  pode ser interpretada como uma deformação da faixa reta  $\Lambda$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , veja a figura abaixo.

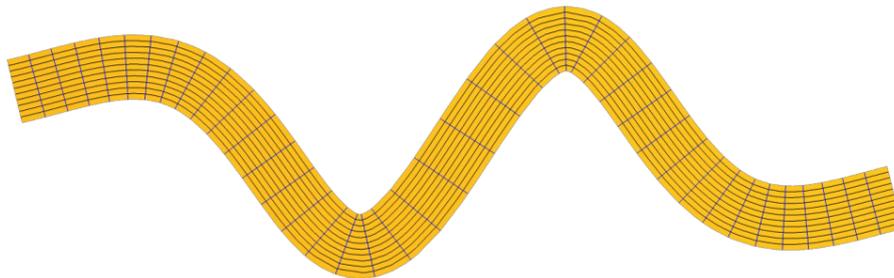
Figura 1.1: Uma faixa simultaneamente curvada e torcida.



Fonte: Artigo [41].

Se o vetor de torção  $\Theta$  é constante, ou seja,  $\Theta' = 0$ , então o campo vetorial  $N_\Theta$  é relativamente paralelo. Nessa situação, dizemos que  $\Omega_\varepsilon$  é uma *faixa puramente curvada* (incluindo o caso  $\kappa = 0$ , em que  $\Omega_\varepsilon$  pode ser identificado com a faixa reta  $\Lambda$ ). Na Figura 1.2, temos uma faixa plana puramente curvada e, na Figura 1.5 (b), uma faixa não plana puramente curvada.

Figura 1.2: Uma faixa puramente curvada.



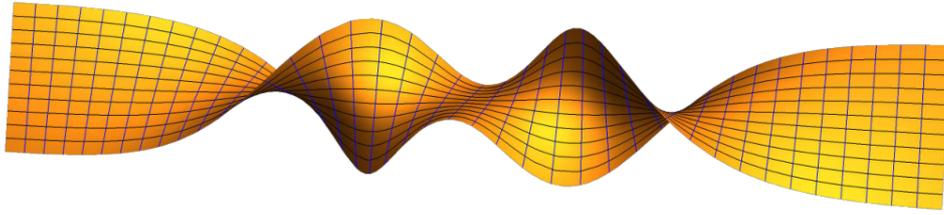
Fonte: Artigo [41].

Por outro lado, se o produto escalar entre os vetores curvatura e torção se anular, ou seja,

$$k \cdot \Theta := k_1 \Theta_1 + \dots + k_n \Theta_n = 0,$$

dizemos que  $\Omega_\varepsilon$  é uma *faixa puramente torcida*. Note que a condição  $k \cdot \Theta = 0$  não implica necessariamente que  $\Gamma$  seja uma curva reta. Na Figura 1.3 encontramos uma faixa puramente torcida ao longo de uma linha reta e na Figura 1.5 (c) temos uma faixa puramente torcida ao longo de uma curva no espaço.

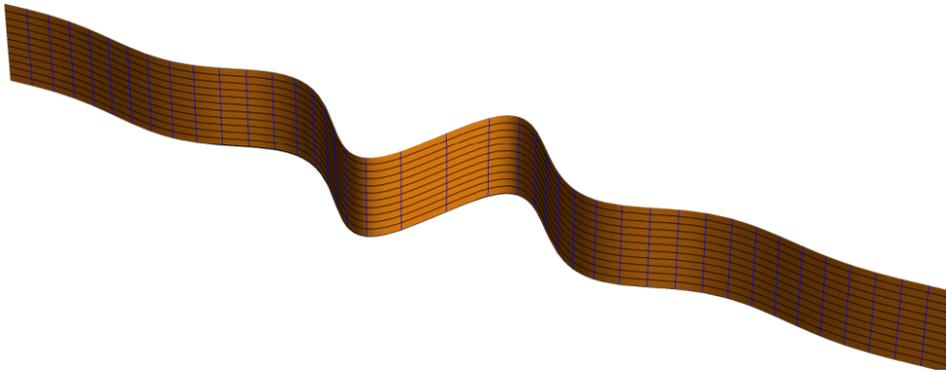
Figura 1.3: Uma faixa puramente torcida.



Fonte: Artigo [41].

Observe que a condição  $\Theta' = 0$  e  $k \cdot \Theta = 0$  não implica que as faixas  $\Omega_\varepsilon$  e  $\Lambda$  são necessariamente isométricas. Por exemplo, na situação em que  $\Gamma$  está contida em um plano  $\alpha \subset \mathbb{R}^{n+1}$  e  $N_\Theta$  é igual ao vetor normal do plano  $\alpha$ . Veja a próxima figura.

Figura 1.4: Uma faixa não curvada e não torcida.



Fonte: Artigo [41].

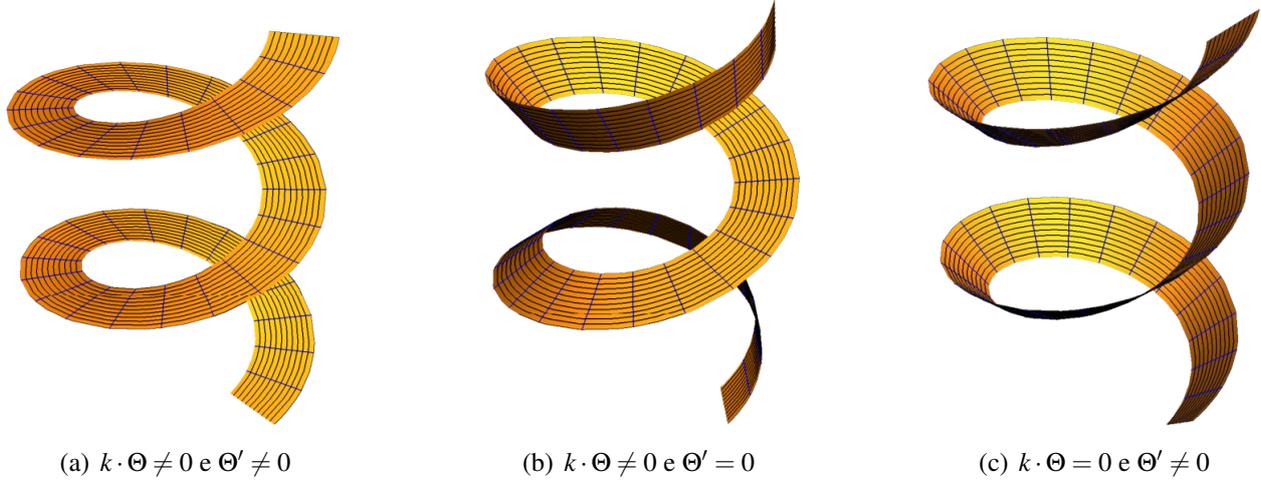
Geometricamente, interpretando  $\Gamma$  com uma curva da superfície  $\Omega_\varepsilon$ , alguns cálculos mostram que  $k \cdot \Theta$  é a *curvatura geodésica* de  $\Gamma$  e  $|\Theta'|/f_\varepsilon^4$  é *curvatura Gaussiana* de  $\Omega_\varepsilon$ , em que

$$|\Theta'| := (\Theta_1'^2 + \dots + \Theta_n'^2)^{1/2}$$

e  $f_\varepsilon$  é definido em (1.6) abaixo. Assim,  $\Omega_\varepsilon$  é uma faixa puramente torcida se, e somente se,  $\Gamma$  é uma geodésica em  $\Omega_\varepsilon$ . Ao mesmo tempo,  $\Omega_\varepsilon$  é uma faixa puramente curvada se, e somente se,  $\Omega_\varepsilon$  é uma superfície plana no sentido de que a curvatura Gaussiana é identicamente igual a zero.

A seguir apresentamos alguns exemplos de faixas não planas. Na Figura 1.5, temos faixas construídas ao longo de uma hélice.

Figura 1.5: Faixas não planas.



Fonte: Artigo [41].

## 1.2 A faixa como uma variedade Riemanniana

A faixa  $\Omega_\varepsilon$  pode ser identificada com uma variedade Riemanniana em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , sob certas condições. Nesta seção, apresentamos os detalhes desta identificação. Inicialmente, considere a aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\varepsilon : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \\ (s, t) &\longmapsto \Gamma(s) + \varepsilon t N_\Theta(s). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Note que  $\Omega_\varepsilon = \mathcal{L}_\varepsilon(\Lambda)$ . Defina a métrica  $\mathcal{G}_\varepsilon := \nabla \mathcal{L}_\varepsilon \cdot (\nabla \mathcal{L}_\varepsilon)^\perp$ . Alguns cálculos mostram que

$$\mathcal{G}_\varepsilon = \begin{pmatrix} f_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}, \quad f_\varepsilon(s, t) := \sqrt{(1 - \varepsilon t(k \cdot \Theta)(s))^2 + \varepsilon^2 t^2 |\Theta'(s)|^2}. \quad (1.6)$$

Seja  $\mathcal{J}_\varepsilon$  a matriz Jacobiana de  $\mathcal{L}_\varepsilon$ . Tem-se

$$\det \mathcal{J}_\varepsilon = |\det \mathcal{G}_\varepsilon|^{1/2} = \varepsilon f_\varepsilon \geq 0.$$

Por razões técnicas, suponha que

$$k \cdot \Theta \in L^\infty(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \varepsilon \|k \cdot \Theta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < 1. \quad (1.7)$$

Consequentemente,  $\det \mathcal{J}_\varepsilon > 0$ . Se  $\Gamma$  e  $\Theta$  são funções suaves, a aplicação  $\mathcal{L}_\varepsilon : \Lambda \rightarrow \Omega_\varepsilon$  é um difeomorfismo suave local. Assim,  $\Omega_\varepsilon$  pode ser identificada com a variedade Riemanniana  $(\Lambda, \mathcal{G}_\varepsilon)$ . No entanto, conforme mencionado na Introdução deste trabalho, as condições sobre  $\Gamma$  e  $\Theta$  são mais gerais. Tem-se o seguinte resultado

**Proposição 1.1.** *Sob as condições (1.2) e (1.7), a aplicação  $\mathcal{L}_\varepsilon|_\Lambda : \Lambda \rightarrow \Omega_\varepsilon$  é um  $C^{0,1}$ -difeomorfismo local.*

A prova deste resultado pode ser encontrada em [41]. Em particular, a Proposição 1.1 garante que  $\mathcal{L}_\varepsilon|_\Lambda : \Lambda \rightarrow \Omega_\varepsilon$  é uma  $C^{0,1}$ -imersão. Além disso, suponha  $\mathcal{L}_\varepsilon|_\Lambda : \Lambda \rightarrow \Omega_\varepsilon$  injetiva (isso é possível quando diminuimos  $\varepsilon$ ). Desta forma, a faixa  $\Omega_\varepsilon$  não tem auto-intersecção e pode ser interpretada como uma subvariedade mergulhada em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Consequentemente, a aplicação  $\mathcal{L}_\varepsilon|_\Lambda : \Lambda \rightarrow \Omega_\varepsilon$  é um difeomorfismo suave global. Portanto,  $(\Lambda, \mathcal{G}_\varepsilon)$  é uma variedade Riemanniana.

**Observação 1.2.** Na identificação da faixa como uma variedade Riemanniana (Teorema 1.1), ao contrário da curvatura geodésica  $k \cdot \Theta$ , não estabelecemos hipóteses de limitação sobre a curvatura  $\kappa$ . Em particular, a curva  $\Gamma$  pode ser uma espiral com  $\kappa(s) \rightarrow \infty$ , quando  $|s| \rightarrow \infty$ .

### 1.3 Formas quadráticas e mudança de variáveis

Dado  $\varepsilon > 0$ , considere as formas quadráticas

$$a_\varepsilon^j(\varphi) = \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \varphi|^2 dx, \quad j \in \{D, DN\}, \quad (1.8)$$

com domínios  $\text{dom } a_\varepsilon^D = H_0^1(\Omega_\varepsilon)$  e  $\text{dom } a_\varepsilon^{DN} = \{\varphi \in H^1(\Omega_\varepsilon) : \varphi = 0 \text{ em } \Gamma(\mathbb{R}) \times \{a\}\}$ , respectivamente. Em (1.8),  $\nabla$  denota o gradiente de  $\varphi$  correspondente à métrica induzida pela imersão definida em (1.5). Para cada  $j \in \{D, DN\}$ , denotamos por  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^j$  o operador autoadjunto associado à forma quadrática  $a_\varepsilon^j(\varphi)$ ;  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D$  e  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^{DN}$  são chamados de *Laplaciano de Dirichlet* e *Laplaciano de Dirichlet-Neumann* em  $\Omega_\varepsilon$ , respectivamente.

As técnicas aplicadas no desenvolvimento deste trabalho são voltadas para o estudo das formas quadráticas  $\{a_\varepsilon^j\}_{\varepsilon>0}$ ,  $j \in \{D, DN\}$ . Como a região de integração em (1.8) depende do parâmetro  $\varepsilon$ , o objetivo desta seção é realizar uma mudança de variáveis de modo que tal região não dependa deste parâmetro e também se transforme em uma região mais simples.

Considere o espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_\varepsilon := L^2(\Lambda, f_\varepsilon ds dt)$  munido pelo produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_\varepsilon}$ , o qual é dado por

$$\langle \psi, \phi \rangle_{\mathcal{H}_\varepsilon} := \int_\Lambda \psi \bar{\phi} f_\varepsilon ds dt,$$

em que  $f_\varepsilon$  está definida em (1.6). Consequentemente, a sua norma associada é

$$\|\psi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}^2 := \int_\Lambda |\psi|^2 f_\varepsilon ds dt.$$

A estratégia é usar a identificação  $\mathcal{L}_\varepsilon : \Lambda \rightarrow \Omega_\varepsilon$  para realizamos uma mudança de variáveis de modo que as formas quadráticas  $a_\varepsilon^j(\varphi)$  comecem a atuar no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_\varepsilon$  em vez de  $L^2(\Omega_\varepsilon)$ ; lembre-se que  $\mathcal{L}_\varepsilon$  está definida em (1.5).

Considere o operador unitário

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\varepsilon : L^2(\Omega_\varepsilon) &\longrightarrow L^2(\Lambda, f_\varepsilon ds dt), \\ \psi &\longmapsto \varepsilon^{1/2} \psi \circ \mathcal{L}_\varepsilon, \end{aligned}$$

e defina a forma quadrática

$$\begin{aligned} b_\varepsilon^j(\psi) &:= a_\varepsilon^j(\mathcal{U}_\varepsilon^{-1}\psi) = \int_\Lambda \langle \nabla \psi, \mathcal{G}_\varepsilon^{-1} \nabla \psi \rangle f_\varepsilon \, ds dt \\ &= \int_\Lambda \frac{|\partial_s \psi|^2}{f_\varepsilon} \, ds dt + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_\Lambda |\partial_t \psi|^2 f_\varepsilon \, ds dt, \end{aligned}$$

$\text{dom } b_\varepsilon^j := \mathcal{U}_\varepsilon(\text{dom } a_\varepsilon^j)$ ,  $j \in \{D, DN\}$ ;  $\partial_t := \partial/\partial t$  e  $\partial_s := \partial/\partial s$ . Denote por  $T_\varepsilon^j$  o operador autoadjunto associado à forma quadrática  $b_\varepsilon^j(\psi)$ . Os operadores  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^j$  e  $T_\varepsilon^j$  são unitariamente equivalentes. Em particular, eles possuem o mesmo espectro.

Em algumas situações mais à frente será conveniente realizar uma outra mudança de variável com a finalidade de trabalhar com espaço de Hilbert  $L^2(\Lambda)$  com a métrica usual ao invés de  $\mathcal{H}_\varepsilon$ . Isto é, com o espaço de Hilbert  $L^2(\Lambda)$  munido pelo produto interno

$$\langle \psi, \phi \rangle_{L^2(\Lambda)} := \int_\Lambda \psi \bar{\phi} \, ds dt.$$

No entanto, introduziremos essa mudança de variável apenas nos casos (capítulos) em que ela for necessária.

---

# Laplaciano de Dirichlet

---

Seja  $\Omega_\varepsilon$  a faixa bidimensional definida em (1.4) no Capítulo 1 tomando  $\Lambda = \mathbb{R} \times (-1, 1)$ . Sabe-se que  $(\pi/2\varepsilon)^2$  é o primeiro autovalor do operador Laplaciano de Dirichlet  $-\Delta_{(-\varepsilon, \varepsilon)}^D$  agindo em  $L^2(-\varepsilon, \varepsilon)$ . Como comentado na Introdução deste trabalho, os autores de [41] apresentaram um estudo detalhado do espectro do operador  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D$ . Em particular, sob as condições  $k \cdot \Theta, |\Theta'| \in L^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\varepsilon \|k \cdot \Theta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < 1$ , e  $(k \cdot \Theta)(s) \rightarrow 0$ ,  $|\Theta'(s)| \rightarrow 0$ , quando  $|s| \rightarrow \infty$ , eles provaram que:

- (i)  $\sigma_{ess}(-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D) = [(\pi/2\varepsilon)^2, \infty)$ ;
- (ii) se  $\Theta' = 0$  e  $k \cdot \Theta \neq 0$ , então o espectro discreto de  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D$  é não vazio;
- (iii) se  $k \cdot \Theta = 0$  e  $\Theta' \neq 0$  com  $\varepsilon \|\Theta'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \sqrt{2}$ , então o espectro discreto de  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D$  é vazio.

As condições em (i) e (iii) mostram uma situação onde o efeito de torção não gera autovalores discretos para  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D$ . Uma questão natural é saber se algum efeito de torção apropriado pode ser usado para gerar autovalores discretos para o operador. Este problema é o tema deste capítulo.

Ao longo deste capítulo, assumimos que

$$\Gamma \in C^{1,1}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^{n+1}), \quad \Theta \in C^{1,1}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n), \quad (k \cdot \Theta)(s) = 0, \quad |\Theta'(s)| = \gamma - \beta(s), \quad (2.1)$$

para todo  $s \in \mathbb{R}$ , em que  $\gamma$  é um número positivo e  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, diferenciável em quase todo ponto, com suporte compacto e  $\beta' \in L^\infty(\mathbb{R})$ . Geometricamente, as duas últimas condições em (2.1) significa que  $\Omega_\varepsilon$  é uma faixa puramente torcida; as propriedades da função  $\beta$  implicam que o efeito de torção diminui localmente. Nesta situação, encontraremos informações sobre o espectro de  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D$ . Em particular, mostraremos que as condições em (2.1) podem gerar autovalores discretos para o operador.

Este capítulo está organizado da seguinte forma. Na Seção 2.1, realizamos mais uma mudança de variável na forma quadrática associado ao operador. As Seções 2.2 e 2.3 são dedicadas ao estudo do espectro essencial e discreto de  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D$ , respectivamente.

## 2.1 Uma outra mudança de variável

Lembre-se que  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D$  é unitariamente equivalente ao operador  $T_\varepsilon^D$ , em que  $T_\varepsilon^D$  é o operador autoadjunto associado à forma quadrática

$$b_\varepsilon^D(\psi) = \int_\Lambda \frac{|\partial_s \psi|^2}{f_\varepsilon} ds dt + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_\Lambda |\partial_t \psi|^2 f_\varepsilon ds dt,$$

$\text{dom } b_\varepsilon^D := \mathcal{U}_\varepsilon(H_0^1(\Lambda)) \subset L^2(\Lambda, f_\varepsilon ds dt)$ . Os detalhes foram apresentados na Seção 1.3. Como neste capítulo assumimos que  $k \cdot \Theta = 0$ , segue que

$$f_\varepsilon(s, t) = \sqrt{1 + |\Theta'(s)|^2 \varepsilon^2 t^2}.$$

Agora, realizaremos uma outra mudança de variável de modo que a forma quadrática  $b_\varepsilon^D(\psi)$  passe a atuar no espaço de Hilbert  $L^2(\Lambda)$  com a métrica usual. Para isso, considere o operador unitário

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_\varepsilon : L^2(\Lambda) &\longrightarrow L^2(\Lambda, f_\varepsilon ds dt) \\ \psi &\longmapsto f_\varepsilon^{-1/2} \psi \end{aligned},$$

e defina

$$c_\varepsilon(\psi) := b_\varepsilon^D(\mathcal{V}_\varepsilon \psi) = \int_\Lambda \frac{1}{f_\varepsilon^2} \left| \partial_s \psi - \frac{\partial_s f_\varepsilon}{2f_\varepsilon} \psi \right|^2 ds dt + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_\Lambda |\partial_t \psi|^2 ds dt + \int_\Lambda V_\varepsilon |\psi|^2 ds dt,$$

em que

$$V_\varepsilon(s, t) := -\frac{3|\Theta'(s)|^4 \varepsilon^2 t^2}{4f_\varepsilon(s, t)^4} + \frac{|\Theta'(s)|^2}{2f_\varepsilon(s, t)^2},$$

$\text{dom } c_\varepsilon = \mathcal{V}_\varepsilon^{-1}(\mathcal{U}_\varepsilon(H_0^1(\Omega_\varepsilon)))$ . Devido às condições em (2.1), tem-se  $\text{dom } c_\varepsilon = H_0^1(\Lambda)$ . Denote por  $C_\varepsilon$  o operador autoadjunto associado à forma quadrática  $c_\varepsilon(\psi)$ . Conseqüentemente,

$$\sigma(-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D) = \sigma(T_\varepsilon^D) = \sigma(C_\varepsilon). \quad (2.2)$$

Em particular, os espectros essencial e discreto de  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D$  coincidem com os espectros essencial e discreto do operador  $C_\varepsilon$ , respectivamente.

## 2.2 Espectro Essencial

Essa seção é dedicada à análise do espectro essencial de  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D$ . A estratégia é baseada em uma decomposição por integral direta do operador. Em particular, considere o operador unidimensional

$$D_\varepsilon(0) := -\frac{\partial_t^2}{\varepsilon^2} + Y_\varepsilon^0(t), \quad \text{dom } D_\varepsilon(0) = H_0^1(-1, 1) \cap H^2(-1, 1), \quad (2.3)$$

em que

$$Y_\varepsilon^0(t) := -\frac{3\gamma^4 \varepsilon^2 t^2}{4h_\varepsilon(t)^4} + \frac{\gamma^2}{2h_\varepsilon(t)^2}, \quad h_\varepsilon(t) := \sqrt{1 + \gamma^2 \varepsilon^2 t^2}. \quad (2.4)$$

Como  $Y_\varepsilon^0 \in C^\infty[-1, 1]$ ,  $D_\varepsilon(0)$  tem resolvente compacto. Denote por  $\lambda_{\varepsilon,1}(0)$  seu primeiro autovalor e  $u_{\varepsilon,1}^0$  a autofunção normalizada correspondente;  $\lambda_{\varepsilon,1}(0)$  é simples. Escolha  $\varepsilon_0 > 0$  de tal modo que

$$Y_\varepsilon^0 > 0, \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0). \quad (2.5)$$

Assim, para cada  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ ,  $u_{\varepsilon,1}^0$  pode ser escolhido como uma função real e positiva em  $(-1, 1)$ ; veja, por exemplo, Capítulo 6 de [20] para mais detalhes. A condição em (2.5) será útil na prova da Proposição 2.4 abaixo.

Agora, temos condições para enunciar o seguinte resultado.

**Teorema 2.1.** *Sob as condições em (2.1) e (2.5), tem-se*

$$\sigma_{ess}(-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D) = [\lambda_{\varepsilon,1}(0), \infty).$$

A prova do Teorema 2.1 é dividida em duas etapas; Proposições 2.2 e 2.4 enunciadas abaixo.

Lembrando que  $Y_\varepsilon^0$  e  $h_\varepsilon$  são definidas em (2.4), considere a forma quadrática auxiliar

$$d_\varepsilon(\psi) := \int_\Lambda \frac{|\partial_s \psi|^2}{h_\varepsilon^2} ds dt + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_\Lambda |\partial_t \psi|^2 ds dt + \int_\Lambda Y_\varepsilon^0 |\psi|^2 ds dt, \quad \text{dom } d_\varepsilon := H_0^1(\Lambda);$$

observe que  $d_\varepsilon(\psi)$  corresponde ao caso particular da forma quadrática  $c_\varepsilon(\psi)$  quando  $\beta(s) = 0$ , para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Denote por  $D_\varepsilon$  o operador autoadjunto associado a  $d_\varepsilon(\psi)$ . Temos o seguinte resultado.

**Proposição 2.2.** *Sob as condições em (2.1), tem-se  $\sigma_{ess}(C_\varepsilon) = \sigma_{ess}(D_\varepsilon)$ .*

A prova deste resultado é apresentada no Apêndice B. Como consequência da Proposição 2.2, juntamente com (2.2),

$$\sigma_{ess}(-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D) = \sigma_{ess}(D_\varepsilon). \quad (2.6)$$

Assim, passaremos a estudar o espectro essencial do operador  $D_\varepsilon$ . A estratégia é baseada em uma decomposição por integral direta do operador  $D_\varepsilon$ . Nos próximos parágrafos, apresentamos mais detalhes.

Seja  $\mathcal{F}_s : L^2(\Lambda) \rightarrow L^2(\Lambda)$  a transformada de Fourier com respeito à variável  $s$ .  $\mathcal{F}_s$  é um operador unitário e, para funções em  $L^1(\Lambda)$ , sua ação é dado por

$$(\mathcal{F}_s \psi)(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ips} \psi(s, t) ds. \quad (2.7)$$

Então, o operador  $\hat{D}_\varepsilon := \mathcal{F}_s D_\varepsilon \mathcal{F}_s^{-1}$  admite a decomposição por integral direta

$$\hat{D}_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}}^\oplus D_\varepsilon(p) dp, \quad (2.8)$$

em que, para cada  $p \in \mathbb{R}$ ,  $D_\varepsilon(p)$  é o operador autoadjunto associado à forma quadrática

$$d_\varepsilon(p)(v) := \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-1}^1 |\partial_t v|^2 dt + \int_{-1}^1 Y_\varepsilon^p |v|^2 dt, \quad \text{dom } d_\varepsilon(p) = H_0^1(-1, 1),$$

em que  $Y_\varepsilon^p(t) := p^2/h_\varepsilon(t)^2 + Y_\varepsilon^0(t)$ . Mais precisamente,

$$D_\varepsilon(p) = -\frac{\partial_t^2}{\varepsilon^2} + Y_\varepsilon^p(t), \quad \text{dom } D_\varepsilon(p) = H^2(-1, 1) \cap H_0^1(-1, 1);$$

o caso  $p = 0$  corresponde ao operador definido por (2.3). Para uma melhor compreensão sobre decomposição por integral direta, o leitor pode consultar a Seção XIII.16 de [43]. Como  $Y_\varepsilon^p \in C^\infty[-1, 1]$ , cada  $D_\varepsilon(p)$  tem resolvente compacto. Denote por  $\{\lambda_{\varepsilon,n}(p)\}_{n \in \mathbb{N}}$  a sequência de autovalores de  $D_\varepsilon(p)$  e por  $\{u_{\varepsilon,n}(p)\}_{n \in \mathbb{N}}$  a sequência de autofunções normalizadas correspondentes, isto é,

$$D_\varepsilon(p)u_{\varepsilon,n}(p) = \lambda_{\varepsilon,n}(p)u_{\varepsilon,n}(p), \quad n \in \mathbb{N}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Pela decomposição em (2.8), temos

$$\sigma(D_\varepsilon) = \cup_{p \in \mathbb{R}} \sigma(D_\varepsilon(p)) = \cup_{n \in \mathbb{N}} \{\lambda_{\varepsilon,n}(p) : p \in \mathbb{R}\}. \quad (2.9)$$

Em particular, denote por  $u_{\varepsilon,1}^0 := u_{\varepsilon,1}(0)$ . O próximo resultado ajudará na prova da Proposição 2.4.

**Lema 2.3.** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_{\varepsilon,n}(\cdot)$  é uma função analítica real com respeito a  $p$  e*

$$\lim_{p \rightarrow \pm\infty} \lambda_{\varepsilon,n}(p) = \infty.$$

*Demonstração.* Para cada  $p \in \mathbb{R}$ , temos  $\text{dom } D_\varepsilon(p) = \text{dom } D_\varepsilon(0)$  e podemos escrever

$$D_\varepsilon(p) = D_\varepsilon(0) + p^2/h_\varepsilon^2.$$

Como  $h_\varepsilon \geq 1$ , conseguimos a estimativa  $\|(p^2/h_\varepsilon^2)v\| \leq p^2\|v\|$ , para todo  $v \in \text{dom } D_\varepsilon(0)$ , e para todo  $p \in \mathbb{R}$ . Então,  $p^2/h_\varepsilon^2$  é  $D_\varepsilon(0)$ -limitado com índice limite igual zero. Consequentemente,  $\{D_\varepsilon(p) : p \in \mathbb{R}\}$  é uma família analítica do tipo A; veja o Apêndice A para mais detalhes sobre essas definições. Pelo Teorema A.7 do Apêndice A,  $\lambda_{\varepsilon,n}(\cdot)$  é uma função analítica com respeito a  $p$ .

Agora, para cada  $v \in \text{dom } d_\varepsilon(p)$ , tem-se

$$\begin{aligned} d_\varepsilon(p)(v) &= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-1}^1 |\partial_t v|^2 dt + \int_{-1}^1 Y_\varepsilon^p |v|^2 dt \\ &\geq \left( \frac{p^2}{1 + \gamma^2 \varepsilon^2} - \varepsilon^2 \gamma^4 \right) \int_{-1}^1 |v|^2 dt. \end{aligned}$$

Consequentemente, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\lambda_{\varepsilon,n}(p) = d_\varepsilon(p)(u_{\varepsilon,n}(p)) \geq \frac{p^2}{1 + \gamma^2 \varepsilon^2} - \varepsilon^2 \gamma^4, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Portanto, segue o limite pontual  $\lambda_{\varepsilon,n}(p) \rightarrow \infty$ , quando  $p \rightarrow \pm\infty$ . □

Agora temos condição de determinar o espectro do operador  $D_\varepsilon$ .

**Proposição 2.4.** *Sob a condição (2.5), tem-se  $\sigma(D_\varepsilon) = [\lambda_{\varepsilon,1}(0), \infty)$ .*

*Demonstração.* Como  $\lambda_{\varepsilon,1}(p)$  é uma função analítica real com respeito a  $p$ , juntamente com (2.9), segue-se  $[\lambda_{\varepsilon,1}(0), \infty) \subset \sigma(D_\varepsilon)$ . Agora, precisamos mostrar que

$$(-\infty, \lambda_{\varepsilon,1}(0)) \cap \sigma(D_\varepsilon) = \emptyset. \quad (2.10)$$

Seja  $\psi \in C_0^\infty(\Lambda)$ . Como  $u_{\varepsilon,1}^0$  é uma função positiva, podemos escrever  $\psi(s,t) = \phi(s,t)u_{\varepsilon,1}^0(t)$ , para algum  $\phi \in C_0^\infty(\Lambda)$ . Alguns cálculos mostram que

$$\begin{aligned} d_\varepsilon(\psi) - \lambda_{\varepsilon,1}(0) \int_\Lambda |\psi|^2 ds dt &= \int_\Lambda \left( \frac{|\partial_s \phi|^2}{h_\varepsilon^2} + \frac{|\partial_t \phi|^2}{\varepsilon^2} \right) |u_{\varepsilon,1}^0|^2 ds dt + \frac{2}{\varepsilon^2} \operatorname{Re} \int_\Lambda \bar{\phi} \partial_t \phi u_{\varepsilon,1}^0 \partial_t u_{\varepsilon,1}^0 ds dt \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_\Lambda |\phi|^2 |\partial_t u_{\varepsilon,1}^0|^2 ds dt + \int_\Lambda |\phi|^2 (Y_\varepsilon^0 |u_{\varepsilon,1}^0|^2 - \lambda_{\varepsilon,1}(0) |u_{\varepsilon,1}^0|^2) ds dt. \end{aligned}$$

Fazendo uma integração por partes, encontramos

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \int_\Lambda \bar{\phi} \partial_t \phi u_{\varepsilon,1}^0 \partial_t u_{\varepsilon,1}^0 ds dt &= \int_\Lambda \partial_t (|\phi|^2) u_{\varepsilon,1}^0 \partial_t u_{\varepsilon,1}^0 ds dt \\ &= - \int_\Lambda |\phi|^2 |\partial_t u_{\varepsilon,1}^0|^2 ds dt - \int_\Lambda |\phi|^2 u_{\varepsilon,1}^0 \partial_t^2 u_{\varepsilon,1}^0 ds dt. \end{aligned}$$

Além disso, como  $D_\varepsilon(0)u_{\varepsilon,1}^0 = \lambda_{\varepsilon,1}(0)u_{\varepsilon,1}^0$ , tem-se

$$d_\varepsilon(\psi) - \lambda_{\varepsilon,1}(0) \int_\Lambda |\psi|^2 ds dt = \int_\Lambda \left( \frac{|\partial_s \phi|^2}{h_\varepsilon^2} + \frac{|\partial_t \phi|^2}{\varepsilon^2} \right) |u_{\varepsilon,1}^0|^2 ds dt \geq 0.$$

Assim, conseguimos provar (2.10).  $\square$

Finalmente, podemos determinar o espectro essencial de  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D$ .

**Prova do Teorema 2.1.** O resultado segue de uma aplicação direta de (2.6) e da Proposição 2.4.  $\square$

**Observação 2.5.** Para a sequência  $\{\lambda_{\varepsilon,1}(0)\}_\varepsilon$ , obtemos a estimativa: existe uma constante  $K_1 > 0$  tal que

$$\int_{-1}^1 |\partial_t v|^2 dt \leq \varepsilon^2 d_\varepsilon(0)(v) = \int_{-1}^1 (|\partial_t v|^2 + \varepsilon^2 Y_\varepsilon^0 |v|^2) dt \leq \int_{-1}^1 |\partial_t v|^2 dt + K_1 \varepsilon^2 \int_{-1}^1 |v|^2 dt,$$

para todo  $v \in H_0^1(-1, 1)$  e para todo  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno. Consequentemente,

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \leq \varepsilon^2 \lambda_{\varepsilon,1}(0) \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + O(\varepsilon^2);$$

segue que  $\varepsilon^2 \lambda_{\varepsilon,1}(0) \rightarrow (\pi/2)^2$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

## 2.3 Espectro Discreto

Neste seção fornecemos algumas condições suficientes para a existência de autovalores (discretos) para  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D$  abaixo de  $\lambda_{\varepsilon,1}(0)$ . Por (2.2), sabemos que  $\sigma(-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D) = \sigma(C_\varepsilon)$ . Assim, com base em [29], a estratégia será encontrar uma função  $\psi \in \operatorname{dom} c_\varepsilon$  tal que

$$\frac{c_\varepsilon(\psi) - \lambda_{\varepsilon,1}(0) \|\psi\|_{L^2(\Lambda)}^2}{\|\psi\|_{L^2(\Lambda)}^2} < 0.$$

Ao longo desta seção, assumimos que as condições em (2.1) são satisfeitas. Em particular, como  $\beta$  é uma função com suporte compacto, podemos escolher  $s_0 > 0$  de modo que  $\text{supp } \beta \subset [-s_0, s_0]$ .

**Teorema 2.6.** *Sob as condições em (2.1). Se  $\int_{-s_0}^{s_0} (|\Theta'(s)|^2 - \gamma^2) ds \leq 0$ , então existe  $\varepsilon_1 > 0$  tal que, para cada  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ ,*

$$\inf \sigma(-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D) < \lambda_{\varepsilon,1}(0).$$

*Demonstração. Parte I:* Suponha  $\int_{-s_0}^{s_0} (|\Theta'(s)|^2 - \gamma^2) ds < 0$ . Escolha  $\delta > 0$  um número real. Defina  $\psi_\delta(s, t) := \phi(s) u_{\varepsilon,1}^0(t)$ , em que  $u_{\varepsilon,1}^0$  é definido na Seção 2.2 e

$$\phi(s) := \begin{cases} e^{\delta(s+s_0)}, & s \leq -s_0, \\ 1, & -s_0 \leq s \leq s_0, \\ e^{-\delta(s-s_0)}, & s \geq s_0. \end{cases}$$

Note que  $\psi_\delta \in \text{dom } c_\varepsilon$ . Alguns cálculos mostram que

$$\begin{aligned} c_\varepsilon(\psi_\delta) - \lambda_{\varepsilon,1}(0) \int_\Lambda |\psi_\delta|^2 ds dt &= \int_\Lambda \frac{|\partial_s \psi_\delta|^2}{f_\varepsilon^2} ds dt + \frac{1}{4} \int_\Lambda \frac{(\partial_s f_\varepsilon)^2}{f_\varepsilon^4} |\psi_\delta|^2 ds dt - \text{Re} \int_\Lambda \frac{\partial_s f_\varepsilon}{f_\varepsilon^3} \overline{\psi_\delta} \partial_s \psi_\delta ds dt \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_\Lambda |\partial_t \psi_\delta|^2 ds dt - \lambda_{\varepsilon,1}(0) \int_\Lambda |\psi_\delta|^2 ds dt + \int_\Lambda V_\varepsilon |\psi_\delta|^2 ds dt \\ &= \int_\Lambda \frac{|\partial_s \psi_\delta|^2}{f_\varepsilon^2} ds dt + \frac{1}{4} \int_\Lambda \frac{(\partial_s f_\varepsilon)^2}{f_\varepsilon^4} |\psi_\delta|^2 ds dt - \text{Re} \int_\Lambda \frac{\partial_s f_\varepsilon}{f_\varepsilon^3} \overline{\psi_\delta} \partial_s \psi_\delta ds dt \\ &\quad + \int_\Lambda (V_\varepsilon - Y_\varepsilon^0) |\psi_\delta|^2 ds dt. \end{aligned}$$

Note que  $f_\varepsilon \rightarrow 1$ ,  $\partial_s f_\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $(V_\varepsilon - Y_\varepsilon^0) \rightarrow (|\Theta'|^2 - \gamma^2)/2$ , uniformemente, quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Então,

$$c_\varepsilon(\psi_\delta) - \lambda_{\varepsilon,1}(0) \|\psi_\delta\|_{L^2(\Lambda)}^2 \longrightarrow \delta + \frac{1}{2} \int_{-s_0}^{s_0} (|\Theta'(s)|^2 - \gamma^2) ds,$$

quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Como  $\|\psi_\delta\|_{L^2(\Lambda)}^2 = 2s_0 + \delta^{-1}$ , tem-se

$$\frac{c_\varepsilon(\psi_\delta) - \lambda_{\varepsilon,1}(0) \|\psi_\delta\|_{L^2(\Lambda)}^2}{\|\psi_\delta\|_{L^2(\Lambda)}^2} \longrightarrow O(\delta^2) + \frac{\delta}{2} \int_{-s_0}^{s_0} (|\Theta'(s)|^2 - \gamma^2) ds, \quad (2.11)$$

quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Como  $\int_{-s_0}^{s_0} (|\Theta'(s)|^2 - \gamma^2) ds < 0$ , podemos escolher  $\delta$  suficientemente pequeno de tal modo que o limite em (2.11) é negativo. Consequentemente, existe  $\varepsilon_2 > 0$  tal que

$$\frac{c_\varepsilon(\psi_\delta) - \lambda_{\varepsilon,1}(0) \|\psi_\delta\|_{L^2(\Lambda)}^2}{\|\psi_\delta\|_{L^2(\Lambda)}^2} < 0,$$

para todo  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ .

**Parte II:** Suponha  $\int_{-s_0}^{s_0} (|\Theta'(s)|^2 - \gamma^2) ds = 0$ . Dado  $\delta > 0$  e  $\eta > 0$ , defina  $\Psi_{\delta,\eta}(s,t) := \phi_\eta(s) u_{\varepsilon,1}^0(t)$ , em que

$$\phi_\eta(s) := \begin{cases} e^{\delta(s+s_0)}, & s \leq -s_0, \\ 1 + \eta(\gamma - |\Theta'(s)|), & -s_0 \leq s \leq s_0, \\ e^{-\delta(s-s_0)}, & s \geq s_0. \end{cases}$$

Note que  $\Psi_{\delta,\eta} \in \text{dom } c_\varepsilon$ . Similarmente como na prova do Teorema 2.6, podemos mostrar que

$$c_\varepsilon(\Psi_{\delta,\eta}) - \lambda_{\varepsilon,1}(0) \|\Psi_{\delta,\eta}\|_{L^2(\Lambda)}^2 \longrightarrow \delta + O(\eta^2) - \eta \int_{-s_0}^{s_0} (|\Theta'(s)| - \gamma)^2 (|\Theta'(s)| + \gamma) ds,$$

quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Como  $\|\Psi_{\delta,\eta}\|_{L^2(\Lambda)}^2 = 2s_0 + \delta^{-1} + O(\eta^2)$ , tem-se

$$\frac{c_\varepsilon(\Psi_{\delta,\eta}) - \lambda_{\varepsilon,1}(0) \|\Psi_{\delta,\eta}\|_{L^2(\Lambda)}^2}{\|\Psi_{\delta,\eta}\|_{L^2(\Lambda)}^2} \longrightarrow O(\delta^2) + \delta O(\eta^2) - \delta \eta \int_{-s_0}^{s_0} (|\Theta'(s)| - \gamma)^2 (|\Theta'(s)| + \gamma) ds, \quad (2.12)$$

quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Tomando  $\eta = \sqrt{\delta}$ , novamente podemos escolher  $\delta$  suficientemente pequeno de modo que o limite em (2.12) seja negativo. Então, existe  $\varepsilon_3 > 0$  tal que

$$\frac{c_\varepsilon(\Psi_{\delta,\eta}) - \lambda_{\varepsilon,1}(0) \|\Psi_{\delta,\eta}\|_{L^2(\Lambda)}^2}{\|\Psi_{\delta,\eta}\|_{L^2(\Lambda)}^2} < 0,$$

para todo  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3)$ .

A prova deste resultado segue considerando  $\varepsilon_1 := \min\{\varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ . □

Sob as condições dos Teoremas 2.1 e 2.6 tem-se que o espectro discreto de  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D$  é não vazio, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno. Em particular, o Teorema 2.6 mostra como um efeito de torção apropriado pode criar autovalores discretos para  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D$ .



---

# Laplaciano de Dirichlet em faixas finas

---

Dando continuidade aos estudos sobre operador Laplaciano de Dirichlet em faixas bidimensionais torcidas, neste capítulo discutimos uma situação diferente onde encontramos um comportamento assintótico para os autovalores do operador. Em [37, 45], os autores estudaram o Laplaciano de Dirichlet restrito em uma faixa (reta) bidimensional torcida em  $\mathbb{R}^3$ . Enfatizamos o artigo [37], onde os autores consideraram a região

$$\mathcal{S} := \{(s, t \cos \theta(s), t \sin \theta(s)) : (s, t) \in \mathbb{R} \times (a_1, a_2)\}, \quad (3.1)$$

em que  $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua e (localmente) Lipschitz, e  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ . O Teorema 2 de [37] mostra que a condição

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} |\theta'(s)| = \infty, \quad a_1 a_2 \leq 0, \quad (3.2)$$

garante que o espectro discreto do Laplaciano de Dirichlet em  $\mathcal{S}$  é não vazio. Como observado pelos autores, um fato geométrico interessante é que as condições em (3.2) mostram que a faixa bidimensional  $\mathcal{S}$  no infinito assemelha-se a um tubo tridimensional de seção transversal  $\{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| < r\}$ , em que  $r := \max\{|a_1|, |a_2|\}$ . Inspirado em [37], a autora de [45] considera uma faixa torcida semelhante a (3.1). No entanto, nesse trabalho, o efeito de torção “cresce” no infinito enquanto a largura da faixa tende a zero. Então, desde que a faixa seja suficiente fina, foi mostrado que o espectro discreto do Laplaciano de Dirichlet é não vazio e foi encontrado um comportamento assintótico para os autovalores. Neste capítulo, apresentamos uma adaptação dos resultados de [45] para o modelo de faixas tratado neste trabalho.

Na Seção 3.1, introduzimos a faixa em estudo com as adaptações necessárias. Em seguida, na Seção 3.2, tem-se alguns exemplos e observações adicionais para esse modelo de faixa. Na Seção 3.3, apresentamos o operador Laplaciano de Dirichlet e sua forma quadrática associada. Por fim, na Seção 3.4, encontramos um comportamento assintótico para os autovalores do operador.

### 3.1 Geometria da faixa

Nesta seção, apresentamos a faixa bidimensional torcida adaptada à nova situação. Para isso, assumamos que  $\Theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função  $C^{1,1}$ , que satisfaz  $\Theta_1^2 + \dots + \Theta_n^2 = 1$ , e

$$(I) \lim_{|s| \rightarrow \infty} |\Theta'(s)| = \infty;$$

(II)  $|\Theta'|$  é decrescente em  $(-\infty, 0)$  e crescente em  $(0, \infty)$ .

Fixe um número  $0 < a < 1/3$ . Para cada  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, seja  $v_1(\varepsilon) < 0$  e  $v_2(\varepsilon) > 0$  tais que

$$|\Theta'(v_i(\varepsilon))| = \frac{1}{\varepsilon^a}, \quad i \in \{1, 2\}. \quad (3.3)$$

Defina  $I_\varepsilon := (v_1(\varepsilon), v_2(\varepsilon))$  e seja  $\Theta_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função de classe  $C^{1,1}$  tal que

(III)  $\Theta_\varepsilon(s) = \Theta(s)$ , para todo  $s \in I_\varepsilon$ ;

(IV)  $|\Theta'_\varepsilon(s)| \leq |\Theta'(s)|$ , para todo  $s \in \mathbb{R}$ ;

(V)  $|\Theta'_\varepsilon(s)|$  é não crescente em  $(-\infty, 0)$  e não decrescente em  $(0, +\infty)$ .

Agora, suponhamos que a sequência  $\{\Theta_\varepsilon\}_\varepsilon$  satisfaz

(VI) existe  $K_2 > 0$  tal que

$$|\Theta'_\varepsilon(s)| \leq \frac{K_2}{\varepsilon^a}, \quad |\Theta''_\varepsilon(s)| \leq \frac{K_2}{\varepsilon^b}, \quad |\Theta'''_\varepsilon(s)| \leq \frac{K_2}{\varepsilon^c}, \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

para todo  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, em que  $b, c$  são números reais de modo que  $b < 1$ ,  $a + c < 2$ ;

(VII)  $|\Theta'_\varepsilon(s)| \leq |\Theta'_{\varepsilon'}(s)|$ , para todo  $s \in \mathbb{R}$ , se  $\varepsilon > \varepsilon'$ .

Finalmente, usando a notação  $\Theta_\varepsilon := (\Theta_1^\varepsilon, \dots, \Theta_n^\varepsilon)$ , suponhamos que

(VIII)  $(\Theta_1^\varepsilon)^2 + \dots + (\Theta_n^\varepsilon)^2 = 1$ .

Para cada  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, seja  $\Gamma_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma curva de classe  $C^{1,1}$  cuja curvatura  $k_\varepsilon$  satisfaz

(IX)  $\text{supp } k_\varepsilon \subset I_\varepsilon$  e  $(k_\varepsilon \cdot \Theta_\varepsilon)(s) = 0$ , para todo  $s \in \mathbb{R}$ .

Os campos de vetores normais de  $\Gamma_\varepsilon$  são denotados por  $N_1^\varepsilon, \dots, N_n^\varepsilon$ , e  $N_{\Theta_\varepsilon}^\varepsilon := \Theta_1^\varepsilon N_1^\varepsilon + \dots + \Theta_n^\varepsilon N_n^\varepsilon$ .

Considere a faixa

$$\tilde{\Omega}_\varepsilon := \{\Gamma_\varepsilon(s) + \varepsilon t N_{\Theta_\varepsilon}^\varepsilon(s) : (s, t) \in \mathbb{R} \times (-1, 1)\}.$$

Geometricamente,  $\tilde{\Omega}_\varepsilon$  é uma faixa localmente torcida cuja o efeito de torção “cresce” no infinito enquanto sua largura tende a zero. Na próxima seção estão algumas observações e exemplos deste modelo.

## 3.2 Exemplos e observações

**Exemplo 3.1.** Vejamos um exemplo simples de uma família de curvas  $\{\Gamma_\varepsilon\}_\varepsilon$  que satisfaz a condição (IX):  $\text{supp } k_\varepsilon \subset I_\varepsilon$  e  $(k_\varepsilon \cdot \Theta_\varepsilon)(s) = 0$ , para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Sejam  $\Theta$  uma função que satisfaça (I) e  $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma curva de classe  $C^{2,1}$  cuja curvatura  $\kappa$  tem suporte compacto e  $(k \cdot \Theta)(s) = 0$ , para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Defina  $\Gamma_\varepsilon := \Gamma$ , para todo  $\varepsilon > 0$ . Então, a condição (IX) é satisfeita para todo  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno.

**Observação 3.2.** No caso  $n = 2$ , as condições  $\Theta_1^2 + \Theta_2^2 = 1$  e (I) implicam que  $\Theta$  pode ser escrito como

$$\Theta = (\cos(\psi), \text{sen}(\psi)),$$

para alguma função  $\psi \in C^{1,1}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  tal que  $|\psi'(s)| \rightarrow \infty$ , quando  $|s| \rightarrow \infty$ . No caso  $n = 3$ , devido à condição  $\Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \Theta_3^2 = 1$ ,  $\Theta$  pode ser escrito como

$$\Theta = (\cos(\phi) \cos(\psi), \text{sen}(\phi) \cos(\psi), \text{sen}(\psi)),$$

para funções  $\phi, \psi \in C^{1,1}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ . Alguns cálculos mostram que

$$|\Theta'| = \sqrt{(\phi')^2 \cos^2(\psi) + (\psi')^2}.$$

Assim, a condição (I) é satisfeita, por exemplo,

(i) se  $|\psi'(s)| \rightarrow \infty$ , quando  $|s| \rightarrow \infty$ ; ou

(ii) se  $\psi(s) \in (c_1, c_2] \subset (0, \pi/2)$ , para todo  $s \in \mathbb{R}$ , e  $|\phi'(s)| \rightarrow \infty$ , quando  $|s| \rightarrow \infty$ .

**Exemplo 3.3.** Considere  $\Theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $\Theta(s) = (\cos(s^2), \text{sen}(s^2))$ . Então,  $|\Theta'(s)| = 2|s|$ ,  $s \in \mathbb{R}$ ;  $\Theta$  satisfaz (I)-(II). Fixe um número  $0 < a < 1/3$ . Para cada  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, defina as funções  $\alpha_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\alpha_\varepsilon(s) := \begin{cases} (-2\varepsilon^a s - 1)/\varepsilon^{2a}, & s \leq -1/\varepsilon^a, \\ s^2, & s \in (-1/\varepsilon^a, 1/\varepsilon^a), \\ (2\varepsilon^a s - 1)/\varepsilon^{2a}, & s \geq 1/\varepsilon^a, \end{cases}$$

e

$$\Theta_\varepsilon(s) := (\cos(\alpha_\varepsilon(s)), \text{sen}(\alpha_\varepsilon(s))), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Tomando  $b = 2a$  e  $c = 3a$ , as condições em (VI) são satisfeitas. De fato, a sequência  $\{\Theta_\varepsilon\}_\varepsilon$  satisfaz as condições (III)-(VIII).

**Exemplo 3.4.** Considere a função  $\Theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$\Theta(s) = \left( \cos(s^2) \cos\left(\frac{1}{1+s^2}\right), \text{sen}(s^2) \cos\left(\frac{1}{1+s^2}\right), \text{sen}\left(\frac{1}{1+s^2}\right) \right).$$

Note que  $\Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \Theta_3^2 = 1$  e

$$|\Theta'(s)| = \sqrt{4s^2 \cos^2\left(\frac{1}{1+s^2}\right) + \frac{4s^2}{(1+s^2)^4}}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Além disso,  $\Theta$  satisfaz (I)-(II). Fixe um número  $0 < a < 1/3$ . Para cada  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, tome  $v(\varepsilon) > 0$  tal que  $|\Theta'(\pm v(\varepsilon))| = 1/\varepsilon^a$ ; então, existe  $K_3 > 0$  tal que  $|v(\varepsilon)| \leq K_3/\varepsilon^a$ , para todo  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno. Seja  $\alpha_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida por

$$\alpha_\varepsilon(s) := \begin{cases} -2v(\varepsilon)s - v(\varepsilon)^2, & s \leq -v(\varepsilon), \\ s^2, & s \in (-v(\varepsilon), v(\varepsilon)), \\ 2v(\varepsilon)s - v(\varepsilon)^2, & s \geq v(\varepsilon); \end{cases}$$

note que  $\alpha_\varepsilon \in C^{1,1}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ . Agora, defina

$$\Theta_\varepsilon(s) := \left( \cos(\alpha_\varepsilon(s)) \cos\left(\frac{1}{1+s^2}\right), \sin(\alpha_\varepsilon(s)) \cos\left(\frac{1}{1+s^2}\right), \sin\left(\frac{1}{1+s^2}\right) \right), \quad s \in \mathbb{R}.$$

A sequência  $\{\Theta_\varepsilon\}_\varepsilon$  satisfaz as condições (III)-(VII), em que  $b = 2a$  e  $c = 3a$ .

### 3.3 Formas quadráticas

Seja  $-\Delta_{\tilde{\Omega}_\varepsilon}^D$  o operador Laplaciano de Dirichlet em  $\tilde{\Omega}_\varepsilon$ , ou seja, o operador autoadjunto associado à forma quadrática

$$\tilde{a}_\varepsilon^D(\varphi) = \int_{\tilde{\Omega}_\varepsilon} |\nabla \varphi|^2 dx, \quad \text{dom } \tilde{a}_\varepsilon^D = H_0^1(\tilde{\Omega}_\varepsilon). \quad (3.4)$$

Defina a função

$$\tilde{f}_\varepsilon(s, t) := \sqrt{1 + |\Theta'_\varepsilon(s)|^2 \varepsilon^2 t^2},$$

e considere o espaço de Hilbert  $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon := L^2(\Lambda, \tilde{f}_\varepsilon ds dt)$  munido pelo produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon}$ , o qual é dado por

$$\langle \psi, \phi \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon} := \int_\Lambda \psi \bar{\phi} \tilde{f}_\varepsilon ds dt,$$

A norma nesse espaço é dada por

$$\|\psi\|_{\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon}^2 := \int_\Lambda |\psi|^2 \tilde{f}_\varepsilon ds dt.$$

Fazendo uma mudança de variável semelhante à realizada na Seção 1.3,  $\tilde{a}_\varepsilon^D(\varphi)$  torna-se

$$\tilde{b}_\varepsilon^D(\psi) := \int_\Lambda \frac{|\partial_s \psi|^2}{\tilde{f}_\varepsilon} ds dt + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_\Lambda |\partial_t \psi|^2 \tilde{f}_\varepsilon ds dt,$$

dom  $\tilde{b}_\varepsilon^D = H_0^1(\Lambda) \subset \tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$ .

### 3.4 Comportamento assintótico dos autovalores

Essa seção é dedicada a encontrar um comportamento assintótico para os autovalores de  $-\Delta_{\tilde{\Omega}_\varepsilon}^D$ , quando  $\varepsilon$  tende a zero. Além disso, obtemos algumas informações sobre o número de autovalores discretos do operador. Ao longo desta seção, assumimos que  $\varepsilon$  é sempre suficientemente pequeno.

**Observação 3.5.** Seja  $T$  um operador autoadjunto e limitado inferiormente. Denote por  $\{\lambda_j(T)\}_{j \in \mathbb{N}}$  a sequência não decrescente de números correspondente ao problema espectral de  $T$  de acordo com o Princípio do Minimax; veja o Teorema A.2 do Apêndice A.

Seja  $\Pi(\varepsilon)$  o ínfimo do espectro essencial de  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D$ . Denote por  $N(\varepsilon) \leq \infty$  o número de autovalores  $\lambda_j(-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D)$  de  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D$  abaixo de  $\Pi(\varepsilon)$ . Seja  $-\Delta_{\mathbb{R}}$  o Laplaciano unidimensional e considere o operador autoadjunto  $-\Delta_{\mathbb{R}} + (|\Theta'(s)|^2/2)\mathbf{1}$  atuando em  $L^2(\mathbb{R})$ ;  $\mathbf{1}$  denota o operador identidade em  $L^2(\mathbb{R})$ . Devido à condição (I), este operador tem espectro puramente discreto; veja, por exemplo, Teorema 11.5.6 de [16]. Nesta seção, provaremos o seguinte resultado.

**Teorema 3.6.** *Sob as condições (I)-(IX). Para  $\varepsilon > 0$  pequeno suficientemente, o espectro discreto  $\sigma_{dis}(-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D)$  é não vazio e  $N(\varepsilon) \rightarrow \infty$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Ainda mais, para cada  $j \in \mathbb{N}$ ,*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \lambda_j(-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D) - \left( \frac{\pi}{2\varepsilon} \right)^2 \right] = \lambda_j \left( -\Delta_{\mathbb{R}} + \frac{|\Theta'(s)|^2}{2} \mathbf{1} \right).$$

Estimar o número de autovalores discretos do operador Laplaciano de Dirichlet em faixas ilimitadas também é um problema interessante [12, 13, 14, 45]. No caso de faixas curvadas em  $\mathbb{R}^2$ , em [18], os autores mostraram que este número é finito e limitado por uma constante que não depende da largura da faixa. Agora, considere a faixa “quebrada” definida por  $\{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : s \tan \theta < |t| < (s + \pi/\sin \theta) \tan \theta\}$ ,  $\theta \in (0, \pi/2)$ . Em [12], os autores garantiram a existência de autovalores discretos para o operador Laplaciano de Dirichlet nesta região. Eles provaram que há um número finito deles e este número tende ao infinito quando  $\theta \rightarrow 0$ .

Pelo Teorema 3.6, o número de autovalores discretos de  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D$  cresce quando a largura da faixa tende a zero. Em [45], um resultado semelhante ao Teorema 3.6 foi obtido como consequência de uma convergência no sentido da norma dos resolventes dos operadores associados ao problema. Neste trabalho, apresentamos uma prova mais simples onde a estratégia é baseada em encontrar limitantes superior e inferior para os autovalores  $\lambda_j(-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D)$ . Em particular, a análise será baseada em encontrar estimativas para  $\tilde{b}_\varepsilon^D(\varphi)$ .

### 3.4.1 Limitação superior

Seja  $-\Delta_{(-1,1)}^D$  o operador Laplaciano de Dirichlet atuando em  $L^2(-1, 1)$ . Denote por  $\lambda_1 = (\pi/2\varepsilon)^2$  seu primeiro autovalor e  $\chi_1(t) := \cos(\pi t/2)$  a autofunção normalizada correspondente. Considere o subespaço

$$\mathcal{A}_\varepsilon := \{\varphi_w := w(s)\chi_1(t)(\tilde{f}_\varepsilon(s, t))^{-1/2} : w \in H^1(\mathbb{R})\}$$

do espaço de Hilbert  $\widetilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$ . A identificação  $w \mapsto \varphi_w$ ,  $w \in H^1(\mathbb{R})$ , motiva a definição da forma quadrática unidimensional

$$m_\varepsilon(w) := \tilde{b}_\varepsilon^D(\varphi_w) - (\pi/2\varepsilon)^2 \|\varphi_w\|_{\widetilde{\mathcal{H}}_\varepsilon}^2,$$

dom  $m_\varepsilon := H^1(\mathbb{R})$ . Denote por  $M_\varepsilon$  o operador autoadjunto associado a  $m_\varepsilon(w)$ . Em particular, para cada  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$\lambda_j(-\Delta_{\tilde{\Omega}_\varepsilon}^D) - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \leq \lambda_j(M_\varepsilon). \quad (3.5)$$

Vamos obter um limitante superior para o autovalor  $\lambda_j(M_\varepsilon)$ . Alguns cálculos mostram que

$$m_\varepsilon(w) = \int_\Lambda \frac{|w'\chi_1|^2}{\tilde{f}_\varepsilon^2} dsdt + \int_\Lambda W_\varepsilon |w\chi_1|^2 dsdt,$$

em que

$$W_\varepsilon(s, t) := -\frac{7|(\Theta'_\varepsilon \cdot \Theta''_\varepsilon)(s)|^2 \varepsilon^4 t^4}{4\tilde{f}_\varepsilon(s, t)^6} + \frac{(2|\Theta''_\varepsilon(s)|^2 + 2(\Theta'_\varepsilon \cdot \Theta'''_\varepsilon)(s) - 3|\Theta'_\varepsilon(s)|^4) \varepsilon^2 t^2}{4\tilde{f}_\varepsilon(s, t)^4} + \frac{|\Theta'_\varepsilon(s)|^2}{2\tilde{f}_\varepsilon(s, t)^2}.$$

Pela condição (VI), conseguimos as estimativas

$$\|(1/\tilde{f}_\varepsilon^2) - 1\|_{L^\infty(\Lambda)} \leq \varepsilon^{2-2a}, \quad \|W_\varepsilon - |\Theta'_\varepsilon|^2/2\|_{L^\infty(\Lambda)} \leq K_4(\varepsilon^{4-2(a+b)} + \varepsilon^{2-2b} + \varepsilon^{2-(a+c)} + \varepsilon^{2-4a}),$$

para algum  $K_4 > 0$ . Essas estimativas implica que

$$m_\varepsilon(w) \leq \int_{\mathbb{R}} \left( |w'|^2 + \frac{|\Theta'_\varepsilon(s)|^2}{2} |w|^2 \right) ds + O(\varepsilon^d) \int_{\mathbb{R}} |w|^2 ds,$$

para todo  $w \in H^1(\mathbb{R})$ , em que  $d = \min\{4 - 2(a+b), 2 - 2b, 2 - (a+c), 2 - 4a\}$ . Consequentemente, para cada  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$\lambda_j(M_\varepsilon) \leq \lambda_j \left( -\Delta_{\mathbb{R}} + \frac{|\Theta'_\varepsilon(s)|^2}{2} \mathbf{1} \right) + O(\varepsilon^d). \quad (3.6)$$

Combinando as estimativas (3.5) e (3.6), tem-se

$$\lambda_j(-\Delta_{\tilde{\Omega}_\varepsilon}^D) - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \leq \lambda_j \left( -\Delta_{\mathbb{R}} + \frac{|\Theta'_\varepsilon(s)|^2}{2} \mathbf{1} \right) + O(\varepsilon^d), \quad (3.7)$$

para todo  $j \in \mathbb{N}$ , para todo  $\varepsilon$  suficientemente pequeno.

### 3.4.2 Limitação inferior

Para cada  $\varepsilon \geq 0$  suficientemente pequeno, considere o operador autoadjunto unidimensional

$$(S_\varepsilon v)(t) := -v''(t) - \frac{\varepsilon t}{1 + \varepsilon t^2} v'(t), \quad \text{dom } S_\varepsilon = H_0^1(-1, 1),$$

agindo no espaço de Hilbert  $L^2((-1, 1), \sqrt{1 + \varepsilon t^2} dt)$ . O caso particular  $\varepsilon = 0$  corresponde ao operador Laplaciano de Dirichlet  $-\Delta_{(-1,1)}^D$  em  $L^2(-1, 1)$ . Denote por  $\Sigma(\varepsilon)$  o primeiro autovalor de  $S_\varepsilon$ . Pela teoria analítica da perturbação, podemos escrever

$$\Sigma(\varepsilon) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \delta(\varepsilon)\varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

em que

$$\delta(\varepsilon) := - \int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{1 + \varepsilon t^2}} \chi_1'(t) \chi_1(t) dt;$$

veja [30] para mais detalhes. Consequentemente, para cada  $\psi \in H_0^1(\Lambda)$ , temos a estimativa

$$\tilde{b}_\varepsilon^D(\psi) \geq \int_\Lambda \left( \frac{|\partial_s \psi|^2}{\tilde{f}_\varepsilon} + \frac{\Sigma(\varepsilon^2 |\Theta'_\varepsilon(s)|^2)}{\varepsilon^2} \tilde{f}_\varepsilon |\psi|^2 \right) ds dt.$$

Mais precisamente,

$$\begin{aligned} \tilde{b}_\varepsilon^D(\psi) - \left( \frac{\pi}{2\varepsilon} \right)^2 \|\psi\|_{\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon}^2 &\geq \int_\Lambda \left( \frac{|\partial_s \psi|^2}{\tilde{f}_\varepsilon} + |\Theta'_\varepsilon(s)|^2 \delta(\varepsilon^2 |\Theta'_\varepsilon(s)|^2) \tilde{f}_\varepsilon |\psi|^2 \right) ds dt \\ &\quad + O(\varepsilon^{2-4a}) \|\psi\|_{\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon}^2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Agora, define a forma quadrática

$$n_\varepsilon(\psi) := \int_\Lambda \left( \frac{|\partial_s \psi|^2}{\tilde{f}_\varepsilon} + |\Theta'_\varepsilon(s)|^2 \delta(\varepsilon^2 |\Theta'_\varepsilon(s)|^2) \tilde{f}_\varepsilon |\psi|^2 \right) ds dt,$$

dom  $n_\varepsilon = H_0^1(\Lambda)$ . Denote por  $N_\varepsilon$  o operador autoadjunto associado a  $n_\varepsilon(\psi)$ . Para cada  $j \in \mathbb{N}$ , a desigualdade em (3.8) implica que

$$\lambda_j(N_\varepsilon) + O(\varepsilon^{2-4a}) \leq \lambda_j(-\Delta_{\tilde{\Omega}_\varepsilon}^D) - \left( \frac{\pi}{2\varepsilon} \right)^2. \quad (3.9)$$

O próximo passo é encontrar um limitante inferior para o autovalor  $\lambda_j(N_\varepsilon)$ .

**Lema 3.7.** *Existe um número  $K_5 > 0$  tal que*

$$\left\| |\Theta'_\varepsilon(s)|^2 \delta(\varepsilon^2 |\Theta'_\varepsilon(s)|^2) \tilde{f}_\varepsilon - \frac{|\Theta'_\varepsilon(s)|^2}{2} \right\|_{L^\infty(\Lambda)} \leq K_5 \varepsilon^{1-3a},$$

para todo  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno.

*Demonstração.* Inicialmente, observe que

$$\left| |\Theta'_\varepsilon(s)|^2 \delta(\varepsilon^2 |\Theta'_\varepsilon(s)|^2) \tilde{f}_\varepsilon - \frac{|\Theta'_\varepsilon(s)|^2}{2} \right| \leq |\Theta'_\varepsilon(s)|^2 \left( \left| \delta(\varepsilon^2 |\Theta'_\varepsilon(s)|^2) - \frac{1}{2} \right| |\tilde{f}_\varepsilon| + \frac{1}{2} |\tilde{f}_\varepsilon - 1| \right),$$

para todo  $(s, t) \in \Lambda$ . Alguns cálculos mostram que

$$\delta(\varepsilon^2 |\Theta'_\varepsilon(s)|^2) - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{\tilde{f}_\varepsilon} - 1 \right) t \operatorname{sen} \left( \frac{\pi t}{2} \right) \cos \left( \frac{\pi t}{2} \right) dt.$$

Como  $\|(1/\tilde{f}_\varepsilon) - 1\|_{L^\infty(\Lambda)} \leq \varepsilon^{1-a}$ , temos a estimativa

$$\left\| \delta(\varepsilon^2 |\Theta'_\varepsilon(s)|^2) - \frac{1}{2} \right\|_{L^\infty(\Lambda)} \leq \frac{\varepsilon^{1-a}}{2}.$$

Assim, juntamente com a condição  $|\Theta'_\varepsilon(s)| \leq K_2/\varepsilon^a$  e a estimativa  $\|\tilde{f}_\varepsilon - 1\|_{L^\infty(\Lambda)} \leq \varepsilon^{1-a}$ , obtemos o resultado.  $\square$

Usando o Lema 3.7 e a estimativa  $\|1/\tilde{f}_\varepsilon - 1\|_{L^\infty(\Lambda)} \leq \varepsilon^{1-a}$ , tem-se

$$n_\varepsilon(\psi) \geq (1 + O(\varepsilon^{1-a})) \int_\Lambda |\partial_s \psi|^2 ds dt + \int_\Lambda \frac{|\Theta'_\varepsilon(s)|^2}{2} |\psi|^2 ds dt + O(\varepsilon^{1-3a}) \int_\Lambda |\psi|^2 ds dt.$$

Como  $|\Theta'_\varepsilon(s)| \leq K_2/\varepsilon^a$ , para todo  $s \in \mathbb{R}$ , segue que

$$n_\varepsilon(\psi) \geq (1 + O(\varepsilon^{1-a})) \int_\Lambda \left( |\partial_s \psi|^2 + \frac{|\Theta'_\varepsilon(s)|^2}{2} |\psi|^2 \right) ds dt,$$

para todo  $\psi \in H_0^1(\Lambda)$ . Consequentemente, para cada  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$(1 + O(\varepsilon^{1-a})) \lambda_j \left( -\Delta_{\mathbb{R}} + \frac{|\Theta'_\varepsilon(s)|^2}{2} \mathbf{1} \right) \leq \lambda_j(N_\varepsilon). \quad (3.10)$$

As estimativas encontradas em (3.9) e (3.10) garante que, para cada  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$(1 + O(\varepsilon^{1-a})) \lambda_j \left( -\Delta_{\mathbb{R}} + \frac{|\Theta'_\varepsilon(s)|^2}{2} \mathbf{1} \right) + O(\varepsilon^{2-4a}) \leq \lambda_j(-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D) - \left( \frac{\pi}{2\varepsilon} \right)^2, \quad (3.11)$$

para todo  $\varepsilon$  suficientemente pequeno.

### 3.4.3 Prova do Teorema 3.6

Devido (3.7) e (3.11), estudaremos o problema espectral do operador  $-\Delta_{\mathbb{R}} + (|\Theta'_\varepsilon(s)|^2/2)\mathbf{1}$ .

**Proposição 3.8.** Para cada  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_j \left( -\Delta_{\mathbb{R}} + \frac{|\Theta'_\varepsilon(s)|^2}{2} \mathbf{1} \right) = \lambda_j \left( -\Delta_{\mathbb{R}} + \frac{|\Theta'(s)|^2}{2} \mathbf{1} \right). \quad (3.12)$$

*Demonstração.* Lembre-se das condições (I)-(VII) na introdução desta seção. Considere as formas quadráticas

$$y(w) := \int_{\mathbb{R}} \left( |w'|^2 + \frac{|\Theta'(s)|^2}{2} |w|^2 \right) ds, \quad \text{dom } y = \{w \in H^1(\mathbb{R}) : y(w) < \infty\},$$

e, para cada  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno,

$$y_\varepsilon(w) := \int_{\mathbb{R}} \left( |w'|^2 + \frac{|\Theta'_\varepsilon(s)|^2}{2} |w|^2 \right) ds, \quad \text{dom } y_\varepsilon = H^1(\mathbb{R}).$$

Denote por  $Y$  e  $Y_\varepsilon$  os operadores autoadjuntos associados a  $y(w)$  e  $y_\varepsilon(w)$ , respectivamente. Em particular, a condição (III) implica que  $|\Theta'_\varepsilon(s)| \rightarrow |\Theta'(s)|$  pontualmente, quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Assim, para cada  $w \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,  $Y_\varepsilon w \rightarrow Yw$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Como  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  é uma cerne de  $Y$ , dada uma constante  $c > 0$ , segue que

$$(Y_\varepsilon + c\mathbf{1})^{-1}u \rightarrow (Y + c\mathbf{1})^{-1}u, \quad \forall u \in L^2(\mathbb{R}). \quad (3.13)$$

Agora, denote por  $\mathcal{C}$  o ideal de todos os operadores compactos na álgebra de todos os operadores limitados em  $L^2(\mathbb{R})$ . Fixe  $\varepsilon^* > 0$  suficientemente pequeno. Combinando (3.3) com (III)-(V), tem-se

$$\text{dist}((Y_{\varepsilon^*} + c\mathbf{1})^{-1}, \mathcal{C}) \leq \left( \liminf_{|s| \rightarrow \infty} \frac{|\Theta'_{\varepsilon^*}(s)|^2}{2} \right)^{-1} \leq 2(\varepsilon^*)^{2a}. \quad (3.14)$$

A condição (VII) implica que

$$(Y_\varepsilon + c\mathbf{1})^{-1} \leq (Y_{\varepsilon^*} + c\mathbf{1})^{-1}, \quad (3.15)$$

para todo  $\varepsilon < \varepsilon^*$ .

Como uma consequência de (3.13)-(3.15), a Proposição 5.3 de [26] garante que

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|(Y_\varepsilon + c\mathbf{1})^{-1} - (Y + c\mathbf{1})^{-1}\| \leq 2(\varepsilon^*)^{2a}.$$

Fazendo  $\varepsilon^* \rightarrow 0$ ,

$$\|(Y_\varepsilon + c\mathbf{1})^{-1} - (Y + c\mathbf{1})^{-1}\| \rightarrow 0, \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Portanto, obtemos (3.12). □

**Prova do Teorema 3.6.** Basta aplicar as estimativas encontradas em (3.7) e (3.11), e a Proposição 3.8. □

**Observação 3.9.** O Teorema 3.6 mostra que o efeito local imposto por (IX) não interfere no resultado final.



---

## Laplaciano de Dirichlet-Neumann

---

Considere a faixa bidimensional  $\Omega_\varepsilon = \mathcal{L}_\varepsilon(\Lambda)$ , em que  $\Lambda = \mathbb{R} \times (0, 1)$  e  $\mathcal{L}_\varepsilon$  é a aplicação definida em (1.5) na Seção 1.2. Seja  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^{DN}$  o operador Laplaciano de Dirichlet-Neumann restrito a  $\Omega_\varepsilon$ ; a definição formal é apresentada na Seção 1.3. A grosso modo,  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^{DN}$  é o operador Laplaciano agindo no espaço de Hilbert  $L^2(\Omega_\varepsilon)$  com as condições de contorno de Dirichlet e de Neumann sobre  $\Gamma(\mathbb{R}) = \mathcal{L}_\varepsilon(\mathbb{R} \times \{0\})$  e  $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathbb{R} \times \{1\})$ , respectivamente.

Por razões técnicas, ao longo deste capítulo assumimos que

$$\Gamma \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^{n+1}), \quad \Theta \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n), \quad k \cdot \Theta \in L^\infty(\mathbb{R}), \quad \varepsilon \|k \cdot \Theta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < 1. \quad (4.1)$$

Nesta situação, o nosso objetivo aqui é estudar o problema espectral de  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^{DN}$ . Em particular, a Seção 4.1 é dedicada ao estudo do espectro essencial de  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^{DN}$ . Nas Seções 4.2 e 4.3 discutimos condições que garantem a existência e a ausência de espectro discreto para o operador, respectivamente. Como em [41], analisamos como a geometria de  $\Omega_\varepsilon$  influencia os resultados obtidos neste capítulo.

### 4.1 Espectro Essencial

Nesta seção encontramos o espectro essencial do operador  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^{DN}$ . Pela Seção 1.3, sabemos que  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^{DN}$  é unitariamente equivalente ao operador  $T_\varepsilon^{DN}$ . Assim,

$$\sigma(-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^{DN}) = \sigma(T_\varepsilon^{DN}); \quad (4.2)$$

recordando que  $T_\varepsilon^{DN}$  é o operador autoadjunto associado à forma quadrática

$$b_\varepsilon^{DN}(\psi) = \int_\Lambda \frac{|\partial_s \psi|^2}{f_\varepsilon} ds dt + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_\Lambda |\partial_t \psi|^2 f_\varepsilon ds dt, \quad (4.3)$$

$\text{dom } b_\varepsilon^{DN} := \mathcal{U}_\varepsilon(\text{dom } a_\varepsilon^{DN}) \subset \mathcal{H}_\varepsilon$ , em que  $\mathcal{H}_\varepsilon = L^2(\Lambda, f_\varepsilon ds dt)$  e

$$f_\varepsilon(s, t) := \sqrt{(1 - \varepsilon t(k \cdot \Theta)(s))^2 + \varepsilon^2 t^2 |\Theta'(s)|^2}.$$

Em particular,

$$\sigma_{ess}(-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^{DN}) = \sigma_{ess}(T_\varepsilon^{DN}).$$

Denote por  $-\Delta_{(0,\varepsilon)}^{DN}$  o operador Laplaciano atuando em  $L^2(0,\varepsilon)$  com as condições de Dirichlet e Neumann em  $\{0\}$  e  $\{\varepsilon\}$ , respectivamente; seu primeiro autovalor é  $(\pi/2\varepsilon)^2$ . No caso particular em que  $k \cdot \Theta = 0$  e  $\Theta' = 0$ , a região  $\Omega_\varepsilon$  é uma faixa reta no sentido de que a métrica induzida por  $\mathcal{L}_\varepsilon$  é euclidiana; veja Seção 1.2. Assim,  $T_\varepsilon^{DN}$  coincide com o operador Laplaciano em  $\mathbb{R} \times (0,\varepsilon)$  com condições de Dirichlet e Neumann em  $\mathbb{R} \times \{0\}$  e  $\mathbb{R} \times \{\varepsilon\}$ , respectivamente. Nesta situação, sabe-se que o espectro de  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^{DN}$  é puramente essencial e coincide com o intervalo  $[(\pi/2\varepsilon)^2, \infty)$ .

Agora, suponha que

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} (k \cdot \Theta)(s) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{|s| \rightarrow \infty} |\Theta'(s)| = 0. \quad (4.4)$$

Como as condições em (4.4) implicam que os efeitos de curvatura e torção diminuem assintoticamente no infinito, espera-se a estabilidade do espectro essencial nessa situação. Isso é confirmado pelo seguinte resultado.

**Teorema 4.1.** *Sob as condições (4.1) e (4.4). Tem-se*

$$\sigma_{ess}(-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^{DN}) = [(\pi/2\varepsilon)^2, \infty).$$

A prova deste teorema segue pelos mesmos argumentos da prova do Teorema 3.1 de [41]. Assim, optamos em omiti-la neste texto.

## 4.2 Existência de autovalores discretos

Nesta seção apresentamos um resultado que fornece condições suficientes para a existência de autovalores discretos para  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^{DN}$  abaixo de  $(\pi/2\varepsilon)^2$ .

**Teorema 4.2.** *Sob as condições em (4.1). Se  $k \cdot \Theta = 0$  e  $\Theta' \neq 0$ , então*

$$\inf \sigma(-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^{DN}) < \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2.$$

*Demonstração.* Seja  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  uma função de valores reais tal que  $0 \leq \varphi \leq 1$ ,  $\varphi = 1$  em  $[-1, 1]$ , e  $\varphi = 0$  em  $\mathbb{R} \setminus (-2, 2)$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , defina

$$\psi_n(s, t) := \varphi_n(s) \chi_1(t),$$

em que  $\varphi_n(s) := \varphi(s/n)$  e

$$\chi_1(t) := \sqrt{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right). \quad (4.5)$$

Em particular,  $\chi_1$  é a autofunção correspondente ao primeiro autovalor do operador Laplaciano em  $(0, 1)$  com as condições de contorno de Dirichlet e de Neumann em  $\{0\}$  e  $\{1\}$ , respectivamente. Note que  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \operatorname{dom} b_\varepsilon^{DN}$ .

Como  $k \cdot \Theta = 0$ , o jacobiano  $f_\varepsilon$  da métrica definida em (1.6) é reduzido a

$$f_\varepsilon(s, t) = \sqrt{1 + \varepsilon^2 t^2 |\Theta'(s)|^2}.$$

Fazendo uma integração por partes na segunda parcela de  $b_\varepsilon^{DN}(\psi_n)$ , tem-se

$$b_\varepsilon^{DN}(\psi_n) - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \|\psi_n\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}^2 = \int_\Lambda \frac{|\varphi'_n \chi_1|^2}{f_\varepsilon} ds dt - \int_\Lambda \frac{|\Theta'(s)|^2}{f_\varepsilon} |\varphi_n|^2 t \chi_1 \chi'_1 ds dt. \quad (4.6)$$

Observe que a primeira parcela do lado direito de (4.6) tende a zero, quando  $n \rightarrow \infty$ , pois

$$\int_\Lambda \frac{|\varphi'_n \chi_1|^2}{f_\varepsilon} ds dt \leq \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} |\varphi'|^2 ds, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Além disso, como  $\varphi_n \rightarrow 1$  pontualmente, quando  $n \rightarrow \infty$ , obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ b_\varepsilon^{DN}(\psi_n) - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \|\psi_n\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}^2 \right] = - \int_\Lambda \frac{|\Theta'(s)|^2}{f_\varepsilon} t \chi_1 \chi'_1 ds dt. \quad (4.7)$$

O limite do lado direito de (4.7) é negativo. De fato,

$$\frac{|\Theta'(s)|^2}{f_\varepsilon} t \chi_1 \chi'_1 = \frac{|\Theta'(s)|^2}{f_\varepsilon} \pi t \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

é uma função positiva e não trivial em  $\Lambda$ . Então, podemos tomar  $n_0$  suficiente grande de modo que

$$b_\varepsilon^{DN}(\psi_{n_0}) - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \|\psi_{n_0}\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}^2 < 0.$$

Assim, o resultado segue pelo Princípio do Minimax e (4.2).  $\square$

Sob as hipóteses dos Teoremas 4.1 e 4.2 tem-se que o espectro discreto de  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^{DN}$  é não vazio. Então, podemos dizer que o efeito de torção pode criar autovalores discretos para o operador. Neste ponto, há uma pergunta natural: o efeito de curvatura também pode criar autovalores discretos? Essa pergunta será respondida na próxima seção.

### 4.3 Ausência de espectro discreto

Nesta seção, apresentamos algumas situações onde encontramos desigualdades do tipo Hardy para o operador  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^{DN}$ . Para isso, considere a função crescente  $r : [0, 4/5) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$r(x) := \frac{x^2(2-x)}{4(1-x)^2(4-5x)}. \quad (4.8)$$

Seja  $x_0 \in (0, 4/5)$  tal que  $r(x_0) = (\pi/2)^2$ . Começamos com o seguinte resultado, que será demonstrado mais adiante neste seção.

**Teorema 4.3.** *Sob as condições em (4.1). Se  $\Theta' = 0$  e  $k \cdot \Theta \neq 0$  satisfaz  $k \cdot \Theta \geq 0$  e  $\varepsilon \|k \cdot \Theta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq x_0$ , então existe uma constante positiva  $c$  tal que*

$$-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^{DN} - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \geq c\rho, \quad (4.9)$$

em que  $\rho(s) := 1/(1+s^2)$ .

No intuito de provar o Teorema 4.3, suponha  $\Theta' = 0$ . Sob esta condição, a função  $f_\varepsilon(s, t)$  definida em (1.6) é reduzida a  $h_\varepsilon(s, t) := 1 - \varepsilon t(k \cdot \Theta)(s)$ . Conseqüentemente, a forma quadrática  $b_\varepsilon^{DN}(\psi)$  torna-se

$$c_\varepsilon(\psi) := \int_\Lambda \frac{|\partial_s \psi|^2}{h_\varepsilon} ds dt + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_\Lambda |\partial_t \psi|^2 h_\varepsilon ds dt,$$

$\text{dom } c_\varepsilon := \{\psi \in H^1(\Lambda) : \psi(s, 0) = 0 \text{ q.t.p. } s \in \mathbb{R}\}$ , agindo no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}'_\varepsilon := L^2(\Lambda, h_\varepsilon ds dt)$ .

Denote por  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}'_\varepsilon}$  a norma neste espaço.

Agora, observe que

$$c_\varepsilon(\psi) \geq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_\Lambda |\partial_t \psi|^2 h_\varepsilon ds dt, \quad (4.10)$$

para todo  $\psi \in \text{dom } c_\varepsilon$ .

Para cada  $s \in \mathbb{R}$  fixo, considere o operador autoadjunto unidimensional auxiliar

$$S_\varepsilon(s) := -\partial_t^2 + \varepsilon \frac{(k \cdot \Theta)(s)}{h_\varepsilon(s, t)} \partial_t, \quad \text{dom } S_\varepsilon(s) := \{v \in H^2(0, 1) : v(0) = v'(1) = 0\},$$

agindo no espaço de Hilbert  $L^2((0, 1), h_\varepsilon(s, \cdot) dt)$ ; o caso  $\varepsilon = 0$  corresponde ao operador Laplaciano  $-\Delta_{(0,1)}^{DN}$  em  $L^2(0, 1)$ . Denote por  $\lambda_0^\varepsilon(s)$  o primeiro autovalor de  $S_\varepsilon(s)$ . Pelo Princípio do Minimax, temos

$$\int_0^1 |\partial_t \psi|^2 h_\varepsilon dt = \int_0^1 (S_\varepsilon(s) \psi) \bar{\psi} h_\varepsilon dt \geq \lambda_0^\varepsilon(s) \int_0^1 |\psi|^2 h_\varepsilon dt, \quad (4.11)$$

para cada  $\psi \in \text{dom } S_\varepsilon(s)$ . A primeira igualdade de (4.11) segue de uma integração por partes.

Pelas estimativas (4.10) e (4.11), segue que

$$c_\varepsilon(\psi) \geq \int_\Lambda \frac{\lambda_0^\varepsilon(s)}{\varepsilon^2} |\psi|^2 h_\varepsilon ds dt, \quad (4.12)$$

para cada  $\psi \in \text{dom } c_\varepsilon$ . Conseqüentemente, quando  $\Omega_\varepsilon$  é uma faixa puramente curvada, temos

$$-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^{DN} - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \geq \frac{\lambda_0^\varepsilon(s)}{\varepsilon^2} - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2, \quad (4.13)$$

no sentido das formas quadráticas.

**Lema 4.4.** *Suponha que  $k \cdot \Theta \neq 0$  satisfaz  $k \cdot \Theta \geq 0$  e  $\varepsilon \|k \cdot \Theta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq x_0$ . Então,  $\lambda_0^\varepsilon(s) - (\pi/2)^2$  é uma função não trivial e não negativa.*

*Demonstração.* Fixe  $s \in \mathbb{R}$ . Considere o operador unitário

$$\mathcal{V}_\varepsilon(s) : \begin{array}{ccc} L^2(0, 1) & \longrightarrow & L^2((0, 1), h_\varepsilon(s, \cdot) dt) \\ v & \longmapsto & h_\varepsilon^{-1/2} v \end{array},$$

e defina o operador autoadjunto  $\tilde{S}_\varepsilon(s) := \mathcal{V}_\varepsilon(s)^{-1} S_\varepsilon(s) \mathcal{V}_\varepsilon(s)$ . Mais precisamente,

$$\tilde{S}_\varepsilon(s) = -\partial_t^2 - \frac{\varepsilon^2(k \cdot \Theta)(s)^2}{4h_\varepsilon(s,t)^2} \mathbf{1},$$

$$\text{dom } \tilde{S}_\varepsilon(s) = \left\{ v \in H^2(0,1) : v(0) = 0, v'(1) + \frac{\varepsilon(k \cdot \Theta)(s)}{2h_\varepsilon(s,1)} v(1) = 0 \right\}.$$

Em particular, denote por  $\tilde{u}_0^\varepsilon(s, \cdot)$  a autofunção normalizada de  $\tilde{S}_\varepsilon(s)$  correspondente ao autovalor  $\lambda_0^\varepsilon(s)$ .

Agora, defina o operador  $Y_\varepsilon(s) := \partial_t^2$ ,  $\text{dom } Y_\varepsilon(s) = \text{dom } \tilde{S}_\varepsilon(s)$ . Denote por  $\vartheta_0^\varepsilon(s)$  seu primeiro autovalor e por  $v_0^\varepsilon(s)$  a autofunção (real) correspondente.

O Lema A.8 do Apêndice A garante que

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \leq \vartheta_0^\varepsilon(s) - \frac{\varepsilon(k \cdot \Theta)(s)}{2h_\varepsilon(s,1)} \frac{v_0^\varepsilon(s,1)^2}{\|v_0^\varepsilon(s, \cdot)\|_{L^2(0,1)}^2}. \quad (4.14)$$

Pelo Princípio do Minimax,

$$\vartheta_0^\varepsilon(s) \int_0^1 |v|^2 dt \leq \int_0^1 |v'|^2 dt,$$

para todo  $v \in \text{dom } \tilde{S}_\varepsilon(s)$ . Em particular, essa estimativa é satisfeita para  $v = \tilde{u}_0^\varepsilon(s, \cdot)$ . Então

$$\begin{aligned} \vartheta_0^\varepsilon(s) \int_0^1 |\tilde{u}_0^\varepsilon(s,t)|^2 dt &\leq \int_0^1 |\partial_t \tilde{u}_0^\varepsilon(s,t)|^2 dt \\ &= \int_0^1 (\tilde{S}_\varepsilon(s) \tilde{u}_0^\varepsilon(s,t)) \tilde{u}_0^\varepsilon(s,t) dt + \int_0^1 \frac{\varepsilon^2(k \cdot \Theta)(s)^2}{4h_\varepsilon(s,t)^2} |\tilde{u}_0^\varepsilon(s,t)|^2 dt \\ &= \lambda_0^\varepsilon(s) \int_0^1 |\tilde{u}_0^\varepsilon(s,t)|^2 dt + \int_0^1 \frac{\varepsilon^2(k \cdot \Theta)(s)^2}{4h_\varepsilon(s,t)^2} |\tilde{u}_0^\varepsilon(s,t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Pela condição  $k \cdot \Theta \geq 0$ , segue que  $h_\varepsilon(s,t) \geq h_\varepsilon(s,1) > 0$ , para todo  $t \in (0,1)$ . Consequentemente,

$$\vartheta_0^\varepsilon(s) \leq \lambda_0^\varepsilon(s) + \frac{\varepsilon^2(k \cdot \Theta)(s)^2}{4h_\varepsilon(s,1)^2}. \quad (4.15)$$

As estimativas (4.14) e (4.15) implicam que

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \leq \lambda_0^\varepsilon(s) + \frac{\varepsilon^2(k \cdot \Theta)(s)^2}{4h_\varepsilon(s,1)^2} - \frac{\varepsilon(k \cdot \Theta)(s)}{2h_\varepsilon(s,1)} \frac{v_0^\varepsilon(s,1)^2}{\|v_0^\varepsilon(s, \cdot)\|_{L^2(0,1)}^2}. \quad (4.16)$$

Um cálculo simples mostra que  $v_0^\varepsilon(s,t) = \text{sen}(\sqrt{\vartheta_0^\varepsilon(s)}t)$  e  $\vartheta_0^\varepsilon(s)$  satisfazem

$$\sqrt{\vartheta_0^\varepsilon(s)} = -\frac{\varepsilon(k \cdot \Theta)(s)}{2h_\varepsilon(s,1)} \tan\left(\sqrt{\vartheta_0^\varepsilon(s)}\right), \quad \text{e} \quad \vartheta_0^\varepsilon(s) \in ((\pi/2)^2, \pi^2).$$

Então,

$$\frac{v_0^\varepsilon(s,1)^2}{\|v_0^\varepsilon(s, \cdot)\|_{L^2(0,1)}^2} = \frac{\text{sen}^2\left(\sqrt{\vartheta_0^\varepsilon(s)}\right)}{\frac{1}{2} - \frac{\text{sen}(2\sqrt{\vartheta_0^\varepsilon(s)})}{4\sqrt{\vartheta_0^\varepsilon(s)}}} = \frac{2\vartheta_0^\varepsilon(s)}{\alpha(s)^2 + \alpha(s) + \vartheta_0^\varepsilon(s)},$$

em que  $\alpha(s) := \varepsilon(k \cdot \Theta)(s)/2h_\varepsilon(s, 1)$ . Assim, podemos reescrever (4.16) da seguinte maneira

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \leq \lambda_0^\varepsilon(s) + \alpha(s)^2 - \alpha(s) \frac{2\vartheta_0^\varepsilon(s)}{\alpha(s)^2 + \alpha(s) + \vartheta_0^\varepsilon(s)}. \quad (4.17)$$

A estratégia é mostrar que

$$\alpha(s)^2 - \alpha(s) \frac{2\vartheta_0^\varepsilon(s)}{\alpha(s)^2 + \alpha(s) + \vartheta_0^\varepsilon(s)} \leq 0. \quad (4.18)$$

Como a função  $r$ , definida por (4.8), é crescente em  $(0, 4/5)$ , tem-se

$$\alpha(s)^2 \frac{1 + \alpha(s)}{2 - \alpha(s)} = r(\varepsilon(k \cdot \Theta)(s)) \leq r(x_0) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \leq \vartheta_0^\varepsilon(s); \quad (4.19)$$

a última desigualdade é uma consequência de (4.14). Como  $0 < \alpha(s) \leq 1/2$ , alguns cálculos mostram que (4.19) implica que

$$\alpha(s) - \frac{2\vartheta_0^\varepsilon(s)}{\alpha(s)^2 + \alpha(s) + \vartheta_0^\varepsilon(s)} \leq 0.$$

Multiplicando essa estimativa por  $\alpha(s) > 0$ , obtemos (4.18).

Finalmente, como  $s$  é uma variável arbitrária, as desigualdades (4.17) e (4.18) implicam que

$$\lambda_0^\varepsilon(s) - (\pi/2)^2 \geq 0,$$

para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Resta provar que  $\lambda_0^\varepsilon(s) - (\pi/2)^2$  é uma função não trivial. Suponha que  $\lambda_0^\varepsilon(s) - (\pi/2)^2 = 0$ , para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Usando (4.17) e (4.18), segue que

$$\alpha(s)^2 - \alpha(s) \frac{2\vartheta_0^\varepsilon(s)}{\alpha(s)^2 + \alpha(s) + \vartheta_0^\varepsilon(s)} = 0,$$

para todo  $s \in \mathbb{R}$ . A igualdade é satisfeita se, e somente se,  $k \cdot \Theta = 0$ . Porém, por hipótese a função  $k \cdot \Theta$  é não trivial. Contradição.  $\square$

O Lema 4.4 mostra que (4.13) é uma desigualdade do tipo Hardy sempre que as condições do Teorema 4.3 são satisfeitas. No entanto,  $\lambda_0^\varepsilon(s) - (\pi/2)^2$  não necessariamente é uma função positiva em todos os pontos de  $\Lambda$ . Nesta caso, dizemos que (4.13) é uma desigualdade de Hardy local.

Finalmente, demonstraremos o Teorema 4.3. Aqui, (4.9) é uma desigualdade de Hardy *global*.

**Prova do Teorema 4.3.** O Lema 4.4 garante que  $\lambda_0^\varepsilon(s) - (\pi/2)^2$  é uma função não negativa e não trivial. Assim, existe um intervalo aberto e limitado  $I \subset \mathbb{R}$  tal que  $\lambda_0^\varepsilon(s) - (\pi/2)^2 > 0$ , para todo  $s \in I$ . Defina o operador

$$Z_\varepsilon := -\partial_s^2 + \left( \frac{\lambda_0^\varepsilon(s)}{\varepsilon^2} - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \right) \mathbf{1},$$

agindo em  $L^2(I)$ , em que as funções em  $\text{dom } Z_\varepsilon$  satisfazem as condições de contorno de Neumann em  $\partial I$ . Denote por  $\mu_0^\varepsilon > 0$  seu primeiro autovalor.

Para cada  $\psi \in \text{dom } c_\varepsilon$ , obtemos

$$\begin{aligned} c_\varepsilon(\psi) - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \|\psi\|_{\mathcal{H}'_\varepsilon}^2 &\geq \int_\Lambda |\partial_s \psi|^2 ds dt + \int_\Lambda \left( \frac{\lambda_0^\varepsilon(s)}{\varepsilon^2} - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \right) |\psi|^2 h_\varepsilon ds dt \\ &\geq C_1 \int_{I \times (0,1)} \left( |\partial_s \psi|^2 + \left( \frac{\lambda_0^\varepsilon(s)}{\varepsilon^2} - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \right) |\psi|^2 \right) ds dt \\ &\geq C_1 \mu_0^\varepsilon \int_{I \times (0,1)} |\psi|^2 ds dt, \end{aligned} \quad (4.20)$$

em que  $C_1 := 1 - \varepsilon \|k \cdot \Theta\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ . Além disso, como  $\lambda_0^\varepsilon(s) - (\pi/2)^2 \geq 0$ , tem-se

$$c_\varepsilon(\psi) - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \|\psi\|_{\mathcal{H}'_\varepsilon}^2 \geq \int_\Lambda |\partial_s \psi|^2 ds dt. \quad (4.21)$$

Seja  $s_1$  o ponto médio de  $I$  e seja  $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$  tal que  $0 \leq \eta \leq 1$ ,  $\eta = 0$  em uma vizinhança de  $s_1$  e  $\eta = 1$  em  $\mathbb{R} \setminus I$ . Para  $\psi \in \text{dom } c_\varepsilon$ , escreva  $\psi = \eta \psi + (1 - \eta) \psi$ . Então,

$$\begin{aligned} \int_\Lambda \frac{|\psi|^2}{1 + (s - s_1)^2} ds dt &\leq 2 \int_\Lambda \frac{|\eta \psi|^2}{(s - s_1)^2} ds dt + 2 \int_\Lambda |(1 - \eta) \psi|^2 ds dt \\ &\leq 8 \int_\Lambda |\partial_s(\eta \psi)|^2 ds dt + 2 \int_{I \times (0,1)} |\psi|^2 ds dt \\ &\leq 16 \int_\Lambda |\partial_s \psi|^2 ds dt + 16C_2 \int_{I \times (0,1)} |\psi|^2 ds dt, \end{aligned} \quad (4.22)$$

em que  $C_2 := \|\eta'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 + 1/8$ ; na segunda estimativa utilizamos a desigualdade clássica de Hardy

$$4 \int_{\mathbb{R}} |\varphi'|^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}} \frac{|\varphi|^2}{x^2} dx, \quad \varphi \in H_0^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Combinando (4.21) e (4.22), segue que

$$c_\varepsilon(\psi) - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \|\psi\|_{\mathcal{H}'_\varepsilon}^2 \geq \frac{1}{16} \int_\Lambda \frac{|\psi|^2}{1 + (s - s_1)^2} ds dt - C_2 \int_{I \times (0,1)} |\psi|^2 ds dt. \quad (4.23)$$

Para cada  $\delta \in (0, 1)$ , as estimativas (4.20) e (4.23) implicam que

$$c_\varepsilon(\psi) - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \|\psi\|_{\mathcal{H}'_\varepsilon}^2 \geq \frac{\delta}{16} \int_\Lambda \frac{|\psi|^2}{1 + (s - s_1)^2} ds dt + [(1 - \delta)\mu_0^\varepsilon C_1 - \delta C_2] \int_{I \times (0,1)} |\psi|^2 ds dt.$$

Tomando  $\delta = \mu_0^\varepsilon C_1 / (\mu_0^\varepsilon C_1 + C_2)$ , temos

$$\begin{aligned} c_\varepsilon(\psi) - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \|\psi\|_{\mathcal{H}'_\varepsilon}^2 &\geq \frac{\mu_0^\varepsilon C_1}{16(\mu_0^\varepsilon C_1 + C_2)} \int_\Lambda \frac{|\psi|^2}{1 + (s - s_1)^2} ds dt \\ &\geq \frac{\mu_0^\varepsilon C_1}{16(\mu_0^\varepsilon C_1 + C_2)} \inf_{s \in \mathbb{R}} \frac{1 + s^2}{1 + (s - s_1)^2} \int_\Lambda \frac{1}{1 + s^2} |\psi|^2 h_\varepsilon ds dt. \end{aligned}$$

Portanto, o resultado segue para uma constante real  $c > 0$  de modo que

$$c \leq \frac{\mu_0^\varepsilon C_1}{16(\mu_0^\varepsilon C_1 + C_2)} \inf_{s \in \mathbb{R}} \frac{1 + s^2}{1 + (s - s_1)^2}.$$

□

O Teorema 4.3 trata do caso em que  $\Omega_\varepsilon$  é uma faixa puramente curvada. Se um efeito de torção apropriado for adicionado, obtemos a seguinte versão.

**Teorema 4.5.** *Sob as condições em (4.1). Se  $k$  e  $\Theta$  satisfazem*

$$k \cdot \Theta \neq 0, \quad k \cdot \Theta \geq 0, \quad \varepsilon \|k \cdot \Theta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq x_0, \quad |\Theta'(s)| \leq \frac{\delta}{1+s^2},$$

para algum  $\delta \geq 0$ . Então,

$$-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^{DN} > \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2,$$

para todo  $\delta$  suficientemente pequeno.

*Demonstração.* Como  $|\Theta'(s)| \leq \delta/(1+s^2)$ , alguns cálculos mostram que

$$\left| \frac{f_\varepsilon(s,t)}{h_\varepsilon(s,t)} - 1 \right| \leq C_3 \delta \rho(s) \leq C_3 \delta, \quad (4.24)$$

para todo  $(s,t) \in \Lambda$ , em que  $C_3 := \varepsilon/(1 - \varepsilon \|k \cdot \Theta\|_{L^\infty(\mathbb{R})})$  e  $\rho(s) = 1/(1+s^2)$ . Tome  $\delta \geq 0$  de modo que  $C_3 \delta < 1$ . Em particular, (4.24) implica que

$$f_\varepsilon \leq (1 + C_3 \delta) h_\varepsilon \quad \text{e} \quad (1 - C_3 \delta \rho(s)) h_\varepsilon \leq f_\varepsilon \leq (1 + C_3 \delta \rho(s)) h_\varepsilon. \quad (4.25)$$

Para cada  $\psi \in \text{dom } b_\varepsilon^{DN}$ , pela primeira estimativa de (4.25), segue que

$$\int_\Lambda \frac{|\partial_s \psi|^2}{f_\varepsilon} ds dt \geq \frac{1}{1 + C_3 \delta} \int_\Lambda \frac{|\partial_s \psi|^2}{h_\varepsilon} ds dt. \quad (4.26)$$

Ao mesmo tempo, pela segunda estimativa de (4.25), temos

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_\Lambda |\partial_t \psi|^2 f_\varepsilon ds dt \geq \int_\Lambda (1 - C_3 \delta \rho(s)) \frac{|\partial_t \psi|^2}{\varepsilon^2} h_\varepsilon ds dt \quad (4.27)$$

e

$$\left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \int_\Lambda |\psi|^2 f_\varepsilon ds dt \leq \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \int_\Lambda (1 + C_3 \delta \rho(s)) |\psi|^2 h_\varepsilon ds dt. \quad (4.28)$$

Combinando as estimativas (4.26)-(4.28), obtemos

$$\begin{aligned} b_\varepsilon^{DN}(\psi) - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \|\psi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}^2 &\geq \frac{1}{1 + C_3 \delta} \int_\Lambda \frac{|\partial_s \psi|^2}{h_\varepsilon} ds dt \\ &\quad + \int_\Lambda (1 - C_3 \delta \rho(s)) \left( \frac{|\partial_t \psi|^2}{\varepsilon^2} - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 |\psi|^2 \right) h_\varepsilon ds dt \\ &\quad - 2 \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \int_\Lambda C_3 \delta \rho(s) |\psi|^2 h_\varepsilon ds dt. \end{aligned}$$

Note que

$$\frac{1}{1 + C_3 \delta} \geq \frac{1 - C_3 \delta}{1 + C_3 \delta} \quad \text{e} \quad 1 - C_3 \delta \rho(s) \geq 1 - C_3 \delta \geq \frac{1 - C_3 \delta}{1 + C_3 \delta}.$$

Então

$$b_\varepsilon^{DN}(\psi) - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \|\psi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}^2 \geq \frac{1 - C_3\delta}{1 + C_3\delta} \left( c_\varepsilon(\psi) - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \|\psi\|_{\mathcal{H}'_\varepsilon}^2 \right) - 2 \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \int_\Lambda C_3\delta\rho(s) |\psi|^2 h_\varepsilon ds dt.$$

Pelo Teorema 4.3, existe uma constante  $c > 0$  tal que

$$b_\varepsilon^{DN}(\psi) - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \|\psi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}^2 \geq \left( \frac{1 - C_3\delta}{1 + C_3\delta} c - C_3\delta \frac{\pi^2}{2\varepsilon^2} \right) \int_\Lambda \rho(s) |\psi|^2 h_\varepsilon ds dt.$$

Basta tomar  $\delta > 0$  suficientemente pequeno de modo que

$$\frac{1 - C_3\delta}{1 + C_3\delta} c - C_3\delta \frac{\pi^2}{2\varepsilon^2} > 0.$$

Assim, segue o resultado.  $\square$

Sob as condições dos Teoremas 4.1 e 4.3 (resp. 4.5) segue que não existe espectro discreto para  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^{DN}$ . O Teorema 4.5 mostra que o efeito de torção não é uma condição suficiente para criar autovalores discretos para o operador.

**Observação 4.6.** Em [41], os autores estudaram o Laplaciano de Dirichlet restrito à faixa simétrica  $\mathcal{S} := \mathcal{L}_\varepsilon(\mathbb{R} \times (-1, 1))$ , em que  $\mathcal{L}_\varepsilon$  é dado por (1.5). Em particular, sob as condições em (4.4), eles provaram que as condições  $k \cdot \Theta \neq 0$  e  $\Theta' = 0$  garantem a existência de espectro discreto para o operador. No entanto, quando  $k \cdot \Theta = 0$  (resp.  $|(k \cdot \Theta)(s)| \leq \delta/(1 + s^2)$ , para algum  $\delta > 0$  suficientemente pequeno), e  $\Theta' \neq 0$  satisfaz  $\varepsilon \sup |\Theta'| \leq \sqrt{2}$ , eles obtiveram desigualdades do tipo Hardy para o operador. Nesse trabalho, a curvatura geodésica atua como uma interação atrativa no sentido de que “diminui” o espectro e cria autovalores discretos. A curvatura de Gauss atua como uma interação repulsiva no sentido de induzir desigualdades do tipo Hardy. Seguindo as mesmas terminologias do [41], para o modelo estudado neste trabalho, como uma consequência dos Teoremas 4.1, 4.2, 4.3, e 4.5, a curvatura de Gauss atua como uma interação atrativa; se a curvatura geodésica é positiva, então ela atua como uma interação repulsiva; se a curvatura geodésica for negativa, então ela atua como uma interação atrativa. A última afirmação será discutida detalhadamente no próximo capítulo.



---

## Laplaciano de Dirichlet-Neumann em faixas finas

---

Este capítulo é dedicado ao estudo do espectro do operador Laplaciano de Dirichlet-Neumann restrito às faixas bidimensionais com larguras suficientemente pequenas. Mais precisamente, considere a faixa  $\Omega_\varepsilon = \mathcal{L}_\varepsilon(\Lambda)$ , em que  $\Lambda = \mathbb{R} \times (0, 1)$ , e denote o operador Laplaciano de Dirichlet-Neumann restrito a  $\Omega_\varepsilon$  por  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^{DN}$ ;  $\mathcal{L}_\varepsilon$  é a aplicação definida em (1.5) na Seção 1.2. Neste capítulo, encontramos informações adicionais sobre o espectro discreto de  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^{DN}$ , quando  $\varepsilon > 0$  é suficientemente pequeno.

No Capítulo 4, analisamos o espectro do operador  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^{DN}$  sob as condições

$$\Gamma \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^{n+1}), \quad \Theta \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n), \quad k \cdot \Theta \in L^\infty(\mathbb{R}), \quad \varepsilon \|k \cdot \Theta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < 1. \quad (5.1)$$

Ao longo deste capítulo também assumimos que as condições em (5.1) são satisfeitas. Além disso, considere as seguintes condições adicionais

$$(k \cdot \Theta)', |\Theta'|, |\Theta''| \in L^\infty(\mathbb{R}). \quad (5.2)$$

Este capítulo é dividido em três seções. Na Seção 5.1, supondo que  $k \cdot \Theta \neq 0$ , encontramos um comportamento assintótico dos autovalores de  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^{DN}$ , quando  $\varepsilon$  tende a zero. O interesse nessas considerações reside na diferença entre os casos puramente Dirichlet e Dirichlet-Neumann. Além disso, se  $\Omega_\varepsilon$  é uma faixa puramente torcida, na Seção 5.2 encontramos um novo comportamento assintótico para os autovalores de  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^{DN}$ , quando  $\varepsilon$  tende a zero. Na Seção 5.3, realizamos uma dilatação apropriada em  $\Omega_\varepsilon$ . Nesta nova situação, também encontramos um comportamento assintótico dos autovalores. Por fim, comparamos esses resultados obtidos. Todos os argumentos apresentados deste capítulo foram desenvolvidos considerando  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno.

### 5.1 Faixas finas

Nesta seção, encontramos um comportamento assintótico para os autovalores de  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^{DN}$ , quando  $\varepsilon > 0$  é suficientemente pequeno. Na verdade, baseado em argumentos de [33], provamos o seguinte

resultado.

**Teorema 5.1.** *Sob as condições em (5.1) e (5.2). Se  $k \cdot \Theta \neq 0$ , então, para cada  $j \in \mathbb{N}$ ,*

$$\begin{aligned} \lambda_j(-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^{DN}) &= \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 + \lambda_j\left(-\Delta_{\mathbb{R}} + \frac{k \cdot \Theta}{\varepsilon} \mathbf{1}\right) + O(1) \\ &= \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 + \frac{\inf(k \cdot \Theta)}{\varepsilon} + o(\varepsilon^{-1}), \end{aligned} \quad (5.3)$$

para todo  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno.

O Teorema 5.1 é consequência de uma “convergência” no sentido da norma dos resolventes da família de operadores  $\{-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^{DN}\}_{\varepsilon>0}$ . Ou seja, uma consequência do Teorema 5.2 enunciado abaixo. Antes de introduzirmos o Teorema 5.2, apresentamos algumas considerações importantes.

Pela Seção 1.3,  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^{DN}$  é unitariamente equivalente a o operador adjunto  $T_\varepsilon^{DN}$  associado à forma quadrática

$$b_\varepsilon^{DN}(\psi) = \int_\Lambda \frac{|\partial_s \psi|^2}{f_\varepsilon} ds dt + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_\Lambda |\partial_t \psi|^2 f_\varepsilon ds dt,$$

dom  $b_\varepsilon^{DN} := \mathcal{U}_\varepsilon^{-1}(\text{dom } a_\varepsilon^{DN})$ , agindo no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_\varepsilon = L^2(\Lambda, f_\varepsilon ds dt)$ , em que

$$f_\varepsilon(s, t) := \sqrt{(1 - \varepsilon t(k \cdot \Theta)(s))^2 + \varepsilon^2 t^2 |\Theta'(s)|^2}.$$

Observe que

$$b_\varepsilon^{DN}(\psi) \geq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_\Lambda |\partial_t \psi|^2 f_\varepsilon ds dt, \quad (5.4)$$

para todo  $\psi \in \text{dom } b_\varepsilon^{DN}$ .

Para cada  $s \in \mathbb{R}$  fixo, considere o operador auxiliar

$$T_\varepsilon(s) := -\partial_t^2 - \frac{\partial_t f_\varepsilon}{f_\varepsilon} \partial_t, \quad \text{dom } T_\varepsilon(s) = \{v \in H^2(0, 1) : v(0) = v'(1) = 0\},$$

agindo no espaço de Hilbert  $L^2((0, 1), f_\varepsilon(s, \cdot) dt)$ . Denote por  $\Sigma(s, \varepsilon)$  o primeiro autovalor de  $T_\varepsilon(s)$ . Pela teoria analítica da perturbação,

$$\Sigma(s, \varepsilon) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \beta(s, \varepsilon) + O(\varepsilon^2),$$

em que

$$\beta(s, \varepsilon) := \frac{\varepsilon(k \cdot \Theta)(s) - \varepsilon^2(k \cdot \Theta)^2(s) - \varepsilon^2|\Theta'(s)|^2}{\sqrt{(1 - \varepsilon(k \cdot \Theta)(s))^2 + \varepsilon^2|\Theta'(s)|^2}} + \frac{1}{2} \int_0^1 (\partial_t^2 f_\varepsilon) \chi_1^2 dt; \quad (5.5)$$

veja [30] para mais detalhes. Pelo Princípio do Minimax, temos

$$\int_0^1 |\partial_t \psi|^2 f_\varepsilon dt = \int_0^1 (T_\varepsilon(s)\psi) \bar{\psi} f_\varepsilon dt \geq \Sigma(s, \varepsilon) \int_0^1 |\psi|^2 f_\varepsilon dt, \quad (5.6)$$

para cada  $\psi \in \text{dom } T_\varepsilon(s)$ . A primeira igualdade de (5.6) segue de uma integração por partes.

Pelas estimativas (5.4) e (5.6), segue que

$$b_\varepsilon^{DN}(\psi) \geq \int_\Lambda \frac{\Sigma(s, \varepsilon)}{\varepsilon^2} |\psi|^2 f_\varepsilon ds dt, \quad (5.7)$$

para cada  $\psi \in \text{dom } b_\varepsilon^{DN}$ . Essa estimativa será útil nos próximos parágrafos.

Daqui em diante, é mais conveniente realizar uma outra mudança de variável de modo que a forma quadrática  $b_\varepsilon^{DN}(\psi)$  passe a atuar no espaço de Hilbert  $L^2(\Lambda)$  com a métrica usual. Para isso, considere o operador unitário

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_\varepsilon : L^2(\Lambda) &\longrightarrow L^2(\Lambda, f_\varepsilon ds dt) \\ \psi &\longmapsto f_\varepsilon^{-1/2} \psi \end{aligned},$$

e defina

$$d_\varepsilon(\psi) := b_\varepsilon^{DN}(\mathcal{V}_\varepsilon \psi),$$

$\text{dom } d_\varepsilon := \mathcal{V}_\varepsilon^{-1}(\text{dom } b_\varepsilon)$ . Devido às condições em (5.2), tem-se

$$\text{dom } d_\varepsilon = \mathfrak{D} := \{\psi \in H^1(\Lambda) : \psi(s, 0) = 0 \text{ q.t.p. } s \in \mathbb{R}\}.$$

Além disso, alguns cálculos mostram que

$$\begin{aligned} d_\varepsilon(\psi) &= \int_\Lambda \frac{|\partial_s \psi|^2}{f_\varepsilon^2} ds dt + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_\Lambda |\partial_t \psi|^2 ds dt + \int_\Lambda V_\varepsilon |\psi|^2 ds dt \\ &\quad - \text{Re} \int_\Lambda \frac{\partial_s f_\varepsilon}{f_\varepsilon^3} \bar{\psi} \partial_s \psi ds dt + \int_\partial \mathbf{v}_\varepsilon |\psi|^2 ds dt, \end{aligned}$$

em que

$$V_\varepsilon(s, t) := \frac{1}{4} \frac{(\partial_s f_\varepsilon(s, t))^2}{f_\varepsilon(s, t)^4} - \frac{1}{4\varepsilon^2} \frac{(\partial_t f_\varepsilon(s, t))^2}{f_\varepsilon(s, t)^2} + \frac{1}{2\varepsilon^2} \frac{\partial_t^2 f_\varepsilon(s, t)}{f_\varepsilon(s, t)},$$

e

$$\mathbf{v}_\varepsilon(s) := \frac{1}{2\varepsilon} \frac{(k \cdot \Theta)(s) - \varepsilon(k \cdot \Theta)(s)^2 - \varepsilon|\Theta'(s)|^2}{(1 - \varepsilon(k \cdot \Theta)(s))^2 + \varepsilon^2|\Theta(s)|^2}.$$

O sinal de integral  $\int_\partial$  refere-se a uma integração sobre a fronteira  $\mathbb{R} \times \{1\}$ . Denote por  $D_\varepsilon$  o operador autoadjunto associado a  $d_\varepsilon(\psi)$ .

De (5.5) e (5.7), segue que

$$\begin{aligned} d_\varepsilon(\psi) &\geq \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \int_\Lambda |\psi|^2 ds dt + \int_\Lambda \frac{\beta(s, \varepsilon)}{\varepsilon^2} |\psi|^2 ds dt + O(1) \int_\Lambda |\psi|^2 ds dt \\ &\geq \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \int_\Lambda |\psi|^2 ds dt + \int_\Lambda \frac{k \cdot \Theta}{\varepsilon} |\psi|^2 ds dt + O(1) \int_\Lambda |\psi|^2 ds dt. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Assim,

$$D_\varepsilon \geq \left[ \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 + \frac{k \cdot \Theta}{\varepsilon} + O(1) \right] \mathbf{1}.$$

Seja  $H_\varepsilon$  o operador desacoplado

$$H_\varepsilon := \left( -\Delta_{\mathbb{R}} + \frac{k \cdot \Theta}{\varepsilon} \mathbf{1} \right) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \left( -\frac{1}{\varepsilon^2} \Delta_{(0,1)}^{DN} \right)$$

agindo em  $L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(0, 1)$ . A aplicação

$$\psi \otimes \phi \longmapsto \psi(s)\phi(t), \quad \psi \in L^2(\mathbb{R}), \phi \in L^2(0, 1),$$

pode ser estendida a uma isomorfismo isométrico, em que

$$\|\psi \otimes \phi\|_{L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(0,1)} = \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\phi\|_{L^2(0,1)},$$

para todo  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ , para todo  $\phi \in L^2(0, 1)$ . Assim,  $H_\varepsilon$  pode ser identificado como um operador em  $L^2(\Lambda)$ .

Fixe uma número  $\mathbf{k} > 0$  tal que

$$\mathbf{k} + \inf k \cdot \Theta > 0.$$

Consequentemente,  $D_\varepsilon - (\pi/2\varepsilon)^2 \mathbf{1} + (\mathbf{k}/\varepsilon) \mathbf{1}$  e  $H_\varepsilon - (\pi/2\varepsilon)^2 \mathbf{1} + (\mathbf{k}/\varepsilon) \mathbf{1}$  são operadores positivos.

Agora, temos condições para enunciar o seguinte resultado.

**Teorema 5.2.** *Sob as condições em (5.1) e (5.2). Se  $k \cdot \Theta \neq 0$ , então existem constantes positivas  $\varepsilon_4$  e  $K_6$  tais que, para cada  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_4)$ ,*

$$\left\| \left[ \left( D_\varepsilon - \left( \frac{\pi}{2\varepsilon} \right)^2 \mathbf{1} \right) + \frac{\mathbf{k}}{\varepsilon} \mathbf{1} \right]^{-1} - \left[ \left( H_\varepsilon - \left( \frac{\pi}{2\varepsilon} \right)^2 \mathbf{1} \right) + \frac{\mathbf{k}}{\varepsilon} \mathbf{1} \right]^{-1} \right\| \leq K_6 \varepsilon^{3/2}.$$

A prova do Teorema 5.2 é dividida em duas etapas; Proposições 5.4 e 5.5 enunciadas abaixo. Para simplificar, escrevemos

$$L_\varepsilon := \left( D_\varepsilon - \left( \frac{\pi}{2\varepsilon} \right)^2 \mathbf{1} \right) + \frac{\mathbf{k}}{\varepsilon} \mathbf{1}.$$

A forma quadrática associada a  $L_\varepsilon$  é denotada por  $l_\varepsilon(\psi)$ ;  $\text{dom } l_\varepsilon = \mathfrak{D}$ .

Agora, introduzimos um operador intermediário da seguinte maneira. As condições em (5.1) e (5.2) implicam que

$$\|1/f_\varepsilon^2 - 1\|_{L^\infty(\Lambda)} \leq K_7 \varepsilon, \quad \|\partial_s f_\varepsilon / f_\varepsilon^3\|_{L^\infty(\Lambda)} \leq K_7 \varepsilon, \quad \|V_\varepsilon\|_{L^\infty(\Lambda)} \leq K_7, \quad (5.9)$$

para algum  $K_7 > 0$ . Essas estimativas motivam a definição da forma quadrática

$$m_\varepsilon(\psi) := \int_\Lambda |\partial_s \psi|^2 ds dt + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_\Lambda \left[ |\partial_t \psi|^2 - \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 |\psi|^2 \right] ds dt + \int_\Lambda \frac{\mathbf{k}}{\varepsilon} |\psi|^2 ds dt + \int_\partial \mathbf{v}_\varepsilon |\psi|^2 ds dt,$$

dom  $m_\varepsilon = \mathfrak{D}$ . Denote por  $M_\varepsilon$  o operador autoadjunto associado a  $m_\varepsilon(\psi)$ .

O primeiro passo é provar que  $L_\varepsilon$  se aproxima de  $M_\varepsilon$  no sentido da norma dos resolventes, enquanto  $\varepsilon$  tende a zero.

**Lema 5.3.** *Sob as condições (5.1) e (5.2). Existe  $K_8 > 0$  tal que*

$$l_\varepsilon(\psi) \geq K_8 (\|\partial_s \psi\|_{L^2(\Lambda)}^2 + \varepsilon^{-1} \|\psi\|_{L^2(\Lambda)}^2), \quad m_\varepsilon(\psi) \geq K_8 (\|\partial_s \psi\|_{L^2(\Lambda)}^2 + \varepsilon^{-1} \|\psi\|_{L^2(\Lambda)}^2),$$

para todo  $\psi \in \mathfrak{D}$ , para todo  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno.

*Demonstração.* Da limitação inferior obtida em (5.8), segue facilmente que

$$l_\varepsilon(\psi) \geq K_9(\|\partial_s \psi\|_{L^2(\Lambda)}^2 + \varepsilon^{-1}\|\psi\|_{L^2(\Lambda)}^2), \quad (5.10)$$

para algum  $K_9 > 0$ . Pelas estimativas em (5.9), tem-se

$$\begin{aligned} |l_\varepsilon(\psi) - m_\varepsilon(\psi)| &\leq \int_\Lambda \left| \frac{1}{f_\varepsilon^2} - 1 \right| |\partial_s \psi|^2 ds dt + \int_\Lambda |V_\varepsilon| |\psi|^2 ds dt + \int_\Lambda \left| \frac{\partial_s f_\varepsilon}{f_\varepsilon^3} \right| |\psi| |\partial_s \psi| ds dt \\ &\leq K_{10}(\varepsilon \|\partial_s \psi\|_{L^2(\Lambda)}^2 + \|\psi\|_{L^2(\Lambda)}^2), \end{aligned} \quad (5.11)$$

para algum  $K_{10} > 0$ . Usando (5.10) em (5.11), obtemos

$$m_\varepsilon(\psi) \geq K_{11}(\|\partial_s \psi\|_{L^2(\Lambda)}^2 + \varepsilon^{-1}\|\psi\|_{L^2(\Lambda)}^2),$$

para algum  $K_{11} > 0$ . □

Como consequência do Lema 5.3,  $L_\varepsilon$  e  $M_\varepsilon$  são operadores positivos e

$$\|L_\varepsilon^{-1}\| \leq K_8^{-1}\varepsilon, \quad \|M_\varepsilon^{-1}\| \leq K_8^{-1}\varepsilon. \quad (5.12)$$

Essas estimativas serão úteis posteriormente.

**Proposição 5.4.** *Sob as condições em (5.1) e (5.2). Existem constantes positivas  $\varepsilon_5$  e  $K_{12}$  tais que, para cada  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_5)$ ,*

$$\|L_\varepsilon^{-1} - M_\varepsilon^{-1}\| \leq K_{12}\varepsilon^2.$$

*Demonstração.* Denote por  $l_\varepsilon(\phi, \varphi)$  e  $m_\varepsilon(\phi, \varphi)$  as formas sesquilineares associadas a  $l_\varepsilon(\psi)$  e  $m_\varepsilon(\psi)$ , respectivamente. Devido às estimativas em (5.9),

$$\begin{aligned} |l_\varepsilon(\phi, \varphi) - m_\varepsilon(\phi, \varphi)| &\leq \int_\Lambda \left| \frac{1}{f_\varepsilon^2} - 1 \right| |\partial_s \phi| |\partial_s \varphi| ds dt + \int_\Lambda |V_\varepsilon| |\phi| |\varphi| ds dt \\ &\quad + \int_\Lambda \left| \frac{\partial_s f_\varepsilon}{f_\varepsilon^3} \right| |\bar{\phi} \partial_s \varphi + \bar{\varphi} \partial_s \phi| ds dt \\ &\leq K_{13} \sqrt{\varepsilon \|\partial_s \phi\|_{L^2(\Lambda)}^2 + \|\phi\|_{L^2(\Lambda)}^2} \sqrt{\varepsilon \|\partial_s \varphi\|_{L^2(\Lambda)}^2 + \|\varphi\|_{L^2(\Lambda)}^2}, \end{aligned}$$

para algum  $K_{13} > 0$ . Pelo Lema 5.3, segue que

$$|l_\varepsilon(\phi, \varphi) - m_\varepsilon(\phi, \varphi)| \leq K_{14}\varepsilon \sqrt{m_\varepsilon(\phi) l_\varepsilon(\varphi)}, \quad (5.13)$$

para algum  $K_{14} > 0$ .

Agora, seja  $\eta, \xi \in L^2(\Lambda)$  funções arbitrárias. Tome  $\phi = M_\varepsilon^{-1}\eta$  e  $\varphi = L_\varepsilon^{-1}\xi$ . Denotando por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  o produto interno em  $L^2(\Lambda)$ , temos  $\langle M_\varepsilon^{-1}\eta, \eta \rangle = m_\varepsilon(\phi)$ ,  $\langle L_\varepsilon^{-1}\xi, \xi \rangle = l_\varepsilon(\varphi)$ , e

$$|\langle (L_\varepsilon^{-1} - M_\varepsilon^{-1})\eta, \xi \rangle| = |m_\varepsilon(\phi, \varphi) - l_\varepsilon(\phi, \varphi)|.$$

Assim, pela estimativa em (5.13),

$$|\langle (L_\varepsilon^{-1} - M_\varepsilon^{-1})\eta, \xi \rangle| \leq K_{14}\varepsilon \sqrt{\langle M_\varepsilon^{-1}\eta, \eta \rangle \langle L_\varepsilon^{-1}\xi, \xi \rangle}. \quad (5.14)$$

Finalmente, (5.12) e (5.14) implicam que

$$|\langle (L_\varepsilon^{-1} - M_\varepsilon^{-1})\eta, \xi \rangle| \leq K_{15}\varepsilon^2 \|\eta\|_{L^2(\Lambda)} \|\xi\|_{L^2(\Lambda)},$$

para algum  $K_{15} > 0$ . Assim, segue a prova.  $\square$

O próximo passo é provar que  $M_\varepsilon$  se aproxima do operador autoadjunto

$$N_\varepsilon := \left( H_\varepsilon - \left( \frac{\pi}{2\varepsilon} \right)^2 \mathbf{1} \right) + \frac{\mathbf{k}}{\varepsilon} \mathbf{1}$$

no sentido da norma dos resolventes, enquanto  $\varepsilon$  tende a zero. Denote por  $n_\varepsilon(\psi)$  a forma quadrática associada ao operador  $N_\varepsilon$ ;  $\text{dom } n_\varepsilon = \mathfrak{D}$ . Um cálculo simples mostra que

$$n_\varepsilon(\psi) = \int_\Lambda |\partial_s \psi|^2 ds dt + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_\Lambda \left[ |\partial_t \psi|^2 - \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 |\psi|^2 \right] ds dt + \int_\Lambda \frac{k \cdot \Theta + \mathbf{k}}{\varepsilon} |\psi|^2 ds dt.$$

Observe que

$$n_\varepsilon(\psi) \geq K_{16} (\|\partial_s \psi\|_{L^2(\Lambda)}^2 + \varepsilon^{-1} \|\psi\|_{L^2(\Lambda)}^2), \quad (5.15)$$

para algum  $K_{16} > 0$ . Consequentemente,  $N_\varepsilon$  é um operador positivo e

$$\|N_\varepsilon^{-1}\| \leq K_{16}^{-1} \varepsilon. \quad (5.16)$$

**Proposição 5.5.** *Sob as condições (5.1) e (5.2). Se  $k \cdot \Theta \neq 0$ , então existem constantes positivas  $\varepsilon_6$  e  $K_{17}$  tais que, para cada  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_6)$ ,*

$$\|M_\varepsilon^{-1} - N_\varepsilon^{-1}\| \leq K_{17} \varepsilon^{3/2}.$$

*Demonstração.* Considere o subespaço fechado

$$\mathcal{A} := \{ \psi_w := w(s) \chi_1(t) : w \in H^1(\mathbb{R}) \}$$

do espaço de Hilbert  $L^2(\Lambda)$ ; lembre-se que  $\chi_1(t) := \sqrt{2} \text{sen}(\pi t/2)$  é a autofunção correspondente ao primeiro autovalor de  $-\Delta_{(0,1)}^{DN}$ , em que  $-\Delta_{(0,1)}^{DN}$  denota o operador Laplaciano em  $(0,1)$  com as condições de contorno de Dirichlet e de Neumann em  $\{0\}$  e  $\{1\}$ , respectivamente. Temos a decomposição ortogonal  $L^2(\Lambda) = \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}^\perp$ . Cada  $\psi \in \mathfrak{D}$  pode ser escrito como

$$\psi = \psi_w + \psi_w^\perp, \quad w \in H^1(\mathbb{R}), \quad \psi_w^\perp \in \mathfrak{D} \cap \mathcal{A}^\perp. \quad (5.17)$$

Em particular, para cada  $\psi_w^\perp \in \mathfrak{D} \cap \mathcal{A}^\perp$ ,

$$\int_0^1 \psi_w^\perp(s, t) \chi_1(t) dt = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^1 \partial_s \psi_w^\perp(s, t) \chi_1(t) dt = 0, \quad (5.18)$$

para quase todo  $s \in \mathbb{R}$ .

De acordo com (5.17),

$$n_\varepsilon(\psi) = n_\varepsilon(\psi_w) + 2\operatorname{Re} n_\varepsilon(\psi_w, \psi_w^\perp) + n_\varepsilon(\psi_w^\perp);$$

$n_\varepsilon(\phi, \phi)$  denota a forma sesquilinear associada a  $n_\varepsilon(\psi)$ . Como uma consequência de (5.18), temos  $n_\varepsilon(\psi_w, \psi_w^\perp) = 0$ . Além disso,

$$\begin{aligned} n_\varepsilon(\psi_w^\perp) &\geq \frac{1}{\varepsilon^2} \|\partial_t \psi_w^\perp\|_{L^2(\Lambda)}^2 - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \|\psi_w^\perp\|_{L^2(\Lambda)}^2 \\ &= \frac{1}{2\varepsilon^2} \|\partial_t \psi_w^\perp\|_{L^2(\Lambda)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2} \|\partial_t \psi_w^\perp\|_{L^2(\Lambda)}^2 - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \|\psi_w^\perp\|_{L^2(\Lambda)}^2 \\ &\geq \frac{1}{2\varepsilon^2} \|\partial_t \psi_w^\perp\|_{L^2(\Lambda)}^2 + \left(\frac{1}{2} \left(\frac{3\pi}{2\varepsilon}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2\right) \|\psi_w^\perp\|_{L^2(\Lambda)}^2 \\ &\geq \frac{1}{2\varepsilon^2} \left( \|\partial_t \psi_w^\perp\|_{L^2(\Lambda)}^2 + \|\psi_w^\perp\|_{L^2(\Lambda)}^2 \right); \end{aligned} \quad (5.19)$$

a segunda desigualdade segue do Princípio do Minimax, em que  $(3\pi/2)^2$  corresponde ao segundo autovalor de  $-\Delta_{(0,1)}^{DN}$ .

Agora, defina a forma quadrática auxiliar

$$q_\varepsilon(\psi) := m_\varepsilon(\psi) - n_\varepsilon(\psi) = \int_{\partial} \mathbf{v}_\varepsilon |\psi|^2 ds dt - \int_{\Lambda} \frac{k \cdot \Theta}{\varepsilon} |\psi|^2 ds dt,$$

dom  $q_\varepsilon = \mathfrak{D}$ . Em particular,

$$|q_\varepsilon(\psi)| \leq |q_\varepsilon(\psi_w)| + 2|q_\varepsilon(\psi_w, \psi_w^\perp)| + |q_\varepsilon(\psi_w^\perp)|; \quad (5.20)$$

$q_\varepsilon(\phi, \phi)$  denota a forma sesquilinear associada a  $q_\varepsilon(\psi)$ . Um cálculo simples mostra que

$$q_\varepsilon(\psi_w) = \int_{\mathbb{R}} \left( 2\mathbf{v}_\varepsilon - \frac{k \cdot \Theta}{\varepsilon} \right) |w|^2 ds.$$

Como  $k \cdot \Theta \neq 0$ , (5.1) e (5.2) implicam que

$$\|2\mathbf{v}_\varepsilon - k \cdot \Theta / \varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq K_{18}, \quad \|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq K_{18}\varepsilon^{-1},$$

para algum  $K_{18} > 0$ . Essas estimativas, juntamente com (5.15) e (5.19), garantem que existem  $K_{19}, K_{20}, K_{21} > 0$  tais que

$$|q_\varepsilon(\psi_w)| \leq K_{18} \|w\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq K_{19} \varepsilon n_\varepsilon(\psi_w), \quad (5.21)$$

e

$$\begin{aligned} |q_\varepsilon(\psi_w^\perp)| &\leq K_{20} \varepsilon^{-1} \left( \int_{\partial} |\psi_w^\perp|^2 ds dt + \int_{\Lambda} |\psi_w^\perp|^2 ds dt \right) \\ &= K_{20} \varepsilon^{-1} \left( 2\operatorname{Re} \int_{\Lambda} \overline{\psi_w^\perp} \partial_t \psi_w^\perp ds dt + \int_{\Lambda} |\psi_w^\perp|^2 ds dt \right) \\ &\leq K_{20} \varepsilon^{-1} \left( 2\|\psi_w^\perp\|_{L^2(\Lambda)} \|\partial_t \psi_w^\perp\|_{L^2(\Lambda)} + \|\psi_w^\perp\|_{L^2(\Lambda)}^2 \right) \\ &\leq 3K_{20} \varepsilon^{-1} \left( \|\partial_t \psi_w^\perp\|_{L^2(\Lambda)}^2 + \|\psi_w^\perp\|_{L^2(\Lambda)}^2 \right) \\ &\leq K_{21} \varepsilon n_\varepsilon(\psi_w^\perp). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Finalmente, alguns cálculos mostram que

$$\begin{aligned} |q_\varepsilon(\psi_w, \psi_w^\perp)| &= \left| \int_{\partial} \mathbf{v}_\varepsilon \psi_w \overline{\psi_w^\perp} ds dt \right| \leq K_{18} \varepsilon^{-1} \left( \int_{\partial} |\psi_w|^2 ds dt \right)^{1/2} \left( \int_{\partial} |\psi_w^\perp|^2 ds dt \right)^{1/2} \\ &\leq 2K_{18} \varepsilon^{-1} \|w\|_{L^2(\mathbb{R})} \left( \|\psi_w^\perp\|_{L^2(\Lambda)} \|\partial_t \psi_w^\perp\|_{L^2(\Lambda)} \right)^{1/2} \\ &\leq 2K_{18} \varepsilon^{-1} \|w\|_{L^2(\mathbb{R})} \left( \|\partial_t \psi_w^\perp\|_{L^2(\Lambda)}^2 + \|\psi_w^\perp\|_{L^2(\Lambda)}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Combinando essa estimativa com (5.15) e (5.19), tem-se

$$\begin{aligned} |q_\varepsilon(\psi_w, \psi_w^\perp)| &\leq K_{22} \varepsilon^{1/2} \sqrt{n_\varepsilon(\psi_w) n_\varepsilon(\psi_w^\perp)} \\ &\leq K_{22} \varepsilon^{1/2} \left( n_\varepsilon(\psi_w) + n_\varepsilon(\psi_w^\perp) \right), \end{aligned} \quad (5.23)$$

para algum  $K_{22} > 0$ . Como uma consequência de (5.20)-(5.23), segue que

$$|q_\varepsilon(\psi)| \leq K_{23} \varepsilon^{1/2} (n_\varepsilon(\psi_w) + n_\varepsilon(\psi_w^\perp)) = K_{23} \varepsilon^{1/2} n_\varepsilon(\psi), \quad (5.24)$$

para algum  $K_{23} > 0$ .

Pela identidade de polarização

$$|q_\varepsilon(\phi, \phi)| \leq \frac{1}{4} (|q_\varepsilon(\phi - \phi)| + |q_\varepsilon(\phi + \phi)| + |q_\varepsilon(\phi + i\phi)| + |q_\varepsilon(\phi - i\phi)|).$$

Aplicando (5.24) em cada termo do lado direito da estimativa anterior, tem-se

$$|q_\varepsilon(\phi, \phi)| \leq K_{23} \varepsilon^{1/2} (n_\varepsilon(\phi) + n_\varepsilon(\phi)). \quad (5.25)$$

Como  $q_\varepsilon(\psi) = m_\varepsilon(\psi) - n_\varepsilon(\psi)$ , reescrevendo (5.24), obtemos

$$K_{24} n_\varepsilon(\phi) \leq m_\varepsilon(\phi) \leq K_{24} n_\varepsilon(\phi), \quad (5.26)$$

para algum  $K_{24} > 0$ . Combinando (5.25) e (5.26), tem-se

$$|q_\varepsilon(\phi, \phi)| \leq K_{25} \varepsilon^{1/2} (n_\varepsilon(\phi) + m_\varepsilon(\phi)), \quad (5.27)$$

para algum  $K_{25} > 0$ .

Agora, sejam  $\eta, \xi \in L^2(\Lambda)$  funções arbitrárias. De maneira similar à prova da Proposição 5.4, usando a estimativa (5.27), conseguimos mostrar que

$$|\langle (M_\varepsilon^{-1} - N_\varepsilon^{-1})\eta, \xi \rangle| \leq K_{25} \varepsilon^{1/2} (\langle N_\varepsilon^{-1}\eta, \eta \rangle + \langle M_\varepsilon^{-1}\xi, \xi \rangle). \quad (5.28)$$

Por (5.12), (5.16) e (5.28), segue que

$$|\langle (M_\varepsilon^{-1} - N_\varepsilon^{-1})\eta, \xi \rangle| \leq K_{26} \varepsilon^{3/2} \left( \|\eta\|_{L^2(\Lambda)}^2 + \|\xi\|_{L^2(\Lambda)}^2 \right),$$

para algum  $K_{26} > 0$ . Assim, obtemos o resultado.  $\square$

**Prova do Teorema 5.2.** O resultado segue de uma aplicação direta das Proposições 5.4 e 5.5.  $\square$

Por fim, apresentamos a prova do Teorema 5.1. Começamos com o seguinte resultado.

**Lema 5.6.** *Suponha  $k \cdot \Theta \in L^\infty(\mathbb{R})$ . Tem-se*

$$\lambda_1(H_\varepsilon) = \lambda_1\left(-\Delta_{\mathbb{R}} + \frac{k \cdot \Theta}{\varepsilon} \mathbf{1}\right) + \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2.$$

Além disso, para qualquer inteiro  $N \geq 2$ , existe uma constante positiva  $\varepsilon_7 := \varepsilon_7(N, k \cdot \Theta)$  tal que, para cada  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_7)$ ,

$$\lambda_j(H_\varepsilon) = \lambda_j\left(-\Delta_{\mathbb{R}} + \frac{k \cdot \Theta}{\varepsilon} \mathbf{1}\right) + \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2, \quad \forall j \in \{2, \dots, N\}.$$

A prova deste lema pode ser obtida por simples adaptações da prova do Lema 3.5 de [33], que será omitida neste texto.

**Prova do Teorema 5.1.** Para cada  $j \in \mathbb{N}$ , considere  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno tal que as conclusões do Teorema 5.2 e Lema 5.6 sejam satisfeitas. O Teorema 5.2 e o Lema 5.6 garantem que

$$\left| \frac{1}{\varepsilon(\lambda_j(-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^{DN}) - (\pi/2\varepsilon)^2) + \mathbf{k}} - \frac{1}{\varepsilon\lambda_j(-\Delta_{\mathbb{R}} - (k \cdot \Theta/\varepsilon)\mathbf{1}) + \mathbf{k}} \right| \leq K_6 \varepsilon^{1/2}.$$

Pelo Teorema A.9 do Apêndice A, segue que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \left[ \lambda_j(-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^{DN}) - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \lambda_j\left(-\Delta_{\mathbb{R}} + \frac{k \cdot \Theta}{\varepsilon} \mathbf{1}\right) = \inf(k \cdot \Theta).$$

$\square$

Observe que (o efeito de torção)  $\Theta'$  não influencia o comportamento assintótico dado por (5.3). Como em [33], podemos usar o comportamento assintótico para garantir a existência de espectro discreto para  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^{DN}$ . De fato, assuma as hipóteses do Teorema 5.1 e as condições em (4.4). Neste caso, tem-se  $\inf \sigma_{\text{ess}}(-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^{DN}) = (\pi/2\varepsilon)^2$ . Se  $k \cdot \Theta$  assume um valor negativo, então, para cada  $j \in \mathbb{N}$ , a igualdade (5.3) implica a existência de autovalores discretos para  $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^{DN}$ . Além disso, o número desses autovalores pode ser arbitrariamente grande quando  $\Omega_\varepsilon$  é suficientemente fina. Como também observado em [33, 34], a existência de espectro discreto é regida por um fenômeno local, isto é, pelos pontos extremos onde o raio de curvatura de  $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathbb{R} \times \{1\})$  é localmente maior que o raio de curvatura de  $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathbb{R} \times \{0\})$ .

**Observação 5.7.** Seja  $\Sigma$  uma hipersuperfície de classe  $C^2$ , conexa e orientável em  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ , cuja orientação é regida por um campo de vetor normal unitário definido globalmente  $\mathbf{n} : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^{d-1}$ . Para cada  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, defina a vizinhança tubular  $\mathcal{T} := \{x + \varepsilon t \mathbf{n}(x) \in \mathbb{R}^d : (x, t) \in \Sigma \times (0, 1)\}$ . Em [34], foi considerado o operador Laplaciano sujeito as condições de Dirichlet e

Neumann em  $\Sigma$  e  $\Sigma_\varepsilon := \Sigma + \varepsilon \mathbf{n}(\Sigma)$ , respectivamente. Usando a notação  $-\Delta_{\mathcal{F}}^{DN}$  para este operador, nesse trabalho, os autores provaram que

$$\lambda_j(-\Delta_{\mathcal{F}}^{DN}) = \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 + \lambda_j\left(-\Delta_\Sigma + \frac{k_M}{\varepsilon}\mathbf{1}\right) + O(1), \quad (5.29)$$

em que  $-\Delta_\Sigma$  denota o operador Laplace-Beltrami em  $\Sigma$ , sujeito a condição de Dirichlet se  $\partial\Sigma$  é não vazio, e  $k_M$  é um múltiplo  $d - 1$  da curvatura média de  $\Sigma$ ; a expansão assintótica é local e depende dos pontos extremos onde a razão entre as áreas das fronteiras com condição de Neumann pela a de Dirichlet é localmente maior.

O Teorema 5.1 é obtido como consequência da “convergência” no sentido da norma dos resolventes da família de operadores  $\{-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^{DN}\}_{\varepsilon>0}$ . No Teorema 5.1, devido à dependência  $\varepsilon$  do operador  $-\Delta_{\mathbb{R}} + (k \cdot \Theta/\varepsilon)\mathbf{1}$ , não temos um operador efetivo no sentido usual, quando  $\varepsilon$  se aproxima de zero. Este fenômeno também foi observado em [33, 34], e pode ser visto como uma característica devido às condições de contorno do modelo. Na Seção 5.3, apresentamos uma adaptação deste problema que elimina a dependência  $\varepsilon$  do operador efetivo.

## 5.2 Faixas finas puramente torcidas

Ao longo desta seção consideramos que  $\Omega_\varepsilon$  é uma faixa puramente torcida, ou seja,  $k \cdot \Theta = 0$ . Nessa condição, esta seção é dedicada à prova do seguinte resultado.

**Teorema 5.8.** *Sob as condições (5.1) e (5.2). Se  $k \cdot \Theta = 0$ , então, para cada  $j \in \mathbb{N}$ ,*

$$\lambda_j(-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^{DN}) = \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 + \lambda_j\left(-\Delta_{\mathbb{R}} - \frac{|\Theta'|^2}{2}\mathbf{1}\right) + O(\varepsilon),$$

para todo  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno.

Com a finalidade de auxiliar na associação entre os dois casos, nesta seção mantemos as mesmas notações da Seção 5.1 para os operadores auxiliares e suas respectivas formas quadráticas. Além disso, por razões técnicas, tome

$$\mathbf{k} > \frac{\sup |\Theta'|^2}{2}.$$

Como  $k \cdot \Theta = 0$  e  $\Theta$  satisfaz (5.2), tem-se

$$\|1/f_\varepsilon^2 - 1\|_{L^\infty(\Lambda)} \leq K_{27}\varepsilon, \quad \|\partial_s f_\varepsilon / f_\varepsilon^3\|_{L^\infty(\Lambda)} \leq K_{27}\varepsilon, \quad \|V_\varepsilon - |\Theta'|^2/2\|_{L^\infty(\Lambda)} \leq K_{27}\varepsilon,$$

para algum  $K_{27} > 0$ . Essas estimativas motivam a definição da forma quadrática

$$\begin{aligned} m_\varepsilon(\psi) := & \int_\Lambda |\partial_s \psi|^2 ds dt + \int_\Lambda \left( \frac{|\partial_t \psi|^2}{\varepsilon^2} - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 |\psi|^2 \right) ds dt + \int_\Lambda \frac{|\Theta'|^2}{2} |\psi|^2 ds dt \\ & + \int_\partial \mathbf{v}_\varepsilon |\psi|^2 ds dt + \mathbf{k} \int_\Lambda |\psi|^2 ds dt, \end{aligned}$$

dom  $m_\varepsilon = \mathfrak{D}$ . Denote por  $M_\varepsilon$  o operador autoadjunto associado a  $m_\varepsilon(\psi)$ . O Teorema 3 de [3] garante que

$$\left\| \left[ \left( D_\varepsilon - \left( \frac{\pi}{2\varepsilon} \right)^2 \mathbf{1} \right) + \mathbf{k1} \right]^{-1} - M_\varepsilon^{-1} \right\| \leq K_{28}\varepsilon, \quad (5.30)$$

para algum  $K_{28} > 0$ .

Agora, defina a forma quadrática unidimensional

$$n_\varepsilon(w) := m_\varepsilon(w\chi_1) = \int_{\mathbb{R}} \left( |w'|^2 + \left( \frac{|\Theta'|^2}{2} + 2\mathbf{v}_\varepsilon \right) |w|^2 \right) dsdt + \mathbf{k} \int_{\mathbb{R}} |w|^2 dsdt,$$

dom  $n_\varepsilon = H^1(\mathbb{R})$ . Denote por  $N_\varepsilon$  o operador autoadjunto associado a  $n_\varepsilon(\psi)$ . Considerando a decomposição ortogonal dada em (5.17), obtemos o seguinte resultado.

**Proposição 5.9.** *Existe um número  $K_{29} > 0$  tal que*

$$\|M_\varepsilon^{-1} - N_\varepsilon^{-1} \oplus \mathbf{0}\| \leq K_{29}\varepsilon^{1/2}, \quad (5.31)$$

para todo  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, em que  $\mathbf{0}$  é o operador nulo no subespaço  $\mathcal{A}^\perp$ .

*Demonstração.* Por (5.17), cada  $\psi \in \mathfrak{D}$  pode ser escrito como

$$\psi = w\chi_1 + \psi_w^\perp, \quad w \in H^1(\mathbb{R}), \psi_w^\perp \in \mathfrak{D} \cap \mathcal{A}^\perp.$$

Observe que

$$m_\varepsilon(w\chi_1) = n_\varepsilon(w) \geq K_{30}\|w\|_{L^2(\mathbb{R})}^2,$$

para algum  $K_{30} > 0$ , e

$$m_\varepsilon(\psi_w^\perp) \geq \frac{1}{2\varepsilon^2} \left( \|\partial_t \psi_w^\perp\|_{L^2(\Lambda)}^2 + \|\psi_w^\perp\|_{L^2(\Lambda)}^2 \right);$$

a última estimativa segue mesma a linha de (5.19). Denote por  $m_\varepsilon(\phi, \varphi)$  a forma sesquilinear associada a  $m_\varepsilon(\psi)$ . Seguindo o mesmo procedimento da primeira desigualdade de (5.23), encontramos

$$m_\varepsilon(w\chi_1, \psi_w^\perp) \leq K_{31}\varepsilon^{1/2} \sqrt{n_\varepsilon(w)m_\varepsilon(\psi_w^\perp)},$$

para algum  $K_{31} > 0$ . Então, o resultado segue pela Proposição 3.1 de [26].  $\square$

Como  $k \cdot \Theta = 0$  e  $|\Theta'| \in L^\infty(\mathbb{R})$ , tem-se

$$\|2\mathbf{v}_\varepsilon + |\Theta'|^2\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq K_{32}\varepsilon,$$

para algum  $K_{32} > 0$ . Assim, define a forma quadrática

$$n(w) := \int_{\mathbb{R}} \left( |w'|^2 - \frac{|\Theta'|^2}{2} |w|^2 \right) dsdt + \mathbf{k} \int_{\mathbb{R}} |w|^2 dsdt,$$

dom  $n = H^1(\mathbb{R})$ . Denote por  $N$  o operador autoadjunto associado a  $n(w)$ . Novamente, o Teorema 3 de [3] implica que

$$\|N_\varepsilon^{-1} - N^{-1}\| \leq K_{33}\varepsilon, \quad (5.32)$$

para algum  $K_{33} > 0$ .

Como uma consequência de (5.30)-(5.32), tem-se

$$\left\| \left[ \left( D_\varepsilon - \left( \frac{\pi}{2\varepsilon} \right)^2 \mathbf{1} \right) + \mathbf{k1} \right]^{-1} - \left[ \left( -\Delta_{\mathbb{R}} - \frac{|\Theta'|^2}{2} \mathbf{1} \right) + \mathbf{k1} \right]^{-1} \oplus \mathbf{0} \right\| \leq K_{34} \varepsilon^{1/2}, \quad (5.33)$$

para algum  $K_{34} > 0$ .

**Prova do Teorema 5.8.** A prova deste resultado segue da estimativa (5.33) acima.  $\square$

### 5.3 Faixas com escala

Nesta seção, realizamos uma dilatação horizontal em  $\Omega_\varepsilon$  com o objetivo de eliminar a dependência  $\varepsilon$  do operador efetivo encontrado em Teorema 5.1 na Seção 5.1. Nos próximos parágrafos, apresentamos os detalhes dessa nova situação.

Para cada  $\varepsilon > 0$ , seja  $\Theta_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função de classe  $C^1$  definida por

$$\Theta_\varepsilon(s) := \Theta \left( \frac{s}{\sqrt{\varepsilon}} \right), \quad s \in \mathbb{R};$$

usando a notação  $\Theta_\varepsilon(s) = (\Theta_1^\varepsilon, \dots, \Theta_n^\varepsilon)$ , como  $\Theta_1^2 + \dots + \Theta_n^2 = 1$ , tem-se  $(\Theta_1^\varepsilon)^2 + \dots + (\Theta_n^\varepsilon)^2 = 1$ . Com respeito à curva de referência  $\Gamma$ , denote por  $\Gamma_\varepsilon$  a curva da classe  $C^2$  cuja curvatura  $k_\varepsilon$  é dada por

$$k_\varepsilon(s) := k \left( \frac{s}{\sqrt{\varepsilon}} \right), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Os campos vetoriais normais de  $\Gamma_\varepsilon$  são denotados por  $N_1^\varepsilon, \dots, N_n^\varepsilon$ , e  $N_{\Theta_\varepsilon}^\varepsilon := \Theta_1^\varepsilon N_1^\varepsilon + \dots + \Theta_n^\varepsilon N_n^\varepsilon$ . Assim, considere a aplicação

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{L}}_\varepsilon : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \\ (s, t) &\longmapsto \Gamma_\varepsilon(s) + \varepsilon t N_{\Theta_\varepsilon}^\varepsilon(s), \end{aligned}$$

e defina a faixa fina

$$\widetilde{\Omega}_\varepsilon := \widetilde{\mathcal{L}}_\varepsilon(\mathbb{R} \times (0, 1)).$$

Seja  $-\Delta_{\widetilde{\Omega}_\varepsilon}^{DN}$  o operador Laplaciano em  $\widetilde{\Omega}_\varepsilon$  com condições de Dirichlet e Neumann em  $\Gamma_\varepsilon(\mathbb{R})$  e  $\widetilde{\mathcal{L}}_\varepsilon(\mathbb{R} \times \{1\})$ , respectivamente, isto é, o operador autoadjunto associado à forma quadrática

$$\tilde{a}_\varepsilon(\varphi) = \int_{\widetilde{\Omega}_\varepsilon} |\nabla \varphi|^2 dx, \quad \text{dom } \tilde{a}_\varepsilon = \{\varphi \in H^1(\widetilde{\Omega}_\varepsilon) : \varphi = 0 \text{ em } \Gamma_\varepsilon(\mathbb{R})\}. \quad (5.34)$$

O objetivo desta seção é provar o seguinte resultado.

**Teorema 5.10.** *Sob as condições (5.1) e (5.2). Para cada  $j \in \mathbb{N}$ ,*

$$\lambda_j(-\Delta_{\widetilde{\Omega}_\varepsilon}^{DN}) = \left( \frac{\pi}{2\varepsilon} \right)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \lambda_j \left( -\Delta_{\mathbb{R}} + \left( k \cdot \Theta - \frac{|\Theta'|^2}{2} \right) \mathbf{1} \right) + O(1), \quad (5.35)$$

para todo  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno.

Como no Teorema 5.1, o Teorema 5.10 também é consequência de uma convergência no sentido da norma dos resolventes da família de operadores  $\{-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^{DN}\}_{\varepsilon>0}$ . A princípio, defina

$$\tilde{f}_\varepsilon(s,t) := \sqrt{(1 - \varepsilon t(k_\varepsilon \cdot \Theta_\varepsilon)(s))^2 + \varepsilon^2 t^2 |\Theta'_\varepsilon(s)|^2}.$$

Fazendo uma mudança de variáveis semelhante à realizada na Seção 5.1,  $\tilde{a}_\varepsilon(\varphi)$  torna-se

$$\begin{aligned} \tilde{d}_\varepsilon(\psi) := & \int_\Lambda \frac{|\partial_s \psi|^2}{\tilde{f}_\varepsilon^2} ds dt + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_\Lambda |\partial_t \psi|^2 ds dt + \int_\Lambda \tilde{V}_\varepsilon |\psi|^2 ds dt \\ & - \operatorname{Re} \int_\Lambda \frac{\partial_s \tilde{f}_\varepsilon}{\tilde{f}_\varepsilon^3} \bar{\psi} \partial_s \psi ds dt + \int_\partial \tilde{v}_\varepsilon |\psi|^2 ds dt, \end{aligned}$$

$\operatorname{dom} \tilde{d}_\varepsilon := \{\psi \in H^1(\Lambda) : \psi(s,0) = 0 \text{ q.t.p. } s \in \mathbb{R}\} \subset L^2(\Lambda)$ , em que

$$\tilde{V}_\varepsilon(s,t) := \frac{1}{4} \frac{(\partial_s \tilde{f}_\varepsilon(s,t))^2}{\tilde{f}_\varepsilon(s,t)^4} - \frac{1}{4\varepsilon^2} \frac{(\partial_t \tilde{f}_\varepsilon(s,t))^2}{\tilde{f}_\varepsilon(s,t)^2} + \frac{1}{2\varepsilon^2} \frac{\partial_t^2 \tilde{f}_\varepsilon(s,t)}{\tilde{f}_\varepsilon(s,t)},$$

e

$$\tilde{v}_\varepsilon(s) := \frac{1}{2\varepsilon} \frac{(k_\varepsilon \cdot \Theta_\varepsilon)(s) - \varepsilon(k_\varepsilon \cdot \Theta_\varepsilon)(s)^2 - \varepsilon |\Theta'_\varepsilon(s)|^2}{(1 - \varepsilon(k_\varepsilon \cdot \Theta_\varepsilon)(s))^2 + \varepsilon^2 |\Theta'_\varepsilon(s)|^2}.$$

Lembre-se de que o sinal de integral  $\int_\partial$  se refere a uma integração sobre a fronteira  $\mathbb{R} \times \{1\}$ .

Agora, realizamos uma outra mudança de coordenadas com a finalidade de trabalhar com as funções  $k \cdot \Theta$  e  $|\Theta'|$  ao invés de  $k_\varepsilon \cdot \Theta_\varepsilon$  e  $|\Theta'_\varepsilon|$ . Seja  $\mathscr{W}_\varepsilon : L^2(\Lambda) \rightarrow L^2(\Lambda)$  o operador unitário gerado pela dilatação horizontal  $(s,t) \mapsto (\varepsilon^{1/2}s,t)$ , isto é,

$$(\mathscr{W}_\varepsilon \psi)(s,t) := \varepsilon^{1/4} \psi(\varepsilon^{1/2}s,t).$$

Obtemos a seguinte forma quadrática

$$y_\varepsilon(\psi) := \tilde{d}_\varepsilon(\mathscr{W}_\varepsilon^{-1} \psi),$$

$\operatorname{dom} y_\varepsilon := \{\psi \in H^1(\Lambda) : \psi(s,0) = 0 \text{ a.e. } s \in \mathbb{R}\}$ . Defina a função

$$\tilde{h}_\varepsilon(s,t) := \sqrt{(1 - \varepsilon t(k \cdot \Theta)(s))^2 + \varepsilon t^2 |\Theta'(s)|^2}.$$

Um cálculo simples mostra que

$$\begin{aligned} y_\varepsilon(\psi) := & \frac{1}{\varepsilon} \left[ \int_\Lambda \frac{|\partial_s \psi|^2}{\tilde{h}_\varepsilon^2} ds dt + \frac{1}{\varepsilon} \int_\Lambda |\partial_t \psi|^2 ds dt + \int_\Lambda W_\varepsilon |\psi|^2 ds dt \right. \\ & \left. - \operatorname{Re} \int_\Lambda \frac{\partial_s \tilde{h}_\varepsilon}{\tilde{h}_\varepsilon^3} \bar{\psi} \partial_s \psi ds dt + \int_\partial w_\varepsilon |\psi|^2 ds dt \right], \end{aligned}$$

em que

$$W_\varepsilon(s,t) := \frac{1}{4} \frac{(\partial_s \tilde{h}_\varepsilon(s,t))^2}{\tilde{h}_\varepsilon(s,t)^4} - \frac{1}{4\varepsilon} \frac{(\partial_t \tilde{h}_\varepsilon(s,t))^2}{\tilde{h}_\varepsilon(s,t)^2} + \frac{1}{2\varepsilon} \frac{\partial_t^2 \tilde{h}_\varepsilon(s,t)}{\tilde{h}_\varepsilon(s,t)},$$

e

$$w_\varepsilon(s) := \frac{1}{2} \frac{(k \cdot \Theta)(s) - \varepsilon(k \cdot \Theta)(s)^2 - |\Theta'(s)|^2}{(1 - \varepsilon(k \cdot \Theta)(s))^2 + \varepsilon |\Theta'(s)|^2}.$$

Por razões técnicas, tome uma constante

$$\tilde{\mathbf{k}} > \|(k \cdot \Theta) - |\Theta'|^2/2\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Defina a forma quadrática

$$\tilde{l}_\varepsilon(\psi) := \varepsilon \left[ y_\varepsilon(\psi) - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \int_\Lambda |\psi|^2 ds dt \right] + \tilde{\mathbf{k}} \int_\Lambda |\psi|^2 ds dt,$$

dom  $\tilde{l}_\varepsilon = \mathfrak{D}$ . Denote por  $\tilde{L}_\varepsilon$  o operador autoadjunto associado a  $\tilde{l}_\varepsilon(\psi)$ . Devido às condições (5.1) e (5.2), tem-se

$$\|1/\tilde{h}_\varepsilon^2 - 1\|_{L^\infty(\Lambda)} \leq K_{35}\varepsilon, \quad \|\partial_s \tilde{h}_\varepsilon / \tilde{h}_\varepsilon^3\|_{L^\infty(\Lambda)} \leq K_{35}\varepsilon, \quad (5.36)$$

$$\|W_\varepsilon - |\Theta'|^2/2\|_{L^\infty(\Lambda)} \leq K_{35}\varepsilon, \quad \|2w_\varepsilon - k \cdot \Theta + |\Theta'|^2\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq K_{35}\varepsilon, \quad (5.37)$$

para algum  $K_{35} > 0$ . Agora considere a forma quadrática unidimensional

$$\tilde{n}(w) := \int_{\mathbb{R}} \left( |w'|^2 + \left( k \cdot \Theta - \frac{|\Theta'|^2}{2} \right) |w|^2 \right) ds dt + \tilde{\mathbf{k}} \int_{\mathbb{R}} |w|^2 ds dt,$$

dom  $n = H^1(\mathbb{R})$ , e denote por  $\tilde{N}$  seu operador autoadjunto associado. Seguindo os mesmos passos da prova da Proposição 5.9, e usando as estimativas em (5.36) e (5.37), obtemos

$$\left\| \tilde{L}_\varepsilon^{-1} - \tilde{N}^{-1} \oplus \mathbf{0} \right\| \leq K_{36}\varepsilon^{1/2}, \quad (5.38)$$

para algum  $K_{36} > 0$ . Lembre-se de que  $\mathbf{0}$  é o operador nulo no subespaço  $\mathscr{A}^\perp$ .

**Prova do Teorema 5.10.** Pela estimativa (5.38), concluímos a prova do resultado.  $\square$

Enfatizamos que o operador efetivo em (5.35), ou seja, o operador

$$-\Delta_{\mathbb{R}} + \left( k \cdot \Theta - \frac{|\Theta'|^2}{2} \right) \mathbf{1},$$

não depende do parâmetro  $\varepsilon$ . Além disso, defina  $V(s) := (k \cdot \Theta)(s) - |\Theta'(s)|^2/2$  e assumamos as condições em (4.4). Como consequência do comportamento assintótico dado por (5.35), se existe um número real  $s_0 > 0$  tal que  $\int_{-s_0}^{s_0} V(s) ds < 0$ , então  $V(s)$  age como uma interação atrativa quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

---

# Laplaciano de Dirichlet em faixas cortadas

---

A seguir introduzimos uma nova faixa bidimensional e ilimitada que será o objeto de estudo deste capítulo. Na verdade, estudaremos o operador Laplaciano de Dirichlet restrito a essa região. Sejam  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$  um vetor unitário fixo e  $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva de classe  $C^2$  parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ , isto é,  $|\Gamma'(s)| = 1$ , para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , defina a faixa

$$\Pi := \{\Gamma(s) + \varepsilon t \mathbf{u} : (s, t) \in \mathbb{R} \times (-1, 1)\}.$$

A grosso modo,  $\Pi$  é obtido transladando o segmento  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  ao longo de  $\Gamma$  em relação ao vetor constante  $\mathbf{u}$ . Essa região é chamada de *faixa cortada*.

Seja  $-\Delta_{\Pi}^D$  o operador Laplaciano de Dirichlet em  $\Pi$ . Mais precisamente,  $-\Delta_{\Pi}^D$  é definido como o operador autoadjunto associado à forma quadrática

$$a(\varphi) = \int_{\Pi} |\nabla \varphi|^2 dx, \quad \text{dom } a := H_0^1(\Pi); \quad (6.1)$$

$\nabla \varphi$  denota o gradiente de  $\varphi$ . O objetivo deste capítulo é estudar o problema espectral de  $-\Delta_{\Pi}^D$ .

Este capítulo está organizado da seguinte forma. Na Seção 6.1 apresentamos mais detalhes sobre a geometria de  $\Pi$  e realizamos uma tradicional mudança de variáveis em  $a(\varphi)$ . As Seções 6.2 e 6.3 são dedicadas ao estudo do espectro essencial e discreto de  $-\Delta_{\Pi}^D$ , respectivamente. Por fim, na Seção 6.4, obtemos informações sobre o número de autovalores discretos do operador.

### 6.1 Geometria da faixa e mudança de variáveis

Nesta seção, identificamos  $\Pi$  com uma variedade Riemanniana  $(\Lambda, \mathcal{G})$ , onde  $\Lambda := \mathbb{R} \times (-1, 1)$  e  $\mathcal{G}$  é dada por (6.3) abaixo. Depois realizamos uma mudança de variáveis na forma quadrática  $a(\varphi)$ .

Considere a aplicação

$$\mathcal{L} : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, t) \longmapsto \Gamma(s) + \varepsilon t \mathbf{u} \end{array} \quad (6.2)$$

Observe que  $\Pi = \mathcal{L}(\Lambda)$ . Defina a métrica  $\mathcal{G} := \nabla \mathcal{L} \cdot (\nabla \mathcal{L})^\perp$ . Alguns cálculos direto mostram que

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \tau \\ \varepsilon \tau & \varepsilon^2 \end{pmatrix}, \quad \tau(s) := T(s) \cdot \mathbf{u}, \quad (6.3)$$

em que  $T(s) := \Gamma'(s)$  denota o vetor tangente unitário da curva  $\Gamma$  no ponto  $\Gamma(s)$ .

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que  $|\tau(s)| \leq \|T(s)\| \|\mathbf{u}\| = 1$ , para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Por razões técnicas, suponha que

$$\|\tau\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < 1. \quad (6.4)$$

Geometricamente, essa condição garante que os vetores  $T(s)$  e  $\mathbf{u}$  não podem ser paralelos.

Seja  $\mathcal{J}$  a matriz Jacobiana de  $\mathcal{L}$ . Tem-se

$$\det \mathcal{J} = |\det \mathcal{G}|^{1/2} = \varepsilon(1 - \tau^2)^{1/2} > 0,$$

para todo  $(s, t) \in \Lambda$ . Como  $\Gamma$  é uma aplicação suave, o teorema da função inversa implica que a aplicação  $\mathcal{L} : \Lambda \rightarrow \Pi$  é um difeomorfismo suave local. Em adição, suponha que  $\mathcal{L}$  é injetiva. Assim, a faixa  $\Pi$  não tem auto-intersecção e pode ser interpretada como uma subvariedade imersa no  $\mathbb{R}^3$ . Consequentemente, a aplicação  $\mathcal{L} : \Lambda \rightarrow \Pi$  é um difeomorfismo suave global. Portanto,  $(\Lambda, \mathcal{G})$  é uma variedade Riemanniana abstrata.

Agora, realizamos uma mudança de variáveis de tal modo que a forma quadrática  $a(\varphi)$  passe a atuar no espaço de Hilbert  $\mathcal{H} := L^2(\Lambda, g ds dt)$  em vez de  $L^2(\Pi)$ , em que

$$g(s) := \sqrt{1 - \tau(s)^2}. \quad (6.5)$$

Para isso, considere o operador unitário

$$\begin{aligned} \mathcal{U} : L^2(\Pi) &\longrightarrow L^2(\Lambda, g ds dt) \\ \psi &\longmapsto \varepsilon^{1/2} \psi \circ \mathcal{L} \end{aligned} ,$$

e defina a forma quadrática

$$\begin{aligned} b(\psi) &:= a(\mathcal{U}^{-1} \psi) = \int_{\Lambda} \langle \nabla \psi, \mathcal{G}^{-1} \nabla \psi \rangle g ds dt \\ &= \int_{\Lambda} \frac{1}{g} \left| \partial_s \psi - \frac{\tau}{\varepsilon} \partial_t \psi \right|^2 ds dt + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Lambda} |\partial_t \psi|^2 g ds dt, \end{aligned}$$

$\text{dom } b := \mathcal{U}(\text{dom } a)$ ;  $\partial_s = \partial/\partial t$  e  $\partial_t = \partial/\partial s$ . Como  $\tau \in L^\infty(\mathbb{R})$ , tem-se  $\text{dom } b = H_0^1(\Lambda) \subset \mathcal{H}$ . Denote por  $T$  o operador autoadjunto associado à forma quadrática  $b(\psi)$ . Os operadores  $-\Delta_{\Pi}^D$  e  $T$  são unitariamente equivalentes. Em particular, eles possuem o mesmo espectro.

## 6.2 Espectro essencial

Esta seção é dedicada ao estudo do espectro essencial do operador  $-\Delta_{\Pi}^D$ . Para isso, suponha que

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \tau(s) = \tau_0, \quad (6.6)$$

em que  $\tau_0$  é um número real. Pela condição em (6.4), segue que  $|\tau_0| < 1$ . Geometricamente, a condição (6.6) implica que o ângulo formado entre os vetores  $T(s)$  e  $\mathbf{u}$  é constante no infinito. Neste condições, provamos o seguinte resultado.

**Teorema 6.1.** *Sob as condições em (6.4) e (6.6). Tem-se*

$$\sigma_{ess}(-\Delta_{\Pi}^D) = [\lambda_1(0), \infty),$$

em que

$$\lambda_1(0) := \frac{1}{1 - \tau_0^2} \left( \frac{\pi}{2\varepsilon} \right)^2; \quad (6.7)$$

mais tarde discutiremos sobre a origem de  $\lambda_1(0)$ .

A seguir apresentamos a prova do Teorema 6.1, dividida em duas partes: Proposições 6.2 e 6.4, enunciados abaixo. Ao longo desta seção, suponha que as condições (6.4) e (6.6) são satisfeitas. Além disso, considere a forma quadrática auxiliar

$$c(\psi) := \int_{\Lambda} \frac{1}{g_0} \left| \partial_s \psi - \frac{\tau_0}{\varepsilon} \partial_t \psi \right|^2 ds dt + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Lambda} |\partial_t \psi|^2 g_0 ds dt, \quad \text{dom } c := H_0^1(\Lambda),$$

agindo no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_0 := L^2(\Lambda, g_0 ds dt)$ , em que

$$g_0(s) := \sqrt{1 - \tau_0^2}. \quad (6.8)$$

Denote por  $C$  o operador autoadjunto associado a  $c(\psi)$ . No Apêndice C apresentamos a prova do seguinte resultado.

**Proposição 6.2.** *Sob as condições em (6.4) e (6.6). Tem-se  $\sigma_{ess}(T) = \sigma_{ess}(C)$ .*

Como consequência da Proposição 6.2, vamos estudar o espectro essencial de  $C$ . Para isso, é mais conveniente realizar uma outra mudança de variáveis de tal modo que a forma quadrática  $c(\psi)$  passe a atuar no espaço de Hilbert  $L^2(\Lambda)$  com a métrica usual. Assim, considere o operador unitário

$$\begin{aligned} \mathcal{V} : L^2(\Lambda) &\longrightarrow L^2(\Lambda, f_0 ds dt) \\ \psi &\longmapsto g_0^{-1/2} \psi \end{aligned},$$

e defina a forma quadrática

$$d(\psi) := c(\mathcal{V}\psi) = \int_{\Lambda} \frac{1}{g_0^2} \left| \partial_s \psi - \frac{\tau_0}{\varepsilon} \partial_t \psi \right|^2 ds dt + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Lambda} |\partial_t \psi|^2 ds dt, \quad \text{dom } d := H_1^0(\Lambda).$$

Denote por  $D$  o operador autoadjunto associado a  $d(\psi)$ . Consequentemente,

$$\sigma_{ess}(C) = \sigma_{ess}(D). \quad (6.9)$$

Agora, vamos determinar o espectro essencial de  $D$ . Novamente, a estratégia é baseada em uma decomposição por integral direta do operador. Relembre-se que  $\mathcal{F}_s : L^2(\Lambda) \rightarrow L^2(\Lambda)$  é a transformada

de Fourier em relação a  $s$ , definida anteriormente por (2.7) no Capítulo 2. Então, o operador  $\hat{D} := \mathcal{F}_s D \mathcal{F}_s^{-1}$  admite a decomposição por integral direta

$$\hat{D} = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} D(p) \, dp, \quad (6.10)$$

em que, para cada  $p \in \mathbb{R}$ ,  $D(p)$  é o operador autoadjunto associado à forma quadrática

$$d(p)(v) := \int_{-1}^1 \frac{1}{g_0^2} \left| ipv - \frac{\tau_0}{\varepsilon} \partial_t v \right|^2 \, ds dt + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Lambda} |\partial_t v|^2 \, ds dt, \quad \text{dom } d(p) = H_0^1(-1, 1).$$

Mais precisamente,

$$D(p) = \frac{1}{g_0^2} \left( p \mathbf{1} + i \frac{\tau_0}{\varepsilon} \partial_t \right)^2 - \frac{\partial_t^2}{\varepsilon^2}, \quad \text{dom } D(p) = H^2(-1, 1) \cap H_0^1(-1, 1);$$

Como  $H_0^1(-1, 1) \hookrightarrow L^2(-1, 1)$  é compacto, segue que cada  $D(p)$  tem espectro puramente discreto. Denote por  $\{\lambda_n(p)\}_{n \in \mathbb{N}}$  a sequência de autovalores de  $D(p)$  e por  $\{u_n(p)\}_{n \in \mathbb{N}}$  a sequência das autofunções normalizadas correspondentes, ou seja,

$$D(p)u_n(p) = \lambda_n(p)u_n(p), \quad n \in \mathbb{N}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Pela decomposição em (6.10), temos

$$\sigma(D) = \cup_{p \in \mathbb{R}} \sigma(D(p)) = \cup_{n \in \mathbb{N}} \{\lambda_n(p) : p \in \mathbb{R}\}. \quad (6.11)$$

No caso  $p = 0$ , temos o seguinte operador

$$D(0) = -\frac{\partial_t^2}{\varepsilon^2 g_0^2}.$$

Em particular, seu primeiro autovalor corresponde a  $\lambda_1(0)$ , definido em (6.7), e  $u_1(0)(t) = \cos(\pi t/2)$  é autofunção correspondente. Para simplificar, denotamos  $\chi_1 := u_1(0)$ .

**Lema 6.3.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_n(\cdot)$  é uma função analítica real em  $p$  e

$$\lim_{p \rightarrow \pm\infty} \lambda_n(p) = \infty.$$

*Demonstração.* Para cada  $p \in \mathbb{R}$ , temos  $\text{dom } D(p) = \text{dom } D(0)$ , e podemos escrever

$$D(p) = D(0) + 2ip \frac{\tau_0}{\varepsilon g_0^2} \partial_t + \frac{p^2}{g_0^2} \mathbf{1}.$$

Seja  $z \in \mathbb{C}$  com  $\text{img } z \neq 0$  e denote por  $R_z := (D(0) - z\mathbf{1})^{-1}$ . Tem-se

$$\begin{aligned} \|\partial_t v\|_{L^2(\Lambda)}^2 &= \varepsilon^2 g_0^2 \langle v, D(0)v \rangle_{L^2(\Lambda)} \\ &= \varepsilon^2 g_0^2 \langle R_z(D(0) - z\mathbf{1})v, D(0)v \rangle_{L^2(\Lambda)} \\ &\leq \varepsilon^2 g_0^2 \left( \langle R_z D(0)v, D(0)v \rangle_{L^2(\Lambda)} + |z| \langle v, R_z D(0)v \rangle_{L^2(\Lambda)} \right) \\ &\leq \varepsilon^2 g_0^2 \left( \|R_z D(0)v\|_{L^2(\Lambda)} \|D(0)v\|_{L^2(\Lambda)} + |z| \langle v, R_z D(0)v \rangle_{L^2(\Lambda)} \right), \end{aligned}$$

para todo  $v \in \text{dom } D(0)$ . Usando a primeira identidade dos resolventes

$$R_\zeta - R_\nu = (\zeta - \nu)R_\zeta R_\nu,$$

para todo  $\zeta, \nu \in \rho(D(0))$ , obtemos

$$R_{\bar{z}} - D(0)^{-1} = \bar{z}R_{\bar{z}}D(0)^{-1}.$$

Assim,

$$R_{\bar{z}}D(0) = \mathbf{1} + \bar{z}R_{\bar{z}}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \|\partial_t v\|_{L^2(\Lambda)}^2 &\leq \varepsilon^2 g_0^2 \left( \|R_z D(0)v\|_{L^2(\Lambda)} \|D(0)v\|_{L^2(\Lambda)} + |z| \langle v, (\mathbf{1} + \bar{z}R_{\bar{z}})v \rangle_{L^2(\Lambda)} \right) \\ &\leq \varepsilon^2 g_0^2 (\|R_z\| \|D(0)v\|_{L^2(\Lambda)}^2 + (|z| + |z|^2 \|R_{\bar{z}}\|) \|v\|_{L^2(\Lambda)}^2), \end{aligned}$$

Como  $\|R_z\| \rightarrow 0$ , quando  $\text{img } z \rightarrow \infty$ , o operador  $(2ip\tau_0/(\varepsilon g_0^2))\partial_t$  é  $D(0)$ -limitado com índice limite igual a zero. Além disso, como  $p^2/g_0^2$  é analítica em  $p$ , segue que  $\{D(p) : p \in \mathbb{R}\}$  é uma família analítica do tipo A. Pelo Teorema A.7 do Apêndice A,  $\lambda_n(\cdot)$  é uma função real analítica em  $p$ .

Seja  $\delta > 0$  um número fixo. Para cada  $v \in \text{dom } d(p)$ , tem-se

$$2 \text{Re} \left( ip \frac{\tau_0}{\varepsilon} v \partial_t \bar{v} \right) \leq (1 + \delta) \tau_0^2 \frac{|\partial_t v|^2}{\varepsilon^2} + \frac{p^2}{1 + \delta} |v|^2.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} d(p)(v) &= \int_{-1}^1 \frac{1}{g_0^2} \left( p^2 |v|^2 - 2 \text{Re} \left( ip \frac{\tau_0}{\varepsilon} v \partial_t \bar{v} \right) + \frac{|\partial_t v|^2}{\varepsilon^2} \right) dt \\ &\geq \int_{-1}^1 \frac{1}{g_0^2} \left( p^2 \frac{\delta}{1 + \delta} |v|^2 + (1 - (1 + \delta) \tau_0^2) \frac{|\partial_t v|^2}{\varepsilon^2} \right) dt. \end{aligned}$$

Assim, obtemos o limite pontual  $\lambda_n(p) = d(p)(u_n(p)) \rightarrow \infty$ , quando  $p \rightarrow \pm\infty$ .  $\square$

Finalmente podemos determinar o espectro de  $D$ .

**Proposição 6.4.** *Tem-se  $\sigma(D) = [\lambda_1(0), \infty)$ .*

*Demonstração.* Devido à decomposição em (6.11) e Lema 6.3, temos  $[\lambda_1(0), \infty) \subset \sigma(D)$ . Resta provar que

$$(-\infty, \lambda_1(0)) \cap \sigma(D) = \emptyset. \quad (6.12)$$

Para cada  $\psi \in C_0^\infty(\Lambda)$ , podemos escrever  $\psi(s, t) = \phi(s, t)\chi_1(t)$ , com  $\phi \in C_0^\infty(\Lambda)$ , pois  $\chi_1$  é positivo em  $(0, 1)$ . Alguns cálculos mostram que

$$\begin{aligned} d(\psi) - \lambda_1(0) \int_\Lambda |\psi|^2 ds dt &= \frac{1}{g_0^2} \int_\Lambda \left| \partial_s \phi - \frac{\tau_0}{\varepsilon} \partial_t \phi \right|^2 |\chi_1|^2 ds dt + \frac{1}{\varepsilon^2 g_0^2} \int_\Lambda |\phi|^2 |\chi_1'|^2 ds dt \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_\Lambda |\partial_t \phi|^2 |\chi_1|^2 ds dt - \frac{2\tau_0}{\varepsilon g_0^2} \text{Re} \int_\Lambda \partial_s \phi \bar{\phi} \chi_1' \chi_1 ds dt \\ &\quad + \frac{2}{\varepsilon^2 g_0^2} \text{Re} \int_\Lambda \partial_t \phi \bar{\phi} \chi_1' \chi_1 ds dt - \lambda_1(0) \int_\Lambda |\phi|^2 |\chi_1|^2 ds dt. \end{aligned}$$

Fazendo uma integração por partes, tem-se

$$2\operatorname{Re} \int_{\Lambda} \partial_s \phi \bar{\phi} \chi_1' \chi_1 \, ds dt = 0, \quad 2\operatorname{Re} \int_{\Lambda} \partial_t \phi \bar{\phi} \chi_1' \chi_1 \, ds dt = - \int_{\Lambda} |\phi|^2 (\chi_1'' \chi_1 + |\chi_1'|^2) \, ds dt.$$

Além disso, como  $D(0)\chi_1 = \lambda_1(0)\chi_1$ , obtemos

$$d(\psi) - \lambda_1(0) \int_{\Lambda} |\psi|^2 \, ds dt = \frac{1}{g_0^2} \int_{\Lambda} \left| \partial_s \phi - \frac{\tau_0}{\varepsilon} \partial_t \phi \right|^2 |\chi_1|^2 \, ds dt + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Lambda} |\partial_t \phi|^2 |\chi_1|^2 \, ds dt \geq 0.$$

Isso implica que (6.12) é verdadeira.  $\square$

**Prova do Teorema 6.1.** Pela Proposição 6.2 e a igualdade (6.9), segue que  $\sigma_{\text{ess}}(-\Delta_{\Pi}^D) = \sigma_{\text{ess}}(D)$ . Assim, devido a Proposição 6.4, concluímos que  $\sigma_{\text{ess}}(-\Delta_{\Pi}^D) = [\lambda_1(0), \infty)$ .  $\square$

### 6.3 Espectro discreto

Nesta seção fornecemos condições suficientes para a existência de autovalores discretos para  $-\Delta_{\Pi}^D$  abaixo de  $\lambda_1(0)$ . A estratégia é baseada em encontrar uma função  $\psi \in \operatorname{dom} b$  tal que

$$b(\psi) - \lambda_1(0) \|\psi\|_{\mathcal{H}}^2 < 0.$$

Iniciamos esta seção com o seguinte resultado.

**Teorema 6.5.** *Sob as condições em (6.4) e (6.6). Se  $V := (1/g^2 - 1/(1 - \tau_0^2))g \in L^1(\mathbb{R})$  tal que  $\int_{\mathbb{R}} V(s) \, ds < 0$ , então*

$$\inf \sigma(-\Delta_{\Pi}^D) < \lambda_1(0).$$

Além disso, o espectro discreto de  $-\Delta_{\Pi}^D$  é não vazio.

*Demonstração.* Seja  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  uma função de valor real tal que  $0 \leq \varphi \leq 1$ ,  $\varphi = 1$  em  $[-1, 1]$ , e  $\varphi = 0$  em  $\mathbb{R} \setminus (-2, 2)$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , defina

$$\psi_n(s, t) := \varphi_n(s) \chi_1(t), \tag{6.13}$$

em que  $\varphi_n(s) := \varphi(s/n)$  e  $\chi_1$  é a autofunção normalizada de  $D(0)$  corresponde ao autovalor  $\lambda_1(0)$ ;

$$\chi_1(t) := \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right).$$

Note que  $\psi_n \in \operatorname{dom} b$ . Um cálculo direto mostra que

$$b(\psi_n) - \lambda_1(0) \|\psi_n\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{g} |\varphi_n'|^2 \, ds + \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{g^2} - \frac{1}{1 - \tau_0^2}\right) |\varphi_n|^2 \, g \, ds.$$

Como  $\varphi_n \rightarrow 1$  pontualmente, quando  $n \rightarrow 0$ , e

$$\int_{\Lambda} \frac{1}{g} |\varphi_n'|^2 \, ds \leq \frac{1}{n(1 - \|\tau\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} |\varphi'|^2 \, ds,$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b(\psi_n) - \lambda_1(0) \|\psi_n\|_{\mathcal{H}}^2) = \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{g^2} - \frac{1}{1 - \tau_0^2}\right) g ds < 0.$$

Portanto, podemos tomar  $n_0$  suficiente grande de tal modo que  $b(\psi_{n_0}) - \lambda_1(0) \|\psi_{n_0}\|_{\mathcal{H}}^2 < 0$ . Assim, o resultado segue pelo Princípio do Minimax.  $\square$

Continuando a análise do espectro discreto do operador  $-\Delta_{\Pi}^D$ , obtemos mais o seguinte resultado.

**Teorema 6.6.** *Sob as condições em (6.4) e (6.6). Se  $\tau$  é uma função não constante tal que  $\tau' \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ ,  $V = (1/g^2 - 1/(1 - \tau_0^2))g \in L^1(\mathbb{R})$  e  $\int_{\mathbb{R}} V(s) ds = 0$ , então*

$$\inf \sigma(-\Delta_{\Pi}^D) < \lambda_1(0).$$

Além disso, o espectro discreto de  $-\Delta_{\Pi}^D$  é não vazio.

*Demonstração.* Ao repetir o procedimento da prova do Teorema 6.5, encontramos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b(\psi_n) - \lambda_1(0) \|\psi_n\|_{\mathcal{H}}^2) = \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{g^2} - \frac{1}{1 - \tau_0^2}\right) g ds = 0, \quad (6.14)$$

em  $\psi_n$  é dado por (6.13). Assim, modificamos  $\psi_n$  adicionando a seguinte perturbação

$$\psi_{n,\delta}(s,t) = \psi_n(s,t) + \delta \phi(s,t),$$

em que  $\delta$  é um número real e  $\phi(s,t) := \xi(s)t\chi_1(t)$ , com  $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  uma função não nula de valor real que será determinada posteriormente. Note que  $\psi_{n,\delta} \in \text{dom } b$  e

$$\begin{aligned} b(\psi_{n,\delta}) - \lambda_1(0) \|\psi_{n,\delta}\|_{\mathcal{H}}^2 &= (b(\psi_n) - \lambda_1(0) \|\psi_n\|_{\mathcal{H}}^2) \\ &\quad + 2\delta (b(\psi_n, \phi) - \lambda_1(0) \langle \psi_n, \phi \rangle_{\mathcal{H}}) \\ &\quad + \delta^2 (b(\phi) - \lambda_1(0) \|\phi\|_{\mathcal{H}}^2). \end{aligned} \quad (6.15)$$

Como  $\psi_n = 1$  em  $\text{supp } \xi$ , para todo  $n$  suficientemente grande, tem-se

$$\begin{aligned} b(\psi_n, \phi) - \lambda_1(0) \langle \psi_n, \phi \rangle_{\mathcal{H}} &= \int_{\Lambda} -\frac{1}{g} \tau \chi_1' \left( \xi' t \chi_1 - \frac{\tau}{\varepsilon} \xi (\chi_1 + t \chi_1') \right) ds dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{\tau}{2g} \right)' \xi ds; \end{aligned} \quad (6.16)$$

a última igualdade segue de uma integração por partes. Por consequência de (6.14)-(6.16), tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b(\psi_{n,\delta}) - \lambda_1(0) \|\psi_{n,\delta}\|_{\mathcal{H}}^2) = \delta \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{\tau}{g} \right)' \xi ds + \delta^2 (b(\phi) - \lambda_1(0) \|\phi\|_{\mathcal{H}}^2). \quad (6.17)$$

Observe que  $(\tau/g)'$  é identicamente igual a zero se, e somente se,  $\tau$  é uma função constante. Assim, como  $\tau$  é uma função não constante por hipótese, podemos escolher  $\xi$  de tal modo que  $\int_{\mathbb{R}} (\tau/g)' \xi ds < 0$ . Além disso, tome  $\delta > 0$  suficientemente pequeno de tal modo que o limite em (6.17) é negativo. Assim, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $b(\psi_{n_0,\delta}) - \lambda_1(0) \|\psi_{n_0,\delta}\|_{\mathcal{H}}^2 < 0$ .  $\square$

**Observação 6.7.** Seja  $\kappa(s)$  a curvatura de  $\Gamma$  na posição  $\Gamma(s)$ . Suponha que a curva  $\Gamma$  satisfaz certas condições de modo que exista o referencial de Frenet  $\{T(s), N(s), B(s)\}$ . Em particular,  $T'(s) = \kappa(s)N(s)$ . Lembre-se que  $\kappa$  denota a curvatura da curva  $\Gamma$  e  $\tau(s) := T(s) \cdot \mathbf{u}$ . Se  $\kappa \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  então a condição  $\tau' \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  do Teorema 6.6 é satisfeita. De fato, como  $\tau'(s) := T'(s) \cdot \mathbf{u} = \kappa(s)(N(s) \cdot \mathbf{u})$ , segue-se

$$|\tau'(s)| \leq |\kappa(s)|.$$

## 6.4 Número de autovalores discretos

Defina  $\theta(\mathbf{u}, s)$  o ângulo entre o vetor  $\mathbf{u}$  e a reta tangente à curva  $\Gamma$  no ponto  $\Gamma(s)$ . Defina

$$\theta(\mathbf{u}) := \lim_{|s| \rightarrow \infty} \theta(\mathbf{u}, s);$$

esse limite existe pela condição (6.6). Essa seção é dedicada à prova da seguinte propriedade.

**Teorema 6.8.** *Sob as condições em (6.4) e (6.6). Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $\theta_n \in (0, \pi/2]$  tal que, para todo  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$  com  $\theta(\mathbf{u}) < \theta_n$ , tem-se*

$$N(-\Delta_{\Pi}^D) \geq n,$$

em que  $N(-\Delta_{\Pi}^D)$  denota o número de autovalores discretos de  $-\Delta_{\Pi}^D$ , contando a multiplicidade.

*Demonstração.* Para o caso  $n = 0$ , nada a fazer. Vamos provar a afirmação para algum  $n \geq 1$ . Seja  $\varphi \in H^1(\mathbb{R})$  uma função não nula tal que  $\text{supp } \varphi \subset (s_0, s_1)$ ,  $s_0 < s_1$ . Para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$ , defina

$$\psi_j(s, t) := N_j \varphi_j(s) \chi_1(t),$$

em que

$$\varphi_j(s) := \varphi(s - (j-1)(s_1 - s_0)), \quad N_j^{-2} := \int_{\mathbb{R}} |\varphi_j|^2 f ds.$$

O conjunto  $\{\psi_j\}_{j=1}^n$  é uma base ortonormal de um subespaço de  $\text{dom } b$ . Além disso, se  $i \neq j$  então  $b(\psi_i, \psi_j) = 0$ , pois  $\psi_i$  e  $\psi_j$  possuem suportes disjuntos. Pelo Lema 4.5.4 de [15] e Teorema 6.1, uma condição suficiente para  $-\Delta_{\Pi}^D$  ter pelo menos  $n$  autovalor discreto é

$$b(\psi_j) - \lambda_1(0) \|\psi_j\|_{\mathcal{H}}^2 < 0, \tag{6.18}$$

para todo  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Alguns cálculos mostram que

$$b(\psi_j) - \lambda_1(0) \|\psi_j\|_{\mathcal{H}}^2 = N_j^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{g} \left( |\varphi_j'|^2 + \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 |\varphi_j|^2 \right) ds - \frac{1}{1 - \tau_0^2} \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2. \tag{6.19}$$

Sabemos que  $\cos \theta(\mathbf{u}, s) = |T(s) \cdot \mathbf{u}|$ . Usando a condição (6.6), tem-se  $\cos \theta(\mathbf{u}) = |\tau_0|$ . Assim,

$$1 - \tau_0^2 = 1 - \cos^2 \theta(\mathbf{u}) = \sin^2 \theta(\mathbf{u}).$$

Como  $0 < \theta(\mathbf{u}) < \theta_n \leq \pi/2$  e seno é uma função crescente em  $(0, \pi/2]$ , segue que

$$1 - \tau_0^2 = \text{sen}^2 \theta(\mathbf{u}) < \text{sen}^2 \theta_n.$$

Aplicando esta estimativa e  $g^2 \geq 1 - \|\tau\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2$  em (6.19), obtemos

$$b(\psi_j) - \lambda_1(0) \|\psi_j\|_{\mathcal{H}}^2 < \frac{N_j^2}{(1 - \|\tau\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} \left( |\varphi'|^2 + \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 |\varphi|^2 \right) ds - \frac{1}{\text{sen}^2 \theta_n} \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2. \quad (6.20)$$

Tome  $\theta_n \in (0, \pi/2]$  de tal modo que

$$\text{sen}^2 \theta_n = \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \left[ \max_{j \in \{1, \dots, n\}} \frac{N_j^2}{(1 - \|\tau\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} \left( |\varphi'|^2 + \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 |\varphi|^2 \right) ds \right]^{-1}.$$

Logo, a expressão do lado direito de (6.20) é não positiva, para todo  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Consequentemente, (6.18) vale para todo  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$  com  $\theta(\mathbf{u}) \leq \theta_n$ . Assim, segue o resultado.  $\square$

A Proposição 6.8 mostra que o número de autovalores discreto de  $-\Delta_{\Pi}^D$  cresce quando  $\theta(\mathbf{u}, s)$  tende a zero no infinito. Em particular, diminuir o ângulo  $\theta(\mathbf{u}, s)$  implica diminuir a largura da faixa.



---

## Alguns resultados clássicos

---

Neste apêndice, vamos apresentar definições e resultados conhecidos na literatura que foram utilizados no decorrer do trabalho. Todas as demonstrações dos resultados deste apêndice serão omitidas do texto por estarem fora do escopo deste trabalho. Ao longo deste apêndice,  $\mathfrak{H}$  é usado para denotar um espaço de Hilbert complexo e a notação  $Y \sqsubseteq X$  significa que  $Y$  é um subconjunto denso de  $X$ .

### A.1 Princípio do Minimax

Em alguns casos é possível caracterizar os autovalores de um operador que estão abaixo do seu espectro essencial através de uma aproximação variacional. Vejamos os resultados abaixo.

**Proposição A.1.** *Seja  $T : \text{dom } T \sqsubseteq \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$  um operador autoadjunto e limitado inferiormente. Suponha que os autovalores discretos de  $T$ , contando a multiplicidade, satisfazem*

$$E_1 < E_2 < E_3 < \dots < \inf \sigma_{\text{ess}}(T).$$

Então

$$E_1 = \inf_{0 \neq \xi \in \text{dom } T} \frac{\langle \xi, T\xi \rangle_{\mathfrak{H}}}{\|\xi\|_{\mathfrak{H}}^2}, \quad P_1 := \ker(T - E_1 \mathbf{1}),$$

$$E_2 = \inf_{0 \neq \xi \in \text{dom } T \cap P_1^\perp} \frac{\langle \xi, T\xi \rangle_{\mathfrak{H}}}{\|\xi\|_{\mathfrak{H}}^2}, \quad P_2 := P_1 \oplus \ker(T - E_2 \mathbf{1}),$$

$$E_3 = \inf_{0 \neq \xi \in \text{dom } T \cap P_2^\perp} \frac{\langle \xi, T\xi \rangle_{\mathfrak{H}}}{\|\xi\|_{\mathfrak{H}}^2}, \quad P_3 := P_2 \oplus \ker(T - E_3 \mathbf{1}), \dots$$

A Proposição A.1 é conhecida como *caracterização variacional do espectro discreto*. Para mais detalhes, veja a Proposição 11.4.28 de [16].

**Teorema A.2** (Princípio do Minimax). *Seja  $T : \text{dom } T \subseteq \mathfrak{H} \longrightarrow \mathfrak{H}$  um operador autoadjunto e limitado inferiormente. Para cada  $j \in \mathbb{N}$ , defina*

$$\lambda_j(T) := \sup_{M_{j-1}} \left\{ \inf_{0 \neq \psi \in \text{dom } T \cap M_{j-1}^\perp} \frac{\langle \psi, T \psi \rangle_{\mathfrak{H}}}{\|\psi\|_{\mathfrak{H}}^2} \right\}, \quad (\text{A.1})$$

em que o supremo é tomado sobre todos os subespaços lineares  $M_{j-1}$  de dimensão no máximo  $j-1$ . Então

- (i)  $\lambda_j(T) < \inf \sigma_{\text{ess}}(T)$  se, e somente se,  $T$  tem no mínimo  $j$  autovalores menores que  $\inf \sigma_{\text{ess}}(T)$ . Neste caso,  $\lambda_j(T)$  é o  $j$ -ésimo autovalor de  $T$ , contando a multiplicidade, e o supremo em (A.1) é atingido quando  $M_{j-1} = [e_1, \dots, e_{j-1}]$ , em que cada  $e_i$  é o autovetor de  $T$  correspondente ao  $i$ -ésimo autovalor,  $i = 1, \dots, j-1$ .
- (ii)  $\lambda_j(T) = \inf \sigma_{\text{ess}}(T)$  se, e somente se,  $T$  tem no máximo  $j-1$  autovalores menores que  $\inf \sigma_{\text{ess}}(T)$ . Neste caso,  $\lambda_j(T) = \lambda_{j+1}(T) = \dots$ .

Existem várias versões equivalentes ao Princípio do Minimax. A seguir enunciaremos uma dessas versões onde trabalhamos com a forma quadrática associada a  $T$  invés do próprio operador.

**Teorema A.3.** *Sejam  $T, \lambda_j(T)$  e  $M_{j-1}$  como definidos no Teorema A.2. Para cada  $j \in \mathbb{N}$ , tem-se*

$$\lambda_j(T) = \sup_{M_{j-1}} \left\{ \inf_{0 \neq \psi \in \text{dom } q \cap M_{j-1}^\perp} \frac{q(\psi)}{\|\psi\|_{\mathfrak{H}}^2} \right\},$$

em que  $q(\cdot)$  e  $\text{dom } q$  são a forma quadrática associado a  $T$  e o seu domínio, respectivamente.

As provas dos Teoremas A.2 e A.3 pode ser encontradas na Subseção I.6.10 de [31] ou na Seção XII.2 de [43].

## A.2 Família analítica do tipo A

Nesta seção, apresentamos a definição de uma família analítica do tipo A. Em seguida, enunciaremos alguns resultados que auxiliaram no desenvolvimento deste trabalho. Aqui,  $J$  denota um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ . As principais referências para este seção são [31, 43].

**Definição A.4.** Uma família  $\{T(x) : x \in J\}$  de operadores autoadjuntos atuando em  $\mathfrak{H}$  é chamada de *família analítica do tipo A* se são satisfeitas as seguintes condições:

- (i)  $\text{dom } T(x) = \mathbf{D}$ , ou seja, os domínios dos operadores não dependem de  $x$ ;
- (ii) Para cada  $\psi, \eta \in \mathbf{D}$ , tem-se  $\langle T(x)\psi, \eta \rangle_{\mathfrak{H}}$  é uma função analítica em  $J$ .

**Definição A.5.** Sejam  $S : \text{dom } S \subseteq \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$  e  $T : \text{dom } T \subseteq \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$  operadores lineares. Dizemos que  $S$  é  $T$ -limitado se  $\text{dom } T \subset \text{dom } S$  e existem  $a, b \geq 0$  tais que

$$\|S\xi\|_{\mathfrak{H}} \leq a\|T\xi\|_{\mathfrak{H}} + b\|\xi\|_{\mathfrak{H}},$$

para todo  $\xi \in \text{dom } T$ . O índice limite de  $S$  é o ínfimo dos  $a$ 's admissível na desigualdade.

**Teorema A.6.** Seja  $\{T(x) : x \in J\}$  uma família analítica do tipo A. Se existe um  $x_0 \in J$  tal que  $T(x_0)$  possui resolvente compacto, então  $T(x)$  possui resolvente compacto, para todo  $x \in J$ .

Pelo Teorema 3.9 da Seção VII.3 de [31], temos o seguinte resultado.

**Teorema A.7.** Seja  $\{T(x) : x \in J\}$  uma família de operadores autoadjuntos do tipo A. Além disso, suponha que  $T(x)$  possui resolvente compacto, para algum  $x \in J$ . Então, todos os autovalores de  $T(x)$  podem ser representados por funções analíticas em  $J$ . Mais precisamente, existem uma sequência de funções reais  $\{E_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  e uma sequência de funções  $\{\Phi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  em  $\mathfrak{H}$ , todas analíticas em  $J$ , de modo que, para cada  $x \in J$ ,  $E_n(x)$  representa todos os autovalores de  $T(x)$  e a sequência  $\{\Phi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  forma uma família ortonormal completa de autovetores de  $T(x)$ .

### A.3 Operadores de Schrödinger

Finalizamos essa apêndice com alguns resultados da teoria de perturbação que foram utilizados nos estudos do espectro do operador Laplaciano de Dirichlet-Neumann.

**Lema A.8.** Sejam  $\mu \in \mathbb{R}$  e  $U$  uma função real, limitada e mensurável em  $(0, 1)$ . Considere o operador autoadjunto  $H_\mu := -\partial_t^2 + U(t)\mathbf{1}$ ,  $\text{dom } H_\mu := \{\psi \in H^2(0, 1) : \psi(0) = 0, \psi'(1) + \mu\psi(1) = 0\}$ , agindo em  $L^2(0, 1)$ . Seja  $\lambda_1(H_\mu)$  o primeiro autovalor de  $H_\mu$ . Se  $\mu_1 \leq \mu_2$ , então  $\lambda_1(H_{\mu_1}) \leq \lambda_1(H_{\mu_2})$ . Mais precisamente,

$$\lambda_1(H_{\mu_1}) \leq \lambda_1(H_{\mu_2}) + (\mu_1 - \mu_2) \frac{\psi_1(1)^2}{\|\psi_1\|_{L^2(0,1)}^2},$$

em que  $\psi_1$  é uma autofunção real de  $H_{\mu_1}$  correspondente ao autovalor  $\lambda_1(H_{\mu_1})$ .

**Teorema A.9.** Sejam  $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e  $U$  uma função real, limitada e mensurável em  $\mathbb{R}$ . Considere o operador autoadjunto  $H_\mu := -\Delta_{\mathbb{R}} + \mu U(s)\mathbf{1}$ ,  $\text{dom } H_\mu := H^2(\mathbb{R})$ , agindo em  $L^2(\mathbb{R})$ . Para cada  $j \in \mathbb{N}$ , tem-se

$$\lim_{\mu \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_j(H_\mu)}{\mu} = \inf_{s \in \mathbb{R}} U(s);$$

$\lambda_j(H_\mu)$  correspondente ao autovalor de  $H_\mu$  de acordo com o Princípio do Minimax.

As provas do Lema A.8 e do Teorema A.9 podem ser encontradas em [11, Lema 1] e [25, Teorema 4], respectivamente.



---

## Prova da Proposição 2.2

---

Este apêndice é dedicado à prova da Proposição 2.2 enunciado no Capítulo 2. Os próximos resultados são adaptações simples do Lema 4.1 e Proposição 4.2 de [7], e Lema 4.2 de [17].

**Lema B.1.** *Um número real  $\lambda$  pertence ao espectro essencial de  $C_\varepsilon$  se, e somente se, existe uma sequência  $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{dom } c_\varepsilon$  satisfazendo as seguintes condições:*

- (i)  $\|\psi_n\|_{L^2(\Lambda)} = 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ ;
- (ii)  $(C_\varepsilon - \lambda \mathbf{1})\psi_n \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , na norma do espaço dual  $(\text{dom } c_\varepsilon)^*$ ;
- (iii)  $\text{supp } \psi_n \subset \Lambda \setminus (-n, n) \times (-1, 1)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* Sabemos que  $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(C_\varepsilon)$  se, e somente se, existe uma sequência  $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{dom } c_\varepsilon$  satisfazendo (i), (ii) e (iii'):  $\xi_n \rightarrow 0$  em  $L^2(\Lambda)$ , quando  $n \rightarrow \infty$ ; veja, por exemplo, Teorema 5 em [39]. Seja  $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência satisfazendo as condições (i), (ii) e (iii). Consequentemente,  $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  satisfaz (i), (ii) e (iii').

Por outro lado, seja  $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{dom } c_\varepsilon$  uma sequência satisfazendo (i), (ii) e (iii'). Considere  $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $0 \leq \eta \leq 1$ ,  $\eta = 0$  em  $[-1, 1]$ , e  $\eta = 1$  em  $\mathbb{R} \setminus (-2, 2)$ . Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , defina

$$\eta_k(s, t) := \eta(s/k), \quad (s, t) \in \Lambda.$$

Considere a sequência  $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(\Lambda)$ . Como  $(1 - \eta_k)(C_\varepsilon + \mathbf{1})^{-1}$  é compacto em  $L^2(\Lambda)$  e  $\xi_n$  satisfaz a condição (iii'), segue que  $(1 - \eta_k)(C_\varepsilon + \mathbf{1})^{-1}\xi_n \rightarrow 0$  em  $L^2(\Lambda)$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Então, existe uma subsequência  $\{\xi_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  de  $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $(1 - \eta_k)(C_\varepsilon + \mathbf{1})^{-1}\xi_{n_k} \rightarrow 0$  em  $L^2(\Lambda)$ , quando  $k \rightarrow \infty$ . Ao escrever

$$\xi_{n_k} = (C_\varepsilon + \mathbf{1})^{-1}(C_\varepsilon - \lambda \mathbf{1})\xi_{n_k} + (\lambda + 1)(C_\varepsilon + \mathbf{1})^{-1}\xi_{n_k}$$

e usando (ii), segue que  $(1 - \eta_k)\xi_{n_k} \rightarrow 0$  em  $L^2(\Lambda)$ , quando  $k \rightarrow \infty$ . Assim, suponha que  $\|\eta_k \xi_{n_k}\| \geq 1/2$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Finalmente, defina

$$\psi_k := \frac{\eta_k \xi_{n_k}}{\|\eta_k \xi_{n_k}\|}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

A sequência  $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \text{dom } c_\varepsilon$  satisfaz as condições (i) e (iii). Resta verificar (ii), isto é,

$$\sup_{\substack{\phi \in H_0^1(\Lambda) \\ \phi \neq 0}} \frac{|c_\varepsilon(\phi, \psi_k) - \lambda \langle \phi, \psi_k \rangle|}{\|\phi\|_+} \longrightarrow 0, \quad (\text{B.1})$$

quando  $k \rightarrow \infty$ , em que  $\|\phi\|_+^2 := c_\varepsilon(\phi) + \|\phi\|^2$ .

Alguns cálculos mostram que

$$\begin{aligned} c_\varepsilon(\phi, \eta_k \xi_{n_k}) - \lambda \langle \phi, \eta_k \xi_{n_k} \rangle &= c_\varepsilon(\eta_k \phi, \xi_{n_k}) - \lambda \langle \eta_k \phi, \xi_{n_k} \rangle + \int_\Lambda \frac{1}{f_\varepsilon^2} \phi \partial_s^2 \eta_k \overline{\xi_{n_k}} \, ds dt \\ &\quad + 2 \int_\Lambda \frac{1}{f_\varepsilon^2} \left( \partial_s \phi - \frac{\partial_s f_\varepsilon}{f_\varepsilon} \phi \right) \partial_s \eta_k \overline{\xi_{n_k}} \, ds dt. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} &\left( \partial_s \phi - \frac{\partial_s f_\varepsilon}{2f_\varepsilon} \phi \right) \left( \partial_s (\eta_k \overline{\xi_{n_k}}) - \frac{\partial_s f_\varepsilon}{2f_\varepsilon} \eta_k \overline{\xi_{n_k}} \right) = \\ &\left( \partial_s (\eta_k \phi) - \frac{\partial_s f_\varepsilon}{2f_\varepsilon} \eta_k \phi \right) \left( \partial_s \overline{\xi_{n_k}} - \frac{\partial_s f_\varepsilon}{2f_\varepsilon} \overline{\xi_{n_k}} \right) + \partial_s \phi \partial_s \eta_k \overline{\xi_{n_k}} - \phi \partial_s \eta_k \partial_s \overline{\xi_{n_k}}, \end{aligned}$$

e, fazendo integração por parte na última parcela,

$$- \int_\Lambda \frac{1}{f_\varepsilon^2} \phi \partial_s \eta_k \partial_s \overline{\xi_{n_k}} \, ds dt = \int_\Lambda \frac{1}{f_\varepsilon^2} \phi \partial_s^2 \eta_k \overline{\xi_{n_k}} \, ds dt + \int_\Lambda \frac{1}{f_\varepsilon^2} \left( \partial_s \phi - 2 \frac{\partial_s f_\varepsilon}{f_\varepsilon} \phi \right) \partial_s \eta_k \overline{\xi_{n_k}} \, ds dt,$$

encontramos

$$\begin{aligned} &\int_\Lambda \frac{1}{f_\varepsilon^2} \left( \partial_s \phi - \frac{\partial_s f_\varepsilon}{2f_\varepsilon} \phi \right) \left( \partial_s (\eta_k \overline{\xi_{n_k}}) - \frac{\partial_s f_\varepsilon}{2f_\varepsilon} \eta_k \overline{\xi_{n_k}} \right) \, ds dt = \\ &\int_\Lambda \frac{1}{f_\varepsilon^2} \left( \partial_s (\eta_k \phi) - \frac{\partial_s f_\varepsilon}{2f_\varepsilon} \eta_k \phi \right) \left( \partial_s \overline{\xi_{n_k}} - \frac{\partial_s f_\varepsilon}{2f_\varepsilon} \overline{\xi_{n_k}} \right) \, ds dt + \int_\Lambda \frac{1}{f_\varepsilon^2} \phi \partial_s^2 \eta_k \overline{\xi_{n_k}} \, ds dt \\ &\quad + 2 \int_\Lambda \frac{1}{f_\varepsilon^2} \left( \partial_s \phi - \frac{\partial_s f_\varepsilon}{f_\varepsilon} \phi \right) \partial_s \eta_k \overline{\xi_{n_k}} \, ds dt. \end{aligned}$$

Assim, obtemos a igualdade (B.2).

Agora, como  $\{\xi_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  satisfaz (ii), tem-se

$$\sup_{\substack{\phi \in H_0^1(\Lambda) \\ \phi \neq 0}} \frac{|c_\varepsilon(\eta_k \phi, \xi_{n_k}) - \lambda \langle \eta_k \phi, \xi_{n_k} \rangle|}{\|\phi\|_+} \leq \sup_{\substack{\phi \in H_0^1(\Lambda) \\ \eta_k \phi \neq 0}} \frac{|c_\varepsilon(\eta_k \phi, \xi_{n_k}) - \lambda \langle \eta_k \phi, \xi_{n_k} \rangle|}{\|\eta_k \phi\|_+} \longrightarrow 0,$$

quando  $k \rightarrow \infty$ . Pela desigualdade de Hölder, juntamente com as estimativas  $\|\phi\| \leq \|\phi\|_+$  e  $c_\varepsilon(\phi) \leq \|\phi\|_+^2$ , encontramos

$$\sup_{\substack{\phi \in H_0^1(\Lambda) \\ \phi \neq 0}} \left\{ \frac{1}{\|\phi\|_+} \int_\Lambda \frac{1}{f_\varepsilon^2} |\phi| |\partial_s^2 \eta_k| |\xi_{n_k}| \, ds dt \right\} \leq \|\partial_s^2 \eta_k\|_{L^\infty(\Lambda)} = k^{-2} \|\eta''\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \longrightarrow 0,$$

e

$$\sup_{\substack{\phi \in H_0^1(\Lambda) \\ \phi \neq 0}} \left\{ \frac{1}{\|\phi\|_+} \int_\Lambda \frac{1}{f_\varepsilon^2} \left| \partial_s \phi - \frac{\partial_s f_\varepsilon}{2f_\varepsilon} \phi \right| |\partial_s \eta_k| |\xi_{n_k}| \, ds dt \right\} \leq \|\partial_s \eta_k\|_{L^\infty(\Lambda)} = k^{-1} \|\eta'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \longrightarrow 0,$$

quando  $k \rightarrow \infty$ . Finalmente, como  $\beta, \beta' \in L^\infty(\mathbb{R})$ , temos

$$\sup_{\substack{\phi \in H_0^1(\Lambda) \\ \phi \neq 0}} \left\{ \frac{1}{\|\phi\|_+} \int_{\Lambda} \left| \frac{\partial_s f_\varepsilon}{f_\varepsilon^3} \right| |\phi| |\partial_s \eta_k| |\xi_{n_k}| ds dt \right\} \leq \|\partial_s \eta_k\|_{L^\infty(\Lambda)} = k^{-1} \|\eta'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \rightarrow 0,$$

quando  $k \rightarrow \infty$ . Portanto, provamos que  $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  satisfaz (B.1).  $\square$

**Observação B.2.** A mesma conclusão do Lema B.1 vale para o operador  $D_\varepsilon$ .

**Prova da Proposição 2.2.** Se  $\lambda \in \sigma_{ess}(D_\varepsilon)$ , existe uma sequência  $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{dom } d_\varepsilon$  tal que  $\|\psi_n\| = 1$ ,  $\text{supp } \psi_n \subset \Lambda \setminus (-n, n) \times (-1, 1)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , e  $(D_\varepsilon - \lambda \mathbf{1})\psi_n \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , na norma do espaço dual  $(\text{dom } d_\varepsilon)^*$ . Como a função  $\beta$  tem suporte compacto, existe algum  $s_0 > 0$  tal que  $\text{supp } \beta \subset [-s_0, s_0]$ . Tome  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n_0 > s_0$ . Então, para cada  $\phi \in H_0^1(\Lambda)$ ,

$$c_\varepsilon(\phi, \psi_n) - \lambda \langle \phi, \psi_n \rangle = d_\varepsilon(\phi, \psi_n) - \lambda \langle \phi, \psi_n \rangle,$$

para todo  $n \geq n_0$ . Consequentemente,

$$\sup_{\substack{\phi \in H_0^1(\Lambda) \\ \phi \neq 0}} \frac{|c_\varepsilon(\phi, \psi_n) - \lambda \langle \phi, \psi_n \rangle|}{\|\phi\|_+} \rightarrow 0,$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . O Lema B.1 implica que  $\lambda \in \sigma_{ess}(C_\varepsilon)$ . De maneira semelhante, é possível mostrar que  $\sigma_{ess}(C_\varepsilon) \subset \sigma_{ess}(D_\varepsilon)$ .  $\square$



---

## Prova da Proposição 6.2

---

Este apêndice é dedicado à prova da Proposição 6.2 enunciado no Capítulo 6. Seguiremos a mesma estratégia usada no Apêndice B. Antes de enunciar o próximo resultado, apresentamos algumas considerações importantes.

Como  $\tau \in L^\infty(\mathbb{R})$ , alguns cálculos mostram que

$$K_{37}c(\psi) \leq b(\psi) \leq K_{38}c(\psi) \quad \text{e} \quad K_{39}\|\psi\|_{\mathcal{H}_0} \leq \|\psi\|_{\mathcal{H}} \leq K_{40}\|\psi\|_{\mathcal{H}_0}, \quad (\text{C.1})$$

para todo  $\psi \in H_0^1(\Lambda)$ , para algum  $K_{37}, K_{38}, K_{39}, K_{40} > 0$ . Lembre-se que os espaços de Hilbert  $\mathcal{H} = L^2(\Lambda, g ds dt)$  e  $\mathcal{H}_0 = L^2(\Lambda, g_0 ds dt)$  foram definidos no Capítulo 6. Estas estimativas serão úteis para provar a Proposição 6.2.

**Lema C.1.** *Um número real  $\lambda$  pertence ao espectro essencial de  $T$  se, e somente se, existe uma sequência  $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{dom } b$  satisfazendo as seguintes condições:*

- (i)  $\|\psi_n\|_{\mathcal{H}} = 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ ;
- (ii)  $(T - \lambda \mathbf{1})\psi_n \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , na norma do espaço dual  $(\text{dom } c)^*$ ;
- (iii)  $\text{supp } \psi_n \subset \Lambda \setminus (-n, n) \times (-1, 1)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

A demonstração deste lema segue pelos mesmos argumentos da prova do Lema B.1. Assim, optamos em omiti-la neste texto.

**Observação C.2.** A mesma conclusão do Lema C.1 vale para o operador  $C$  agindo em  $\mathcal{H}_0$ .

**Prova da Proposição 6.2.** Seja  $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(C)$ , existe uma sequência  $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{dom } c$  tal que  $\|\psi_n\|_{\mathcal{H}_0} = 1$ ,  $\text{supp } \psi_n \subset \Lambda \setminus (-n, n) \times (-1, 1)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , e  $(C - \lambda \mathbf{1})\psi_n \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , na norma do espaço dual  $(\text{dom } c)^*$ . Vamos construir a partir desta uma nova sequência  $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{dom } b$  satisfazendo (i), (ii) e (iii) do Lema C.1.

Devido as estimativas em (C.1), tem-se  $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{dom } b$ . Assim, defina

$$\xi_n := \frac{\psi_n}{\|\psi_n\|_{\mathcal{H}}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

A sequência  $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{dom } b_{\varepsilon}$  satisfaz as condições (i) e (iii). Resta verificar (ii), ou seja,

$$\sup_{\substack{\phi \in H_0^1(\Lambda) \\ \phi \neq 0}} \frac{|b(\phi, \xi_n) - \lambda \langle \phi, \xi_n \rangle_{\mathcal{H}}|}{\|\phi\|_+} \longrightarrow 0, \quad (\text{C.2})$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , em que  $\|\phi\|_+^2 := b(\phi) + \|\phi\|_{\mathcal{H}}^2$ . Note que

$$|b(\phi, \psi_n) - \lambda \langle \phi, \psi_n \rangle_{\mathcal{H}}| \leq |c(\phi, \psi_n) - \lambda \langle \phi, \psi_n \rangle_{\mathcal{H}_0}| + |m(\phi, \psi_n)|, \quad (\text{C.3})$$

para cada função teste  $\phi \in C_0^\infty(\Lambda)$ , em que

$$m(\phi, \psi_n) := (b(\phi, \psi_n) - \lambda \langle \phi, \psi_n \rangle_{\mathcal{H}}) - (c(\phi, \psi_n) - \lambda \langle \phi, \psi_n \rangle_{\mathcal{H}_0}).$$

Por (C.1), existe  $K_{41} > 0$  tal que

$$\sup_{\substack{\phi \in H_0^1(\Lambda) \\ \phi \neq 0}} \frac{|c(\phi, \psi_n) - \lambda \langle \phi, \psi_n \rangle_{\mathcal{H}_0}|}{\|\phi\|_+} \leq K_{41} \sup_{\substack{\phi \in H_0^1(\Lambda) \\ \phi \neq 0}} \frac{|c(\phi, \psi_n) - \lambda \langle \phi, \psi_n \rangle_{\mathcal{H}_0}|}{\sqrt{c(\phi) + \|\phi\|_{\mathcal{H}_0}}} \longrightarrow 0, \quad (\text{C.4})$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , pois  $(C - \lambda \mathbf{1})\psi_n \rightarrow 0$  na norma do espaço dual  $(\text{dom } c)^*$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

Agora, podemos escrever  $\tau(s) = \tau_0 + \gamma(s)$ , em que  $\gamma(s) := \tau(s) - \tau_0$ . Tem-se

$$\begin{aligned} b(\phi, \psi_n) &= \int_{\Lambda} \frac{1}{g} \left( \partial_s \phi - \frac{\tau_0}{\varepsilon} \partial_t \phi \right) \left( \partial_s \psi_n - \frac{\tau_0}{\varepsilon} \partial_t \psi_n \right) ds dt - \int_{\Lambda} \frac{\tau - \tau_0}{\varepsilon g} \left( \partial_s \phi - \frac{\tau_0}{\varepsilon} \partial_t \phi \right) \partial_t \psi_n ds dt \\ &\quad - \int_{\Lambda} \frac{\tau - \tau_0}{\varepsilon g} \partial_t \phi \left( \partial_s \psi_n - \frac{\tau_0}{\varepsilon} \partial_t \psi_n \right) ds dt + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Lambda} \partial_t \phi \partial_t \psi_n g ds dt. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} |m(\phi, \psi_n)| &\leq \left\| \frac{1}{g} - \frac{1}{g_0} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R} \setminus (-n, n))} \left\| \partial_s \phi - \frac{\tau_0}{\varepsilon} \partial_t \phi \right\|_{L^2(\Lambda)} \left\| \partial_s \psi_n - \frac{\tau_0}{\varepsilon} \partial_t \psi_n \right\|_{L^2(\Lambda)} \\ &\quad + \left\| \frac{\tau - \tau_0}{\varepsilon g} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R} \setminus (-n, n))} \left\| \partial_s \phi - \frac{\tau_0}{\varepsilon} \partial_t \phi \right\|_{L^2(\Lambda)} \left\| \partial_t \psi_n \right\|_{L^2(\Lambda)} \\ &\quad + \left\| \frac{\tau - \tau_0}{\varepsilon g} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R} \setminus (-n, n))} \left\| \partial_t \phi \right\|_{L^2(\Lambda)} \left\| \partial_s \psi_n - \frac{\tau_0}{\varepsilon} \partial_t \psi_n \right\|_{L^2(\Lambda)} \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon^2} \|g - g_0\|_{L^\infty(\mathbb{R} \setminus (-n, n))} \left\| \partial_t \phi \right\|_{L^2(\Lambda)} \left\| \partial_t \psi_n \right\|_{L^2(\Lambda)} \\ &\quad + |\lambda| \|g - g_0\|_{L^\infty(\mathbb{R} \setminus (-n, n))} \left\| \phi \right\|_{L^2(\Lambda)} \left\| \psi_n \right\|_{L^2(\Lambda)}. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Usando (C.1) junto com  $\|\partial_s \phi - (\tau_0/\varepsilon)\partial_t \phi\|_{L^2(\Lambda)}^2 \leq g_0 c(\phi)$ , temos

$$\left\| \partial_s \phi - \frac{\tau_0}{\varepsilon} \partial_t \phi \right\|_{L^2(\Lambda)} \leq K_{42} \|\phi\|_+, \quad (\text{C.6})$$

para algum  $K_{42} > 0$ . Ao mesmo tempo, como  $\tau \in L^\infty(\Lambda)$ , existe  $K_{43} > 0$  de modo que

$$\|\phi\|_{L^2(\Lambda)} \leq K_{43} \|\phi\|_{\mathcal{H}} \quad \text{e} \quad \|\partial_t \phi\|_{L^2(\Lambda)} \leq K_{43} \|\partial_t \phi\|_{\mathcal{H}}. \quad (\text{C.7})$$

Consequentemente, (C.5)-(C.7) implica que

$$\begin{aligned} \frac{|m(\phi, \psi_n)|}{\|\phi\|_+} &\leq K_{42} \left\| \frac{1}{g} - \frac{1}{g_0} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R} \setminus (-n, n))} \left( \|\partial_s \psi_n\|_{L^2(\Lambda)} + \frac{\tau_0}{\varepsilon} \|\partial_t \psi_n\|_{L^2(\Lambda)} \right) \\ &\quad + \frac{K_{42}}{\varepsilon} \left\| \frac{\tau - \tau_0}{g} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R} \setminus (-n, n))} \|\partial_t \psi_n\|_{L^2(\Lambda)} \\ &\quad + \frac{K_{43}}{\varepsilon} \left\| \frac{\tau - \tau_0}{g} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R} \setminus (-n, n))} \left( \|\partial_s \psi_n\|_{L^2(\Lambda)} + \frac{\tau_0}{\varepsilon} \|\partial_t \psi_n\|_{L^2(\Lambda)} \right) \\ &\quad + \frac{K_{43}}{\varepsilon^2} \|g - g_0\|_{L^\infty(\mathbb{R} \setminus (-n, n))} \|\partial_t \psi_n\|_{L^2(\Lambda)} \\ &\quad + K_{43} |\lambda| \|g - g_0\|_{L^\infty(\mathbb{R} \setminus (-n, n))} \|\psi_n\|_{L^2(\Lambda)}. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Sabemos que  $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é limitado em dom  $c$ . Em particular,  $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é limitado em  $H_0^1(\Lambda)$  com a norma usual, pois  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_0}$  e  $\|\cdot\|_{L^2(\Lambda)}$  são normas equivalentes. Portanto, segue de (6.6) e (C.8),

$$\sup_{\substack{\phi \in H_0^1(\Lambda) \\ \phi \neq 0}} \frac{|m_\varepsilon(\phi, \psi_n)|}{\|\phi\|_+} \rightarrow 0, \quad (\text{C.9})$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Pela estimativas (C.3), (C.4) e (C.9), obtemos (C.2). Assim, pelo Lema C.1,  $\lambda \in \sigma_{ess}(T)$ .

De maneira semelhante, é possível mostrar a inclusão oposta  $\sigma_{ess}(T) \subset \sigma_{ess}(C)$ .  $\square$



---

## Referências Bibliográficas

---

- [1] AMORIM, R. T.; VERRI, A. A. Existence of discrete eigenvalues for the Dirichlet Laplacian in a two-dimensional twisted strip. **Bull. Braz. Math. Soc., New Series**, v. 54, Article number 23, 2023.
- [2] AMORIM, R. T.; VERRI, A. A. Spectral analysis on ruled surfaces with combined Dirichlet and Neumann boundary conditions. **arXiv preprint**, arXiv: 2111.13471, 21 p., 2021.
- [3] BEDOYA, R.; DE OLIVEIRA, C. R.; VERRI, A. A. Complex  $\Gamma$ -convergence and magnetic Dirichlet Laplacian in bounded thin tubes. **Journal of Spectral Theory**, v. 4, n. 3, p. 621-642, 2014.
- [4] BORISOV, D.; EXNER, P.; GADYL'SHIN, R.; KREJČIŘÍK, D. Bound states in weakly deformed strips and layers. **Annales Henri Poincaré**, v. 2, n. 3, p. 553-572, 2001.
- [5] BORISOV, D.; EXNER, P.; GADYL'SHIN, R. Geometric coupling thresholds in a two-dimensional strip. **Journal of Mathematical Physics**, v. 43, n. 12, p. 6265-6278, 2002.
- [6] BULLA, W.; GESZTESY, F.; RENGGER, W.; SIMON, B. Weakly coupled bound states in quantum waveguides. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 125, n. 5, p. 1487-1495, 1997.
- [7] BRIET, P.; ABDOU-SOIMADOU, H.; KREJČIŘÍK, D. Spectral analysis of sheared nanoribbons. **Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik**, v. 70, n. 2, Article ID 48, 18 p., 2019.
- [8] CHENAUD, B.; DUCLOS, P.; FREITAS, P.; KREJČIŘÍK, D. Geometrically induced discrete spectrum in curved tubes. **Differential Geometry and its Applications**, v. 23, n. 2, p. 95-105, 2005.
- [9] CLARK, I. J.; BRACKEN, A. J. Effective potentials of quantum strip waveguides and their dependence upon torsion. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, v. 29, n. 2, p. 339-348, 1996.
- [10] DITTRICH, J.; KŘÍŽ, J. Bound states in straight quantum waveguides with combined boundary condition. **Journal of Mathematical Physics**, v. 43, n. 8, p. 3892-3915, 2002.
- [11] DITTRICH, J.; KŘÍŽ, J. Curved planar quantum wires with Dirichlet and Neumann boundary conditions. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, v. 35, n. 20, p. L269-L275, 2002.
- [12] DAUGE, M.; LAFRANCHE, Y.; RAYMOND, N. Quantum waveguides with corners. **ESAIM Proceedings**, v. 35, p. 14-45, 2012.

- [13] DAUGE, M.; RAYMOND, N. Plane waveguides with corners in the small angle limit. **Journal of Mathematical Physics**, v. 53, n. 12, Article ID 123529, 34 p., 2012.
- [14] DAUGE, M.; OURMIÈRES-BONAFOS, T.; RAYMOND, N. Spectral Asymptotics of the Dirichlet Laplacian in a conical layer. **Communications on Pure and Applied Analysis**, v. 15, n. 3, p. 1239-1258, 2015.
- [15] DAVIES, E. B. **Spectral theory and differential operators**. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. 196 p.
- [16] DE OLIVEIRA, C. R. **Intermediate Spectral Theory and Quantum Dynamics**. Basel: Birkhäuser, 2009. 410 p.
- [17] DERMENJIAN, Y.; DURAND, M.; IFTIMIE, V. Spectral analysis of an acoustic multistratified perturbed cylinder. **Communications in Partial Differential Equations**, v. 23, n. 1-2, 141-169, 1998.
- [18] DUCLOS, P.; EXNER, P. Curvature-induced bound states in quantum waveguides in two and three dimensions. **Reviews in Mathematical Physics**, v. 7, n. 1, p. 73-102, 1995.
- [19] DUCLOS, P.; EXNER, P.; KREJČIŘÍK, D. Bound states in curved quantum layers. **Communications in Mathematical Physics**, v. 223, n. 1, p. 13-28, 2001.
- [20] EVANS, L. C. **Partial differential equations**. 2 ed. Providence: American Mathematical Soc., 2010, 758 p.
- [21] EXNER, P.; KOVAŘÍK, H. Spectrum of the Schrödinger operator in a perturbed periodically twisted tube. **Letters in Mathematical Physics**, v. 73, n. 3, p. 183-192, 2005.
- [22] EXNER, P.; KOVAŘÍK, H. **Quantum waveguides**. New York: Springer, 2015. 752 p.
- [23] EXNER, P.; ŠEBA, P. Bound states in curved quantum waveguides. **Journal of Mathematical Physics**, v. 30, n. 11, p. 2574-2580, 1989.
- [24] EXNER, P.; ŠEBA, P.; TATER, M.; VANĚK, D. Bound states and scattering in quantum waveguides coupled laterally through a boundary window. **Journal of Mathematical Physics**, v. 37, n. 10, p. 4867-4887, 1996.
- [25] FREITAS, P.; KREJČIŘÍK, D. Instability results for the damped wave equation in unbounded domains. **Journal of Differential Equations**, v. 211, n. 1, p. 168-186, 2005.
- [26] FRIEDLANDER, L.; SOLOMYAK, M. On the spectrum of the Dirichlet Laplacian in a narrow infinite strip. **American Mathematical Society Translation**, v. 225, p. 103-116, 2008.
- [27] FRIEDLANDER, L.; SOLOMYAK, M. On the spectrum of the Dirichlet Laplacian in a narrow strip. **Israel Journal of Mathematics**, v. 170, n. 1, p. 337-354, 2009.
- [28] FRIEDLANDER, L.; SOLOMYAK, M. On the spectrum of narrow periodic waveguides. **Russian Journal of Mathematical Physics**, v. 15, n. 2, p. 238-242, 2008.
- [29] GOLDSTONE, J.; JAFFE, R. L.; Bound states in twisting tubes. **Physical Review B**, v. 45, n. 24, p. 14100-14107, 1992.

- [30] KATO, T. On the convergence of the perturbation method. **Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo Section 1 Mathematics, Astronomy, Physics, Chemistry**, v. 6, n. 3, p. 145-226, 1951.
- [31] KATO, T. **Perturbation Theory for Linear Operators**. Berlin: Springer-Verlag, 1995. 620 p.
- [32] KREJČIŘÍK, D. Quantum strips on surfaces. **Journal of Geometry and Physics**, v. 45, n. 1-2, p. 203-217, 2003.
- [33] KREJČIŘÍK, D. Spectrum of the Laplacian in a narrow curved strip with combined Dirichlet and Neumann boundary conditions. **ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations**, v. 15, n. 3, p. 555-568, 2009.
- [34] KREJČIŘÍK, D. Spectrum of the Laplacian in narrow tubular neighbourhoods of hypersurfaces with combined Dirichlet and Neumann boundary conditions. **Mathematica Bohemica**, v. 139, n. 2, p. 185-193, 2014.
- [35] KREJČIŘÍK, D. Hardy inequalities in strips on ruled surfaces. **Journal of Inequalities and Applications**, v. 2006, Article ID 46409, 10 p., 2006.
- [36] KREJČIŘÍK, D.; DE ALDECOA, R. T.; The nature of the essential spectrum in curved quantum waveguides. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, v. 37, n. 20, p. 5449-5466, 2004.
- [37] KREJČIŘÍK, D.; DE ALDECOA, R. T. Ruled strips with asymptotically diverging twisting. **Annales Henri Poincaré**, v. 19, n. 7, p. 2069-2086, 2018.
- [38] KREJČIŘÍK, D.; KŘÍŽ, J. On the spectrum of curved quantum waveguides. **Publications of RIMS, Kyoto University**, v. 41, n. 3, p. 757-791, 2005.
- [39] KREJČIŘÍK, D.; LU, Z. Location of the essential spectrum in curved quantum layers. **Journal of Mathematical Physics**, v. 55, n. 8, Article ID 083520, 14 p., 2014.
- [40] KREJČIŘÍK, D.; ŠEDIVÁKOVÁ, H. The effective Hamiltonian in curved quantum waveguides under mild regularity assumptions. **Reviews in Mathematical Physics**, v. 24, n. 7, Article ID 1250018, 39 p., 2012.
- [41] KREJČIŘÍK, D.; ZHRADOVÁ, Z. Quantum strips in higher dimensions. **Operators and Matrices**, v. 14, n. 3, p. 635-665, 2020.
- [42] KOVAŘÍK, H.; KREJČIŘÍK, D. A Hardy inequality in a twisted Dirichlet-Neumann waveguide. **Mathematische Nachrichten**, v. 281, n. 8, p. 1159-1168, 2008.
- [43] REED, M.; SIMON, B. **Methods of Modern Mathematical Physics, IV. Analysis of Operators**. New York: Academic Press, 1978. 325 p.
- [44] RINGER, W.; BULLA, W. Existence of bound states in quantum waveguides under weak conditions. **Letters in Mathematical Physics**, v. 35, n. 1, p. 1-12, 1995.
- [45] VERRI, A. A Dirichlet Laplacian in a thin twisted strip. **International Journal of Mathematics**, v. 30, n. 2, Article ID 1950006, 17 p., 2019.