UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

Éverton Ferraz Marcelino Batista

ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS À LUZ DO MODELO MTSK: UM FOCO NOS NÚMEROS RACIONAIS

Sorocaba

2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Éverton Ferraz Marcelino Batista

ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS À LUZ DO MODELO MTSK: UM FOCO NOS NÚMEROS RACIONAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas para obtenção do título de Mestre Profissional em Ensino de Ciências Exatas.

Orientação: Prof. Dr. Paulo César Oliveira

Sorocaba

2023

Ferraz Marcelino Batista, Éverton

Análise de livros didáticos à luz do modelo mtsk: um foco nos números racionais / Éverton Ferraz Marcelino Batista -- 2023.
155f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba
Orientador (a): Paulo César Oliveira
Banca Examinadora: Carlos Miguel Silva Ribeiro, Rogerio Fernando Pires
Bibliografia

1. Números Racionais. 2. Análise de Livros Didáticos. 3. Conhecimento Especializado do Professor que Ensina Matemática. I. Ferraz Marcelino Batista, Éverton. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Maria Aparecida de Lourdes Mariano - CRB/8 6979

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Éverton Ferraz Marcelino Batista, realizada em 10/03/2023.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Paulo Cesar Oliveira (UFSCar)

Prof. Dr. Carlos Miguel Silva Ribeiro (UNICAMP)

Prof. Dr. Rogerio Fernando Pires (UFU)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas.

DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho ao meu pai, Júlio Arnaldo Batista (in memoriam), à minha mãe, Luzimar Pereira Marcelino Batista, à minha esposa Marcela Ferraz Nascimento Batista e ao meu filho, Henry Ferraz Batista. Obrigado por existirem.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Júlio Arnaldo Batista e Luzimar Pereira Marcelino Batista, por me indicarem um sentido e não um caminho. Agradeço por terem sacrificado seus projetos pessoais para dedicar o tempo e suor para seus filhos. Obrigado por todo amor concedido.

Agradeço à minha esposa, Marcela Ferraz Nascimento Batista, por ser companheira, me apoiando em todos os momentos, abraçando todas as tarefas e problemas para que eu pudesse me dedicar a este trabalho. Obrigado por todo amor concedido.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Paulo Cesar Oliveira, pelo acolhimento mesmo sem me conhecer, pela paciência, pela dedicação em me ensinar e, sobretudo, pela humanidade com que me tratou o tempo todo. Obrigado pela amizade.

Agradeço aos avaliadores, Dr. Miguel Ribeiro e Dr. Rogério Fernando Pires, por terem aceitado o convite para fazer parte da banca examinadora deste trabalho.

Agradeço aos meus irmãos, Ester e Clayton, por sempre me incentivarem a estudar.

Agradeço à minha sogra, Maria Helena, por todo o apoio desde o início.

Agradeço aos meus colegas de turma do PPGECE e PROFMAT por terem sido companheiros sempre.

Agradeço aos professores Paulo, Venezuela, Ana Mereu, Sadao, Silvia, Rogério, Magda e Graciele por ampliarem meu horizonte sobre a Matemática.

EPÍGRAFE

Para ser grande, sê inteiro: nada

Teu exagera ou exclui.

Sê todo em cada coisa. Põe quanto és

No mínimo que fazes.

Assim em cada lago a lua toda

Brilha, porque alta vive.

Ricardo Reis, 14-2-1933

(heterônimo de Fernando Pessoa)

RESUMO

A presente dissertação traz uma análise de dois livros didáticos de matemática do 6° ano, que foram validados nos três últimos anos do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (2014, 2017 e 2020). A análise consistiu em levantar, utilizando-se de metodologia qualitativa de natureza documental, quais conhecimentos especializados para o ensino dos números racionais foram apresentados pelos autores. Como parâmetro para as análises, utilizou-se pesquisas cujos resultados buscaram identificar a mobilização dos conhecimentos especializados do professor para o ensino dos números racionais a partir do modelo MKT (Mathematical Knowledge for Teaching), de Ball, Thames e Phelps (2008) e do PCK, de Shulman (1987), sendo que os resultados dessas pesquisas compuseram uma base de conhecimentos para análises dos livros didáticos. Para a categorização dos conhecimentos especializados presentes nas obras, utilizou-se o modelo de Conhecimento Especializado dos Professores de Matemática (ou dos Professores que Ensinam Matemática), o MTSK (Mathematics Teachers' Specialised Knowledge) de Carrillo *et al* (2013, 2018). Os dados apresentados nas análises indicam uma ênfase por parte dos autores no desenvolvimento de conhecimentos especializados nos aspectos "fenomenológicos" e "representacionais", com destaque ao Araribá Mais Matemática neste último âmbito. No entanto, foi evidenciado um número relevante de lacunas no que tange os aspectos de "definições e imagem de um conceito" e os "significados associados" em ambos os livros. Ainda foi possível verificar que ambos os livros apresentam conhecimento especializado ao ensino no que diz respeito aos âmbitos "conexões auxiliares" e "modos de validação", sendo todos esses âmbitos referentes ao conhecimento matemático. No que concerne ao conhecimento didático do conteúdo, os dados nas análises indicam que ambos os livros apresentam conhecimento especializado nos âmbitos "formas de apresentar o conteúdo - potencial de aprendizagem", "recurso/material pedagógico associado", com maior evidência de presença de conhecimento no âmbito "teoria psicológica associada ao aprendizado do conteúdo" no livro Teláris Matemática. Já no que concerne aos "erros de aprendizagens mais comuns", ambos os livros se destacaram pela alta presença de conhecimento especializado em contraste de baixas lacunas.

Palavras-chave: Números Racionais. Análise de Livros Didáticos. Conhecimento Especializado do Professor que Ensina Matemática.

ABSTRACT

This dissertation brings an analysis of two 6th grade mathematics textbooks, which were validated in the last three years of the National Book and Didactic Material Program (2014, 2017 and 2020). The analysis consisted of raising, using a qualitative methodology of a documental nature, which specialized knowledge for the teaching of rational numbers were presented by the authors. As a parameter for the analyses, research was used whose results sought to identify the mobilization of the teacher's specialized knowledge for the teaching of rational numbers from the MKT model (Mathematical Knowledge for Teaching), by Ball, Thames and Phelps (2008) and the PCK, by Shulman (1987), and the results of these surveys formed a knowledge base for the analysis of textbooks. For the categorization of the specialized knowledge present in the works, the model of Specialized Knowledge of Mathematics Teachers (or of Teachers who Teach Mathematics), the MTSK (Mathematics Teachers' Specialized Knowledge) by Carrillo et al (2013), was used.The data presented in the analyzes indicate an emphasis on the part of the authors in the development of specialized knowledge in the “phenomenological” and “representational” aspects, with emphasis on Araribá Mais Mathematica in the latter scope. However, a relevant number of gaps was highlighted regarding aspects of “definitions and image of a concept” and “associated meanings” in both books. It was also possible to verify that both books demonstrate specialized knowledge for teaching in terms of “auxiliary connections” and “validation modes”, all of which are related to mathematical knowledge. With regard to didactic knowledge of the content, the data in the analyzes indicate that both books present specialized knowledge in the scopes "ways of presenting the content - learning potential", "associated pedagogical resource/material", with greater evidence of presence of knowledge of the scope “psychological theory associated with the learning of content” in the book Teláris Mathematica. With regard to the "most common learning errors", both books stood out for the high manifestation of specialized knowledge in contrast to low gaps.

Keywords: Rational Numbers. Textbook Analysis. Mathematics Teachers' Specialized Knowledge.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS E QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

UFSCAR - Universidade Federal de São Carlos

MTSK - Mathematics Teachers' Specialized Knowledge

MKT - Mathematical Knowledge for Teaching

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO E DELINEAMENTO DA PESQUISA

A presente pesquisa busca identificar conhecimentos especializados para o ensino dos números racionais como base de conhecimentos para categorizar e conceituar, mediante o modelo MTSK (Mathematics Teacher's Specialised Knowledge) de Carrillo et al (2013, 2018), as escolhas didáticas de dois livros didáticos, do 6º ano do Ensino Fundamental de 9 anos, que foram aprovadas nos três últimos PNLDs (Programa Nacional do Livro e do Material Didático).

Para relatar os motivos que levaram à escolha desse tema de pesquisa, peço licença para brevemente discorrer em primeira pessoa.

No primeiro semestre de 2021 participei como aluno ouvinte da disciplina de Tópicos de Matemática, no curso de Licenciatura em Matemática da UFSCar – Sorocaba, no qual deparei-me com textos que me introduziram a um campo teórico pertinente ao meu trabalho docente, como a base de conhecimentos de Lee Shulman (1987), a base de conhecimentos MKT (Mathematical Knowledge for Teaching) de Ball, Thames e Phelps (2008) e o modelo MTSK de Carrillo et al (2013, 2018). No entanto, outros textos levantados no curso (pesquisas nacionais) me permitiram ligar teoria e prática, ou seja, pude ver como os modelos teóricos se comportavam na construção de conhecimentos em pesquisas relativas aos conhecimentos para ensino dos números racionais.

Em minha visão como docente de Matemática dos Anos Finais, apesar de saber que meus conhecimentos profissionais sobre os números racionais eram suficientes para entendê-los enquanto objeto matemático, não tinha ciência que eram insuficientes para promover boas oportunidades de aprendizagens aos meus alunos. Os detalhes e interpretações encontradas nas pesquisas abordadas no curso me exigiram uma autorreflexão e honestidade comigo mesmo para enxergar que, na realidade, meu nível de conhecimento sobre o ensino do tópico era raso. Me percebi numa situação incômoda, porém vantajosa, pois estava num curso que dava ênfase neste tópico.

Nasce, então, a motivação de pesquisar mais a fundo esse assunto tão relevante à minha prática profissional juntamente com um desejo anterior de exploração de livros didáticos, pois se mostram como uma das ferramentas mais importantes que utilizo em meu trabalho, tornando-se relevante o aprofundamento sobre as teorias subjacentes às escolhas didáticas.

Além desta identificação pessoal de uma lacuna nos conhecimentos especializados ao ensino dos números racionais, o tema mostrou-se de grande relevância ao deparar-me com pesquisas que trazem resultados alarmantes.

No século XIX o proeminente matemático De Morgan direcionava um olhar sobre a aprendizagem das frações: “De Morgan (1943), escrevendo em 1831 para a Society for the Dissemination of Useful Knowled, afirmou que as frações eram um tópico imensamente difícil de aprender” (KIEREN, 1980, p. 127).

O estudo de Zero, Oliveira e D’Alessandro Neto (2021) levantou e analisou resultados de teses e dissertações brasileiras acerca do conhecimento matemático para o ensino de números racionais, observando como o modelo MKT, de Ball, Thames e Phelps (2008), foi utilizado pelos pesquisadores brasileiros. Esse estudo se mostrou de grande relevância, pois além de oferecer um panorama completo – pois é na modalidade Estado da Arte – sobre as pesquisas com esse referencial teórico (envolvendo os números racionais) no Brasil, traz também uma análise qualitativa desses estudos, compondo assim, para esta pesquisa, um delineamento coerente de organização do referencial teórico.

Nas análises dos estudos, os autores identificam alguns obstáculos e caminhos a percorrer acerca dos conhecimentos necessários para o ensino de números racionais:

> [...] foi possível destacar a importância de investimentos em propostas formativas para e com os professores que ensinam Matemática, sejam eles licenciandos, licenciados e/ou formadores visando o aprofundamento de conteúdos (como os números racionais) e suas formas de ensinar, pois além de dados encontrados em avaliações externas que indicam a dificuldade de muitos estudantes da Educação Básica na compreensão desse conjunto numérico, há docentes que também podem melhorar suas práticas por meio da imersão em tópicos matemáticos específicos. (ZERO, OLIVEIRA, D`ALESSANDRO NETO, 2021, p. 1.)

É possível notar que os obstáculos ao ensino adequado às demandas educacionais do tema atravessam diversos patamares, atingindo desde aquele que está estudando para ser professor, o próprio professor, o formador de professores, até a outra ponta, ou seja, para os próprios alunos que são diretamente afetados.

Para Damico (2007), as crianças e adolescentes conseguem trabalhar com frações após muita dedicação, porém nem sempre o êxito escolar ocorre. O autor ainda destaca que até os professores encontram dificuldades de dar sentido ao conteúdo, sendo este, para ambos os públicos, algo descolado da realidade e destituído de significado.

No que tange às práticas pedagógicas, corroborando com Damico (2007), Marques (2018) traz um relato de uma frustração pessoal ao tentar sanar as dificuldades dos alunos com as quatro operações fundamentais de forma estritamente procedimental:

> A estratégia de ensino que adotei consistia, basicamente, em listar os passos de cada algoritmo e fazê-los resolver listas de cálculos com o objetivo de memorização desses passos. O resultado não foi o esperado, uma vez que os alunos continuaram a cometer erros que demonstravam sua incompreensão dos significados envolvidos nas etapas dos cálculos. (MARQUES, 2018, p. 16)

Nota-se, com isso, que o uso demasiado da manipulação dos números racionais em detrimento da aplicação e da conceituação, pode gerar obstáculos ao processo ensino aprendizagem e que, ainda, Kieren (1976) já alertava que a conceituação deve estar equilibrada com definições que se aproximem do pensamento natural da criança conforme seu estágio de desenvolvimento. Essa ponderação entre as formas de se definir conceitos e operações com números racionais intencionalmente ajustados a seu período de desenvolvimento, torna-se uma demanda acerca do ensino do tópico.

Para Litoldo, Almeida e Ribeiro (2018), há evidências de que as dificuldades que os alunos possuem no entendimento das frações são as mesmas que os próprios professores têm, sendo então que tais resultados são intrinsecamente ligados ao conhecimento que será oferecido ao aluno. Os estudos levantados por Zero, Oliveira e D'Alessandro Neto (2021) são, então, de grande importância para compor a base de conhecimentos especializados desse estudo pois, apesar de não terem tido como objeto de estudo o aluno do ensino básico, analisam os conhecimentos de quem está – e de quem estará – no papel fundamental para que se efetive o ensino, o professor.

Outro fator de relevância são os dados trazidos por Rogeri (2015), apontando que os alunos que chegam no 6° ano não estão compreendendo os significados associados aos números racionais, tampouco operam com os procedimentos de cálculo. A autora traz dados do SARESP (Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo):

> A edição 2012 nos chama a atenção ao apresentar os percentuais de acertos de duas questões: os resultados dos desempenhos dos alunos nestas duas questões indicam dificuldades no estabelecimento de relações entre as representações fracionárias e decimais de um mesmo número racional, com apenas 25% de acertos em cada uma das questões. (ROGERI, 2015, p.34)

Desta forma, entende-se que a análise de livros didáticos em relação aos números racionais é de grande relevância pois este evidencia-se como um tópico complexo frente ao processo ensino aprendizagem.

Observando a relevância da pesquisa sobre o tema, o presente estudo teve como objetivo fazer a análise de livros didáticos de Matemática do 6º ano do Ensino Fundamental de 9 anos. A pergunta norteadora deste trabalho foi: "quais conhecimentos especializados do professor/autor que ensina matemática, acerca dos números racionais, os livros didáticos estão priorizando em suas escolhas didáticas?".

Uma discussão pertinente que pode ser feita sobre a questão norteadora gira em torno das questões: i) os conhecimentos especializados expressos nos livros didáticos são os mesmos que os professores devem possuir? ii) Tais conhecimentos especializados expressos nos livros auxiliam no desenvolvimento do conhecimento especializado do professor?

Sobre a primeira questão, assumimos que há uma interseção entre ambos os domínios de conhecimento em questão, o do autor (ou equipe autoral/editorial) expresso no livro e o do professor, e que tal região interseccional não deve ser pequena, visto que ambos precisam trabalhar em *simbiose* ao longo de todos os tópicos do livro. Discriminar a exatidão dos conhecimentos especializados comuns a esses dois atores do processo ensino aprendizagem foge do escopo deste trabalho, portanto, para fins de análise, será assumida a hipotética coincidência entre tais domínios.

Acerca da segunda questão, tem-se que o livro didático constitui um dos espaços de trabalho matemático de referência do professor (KUZNIAK; RICHARD, 2014). O espaço de trabalho matemático de referência do professor viabiliza a modificação e aperfeiçoamento do espaço de trabalho do próprio professor mediante os conhecimentos especializados presentes nos livros didáticos para, então, culminar no oferecimento de uma oportunidade efetiva de aprendizagem a seus alunos. No entanto, apesar de assumirmos essa posição, entendemos que esse não é o objetivo central do livro didático, ou seja, é uma consequência de seu uso no processo ensino aprendizagem.

Em relação aos critérios de escolha dos livros, o primeiro critério adotado para seleção foi o de frequência nas aprovações nos três últimos PNLD, sendo eles: Araribá Mais Matemática (editora Moderna), Matemática Bianchini (editora Moderna) e Teláris Matemática (Editora Ática).

No entanto, um segundo critério foi aplicado após o primeiro: os livros Araribá Mais Matemática e Teláris Matemática já pertenciam ao contexto escolar do autor desta dissertação. Sendo o contexto de uso pelo professor um segundo critério, delimitou-se, então, a análise focando nesses dois livros didáticos.

A pesquisa teve como pretensão, também, organizar uma base de conhecimentos especializada para o ensino de números racionais para que fosse possível identificar tais conhecimentos nas obras didáticas. Tal base poderá servir como material teórico para que professores possam consultar e adaptá-los à sua prática, visto que, a transposição dos conhecimentos adquiridos em pesquisas acadêmicas precisa se efetivar, chegando aos professores que fazem uso desses conhecimentos tão promissores.

Desta forma, o trabalho estrutura-se em seis capítulos, sendo este, a introdução, o primeiro. Em seguida, no segundo capítulo, têm-se os referenciais teóricos que dão suporte para as análises. Mais especificamente, da seção 2.1 à subseção 2.1.2, encontram-se uma breve exposição do contexto social/científico/filosófico dos anos 70 e 80 nos Estados Unidos e, também, uma proposta de Reforma da Educação, pautadas, dentre outras, nas referências centrais de Shulman (1987), Tardif (2000) e Tardif, Moscoso (2018). Essa escolha se deu para que no momento da análise das obras os termos fiquem claros e alinhados em uma intencionalidade teórica.

Posteriormente, nas seções 2.2 e 2.3, os modelos de base de conhecimentos para o ensino de matemática são explanados de acordo com seu contexto, sendo eles: o modelo MKT de Ball, Thames e Phelps (2008) e o modelo MTSK de Carrillo et al (2013, 2018).

Adiante, na seção 2.4, abordam-se os conhecimentos relativos ao ensino dos números racionais a partir dos estudos pioneiros de Kieren (1976, 1980) e de cinco pesquisas brasileiras: Souza (2015), Santos Filho (2015), Damico (2007), Marques (2018), Rogeri (2015).

O terceiro capítulo é dedicado a explicar a metodologia que esse trabalho utilizou para fazer as análises dos livros, sendo ela qualitativa de natureza documental.

Em seguida, no quarto capítulo, as análises dos livros didáticos foram feitas de forma que se identificasse os conhecimentos especializados nas escolhas didáticas, ao mesmo tempo que foi feita a categorização de tais conhecimentos utilizando o modelo MTSK.

No quinto capítulo encontram-se as considerações sobre as análises, bem como uma síntese dos resultados levantando dos pontos mais relevantes, considerando a questão norteadora da pesquisa. No sexto capítulo, têm-se as referências utilizadas na pesquisa.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Os referenciais teóricos utilizados nesta pesquisa estão estruturados em duas vertentes, a primeira sendo dos “contextos” no âmbito da filosofia, pautado pelo enraizamento do positivismo nas ciências; no campo da psicologia, pautado pela ascensão do cognitivismo e, também, do social, evidenciado pela crise do profissionalismo e do novo modelo de profissional, o reflexivo, de Schön, trazidos por Tardif, Moscoso (2018). Tais contextos ajudam a entender o pano de fundo que se tinha nos Estados Unidos nas décadas de 70 e 80 quando foram propostos “modelos de base de conhecimentos especializados do professor”, a segunda vertente deste referencial teórico. Tal ideia de base de conhecimentos, proposta inicialmente por Shulman (1987), possibilitou a expansão para dois modelos de base de conhecimentos específicos da Matemática, o MKT de Ball, Thames e Phelps (2008) e o MTSK de Carrillo et al (2013, 2018), modelos quais esse trabalho se dedicará a dissertar.

Adiante, a presente pesquisa traz uma “base de conhecimentos especializados sobre o ensino dos números racionais” composta pelos resultados de sete pesquisas, sendo elas Kieren (1976, 1980), Souza (2015), Santos Filho (2015), Damico (2007), Marques (2018), Rogeri (2015), sendo essas últimas cinco brasileiras.

2.1. O CONTEXTO DA CRISE DO PROFISSIONALISMO

Para entender o movimento de crise do profissionalismo e sua relação com a profissão docente, torna-se importante trazer, em linhas gerais, um conceito filosófico bastante difundido pela Europa, o positivismo. O positivismo é uma corrente filosófica desenvolvida por Auguste Comte a qual, *grosso modo*, tinha como ideia central a superestimação das ciências duras - aquelas não relativas ao comportamento humano, mas sim do comportamento da natureza: física, química, etc.

Esse modo de pensar as ciências teve aceitação em várias comunidades acadêmicas no mundo:

> Enquanto corrente filosófica, o positivismo influenciou diferentes produções humanas e situou-se em tradições culturais distintas: França (inseriu-se no racionalismo) – de Descartes a Auguste Comte; Inglaterra (tradição empirista e utilitarista) – John Stuart Mill e Herbert Spencer; Alemanha (cientificismo e monismo materialista) – Ernst Heckel e Jakob Moleschott; Itália (naturalismo

> renascentista) – Roberto Ardigò, e demarcou, antes de tudo, o espírito da época. (SILVINO, 2007, p.279)

Assim, mesmo situado em diferentes tradições culturais, o positivismo possui uma espinha dorsal que permite identificá-la em toda essa diversidade de pensamentos. Essa permeabilidade era evidente até começar a ser confrontada diretamente, em meados do século XX, por novas teorias de áreas como a filosofia da ciência. Assim, para Tardif, Moscoso (2018), autores como Wittgenstein, Kuhn e Popper, todos com olhar sobre a filosofia da ciência, confrontam o positivismo enquanto corrente predominante, em meados de 1970.

Concomitantemente, no ramo da psicologia o comportamentalismo aplicado ao aprendizado da linguagem, de Skinner, recebe críticas do então proeminente linguista Chomsky. O período de 1950 a 1960 é marcado:

> [...] por uma intensa crítica à abordagem behaviorista e um retorno a problemas clássicos da psicologia, como pensamento, consciência e representação mental. Graças a trabalhos de psicólogos talentosos como Karl Lashley e George Miller e ao lingüista Noam Chomsky, a abordagem behaviorista estava sendo duramente criticada ao mesmo tempo em que um novo paradigma para se estudar a mente era proposto. (JUSTI; ARAÚJO, 2004, p.267)

O novo paradigma diz respeito ao estudo das ações mentais, próprias do campo da Psicologia Cognitivista. Para Tardif, Moscoso (2018), o cognitivismo visa pensar a atividade humana de forma mais complexa que a simples redução ao comportamento como reflexo, evidenciando uma inteligência que processa as interações que temos com o ambiente - uma cognição - transcendendo a restrita forma de pensar o humano do behaviorismo.

Neste contexto, observou-se um aumento significativo das pesquisas de cunho qualitativo em ciências sociais, sobretudo na área da Educação que, para Bogdan e Biklen (1994) tornaram-se viáveis quando as agências de financiamento de pesquisas americanas começaram a investir com mais intensidade nos núcleos de pesquisa que abordavam o conhecimento pela ótica desses novos paradigmas.

Para compreender melhor as teorias dos autores que comporão a base de conhecimentos deste estudo, se faz necessário explorar o caráter social, mais especificamente o que atinge o mundo do trabalho: as profissões.

Primeiramente, cabe trazer uma sucinta distinção que Tardif (2000) faz entre profissões e ocupações, quando disserta que “de fato, no mundo do trabalho, o que distingue as profissões das outras ocupações é, em grande parte, a natureza dos conhecimentos que estão em jogo.” (TARDIF, 2000, p.6).

Correlacionada à desconstrução do positivismo, um movimento de pulverização do indivíduo e das relações humanas, bem como seus papéis na sociedade, contribuiu para o início de uma crise do profissionalismo. Esse movimento, iniciado nos anos 80:

> [...] está marcado pelo desenvolvimento do pós-modernismo, iniciado por Lyotard (1970) e seguido pelos trabalhos de Maffesoli, Vattimo, Lipovestky, Rorty, etc. Esses filósofos se entregaram à tarefa de repensar os saberes racionais (inclusive os das ciências humanas, como testemunha a obra de Foucault) e de desconstruí-los, evidenciando sua relação com o poder, a “metafísica e a ciência ocidental” e “a violência racional”. Esses anos também se caracterizam pela morte do Sujeito, o nascimento do pós-estruturalismo, o retorno a Nietzsche e ao pós-modernismo.” (TARDIF, MOSCOSO, 2018, p. 394)

Assim, um curioso fenômeno se dava, internacionalmente, num processo de mão dupla no que diz respeito ao processo de desprofissionalização de diversas profissões. De um lado, profissões muito tradicionais sofrem um efeito de esvaziamento do caráter profissional e de outro lado, em mão oposta, o universo da Educação tenta se livrar do status de ocupação/ofício e galgar um status de profissão que, segundo Tardif (2000), esse movimento de sentidos contrários chega a atingir profissões de raízes bem estabelecidas e status social, como por exemplo a medicina.

Na tentativa de entender melhor o movimento de desprofissionalização, Tardif (2000) reflete sobre as causas terem se dado, em linhas gerais, por quatro grandes motivos: como o distanciamento da formação universitária às demandas do mundo profissional, para iniciar. Um segundo motivo seria de assentar uma crise de poder, em dois sentidos: tanto no político, no qual se observa o alcance de decisão do profissional, quanto no sentido de competência. Outro motivo inerente à crise do profissionalismo seria a falta de consenso sobre a conduta ética de cada profissão.

Para finalizar, o autor expõe um quarto motivo (o autor menciona esse em primeiro lugar e vos dá mais relevância. No entanto, é útil para este trabalho apresentá-lo por último, pelo motivo que se constata logo a seguir) que é a crise da perícia profissional, caracterizada pela pulverização das práticas profissionais fortemente enraizadas, até então, nessas profissões tradicionais. Segundo Tardif (2000):

> [...] assimilada durante muito tempo ao exercício de uma racionalidade instrumental diretamente baseada no modelo das ciências aplicadas, uma racionalidade capaz de calcular e combinar eficazmente meios e fins, a perícia profissional está sendo cada vez mais percebida hoje em dia de acordo com o modelo de uma racionalidade limitada, de uma racionalidade improvisada, na qual o processo reflexivo, a improvisação, a indeterminação, a criatividade, a

> intuição, o senso comum desempenham um grande papel, apoiando-se, ao mesmo tempo em rotinas próprias a cada tradição profissional.(TARDIF, 2000, p.8)

Na próxima subseção, será possível refletir sobre esse movimento de transformação da perícia profissional de racionalidade instrumental, o processo de reflexão do profissional.

2.1.1 O Profissional Reflexivo

Segundo Tardif, Moscoso (2018), diante do contexto filosófico, científico e social da década de 80, o pesquisador Donald Schön encontrou uma demanda de mudanças nesse momento de crise do profissionalismo e de crítica ao pensamento positivista, trazendo a ideia de que para entender o ambiente profissional é imprescindível vê-lo pela perspectiva de seu pensamento e experiências.

Nasce assim o conceito de profissional reflexivo como resgate de uma tradição do pensamento reflexivo e que, para Tardif, Moscoso (2018), pensar o profissional como cumpridor de protocolos ou que segue receitas para aplicar os conhecimentos de sua área é uma concepção equivocada, pois as situações que os profissionais vivem tem sua singularidade exigindo reflexão em sua ação e, em grande medida, exige improvisação.

Esse conceito de profissional reflexivo, proposto por Schön, trazido em Tardif, Moscoso (2018), ganhou notoriedade em meio ao momento de crise das profissões, sobressaindo assim, como um grande provocador dos modelos de formação do profissional na Universidade. “Em nossa opinião, Schön tem a originalidade de ser um dos primeiros em problematizar as questões da racionalidade, cognição e reflexão no domínio tradicional das formações profissionais universitárias.” (TARDIF, MOSCOSO, 2018, p. 399).

Apesar de inovador, esse modelo de profissional proposto por Schön recebe críticas, sendo uma delas a de que, segundo Tardif, Moscoso (2018), diante do alto grau de segmentação e peculiaridades dos fazeres profissionais, a ideia de reflexão-na-ação é incapaz para compreender como se dá a dinâmica de pensamento do profissional no exercício de suas funções.

Outra crítica que se faz (TARDIF, MOSCOSO, 2018) é o caráter fortemente estruturalista (no sentido de generalista) que Schön propõe quando aborda que as nuances da reflexão do professor, por exemplo, estariam imbricadas nos conceitos de reflexão antes, durante e depois, pois por mais que pertençam ao mesmo profissional, a diversidade de origens da reflexão podem ser muito distintas como, por exemplo, o pensar sobre o aluno que está afastado da escola e o pensar sobre quais os melhores exemplos para começar a ensinar potenciação.

Assim, com essa crítica ao ideal de profissional reflexivo, de Donald Schön e, em meio a uma crise do profissionalismo, será abordado na seção seguinte um autor que buscou em seu trabalho de pesquisa trilhar esse caminho relatado na segunda crítica, trazendo uma alternativa teórica.

2.1.2. A Base de Conhecimentos e a Reforma Educacional de Lee Shulman

Em meados de 1970 as pesquisas de caráter qualitativo começaram a ganhar legitimidade no campo científico, sobretudo na Educação. Para Bodgan e Bliken (1994), muitas das aspirações de resultados do pensamento positivista não se consolidaram nas pesquisas no âmbito da Educação, assim, os métodos qualitativos ganharam espaço e desta forma foi possível desenvolver diversos métodos de pesquisa nesse novo campo. Situa-se aqui um período de grandes mudanças, de crescimento de pesquisas relacionadas ao ambiente escolar, sobretudo da profissão de professor que, como destacado, vinha num caminho inverso das outras profissões buscando raízes sólidas para consolidar-se como profissão, como assevera Tardif, Moscoso (2018):

> A partir dos anos 1980, o cognitivismo penetra maciçamente no campo das ciências da educação anglo-saxãs e no domínio da formação de professores. Nesse mesmo período, as pesquisas nos Estados Unidos deixam de estudar os comportamentos do professor a partir de uma ótica comportamental, esforçando-se para considerar o "pensamento dos professores", seus saberes, suas representações e crenças. (TARDIF, MOSCOSO, 2018. p.396)

Desta forma, forma-se um movimento para tentar entender e "cercar" os conhecimentos que os professores utilizam em sua prática docente, transcendendo a noção de reflexão antes, durante e depois, de Schön. Esse movimento atuou na tentativa de concentrar essas pesquisas, e que segundo Tardif, Moscoso (2018), a:

> American Educational Research Association (AERA) publica, sob a direção de M. C. Wittrock (1986), a terceira edição do grande Handbook of research on teaching. Essa obra contém numerosos capítulos que propõem sínteses de milhares de pesquisas sobre o pensamento e os conhecimentos dos professores. Nela são encontrados textos fundadores, que marcarão a pesquisa nessa área até os dias de hoje: Clark e Peterson, "Teachers' thought processes"; Doyle, "Classroom organization and management"; Fenstermacher, "Philosophy of Research on Teaching"; e Shulman, "Paradigms and research programs in the study of teaching". Todos esses autores tentam promover uma interpretação cognitivista do ensino,

> esforçando-se para ligar os comportamentos (ou ações) do professor a seu pensamento, seus conhecimentos, suas representações, seus julgamentos. Na mesma época, a orientação cognitivista é consideravelmente reforçada pelo movimento de profissionalização do ensino nos Estados Unidos, que exige a edificação de um "knowledge base" específico para a profissão docente. (TARDIF, MOSCOSO, 2018, p.396).

Destes autores, é relevante para este trabalho a obra de Lee S. Shulman (1987). Assim como Schön enxerga uma demanda de mudanças acerca do modelo de profissional (observando o tema geral), Shulman (1987) observa uma outra demanda de mudanças, no entanto referente ao estabelecimento de raízes para a profissionalização docente.

Lee Shulman queria combater afirmações do tipo: "Quem sabe faz, quem não sabe, ensina", que tenta desqualificar todo conhecimento que o professor traz em sua prática docente. Para isto, ele reformulou a afirmação para: "Os que podem fazem, os que compreendem ensinam" (SHULMAN, 1987, p.215) na tentativa de elucidar que o professor, além de saber os conteúdos necessários para ensinar, precisa compreendê-los, coisa que as outras profissões não demandam.

Assim, inicia-se um olhar direcionado para Shulman como um pesquisador que trouxe o alerta sobre a necessidade de se fazer uma reforma educacional e, para evidenciar sua completeza como teórico, formulou uma sólida base teórica para viabilizar e direcionar os esforços na - em sua visão - direção correta da reforma proposta. Com isso, essa tendência de luta pela profissionalização docente tem um largo alcance

> Na América do Norte e na maioria dos outros países de cultura anglo-saxônica (Austrália, Inglaterra etc.), bem como de forma mais recente, na Europa francófona (Bélgica, França, Suíça), toda área educacional está mergulhada em uma vasta corrente de profissionalização dos agentes da educação em geral e dos professores em particular (Ginsburg e Linday, 1995; Judge et al., 1994; Paquay et al., 1996; Tardif, Lessard e Gauthier, 1998; Tisher et al., 1990). Também encontramos essa corrente em vários países latino-americanos (Lüdke e Moreira, 1999; Tato e Velez, 1997). A profissionalização do ensino e da formação para o ensino constitui, portanto, um movimento quase internacional e, ao mesmo tempo, um horizonte comum para qual convergem os dirigentes políticos da área da educação, as reformas das instituições educativas e as novas ideologias da formação e do ensino (Tardif, Lessard e Gauthier, 1998; Lessard et al., 1999). (TARDIF, 2000, p.6)

Desta maneira, podemos entender que o movimento de profissionalização do professor mora no cerne desta proposta de reforma de Shulman, pois por uma frente de atuação – de conotação mais política – ele move grandes esforços para criação de um conselho de classe nos Estados Unidos, semelhante ao Conselho Federal de Medicina, no Brasil, por exemplo. Nessa força-tarefa, Shulman (1987) traça um paralelo com o magistério, trazendo que um conselho com tais características deveria avaliar os profissionais de acordo com padrões bem estabelecidos, pautados nas pesquisas acadêmicas acerca de determinadas disciplinas curriculares (e daquelas adjacentes, como a psicologia), em sua credibilidade com a comunidade dos profissionais do magistério e, também, na fundação sólida de seu caráter normativo que devem condizer com as necessidades dos professores, como a formação, por exemplo.

É possível notar uma visão que faz a ruptura no modelo vigente de enxergar o trabalho docente como exclusivamente disciplinar, em que para ensinar matemática, o professor deve saber apenas muito conteúdo matemático, por exemplo. O autor considera a grande complexidade que reside na prática docente observando o grande número de disciplinas e suas intrínsecas inter-relações que o profissional que ensina deve ter consigo, respondendo assim, à outra provocação do tipo: “Há muita coisa mesmo que é preciso saber para ensinar?” com “Como é possível aprender tudo que é preciso saber sobre ensino no tempo de formação de professores?”(SHULMAN, 1987, p. 205).

Ainda corroborando com a importância de um conselho de classe docente, que organize a classe, Tardif (2000) assevera que tal conselho, para responsabilizar o professor por sua prática, deve dispor em suas normas uma base de conhecimentos relativos à profissão docente para que possa se apontar e categorizar as condutas.

Assim, observando essa demanda de repertório de conhecimentos profissionais para que a profissão docente consiga - como já consolidado em outras profissões - elaborar uma forma organizada e objetiva de constatar erros e acertos, responsabilizar por ações e, enfim, encaminhar para a criação de uma instituição objetivamente organizadora, Shulman (1987) elabora seu repertório.

Desta forma, lança-se luz à outra frente de ataque rumo à reforma da educação: a construção de uma base de conhecimentos (a “knowledge base”) que o professor deve abarcar em si para que desempenhe o ensino de forma eficaz. O trabalho de Shulman (1987), apesar de genérico (à todas as disciplinas), mostra-se inovador para os contextos da época (e até hoje, passados mais de 30 anos) pois escava em profundidade essa base de conhecimentos do professor fazendo uma série de indagações iniciais: 1) Como categorizar os conhecimentos necessários a uma boa prática docente? 2) Quais são as fontes desses conhecimentos e em que termos podem ser conceituadas? 3) O que fazer com esses conhecimentos, ou, segundo Shulman (1987, p.196): “quais são os processos de raciocínio e ação pedagógicos?” e ainda, 4) “Quais são as implicações para a política de ensino e reforma educacional?”

Shulman (1987) traz para o leitor um caso de investigação da prática docente: o caso Nancy. Em linhas gerais, Nancy, professora há 25 anos de língua inglesa, tem traços em seu fazer pedagógico que se mostram relevantes: conhecia com profundidade o que ensinava; interagia, instigava o debate e a verbalização de seus alunos, sempre pautada por um modelo teórico de aprendizagem, entre outras qualidades. E lançou-se a pergunta: como um professor iniciante pode, um dia, *se tornar* uma Nancy?

Assim, na tentativa de organizar os conhecimentos necessários para essa transformação, Shulman (1987) elenca sete categorias de conhecimentos que formam a base de conhecimentos de ensino do professor (quadro 1):

Quadro 1 - Categorias da base de conhecimentos do professor

Categoria	Exemplo
Conhecimento de conteúdo	Um professor de matemática também precisa ter conhecimento do objeto matemático para implementar propostas de estudos em contextos escolares
“Conhecimento pedagógico geral, com especial referência aos princípios e estratégias mais abrangentes de gerenciamento e organização da sala de aula, que parecem transcender a matéria.” (SHULMAN, 1987, p.206)	Por exemplo, saber reconhecer qual o momento e atividade mais apropriado para se trabalhar em grupo ou individualmente.
Conhecimento do currículo. “Materiais e programas que servem de “ferramentas do ofício” para os professores.” (SHULMAN, 1987, p. 206)	Temos a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) e o Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019), como alguns exemplos.
Conhecimento dos alunos e de suas características.	Leva em conta a subjetivação que cada indivíduo traz para a sala de aula, o que gostam de fazer, as dificuldades internas e externas à sala de aula que o aluno carrega
“Conhecimento dos contextos educacionais, desde o funcionamento do grupo ou sala de aula, passando pela gestão e financiamento dos sistemas educacionais, até características das comunidades e	Como exemplo, ter a ciência de como funciona o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica.

suas culturas." (SHULMAN, 1987, p.206).	
"Conhecimento dos fins, propósitos e valores da educação e de sua base histórica e filosófica." (SHULMAN, 1987, p.206).	Podemos citar o relatório da UNESCO: Educação, um tesouro a descobrir (UNESCO, 1998), que traz quatro bases gerais para a educação mundial, sendo elas: o aluno deve ser capaz de aprender a ser, aprender a fazer, aprender a conhecer e aprender a conviver.
Conhecimento pedagógico do conteúdo. É a categoria que serve de alicerce ao professor, para Shulman (1987)	É importante o professor transitar e coordenar múltiplas representações para dar acesso ao objeto matemático que, por essência, é abstrato.

Fonte: Adaptado de Shulman (1987)

O autor identifica em sua pesquisa de onde surgem essas sete categorias de conhecimentos. Ele observa que há, pelo menos, quatro fontes dispostas no quadro 2:

Quadro 2 - Fontes do conhecimento do professor

Fonte	Exemplo/comentário
"Formação acadêmica nas áreas de conhecimento ou disciplinas" (SHULMAN, 1987, p.207)	Mostra-se uma fonte emblemática, pois, ao mesmo tempo que aparece elencada como um dos motivos da crise das profissões, também é observada por Schön, como descolada das realidades dos profissionais.
"Materiais e o entorno do processo educacional institucionalizado (por exemplo, currículos, materiais didáticos, organização e financiamento educacional, e a estrutura da profissão docente)" (SHULMAN, 1987. p.207)	Atualmente o sistema educacional brasileiro norteado por avaliações externas, tendo como referência a BNCC, um documento normativo.
"Pesquisas sobre escolarização, organizações sociais, aprendizado humano, ensino e desenvolvimento, e outros fenômenos sociais e culturais que afetam o que os professores fazem" (SHULMAN, 1987, p.207).	Recentemente vivenciou-se um caso de racismo, como o ocorrido com George Floyd, nos EUA. Um professor de matemática pode ser afetado por isso e trabalhar transversalmente o caso de racismo no eixo temático de estatística, levantando dados com os alunos ou, como outro exemplo, quando o professor tem a ciência do conceito de zona de desenvolvimento proximal, de Vygotsky, tem um melhor critério para designar as tarefas em diferentes níveis para os alunos.
"A sabedoria que deriva da própria prática. (SHULMAN, 1987)	Uma professora como a Nancy tem em sua prática exitosa componentes adquiridos da vivência em sala de aula em seus 25 anos de carreira. Ao mesmo tempo que ela pode criar métodos, também pode interpretar teorias de aprendizagem usando a vasta quantidade de experiências que já teve em sala de aula. Esses conhecimentos, adquiridos pela Nancy,

	precisam ser apropriados por seus companheiros de profissão e não devem ser deixados de lado, ou seja, um professor iniciante deve ter a sensibilidade de enxergar as virtudes de um professor experiente e absorvê-las com as adaptações necessárias, assim como o professor experiente deve ser solícito com seus pares para compartilhar os "segredos" de sua eficácia

Fonte: Adaptado de Shulman (1987)

É possível notar que Shulman (1987) desenvolveu seus estudos com foco no ensino, no entanto ele também pontuou que a aprendizagem possui igual valor. O autor se aproxima do profissional reflexivo, de Schön, ao exibir a visão que vislumbra sobre o foco que deve ter o ensino, quando disserta que se deve enfatizar o ensino como compreensão do raciocínio, como transformação e reflexão. Essa ênfase se justifica pela determinação tanto da "pesquisa como as políticas públicas flagrantemente ignoraram esses aspectos do ensino no passado." (SHULMAN, 1987, p.214).

Assim, o autor traz, mesmo sem fazer referência a Schön, uma perspectiva de um professor reflexivo para sua teoria quando o alia à sua proposta de base de conhecimentos.

> A reflexão profunda requer tanto um processo de pensamento sobre o que estão fazendo como uma adequada base de fatos, princípios e experiências, a partir dos quais se raciocina. Os professores precisam aprender a usar sua base de conhecimentos para prover fundamentos para escolhas e ações. (SHULMAN, 1987, p.214).

Desta forma, o autor se aprofunda e elabora um modelo de ação e raciocínio pedagógico disposto no quadro 3:

Quadro 3 – Modelo de ações e raciocínios pedagógicos

Ações e Raciocínios Pedagógicos
Compreensão dos propósitos, estruturas do conteúdo, ideias dentro e fora da disciplina. O entendimento do conceito matemático de proporção, tem sua importância de aplicação no dia-a-dia e, para compreendê-lo, é necessário que outras habilidades estejam desenvolvidas nos alunos, como a noção de classes de equivalência, por exemplo.
Transformação pela "Preparação: interpretação crítica e análise de textos, estruturando e segmentando, desenvolvimento de um repertório curricular e esclarecimento dos propósitos" (SHULMAN, 1987, p. 216). Por exemplo: o professor pode adaptar situações propostas no livro didático à realidade do contexto em que a sala está inserida. Trocar nomes de lugares desconhecidos para outros conhecidos, por exemplo.
Transformação pela "Representação: uso do repertório representacional, que inclui analogias, metáforas, exemplos, demonstrações, explicações e assim por diante" (SHULMAN, 1987, p.216). Por exemplo, ao introduzir o conceito de potenciação, pode-se contar a história da invenção do xadrez, como problemática e representação visual.
Transformação pela "Seleção: escolha dentro de um repertório instrucional que inclui modos de ensinar, organizar, gerenciar e arrumar" (SHULMAN, 1987, p. 216). Por

exemplo: sequência didática de um projeto de competição de pontes de palito de churrasco no 8°ano, para se trabalhar a estrutura rígida do triângulo bem como outras propriedades pertinentes.
Transformação pela "Adaptação e ajuste às características dos alunos: consideração de conceitos, preconceitos, equívocos e dificuldades, língua, cultura e motivações, classe social, gênero, idade, habilidade, aptidão, interesses, autoestima e atenção" (SHULMAN, 1987, p. 216). Por exemplo: esse aspecto leva em consideração o conhecimento dos alunos e de suas características. Assim, alunos que possuem maior dificuldade de abstração, podem tirar proveito ao receber um geoplano para aprenderem a calcular áreas de polígonos.
Instrução por meio de "Gerenciamento, apresentações, interações, trabalho em grupo, disciplina, humor, questionamentos e outros aspectos do ensino ativo, instrução de descoberta ou de investigação e as formas observáveis de ensino em sala de aula." (SHULMAN, 1987, p. 216). Por exemplo: no caso do projeto de competição de pontes de palito de churrasco, o professor pode equilibrar o processo autônomo de descoberta e criação da ponte do aluno com designações pertinentes ao que será estudado. Os processos de descoberta e de criação não são soltos, caóticos, mas sim instruídos e organizados pelo professor em uma sequência estimulante e ordenada.
Avaliação pela "Verificação do entendimento do aluno durante o ensino interativo. Testar o entendimento do aluno no final das aulas ou unidades. Avaliar o próprio desempenho e ajustá-lo às experiências" (SHULMAN, 1987, p. 216). Por exemplo: O professor não pode se contentar em saber se o aluno aprendeu ou não apenas na avaliação bimestral, ou seja, ele deve estar adequado em trabalhar com avaliação contínua (avaliação formativa).
Reflexão em "Rever, reconstruir, reconstituir e analisar criticamente o próprio desempenho e o da classe, e fundamentar as explicações em evidência" (SHULMAN, 1987, p. 216). Por exemplo: um professor iniciante pode perceber que, para introduzir potenciação não é viável dar exemplos cujo valor da potência é o mesmo que o da multiplicação da base pelo expoente ou que a soma de parcelas iguais ($2^2 = 2x2 = 4$. Mas $4 = 2+2$, e $4 = 2$ x (expoente 2).
Novas compreensões "de propósitos, da matéria, dos alunos, do ensino e de si mesmo. Consolidação dos novos entendimentos e aprendizagens da experiência" (SHULMAN, 1987, p. 216). Por exemplo: consolidar em sua prática o exemplo da reflexão.

Fonte: Adaptado de Shulman (1987)

Observa-se, então, uma robusta estrutura de base de conhecimentos do ensino, formulados por Shulman (1987). No entanto, convém levantar algumas observações acerca da proposta de reforma educacional, feitas pelo autor. Primeiramente, que, apesar do esforço de caracterização de uma base sólida, não deve se esquecer o caráter humano da profissão docente e torná-la rígida demais, pois Shulman (1987) alerta que obter padrões é diferente de padronização, sendo que o primeiro remete a uma organização mínima dos conhecimentos e atribuições do professor, já o segundo nos leva a uma interpretação de automação da profissão, sendo assim, não se deve eliminar a componente humana do professor relativa ao que Schön levantou sobre a improvisação e o caráter singular das situações de trabalho.

A partir do que se pode observar nos contextos dos anos 70 e 80, nota-se, assim, um alerta claro de Shulman para a reforma educacional não repetir os erros cometidos no passado, acerca do cientificismo de relações humanas e complexas.

Outro ponto de destaque é a indicação que Shulman (1987) faz para estudos posteriores. Como visto, ele assume a visão de que a categoria de conhecimento pedagógico do conteúdo é a base para a prática docente e deve ser colocada em evidência, quando diz que "programas de formação de professores já não poderão limitar sua atividade às áreas de didática e de supervisão da prática que não levam em consideração o conteúdo. Uma ênfase no conhecimento pedagógico do conteúdo permearia o currículo de formação de professores." (SHULMAN,1987, p.223).

Assim, temos um ponto de partida para elaboração de novos modelos, nessa linha de proposta de Shulman. Aborda-se, mais adiante, o aprofundamento desse direcionamento.

2.2 O CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA: A BASE DE CONHECIMENTOS MKT

Nesta seção discorre-se sobre um período mais recente: a década de 2000. O olhar sobre o ensino da matemática começa a ganhar corpo de maneira que torna-se necessário dar especificidade às categorias da base de conhecimentos do professor, conforme recomendava Shulman (1987).

Ribeiro e Alves (2021), levantam essa relevância de aprofundamento no entendimento de que, diante desse contexto apresentado, há uma obviedade de que o professor que ensina matemática deve ter um conhecimento que ultrapassa e transcendente o/ao do aluno, no entanto é necessário especificar quais são esses conhecimentos.

Sendo assim, apesar da grande relevância do conhecimento pedagógico para o professor, não se torna evidente que essa transcendência de conhecimentos do professor em relação aos conhecimentos do aluno pertença a esse âmbito e, de acordo com Ribeiro e Alves (2021), tampouco pertenceria ao âmbito das matemáticas puras. Assim, os autores orientam que:

> Esta discussão e problematização anterior busca potencializar a necessidade de uma articulação entre conhecimento matemático e pedagógico de forma imbricada para que esse "mais" se refira a essas especificidades do conhecimento. E essa discussão é premente e urgente, pois, se continuarmos assumindo a perspectiva das generalidades, alinhada com as ideias gerais de

> Shulman (1986) ou de Tardif (2002), a argumentação continuará a ser que esse "mais" se refere à dimensão pedagógica. (RIBEIRO, ALVES, 2021, p.6)

Na tentativa de aprofundar o modelo de Shulman (1987) no que tange a esse campo tão específico, que é o conhecimento articulado entre o pedagógico e o matemático (ou, originalmente e genericamente: de conteúdo), ou seja, mais direcionado no entendimento de como os conhecimentos específicos do professor de matemática podem ser organizados de maneira que os conhecimentos matemáticos escolares possam ser apropriados de forma eficaz pelos alunos, Ball, Thames e Phelps (2008) formulam o modelo MKT (Mathematical Knowledge Teaching), como uma base de conhecimentos para o ensino da Matemática.

Os pesquisadores definem seu modelo e deixam claro que seu direcionamento não está diretamente ligado ao professor, mas sim ao ensino, que pressupõe um pensar didático diferenciado sobre a matemática. Com maior polimento, os autores orientam que entendem o termo ensino como o arcabouço em que o professor faz uso para que se efetue a aprendizagem.

Desta forma definem um método, uma maneira de formular sua pesquisa, que se dá: "primeiro, conduzimos análises qualitativas extensas da prática de ensino. Em segundo lugar, projetamos medidas de conhecimento matemático para o ensino com base em hipóteses formuladas a partir de nossos estudos qualitativos." (BALL, THAMES, PHELPS, 2008, p. 395)

Aqui, enxerga-se um exemplar da aplicação e ampliação do método qualitativo que brevemente foi visualizado ascendente nas décadas de 80 e 90.

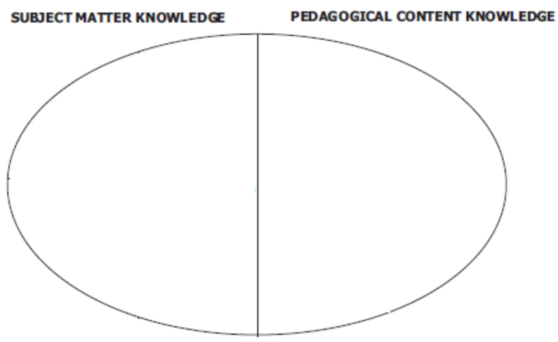
Ball, Thames e Phelps (2008) se valeram de um vasto banco de dados sobre ensino, desde vídeos até registros de professores e alunos para avaliarem padrões que possam levar a categorizações de conhecimentos que aspirem, em grande medida, a transformar o ensino de matemática mais eficaz. Assim, eles definem estratégias e ferramentas de análise desses dados, como a Análise Fatorial, para dar mais especificidades às categorias e métricas de suas análises.

Essa técnica analítica, a Análise Fatorial, tem como pretensão:

> [...] procurar as relações ou padrões existentes entre as diferentes variáveis medidas nos dados recolhidos e encontrar um menor conjunto de variáveis latentes, geralmente denominados de fatores. Estes fatores são não-observáveis e pretendem exprimir como as variáveis iniciais se interligam, apesar de inicialmente poderem ter pouco em comum. (COSTA, MOREIRA, SÁ, 2021, p.62)

Nesse direcionamento os pesquisadores constroem o modelo de base de conhecimento para o ensino da Matemática, o MKT, que essa pesquisa se dedicará a explicitar sua estrutura daqui em diante. O modelo MKT tem seu ponto de partida do direcionamento de Shulman (1987): o conhecimento pedagógico de conteúdo. A seguir, na figura 1, pode-se observar uma introdução ao MKT com dois amplos domínios:

Figura 1: Evidencia de dois amplos domínios do MKT

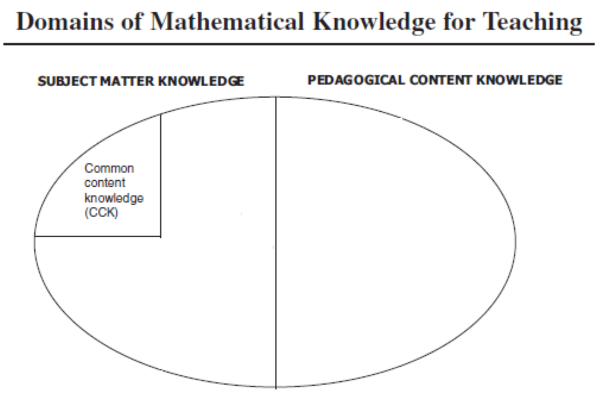


Fonte: adaptação do esquema proposto por Ball e seus colaboradores (2008)

O lado esquerdo da elipse representa o conhecimento de conteúdo da matemática, e o lado direito, o conhecimento pedagógico de conteúdo. O aprofundamento para a matemática se inicia no pensamento de que o professor de matemática deve, sobretudo, conhecer os Conhecimentos Comuns do Conteúdo (CCK - Common Content Knowledge), situado na figura 2, em que:

> No conhecimento comum do conteúdo, o ‘comum’ significa que não é exclusivo do ensino, que é usado em outros cenários, que são habilidades matemáticas que outros também têm, ou seja, não é específico dos professores de Matemática.” Desta forma, o professor deve dominar essa “matemática dos contextos” (PATRONO; FERREIRA 2021. p. 6).

Figura 2: CCK – Subdomínio do MKT



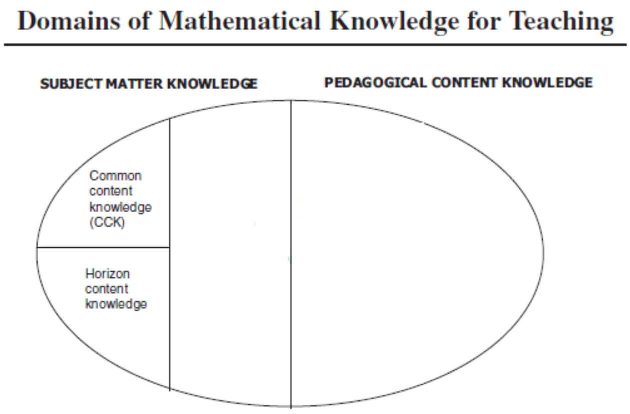
Fonte: adaptação do esquema proposto por Ball e seus colaboradores (2008)

Um outro subdomínio do MTK, relativo ao conhecimento do conteúdo é o Conhecimento do Horizonte do Conteúdo (HCK - Horizon Content Knowledge).

Esse subdomínio se mostrou um pouco difuso em sua definição, assim, para Zero, Oliveira e D'Alessandro Neto (2021), há uma incerteza sobre a especificidade deste subdomínio visto que sua categorização não é tão evidente. Dado que seu objetivo é avaliar o entrelaçamento dos conhecimentos matemáticos com o currículo, uma possível interpretação de manifestação desse subdomínio seria um professor especialista do Ensino Médio se apropriar da sequência lógica didática que os conteúdos matemáticos são expressos nos documentos curriculares dos Anos Iniciais. Isso pode fazer com que se amplie a visão do horizonte de sua perspectiva da matemática, alinhada ao desenvolvimento dela nos alunos durante um grande período de estudos.

Seu domínio pode ser observado na figura 3:

Figura 3: HCK – Subdomínio do MKT



Fonte: adaptação do esquema proposto por Ball e seus colaboradores (2008)

Assim, deixa-se para preencher o lado esquerdo da elipse com o subdomínio que, segundo os pesquisadores, mostra-se de grande relevância, o conhecimento especializado do conteúdo (SCK - Specialized Content Knowledge) :

> Talvez o mais interessante para nós tenha sido a evidência de que o ensino pode exigir uma forma especializada pura do conhecimento da matéria - "puro" porque não está misturado com conhecimento dos alunos ou pedagogia e, portanto, é distinto a partir do conhecimento do conteúdo pedagógico identificado por Shulman e seus colegas, são "especializados" porque não é necessário ou usado em configurações diferentes da matemática ensino. Essa singularidade é o que torna este conteúdo conhecimento especial. (BALL, THAMES, PHELPS, 2008, p.396)

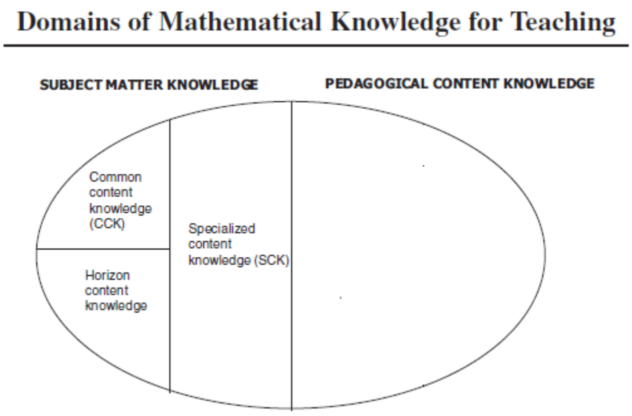
Esse conhecimento especializado da Matemática pode ser compreendido retomando o mesmo exemplo que foi citado para explicar o conhecimento do conteúdo pedagógico, de Shulman: a resolução da conta 71 – 16. Qualquer professor de matemática sabe que ao introduzir uma conta como essa - que apesar dos adultos terem internalizado um algoritmo (na maioria das vezes sem justificação nenhuma) para resolução dessa conta (Common Content Knowledge - CCK) - , terão sempre respostas diferentes para esse problema.

Interpretar o que foi produzido pelo aluno requer um conhecimento especializado do professor sobre a própria matemática que existe por detrás da conta, sem requerer qualquer conhecimento pedagógico.

Por ser especial, esse conhecimento é específico apenas a quem ensina matemática, pois está intrinsecamente ligado ao *fazer matemática*, que segundo os autores, envolve um entendimento que vai além da computação dos algoritmos, requer entendê-los em todas suas implicações e representações já viciadas de verbalizações como "empresta 1 do número ao lado" ou "vai um".

Seu domínio encontra-se na figura 4:

Figura 4: SCK – Subdomínio do MKT



Fonte: adaptação do esquema proposto por Ball e seus colaboradores (2008)

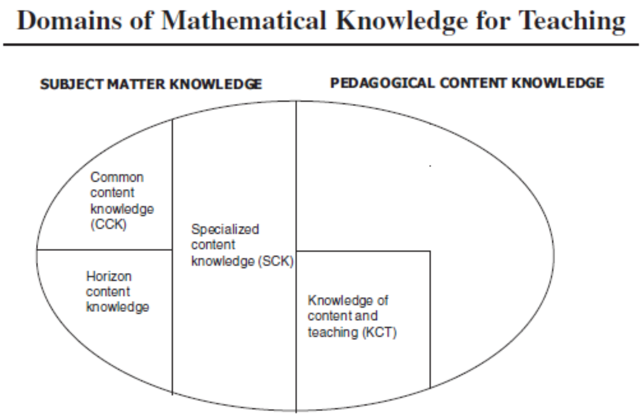
Indo para o lado direito da elipse, do domínio do conhecimento pedagógico de conteúdo, temos o subdomínio do conhecimento do conteúdo e do ensino (KCT - Knowledge of Content and Teaching), que se caracteriza por combinar conhecimento sobre ensino e sobre a matemática:

> É a forma como os professores organizam os conteúdos para a instrução – escolhem com quais exemplos vão começar, quais vão usar para aprofundar um conceito, avaliam as vantagens e desvantagens de representações usadas para ensinar um conteúdo, quais métodos e procedimentos oferecem mais possibilidade de aprendizagem. (PATRONO, FERREIRA, 2021, p. 7)

Um exemplo seria o de usar um jogo de adivinhação com cartas para aprofundar e exercitar o conhecimento dos alunos acerca das operações com números inteiros.

Na figura 5 encontra-se sua localização na elipse:

Figura 5: KCT – Subdomínio do MKT



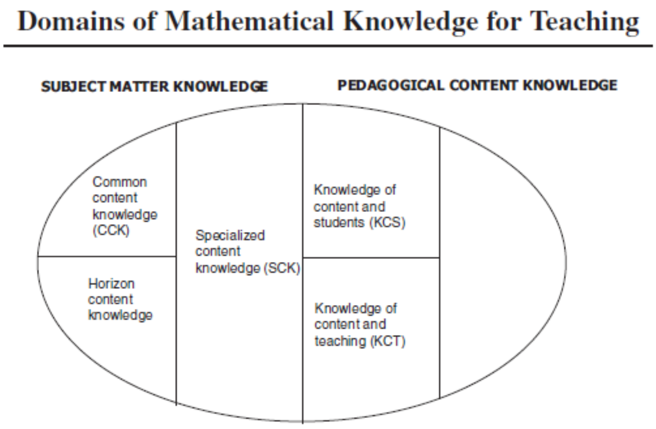
Fonte: adaptação do esquema proposto por Ball e seus colaboradores (2008)

Outro subdomínio do conhecimento pedagógico de conteúdo é o conhecimento do conteúdo e dos estudantes (KCS - Knowledge of Content and Students).

Esse conhecimento pode ser interpretado como a junção entre o conhecimento especializado do conteúdo com o conhecimento dos erros mais comuns que os alunos cometem, assim, para Ball, Thames e Phelps (2008), esse é um tipo de conhecimento que leva o professor associar em sua mente os alunos e suas particularidades com as recorrentes formas de interpretar um determinado conteúdo.

A partir disso, assume-se a perspectiva de que esse subdomínio do modelo MKT é tão importante quanto o SCK, pois parece haver uma espécie de *mutualismo* entre esses subdomínios. Sua localização na elipse encontra-se na figura 6:

Figura 6: KCT – Subdomínio do MKT

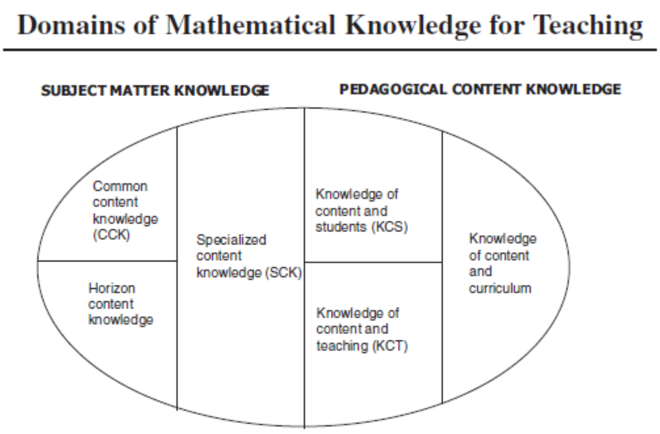


Fonte: adaptação do esquema proposto por Ball e seus colaboradores (2008)

Preenchendo a elipse, é possível elencar o último subdomínio do modelo MKT: o conhecimento do currículo (figura 7). Ele está contido no domínio do conhecimento pedagógico de conteúdo pois é um tema inerente ao ensino: é um dos componentes organizadores do ensino.

No entanto, seus limites não são tão claros, assim, não se sabe exatamente se é exclusivo ao âmbito pedagógico, pois "novamente, eles afirmam não ter certeza se pode ser uma categoria em si, se é parte da categoria conhecimento do conteúdo e do ensino ou se pode ser trabalhada em várias categorias." (PATRONO, FERREIRA, 2021, p.8)

Figura 7: O modelo MKT



Fonte: Ball, Thames e Phelps (2008, p.403).

Desta forma, o desenvolvimento do modelo MKT:

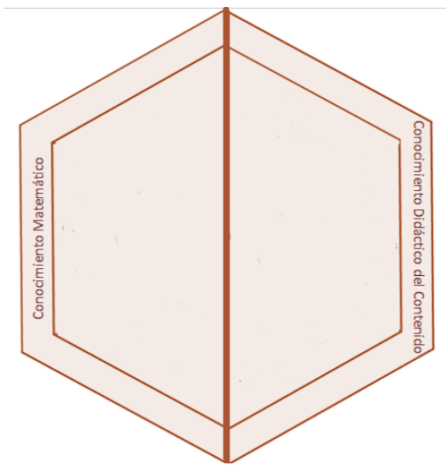
> [...] proporcionou o avanço de discussões no campo da formação de professores, levando a novas propostas na docência em suas diversas áreas do conhecimento, dentre elas, a Matemática. Ball, Thames e Phelps (2008), tendo as ideias de Shulman (1986, 1987) como pontos de partida para se pensar nos conhecimentos de professores de Matemática, tornam ainda mais categóricos alguns dos elementos indicados na base preliminar e apresentam o Conhecimento Matemático para o Ensino (*Mathematical Knowledge for Teaching – MKT*) (ZERO, OLIVEIRA, D'ALESSANDRO NETO, 2021, p.4)

Ball, Thames e Phelps (2008) asseveram que o subdomínio do conhecimento especializado do conteúdo necessita de mais aprofundamento para poder compreender as dimensões mais relevantes do conhecimento profissional. Na tentativa de aperfeiçoar as limitações identificadas no MKT fecundou-se um novo modelo de visualização e organização dos conhecimentos relativos ao ensino da matemática: o modelo MTSK.

2.3 A BASE DE CONHECIMENTOS MTSK

Na presente seção será discorrido sobre o modelo MTSK (Mathematics Teacher's Specialised Knowledge) de Carrillo et al (2013, 2018), sendo uma evolução, um aperfeiçoamento do modelo MKT, de Ball, Thames e Phelps (2008), pois segundo Montes, Contreras, Carrillo (2013, p.403), "a especialização do conhecimento do professor de matemática deve derivar de sua profissão", ressignificando a noção de especialização do MKT. Assim como o MKT, o MTSK parte do conhecimento matemático e do conhecimento didático do conteúdo, conforme figura 8.

Figura 8: base para a subdivisão dos domínios do MTSK

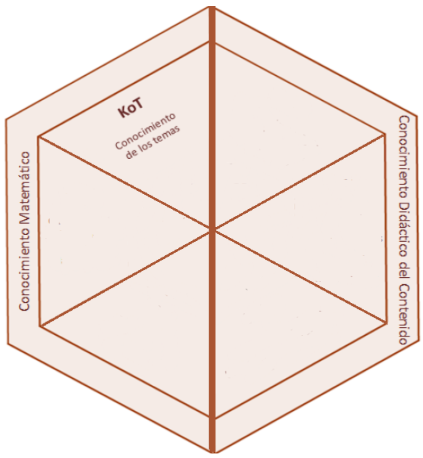


Fonte: adaptação de Flores-Medrano *et al* (2016)

De maneira similar ao que foi apresentado no MKT, é possível observar os subdomínios criados no lado esquerdo do hexágono. Inicialmente, aborda-se (figura 9) o conhecimento dos temas (Knowledge of Topics - KoT), em que pode-se inferir possuir certa relação com alguns subdomínios do MKT, mais especificamente na sobreposição entre KCS, KCT e SCK.

Assim, "esse subdomínio se detém a conhecer: "os temas que se vai ensinar; os conteúdos da matemática de maneira fundamentada (conceitos, procedimentos, fatos, regras, teoremas, etc.) e seus significados." (FLORES-MEDRANO *et al*, 2016, p.210)

Figura 9: conhecimento dos temas (KoT)



Fonte: adaptação de Flores-Medrano *et al* (2016).

Adiante temos o conhecimento das estruturas da matemática (Knowledge of the Mathematical Structure - KSM). Esse subdomínio do conhecimento matemático, representado na figura 10, assemelha-se, em partes, com o HCK, no MKT.

Assim, ele "pretende trazer a evidência do conhecimento do professor sobre a rede de relações de conteúdos matemáticos e os significados da estrutura que mantém a matemática" (FLORES-MEDRANO *et al.*, 2016, p.211).

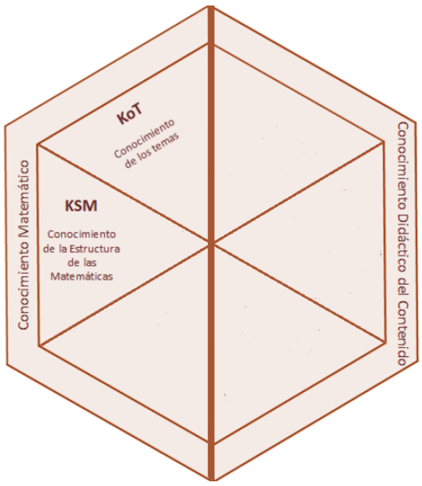
Associando mais especificamente a este trabalho, um exemplar desse subdomínio seriam os subconstrutos (interpretações/sentidos) dos números racionais definidos por Kieren (1980), em que a dinâmica de complexidade do aprendizado desses números se dá a partir da interação entre as experiências desses elementos e os elementos que orbitam sobre o tema, em diferentes níveis de profundidade de abstração.

Desta forma, para os autores, esse é o conhecimento:

> [...]das principais ideias transversais a distintos conteúdos (como o conhecimento lógico matemático da classificação que está no substrato de todos tópicos matemáticos), de relações entre distintos temas (por exemplo,

> entre frações, decimais e porcentagens) e relações dadas por simplificação e complexificação do tema (por exemplo as séries do tipo recursivo, a sequência numérica e as progressões aritméticas). (FLORES-MEDRANO et al, 2016, p.211)

Figura 10: conhecimento das estruturas da matemática (KSM)



Fonte: adaptação de Flores-Medrano *et al*. (2016)

Assim, de posse dos tópicos da matemática bem como sua estrutura edificante, o professor que ensina matemática deve ter em si o conhecimento das práticas matemáticas (Knowledge of Pratics in Mathematics - KPM).

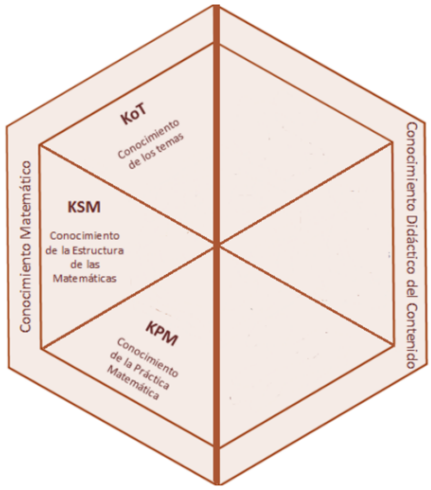
Nesse subdomínio o professor "deve ter conhecimento de como se gera o conhecimento matemático, o conhecimento de como se define as matemáticas, a diferença entre demonstração, prova e uma comprovação." (FLORES-MEDRANO *et al*., p.212)

A demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ pode ilustrar esse tipo de conhecimento, pois oportuniza ao aluno ter contato com um tipo de validação que evidencia características edificantes da Matemática, como a hipótese de $\sqrt{2}$ ser um número racional e os procedimentos válidos na demonstração por redução ao absurdo que a suposta afirmação é falsa.

Ter ciência dessas características e dos limites permissíveis de argumentação, próprios da Matemática, pode desenvolver no aluno uma visão madura sobre o funcionamento da validação de fatos matemáticos.

A localização do KPM no hexágono encontra-se na figura 11:

Figura 11: conhecimento das práticas matemáticas (KPM)



Fonte: adaptação de Flores-Medrano *et al.* (2016)

Passando para o lado direito do hexágono, no âmbito do conhecimento didático do conteúdo, observa-se o subdomínio Conhecimento do Ensino das Matemáticas (Knowledge of Mathematics of Teaching - KMT) disposto na figura 12.

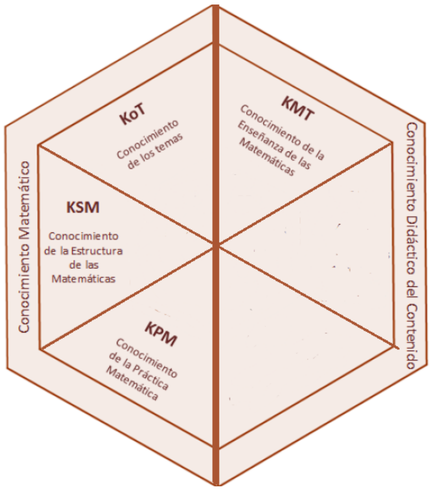
Aqui, há uma relativa aproximação com o KCT no MKT, pois os autores consideram que esse subdomínio representa as diferentes maneiras do professor apresentar o conteúdo para seu aluno, sabendo as melhores sequências didáticas bem como ter intencionalidade na produção e adaptação de exercícios para que se potencialize a aprendizagem.

Podemos inferir, como exemplo, que o uso do ábaco no ensino do sistema de numeração decimal se equivale ao do quadro de valor posicional, logo, possuem em si uma lógica de funcionamento diferente do material dourado que possui como potencialidade trabalhar diferentes tipos de agrupamentos.

Outro exemplo é a aplicação em sala de aula de um jogo baseado em um bingo, em que os números sorteados são usados para formar frações em que os alunos devem fazer a leitura corretamente ou, na mesma dinâmica de jogo, trabalhar com as operações fundamentais relativas às frações.

O conhecimento destas distinções de aplicabilidades de recursos pedagógicos para o professor, mostra-se como exemplar desse subdomínio.

Figura 12: Conhecimento do ensino das matemáticas (KMT)



Fonte: adaptação de Flores-Medrano *et al.* (2016)

Prosseguindo no preenchimento do hexágono, temos o conhecimento das características de aprendizagens matemáticas (Knowledge of Features of Learning Mathematics - KFLM). Ainda é possível realizar uma aproximação ao MKT neste subdomínio, a saber, com o KCS.

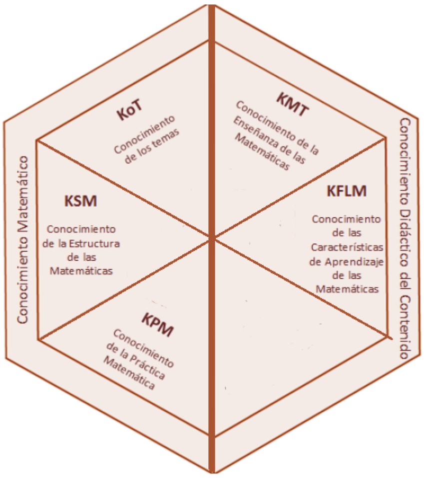
Esse subdomínio, apresentado na figura 13, aprofunda-se no aspecto da aprendizagem do aluno, da compreensão das formas mais gerais de pensamento do aluno em seus dos percursos de aprendizagem da matemática.

Assim, entender os erros de aprendizagem mais comuns dos alunos é uma característica deste subdomínio.

No entanto se vai mais além, pois a aprendizagem é um processo muito complexo em que muitas teorias são construídas de acordo com a especificidade do tema, como por exemplo a teoria dos registros de representação semiótica, sobre o qual o acesso ao objeto matemático se faz pela mobilização e coordenação de múltiplas linguagens matemáticas, se mostra um exemplo característico deste subdomínio.

Indo mais além: “nós igualmente acomodamos a fundamentação de seu conhecimento que toma forma de teorias pessoais do professor, proveniente de sua experiência.” (FLORES-MEDRANO et al., 2016, p.213)

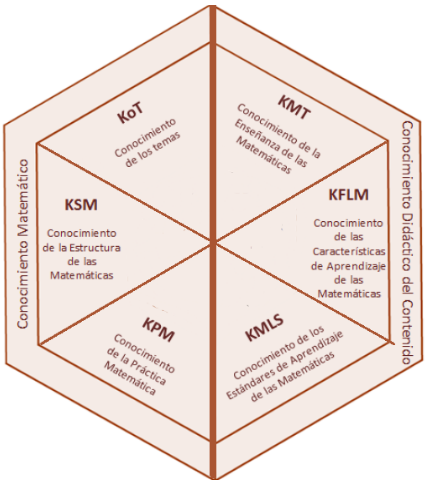
Figura 13: Conhecimento das características de aprendizagem da matemática (KFLM)



Fonte: adaptação de Flores-Medrano *et al.* (2016)

Por fim, o último subdomínio do conhecimento didático do conteúdo (figura 14), apresentado como conhecimento dos padrões de aprendizagem das matemáticas (Knowledge of Mathematics Learning Standards - KMLS), está presente no âmbito dos documentos curriculares e pesquisas que direcionam efetividade em processos normativamente estabelecidos.

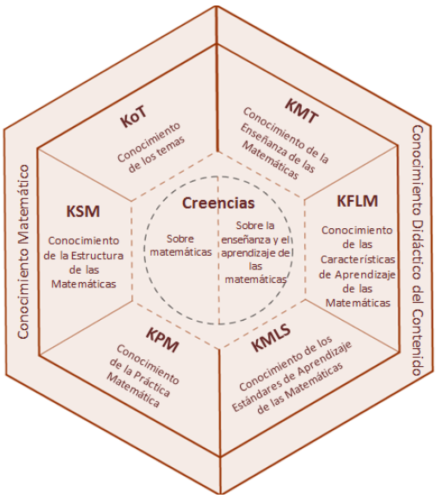
Figura 14: Conhecimento dos padrões de aprendizagem da matemática (KMLS)



Fonte: adaptação de Flores-Medrano *et al.* (2016)

Com isso, finaliza-se a composição do modelo MTSK de Carrillo et al (2013, 2018) incluindo as crenças dos professores sobre a matemática (figura 15) e sobre o processo ensino aprendizagem da matemática. Segundo os autores: “Somos conscientes de que a prática do professor é respaldada por uma filosofia das matemáticas (THOM, 1973). Entendemos que essa filosofia contém um conjunto de concepções e crenças do professor (THOMSON, 1992) acerca das matemáticas, seu ensino e aprendizagem. Essas crenças permeiam todos os subdomínios" (FLORES-MEDRANO *et al.*, 2016, p.214).

Figura 15: MTSK.



Fonte: Flores-Medrano *et al.* (2016, p.209)

2.4 BASE DE CONHECIMENTOS ESPECIALIZADOS SOBRE OS NÚMEROS RACIONAIS

Nesta seção, serão levantados resultados de sete pesquisas que trazem conhecimentos especializados sobre o ensino dos números racionais. Cinco destas pesquisas, sendo elas Souza (2015), Santos Filho (2015), Damico (2007), Marques (2018), Rogeri (2015), são fruto do levantamento realizado por Zero, Oliveira e D'Alessandro Neto (2021) numa pesquisa realizada na modalidade Estado da Arte, e possuem em comum a utilização dos modelos MKT de Ball, Thames e Phelps (2008) e PCK de Shulman (1987).

Destas cinco pesquisas, quatro fazem uso das teorias de Thomas E. Kieren em anos diversos, sendo, que Souza (2015) utilizou Kieren (1976, 1988, 1993), Santos Filho trouxe Kieren (1976, 1988, 1993), Damico (2007) usou Kieren (1976, 1980, 1981, 1988, 1989, 1993) e Rogeri (2015) utilizou Kieren (1976, 1988). Sendo assim, é possível notar a importância dos resultados encontrados por esse pesquisador ao longo de sua carreira, sugerindo, então, que fizesse parte do referencial teórico deste trabalho.

Desta forma, as outras duas pesquisas que são trazidas nesta seção são Kieren (1976, 1980).

Essas pesquisas compõem a base de conhecimentos utilizada nas análises dos livros didáticos. Como introdução ao tema, inicia-se com um olhar sobre a definição de números racionais a partir de um livro universitário de referência, sendo que, em seguida são trazidas as principais contribuições de Kieren (1976), em que se elenca sete interpretações dos números racionais bem como suas implicações sobre o ensino do tópico.

Posteriormente é trazido Kieren (1980), que faz uso da teoria do significado e da compreensão de Margenau (1961) para compartimentar as interpretações em noções mais delimitadas denominadas de "subconstrutos", postulando as promissoras inter-relações que possuem.

Em seguida, são trazidos os resultados das cinco pesquisas nacionais mencionadas.

2.4.1 Os Números Racionais

Os números racionais podem ser construídos sob a óptica das matemáticas puras a partir da definição de uma relação particular entre o conjunto dos inteiros com dos inteiros não-nulos. Esse início da formalização da construção dos números racionais é abordado em Ferreira (2013), em que se faz uso da relação (a,b) ~ (c,d) quando ad = bc, aplicado em ZxZ*={(a,b) | a Є Z e b Є Z*}, mostrando que tal relação é uma relação de equivalência, ou seja, goza das propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

A partir da definição desta relação, o autor define fração como a/b = {(x,y) Є ZxZ* | (x,y) ~ (a,b)}, assim, por exemplo, 3/5 = {(x,y) Є ZxZ* | (x,y) ~ (3,5)} = {(x,y) Є ZxZ* | 5x = 3y} e, posteriormente, demonstra que essa definição de fração goza da propriedade inicial (ad = cd).

Por fim, o autor traz uma definição do conjunto Q dos números racionais como "o conjunto quociente de ZxZ* pela relação de equivalência ~, isto é, Q = (ZxZ*)/~ = {a/b | a Є Z e b Є Z*}, como no ensino Fundamental." (FERREIRA, 2013, p. 55).

Esse livro-texto faz parte de uma coleção intitulada Textos Universitários, da editora SBM, e se propõe a construir os conjuntos numéricos de maneira formal e rigorosa.

Na sequência dedicamos aos resultados de pesquisa que contemplam a relação ensino aprendizagem dos números racionais, tomando por base referências da literatura internacional.

Cinco pesquisas brasileiras se apropriaram das contribuições de trabalhos produzidos por Thomas E. Kieren, professor emérito na Universidade de Alberta, no Canadá. Em 1976, Kieren contribuiu com sua pesquisa para a publicação da série Mathematics Educations Reports, que teve por objetivo disseminar conhecimentos relacionados à Educação Matemática para o ensino, por professores de todos os níveis escolares. O estudo de Kieren, que aqui será mencionado, participou da edição Numbers and Measurement Concepts, ou seja, uma coleção de estudos que orbitam no tema Conceitos de Números e Medidas.

A contribuição de Kieren teve como foco os fundamentos matemáticos, cognitivos e instrucionais dos números racionais, sendo assim, pode-se entendê-lo como um exemplo de pesquisa no âmbito do movimento cognitivista, citado na seção 2.1. A partir daqui, será feita referência a Kieren juntamente com o ano de pesquisa, visto que há uma evolução na forma de conceber o tema de acordo com o período estudado e que, as diferentes formas de conceber o tema podem ser abordadas isoladamente por autores de livros didáticos..

Kieren (1976) percebeu uma contradição entre o passado e o presente observando que estudos indicam o uso das frações em sociedades como a Babilônia remetendo a 2000 anos atrás de forma sofisticada como, por exemplo, a mistura do sistema posicional de base 10 e o de base 60. Além da representação sofisticada, o autor ressalta o engenhoso uso desses números (racionais) na arquitetura, como por exemplo as pirâmides do Egito. Assim, a contradição observada é a de que durante milênios diferentes civilizações dominaram os números racionais a seu favor e, em contrapartida, cada vez mais observa-se uma dificuldade na instrução (ensino) e na apreensão (aprendizagem) desses números pelos professores e alunos, respectivamente.

O autor faz a análise de que os currículos matemáticos que vigoraram em seu tempo eram pacotes semelhantes aos de um século atrás: procedimentos brutos, porém ornamentados, para aprender determinados conceitos como adição de frações, por exemplo.

A partir dessa reflexão e crítica ao caráter estritamente procedimental dado até então, o autor sistematizou sete formas de conceber os números racionais e, em cada uma delas procurou determinar as estruturas matemáticas e aspectos cognitivos importantes na aprendizagem:

> **1.** Os números racionais são frações que podem ser comparadas, adicionadas, subtraídas, etc.
> **2.** Os números racionais são frações decimais que formam uma extensão natural (por meio de nosso sistema de numeração) para os números inteiros.
> **3**. Os números racionais são classes de equivalência de frações. Assim, {1/2, 2/4, 3/6,...} e {2/3, 4/6, 6/9,...} são números racionais.
> **4.** Os números racionais são números na forma p/q, onde p, q são inteiros e $q \neq 0$. Nesta forma, os números racionais são números de "proporção".
> **5.** Os números racionais são operadores multiplicativos;
> **6.** Os números racionais são elementos de um campo quociente ordenado infinito. Eles são números da forma $x = p/q$, onde x satisfaz a equação $qx = p$.
> **7.** Os números racionais são medidas ou pontos em uma reta numérica. (KIEREN, 1976, p. 103)

O estruturamento dos números racionais por meio dessas interpretações tornou-se necessário para transcender a visão da matemática pura dos racionais como alternativa de ensino, e ainda, para o autor:

> [...] ao trabalhar com números racionais, as crianças estão lidando com estratégias matemáticas que não têm uma base óbvia no pensamento natural. Portanto, um estudo do pensamento natural de uma criança não seria adequado para a consideração do desenvolvimento das ideias sobre os números racionais. (KIEREN, 1976. P. 103)

Desta forma, Kieren (1976) busca uma via alternativa entre o caráter abstrato da matemática pura e a visão estritamente psicológica do *pensamento natural* da criança. O autor analisa a definição de racionais como pares ordenados e, a partir daí, faz uso do conceito de classes de equivalências. Para desenvolver esses dois conceitos a criança deve passar por três fases iniciais:

1°) Aprender a observar a realidade por pares ordenados, isso significa primeiramente observar a realidade de forma a relacionar os elementos de dois a dois, ou seja, em pares e verificar a ordem de ocorrência de manifestação desses elementos.

2°) A criança, posteriormente, deve conseguir representar simbolicamente a realidade observada pelos pares, que são ordenados. Assim, ela necessita aprender uma estrutura de símbolos que a permita fazer essa representação.

3°) A fase posterior é a uma culminância das duas anteriores: a criança deve conseguir aplicar essas habilidades das fases anteriores para conseguir identificar os símbolos da realidade relacionados com a realidade que o representa. Especificamente em números racionais, as crianças devem aprender a identificar, segundo o autor:

I) situações parte-todo;

II) a pronúncia verbal e os símbolos usados para representar os números (palavras como "um terço" e algarismos para formar os números);

III) Correlacionar uma fração (símbolo) com uma configuração parte-todo;

IV) Aprender que configurações parte-todo podem ser representadas de formas equivalentes, ou seja, os símbolos (frações) que representam os elementos deste conjunto são equivalentes.

2.4.1.1 Números Racionais como Classes de Equivalências

Pode-se notar que Kieren (1976) traz o conceito de equivalência como um dos primitivos e centrais para o entendimento dos números racionais, trazendo-o como uma das interpretações estruturantes dos números racionais, o qual será desenvolvido nesse momento. Para surgir uma relação construtiva entre esses conceitos (par ordenado e equivalência) o autor sugere desenvolver duas habilidades: a primeira é estender a ideia de par ordenado para conjunto de números inteiros, e a segunda desenvolver 4 tipos de problemas parte-todo: estado-estado, estado-operador, operador-estado e operador-operador.

Como exemplo, é possível citar um problema de cada tipo:

- Estado-Estado: nos conjuntos { A A A B B B }, { (A A A) (B B B) } o estado dos elementos mudam, ora sendo elementos de um conjunto, ora sendo elementos de um subconjunto, mas ambos contendo os mesmos elementos constitutivos (três A's e três B's).

- As outras três disposições são originalmente apresentadas na figura 16:

Figura 16: Concepções do números racionais

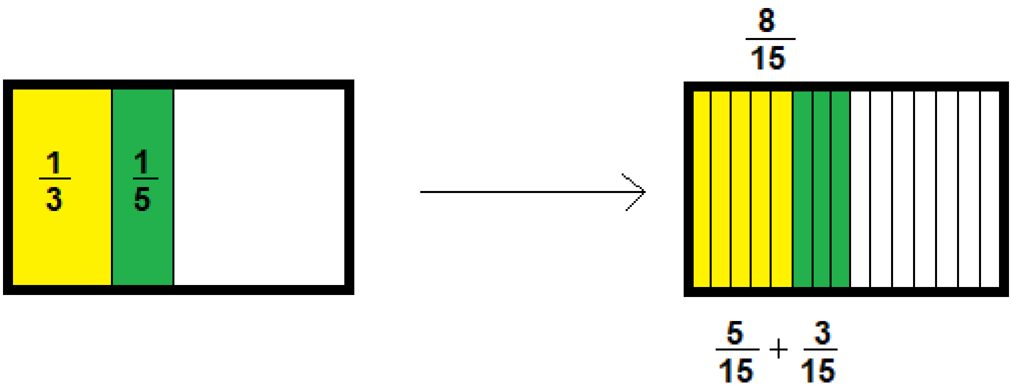
Type	Action	Symb. Rep.
State-Operator	Divide 3 cookies among 5 persons	3/5
Operator-State	Use 5 of a dozen eggs	5/12
Operator-Operator	Cut a pie in eighths, serve 5	5/8

Fonte: Kieren (1976, p.109)

O conteúdo da figura 16, na situação do exemplo estado-operador, tem-se um estado inicial (3 cookies) e será operado (divididos para 5 pessoas). Já o operador-estado, primeiro há a ação (usar 5 ovos) sobre um estado (12 ovos). No operador-operador, temos uma dupla ação (cortar em 8 e servir 5).

Kieren (1976) traz que, diante das sequências de experiências dadas, pode-se definir equivalência de pares ordenados como $a/b = c/d \Leftrightarrow ad = bc$, ou seja, como igualdade de números inteiros, e a adição de números racionais como $(ad+bc)/bd$ que, notadamente não tem relação alguma com o pensamento natural da criança. Para vencer essa fragilidade nessa interpretação, recorre-se a adição de frações modelada pela noção de equivalência, conforme figura 17:

Figura 17: Modelagem de adição de frações



Fonte: adaptado de Kieren (1976)

Ao dividir a parte correspondente a 1/3 em 5 partes iguais e a de 1/5 em 3 partes iguais, obtemos frações equivalentes 5/15 e 3/15, respectivamente, às frações iniciais, mas agora representando uma parte de um todo subdividido de maneira igual, ou seja, mesmo denominador (15). Para o autor, em casos discretos, a inclusão de classes se torna um conceito imprescindível para ser trabalhado como habilidade cognitiva anterior e, em casos contínuos, o de particionamento. Nesta abordagem, torna-se importante trabalhar com as crianças vários tipos de problemas que envolvam divisões equitativas, como por exemplo instruir a criança a dividir uma folha sulfite em 4 (e outras quantidades) partes iguais.

Desta forma, Kieren (1976) traz o panorama sobre essa interpretação dos números racionais: "Ao interpretar os números racionais como pares ordenados, o princípio da ideia matemática é o de equivalência de classe. Dessa ideia matemática flui a noção de operação dos racionais e também das propriedades." (KIEREN, 1976, p.110).

2.4.1.2 Números Racionais como Razão

Uma interpretação que Kieren (1976) trouxe para os números racionais é enxergá-los como pares ordenados que se emparelham, ou seja, que se relacionam de acordo com um critério. O autor analisa a seguinte sequência de pares ordenados $(x, 1) \approx (1, 8) \approx (2, 16) \approx (3, 24)$..., em que pode-se interpretá-la a partir do segundo par ordenado, pois nele há uma unidade: se algo possui quantidade 1 e outra coisa intimamente relacionada possui quantidade 8, quando o primeiro passa a ter quantidade 2, o segundo passa a ter quantidade 16, e assim sucessivamente, sendo esse o raciocínio primeiro do conceito de proporção.

É evidente aqui a noção de equivalência, mas é também importante observar que o critério adotado para esse raciocínio é o de proporção, ou seja, a definição inicial de equivalência dada pelo autor começa a ganhar maior relação com o pensamento natural, ou seja, temos um outro tipo de representação para aumentar a *imagem conceitual* que se possa fazer deste conceito matemático.

Apesar do autor se ater exclusivamente à definição inicial ($a/b = c/d \Leftrightarrow ad = bc$), é possível notar que as duas formas de raciocinar sobre a sequência são complementares, ou seja, para seguir a sequência para a direita, o pensamento natural de proporção dá conta de observar a equivalência, no entanto, quando se pega a direção oposta, não se dá diretamente e intuitivamente o valor de x. Assim, usando a implicação: se são equivalentes, então são proporcionais, pode-se chegar pela definição que $(x, 1) \approx (1, 8) \Leftrightarrow x/1 = 1/8 \Leftrightarrow x.8 = 1.1 \Leftrightarrow x = 1/8$ como uma generalização da ideia de proporção.

Algumas observações são pertinentes fazê-las sobre essa passagem, a primeira é a de que Kieren (1976) assevera que enxergar os números racionais como diversas interpretações traz como um dos benefícios preparar o aluno para o mundo da álgebra, ou seja, como um processo válido de generalização da aritmética:

> No entanto, os números racionais apresentam um confronto face a face com problemas algébricos porque a criança deve:
> **(a)** lidar com a noção de equivalência;
> **(b)** lidar com uma operação "+", que em sua forma algébrica "funciona" da forma como se faz, principalmente por razões axiomáticas e não mais naturais;
> **(c)** trabalhar em um sistema onde "+" e "x" são duas operações distintas, definidas abstratamente (essas duas operações com racionais são análogas a "adicionar" comprimentos e compor funções); e
> **(d)** trabalhar com as propriedades, particularmente com a noção geral de inverso. (KIEREN, 1976, p.102)

Outras observações que são pertinentes fazer são sobre as implicações (e suas recíprocas (⇔)) na passagem acima: na primeira, há um nítido resgate das três fases iniciais recomendado pelo autor para intercambiar pares ordenados e equivalências, ou seja, essa implicação só será internalizada pelo aluno quando no mínimo as três fases estiverem consolidadas. A segunda implicação corresponde à aplicação da definição direta de equivalência em sua forma algébrica, e a terceira é uma consequência do trabalho algébrico, no entanto também inclui mais uma interpretação dos números racionais: a de elementos de um campo quociente ou, apenas como quociente, que trataremos na seção posterior.

Uma vantagem para essa interpretação dos números racionais é a de trazer maior consistência à definição de adição de números racionais, que como foi visto, não é explícita na interpretação como classes de equivalências. Se considerarmos a proporção: (y, 3) = (1, 8). É possível pensar que, pela equivalência anterior, acarretaria que, se 3 é o produto de 3.1 então y será o produto de 3.1/8, que pela definição de multiplicação como soma de parcelas iguais se obteria: y = 1/8 + 1/8 + 1/8 e assim, surgiria o problema de justificar o porquê de y não poder ser 3/24. A aplicação da definição de equivalência em sua forma algébrica ajuda a sanar essa dificuldade: 8.y = 1.3 ⇔ y = 3/8, ou seja, 1/8 + 1/8 + 1/8 = 3. 1/8 = 3/8. Consegue-se assim, justificar a adição de frações juntamente com a multiplicação por um número natural, no entanto o próprio autor assevera que há ônus nessa abordagem:

> Pode-se ver que, do ponto de vista da criança, os números de razão são uma entidade sofisticada. A base para o desenvolvimento é a noção de razão baseada no controle simbólico do esquema de proporcionalidade. Como Lovell (1971b) e outros mostraram, este esquema ou a capacidade é notavelmente desenvolvida até o final da adolescência. As operações sobre os racionais desenvolvidas sob esta interpretação, embora algoritmicamente simples, são sofisticadas em conceito. (KIEREN, 1976, p. 112)

O autor destaca que proporcionar experiências nas quais o aluno precise dividir equitativamente uma fita ou algo linear de maneiras diferentes pode auxiliá-lo na melhor visualização dos números racionais enquanto posição, o que o remeterá a um melhor entendimento da interpretação de medidas.

2.4.1.3 Números Racionais como Quociente

A interpretação de números racionais como razão joga a luz em sua forma, ou seja, números inteiros p e q na forma p/q, com $q \neq 0$. Agora, a interpretação de números racionais como quociente joga luz na operação que se faz em p/q, ou seja, define-se $x=p/q$, importando em um primeiro momento o resultado da divisão de p por q representado pelo quociente x. Kieren (1976) toma essa interpretação de forma bastante utilitária, isto é, dela deriva-se de forma estritamente algébrica as operações e propriedades com que se trabalha as frações. Assim, o autor sugere que a partir dessa interpretação e, considerando que habilidade de raciocínio dedutivo do aluno esteja desenvolvida assim como confiar nas implicações matemáticas, a propriedade de adição de frações pode ser obtida no desencadeamento da figura 18:

Figura 18: Adição de frações por meio da interpretação de quociente

If x = 3/4 and y = 2/7, what is x + y?

$$\begin{array}{lll} & x = 3/4 & \qquad y = 2/7 \\ \Leftrightarrow & 4x = 3 & \Leftrightarrow \quad 7y = 2 \\ \Leftrightarrow & 28x = 21 & \Leftrightarrow \quad 28y = 8 \end{array}$$

$$28x + 28y = 29$$

$$28\,(x + y) = 29$$

$$x + y = 29/28$$

$$\therefore \quad 3/4 + 2/7 = 29/28$$

Fonte: Kieren (1976, p. 119)

A generalização relativa ao caso particular exposto na figura 18 apresentamos na figura 19:

Figura 19: Generalização da adição de frações por meio da interpretação de quociente

$$x = m/n \qquad\qquad y = p/q$$

$$\Leftrightarrow \; nx = m \qquad\qquad \Leftrightarrow \; qy = p$$

$$\Leftrightarrow \; qnx = qm \qquad\qquad \Leftrightarrow \; qny = np$$

$$qn\,(x + y) = qm + np$$

$$x + y = \frac{qm + np}{qn}$$

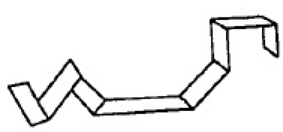
$$\therefore m/n + p/q = \frac{qm + np}{nq}$$

Fonte: Kieren (1976, p.119)

Pode-se perceber que, em relação à definição de adição de frações, essa interpretação se torna paradoxal pois ela necessita de uma matemática mais sofisticada por parte do aluno, sendo que para o autor (1976, p.120): “A interpretação de campo quociente de números racionais relaciona claramente os racionais a sistemas algébricos abstratos. Em primeira análise, entretanto, esta interpretação pareceria a mais remota da matemática escolar.” No entanto, na interpretação por classes de equivalências essa definição de adição é dada arbitrariamente, ou seja, depende-se da interpretação de quociente (a mais abstrata) para introduzir outras interpretações menos abstratas.

Kieren (1976) sugere que atividades anteriores podem ser trabalhadas para auxiliar na compreensão desta interpretação, a saber a atividade cognitiva de partição de quantidades contínuas, já vista em outras interpretações nesse trabalho, de forma que se produza figuras com partes congruentes (figura 20): "Esta é uma imagem de uma forma que você pode fazer. Parece um pato. Faça quantas formas desejar com sua tira” (KIEREN, 1976, p. 122)

Figura 20: Animais feitos a partir de divisão equitativa de uma tira



Fonte: Kieren (1976, p.122)

Uma outra estratégia anterior à abordagem algébrica e que trabalha particionamentos é fazer a relação entre x . 5 = 10 (que pode ser escrita como ___ . 5 = 10 para crianças menores ainda) com a verbalização do algoritmo da divisão quando se pergunta: “quantas vezes o 5 cabe dentro do 10?” que estabelece uma correspondência direta com problemas de divisão tratados muito anteriormente do nível algébrico final.

O autor traz também outras habilidades que devem ser desenvolvidas anteriormente à abordagem estritamente algébrica:

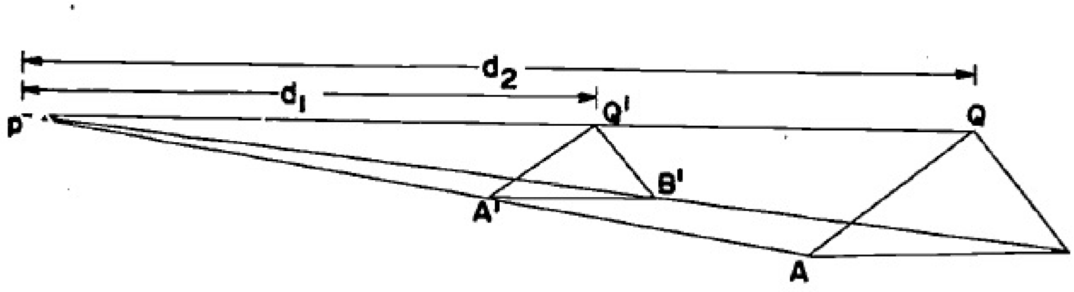
> Como precursora dessa habilidade dedutiva mais formal, a criança deve ser capaz do que pode ser chamado de pensamento pré-dedutivo, ou redução concreta. Dadas as restrições ou "suposições" de uma situação, a criança deve ser capaz de tirar conclusões ou ver padrões implícitos nela. (KIEREN, 1976, p.121)

2.4.1.4 Números Racionais como Operadores ou Mapeamentos

Os números racionais permitem uma interpretação sob o ponto de vista das semelhanças de figuras bidimensionais (figura 21), que Kieren (1976) nomeia de mapeamento ou operadores. Esses operadores fazem uma dilatação ou redução de polígonos no plano, para o autor essa operação se dá da seguinte forma:

> [...] o ponto Q no plano é mapeado no ponto Q' colinear com P tal que PQ '/ PQ = k. Na Figura T, k = d_1 / d_2 = 2 / 3. Assim, o número racional 2/3 torna-se associado a um mapeamento que transforma segmentos de linha em segmentos de linha 2/3 de seu comprimento original. Este mapeamento do plano sobre si mesmo é chamado de dilatação ou mapa de similaridade e é determinado pelo ponto P e a razão de semelhança, neste caso 2/3. (KIEREN, 1976, p.113)

Figura 21: Números racionais como operadores



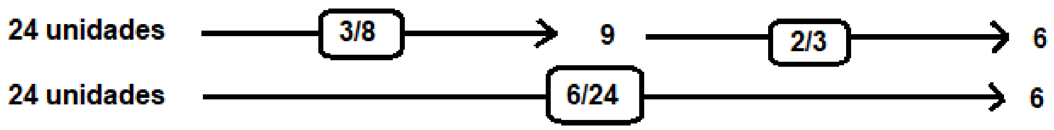
Fonte: Kieren (1976, p.113)

Assim, tem-se que se o módulo de k (natural e diferente de zero) for menor do que 1, temos uma redução, se for maior, temos uma dilatação. Pode-se construir um exemplo, se quiséssemos plotar outro triângulo cujo vértice correspondente a Q, considerando $d_2 = 18$, teríamos, usando o mesmo operador, um Q” cuja distância até P seria de 12, ou seja, o operador 2/3 é o mesmo que o operador 12/18, mostrando que pertencem à mesma classe de equivalência. O movimento que está sendo feito é semelhante ao da parte-todo, ou seja, se um operador de 3/5 operar sobre um segmento de 10, é o mesmo que subdividir o segmento em 5 partes iguais, ou seja 5 partes de 2 e tomar 3 dessas partes, resultando em 6.

Kieren (1976) analisa que tais operadores podem vir de forma combinada, o que em sua visão: “Se dois mapeamentos, 2/7 e 3/5, são combinados, a relação com a noção comum de multiplicação de frações é óbvia.” (KIEREN, 1976, p. 114)

Tomemos um exemplo do esquema na figura 22:

Figura 22: Composição de dois operadores em um



Fonte: Adaptado de Kieren (1976)

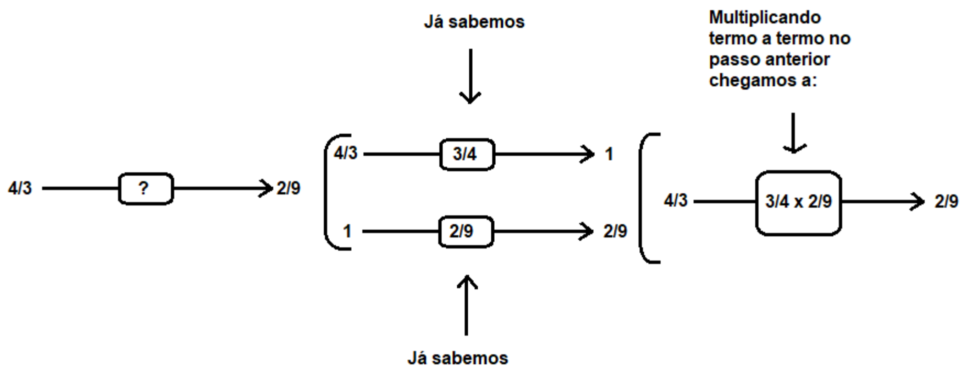
Assim, nesta interpretação, pode-se asseverar que multiplicar duas frações equivale a compô-las em uma única fração em forma de operador, de maneira que se multiplique denominador com denominador e numerador com numerador.

Nesse raciocínio, o autor realça a potencialidade da interpretação sobre a operação de multiplicação:

> Essa orientação leva naturalmente a uma exploração de a / b seguido por c / d ou na forma de expressão: a/b (f) c/d. Por exemplo, a/b (f) b/a = ? ; p/q (f) 1/1 = ? Essas questões conduzem às noções de identidade e operadores inversos. Da mesma forma, o uso de três operadores fracionários e ordem de operadores leva às propriedades associativas e comutativas. Dienes (1971) aponta que essas propriedades transferem naturalmente para os estados fracionários relacionados. Assim, a noção de fração como um operador leva à ideia de que os números racionais formam um grupo sob multiplicação. (KIEREN, 1976, p. 114)

De maneira similar, a divisão de frações pode ser observada ao dividir 2/9 por 4/3, ou seja, utilizando a representação de quociente temos que 4/3.x = 2/9, que esquematicamente fica:

Figura 23: Entendendo a divisão de frações por meio de esquema de operadores



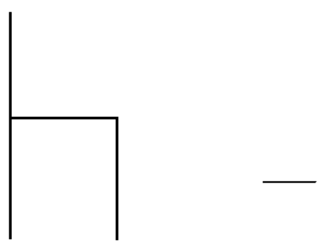
Fonte: Adaptado de Kieren (1976)

Corroborando, assim, com a regra algébrica de multiplicar a fração que representa o dividendo pelo inverso da fração que representa o divisor. A adição de frações, nesta interpretação perde visualização, mas que para segundo o autor, pode ser contornada:

> O "truque" da adição é escolher um estado inicial de forma que as operações por dois operadores fracionários produzam resultados de números inteiros. Assim; se estivermos olhando para 1/3 e 2/5, um estado inicial de 30 seria satisfatório. Para 1/3 temos: 30 operado por 1/3 resulta 10. Sob 2/5 temos: 30 operado por 2/5 resulta 12. Adicionando: 30 operado por 1/3 + 1/5 resulta 22. Agora é fácil ver que 30 está mapeado" Dienes (1971) "É na busca por esse estado inicial que se disfarça a técnica de encontrar o denominador comum" (KIEREN, 1976, p. 115)

Tem-se que as estruturas cognitivas relacionadas a noções pré-proporcionais podem ser trabalhadas antes de se inserir essa interpretação às crianças. Um exemplo bem didático que o autor traz é fazer com que a criança complete a redução ou dilatação de uma figura familiar, como por exemplo com as cadeiras abaixo:

Figura 24: Redução de desenho de cadeiras



Fonte: Adaptado de Kieren (1976)

Pedindo para que a criança, sabendo que a forma da cadeira da esquerda é a mesma que a que será construída na direita, termine o desenho da cadeira reduzida. A partir daí, pode-se fazer com que ela meça as partes das duas cadeiras e as compare, o assento da esquerda é ___vezes maior que a da direita.

Desta forma, pode-se associar a interpretação de números racionais como operador com as estruturas cognitivas de composição de operações (uma representa um conjunto de demais operações), reversibilidade (para as noções abstratas de inverso e identidade) e de proporcionalidade.

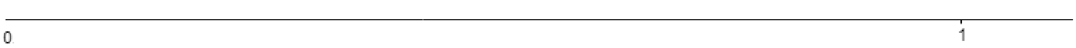
2.4.1.5 Números Racionais como Medidas

Para interpretar os números racionais como medidas Kieren (1976) traz que se deve fazer uso da reta numérica como correspondência de representação, isto implica que a noção de ordem surge naturalmente, bem como:

> Todas as propriedades da ordem (por exemplo, tricotomia, antissimetria, transitividade) surgem naturalmente de situações de medição. As seções anteriores mostraram que a ordem poderia receber uma interpretação "algébrica". No entanto, essa interpretação não foi intuitiva e tem valor instrucional limitado. (KIEREN, 1976, p. 124)

Desta forma, é possível elencar estruturas cognitivas responsáveis para um bom entendimento desta interpretação como a da divisão arbitrária da unidade, ou seja, a unidade não sofre variação no particionamento, assim ela se *conserva*. Uma outra estrutura cognitiva subjacente a essa interpretação é a de reconhecimento de relações específicas como a parte-todo e equivalência como fruto das divisões arbitrárias. Há também a estrutura cognitiva relativa à ordem, já mencionada acima como estrutura intrínseca da interpretação, mas que requer um desenvolvimento no aspecto cognitivo da criança. Essa interpretação apesar de não ter uma grande potencialidade no aspecto cognitivo de se conseguir enxergar as operações com frações, também não traz obstáculos adicionais. A adição pode ser entendida como "colocar dois vetores de ponta a ponta e ler o resultado" (KIEREN,1976, p. 124). Observe a imagem abaixo, para interpretar a adição de 1/2 e 1/5, inicialmente temos a unidade na reta numérica na figura 25:

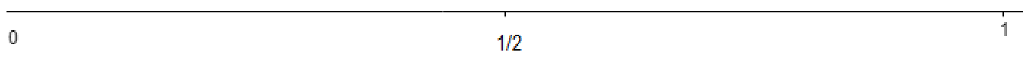
Figura 25: unidade na reta



Fonte: Adaptado de Kieren (1976)

Assim, para encontrar a localização do ponto 1/2 divide-se a unidade em dois segmentos congruentes, como na figura 26:

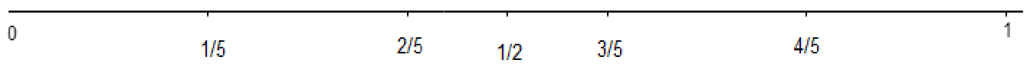
Figura 26: Unidade dividida em dois segmentos congruentes



Fonte: Adaptado de Kieren (1976)

De maneira similar, é realizada a divisão da unidade em 5 partes congruentes para encontrar a localização do ponto ⅕, como na figura 27:

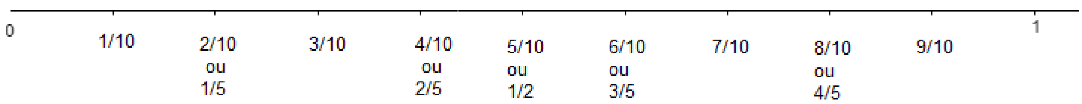
Figura 27: Unidade dividida em cinco segmentos congruentes



Fonte: Adaptado de Kieren (1976)

O autor nos orienta que essa arbitrariedade na divisão da unidade nos auxilia para que: “as divisões das unidades devem ser escolhidas para que "funcione"; isto é, o fim do nosso segundo vetor está em uma divisão exata da unidade.” (KIEREN, 1976, p. 124). Isso quer dizer que o mesmo processo que foi feito em interpretações anteriores, deve ser realizado aqui: deve-se dividir cada segmento de 1/5 em 2 partes congruentes e cada segmento de 1/2 em 5 partes congruentes (figura 28):

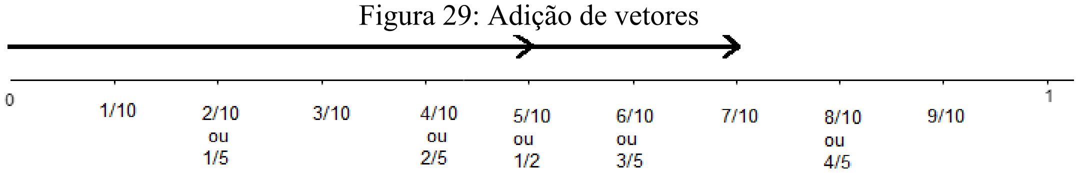
Figura 28: Unidade dividida em 10 segmentos congruentes



Fonte: Adaptado de Kieren (1976)

Assim, pode-se concatenar dois vetores com as respectivas magnitudes de forma que o final do segundo vetor nos dá o resultado da adição (figura 29):

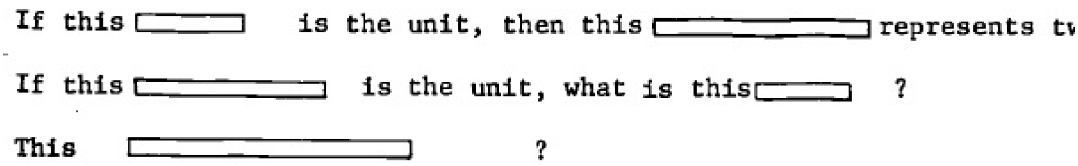
Figura 29: Adição de vetores



Fonte: Adaptado de Kieren (1976)

Algumas pré-atividades são recomendadas pelo autor, como a subdivisão de várias fitas em diferentes frações para que se consiga enxergar a equivalência e a conservação de substância ao dividir arbitrariamente um comprimento e, também, a de dar uma referência e pedir a relação com a outra, para que a criança possa entender a arbitrariedade da escolha da unidade e que os múltiplos e submúltiplos dependem apenas desta escolha (figura 30):

Figura 30: Atividade proposta



Fonte: Kieren (1976, p.125)

É possível perceber que esse tipo de atividade ganha potencialidade na interpretação de medidas lineares quando usado em fitas horizontais, no entanto pode-se transcender a unidimensionalidade e usar a mesma movimentação com figuras bidimensionais.

2.4.1.6 Números Racionais como Frações Decimais

A interpretação dos números racionais como frações decimais tem uma particularidade em relação às outras pois, para as operações são extensões dos números inteiros de forma que a divisão deixa de ser euclidiana, ou seja, a partir desta interpretação todo resto será zero (resguardadas as sutilezas do entendimento de dízimas periódicas). Assim, Kieren (1976) escolhe uma definição concisa para essa interpretação entendendo um número racional como um número que pode ser escrito como um decimal que termina ou se repete.

Uma outra característica da estrutura matemática dos números racionais enquanto frações decimais é a de que elas possuem uma representação que permite fazer estimativas em medidas e análises mais elaboradas como a própria extensão do conceito de número irracional e, consequentemente, os reais.

A forma da parte não inteira dos números decimais, ou seja, a soma de frações decimais (cujo denominador é uma potência de 10) exige que a criança desenvolva algumas estruturas cognitivas importantes que, segundo Kieren (1976), essas estruturas:

> [...] são semelhantes às mencionadas para medição. Aqui, no entanto, há mais ênfase na capacidade de generalizar no domínio simbólico. Ou seja, a criança deve ser capaz de generalizar o sistema de numeração decimal em seus algoritmos para esta situação fracionária. Além disso, a criança deve ser capaz de anexar uma descrição "padronizada" a situações parte-todo. Assim, dividir um objeto em seis partes congruentes, pegar uma e dizer "um de seis" ou "um sexto" é uma extensão natural da contagem; dizer "cerca de 16" não é. Assim, medir e estimar são essenciais. Este último traz uma noção geral de unidade e a capacidade de pensar hipoteticamente, mesmo que seja sobre uma situação real. (KIEREN, 1976. p. 126)

É importante notar então, segundo Kieren (1976), a diferença que existe na estrutura matemática de duas representações de um mesmo número decimal, por exemplo, em um problema que está sendo modelado por parte-todo e resulta na fração ¾, observa-se que o problema exigiu visualizar a unidade em 4 partes iguais e tomar 3 delas, no entanto, se for encontrar o quociente de 3 por 4 pelo algoritmo da divisão, se obterá 0,75, que pela estrutura de soma de frações decimais pode significar: 7/10 + 5/100 ou simplesmente 75/100, que desconfigura possíveis problemas que exigem a manutenção da divisão em 4 partes. Assim, essa transformação é conveniente sempre que a equivalência de frações for benéfica para a estrutura do problema, e a criança deve então entender que sempre que fizer essa transformação, estará trabalhando com frações equivalentes padronizadas, ou seja, com denominadores potência de 10.

Notada essa particularidade intrínseca da representação por números decimais, para o autor, é possível enxergar a potencialidade do ensino deste recurso usando conceitos de medidas, no entanto, nota-se que toda a estrutura algébrica se perde caso se dê ênfase exclusiva a esta representação.

Para o autor, a potencialidade de ensino se dá de forma que:

> [...] com a fração decimal dividimos a unidade de maneira padrão, por potências sucessivas de 10. Um modelo natural para medições que geram frações decimais é o medidor com as subunidades óbvias:
> 1 decímetro -- .1
> 1 centímetro -- .01
> 1 milímetro -- .001
> Claro, este modelo existe também em outros modos de medição (por exemplo, capacidade, massa e dinheiro). (KIEREN, 1976, p. 126)

Assim, torna-se importante que as crianças tenham trabalhado com medidas e estimativas para que se consolide essa interpretação dos números racionais.

2.4.1.7 Números Racionais como um Conglomerado

Os números racionais visto pelas interpretações de Kieren (1976) devem ser vistos como um conglomerado de significados, ou seja, as diversas interpretações levantadas se entrelaçam em caráter epistemológico e que, para o autor:

> Sem uma visão de conglomerado, é fácil projetar configurações de instrução que contenham elementos ou modelos contraditórios, ou que não facilitem o desenvolvimento de algum conceito de número racional. Por exemplo, se alguém interpreta os racionais como medidas e usa um modelo de linha numérica, a multiplicação de racionais não é gerada naturalmente. O modelo de linha numérica pode entrar em conflito cognitivamente com um modelo de área. (KIEREN, 1976. p. 127)

Desta forma, observa-se esse conglomerado de interpretações como uma rede de conhecimentos em que os aspectos de estrutura matemática, estruturas cognitivas relacionadas bem como as instrucionais e, é possível a partir daí, construir modelos de currículo baseado em pesquisas que se baseiam nesses três pilares. Essa visão traz à tona quais serão os ônus e bônus de determinadas escolhas curriculares, fazendo assim, com que essas escolhas sejam melhores embasadas e mitiguem as contradições entre diferentes interpretações.

A intencionalidade passa a ser um fator crucial no ensino dos números racionais a partir desta visão de rede conglomerada. Para ilustrar, o autor traz que:

> Embora seja necessária pesquisa sobre este ponto, parece sensato que a medição e as interpretações do operador podem representar o acesso direto inicial aos números racionais, enquanto a interpretação do quociente-campo parece representar a meta para a instrução posterior. Além disso, parece que as atividades de divisão partitiva fornecem a base de experiência necessária para uma compreensão da operação da adição. (KIEREN, 1976. p. 133)

Esse tipo de análise, que apesar de inconclusiva por parte do autor, revela pistas de que, por exemplo, não é pertinente tentar iniciar os estudos dos números racionais utilizando a interpretação de campo-quociente, ou seja, há um conhecimento que pode orientar as escolhas pedagógicas e curriculares.

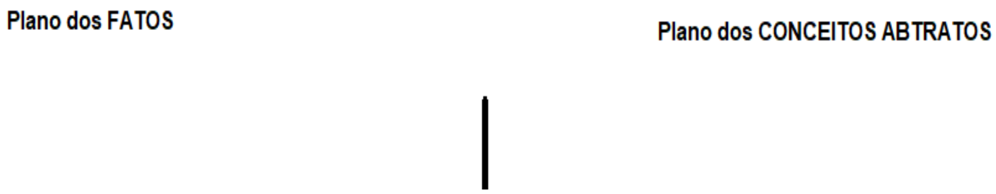
Assim, como uma evolução das ideias propostas por Kieren (1976), em 1980 o autor publica um outro trabalho em que retificou algumas considerações feitas em 1976. É importante notar que, embora essa visão de evolução parta do próprio autor, há de se considerar válida a exposição de 1976 assim como as posteriores.

Kieren (1980) passa a considerar o então conglomerado de interpretações pelo sistema de teoria do significado e da compreensão do conhecimento criado por

Margenau (1961), para a filosofia da ciência. Ao trazer essa estrutura para os números racionais, Kieren (1980) pretende fazer uma distinção entre uma definição matemática (no caso dos números racionais) e conhecer esse conceito, essa definição, pois "Conhecer números racionais pode significar um grande número de coisas" (KIEREN, 1980, p.125).

O modelo leva em consideração dois planos que se interligam, o dos fatos e o dos conceitos abstratos, encontrados na figura 31:

Figura 31: Planos primeiros do modelo de Margenau (1961)



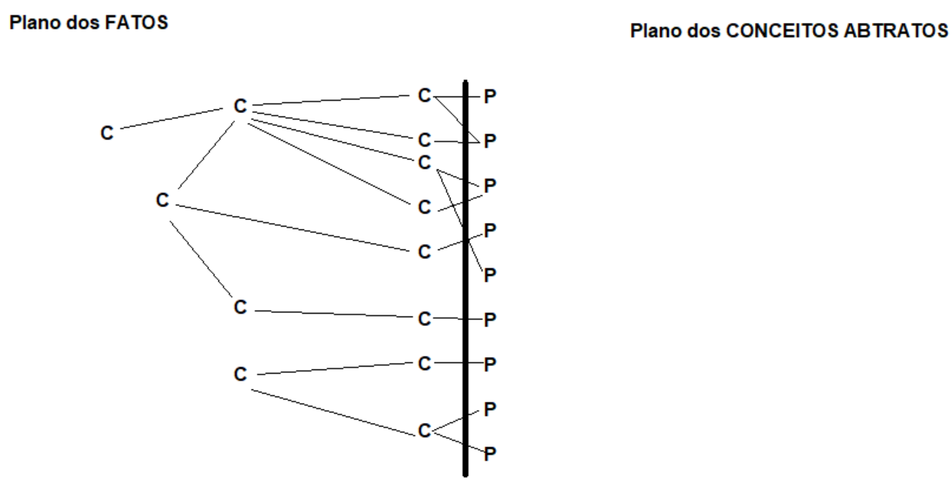
Fonte: Elaborado pelo autor desta dissertação, baseado em Kieren (1980)

Assim, outros conceitos importantes são postos para preencher os planos:

> Para evitar certas armadilhas lógicas e psicológicas, Margenau vê todo conhecimento como atribuível à <u>construção</u> humana, mas vê essas construções como limitadas e enraizadas no reino dos fatos que, ele sugere, funcionam como <u>protocolos</u> contra os quais nossas ideias ou construções são testadas funcionalmente. (KIEREN, 1980, p. 125, grifo do autor)

Representando as construções como C e os protocolos como P, pode-se preencher os planos como na figura 32:

Figura 32: Elementos constitutivos dos planos de Margenau (1961)



Fonte: Elaborado pelo autor desta dissertação, baseado em Kieren (1980)

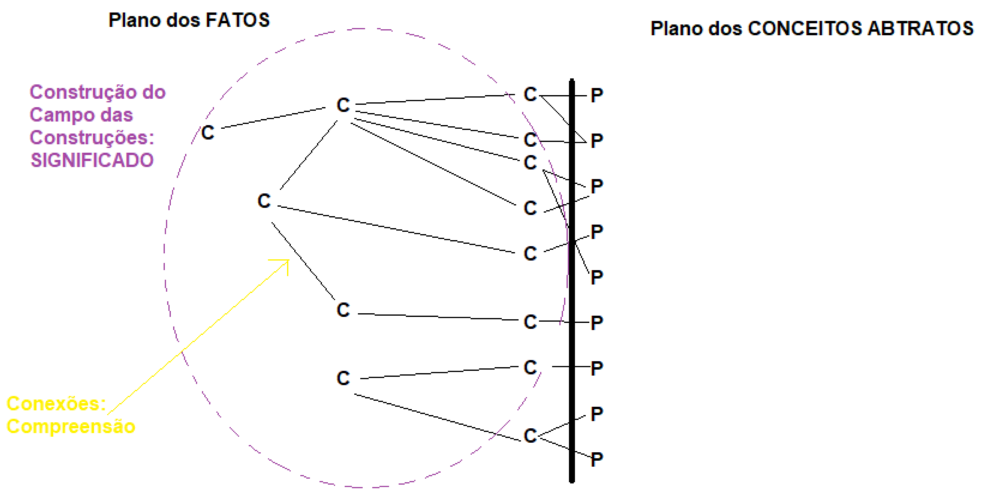
As construções C que estão em face ao plano dos conceitos abstratos são, para Kieren (1980), fatos com poder de explicação muito baixo, pois estão muito próximos da característica protocolar.

Procedimentos vazios, destituídos de significados, como “ache o mmc, divida pelo debaixo e multiplique pelo de cima, para somar duas frações” podem ser um bom exemplar dessas construções.

Já as construções mais afastadas do campo abstrato tendem a ter maior poder explicativo.

A partir daí, os movimentos passam a serem conceituados, como por exemplo o significado e a compreensão dos conceitos matemáticos. Para o autor, o significado é a ampliação das construções e compreensão, as interligações no plano, representados na figura 33:

Figura 33: Significado e compreensão



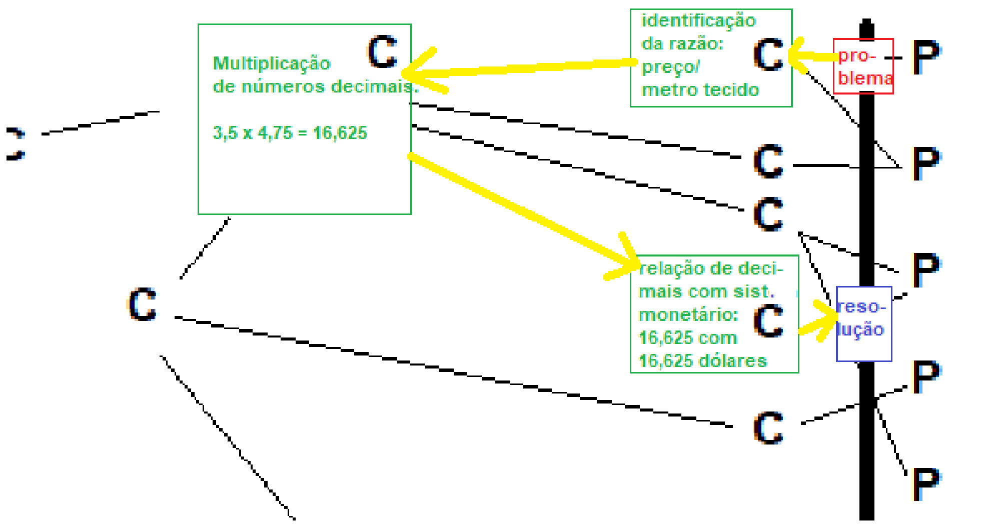
Fonte: Elaborado pelo autor desta dissertação, baseado em Kieren (1980)

Em uma dinâmica mais clara, o autor traz como seria a movimentação da resolução de um problema matemático neste plano:

> Um problema, a compra de 3,5 metros de tecido a $ 4,75 / m, surge no plano P. A solução é alcançada percorrendo um caminho entre construções (razões, multiplicando decimais, relacionando decimais e dinheiro) e chegar a um valor em dólares de volta ao plano-P. (KIEREN, 1980, p. 126)

Essa dinâmica está representada no esquema da figura 34:

Figura 34: A compreensão e resolução do problema através dos significados das construções



Fonte: Elaborado pelo autor desta dissertação, baseado em Kieren (1980)

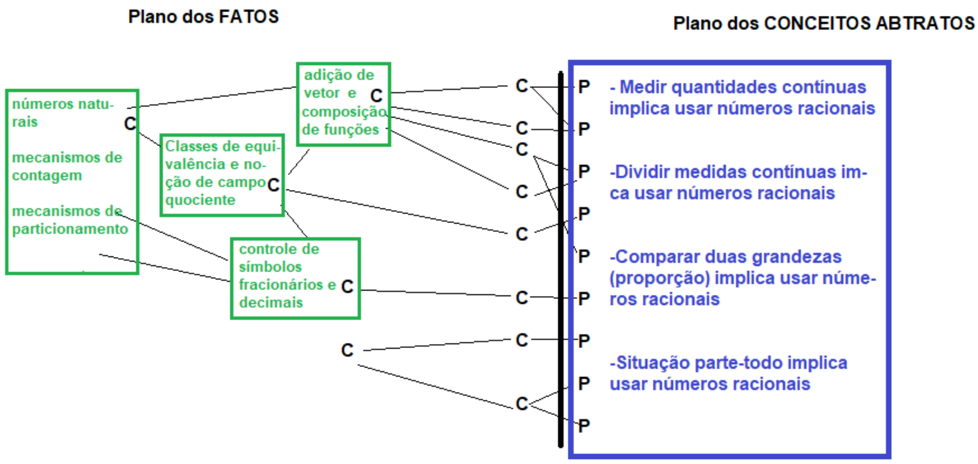
Desta forma, Kieren (1980) faz uma relação dos conhecimentos basilares que as pessoas devem abarcar, tanto no âmbito das construções quanto no dos protocolos:

> No plano dos protocolos, os números racionais estão envolvidos na representação e controle de situações e relacionamentos parte-todo. Os números racionais são fundamentais para medir quantidades contínuas. Se as quantidades, particularmente aquelas contínuas, são divididas, os números racionais estão envolvidos. Finalmente, as noções racionais estão envolvidas em quaisquer comparações quantitativas de duas qualidades (proporções). Assim, a construção de um número racional geral deve permitir que uma pessoa controle tais eventos no plano P. Em um nível de construção, conhecer números racionais envolve controle sobre símbolos bidimensionais em várias formas (frações, decimais). Operações em racionais, enquanto em um nível inferior envolvem o conhecimento de algoritmos convencionais, mais geralmente envolvem o controle de formas primitivas de adição de vetores e composição de funções. O conhecimento dos racionais também requer capacidade funcional com classes de equivalência e campos de quociente. Tais construções também implicam conexões com aquelas de noções anteriores de número natural e é uma construção mais geral de número que também inclui os números reais. (KIEREN, 1980, p. 126)

Para a efetivação de tais conhecimentos, o autor assevera que o caminho mais natural é o da utilização da contagem dos números naturais, tão presentes no dia-a-dia das crianças. Esse trabalho com os naturais se submeterá a um trabalho que visa elaborar e generalizar os <u>mecanismos de contagem</u>, ou seja, construir estruturas algébricas mais simples como a ordenação, por exemplo.

Além desse trabalho refinado com os números naturais, tanto no âmbito dos protocolos quanto das construções, Kieren (1980) vê a demanda da escola proporcionar vivências nas quais o mecanismo de particionamento esteja permeado nas mais diversas construções e, ainda, que a verbalização de termos pertinentes ao fenômeno fracionário esteja presente nas atividades. Nota-se que esses elementos são, em certa medida, coincidentes com as ideias de Kieren (1976), no entanto, agora aplicado a um outro sistema de dinâmica do conhecimento. A figura 35 retrata esse esquema:

Figura 35: Possível esquema dos conhecimentos basilares dos números racionais



Fonte: Elaborado pelo autor desta dissertação, baseado em Kieren (1980)

Kieren (1980) faz uma análise dos currículos e estudos anteriores sobre números racionais e constata que o alto grau de comportamentalismo sobre as abordagens apenas trouxe desempenhos ruins de adolescentes até mesmo em bons programas. Assim, o autor analisa uma alternativa de adiar o ensino de números racionais até que tenha chegado na fase de operações formais. Para Piaget (1995):

> [...] após 11 ou 12 anos, o pensamento formal torna-se possível, isto é, as operações lógicas começam a ser transpostas do plano da manipulação concreta para o das ideias, expressas em linguagem qualquer (a linguagem das palavras ou dos símbolos matemáticos etc.), mas sem o apoio da percepção, da experiência, nem mesmo da crença. (PIAGET 1995. p. 59)

No entanto, constata-se que uma melhor alternativa seria melhorar a instrução para os alunos mais novos em contraposição a esperar tal maturação. É pautado nessa alternativa que Kieren (1980) enxerga algumas das interpretações de Kieren (1976) como *subconstrutos* da construção dos números racionais, isto se dá pois segundo Kieren (1980), a teoria das interpretações podiam ser vistas com isomorfia em relação aos padrões cognitivos, o que levava a crer que escolher uma ou outra interpretação levaria a desenvolver todos os aspectos cognitivos inerentes aos racionais. Nessa nova teoria pautada na teoria do conhecimento, cinco subconstrutos são observados como base para a efetivação do conhecimento dos números racionais, a saber: parte-todo, razão, quociente, medida e operador, de forma que, apesar de todos se interligarem (como nas interpretações), são agora considerados como unidades rígidas que seus usos não podem ser facultativos.

É importante notar que em Kieren (1976) parte-todo era considerado como uma configuração subjacente às interpretações, aqui ela ganha posto de um subconstruto, sendo um dos principais para a construção dos números racionais, pois “Estes formaram as bases tradicionais e modernas para o desenvolvimento do significado da fração” (KIEREN, 1980, p. 134).

Kieren (1980) ressalta que o subconstruto parte-todo está intimamente ligado à representação fracionária dos números racionais, isto é, a noção de par ordenado é evidente na representação 3/5 e nas palavras “três quintos”, no entanto perde-se significado em representações decimais como 0,75, pois relaciona-se a um número padrão (100), então a variabilidade se dá em 75. A noção de equivalência se torna potente nesse subconstruto.

Para a razão, a noção parte-todo ganha outro significado, ou seja, 4/5 de um pedaço de chocolate tem um significado diferente de “há 4 meninas para 5 meninos na sala”. O autor faz essa distinção ao evidenciar que o conceito de equivalência em alguns casos não faz sentido ser aplicado, pois:

> Embora representemos 3 acertos em 4 morcegos (3/4) e 30 acertos em 40 morcegos (30/40) com o decimal 0,750, eles são fenômenos claramente muito diferentes. No entanto, 75/100 [75 centímetros e 750/1000 de um metro (750 milímetros)] são a mesma medida. (KIEREN, 1980, p. 135)

No subconstruto quociente, tem-se, assim como na razão, uma íntima relação com a parte-todo, no entanto, permite que o resultado de uma divisão quantifique a relação estabelecida.

De mesma maneira, para o autor, o subconstruto parte-todo permeia o subconstruto medida, no entanto, com uma dificuldade de assimilação adicional de que quando há o particionamento de alguma medida e estabelecido a contagem das partes, ou seja, a medição desta, o todo pode se confundir com a unidade que usa para medir. Uma potencialidade para esse subconstruto é a soma de vetores para representar a adição de números racionais bem como a introdução de padrões de medida como o metro e seus submúltiplos.

Por fim, o subconstruto operador é tratado com muita semelhança enquanto interpretação, ou seja, possui uma potencialidade para o ensino de multiplicação de frações.

Assim, Kieren (1980) constrói um esquema (figura 35) para evidenciar as relações entre os subconstrutos, mostrando a importância, em particular, do subconstruto parte-todo:

Figura 36: Esquema de relações entre os subconstrutos

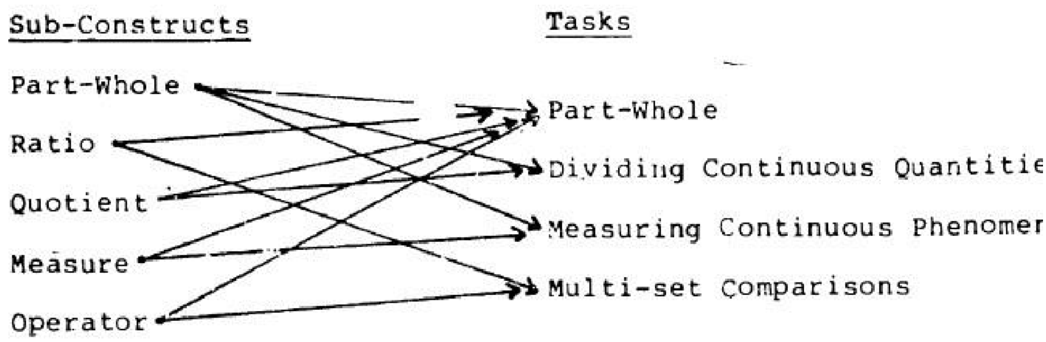


Figure 9

Fonte: Kieren (1980, p.137)

Não obstante, o autor assevera que o que mais importa nesse esquema não é a ressaltada importância do parte-todo, mas sim que: “os subconstrutos formam uma base suficiente para um funcionamento maduro, ao passo que cada um individualmente não o faz.” (Kieren, 1980, p. 137)

Os cinco subconstrutos identificados pelo autor além de interconectados, devem ser conectados com outras ideias da matemática, como:

> [...] operador pode ser conectado àquelas de transformação e à construção de função mais geral. Ele também pode ser conectado à construção de grupo. O subconstruto de medida pode ser conectado à construção de medição geral, bem como à construção matemática formal de medida por meio da construção de número real; a estrutura instrucional relacionada útil aqui é várias formas de linha numérica. O subconstruto quociente está, por definição, relacionado à solução de equações lineares e, portanto, representa um ponto de conexão com a álgebra de equações e também com a estrutura do campo. A subconstrução de razão está conectada às muitas formas de construtos proporcionais e, em particular, à probabilidade e estatísticas descritivas e inferenciais. A subconstrução parte-todo está internamente conectada na medida em que serve como uma fonte de linguagem e simbolismo nas outras construções. (KIEREN, 1980, p. 142)

Em face dessa construção geral dos números racionais a partir dos cinco subconstrutos abordados, Kieren (1980) se debruça a entender quais seriam as relações, no âmbito da instrução, dos subconstrutos na abordagem dos números decimais. Primeiramente há um alerta em relação à parte-todo e à razão, visto que estes contêm em si elementos que estão sendo comparáveis e que se desconfigurariam postos em divisões padronizadas de potências de 10.

No entanto, em se tratando do subconstruto operador a representação decimal pode ser aplicada, e de forma geral:

> [...] é hipotetizado que uma abordagem exclusivamente decimal irá beneficiar o construto aditivo de medida, enfraquecer ligeiramente os construtos que envolvem a noção de inverso e enfraquecer substancialmente os aspectos multiplicativos e proporcionais dos subconstrutos. Além disso, o mecanismo de partição teria um efeito muito mais limitado no desenvolvimento da construção de número racional do indivíduo. (KIEREN, 1980, p. 145)

Por fim, o autor traz mecanismos construtivos que servem de base cognitiva para a construção dos números racionais ou até para servir como elementos de ligação e unificação dos cinco subconstrutos. Esses mecanismos são: estabelecer a linguagem de pares ordenados, ou seja, deve-se estabelecer a relação entre nomes específicos a serem aplicados a elementos ordenados; particionamento; identificação da unidade e aplicação das propriedades estruturais da matemática.

Pode-se, assim, notar uma semelhança nesse aspecto com os elementos cognitivos primitivos estabelecidos pelo autor em 1976.

2.4.2 Base de Conhecimentos para o Ensino de Números Racionais em Pesquisas Brasileiras

Nas seções subsequentes, serão agregadas à base de conhecimentos sobre o ensino de números racionais os resultados de 5 pesquisas brasileiras. A demanda por novos olhares sobre a temática fora observada pelos estudos iniciais de Kieren, quando traz que:

> Por causa de seu importante efeito, um estudo dos conceitos dos professores sobre os números racionais, com base em uma visão complexa desse conceito, seria esclarecedor. Embora isso pudesse ser feito mais facilmente com professores de formação inicial e secundária, um estudo envolvendo uma ampla gama de professores em serviço seria muito interessante." (KIEREN, 1976, p.141)

A literatura relativa a essa temática é abundante, sendo os questionamentos tão diversificados quanto seus referenciais teóricos e metodológicos que os compõem. Assim, seguir-se-á a indicação de que "Deve ser razoável que os estudos do comportamento do número racional, os estudos instrucionais, os estudos de representação e os estudos de avaliação compartilhem testes, itens ou metodologias comuns". (KIEREN, 1976, p.142)"

Desta forma, a escolha dos referenciais brasileiros se deu pela submissão ao crivo do estudo de Zero, Oliveira e D'Alessandro Neto (2021) que em sua pesquisa, na modalidade estado da arte, mapearam as pesquisas nacionais que tinham como perspectiva a matemática para o ensino dos números racionais no âmbito dos modelos PCK de Shulman (1987), MKT de Ball, Thames e Phelps (2008) e MTSK de Carrillo et al (2013, 2018), no entanto, não foram encontradas nenhuma tese ou dissertação utilizando este último. Cabe frisar que a não utilização de artigos nesta base de conhecimentos se deu na intenção de delimitar as escolhas em estudos que compartilhassem referenciais e metodologias em comum, o que pôde ser viabilizado através do estudo de Zero, Oliveira e D'Alessandro Neto (2021).

2.4.2.1 Contribuições de Souza

A pesquisa de Souza (2015) teve como objetivo investigar a movimentação do conhecimento pedagógico de conteúdo, a saber, dos números racionais em três professores de escolas públicas. O referencial teórico utilizado para a categorização dos conhecimentos evidenciados são o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK) de Shulman (1987) e o Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT) de Ball e seus colaboradores (2008). Relativo aos subdomínios do MKT, a autora se ateve ao Conhecimento do Conteúdo e os Estudantes (KCS) e Conhecimento do Conteúdo e Ensino (KCT).

Um dos referenciais teóricos acerca dos números racionais que a pesquisadora se pautou foi o estudo de Kieren (1993), trazendo quatro subconstrutos na construção dos números racionais: quociente, operador, medida e razão. Assim, um rol de 13 questões que fizeram parte de seu acervo pessoal (de aplicação em sala de aula) foi levantado correlacionando-os com os quatro subconstrutos.

Será examinado no presente estudo, alguns dos resultados obtidos, permitindo assim a reflexão sobre o parecer geral dado pela pesquisadora de maneira tal que os resultados componham a base para a análise dos livros didáticos.

No que diz respeito ao subconstruto da medida, a capacidade de colocar-se na posição do aluno para identificar quais os possíveis erros na resolução de problemas bem como dar sugestões pedagógicas para melhoria desses erros foi evidenciado:

> Todos os professores trouxeram a ideia de que o aluno encontrou mesmo a dificuldade na interpretação da reta apresentada e da localização dos pontos na reta, seja por não conseguir visualizá-lo, como uma parte do inteiro, ou não conseguir transformá-lo, em número decimais para facilitar o "posicionamento" do número ou mesmo o fato de não ter conseguido interpretar a própria reta.
>
> O fato, nesse exercício, é que identificamos o KCS dos três professores em questão, acreditamos que isso ocorreu pelo fato de que esse realmente seja um momento no qual os alunos comumente apresentarem dificuldade no momento em que aprendem e carregarem tais dificuldades durante seu período escolar. (SOUZA, 2015, p.108)

No entanto algumas lacunas no KCT de um professor foram detectadas ao analisar uma questão em que os alunos deveriam *plotar* números nas formas fracionária e decimal (positivos e negativos), pois apesar de o professor identificar uma dificuldade dos alunos em compreender que 8/4 = 2, porque possivelmente o aluno não internalizou a inclusão dos conjuntos naturais no conjunto dos racionais e/ou entendeu que toda fração vista como divisão resulta em um quociente decimal não inteiro (o que é inverdade), o professor diz que essa dificuldade ele tenta driblar não a trazendo à tona a discussão, evitando as dúvidas. Outro professor traz que na movimentação de *plotar*, é pertinente dar ao aluno a reta subdividida, para que o aluno se oriente.

Relativo às operações com números racionais na forma fracionária, pode-se notar muita dificuldade por parte de dois professores em trazer alternativas para que tais tópicos ganhem maior significado, mais especificamente no problema de adicionar frações com denominadores diferentes tem-se que: "na fala do professor "mas isso não entra na cabeça deles de jeito nenhum", talvez seja porque "isso" não tenha significado algum para o aluno. Trata-se de uma "regra" totalmente mecânica e que, para o aluno, não faz nenhum sentido, destacando neste momento uma lacuna do KCT". (SOUZA, 2015, p.111)

Ainda em adição de números racionais na forma fracionária, o professor indica como se deve pensar para resolver indicando que os alunos sempre se esquecem das regras pertinentes a esse procedimento, ou seja, como professor, a *imagem conceitual* deste tópico está estritamente ligada ao caráter procedimental, evidenciando uma lacuna em seu KCT.

Em um outro problema operacional proposto, em que se deveriam adicionar frações com diferentes denominadores, um dos professores faz a leitura de que: "Na letra "d" seria no que eles teriam mais dificuldades pois entra o MMC e isto acaba confundindo eles com a parte que divide pelo de baixo e multiplica pelo de cima". (SOUZA, 2015, p.113)

Desta forma, é possível inferir que a *imagem conceitual* desses dois pesquisados acerca sobre esse tópico é limitada ao procedimento, não fazendo uso de nenhuma interpretação ou subconstruto para apoiar as ideias e trazer significado. Não obstante um dos professores pesquisados lança mão de uma alternativa à base de construção de lista de múltiplos e, assim, de frações equivalentes:

> [...] vários erros dos alunos em relação a isso né, as operações principalmente de adição e subtração com denominadores diferentes eu ia mostrar para os alunos que ó sempre... não é uma mágica por que a gente faz o mmc? Ai eu pego aqui por exemplo 4 e 2 vamos pegar os múltiplos de 2: 2, 4, 6,... . Agora os de 4: 4, 8, 12,... , agora vamos olhar aqui entre os múltiplos qual é o mesmo que é comum entre os dois ai eu faço eles verem e assinalarem. Vocês estão vendo que tem vários? Na verdade, a gente poderia usar qualquer um desses comum ai mas a gente usa o mínimo por que? Por que é o mais simples quanto menor é um número, mais fácil da gente trabalhar ai vou lá faço um esqueminha da representação, então se eu represento 34 como que eu penso em subtrair isso ou somar sendo que são partes diferentes e ai chega no MMC mostro para eles e falo ah tem um procedimento que nem sempre é fácil de fazer essa ideia dos múltiplos até porque as vezes tem números e tal e ai que está a ideia, sabe calcular mas por que está calculando aí eu mostro para eles que a gente tem agora duas frações que são equivalente ou seja as duas representariam a mesma coisa só que agora a gente tá falando de partes iguais aos dois faço até o desenho então ó tá vendo eu vou pegar é sei lá 1/4 e 2/8 que é exatamente a mesma coisa daí faço a representação. (SOUZA, 2015, p. 119)

Na divisão de frações também se observa que a imagem conceitual dos professores era exclusivamente procedimental, pois ao resolver um problema em que pretendia dividir igualmente 1/6 em 5 partes iguais, o professor menciona que "a partir daqui iria relembrar com eles as propriedades e regras de divisão de fração por um número inteiro que é manter a 1ª fração e multiplicar pela 2ª fração invertida, e daí o resultado seria 1/30." (SOUZA, 2015, p. 114).

Outro professor ressalta que ensina seus alunos a mesma regra pois, para ele, os alunos não entendem o conceito por detrás, assim o caráter procedimental serve como motivador para os alunos, em sua visão.

Em multiplicação de números racionais, um professor traz a dificuldade de ensinar que o produto 0,04 = 0,2 x 0,2 é menor do que seus fatores, ou seja, ele traz que os alunos carregam a ideia de multiplicação de dois números naturais. Pode ser notado que o professor não possui em sua *imagem conceitual* a relação desta multiplicação com o subconstruto operador, em que um mapeamento geométrico poderia trazer maior significado a este problema.

Assim, segundo a pesquisadora, dos três professores avaliados, a maior movimentação dos conhecimentos dos domínios do MKT se deu em um, sendo que dos outros dois um manifestava bastante cansaço em relação a toda a complexidade da sala de aula e o outro manifestou ter dificuldades sobre o tema desde o início do estudo. A autora conclui que os conhecimentos avaliados pertinentes ao MKT são aperfeiçoados durante a prática do professor.

2.4.2.2 Contribuições de Santos Filho

A pesquisa de Santos Filho (2015) teve como objetivo investigar como professores do Ensino Fundamental avaliam propostas para o ensino de números racionais tendo como norte os parâmetros curriculares de Pernambuco. Para a categorização dos conhecimentos movimentados pelos professores nessas avaliações o pesquisador optou pelo modelo MKT de Ball e seus colaboradores (2008).

O questionário diagnóstico fora embasado nas expectativas de aprendizagem para o ensino dos números racionais nos anos iniciais no Estado de Pernambuco, doravante parâmetros. No entanto, das 24 expectativas documentadas, utilizou-se 5. A saber, as expectativas são:

> 4.1 Reconhecer frações como partes iguais de um todo.
> 4.2 Determinar a posição aproximada na reta numérica, de frações com numerador unitário (1/2, 1/3, 1/4, 1/5 e 1/10).
> 5.3 Identificar e representar frações menores e maiores que a unidade.
> 5.4 Relacionar frações equivalentes em situações contextualizadas.
> 5.5 Comparar e ordenar números na representação decimal, usados em diferentes contextos. (SANTOS FILHO, 2015, p. 52)

Os índices que antecedem as expectativas de aprendizagem acima se referem ao ano de referência e a ordem que se situam nos parâmetros. Para cada expectativa de aprendizagem, o pesquisador elencou quatro propostas de ensino que, previamente, são concebidas como corretas ou incorretas, no entanto caso o participante da pesquisa optasse por correto, deveria justificar se utilizaria em sala de aula certamente, facultativamente ou, não usariam, pois algumas destas eram corretas apenas da perspectiva da estrutura matemática formal.

Para esta pesquisa será pertinente fazer um breve recorte de cada questão visto que as análises estão bem fundamentadas na literatura, logo, trarão um corpo concreto de conhecimentos para a base de conhecimentos deste trabalho.

A primeira proposta encontra-se na figura 37:

Figura 37: proposta A, expectativa 4.1

EXPECTATIVA 4.1 RECONHECER FRAÇÕES COMO PARTES IGUAIS DE UM TODO.
Proposta A: Apresentar, por meio de material concreto, a fração como partes iguais de um todo e mostrar para criança, como exemplo, que a parte pintada da figura abaixo é 2/3.

Fonte: Santos Filho (2015, p.53)

Que é reconhecida como incorreta, pois na representação parte-todo, o todo precisa ser dividido em partes iguais, seja qual for o aspecto observado, neste caso é a área do círculo.

Como resultado, 60% dos participantes assinalaram uma das respostas corretas, o que para o pesquisador é um dado preocupante, atribuindo o erro ao que se refere à dupla contagem (NUNES e BRYANT (1997); NUNES et al. (2003); M (2005); Canova (2006)), que se configura como “o total de partes pintadas da figura para o numerador e o total de partes para o denominador – sem considerar a conservação da área da figura” (SANTOS FILHO, 2015, p. 71).

A segunda proposta encontra-se na figura 38:

Figura 38: proposta B, expectativa 4.1

EXPECTATIVA 4.1: RECONHECER FRAÇÕES COMO PARTES IGUAIS DE UM TODO.
Proposta B: Dizer para a criança que todos os bonés da figura abaixo são do mesmo tamanho, e explicar-lhe que a quantidade de bonés azuis pode ser representada pela fração 2/6.

Fonte: Santos Filho (2015, p.54)

Que traz uma relação parte-todo em quantidades discretas. A questão é correta. No entanto, apenas 7% conseguiram mobilizar uma justificativa para a resposta que demonstrasse um conhecimento matemático para o ensino.

Uma terceira proposta de ensino encontra-se na figura 39:

Figura 39: proposta C, expectativa 4.1

EXPECTATIVA 4.1: RECONHECER FRAÇÕES COMO PARTES IGUAIS DE UM TODO.
Proposta C: Mostrar para a criança, por meio de desenho em cartolina, que 2/5 de uma barra de chocolate corresponde a duas quantidades iguais de 1/5 da barra de chocolate.

Fonte: Santos Filho (2015, p.54)

Que é considerada correta, mas: "71% dos professores julgaram a proposta correta. No entanto, apenas 3% apresentaram justificativa que demonstraram *conhecimento matemático para o ensino"* (SANTOS FILHO, 2015, p. 75).

A quarta proposta de ensino encontra-se na figura 40:

Figura 40: proposta D, expectativa 4.1

EXPECTATIVA 4.1: RECONHECER FRAÇÕES COMO PARTES IGUAIS DE UM TODO.
Proposta D: Desenhar um retângulo na lousa dividi-lo em cinco partes iguais pintar quatro dessas partes e explicar para a criança que a parte colorida do retângulo pode ser representada pela fração 4/5 em que o quatro se chama numerador, que indica quantas partes do retângulo foram pintadas, e o cinco se chama denominador, que indica em quantas partes iguais o retângulo foi dividido.

Fonte: Santos Filho (2015, p.55)

Que é correta matematicamente, no entanto o autor traz estudos que mostram que abordagens muito procedimentais tendem a fazer com que a criança enxergue a fração como dois números naturais isolados, ou seja, não atribuindo a relação estabelecida entre eles. Como resultado, obteve-se que 90% assinalaram corretamente, no entanto no campo da justificativa apenas 3% mobilizaram um conhecimento pedagógico de conteúdo.

Em síntese, o autor conclui que em relação a esta bateria de questões pertinentes à relação parte-todo, os professores:

> [...] não demonstram *conhecimento matemático para o ensino*, em relação às propostas de ensino apresentadas para o trabalho com a expectativa de aprendizagem 4.1 e apresentam como possíveis entraves para compreender a ideias associadas ao conceito de fração como partes iguais de um todo, não considerar a conservação da área da figura no momento de representá-la por uma fração, não compreender o número fracionário como um número que

> representa quantidades iguais que formam um todo, em sua prática pedagógica predomina o uso de procedimentos e algoritmos, dentre outros. (SANTOS FILHO, 2015, p.78)

A segunda bateria de questões traz problemas relativos ao subconstructo de medidas (KIEREN, 1976, 1980, 1993), visto que é baseado na expectativa de aprendizagem que visa a localização de números racionais na reta numérica.

A primeira questão é a relatada na figura 41:

Figura 41: proposta A, expectativa 4.2

EXPECTATIVA 4.2: DETERMINAR A POSIÇÃO APROXIMADA NA RETA NUMÉRICA, DE FRAÇÕES COM NUMERADOR UNITÁRIO (1/2, 1/3, 1/4, 1/5 E 1/10).
Proposta A: Apresentar algumas frações unitárias em uma reta numérica em que apareçam os números naturais 0 e 1 e explicar a criança que, assim como os naturais, as frações são números, e podem ser representadas na reta numérica.

Fonte: Santos Filho (2015, p.56)

A proposta se apresenta de forma correta. Apesar de 81% dos professores terem avaliado corretamente a questão, o autor informa que apenas 2% justificou sua resposta de maneira a categorizar um conhecimento pedagógico do conteúdo.

O pesquisador traz a importância de se trabalhar localizações na reta, pois de acordo com Damico (2007) esse tipo de problema ajuda a construir o conceito de fração como um número.

Uma segunda questão levantada neste tópico encontra-se na figura 42:

Figura 42: proposta B, expectativa 4.2

EXPECTATIVA 4.2 DETERMINAR A POSIÇÃO APROXIMADA NA RETA NUMÉRICA, DE FRAÇÕES COM NUMERADOR UNITÁRIO (1/2, 1/3, 1/4, 1/5 E 1/10).
Proposta B: **Apresentar uma reta numérica na lousa. Representar, nessa reta, as frações 1/2 e 1/4 e explicar para a criança que a distância do zero a 1/2 corresponde a duas vezes a distância do zero a 1/4.**

Fonte: Santos Filho (2015, p.56)

O autor considera correta e adequada ao ensino. Um percentual de 81% dos professores fez uma avaliação correta da matemática da questão, no entanto nenhum dos professores conseguiu atribuir uma justificativa plausível que categorizasse um conhecimento pedagógico de conteúdo.

Uma terceira questão sobre o tema encontra-se na figura 43:

Figura 43: proposta C, expectativa 4.2

EXPECTATIVA 4.2 DETERMINAR A POSIÇÃO APROXIMADA NA RETA NUMÉRICA, DE FRAÇÕES COM NUMERADOR UNITÁRIO (1/2, 1/3, 1/4, 1/5 E 1/10).
Proposta C: **Apresentar as frações 1/3 e 1/5 em uma reta numérica em que apareçam os números naturais 0 e 1 e explicar que, embora cinco seja maior que três, a fração 1/5 é menor que a fração 1/3, pois a distância entre o zero e 1/5 é menor que a distância entre o zero e 1/3.**

Fonte: Santos Filho (2015, p.57)

O pesquisador julgou correta para fins de trabalho de ordem. Um percentual 69% dos professores avaliaram corretamente no aspecto matemático, mas como nas questões anteriores, a justificativa pedagógica para utilização em sala de aula foi de apenas 6%.

Uma alta porcentagem dos professores (22%) disseram que a resposta estava errada, com alguns professores asseverando que 1/5>1/3.

O pesquisador traz um estudo pertinente a este erro, em que: "Estudantes que participaram da pesquisa de Nancy Mack (1993) apresentaram essa dificuldade quando compararam as frações 1/6 e 1/8, e responderam que 1/8 é maior que 1/6 porque 8 > 6." (SANTOS FILHO, 2015, p. 86).

A última questão relativa a esse tema encontra-se na figura 44:

Figura 44: proposta D, expectativa 4.2

EXPECTATIVA 4.2 DETERMINAR A POSIÇÃO APROXIMADA NA RETA NUMÉRICA, DE FRAÇÕES COM NUMERADOR UNITÁRIO (1/2, 1/3, 1/4, 1/5 E 1/10).
Proposta D: Explicar para criança, a partir da reta numérica na lousa, que o ponto que representa a fração 1/2 pode ser representado pelo número decimal 1,2, ou seja, a fração 1/2 estaria um pouco depois do número 2**.**

Fonte: Santos Filho (2015, p. 58)

Que notadamente é errada. Essa correspondência das frações com a representação decimal e sua posição na reta numérica mostrou-se problemática visto que apenas 55% dos professores assinalaram a alternativa que indicava que a questão estava errada. Uma quantidade relativa a 11% dos professores conseguiu justificar a alternativa, mobilizando um conhecimento matemático para o ensino.

O pesquisador traz alguns resultados de seu aporte teórico para interpretar os professores que julgaram a resposta correta:

> Conforme vimos na análise prévia, Merlini (2005) ao analisar as estratégias que resultavam em erro, verificou que estudantes da 5ª e 6ª séries representavam fração 1/5 com a notação 1,5. Estratégia também encontrada no estudo de Bianchini (2001) com alunos da 3ª série do Ensino Fundamental. Professores no estudo de Canova (2006) também representaram a fração 1/5 como 1,5. Assim, tudo indica que os sujeitos que julgaram a proposta correta

> (32%) interpretam a fração como dois números naturais sobrepostos separados por um traço e esse traço podendo ser representado por uma vírgula. (SANTOS FILHO, 2015, p. 88)

O autor conclui que, em geral, os conhecimentos dos professores acerca desta expectativa de aprendizagem são insuficientes para caracterizar um conhecimento matemático para o ensino.

A expectativa de aprendizagem 5.3 é iniciada com a seguinte questão representada na figura 45:

Figura 45: proposta A, expectativa 5.3

EXPECTATIVA 5.3: IDENTIFICAR E REPRESENTAR FRAÇÕES MENORES E MAIORES QUE A UNIDADE.
Proposta A: Representar na lousa, por meio de dois círculos de mesmo tamanho, duas pizzas. Dividir, cada uma, em três partes iguais e explicar para criança que quatro pedaços de 1/3 de pizza podem ser representados pela fração 4/3.

Fonte: Santos Filho (2015, p. 58)

Que é considerada pelo autor correta e adequada ao ensino. De todos os professores, 54% avaliaram corretamente a questão com apenas 7% demonstrando uma boa justificativa pedagógica. O alto índice (36%) de professores que julgaram a questão erroneamente ganhou um embasamento quando o pesquisador traz que:

> Uma das críticas de Escolano e Gairín (2005) em relação a se introduzir o conceito de fração a partir do significado parte-todo é esse modelo não contemplar as frações maiores que a unidade, o que fortalece a ideia de fração como dois números naturais separados por um traço. (SANTOS FILHO, 2015, p. 93)

A pesquisa traz, também, suporte em Merlini (2005) e Moutinho (2005) ao mencionar a tendência que professores e alunos têm em achar que as frações precisam ter denominadores maiores do que os numeradores.

Uma segunda questão levantada encontra-se na figura 46:

Figura 46: proposta B, expectativa 5.3

EXPECTATIVA 5.3: IDENTIFICAR E REPRESENTAR FRAÇÕES MENORES E MAIORES QUE A UNIDADE.
Proposta B: A partir da representação da reta numérica na lousa, explicar para a criança que a fração 5/4 encontra-se localizada entre os números um e dois, pois é um pouco maior que a unidade, marcando cinco pedaços iguais a um quarto.

Fonte: Santos Filho (2015, p.59)

Que é notadamente correta e adequada pedagogicamente. O índice de professores que acertaram a questão foi de 41%, em que nenhum conseguiu fazer uma boa justificativa.

O pesquisador, ao analisar o alto índice (38%) de respostas erradas, infere que o estudo focado apenas na relação parte-todo tende a fazer com que os alunos só enxerguem frações que representem números entre 0 e 1, assim, Campos et al. (1995); Merlini (2005); Canova (2006); Teixeira (2008); Rodrigues (2005) corroboram a inferência do autor ao trazerem que a escola privilegia essa interpretação da fração, e ainda que alunos se sentem mais familiarizados em relação a esta interpretação/subconstruto/relação das frações.

A terceira questão pertinente a essa expectativa de aprendizagem relaciona-se com o subconstruto quociente, localizada na figura 47:

Figura 47: proposta C, expectativa 5.3

EXPECTATIVA 5.3: IDENTIFICAR E REPRESENTAR FRAÇÕES MENORES E MAIORES QUE A UNIDADE.
Proposta C: Dizer para a criança que a fração 4/3, pode representar a divisão de quatro barras de chocolates igualmente entre três pessoas, em que cada uma ganha uma barra inteira mais um terço da barra que sobrou.

Fonte: Santos Filho (2015, p.60)

Temos que a questão é correta e adequada. Tem-se que 62% dos professores acertaram a questão, com apenas 1% demonstrando justificar de forma plausível.

A quarta e última questão levantada neste tópico foi a indicada na figura 48:

Figura 48: proposta D, expectativa 5.3

EXPECTATIVA 5.3: IDENTIFICAR E REPRESENTAR FRAÇÕES MENORES E MAIORES QUE A UNIDADE.
Proposta D: Representando três pizzas por meio de três círculos idênticos na lousa, explicar a criança que se dividíssemos as três pizzas para quatro pessoas nenhuma delas ganharia uma pizza inteira. Mas, pode-se dividir cada pizza em quartos, e cada pessoa ganharia três pedaços de um quarto, o que corresponderia a 3/4.

Fonte: Santos Filho (2015, p.60)

Essa questão é considerada correta e, segundo o autor, tem como objetivo fazer uma passagem da ideia parte-todo para a ideia de quociente. Um índice de 74% respondeu corretamente, mas apenas 1% conseguiu elaborar uma justificativa plausível. Aos professores que assinalaram erroneamente (10%), o pesquisador atribui que:

> É provável que esses sujeitos julgaram a proposta errada porque não compreendem a fração 3/4 como o quociente entre duas grandezas distintas (pizzas e pessoas), mas apenas como um inteiro dividido em quatro partes das quais foram consideradas três. (SANTOS FILHO, 2015, p. 100).

Em síntese, a pesquisa revela que os professores, em uma forma geral, apresentaram muita dificuldade no entendimento do conceito de frações maiores do que a unidade.

Em relação à expectativa de aprendizagem 5.4, a pesquisa se iniciou com a questão relatada na figura 49:

Figura 49: proposta A, expectativa 5.4

EXPECTATIVA 5.4: RELACIONAR FRAÇÕES EQUIVALENTES EM SITUAÇÃO CONTEXTUALIZADA.
Proposta A: Explicar para criança a equivalência das frações 1/2 e 2/4 a partir da seguinte situação: Tico e Teco ganharam uma barra de chocolate de mesmo tamanho; Tico comeu 1/2 de sua barra e Teco 2/4 da sua, apesar das frações 1/2 e 2/4 serem representadas por numerais diferentes, Tico e Teco comeram a mesma quantidade de chocolate.

Fonte: Santos Filho (2015, p.61)

Que corresponde a uma questão correta e didática. Segundo o autor, 69% dos professores avaliaram corretamente a questão com um índice de 5% de justificativas plausíveis.

O índice de 18% foi relativo aos professores que responderam erroneamente, o que para o autor, é um dado preocupante visto que é um problema clássico e elementar sobre equivalências de frações. O autor analisa esse fenômeno como uma dificuldade de estender o conceito fixo de número dos naturais para o de classe de equivalência, em que cada número passa a ter infinitas representações.

Uma segunda questão encontra-se na figura 50:

Figura 50: proposta B, expectativa 5.4

EXPECTATIVA 5.4: RELACIONAR FRAÇÕES EQUIVALENTES EM SITUAÇÃO CONTEXTUALIZADA.
Proposta B: Dizer para a criança que para obtermos frações equivalentes basta multiplicar o numerador e o denominador por um mesmo número diferente de zero.

Fonte: Santos Filho (2015, p.61)

Que é correta matematicamente, mas ineficaz como proposta pedagógica. Para o autor, 61% dos participantes avaliaram corretamente a questão, no entanto não houve nenhuma justificativa que mobilizasse o conhecimento matemático para o ensino. Um índice de 16% julgou incorreta a questão.

Para o autor, apoiado em Behr et al (1983), uma abordagem priorizada nos procedimentos em detrimento aos conceitos tendem a ter resultados insatisfatórios na aprendizagem de conceitos pertinentes aos números racionais.

Uma terceira proposta pertinente a essa expectativa de aprendizagem encontra-se na figura 51:

Figura 51: proposta C, expectativa 5.4

EXPECTATIVA 5.4: RELACIONAR FRAÇÕES EQUIVALENTES EM SITUAÇÃO CONTEXTUALIZADA.

Proposta C: Apresentar a criança a seguinte situação: Numa mesa há três jarras distintas A, B e C. Na jarra A temos suco de laranja com 1/5 de concentrado e 4/5 de água; na jarra B também suco de laranja com 1/5 de concentrado e 4/5 de água; se juntarmos os conteúdos das jarras A e B na Jarra C vamos obter suco de laranja com 2/5 de concentrado.

Fonte: Santos Filho (2015, p.62)

Que é considerada errada, pois a fração de suco concentrado permanece 1/5. Essa falsa interpretação se justifica pela característica intensiva da quantidade pertinente à questão, sendo que, para o autor, "Nunes et al. (2003) adverte que em situações de quantidades intensivas não é possível adicionar frações da mesma forma que em situações de quantidades extensivas" (SANTOS FILHO, 2015, p. 107)

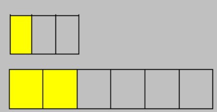
Em relação às respostas dos professores, 21% assinalaram que a resposta é errada, ou seja, assinalaram corretamente, no entanto apenas 3% soube oferecer uma justificativa.

A última proposta desta expectativa de aprendizagem encontra-se na figura 52:

Figura 52: proposta D, expectativa 5.4

EXPECTATIVA 5.4: RELACIONAR FRAÇÕES EQUIVALENTES EM SITUAÇÃO CONTEXTUALIZADA.

Proposta D: Tomando por base as figuras abaixo, explicar para a criança que as frações 1/3 e 2/6 são equivalentes.



Fonte: Santos Filho (2015, p.63)

Que é incorreta, pois o todo das figuras necessariamente precisa ser igual (em característica a ser avaliado – neste caso, área). Um índice de quase 75% avaliou que a proposta é correta.

O pesquisador infere que esse erro pode ser atribuído ao caráter procedimental que os professores possuem sobre equivalência de frações ("multiplique numerador e denominador pelo mesmo número") sem observar o conceito.

Para compreender melhor esse fenômeno, o pesquisador traz um resultado de Nunes et al (2003) levantando que "ao tratar de equivalência de frações em contexto de quantidades extensivas em situação de parte-todo, a classe de equivalência depende do tamanho do todo (ou da unidade)" (SANTOS FILHO, 2015, p. 110).

Assim, em síntese, os dados levantados desta bateria de questões se mostraram preocupantes em relação a noção de frações equivalentes, segundo o autor.

Para a última expectativa de aprendizagem, iniciou-se com a questão representada na figura 53:

Figura 53: proposta A, expectativa 5.5

EXPECTATIVA 5.5: COMPARAR E ORDENAR NÚMEROS NA REPRESENTAÇÃO DECIMAL, USADOS EM DIFERENTES CONTEXTOS.
Proposta A: Dizer à criança que o sucessor de 0,8 é 0,9; pois 9 é o sucessor de 8.

Fonte: Santos Filho (2015, p.63)

Que é considerada errada matematicamente visto que o conceito de sucessor só se aplica aos números inteiros, pois a densidade dos números racionais é baseada justamente na ideia de que sempre se pode encontrar um racional entre dois racionais quaisquer.

Um índice de 25% avaliou que a atividade é errada, no entanto nenhum dos participantes conseguiu mobilizar uma justificativa elaborada e que caracterizasse conhecimento matemático para o ensino. Uma avaliação da baixa porcentagem que conseguiram ao menos optar por errada é a de que provavelmente os professores "utilizam os critérios de ordenação de números naturais para os números decimais" (SANTOS FILHO, 2015, p. 114)

Uma segunda questão foi relatada na figura 54:

Figura 54: proposta B, expectativa 5.5

EXPECTATIVA 5.5: COMPARAR E ORDENAR NÚMEROS NA REPRESENTAÇÃO DECIMAL, USADOS EM DIFERENTES CONTEXTOS.
Proposta B: Dizer para criança que 1,198 é maior que 1,3; pois tem mais algarismos.

Fonte: Santos Filho (2015, p.64)

Que é errada, pois a quantidade de algarismos não é um critério que define a ordem entre dois números racionais, assim como se faz nos números naturais. Do grupo de professores, 21% avaliaram como correta essa questão, o que se mostrou preocupante. Para entender esse fenômeno, o autor traz estudos que se alinham com as respostas dadas, entre eles a de Brousseau (1980) que revelou uma inclinação por parte dos estudantes franceses ao estender as noções de números naturais para os decimais, ou seja, não conheciam o significado da vírgula.

A terceira questão encontra-se na figura 55:

Figura 55: proposta C, expectativa 5.5

EXPECTATIVA 5.5: COMPARAR E ORDENAR NÚMEROS NA REPRESENTAÇÃO DECIMAL, USADOS EM DIFERENTES CONTEXTOS.
Proposta C: Apresentar a seguinte situação: tico e teco, ao registrar suas alturas no quadro, escreveram: tico 1,30m; teco 1,3m; a partir dos registros explicar para as crianças, utilizando uma fita métrica, por exemplo, que tico e teco possuem a mesma altura, pois tanto 0,3 metro quanto 0,30 metro correspondem a 30 centímetros.

Fonte: Santos Filho (2015, p.64)

Que é correta e adequada ao ensino. Um índice de 60% avaliou como correta a proposta, no entanto apenas 4% conseguiram elaborar uma justificativa adequada. Em relação aos que optaram por ser uma questão errada (26%), o pesquisador infere que o erro pode ter dado ao enxergar a parte decimal como números naturais.

Uma última questão posta situa-se na figura 56:

Figura 56: proposta D, expectativa 5.5

EXPECTATIVA 5.5: COMPARAR E ORDENAR NÚMEROS NA REPRESENTAÇÃO DECIMAL, USADOS EM DIFERENTES CONTEXTOS.
Proposta D: Dizer à criança que R$ 0,10 (dez centavos) tanto equivale a dez centésimos do real, como a um décimo do real.

Fonte: Santos Filho (2015, p.65)

Que é considerada correta e adequada ao ensino. Um índice de 69% dos professores avaliou corretamente a questão, com 1% apenas conseguindo elaborar uma justificativa que designe um conhecimento matemático para o ensino. Um índice de 19% dos professores avaliou que a questão estava errada matematicamente. Para o pesquisador, os números evidenciados nessa expectativa de aprendizagem também se mostraram preocupantes pois, "os professores demonstram sobre ordenação e comparação de números decimais possíveis entraves que esses docentes apresentam quanto a compreensão de ideias associadas a esse conteúdo de Matemática." (SANTOS FILHO, 2015, p. 120)

2.4.2.3 Contribuições de Damico

A tese de Damico (2007) teve como um dos objetivos analisar os conhecimentos pedagógicos e matemáticos para o ensino de números racionais em alunos iniciantes e concluintes de um curso de licenciatura em matemática. O pesquisador utilizou o referencial de Shulman (1987) para análise dos conhecimentos desses alunos, sendo o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo - PCK, o domínio de foco adotado. Para esta pesquisa, é de grande interesse observar mais de perto os resultados encontrados por Damico (2007), visto que o autor faz análises ricas no desenvolvimento desses resultados. Assim, nos atentaremos aos dados mais brutos em detrimento dos resultados apresentados nas conclusões da pesquisa, visto que, o caráter qualitativo dos conhecimentos levantados pelo autor é que terão maior utilidade para este trabalho.

2.4.2.3.1 *Resultados Acerca dos Conceitos dos Números Racionais*

O pesquisador neste tópico pergunta aos participantes estudantes de graduação em licenciatura em Matemática iniciantes e aos concluintes "o que é número racional?" e obteve-se os resultados relatados na tabela 1:

Tabela 1: o conceito de número racional

	Apresentou a definição usual	Imagem aproximada do conceito	Concepção absolutamente errônea	Não respondeu
INICIANTES	04 (2,1%)	63 (33,3%)	84 (44,5%)	38 (20,1%)
CONCLUINTES	02 (1,5%)	82 (60,7%)	27 (20,0%)	24 (17,8%)

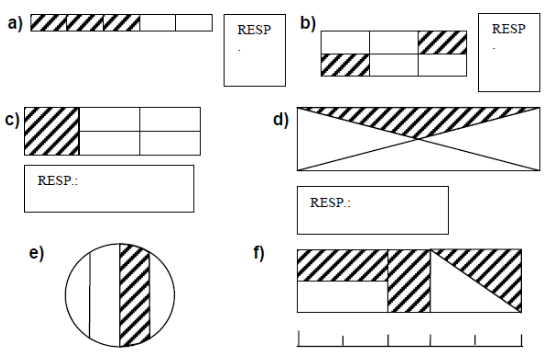
Fonte: Damico (2007, p.120)

O autor nota uma correlação muito próxima com os estudos de Pinto e Tall (1996) e traz que a intenção nessa pergunta era avaliar a *imagem conceitual* e não se o aluno saberia a definição de cor. Assim, é possível notar um alto índice de alunos (44,5%) iniciantes em que a concepção não estava nem perto da correta. Na outra ponta, os alunos concluintes mostraram um índice preocupante de acertos, pois somando os percentuais de quem errou e de quem não respondeu, tem-se que 37,8% dos alunos que estão para ser habilitados a lecionar não possuem o conhecimento correto da definição de números racionais. Uma definição boa foi dada por apenas 1,5% dos concluintes.

2.4.2.3.2 *Resultados Acerca do Subconstructo Parte-Todo*

Em relação a situações parte-todo, os participantes apresentaram quase que hegemonicamente erro em situações em que o todo não está dividido em partes equivalentes em área, como por exemplo no item e, na figura 57:

Figura 57: questão sobre parte-todo



Fonte: Damico (2007, p.126)

Ainda nos resultados gerais, o item f) mostrou um baixo índice de acerto por parte dos alunos concluintes (53,4%) mostrando que esse tipo de divisão do todo deve ser observado com mais atenção no ensino.

Os itens b) e c) foram usados com a intencionalidade de verificar a capacidade de estabelecer a equivalência das divisões (2/6 = 1/3) e 11 de 15 alunos entrevistados manifestaram essa habilidade.

Em relação aos erros, no item c) 11% dos iniciantes e 16% dos concluintes disseram que a fração era de 1/5, ignorando o fato de as partes terem de ser divididas de iguais áreas (ou o atributo que estiver em evidência). O mesmo ocorreu com parte dos alunos no item f) fazendo apenas a dupla contagem, mas não estabelecendo o critério das equivalências das medidas das áreas.

Outro ponto relacionado à equivalência das medidas de áreas (ou outro atributo) é quando no item d) parte dos participantes acertam ¼ mas não fazem menção à propriedade geométrica que garante a equivalência das partes. Nesse caso os alunos poderiam fazer o movimento de traçar duas perpendiculares sobre a figura de forma que fossem mediatrizes dos lados do retângulo, assim, transparecendo a congruência.

Para Damico (2017), uma das causas dessas não observações é o déficit dos alunos acerca do conceito de áreas.

O autor aponta um erro menos comum, que é associar o numerador a uma unidade inteira e o denominador quantidade de partes tomadas. Mostra-se um erro no processo de dupla contagem.

Outro ponto destacado é quando o aluno cria problema em que a soma das partes é maior do que o todo. Problemas envolvendo divisões de terreno, por exemplo.

2.4.2.3.3 *Resultados Acerca do Subconstructo Operador*

Para essa interpretação das frações, Damico (2007) traz que essa é uma interpretação em que há uma transformação envolvida. Assim, um número p/q transforma um número n da seguinte forma: p é o multiplicador (amplia) e que é o divisor (reduz).

Desta forma o autor analisa casos em que a fração opera em quantidades contínuas, discretas e não mencionadas. O autor inicia um problema em que o operador opera sobre a incógnita, ou seja, tem-se que p/q . x = a. Cerca de 75% dos alunos concluintes acertaram e o autor infere que o caráter algébrico pôde ter contribuído para esse índice, visto que se exige muito desse tipo de manipulação algébrica nos cursos de licenciatura.

Quando foi apresentado uma questão para circular uma fração de bolinhas dadas (em figura), cerca de 73% de ambos os grupos acertaram. A maior parte dos alunos resolveu aplicando uma transformação, tenho uma quantidade inicial, divido, multiplico e obtenho uma quantidade final (interpretação correspondente a de Ciscar e Garcia (1988)). Outra interpretação foi a de divisão equitativa das bolinhas em grupos iguais. Uma outra forma de pensar o problema foi quando o aluno multiplicou numerador e denominador pelo mesmo número, até que o denominador fosse igual a quantidade de bolinhas dadas, situação essa que se assemelha à parte-todo com quantidades discretas.

O autor ressalta que resolver um problema via diversos subconstrutos é uma opção didática rica e deve ser incentivada.

No que tange às questões elaboradas (por concluintes) em que não se aplica a nenhuma grandeza, ou seja, questões operacionais do tipo encontrar 2/3 de 60, teve, segundo o autor, um índice de criação de 7,4% das questões.

Os principais erros constatados nesse processo foram, segundo Damico (2007): a) não especifica a quantidade sobre o qual o operador deve incidir; b) Opera sobre um conjunto discreto como se fosse contínuo; c) opera frações como se fosse um número inteiro.

2.4.2.3.4 *Resultados Acerca do Subconstruto Quociente*

A fase de produção de questões pelos alunos concluintes da pesquisa de Damico (2007) evidenciou que 34% destes alunos elaboraram questões que trazem os números racionais como quocientes. O autor traz ainda que 46% dessas questões foram elaboradas sem nenhum contexto, ou seja, na forma "represente as frações na forma decimal". As outras produções tiveram pouca elaboração e baixa complexidade resultando, segundo infere o autor, em um baixo índice de erros nessas elaborações.

Na fase de resolução de questões propostas, pediu-se a todos os participantes para representar o número decimal correspondente à fração 2/7 (até a quinta casa decimal). Um índice importante trazido pelo autor é de que aproximadamente 20% dos concluintes erraram essa questão, o que se mostra um dado importante para o pesquisador visto que, "uma vez que a divisão de números inteiros é (ou pelo menos deveria ser) uma operação corriqueira para um professor de Matemática" (DAMICO, 2007, p. 149). Os erros mais frequentes, segundo o autor, foram: a) O aluno multiplica o dividendo por 10 e nada faz com o quociente; b) Os alunos acrescentam um zero ao resto e ao quociente em cada passo.

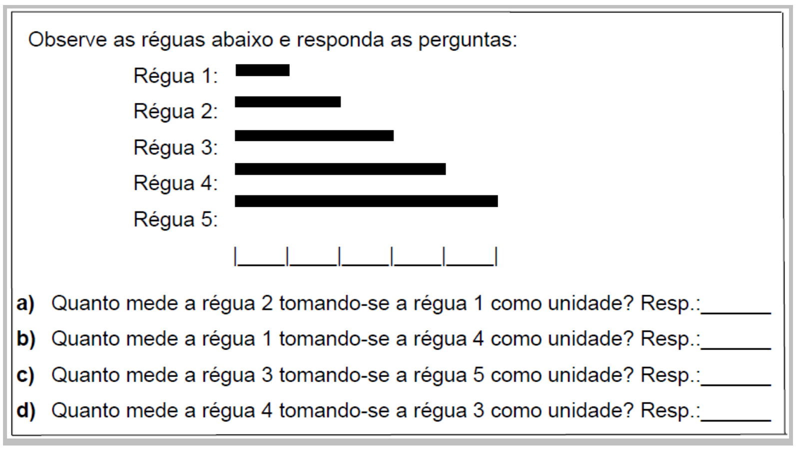
Um problema contextualizado foi proposto: "pretendemos dividir 5 barras de ouro idênticas entre 9 pessoas. Qual a porção (expressa em fração) destinada a cada pessoa? Explique seu raciocínio com auxílio de um desenho." (DAMICO, 2007, p. 152) Assim, obteve-se os índices de 41,6% dos iniciantes e 50,4 % dos concluintes que não apresentaram uma resolução satisfatória para esse problema.

As principais estratégias de quem acertou foram: a) O aluno divide cada barra em 9 partes iguais, e distribui grupos (ordenados) de 5 pedaços para cada pessoa; b) o aluno divide cada barra em 9 partes iguais e faz a distribuição equitativa das partes de cada barra (os primeiros pedaços de cada barra vão para uma pessoa, os segundos pedaços de cada barra para outra, etc); c) o aluno modifica a unidade: junta todas as barras como se fossem uma maior e a divide em 9 partes iguais. Damico (2007) faz uma orientação pertinente a respeito de que a fração precisa ser mencionada em relação ao seu todo, por exemplo, se dividirmos em 9 partes cada barra e as alinharmos distribuindo conjuntos de 5 para cada pessoa, estamos dando 5/9 de cada barra para a pessoa. Mas se juntarmos todas em uma só e a dividirmos por 9, teremos 1/9 do somatório das barras para cada pessoa; d) O aluno divide 5 barras ao meio, totalizando 10 pedaços. Distribui um para cada pessoa e o restante divide em 9 pedaços.

2.4.2.3.5 *Resultados Acerca do Subconstructo Medidas*

No contexto de criação de questões, obteve-se apenas 0,4 % das questões envolvendo esse subconstruto. Para o autor, “isto é uma evidência de que frações e medidas não são conceitos espontaneamente associados pelos alunos”. (DAMICO, 2007, p. 157). No momento que os alunos resolveram uma questão elaborada pelo pesquisador, o seguinte problema foi proposto (figura 58):

Figura 58: questão sobre medidas



Fonte: Damico (2007, p.158)

Os resultados mostraram uma dificuldade maior dos dois grupos em relação ao item d) e ainda, verificou-se que frações mistas não fazem parte do repertório dos estudantes, pois apenas 1,9% das questões abordaram desta forma.

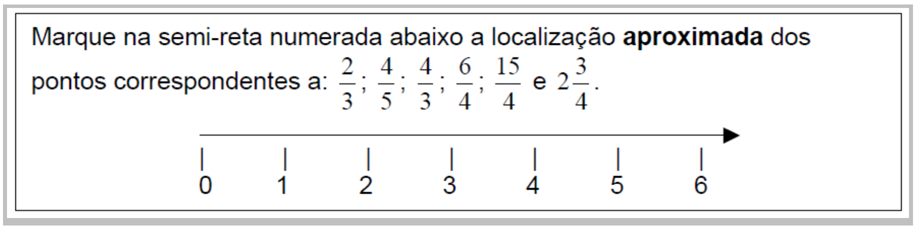
2.4.2.3.6 *Resultados Acerca do Subconstructo Coordenadas Lineares*

A inter-relação entre uma fração expressa por a/b (a e b inteiros e b diferente de zero) e seu ponto na reta numerada é também objeto de estudo de Damico (2007). Segundo o autor, pesquisas (NOVILLIS, 1980; BEHR, LESH, POST e SILVER, 1983) mostram que há uma potencialidade didática nesta interpretação e que, para Damico (2007) a possibilidade de se trabalhar com a reta numérica pode ser frutífera para "propiciar o entendimento da relação de ordem entre os racionais ou, também, no trabalho com frações impróprias ou mistas e, até mesmo, como auxiliar no entendimento das operações e medidas" (DAMICO, 2007, p. 162)

A respeito deste conceito, Damico (2007) analisou as concepções espontâneas nas questões criadas pelos alunos concluintes e as concepções dos alunos acerca de localização de frações (próprias, impróprias e mistas).

Assim, o autor traz que esse subconstruto teve menor incidência nas questões trazidas pelos alunos concluintes (0,2%), e para avaliar as concepções dos conceitos o autor propôs a questão relatada na figura 59:

Figura 59: questão sobre coordenadas lineares



Fonte: Damico (2007, p.164)

E, desta forma, Damico (2007) apresenta que em geral 75% de todos os alunos (concluintes e iniciantes) resolveram corretamente as questões com exceção à última fração mista em que parte dos alunos (13,3%) confundiram a parte inteira com um fator, ou seja, fizeram a operação 2 . 3/4.

A estratégia mais utilizada, segundo o autor, foi transformar as frações em números decimais, nas frações próprias e impróprias, e na mista os alunos que conseguiram em sua maioria a transformaram em fração imprópria e depois transformaram em decimais. Dois casos levantados pelo autor mostram erros de alunos causados pela interpretação de parte-todo da reta numérica, que segundo o autor, corrobora com a pesquisa de Novillis (1980) que constatou:

> a associação de frações com pontos sobre a reta era significativamente mais fácil quando apenas eram consideradas frações próprias para serem localizadas em segmentos unitários [0,1]. Os pesquisadores também observaram que, quando a reta numérica era apresentada com duas unidades, quase 25% dos alunos da amostra usaram o segmento [0,2] como o "todo" ou a unidade. (DAMICO, 2007, p. 167)

Sendo, assim, que um dos erros foi de relacionar 2/3 com 2,3.

2.4.3.3.7 *Análise do conhecimento matemático conceitual e processual, em relação às operações básicas de futuros professores*

Para Damico (2007), é imprescindível que o professor tenha um conhecimento especializado sobre os conteúdos matemáticos para efetivar o ensino, para isto, alguns tópicos sobre conceitos e processos envolvendo operações básicas com números racionais foram levantados. A primeira foi acerca da adição de frações com denominadores diferentes, em que perguntou-se (figura 60):

Figura 60: Questão sobre adição de frações

Por que ao efetuarmos a adição ou subtração de frações com denominadores diferentes nós, normalmente, encontramos o MMC dos denominadores?

Fonte: Damico (2007, p.172)

Damico (2007) traz que uma das maneiras de transposição didática efetiva desta regra é a utilização de frações equivalentes, como visto anteriormente em Kieren (1976). Para o autor, 3,7% dos alunos iniciantes e 11,8% dos alunos concluintes elaboraram uma justificativa pertinente matematicamente e pedagogicamente e, num agrupamento de alunos que apresentaram concepções erradas ou confusas ou que não responderam chegaram a 45,4% para os iniciantes e 44,4% para os concluintes.

Uma outra questão proposta aos alunos encontra-se relatada na figura 61:

Figura 61: transposição didática de adição de frações

Você deseja explicar a operação ½ + 2/3 para uma classe de ensino fundamental. Como você pode fazer isto utilizando desenhos como, por exemplo, barras de chocolate?

Fonte: Damico (2007, p. 180)

Foi evidenciado que 7,4% dos alunos iniciantes e 17% dos alunos concluintes conseguiram interpretar corretamente. No entanto 77,8% dos alunos iniciantes e 63,7% dos concluintes não conseguiram elaborar a resposta da questão.

Outra concepção avaliada por Damico (2007) foi a de multiplicação de frações, relatada na figura 62:

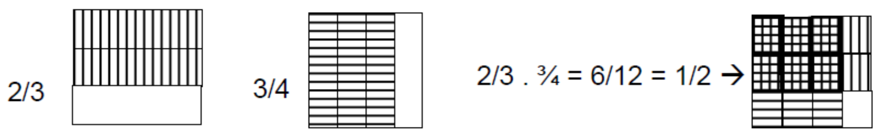
Figura 62: transposição didática de multiplicação de frações

Da mesma forma que na questão anterior, utilize recursos geométricos para explicar a operação: $\frac{2}{3}.\frac{3}{4}$.

Fonte: Damico (2007, p. 190)

Em que apenas um aluno iniciante (0,5%) e 5 concluintes (3,7%) conseguiram elaborar um esquema para a questão. Damico (2007) traz uma das resoluções e evidencia como alternativa potencialmente didática, que consiste na sobreposição de figuras divididas na ideia parte-todo, horizontalmente e verticalmente, representadas na figura 63:

Figura 63: multiplicação de frações usando malhas



Fonte: adaptado de Damico (2007, p. 192)

Outra concepção avaliada pelo autor foi de divisão de frações, sendo que para avaliar o conhecimento dos alunos referente ao significado do quociente e sua relação com o dividendo, fez-se a pergunta relatada na figura 64:

Figura 64: significado de divisão de frações

Ao dividirmos 2 por ½, encontramos como resposta 4.

a) Explique o que significa o resultado 4.
b) Por que o resultado (4) deu maior que o dividendo.

Fonte: Damico (2007, p.198)

Observou-se um índice de 24,9% e 30,4% de explicação convincente para respectivamente iniciantes e concluintes referentes ao item a. Sobre o item b, obteve-se 14,8% e 18,5% nos mesmos grupos respectivos. Dos alunos que obtiveram êxito na explicação, Damico (2007) expõe que alguns utilizaram a ideia de particionamento, ou seja, interpretaram como a soma 1/2+1/2+1/2+1/2, já outros utilizaram a ideia de medida questionando quantas vezes ½ cabe em 2. Ainda no que tange à divisão de frações, Damico (2007) avaliou os alunos sobre a concepção geométrica da operação (figura 65):

Figura 65: transposição didática de divisão de frações

Explique a operação 3/4 : 1/8 utilizando barras de chocolate.

Fonte: Damico (2007, p. 205)

O autor sugere que essa interpretação pode ser modulada geometricamente como transcrição da pergunta "quantas vezes 1/8 cabem em 3/4?" (DAMICO, 2007, p. 206). A partir deste olhar, constatou-se que 3,2% dos iniciantes e 4,4% dos concluintes conseguiram elaborar uma justificativa como essa.

A pesquisa ainda traz um questionamento para os alunos sobre um possível algoritmo alternativo em que, para dividir duas frações a/b por c/d, pode-se fazer a:c/b:d, que é matematicamente correto, mas pouco difundido nos meios educacionais. A grande maioria dos alunos respondeu que é incorreto matematicamente trazendo que o algoritmo correto é o da inversão de frações, assim, o autor evidencia uma visão sincrética da matemática por parte desses alunos.

2.4.2.4 Contribuições de Marques

A pesquisa de Marques (2018) teve objetivo muito similar à pesquisa de Damico (2007), que é avaliar os conhecimentos de estudantes do curso de licenciatura em matemática e matriculados na disciplina de Estágio Supervisionado no IFTO – Campus Paraíso, acerca do aspecto da estrutura matemática, do conhecimento pedagógico bem como do conhecimento curricular referente ao ensino de números racionais.

Como referencial teórico, a autora utilizou o modelo MKT de Ball, Thames e Phelps (2008), mais especificamente, o Conhecimento Comum do Conteúdo, Conhecimento Especializado de Conteúdo, Conhecimento de Conteúdo e Estudantes e Conhecimento de Conteúdo e Ensino e, no âmbito do currículo, o Conhecimento Curricular de Shulman (1987).

A pesquisadora avalia inicialmente o conhecimento sobre a definição de números racionais, obtendo que, de forma geral, os alunos possuem um conhecimento de definição formal que se aproxima muito com a correta matematicamente. No entanto, ao questionar sobre diversas representações e sobre números serem ou não racionais, os alunos tiveram bastante confusão, apesar de ter em mente a definição correta. Na figura 66, encontra-se outro questionário sobre diferentes representações:

Figura 66: questões sobre conceito de números racionais

- 47/71 não é racional porque não há padrão no decimal 0,661971830985.

E1: Acho que é racional, eu não ouvi falar em padrões para ser racional.
E2: É racional pois não existem infinitos números.
E3: Ele é uma forma racional, a parte decimal é uma representação. Se há ou não uma padronização não irá deixar de ser racional.
E4: Pela definição de número racional, 47/71 está no formato de a/b. Ele é racional, tendo sua representação decimal padrão ou não.
E5: É racional porque essa divisão tem resultado.

- 47/71 é racional porque ele termina (a calculadora mostra 0,661971830985).

E1: Não pela calculadora. Para fazer esses cálculos sem o uso da calculadora, demora. Então, considero os dois números após a vírgula.
E2: Não sei explicar, nem entender.
E3: Ele é racional, mas não pelo motivo que ele termina. Mesmo sendo uma dízima, ele continua sendo racional.
E4: Ele é racional pelo formato em que ele está escrito e não pela quantidade de dígitos.
E5: É racional não porque ele termina, mas porque é possível obter resultado dessa divisão.

- 47/71 pode ser racional ou irracional – eu não posso ver se os dígitos irão se repetir porque muito poucos dígitos são mostrados na calculadora. Eles podem se repetir ou não.

E1: Pode ser racional, pode.
E2: Sim, eles podem se repetir, assim como podem ser infinitos.
E3: Falso. 47/71 é um número racional, pois a divisão resulta em 0,66197183...
E4: Pode ser racional! Eles podem se repetir, pois serão dízimas periódicas.
E5: Ele é racional mesmo podendo repetir dígitos ou não.

- Não há forma de dizer se 47/71 é racional – exceto se você realmente fizer a divisão que pode seguir indefinidamente. Os dígitos poderiam terminar em um milhão de casas decimais ou eles poderiam começar a repetir depois da milionésima casa.

E1: Ele é racional, pois ele pode terminar em muitas casas, então podemos considerar 2 ou 3 após a vírgula.
E2: Sim, pois necessitaria de uma calculadora, o que nem sempre é permitido.
E3: Não consegui compreender. Fiquei em dúvida.
E4: Não é necessário realizar a divisão para identificar que 47/71 é racional.
E5: Verdade.

- É possível que um número seja racional e irracional ao mesmo tempo. Por exemplo, há frações que têm casas decimais infinitas e não periódicas, mesmo que elas sejam representadas por a/b.

E1: Pode, pois o conjunto dos números racionais está contido nos irracionais.
E2: Não, pois causaria confusões, não teria como simplificá-los ou até mesmo expressar valores ou representações.
E3: Não é possível. São conjuntos distintos.
E4: Não. Ou é racional, ou é irracional.
E5: Não é possível.

Fonte: Marques (2018, p. 118)

Assim, evidenciando que os alunos possuem muita dificuldade de entender diferentes representações podem ser atribuídas a um mesmo número, segundo a autora.

Em uma outra questão, a pesquisadora propôs a avaliar os conhecimentos dos alunos acerca do registro numérico, sendo a questão uma solicitação para registrar os números que estão por extenso em escrita com algarismos na forma decimal e as respostas estão representadas na figura 67:

Figura 67: questão sobre registro dos números racionais

	E1	**E2**	**E3**	**E4**	**E5**
a) Vinte e três milésimos	0,0023	0,0023	0,023	0,023	0,0023
b) Vinte e cinco décimos	0,25	0,25	0,25	2,5	0,25
c) Sete inteiros e dois centésimos	7,02	7, 2	7,02	7,2	7,02
d) Dezoito inteiros e duzentos e nove milésimos	18,0209	18,209	18,000209	18,209	18,00209
e) Dez inteiros e um centésimo	10,001	10,1	10,01	10,01	10,01
f) Quinze inteiros e cinquenta e três centésimos	15,053	15,53	15,053	15,53	15,053
g) Vinte e cinco centésimos	0,025	0,025	0,025	0,25	0,025
h) Doze inteiros e vinte e cinco milésimos	12,0025	12,25	12,00025	12,025	12,0025

Fonte: Marques (2018, p.121)

É possível notar uma dificuldade por parte de alguns alunos em fazer o registro bem como estabelecer as relações de equivalência entre décimos, centésimos, etc, conforme Marques (2018) constata:

> De modo geral, as respostas dos estudantes revelam dificuldades na capacidade de registro de números decimais com algarismos a partir da escrita por extenso. Também fica evidente que os estudantes não compreendem as relações de equivalências entre as ordens da parte decimal de um número. Ou seja, os estudantes não demonstram compreender que 10 décimos correspondem a 1 inteiro, 10 centésimos correspondem a 1 décimo, 10 milésimos correspondem a 1 centésimo, 100 milésimos correspondem a 10 centésimos e a 1 décimo e assim sucessivamente. (MARQUES, 2018, p. 123)

Em outra questão pertinente a de equivalência de números decimais, ao ser questionado da validade de 0,5 = 0,50, um dos alunos menciona ser falso, mas usando o termo centésimo ao se referir ao segundo número. A pesquisadora traz um dado importante ao mencionar que na oralidade do número decimal, falar os algarismos um a um ao invés de usar temos como décimos, centésimos, ajudam a ofuscar os significados e equivalências embutidas no número. No entanto, pelo fato de o aluno ter utilizado o termo correto, essa correlação não pôde ser feita.

Entre este e outros itens abordados nesta questão, evidenciou-se uma dificuldade de correspondência entre os termos décimos e centésimos, representando assim, erroneamente alguns números.

Outro ponto levantado foi o do erro conceitual de todos considerarem que há sucessor nos números racionais. Para a pesquisadora:

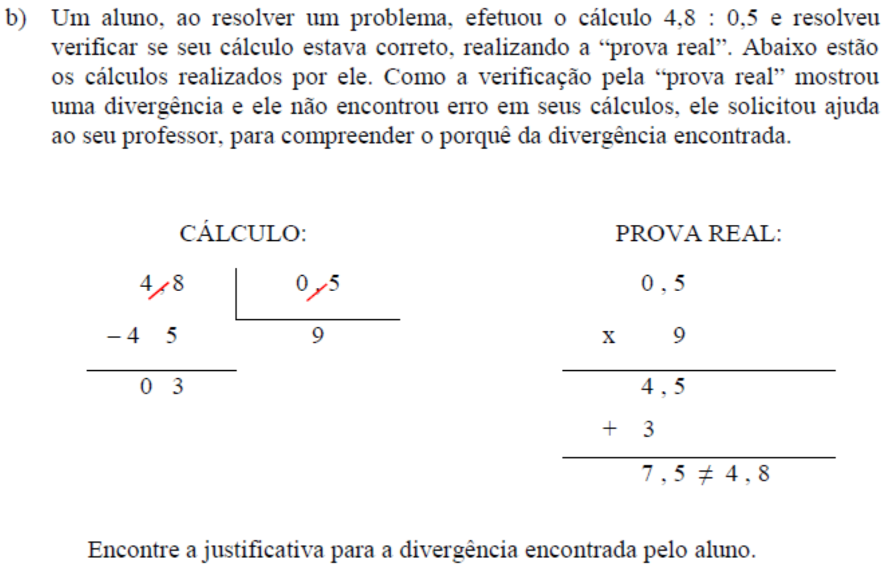
> A forma como os estudantes leem os números representados na forma decimal está intimamente ligada à forma como eles interpretam e atribuem significado a tais números. Foi observada, a partir da análise desses itens em conjunto com a questão analisada anteriormente, que há uma lacuna nos conhecimentos dos estudantes sobre a leitura/escrita de números decimais. (MARQUES, 2018, p. 127).

Adiante, perguntou-se aos alunos a respeito da densidade dos números racionais, mais especificamente trazendo a idéia de sucessor, obtendo-se resultados preocupantes pois em grande parte os alunos atribuíram o conceito de sucessor como verdadeiro para os racionais, assim Marques (2015) após análise das respostas infere que os alunos não têm uma *imagem conceitual* sólida da densidade dos números racionais, pois repetiram erros comuns aos que os alunos normalmente cometem.

A pesquisadora também se propôs a investigar os conhecimentos dos alunos acerca dos cálculos matemáticos e, num primeiro momento, questionando-os de como explicar a regra de colocação da vírgula no produto de dois fatores decimais. Nenhum dos alunos conseguiu elaborar uma justificativa plausível, o que revela uma memorização de uma regra, um procedimento sem sentido.

No mesmo âmbito, um outro item (figura 68) abordava esse caráter procedimental de uma divisão de números decimais (no dividendo e no divisor):

Figura 68: questão acerca dos cálculos matemáticos


b) Um aluno, ao resolver um problema, efetuou o cálculo 4,8 : 0,5 e resolveu verificar se seu cálculo estava correto, realizando a "prova real". Abaixo estão os cálculos realizados por ele. Como a verificação pela "prova real" mostrou uma divergência e ele não encontrou erro em seus cálculos, ele solicitou ajuda ao seu professor, para compreender o porquê da divergência encontrada.

Encontre a justificativa para a divergência encontrada pelo aluno.

Fonte: Marques (2018, p.135)

Três dos cinco alunos justificaram que se o aluno continuasse a divisão não teria esse problema, o que não justifica o erro conceitual na prova real ao considerar o resto como 3 unidades ao invés de 3 décimos.

Ainda neste item, a pesquisadora propõe a questão representada na figura 69:

Figura 69: questão sobre procedimento de cálculo de divisão de números racionais

c) Uma professora propôs a seguinte divisão para o seu aluno: 6,12 : 1,8. Abaixo está o cálculo feito pelo aluno, passo a passo. Justifique o procedimento utilizado em cada passo.

PASSOS	PROCEDIMENTO	JUSTIFICATIVA
PASSO 1	6 , 12 | 1 , 80	
PASSO 2	6~~,~~ 12 | 1~~,~~ 80	
PASSO 3	612 | 180 – 540 3 72	
PASSO 4	612 | 180 – 540 3, 720	
PASSO 5	612 | 180 – 540 3,4 720 – 720 000	

Fonte: Marques (2018, p. 139)

Em que os cinco estudantes da pesquisa se limitaram a apenas descrever os procedimentos.

Pode-se fazer uma avaliação qualitativa desta questão, que não foi abordada pela pesquisadora, no entanto se mostra relevante para este trabalho. Apesar da resolução fazer uso da validação de um procedimento, vale ressaltar que a mesma conta pode ser feita sem muitas dificuldades na representação em que os números são dados, ou seja, utilizando a vírgula.

Um possível desenvolvimento seria:

1°) quantas vezes 1,8 cabe em 6,1 (ao considerar apenas 6,1, ocorre a decomposição: 6,1 + 0,02)? Chegando a 3 unidades vezes 1,8 = 5,4, restando 0,7.

2°) a 0,7 soma-se 0,02 que não fora utilizado na divisão inicial, resultando 0,72;

3°) quantas vezes 1,8 cabe em 0,72? Notadamente é sabido que nenhuma unidade, pois trata-se do resto e que a unidade já fora utilizada, assim, deve ser uma quantidade de vezes menor que a unidade, ou seja, uma fração de 1,8 que cabe em 0,72.

Partindo daí, põe-se a vírgula no quociente para separar a parte inteira da decimal, e refaz-se a pergunta: 1,8 vezes quantos décimos cabem em 0,72? Tem-se que é 0,4 e não resta nada.

Assim, pode-se notar que “eliminar” a vírgula pode obscurecer as justificativas inerentes aos procedimentos de contas nesse formato.

2.4.2.5 Contribuições de Rogeri

A pesquisa de Rogeri (2015) teve como objetivo avaliar os conhecimentos de 18 professores dos Anos Iniciais acerca dos números racionais, mais especificamente em sua representação decimal, bem como a elaboração de uma formação para esses professores que possibilitasse a ampliação dessa base de conhecimentos.

Para esta dissertação, os resultados de Rogeri (2015) acerca dos conhecimentos iniciais dos professores é que terá maior relevância.

A pesquisadora utilizou como aporte teórico a base de conhecimento MKT, de Ball e seus colaboradores (2008), para a categorização dos conhecimentos dos professores evidenciados na pesquisa.

A autora faz uma categorização prévia dos conhecimentos relativos aos números decimais à luz dos subdomínios do MKT, mostrados no quadro 4:

Quadro 4: Associação entre conteúdos de números decimais e domínios de conhecimento

Domínio dos conhecimentos para o ensino de Matemática	Exemplos de conhecimento para o ensino de números decimais
Conhecimento comum do conteúdo	Saber que número decimal é uma forma de representação de fração decimal; que 0,5 = 0,50; 0,4 > 0,32 e $\frac{1}{8} \neq 1,8$.
Conhecimento especializado do conteúdo	Compreender propriedades do sistema de numeração decimal. Esse conhecimento pode contribuir para sua utilização, pelo professor, em situações em que o aluno afirma que 0,4 < 0,32. Compreender que a igualdade entre 0,5 e 0,50 pode ser uma fonte de erro e que o aluno, ao compreender a extensão do SND para os números decimais, pode solucionar seus equívocos. Antecipar que a igualdade: $\frac{1}{8}=1,8$ pode ser uma resposta comum de alunos e identificar possíveis causas para esse tipo de erro.
Conhecimento horizontal do conteúdo	Compreender a estrutura do SND e sua extensão para os números decimais para estabelecer e utilizar as relações existentes entre diferentes unidades de medida e saber transformá-las.
Conhecimento de conteúdo e de alunos	Reconhecer que durante a aprendizagem dos números decimais aparecem erros, tais como: na comparação, na leitura, nas operações, nas relações entre representação decimal e fracionária E que esses erros podem ser decorrentes da utilização de propriedades dos números naturais, aprendidas anteriormente. Reconhecer que a compreensão da estrutura do SND, pelo aluno, auxilia sua compreensão do que é um número decimal. Reconhecer que a aprendizagem dos números racionais depende também das reflexões sobre diferentes representações e significados, não apenas da ideia parte-todo.
Conhecimento de conteúdo e de ensino	Elaborar e organizar situações em que são exploradas diferentes representações dos números racionais para que o aluno compreenda esse conceito e suas propriedades. Analisar e selecionar diferentes estratégias e recursos associados ao ensino de números decimais, tais como representações de reta numérica, exploração de ábacos, quadro valor de lugar, representações em figuras planas.

Fonte: Rogeri (2015, p.59-60)

Assim, a fase diagnóstica da pesquisa se inicia com um questionamento sobre o conceito de número racional perguntando-lhes o que é um número racional. Desta forma, obteve-se um primeiro panorama:

- Três professores entendem como sinônimo de fração. Correlacionaram com o sentido parte-todo em forma contínua. A autora traz que em Tirosh, Fischbein, Graeber e Wilson (1998) também houve essa predominância.
- Um professor associou com equivalência de frações.

- Outro professor associou ao símbolo de radiciação. Para a autora o professor "pode ter se apoiado em suposições, como aquelas descritas pelos resultados da pesquisa realizada por Corbo (2012), de que professores associam a palavra *racional* à palavra *raiz,* deixando transparecer fragilidades relacionadas à definição de número racional" (ROGERI, 2015, p. 134)
- Outros três associaram à contextos de medidas. Um deles separou inteiros de racionais.
- Outro grupo de 4 professores associaram predominantemente a frações em sentido parte-todo.
- Um professor tenta definir informalmente conceituando-os como sendo os que usamos no dia-a-dia.
- Outro professor define como sendo os números fracionários unido aos números decimais unidos às dízimas periódicas (o único que citou dízimas)
- Cinco professores dão respostas obscuras ao conceito de racionais e os atribuem ao uso de contagem. (que são, exclusivos e definidores apenas dos naturais).

Outra questão foi solicitada para avaliar os conhecimentos dos professores, perguntando se cada número proposto era ou não racional. Os números e as respostas encontram-se no quadro 5:

Quadro 5: Síntese do número de respostas dos professores ao item 4 do instrumento diagnóstico

Número	Racional	Não racional	Em branco	Não sabe
5	6	9	3	-
0,5	18	-	-	-
$\frac{3}{4}$	18	-	-	-
0,77	18	-	-	-
0,55555555....	16	-	2	
2,1112131415....	11	3	3	1

Fonte: Rogeri (2015, p.141)

Rogeri (2015) infere que na primeira linha os professores provavelmente não enxergam a inclusão de conjuntos numéricos e, na sexta, possivelmente pensam que pelo fato de o número ter vírgula, é racional, não compreendendo a existência de que existem números irracionais.

Uma questão sobre ordenação e comparação de números decimais foi proposta, contendo no quadro 6 perguntas e respostas:

Quadro 6: Síntese do número de respostas dos professores ao item 5 do instrumento diagnóstico

Afirmação	Verdadeira	Falsa
0,4 e 0,40 são iguais.	6	12
0,33 e 0,333... são iguais	8	10
$\frac{1}{8}$ é igual a 1,8	11	7
O sucessor do nº 5,4 é o nº 5,5	18	-----

Fonte: Rogeri (2015, p.142)

Para análise desses resultados que trazem números preocupantes, Rogeri (2015) traz resultados de Stacey, Moloney e Steinle (2001), que mostram que os alunos parecem pensar na vírgula apenas como algo que separa dois números naturais, assim, na primeira linha alguns professores podem ter pensando na parte decimal como $4<40$, logo $0,4<0,40$.

No que concerne à terceira linha, a pesquisadora infere que os professores pensam que “simplesmente, o traço da fração pode ser *trocado* pela vírgula”, o que revela um baixo conhecimento da estrutura matemática do sistema de numeração decimal e os significados de seus símbolos.

A questão pertinente ao sucessor teve 100% de respostas erradas, o que vem a confirmar a dificuldade trazida nos estudos de Marques (2018), em que o professor transfere a ideia de sucessor para os racionais, não compreendendo, assim, a ideia de densidade relativa a este conjunto. Ainda relativamente à densidade, fez-se a pergunta da figura 70:

Figura 70: Questão relativa à densidade dos números racionais

Existe um número maior que 0,5 e menor que 0,6?

Se a resposta for positiva, escreva esse número.

Fonte: Rogeri (2015, p. 143)

Nove professores disseram que sim, cinco professores disseram que não e quatro deixaram em branco. A pesquisadora faz a análise:

> Se observarmos que os dezoito professores responderam afirmativamente à pergunta anterior (o sucessor de 5,4 é 5,5) e agora parte desse total afirmou que existe um número entre 0,5 e 0,6, percebemos contradições na possibilidade de existência de outros números entre dois números decimais, *aparentemente próximos* na visão de alguns professores. Isso reafirma as nossas conjecturas de que muitos professores têm dúvidas a respeito do

> significado de número racional e se apoiam em propriedades dos números naturais na tentativa de compreender esse *novo* campo numérico. (ROGERI, 2015, p. 114)

Assim, Rogeri (2015) constata que os professores possuem conhecimentos difusos acerca dos números racionais, pois não conseguem ter certeza sobre o que há entre um número e outro. Uma próxima questão é dada para avaliar os conhecimentos de ordenação de números decimais (figura 71):

Figura 71: questão sobre ordem dos números racionais

Escreva em ordem crescente os números apresentados em cada uma das tirinhas a seguir::

a)	1,5	0,25	0,4	0,75	1,25	0,004	0,125
b)	0,3	0,15	0,99	0,77	0,999	0,9	0,10

Fonte: Rogeri (2015, p.145)

Em síntese, na tirinha (a) houve 12 erros e na (b), 15. Esses números se mostram preocupantes e a autora traz algumas possibilidades de leitura da relação de ordem por parte dos professores sendo, i) partes inteiras iguais, considero maior o que possui mais algarismos decimais (extensão dos naturais); ii) considero o que possui mais algarismos decimais como menor.

Para a pesquisadora, os professores participantes da pesquisa fazem uma transferência automática das propriedades dos números naturais para os números decimais.

De forma geral, os erros mais comuns foram:

- Quanto mais algarismos, maior o número
- Décimos sempre maiores que centésimos;
- Utilização da sequência de números naturais;

No que concerne à leitura e escrita de números decimais, Rogeri (2015) apresentou uma questão em que os professores deveriam transformar a escrita por extenso de cada número para sua representação com algarismos. Assim, têm-se o resumo dos resultados no quadro 7:

Quadro 7: Síntese do número de respostas dos professores do item 8 do instrumento diagnóstico

Escrita por extenso	Correta nº decimal	Correta fração decimal	Errada
Sete inteiros e nove centésimos	13	---	5
Quinze inteiros e cinquenta e três centésimos	12	---	6
Vinte e cinco milésimos	11	1	6
Dezoito inteiros e duzentos e nove milésimos	10	---	8
Dez inteiros e um centésimo	12	---	6
Vinte e cinco décimos	5	3	10
Vinte e cinco centésimos	8	2	8
Quatorze inteiros e setenta e cinco milésimos	12	---	6

Fonte: Rogeri (2015, p.149)

Um dos professores escreve 18. 0,209, ou seja, como 18 e 0,209 separados. A pesquisadora traz as ideias de Lerner e Sadovsky (1996) para analisar:

> [...]a escrita numérica é o resultado de uma correspondência com a numeração falada conduz as crianças à utilização de notações não convencionais, pois a diferença entre a numeração escrita e a numeração falada está em que esta última não é posicional. A numeração falada, justaposição de palavras, supõe sempre uma operação. Em seu artigo as autoras citam o seguinte exemplo: mil e quatro significa (1000 + 4).” (ROGERI, 2015, p. 152)

E conclui, assim, que os professores estão com defasagem do conhecimento do conteúdo específico em relação a conceitos dos racionais.

Assim, finaliza-se o capítulo referente ao referencial teórico que objetivou, primeiramente, trazer os conhecimentos sobre os fundamentos matemáticos, cognitivos e instrucionais dos números racionais das pesquisas pioneiras de Kieren (1976, 1980) e, em seguida, trazer os conhecimentos especializados sobre o ensino dos números racionais que professores e alunos de licenciatura possuem, sendo elas Souza (2015), Santos Filho (2015), Damico (2007), Marques (2018) e esta atual, Rogeri (2015), todas utilizando a mesma linhagem teórica, ou seja, o modelo PCK de Shulman (1986, 1987) ou o MKT de Ball, Thames e Phelps (2008).

3. METODOLOGIA

A presente pesquisa faz uso de uma metodologia qualitativa de natureza documental que, segundo Gil (2002):

> […] assemelha-se muito à pesquisa bibliográfica. A diferença essencial entre ambas está na natureza das fontes. Enquanto a pesquisa bibliográfica se utiliza fundamentalmente das contribuições dos diversos autores sobre determinado assunto, a pesquisa documental vale-se de materiais que não recebem ainda um tratamento analítico, ou que ainda podem ser re-elaborados de acordo com os objetos da pesquisa. (GIL, 2002, p.5)

Assim, as opções didáticas dos autores dos livros didáticos foram analisadas de acordo com a base de conhecimentos relativos ao processo ensino aprendizagem dos números racionais que compõem o referencial teórico. A localização dos dados levantados nas obras que foram analisadas se deram à luz do modelo MTSK, de Carrillo et al (2013, 2018), ou seja, uma vez categorizados os conhecimentos na base de conhecimentos, estes serviram como dupla face na avaliação das exposições didáticas nos livros, sendo uma face a do conhecimento em si (localização do conceito em relação ao referencial - conceitualização), e a outra do subdomínio do MTSK atrelado (categorização do conceito em relação ao modelo).

A conceituação dos conhecimentos utilizando o MTSK é uma abordagem metodológica (RIBEIRO et al, 2016), sendo que para este trabalho serão considerados todos os subdomínios do MTSK, pois entende-se (RIBEIRO, 2018) que estes devem ser observados por suas interdependências.

Essa metodologia para análise de dados pautada no conhecimento especializado do professor que ensina matemática é baseada em quatro focos de análise que podem ser interligados, sendo eles, "(a) análise de livros didáticos; (b) a prática do professor; (c) problemáticas recorrentes identificadas na pesquisa; (d) conhecimento, raciocínio e representações dos alunos." (RIBEIRO, 2018, p. 174). O foco deste trabalho será, então, o item (a).

As análises foram realizadas fazendo uso de categorias de análises *a priori,* ou seja, para cada subdomínio do modelo MTSK foram observadas categorias que os constituem (CARRILO *et. al.*, 2016). O subdomínio KMLS e as Crenças não foram observadas neste trabalho.

No subdomínio KoT observou-se as categorias "definições e imagens de um conceito", "fenomenológico", "significados associados", "formas de registros e representações" e "relações intraconceituais".

Para o subdomínio KSM foram observadas as categorias “relações de simplificação e complexificação”, “conexões auxiliares”, “conexões transversais” e “conexões temporais”.

Já para o KPM, foram consideradas as categorias “uso dos símbolos”, “modos de validação” e “modos de proceder em Matemática”.

No subdomínio KMT, foram observadas as categorias “formas de apresentar o conteúdo - potencial de aprendizagem”, “analogias - exemplos potencializadores” e “recurso/material pedagógico associado”.

Para o subdomínio KFLM, observou-se as categorias “dificuldades dos alunos”, “teoria psicológica associada ao aprendizado do conteúdo”, “erros de aprendizagens mais comuns” e “antecipação de um possível erro do aprendizado”.

Assim, a conceituação das opções didáticas no MTSK foi dada pela análise dos conhecimentos apresentados nos livros comparando-os com a base de conhecimentos de ensino aprendizagem sobre os números racionais levantados no referencial.

Um exemplo da dinâmica das análises pode ser encontrado na sequência didática situada no livro Araribá Mais Matemática, que traz diversas situações em que as frações podem se encontrar. O livro traz duas formas diferentes de resolver um mesmo problema, uma através do subconstruto operador em situação discreta, outra de razão como proporção e, ainda, implicitamente uma terceira, como classes de equivalências. Assim, buscando no referencial teórico, temos em Damico (2007) e Kieren (1976) que é enriquecedor fazer inter-relações com os subconstrutos, ainda mais na resolução de um mesmo problema, situando, assim, essa sequência didática como evidência de conhecimento da categoria KFLM (teoria psicológica associada ao aprendizado do conteúdo) e KMT (formas de apresentar o conteúdo - potencial de aprendizagem) pois há correspondência com o que se recomenda nos referenciais relacionados. Além desta categorização, há a conceituação da teoria relacionada, pois o livro não faz a indicação dos subconstrutos usados nesta situação, no entanto, os conceitos foram identificados na análise desta dissertação.

4. ANÁLISE DOS LIVROS

Neste capítulo encontram-se as análises dos dois livros didáticos voltados ao público do 6º ano do Ensino Fundamental de 9 anos, sendo eles, nesta ordem de análise, o Araribá Mais Matemática (EDITORA MODERNA, 2018) e Teláris Matemática (DANTE, 2018).

4.1.TÓPICOS DO LIVRO ARARIBÁ MAIS MATEMÁTICA

As análises feitas nas subseções subsequentes serão referentes ao livro-texto Araribá Mais Matemática, da editora Moderna.

4.1.1.O conceito de Números Racionais

O livro deliberadamente não apresenta o termo "números racionais". De acordo com Marques (2018) e Damico (2007), a definição de números racionais já não é tão clara até mesmo para os professores, logo, essa omissão caracteriza-se por uma lacuna no KoT (conceitos – definições e imagens de um conceito) e no KFLM (Dificuldades dos alunos).

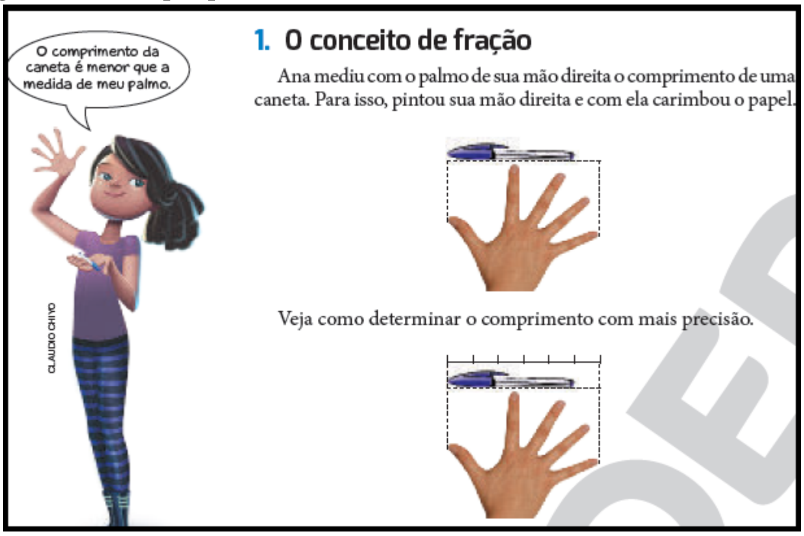
4.1.2.O conceito de fração

O livro apresenta o conceito de fração trazendo uma situação em que se pretende medir o comprimento de uma caneta utilizando a medida de comprimento do palmo da mão como unidade de medida.

O exemplo inicial utilizado recai em uma fração própria, pois a unidade de medida utilizada (medida de comprimento do palmo) é maior do que a medida do comprimento da caneta (a ser medido), isso faz com que a medida do comprimento da caneta seja 5/6 da medida do comprimento do palmo da mão.

A partir daí, o livro define fração relacionando "numerador" com as partes consideradas do palmo e "denominador" com o total de partes em que o palmo foi dividido, conforme figura 72:

Figura 72: exemplo para introduzir o conceito de frações no livro Araribá



Fonte: Editora Moderna (2018, p. 119)

Deste conceito inicial, nota-se um vínculo com frações próprias, que segundo Santos Filho (2015), professores tendem a achar que todas as frações precisam ter numeradores menores do que denominadores. Assim, o exemplo não traz uma vivência inicial que propicie o rompimento desta barreira, sendo uma lacuna no KMT (formas de apresentar o conteúdo – potencial de aprendizagem) e no KFLM (dificuldades dos alunos).

Por outro lado, trazer o subconstruto medidas como primeiro exemplo pode enriquecer o significado de frações, pois segundo Damico (2007), alunos de licenciatura não costumam elaborar problemas acerca deste significado, havendo evidências de que não associam frações com medidas e, ainda, eles têm dificuldade em fazer a medição quando a unidade não é divisor do comprimento medido, e que pelo exemplo notamos transcender essa limitação, tornando uma opção didática que evidencia o aparecimento do KMT (formas de apresentar o conteúdo – potencial de aprendizagem) e KoT (fenomenológico e significados associados).

Além disso, há uma recomendação nas notas de rodapé para que o professor estimule os alunos a fazer outras medições similares (não padronizadas), fazendo estimativas. Nota-se, assim, uma outra vantagem nesta primeira abordagem por medidas pois, segundo Kieren (1976), esse subconstruto privilegia o entendimento de divisão arbitrária da unidade de medida para que “dê certo” a adição de frações, ou seja, o movimento posterior para encontrar um denominador comum acaba se tornando mais familiar, sendo uma manifestação do subdomínio KSM (visão sequencial).

Ainda nos exemplos iniciais, o autor traz dois exemplos do subconstruto parte-todo em que uma situação é contínua e outra discreta. Essas duas outras situações iniciais são do tipo estado-estado (KIEREN, 1976), formando uma lacuna das bases da formação dos conceitos de par ordenado e equivalência, pois não se encontra as outras três situações necessárias levantadas por Kieren (1976), a saber: estado-operador, operador-estado e operador-operador, revelando um déficit no KFLM (teoria psicológica associada ao aprendizado do conteúdo). Ainda sobre esses dois exemplos que objetivam levantar o conceito de fração, Santos Filho (2015) traz que problemas do tipo parte-todo que são do tipo que associam numerador com partes pintadas e denominadores com partes totais tendem a levar alunos a entender os números que compõe a fração como números naturais isolados, revelando uma lacuna no KFLM (dificuldades dos alunos).

Em seguida, o livro traz o tópico de leitura de frações seguido de cinco questões a respeito, sendo todas elas de frações elementares já trabalhadas em anos anteriores: um meio, três quartos, um oitavo, dois oitavos e cinco oitavos. Assim, o livro não compreende as frações decimais tampouco frações com denominadores maiores do que 10, para praticar uso dos termos: décimos, centésimos, etc. e avos, respectivamente. Essa lacuna é relevante ser destacada pois, segundo Kieren (1976), identificar a pronúncia verbal e os símbolos usados para representar os números (palavras como "um terço" e algarismos para formar os números) é uma das fases iniciais que a criança deve desenvolver para assimilar os conceitos de par ordenado e equivalência, pilares da construção do número racional, para o autor. Sendo assim, constata-se uma lacuna no subdomínio KFLM (teoria psicológica associada ao aprendizado do conteúdo).

Adiante, os autores trazem sete situações como exemplos dos significados das frações, no entanto não as formalizam associando com os nomes dos significados/subconstrutos (nem na parte do aluno, nem na parte do professor), apenas as cita como situações diversas. Essa abordagem desprivilegia a organização do raciocínio dos números racionais com diferentes significados pois não se atrela uma categoria (palavra) àquele tipo de situação, podendo dificultar a classificação das diferentes situações pelo aluno, evidenciando uma lacuna no KoT (conceitos – significados associados). Na situação 1 (figura 73), interpretamos ser um exemplo de caracterização da fração como operador (em situação discreta):

Figura 73: situação 1 do livro Araribá

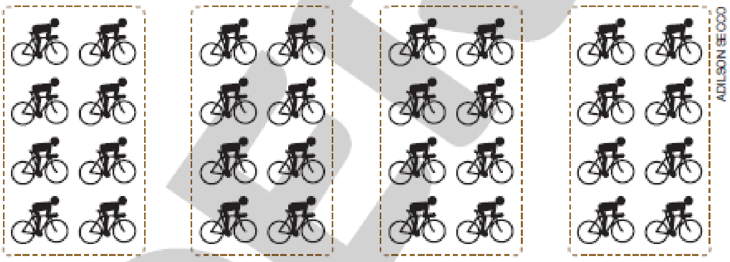
Situação 1

Em um torneio feminino de *mountain bike*, $\frac{1}{4}$ das 32 ciclistas inscritas foi classificado para a prova final. Quantas ciclistas se classificaram?

Para responder a essa pergunta, podemos pensar assim:

- 32 ciclistas correspondem a 1 inteiro;
- $\frac{1}{4}$ corresponde à quarta parte do inteiro, ou seja, à quarta parte de 32.

Dividindo as 32 ciclistas em 4 grupos com a mesma quantidade, temos:



Na prática, para determinar a quarta parte de 32, podemos calcular o resultado da divisão 32 : 4.

$$32 : 4 = 8$$

Então, 8 ciclistas foram classificadas.

Fonte: Editora Moderna (2018, p.122)

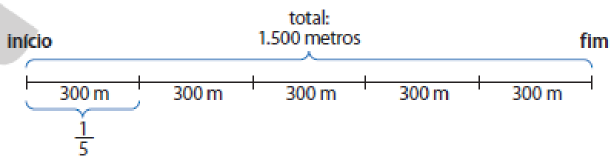
Na situação 2 (figura 74) temos um exemplo de caracterização de fração como operador (em situação contínua, ou seja, de medida):

Figura 74: Situação 2 do livro Araribá

Situação 2

O circuito de certa prova de *mountain bike* tem 1.500 metros. Após percorrer $\frac{1}{5}$ do trajeto, a partir do início, encontra-se o obstáculo mais difícil do circuito. A quantos metros do início está esse obstáculo?

Nesse caso, podemos fazer o esquema a seguir.



Logo, o obstáculo mais difícil do circuito está a 300 metros do início.

Fonte: Editora Moderna (2018, p.122)

Na situação 3 (figura 75), pela escolha do contexto e das palavras, pode-se interpretar que os autores quiseram trazer o subconstruto razão, mas tem-se mais características do parte-todo (situação discreta).

Figura 75: Situação 3 do livro Araribá

Situação 3

Hugo acertou 7 das 12 questões de uma prova de Matemática. Qual foi o desempenho de Hugo nessa prova?

Podemos representar seu desempenho comparando a quantidade de questões que ele acertou com a quantidade total de questões da prova. Escrevemos assim:

$$\frac{7}{12}$$

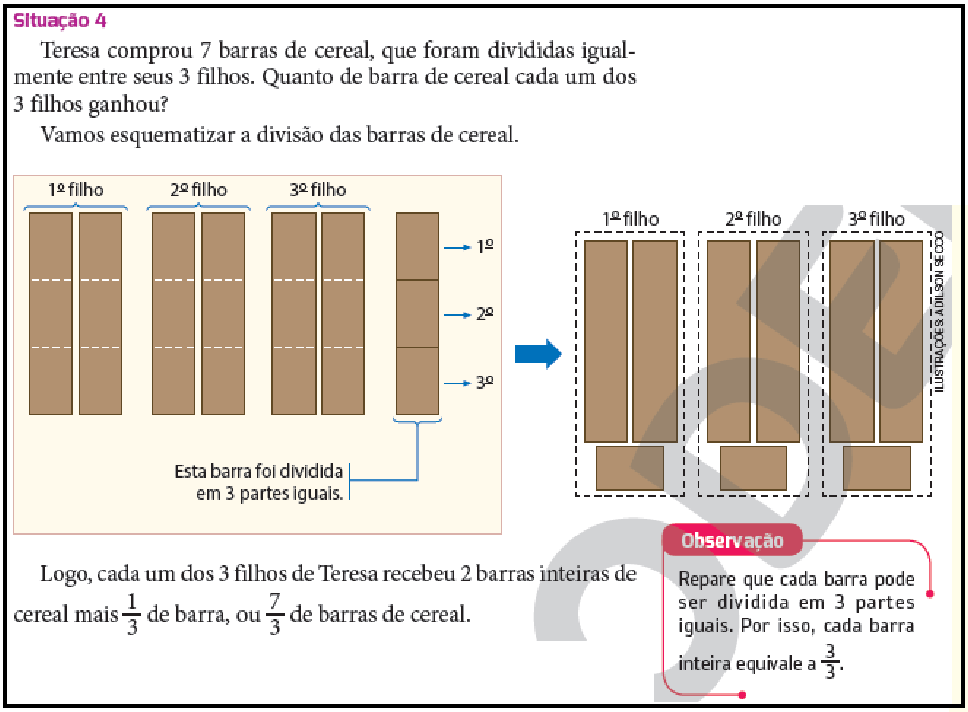
7 ← quantidade de questões que Hugo acertou
12 ← total de questões

Ou seja, Hugo acertou $\frac{7}{12}$ das questões da prova.

Fonte: Editora Moderna (2018, p.123)

Na situação 4 (figura 76), temos um exemplo de caracterização da fração como quociente:

Figura 76: Situação 4 do livro Araribá



Situação 4

Teresa comprou 7 barras de cereal, que foram divididas igualmente entre seus 3 filhos. Quanto de barra de cereal cada um dos 3 filhos ganhou?

Vamos esquematizar a divisão das barras de cereal.

Logo, cada um dos 3 filhos de Teresa recebeu 2 barras inteiras de cereal mais $\frac{1}{3}$ de barra, ou $\frac{7}{3}$ de barras de cereal.

Observação

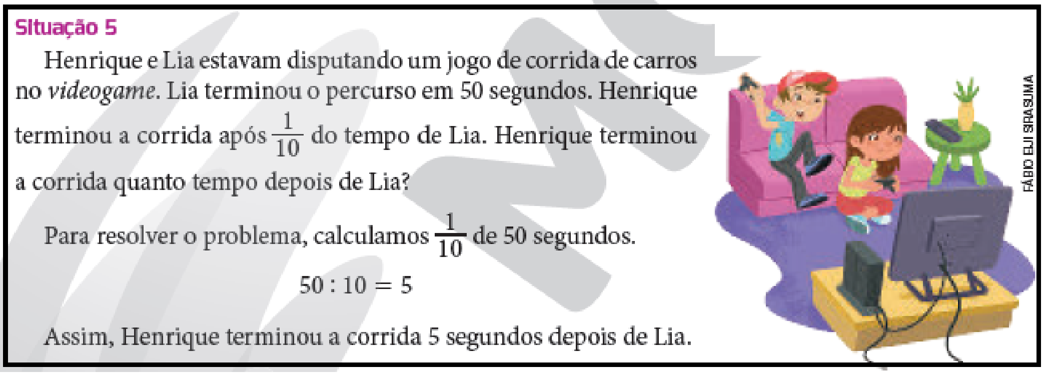
Repare que cada barra pode ser dividida em 3 partes iguais. Por isso, cada barra inteira equivale a $\frac{3}{3}$.

Fonte: Editora Moderna (2018, p.123)

Vale lembrar que em Damico (2007), vários alunos de licenciatura resolveram uma questão similar, com cerca de 50% dos participantes dando uma resposta insatisfatória. Esse tipo de problema foi resolvido por quatro estratégias diferentes, o que enriquece pedagogicamente o problema. No entanto, no livro analisado, apenas uma abordagem foi feita. Uma observação pertinente a essa situação é a escolha das representações pictóricas, apresentadas de uma maneira em que é possível notar uma movimentação. Isso revela um KoT (formas de registros e representações).

Na situação 5 (figura 77), temos novamente um exemplo de caracterização da fração como operador (situação contínua):

Figura 77: Situação 5 do livro Araribá



Situação 5

Henrique e Lia estavam disputando um jogo de corrida de carros no *videogame*. Lia terminou o percurso em 50 segundos. Henrique terminou a corrida após $\frac{1}{10}$ do tempo de Lia. Henrique terminou a corrida quanto tempo depois de Lia?

Para resolver o problema, calculamos $\frac{1}{10}$ de 50 segundos.

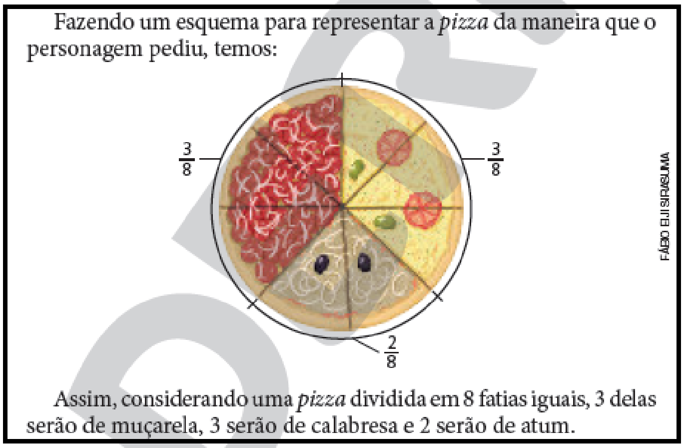
$$50 : 10 = 5$$

Assim, Henrique terminou a corrida 5 segundos depois de Lia.

Fonte: Editora Moderna (2018, p.123)

Das cinco situações apresentadas, três delas envolveram o subconstruto operador mas nenhuma delas traz situações de ampliação ou redução de figuras, opção recomendada por Kieren (1976), revelando uma lacuna em seu KFLM (teoria psicológica associada ao aprendizado do conteúdo) e no KMT (formas de apresentar o conteúdo – potencial de aprendizagem). Na situação 6 (figura 78), temos uma situação parte-todo em que personagens de uma tirinha resolvem pedir uma pizza com três sabores diferentes:

Figura 78: Situação 6 do livro Araribá



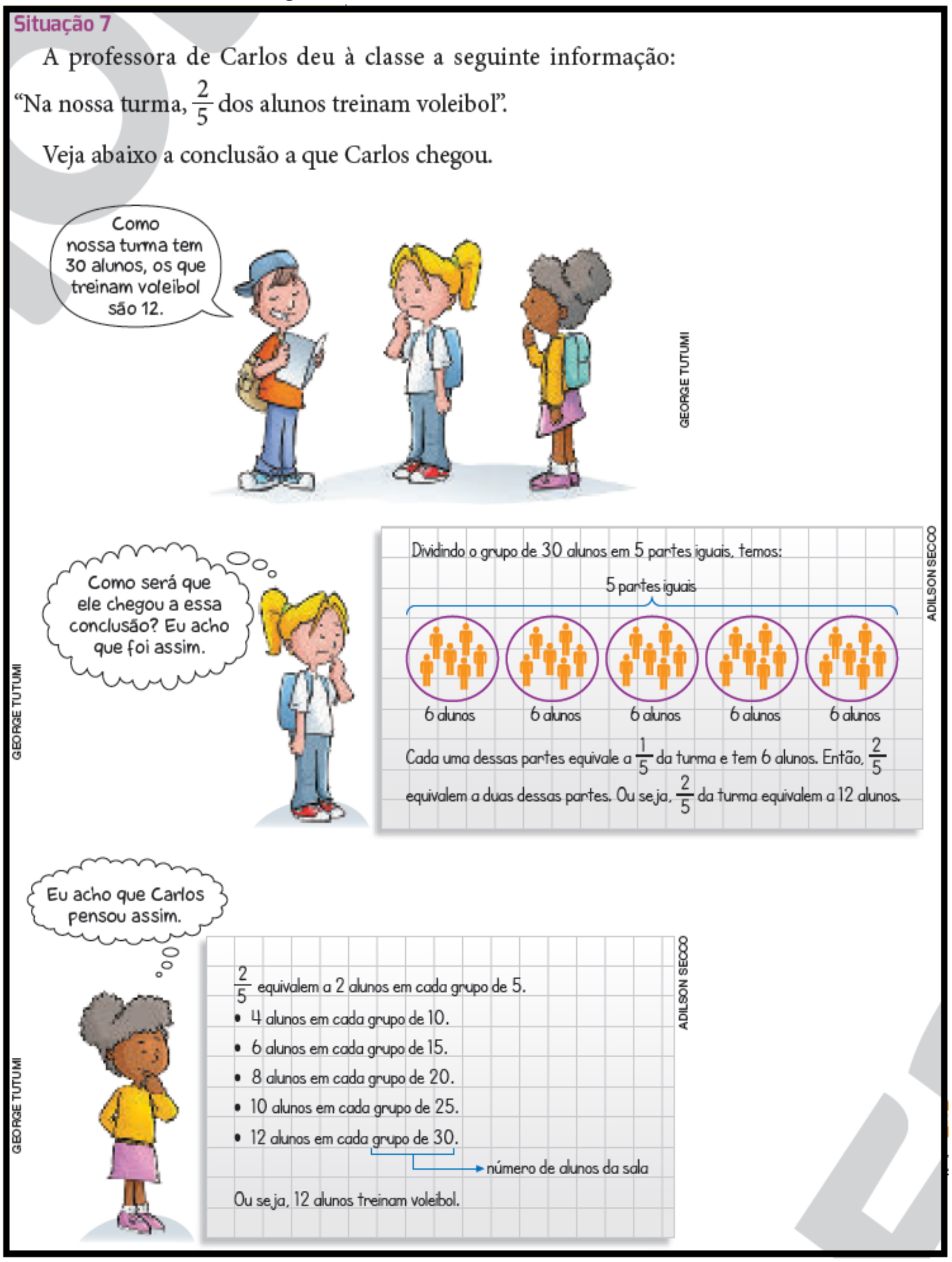
Fazendo um esquema para representar a *pizza* da maneira que o personagem pediu, temos:

Assim, considerando uma *pizza* dividida em 8 fatias iguais, 3 delas serão de muçarela, 3 serão de calabresa e 2 serão de atum.

Fonte: Editora Moderna (2018, p.124)

O que foge um pouco a realidade (KoT - fenomenológico) pois normalmente usamos apenas a fração "um meio" para dividir pizzas em sabores diferentes. Para essa forma usada no livro, seria mais próximo a uma situação real transformar o pedaço em unidade de medida e pedir a quantidade indicada de pedaços. Ainda neste exemplo, a nota de rodapé incentiva o professor a indagar seus alunos se caso a pizza fosse dividida ao meio para duas pessoas, como ficariam as quantidades de pedaços de cada sabor que cada um receberia, atrelando a questão ao subconstruto quociente. Na última situação (figura 79), pode-se identificar o subconstruto razão, quando observado apenas a informação entre as aspas.

Figura 79: Situação 7 do livro Araribá



Fonte: Araribá (2018, p.124)

No entanto, o autor traz duas soluções diferentes a partir de uma segunda informação: a de que há 30 alunos na sala. Assim, no primeiro exemplo, há o uso do subconstruto operador em situação discreta. Já na segunda situação temos o uso do subconstruto razão sendo usado como proporção e, ainda, há também a caracterização implícita de classes de equivalências (KIEREN, 1976).

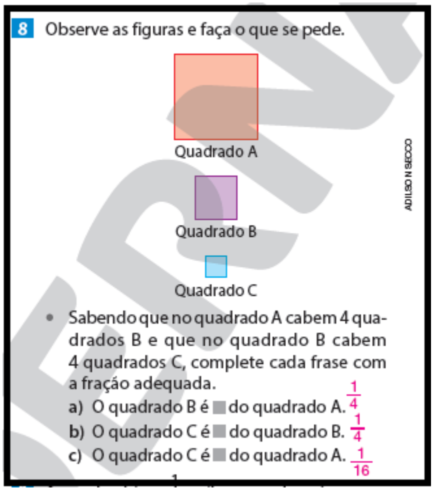
Neste sentido, no conteúdo da figura 79, identifica-se a presença de KFLM (teoria psicológica associada ao aprendizado do conteúdo) e do KMT (formas de apresentar o conteúdo – potencial de aprendizagem). De acordo com Damico (2007), resolver o mesmo problema usando subconstrutos diferentes é enriquecedor e, ainda, para os racionais “os subconstrutos formam uma base suficiente para um funcionamento maduro, ao passo que cada um individualmente não o faz” (KIEREN, 1980, p.137).

A seguir, 10 questões são propostas, sendo 6 situações relacionadas ao subconstruto operador (5 discretos e 1 contínuo), 3 situações relacionadas com medidas e 1 situação associada à razão.

Sobre esses números, nota-se um foco desproporcional ao subconstruto operador, assim como observado nos exemplos iniciais, revelando uma lacuna no KoT (conceitos – significados associados), pois privilegia uma interpretação ao invés de um foco num conglomerado (KIEREN, 1976).

Cabe ressaltar que a questão 8 (figura 80) possui um potencial de aprendizagem relacionado ao subconstruto medidas, sendo uma variação de uma das atividades recomendadas por Kieren (1976), podendo-se identificar, portanto, a presença de KFLM (teoria psicológica associada ao aprendizado do conteúdo) e do KMT (formas de apresentar o conteúdo – potencial de aprendizagem).

Figura 80: questão proposta potencializadora



Fonte: Editora Moderna (2018, p. 126)

Tal tarefa poderia ganhar mais potencialidade ao ser trabalhada com peças de Tangram, pois a mesma estrutura da tarefa proposta pode ser ampliada usando figuras com medidas de áreas múltiplas mas de natureza diferentes, situação proporcionada pelo recurso pedagógico Tangram e trazida em forma de proposta didática em Souza (1997).

4.1.3. Representação por números mistos

A representação pictórica utilizada para exemplificar os números mistos viabiliza o entendimento da representação simbólica, revelando um KoT (formas de registros e representações) e, além disso, traz uma aplicação importante, que é o uso em canos e outras situações que são medidas em polegadas, revelando um KoT (fenomenológico).

No entanto, o livro apenas cita brevemente que existem frações com numeradores maiores do que denominadores, não aprofundando o significado destas situações. Para Santos Filho (2015), até mesmo professores têm dificuldades em reconhecer a existência de frações impróprias.

Além disso, não há nenhuma questão proposta para o aluno vivenciar esse tipo de representação (e suas transformações) revelando uma lacuna no KMT (formas de apresentar o conteúdo – potencial de aprendizagem) e no KFLM (dificuldades dos alunos e erros de aprendizagens mais comuns). Damico (2007) alerta que alunos de licenciatura não possuem familiaridade com frações mistas, tendo tendências a interpretar a parte inteira como um fator.

4.1.4. Frações Equivalentes

O tópico é explanado com representações que privilegiam o aprendizado, sendo intuitivas e diversificadas, revelando um KoT (formas de registros e representações) e sobretudo no KFLM (erros de aprendizagens mais comuns), pois na pesquisa de Santos Filho (2015), os professores (18% na pesquisa) tiveram dificuldades de enxergar frações equivalentes usando representações pictóricas.

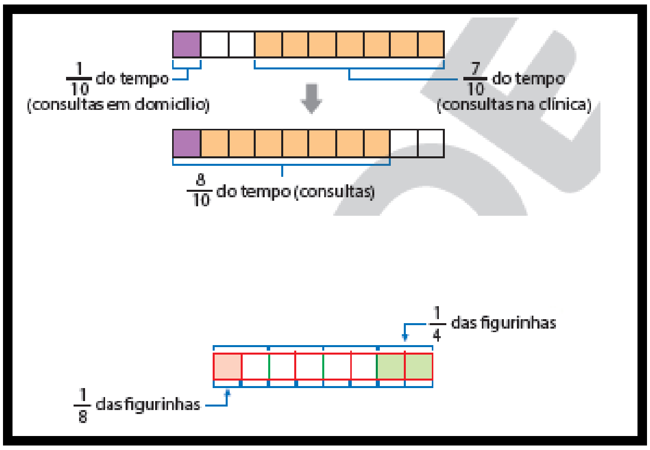
4.1.5. Comparação de Frações

As representações pictóricas encontradas neste tópico viabilizam o acesso ao objeto matemático em questão, caracterizando um KoT (formas de registros e representações). O tópico é estruturado em três situações: comparações com denominadores iguais, com numeradores iguais e com numeradores e denominadores diferentes. Nas três situações enfatiza-se que as figuras (frações) a serem comparadas representam o mesmo inteiro, revelando um KFLM (erros de aprendizagens mais comuns), pois segundo Santos Filho (2015), professores tendem a não compreender que na comparação de frações (na pesquisa, para verificar frações equivalentes) o todo deve ter o mesmo tamanho. Além disso, as explicações ganham uma tonalidade de simplificação para a complexificação em cada uma das situações, revelando um KSM (relações simplificação e complexificação) e um KFLM (erros de aprendizagens mais comuns), contribuindo para a superação do erro de aprendizagem identificado em Santos Filho (2015), em que professores julgaram que 1/3<1/5 porque 3<5.

4.1.6. Adição e subtração de frações

O livro apresenta uma sequência didática que parte de situações com denominadores iguais e depois diferentes, sendo que para ambos os casos são trazidas situações-problema para direcionar a explicação (relacionados à fração de tempo e à fração de figurinhas). Para as duas situações diferentes o livro utilizou representações pictóricas similares, juntadas na figura 81:

Figura 81: representações pictóricas de duas situações de adição de frações



Fonte: Adaptação de Editora Moderna (2018, p.137)

Essa escolha mostra-se adequada ao nível de abstração dos alunos nessa faixa etária (entrando no operatório formal, de Piaget (1995)), pois não é diretamente ligada ao objeto de estudo em questão (não representou desenho das “figurinhas” e nem “do tempo”) nem deixaram de ser representadas, isso revela um KFLM (teorias de aprendizagens) pois segundo Kieren (1976), a conceituação deve estar equilibrada com definições que se aproximem do pensamento natural da criança conforme seu estágio de desenvolvimento.

Outro conhecimento especializado que o livro revela é a indicação ao professor de um possível erro por parte dos alunos: 1/2+1/2=2/4. Como proposta para contornar essa possível situação, há a indicação ao professor para provocar os alunos a simplificar 2/4 para ½, mostrando a anomalia que acontece. Esse conhecimento revela um KFLM (erros de aprendizagens mais comuns) e um KPM (modos de validação e demonstração).

Na situação em que os denominadores são diferentes, a generalização final é apoiada na dinâmica de encontrar frações equivalentes com mesmo denominador com o uso de representações pictóricas, revelando KFLM (teoria psicológica associada ao aprendizado do conteúdo), pois para Kieren (1976) o particionamento equitativo e arbitrário de figuras potencializa o entendimento da adição de frações, revelando, também, KSM (conexões auxiliares).

Essa sequência didática que faz uso da interpretação de classes de equivalências, revela também um KFLM (erros de aprendizagens mais comuns) e um KMT (formas de apresentar o conteúdo – potencial de aprendizagem), pois não está claro para alunos de licenciatura como adicionar frações com denominadores diferentes, muito menos enxergam o problema visualmente (DAMICO, 2007) e ainda, para Souza (2015), os professores têm dificuldades em desvincular o ensino do tópico com o cálculo do mínimo múltiplo comum ao planejarem suas aulas.

4.1.7. Multiplicação de Frações

Na multiplicação de frações o livro traz duas situações, sendo a primeira a de calcular o produto de um natural por uma fração e a segunda, de uma fração por uma fração.

Na primeira situação o livro apresenta uma situação-problema bem natural em que se pretende guardar restos de pedaços de pizzas em uma única embalagem, mostrando um KoT (fenomenológico). Para resolver tal questão, faz uso da definição de multiplicação por somas de parcelas iguais, revelando KPM (modos de validação) e KSM (conexões auxiliares).

Já na configuração de produto de duas frações, o livro evidencia conhecimentos especializados em sua escolha didática, pois traz a multiplicação como uma composição de funções, sendo uma recomendação de Kieren (1976), evidenciando, assim, um KFLM (teoria psicológica associada ao aprendizado do conteúdo) e KMT (formas de apresentar o conteúdo – potencial de aprendizagem). Além disso, o livro propõe a estratégia de fazer a representação de um inteiro a partir de um retângulo, representar horizontalmente a primeira operação, e verticalmente a segunda, sendo essa opção uma das indicações de Damico (2007), pois nesse estudo constatou-se que alunos de licenciatura tiveram dificuldades em interpretar geometricamente multiplicação de frações, revelando assim, respectivamente, KMT (formas de apresentar o conteúdo – potencial de aprendizagem) e KFLM (dificuldades dos alunos).

4.1.8. Divisão com frações

Na divisão com frações, o livro apresenta uma sequência didática composta de 4 partes. Na primeira, tem-se a divisão de frações por um número natural, em que a partir de uma situação-problema em que se precisa dividir 1/3 de um queijo para duas pessoas, modula-se com auxílio de intuitivas representações pictóricas, levando à generalização de que esse tipo de situação pode ser modulada sempre por meio do uso de um retângulo representando o inteiro, a primeira fração como uma divisão na horizontal e a segunda divisão na vertical, similar à modulação de multiplicação de frações, indicando evidência de KoT (fenomenológico - formas de registros e representações) e KMT (formas de apresentar o conteúdo – potencial de aprendizagem).

Na segunda situação, tem-se a divisão de um natural por uma fração, em que parte-se da situação-problema em que se questiona: quantos copos de ¼ de litro precisam para encher uma jarra de 2 litros? Sendo KoT (fenomenológico) e KSM (conexões auxiliares), pois envolve o conceito de medida. O problema é resolvido com auxílio de uma sequência adequada à aprendizagem no quesito representativo, pois traz uma representação pictórica intuitiva e que levanta uma sensação de movimentação, revelando KoT (formas de registros e representações). Além disso, a escolha dessa situação-problema revela um KMT (formas de apresentar o conteúdo – potencial de aprendizagem) e KoT (conceitos - significados associados), pois segundo Damico (2007), poucos alunos de licenciatura souberam justificar como se faz as divisões com frações, nem porque o quociente pode dar maior do que o dividendo.

Na terceira situação aborda-se a divisão de uma fração por outra fração, no entanto agora não há uma situação-problema, mas sim a indagação do resultado da divisão de ¾ por 3/8. O livro, no entanto, faz a observação ao aluno de que se trata de uma situação de medidas, ou seja, de saber quantas vezes ¾ cabem em 3/8, revelando KoT (significados associados) e KSM (conexões auxiliares). A modulação gráfica do problema se dá utilizando a divisão e indicação das duas frações num mesmo retângulo representando o inteiro e comparando quantas vezes a parte hachurada do divisor cabe no dividendo. Essa modulação evidencia KoT (representações - significados associados), pois segundo Souza (2015), professores têm dificuldades de desassociar a divisão de frações com o algoritmo.

Na última situação tem-se o processo prático para efetuar divisões de frações, no entanto, o livro constrói a generalização de forma bem estruturada, paulatinamente apresentando conceitos e exemplos. É apresentado ao aluno o conceito de inverso multiplicativo através de vários exemplos, deixando bem clara a ideia de que dividir por x é igual a multiplicar por 1/x. Essa escolha revela um KFLM (teorias psicológica associada ao aprendizado do conteúdo) e KMT (formas de apresentar o conteúdo – potencial de aprendizagem), pois segundo Kieren (1976) o subconstruto operador tem grande potencial para apresentação do tema e o uso de composição de operações juntamente com a ideia de inverso multiplicativo mostrou-se ideal para justificar o algoritmo usual.

4.1.9. Números decimais – Conceito

O livro apresenta os números decimais com o uso da vírgula em uma situação-problema envolvendo o sistema monetário brasileiro (KoT – fenomenológico). Faz, em seguida, associação entre as frações decimais e a representação decimal e, ainda, as formas de leitura. Adiante é evidenciado um quadro de valor posicional com exemplos de números decimais, trazendo que "a parte inteira fica separada da parte decimal por uma vírgula" (EDITORA MODERNA, 2018, p.184). Até esse momento, apesar de haver a relação entre a representação das frações decimais com os números decimais, não fica explícito ao aluno o significado de que 0,003, por exemplo, representa tomar três partes de uma unidade que foi dividida em mil partes iguais, ou seja, o significado associado não está claro.

No entanto, na próxima seção o livro faz a associação do material dourado com as representações fracionária e decimal, trazendo esse significado e, ainda, faz indicações de exploração do recurso. Essa associação com o material dourado revela um KMT (recurso pedagógico associado), pois essa escolha ajuda a transpor barreiras de aprendizagens associadas (KFLM (erros de aprendizagens mais comuns)), como alunos que entendem a vírgula como ½=1,2 e, também, que 4<40 implica 0,4<0,40 (ROGERI, 2015; SANTOS FILHO, 2015). O livro ainda traz recomendação de aplicação de um bingo direcionado à fixação do conceito por meio do lúdico, revelando KMT (recurso pedagógico associado).

Ainda no âmbito do uso do material dourado, as equivalências entre décimos, centésimos e milésimos são levantadas, estendendo a exemplos do cotidiano (KoT – fenomenológico) como capacidades de recipientes, revelando KFLM (erros de aprendizagens mais comuns), pois professores costumam não entender a igualdade 0,3 = 0,30 (ROGERI, 2015; SANTOS FILHO, 2015; MARQUES, 2018).

Nesta parte conceitual o livro não faz nenhuma referência às ordens que estão à direita do milésimo, como décimo de milésimos, por exemplo, podendo dar a impressão de que o quadro acaba nos milésimos. Essa escolha pode configurar uma lacuna no KoT (conceitos – significados associados) pois dá margem ao aluno interpretar o conceito de forma equivocada e, ainda, podendo levar o aluno a transferir a ideia de sucessor para os decimais, dificuldade identificada em Santos Filho (2015) e Marques (2018), identificando assim, também, uma lacuna no KFLM (erros de aprendizagens mais comuns).

4.1.10. Transformações de decimais para frações e vice-versa

Nesse tópico o livro faz uso de duas abordagens: decomposição em frações decimais a partir da leitura do número decimal e a regra que relaciona algarismos decimais com quantidade de zeros no denominador (decimal para fração) e a decomposição da fração decimal em somas de frações (fração decimal para decimal). No entanto não se faz vínculo às ideias do subconstruto frações decimais (KIEREN,

1976) trazendo essa transformação como quando dividimos o numerador pelo denominador de qualquer fração, obtemos seu representante decimal, ou seja, perde-se a oportunidade de evidenciar que a representação decimal é uma forma padronizada para representar frações quaisquer, viabilizando ilustrar ao aluno que alguns problemas do tipo parte-todo são desconfigurados nessa padronização (KIEREN, 1976), sendo assim uma lacuna no KoT (significados associados). Além disso, os autores limitam a transformação de fração para decimal apenas para o caso de frações decimais, limitando o conhecimento relativo ao tema, configurando uma lacuna no KPM (modos de proceder em Matemática) e no KSM (relações de simplificação e complexificação) pois limitou-se a um caso particular.

4.1.11. Comparações de números decimais

A sequência é separada em duas partes: partes inteiras diferentes e partes inteiras iguais. O livro segue uma coerência metodológica ao indicar que se deve comparar as partes inteiras, e se forem iguais, comparar toda a parte decimal conjuntamente, igualando os dígitos com zeros conforme necessário.

O método de comparar dígito a dígito na parte decimal também é válido e, em muitos casos mais rápido, no entanto a escolha didática além de revelar uma coerência em situar apenas dois grandes âmbitos do número (inteiro e decimal) privilegiando o significado da vírgula, também privilegia melhor assimilação da leitura correta da parte decimal bem como da noção de equivalência já trabalhada anteriormente, pois ao comparar 1,41 com 1,041, o aluno iguala os dígitos ficando 1,410 e 1,041, fazendo com que tenha de efetuar a leitura de ambas as partes decimais em função dos milésimos, ou seja, 410 milésimos > 41 milésimos, contribuindo assim para transpor as dificuldades de professores que tendem a ver números com mais algarismos na parte decimal como maiores (ROGERI, 2015; SANTOS FILHO, 2015), revelando KFLM (erros de aprendizagens mais comuns).

4.1.12. Números fracionários e decimais na reta numérica

Neste tópico o livro aborda duas estratégias para representar números racionais na reta numérica, sendo a primeira comparativamente à interpretação parte-todo e a segunda pelo procedimento de encontrar uma fração decimal equivalente à fração dada, transformar em número decimal e assim fazer as divisões padronizadas na reta. É possível notar aqui a lacuna observada no tópico transformações, no qual não se abordou como opção de transformar uma fração não decimal em um número decimal por meio da divisão do numerador pelo denominador.

Vejamos a fração 2/13, se observarmos a primeira opção, o aluno terá de dar conta de fazer a divisão da unidade em 13 partes iguais, o que leva o aluno a ter de construir uma unidade usando treze milímetros, por exemplo, quando a figura não é dada. Mas se a unidade é padronizada, esse processo leva o aluno a construir divisões com má qualidade. Pela segunda estratégia, o aluno tenderá a encontrar uma potência de 10 a partir de multiplicações e divisões sobre o 13, e nunca irá encontrar, pois o quociente é uma dízima periódica. Uma divisão de 2 por 13 sairia o decimal automaticamente, sendo uma alternativa para essa situação, levando o aluno a fazer uma divisão aproximada na reta numérica. Revela-se, então, além da lacuna identificada anteriormente no KoT (significados associados), uma lacuna no KSM (conexões temporais), por não "deslocar" o significado que poderia ter sido abordado anteriormente e aumentado seu significado no uso da reta numérica.

Após a explanação, 7 questões são trazidas para o aluno, no entanto apenas 2 se referem a representação na reta numérica. Não obstante, os outros 5 são criativos e potencializadores para envolvimento com conhecimentos trabalhados anteriormente, como comparação de números racionais, equivalência entre décimos e centésimos e até mesmo o desenvolvimento do Pensamento Algébrico por meio de uma questão que simula uma calculadora com a tecla da vírgula quebrada, enquadrando-se em características definidoras do conceito, em Blanton e Kaput (2005). Sendo assim, apesar de poucas, as questões apresentam-se com diversidade e intencionalidade, revelando um KMT (formas de apresentar o conteúdo – potencial de aprendizagem).

O fato de o livro trazer um tópico específico para esse tema revela uma importância dada por parte dos autores nesse âmbito, revelando KFLM (teoria psicológica associada ao aprendizado do conteúdo) e KSM (conexões auxiliares) pois segundo Damico (2007), trazer essa abordagem auxilia no desenvolvimento da relação de ordem, de frações mistas e impróprias e até mesmo de operações e medidas.

4.1.13. Adição e subtração de números decimais

Neste tópico o livro traz uma situação-problema bem comum aos alunos, que é verificar se o valor cobrado e o troco estão corretos numa compra em uma lanchonete, assim, nota-se um KoT (fenomenológico). Além disso, as representações pictóricas da situação são abordadas de forma eficaz, pois além de mostrar as crianças na lanchonete, evidencia também um zoom do cupom fiscal, sendo este material de análise do livro para o aluno, revelando um KoT (formas de registros e representações).

A abordagem didática para resolver a adição e a subtração relacionadas ao problema envolve termos como "troca" e "transformar" no desenvolvimento dos algoritmos. Essa escolha se mostra pertinente para superar o "empresta" que é muitas vezes difundido nos meios escolares, revelando um KoT (significados associados).

Ainda neste tópico há uma abordagem para elucidar ao aluno diferentes formas de se calcular adições e subtrações com decimais, sendo eles: o uso da calculadora, o arredondamento e o cálculo mental. Para cada situação vincula-se um procedimento, com exceção do cálculo mental, o qual ratifica que cada aluno possui sua estratégia.

Duas questões propostas destoam das demais por fazerem conexões transversais (KSM) com o Pensamento Algébrico (BLANTON e KAPUT, 2005), sendo a primeira representada na figura 82:

Figura 82: primeira questão proposta com conexão transversal com Pensamento Algébrico

1 Num time de vôlei, Fernando é um dos jogadores de menor estatura. Ele tem 0,12 metro de altura a menos que Adriano. Sabendo que a altura de Everton é 1,92 metro e que ele tem 0,03 metro a menos que Adriano, qual é a altura de Fernando? 1,83 metro

Fonte: Editora Moderna (2018, p.197)

Nas orientações dadas ao professor via livro didático, é recomendada a formação de uma equação cujo valor a se determinar pode ser representado por uma figura geométrica, trazendo assim, uma introdução simbólica ao desenvolvimento do que será visto no ano seguinte (KSM - visão sequencial), que é a formalização do uso das letras como incógnitas.

O outro problema é trazido na figura 83:

Figura 83: segunda questão proposta com conexão transversal com Pensamento Algébrico

Fonte: Editora Moderna (2018, p.198)

Em seu conteúdo, a tarefa envolveu a abordagem do valor desconhecido de modo a permitir a apropriação das letras A, B, C, D e E como representação de incógnita (KSM - visão sequencial).

4.1.14. Multiplicação de número natural por decimal

A sequência didática começa com uma situação-problema comum ao aluno, que é a compra de 4 cadernos que custam R$ 9,32 cada um, solicitando a descobrir o valor total a ser pago, revelando um KoT (fenomenológico). A partir daí o livro explica a resolução utilizando a definição de soma de parcelas iguais, (KSM - conexões auxiliares) no algoritmo da adição, e designando no algoritmo as trocas feitas entre as ordens, evidenciando KoT (conceitos - significados associados). O mesmo problema é resolvido com o algoritmo da multiplicação, com o mesmo cuidado em designar as trocas.

Na sequência o livro traz um apêndice (box) intitulado "para descobrir", que objetiva desenvolver no aluno uma regra que associe a multiplicação de um número na sua forma decimal por uma potência de dez, relacionando quantidade de zeros e quantidade de algarismos decimais. O livro traz exemplos, não demonstrações, no entanto revela-se KPM (modos de validação) pois instiga o aluno a investigar e observar um padrão.

4.1.15. Multiplicação de um número decimal por um decimal

Novamente a seção é iniciada por uma situação-problema bem interessante, que é a compra de 2,5 metros de fio, custando R$ 2,32 cada (KoT – fenomenológico). A partir desta situação o livro induz o aluno a resolver por multiplicação de frações decimais com o intuito (esse objetivo é trazido nas observações do professor) de justificar o posicionamento da vírgula na utilização do algoritmo evidenciando KPM (modos de validação) e KoT (conceitos - significados associados) pois segundo Marques (2018) estudantes de licenciatura possuem dificuldade em justificar a colocação da vírgula. A partir daí a explicação é dada considerando a relação construída entre quantidade de casas decimais e posição da vírgula no resultado.

Cabe levantar que na multiplicação de natural por decimal o livro fez associação com um dos sentidos da multiplicação (soma de parcelas iguais) e neste tópico não. Pode-se notar que esse tipo de configuração não se modula com o sentido de somas de parcelas iguais por uma barreira epistemológica, no entanto o sentido de “disposição retangular” (ou cálculo de áreas retangulares) cabe perfeitamente, podendo, ainda, ganhar uso do material dourado ou folha quadriculada como recursos pedagógicos. A omissão da associação de um sentido vinculado à multiplicação torna-se, assim, uma lacuna no KoT (conceitos - significados associados) pois para Souza (2015), professores carregam dificuldades de ensinar que o produto 0,2 x 0,2 = 0,04 é menor do que seus fatores.

4.1.16. Divisão de natural por natural com quociente decimal

Neste tópico os autores iniciam com uma situação-problema (KoT – fenomenológico) em que um menino precisa dividir 6 metros de fio em 5 pedaços de mesma medida. A partir daí desenvolve-se o algoritmo da divisão explicando todos os passos, fazendo uso do termo “transformar” e “trocas” novamente para designar as equivalências entre as ordens, revelando KoT (conceitos - significados associados).

4.1.17. Divisão por um número decimal

Os autores abrem um “box” para instigar os alunos a investigarem o que ocorre com os quocientes das divisões por 10, 100, 1000, etc. não dando respostas prontas. A partir daí, o livro aborda a propriedade de que frações equivalentes possuem mesmo quociente, para depois aplicar isso na multiplicação de dividendo e divisor por uma mesma potência de dez a fim de descobrir uma outra divisão equivalente à anterior, mas que não tenha vírgula. Toda essa sequência relatada tem como intenção justificar o processo prático de “igualar as casas decimais e cortar a vírgula”, revelando um KPM (modos de validação) e KFLM (dificuldades dos alunos), pois de acordo com Marques (2018), estudantes de licenciatura encontraram dificuldades em justificar os porquês associados ao algoritmo.

Assim, encerra-se a análise do livro Araribá Mais Matemática, na qual os dados levantados indicam uma maior evidência de conhecimento especializado do professor acerca do ensino de números racionais na categoria KoT (fenomenológico), com 11 manifestações encontradas ao longo do tópico.

Já referente às lacunas no conhecimento especializado, o maior índice foi de 6 incidências para a categoria KoT (significados associados), revelando um indicativo de lapidação acerca deste âmbito para futuras edições.

Cabe trazer que os números mencionados são de manifestações e lacunas do conhecimento especializado evidenciados ao longo das sequências didáticas, não tendo ligação com a quantidade de tópicos abordados.

4.2. TÓPICOS DO LIVRO TELÁRIS MATEMÁTICA

As análises feitas nas subseções subsequentes são referentes ao livro didático Teláris Matemática (DANTE, 2018).

4.2.1. O conceito de Números Racionais

O livro não apresenta o termo “números racionais”, tampouco sua definição. Assim, essa omissão é caracterizadora de uma lacuna no KoT (conceitos – definições e imagens de um conceito) e no KFLM (Dificuldades dos alunos), pois até alunos de licenciatura manifestam dificuldades em compreender o conceito (DAMICO, 2007; MARQUES, 2018).

4.2.2. O conceito de Fração

O autor começa o tópico com uma situação-problema interdisciplinar com auxílio de uma representação pictórica (KoT – fenomenológico – formas de registros e representações) em que crianças estão encenando uma peça de teatro que retrata uma medição feita pelos egípcios utilizando corda com nós equidistantes. O autor indica ao professor levar cordas para a sala de aula e explorar essas medições não padronizadas com os alunos. Aqui temos a evidência de um KSM (conexões transversais) pois ao trazer de uma situação lúdica um contexto da história da matemática relacionado ao tema e, além disso, indicar uma oportunidade de aprendizagem em que os alunos possam vivenciar situações como se viviam em uma época importante da matemática (e sociedade), auxilia o aluno na ampliação da imagem conceitual do tema.

Na página seguinte o livro apresenta duas situações: uma que mostra um marcador de combustível e outra um menino medindo o comprimento da mesa com o palmo da mão e, a partir delas, os alunos devem compartilhar situações do cotidiano que venham à mente e que envolvam frações. Em seguida, sugere-se ao professor indicar um trabalho de pesquisa, em diferentes fontes, relacionados aos usos das frações no cotidiano, fazendo então cartazes e textos para registrar a atividade de pesquisa. Essa sequência didática introdutória revela um KMT (formas de apresentar o conteúdo – potencial de aprendizagem) pois ao partir dos conhecimentos trazidos pelos alunos e depois ampliá-los de forma que os alunos sejam os atores da pesquisa, potencializa para que o tema seja significativo para o aluno.

Nesse livro o autor tipifica os subconstrutos (parte-todo, razão de grandezas, fração de quantidade e quociente) que considera relevantes e os separa por tópicos, chamando-os de "ideias das frações", trabalhando de forma organizada cada uma delas, revelando, assim, KMT (formas de apresentar o conteúdo – potencial de aprendizagem) e KFLM (teoria psicológica associada ao aprendizado do conteúdo) pois são elementos indispensáveis à compreensão dos números racionais, para Kieren (1976).

O subconstruto parte-todo é abordado a partir de uma situação em que se divide uma folha em 4 partes iguais e se pinta 1. A partir daí o autor faz a relação entre os termos numerador às partes pintadas e denominador às partes divididas, faz também a inferência de que se juntar a parte pintada com a não pintada têm-se um inteiro, sugerindo ao professor que leve aos alunos a experiência de dividir as folhas equitativamente e pintar partes, indicando assim as frações e, além disto, mesmo que o aluno não tenha passado pelo tópico de adição de frações, recomenda-se que faça o registro das somas das frações das partes pintadas com as não pintadas igualando-as a 1 em seus registros.

Apesar desta sequência didática ser válida matematicamente, Santos Filho (2015) analisa uma abordagem muito similar a adotada pelo livro e orienta que:

> É uma proposta correta do ponto de vista da Matemática. No entanto, estudos como Nunes e Bryant (1997), Escolano e Gairín (2005); Merlini (2005); Rodrigues (2005); Canova (2006); Teixeira (2008) confirmam que este tipo de proposta de ensino, cuja ênfase está nos procedimentos e algoritmos, não favorece a aprendizagem e leva o aluno a conceber a fração como dois números naturais separados por um traço. (SANTOS FILHO, 2015, p.55)

Assim, apesar do autor se preocupar em levar ao aluno uma tipificação, uma organização das interpretações das frações, a definição de fração está vinculada a uma explanação do tipo parte-todo que pode comprometer o aprendizado do conceito, revelando uma lacuna no KFLM (erros de aprendizagens mais comuns).

Ainda sobre esse início, é importante notar que a situação inicial (da peça de teatro) não é retomada, ou seja, uma situação envolvente relacionada a medidas como esta poderia elucidar o conceito, potencializando o aprendizado de outros temas correlatos como frações impróprias (que são abordadas muito brevemente em tópicos posteriores). Para Santos Filho (2015), o conceito de frações impróprias são um entrave nos modelos utilizados do tipo parte-todo, pois tendem a não considerar esses casos.

Diante da dinâmica de divisão das folhas com os alunos, o autor indica uma proposta de levar uma figura em que sua área total não foi dividida equitativamente, propondo a discussão deste problema e a solução levando os alunos a estimarem o local correto para fazerem novas divisões e "consertar" o modelo, contribuindo para que os alunos não façam uma dupla contagem, observada em Santos Filho (2015), em que:

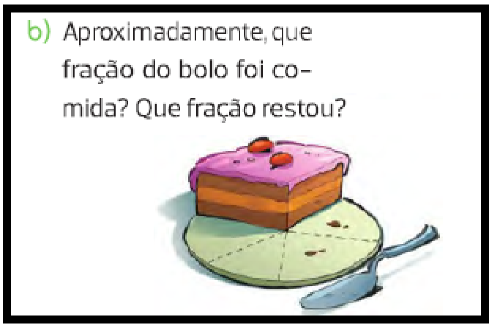
> Nesse sentido, diversos estudos como Campos et al (1995), Nunes et al (2003), Merlini (2005), Canova (2006) comprovaram que alunos e professores, para representar as partes pintadas de uma figura por meio de uma fração, utilizam dupla contagem – o total de partes pintadas da figura para o numerador e o total de partes para o denominador – sem considerar a conservação de área da figura, o que pode indicar o uso da linguagem das frações sem compreender sua natureza. (SANTOS FILHO, 2015, p. 53)

Indicando KFLM (erros de aprendizagens mais comuns).

Após a explicação, 16 questões potencializadoras ao ensino são trazidas pelo autor, sendo que algumas delas fazem uso de objetos do cotidiano como parede pintada, recipiente com tinta e sobra de bolo, revelando KoT (fenomenológico).

Há um destaque especial para três questões, sendo o referente ao bolo dividido o primeiro (figura 84):

Figura 84: questão proposta potencializadora do livro Teláris Matemática



Fonte: Dante (2018, p.172)

Em que pode-se observar que o pedaço restante na verdade compõe dois pedaços referente a divisão indicada na base, fazendo com que o aluno trabalhe a ideia de que nem sempre a parte pintada (considerada) estará dividida conforme os pedaços indicados na divisão do todo, esse tipo de questão é importante pois esse é um erro de aprendizado (KFLM) trazido por Damico (2007), em que relata que alunos de licenciatura manifestaram dificuldades em entender que as partes pintadas não precisam mostrar a linha divisória, eles tendem a fazer dupla contagem, sem ver a medida da área.

Outras duas questões relevantes são a 5 e a 15, pois associam a ideia de parte-todo com medidas ao indicar que o aluno represente posições na reta.

Adiante o livro traz como se faz as leituras de frações de forma organizada e com informações que normalmente são questionadas pelos alunos em sala de aula, como o significado da palavra avos.

Além disso, o autor traz 4 questões bem distribuídas que contemplam todas as situações possíveis de denominadores e ainda uma indicação de utilização de um bingo de frações, para fixar os conhecimentos de leitura através do lúdico. Com essa ênfase na leitura dos números, nota-se um KFLM (teoria psicológica associada ao aprendizado do conteúdo) pois a boa compreensão da leitura das frações é tida como uma das bases do desenvolvimento do conceito de números racionais, em Kieren (1976).

Uma segunda ideia das frações é trazida pelo autor, a de fração como razão. Essa ideia/subconstruto é trazida através de uma situação em que João tem 7 balões dos quais 3 são vermelhos, como na figura 85:

Figura 85: fração como razão

2ª ideia: fração como razão

João vende balões. Ele tem 7 balões, sendo que 3 deles são vermelhos. Podemos também dizer que **3 em 7** dos balões de João são vermelhos, ou seja, **três sétimos** dos balões são vermelhos.

$$\frac{3}{7}$$ ← número de balões vermelhos / ← número total de balões

A fração $\frac{3}{7}$ expressa uma comparação dos números naturais 3 e 7, ou seja, uma razão entre 3 e 7.

Veja outros exemplos.

- Quando lançamos uma moeda, há 2 possibilidades de resultado: pode sair cara ou pode sair coroa.
  Por isso, dizemos que a **medida de chance** ou a **probabilidade** de sair cara é $\frac{1}{2}$ (1 em 2).
- Quando lançamos um dado, há 6 possibilidades quanto à face que ficará voltada para cima.
  A probabilidade de sair o número 5 é de 1 em 6, ou seja, $\frac{1}{6}$.
  A probabilidade de sair um número ímpar é de 3 em 6, ou seja, $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Observação: Em geral, a probabilidade de algo ocorrer é expressa por uma fração.

Fonte: Dante (2018, p.174)

Nesta introdução convém destacar que o exemplo, apesar de ilustrativo, possui características que indicam pertencer também ao subconstruto parte-todo em situação discreta. Para defender essa posição, levantamos uma questão utilizada na pesquisa de Santos Filho (2015) situada na figura 86:

Figura 86: proposta B, expectativa 4.1

EXPECTATIVA 4.1: RECONHECER FRAÇÕES COMO PARTES IGUAIS DE UM TODO.
Proposta B: **Dizer para a criança que todos os bonés da figura abaixo são do mesmo tamanho, e explicar-lhe que a quantidade de bonés azuis pode ser representada pela fração 2/6.** 

Fonte: Santos Filho (2015, p.54)

Que é similar à proposta do livro. O livro levanta ao professor que: "ao trabalhar a ideia de parte/todo das frações, temos, por exemplo, 1 figura dividida em partes iguais. Agora, na ideia de razão, temos um conjunto de figuras iguais das quais algumas estão pintadas." (DANTE, 2018, p. 174). Pode-se notar que o autor interpreta o subconstruto parte-todo apenas na situação contínua, e nos casos discretos interpreta como razão. Santos Filho (2015, p. 54) traz que “uma das características das quantidades discretas no contexto de fração como parte-todo é que o todo deixa de ser uma unidade para ser representado por um conjunto de objetos de mesmo tamanho…”. Apesar da interpretação de razão contemplar os casos em que se compare parte e todo, como na situação trazida pelo livro, tal situação como exemplo inicial pode induzir o aluno a transportar a "obrigatoriedade" do uso da parte e todo, na situação parte-todo, para a situação de razão. Desta forma, identifica-se uma lacuna no KoT (conceitos - significados associados).

A ideia de razão é melhor identificada nos exemplos posteriores, os quais fazem vínculos às medidas de chances de lançamentos de moedas e de dados, pois segundo Kieren (1980) esse subconstruto está intimamente ligado ao campo da probabilidade, revelando então uma evidência no KFLM (Teoria psicológica associada ao aprendizado do conteúdo) e no KoT (conceitos – significados associados).

Na seção relativa ao subconstruto operador, o autor o define como ideia de “fração de uma quantidade” e a traz predominantemente pela situação discreta. No entanto, nas questões essa carência é suprida por uma bateria de 10 questões que contemplam situações discretas e contínuas. Duas delas merecem atenção por conta da interdisciplinaridade: a 29 que solicita ao aluno calcular a medida aproximada do diâmetro da Lua através da medida do diâmetro da Terra. A outra é a 34, questão que propõe um experimento para o aluno investigar as relações entre sons e frações de água contidas em diversos recipientes, evidenciando, assim, KoT (fenomenológico). Observando o livro de forma global, quatro capítulos depois deste (que expõe os sentidos), o autor traz um capítulo intitulado “Frações em ampliação e redução de figuras planas”, no qual se trabalha diretamente o subconstruto operador em situação contínua, recomendada em Kieren (1976) como situação inerente à interpretação e, também, como instrução potencializadora de ensino do tópico, configurando existência de KFLM (Teoria psicológica associada ao aprendizado do conteúdo) e KMT (formas de apresentar o conteúdo – potencial de aprendizagem).

A quarta e última ideia das frações trazidas pelo autor é a de quociente. Nela cabe destacar a opção do autor por trazer frações aparentes, no entanto nenhuma do tipo imprópria e não aparente, que até o momento não havia sido mencionada com ênfase, evidenciando assim uma lacuna no KoT (conceitos - significados associados) e KFLM (teoria psicológica associada ao aprendizado do conteúdo) pois segundo Santos Filho (2015) o trabalho com frações impróprias tende a consolidar melhor no aluno a relação entre fração e divisão.

O livro traz, por fim, a relação de frações e medidas, mas não como uma ideia/subconstruto, mas sim como uma aplicação das frações. Submúltiplos de litro, do real, de minutos, de quilogramas e do metro são abordados, evidenciando KFLM (Teoria psicológica associada ao aprendizado do conteúdo) e KMT (formas de apresentar o conteúdo – potencial de aprendizagem), pois essa é uma das recomendações encontradas em Kieren (1976).

4.2.3. Classificação de frações

O livro traz exemplos para definir o que são frações aparentes, próprias e impróprias trazendo orientações didáticas ao professor como a indicação de levar fitas de papel para que os alunos representem as diversas situações, para que compreendam, por meio da investigação, que todas frações aparentes são impróprias e também que descubram que todo número natural pode ser escrito como uma fração aparente.

Além disso, o autor traz uma proposta lúdica ao recomendar o uso de um jogo que tem como dinâmica gerar frações a partir dos resultados de lançamentos de dados pedindo ao aluno fazer a classificação, evidenciando KMT (formas de apresentar o conteúdo – potencial de aprendizagem).

Essa sequência didática, desde as definições com registros (KoT – formas de registros e representações), passando pelas questões e as atividades lúdicas, contribuem para que os alunos possam superar a barreira de que alunos tendem a se familiarizar apenas com frações próprias (SANTOS FILHO, 2015), evidenciando, assim, um KoT (conceitos – definições e imagens de um conceito), mesmo que tal elucidação tenha se concentrado apenas nesse tópico (uma lacuna no KSM (conexões transversais)).

No tocante aos números mistos, a exposição ganha representação gráfica (KoT – formas de registros e representações), além de deixar muito claro a equivalência entre a representação mista e a de soma de frações, contribuindo, assim, para superar uma possível dificuldade dos alunos observada em Damico (2007), em que alunos tendem a considerar a parte inteira como um fator, revelando, assim, KoT (Conceitos - definições e imagens de um conceito) e KFLM (erros de aprendizagens mais comuns).

4.2.4. Frações Equivalentes

Neste tópico o autor parte de uma situação ilustrada, do cotidiano do aluno e, a partir desta situação, indica ao professor para levar discos de frações para que alunos verifiquem o fato matemático na prática, revelando KMT (formas de apresentar o conteúdo – potencial de aprendizagem). Ainda nesta primeira situação, é enfatizado que os queijos a serem divididos são iguais, ou seja, contribui-se aqui para superar a dificuldade que professores têm em não compreender que na comparação de duas frações o todo deve ter o mesmo tamanho (SANTOS FILHO, 2015), revelando um KFLM (erros de aprendizagens mais comuns).

Adiante, o livro traz outras duas representações, uma evidenciando a equivalência de frações por meio de retângulos divididos e outra por duas retas numéricas. A diversidade de representações de um mesmo fato matemático e o uso de situações cotidianas revela KoT (formas de registros e representações e fenomenológico). Além disso, o autor faz uma observação ao professor para que oportunize aos alunos uma dinâmica que permita investigarem as relações entre as partes totais de cada imagem, bem como das pintadas e criem uma regra que possibilite encontrar frações equivalentes, evidenciando, assim um KPM (modos de validação).

Ainda em frações equivalentes o autor conduz o aluno a pensar num método prático para se descobrir uma fração equivalente a outra, em que se falta apenas um termo, propondo que se dividida o maior denominador pelo menor, ou maior numerador pelo menor, para descobrir o fator de proporção. No entanto ao trazer uma análise de uma questão similar ao exemplo, ele traz que:

> "Se necessário, conduza a resolução das primeiras igualdades fazendo perguntas aos alunos, como: De 3 para 21 foi efetuada uma multiplicação ou divisão?"; "3 vezes qual número resulta em 21?". Eles devem concluir que foi efetuada uma multiplicação por 7 e que, então, deve multiplicar o 4 por 7 para calcular o denominador da fração equivalente" (DANTE, 2018, p.184).

Um dos conhecimentos especializados levantados na base de conhecimentos deste trabalho foi em Damico (2007) que observou que alunos de licenciatura têm dificuldades em justificar porque o quociente pode dar maior do que o dividendo em divisão de frações. Trazendo para nosso caso, é possível notar que, apesar do autor não trazer divisão de frações no livro e as divisões com decimais vir mais a frente, tal indicação ignora a possibilidade de se dividir 3 por 1/7, ou seja, os alunos podem criar uma falsa generalização do caso e ser difícil de desfazer depois. Obviamente por questões práticas a opção do autor em pensar como multiplicação de naturais sempre será mais simples e viável, no entanto pode-se criar uma lacuna em uma dificuldade já evidenciada no estudo mencionado, revelando, então, uma lacuna no KFLM (dificuldades dos alunos) e KoT (conceito – definições e imagens de um conceito).

Ainda em frações equivalentes, o autor traz uma proposta de jogo de frações equivalentes, revelando um KMT (material pedagógico associado).

4.2.5. Comparação de frações

O autor traz uma sequência didática que separa o tópico em três situações diferentes: numeradores iguais, denominadores iguais e numeradores e denominadores diferentes. Novamente enfatiza-se que as comparações devem ser feitas utilizando a mesma unidade, solicitando ao professor que mostre a diferença entre 1/6 de uma banana e 1/6 de um cacho de bananas. O autor ainda indica nas três situações fazer com que os alunos investiguem a partir de materiais manipulativos, respondendo questões direcionadas e, a partir daí, fazer generalizações. Nestes pontos pode-se observar KMT (formas de apresentar o conteúdo – potencial de aprendizagem) e KPM (modos de validação). Ainda nesta sequência cabe ressaltar o uso de dois tipos de representações pictóricas, uma por retângulos divididos e outra pela reta numérica, revelando KoT (formas de registros e representações).

De forma geral, o tópico revela um KFLM (erros de aprendizagens mais comuns), pois contribui para que o aluno não incorra num erro de aprendizagem relatado em Santos Filho (2015), no qual professores julgaram que $1/3<1/5$ porque $3<5$.

4.2.6. Adição e subtração de frações

Esta seção está dividida em duas situações: denominadores iguais e denominadores diferentes. Em ambos os casos o autor sugere que os alunos explorem quatro situações que envolvem frações de percursos, a partir do uso de fitas fracionadas, e elaborem uma regra que permita generalizar o procedimento de adição e subtração, revelando KMT (recursos pedagógicos associados) e KPM (modos de validação).

O autor faz uso, na situação de denominadores iguais, de representação com reta numérica, no entanto não o faz na situação com denominadores diferentes, perdendo, assim, oportunidade de aprofundar o conceito, revelando uma lacuna no KoT (formas de registros e representações e significados associados) e, ainda, no KFLM (dificuldades dos alunos) pois segundo Damico (2007) não está claro para os alunos como adicionar frações com denominadores diferentes, muito menos enxergam uma transposição didática utilizando representação com barras de chocolate. Os exemplos de exploração da subtração de frações com mesmo denominador remetem ao uso das ideias (da subtração) de completar e de comparar, com a devida indicação no campo de observações para o professor, revelando, assim, KSM (conexões auxiliares).

No final da seção o autor traz uma sequência didática que se inicia com um trecho do livro "O Homem que Calculava" de Malba Tahan. Uma situação-problema contida no livro é trazida de forma lúdica, em que se trata da distribuição de camelos como herança, na qual a resolução relaciona-se com aplicação da adição de frações e, ainda, de mostrar ao aluno que a soma das partes (frações) de um inteiro sempre deve resultar em 1. Além do texto, três questões relacionadas ao problema são direcionadas ao aluno, de forma que tal sequência didática evidencia KMT (formas de apresentar o conteúdo – potencial de aprendizagem).

4.2.7. Números decimais – conceitos

O tópico é iniciado com uma diversificada gama de exemplos em que aparecem números decimais, evidenciando KoT (fenomenológico) e, ainda, aprofunda nas orientações ao professor, primeiro numa figura que tem o corredor Usain Bolt, propondo uma conversa sobre esse universo e, além disso, uma proposta interdisciplinar com aulas de Educação Física, ao fazer uso da corrida e das medições de tempo e distância conjuntamente.

Além desta proposta, o autor sugere fazer um link de duas das imagens com uma pesquisa envolvendo ensino de história e cultura afro-brasileira, africana e indígena, revelando com essas propostas interdisciplinares KMT (formas de apresentar o conteúdo – potencial de aprendizagem) e KoT (fenomenológico). Ainda nesse início o autor traz o dado relevante de que os decimais surgiram no século XVI como uma alternativa para facilitação de cálculos e, assim, propõe ao professor que questione os alunos sobre qual representação aparece por primeiro, fracionária ou decimal, revelando KoT (relações intra conceituais e construção de significado).

A seguir o livro traz uma sequência didática que dá ênfase no significado de décimos, centésimos e milésimos com o uso do material dourado, tanto na representação gráfica quanto na indicação ao professor para explorar o material fisicamente com os alunos em sala de aula, enfatizando a correspondência simbólica entre as representações fracionária e a decimal com intermédio do material dourado, revelando KMT (recurso pedagógico associado) e KoT (conceitos – definições e imagens de um conceito). Ainda traz a sugestão de resgatar a ideia de quociente das frações, para conferirem na calculadora a correspondência simbólica que acabaram de conhecer, configurando KSM (conexões auxiliares).

O autor traz também a relação com medidas de massa, sistema monetário brasileiro, temperatura e distância, associando, por exemplo, décimos, centésimos e milésimos com centímetros e milímetros, revelando KFLM (teoria psicológica associada ao aprendizado do conteúdo), pois na interpretação dos números racionais como frações decimais, Kieren (1976) levanta que uma potencialidade para melhor aprendizado do tópico é justamente relacioná-lo com medidas padronizadas.

Traz ainda, uma indicação ao professor para utilizar softwares de mapas para agregar conhecimentos a respeito dos trajetos dos rios São Francisco e Amazonas, indicando vínculo com educação socioambiental e também a sugestão de levar fita métrica e uma balança digital para a sala de aula, onde os alunos poderão fazer medições e registros para discussões (KMT - recurso pedagógico associado).

O livro traz também neste âmbito dos conceitos a relação entre décimos, centésimos e milésimos com representações gráficas do material dourado e do quadro de valor posicional, indicando ao professor que propicie aos alunos uma vivência com o material dourado concreto, indicando KMT (recurso pedagógico associado).

No que tange às representações pictóricas, as peças consideradas no material dourado foram pintadas de azul e as não consideradas de laranja, notando assim uma preocupação do autor em deixar claro essa parte considerada, no entanto, o quadro de valor posicional também ganhou cor: unidade a uma cor muito próxima à laranja, décimos roxo, centésimos verde e milésimos azul. Essa coloração do quadro de valor posicional pode levar o aluno a equívocos, pois pode considerar que há alguma relação entre o laranja e o azul do material dourado com o laranja e o azul do quadro de valor posicional, que notadamente é um erro, evidenciando assim, uma lacuna no KoT (significados associados e formas de registros e representações) e no KFLM (antecipação de um possível erro no aprendizado). Não obstante a explanação numa forma geral é clara e organizada, oportunizando que alunos compreendam que 0,3 = 0,30, uma das dificuldades encontradas por professores em Rogeri (2015); Santos Filho (2015); Marques (2018), podendo-se identificar um KFLM (erros de aprendizagens mais comuns).

O autor traz ao aluno um boxe sintetizado, mas rico em informações históricas associadas aos diferentes tipos de representações simbólicas que os números decimais receberam, elucidando ao aluno que a matemática é uma construção que está sujeita a aperfeiçoamentos e não algo estanque, já criada pronta. Assim, pode-se notar KPM (uso dos símbolos) e KoT (imagens de um conceito).

Adiante o livro aborda um texto em que se relaciona terremotos e números decimais, adicionado de uma tabela que mostra a progressão da magnitude, em decimais, e seus efeitos e, ainda, o autor faz indicação ao professor para fazer aula conjunta com o professor de Ciências para aprofundarem no tema, tratando assim de educação ambiental associada, evidenciando-se, assim, KMT (formas de apresentar o conteúdo – potencial de aprendizagem) e KoT (fenomenológico).

Para finalizar a parte conceitual dos números decimais o autor abre uma seção para enfatizar a relação da representação decimal com o sistema de numeração decimal, partindo de uma situação real: o pódio de fórmula 1 em uma corrida do Brasil em 2016, com os tempos de prova de cada piloto. Dos tempos de prova, o autor sugere ao aluno observar as diferenças entre os tempos dos pilotos, usando uma das diferenças para fazer a relação do número com o quadro de valor posicional, mas enfatizando que há duas partes na representação, a inteira e a decimal, sendo que o sentido da vírgula é o de separar essas partes. Nessa sequência didática podemos observar KoT (fenomenológico) por conta do contexto e KoT (significados associados), KPM (uso dos símbolos) e KFLM (erros de aprendizagens mais comuns), pois em Rogeri (2015); Santos Filho (2015) um dos principais erros conceituais identificados foi entender a vírgula como ½=1,2 e, também, que 4<40 implica 0,4<0,40.

Outro conhecimento especializado identificado nessa última seção relativa aos conceitos inerentes aos decimais é a indicação ao professor para que converse com os alunos sobre números em que as casas decimais continuam, ou seja, deixar claro que os números decimais não terminam na ordem dos milésimos, propondo ainda áreas de aplicação como na mecânica industrial e microbiologia, revelando KoT (conceitos -significados associados e fenomenológico) e KFLM (erros de aprendizagens mais comuns) pois segundo Santos Filho (2015); Marques (2018) os alunos tendem a transferir para os decimais a ideia de sucessor, contribuindo a abordagem para superar essa barreira pois revela a densidade dos números racionais. Além disso, o autor cita a particularidade que há na representação decimal da grandeza tempo, sendo ela ao mesmo tempo representada na base 60 (horas, minutos e segundos) e na base 10 (décimos, centésimos, etc, de segundo), revelando assim KoT (significados associados ao conceito).

4.2.8. Transformação de decimais para fração e vice-versa

Nesse tópico, assim como no primeiro livro analisado, o autor faz uso de duas abordagens: decomposição em frações decimais a partir da leitura do número decimal e a regra que relaciona quantidade de algarismos decimais com quantidade de zeros no denominador - o autor solicita ao professor que os alunos investiguem - e a obtenção de uma fração decimal equivalente à fração dada. Ao contrário do primeiro livro, o autor faz vínculo (nas orientações ao professor) às ideias do subconstruto frações decimais (Kieren, 1976) obtendo seu representante decimal a partir de uma divisão, ou seja, potencializa-se a visualização da ideia de que alguns problemas do tipo parte-todo são desconfigurados nessa padronização (KIEREN, 1976), sendo assim uma evidência no KoT (conceitos – significados associados) e KFLM (teoria psicológica associada ao aprendizado do conteúdo).

4.2.9. Comparação de decimais

O livro aborda duas maneiras diferentes de se comparar números decimais, ao contrário do primeiro livro que trouxe uma maneira em três situações diferentes. O autor parte de uma situação muito comum que é a pesagem de caminhões e determinar qual deles possui maior massa (KoT – fenomenológico). A primeira maneira abordada é igualando as casas decimais e comparando com a transformação do número em sua menor ordem, no caso os milésimos, e a segunda se refere a comparar ordem a ordem, como uma extensão da comparação de números naturais. A terceira se refere à representação na reta numérica dos dois números, verificando que quem está mais à direita é o maior. As três abordagens potencializam o aprendizado do tópico pois além de reforçar a equivalência entre as ordens (do quadro de valor posicional) e a leitura correta do decimal, também contribui para os alunos não fazerem a associação de que o número decimal maior é o que tem mais casas decimais, verificado em Rogeri (2015); Santos Filho (2015), revelando KFLM (erros de aprendizagens mais comuns). Além disso, a abordagem da reta numérica é uma das recomendações levantadas por Kieren (1976) pois a noção de ordem é dada de forma intuitiva e, ainda, Damico (2007) assevera que a associação com a reta numérica pode auxiliar também na melhor compreensão de operações e medidas, relevando assim KFLM (teoria psicológica associada ao aprendizado do conteúdo).

4.2.10. Adição e subtração de números decimais

O tópico é iniciado com cálculo mental e uso de calculadora para conferência, sendo que a partir de uma situação-problema na qual um menino deve descobrir se um valor em reais que possui é suficiente para comprar determinadas refeições, revelando KoT (fenomenológico). As operações são enfatizadas por meio do algoritmo usual da adição e da subtração para os naturais, no entanto nos momentos em que acontecem trocas, os passos são justificados utilizando os termos "trocamos" e "transformamos", deixando claro ao aluno que esses são os significados verdadeiros por detrás do "vai um", no caso da adição, revelando KoT (conceitos - significados associados).

4.2.11. Multiplicação de natural por número decimal

O livro traz um exemplo de resolução de uma conta em que os passos são "comentados" usando termos como "trocamos" para designar o "vai 2", fazendo esse esclarecimento para o aluno, sendo importante porque abre-se uma oportunidade para a desconstrução de um termo comumente usado e que ofusca os significados, revelando KoT (conceitos - significados associados). O sentido associado à multiplicação de somas de parcelas iguais é trazido nas observações ao professor como uma possibilidade de resolução que o aluno pode trazer, revelando um KSM (conexões auxiliares).

Ainda neste tópico o autor proporciona ao aluno uma vivência investigativa que objetiva levá-lo a generalizar a regra que permite calcular multiplicação de decimais por potências de dez, revelando assim KPM (modos de validação) e KMT (formas de apresentar o conteúdo – potencial de aprendizagem).

4.2.12. Multiplicação de decimal por decimal

Para explicar esse tópico o autor parte de uma situação-problema em que se deve calcular quanto se pagará por 1,8 metros de cano custando R$ 3,25 cada metro, evidenciando KoT (fenomenológico). Nas orientações ao professor, o autor indica uma sequência didática em que primeiramente os alunos devem elaborar hipóteses de como resolvê-lo e, num próximo passo acompanharem com o professor a resolução de um problema similar como calcular o preço de 1,5 metros de tecido a R$3,50 o metro, levando a constatarem que devem contar uma vez o preço do metro (por conta do 1 inteiro) e 0,5 vezes o preço do metro, ou seja, mais metade. Após esse exemplo os alunos devem utilizar o mesmo raciocínio para resolver o problema inicial, revelando assim KMT (exemplo potencializador e intencional - analogia) e KSM (conexões auxiliares) pois usou conhecimento adquirido em soma de decimais (1,00 + 0,50 = 1,50) e a propriedade distributiva (1,00 x 3,50 + 0,50 x 3,50).

No entanto nas orientações ao professor o autor indica que se faça uma investigação de uma possível regra que poderia ser criada para facilitar as contas, mas na abordagem da parte do aluno a regra é dada imediatamente, sem nenhuma reflexão, tornando a indicação de investigação possivelmente inviável, pois basta o aluno ler o primeiro exemplo que a regra já está dada, revelando assim uma lacuna no KPM (modos de validação) e KoT (conceitos - significados associados) pois até mesmo alunos de licenciatura manifestaram dificuldades em dar significado e justificar a colocação da vírgula no uso da regra (MARQUES, 2018).

Uma das três questões propostas faz uso do sentido da multiplicação “configuração retangular” ou "cálculo de áreas de figuras retangulares” evidenciando KSM (conexões auxiliares) e, ainda, tal sentido favorece o entendimento do porquê um produto como 0,2x0,2=0,04 é menor do que seus fatores, dificuldade encontrada em Souza (2015), revelando KoT (conceitos - significados associados).

4.2.13. Divisão de números naturais com resultado decimal

A divisão de dois naturais com quociente decimal é abordada no livro do aluno de forma a privilegiar o algoritmo, deixando um exemplo do cotidiano como indicação ao professor, indicando assim uma lacuna no KoT (fenomenológico). No entanto o algoritmo é justificado passo-a-passo fazendo-se uso dos termos “equivalem” e “transformamos” para fazer as equivalências entre as ordens e, ainda, faz uma indicação ao professor para que use o material dourado na sala de aula para modular essas transformações, sendo possível identificar, então, KSM (conexões auxiliares) por usar o conceito de equivalência de ordens, KoT (significados associados) por esclarecer o que está sendo feito no algoritmo e KMT (recursos pedagógicos associados) por recomendar o uso do material dourado.

O livro traz ainda que o uso da transformação de fração para decimal utilizando frações decimais equivalentes também pode ser um recurso válido, ou seja, além de ampliar o significado associado (KoT) ao número racional, faz conexão auxiliar (KSM) com um sentido (ou subconstruto, dependendo do referencial) das frações para resolver uma conta de divisão, estabelecendo um ponto em comum entre a interpretação de frações como quociente, frações como classes de equivalência e frações como decimais (KIEREN, 1976), revelando, também, KFLM (teoria psicológica associada ao aprendizado do conteúdo) pois Kieren (1976) assevera que o uso interligado das diferentes interpretações potencializa o aprendizado dos números racionais.

Para finalizar o tópico, o livro ainda faz uma subseção para abordar dízimas periódicas mostrando que nem sempre a divisão entre dois naturais com resultado decimal tem resto zero e, ainda, associando ao uso das reticências com seu significado na matemática KPM (uso dos símbolos). Com essa abordagem, potencializa-se o aprendizado do conceito de dízimas periódicas contribuindo para que os alunos deixem de validar a igualdade 0,333... = 0,333, relatada em Rogeri (2015), evidenciando um KFLM (erros de aprendizagens mais comuns).

4.2.14. Divisão de decimal por número natural

O tópico inicia-se através de duas contas resolvidas por meio do algoritmo, assim como na seção anterior, sem fazer uso de nenhuma situação-problema, sendo uma lacuna no KoT (fenomenológico). No entanto é feita uma indicação ao professor para elaborar uma questão motivadora, que pode ser relativa à divisão do valor a ser pago de uma conta igualmente a 3 amigos.

Os dois exemplos são resolvidos passo-a-passo fazendo-se uso sempre dos termos "valem", "transformamos" e o símbolo =, todos para ressaltar a equivalência entre as ordens (KoT – significados associados).

Há um boxe que remete à investigação por parte do aluno para descobrir uma regra que associe a resolução de divisões de decimais por uma potência de dez, utilizando a calculadora para confirmar as conclusões, configurando KPM (modos de validação).

4.2.15. Divisão de número natural por decimal e de decimal por decimal

Referente a esse tema o autor faz uso, assim como no primeiro livro analisado, da propriedade de que frações equivalentes possuem o mesmo quociente, para resolver uma situação-problema em que se pretende descobrir o consumo de gasolina do carro de uma pessoa ao dividir 92,8km percorridos por 7,25 litros consumidos.

A recomendação ao professor é de que primeiramente instigue os alunos a verificar a semelhança entre os resultados entre divisões em que os dividendos e o divisores foram multiplicados por uma potência de dez, levando-os a conjecturar uma possível regra de "eliminação" da vírgula. Após essa investigação o livro aborda esse processo e ainda faz um paralelo do que acontece "visualmente" quando se faz uso desta estratégia, ou seja, acontece a regra prática de "igualar as casas e cortar a vírgula", evidenciando KPM (modos de validação).

Ainda nas orientações ao professor, o autor levanta duas possíveis dificuldades de configuração que os alunos provavelmente podem manifestar dificuldades, na divisão de 0,3 por 0,008 e 2,34 por 9,9, configurando assim KFLM (erros de aprendizagens mais comuns).

4.2.16. Outras situações envolvendo os decimais e operações

Um outro capítulo trazido pelo autor é relativo às situações-problema em que os números decimais comumente estão sendo usados como cálculo de áreas retangulares, compras de produtos, medida de massa, gráfico de setor (KoT – fenomenológico). O autor ainda faz uso de situações que permitem desenvolver o Pensamento Algébrico do aluno, como resolver contas em que uma das informações é omitida (parcela, fator, dividendo, divisor, etc.), sendo consistente com a característica de pensamento funcional de Blanton e Kaput (2005), e ainda com balanças com pesos desconhecidos pois faz uso da modelação, sendo assim KSM (conexões transversais).

Desta forma, encerra-se a análise do livro Teláris Matemática em que, coincidentemente ao primeiro livro, as análises indicam uma maior evidência de conhecimento especializado do professor acerca do ensino de números racionais na categoria KoT (fenomenológico), com 13 manifestações encontradas ao longo da exposição do tema racionais.

No que concerne às lacunas no conhecimento especializado, o maior índice foi também na mesma categoria do livro anterior, com 5 incidências para a categoria KoT (significados associados), revelando, também, um sentido para análise e possível revisão neste âmbito em edições futuras.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo apresentará uma síntese das análises realizadas sobre os livros Araribá Mais Matemática e Teláris Matemática, bem como uma reflexão sobre os resultados. Há também um direcionamento para ampliação em estudos posteriores.

A presente dissertação teve como objetivo central responder a questão: "quais conhecimentos especializados do professor/autor que ensina matemática, acerca dos números racionais, os livros didáticos estão priorizando em suas escolhas didáticas?". Para responder a esta questão, usou-se o apoio teórico do modelo MTSK (Mathematics Teacher's Specialised Knowledge) em consonância com uma base de conhecimentos especializada sobre o ensino dos números racionais, composta pelos estudos de Kieren (1976, 1980), Souza (2015), Santos Filho (2015), Damico (2007), Marques (2018) e Rogeri (2015).

Assim, o modelo MTSK foi usado para categorizar os conhecimentos especializados identificados nos dois livros didáticos analisados, sendo eles o Araribá Mais Matemática e o Teláris Matemática. Para realizar essa categorização, utilizou-se a metodologia qualitativa de natureza documental.

Na realização das análises foi possível observar a presença de diversos conhecimentos especializados em escolhas didáticas dos dois livros, bem como lacunas também. Cabe ressaltar que foram identificadas propostas de tarefas com a identificação de manifestação de alguns conhecimentos especializados e, ao mesmo tempo, na mesma tarefa, lacunas em outros tipos de conhecimentos. A ocorrência desse fenômeno julgamos ser natural, considerando os múltiplos olhares que se pode direcionar a um único exemplo e que, se tratando de um tema complexo como os números racionais, a análise torna-se complexa também.

No que tange às categorias de conhecimentos do MTSK, o número de manifestações de conhecimento especializado bem como de lacunas no conhecimento, de ambos os livros, encontram-se organizadas por subdomínios nos quadros 8,9,10,11 e 12. Cabe ratificar que as quantidades indicadas nesses quadros fazem indicação apenas ao número de manifestações evidenciadas (números de presenças ou lacunas de conhecimentos especializados) nas análises, não possuindo relação com número de tópicos nem com número de tarefas, ou qualquer outro atributo quantitativo.

Assim, inicia-se com a síntese dos resultados, de ambos os livros, no KoT (quadro 8):

Quadro 8: síntese dos resultados acerca do subdomínio KoT

Subdomínio KoT	Livro analisado	Número de manifestações do conhecimento	Número de lacunas do conhecimento
KoT (conceitos – definições e imagens de um conceito)	Araribá	4	5
	Telaris Matemática	9	4
KoT (fenomenológico)	Araribá	11	1
	Telaris Matemática	13	2
KoT (significados associados)	Araribá	8	6
	Telaris Matemática	10	5
KoT (formas de registros e representações)	Araribá	7	0
	Telaris Matemática	5	2
KoT (relações intra conceituais)	Araribá	0	0
	Telaris Matemática	1	0

Fonte: Acervo Pessoal

É possível notar uma quantidade expressiva de manifestações e de lacunas em “conceitos - definições e imagens de um conceito” e “significados associados” em ambos os livros, podendo-se inferir que as sequências didáticas, apesar de mostrarem refinamento teórico nesses âmbitos, podem ser insuficientes para ampliar a imagem conceitual dos racionais nos alunos.

Outro ponto de destaque foi o “fenomenológico”, observando um direcionamento claro por parte de ambos os livros em fazer relações com temas externos à matemática e, ainda, com temas presentes no cotidiano dos alunos.

Os dois livros mostram uma ênfase em usar representações pictóricas auxiliares, no entanto pode-se notar um enfoque maior por parte do livro Araribá Mais Matemática.

O próximo subdomínio em que os resultados encontram-se sintetizados (quadro 9) é o KSM:

Quadro 9: síntese dos resultados acerca do subdomínio KSM

Subdomínio KSM	Livro analisado	Número de manifestações do conhecimento	Número de lacunas do conhecimento
KSM (Visão sequencial)	Araribá	3	0
	Telaris Matemática	0	0
KSM (relações de simplificação e complexificação)	Araribá	1	1
	Telaris Matemática	0	0
KSM (conexões auxiliares)	Araribá	6	0
	Telaris Matemática	6	0
KSM (conexões transversais)	Araribá	1	0
	Telaris Matemática	2	1
KSM (conexões temporais)	Araribá	0	1
	Telaris Matemática	0	0

Fonte: Acervo Pessoal

Em que se destaca o âmbito "conexões auxiliares", havendo igualdade de manifestações de conhecimentos especializados em ambos os livros. Esses resultados são relevantes para que possibilite ao aluno compreender a estrutura hierárquica que compõe a Matemática e suas interdependências. Os resultados referentes ao subdomínio KPM encontram-se no quadro 10:

Quadro 10: síntese dos resultados acerca do subdomínio KPM

Subdomínio KPM	Livro analisado	Número de manifestações do conhecimento	Número de lacunas do conhecimento
KPM (uso dos símbolos)	Araribá	0	0
	Telaris Matemática	3	0
KPM (modos de validação)	Araribá	5	0
	Telaris Matemática	6	1
KPM (modos de proceder em Matemática)	Araribá	0	1
	Telaris Matemática	0	0

Fonte: Acervo Pessoal

É possível notar uma ênfase no âmbito “modos de validação” em ambos os livros. Esse fato mostra-se importante para possibilitar ao aluno construir a concepção de que, apesar de não haver demonstrações formais nos livros, a Matemática é construída de forma sólida e que a validação de um fato matemático não se dá por um exemplo, mas por um desencadeamento lógico.

No quadro 11, encontram-se os resultados referentes ao subdomínio KMT:

Quadro 11: síntese dos resultados acerca do subdomínio KMT

Subdomínio KMT	Livro analisado	Número de manifestações do conhecimento	Número de lacunas do conhecimento
KMT (formas de apresentar o conteúdo – potencial de aprendizagem)	Araribá	10	3
	Telaris Matemática	11	0
KMT (analogia - exemplo potencializador)	Araribá	1	0
	Telaris Matemática	0	0
KMT (recurso/material pedagógico associado)	Araribá	2	0
	Telaris Matemática	4	0

Fonte: Acervo Pessoal

Em que se pode destacar dois âmbitos, o “formas de apresentar o conteúdo - potencial de aprendizagem” e o “recurso/material pedagógico associado”. O primeiro aparece com grande ocorrência de identificações de conhecimentos especializados em ambos os livros, com destaque para o Teláris Matemática, no qual não foram identificadas lacunas.

O número elevado (relativamente aos outros) de manifestações de conhecimentos especializados neste âmbito proporciona não só ao aluno, mas também ao professor, um ordenamento coerente e eficaz das apresentações de alguns tópicos, com diversidades de resoluções e significados associados.

Relativamente ao segundo, entende-se que o destaque nesse âmbito oportuniza ao aluno ter contato com os objetos matemáticos de forma concreta e lúdica, aumentando as chances de se efetuar o aprendizado.

Os resultados sintetizados do subdomínio KFLM encontram-se no quadro 12:

Quadro 12: síntese dos resultados acerca do subdomínio KFLM

Subdomínio KFLM	Livro analisado	Número de manifestações do conhecimento	Número de lacunas do conhecimento
KFLM (Dificuldades dos alunos).	Araribá	2	3
	Telaris Matemática	0	2
KFLM (teoria psicológica associada ao aprendizado do conteúdo)	Araribá	5	3
	Telaris Matemática	10	0
KFLM (erros de aprendizagens mais comuns)	Araribá	8	2
	Telaris Matemática	9	1
KFLM (antecipação de um possível erro do aprendizado)	Araribá	0	0
	Telaris Matemática	0	1

Fonte: Acervo Pessoal

Cabe destacar o alto índice de conhecimentos relativos à "teoria psicológica associada ao aprendizado do conteúdo" do livro Teláris Matemática, evidenciando uma ênfase em alinhar suas escolhas didáticas à literatura que embasa os mecanismos mentais que estão associados ao aprendizado do objeto matemático.

Outro âmbito que merece atenção é o "erros de aprendizagens mais comuns", em que notou-se um alto índice relativo de manifestações do conhecimento em ambos os livros, em contraste do baixo índice de lacunas. Esses resultados são importantes para que se superem obstáculos enfrentados por alunos e professores comumente observados nas literaturas e, em especial, muitos daqueles levantados na base de conhecimentos deste trabalho, auxiliando no entendimento dos conceitos e melhorando a aprendizagem dos alunos.

De forma mais abrangente, ambos manifestaram maior incidência de conhecimento especializado no âmbito "fenomenológico" e maior incidência de lacunas no âmbito "significados associados". No entanto, outras características gerais puderam ser constatadas nas análises como, por exemplo, uma regularidade em oportunizar boas tarefas aos alunos em todos os tópicos por parte do livro Teláris Matemática, não podendo reconhecer esse foco no Araribá Mais Matemática.

Outro ponto de comparação que as análises permitem trazer é relativo à ênfase em proporcionar atividades interdisciplinares para o aluno por parte do livro Teláris Matemática, não podendo reconhecer essa ênfase no Araribá Mais Matemática.

No que concerne ao trabalho com representação na reta numérica nota-se evidente o foco dado pelo livro Araribá Mais Matemática, no entanto não se pode reconhecer tal foco no Teláris Matemática.

A ênfase em propostas lúdicas com propostas de jogos associados ao conteúdo pôde ser identificada no Teláris Matemática, mas apesar de haver proposta de jogo no Araribá Mais Matemática, não evidencia-se uma ênfase nesse âmbito.

Em relação às operações com frações e números decimais, ambos os livros evidenciaram uma intenção em se desvencilhar de termos destituídos de significados como "vai um" optando por termos como "trocas" e "transformar". Ainda nas operações, ambos os livros trazem uma ênfase em fazer a validação dos procedimentos utilizados nos algoritmos, no entanto o livro Araribá Mais Matemática manifestou maior ênfase em ampliar os significados das operações por meio de representações pictóricas esquemáticas, o que ocorreu no Teláris Matemática, mas em número insuficiente para evidenciar uma ênfase neste aspecto.

Três pontos acerca das diferentes interpretações dos números racionais convém serem levantados, sendo o primeiro de que no livro Araribá Mais Matemática, a não menção dos nomes das interpretações pode acarretar em lacunas significativas futuras no aprendizado do aluno, como por exemplo no aprendizado de proporções, em que se define como igualdade de razões. Mas se o aluno não teve contato com o termo "razão" anteriormente, a aprendizagem irá requerer um resgate do conceito. O segundo ponto diz respeito ao exemplo inicial trazido pelo livro Teláris Matemática, no qual não se leva adiante uma proposta potencializadora envolvendo história da matemática e medidas, para usar uma situação procedimental de parte-todo para definir frações. Os possíveis prejuízos desta abordagem foram relatados nas análises, sendo assim, infere-se ser pertinente em edições futuras debruçar sobre esse ponto. O terceiro ponto é relativo ao exemplo inicial de "frações como razão" abordado pelo livro Teláris Matemática, em que sua configuração também está atrelada à interpretação parte-todo em situação discreta, podendo induzir o aluno a interpretar que o uso da razão é fundamentalmente similar ao uso da parte-todo. Nesse ponto inferimos merecer uma reflexão para que as diferentes interpretações possam ser mais claras nas imagens conceituais dos alunos sobre os números racionais.

No desenvolvimento desta pesquisa algumas limitações foram encontradas, sendo, primeiramente, a inexistência de traduções para o português dos estudos de Thomas E. Kieren, exigindo um esforço adicional de tradução para a compreensão e síntese de suas obras utilizadas. Outra limitação posta foi a inacessibilidade a textos como Kieren (1981, 1989, 1993) até mesmo em inglês, sendo encontradas apenas em plataformas de vendas de periódicos a preços inacessíveis.

O tempo disponível para estudo dos referenciais clássicos acerca dos números racionais, como Behr (1983), Kerslake (1986) entre outros, foi limitado, fazendo com que o foco ficasse nos estudos de Kieren e das cinco pesquisas nacionais utilizadas.

A inexistência de teses ou dissertações nacionais que abordassem análise de livros didáticos utilizando o modelo MTSK, fez com que o processo de análise dos livros ocorresse de forma mais cautelosa do que se houvesse uma referência para consulta, bem como comparação.

Outro ponto de reflexão é referente ao equilíbrio entre quantidade de obras analisadas e o aprofundamento nas análises que se faz em cada caso. Apesar de não ser o objetivo principal deste trabalho a comparação das obras, esse aspecto só pôde ser observado pela escolha de que as análises abarcassem mais do que um livro, no entanto, por esse mesmo motivo, o aprofundamento poderia ter sido menor. Recomenda-se, então, reflexão no equilíbrio: quanto mais obras, menos tópicos e, consequentemente, menos aprofundamento e menos categorias.

Além disso, o uso de 5 subdomínios do MTSK proporcionou que se direcionassem múltiplos olhares teóricos para cada sequência didática, no entanto um olhar mais focal pode trazer resultados mais claros sobre o objeto de análise.

Ainda sobre os subdomínios, mais especificamente nas categorias de análise, recomenda-se uma reflexão sobre as possibilidades de uso do KoT (fenomenológico) visto que é um conceito "emprestado" da filosofia, podendo-se abrir a discussão se ele se refere aos contextos inerentes às vidas dos alunos (interpretação adotada neste trabalho) ou se ele se refere a uma fenomenologia dos tópicos matemáticos.

Outro ponto que merece reflexão é o uso concomitante das categorias "KSM (visão sequencial)" e "KSM (conexões temporais)" visto que os seus limites de uso são parecidos.

Outro ponto é acerca dos usos das categorias "KFLM (teoria psicológica associada ao aprendizado do conteúdo)" e "KMT (formas de apresentar o conteúdo - potencial de aprendizagem)" em que por diversas vezes elas aparecem juntas nas análises, o que pode abrir uma possível discussão de que uma possa remeter a outra. Essa possível implicação merece uma reflexão para estudos posteriores.

A categoria de análise "KoT (formas de registros e representações)" merece reflexão acerca de um melhor delineamento dos critérios de uso, podendo haver um aprofundamento neste aspecto com a semiótica, por exemplo.

Sobre a dinâmica de análise para estudos com mais de um livro, recomenda-se refletir sobre uma possível análise conjunta dos tópicos, mesmo que o objetivo não seja a comparação, esse aspecto pode ficar mais enriquecedor ao fazê-lo simultaneamente nos dois (ou mais) livros.

Espera-se, assim, que esta pesquisa possa servir como parâmetro para pesquisas futuras acerca desta temática, visto que o foco da presente pesquisa foi os números racionais, especificamente no 6º ano, havendo, assim, um amplo campo de outros temas a serem analisados, em diferentes anos escolares, em livros didáticos de referência.

Além da indicação de análise de livros de referência utilizando o modelo MTSK em diferentes temas, recomenda-se para estudos posteriores um maior enfoque no subdomínio não abordado nesta pesquisa, o KMLS. Um estudo deste subdomínio em análise de livros didáticos alinhado aos documentos curriculares vigentes pode trazer ricas contribuições no desenvolvimento de futuras edições de livros didáticos pelos autores.

Conclui-se que este trabalho, apesar de se propor a analisar um tópico tão abrangente, obteve respostas à pergunta norteadora, em que pôde-se constatar que apesar dos livros didáticos analisados obterem lacunas em alguns âmbitos do conhecimento especializado do professor/autor, foi nítida a prevalência, por diferentes manifestações, do uso desses conhecimentos por parte dos autores em suas escolhas didáticas.

Esse estudo mostrou-se relevante pois os livros didáticos constituem em uma das principais ferramentas de trabalho do professor, merecendo ser objeto de análise para que professores possam lapidar os olhares sobre as sequências didáticas destes quando estiverem em uso. Além disso, o tema números racionais é carregado de significados, simbologias, fenomenologias, teorias psicológicas associadas e muitas dificuldades de aprendizado associadas, sendo assim, importante a investigação da manifestação do tema nos livros.

REFERÊNCIAS

BALL, Deborah L., THAMES, Mark H., PHELPS, Geoffrey. Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? **Journal of Teacher Education**, Oxford, v. 59, n.5, p. 388 – 407, 2008.

BOGDAN, Robert C., BIKLEN, Sari K. **Investigação qualitativa em educação, uma introdução à teoria e aos métodos**. 4.ed. Colecção Ciências Da Educação. Porto Editora LDA, 1994.

BRASIL. **PNLD 2020: matemática – guia de livros didáticos,** Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2019.

BRASIL **PNLD 2017: matemática – guia de livros didáticos,** Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2016

BRASIL. **PNLD 2014: matemática – guia de livros didáticos,** Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2013

CARRILLO *et al*. The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. **Reserach in mathematics education**, v.20, n.3, p.236-253, 2018.

CLARAS, Antonio F., PINTO, Neuza B. O movimento da matemática moderna e as iniciativas de formação docente. *In*: XV CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 2002.

COSTA, António P., MOREIRA, António., SÁ, Patrícia (coords). **Reflexões em torno de metodologias de investigação. Análise de Dados**. 1. ed. UA Editora, 2021.

DAMICO, Alécio. **Uma investigação sobre a formação inicial de professores de matemática para o ensino de números racionais no ensino fundamental**. 2007. Tese de doutorado. PUC-SP, São Paulo. 2007.

DANTE, Luiz Roberto. **Teláris matemática:** 6º ano do Ensino Fundamental. 3. ed. São Paulo: Ática, 2018.

EDITORA MODERNA. **Araribá mais**: Matemática, 6º ano do Ensino Fundamental. São Paulo: Moderna, 2018.

FERREIRA, Jamil. **A construção dos números**. Rio de Janeiro/RJ, 3 ed. Editora SBM, 2013.

FILHO, Josué F. dos S. **Investigando como professores dos anos iniciais julgam propostas de ensino para de o trabalho com os números racionais.** 2015. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2015.

GIL, Antonio C. **Como elaborar projetos de pesquisas.** Ed. Atlas, v. 4, p. 44-45, 2002 disponível em <http://www.madani.adv.br/aula/Frederico/GIL.pdf> . Acesso em: 19 de novembro. 2021.

KIEREN, T. E. On the Mathematical, Cognitive, and Instructional Foundations of Rational Numbers. *In*: LESH, Richard A., BRADBARD, David A. (ed.) **Number and measurement**. Columbus, OHERIC/SMEA, 1976, p.101-144.

KIEREN, T. E. The rational number constructo: its elements and mechanisms. *In*: KIEREN, T. E. **Recent research on number learning**. Columbus: ERIC/SMEAC, 1980, p.125-150.

LACERDA, Gustavo B., Augusto Comte e o “Positivismo” redescobertos. **Revista de Sociologia e Política, Curitiba**, v. 17, n. 34, p. 319-343, 2009.

MARQUES, Adriana B. A. **Um estudo de conhecimentos de futuros professores de matemática para o ensino de números racionais.** Tese de Doutorado. Universidade Anhanguera de São Paulo. São Paulo 2018.

MEDRANO, Eric F., MONTES, Miguel A., CONTRERAS, José C. L. C., CATALÁN, Maria C. M., LIÑÁN Maria M. El Papel del MTSK como Modelo de Conocimiento del Profesor en las Interrelaciones entre los Espacios de Trabajo Matemático. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 30, n. 54, p. 204-221, 2016.

NOVELLI, Pedro G. O idealismo de Hegel e o materialismo de Marx: demarcações questionadas, **Interface - Comunicação, Saúde, Educação**, v.4, p.168, 1999.

PATRONO, Rosângela M., FERREIRA, Ana C. Levantamento de pesquisas brasileiras sobre o Conhecimento Matemático para o Ensino e Formação de Professores. **Revemop**, Ouro Preto, v. 3, e202102, p. 1-24, 2021.

PIAJET, Jean. **Seis Estudos de Psicologia.** ed. 21. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1995.

PIRES, Marília F. de C. O materialismo histórico-dialético e a Educação. Texto apresentado na **mesa-redonda Paradigmas de Interpretação da Realidade e Projetos Pedagógicos organizada pelas disciplinas de Pedagogia Médica e Didática Especial dos Cursos de Pós-graduação da Faculdade de Medicina da UNESP**, campus de Botucatu, 1996.

REIS, Francis R. dos; ARAUJO, Saulo de F. Uma Avaliação das Críticas de Chomsky ao Verbal Behavior à Luz das Réplicas Behavioristas, **Psicologia: Teoria e Pesquisa**, vol. 20 n. 3, p. 267-274, 2004.

RIBEIRO, Miguel. Das Generalidades às Especificidades do Conhecimento do Professor que Ensina Matemática: Metodologias na Conceitualização (Entender e Desenvolver) do Conhecimento Interpretativo in **Abordagens Teóricas e Metodológicas nas Pesquisas em Educação Matemática**. Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2018.

RIBEIRO, Miguel, GIBIM, Gabriela, ALVES, Carla. A Necessária Mudança de Foco na Formação de Professores de e que Ensinam Matemática: discussão de Tarefas para a Formação e o Desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo, **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 14, n. 34, p. 1-24, 2021.

ROGERI, Norma K. de O. **Conhecimentos de professores dos anos iniciais para o ensino dos números racionais em sua representação decimal**. Tese de Doutorado. Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2015.

SILVINO, A. M. D. Epistemologia Positivista: Qual a Sua Influência Hoje?, **Psicologia: ciência e profissão**, Brasília – DF, v. 27, n.2, p. 276-289, 2007.

SHULMAN, Lee S. Conhecimento e Ensino: fundamentos para uma nova reforma**, Harvard Educational Review**, v. 57, n. 1, p. 1-22, 1987.

SOUZA, Debora da S. **A formação do professor de Matemática: um estudo sobre o conhecimento pedagógico dos números racionais.** 2015. Dissertação (Mestrado Graduação em Ensino, História e Filosofia das Ciências e Matemática) – Universidade Federal do ABC, Santo André, 2015.

SOUZA, Eliane R. de; DINIZ, Maria I. S. V.; PAULO, Rosa M.; OCHI, Fusako, H. **A Matemática das Sete Peças do Tangram.** ed. 2. São Paulo: IME-USP, 1997.

TARDIF, Maurice. Saberes profissionais dos professores e conhecimentos universitários: Elementos para uma epistemologia da prática profissional dos professores e suas consequências em relação à formação para o magistério, **Revista Brasileira de Educação**, n°13, p.5-24, 2000.

TARDIF, Maurice, MOSCOSO, Javier N. A noção de "profissional reflexivo" na educação: atualidade, usos e limites, **Cadernos De Pesquisa**, v.48, n.168, p.388-411, 2018.

UNESCO. Relatório. **Educação um tesouro a descobrir.** Comissão Internacional sobre Educação para o século XXI, Ed. Cortez,1998.

ZERO, Beatriz de M.; OLIVEIRA, Paulo C.; D`ALESSANDRO NETO, Reynaldo. Conhecimento matemático para o ensino através do Estado da Arte envolvendo Números Racionais em pesquisas brasileiras**. Revista Baiana de Educação Matemática**. v. 02, n. 01, p. 01-23, 2021.