UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAUDIA CRISTINA CAVALINI

MATEMÁTICA FINANCEIRA: O MODELO DE MARKOWITZ

SÃO CARLOS – SP
2023

CLAUDIA CRISTINA CAVALINI

MATEMÁTICA FINANCEIRA: O MODELO DE MARKOWITZ

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

Orientador: Prof. Dr. Wladimir Seixas

SÃO CARLOS – SP
2023

Cavalini, Claudia Cristina

Matemática financeira: o modelo de Markowitz / Claudia Cristina Cavalini -- 2023.
39f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos
Orientador (a): Wladimir Seixas
Banca Examinadora: Wladimir Seixas, Luís Antonio Carvalho dos Santos, Thaís Maria Dalbelo
Bibliografia

1. Teoria de Markowitz. 2. Portfólio. 3. Otimização. I. Cavalini, Claudia Cristina. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Ronildo Santos Prado - CRB/8 7325

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - CCM/CCET

Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905

Telefone: (16) 33518221 - http://www.ufscar.br

DP-TCC-FA nº 3/2023/CCM/CCET

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

CLAUDIA CRISTINA CAVALINI

MATEMÁTICA FINANCEIRA: O MODELO DE MARKOWITZ

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos

São Carlos, 03 de abril de 2023

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	Wladimir Seixas
Membro da Banca 1	Luís Antonio Carvalho dos Santos
Membro da Banca 2	Thaís Maria Dalbelo

Documento assinado eletronicamente por **Wladimir Seixas**, **Professor(a) do Ensino Superior**, em 07/06/2023, às 23:20, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Luis Antonio Carvalho dos Santos**, **Professor(a) do Ensino Superior**, em 26/06/2023, às 09:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Thais Maria Dalbelo**, **Professor(a) do Ensino Superior**, em 13/07/2023, às 06:26, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufscar.br/autenticacao, informando o código verificador **1021900** e o código CRC **B8347312**.

Dedicado a meu pai José Orlando Cavalini (em memoria) que apesar do curto tempo que tivemos juntos foi um exemplo de profissional e um pai dedicado.

AGRADECIMENTOS

A Deus por me guiar em todos os momentos de minha vida.

À minha mãe Maria Luiza Martin Cavalini Maique por me ensinar, com muito amor a ser persistente me dando força quando precisava.

Às minhas irmãs Flavia Cristina Cavalini e Norma Cristina Cavalini pelo amor e incentivos.

À Universidade Federal de São Carlos por tornar possível a realização deste trabalho mesmo que em meio a pandemia.

Ao Prof. Dr. Wladimir Seixas pela orientação, paciência e apoio.

Aos meus amigos Monica e Rafael por me motivarem e me ajudarem a enfrentar meus medos. E a todos os meus familiares e amigos que sempre torceram por mim e me deram força nos momentos bons e ruins de minha vida.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar uma introdução matemática para os principais conceitos envolvidos na Teoria de Markowitz. A seleção de portfólio desenvolvida por Markowitz mostra a importância da diversificação de carteira de ativos, sendo necessário que os setores em que estão locados sejam diferentes. Neste sentido, são utilizados conhecimentos estatísticos como variância, desvio padrão e covariância para a análise dos valores esperado e risco dos ativos. Busca-se assim uma carteira de investimentos que apresente menor risco e maior rentabilidade concluindo qual a porcentagem de cada ativo deste portfólio é o ideal.

Palavras-chave: Teoria de Markowitz. Portfólio. Otimização.

ABSTRACT

The aim of this work is to present a mathematical introduction to the main concepts involved in Markowitz Theory. The portfolio selection developed by Markowitz shows the importance of asset portfolio diversification, requiring that the sectors in which they are located are different. In this sense, statistical knowledge such as variance, standard deviation and covariance is used to analyze the expected values and risk of assets. Thus, an investment portfolio that shows less risk and greater profitability is sought, concluding which percentage of each asset in this portfolio is ideal.

Keywords: Markowitz Theory. Porfolio. Optimization.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Com o aumento de investidores que entraram na bolsa há uma procura por conteúdos sobre onde investir, quais ativos são adequados análise de empresas, quais as diferenças de investimentos, porém o que realmente procuram são aplicações com maiores retornos e menores riscos. Para isso há a necessidade de conhecer qual o tipo de investidor, pois assim saberá quais tipos de ativos deverá ter em sua carteira e, além disso, quais as proporções de cada ativo serão adequadas.

Existem diversos tipos de investimentos contemplando todos os tipos de investidores desde o mais conservador até o mais arrojado. Neste trabalho começo mostrando as características de cada um desses ativos, em seguida alguns conceitos importantes da estatística como retorno esperado, desvio padrão e variância entre outros importantes para o desenvolvimento do conteúdo.

O modelo de Markowitz tem como base encontrar a melhor carteira tendo em consideração o nível de risco que cada investidor aceita correr e o retorno que pretende alcançar, encontrando assim a fronteira eficiente onde é calculada a proporção ideal que cada ativo deve ter.

Nesse contexto as covariâncias e correlações dos ativos do portfólio são de extrema importância, pois é necessário que os ativos da carteira estejam em setores distintos para poder minimizar o risco. Portanto, a diversificação é um dos pontos relevantes para Markowitz.

No Capítulo 2 é feita uma breve exposição sobre os principais tipos de investimento. Discute-se também a questão do portfólio e da relevância da diversificação. O Capítulo 3 irá abordar o Modelo de Markowitz apresentando seus pré-requisitos estatísticos e matemáticos. Os principais resultados são apresentados e portfólios com dois e três ativos são discutidos utilizando-se para isso dados reais de ativos da Bolsa de Valores de São Paulo. Por fim, no Capítulo 4 fazemos as considerações finais da pesquisa.

2 INVESTIMENTOS

Neste capítulo serão apresentados alguns conceitos econômicos importantes.

Mercado financeiro é um ambiente de negociação de produtos financeiros. Para que haja uma negociação são necessários dois agentes econômicos, os superavitários (poupadores) e os deficitários (tomadores de recursos). Os intermediários financeiros oferecem alternativas de aplicações de investimentos podendo assim disponibilizar recursos para os agentes deficitários.

Inflação é um processo no aumento geral nos preços da economia, ocasionando uma queda na capacidade do poder de compra reduzindo o poder aquisitivo. Atualmente algumas aplicações não possuem retornos satisfatórios, pois seus rendimentos perdem para a inflação. A inflação é medida utilizando um índice geral de preços, no Brasil o IPCA (Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo) é o indicador oficial da inflação que acompanha a variação dos preços de um grupo selecionado de bens e serviços, os quais se referem ao consumo pessoal das famílias com rendimento entre um e quarenta salários mínimos.

2.1 TIPOS DE INVESTIMENTOS

Os investimentos estão divididos em dois tipos: renda fixa e renda variável.

2.1.1 Renda Fixa

Ao investir em renda fixa o investidor está interessado em fazer sua reserva de emergência, reserva de oportunidade ou não tolera perdas. Assim, tanto o risco como o retorno serão menores. Os investimentos em renda fixa são:

Poupança: É o investimento mais popular e de fácil acesso, possui liquidez e, além disso, na maioria dos bancos é protegido pelo Fundo Garantidor de Crédito (FGC). Em 4 de maio de 2012 foi alterado a forma como é calculado o rendimento da poupança. Antes desta data a poupança rendia 0,5% ao mês do valor investido e após esta data se a taxa Selic for superior a 8,5% ao ano então o rendimento continua da mesma maneira. Caso contrario, renderá 70% da taxa Selic + TR (taxa referencial de juros).

LCI e LCA: São investimentos que exigem um pouco mais de planejamento, pois não possuem liquidez dependendo de onde são aplicados. Letra de Crédito Imobiliário (LCI) e Letra de Crédito do Agronegócio (LCA) são investimentos livres de imposto de renda e por conta disso mais aceitos.

CDB: O Certificado de Deposito Bancário (CDB) é um investimento onde os bancos emprestam para poder emprestar para outras pessoas. O CDB tem desconto de imposto de renda sobre o rendimento.

Títulos Públicos: são títulos emitidos e garantidos pelo Governo Federal, Estadual e Municipal e seu objetivo é financiar a divida publica antecipando as receitas. Podem também ser usados como instrumento de politica monetária.

2.1.2 Renda Variável

Na renda variável temos ativos que possuem certa volatilidade. Os investimentos em renda variável são:

Câmbio: Esse tipo de investimento é atrelado ao dólar sendo possível investir de três formas: comprando a moeda em espécie em uma corretora de cambio; aplicando em um fundo cambial ou abrindo uma conta nos Estados Unidos. Esse tipo de investimento funciona como uma espécie de proteção aos brasileiros.

Fundos imobiliários: Os fundos de investimentos imobiliários conhecidos pela sigla FIIs, permitem que o investidor consiga investir no mercado imobiliário a partir de um valor muito menor do que o necessário para a compra de um imóvel e um gestor irá administrar o empreendimento.

Uma das vantagens dos FIIs é que o investidor receberá uma renda regular por meio das receitas geradas pelos ativos do fundo. Poderá lucrar com a valorização das cotas negociadas em Bolsa.

Em comparação ao investimento tradicional em imóveis estão: aluguel maior, isenção fiscal, menor risco, menor burocracia, maior liquidez, custos mais baixos de transação, acesso a todos, gestão profissional, maior qualidade dos imóveis e potencial de valorização.

As desvantagens dos FIIs são a liquidez restrita e o risco de mercado.

Ações: São investimentos que possuem alto grau de risco, por causa da grande volatilidade que possuem os ativos, elas constituem em partes do capital social de uma empresa. As ações são subdivididas em ordinárias (ON) e preferenciais (PN). Aqueles que adquirem ações ordinárias possuem direito a voto em assuntos corporativos em assembleia. Já aqueles que adquirem ações preferenciais possuem preferencias nas distribuições dos dividendos.

As vantagens que o acionista possui por ter adquirido as ações de uma empresa.

a) Dividendos e juros sobre capital próprio: Cada acionista recebe uma parte dos rendimentos da empresa e cada investidor recebe de acordo com o número de ações adquiridas.

b) Bonificação: É a distribuição gratuita aos acionistas em quantidade proporcional à participação de capital, de novas ações emitidas em função do aumento de capital por haver incorporações de reservas.

c) Valorização: Os acionistas podem se beneficiar com o aumento do preço das ações da empresa. Podendo ao vender suas ações realizar o lucro.

d) Direito a subscrição: Os acionistas tem o direito de ser previamente consultados caso ocorra aumento de capital. Isso acontece quando o preço de mercado está valorizado em relação ao preço de lançamento.

2.2 ATIVOS, RISCO E RETORNO

Um instrumento financeiro que pode ser comprado ou vendido é denominado **ativo**.
O retorno total de um investimento é dado por:

$$\text{Retorno total} = \frac{\text{total recebido}}{\text{total investido}}.$$

O retorno simples R sobre um instrumento financeiro é dado por:

$$R = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1.$$

sendo que $(t-1)$ e t se referem a um período de negócios e P_t o preço no tempo t.

Exemplo 2.1. Seja um ativo A que foi comprado pelo valor de R\$9,67 e vendido por R\$12,40, então seu retorno (rendimento) foi de:

$$R = \frac{12,40 - 9,67}{9,67} \cong 0,28 = 28\%$$

A quantidade de dinheiro a ser ganha quando da venda de um ativo é incerta no momento da aquisição. Essa incerteza é o risco do ativo em dar lucro ou prejuízo.

Os riscos que podem ocorrer são:

Risco de mercado: É quando ocorre variação nos preços dos ativos, isso acontece com investimentos com alguma volatilidade.

Risco de crédito: Ocorre quando, por algum motivo, o tomador do crédito não honrar suas dividas. Isso pode acontecer não apenas na renda variável, mas na renda fixa também.

Risco de liquidez: É quando o investidor pretende vender seus ativos e não consegue facilmente.

Risco operacional: É quando o investidor não consegue se desfazer dos ativos caso ocorra algum processo desde a sua contratação até a liquidação deste ativo.

2.3 PERFIS DE INVESTIDOR

É necessário que todo o investidor conheça o seu perfil para entender qual é o grau de risco que conseguiria suportar e assim minimizar futuras perdas e compreender quais são os ativos que poderiam compor sua carteira. Existem três tipos de investidor. São eles:

Conservador: É aquele que não tolera perder dinheiro, nem que para isso tenha seu retorno reduzido. Assim aplicam em investimentos mais seguros.

Moderado: É aquele que aceita a correr um pouco mais de risco, porém ainda com um pouco de cautela na hora de escolher onde deve investir.

Arrojado: É aquele que aceita correr mais risco visando maiores retornos.

Um investidor com o perfil conservador não é aconselhável que invista no mercado de ações, pois qualquer queda da bolsa, e consequentemente de seus ativos estaria propenso a vendê-los e realizar prejuízos. Assim, dependendo do seu perfil, é que será feita a escolha do tipo de investimento.

2.4 PORTFÓLIO

Uma pergunta importante que surge é como escolher o melhor investimento? Para responder devemos ter claro o que entendemos por *melhor investimento*.

Vimos que a todo ativo temos associado um risco e um retorno. Assim, é natural a seguinte hipótese: *Entre investimentos que ofereçam o mesmo retorno é preferível aqueles que apresentam o menor risco.*

Uma outra hipótese será que *investimentos com maior retorno terão maior risco*.

Assim, como podemos reduzir os riscos para obtermos maiores retornos? Neste sentido, temos o chamado **portfólio** ou carteira de investimentos. Um portfólio é uma coleção de ativos.

Por que não escolher um único investimento (o melhor) ao invés de um portfólio?

Exemplo 2.2. Retirado de Elton et al. (2013, p. 47-48). Consideremos dois ativos cujos retornos segundo expectativas de mercado são apresentados na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Diferentes tipos de investimentos e seus respectivos retornos.

Expectativa	**Ativo 1**	**Ativo 2**	**Portfólio:** 60% [Ativo 1] + 40% [Ativo 2]
Alta	1,16	1,01	1,10
Média	1,10	1,10	1,10
Baixa	1,04	1,19	1,10

Fonte: Adaptado pela autora de Elton et al. (2013, p. 47).

Verificamos neste exemplo que a opção pelo portfólio fica indiferente às expectativas do mercado se tornando um investimento com retorno seguro, não sendo afetado pelas oscilações do mercado, independentemente de uma única **aposta**.

O exemplo 2.2 permite-nos concluir que:

a) Não sabemos qual o investimento será o melhor;

b) O portfólio reduz riscos desnecessários;

c) O portfólio pode melhorar o retorno focando em apostas;

d) O portfólio pode customizar e gerenciar riscos e lucros.

Suponhamos que n ativos estejam disponíveis. Todos os valores são supostos serem conhecidos no instante t. Podemos assim remover o índice t, lembrando que todos os parâmetros são dinâmicos e precisam ser atualizados de acordo com a unidade de período de negócios.

Para cada um dos ativos teremos um preço e um retorno associado. Seja P_i o valor do preço para o i-ésimo ativo. Assim, o valor total V para o portfólio será de

$$V = N_1 P_1 + ... + N_n P_n = \sum_{i=1}^{n} N_i P_i$$

sendo N_i a quantidade adquirida do ativo i, $i = 1, \dots, n$. Como $V_i = N_i P_i$ é o valor investido no ativo i podemos reescrever o valor total como

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i.$$

As quantidades investidas serão expressas como frações do investimento total, ou seja,

$$\omega_i = \frac{V_i}{V}, i = 1, \dots, n \quad \text{com} \quad \sum_{n=1}^{n} \omega_i = 1 \quad \text{(Peso do portfólio).}$$

Desta forma, se denotarmos por R_i o retorno total do i-ésimo ativo, o retorno total R para o investimento em n ativos é dado por:

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i V_i}{V} = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i \omega_i V}{V}.$$

Logo,

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i \omega_i.$$

2.5 DIVERSIFICAÇÃO

Diversificação de investimentos é quando o capital a ser investido é aplicado em diferentes tipos de ativos.

Existem diversos fatores que mostram que a diversificação de uma carteira é importante. São eles:

a) Diminuição do risco da carteira de investimento onde é necessário escolher ativos que não estejam no mesmo setor, para não haver concentrações dos ativos em setores relacionados e assim minimizar os riscos da carteira. Fazendo isso a valorização de um ativo pode compensar a desvalorização de outro mantendo estável o retorno da carteira.

b) Manutenção de um determinado valor mantido em renda fixa com o objetivo de ter uma reserva de emergência ou ainda reserva de oportunidade.

c) A diversificação de um investidor é feita de acordo com cada perfil e objetivos de cada investimento, para que possa antecipadamente determinar qual seria o vencimento, o valor a ser investido e o tempo de cada ativo.

3 MODELO DE MARKOWITZ

Neste capítulo apresentaremos o modelo de Markowitz. Este modelo tem como objetivo escolher qual seria dentre várias possibilidades a carteira com maior retorno e menor risco, observando o perfil do investidor. Neste sentido, deverá escolher uma carteira com diversos ativos e determinar qual a proporção que cada ativo deve ter para que a carteira seja eficiente.

Markowitz (1952) se baseou nos seguintes princípios ou axiomas:

I. As decisões tomadas pelos investidores consideram o retorno esperado e o risco medido pela média e variância dos retornos de vários ativos.

II. Todos os investidores estão sobre um mesmo horizonte de tempo, isto é, o tempo final será igual para todos.

III. Todas as informações são disponibilizados simultaneamente e gratuitamente para todos os investidores.

A seleção de carteira proposta por Markowitz (1952) fará uso de medidas estatísticas adotadas na avaliação de ativos e no estudo do risco no mercado financeiro.

3.1 PRÉ-REQUISITOS: CONCEITOS ESTATÍSTICOS

Existem duas categorias de medidas descritivas:

a) Medidas de posição ou tendência central: Servem para dar uma ideia acerca dos valores médios da variável em estudo.

b) Medidas de dispersão: Servem para dar uma ideia acerca da maior ou menor concentração dos valores da variável em estudo.

Definição 3.1 (Média aritmética)**.** Dada uma distribuição de frequências chama-se de média aritmética desta distribuição, e representa-se por $\overline{x}$ a soma de todos os valores da variável divididos pela frequência total (número total de observações). Assim, se $\{x_i\}$, $i = 1, \dots, n$ é um conjunto de n observações, a média é dada por

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Caso os valores das variáveis estivessem agrupados em classes, então para calcular a média aritmética teríamos antes que calcular os pontos médios $\overline{x}_i$ das classes, isto é,

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

sendo f_i as frequências da respectivas classes.

Para medir a dispersão de uma distribuição faz-se uso da diferença entre cada valor e a média aritmética da distribuição $(x_i - \overline{x})$.

A variância mede a distancia em que cada valor está da média aritmética

$$\sigma^2 = Var(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{X}\right)^2.$$

Quanto menor é a variância mais próximo os valores estão da média, mas quanto maior ela é maior é a distancia em que os valores estão da média.

O desvio padrão é capaz de identificar o erro em um conjunto de dados e aparece junto a média informando o quanto confiável é esse valor.

O desvio padrão é definido como $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$. O desvio padrão é um valor essencialmente positivo e é nulo apenas se todos os valores da distribuição forem iguais entre si, isto é, se não houver variabilidade.

Quando estudamos a relação entre duas variáveis X e Y, devemos primeiramente compreender o conceito de covariância. Como vimos anteriormente, a variância é uma estatística por meio da qual chegamos ao desvio padrão, que é uma medida de dispersão. Da mesma maneira, a covariância é uma estatística pela qual chegamos ao coeficiente de correlação que mede o grau de associação “linear” entre duas variáveis aleatórias X e Y.

Dados duas variáveis X e Y, a covariância verifica como estas se comportam no decorrer do tempo. Se X e Y variarem da maneira, então a covariância de X e Y, denotada por $Cov(X, Y)$ será positiva. Entretanto, se tiverem variações opostas a covariância será negativa $(Cov(X, Y) < 0)$. Não se verificando nenhuma relação entre as variáveis temos que a covariância será nula $(Cov(X, Y) = 0)$.

Definimos a covariância como:

$$Cov(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y}).$$

Apesar de a covariância ser uma estatística adequada para medir relação linear entre duas variáveis, ela não é adequada para comparar graus de relação entre variáveis, dado que ela está influenciada pelas unidades de medida de cada variável, que pode ser metros, quilômetro, quilogramas, centímetros etc. Para evitar a influência da ordem de grandeza e unidades de cada variável, dividimos a covariância pelo desvio padrão σ_X de X e σ_Y de Y, dando origem ao coeficiente de correlação de Pearson:

$$\rho = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

A correlação explica o grau em que dois ativos estão relacionados. Para saber a natureza dessa relação basta calcular o coeficiente de correlação.

O coeficiente de correlação entre duas variáveis varia de -1 a 1. Se a $\rho = 1$ então as variáveis estão correlacionadas, isto é quando a variável X aumenta a variável Y também aumenta. Por outro lado, quando a variável X diminui o mesmo acontece com a variável Y. Se $\rho = -1$ significa que as variáveis não possuem correlação, isto é, se o a variável X aumentar então a variável Y irá diminuir e vice-versa.

3.2 PORTFÓLIO COM DOIS ATIVOS

Consideremos um portfólio formado por dois ativos, A_1 e A_2, com retornos médios dados por R_1 e R_2 respectivamente. O retorno para o portfólio é dado por

$$R_P = \alpha R_1 + (1 - \alpha) R_2.$$

com $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Segundo o modelo de Markowitz, o risco do portfólio é definido pelo desvio padrão da taxa de retorno, ou seja,

$$\sigma_P = \sqrt{Var(R_P)}.$$

onde

$$Var(R_P) = \alpha^2 \sigma_1^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\sigma_{12} + (1 - \alpha)^2 \sigma_2^2 \tag{3.1}$$

com $\sigma_{12} = Cov(R_1, R_2)$ a covariância. Por outro lado, a correlação de Pearson fornece a relação

$$\rho = \frac{Cov(R_1, R_2)}{\sigma_1 \sigma_2}. \tag{3.2}$$

É fácil verificar que $-1 \leqslant \rho \leqslant 1$.

Assim, substituindo a relação (3.2) na expressão (3.1), segue que

$$Var(R_P) = \alpha^2 \sigma_1^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\rho\sigma_1\sigma_2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_2^2.$$

E portanto, o risco para o portfólio será dado por

$$\sigma_P = \sqrt{\alpha^2\sigma_1^2 + 2\alpha(1-\alpha)\rho\sigma_1\sigma_2 + (1-\alpha)^2\sigma_2^2}.$$

Teorema 3.1. *(LUENBERGER, 2009, p.154) A curva no diagrama $\sigma_P \times R_P$ definida pelo portfólio formado pelos ativos A_1 e A_2 encontra-se na região triangular limitada pelos dois ativos e o ponto no eixo vertical de altura $A = \dfrac{R_1\sigma_2 + R_2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}$.*

Demonstração. De fato,

a) Se $\rho = 1$ segue que

$$\begin{aligned}\sigma_P^2 &= \alpha^2\sigma_1^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_1\sigma_2 + (1-\alpha)^2\sigma_2^2.\\ &= [\alpha\sigma_1 + (1-\alpha)\sigma_2]^2\end{aligned}$$

Logo, $\sigma_P = \alpha\sigma_1 + (1-\alpha)\sigma_2$. Assim, no gráfico $\sigma_P \times R_P$ obtemos

$$\begin{aligned}(\sigma_P, R_P) &= (\alpha\sigma_1 + (1-\alpha)\sigma_2, \alpha R_1 + (1-\alpha)R_2)\\ &= (\sigma_2 + \alpha(\sigma_1 - \sigma_2), R_2 + \alpha(R_1 - R_2)) \quad \text{com} \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1,\end{aligned}$$

será um segmento de reta ligando os pontos $P_2 = (\sigma_2, R_2)$ e $P_1 = (\sigma_1, R_1)$.

b) Se $\rho = -1$ segue que

$$\begin{aligned}\sigma_P^2 &= \alpha^2\sigma_1^2 - 2\alpha(1-\alpha)\sigma_1\sigma_2 + (1-\alpha)^2\sigma_2^2.\\ &= [\alpha\sigma_1 - (1-\alpha)\sigma_2]^2\end{aligned}$$

Logo, $\sigma_P = |\alpha\sigma_1 - (1-\alpha)\sigma_2|$. Mais ainda,

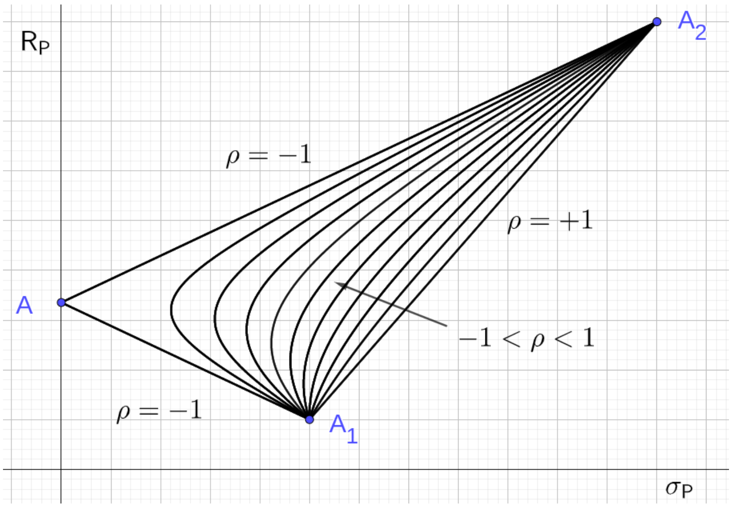
$$\sigma_P = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}.$$

Segue que, quando $\sigma_P = 0$,

$$R_P = A = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}R_1 + \left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}\right)R_2 \Leftrightarrow A = \frac{R_1\sigma_2 + R_2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}.$$

No gráfico $\sigma_P \times R_P$ teremos dois segmentos de reta ligando os pontos $(0, A)$ com $P_1 = (\sigma_1, R_1)$ e $(0, A)$ com $P_2 = (\sigma_2, R_2)$ como visto na figura 3.1.

Figura 3.1 – Linhas do conjunto de combinações para o portfólio com dois ativos.



Fonte: Elaborada pela autora.

□

O valor de risco mínimo é obtido quando σ_P é mínimo, equivalentemente quando σ_P^2 for mínimo. Assim, devemos impor

$$\frac{d\sigma_P^2}{d\alpha} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\alpha\sigma_1^2 + 2(1-\alpha)\rho\sigma_1\sigma_2 - 2\alpha\rho\sigma_1\sigma_2 - 2(1-\alpha)\sigma_2^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \alpha\sigma_1^2 + (1-2\alpha)\rho\sigma_1\sigma_2 - (1-\alpha)\sigma_2^2 = 0$$

Logo,

$$\alpha = \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}. \tag{3.3}$$

Esse valor α fornece a distribuição para dois ativos com menor risco.

Exemplo 3.1. Dados os ativos A1 e A2 calcule o retorno esperado e o risco da carteira formada por esses dois ativos.

$$\sigma_1 = 0,1408 \quad \sigma_2 = 0,1332 \quad \rho = 0,4927 \quad R_1 = 0,1925 \quad R_2 = 0,122.$$

Para calcular o risco e o retorno da carteira precisamos antes encontrar o valor de α.

Começamos determinando o risco σ_P para o portfólio

$$\begin{aligned}\sigma_P^2 &= \alpha^2\sigma_1^2 + 2\alpha(1-\alpha)\rho\sigma_1\sigma_2 + (1-\alpha)^2\sigma_2^2\\ &= 0,01982464\alpha^2 + 0,0184807434\alpha(1-\alpha) + 0,01774224(1-2\alpha+\alpha^2)\\ &= 0,01982464\alpha^2 + 0,0184807434\alpha - 0,0184807434\alpha^2 + 0,01774224\\ &\quad - 0,03548448\alpha + 0,01774224\alpha^2.\end{aligned}$$

E para minimizar o risco da carteira temos que impor que $\dfrac{d\sigma_P^2}{d\alpha} = 0$. Determinando a derivada:

$$\frac{d\sigma_P^2}{d\alpha} = 0,03964928\alpha + 0,0184807434 - 0,0369614868\alpha - 0,03548448 + 0,03548448\alpha.$$

Assim,

$$0,03964928\alpha + 0,0184807434 - 0,0369614868\alpha - 0,03548448 + 0,03548448\alpha = 0.$$

e

$$\alpha(0,03964928 - 0,0369614868 + 0,03548448) = 0,03548448 - 0,0184807434$$

Logo,

$$\alpha = \frac{0,0170037365}{0,0381722732} = 0,4454.$$

Calculemos o retorno esperado:

$$R_P = \alpha R_1 + (1-\alpha)\,R_2 = 0,4454 \times 0,1925 + 0,5546 \times 0,122 = 0,1534.$$

O risco da carteira será dado por

$$\sigma_P = \sqrt{0,0139551055} = 0,1181.$$

Logo, a carteira de variância mínima, possui um retorno esperado de 15,34% e um risco (desvio-padrão) de 11,81%.

3.3 MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Seja f uma função real definida em um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}$. Utilizamos o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar os valores máximo e mínimo de $f = f(x, y, z)$ sujeitos à restrição $g(x, y, z) = k$.

Inicialmente supomos que os valores extremos existam e que estão sobre a superfície

$g(x, y, z) = k$. Procedemos da seguinte maneira:

a) Determine todos os valores de x, y, z e λ tais que:

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$$

e que $g(x, y, z) = k$.

b) Calcule f em todos os pontos (x, y, z) que resultaram do passo anterior. O maior desses valores será o valor máximo de f, e o menor será o valor mínimo de f.

No modelo de Markowitz precisamos

$$\textbf{minimizar} \quad \sigma_P = \sqrt{\omega_1^2\sigma_1^2 + 2\omega_1\omega_2\rho\sigma_1\sigma_2 + \omega_2^2\sigma_2^2}$$

com as restrições:

$$\textbf{sujeito a} \begin{cases} R_p = \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 \\ \omega_1 + \omega_2 = 1 \end{cases}$$

No formalismo de multiplicadores de Lagrange seja

$$L(\omega_1, \omega_2, \lambda) = \omega_1^2\sigma_1^2 + 2\omega_1\omega_2\rho\sigma_1\sigma_2 + \omega_2^2\sigma_2^2 + \lambda(\omega_1 + \omega_2 - 1).$$

Determinando as derivadas parciais

$$\frac{\partial}{\partial \omega_1} L(\omega_1, \omega_2, \lambda) = 2\omega_1\sigma_1^2 + 2\omega_2\rho\sigma_1\sigma_2 + \lambda = 0 \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega_2} L(\omega_1, \omega_2, \lambda) = 2\omega_1\rho\sigma_1\sigma_2 + 2\omega_2\sigma_2^2 + \lambda = 0 \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} L(\omega_1, \omega_2, \lambda) = \omega_1 + \omega_2 - 1 = 0 \tag{3.6}$$

Subtraindo (3.4) de (3.5) obtemos:

$$\left(\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2\right)\omega_1 - \left(\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2\right)\omega_2 = 0 \Leftrightarrow \omega_2 = \left(\frac{\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}\right)\omega_1. \tag{3.7}$$

Substituindo (3.7) em (3.6) segue que

$$\omega_1 + \left(\frac{\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}\right)\omega_1 = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\sigma_2^2 + \sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}\right)\omega_1 = 1 \Leftrightarrow \omega_1 = \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}.$$

Que é igual ao valor (3.3) determinado anteriormente.

Exemplo 3.2. Vamos calcular utilizando o método de multiplicadores de Lagrange com os mesmos valores do exemplo anterior. Assim: $\sigma_1 = 0,1408$, $\sigma_2 = 0,1332$ e $\rho = 0,4927$ onde

$$L(\omega_1, \omega_2, \lambda) = \omega_1^2\sigma_1^2 + 2\omega_1\omega_2\rho\sigma_1\sigma_2 + \omega_2^2\sigma_2^2 + \lambda(\omega_1 + \omega_2 - 1).$$

$$\frac{\partial L}{\partial \omega_1} = 2\omega_1(0,1408)^2 + 2\omega_2 \times 0,4927 \times 0,1408 \times 0,1332 + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \omega_2} = 2\omega_1 \times 0,4927 \times 0,1408 \times 0,1332 + 2\omega_2(0,1332)^2 + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \omega_1 + \omega_2 - 1.$$

Subtraindo de temos:

$$0,03964928\omega_1 + 0,018480743424\omega_2 + \lambda - 0,018480743424\omega_1 - 0,03548448\omega_2 - \lambda$$

$$0,021168536576\omega_1 - 0,017003736576\omega_2 = 0$$

$$\omega_1 = 0,8032551761\omega_2.$$

Substituindo na equação obtemos:

$$0,8032551761\omega_2 + \omega_2 = 1$$

Então, $\omega_2 = 0,5546$ e $\omega_1 = 0,4454$.

3.4 APLICAÇÕES

Nesta seção, apresentaremos dois exemplos aplicados às ações negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo: Banco do Brasil, Petrobras e Vale. Os dados utilizados consistem nas cotações diárias dessas ações durante o período de 3 de janeiro a 30 de junho de 2022, os quais se encontram detalhados no Apêndice A. As quantidades estatísticas (média, desvio padrão, covariância e correlação) foram obtidas utilizando uma planilha eletrônica.

Exemplo 3.3. Consideremos um portfólio composto dos ativos Petrobras (PETR4) e Banco do Brasil (BBAS3).

PETR4 $R_1 = 0,00146$ e $\sigma_1 = 0,02008$.

BBAS3 $R_2 = 0,00149$ e $\sigma_2 = 0,01391$.

Tabela 3.1 – Covariância para o portfólio de PETR4 e BBAS3.

	PETR4	**BBAS3**
PETR4	0,00040	0,00011
BBAS3	0,00011	0,000193

Fonte: Elaborado pela autora.

Correlação de PETR4 e BBAS3 é dada por $\rho = 0,38441$.

Calculando o risco σ_P para o portfólio

$$\begin{aligned}\sigma_P^2 &= \alpha^2\sigma_1^2 + 2\alpha(1-\alpha)\rho\sigma_1\sigma_2 + (1-\alpha)^2\sigma_2^2 \\ &= (3,7826\alpha^2 - 1,7126\alpha + 1,93) \times 10^{-4}.\end{aligned}$$

Impondo $\dfrac{d\sigma_P^2}{d\alpha} = 0$ segue

$$\frac{d\sigma_P^2}{d\alpha} = (7,5652\alpha - 1,7126) \times 10^{-4} = 0.$$

Assim,

$$\alpha = \frac{1,71,26}{7,5652} \approx 0,2264.$$

Teremos 22,64% na Petrobras PETR4 e 77,36% no Banco do Brasil BBAS3. O retorno esperado será de

$$R_P = 0,2264 \times 0,00146 + 0,7736 \times 0,00149 = 0,0014832.$$

O risco da carteira será dado por

$$\sigma_P \approx 0.0132.$$

Logo, a carteira de variância mínima, possui um retorno esperado de 0,148% e um risco (desvio-padrão) de 1,32%.

Exemplo 3.4. Consideremos um portfólio composto dos ativos Vale (VALE3) e Petrobras (PETR4).

VALE3 $R_1 = 0,00040$ e $\sigma_1 = 0,02428$.

PETR4 $R_2 = 0,00146$ e $\sigma_2 = 0,02008$.

Tabela 3.2 – Covariância para o portfólio de VALE3 e PETR4.

	VALE3	PETR4
VALE3	0,00058	0,00020
PETR4	0,00020	0,00040

Fonte: Elaborado pela autora.

Correlação de VALE3 e PETR4 é dada por $\rho = 0,40819$.

Calculando o risco σ_P para o portfólio

$$\begin{aligned}\sigma_P^2 &= \alpha^2\sigma_1^2 + 2\alpha(1-\alpha)\rho\sigma_1\sigma_2 + (1-\alpha)^2\sigma_2^2 \\ &= (5,8198\alpha^2 - 4,02\alpha + 4) \times 10^{-4}.\end{aligned}$$

Impondo $\frac{d\sigma_P^2}{d\alpha} = 0$ segue

$$\frac{d\sigma_P^2}{d\alpha} = (11,6396\alpha - 4,02) \times 10^{-4} = 0.$$

Assim,

$$\alpha = \frac{4,02}{11,6396} \approx 0,3454.$$

Teremos 34,54% na Vale VALE3 e 65,46% na Petrobras PETR4. O retorno esperado será de

$$R_P = 0,3454 \times 0,0004 + 0,6546 \times 0,00146 = 0,0011.$$

O risco da carteira será dado por

$$\sigma_P \approx 0.01818.$$

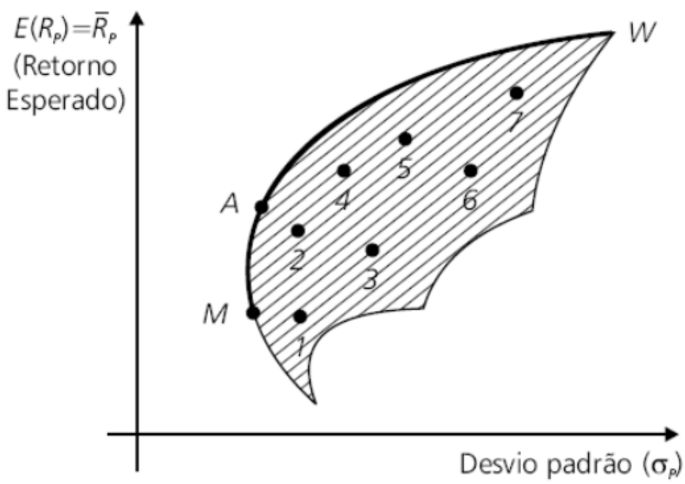
Logo, a carteira de variância mínima, possui um retorno esperado de 0,11% e um risco (desvio-padrão) de 1,8%.

3.5 FRONTEIRA EFICIENTE

Dado um grupo de ativos é possível formar diversas carteiras combinando-os e a define se fronteira eficiente linha das carteiras que possuem o máximo retorno para um dado nível de risco. Assim o ideal seria que o investidor escolhesse as carteiras que pertencesse a fronteira eficiente, buscando a maximização do retorno combinando com o menor risco possível, tendo em vista o perfil de investidor a que pertence.

Como mostrado na Figura 3.2 temos que a fronteira eficiente está entre os pontos M e W, onde o ponto M é a carteira de menor risco. Note que os pontos localizados a direita da fronteira eficiente (pontos indicados pelos números de 1 ao 7) são relacionadas as carteiras que não seriam adequadas levando em consideração a relação risco-retorno, ou seja são carteiras que possuem um risco inadequado para o retorno que proporcionam. Por exemplo, se comparar as carteiras A e a de numero 2. Perceba que ao aumentar o risco aumenta também o retorno.

Figura 3.2 – Fronteira Eficiente



Fonte: Assaf Neto (2008, p.228).

3.6 HIPÉRBOLE DE MARKOWITZ

Considere dois pontos F_1 e F_2 do plano cartesianos distantes entre si do valor $2c > 0$. Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a < 2c$. A hipérbole é o lugar geométrico do pontos P do plano tais que (CAMARGO; BOULOS, 2005)

$$d(P, F_1) - d(P, F_2)\big| = 2a.$$

Considerando um sistema ortogonal, o ponto P está na hipérbole se, e somente se,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

Definindo $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ segue que $0 < b < c$ e $c^2 = a^2 + b^2$. Assim, a equação pode ser reescrita na forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Necessitamos minimizar $\sigma_P^2 = \omega_1^2\sigma_1^2 + 2\omega_1\omega_2\rho\sigma_1\sigma_2 + \omega_2^2\sigma_2^2$ sujeito às seguintes restrições:

$$\begin{cases} R_p = \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 \\ \omega_1 + \omega_2 = 1 \end{cases}$$

Faremos uso da forma matricial. Neste sentido, definimos as seguintes quantidades (PETTERS; DONG, 2016). Sejam ω o vetor coluna cujas componentes são as participações ω_1 e ω_2 dos ativos A_1 e A_2 respectivamente e R o vetor coluna cujas componentes são os respectivos retornos R_1 e R_2, isto é

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}.$$

Se denotarmos por $\boldsymbol{\omega}^T$ a transposta de $\boldsymbol{\omega}$ e definirmos

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

verificamos facilmente que

a) $\boldsymbol{\omega}^T.\mathbf{e} = \omega_1 + \omega_2$. Logo, podemos escrever $\boldsymbol{\omega}^T.\mathbf{e} = 1$.

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ R_1 & R_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ R_p \end{bmatrix}.$

Para isolar $\boldsymbol{\omega}$ multiplica-se ambos os membros pela matriz inversa, isto é,

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ R_1 & R_2 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} 1 \\ R_p \end{bmatrix}$$

Calculando a inversa tem-se

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{R_2 - R_1} \begin{bmatrix} R_2 & -1 \\ -R_1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ R_p \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{R_2 - R_1} \begin{bmatrix} R_2 - R_P \\ R_P - R_1 \end{bmatrix}.$$

A matriz variância V será definida por

$$V = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

Verificam-se as seguintes relações

a) $\det V = (1-\rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2 > 0$.

b) $V^{-1} = \dfrac{1}{\det V}\begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix}$

c) Se $A = \mathbf{e}^T.V^{-1}\mathbf{e}$ segue que

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\det V}\begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\det V}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo,

$$A = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{\det V}.$$

d) Se $B = \mathbf{R}^T.V^{-1}\mathbf{e}$ segue que

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \end{bmatrix} \frac{1}{\det V}\begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\det V}\begin{bmatrix} R_1 & R_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Logo,

$$B = \frac{R_1(\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2) + R_2(\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)}{\det V}.$$

e) Se $C = \mathbf{R}^T.V^{-1}\mathbf{R}$ segue que

$$\begin{aligned} C &= \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \end{bmatrix} \frac{1}{\det V}\begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}. \\ &= \frac{1}{\det V}\begin{bmatrix} R_1 & R_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_1\sigma_2^2 - R_2\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -R_1\rho\sigma_1\sigma_2 + R_2\sigma_1^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo,

$$C = \frac{R_1^2\sigma_2^2 - 2R_1R_2\rho\sigma_1\sigma_2 + R_2^2\sigma_1^2}{\det V}.$$

Com as expressões de A, B e C segue que

$$AC - B^2 = \frac{(R_1 - R_2)^2}{\det V}.$$

Utilizando as relações anteriores passamos para o cálculo de σ_P^2. Assim,

$$\begin{aligned}
\sigma_P^2 &= \boldsymbol{\omega}^T.V.\boldsymbol{\omega} \\
&= \frac{1}{R_2 - R_1}\begin{bmatrix} R_2 - R_P & R_P - R_1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}.\frac{1}{R_2 - R_1}\begin{bmatrix} R_2 - R_P \\ R_P - R_1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{(R_2 - R_1)^2}\begin{bmatrix} R_2 - R_P & R_P - R_1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \sigma_1^2(R_2 - R_P) + \rho\sigma_1\sigma_2(R_P - R_1) \\ \rho\sigma_1\sigma_2(R_2 - R_P) + \sigma_2^2(R_P - R_1) \end{bmatrix} \\
&= \frac{\sigma_1^2(R_2 - R_P)^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2(R_P - R_1)(R_2 - R_P) + \sigma_2^2(R_P - R_1)^2}{(R_2 - R_1)^2}.
\end{aligned}$$

Agrupando os coeficientes em R_P segue que

$$\begin{aligned}
\sigma_P^2 = {} & \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{(R_2 - R_1)^2}R_P^2 + \frac{-2\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2(R_1 + R_2) - 2\sigma_2^2}{(R_2 - R_1)^2}R_P \\
& + \frac{\sigma_1^2R_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2R_1R_2 + \sigma_2^2R_1^2}{(R_2 - R_1)^2}
\end{aligned}$$

Identificando as expressões obtidas para A, B e C pode-se reescrever

$$\sigma_P^2 = \frac{A\det V.R_P^2 - 2B\det V.R_P + C\det V}{(R_2 - R_1)^2}.$$

$$\sigma_P^2 = \frac{1}{AC - B^2}\left[A.R_P^2 - 2B.R_P + C\right].$$

Completando quadrados segue que

$$\sigma_P^2 = \frac{1}{AC - B^2}\left[A\left(R_P^2 - 2\frac{B}{A}.R_P + \frac{B^2}{A^2}\right) - \frac{B^2}{A} + C\right]$$

$$\sigma_P^2 = \frac{1}{AC - B^2}\left[A\left(R_P - \frac{B}{A}\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A}\right]$$

$$\sigma_P^2 = \frac{A}{AC - B^2}\left(R_P - \frac{B}{A}\right)^2 + \frac{1}{A}$$

Portanto,

$$\frac{\sigma_P^2}{\dfrac{1}{A}} - \frac{\left(R_P - \dfrac{B}{A}\right)^2}{\dfrac{AC - B^2}{A^2}} = 1.$$

Que é a equação de uma hipérbole de vértice $\left(\frac{1}{\sqrt{A}}, \frac{B}{A}\right)$ no plano $\sigma_P \times R_P$.

3.7 PORTFÓLIO COM TRÊS ATIVOS

Sabemos que as quantidades investidas em um portfólio podem ser expressas como frações do investimento total, ou seja,

$$w_i = \frac{V_i}{V} \quad \text{com} \sum_{n=1}^{n} \omega_i = 1$$

ω_i será o peso do ativo i no portfólio. O retorno total é dado por

$$R_P = \sum_{i=1}^{n} R_i \omega_i.$$

Para o caso de um portfólio com três ativos temos

$$R_P = \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 + \omega_3 R_3.$$

Sabemos também que a quantidade de dinheiro a ser ganha ou perdida quando da venda de um ativo é incerta no momento da aquisição. Esta incerteza é o risco do ativo dar lucro ou prejuízo. Com vimos anteriormente, o risco no modelo de Markowitz é medido pela média e variância dos retornos de vários ativos. Assim, para o portfólio com três ativos o risco é dado por:

$$\sigma_P^2 = \sigma_1^2\omega_1^2 + \sigma_2^2\omega_2^2 + \sigma_3^2\omega_3^2 + 2\rho_{12}\sigma_{12}\omega_1\omega_2 + 2\rho_{13}\sigma_{13}\omega_1\omega_3 + 2\rho_{23}\sigma_{23}\omega_2\omega_3. \tag{3.8}$$

O problema então se resume em

$$\begin{cases} \text{Minimizar} \quad \sigma_P^2 \\ \text{sujeito à} \quad \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1. \end{cases}$$

Vamos então considerar nosso portfólio composto pelos ativos do Banco do Brasil, Petrobras e Vale.

BBAS3 $R_1 = 0,00149$ e $\sigma_1 = 0,01391$.

PETR4 $R_2 = 0,00146$ e $\sigma_2 = 0,02008$.

VALE3 $R_3 = 0,00040$ e $\sigma_3 = 0,02428$.

A Tabela 3.3 apresenta os valores para a covariância.

Tabela 3.3 – Covariância para o portfólio com 3 ativos.

Covariância	**BBAS3**	**PETR4**	**VALE3**
BBAS3	0,000193	0,0011	0,00003
PETR4	0,0011	0,00040	0,00020
VALE3	0,0003	0,00020	0,00058

Fonte: Elaborado pela autora.

A correlação é apresentada na Tabela 3.4.

Tabela 3.4 – Correlação para o portfólio de 3 ativos.

Correlação	**BBAS3**	**PETR4**	**VALE3**
BBAS3	1,00000	0,38441	0,08754
PETR4	0,38441	1,00000	0,40819
VALE3	0,085754	0,40819	1,00000

Substituindo os valores das Tabelas 3.3 e 3.4 na equação (3.8) segue que

$$
\begin{aligned}
\sigma_P^2 = \big(&1,93\sigma_1^2\omega_1^2 + 4\omega_2^2 + 5,8\omega_3^2 \\
&+ 2 \times 0,38441 \times 1,391 \times 2,008\omega_1\omega_2 + 2 \times 0,08754 \times 1,391 \times 2,428\omega_1\omega_3 \\
&+2 \times 0,40819 \times 2,008 \times 2,428\omega_2\omega_3) \times 10^{-4}. \\
= \big(&1,93\sigma_1^2\omega_1^2 + 4\omega_2^2 + 5,8\omega_3^2 + 2,1474\omega_1\omega_2 + 0,5913\omega_1\omega_3 + 3,9802\omega_2\omega_3\big) \times 10^{-4}.
\end{aligned}
$$

No formalismo de multiplicadores de Lagrange temos que

$$
\begin{aligned}
L(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \lambda) = \big(&1,93\omega_1^2 + 4\omega_2^2 + 5,8\omega_3^2 + 2,1474\omega_1\omega_2 + 0,5913\omega_1\omega_3 \\
&+3,9802\omega_2\omega_3) \times 10^{-4} + \lambda(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - 1).
\end{aligned}
$$

Determinando as derivadas parciais

$$\frac{\partial}{\partial \omega_1} L(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \lambda) = (3,86\omega_1 + 2,1474\omega_2 + 0,5913\omega_3) \times 10^{-4} + \lambda = 0 \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega_2} L(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \lambda) = (2,1474\omega_1 + 8\omega_2 + 3,9802\omega_3) \times 10^{-4} + \lambda = 0 \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega_3} L(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \lambda) = (0,5913\omega_1 + 3,9802\omega_2 + 11,6\omega_3) \times 10^{-4} + \lambda = 0 \tag{3.11}$$

Reescrevendo as equações (3.9), (3.10) e (3.11) na forma matricial obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 3,86 & 2,1474 & 0,5913 \\ 2,1474 & 8 & 3,9802 \\ 0,5913 & 3,9802 & 11,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = -10^4\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A solução é dada por

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = -10^4\lambda \begin{bmatrix} 0,3067557 & -0,0899099 & 0.0152133 \\ -0,0899099 & 0,1770841 & -0,0561781 \\ 0,0152133 & -0,0561781 & 0,1047073 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2320,5911\lambda \\ -309,96048\lambda \\ -637,42498\lambda \end{bmatrix}.$$

Lembrando que $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$ determinamos o valor de λ, isto é, $-3267,9765\lambda = 1$. Logo, $\lambda = -0,0003060$. Com isso, temos a solução:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7101003 \\ 0,0948478 \\ 0,1950519 \end{bmatrix}.$$

Concluímos que o portfólio será composto por: 71% BBAS3, 9,5% PETR4 e 19,5% VALE3.

4 CONSIDERAÇÃO FINAIS

O portfólio de Markowitz é uma ferramenta valiosa para investidores interessados em minimizar riscos e maximizar retornos. Através do uso de conceitos estatísticos, essa teoria estabelece um equilíbrio entre risco e retorno, permitindo que os investidores construam carteiras otimizadas que possam atingir seus objetivos financeiros. A construção de um modelo matemático eficiente foi crucial para estabelecer as chamadas fronteiras eficientes dentro da carteira.

Há ainda muitos pontos que podem ser explorados futuramente, como a aprofundamento da teoria em portfólios com *n*-ativos, otimização não linear e utilização de programação linear. Em última análise, a teoria de Markowitz continuará a ser uma ferramenta essencial para os investidores, pois permite que eles tomem decisões informadas e conscientes de risco e retorno em suas atividades de investimento.

REFERÊNCIAS

ASSAF NETO, A. **Mercado Financeiro**. 8. ed. São Paulo: Atlas, 2008. Citado na página 27.

CAMARGO, I. de; BOULOS, P. **Geometria analitica: um tratamento vetorial**. 3. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005. Citado na página 27.

ELTON, E. J. et al. **Modern Portfolio Theory and Investment Analysis**. 9. ed. New York: Wiley, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.

LUENBERGER, D. G. **Investment Science**. New York: Oxford University Press, 2009. (Best Financial Engineering Book). Citado na página 20.

MARKOWITZ, H. M. Portfolio selection. v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952. Citado na página 17.

PETTERS, A. O.; DONG, X. **An Introduction to Mathematical Finance with Applications: Understanding and Building Financial Intuition**. New York: Springer-Verlag New York, 2016. Citado na página 28.

APÊNDICE A – TABELAS COTAÇÕES DIÁRIAS

Tabela A .1 – Banco do Brasil

Data	Máxima	Mínima	Média	Retorno
30.06.2022	32,96	31,64	32,300	**-0,01027**
29.06.2022	32,96	32,31	32,635	**-0,00427**
28.06.2022	33,28	32,27	32,775	**0,01881**
27.06.2022	32,57	31,77	32,170	**0,00736**
24.06.2022	32,37	31,50	31,935	**-0,00172**
23.06.2022	32,34	31,64	31,990	**-0,00960**
22.06.2022	32,75	31,85	32,300	**-0,02682**
21.06.2022	34,19	32,19	33,190	**-0,01264**
20.06.2022	34,28	32,95	33,615	**0,01387**
17.06.2022	33,72	32,59	33,155	**-0,00867**
15.06.2022	33,85	33,04	33,445	**0,01165**
14.06.2022	33,40	32,72	33,060	**-0,00091**
13.06.2022	33,55	32,63	33,090	**-0,02447**
10.06.2022	34,46	33,38	33,920	**-0,01237**
09.06.2022	34,67	34,02	34,345	**0,00102**
08.06.2022	34,59	34,03	34,310	**-0,01095**
07.06.2022	34,93	34,45	34,690	**-0,01463**
06.06.2022	35,63	34,78	35,205	**-0,00424**
03.06.2022	35,67	35,04	35,355	**-0,01298**
02.06.2022	36,13	35,51	35,820	**0,00675**
01.06.2022	36,04	35,12	35,580	**-0,00140**
31.05.2022	36,19	35,07	35,630	**0,00963**
30.05.2022	36,24	34,34	35,290	**-0,02203**
27.05.2022	36,39	35,78	36,085	**-0,01743**
26.05.2022	37,09	36,36	36,725	**0,01073**
25.05.2022	36,82	35,85	36,335	**-0,00629**
24.05.2022	37,06	36,07	36,565	**0,00716**
23.05.2022	36,95	35,66	36,305	**0,03729**
20.05.2022	35,43	34,57	35,000	**0,02130**
19.05.2022	34,61	33,93	34,270	**-0,01381**
18.05.2022	35,30	34,20	34,750	**0,00245**
17.05.2022	35,01	34,32	34,665	**0,02377**
16.05.2022	34,16	33,56	33,860	**0,00639**
13.05.2022	33,93	33,36	33,645	**0,00598**
12.05.2022	33,83	33,06	33,445	**0,02876**
11.05.2022	33,12	31,90	32,510	**0,00541**
10.05.2022	32,79	31,88	32,335	**-0,00031**
09.05.2022	32,81	31,88	32,345	**-0,00538**
06.05.2022	33,16	31,88	32,520	**0,00806**
05.05.2022	32,93	31,59	32,260	**-0,00845**
04.05.2022	33,29	31,78	32,535	**0,01656**
03.05.2022	32,51	31,50	32,005	**0,01170**
02.05.2022	32,13	31,14	31,635	**-0,02466**
29.04.2022	33,19	31,68	32,435	**-0,00307**
28.04.2022	32,93	32,14	32,535	**-0,01049**
27.04.2022	33,31	32,45	32,880	**0,00952**
26.04.2022	33,08	32,06	32,570	**-0,01243**
25.04.2022	33,45	32,51	32,980	**-0,00015**
22.04.2022	33,28	32,69	32,985	**-0,01655**
20.04.2022	33,76	33,32	33,540	**-0,02301**
19.04.2022	35,11	33,55	34,330	**0,00160**
18.04.2022	34,94	33,61	34,275	**0,01420**
14.04.2022	34,02	33,57	33,795	**0,00386**
13.04.2022	33,93	33,40	33,665	**-0,00015**
12.04.2022	33,97	33,37	33,670	**0,01020**
11.04.2022	33,73	32,93	33,330	**0,00908**
08.04.2022	33,49	32,57	33,030	**0,01646**
07.04.2022	33,11	31,88	32,495	**0,01515**
06.04.2022	32,30	31,72	32,010	**-0,01188**
05.04.2022	32,86	31,93	32,395	**-0,01174**
04.04.2022	33,09	32,47	32,780	**-0,01295**
01.04.2022	33,58	32,84	33,210	**-0,00851**
31.03.2022	34,03	32,96	33,495	**0,00525**
30.03.2022	33,59	33,05	33,320	**-0,00995**
29.03.2022	34,04	33,27	33,655	**-0,00074**
28.03.2022	34,05	33,31	33,680	**-0,00590**
25.03.2022	34,19	33,57	33,880	**0,00355**
24.03.2022	34,14	33,38	33,760	**0,00942**
23.03.2022	33,69	33,20	33,445	**-0,00090**
22.03.2022	33,83	33,12	33,475	**0,02543**
21.03.2022	33,07	32,22	32,645	**0,00990**
18.03.2022	32,57	32,08	32,325	**0,00670**
17.03.2022	32,53	31,69	32,110	**0,01566**
16.03.2022	32,04	31,19	31,615	**-0,00237**
15.03.2022	32,02	31,36	31,690	**-0,01813**
14.03.2022	32,67	31,88	32,275	**-0,00108**
11.03.2022	33,00	31,62	32,310	**-0,00170**
10.03.2022	32,82	31,91	32,365	**0,00575**
09.03.2022	32,92	31,44	32,180	**0,03523**
08.03.2022	31,38	30,79	31,085	**-0,01066**
07.03.2022	32,12	30,72	31,420	**-0,03264**
04.03.2022	33,07	31,89	32,480	**-0,02139**
03.03.2022	33,51	32,87	33,190	**0,00958**
02.03.2022	33,28	32,47	32,875	**0,01419**
25.02.2022	32,73	32,10	32,415	**0,00793**
24.02.2022	32,63	31,69	32,160	**-0,03525**
23.02.2022	33,57	33,10	33,335	**0,00346**
22.02.2022	33,56	32,88	33,220	**0,00393**
21.02.2022	33,68	32,50	33,090	**-0,00586**
18.02.2022	33,68	32,89	33,285	**0,01017**
17.02.2022	33,21	32,69	32,950	**0,00000**
16.02.2022	33,27	32,63	32,950	**0,00366**
15.02.2022	33,18	32,48	32,830	**0,05665**
14.02.2022	31,36	30,78	31,070	**0,01255**
11.02.2022	31,22	30,15	30,685	**0,02369**
10.02.2022	30,34	29,61	29,975	**0,00452**
09.02.2022	30,22	29,46	29,840	**0,00539**
08.02.2022	30,09	29,27	29,680	**-0,00570**
07.02.2022	30,10	29,60	29,850	**-0,00284**
04.02.2022	30,12	29,75	29,935	**-0,00283**
03.02.2022	30,28	29,76	30,020	**0,00351**
02.02.2022	30,30	29,53	29,915	**-0,01254**
01.02.2022	30,52	30,07	30,295	**-0,00033**
31.01.2022	30,62	29,99	30,305	**0,00933**
28.01.2022	30,29	29,76	30,025	**-0,00083**
27.01.2022	30,40	29,70	30,050	**0,00535**
26.01.2022	30,33	29,45	29,890	**0,01322**
25.01.2022	30,11	28,89	29,500	**0,01235**
24.01.2022	29,51	28,77	29,140	**0,00431**
21.01.2022	29,32	28,71	29,015	**-0,00103**
20.01.2022	29,28	28,81	29,045	**0,00816**
19.01.2022	29,08	28,54	28,810	**0,01337**
18.01.2022	28,76	28,10	28,430	**0,00708**
17.01.2022	28,53	27,93	28,230	**0,00606**
14.01.2022	28,51	27,61	28,060	**0,02204**
13.01.2022	27,90	27,01	27,455	**0,01478**
12.01.2022	27,29	26,82	27,055	**0,00895**
11.01.2022	26,97	26,66	26,815	**0,00280**
10.01.2022	27,04	26,44	26,740	**0,00545**
07.01.2022	26,79	26,40	26,595	**0,00283**
06.01.2022	26,83	26,21	26,520	**-0,00207**
05.01.2022	26,94	26,21	26,575	**-0,01006**
04.01.2022	27,09	26,60	26,845	**-0,01360**
03.01.2022	27,66	26,77	27,215	

Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela A .2 – Petrobras

Data	Máxima	Mínima	Média	Retorno
30.06.2022	22,85	22,31	22,580	-0,02124
29.06.2022	23,47	22,67	23,070	-0,00346
28.06.2022	23,48	22,82	23,150	0,03882
27.06.2022	22,86	21,71	22,285	0,02743
24.06.2022	22,06	21,32	21,690	-0,00436
23.06.2022	22,30	21,27	21,785	-0,00797
22.06.2022	22,43	21,49	21,960	-0,01657
21.06.2022	22,93	21,73	22,330	0,01270
20.06.2022	23,00	21,10	22,050	-0,00787
17.06.2022	23,17	21,28	22,225	-0,07241
15.06.2022	24,44	23,48	23,960	-0,01073
14.06.2022	24,63	23,81	24,220	0,02108
13.06.2022	24,09	23,35	23,720	-0,01372
10.06.2022	24,44	23,66	24,050	-0,02592
09.06.2022	24,97	24,41	24,690	-0,01378
08.06.2022	25,37	24,70	25,035	0,00040
07.06.2022	25,49	24,56	25,025	0,01686
06.06.2022	24,86	24,36	24,610	0,00778
03.06.2022	24,79	24,05	24,420	0,00639
02.06.2022	24,47	24,06	24,265	-0,00979
01.06.2022	24,70	24,31	24,505	-0,00386
31.05.2022	24,93	24,27	24,600	0,00716
30.05.2022	25,14	23,71	24,425	-0,04347
27.05.2022	26,18	24,89	25,535	-0,02779
26.05.2022	26,51	26,02	26,265	0,01527
25.05.2022	26,29	25,45	25,870	0,01173
24.05.2022	26,13	25,01	25,570	-0,02049
23.05.2022	26,53	25,68	26,105	0,03427
20.05.2022	25,45	25,03	25,240	0,02166
19.05.2022	25,06	24,35	24,705	-0,00543
18.05.2022	25,25	24,43	24,840	-0,01876
17.05.2022	25,68	24,95	25,315	0,00576
16.05.2022	25,49	24,85	25,170	0,00801
13.05.2022	25,17	24,77	24,970	0,01504
12.05.2022	24,90	24,30	24,600	0,01089
11.05.2022	24,78	23,89	24,335	0,02398
10.05.2022	24,00	23,53	23,765	-0,00084
09.05.2022	24,14	23,43	23,785	0,00126
06.05.2022	24,20	23,31	23,755	0,02348
05.05.2022	23,75	22,67	23,210	0,01531
04.05.2022	23,51	22,21	22,860	0,03909
03.05.2022	22,21	21,79	22,000	0,00941
02.05.2022	22,16	21,43	21,795	-0,03583
29.04.2022	23,08	22,13	22,605	0,01664
28.04.2022	22,37	22,10	22,235	0,00588
27.04.2022	22,33	21,88	22,105	0,00045
26.04.2022	22,35	21,84	22,095	0,00821
25.04.2022	22,24	21,59	21,915	-0,02665
22.04.2022	22,87	22,16	22,515	-0,02617
20.04.2022	23,35	22,89	23,120	0,00260
19.04.2022	23,38	22,74	23,060	0,02035
18.04.2022	22,94	22,26	22,600	-0,02165
14.04.2022	23,43	22,77	23,100	0,00065
13.04.2022	23,32	22,85	23,085	0,00610
12.04.2022	23,24	22,65	22,945	0,00879
11.04.2022	22,85	22,64	22,745	-0,00568
08.04.2022	23,06	22,69	22,875	0,02555
07.04.2022	22,83	21,78	22,305	0,02693
06.04.2022	21,97	21,47	21,720	-0,00980
05.04.2022	22,16	21,71	21,935	0,00458
04.04.2022	22,05	21,62	21,835	-0,02326
01.04.2022	22,65	22,06	22,355	0,00971

Data	Máxima	Mínima	Média	Retorno
31.03.2022	22,50	21,78	22,140	0,01073
30.03.2022	22,11	21,70	21,905	0,01061
29.03.2022	21,96	21,39	21,675	0,02579
28.03.2022	21,50	20,76	21,130	-0,02199
25.03.2022	21,82	21,39	21,605	0,00302
24.03.2022	21,85	21,23	21,540	0,00186
23.03.2022	21,76	21,24	21,500	0,01129
22.03.2022	21,51	21,01	21,260	0,01118
21.03.2022	21,51	20,54	21,025	0,03393
18.03.2022	20,66	20,01	20,335	-0,00367
17.03.2022	21,05	19,77	20,410	-0,01639
16.03.2022	21,14	20,36	20,750	-0,00144
15.03.2022	21,14	20,42	20,780	-0,03729
14.03.2022	22,04	21,13	21,585	-0,03054
11.03.2022	23,04	21,49	22,265	-0,01022
10.03.2022	23,19	21,80	22,495	0,03975
09.03.2022	22,00	21,27	21,635	0,00116
08.03.2022	22,10	21,12	21,610	-0,02636
07.03.2022	23,19	21,20	22,195	-0,03311
04.03.2022	23,24	22,67	22,955	-0,00864
03.03.2022	23,41	22,90	23,155	-0,00835
02.03.2022	23,65	23,05	23,350	0,04148
25.02.2022	22,79	22,05	22,420	-0,01559
24.02.2022	23,65	21,90	22,775	-0,00633
23.02.2022	23,19	22,65	22,920	0,00747
22.02.2022	23,24	22,26	22,750	0,01314
21.02.2022	22,79	22,12	22,455	0,02511
18.02.2022	22,18	21,63	21,905	-0,00725
17.02.2022	22,31	21,82	22,065	-0,00943
16.02.2022	22,59	21,96	22,275	0,02958
15.02.2022	21,90	21,37	21,635	-0,03307
14.02.2022	22,75	22,00	22,375	0,00336
11.02.2022	22,73	21,87	22,300	0,02623
10.02.2022	22,05	21,41	21,730	0,00788
09.02.2022	21,91	21,21	21,560	0,01794
08.02.2022	21,41	20,95	21,180	-0,02621
07.02.2022	21,97	21,53	21,750	-0,00321
04.02.2022	22,27	21,37	21,820	0,00902
03.02.2022	22,06	21,19	21,625	-0,02016
02.02.2022	22,45	21,69	22,070	0,00914
01.02.2022	22,33	21,41	21,870	0,00298
31.01.2022	22,12	21,49	21,805	-0,02220
28.01.2022	23,02	21,58	22,300	-0,01870
27.01.2022	23,22	22,23	22,725	0,00353
26.01.2022	22,97	22,32	22,645	0,04259
25.01.2022	22,27	21,17	21,720	0,02405
24.01.2022	21,62	20,80	21,210	-0,00188
21.01.2022	21,37	21,13	21,250	0,00473
20.01.2022	21,45	20,85	21,150	-0,00844
19.01.2022	21,59	21,07	21,330	0,01114
18.01.2022	21,43	20,76	21,095	-0,00166
17.01.2022	21,32	20,94	21,130	0,01954
14.01.2022	21,18	20,27	20,725	0,02854
13.01.2022	20,53	19,77	20,150	0,02155
12.01.2022	20,05	19,40	19,725	0,03408
11.01.2022	19,48	18,67	19,075	0,01706
10.01.2022	18,93	18,58	18,755	-0,00266
07.01.2022	18,96	18,65	18,805	-0,00660
06.01.2022	19,20	18,66	18,930	-0,01278
05.01.2022	19,62	18,73	19,175	-0,01868
04.01.2022	19,70	19,38	19,540	0,00982
03.01.2022	19,58	19,12	19,350	

Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela A .3 – Vale

Data	Máxima	Mínima	Média	Retorno
30.06.2022	74,20	72,42	73,310	**-0,02468**
29.06.2022	76,14	74,19	75,165	**-0,00562**
28.06.2022	76,28	74,90	75,590	**0,02571**
27.06.2022	75,08	72,31	73,695	**0,05121**
24.06.2022	71,19	69,02	70,105	**-0,01510**
23.06.2022	73,50	68,86	71,180	**0,00211**
22.06.2022	72,30	69,76	71,030	**-0,02592**
21.06.2022	73,81	72,03	72,920	**0,01972**
20.06.2022	72,43	70,59	71,510	**-0,03234**
17.06.2022	75,44	72,36	73,900	**-0,05956**
15.06.2022	79,64	77,52	78,580	**0,00990**
14.06.2022	78,72	76,90	77,810	**0,00439**
13.06.2022	78,79	76,15	77,470	**-0,02627**
10.06.2022	80,80	78,32	79,560	**-0,02380**
09.06.2022	82,71	80,29	81,500	**-0,03235**
08.06.2022	85,88	82,57	84,225	**-0,01017**
07.06.2022	86,41	83,77	85,090	**0,00366**
06.06.2022	85,37	84,19	84,780	**0,00094**
03.06.2022	85,39	84,01	84,700	**-0,00610**
02.06.2022	85,83	84,61	85,220	**0,02570**
01.06.2022	84,41	81,76	83,085	**0,01360**
31.05.2022	83,12	80,82	81,970	**-0,00564**
30.05.2022	83,10	81,77	82,435	**0,01659**
27.05.2022	81,65	80,53	81,090	**0,01687**
26.05.2022	80,48	79,01	79,745	**-0,00269**
25.05.2022	80,62	79,30	79,960	**0,01886**
24.05.2022	79,95	77,01	78,480	**-0,00501**
23.05.2022	79,53	78,22	78,875	**0,01768**
20.05.2022	78,40	76,61	77,505	**0,03292**
19.05.2022	76,42	73,65	75,035	**0,00752**
18.05.2022	75,34	73,61	74,475	**-0,02552**
17.05.2022	77,88	74,97	76,425	**0,01011**
16.05.2022	76,67	74,65	75,660	**0,01278**
13.05.2022	75,44	73,97	74,705	**0,02203**
12.05.2022	74,06	72,13	73,095	**-0,02063**
11.05.2022	75,95	73,32	74,635	**0,03423**
10.05.2022	73,15	71,18	72,165	**-0,01461**
09.05.2022	74,14	72,33	73,235	**-0,03192**
06.05.2022	76,91	74,39	75,650	**-0,01932**
05.05.2022	79,10	75,18	77,140	**0,00149**
04.05.2022	78,13	75,92	77,025	**-0,02623**
03.05.2022	80,06	78,14	79,100	**0,01560**
02.05.2022	79,10	76,67	77,885	**-0,03899**
29.04.2022	82,90	79,19	81,045	**0,02472**
28.04.2022	81,33	76,85	79,090	**0,02170**
27.04.2022	78,62	76,20	77,410	**0,03614**
26.04.2022	75,41	74,01	74,710	**0,00007**
25.04.2022	75,69	73,72	74,705	**-0,03867**
22.04.2022	79,29	76,13	77,710	**-0,04439**
20.04.2022	82,40	80,24	81,320	**-0,03092**
19.04.2022	85,27	82,56	83,915	**-0,03011**
18.04.2022	87,47	85,57	86,520	**-0,01810**
14.04.2022	89,37	86,86	88,115	**-0,00978**
13.04.2022	89,73	88,24	88,985	**-0,00880**
12.04.2022	90,90	88,65	89,775	**0,00656**
11.04.2022	90,04	88,34	89,190	**-0,02290**
08.04.2022	92,60	89,96	91,280	**-0,00420**
07.04.2022	92,88	90,45	91,665	**0,00411**
06.04.2022	91,95	90,63	91,290	**-0,00289**
05.04.2022	92,96	90,15	91,555	**-0,01129**
04.04.2022	93,41	91,79	92,600	**0,00630**
01.04.2022	92,70	91,34	92,020	**0,00689**

Data	Máxima	Mínima	Média	Retorno
31.03.2022	92,12	90,66	91,390	**-0,00066**
30.03.2022	92,32	90,58	91,450	**0,01752**
29.03.2022	90,95	88,80	89,875	**-0,00465**
28.03.2022	91,59	89,00	90,295	**-0,01376**
25.03.2022	93,46	89,65	91,555	**-0,00158**
24.03.2022	92,79	90,61	91,700	**-0,01191**
23.03.2022	94,06	91,55	92,805	**0,00043**
22.03.2022	94,08	91,45	92,765	**-0,00728**
21.03.2022	94,53	92,36	93,445	**0,03517**
18.03.2022	91,36	89,18	90,270	**0,01256**
17.03.2022	90,30	88,00	89,150	**0,02377**
16.03.2022	89,25	84,91	87,080	**0,03574**
15.03.2022	85,17	82,98	84,075	**-0,05139**
14.03.2022	90,51	86,75	88,630	**-0,04468**
11.03.2022	93,56	91,99	92,775	**0,01979**
10.03.2022	92,51	89,44	90,975	**0,01603**
09.03.2022	91,08	88,00	89,540	**-0,05429**
08.03.2022	98,06	91,30	94,680	**-0,01401**
07.03.2022	96,95	95,10	96,025	**0,04774**
04.03.2022	93,47	89,83	91,650	**-0,00272**
03.03.2022	92,71	91,09	91,900	**0,02032**
02.03.2022	91,28	88,86	90,070	**0,10849**
25.02.2022	84,60	77,91	81,255	**0,03338**
24.02.2022	80,60	76,66	78,630	**-0,01219**
23.02.2022	80,88	78,32	79,600	**0,00397**
22.02.2022	80,02	78,55	79,285	**-0,00170**
21.02.2022	80,56	78,28	79,420	**0,00602**
18.02.2022	79,68	78,21	78,945	**-0,01096**
17.02.2022	81,48	78,16	79,820	**-0,02972**
16.02.2022	82,96	81,57	82,265	**0,01168**
15.02.2022	82,34	80,29	81,315	**-0,02925**
14.02.2022	84,38	83,15	83,765	**-0,01086**
11.02.2022	85,51	83,86	84,685	**-0,00814**
10.02.2022	86,50	84,26	85,380	**0,02973**
09.02.2022	84,05	81,78	82,915	**0,00084**
08.02.2022	83,75	81,94	82,845	**0,01451**
07.02.2022	82,62	80,70	81,660	**0,02691**
04.02.2022	80,72	78,32	79,520	**0,00939**
03.02.2022	79,45	78,11	78,780	**0,00639**
02.02.2022	79,00	77,56	78,280	**0,02582**
01.02.2022	78,12	74,50	76,310	**0,01767**
31.01.2022	75,93	74,04	74,985	**-0,03176**
28.01.2022	79,06	75,83	77,445	**0,00265**
27.01.2022	78,24	76,24	77,240	**-0,00968**
26.01.2022	79,25	76,74	77,995	**0,01358**
25.01.2022	77,87	76,03	76,950	**0,01237**
24.01.2022	76,87	75,15	76,010	**-0,02937**
21.01.2022	79,40	77,22	78,310	**-0,02581**
20.01.2022	81,45	79,32	80,385	**-0,00722**
19.01.2022	81,48	80,46	80,970	**0,03225**
18.01.2022	79,54	77,34	78,440	**0,01639**
17.01.2022	77,45	76,90	77,175	**0,00443**
14.01.2022	77,76	75,91	76,835	**-0,00640**
13.01.2022	78,03	76,63	77,330	**-0,01509**
12.01.2022	79,27	77,76	78,515	**0,01815**
11.01.2022	77,96	76,27	77,115	**0,01134**
10.01.2022	77,15	75,35	76,250	**0,01701**
07.01.2022	76,90	73,05	74,975	**0,03236**
06.01.2022	73,56	71,69	72,625	**0,01830**
05.01.2022	72,03	70,61	71,320	**-0,00105**
04.01.2022	72,39	70,40	71,395	**-0,01265**
03.01.2022	73,21	71,41	72,310	

Fonte: Elaborada pela autora.