UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

FOZAT DOJAS NETO

# UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE ÁREAS E VOLUMES

SÃO CARLOS – SP
2023

FOZAT DOJAS NETO

UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE ÁREAS E VOLUMES

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

Orientador: Prof. Dr. Wladimir Seixas

SÃO CARLOS – SP
2023

Neto, Fozat Dojas

Uma proposta didática para o ensino de áreas e volumes / Fozat Dojas Neto -- 2023.
47f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos
Orientador (a): Wladimir Seixas
Banca Examinadora: Wladimir Seixas, Adilson Eduardo Presoto, Jean Piton Gonçalves
Bibliografia

1. Áreas e volumes. 2. Princípio de Cavalieri. 3. Ensino de Geometria. I. Neto, Fozat Dojas. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Ronildo Santos Prado - CRB/8 7325

**FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**

**COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - CCM/CCET**

Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905
Telefone: (16) 33518221 - http://www.ufscar.br

DP-TCC-FA nº 18/2023/CCM/CCET

**Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso**

**Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)**

**FOLHA DE APROVAÇÃO**

**FOZAT DOJAS NETO**

**UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE ÁREAS E VOLUMES**

**Trabalho de Conclusão de Curso**

**Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos**

São Carlos, 03 de abril de 2023

**ASSINATURAS E CIÊNCIAS**

| **Cargo/Função** | **Nome Completo** |
|---|---|
| Orientador | Wladimir Seixas |
| Membro da Banca 1 | Adilson Eduardo Presoto |
| Membro da Banca 2 | Jean Piton Gonçalves |

Documento assinado eletronicamente por **Wladimir Seixas**, **Professor(a) do Ensino Superior**, em 07/06/2023, às 23:14, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Adilson Eduardo Presoto**, **Professor(a) do Ensino Superior**, em 16/06/2023, às 11:13, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Jean Piton Goncalves**, **Professor(a) do Ensino Superior**, em 19/06/2023, às 10:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufscar.br/autenticacao, informando o código verificador **1025702** e o código CRC **937244CB**.

# RESUMO

O presente Trabalho de Conclusão de Curso discute sobre geometria plana e espacial de modo a investigar sobre a abordagem dos temas áreas e volumes em alguns livros didáticos selecionados, estudar detalhadamente os pré-requisitos teóricos e o Princípio de Cavalieri. Este trabalho tem por objetivo apresentar uma proposta didática que promova as habilidades EM13MAT201 e EM13MAT504 dentro das competências 2 e 5, respectivamente, para a área da Matemática e Tecnologias da Base Nacional Curricular Comum - BNCC. Propõe-se, então, apresentar um estudo de modo sequencial que culmine em um proposta didática a fim de nortear professores da Educação Básica com respeito ao tema.

**Palavras-chave:** Áreas e Volumes. Princípio de Cavalieri. Ensino de Geometria.

# ABSTRACT

This monograph discusses plane and spatial geometry in order to investigate the approach of the topics of areas and volumes in selected textbooks, as well as to study the theoretical prerequisites and the Cavalieri's Principle in detail. The objective of this work is to present a didactic proposal that promotes the skills EM13MAT201 and EM13MAT504 within competencies 2 and 5, respectively, for the Mathematics and Technologies area of the National Common Curricular Base - BNCC. Thus, a sequential study is proposed that culminates in a didactic proposal in order to guide Basic Education teachers with respect to the topic.

**Keywords:** Area and volume. Cavalieri's Principle. Teaching of geometry.

# LISTA DE FIGURAS

## SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

Durante a minha trajetória acadêmica, em particular nos estágios e no Programa de Residência Pedagógica, tenho constatado que a disciplina de Matemática na Educação Básica representa uma das principais dificuldades enfrentadas pelos estudantes. No entanto, não se trata de uma dificuldade particular ou localizada, mas sim de um problema nacional, evidenciado, por exemplo, na edição de 2018 do PISA (Programme for International Student Assessment)[1] que constatou que 68,1% dos estudantes brasileiros com 15 anos de idade não possuem nível básico de Matemática. Esse baixo desempenho interfere diretamente no ensino e aprendizagem do Ensino Médio, uma vez que o currículo comum no Brasil é espiralado, ou seja, os conteúdos são revisitados várias vezes ao longo da Educação Básica em diferentes níveis de complexidade.

Conforme experiências vivenciadas por mim nas escolas, identifiquei dificuldades de interpretação e compreensão da Matemática abordada na Educação Básica, principalmente no que se refere a abstrair conceitos e enxergar a Matemática de maneira humana, como parte das necessidades dos indivíduos em sociedade no mundo atual e historicamente. Segundo Proença et al. (2022), pesquisas que buscaram analisar como alunos da Educação Básica resolvem problemas matemáticos envolvendo conteúdos estudados anteriormente revelaram que eles encontram dificuldades em todas os passos de resolução de problemas, especialmente na etapa de compreensão de problemas. É nesse contexto que realizaremos um estudo referente à áreas e volumes em materiais didáticos tendo a seguinte questão norteadora: investigar como são abordados os conceitos de área e volume nos livros didáticos trabalhados em sala de aula e, ao final deste trabalho, elaborar uma proposta didática. Utilizamos como referência os livros de Dante e Viana (2016) e Pompeo (2013). Após a análise e revisão teórica da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, apresentamos uma proposta didática que promova as habilidades EM13MAT201 e EM13MAT504 dentro das competências 2 e 5, respectivamente, para a área da Matemática e Tecnologias da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) referentes ao ensino de áreas e volumes no ramo da Geometria (BRASIL, 2017).

[1] <http://portal.mec.gov.br/ultimas-noticias/211-218175739/83191-pisa-2018-revela-baixo-desempenho-escolar-em-leitura-matematica-e-ciencias-no-brasil>. Acesso em 25 out. 2022

# 2 BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento disposto por normas que contempla as aprendizagens essenciais que devem ser desenvolvidas ao longo da Educação Básica (BRASIL, 2017). Temos o conhecimento que o Brasil possui uma vasta extensão territorial e, de acordo com a história, sabe-se que é um país miscigenado no que diz respeito a etnias e culturas. Sendo assim, apresenta diferenças climáticas, territoriais, econômicas, sociais e culturais entre suas diversas regiões. Por esses fatores, os currículos escolares no Brasil variam de acordo com as características de cada local, ou seja, não é um único currículo que contempla todo o país, o que não quer dizer que não possui base nacional comum presente em todos os currículos.

De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), no artigo 26, é decretado que os currículos na Educação Básica deverão ser estruturados por duas partes que são dispostas da seguinte forma[1]

> **Art. 26**. Os currículos da educação infantil, do ensino fundamental e do ensino médio devem ter base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e em cada estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e dos educandos.

Desse modo, fica claro a importância na BNCC como base norteadora na elaboração dos currículos escolares contendo aprendizagens essenciais designando competências e habilidades que são esperadas por parte dos estudantes no decorrer da Educação Básica.

Referente ao Ensino Fundamental e Ensino Médio, de modo geral, a BNCC é organizada em competências e habilidades a serem atingidas pelos estudantes. A primeira refere-se as competências a serem desenvolvidas durante a Educação Básica e a segunda é inerente a cada área de conhecimento, que são relativas às aprendizagens essenciais para assegurar o desenvolvimento das competências (BRASIL, 2017).

O enfoque deste trabalho é estudar e aprofundar, dentro da área de conhecimento Matemática e suas Tecnologias, as competências específicas 2 e 5, mais precisamente as respectivas habilidades EM13MAT201 e EM13MAT504 que estão na etapa do Ensino Médio da BNCC.

Dentre as competências específicas, têm-se

> **Competência específica 2**: Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática (BRASIL, 2017, p. 531 ).

1 <https://www.jusbrasil.com.br/topicos/11691973/artigo-26-da-lei-n-9394-de-20-de-dezembro-de-1996>. Acesso em: 15 set. 2022.

> **Competência específica 5**: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2017, p. 531)

Nessas competências, em específico, trabalharemos as habilidades EM13MAT201 e EM13MAT504. São elas:

> **(EM13MAT201)** Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa (BRASIL, 2017, p. 534).

> **(EM13MAT504)** Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras (BRASIL, 2017, p. 541).

O objetivo final deste trabalho será então apresentar uma proposta didática que promova essas competências e habilidades. No entanto, antes disso, realizaremos um estudo sobre linguagem, conteúdo e aplicações utilizando como referência Dante e Viana (2016) e Pompeo (2013) e um estudo de pré-requisitos teóricos que diz respeito aos assuntos de áreas e volumes, destacando-se o Princípio de Cavalieri.

# 3 ÁREAS E VOLUMES NOS LIVROS DIDÁTICOS

Neste capítulo faremos uma breve discussão de alguns textos didáticos avaliando a abordagem do tópico de áreas e volumes tanto no nível da Educação Básica como também na formação de professores. Utilizaremos também como referencial para a avaliação e análise o livro *Exames de textos - Análise de livros Matemáticos para o Ensino Médio* de Lima (2001) que verificou obras a fim de destacar pontos positivos e negativos nos livros didáticos adotados pelas escolas brasileiras. Em 2001 analisou detalhadamente 12 coleções de livros didáticos utilizados no Ensino Médio de Matemática no Brasil. Nesse sentido, a intenção é verificar se as sugestões apresentadas foram incorporadas aos texto analisados neste trabalho.

Nesse sentido, fará parte da bibliografia a ser analisada as seguintes obras:

– *Matemática - Contexto e Aplicações: Manual do Professor* de Luiz Roberto Dante (DANTE; VIANA, 2016),

– *Fundamentos de Matemática Elementar: geometria plana* de Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeo (POMPEO, 2013).

A discussão será realizada de acordo com dois princípios: Linguagem e Conteúdo e Aplicações, sendo importante comparar as diferentes maneiras de abordagem dos livros didáticos. Antes de tudo, deixamos claro que a comparação não tem o objetivo de mostrar uma ideia depreciativa de alguma obra, mas sim mostrar suas diferenças e características que faz de si ser única.

## 3.1 ANÁLISE DOS LIVROS: LINGUAGEM E CONTEÚDO

Nesta seção analisaremos a linguagem e o conteúdo utilizado pelas obras consideradas no que se trata aos conceitos, explicações, aplicações e exemplos.

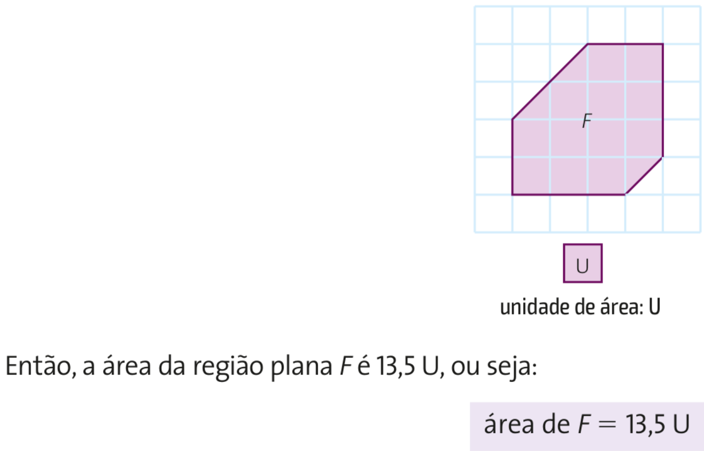
A obra apresentada por Dante e Viana (2016) possui uma linguagem simples permeada por trechos que abrange a história da matemática, enriquecendo assim sua obra. No capítulo 6, seção 2 - áreas: medidas e superfície é realizado um estudo sobre cálculo de áreas, o qual estamos interessados em analisar. Então vamos comparar essa nova versão publicada em 2016 com a análise de Lima (2001) elaborada a partir da versão vigente na época. Espera-se com isso, verificarmos se ocorreram melhorias de acordo com os comentários críticos.

De início, destacamos que a análise de Lima (2001) evidencia que não é realizada, sequer de modo intuitivo, uma tentativa de explicar o significado de área, diferentemente da edição mais nova em que tal crítica foi adaptada ao livro. Na edição atual foi inserido um subtópico na seção que trata de área chamado “*A ideia intuitiva de área*"com o objetivo de apresentar a ideia de medir uma região do plano a partir de uma malha quadriculada comparando essa região com o que o autor chama de *unidade de área* representada por um quadrado da malha quadriculada.

Essa comparação se dá por meio de um número que expressa a quantidade de unidades de áreas presentes na região considerada do plano.

O exemplo dado no texto é a região poligonal $F$ e a unidade de área $U$ apresentado na Figura 3.1.

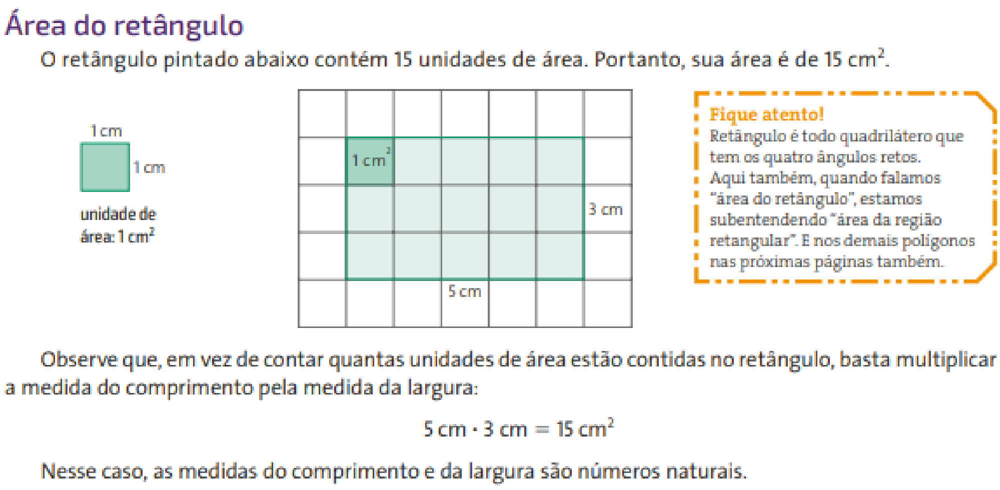
Figura 3.1 – Noção intuitiva do conceito de área.




Fonte: Dante e Viana (2016, p. 124).

Na apresentação das fórmulas Dante e Viana (2016) tem a preocupação de sempre utilizar um apelo geométrico com o objetivo de facilitar a compreensão por parte dos estudantes, além de nos casos mais simples também desenvolver uma manipulação algébrica com base nas figuras geométricas. Vejamos exemplos apresentados nas Figuras 3.2 e 3.3 a seguir.

Figura 3.2 – Exemplo motivador do cálculo de área do retângulo a partir da unidade de área.




Fonte: Dante e Viana (2016, p. 126).

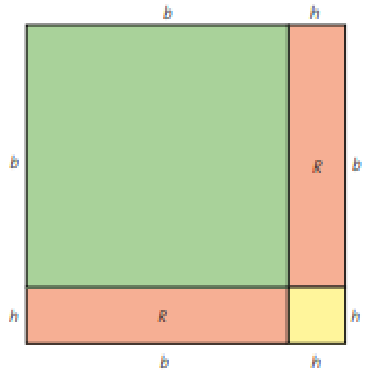
Figura 3.3 – Área de um triângulo equilátero a partir de figura e manipulações algébricas.

Vamos provar que, se a medida da base ($b$) e a medida da altura ($h$) forem números reais quaisquer, a área do retângulo $R$ é dada por:

$$\text{área de } R = b \cdot h$$

Consideremos um retângulo $R$ de base $b$ e altura $h$, em que $b$ e $h$ são números reais.


Construímos um quadrado cuja medida do lado é $b + h$, que contém duas cópias de $R$, e mais dois quadrados, um cujo lado mede $b$ e outro cujo lado mede $h$.




A área desse quadrado ($Q$) é dada pelo quadrado de uma soma:

$$\text{área de } Q = (b + h)^2 = b^2 + 2bh + h^2 \quad \text{I}$$

Como os quadrados têm áreas iguais a $h^2$ e $b^2$, concluímos que:

$$\text{área de } Q = b^2 + h^2 + 2 \cdot (\text{área de } R) \quad \text{II}$$

Comparando I e II, chegamos a:

$$\boxed{\text{área de } R = b \cdot h}$$

Fonte: Dante e Viana (2016, p. 126).

Em contrapartida, observa-se no livro de Pompeo (2013) uma linguagem mais direta e formal quando comparado com Dante e Viana (2016) fazendo-se presente uma abordagem mais objetiva utilizando uma linguagem rica em elementos matemáticos, porém não fazendo uso da história da Matemática ou contextualizações.

Em uma primeira análise, verificamos que o livro de Pompeo (2013) não traz consigo uma abordagem histórica de áreas que teve origem a partir de medições de terras como mostra em Dante e Viana (2016). Já de início, são enunciados e demonstrados os seguintes teoremas:

**Teorema 3.1.** *Dois paralelogramos com suas respectivas bases e alturas congruentes são equivalentes.*

**Teorema 3.2.** *Dados dois retângulos de bases congruentes $R_1$ e $R_2$ com alturas $h_1$ e $h_2$,* *respectivamente, a razão entre esses dois retângulos é igual a razão entre suas alturas. Ou seja,*

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{h_1}{h_2}.$$

**Teorema 3.3.** *Dados dois retângulos quaisquer $R_1$ e $R_2$ com bases $b_1$ e $b_2$ e alturas $h_1$ e $h_2$, respectivamente, a razão entre esses dois retângulos é igual ao produto da razão entre as bases pela razão entre as alturas. Isto é,*

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{h_1}{h_2}.$$

Partindo dos Teoremas 3.1, 3.2 e 3.3, o livro de Pompeo (2013) traz, de maneira formal e objetiva, as fórmulas de área dos seguintes polígonos: retângulo, paralelogramo e triângulo. Sabendo as áreas desses três polígonos (retângulo, paralelogramo e triângulo) seguem, também de uma análise objetiva, as áreas do quadrado, do losango e do paralelogramo (respectivamente). Como exemplo, a Figura 3.4 mostra a abordagem da área do retângulo no texto de Pompeo (2013).

Figura 3.4 – Área do retângulo.

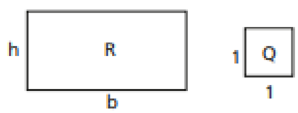
## II. Áreas de polígonos

### 243. Retângulo

Dado o retângulo R(b, h) e fixado o quadrado Q(1, 1) como unitário, temos:

Área do retângulo R(b, h) =

$$= A_R = \frac{R(b, h)}{Q(1, 1)}$$




Em vista do item 242, vem

$$A_R = \frac{R(b, h)}{Q(1, 1)} = \frac{b}{1} \cdot \frac{h}{1} \Rightarrow A_R = (\text{medida de } b) \cdot (\text{medida de } h)$$

que será representada simplesmente por:

$$\boxed{A_R = b \cdot h}$$

Fonte: Adaptado pelo autor (POMPEO, 2013, p. 305-306).

É evidente a diferença entre os capítulos das duas obras. Enquanto Dante e Viana (2016) abordam os temas de modo mais detalhado, com uma quantidade menor de conteúdo presente, Pompeo (2013) é mais conteudista, abordando de maneira mais objetiva e acentuada o rigor matemático, fazendo-se presentes teoremas e suas demonstrações. Basta observar a riqueza dos detalhes, figuras, cores, manipulações e formalismo entre as Figuras 3.2, 3.3 e 3.4 para perceber características distintas de cada autor.

Além disso, quando nos referimos a conteúdos, notamos um foco maior na obra de Pompeo (2013) uma vez que apresenta as áreas do segmento circular, da coroa circular além da área do triângulo em função do raio de qualquer das circunferências ex-inscritas que não são abordadas no livro de Dante e Viana (2016). Fica claro, portanto, as diferentes abordagens de linguagem e conteúdos que ambos os livros adotam.

Após uma análise crítica das obras em relação ao cálculo de áreas, é essencial que realizemos uma análise semelhante no que diz respeito ao cálculo de volumes de sólidos. Para tanto, utilizaremos novamente a análise de Lima (2001), a fim de discutir se ocorreram melhorias com base nas críticas anteriormente expostas.

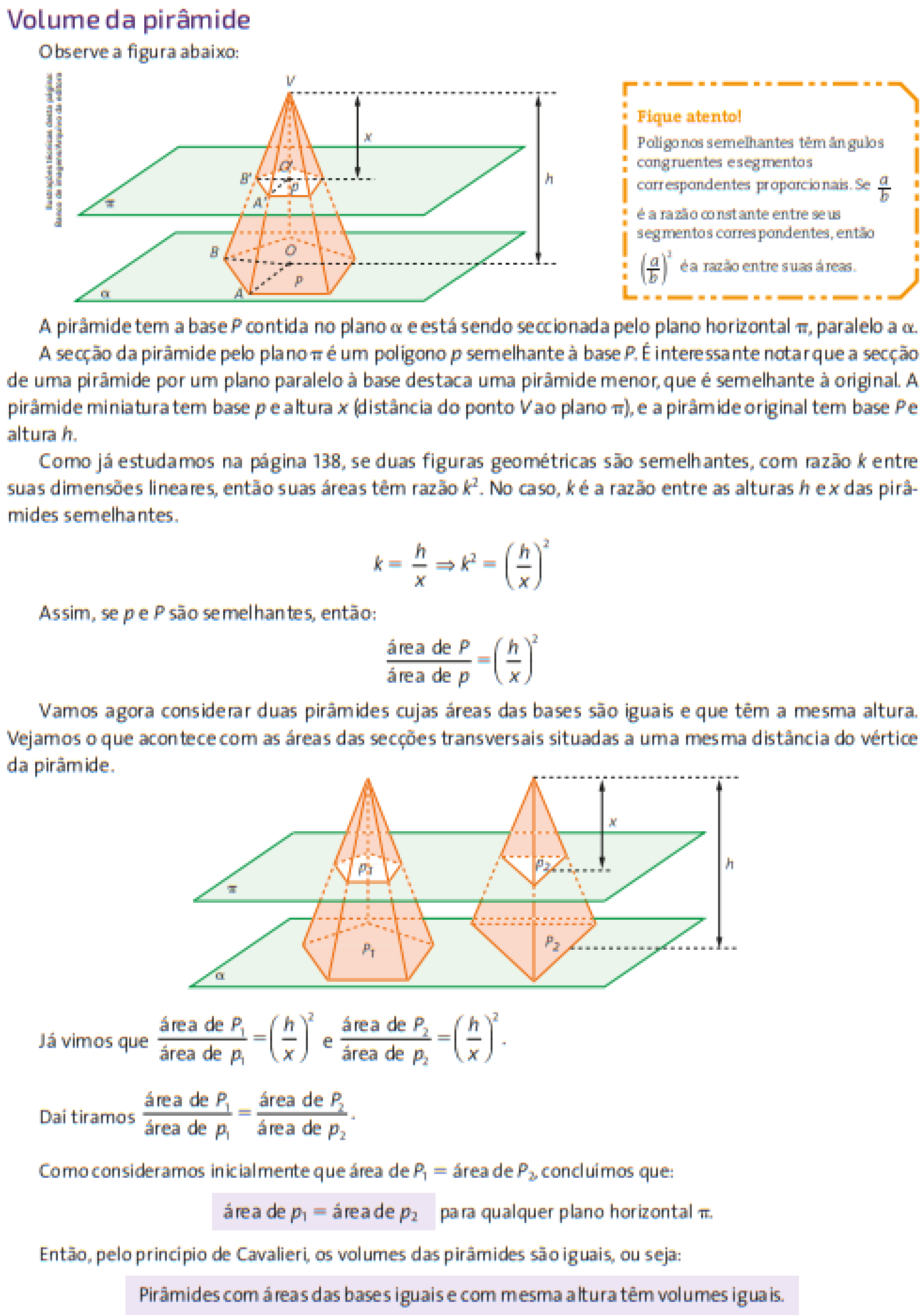
Em primeira análise, referente a Dante e Viana (2016), é efetuada uma ideia intuitiva de volume comparando um sólido $S$ com a unidade de volume em que o número de vezes que a unidade de volume está contida no sólido $S$ é chamado de volume de $S$. Desse modo, existe um tópico sobre a ideia intuitiva de volume que segundo a crítica de Lima (2001) não possuía. No entanto, nessa edição ainda permanece um erro claro de conceito fazendo uso da frase “Medida do volume” que de acordo com Lima (2001) é um pleonasmo, pois volume é um número que por sua vez já remete a sua própria medida. Sendo assim, há um excesso de palavras para exprimir um enunciado deixando-o redundante.

Lima (2001) fez uma crítica relativa ao particularismo na forma de volume de um bloco retangular ficando preso em arestas com medidas inteiras na versão da época. Nas edições mais atuais de Dante e Viana (2016) não há mudanças consideráveis nesse aspecto.

No tópico reservado ao cálculo do volume do prisma, a crítica feita por Lima (2001) continua presente no livro de Dante e Viana (2016). Isso se deve ao fato de que, na explicação apresentada, apenas é mencionado que todas as seções transversais são congruentes, sem oferecer qualquer elucidação a respeito.

Referente ao volume da pirâmide exibida na página 191 de Dante e Viana (2016), vê-se um avanço tendo em vista que foram adicionados detalhes na edição atual e que foram criticados por Lima (2001). Por exemplo, foi explicado o que significa $p$ e $P$. Além disso, no capítulo de áreas, mais especificamente na página 138 de Dante e Viana (2016), o texto aborda a razão entre áreas de polígonos semelhantes de modo que, se $k$ for a razão entre seus lados homólogos, então a razão entre suas áreas será $k^2$. Essas foram atualizações realizadas com o objetivo de aprimorar o aprendizado dos estudantes. Consideremos a Figura 3.5.

Figura 3.5 – Volume da pirâmide.



## Volume da pirâmide

Observe a figura abaixo:



**Fique atento!**

Polígonos semelhantes têm ângulos congruentes e segmentos correspondentes proporcionais. Se $\frac{a}{b}$ é a razão constante entre seus segmentos correspondentes, então $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ é a razão entre suas áreas.

A pirâmide tem a base $P$ contida no plano $\alpha$ e está sendo seccionada pelo plano horizontal $\pi$, paralelo a $\alpha$.

A secção da pirâmide pelo plano $\pi$ é um polígono $p$ semelhante à base $P$. É interessante notar que a secção de uma pirâmide por um plano paralelo à base destaca uma pirâmide menor, que é semelhante à original. A pirâmide miniatura tem base $p$ e altura $x$ (distância do ponto $V$ ao plano $\pi$), e a pirâmide original tem base $P$ e altura $h$.

Como já estudamos na página 138, se duas figuras geométricas são semelhantes, com razão $k$ entre suas dimensões lineares, então suas áreas têm razão $k^2$. No caso, $k$ é a razão entre as alturas $h$ e $x$ das pirâmides semelhantes.

$$k = \frac{h}{x} \Rightarrow k^2 = \left(\frac{h}{x}\right)^2$$

Assim, se $p$ e $P$ são semelhantes, então:

$$\frac{\text{área de } P}{\text{área de } p} = \left(\frac{h}{x}\right)^2$$

Vamos agora considerar duas pirâmides cujas áreas das bases são iguais e que têm a mesma altura. Vejamos o que acontece com as áreas das secções transversais situadas a uma mesma distância do vértice da pirâmide.



Já vimos que $\frac{\text{área de } P_1}{\text{área de } p_1} = \left(\frac{h}{x}\right)^2$ e $\frac{\text{área de } P_2}{\text{área de } p_2} = \left(\frac{h}{x}\right)^2$.

Daí tiramos $\frac{\text{área de } P_1}{\text{área de } p_1} = \frac{\text{área de } P_2}{\text{área de } p_2}$.

Como consideramos inicialmente que área de $P_1$ = área de $P_2$, concluímos que:

área de $p_1$ = área de $p_2$ para qualquer plano horizontal $\pi$.

Então, pelo princípio de Cavalieri, os volumes das pirâmides são iguais, ou seja:

Pirâmides com áreas das bases iguais e com mesma altura têm volumes iguais.

Fonte: Dante e Viana (2016, p. 191).

Como podemos observar na Figura 3.5 de Dante e Viana (2016), há uma explicação um pouco mais detalhada, contendo figuras ilustrativas e alguns erros cometidos anteriormente que foram corrigidos. Por exemplo, houve a inclusão da menção de que uma seção por um plano paralelo à base de uma pirâmide destaca uma pirâmide menor que é semelhante à original. Cabe salientar que ao longo do livro sempre aparecem destaques relembrando informações importantes que são fundamentais para o entendimento do tópico, não sendo necessário voltar páginas ou capítulos do livro para localizá-lo. É uma estratégia muito boa utilizada pelo autor a fim impulsionar o aprendizado dos alunos revisitando informações essenciais. Na Figura 3.5 vemos exemplos desse destaque em *Fique Atento!*, lembrando o leitor sobre um tema que será necessário para a compreensão da explicação do volume da pirâmide.

Além disso, na obra de Dante e Viana (2016) há a ausência de cilindros e cones neste tópico, pois mesmo sendo casos particulares de prismas e pirâmides, respectivamente, é essencial que façam parte da aprendizagem dos estudantes, visto que são sólidos que participam do cotidiano da população.

## 3.2 ANÁLISE DOS LIVROS: APLICAÇÕES

No que diz respeito aos livros mencionados na seção 3.1, faremos nesta seção uma análise referente a aplicações no sentido de que o objeto principal não é o assunto estudado, ou seja, aplicações que fazem sentido para os estudantes e que façam parte do cotidiano da sociedade.

Sabemos que áreas e volumes são tópicos que são estudados pelos estudantes no Ensino Médio e que apresentam diversas aplicações no dia-a-dia, ou seja, é fácil vivenciar esses temas em tarefas simples ou simplesmente observá-los em locais como, por exemplo, áreas de terrenos e volumes de caixas d'água ou silos.

Dessa forma, em relação à obra de Dante e Viana (2016), nos exercícios referentes ao cálculo de áreas, há uma questão resolvida do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) que apresenta uma aplicação envolvendo a decoração de vitrais realizada por um arquiteto, a fim de descobrir o custo final dessa decoração com base nos custos parciais de cada parte do vitral, conforme ilustrado na Figura 3.6.

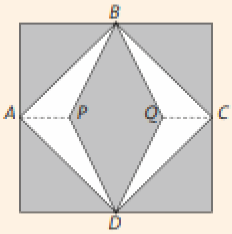
Figura 3.6 – Aplicação de áreas

## Exercício resolvido

passo a passo: exercício 6

### Resolvido passo a passo

**6.** (Enem) Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura ao lado.




Reprodução/Enem 2012

Nesta figura, os pontos *A*, *B*, *C* e *D* são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos *AP* e *QC* medem 1/4 da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R$ 30,00 o $m^2$, e outro para a parte mais clara (regiões *ABPDA* e *BCDQB*), que custa R$ 50,00 o $m^2$.
De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?

a) R$ 22,50 c) R$ 40,00 e) R$ 45,00
b) R$ 35,00 d) R$ 42,50

**1. Lendo e compreendendo**

a) O que é dado no problema?
É dado o formato de um vitral, com suas áreas diferenciadas visivelmente, suas medidas e o preço do $m^2$ de cada tipo de vitral.

b) O que se pede?
Pede-se o custo dos materiais necessários para fabricação de um vitral.

**2. Planejando a solução**

Para simplificar a forma de solucionar tal problema, é bom dividir sua resolução em etapas:

I. Cálculo da área do vitral confeccionado com o material representado pela parte sombreada, a qual é composta por quatro triângulos retângulos de catetos medindo 0,5 m e um losango de diagonal maior medindo 1 m e diagonal menor medindo 0,5 m.

II. Cálculo da área do vitral confeccionado com o material representado pela parte clara.

III. Soma dos produtos entre a área de cada parte pelo custo de cada tipo de material.

**3. Executando o que foi planejado**

**Etapa I:**

$4 \times \text{área dos triângulos retângulos} = 4 \times \frac{(0{,}5)^2}{2} = 0{,}5$

$1 \times \text{área do losango} = \frac{(D \times d)}{2} = \frac{1 \times 0{,}5}{2} = 0{,}25$

$0{,}5 + 0{,}25 = 0{,}75$

Logo, 0,75 $m^2$ é a medida da área da parte sombreada.

**Etapa II:**

área da parte clara = área do vitral − área da parte sombreada $\Rightarrow$ área da parte clara $= (1)^2 - 0{,}75 = 0{,}25$

Logo, 0,25 $m^2$ é a medida da área da parte clara.

**Etapa III:**

Custo com material (representado pela parte sombreada) $= 0{,}75 \cdot 30 = 22{,}50$

Custo com material (representado pela parte clara) =
$= 0{,}25 \cdot 50 = 12{,}50$

Custo total $= 22{,}50 + 12{,}50 = 35{,}00$

Logo, o custo total é de R$ 35,00.

**4. Emitindo a resposta**

A resposta é a alternativa **b**.

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte: Dante e Viana (2016, p. 131).

Verifica-se que ampliou-se o problema nessa aplicação, incluindo mais uma discussão em equipe e uma pesquisa como mostra a Figura 3.7.

Figura 3.7 – Continuação da aplicação - problema ampliado

**5. Ampliando o problema**

a) Sabe-se que a fachada do edifício possui 80 m de altura, 40 m de comprimento e toda ela será decorada com vitrais. Sendo assim, qual o custo que o construtor terá para instalar os vitrais, sabendo-se ainda que a mão de obra para instalação é de R$ 10,00 por $m^2$?
O custo total é de R$ 144 000,00.

b) *Discussão em equipe*
Com os colegas, monte outros tipos de vitrais compostos de outras formas geométricas e mais de dois tipos de materiais, definindo valores para cada um deles. Ao final do trabalho, calcule o custo com o material para fabricação dos vitrais. Logo, vocês estarão exercitando os conhecimentos em geometria e na matemática em geral.

c) *Pesquisa*
Pesquise nas construtoras de sua região o custo médio de produção dos diferentes tipos de imóveis e, como contrapartida, o valor de venda desses imóveis. Ao final, conclua por que o ramo da construção civil teve um elevado crescimento na última década.

Fonte: Dante e Viana (2016, p. 132)

Desta maneira, com esses estímulos, os alunos conseguem ver e interpretar a matemática em seu cotidiano, ampliando a forma de pensar, impulsionando o desenvolvimento do pensamento lógico-matemático e estimulando a independência do aluno a compreender que a matemática está presente nas mais variadas ações do cotidiano. De acordo com as competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental na BNCC, que é

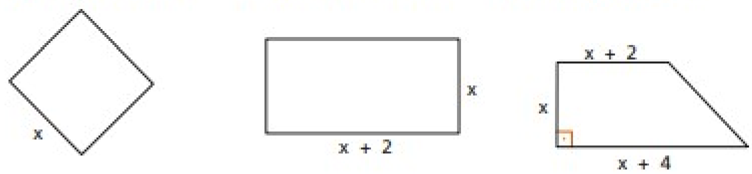
> Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho. (BRASIL, 2017, p. 267)

No que diz respeito às aplicações na obra de Pompeo (2013), inicialmente observa-se dentro do capítulo exercícios com enunciados curtos se preocupando primeiro com o conteúdo, conforme mostra a Figura 3.8.

Figura 3.8 – Exercício com foco no conteúdo

**794.** A área do polígono é dada entre parênteses, em cada caso. Determine $x$.

a) quadrado (36 $m^2$) c) retângulo (24 $m^2$) e) trapézio (18 $m^2$)




Fonte: Pompeo (2013, p. 310).

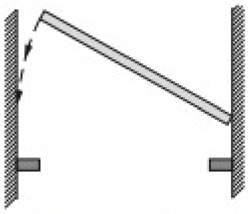
Por fim, o livro apresenta um capítulo com apenas exercício de vestibulares, no qual encontra-se tanto exercício com foco no conteúdo como também exercícios contextualizados com problemas que fazem parte do cotidiano da sociedade, conforme mostra a Figura 3.9.

Figura 3.9 – Exercício com foco no conteúdo e problema contextualizado

**18.** (ITA-SP) Considere o triângulo ABC isósceles em que o ângulo distinto dos demais, $B\hat{A}C$, mede 40°. Sobre o lado $\overline{AB}$, tome o ponto E tal que $A\hat{C}E = 15°$. Sobre o lado $\overline{AC}$, tome o ponto D tal que $D\hat{B}C = 35°$. Então, o ângulo $E\hat{D}B$ vale

a) 35°
b) 45°
c) 55°
d) 75°
e) 85°

**19.** (UF-RJ) Uma prateleira de um metro de comprimento e 4,4 cm de espessura deve ser encaixada entre duas paredes planas e paralelas. Por razões operacionais, a prateleira deve ser colocada enviesada (inclinada), para depois ser girada até a posição final, como indica a figura.



Se a distância entre as paredes é de um metro e um milímetro, é possível encaixar a prateleira?

Fonte: Pompeo (2013, p. 377).

Portanto, após realizar um estudo sobre a abordagem dos assuntos de áreas e volumes nas obras de Dante e Viana (2016) e Pompeo (2013), é essencial que realizemos uma revisão teórica detalhada sobre esse tema, a fim de embasar a proposta didática apresentada ao final deste trabalho.

# 4 PRÉ REQUISITOS TEÓRICOS

Neste capítulo realizaremos um estudo com enfoque no conteúdo revisando o cálculo de áreas de polígonos fundamentando também o estudo da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri. Nos baseamos nos textos de Gerônimo e Franco (2010), Machado (2012a) e Machado (2012b).

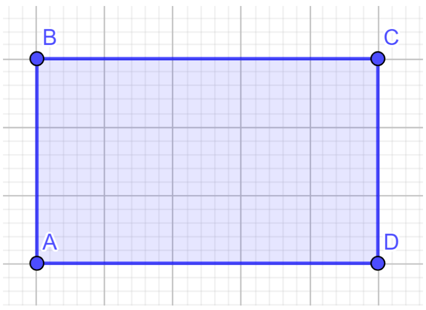
## 4.1 ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

Nesta seção revisaremos áreas de regiões poligonais. Para iniciar este estudo será necessário uma noção introdutória e intuitiva de área e quatro axiomas relacionados a medidas.

De modo intuitivo podemos pensar em área como um preenchimento de uma região do plano.

**Exemplo 4.1.** Dado um retângulo no plano, sabemos que ele ocupa uma região com seus pontos interiores e uma maneira intuitiva e inicial de medir o seu "preenchimento" é dividi-lo em quadrados iguais. Assim, a "área" seria a quantidade de quadrados sendo os quadrados (tamanho escolhido) a unidade de área.

Figura 4.1 – Noção intuitiva de área por meio de um exemplo no retângulo




Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Figura 4.1 os lados do retângulo foram divididos em partes iguais de modo a formar quadrados em seu interior, sendo o lado $AB$ dividido em três partes iguais e o lado $BC$ em sete partes iguais obtendo assim um total de 15 quadrados. Dessa forma, considerando os quadrados como unidade de área, podemos dizer que o retângulo $ABCD$ possui área 15.

Uma obervação que podemos fazer é que nem sempre a divisão da figuras em quadrados é exata, visto que depende das medidas do quadrado que escolhermos como unidade de área em relação as medidas do retângulo.

Para dar continuidade ao nosso estudo de áreas, vamos partir dessa noção intuitiva para uma definição mais rigorosa e formal sobre o assunto. Nesse sentido, realizaremos uma abordagem com axiomas a fim de trabalhar com áreas de algumas regiões particulares. Dessa forma, estudaremos um caso particular de regiões planas: as regiões poligonais, a começar pela região triangular.

**Definição 4.1** (Região triangular)**.** Uma região triangular é o figura plana constituída por um triângulo e seus pontos interiores.

**Definição 4.2** (Região Poligonal)**.** Uma região poligonal é uma região do plano determinada pela união de finitas regiões triangulares tais que quaisquer dois desses triângulos não possuem pontos interiores em comum e seus vértices são os vértices do polígono.

Conforme já mencionado, adotaremos uma abordagem axiomática para estudar as áreas de regiões poligonais. Neste sentido, apresentaremos a seguir quatro axiomas fundamentais relacionados a medidas.

**Axioma 1.** Toda região poligonal $R$ está associada a um único número real positivo $A(R)$.

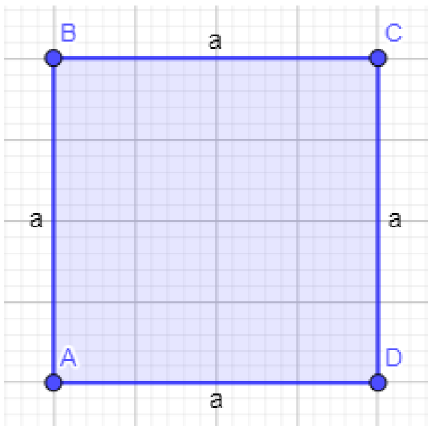
**Definição 4.3.** O número real positivo $A(R)$ do Axioma 1 é a área da região poligonal $R$.

**Axioma 2.** Se uma região plana $R$ é a união de duas ou mais regiões planas tais que duas a duas não têm pontos interiores em comum, então a área de $R$ é a soma das áreas dessas regiões.

**Axioma 3.** Se dois triângulos são congruentes, então as regiões triangulares determinadas por eles têm a mesma área.

**Axioma 4.** A área de um quadrado é o quadrado do comprimento do seu lado.

Figura 4.2 – Quadrado de lado *a*.




Fonte: Elaborado pelo autor.

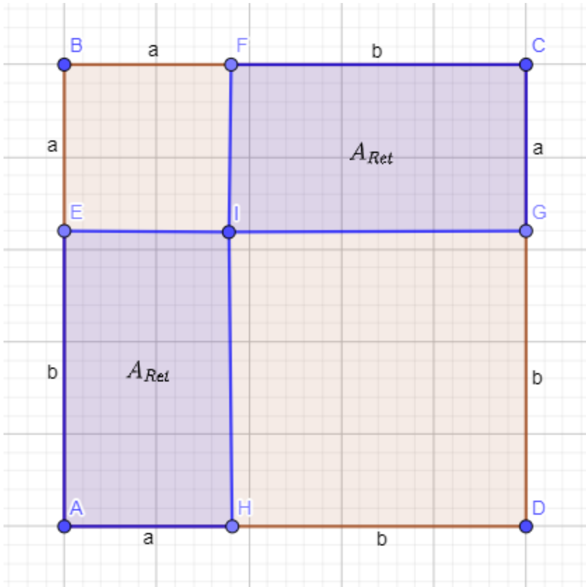
Assim, a área do quadrado representado na Figura 4.2 é $a^2$.

Vamos agora determinar as áreas das regiões planas mais conhecidas por meio desses axiomas, começando pela área de um retângulo.

**Teorema 4.1** (Área de um retângulo)**.** *A área de um retângulo á o produto das medidas de seus lados não paralelos.*

*Demonstração.* Nosso objetivo é determinar a área $A_{Ret}$.

Figura 4.3 – Quadrado de lado $a + b$.




Fonte: Elaborado pelo autor.

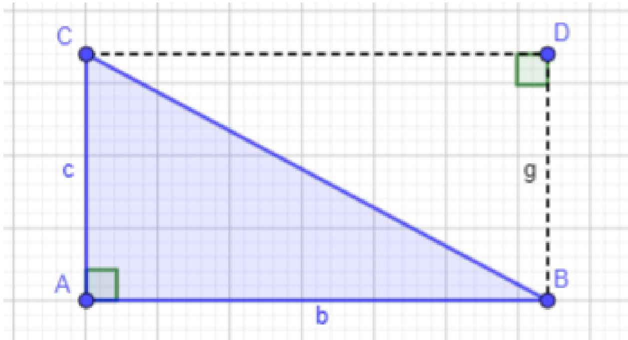
Pelo Axioma IV sabemos que a área do quadrado $ABCD$ é $(a + b)^2$, do quadrado $EBFI$ é $a^2$ e, por fim, do quadrado $HIGD$ é $b^2$. Dessa forma, pelo Axioma II obtemos

$$\begin{aligned}(a + b)^2 = 2 \cdot A_{Ret} + a^2 + b^2 &\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 2 \cdot A_{Ret} + a^2 + b^2\\ &\Rightarrow 2ab = 2 \cdot A_{Ret}\\ &\Rightarrow A_{Ret} = ab.\end{aligned}$$ □

**Corolário 4.1** (Área do triângulo retângulo)**.** *A área de um triângulo retângulo é a metade do produto da medida de seus catetos.*

*Demonstração.* Seja o triângulo $ABC$ retângulo em $\widehat{A}$, com catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medindo $b$ e $c$, respectivamente.

Figura 4.4 – Triângulo retângulo.




Fonte: Elaborado pelo autor.

Verificamos na 4.4 o retângulo *ABCD* obtido por meio de uma junção de dois triângulos congruentes. Dessa forma, pelo Axioma 3, temos que os triângulos *ABC* e *BCD* possuem a mesma área que denotaremos por $A_T$. Além disso, pelo Axioma 2, a área do retângulo *ABCD* é dada pela soma das áreas do triângulos *ABC* e *BCD* e pelo Teorema 4.1 a área do retângulo é dada por $b \cdot c$. Sendo assim, concluímos que

$$2 \cdot A_T = b \cdot c \Rightarrow A_T = \frac{b \cdot c}{2}.$$

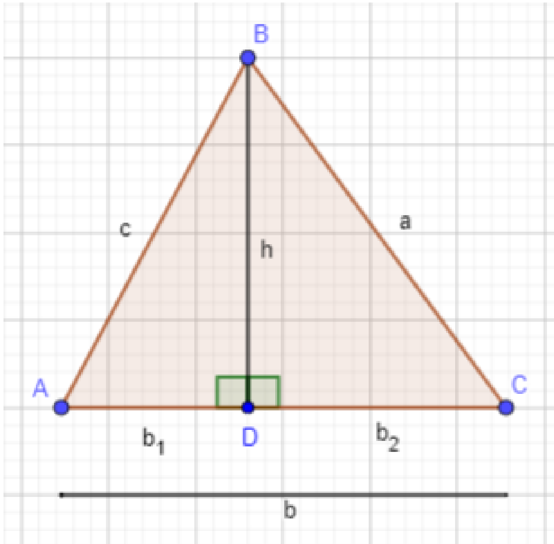
□

**Teorema 4.2** (Área de um triângulo qualquer)**.** *A área de um triângulo qualquer é o semi-produto da medida de qualquer base pela medida da altura correspondente.*

*Demonstração.* Existem três casos de triângulos a serem considerados, são eles: triângulo acutângulo, triângulo retângulo e triângulo obtusângulo.

a) Para o caso do triângulo acutângulo sabemos que os pés das perpendiculares de uma base qualquer escolhida está entre dois vértices dessa base.

Figura 4.5 – Triângulo acutângulo.




Fonte: Elaborado pelo autor.

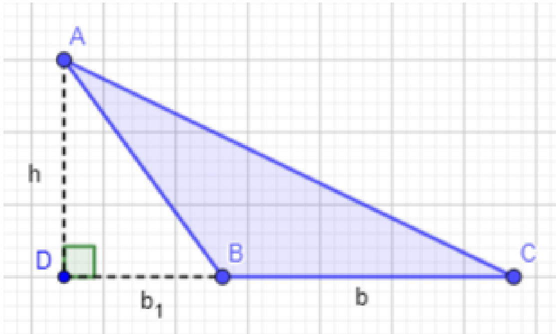
Pelo Corolário 4.1 sabemos que a área dos triângulos *ABD* e *BCD* são, respectivamente, $\dfrac{b_1 \cdot h}{2}$ e $\dfrac{b_2 \cdot h}{2}$. Além do mais, pelo Axioma 2, sabemos que a área do triângulo *ABC* que denotaremos por $A_{T_a}$ é dada pela soma das áreas dos triângulos *ABD* e *BCD*, ou seja,

$$A_{T_a} = \frac{b_1 \cdot h}{2} + \frac{b_2 \cdot h}{2} = \frac{(b_1 + b_2)h}{2} = \frac{b \cdot h}{2}.$$

b) O caso do triângulo retângulo é o Corolário 4.1.

c) Para o caso do triângulo obtusângulo, um dos pés das perpendiculares se posiciona conforme na Figura 4.6, isto é, externamente à região interna do triângulo, e os outros dois pés das perpendiculares de uma base está entre dois vértices dessa base. Vamos analisar o caso o primeiro caso, haja vista que os outros dois seguem análogos os processos do item (a).

Figura 4.6 – Triângulo obtusângulo.




Fonte: Elaborado pelo autor.

Pelo Axioma 2, a área do triângulo *ADC* é dada pela soma das áreas dos triângulos *ADB* e *ABC*. Sabemos que pelo Corolário 4.1, as áreas dos triângulos *ADC* e *ADB* são, respectivamente, $\dfrac{(b_1+b)\cdot h}{2}$ e $\dfrac{b_1 \cdot h}{2}$. Denotando a área do triângulo *ABC* por $A_{To}$, temos

$$\begin{aligned}\frac{(b_1+b)\cdot h}{2} = \frac{b_1\cdot h}{2} + A_{To} &\Rightarrow A_{To} = \frac{(b_1+b)\cdot h}{2} - \frac{b_1\cdot h}{2}\\ &\Rightarrow A_{To} = \frac{(b_1+b-b_1)\cdot h}{2}\\ &\Rightarrow A_{To} = \frac{b\cdot h}{2}.\end{aligned}$$

Com todas as possibilidades esgotadas, o resultado segue. □

Para demonstrar que a área de um círculo é $\pi r^2$, precisaremos demonstrar antes alguns resultados importantes.

**Lema 4.1.** *A área de um polígono convexo regular inscrito numa circunferência é menor do que a área de um polígono convexo regular circunscrito a circunferência.*

*Demonstração.* Consideremos dois polígonos convexos regulares sendo um inscrito e o outro circunscrito a uma circunferência de raio $r$ e sejam $2p_i$ e $2p_c$ seus respectivos perímetros. Assim, temos que a área $A_i$ do polígono inscrito é dada por $p_i a_i$ e a área $A_c$ do polígono circunscrito é dada por $p_c a_c$, com $a_i$ e $a_c$ seus respectivos apótemas. Como o perímetro de qualquer polígono convexo inscrito em uma circunferência é menor que o perímetro de qualquer polígono convexo circunscrito a ela, temos que $p_i < P_c$. Além do mais, sabemos que $a_i < r$. Portanto, obtemos que $A_i < A_c$. □

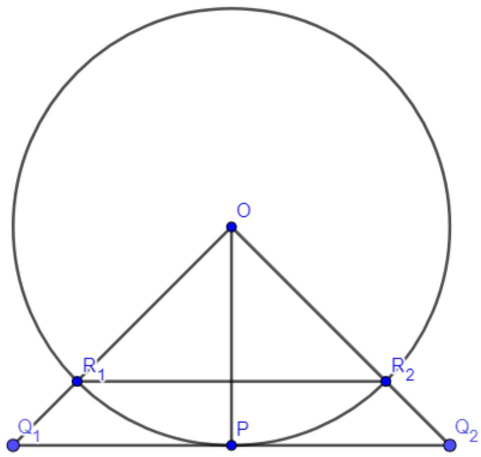
**Corolário 4.2.** *A área de qualquer polígono regular inscrito é menor que quatro vezes o quadrado do raio.*

*Demonstração.* Para qualquer polígono regular inscrito a circunferência de área $A_i$, basta considerarmos um quadrado circunscrito. Pelo Lema 4.1 segue que $A_i < 4r^2$. □

**Lema 4.2.** *Para todo $\epsilon > 0$, existem dois polígonos regulares convexos, um inscrito e outro circunscrito em uma circunferência $C$ de raio $r$, cujas diferenças entre as áreas é menor que $\epsilon$.*

*Demonstração.* Sejam dois polígonos regulares convexos, um inscrito e outro circunscrito a circunferência de raio $r$, com áreas $A_i$ e $A_c$, respectivamente. Na Figura 4.7 unimos o cento $O$ da circunferência com vértices consecutivos dos polígonos.

Figura 4.7 – Apoio para demonstração do Lema 4.2.




Fonte: Elaborado pelo autor.

Sabemos que dados dois triângulos semelhantes, a razão de suas áreas é o quadrado da razão de dois lados correspondentes quaisquer. Sendo assim,

$$\frac{A_c}{A_i} = \left(\frac{\overline{OQ_1}}{\overline{OR_1}}\right)^2 = \frac{\overline{OQ_1}^2}{\overline{OR_1}^2} = \frac{4\overline{OQ_1}^2}{4\overline{OR_1}^2} \Leftrightarrow \frac{A_c - A_i}{A_i} = \frac{4\overline{OQ_1}^2 - 4\overline{OR_1}^2}{4\overline{OR_1}^2} = \frac{4\left(\overline{OQ_1}^2 - \overline{OR_1}^2\right)}{4\overline{OR_1}^2}.$$

Como $\overline{OR_1} = r$, então

$$\frac{A_c - A_i}{A_i} = \frac{4\left(\overline{OQ_1}^2 - \overline{OR_1}^2\right)}{4r^2}.$$

Pelo Corolário 4.2 temos que $A_i < 4r^2$. Logo,

$$A_c - A_i < 4\left(\overline{OQ_1}^2 - \overline{OR_1}^2\right) = 4\left(\overline{OQ_1}^2 - \overline{OP}^2\right).$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo $OQ_1P$, temos que $\overline{OQ_1}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{Q_1P}^2$, ou seja,

$\overline{OQ_1}^2 - \overline{OP}^2 = \overline{Q_1P}^2$. Segue que

$$A_c - A_i < 4\overline{Q_1P}^2 = (2\overline{Q_1P})^2 = \overline{Q_1Q_2}^2.$$

Dessa forma, podemos construir um polígono circunscrito regular, cujo lado $\overline{Q_1P}$ tem medida menor que $\epsilon$. Portanto, $A_c - A_i < \epsilon$. □

**Teorema 4.3.** *Seja $X$ o conjunto das áreas dos polígonos regulares inscritos e $Y$ o conjunto das áreas dos polígonos regulares circunscritos. Esses conjuntos constituem um par de classes vizinhas.*

*Demonstração.* Para demonstrar tal fato basta mostrar que:

a) Para todo $x \in X$ e $y \in Y$, então $x < y$

b) Para todo $\epsilon > 0$ existem $x \in X$ e $y, \in Y$ satisfazendo $x - y < \epsilon$

O item (a) segue do Lema 4.1 e item (b) segue do Lema 4.2. □

**Definição 4.4** (Área do círculo)**.** A Área do círculo é o número real obtido pelo par de classes vizinhas $(X, Y)$ dado pelo Teorema 4.3.

**Teorema 4.4** (Área do círculo)**.** *A área do círculo é dada por $\pi r^2$ sendo $r$ o raio da circunferência.*

*Demonstração.* Considerando dois polígonos, um inscrito com perímetro e área $2p_i$ e $A_i$ e outro circunscrito com perímetro e área $2p_c$ e $A_c$, temos que $2p_i < 2\pi r < 2p_c$. Assim, $p_i r < (\pi r).r < p_c r$. Sejam $a_i$ o apótema do polígono inscrito e $a_c$ o apótema do polígono circunscrito. Como $a_i < r$ e $a_c = r$, temos

$$p_i a_i < p_i r < \pi r^2 < p_c r = p_c a_c,$$

Logo, $A_i < \pi r^2 < A_c$ para todos os polígonos inscritos e circunscritos. Já o número definido pelo par de classes vizinhas $(X, Y)$ é único e portanto, o resultado segue. □

Na próxima seção abordaremos alguns aspectos de volumes de sólidos.

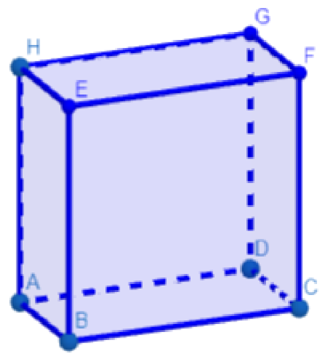
## 4.2 VOLUMES DE SÓLIDOS

Para iniciar este estudo será necessário uma noção introdutória e intuitiva de volume e três axiomas relacionados a medidas.

Chamamos de volume a “quantidade de espaço” ocupado por um sólido $S$ no espaço. Nesse sentido, uma maneira intuitiva de saber o volume de um determinado sólido é comparar quantas vezes uma dada unidade de volume está contida no sólido. Assim, devemos especificar a unidade de volume de acordo com o caso analisado.

**Exemplo 4.2.** Dado um paralelepípedo no espaço, sabemos que esse paralelepípedo ocupa uma quantidade de espaço e queremos medi-lá.

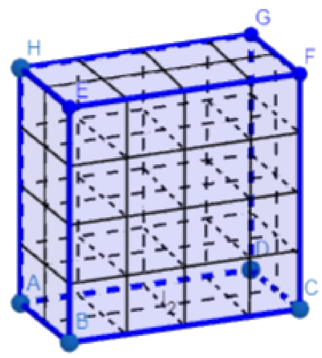
Figura 4.8 – Paralelepípedo.




Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma maneira intuitiva e inicial de calcular o volume é dividi-lo em cubos de mesmas medidas em suas dimensões, sendo cada cubo a "unidade de volume" considerada para o cálculo do volume. Desse modo, basta contar quantos cubos formam (cabem internamente) o paralelepípedo.

Figura 4.9 – Paralelepípedo.




Fonte: Elaborada pelo autor

Na Figura 4.9 verificamos que o paralelepípedo é formado 32 cubos, isto é, o volume do paralelepípedo é de 32 unidades de volume.

Dando prosseguimento ao estudo, vamos passar de uma noção intuitiva para um tratamento mais formal sobre o tema.

**Definição 4.5** (Figura geométrica espacial)**.** Figura geométrica espacial é qualquer subconjunto do espaço.

**Definição 4.6** (Figura poliédrica)**.** É a reunião de um número finito de polígonos planos tais que a interseção de dois polígonos quaisquer ou é vazia, ou é um vértice ou é um dos lados dos polígonos e dois polígonos contendo um lado em comum não são coplanares.

**Definição 4.7** (Superfícies poliédricas)**.** Uma superfície poliédrica consiste em uma figura poliédrica, que é composta por regiões poligonais (nem todas necessariamente) chamadas de faces da superfície poliédrica, juntamente com duas condições adicionais. A primeira condição é que cada aresta pertence a, no máximo, duas faces, e a segunda condição estipula que se houver arestas que pertençam a uma única face, elas devem formar um único polígono fechado denominado contorno.

**Definição 4.8** (Poliedro)**.** Poliedro é o sólido geométrico determinado por uma superfície poliédrica fechada com seu interior.

**Axioma 5** (Existência)**.** A todo sólido geométrico $S$ corresponde um único número real positivo $V(S)$ denominado volume.

**Definição 4.9.** O número real positivo $V(S)$ do Axioma 5 é o volume do sólido geométrico.

**Axioma 6** (Soma de volumes)**.** Se um sólido geométrico $S$ é composto pela união de dois ou mais sólidos geométricos, tais que não compartilham pontos interiores em comum, então o volume de $S$ é igual à soma dos volumes dos sólidos geométricos que o compõem.

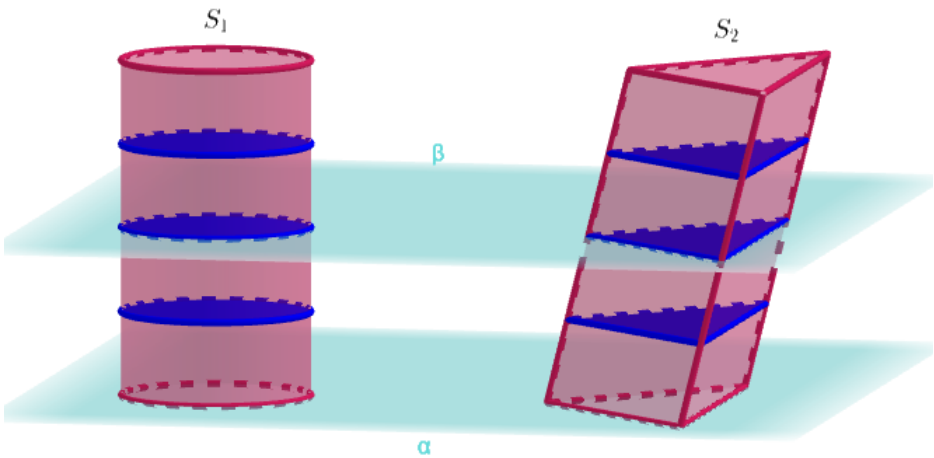
**Axioma 7** (Unidade para volumes)**.** O volume de um paralelepípedo retângulo é o produto da área da base pela altura.

Os Axiomas 5, 6 e 7 garantem a existência do volume, a obtenção de volumes de sólidos a partir da soma de outros e define uma unidade de medida de volume, respectivamente.

Finalmente, precisamos de um resultado que possibilite calcular volumes de sólidos geométricos.

**Axioma 8** (Princípio de Cavalieri)**.** Sejam $S_1$ e $S_2$ sólidos e $\alpha$ um plano qualquer. Se existe um plano $\beta$ paralelo a $\alpha$ interceptando esses sólidos de modo que determinem neles interseções de áreas iguais, então os volumes de $S_1$ e $S_2$ são iguais.

Figura 4.10 – Princípio de Cavalieri.




Fonte: Elaborada pelo autor.

Para demonstrar o Teorema 4.5 precisaremos demonstrar primeiro o seguinte lema.

**Lema 4.3.** *Todas as seções transversais de um prisma paralelas a sua base possuem a mesma área.*

*Demonstração.* Consideremos um prisma com base um polígono de $n$ lados. Observamos que as bases de um prisma são congruentes pois, por construção, suas faces são paralelogramos congruentes. Assim, temos que $\overline{A_1A_2} = \overline{B_1B_2}$, $\overline{A_2A_3} = \overline{B_2B_3}$, ... , $\overline{A_nA_1} = \overline{B_nB_1}$. Desse modo, interceptando o prisma por um plano $\alpha$ paralelo às bases, temos que todas arestas laterais do prisma interceptam o plano $\alpha$. Suponhamos que $\overline{A_1B_1} \cap \alpha = C_1$ e $\overline{A_2B_2} \cap \alpha = C_2$. Como $\overline{A_1B_1}$ e $\overline{A_2B_2}$ são paralelos, segue que $A_1$, $C_1$, $C_2$ e $A_2$ estão em um mesmo plano. Como $\alpha$ é paralelo às bases, temos que $A_1A_2$ é paralelo à $C_1C_2$. Logo, $A_1C_1C_2A_2$ é um paralelogramo e, portanto, $\overline{A_1A_2} = \overline{C_1C_2}$. De modo análogo, mostramos $\overline{A_2A_3} = \overline{C_2C_3}$, ... , $\overline{A_nA_1} = \overline{C_nC_1}$. Concluímos que as seções transversais de um prisma possuem mesma área. □

**Teorema 4.5** (Volume de prismas)**.** *O volume de um prisma é dado pelo produto da área da base pela sua altura.*

*Demonstração.* Seja um prisma com área da base medindo $A_b$ e altura medindo $h$. Consideremos então um paralelepípedo retângulo com área da base medindo também $A_b$ de altura $h$ tendo suas respectivas bases contida em um mesmo plano.

Pelo Lema 4.3 temos que o prisma e o paralelepípedo retangular possuem o mesmo volume. Portanto, pelo Axioma 7 o volume do prisma é

$$V = A_b \cdot h.$$

□

O próximo sólido que iremos determinar o volume é a pirâmide. Primeiramente necessitamos demonstrar os seguintes três lemas.

**Lema 4.4.** *Em uma pirâmide triangular temos as seguintes afirmações:*

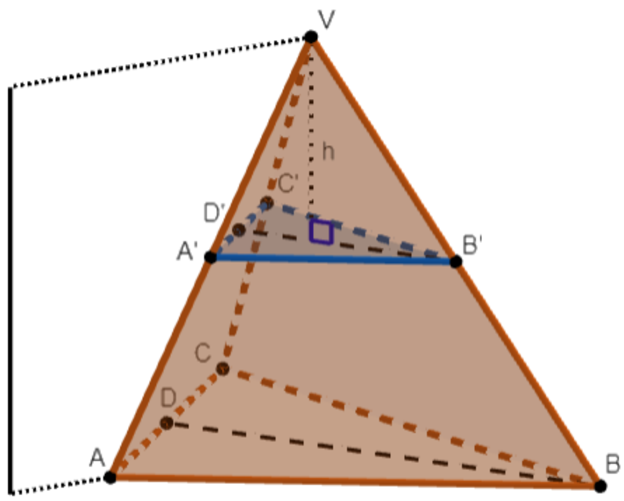
*a) As arestas laterais e a altura ficam divididas em uma mesma razão $k$, por um plano paralelo a base.*

*b) A seção paralela à base e a base são triângulos semelhantes.*

*c) A razão entre as áreas da seção paralela à base e a base é igual ao quadrado da razão $k$ (dada pelo item a).*

*Demonstração.* Consideremos uma pirâmide $V(A, B, C)$ de altura medindo $H$ e área da base $a$. Seja $A'B'C'$ uma seção paralela a base $ABC$ de altura medindo $h$ e área $a'$, conforme mostrado na Figura 4.11.

Figura 4.11 – Pirâmide triangular.




Fonte: Elaborada pelo autor.

Seguem os seguintes resultados:

a) Considerando um plano paralelo a base passando, segue do Teorema de Tales que

$$\frac{\overline{VA'}}{\overline{VA}} = \frac{\overline{VB'}}{\overline{VB}} = \frac{\overline{VC'}}{\overline{VC}} = \frac{\overline{Vh}}{\overline{VH}} = \frac{h}{H}.$$

b) Os ângulos do triângulo base $ABC$ e os ângulos do triângulo seção $A'B'C'$ são congruentes, visto que estão em planos paralelos e seus respectivos lados são paralelos. Logo, os triângulos $ABC$ e $A'B'C'$ são semelhantes.

c) Verificamos a semelhança dos triângulos $VA'C'$ e $VAC$ e dos triângulos $VA'B'$ e $VAB$. Sejam $BD$ e $B'D'$ alturas dos triângulos $ABC$ e $A'B'C'$ em relação as bases $AC$ e $A'C'$, respectivamente. Dessa forma,

$$\frac{\overline{B'D'}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{VA'}}{\overline{VA}} = \frac{h}{H} = k,$$

Assim,

$$\frac{\text{Área}(A'B'C')}{\text{Área}(ABC)} = \frac{\dfrac{\overline{A'C'} \cdot \overline{B'D'}}{2}}{\dfrac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{2}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{B'D'}}{\overline{BD}} = k \cdot k = k^2.$$

□

**Lema 4.5.** *Duas pirâmides triangulares de alturas congruentes e áreas das bases iguais têm volumes iguais.*

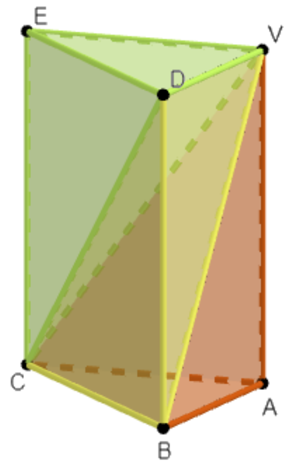
*Demonstração.* Sejam $P_1(VABC)$ e $P_2(V'A'B'C')$ duas pirâmides de altura $h$ e $h'$ com área da base medindo $a_1$ e $a_2$, respectivamente. Suponhamos, sem perda de generalidade que as bases das pirâmides se encontram em um esmo plano, isto é $pl(ABC) = pl(A'B'C') = \alpha$ e que $V$ e $V'$ estão no mesmo semiespaço determinado por $\alpha$. Agora, seja $\beta$ um plano que intercepta as duas pirâmides distando $k$ dos vértices $V$ e $V'$ determinando as seções $S$ e $S'$ com áreas $a_1'$ e $a_2'$, respectivamente. Logo, temos que $\dfrac{a_1'}{a_1} = \left(\dfrac{k}{h_1}\right)^2$ e $\dfrac{a_2'}{a_2} = \left(\dfrac{k}{h_1}\right)^2$.

Por hipótese, temos que $h = h'$. Logo $\dfrac{a_1'}{a_1} = \dfrac{a_2'}{a_2}$. Por outro lado, sabemos também que $a_1 = a_2$. Então, $a_1' = a_2'$, isto é, $S_1$ e $S_2$ possuem a mesma área. Portanto, pelo Axioma 8 (Princípio de Cavalieri) as pirâmides $P_1(VABC)$ e $P_2(V'A'B'C')$ têm o mesmo volume. □

**Lema 4.6** (Volume da pirâmide triangular)**.** *O volume de uma pirâmide triangular é um terço do produto da área da base pela altura.*

*Demonstração.* Seja $P(VABC)$ uma pirâmide triangular. A partir dessa pirâmide construímos um prisma de base triangular com arestas $DB$ e $EC$ paralelas a $VA$ de modo que $\overline{DB} = \overline{EC} = \overline{VA}$. Desse modo, o plano $pl(VDE)$ é paralelo ao plano $pl(ABC)$. Observamos que o plano $pl(VBC)$ divide o prisma em duas pirâmides, $P(VABC)$ de base triangular e $P(VBCED)$ de base quadrangular, conforme mostra a Figura 4.12.

Figura 4.12 – Volume da pirâmide triangular.




Fonte: Elaborada pelo autor.

O plano $pl(VCD)$ divide a pirâmide de base quadrangular $P(BCED)$ em duas pirâmides: $P(VBCD)$ e $P(VCDE)$, ambas com bases triangulares. Uma vez que $BCDE$ é um paralelogramo, temos que os triângulos $BCD$ e $CDE$ são congruentes. Assim, pelo Lema 4.5, $P(VBCD)$ e $P(VCDE)$ possuem o mesmo volume. Ademais, os triângulos $ABC$ e $VDE$ também são congruentes e, novamente pelo Lema 4.5, as pirâmides $P(VABC)$ e $P(VCDE)$ possuem o mesmo volume. Assim, o prisma é obtido a partir da união disjunta das três pirâmides congruentes. Portanto, pelo Axioma 6 o volume do prisma é dado pela soma dos volumes das três pirâmides, ou seja, o volume de cada pirâmide é um terço do volume do prisma. □

**Teorema 4.6** (Volume da pirâmide)**.** *O volume de uma pirâmide é um terço do produto da área da base pela medida da altura.*

*Demonstração.* Seja $P(VA_1A_2 \ldots A_n)$ uma pirâmide com base poligonal de $n$ lados sendo a área da base $A_b$ e altura medindo $h$. Sabemos que todo polígono com $n$ lados determina $n-2$ triângulos de modo que dois quaisquer desses triângulos não possuem pontos interiores em comum e seus vértices são os vértices do polígono. Assim, podemos decompor a pirâmide $P(VA_1A_2 \ldots A_n)$ em $n-2$ pirâmides de bases triangulares de bases com áreas $b_1, b_2, \ldots, b_{n-2}$. Pelo Axioma 6, temos que o volume da pirâmide $P(VA_1A_2 \ldots A_n)$ é a soma dos volumes das $n-2$ pirâmides, ou seja,

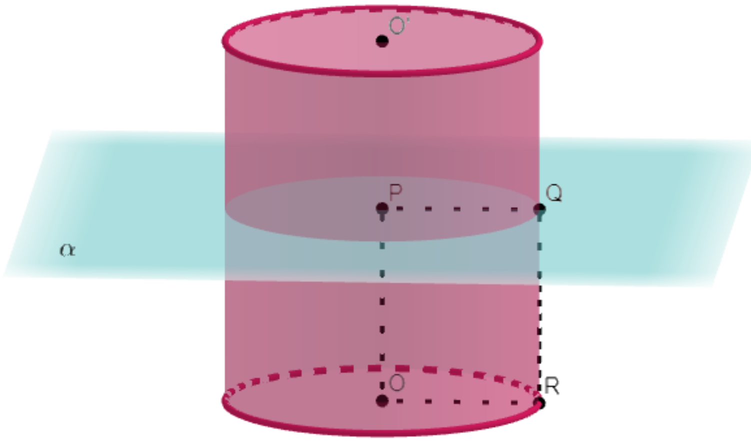
$$\text{Volume}(P(VA_1V_2 \ldots A_n)) = \frac{1}{3}b_1h + \frac{1}{3}b_2h + \cdots + \frac{1}{3}b_{n-2}h = \frac{1}{3}A_bh.$$

□

**Lema 4.7.** *Todas as seções transversais de um cilindro possui mesma área.*

*Demonstração.* Seja $r$ o raio da base do cilindro. Consideremos o plano $\alpha$ que intercepta o cilindro na seção $S$. Sejam $Q$ ponto do plano $\alpha$ em comum com a superfície lateral do cilindro, $O$ o centro da base do cilindro e $P$ o ponto em que a reta $OO'$, paralela à reta-diretriz do cilindro, corta $\alpha$. Ainda, seja $R$ o ponto da circunferência da base do cilindro tal que $RQ$ é paralelo a $OO'$.

Figura 4.13 – Seção transversal no cilindro.




Fonte: Elaborada pelo autor.

Desse modo, temos que $RQ$ é paralelo a $OP$. Assim, $O$, $P$, $Q$ e $R$ estão no mesmo plano e como $\alpha$ é paralelo as bases, segue que $OR$ é paralelo a $PQ$. Logo, $OPQR$ é um paralelogramo e, portanto $OR = PQ = r$. Concluímos que $S$ possui mesmo área que a base. □

**Teorema 4.7** (Volume do cilindro)**.** *O volume de um cilindro é o produto da área de sua base pela sua altura*

*Demonstração.* Dado um cilindro com raio da base medindo $r$ e altura medindo $h$. A área da base será $A_b = \pi r^2$. Construímos então um prisma de base quadrada com lados medindo $r\sqrt{\pi}$ e altura $h$. Observamos que o cilindro e o prisma possuem mesma área da base e altura.

Pelos Lemas 4.3 e 4.7 e o Axioma 8 (Princípio de Cavalieri), o volume do prisma e o volume do cilindro são iguais. Portanto, o volume do cilindro é dado por

$$V = A_b \cdot h.$$

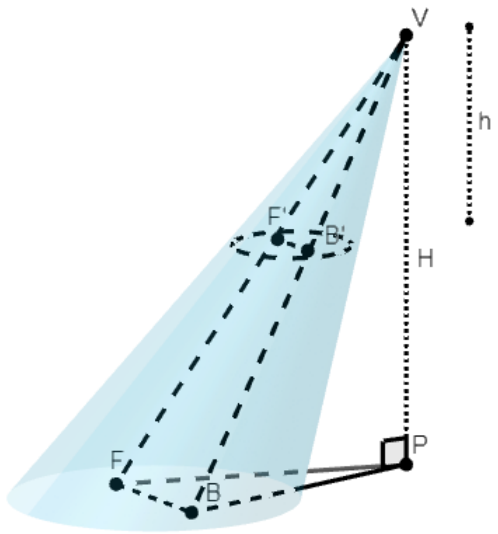
□

Para calcularmos o volume do cone, precisaremos primeiro do seguinte lema.

**Lema 4.8.** *Seja $C$ um cone de altura $h$. Consideremos uma seção transversal de $C$ obtida por um plano paralelo à base que dista $h'$ do vértice $V$ de $C$. Então, a área da seção é igual a $\left(\frac{h'}{h}\right)^2$ vezes a área da base.*

*Demonstração.* Sejam $B$ e $F$ pontos quaisquer da base do cone $C$ e $P$ o pé da perpendicular pelo vértice $V$ no plano da base como mostra a Figura 4.14.

Figura 4.14 – Seção transversal no cone.




Fonte: Elaborada pelo autor.

Os triângulos $VBP$ e $VB'P'$ são semelhantes pelo caso $AAA$, logo

$$\frac{\overline{VB'}}{\overline{VB}} = \frac{\overline{VP'}}{\overline{VP}} = \frac{h'}{h}.$$

Da mesma maneira, pelo caso $AAA$, os triângulos $VFP$ e $VF'P'$ são semelhante. Logo,

$$\frac{\overline{VF'}}{\overline{VF}} = \frac{\overline{VP'}}{\overline{VP}} = \frac{h'}{h}.$$

Os triângulos $VBF$ e $VB'F'$ possuem um ângulo em comum e

$$\frac{\overline{VB'}}{\overline{VB}} = \frac{\overline{VF'}}{\overline{VF}} = \frac{h'}{h}.$$

e são triângulos semelhantes. Logo,

$$\frac{\overline{B'F'}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{VB'}}{\overline{VB}} = \frac{h'}{h}$$

e, assim,

$$\overline{B'F'} = \frac{h'}{h}\overline{BF}.$$

Desse modo, se $F$ está sobre a circunferência de centro $B$ e raio $r$ da base do cone, então $F'$ está sobre a circunferência de centro $B'$ e raio $r'$ tal que

$$r' = \frac{h'}{h}\overline{BF} = \frac{h'}{h}r.$$

Portanto, a seção transversal é um círculo de raio $r'$ e centro $B'$ cuja área é dada por

$$\pi r'^2 = \pi(\frac{h'}{h}r)^2 = \pi(\frac{h'}{h})^2 r^2,$$

ou seja, a área da seção é $\left(\frac{h'}{h}\right)^2$ vezes a área da base. □

**Teorema 4.8** (Volume do cone)**.** *O volume de um cone $C$ de altura $H$ e raio da base $r$ é um terço do produto da área da base pela medida da altura.*

*Demonstração.* Seja $P$ uma pirâmide de altura $H$ de base quadrada de lado $r\sqrt{\pi}$. Se $S$ é uma seção transversal de $P$ tal que sua distância ao vértice da pirâmide é $h$, então, pelo Lema 4.5, sabemos que

$$\frac{A(S)}{\pi r^2} = \frac{h^2}{H^2}.$$

De modo análogo, se $S'$ é uma seção do cone $C$ tal que sua distância ao vértice da pirâmide é $h$, então, pelo Lema 4.8, temos que

$$\frac{A(S)}{\pi r^2} = \frac{h^2}{H^2}.$$

Assim, $A(S) = A(S')$. Portanto, pelo Axioma 8 (Princípio de Cavalieri), o volume do cone é igual ao volume da pirâmide. O volume $V_{\text{cone}}$ é dado por

$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

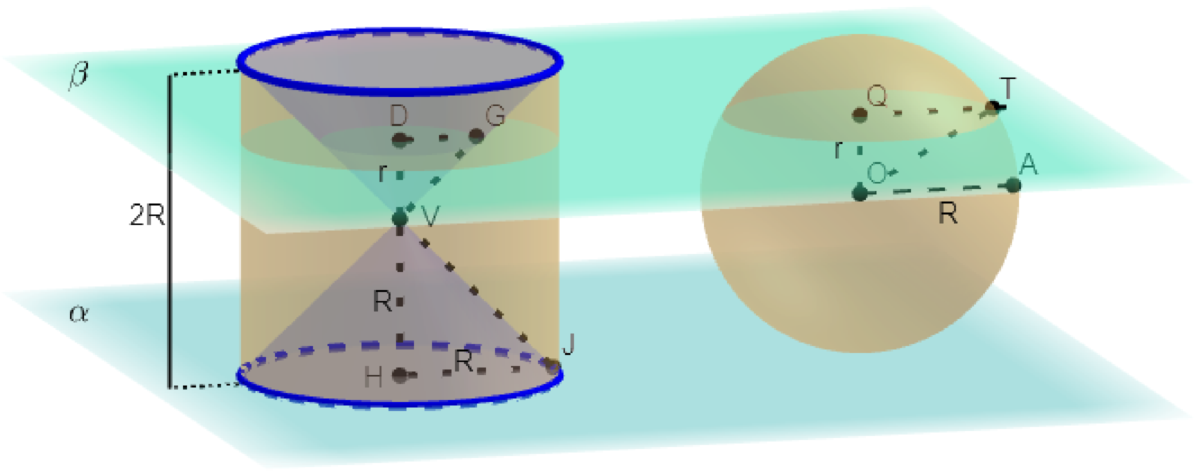
□

**Teorema 4.9** (Volume da esfera)**.** *O volume $V$ da esfera de raio $R$ é $\frac{4}{3}\pi R^3$.*

*Demonstração.* Sejam o cilindro de raio $R$ de volume $V_{\mathrm{Cil}}$ e uma superfície esférica de raio $R$ tangenciando um plano $\alpha$ no qual o cilindro contém sua base. Consideremos também dois cones $C_1$ e $C_2$ no interior do cilindro de mesmo vértice cujos volumes são $V_{C_1}$ e $V_{C_2}$, respectivamente.

Um plano $\beta$ secciona os sólidos conforme a Figura 4.15.

Figura 4.15 – Volume da esfera.




Fonte: Elaborada pelo autor.

É claro que os triângulos *DGV* e *HJV* na Figura 4.15 são semelhantes. Como *HJV* é isósceles segue que *DGV* também é isósceles. Logo, $\overline{DG} = \overline{DV} = a$. Sendo assim, a área da coroa circular da secção cônica é dada por $\pi(R^2 - r^2)$. A área da seção esférica é dada por $\pi\overline{QT}^2 = \pi(R^2 - r^2)$. Logo, as seções possuem áreas iguais para qualquer plano $\beta$ secante. Portanto, pelo Axioma 8 (Princípio de Cavalieri), o volume da esfera é igual ao volume do cilindro menos o volume do cone. Assim,

$$\begin{aligned}
V &= V_{\text{Cil}} - V_{C_1} - V_{C2} \\
&= \pi R^2(2R) - \frac{1}{3}\pi R^3 - \frac{1}{3}\pi R^3 \\
&= 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3 \\
&= \left(2 - \frac{2}{3}\right)\pi R^3 \\
&= \frac{4}{3}\pi R^3.
\end{aligned}$$

□

Com toda base teórica estudada até este momento, Apresentaremos uma proposta didática com respeito ao ensino do Princípio de Cavalieri na Educação Básica.

# 5 PROPOSTA DIDÁTICA

Este capítulo representa a etapa final que completa o objetivo deste trabalho. Nele, formularemos uma proposta didática direcionada aos professores da Educação Básica, especialmente aqueles que lecionam no Ensino Médio. O propósito desta proposta é orientá-los e servir de base para o planejamento de suas aulas.

1. **Disciplina:** Matemática
2. **Público-alvo:** 3º Ano do Ensino Médio
3. **Tema:** Princípio de Cavalieri
4. **Conteúdos trabalhados:** Cálculo de volumes de sólidos e Princípio de Cavalieri.
5. **Habilidades (BRASIL, 2017):** (EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
6. **Tempo previsto:** 2 horas-aula (em sequência).
7. **Materiais necessários:** projetor, computadores com acesso a internet, lousa e giz, software GeoGebra e atividades impressas.
8. **Objetivo geral:** Calcular o volume de prismas oblíquos e cilindros utilizando o Princípio de Cavalieri.
9. **Objetivos específicos:**
    - Compreender como se constitui o Princípio de Cavalieri com o auxílio de software Geogebra 3D.
    - Relembrar o que são prismas oblíquos.
    - Relembrar o que são cilindros.
    - Relembrar o que são cilindros oblíquos.
    - Comparar áreas a partir da seção de sólidos por um plano.
10. **Metodologia:**
    - De início será realizada uma roda de conversa para determinar os conhecimentos prévios dos estudantes. Nessa discussão os pontos principais a serem abordados são:
        - O que é um prisma?
        - Quando um prisma é oblíquo?
        - O que é um cilindro?

- Quando um cilindro é oblíquo?
- Como calcular o volume de um prisma?
- Podemos calcular o volume de um prisma e um prisma oblíquo da mesma maneira?
- Já ouviram falar em no matemático Bonaventura Cavalieri?

O objetivo é fazê-los pensar e instigá-los discutir com os colegas sobre o assunto. Dando continuidade, os estudantes irão realizar uma pesquisa em dupla nos computadores sobre a história de Cavalieri e o contexto da época, tendo em vista que esse estudo enriquece o conhecimento e o desenvolvimento da aula, instiga a curiosidade do estudante para saber como Cavalieri ficou conhecido, sua importância e como a matemática se desenvolveu nessa época. (30 minutos)

• Nesta atividade o professor levará porta copos em formato circular e folhas de dobradura em uma quantidade suficiente para poder empilhá-los.

  - Primeiro faça duas pilhas de folhas de dobradura empilhando-as, sendo uma pilha na forma de um prisma reto e a outra na forma de um prisma oblíquo. A pergunta motivadora é: Tendo visto volume de sólidos em aulas anteriores, acham que os volumes dessas duas pilhas são iguais?
  - De maneira análoga, primeiro faça duas pilhas de porta copos empilhando-as, sendo uma pilha na forma de um cilindro reto e a outra na forma de um cilindro oblíquo. A pergunta motivadora é: Tendo visto volume de sólidos em aulas anteriores, acham que os volumes dessas duas pilhas são iguais?
  - Tendo as quatro pilhas na mesa faça a mesma pergunta, porém comparando pilhas de folhas de dobradura com a pilha de porta copos para instigá-los.

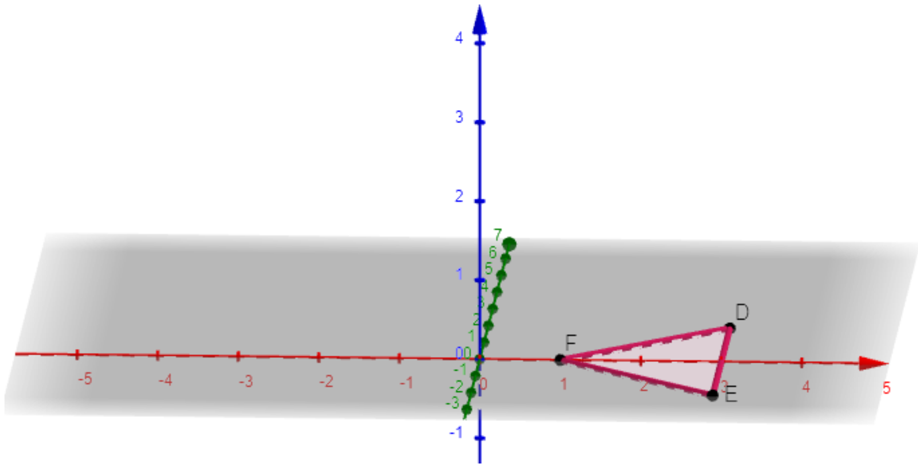
  **Sugestão para essa atividade:** Deixem os estudantes medir a altura e examinar a base medindo seus lados e calculando suas áreas para discutirem entre si e tirarem conclusões. (30 minutos)

• Nesta atividade, será utilizado o software Geogebra 3D[1] com os alunos, que já possuem conhecimento prévio da ferramenta, para a construção de dois sólidos como exemplo: um cilindro e um prisma oblíquo. O objetivo principal é observar a manutenção da área da seção transversal obtida por um plano passando pelos dois sólidos, utilizando o controle deslizante e, assim, introduzir o Princípio de Cavalieri. Isso permitirá demonstrar aos alunos que, nessas condições, os volumes dos dois sólidos são iguais. (30 minutos)

  a) Inicialmente utilizamos a ferramenta "polígono" selecionando todos os vértices e, então o vértice inicial novamente.

[1] <www.geogebra.org>.

Figura 5.1 – Atividade Princípio de Cavalieri - Parte 1.

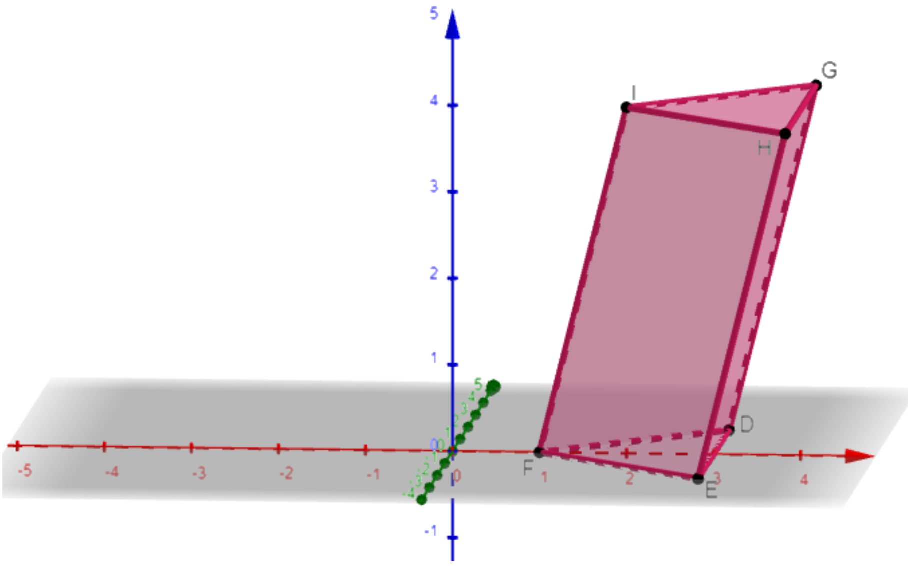



Fonte: Elaborada pelo autor.

Escolhemos os pontos $D = (3, 2, 0)$, $E = (-3, -2, 0)$ e $F = (1, 0, 0)$ para serem vértices do polígono.

b) Consideramos um ponto superior e selecionamos a ferramenta "prisma" e em seguida selecionamos o polígono para a base e um ponto superior.
Escolhemos $I = (2, 0, 4)$ como ponto superior e o polígono $DEF$ para a base obtendo o prisma da Figura 5.2.

Figura 5.2 – Atividade Princípio de Cavalieri - Parte 2.



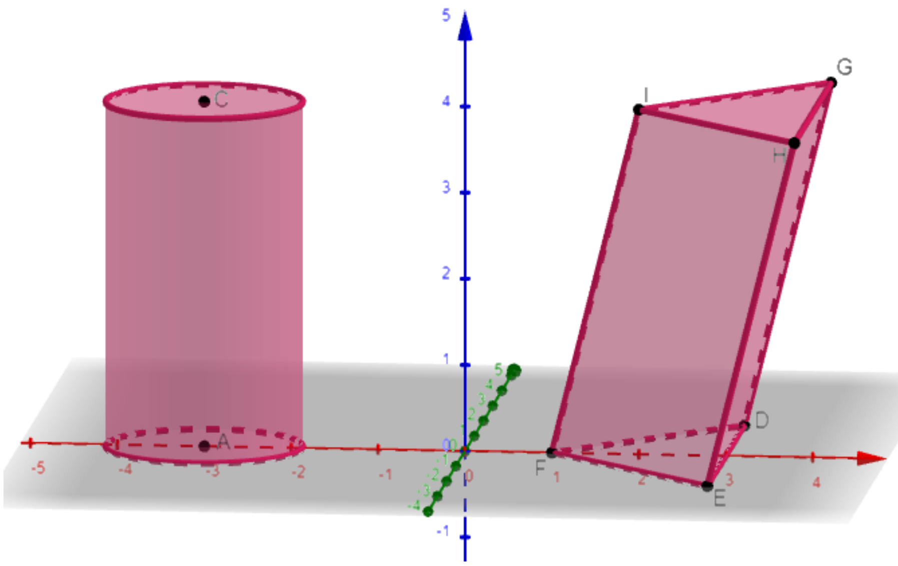

Fonte: Elaborada pelo autor.

c) Em seguida, calculamos a área da base do prisma. Como sua base é triangular, temos que a área é $\frac{b \cdot h}{2}$, sendo $b$ e $h$ base e altura, respectivamente. Considerando $\overline{DE}$ como base do triângulo $DEF$, obtemos que sua área é $\frac{4 \cdot 2}{2} = 4$. Agora, construímos um cilindro de área da base igual a área da base do prisma, ou seja, a área da base do cilindro sendo 4. No entanto, para a construção de um cilindro precisamos saber quanto mede o raio da base. Como a base do cilindro é um círculo, segue que

$$\pi r^2 = 4 \Leftrightarrow r^2 = \frac{4}{\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{4}{\pi}} \Leftrightarrow r = \frac{2}{\sqrt{\pi}} = \Leftrightarrow r = \frac{2\sqrt{\pi}}{\pi}.$$

d) Selecionamos a ferramenta “cilindro” e em seguida tomamos dois pontos, os quais serão os centros das bases do cilindro. Por fim, fornecemos o raio do cilindro.

Figura 5.3 – Atividade Princípio de Cavalieri - Parte 3.

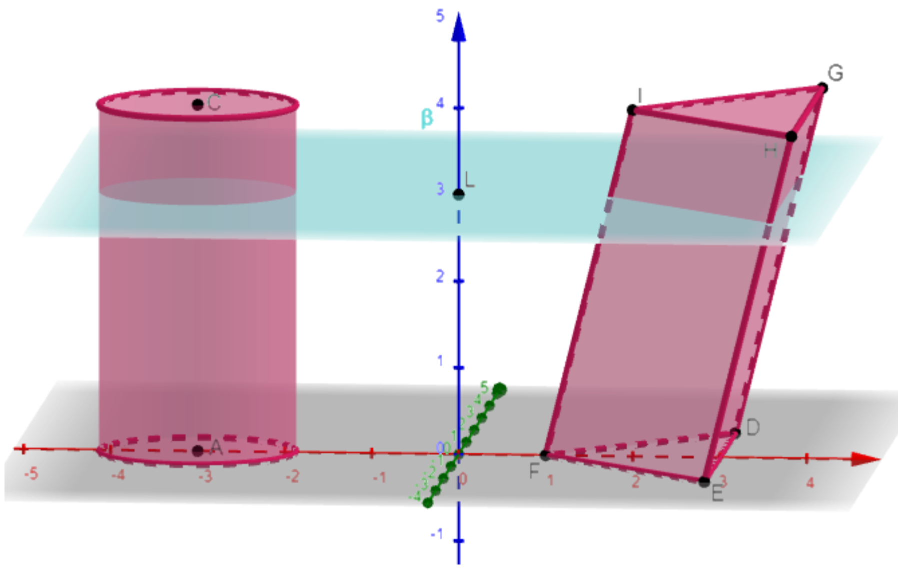



Fonte: Elaborada pelo autor.

Escolhemos os pontos $A = (-3, 0, 0)$ e $C = (-3, 0, 4)$ para serem os centros das bases do cilindro e o raio que calculamos que é $r = \frac{2\sqrt{\pi}}{\pi} \approx 1,12838$ (cálculo realizado com auxílio do software).

e) Criamos um controle deslizante com um ponto $L$ sobre o eixo $z$ e em seguida um plano $\beta$ perpendicular selecionando o ponto $L$ e o eixo $z$.

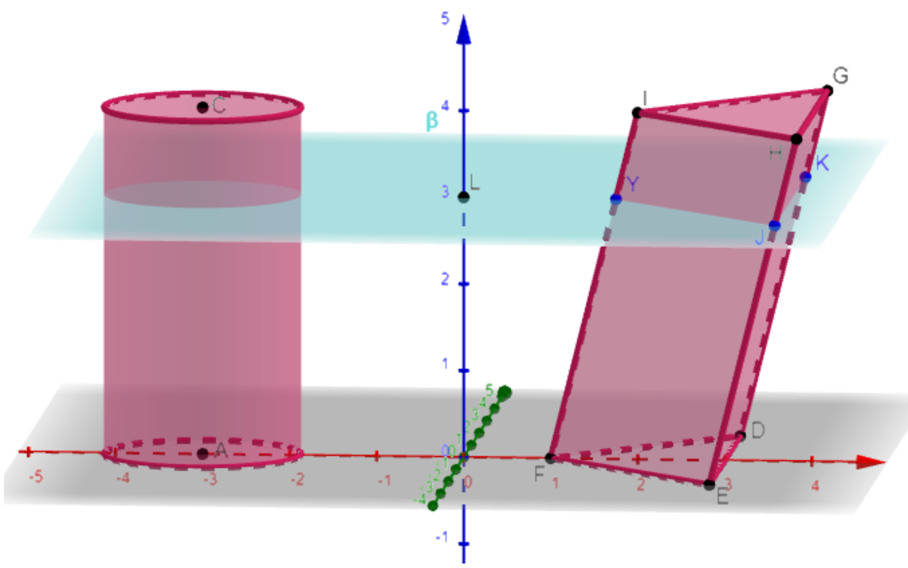
Figura 5.4 – Atividade Princípio de Cavalieri - Parte 4.




Fonte: Elaborada pelo autor.

f) Com a ferramenta "Interseção de dois objetos" realizamos a interseção das arestas *DG*, *FI*, *EH* com o plano.

Figura 5.5 – Atividade Princípio de Cavalieri - Parte 5.

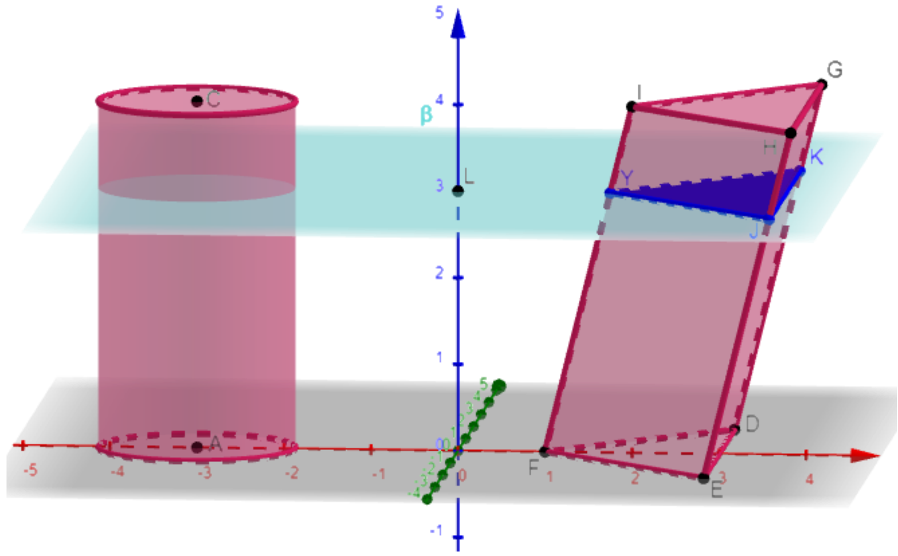



Fonte: Elaborada pelo autor.

Obtemos assim, $DG \cap \beta = K$, $EH \cap \beta = J$ e $FI \cap \beta = Y$.

g) Utilizando a ferramenta "polígono" selecionamos os vértices *Y*, *J*, *K* e depois *Y* novamente.

Figura 5.6 – Atividade Princípio de Cavalieri - Parte 6.

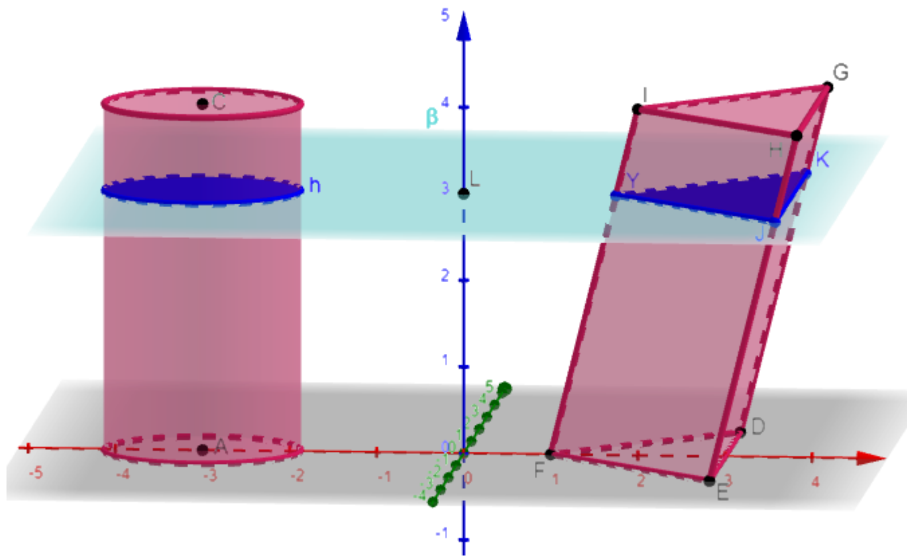



Fonte: Elaborada pelo autor.

Colocamos cor dentro do polígono para ficar explicito que vamos trabalhar com sua área (clique com o botão direto do mouse sobre o comando na janela de álgebra $\rightarrow$ configurações $\rightarrow$ cor).

h) Realizamos com a ferramenta “Interseção de duas superfícies” para fazer a interseção do cilindro com o plano $\beta$.

Figura 5.7 – Atividade Princípio de Cavalieri - Parte 7.

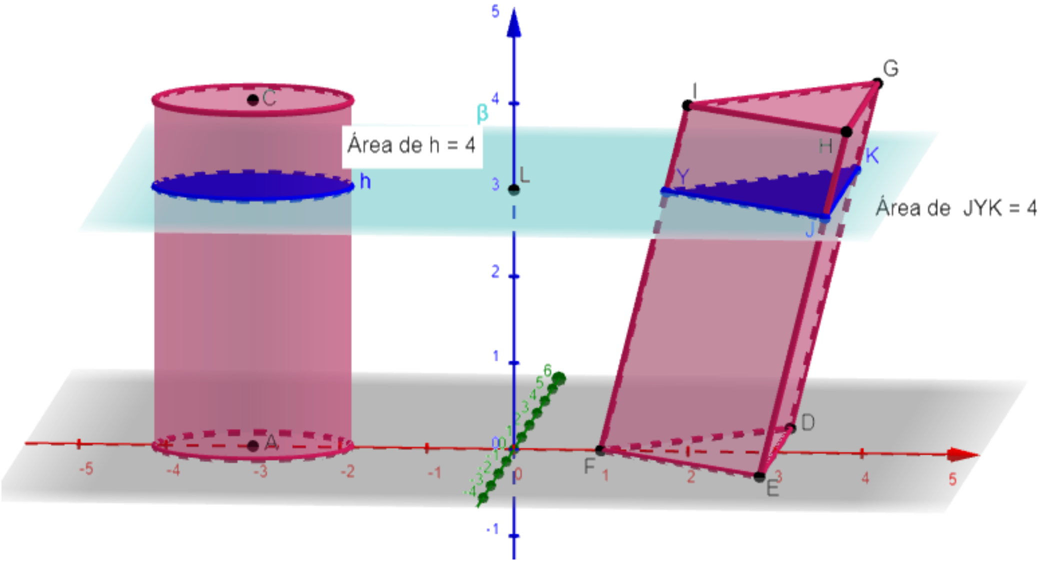



Fonte: Elaborada pelo autor.

Obtemos o círculo *h*. Além do mais, colocamos cor dentro do círculo para ficar explicito que vamos trabalhar com sua área (clique com o botão direto do mouse sobre o comando na janela de álgebra $\rightarrow$ configurações $\rightarrow$ cor).

i) Com a ferramenta “Área” selecionamos o triângulo *YKJ* e o círculo *h*.

Figura 5.8 – Atividade Princípio de Cavalieri - Parte 8.

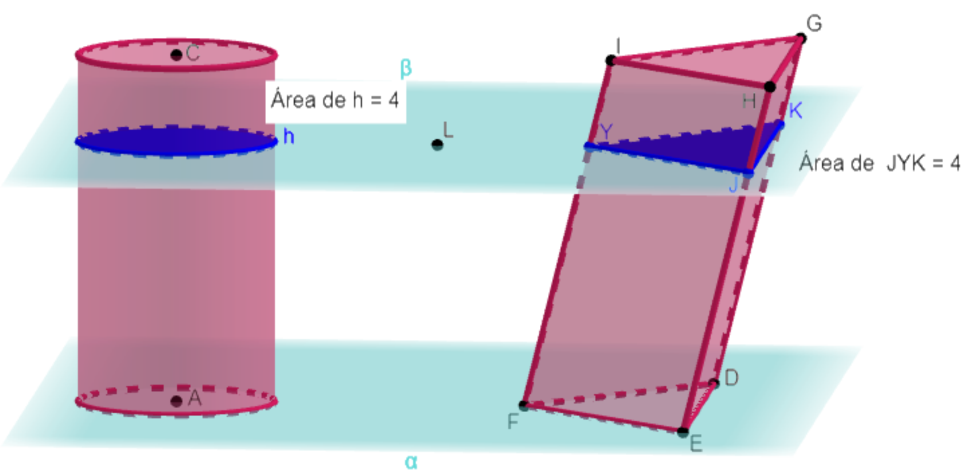



Fonte: Elaborada pelo autor.

Desta maneira, o software calcula a área do triângulo *YJK* e do círculo *h*.

j) Finalmente, para uma melhor visualização, definimos o plano $\alpha$ = 0 e com o botão direito do mouse retiramos o plano e os eixos.

Figura 5.9 – Atividade Princípio de Cavalieri - Parte 9.




Fonte: Elaborada pelo autor.

Com a atividade pronta, é possível mostrar aos estudantes, com o auxílio do controle deslizante, que as seções transversais do cilindro e do prisma têm a mesma área de suas respectivas bases. É possível refletir sobre a atividade em que se “empilham” cada seção de mesma área em cada um dos sólidos até uma certa altura. Isso permitirá que os alunos concluam que os sólidos têm o mesmo volume, apresentando assim o Princípio de Cavalieri.

11. **Avaliação:** Será realizada em sala de aula partir da participação e análise das discussões feitas ao longo das atividades.

# 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após percorrer por diversos tópicos como uma breve introdução sobre a BNCC, um estudo da abordagem no que diz respeito a áreas e volumes nas obras de Dante e Viana (2016) e Pompeo (2013) e um estudo teórico destes conteúdos, incluindo o Princípio de Cavalieri, acreditamos que conseguimos atingir o objetivo principal deste trabalho que é apresentar uma proposta didática que articule as habilidades EM13MAT201 e EM13MAT504 que se estão na seção do Ensino Médio da BNCC, cujo assunto principal da proposta é o Princípio de Cavalieri.

Foi importante analisar a abordagem do tema em diferentes materiais didáticos e compará-los para mostrar ao leitor que a linguagem e a profundidade com que os conteúdos são trabalhados podem variar, bem como as diversas aplicações que o material pode oferecer. Além disso, é importante destacar a necessidade de realizar uma revisão teórica no capítulo de pré-requisitos para embasar conceitualmente o planejamento da proposta didática.

O uso do software Geogebra potencializa a aprendizagem dos estudantes uma vez que possibilita uma melhor compreensão por meio da construção e visualização do conteúdo abordado, permitindo refletir sobre o que está sendo trabalhado em sala de aula.

Espera-se que este trabalho possa auxiliar na formação de profissionais, a fim de aprofundar seus conhecimentos no ensino de áreas e volumes para a Educação Básica. Eles podem usar este trabalho como base para orientar seus estudos e adaptar a proposta de acordo com as necessidades e particularidades de cada ambiente escolar em que estão inseridos em seu trabalho.

# REFERÊNCIAS


BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Educação é a Base**. Brasília: MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Citado 5 vezes nas páginas 7, 8, 9, 18 e 38.

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Matemática - Contexto e Aplicações: Manual do Professor**. 3. ed. São Paulo: Editora Ática, 2016. Citado 13 vezes nas páginas 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 e 46.

GERÔNIMO, J. R.; FRANCO, V. S. **Geometria Plana e Espacial: Um estudo axiomático**. Maringá: Eduem, 2010. Disponível em: <http://old.periodicos.uem.br/~eduem/novapagina/?q=node/72>. Citado na página 20.

LIMA, E. L. (Ed.). **Exame de textos - Análise de livros de matemática para o ensino médio**. Rio de Janeiro: VITAE, IMPA e SBM, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 14.

MACHADO, P. A. F. **Fundamentos de Geometria Espacial**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2012. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/ead/wp-content/uploads/2016/08/Fundamentos_de_geometria_espacial-sergio-02.pdf>. Citado na página 20.

MACHADO, P. A. F. **Fundamentos de Geometria Plana**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2012. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/ead/wp-content/uploads/2016/08/Fundamentos_de_geometria_plana.pdf>. Citado na página 20.

POMPEO, O. D. e J. N. **Fundamentos de matemática elementar, 9: geometria plana**. 9. ed. [S.l.]: Atual, 2013. Citado 9 vezes nas páginas 7, 9, 10, 12, 13, 14, 18, 19 e 46.

PROENÇA, M. C. de et al. Dificuldades de alunos na resolução de problemas: análise a partir de propostas de ensino em dissertações. **Bolema**, v. 36, n. 72, p. 262–2, 2022. Citado na página 7.