

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CAMPUS SOROCABA

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS PARA A SUSTENTABILIDADE

DEPARTAMENTO DE FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA

Lucas Araujo Proença

**Biestabilidade óptica em átomos de três níveis
em uma cavidade óptica**

Sorocaba

2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CAMPUS SOROCABA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS PARA A SUSTENTABILIDADE
DEPARTAMENTO DE FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA

Lucas Araujo Proença

**Biestabilidade óptica em átomos de três níveis em uma
cavidade óptica**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura Plena em Física da Universidade Federal de São Carlos, *Campus* Sorocaba, para obtenção do título de Licenciado em Física. Sorocaba, 21 de julho de 2023.

Orientador: Prof. Dr. James Alves de Souza

Sorocaba

2023

Proença, Lucas Araujo

Biestabilidade óptica em átomos de três níveis em uma cavidade óptica / Lucas Araujo Proença -- 2023.
50f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos,
campus Sorocaba, Sorocaba

Orientador (a): James Alves de Souza

Banca Examinadora: Antonio Luis Venezuela, Tersio

Guilherme de Souza Cruz

Bibliografia

1. Biestabilidade óptica. 2. Eletrodinâmica quântica em cavidades. 3. Aprisionamento coerente de população em cavidades. I. Proença, Lucas Araujo. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática
(SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Maria Aparecida de Lourdes Mariano -
CRB/8 6979



FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA - SOROCABA - CCFL-So/CCTS

Rod. João Leme dos Santos km 110 - SP-264, s/n - Bairro Itinga, Sorocaba/SP, CEP 18052-780

Telefone: (15) 32298859 - <http://www.ufscar.br>

DP-TCC-FA nº 5/2023/CCFL-So/CCTS

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

LUCAS ARAUJO PROENÇA

BIESTABILIDADE ÓPTICA EM ÁTOMOS DE TRÊS NÍVEIS EM UMA CAVIDADE ÓPTICA

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus Sorocaba

Sorocaba, 21 de julho de 2023

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	Prof. Dr. James Alves de Souza
Membro da Banca 1	Prof. Dr. Tersio Guilherme de Souza
Membro da Banca 2	Prof. Dr. Antonio Luís Venezuela



Documento assinado eletronicamente por **James Alves de Souza, Docente**, em 24/07/2023, às 14:15, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Tersio Guilherme de Souza Cruz, Servidor(a) Público(a) Federal**, em 24/07/2023, às 16:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Antonio Luis Venezuela, Docente**, em 24/07/2023, às 20:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA - SOROCABA - CCFL-So/CCTS

Rod. João Leme dos Santos km 110 - SP-264, s/n - Bairro Itinga, Sorocaba/SP, CEP 18052-780

Telefone: (15) 32298859 - <http://www.ufscar.br>

DP-TCC-ADP nº 5/2023/CCFL-So/CCTS

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Ata da Defesa Pública (GDP-TCC-ADP)

Aos vinte e um dias do mês de julho de 2023, realizou-se a Defesa Pública do Trabalho de Conclusão de Curso do (a) estudante Lucas Araujo Proença da Universidade Federal de São Carlos – Campus Sorocaba, devidamente matriculado na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso, perante a Banca Examinadora, composta pelos Professores James Alves de Souza, Tersio Guilherme de Souza e Antonio Luís Venezuela, segundo o estabelecido nas Normas para apresentação de Trabalho de Conclusão do Curso.

Após a apresentação e arguições, a Banca deliberou, segundo os critérios estabelecidos nas normas supracitadas:

Nome do Docente	Função	Nota
Prof. Dr. James Alves de Souza	Orientador	10
Prof. Dr. Tersio Guilherme de Souza	Membro da Banca 1	10
Prof. Dr. Antonio Luís Venezuela	Membro da Banca 2	10

Com isso, o Trabalho foi considerado APROVADO , com nota final 10 (DEZ).

Sorocaba, 21 de julho de 2023.



Documento assinado eletronicamente por **James Alves de Souza, Docente**, em 24/07/2023, às 14:15, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Tersio Guilherme de Souza Cruz, Servidor(a) Público(a) Federal**, em 24/07/2023, às 16:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Antonio Luis Venezuela, Docente**, em 24/07/2023, às 20:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufscar.br/autenticacao>, informando o código verificador **1109940** e o código CRC **238B2B76**.

Referência: Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo nº 23112.022494/2023-16

SEI nº 1109940

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela graça alcançada de encerrar mais esse ciclo em minha vida. Agradeço a minha esposa e companheira Estefane Maiara por todo o apoio emocional durante minha graduação, incentivos, por acreditar em mim e por todo o seu amor. Agradeço a toda a minha família pelo incentivo, pela paciência e por toda a ajuda que sempre me deram.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. James Alves de Souza pelos ensinamentos, pela paciência e correções durante a elaboração da minha iniciação científica e deste trabalho.

Aos meus colegas, de modo especial a Jamile e o Gustavo, pelo companheirismo, pela ajuda e amizade que construímos ao longo de todo esse tempo da minha graduação.

Aos professores que tive durante esta jornada. Seus ensinamentos contribuíram fundamentalmente para minha evolução, tanto profissional quanto pessoal. Obrigado a todos.

*"O amor é paciente, o amor é bondoso.
Não inveja, não se vangloria, não se orgulha.
Não maltrata, não procura seus interesses,
não se ira facilmente, não guarda rancor.
O amor não se alegra com a injustiça,
mas se alegra com a verdade.
Tudo sofre, tudo crê, tudo espera, tudo suporta."*

1 Coríntios 13:4-7

Resumo

O fenômeno da biestabilidade óptica em sistemas atômicos confinados em uma cavidade óptica tem sido extensamente explorado devido ao seu potencial de aplicações como chaveadores ópticos, memórias e transistores ópticos. A biestabilidade observada em sistemas atômicos de muitos níveis tem algumas vantagens sobre o sistema usual de dois níveis com relação a propriedades ópticas não lineares, absorção e dispersão. A configuração de átomos de mais de dois níveis permite a utilização de outros campos eletromagnéticos acoplando ressonantemente, ou quase ressonantemente, diferentes transições atômicas, tornando mais viável a manipulação e controle de processos ópticos não lineares, os quais podem estar relacionados aos fenômenos de transparência eletromagneticamente induzida (EIT - *Electromagnetically Induced Transparency*) e aprisionamento coerente de população (CPT - *Coherent Population Trapping*). Neste trabalho estudamos teoricamente o fenômeno de CPT em cavidades para explorar o controle e as propriedades da biestabilidade óptica em sistemas compostos por N átomos de três níveis em configuração Λ , acoplados independentemente ao mesmo modo do campo de uma cavidade óptica. Para a obtenção do hamiltoniano de interação do sistema utilizamos a aproximação semiclássica, que consiste em considerar os átomos quanticamente e o campo da cavidade classicamente. Através do formalismo da equação mestra, deduzimos as equações de Maxwell-Bloch e a dinâmica do sistema foi obtida a partir de simulações computacionais conduzidas em MATLAB. Os resultados obtidos mostram que é possível obter um controle sensível da biestabilidade óptica a partir do ajuste de parâmetros externos ao sistema, como a frequência e a intensidade do campo de prova e a intensidade do campo de controle. A possibilidade de controlar luz com luz observada no sistema estudado, através do fenômeno da biestabilidade óptica, pode ser promissora para o desenvolvimento de dispositivos ópticos com diferentes funcionalidades.

Palavras-chave: Biestabilidade óptica, Eletrodinâmica quântica em cavidades, Aproximação semiclássica, Aprisionamento coerente de população em cavidades.

Abstract

The phenomenon of optical bistability in atomic systems confined in an optical cavity has been extensively explored due to its potential for applications such as optical switches, memories and optical transistors. The bistability observed in multi-level atomic systems has some advantages over the usual two-level system with respect to non-linear optical properties, absorption and scattering. The configuration of atoms with more than two levels allows the use of other electromagnetic fields by coupling different atomic transitions resonantly, or quasi-resonantly, making it more feasible to manipulate and control non-linear optical processes, which may be related to the phenomena of electromagnetically induced transparency (EIT - *Electromagnetically Induced Transparency*) and coherent population trapping (CPT - *Coherent Population Trapping*). In this work we theoretically study the CPT phenomenon in cavities to explore the control and properties of optical bistability in systems composed of N three-level atoms in Λ configuration, independently coupled to the same field mode of an optical cavity. To obtain the interaction hamiltonian of the system we used the semiclassical approximation, which consists of considering atoms quantumly and the cavity field classically. Through the formalism of the master equation, we derive the Maxwell-Bloch equations and the dynamics of the system was obtained through computational simulations performed in MATLAB. The obtained results show that it is possible to obtain a sensitive control of the optical bistability from the adjustment of parameters external to the system, such as the frequency and intensity of the test field and the intensity of the control field. The possibility of controlling light with observed light in the studied system, through the phenomenon of optical bistability, can be promising for the development of optical devices with different functionalities.

Keywords: Optical bistability, Cavity quantum electrodynamics, Semiclassical approximation, Cavity coherent population trapping.

Lista de ilustrações

- Figura 1 – Representação de um átomo de três níveis de energia, com dois estados fundamentais $|1\rangle$ e $|2\rangle$ e um estado excitado $|3\rangle$. As transições $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$ e $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$ são caracterizadas pelas frequências ω_{31} e ω_{32} , respectivamente, e a transição $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ é considerada como sendo proibida em nosso modelo. O estado fundamental $|1\rangle$ é o estado de menor energia, $E_1 = 0$, no nosso referencial. 16
- Figura 2 – (a) Ilustração da configuração do sistema átomo-campo, mostrando os campos de prova e de controle iluminando uma amostra atômica composta por N átomos não interagentes e a luz resultante da interação entre os átomos e os campos sendo transmitida e observada em um detector. (b) Átomo de três níveis em configuração Λ mostrando os acoplamentos das transições atômicas $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$ e $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$ com o campo da cavidade, de frequência ω , e com o campo de controle, de frequência ω_c , respectivamente. A energia para observação da dinâmica do sistema átomo-campo é fornecida pelo campo de prova, de frequência ω_p , que bombeia o modo do campo da cavidade. Todas as dessintonias relevantes do sistema são definidas por $\Delta_1 = \omega_{31} - \omega$, $\Delta_2 = \omega_{32} - \omega_c$ e $\Delta_p = \omega_p - \omega$. A transmissão da cavidade é descrita pelo número médio de fótons dada por $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ 18
- Figura 3 – Espectro de transmissão em função da dessintonia prova-cavidade normalizada Δ_p/κ do sistema átomo-campo, para um único átomo de três níveis no interior da cavidade (linha sólida), $g_0 = 5,0\kappa$, $\varepsilon = \sqrt{0,01}\kappa$, $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$, $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ e $\Omega_C = 3,0\kappa$. A linha tracejada-pontilhada é o espectro de transmissão da cavidade vazia correspondente. 24

- Figura 4 – Espectros de transmissão do sistema átomo-cavidade em função da dessintonia prova-cavidade normalizada Δ_p/κ , obtidos quanticamente (linha sólida) e semiclassicamente (linha pontilhada) para diferentes números de átomos N , utilizando os parâmetros $g_0 = 5,0\kappa$, $\varepsilon = \sqrt{0,01}\kappa$, $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$, $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ e $\Omega_C = 3,0\kappa$ 25
- Figura 5 – Espectro de transmissão em função da dessintonia prova-cavidade normalizada para o sistema átomo-cavidade contendo $N = 50$ átomos de três níveis no regime de acoplamento fraco para dois diferentes valores da força do campo de prova $\varepsilon = \sqrt{4}\kappa$ e $\varepsilon = \sqrt{8}\kappa$, utilizando os parâmetros $g_0 = 1,0\kappa$, $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$ and $\Omega_c = 0,5\kappa$. As setas indicam o ciclo de histerese que aparece quando aumentamos e diminuimos Δ_P a partir de zero. 29
- Figura 6 – (a) Transmissão relativa $T(\%)$ em função da força do campo de prova normalizado ε/κ para o sistema CCPT com $N = 100$ átomos para diferentes valores da dessintonia prova-cavidade Δ_P e $g_0 = 0,5\kappa$, $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$ e $\Omega_c = 0,5\kappa$. As setas indicam o ciclo de histerese que aparece quando aumentamos e diminuimos ε a partir de zero. 30
- Figura 7 – Transmissão relativa em função de ε/κ para o sistema átomo-cavidade de $N = 100$ átomos para diferentes valores da frequência de Rabi Ω_c e $g_0 = 0,5\kappa$, $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$, $\Delta_P = 0,1\kappa$ 31
- Figura 8 – Transmissão relativa em função da frequência de Rabi normalizada do campo de controle Ω_c/κ do sistema átomo-cavidade com $N = 1.000$ átomos e $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 0,02\kappa$ e $\Delta_P = 0,1\kappa$, para (a) diferentes valores de ε e $g_0 = 0,3\kappa$, e (b) diferentes valores do acoplamento individual átomo-campo g_0 e $\varepsilon = \sqrt{50}\kappa$ 32

Sumário

1	INTRODUÇÃO	12
2	TEORIA QUÂNTICA DO SISTEMA ÁTOMO-CAMPO	15
2.1	Cavidade Óptica	15
2.2	Átomo de três níveis em configuração Λ	16
2.3	Hamiltoniano do sistema átomo-campo	17
2.4	Formalismo da Equação Mestra	22
2.5	O Fenômeno da CCPT e Aproximação Semiclássica	23
2.6	Equações de Maxwell-Bloch	26
3	CONTROLE DA BIESTABILIDADE ÓPTICA	28
3.1	Campo de Prova como Parâmetro de Entrada	29
3.2	Campo de Controle como Parâmetro de Entrada	31
4	CONCLUSÃO	34
	REFERÊNCIAS	35
A	APÊNDICE: DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL-BLOCH	38

1 Introdução

A compreensão do mundo a nossa volta sempre intrigou a humanidade ao fomento de novas hipóteses, modelos e teorias físicas que apresentassem um respaldo aos fenômenos observáveis no nosso universo. Até o final do século XIX, havíamos compreendido quase todos os fenômenos conhecidos, desde a descrição do movimento de pequenos corpos e de planetas do sistema solar, com a mecânica newtoniana, à unificação dos fenômenos elétricos e magnéticos, através das equações de Maxwell. Com o crescente número de resultados experimentais observados no final do século XIX e início do século XX, que não eram explicados pelas teorias vigentes, houve a necessidade da formulação de novas ideias e teorias na Física, como as teorias da Relatividade Restrita e Geral de Albert Einstein, os quanta de energia de Max Planck, a teoria quântica da luz de Einstein, entre outras contribuições muito importantes de Niels Bohr, Max Born, Louis de Broglie, Werner Heisenberg, Erwin Schrödinger, etc., que marcaram o início e desenvolvimento da Mecânica Quântica (MQ).

Neste contexto, a MQ emergiu como uma mudança de paradigma e com pouca aceitação (EISBERG R.; RESNICK, 1974). Apesar disso, o desenvolvimento da estrutura dessa nova teoria foi rápido, estando consolidado até a década de 1930.

A MQ é uma teoria física que descreve as propriedades da matéria no nível de *microfenômenos*, ou seja, esta considera as leis de movimento de *micropartículas*, como moléculas, átomos e partículas elementares. De um ponto de vista mais amplo, a MQ pode ser considerada como a fundação teórica (base) da teoria moderna da estrutura e propriedades da matéria. Se compararmos a mesma com a Mecânica Clássica, a MQ considera as propriedades da matéria em um *nível mais profundo e fundamental* (TARASOV, 1980).

Com a necessidade e consolidação de novas teorias e das crescentes descobertas científicas, houve um avanço tecnológico significativo. Isso acarretou no desenvolvimento de novos produtos, materiais e processos como os computadores portáteis, celulares, lasers, armazenamento de informação, fontes de energia, semicondutores, etc. Estes têm revolucionado a cultura, a comunicação e o modo de vida das gerações que seguiram. O entendimento das leis da MQ e o seu sucesso para a descrição e previsão de novos fenômenos

físicos, como emaranhamento, superposição e tunelamento quânticos, vem fornecendo possibilidades para a criação de uma nova era de dispositivos tecnológicos que podem ser desenvolvidos e manipulados na escala atômica, com o objetivo de propiciar a expansão da capacidade de computadores, processamento e transmissão de informação, sensores, criptografia, simulações, medidas, formação de imagens, entre outros (KIMBLE, 2008; LVOVSKY; SANDERS; TITTEL, 2009; GIBNEY, 2019). Este campo emergente da Física e da engenharia é conhecido como *tecnologias quânticas* (BENIOFF, 1982; ZUBAIRY, 2020).

Dentre as áreas de pesquisa que vem se destacando e crescendo continuamente para auxiliar no desenvolvimento de tecnologias quânticas, podemos citar a *Óptica Quântica*. Esta nos possibilita estudar como os quanta individuais de luz, conhecidos como fótons, interagem com átomos e moléculas em seu nível mais fundamental (SCULLY; ZUBAIRY, 1997; GRYNBERG; ASPECT; FABRE, 2010).

O reconhecimento de um grande potencial de aplicações em óptica quântica tem motivado um nível considerável de atividade voltado para a pesquisa de sistemas atômicos e moleculares de três níveis acoplados a dois campos laser, podendo dar origem a fenômenos como o aprisionamento coerente de população, CPT, do inglês *Coherent Population Trapping*, dentre outros fenômenos relacionados, como a transparência eletromagneticamente induzida, EIT - *Electromagnetically Induced Transparency* (HARRIS; FIELD; IMAMOGLU, 1990; HARRIS, 1997; MARANGOS, 1998; HAU et al., 1999; LUKIN M. D.; IMAMOGLU, 2001; FLEISCHHAUER; IMAMOGLU; MARANGOS, 2005; EISAMAN et al., 2005; YAN et al., 2019; NOURINOVIN; ALOMAINY, 2021; ZHANG et al., 2021). Estes fenômenos oferecem possibilidades ainda melhores de controlar a luz com luz através da eletrodinâmica quântica de cavidades (EQC), uma vez que é possível melhorar significativamente a interação radiação-matéria, se esta é estabelecida no interior de cavidades ópticas (DEUTSCH, 1998; MÜCKE M.; FIGUEROA, 2010; SOUZA J. A.; FIGUEROA, 2013; SOUZA, 2013).

Outro importante fenômeno que tem recebido uma atenção considerável nas últimas décadas, devido ao seu potencial para o desenvolvimento de chaveadores ópticos, memórias e amplificadores é a biestabilidade óptica atômica. Vários trabalhos, teóricos e experimentais, foram reportados em sistemas atômicos de dois e muitos níveis (BONIFACIO R.; LUGIATO, 1976; GIBBS H. M.; MCCALL, 1976; BONIFACIO R.; LUGIATO,

1978; AGRAWAL G. P.; CARMICHAEL, 1979; OROZCO L. A.; ROSENBERGER, 1987; REMPE G.; THOMPSON, 1991; JOSHI A.; XIAO, 2003; JOSHI A.; XIAO, 2010). Os efeitos coerentes induzidos pelos fenômenos de EIT e de CPT em cavidades ópticas, também conhecidos como CEIT e CCPT, respectivamente, são muito atraentes para o controle da biestabilidade óptica devido à habilidade destes sistemas de suprimir uma absorção linear de um meio multinível ressonante (HARSHAWARDHAN W.; AGARWAL, 1996; WANG H.; GOORSKEY, 2001; MAHMOUDI M.; NOZARI, 2012).

Neste trabalho investigamos teoricamente o comportamento biestável de um sistema composto por N átomos de três níveis em configuração Λ em uma cavidade óptica, sob as condições do fenômeno de CCPT, através da manipulação de diferentes parâmetros do sistema, como a frequência e a intensidade do campo de prova, o acoplamento individual átomo-campo, o número de átomos, entre outros. Utilizando o formalismo da equação mestra obtemos as equações de Maxwell-Bloch e demonstramos, através da análise dos resultados das simulações computacionais conduzidas, que é possível controlar a biestabilidade óptica no sistema proposto. A sensibilidade observada no controle da biestabilidade pode ser promissora para o controle e manipulação de processos ópticos que envolvam sistemas atômicos multiníveis.

2 Teoria Quântica do Sistema Átomo-Campo

Nesta seção apresentamos a cavidade óptica, o sistema atômico de três níveis em configuração Λ e suas características. Adicionalmente, apresentamos o formalismo da equação mestra para descrever a interação entre estes dois sistemas.

2.1 Cavidade Óptica

Um sistema atômico é composto por diversos níveis de energia discretos, quantizados, ou seja, estes níveis possuem energias caracterizadas por frequências específicas, bem definidas, dadas por $E = \hbar\omega$ ou $E = h\nu$, em que $\hbar = h/2\pi$ é a constante reduzida de Planck e ω ou ν a respectiva frequência de transição. Isso significa que, para os elétrons constituintes do átomo serem capazes de transicionar de um nível $|1\rangle$, de menor energia, para um nível $|2\rangle$ de maior energia, é necessário que eles absorvam um *quantum* de energia dado por $E = \hbar\omega_{12}$, equivalente à energia de um fóton de frequência ω_{12} , com esta sendo a frequência da transição $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$.

Dessa forma, quando colocamos um átomo com um único elétron em sua camada de valência, por exemplo, para interagir com um campo eletromagnético, como um laser, o elétron absorverá apenas os fótons com frequência próxima à frequência de transição de seus respectivos níveis de energia possíveis. Portanto, o principal fenômeno físico explorado neste processo é o de *ressonância*.

Para que o acoplamento átomo-campo se torne mais forte, ou seja, para tornar a interação entre radiação e matéria mais eficiente, colocamos o sistema no interior de uma *cavidade óptica*. Uma cavidade óptica é um ressonador eletromagnético composto por dois ou mais espelhos e é caracterizada por possuir frequências de trabalho bem definidas. Estas podem ser geradas ou selecionadas a partir da manipulação da geometria da cavidade (SOUZA, 2013). No nosso sistema o acoplamento individual entre um elétron e o modo do campo da cavidade, com frequência ω , é dado pelo parâmetro g_0 .

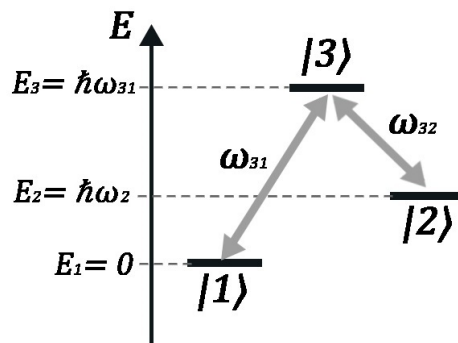
Apesar da interação radiação-matéria ser conduzida por elétrons e fótons é muito comum em óptica quântica nos referirmos à interação átomo-campo, pois os átomos

considerados nos experimentos possuem apenas um elétron em sua última camada de valência, como o isótopo estável do rubídio ^{87}Rb e outros átomos alcalinos como o cério ^{133}Cs e o sódio ^{23}Na . O rubídio 87 possui 37 elétrons, mas em seu orbital mais externo existe apenas um, que será responsável pela dinâmica do sistema átomo-campo (STECK, 2003).

2.2 Átomo de três níveis em configuração Λ

Neste trabalho utilizamos um sistema atômico de três níveis de energia na configuração Λ , conforme ilustrado na figura 1. Note pela figura que o símbolo Λ está diretamente relacionado com a configuração dos níveis de energia no sistema. Adicionalmente a esta, existem também as configurações escada Ξ e V para o sistema atômico de três níveis. A escolha da configuração Λ para o desenvolvimento do nosso trabalho foi feita, porque o fenômeno de aprisionamento coerente de população (CPT) que exploramos, apresenta maior utilidade para aplicações nesta configuração do que para as outras duas (FLEISCHHAUER; IMAMOGLU; MARANGOS, 2005).

Figura 1 – Representação de um átomo de três níveis de energia, com dois estados fundamentais $|1\rangle$ e $|2\rangle$ e um estado excitado $|3\rangle$. As transições $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$ e $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$ são caracterizadas pelas frequências ω_{31} e ω_{32} , respectivamente, e a transição $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ é considerada como sendo proibida em nosso modelo. O estado fundamental $|1\rangle$ é o estado de menor energia, $E_1 = 0$, no nosso referencial.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para que possamos selecionar apenas os três níveis da configuração Λ diante de inúmeros outros níveis de um sistema atômico real, é necessário explorar o fenômeno da *ressonância*, para estimular as transições $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$ e $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$. Isso é possível se acoplarmos ressonantemente dois campos laser a estas transições. Outro fenômeno

importante que devemos nos atentar é se as transições atômicas selecionadas são possíveis, pois existem transições de dipolo que são proibidas, ou são muito difíceis de serem observadas experimentalmente. As possibilidades de transição de dipolo são conhecidas como *regras de seleção* (SOUZA, 2013).

Como o nosso modelo é puramente teórico, nós consideramos como transições possíveis apenas $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$ e $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$, as quais são caracterizadas pelas frequências ω_{31} e ω_{32} , respectivamente. A transição entre os dois níveis fundamentais $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ é considerada como sendo proibida em nosso sistema.

2.3 Hamiltoniano do sistema átomo-campo

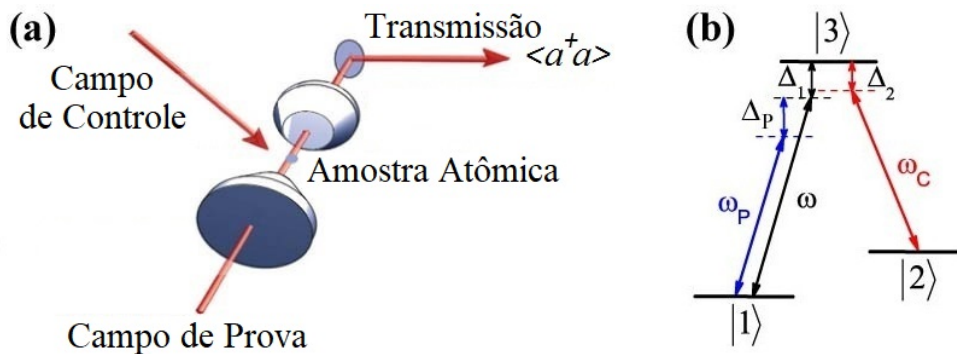
Antes de apresentar o hamiltoniano do nosso sistema atômico de três níveis interagindo com um modo do campo da cavidade óptica, o qual chamamos de sistema átomo-campo, vamos discutir a configuração do sistema como um todo e a física envolvida no processo de interação.

Nosso modelo consiste de dois campos laser, chamados de prova e de controle, iluminando uma amostra atômica composta por N átomos de três níveis não interagentes em configuração Λ , cada um acoplado ao mesmo modo do campo de uma cavidade óptica. Um esquema ilustrativo da configuração experimental desse sistema é apresentado na figura 2(a). A transição atômica $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$ é estimulada (acoplada) pelo campo de controle, com frequência ω_c e frequência de Rabi $2\Omega_c$, e a transição $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$ é acoplada pelo modo da cavidade, com frequência ω e frequência de Rabi do vácuo $2g_0$, como ilustrado na figura 2(b). A cavidade é iluminada (bombeada) pelo campo de prova com amplitude ε e frequência ω_p . A frequência de Rabi é um parâmetro diretamente proporcional à amplitude do campo laser utilizado e ao elemento de dipolo elétrico da transição atômica que o mesmo está acoplado.

Como já discutido, a configuração da cavidade óptica nos permite selecionar frequências bem definidas, que caracterizam os modos do campo da cavidade, como se fossem os modos de vibração de uma corda presa em ambas as extremidades. Ou seja, cada modo possui uma frequência ressonante. Dependendo das condições de contorno, fornecidas pelos espelhos da cavidade, é possível obter uma configuração de campo diferente. No nosso modelo consideramos apenas um modo do campo com frequência ressonante ω .

Essa frequência é escolhida para estar em perfeita ressonância com a transição atômica $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$, ou seja, $\omega = \omega_{31}$, de maneira que $\Delta_1 = 0$. Consideramos que todos os N átomos da amostra atômica são acoplados a este modo do campo, de maneira que eles interagem apenas com o campo da cavidade, não interagindo entre si. O campo de controle é utilizado para estimular ressonantemente a transição $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$ dos átomos. Conseqüentemente, $\omega_c = \omega_{32}$, o que fornece $\Delta_2 = 0$. Essas duas ressonâncias são consideradas em todas as nossas simulações. A partir dessa configuração é possível observar a formação de novos níveis de energia decorrentes da interação dos N átomos de três níveis com o campo da cavidade e o campo de controle. Estes são conhecidos como os *estados vestidos* do sistema átomo-campo. Pelo princípio de superposição, não é possível distinguir os átomos do campo nesta configuração.

Figura 2 – (a) Ilustração da configuração do sistema átomo-campo, mostrando os campos de prova e de controle iluminando uma amostra atômica composta por N átomos não interagentes e a luz resultante da interação entre os átomos e os campos sendo transmitida e observada em um detector. (b) Átomo de três níveis em configuração Λ mostrando os acoplamentos das transições atômicas $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$ e $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$ com o campo da cavidade, de frequência ω , e com o campo de controle, de frequência ω_c , respectivamente. A energia para observação da dinâmica do sistema átomo-campo é fornecida pelo campo de prova, de frequência ω_p , que bombeia o modo do campo da cavidade. Todas as dessintonias relevantes do sistema são definidas por $\Delta_1 = \omega_{31} - \omega$, $\Delta_2 = \omega_{32} - \omega_c$ e $\Delta_p = \omega_p - \omega$. A transmissão da cavidade é descrita pelo número médio de fótons dada por $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para monitorarmos a interação entre os átomos e os campos é necessário fornecer energia ao sistema. Esta é a função do campo de prova, comumente conhecido como campo de bombeio, pois este irá estimular ou bombear o sistema átomo-campo. Este bombeio é feito no campo da cavidade, ou seja, energia é injetada na cavidade e como a cavidade é preparada para estar ressonantemente acoplada com a transição $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$ dos átomos, o

efeito é semelhante a bombear ou estimular os átomos.

Para que os fótons provenientes do campo de prova interajam por um tempo suficiente com os átomos, é necessário que os espelhos da cavidade sejam semitransparentes, para que a luz fique refletindo no interior da cavidade. Quando a mesma é transmitida, esta é direcionada para um detector de fótons para que seja analisada e as informações sobre a interação dos átomos com os campos sejam obtidas. O tempo de permanência dos fótons no interior da cavidade é medido pela taxa de decaimento da cavidade κ .

Portanto, a medida que é feita para analisar a interação átomo-campo é indireta, pois não é possível monitorar o que está acontecendo exatamente com o sistema no interior da cavidade.

O hamiltoniano do campo eletromagnético de uma cavidade óptica é descrito como uma soma de osciladores harmônicos independentes de frequência ω_j . Além disso, em virtude da quantização do campo, podemos associar esse hamiltoniano com os operadores de aniquilação \hat{a} e criação \hat{a}^\dagger como (SCULLY; ZUBAIRY, 1997):

$$\hat{H}_{Campo} = \hbar \sum_j \omega_j \left(\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \frac{1}{2} \right). \quad (2.1)$$

O termo $1/2\hbar\omega_j$ corresponde à energia de flutuação do vácuo, também conhecida como energia de ponto zero, e os operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger obedecem a lei de comutação $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ e às operações abaixo, quando aplicados aos estados de número de fótons $|n\rangle$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad (2.2a)$$

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad (2.2b)$$

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = n |n\rangle. \quad (2.2c)$$

O nome destes operadores é intuitivo, pois quando o operador \hat{a}^\dagger é aplicado a um estado de número $|n\rangle$, ele cria um fóton de energia $\hbar\omega$ no campo da cavidade, enquanto o operador \hat{a} aniquila um fóton de mesma energia no campo da cavidade. O número médio de fótons no interior da cavidade, que nos fornece a transmissão da mesma em nossas simulações, é descrito pelo operador número $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = \langle \hat{n} \rangle$. Como em nosso sistema consideramos N átomos não interagentes, interagindo apenas com um modo da cavidade, a equação (2.1) é reduzida a,

$$\hat{H}_{Campo} = \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a}. \quad (2.3)$$

Note que negligenciamos a energia de ponto zero, pois esta é uma constante.

O hamiltoniano atômico é descrito pelas energias das transições permitidas no nosso modelo $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$ e $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$, dadas por $\hbar\omega_{31}$ e $\hbar\omega_{32}$, respectivamente, ou seja,

$$\hat{H}_{at} = \hbar\omega_{32}\hat{\sigma}_{22} + \hbar\omega_{31}\hat{\sigma}_{33}, \quad (2.4)$$

em que $\hat{\sigma}_{22} = |2\rangle\langle 2|$ e $\hat{\sigma}_{33} = |3\rangle\langle 3|$ são os operadores atômicos de população dos níveis $|2\rangle$ e $|3\rangle$, respectivamente.

Como nosso sistema é composto por N átomos não interagentes, o hamiltoniano (2.4) deve ser reescrito como,

$$\hat{H}_{at} = \hbar\omega_{32}\hat{S}_{22} + \hbar\omega_{31}\hat{S}_{33}, \quad (2.5)$$

em que consideramos a população coletiva do sistema $S_{ii} = \sum_{k=1}^N \sigma_{ii}^{(k)}$, para $i = 2, 3$.

Para descrição da interação entre os átomos de três níveis com o campo de controle, consideramos este último classicamente como $E(t) = E_c e^{-i\omega t} + E_c^* e^{i\omega t}$, em que E_c^* é o complexo conjugado da amplitude do campo de controle. Dessa forma, o hamiltoniano de interação \hat{H}_{int} dos átomos com o modo do campo da cavidade e com o campo de controle é descrito por (SCULLY; ZUBAIRY, 1997),

$$\hat{H}_{int} = \hbar g_0 (\hat{a}\hat{S}_{31} + \hat{a}^\dagger\hat{S}_{13}) + \hbar\Omega_c (\hat{S}_{32}e^{i\omega_c t} + \hat{S}_{23}e^{-i\omega_c t}), \quad (2.6)$$

$$\hat{H}_{int} = \hbar g_0 \hat{a}\hat{S}_{31} + \hbar\Omega_c \hat{S}_{32}e^{i\omega_c t} + h.c., \quad (2.7)$$

sendo $h.c.$ o hermitiano conjugado (ver apêndice), Ω_c a frequência de Rabi do campo de controle e $S_{ij} = \sum_{k=1}^N \sigma_{ij}^{(k)}$, $\sigma_{ij}^{(k)} = |i\rangle_k \langle j|$, para $i, j = 1, 2, 3$ e $i \neq j$ são os operadores coletivos de abaixamento e levantamento atômico.

O hamiltoniano (2.7) foi escrito desconsiderando os termos $\hat{a}\hat{S}_{13}$ e $\hat{a}^\dagger\hat{S}_{31}$, por estes não conservarem o número de excitações no sistema. O termo $\hat{a}\hat{S}_{13}$ considera a aniquilação de fótons no modo do campo da cavidade simultaneamente ao decaimento dos átomos, enquanto que o termo $\hat{a}^\dagger\hat{S}_{31}$ descreve a criação de fótons ao mesmo tempo que os átomos estão sendo excitados. No hamiltoniano (2.7), se um fóton é criado no campo da cavidade é porque um dos átomos de três níveis emitiu este mesmo fóton, pelo decaimento do estado $|3\rangle$ para o estado $|1\rangle$. Neste caso, o termo de interação é dado por $\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{13}$. Essa aproximação é conhecida como aproximação de onda girante, ou RWA, do inglês *Rotating Wave Approximation* (SCULLY; ZUBAIRY, 1997).

Outra aproximação utilizada para obtenção do hamiltoniano de interação (2.7) é a *aproximação de dipolo elétrico*, a qual é amplamente utilizada em óptica quântica quando a interação entre os átomos e os campos são tratados no limite de longos comprimentos de onda λ , com fótons da ordem de $\lambda = 10^{-7} m$, equivalente ao espéctro óptico, quando comparados com a dimensão do raio atômico, que é da ordem de $10^{-10} m$ (KOBÉ, 1982; SOUZA, 2013).

O hamiltoniano total do sistema é descrito pela soma dos hamiltonianos do campo e do átomo isolados, \hat{H}_{Campo} e \hat{H}_{at} , respectivamente, com o hamiltoniano de interação \hat{H}_{int} , ou seja, $\hat{H}_{tot} = \hat{H}_{Campo} + \hat{H}_{at} + \hat{H}_{int}$,

$$\hat{H}_{tot} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega_{32}\hat{S}_{22} + \hbar\omega_{31}\hat{S}_{33} + \hbar g_0\hat{a}\hat{S}_{31} + \hbar\Omega_c\hat{S}_{32}e^{i\omega ct} + h.c. \quad (2.8)$$

O hamiltoniano total (2.8) é conhecido como *hamiltoniano de Jaynes-Cummings* e foi descoberto por Jaynes e Cummings em 1963 e é utilizado amplamente para a descrição da interação quântica entre radiação e matéria em seu nível mais fundamental (JAYNES E. T.; CUMMINGS, 1963; SHORE B. W.; KNIGHT, 1993). A partir deste hamiltoniano é possível obter os estados vestidos do sistema átomo-campo proposto.

Como já discutido, para ter acesso a estes estados, considerando diferentes parâmetros do sistema, é necessário injetar energia no mesmo através do campo de bombeio. No nosso modelo, o campo de bombeio ou de prova também é descrito classicamente, como no caso do campo de controle. Uma vez que o bombeio é feito no modo quântico da cavidade, o seu hamiltoniano \hat{H}_b é descrito por:

$$\hat{H}_b = \hbar\varepsilon(\hat{a}e^{i\omega_p t} + \hat{a}^\dagger e^{-i\omega_p t}), \quad (2.9)$$

sendo ε a amplitude e ω_p a frequência do campo de prova.

Dessa forma, o hamiltoniano total de Jaynes-Cummings (2.8) com bombeio, $\hat{H} = \hat{H}_{tot} + \hat{H}_b$, é dado por,

$$\hat{H} = \omega_{cav}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \omega_{32}\hat{S}_{22} + \omega_{31}\hat{S}_{33} + (g_0\hat{a}\hat{S}_{31} + \Omega_c\hat{S}_{32}e^{i\omega ct} + \varepsilon\hat{a}e^{i\omega_p t} + h.c.), \quad (2.10)$$

em que consideramos $\hbar = 1$, por simplicidade.

A obtenção dos estados do sistema átomo-campo podem ser obtidos mais facilmente se eliminarmos a dependência temporal do hamiltoniano (2.10). Isso pode ser feito considerando o sistema em outro referencial, conforme demonstrado por França (FRANÇA,

2022), de maneira que o hamiltoniano independente do tempo, considerando N átomos não interagentes, pode ser escrito como:

$$\hat{H} = \Delta_p \hat{a}^\dagger \hat{a} - \Delta_p \hat{S}_{11} + (\Delta_1 - \Delta_2) \hat{S}_{22} + \Delta_1 \hat{S}_{33} + (g_0 \hat{S}_{31} \hat{a} + \Omega_c \hat{S}_{32} + \varepsilon \hat{a} + h.c.). \quad (2.11)$$

sendo $\Delta_p = \omega_p - \omega$, $\Delta_1 = \omega_{31} - \omega$ e $\Delta_2 = \omega_{32} - \omega_c$ as respectivas dessintonias obtidas no novo referencial. Em todas as nossas simulações utilizamos o hamiltoniano (2.11).

2.4 Formalismo da Equação Mestra

Adicionalmente à evolução coerente do sistema, fornecida pelo hamiltoniano (2.11), é necessário considerarmos em nosso modelo o acoplamento do sistema com a sua vizinhança, pois o sistema não é isolado. Neste caso, temos um sistema átomo-campo aberto. Isso significa que o mesmo estará sujeito à dissipações de energia, provenientes do decaimento da cavidade κ , da emissão espontânea dos átomos do nível excitado $|3\rangle$ para os níveis fundamentais $|l\rangle$ ($l = 1, 2$), representada pelo parâmetro Γ_{3l} , e da defasagem não radioativa γ_j dos estados $|j\rangle$ ($j = 2, 3$), devido à várias interferências e ruídos que podem surgir no sistema, de natureza elétrica, magnética ou térmica (SOUZA, 2013).

A dinâmica do sistema átomo-campo com bombeio na presença das dissipações mencionadas pode ser obtida através do formalismo da equação mestra, o qual é extensamente utilizado em óptica quântica para o tratamento de inúmeros sistemas quânticos abertos (SCULLY; ZUBAIRY, 1997; GRYNBERG; ASPECT; FABRE, 2010).

A equação mestra para o operador densidade $\hat{\rho}$ do sistema coletivo átomo-campo considerado é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & -i[H, \rho] + \kappa(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a) \\ & + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1,2} \Gamma_{3l}(2\sigma_{l3}^{(k)} \rho \sigma_{3l}^{(k)} - \sigma_{33}^{(k)} \rho - \rho \sigma_{33}^{(k)}) \\ & + \sum_{k=1}^N \sum_{j=2,3} \gamma_j(2\sigma_{jj}^{(k)} \rho \sigma_{jj}^{(k)} - \sigma_{jj}^{(k)} \rho - \rho \sigma_{jj}^{(k)}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Note que omitimos o símbolo $(\hat{})$ para os operadores, para que a notação não ficasse confusa.

O valor médio de qualquer operador O pode ser calculado no estado estacionário de ρ , ou seja, $\dot{\rho} = 0$, a partir de $\langle O \rangle = Tr(O\rho) = Tr(\rho O)$, que mostra a propriedade cíclica

do traço de ρO . Para obtenção do estado estacionário da propriedade física considerada, $\langle \dot{O} \rangle = 0$, utilizamos $\langle \dot{O} \rangle = Tr(\dot{\rho} O)$ (SCULLY; ZUBAIRY, 1997; GRYNBERG; ASPECT; FABRE, 2010).

2.5 O Fenômeno da CCPT e Aproximação Semiclássica

O fenômeno de aprisionamento coerente de população em uma cavidade, CCPT, pode ser observado para $N \geq 1$ átomos. A condição para observação deste fenômeno depende da relação entre a intensidade do campo de controle, que pode ser medida pela sua frequência de Rabi Ω_c , e a intensidade do campo da cavidade, cuja frequência de Rabi é dada por $g_0\alpha$, sendo $\alpha = \varepsilon/(\Delta_p + i\kappa)$ a amplitude complexa do campo no interior da cavidade na ausência de átomos (MURR, 2003). Essa relação é usualmente dada por $\Omega_c \lesssim g_0\alpha$.

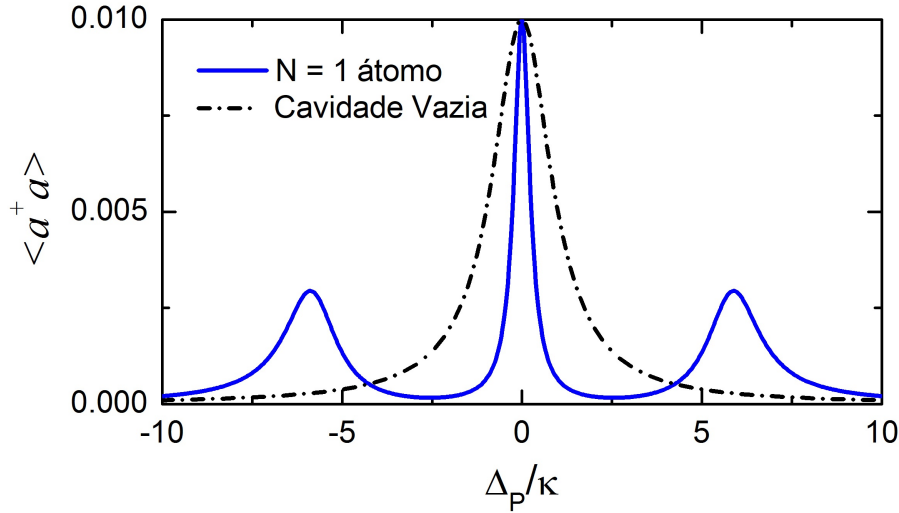
Contudo, para $\Omega_c \gg g_0\alpha$ é possível observar também um método muito eficiente de aprisionamento de população em uma cavidade óptica, conhecido como transparência eletromagneticamente induzida (CEIT - *Cavity Electromagnetically Induced Transparency*) (SOUZA J. A; FIGUEROA, 2013).

O aprisionamento de população é caracterizado por um estado de superposição do sistema átomo-campo com energia nula chamado de *estado escuro*, em que aparece apenas os dois estados fundamentais do átomo $|1\rangle$ e $|2\rangle$. Como o estado excitado do átomo $|3\rangle$ não aparece no estado escuro, se o elétron estiver neste estado, ele não emitirá nem absorverá nenhum fóton, caracterizando o aprisionamento de população neste estado (SOUZA, 2013).

Na Figura 3 apresentamos o espectro de transmissão da cavidade, dado pelo número de fótons no interior da mesma $\langle a^\dagger a \rangle$, em função da dessintonia entre o campo de prova e o campo da cavidade, normalizada pela taxa de decaimento da cavidade Δ_p/κ , para a condição de CEIT. A janela de transmissão, ou de zero absorção, em $\Delta_p = 0$ é caracterizada pelo estado aprisionado, ou estado escuro. Note que este estado possui a mesma transmissão da cavidade vazia, dada pela lorentziana tracejada-pontilhada no gráfico da Figura 3. Os dois picos simétricos de menor transmissão são usualmente chamados de *estados brilhantes* ou *Autler-Townes* e são descritos por um superposição coerente linear dos estados do sistema átomo-campo, que contém os estados atômicos $|1\rangle$, $|2\rangle$ e $|3\rangle$, com energias dadas por $E_n^{(\pm)} = \pm \sqrt{ng_0^2 + \Omega_C^2}$ para n excitações. Maiores detalhes sobre este sistema são

apresentados por Souza *et al.* (2013).

Figura 3 – Espectro de transmissão em função da dessintonia prova-cavidade normalizada Δ_p/κ do sistema átomo-campo, para um único átomo de três níveis no interior da cavidade (linha sólida), $g_0 = 5,0\kappa$, $\varepsilon = \sqrt{0,01}\kappa$, $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$, $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ e $\Omega_C = 3,0\kappa$. A linha tracejada-pontilhada é o espectro de transmissão da cavidade vazia correspondente.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Como estamos interessados em mostrar como o sistema átomo-cavidade de três níveis pode ser útil para controlar a biestabilidade óptica, o número de átomos é um importante parâmetro a ser considerado, uma vez que há o efeito da cooperação atômica no comportamento biestável do sistema. Contudo, se aumentarmos o número de átomos no interior da cavidade, de maneira que $N \gg 1$, a dimensão do espaço de Hilbert¹ do sistema aumenta significativamente, fazendo com que a solução através de uma abordagem completamente quântica seja intratável, mesmo utilizando um supercomputador. Para evitar esse problema, trabalhamos no limite de acoplamento fraco, comumente conhecido como limite de cavidade ruim, em que $g_0 \leq (\kappa, \Gamma_{3l})$ e $N \gg 1$. É muito importante considerar esse regime de acoplamento porque existem experimentos que mostram que as flutuações quânticas produzidas pela biestabilidade óptica podem ser não clássicas mesmo quando $N \gg 1$ para o regime de acoplamento forte (REMPE G.; THOMPSON, 1991).

¹ O estado quântico de uma partícula é descrito pelas características do espaço abstrato ao qual pertence. Sendo assim, um espaço de Hilbert corresponde a uma generalização do espaço euclidiano, possui produto interno completo entre dois vetores de estado e não precisa estar restrito a um número finito de dimensões.

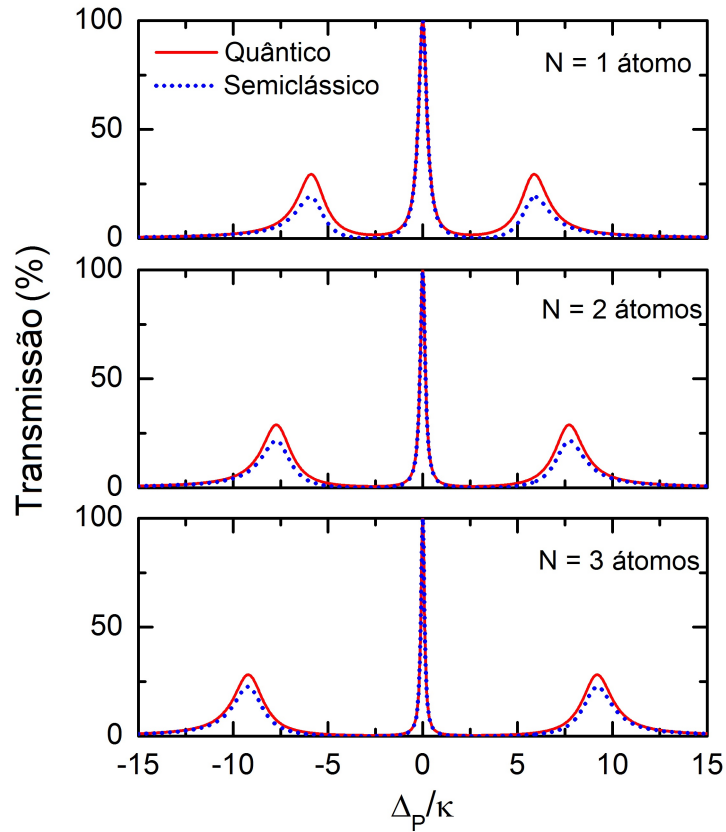
Nas condições de acoplamento fraco temos a vantagem de resolver o problema utilizando uma aproximação semiclassical, que consiste em fatorar o produto de operadores, tais como $\langle aS_{ij} \rangle \rightarrow \langle a \rangle \langle S_{ij} \rangle$, de maneira que o campo da cavidade é descrito por uma amplitude $\langle a \rangle = \alpha$, em vez de um operador quântico. Ou seja, nesta aproximação, tratamos o campo da cavidade classicamente e os átomos quanticamente.

Para apreciar a validade da aproximação semiclassical com o aumento do número de átomos na cavidade, comparamos o espectro de transmissão relativo $T(\%)$ do sistema átomo-campo, dado por

$$T(\%) = \frac{\langle a^\dagger a \rangle}{\varepsilon^2/\kappa^2} * 100\%, \quad (2.13)$$

com o mesmo resultado obtido através de um modelo completamente quântico para $N = 1, 2$ e 3 átomos, conforme mostrado na Figura 4.

Figura 4 – Espectros de transmissão do sistema átomo-cavidade em função da dessintonia prova-cavidade normalizada Δ_p/κ , obtidos quanticamente (linha sólida) e semiclassicalmente (linha pontilhada) para diferentes números de átomos N , utilizando os parâmetros $g_0 = 5,0\kappa$, $\varepsilon = \sqrt{0,01}\kappa$, $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$, $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ e $\Omega_C = 3,0\kappa$.



Fonte: Figura extraída de Souza (2013, p. 50).

Observa-se que, apesar da semelhança qualitativa de ambos os modelos, quântico e

semiclássico, as diferenças observadas nos mesmos, principalmente na região dos estados brilhantes, diminuem à medida que o número de átomos é aumentado. É importante enfatizar que, o bom acordo entre os resultados dos dois modelos é devido principalmente à pequena intensidade do campo de prova ($\varepsilon = \sqrt{0,01}\kappa$), pois g_0 está no regime de acoplamento forte (SOUZA et al., 2015). À medida que ε é aumentado, estados de maior energia do sistema átomo-cavidade poderão ser acessados, fazendo com que as diferenças entre os modelos quântico e semiclássico aumentem consideravelmente.

Contudo, no regime de acoplamento fraco $g_0 \leq (\kappa, \Gamma_{31})$ e para $N \gg 1$, que são as condições em que analisamos o fenômeno da biestabilidade óptica no sistema CCPT, a aproximação semiclássica pode ser utilizada sem perda de generalidade (SOUZA, 2013). Neste caso, o espectro de transmissão do campo da cavidade é descrito pela intensidade do campo clássico $\langle a^\dagger a \rangle = |\alpha|^2$.

2.6 Equações de Maxwell-Bloch

A partir do hamiltoniano com bombeio (2.11) do sistema átomo-cavidade, da equação mestra (2.12) e utilizando a aproximação semiclássica $\langle a S_{ij} \rangle \rightarrow \langle a \rangle \langle S_{ij} \rangle$, a evolução temporal dos operadores atômicos e do campo da cavidade é dada por,

$$\langle \dot{a} \rangle = i(\Delta_P + i\kappa) \langle a \rangle - i\varepsilon^* - ig_0^* \langle S_{13} \rangle \quad (2.14a)$$

$$\begin{aligned} \langle \dot{S}_{13} \rangle &= i \{ (\Delta_P - \Delta_1) + i(\Gamma_{31} + \Gamma_{32} + \gamma_3) \} \langle S_{13} \rangle \\ &\quad - ig_0 \langle a \rangle \langle S_{11} \rangle - i\Omega_c \langle S_{12} \rangle + ig_0 \langle a \rangle \langle S_{33} \rangle \end{aligned} \quad (2.14b)$$

$$\begin{aligned} \langle \dot{S}_{12} \rangle &= i(\Delta_P + \Delta_2 - \Delta_1 + i\gamma_2) \langle S_{12} \rangle \\ &\quad - i\Omega_c^* \langle S_{13} \rangle + ig_0 \langle a \rangle \langle S_{32} \rangle \end{aligned} \quad (2.14c)$$

$$\begin{aligned} \langle \dot{S}_{23} \rangle &= i \{ -\Delta_2 + i(\Gamma_{31} + \Gamma_{32} + \gamma_2 + \gamma_3) \} \langle S_{23} \rangle \\ &\quad - ig_0 \langle a \rangle \langle S_{21} \rangle - i\Omega_c \{ \langle S_{22} \rangle - \langle S_{33} \rangle \} \end{aligned} \quad (2.14d)$$

$$\langle \dot{S}_{11} \rangle = -ig_0^* \langle a^\dagger \rangle \langle S_{13} \rangle + ig_0 \langle a \rangle \langle S_{31} \rangle + 2\Gamma_{31} \langle S_{33} \rangle \quad (2.14e)$$

$$\langle \dot{S}_{22} \rangle = -i\Omega_c^* \langle S_{23} \rangle + i\Omega_c \langle S_{32} \rangle + 2\Gamma_{32} \langle S_{33} \rangle \quad (2.14f)$$

$$\langle \dot{S}_{33} \rangle = -\langle \dot{S}_{11} \rangle - \langle \dot{S}_{22} \rangle. \quad (2.14g)$$

Estas são as *equações de Maxwell-Bloch* do sistema átomo-campo considerado e elas são todas demonstradas no Apêndice deste trabalho. Se não tivéssemos considerado a

aproximação semiclássica não seria possível obter um sistema fechado, dado pelas equações (2.14), as quais são lineares. A evolução temporal do produto dos operadores $\langle aS_{ij} \rangle$ conduziria a termos de ordem superior, de maneira que teríamos um conjunto infinito de equações correlacionadas, conhecidas como *equações de Heisenberg*.

Para resolvermos o sistema puramente quântico, considerando os átomos e o campo da cavidade quanticamente, é necessário truncarmos o espaço de Hilbert M do campo. Os resultados quânticos para $N = 1, 2$ e 3 átomos da figura 4, foram obtidos através de um pacote computacional conhecido como “*Quantum Optics Toolbox*” (TAN, 1999), truncando-se o espaço de Hilbert do campo em $M = 13$.

Com a aproximação semiclássica essa dificuldade é evitada, pois a dimensão do campo clássico é dada por $M = 1$, de maneira que o sistema de equações (2.14) pode ser resolvido mais facilmente utilizando uma rotina computacional escrita em qualquer linguagem de programação, como MATLAB ou Python. Essa aproximação torna as simulações mais viáveis de serem executadas, em relação ao tempo computacional necessário, o que favorece a análise da influência dos parâmetros do sistema no controle óptico do fenômeno da biestabilidade.

Na próxima seção apresentamos como o sistema CCPT em estudo pode ser utilizado para o controle da biestabilidade óptica.

3 Controle da Biestabilidade Óptica

A biestabilidade óptica em sistemas atômicos é caracterizada pela resposta não linear de um meio atômico devido à aplicação de um campo eletromagnético no mesmo. Em um processo de saturação, por exemplo, se o sistema apresentar algum tipo de “memória óptica” neste processo, de maneira que o mesmo não retorne aos mesmos estados estáveis quando o campo eletromagnético incidente é desligado, o sistema é dito biestável. Neste caso, se analisarmos a transmissão do sistema átomo-campo para um único valor do parâmetro que caracteriza o campo eletromagnético incidente, como sua amplitude ou intensidade, é observado dois estados estáveis para o mesmo valor do parâmetro do campo incidente (SOUZA, 2013). Quando isso ocorre, a transmissão do sistema é caracterizada por curvas de histerese.

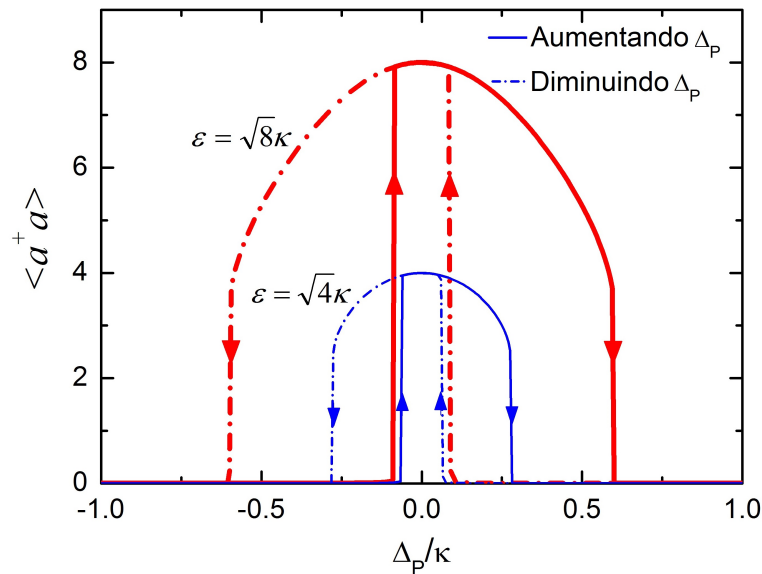
O controle da biestabilidade óptica no sistema CCPT foi demonstrado a partir de curvas de histerese que mostra a relação entre a transmissão relativa da cavidade $T(\%)$ e a força dos campos incidentes de prova e de controle, a partir de ε e Ω_c , respectivamente. Considerando o campo de prova como parâmetro de entrada, caracterizamos a biestabilidade óptica através da variação de sua frequência ω_p e da frequência de Rabi do campo de controle Ω_c . Para o campo de controle como parâmetro de entrada, consideramos a força do campo de prova ε e o acoplamento individual átomo-campo g_0 como parâmetros de controle da biestabilidade. A partir dos resultados obtidos é possível notar claramente que o número de átomos exerce uma influência considerável nesta propriedade, pois existe o efeito da cooperação atômica no comportamento biestável do sistema.

Para sistemas atômicos de dois níveis, Bonifácio e Lugiato definiram a intensidade da interação coletiva átomo-campo a partir da introdução do parâmetro $C = g_0^2 N / 2\Gamma\kappa$, conhecido como cooperatividade do sistema (BONIFACIO R.; LUGIATO, 1978). Eles demonstraram que a biestabilidade óptica é observada estritamente para $C > 4$, de maneira que $C = 4$ é um parâmetro crítico para esta propriedade nestes sistemas. Para sistemas atômicos multiníveis, como o que estamos trabalhando, ainda não existe nenhuma expressão que descreva explicitamente a influência dos parâmetros na interação coletiva do sistema átomo-campo.

3.1 Campo de Prova como Parâmetro de Entrada

Para verificar a influência da frequência do campo de prova ω_p no comportamento biestável do sistema CCPT, consideramos inicialmente um sistema átomo-campo com $N = 50$ átomos no regime de acoplamento fraco, conforme especificado em seções anteriores. A variação de ω_p é feita nas equações de Maxwell-Bloch a partir da variação da dessintonia prova-cavidade $\Delta_p = \omega_p - \omega$, uma vez que a frequência ω da cavidade não pode ser variada, pois esta é definida pela geometria da mesma. O gráfico da transmissão relativa do sistema em função da dessintonia prova-cavidade normalizada Δ_p/κ é apresentado na figura 5. O ciclo de histerese do sistema, indicado pelas setas, é observado aumentando-se e diminuindo-se Δ_p a partir de zero. Cada ponto da curva é obtido no estado estacionário do sistema e utilizado como condição inicial para obtenção do estado seguinte. Para $\Delta_p = 0$ a absorção é zero e o sistema se comporta como uma cavidade vazia, enquanto que para dessintonias maiores, efeitos absorptivos são observados com uma curva característica de biestabilidade.

Figura 5 – Espectro de transmissão em função da dessintonia prova-cavidade normalizada para o sistema átomo-cavidade contendo $N = 50$ átomos de três níveis no regime de acoplamento fraco para dois diferentes valores da força do campo de prova $\varepsilon = \sqrt{4\kappa}$ e $\varepsilon = \sqrt{8\kappa}$, utilizando os parâmetros $g_0 = 1,0\kappa$, $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$ and $\Omega_c = 0,5\kappa$. As setas indicam o ciclo de histerese que aparece quando aumentamos e diminuimos Δ_p a partir de zero.



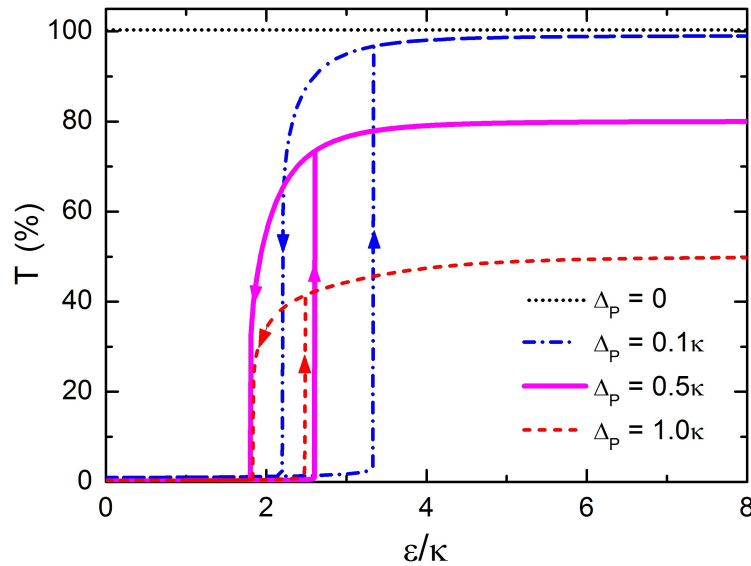
Fonte: Elaborado pelo autor.

Na figura 6 apresentamos a transmissão relativa $T(\%)$ do sistema como uma função da força do campo de prova normalizado ε/κ para diferentes dessintonias prova-cavidade.

Neste caso consideramos valores fixos da frequência do campo de prova.

Note que o comportamento de cavidade vazia, $T = 100\%$, pode ser melhor visualizado neste gráfico para $\Delta_p = 0$, de maneira que o sistema transmite toda a luz que entra na cavidade para qualquer valor de ε . Por outro lado, quando o sistema é estimulado fora da ressonância, o campo no interior da cavidade exibe um comportamento biestável alternando entre dois valores, mesmo para grandes dessintonias Δ_p . Para melhor visualização dos ciclos de histerese, consideramos um sistema contendo $N = 100$ átomos.

Figura 6 – (a) Transmissão relativa $T(\%)$ em função da força do campo de prova normalizado ε/κ para o sistema CCPT com $N = 100$ átomos para diferentes valores da dessintonia prova-cavidade Δ_p e $g_0 = 0,5\kappa$, $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$ e $\Omega_c = 0,5\kappa$. As setas indicam o ciclo de histerese que aparece quando aumentamos e diminuimos ε a partir de zero.



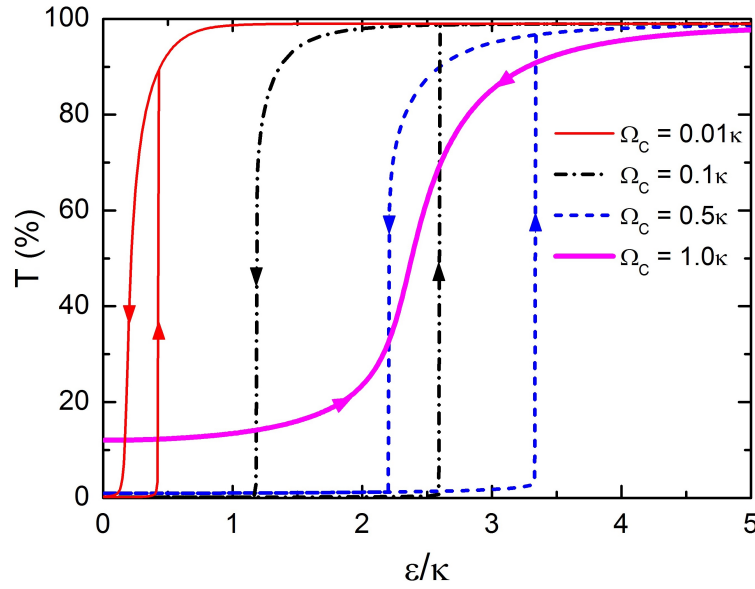
Fonte: Elaborado pelo autor.

Para analisar o efeito da intensidade do campo de controle no comportamento biestável do sistema, consideramos $\Delta_p = 0, 1\kappa$ para um sistema de $N = 100$ átomos, pois para estes parâmetros o sistema exibe estados de zero transmissão (estado desligado) e máxima transmissão (estado ligado), conforme observado na figura 6.

A transmissão relativa em função da força do campo de prova para este sistema é apresentada na figura 7. É possível notar uma diminuição considerável na largura da histerese aumentando-se ou diminuindo-se a frequência de Rabi do campo de controle Ω_c . Isso ocorre porque o campo de controle regula a absorção do meio atômico através de efeitos de interferência. Se $\Omega_c \rightarrow 0$, toda a população do sistema é bombeada para o

estado $|2\rangle$ no estado estacionário e a amostra atômica passa a não interagir com o campo no interior da cavidade. Dessa forma, observa-se uma transmissão do tipo cavidade vazia sem qualquer sinal de biestabilidade. Analogamente, quando $\Omega_C \gg g_0\alpha$ toda a população é bombeada para o estado $|1\rangle$ e novamente é observado uma transmissão do tipo cavidade vazia. Para valores intermediários e condições adequadas para o regime CCPT, em que $\Omega_c \lesssim g_0\alpha$, o comportamento biestável pode ser observado (SOUZA, 2013).

Figura 7 – Transmissão relativa em função de ε/κ para o sistema átomo-cavidade de $N = 100$ átomos para diferentes valores da frequência de Rabi Ω_c e $g_0 = 0,5\kappa$, $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$, $\Delta_P = 0,1\kappa$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

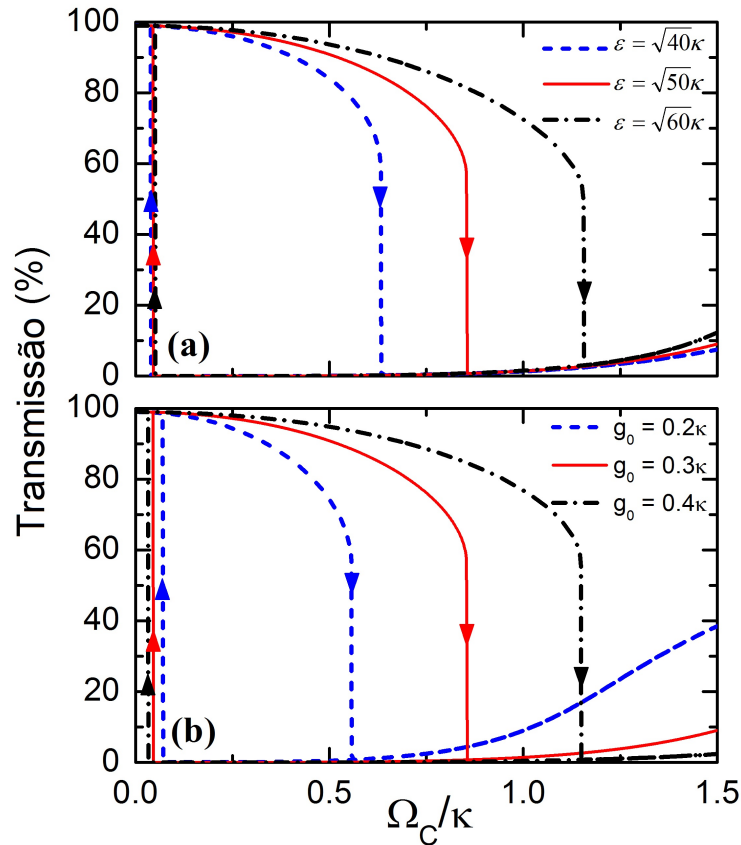
Estes resultados mostram que é possível controlar a biestabilidade óptica no sistema CCPT a partir de parâmetros externos do sistema, como a frequência do campo de prova ω_p e a intensidade do campo de controle, verificada em nosso modelo pela variação de sua frequência de Rabi Ω_c .

3.2 Campo de Controle como Parâmetro de Entrada

O comportamento do fenômeno da biestabilidade óptica no sistema estudado foi analisado também em função da força do campo de controle. Para isso calculamos a transmissão relativa do sistema átomo-cavidade em função da frequência de Rabi do campo de controle Ω_c , considerando um sistema contendo $N = 1.000$ átomos, conforme mostrado na figura 8.

Na figura 8(a) é mostrado que a transmissão do campo da cavidade muda do estado ligado para o estado desligado para diferentes valores da intensidade do campo de prova, enquanto que na figura 7 observa-se o oposto para diferentes valores da frequência de Rabi do campo de controle. A diferença reside no fato de que o sistema apresenta um comportamento do tipo cavidade vazia para $\Omega_c \rightarrow 0$, como explicado anteriormente. Esse resultado mostra que é possível controlar a biestabilidade de maneira complementar através do campo de controle, mantendo-se a intensidade do campo de prova constante.

Figura 8 – Transmissão relativa em função da frequência de Rabi normalizada do campo de controle Ω_c/κ do sistema átomo-cavidade com $N = 1.000$ átomos e $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 0,02\kappa$ e $\Delta_P = 0,1\kappa$, para (a) diferentes valores de ε e $g_0 = 0,3\kappa$, e (b) diferentes valores do acoplamento individual átomo-campo g_0 e $\varepsilon = \sqrt{50}\kappa$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Na figura 8(b) é apresentada a transmissão relativa do sistema atômico de três níveis em função da frequência de Rabi para diferentes valores do acoplamento átomo-campo g_0 . Este resultado mostra que o limite para o sistema ir do estado ligado para o estado desligado é maior para maiores valores de g_0 .

Apesar da influência do número de átomos N e do acoplamento átomo-campo g_0

ser verificada no comportamento biestável do sistema CCPT estudado, não é possível considerar estes como parâmetros de controle do mesmo, pois para modificá-los é necessário alterar toda a estrutura interna do sistema, bombeando ou liberando átomos para o interior da cavidade, no caso de N , ou modificando a geometria da cavidade óptica, no caso de g_0 .

4 Conclusão

Neste trabalho estudamos como é possível controlar luz com luz a partir de um sistema CCPT, composto por N átomos não interagentes em configuração Λ , acoplados independentemente ao mesmo modo do campo de uma cavidade óptica. Para obtenção e avaliação dos estados estacionários do sistema, calculamos analiticamente as equações de Mawell-Bloch a partir de uma aproximação semiclássica, que consiste em fatorar o produto de operadores das equações de Heisenberg. Com esta aproximação o conceito quântico de fóton é abandonado, de maneira que o campo da cavidade é tratado classicamente. Podemos concluir que a aproximação semiclássica é uma excelente ferramenta para o estudo da biestabilidade óptica do sistema CCPT, pois nestas condições foi possível explorar sistemas com maior cooperatividade atômica, ou seja, com $N \gg 1$, os quais são intratáveis a partir de uma abordagem completamente quântica, seja analiticamente ou através de métodos numéricos.

A influência no comportamento biestável do sistema foi verificada a partir de diferentes parâmetros, como a frequência e a intensidade do campo de prova, a intensidade do campo de controle, o número de átomos e o acoplamento átomo-campo individual. Contudo, a viabilidade de controle do fenômeno da biestabilidade nas condições de CCPT só é verificada pela variação de parâmetros externos ao sistema, como aqueles relacionados aos campos incidentes de prova e de controle. Portanto, os parâmetros que estão relacionados com a estrutura interna do sistema, como o número de átomos e o acoplamento átomo-campo, que depende da geometria da cavidade óptica, não podem ser considerados como parâmetros de controle, pois a variação dos mesmos exigiria mudanças significativas em toda a configuração do sistema.

Referências

- AGRAWAL G. P.; CARMICHAEL, H. J. Optical bistability through nonlinear dispersion and absorption. *Physical Review A*, v. 19, n. 5, p. 2074, 1979.
- BENIOFF, P. A. Quantum mechanical hamiltonian models of discrete processes that erase their own histories: Application to turing machines. *International Journal of Theoretical Physics*, v. 21, p. 177–201, 1982.
- BONIFACIO R.; LUGIATO, L. A. Cooperative effects and bistability for resonance fluorescence. *Optics Communications*, v. 19, n. 2, p. 172–176, 1976.
- BONIFACIO R.; LUGIATO, L. A. Optical bistability and cooperative effects in resonance fluorescence. *Physical Review A*, v. 18, n. 3, p. 1129, 1978.
- DEUTSCH, A. I. H. S. G. W. M. Strongly interacting photons in a nonlinear cavity. *Physical Review Letters*, v. 79, n. 8, p. 1467, 1998.
- EISAMAN, M. et al. Electromagnetically induced transparency with tunable single-photon pulses. *Nature*, v. 438, p. 837–841, 2005.
- EISBERG R.; RESNICK, R. *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei and Particles*. 1. ed. [S.l.]: John Wiley Sons, 1974.
- FLEISCHHAUER, M.; IMAMOGLU, A.; MARANGOS, J. P. Electromagnetically induced transparency: Optics in coherent media. *Review of Modern Physics*, v. 77, n. 2, p. 633–672, 2005.
- FRANÇA, G. H. d. *Estudo da correlação de fótons e controle óptico a partir do fenômeno da transparência eletromagneticamente induzida em cavidades para um átomo de três níveis*. Tese (TCC (Graduação)) — Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, Abril 2022.
- GIBBS H. M.; MCCALL, S. L. V. T. N. C. Differential gain and bistability using a sodium-filled fabry-perot interferometer. *Physical Review Letters*, v. 36, n. 19, p. 1135, 1976.
- GIBNEY, E. Quantum gold rush: the private funding pouring into quantum start-ups. *Nature*, v. 574, p. 22–24, 2019.
- GRYNBERG, G.; ASPECT, A.; FABRE, C. *Introduction to Quantum Optics From the Semi-classical Approach to Quantized Light*. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- HARRIS, S. E. Electromagnetically induced transparency. *Physics Today*, v. 50, n. 7, p. 36–42, 1997.
- HARRIS, S. E.; FIELD, J. E.; IMAMOGLU, A. Nonlinear optical processes using electromagnetically induced transparency. *Physical Review Letters*, v. 64, n. 10, p. 1107–1110, 1990.

- HARSHAWARDHAN W.; AGARWAL, G. S. Controlling optical bistability using electromagnetic-field-induced transparency and quantum interferences. *Physical Review A*, v. 53, n. 3, p. 1812, 1996.
- HAU, L. et al. Light speed reduction to 17 meters per second in an ultracold atomic gas. *Nature*, v. 397, p. 594–598, 1999.
- JAYNES E. T.; CUMMINGS, F. W. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proceedings of the IEEE*, v. 51, n. 1, p. 89–109, 1963.
- JOSHI A.; XIAO, M. Optical multistability in three-level atoms inside an optical ring cavity. *Physical Review Letters*, v. 91, n. 14, p. 143904, 2003.
- JOSHI A.; XIAO, M. Atomic optical bistability in two- and three-level systems: perspectives and prospects. *Journal of Modern Optics*, v. 57, n. 14, p. 1196–1220, 2010.
- KIMBLE, H. J. The quantum internet. *Nature*, v. 453, p. 1023–1030, 2008.
- KOBE, D. H. Gauge transformations and the electric dipole approximation. *American Journal of Physics*, v. 50, n. 2, p. 128–133, 1982.
- LUKIN M. D.; IMAMOGLU, A. Controlling photons using electromagnetically induced transparency. *Nature*, v. 43, p. 273–276, 2001.
- LVOVSKY, A.; SANDERS, B.; TITTEL, W. Optical quantum memory. *Nature Photonics*, v. 3, p. 706–714, 2009.
- MAHMOUDI M.; NOZARI, N. V. A. S. M. Controlling the optical bistability beyond the multi-photon resonance condition in a three-level closed-loop atomic system. *Journal of Luminescence*, v. 132, n. 1, p. 114–118, 2012.
- MARANGOS, J. P. Electromagnetically induced transparency. *Journal of Modern Optics*, v. 45, n. 3, p. 471–503, 1998.
- MURR, K. On the suppression of the diffusion and the quantum nature of a cavity mode. optical bistability: forces and friction in driven cavities. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, v. 36, n. 12, p. 2515–2537, 2003.
- MÜCKE M.; FIGUEROA, E. B. J. H. C. M. K. R. S. V.-B. C. J. R. G. Electromagnetically induced transparency with single atoms in a cavity. *Nature*, v. 465, p. 755–758, 2010.
- NOURINOVIN, S.; ALOMAINY, A. *A Terahertz Electromagnetically Induced Transparency-Like Metamaterial for Biosensing*. [S.l.]: 15th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP), 2021.
- OROZCO L. A.; ROSENBERGER, A. T. K. H. J. Optical bistability in the mixed absorptive-dispersive regime with two-state atoms. *Physical Review A*, v. 36, n. 7, p. 3248, 1987.
- REMPE G.; THOMPSON, R. J. B. R. J. L. W. D. K. H. J. Optical bistability and photon statistics in cavity quantum electrodynamics. *Physical Review Letters*, v. 67, n. 13, p. 1727, 1991.

- SCULLY, M. O.; ZUBAIRY, M. S. *Quantum optics*. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- SHORE B. W.; KNIGHT, P. L. The jaynes-cummings model. *Journal of Modern Optics*, v. 40, n. 7, p. 1195–1238, 1993.
- SOUZA, J. A. et al. electromagnetically-induced-transparency-related phenomena and their mechanical analogs. *Physical Review A*, v. 92, p. 1–18, 2015.
- SOUZA, J. A. d. *Controle das propriedades estatísticas do campo e biestabilidade óptica em eletrodinâmica quântica de cavidades*. Tese (Doutorado em física) — Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, Abril 2013.
- SOUZA J. A.; FIGUEROA, E. C. h. V.-B. C. J. R. G. Coherent control of quantum fluctuations using cavity. *Physical Review Letter*, v. 111, n. 11, p. 113602, 2013.
- STECK, D. A. Rubidium 87 d line data. Los Alamos, p. 29, Set. 2003. Disponível em: <<https://steck.us/alkalidata/>>. Acesso em: 05 de junho de 2023.
- TAN, S. M. A computational toolbox for quantum and atomic optics. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, v. 1, n. 4, p. 424–432, 1999.
- TARASOV, L. V. *Basic Concepts of Quantum Mechanics*. 1. ed. Moscow: MIR Publishers, 1980.
- WANG H.; GOORSKEY, D. J. X. M. Bistability and instability of three-level atoms inside an optical cavity. *Physical Review A*, v. 65, p. 011801(R), 2001.
- YAN, X. et al. The terahertz electromagnetically induced transparency-like metamaterials for sensitive biosensors in the detection of cancer cells. *Biosensors and Bioelectronics*, v. 126, n. 1, p. 485–492, 2019.
- ZHANG, J. et al. Highly sensitive detection of malignant glioma cells using metamaterial-inspired thz biosensor based on electromagnetically induced transparency. *Biosensors and Bioelectronics*, v. 185, n. 113241, 2021.
- ZUBAIRY, M. S. *Quantum Mechanics for Beginners with application to quantum communication and quantum computing*. 1. ed. New York: Oxford University Press, 2020.

A APÊNDICE: Dedução das Equações de Maxwell-Bloch

Neste apêndice demonstramos todos os cálculos realizados para a obtenção das equações de Maxwell-Bloch apresentadas na seção 2.6.

Considerando $\hbar = 1$, por simplicidade, o hamiltoniano independente do tempo para o sistema CCPT considerado pode ser escrito como,

$$H = \Delta_p \hat{\sigma}_{11} + (\Delta_1 - \Delta_2) \hat{\sigma}_{22} + \Delta_1 \hat{\sigma}_{33} + g_0 \hat{a} \hat{\sigma}_{31} + \Omega_c \hat{\sigma}_{32} + \varepsilon \hat{a} + h.c, \quad (\text{A.1})$$

sendo $h.c$ o hermitiano conjugado, dado por,

$$h.c = g_0 \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_{13} + \Omega_c \hat{\sigma}_{23} + \varepsilon \hat{a}^\dagger. \quad (\text{A.2})$$

A equação mestra do sistema é descrita por

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & -i[H, \rho] + \kappa(2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger - \hat{a}\hat{a}^\dagger\rho - \rho\hat{a}^\dagger\hat{a}) + \Gamma_{31}(\hat{\sigma}_{13}\rho\hat{\sigma}_{31} - \hat{\sigma}_{33}\rho - \rho\hat{\sigma}_{33}) \\ & + \Gamma_{32}(\hat{\sigma}_{23}\rho\hat{\sigma}_{32} - \hat{\sigma}_{33}\rho - \rho\hat{\sigma}_{33}) + \gamma_2(\hat{\sigma}_{22}\rho\hat{\sigma}_{22} - \hat{\sigma}_{22}\rho - \rho\hat{\sigma}_{22}) \\ & + \gamma_3(\hat{\sigma}_{33}\rho\hat{\sigma}_{33} - \hat{\sigma}_{33}\rho - \rho\hat{\sigma}_{33}). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Pela equação (A.1), o comutador $[H, \rho]$ pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} [H, \rho] = & (\Delta_p \hat{\sigma}_{11} + (\Delta_1 - \Delta_2) \hat{\sigma}_{22} + \Delta_1 \hat{\sigma}_{33} + g_0 \hat{a} \hat{\sigma}_{31} + \Omega_c \hat{\sigma}_{32} + \varepsilon \hat{a} + g_0 \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_{13} \\ & + \Omega_c \hat{\sigma}_{23} + \varepsilon \hat{a}^\dagger) \rho - \rho (\Delta_p \hat{\sigma}_{11} + (\Delta_1 - \Delta_2) \hat{\sigma}_{22} + \Delta_1 \hat{\sigma}_{33} + g_0 \hat{a} \hat{\sigma}_{31} + \Omega_c \hat{\sigma}_{32} + \varepsilon \hat{a} \\ & + g_0 \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_{13} + \Omega_c \hat{\sigma}_{23} + \varepsilon \hat{a}^\dagger) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

A partir das equações anteriores (A.1) e (A.4), apresentamos a seguir, o cálculo de cada equação de Maxwell-Bloch referente à evolução individual dos operadores atômicos $\langle \hat{\sigma}_{ij} \rangle$, para i e $j = 1, 2, 3$, e dos operadores do campo da cavidade $\langle \hat{a} \rangle$ e $\langle \hat{a}^\dagger \rangle$.

OBTENÇÃO DE $\langle \dot{\sigma}_{11} \rangle$

$$\langle \dot{\sigma}_{11} \rangle = Tr(\dot{\rho} \hat{\sigma}_{11}) \quad (\text{A.5})$$

A partir das equações (A.3) e (A.4) e resolvendo para cada um dos termos, tem-se:

Para o termo Γ_{31}

$$\begin{aligned} Tr[\Gamma_{31}(\hat{\sigma}_{13}\rho\hat{\sigma}_{31} - \hat{\sigma}_{33}\rho - \rho\hat{\sigma}_{33})\hat{\sigma}_{11}] &= \\ Tr[\Gamma_{31}(\hat{\sigma}_{13}\rho\hat{\sigma}_{31}\hat{\sigma}_{11} - \hat{\sigma}_{33}\rho\hat{\sigma}_{11} - \rho\hat{\sigma}_{33}\hat{\sigma}_{11})] &= \\ Tr[\Gamma_{31}(2|1\rangle\langle 3|\rho|3\rangle\langle 1|1\rangle\langle 1| - |3\rangle\langle 3|\rho|1\rangle\langle 1| - \rho|3\rangle\langle 3||1\rangle\langle 1|)] &= \\ Tr[2\Gamma_{31}|3\rangle\langle 3|\rho] &= 2\Gamma_{31}\langle \hat{\sigma}_{33} \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Para o termo Γ_{32}

$$\begin{aligned} Tr[\Gamma_{32}(\hat{\sigma}_{23}\rho\hat{\sigma}_{32} - \hat{\sigma}_{33}\rho - \rho\hat{\sigma}_{33})\hat{\sigma}_{11}] &= \\ Tr[\Gamma_{32}(\hat{\sigma}_{23}\rho\hat{\sigma}_{32}\hat{\sigma}_{11} - \hat{\sigma}_{33}\rho\hat{\sigma}_{11} - \rho\hat{\sigma}_{33}\hat{\sigma}_{11})] &= \\ Tr[\Gamma_{32}(2|2\rangle\langle 3|\rho|3\rangle\langle 2|1\rangle\langle 1| - |3\rangle\langle 3|\rho|1\rangle\langle 1| - \rho|3\rangle\langle 3||1\rangle\langle 1|)] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Para o termo γ_2

$$\begin{aligned} Tr[\gamma_2(\hat{\sigma}_{22}\rho\hat{\sigma}_{22} - \hat{\sigma}_{22}\rho - \rho\hat{\sigma}_{22})\hat{\sigma}_{11}] &= \\ Tr[\gamma_2(\hat{\sigma}_{22}\rho\hat{\sigma}_{22}\hat{\sigma}_{11} - \hat{\sigma}_{22}\rho\hat{\sigma}_{11} - \rho\hat{\sigma}_{22}\hat{\sigma}_{11})] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Para o termo γ_3

$$\begin{aligned} Tr[\gamma_3(\hat{\sigma}_{33}\rho\hat{\sigma}_{33} - \hat{\sigma}_{33}\rho - \rho\hat{\sigma}_{33})\hat{\sigma}_{11}] &= \\ Tr[\gamma_3(\hat{\sigma}_{33}\rho\hat{\sigma}_{33}\hat{\sigma}_{11} - \hat{\sigma}_{33}\rho\hat{\sigma}_{11} - \rho\hat{\sigma}_{33}\hat{\sigma}_{11})] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Para o termo κ

$$\begin{aligned} Tr[\kappa(2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\rho - \rho\hat{a}^\dagger\hat{a})\hat{\sigma}_{11}] &= \\ Tr[\kappa(2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger - 2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger)\hat{\sigma}_{11}] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Para o termo g_0

$$\begin{aligned} Tr[-ig_0(\hat{a}\hat{\sigma}_{31}\rho + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{13}\rho - \rho\hat{a}\hat{\sigma}_{31} - \rho\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{13})\hat{\sigma}_{11}] &= \\ ig_0Tr[-\hat{a}\hat{\sigma}_{31}\rho\hat{\sigma}_{11} - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{13}\rho\hat{\sigma}_{11} + \rho\hat{a}\hat{\sigma}_{31}\hat{\sigma}_{11} + \rho\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{13}\hat{\sigma}_{11}] &= \\ ig_0\langle \hat{a}^\dagger \rangle \langle \hat{\sigma}_{31} \rangle + ig_0\langle \hat{a} \rangle \langle \hat{\sigma}_{13} \rangle & \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Para o termo ε

$$\begin{aligned} Tr[-i\varepsilon(\hat{a}\rho + \hat{a}^\dagger\rho - \rho\hat{a} - \rho\hat{a}^\dagger)\hat{\sigma}_{11}] = \\ Tr[i\varepsilon(-\hat{a}\rho\hat{\sigma}_{11} - \hat{a}^\dagger\rho\hat{\sigma}_{11} + \rho\hat{a}\hat{\sigma}_{11} + \rho\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{11})] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Para o termo Ω_c

$$\begin{aligned} Tr[-i\Omega_c(2\hat{\sigma}_{32}\rho - 2\rho\hat{\sigma}_{32})\hat{\sigma}_{11}] = \\ Tr[i\Omega_c(-2\hat{\sigma}_{32}\rho\hat{\sigma}_{11} + 2\rho\hat{\sigma}_{32}\hat{\sigma}_{11})] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Para o termo Δ_p

$$\begin{aligned} Tr[-i(\Delta_p\hat{\sigma}_{11}\rho - \rho\Delta_p\hat{\sigma}_{11})\hat{\sigma}_{11}] = \\ Tr[-i(\Delta_p\hat{\sigma}_{11}\rho\hat{\sigma}_{11} - \rho\Delta_p\hat{\sigma}_{11}\hat{\sigma}_{11})] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Para os termos Δ_1 e Δ_2

$$\begin{aligned} Tr[(\Delta_1 - \Delta_2)\hat{\sigma}_{22}\rho + \Delta_1\hat{\sigma}_{33}\rho - \rho(\Delta_1 - \Delta_2)\hat{\sigma}_{22} - \rho\Delta_1\hat{\sigma}_{33})\hat{\sigma}_{11}] = \\ Tr[(\Delta_1 - \Delta_2)\hat{\sigma}_{22}\rho\hat{\sigma}_{11} + \Delta_1\hat{\sigma}_{33}\rho\hat{\sigma}_{11} - \rho(\Delta_1 - \Delta_2)\hat{\sigma}_{22}\hat{\sigma}_{11} - \rho\Delta_1\hat{\sigma}_{33}\hat{\sigma}_{11})] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Considerando todos os termos, tem-se:

$$\langle \dot{\sigma}_{11} \rangle = Tr(\dot{\rho}\hat{\sigma}_{11}) = 2\Gamma_{31}\langle \hat{\sigma}_{33} \rangle + ig_0\langle \hat{a}^\dagger \rangle\langle \hat{\sigma}_{31} \rangle + ig_0\langle \hat{a} \rangle\langle \hat{\sigma}_{13} \rangle \quad (\text{A.16})$$

OBTENÇÃO DE $\langle \dot{\sigma}_{13} \rangle$

$$\langle \dot{\sigma}_{13} \rangle = Tr(\dot{\rho}\hat{\sigma}_{13}) \quad (\text{A.17})$$

Procedendo de maneira análoga a (A.5), termo a termo, obtemos:

Para o termo Γ_{31}

$$\begin{aligned} Tr[\Gamma_{31}(2\hat{\sigma}_{13}\rho\hat{\sigma}_{31} - \hat{\sigma}_{33}\rho - \rho\hat{\sigma}_{33})\hat{\sigma}_{13}] = \\ Tr[\Gamma_{31}(2\hat{\sigma}_{13}\rho\hat{\sigma}_{31}\hat{\sigma}_{13} - \hat{\sigma}_{33}\rho\hat{\sigma}_{13} - \rho\hat{\sigma}_{33}\hat{\sigma}_{13})] = \\ Tr[\Gamma_{31}(2\hat{\sigma}_{13}\rho - \hat{\sigma}_{13}\rho)] = Tr[\Gamma_{31}\hat{\sigma}_{13}\rho] = \Gamma_{31}\langle \hat{\sigma}_{13} \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Para o termo Γ_{32}

$$\begin{aligned}
 & Tr[\Gamma_{32}(2\hat{\sigma}_{23}\rho\hat{\sigma}_{32} - \hat{\sigma}_{33}\rho - \rho\hat{\sigma}_{33})\hat{\sigma}_{13}] = \\
 & Tr[2\Gamma_{32}(\hat{\sigma}_{23}\rho\hat{\sigma}_{32}\hat{\sigma}_{13} - \hat{\sigma}_{33}\rho\hat{\sigma}_{13} - \rho\hat{\sigma}_{33}\hat{\sigma}_{13})] = \\
 & Tr[\Gamma_{32}\hat{\sigma}_{13}\rho] = \Gamma_{32}\langle\hat{\sigma}_{13}\rangle
 \end{aligned} \tag{A.19}$$

Para o termo γ_2

$$\begin{aligned}
 & Tr[\gamma_2(2\hat{\sigma}_{22}\rho\hat{\sigma}_{22} - \hat{\sigma}_{22}\rho - \rho\hat{\sigma}_{22})\hat{\sigma}_{13}] = \\
 & Tr[\gamma_2(2\hat{\sigma}_{22}\rho\hat{\sigma}_{22}\hat{\sigma}_{13} - \hat{\sigma}_{22}\rho\hat{\sigma}_{13} - \rho\hat{\sigma}_{22}\hat{\sigma}_{13})] = 0
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

Para o termo γ_3

$$\begin{aligned}
 & Tr[\gamma_3(2\hat{\sigma}_{33}\rho\hat{\sigma}_{33} - \hat{\sigma}_{33}\rho - \rho\hat{\sigma}_{33})\hat{\sigma}_{13}] = \\
 & Tr[\gamma_3(2\hat{\sigma}_{33}\rho\hat{\sigma}_{33}\hat{\sigma}_{13} - \hat{\sigma}_{33}\rho\hat{\sigma}_{13} - \rho\hat{\sigma}_{33}\hat{\sigma}_{13})] = \\
 & Tr[\gamma_3(2\hat{\sigma}_{13}\rho - \hat{\sigma}_{13}\rho)] = Tr[\gamma_3\hat{\sigma}_{13}\rho] = \gamma_3\langle\hat{\sigma}_{13}\rangle
 \end{aligned} \tag{A.21}$$

Para o termo κ

$$\begin{aligned}
 & Tr[\kappa(2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\rho - \rho\hat{a}^\dagger\hat{a})\hat{\sigma}_{13}] = \\
 & Tr[\kappa(2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger - 2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger)\hat{\sigma}_{13}] = 0
 \end{aligned} \tag{A.22}$$

Para o termo g_0

$$\begin{aligned}
 & Tr[-ig_0(\hat{a}\hat{\sigma}_{31}\rho + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{13}\rho - \rho\hat{a}\hat{\sigma}_{31} - \rho\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{13})\hat{\sigma}_{13}] = \\
 & ig_0Tr[-\hat{a}\hat{\sigma}_{31}\rho\hat{\sigma}_{13} - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{13}\rho\hat{\sigma}_{13} + \rho\hat{a}\hat{\sigma}_{31}\hat{\sigma}_{13} + \rho\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{13}\hat{\sigma}_{13}] = \\
 & ig_0Tr[-\hat{a}\hat{\sigma}_{11}\rho + \rho\hat{a}\hat{\sigma}_{33}] = ig_0\langle\hat{a}\rangle\langle\hat{\sigma}_{11}\rangle + ig_0\langle\hat{a}\rangle\langle\hat{\sigma}_{33}\rangle
 \end{aligned} \tag{A.23}$$

Para o termo Ω_c

$$\begin{aligned}
 & Tr[-i\Omega_c(2\hat{\sigma}_{32}\rho - 2\rho\hat{\sigma}_{32})\hat{\sigma}_{13}] = \\
 & Tr[i\Omega_c(-2\hat{\sigma}_{32}\rho\hat{\sigma}_{13} + 2\rho\hat{\sigma}_{32}\hat{\sigma}_{13})] = \\
 & Tr[i\Omega_c(-2\hat{\sigma}_{12}\rho)] = -2i\Omega_c\langle\hat{\sigma}_{12}\rangle
 \end{aligned} \tag{A.24}$$

Para o termo Δ_p

$$\begin{aligned}
 & Tr[-i(\Delta_p\hat{\sigma}_{11}\rho - \rho\Delta_p\hat{\sigma}_{11})\hat{\sigma}_{13}] = \\
 & Tr[-i(\Delta_p\hat{\sigma}_{11}\rho\hat{\sigma}_{13} - \rho\Delta_p\hat{\sigma}_{11}\hat{\sigma}_{13})] = \\
 & Tr[-\rho\Delta_p\hat{\sigma}_{13}] = -\Delta_p\langle\hat{\sigma}_{13}\rangle
 \end{aligned} \tag{A.25}$$

Para os termos Δ_1 e Δ_2

$$\begin{aligned}
 & Tr[(\Delta_1 - \Delta_2)\hat{\sigma}_{22}\rho + \Delta_1\hat{\sigma}_{33}\rho - \rho(\Delta_1 - \Delta_2)\hat{\sigma}_{22} - \rho\Delta_1\hat{\sigma}_{33})\hat{\sigma}_{13}] = \\
 & Tr[(\Delta_1 - \Delta_2)\hat{\sigma}_{22}\rho\hat{\sigma}_{13} + \Delta_1\hat{\sigma}_{33}\rho\hat{\sigma}_{13} - \rho(\Delta_1 - \Delta_2)\hat{\sigma}_{22}\hat{\sigma}_{13} - \rho\Delta_1\hat{\sigma}_{33}\hat{\sigma}_{13}] = \\
 & Tr[\Delta_1\hat{\sigma}_{13}\rho] = \Delta_1\langle\hat{\sigma}_{13}\rangle
 \end{aligned} \tag{A.26}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \langle\dot{\sigma}_{13}\rangle &= \gamma_3\langle\hat{\sigma}_{13}\rangle + \Gamma_{32}\langle\hat{\sigma}_{13}\rangle + \Gamma_{31}\langle\hat{\sigma}_{13}\rangle + \\
 & ig_0\langle\hat{a}\rangle\langle\hat{\sigma}_{11}\rangle + ig_0\langle\hat{a}\rangle\langle\hat{\sigma}_{33}\rangle - 2i\Omega_c\langle\hat{\sigma}_{12}\rangle - \Delta_p\langle\hat{\sigma}_{13}\rangle + \Delta_1\langle\hat{\sigma}_{13}\rangle
 \end{aligned} \tag{A.27}$$

OBTENÇÃO DE $\langle\dot{\sigma}_{23}\rangle$

$$\langle\dot{\sigma}_{23}\rangle = Tr(\dot{\rho}\hat{\sigma}_{23}) \tag{A.28}$$

Para o termo Γ_{31}

$$\begin{aligned}
 & Tr[\Gamma_{31}(2\hat{\sigma}_{13}\rho\hat{\sigma}_{31} - \hat{\sigma}_{33}\rho - \rho\hat{\sigma}_{33})\hat{\sigma}_{23}] = \\
 & Tr[\Gamma_{31}(2\hat{\sigma}_{13}\rho\hat{\sigma}_{31}\hat{\sigma}_{23} - \hat{\sigma}_{33}\rho\hat{\sigma}_{23} - \rho\hat{\sigma}_{33}\hat{\sigma}_{23})] = \\
 & Tr[-\Gamma_{31}\hat{\sigma}_{23}\rho] = -\Gamma_{31}\langle\hat{\sigma}_{23}\rangle
 \end{aligned} \tag{A.29}$$

Para o termo Γ_{32}

$$\begin{aligned}
 & Tr[\Gamma_{32}(\hat{\sigma}_{23}\rho\hat{\sigma}_{32} - \hat{\sigma}_{33}\rho - \rho\hat{\sigma}_{33})\hat{\sigma}_{23}] = \\
 & Tr[\Gamma_{32}(\hat{\sigma}_{23}\rho\hat{\sigma}_{32}\hat{\sigma}_{23} - \hat{\sigma}_{33}\rho\hat{\sigma}_{23} - \rho\hat{\sigma}_{33}\hat{\sigma}_{23})] = \\
 & Tr[Tr[-\Gamma_{32}\hat{\sigma}_{23}\rho]] = -\Gamma_{32}\langle\hat{\sigma}_{23}\rangle
 \end{aligned} \tag{A.30}$$

Para o termo γ_2

$$\begin{aligned}
 & Tr[\gamma_2(2\hat{\sigma}_{22}\rho\hat{\sigma}_{22} - \hat{\sigma}_{22}\rho - \rho\hat{\sigma}_{22})\hat{\sigma}_{23}] = \\
 & Tr[\gamma_2(2\hat{\sigma}_{22}\rho\hat{\sigma}_{22}\hat{\sigma}_{23} - \hat{\sigma}_{22}\rho\hat{\sigma}_{23} - \rho\hat{\sigma}_{22}\hat{\sigma}_{23})] = \\
 & Tr[-\gamma_2\hat{\sigma}_{23}\rho] = -\gamma_2\langle\hat{\sigma}_{23}\rangle
 \end{aligned} \tag{A.31}$$

Para o termo γ_3

$$\begin{aligned}
 & Tr[\gamma_3(2\hat{\sigma}_{33}\rho\hat{\sigma}_{33} - \hat{\sigma}_{33}\rho - \rho\hat{\sigma}_{33})\hat{\sigma}_{23}] = \\
 & Tr[\gamma_3(2\hat{\sigma}_{33}\rho\hat{\sigma}_{33}\hat{\sigma}_{23} - \hat{\sigma}_{33}\rho\hat{\sigma}_{23} - \rho\hat{\sigma}_{33}\hat{\sigma}_{23})] = \\
 & Tr[-\gamma_3\hat{\sigma}_{23}\rho] = -\gamma_3\langle\hat{\sigma}_{23}\rangle
 \end{aligned} \tag{A.32}$$

Para o termo κ

$$\begin{aligned}
 & Tr[\kappa(2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\rho - \rho\hat{a}^\dagger\hat{a})\hat{\sigma}_{23}] = \\
 & Tr[\kappa(2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger - 2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger)\hat{\sigma}_{23}] = 0
 \end{aligned} \tag{A.33}$$

Para o termo g_0

$$\begin{aligned}
 & Tr[-ig_0(\hat{a}\hat{\sigma}_{31}\rho + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{13}\rho - \rho\hat{a}\hat{\sigma}_{31} - \rho\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{13})\hat{\sigma}_{23}] = \\
 & ig_0Tr[-\hat{a}\hat{\sigma}_{31}\rho\hat{\sigma}_{23} - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{13}\rho\hat{\sigma}_{23} + \rho\hat{a}\hat{\sigma}_{31}\hat{\sigma}_{23} + \rho\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{13}\hat{\sigma}_{23}] = \\
 & ig_0Tr[\hat{a}\hat{\sigma}_{21}\rho] = ig_0\langle\hat{a}\rangle\langle\hat{\sigma}_{21}\rangle
 \end{aligned} \tag{A.34}$$

Para o termo Ω_c

$$\begin{aligned}
 & Tr[-i\Omega_c(2\hat{\sigma}_{32}\rho - 2\rho\hat{\sigma}_{32})\hat{\sigma}_{23}] = \\
 & Tr[i\Omega_c(-2\hat{\sigma}_{32}\rho\hat{\sigma}_{23} + 2\rho\hat{\sigma}_{32}\hat{\sigma}_{23})] = \\
 & Tr[i\Omega_c(-2\hat{\sigma}_{22}\rho + 2\hat{\sigma}_{33}\rho)] = -2i\Omega_c\langle\hat{\sigma}_{22}\rangle + 2i\Omega_c\langle\hat{\sigma}_{33}\rangle
 \end{aligned} \tag{A.35}$$

Para o termo Δ_p

$$\begin{aligned}
 & Tr[-i(\Delta_p\hat{\sigma}_{11}\rho - \rho\Delta_p\hat{\sigma}_{11})\hat{\sigma}_{23}] = \\
 & Tr[-i(\Delta_p\hat{\sigma}_{11}\rho\hat{\sigma}_{23} - \rho\Delta_p\hat{\sigma}_{11}\hat{\sigma}_{23})] = 0
 \end{aligned}$$

Para os termos Δ_1 e Δ_2

$$\begin{aligned}
 & Tr[(\Delta_1 - \Delta_2)\hat{\sigma}_{22}\rho + \Delta_1\hat{\sigma}_{33}\rho - \rho(\Delta_1 - \Delta_2)\hat{\sigma}_{22} - \rho\Delta_1\hat{\sigma}_{33})\hat{\sigma}_{23}] = \\
 & Tr[(\Delta_1 - \Delta_2)\hat{\sigma}_{22}\rho\hat{\sigma}_{23} + \Delta_1\hat{\sigma}_{33}\rho\hat{\sigma}_{23} - \rho(\Delta_1 - \Delta_2)\hat{\sigma}_{22}\hat{\sigma}_{23} - \rho\Delta_1\hat{\sigma}_{33}\hat{\sigma}_{23}] = \\
 & Tr[-\rho(\Delta_1 - \Delta_2)\hat{\sigma}_{23} + \Delta_1\hat{\sigma}_{23}\rho] = \\
 & Tr[\Delta_2\hat{\sigma}_{23}\rho] = \Delta_2\langle\hat{\sigma}_{23}\rangle
 \end{aligned} \tag{A.36}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \langle \dot{\sigma}_{23} \rangle &= -\Gamma_{31} \langle \hat{\sigma}_{23} \rangle - \Gamma_{32} \langle \hat{\sigma}_{23} \rangle - \gamma_2 \langle \hat{\sigma}_{23} \rangle - \gamma_3 \langle \hat{\sigma}_{23} \rangle + \\ &ig_0 \langle \hat{a} \rangle \langle \hat{\sigma}_{21} \rangle - 2i\Omega_c \langle \hat{\sigma}_{22} \rangle + 2i\Omega_c \langle \hat{\sigma}_{33} \rangle + \Delta_2 \langle \hat{\sigma}_{23} \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

OBTENÇÃO DE $\langle \dot{\sigma}_{22} \rangle$

$$\langle \dot{\sigma}_{22} \rangle = Tr(\dot{\rho} \hat{\sigma}_{22}) \quad (\text{A.38})$$

Para o termo Γ_{31}

$$\begin{aligned} Tr[\Gamma_{31}(2\hat{\sigma}_{13}\rho\hat{\sigma}_{31} - \hat{\sigma}_{33}\rho - \rho\hat{\sigma}_{33})\hat{\sigma}_{22}] &= \\ Tr[\Gamma_{31}(2\hat{\sigma}_{13}\rho\hat{\sigma}_{31}\hat{\sigma}_{22} - \hat{\sigma}_{33}\rho\hat{\sigma}_{22} - \rho\hat{\sigma}_{33}\hat{\sigma}_{22})] &= 0 \end{aligned}$$

Para o termo Γ_{32}

$$\begin{aligned} Tr[\Gamma_{32}(2\hat{\sigma}_{23}\rho\hat{\sigma}_{32} - \hat{\sigma}_{33}\rho - \rho\hat{\sigma}_{33})\hat{\sigma}_{22}] &= \\ Tr[\Gamma_{32}(2\hat{\sigma}_{23}\rho\hat{\sigma}_{32}\hat{\sigma}_{22} - \hat{\sigma}_{33}\rho\hat{\sigma}_{22} - \rho\hat{\sigma}_{33}\hat{\sigma}_{22})] &= 2\Gamma_{32} \langle \hat{\sigma}_{33} \rangle \end{aligned}$$

Para o termo γ_2

$$\begin{aligned} Tr[\gamma_2(\hat{\sigma}_{22}\rho\hat{\sigma}_{22} - \hat{\sigma}_{22}\rho - \rho\hat{\sigma}_{22})\hat{\sigma}_{22}] &= \\ Tr[\gamma_2(\hat{\sigma}_{22}\rho\hat{\sigma}_{22}\hat{\sigma}_{22} - \hat{\sigma}_{22}\rho\hat{\sigma}_{22} - \rho\hat{\sigma}_{22}\hat{\sigma}_{22})] &= \\ Tr[\gamma_2(2\rho\hat{\sigma}_{22} - 2\rho\hat{\sigma}_{22})] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Para o termo γ_3

$$\begin{aligned} Tr[\gamma_3(\hat{\sigma}_{33}\rho\hat{\sigma}_{33} - \hat{\sigma}_{33}\rho - \rho\hat{\sigma}_{33})\hat{\sigma}_{22}] &= \\ Tr[\gamma_3(\hat{\sigma}_{33}\rho\hat{\sigma}_{33}\hat{\sigma}_{22} - \hat{\sigma}_{33}\rho\hat{\sigma}_{22} - \rho\hat{\sigma}_{33}\hat{\sigma}_{22})] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

Para o termo κ

$$\begin{aligned} Tr[\kappa(2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\rho - \rho\hat{a}^\dagger\hat{a})\hat{\sigma}_{22}] &= \\ Tr[\kappa(2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger - 2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger)\hat{\sigma}_{22}] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

Para o termo g_0

$$\begin{aligned} & Tr[-ig_0(\hat{a}\hat{\sigma}_{31}\rho + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{13}\rho - \rho\hat{a}\hat{\sigma}_{31} - \rho\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{13})\hat{\sigma}_{22}] = \\ & ig_0 Tr[-\hat{a}\hat{\sigma}_{31}\rho\hat{\sigma}_{22} - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{13}\rho\hat{\sigma}_{22} + \rho\hat{a}\hat{\sigma}_{31}\hat{\sigma}_{22} + \rho\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{13}\hat{\sigma}_{22}] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Para o termo ε

$$\begin{aligned} & Tr[-i\varepsilon(\hat{a}\rho + \hat{a}^\dagger\rho - \rho\hat{a} - \rho\hat{a}^\dagger)\hat{\sigma}_{22}] = \\ & Tr[i\varepsilon(-\hat{a}\rho\hat{\sigma}_{22} - \hat{a}^\dagger\rho\hat{\sigma}_{22} + \rho\hat{a}\hat{\sigma}_{22} + \rho\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{22})] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Para o termo Ω_c

$$\begin{aligned} & Tr[-i\Omega_c(2\hat{\sigma}_{32}\rho - 2\rho\hat{\sigma}_{32})\hat{\sigma}_{22}] = \\ & Tr[i\Omega_c(-2\hat{\sigma}_{32}\rho\hat{\sigma}_{22} + 2\rho\hat{\sigma}_{32}\hat{\sigma}_{22})] = 2i\Omega_c\langle\hat{\sigma}_{32}\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Para o termo Δ_p

$$\begin{aligned} & Tr[-i(\Delta_p\hat{\sigma}_{11}\rho - \rho\Delta_p\hat{\sigma}_{11})\hat{\sigma}_{22}] = \\ & Tr[-i(\Delta_p\hat{\sigma}_{11}\rho\hat{\sigma}_{22} - \rho\Delta_p\hat{\sigma}_{11}\hat{\sigma}_{22})] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

Para os termos Δ_1 e Δ_2

$$\begin{aligned} & Tr[(\Delta_1 - \Delta_2)\hat{\sigma}_{22}\rho + \Delta_1\hat{\sigma}_{33}\rho - \rho(\Delta_1 - \Delta_2)\hat{\sigma}_{22} - \rho\Delta_1\hat{\sigma}_{33})\hat{\sigma}_{22}] = \\ & Tr[(\Delta_1 - \Delta_2)\hat{\sigma}_{22}\rho\hat{\sigma}_{22} + \Delta_1\hat{\sigma}_{33}\rho\hat{\sigma}_{22} - \rho(\Delta_1 - \Delta_2)\hat{\sigma}_{22}\hat{\sigma}_{22} - \rho\Delta_1\hat{\sigma}_{33}\hat{\sigma}_{22}] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

Portanto,

$$\langle\dot{\sigma}_{22}\rangle = 2i\Omega_c\langle\hat{\sigma}_{32}\rangle + \Gamma_{32}\langle\hat{\sigma}_{33}\rangle \quad (\text{A.47})$$

OBTENÇÃO DE $\langle\dot{\sigma}_{33}\rangle$

$$\langle\dot{\sigma}_{33}\rangle = Tr(\dot{\rho}\hat{\sigma}_{33}) \quad (\text{A.48})$$

Para o termo Γ_{31}

$$\begin{aligned} & Tr[\Gamma_{31}(\hat{\sigma}_{13}\rho\hat{\sigma}_{31} - \hat{\sigma}_{33}\rho - \rho\hat{\sigma}_{33})\hat{\sigma}_{33}] = \\ & Tr[2\Gamma_{31}(\hat{\sigma}_{13}\rho\hat{\sigma}_{31}\hat{\sigma}_{33} - \hat{\sigma}_{33}\rho\hat{\sigma}_{33} - \rho\hat{\sigma}_{33}\hat{\sigma}_{33})] = \\ & Tr[\Gamma_{31}(-2\hat{\sigma}_{33}\rho)] = -2\Gamma_{31}\langle\hat{\sigma}_{33}\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Para o termo Γ_{32}

$$\begin{aligned} Tr[\Gamma_{32}(\hat{\sigma}_{23}\rho\hat{\sigma}_{32} - \hat{\sigma}_{33}\rho - \rho\hat{\sigma}_{33})\hat{\sigma}_{33}] &= \\ Tr[\Gamma_{32}(2\hat{\sigma}_{23}\rho\hat{\sigma}_{32}\hat{\sigma}_{33} - \hat{\sigma}_{33}\rho\hat{\sigma}_{33} - \rho\hat{\sigma}_{33}\hat{\sigma}_{33})] &= \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

$$Tr[\Gamma_{31}(-2\hat{\sigma}_{33}\rho)] = -2\Gamma_{32}\langle\hat{\sigma}_{33}\rangle \quad (\text{A.51})$$

Para o termo γ_2

$$\begin{aligned} Tr[\gamma_2(2\hat{\sigma}_{22}\rho\hat{\sigma}_{22} - \hat{\sigma}_{22}\rho - \rho\hat{\sigma}_{22})\hat{\sigma}_{33}] &= \\ Tr[\gamma_2(2\hat{\sigma}_{22}\rho\hat{\sigma}_{22}\hat{\sigma}_{33} - \hat{\sigma}_{22}\rho\hat{\sigma}_{33} - \rho\hat{\sigma}_{22}\hat{\sigma}_{33})] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

Para o termo γ_3

$$\begin{aligned} Tr[\gamma_3(2\hat{\sigma}_{33}\rho\hat{\sigma}_{33} - \hat{\sigma}_{33}\rho - \rho\hat{\sigma}_{33})\hat{\sigma}_{33}] &= \\ Tr[\gamma_3(2\hat{\sigma}_{33}\rho\hat{\sigma}_{33}\hat{\sigma}_{33} - \hat{\sigma}_{33}\rho\hat{\sigma}_{33} - \rho\hat{\sigma}_{33}\hat{\sigma}_{33})] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

Para o termo κ

$$\begin{aligned} Tr[\kappa(2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\rho - \rho\hat{a}^\dagger\hat{a})\hat{\sigma}_{33}] &= \\ Tr[\kappa(2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger - 2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger)\hat{\sigma}_{33}] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

Para o termo g_0

$$\begin{aligned} Tr[-ig_0(\hat{a}\hat{\sigma}_{31}\rho + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{13}\rho - \rho\hat{a}\hat{\sigma}_{31} - \rho\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{13})\hat{\sigma}_{33}] &= \\ ig_0Tr[-\hat{a}\hat{\sigma}_{31}\rho\hat{\sigma}_{33} - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{13}\rho\hat{\sigma}_{33} + \rho\hat{a}\hat{\sigma}_{31}\hat{\sigma}_{33} + \rho\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{13}\hat{\sigma}_{33}] &= \\ ig_0Tr[-\hat{a}\hat{\sigma}_{31}\rho + \rho\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{13}] &= -ig_0\langle\hat{a}\rangle\langle\hat{\sigma}_{31}\rangle + ig_0\langle\hat{a}^\dagger\rangle\langle\hat{\sigma}_{13}\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

Para o termo ε

$$\begin{aligned} Tr[-i\varepsilon(\hat{a}\rho + \hat{a}^\dagger\rho - \rho\hat{a} - \rho\hat{a}^\dagger)\hat{\sigma}_{33}] &= \\ Tr[i\varepsilon(-\hat{a}\rho\hat{\sigma}_{33} - \hat{a}^\dagger\rho\hat{\sigma}_{33} + \rho\hat{a}\hat{\sigma}_{33} + \rho\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{33})] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

Para o termo Ω_c

$$\begin{aligned} Tr[-i\Omega_c(2\hat{\sigma}_{32}\rho - 2\rho\hat{\sigma}_{32})\hat{\sigma}_{33}] &= \\ Tr[i\Omega_c(-2\hat{\sigma}_{32}\rho\hat{\sigma}_{33} + 2\rho\hat{\sigma}_{32}\hat{\sigma}_{33})] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.57})$$

Para o termo Δ_p

$$\begin{aligned} Tr[-i(\Delta_p \hat{\sigma}_{11} \rho - \rho \Delta_p \hat{\sigma}_{11}) \hat{\sigma}_{33}] &= \\ Tr[-i(\Delta_p \hat{\sigma}_{11} \rho \hat{\sigma}_{33} - \rho \Delta_p \hat{\sigma}_{11} \hat{\sigma}_{33})] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

Para os termos Δ_1 e Δ_2

$$\begin{aligned} Tr[(\Delta_1 - \Delta_2) \hat{\sigma}_{22} \rho + \Delta_1 \hat{\sigma}_{33} \rho - \rho(\Delta_1 - \Delta_2) \hat{\sigma}_{22} - \rho \Delta_1 \hat{\sigma}_{33}] \hat{\sigma}_{33} &= \\ Tr[(\Delta_1 - \Delta_2) \hat{\sigma}_{22} \rho \hat{\sigma}_{33} + \Delta_1 \hat{\sigma}_{33} \rho \hat{\sigma}_{33} - \rho(\Delta_1 - \Delta_2) \hat{\sigma}_{22} \hat{\sigma}_{33} - \rho \Delta_1 \hat{\sigma}_{33} \hat{\sigma}_{33}] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

Portanto,

$$\langle \dot{\sigma}_{33} \rangle = -2\Gamma_{32} \langle \hat{\sigma}_{33} \rangle - 2\Gamma_{31} \langle \hat{\sigma}_{33} \rangle - ig_0 \langle \hat{a} \rangle \langle \hat{\sigma}_{31} \rangle + ig_0 \langle \hat{a}^\dagger \rangle \langle \hat{\sigma}_{13} \rangle \quad (\text{A.60})$$

OBTENÇÃO DE $\langle \dot{\sigma}_{12} \rangle$

$$\langle \dot{\sigma}_{12} \rangle = Tr(\dot{\rho} \hat{\sigma}_{12}) \quad (\text{A.61})$$

Para o termo Γ_{31}

$$\begin{aligned} Tr[\Gamma_{31}(\hat{\sigma}_{13} \rho \hat{\sigma}_{31} - \hat{\sigma}_{33} \rho - \rho \hat{\sigma}_{33}) \hat{\sigma}_{12}] &= \\ Tr[\Gamma_{31}(\hat{\sigma}_{13} \rho \hat{\sigma}_{31} \hat{\sigma}_{12} - \hat{\sigma}_{33} \rho \hat{\sigma}_{12} - \rho \hat{\sigma}_{33} \hat{\sigma}_{12})] &= \Gamma_{31} \langle \hat{\sigma}_{12} \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

Para o termo Γ_{32}

$$\begin{aligned} Tr[\Gamma_{32}(\hat{\sigma}_{23} \rho \hat{\sigma}_{32} - \hat{\sigma}_{33} \rho - \rho \hat{\sigma}_{33}) \hat{\sigma}_{12}] &= \\ Tr[\Gamma_{32}(\hat{\sigma}_{23} \rho \hat{\sigma}_{32} \hat{\sigma}_{12} - \hat{\sigma}_{33} \rho \hat{\sigma}_{12} - \rho \hat{\sigma}_{33} \hat{\sigma}_{12})] &= \Gamma_{32} \langle \hat{\sigma}_{12} \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

Para o termo γ_2

$$\begin{aligned} Tr[\gamma_2(\hat{\sigma}_{22} \rho \hat{\sigma}_{22} - \hat{\sigma}_{22} \rho - \rho \hat{\sigma}_{22}) \hat{\sigma}_{12}] &= \\ Tr[\gamma_2(\hat{\sigma}_{22} \rho \hat{\sigma}_{22} \hat{\sigma}_{12} - \hat{\sigma}_{22} \rho \hat{\sigma}_{12} - \rho \hat{\sigma}_{22} \hat{\sigma}_{12})] &= \gamma_2 \langle \hat{\sigma}_{12} \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.64})$$

Para o termo γ_3

$$\begin{aligned} Tr[\gamma_3(\hat{\sigma}_{33} \rho \hat{\sigma}_{33} - \hat{\sigma}_{33} \rho - \rho \hat{\sigma}_{33}) \hat{\sigma}_{12}] &= \\ Tr[\gamma_3(\hat{\sigma}_{33} \rho \hat{\sigma}_{33} \hat{\sigma}_{12} - \hat{\sigma}_{33} \rho \hat{\sigma}_{12} - \rho \hat{\sigma}_{33} \hat{\sigma}_{12})] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$

Para o termo κ

$$\begin{aligned} Tr[\kappa(2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\rho - \rho\hat{a}^\dagger\hat{a})\hat{\sigma}_{12}] &= \\ Tr[\kappa(2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger - 2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger)\hat{\sigma}_{12}] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.66})$$

Para o termo g_0

$$\begin{aligned} Tr[-ig_0(\hat{a}\hat{\sigma}_{31}\rho + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{13}\rho - \rho\hat{a}\hat{\sigma}_{31} - \rho\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{13})\hat{\sigma}_{12}] &= \\ ig_0Tr[-\hat{a}\hat{\sigma}_{31}\rho\hat{\sigma}_{12} - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{13}\rho\hat{\sigma}_{12} + \rho\hat{a}\hat{\sigma}_{31}\hat{\sigma}_{12} + \rho\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{13}\hat{\sigma}_{12}] &= ig_0\langle\hat{a}\rangle\langle\hat{\sigma}_{32}\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.67})$$

Para o termo ε

$$\begin{aligned} Tr[-i\varepsilon(\hat{a}\rho + \hat{a}^\dagger\rho - \rho\hat{a} - \rho\hat{a}^\dagger)\hat{\sigma}_{12}] &= \\ Tr[i\varepsilon(-\hat{a}\rho\hat{\sigma}_{12} - \hat{a}^\dagger\rho\hat{\sigma}_{12} + \rho\hat{a}\hat{\sigma}_{12} + \rho\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{12})] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.68})$$

Para o termo Ω_c

$$\begin{aligned} Tr[-i\Omega_c(2\hat{\sigma}_{32}\rho - 2\rho\hat{\sigma}_{32})\hat{\sigma}_{12}] &= \\ Tr[i\Omega_c(-2\hat{\sigma}_{32}\rho\hat{\sigma}_{12} + 2\rho\hat{\sigma}_{32}\hat{\sigma}_{12})] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

Para o termo Δ_p

$$\begin{aligned} Tr[-i(\Delta_p\hat{\sigma}_{11}\rho - \rho\Delta_p\hat{\sigma}_{11})\hat{\sigma}_{12}] &= \\ Tr[-i(\Delta_p\hat{\sigma}_{11}\rho\hat{\sigma}_{12} - \rho\Delta_p\hat{\sigma}_{11}\hat{\sigma}_{12})] &= i\Delta_p\langle\hat{\sigma}_{12}\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.70})$$

Para os termos Δ_1 e Δ_2

$$\begin{aligned} Tr[(\Delta_1 - \Delta_2)\hat{\sigma}_{22}\rho + \Delta_1\hat{\sigma}_{33}\rho - \rho(\Delta_1 - \Delta_2)\hat{\sigma}_{22} - \rho\Delta_1\hat{\sigma}_{33})\hat{\sigma}_{12}] &= \\ Tr[(\Delta_1 - \Delta_2)\hat{\sigma}_{22}\rho\hat{\sigma}_{12} + \Delta_1\hat{\sigma}_{33}\rho\hat{\sigma}_{12} - \rho(\Delta_1 - \Delta_2)\hat{\sigma}_{22}\hat{\sigma}_{12} - \rho\Delta_1\hat{\sigma}_{33}\hat{\sigma}_{12}] &= \\ (\Delta_1 - \Delta_2)\langle\hat{\sigma}_{12}\rangle & \end{aligned} \quad (\text{A.71})$$

Portanto,

$$\langle\dot{\sigma}_{12}\rangle = (\Delta_1 - \Delta_2)\langle\hat{\sigma}_{12}\rangle + i\Delta_p\langle\hat{\sigma}_{12}\rangle + ig_0\langle\hat{a}\rangle\langle\hat{\sigma}_{32}\rangle + \Gamma_{32}\langle\hat{\sigma}_{12}\rangle + \Gamma_{31}\langle\hat{\sigma}_{12}\rangle + \gamma_2\langle\hat{\sigma}_{12}\rangle \quad (\text{A.72})$$

OBTENÇÃO DE $\langle \dot{a} \rangle$

$$\langle \dot{a} \rangle = Tr(\dot{\rho}\hat{a}) \quad (\text{A.73})$$

Para o termo Γ_{31}

$$\begin{aligned} Tr[\Gamma_{31}(\hat{\sigma}_{13}\rho\hat{\sigma}_{31} - \hat{\sigma}_{33}\rho - \rho\hat{\sigma}_{33})\hat{a}] &= \\ Tr[\Gamma_{31}(\hat{\sigma}_{13}\rho\hat{\sigma}_{31}\hat{a} - \hat{\sigma}_{33}\rho\hat{a} - \rho\hat{\sigma}_{33}\hat{a})] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.74})$$

Para o termo Γ_{32}

$$\begin{aligned} Tr[\Gamma_{32}(\hat{\sigma}_{23}\rho\hat{\sigma}_{32} - \hat{\sigma}_{33}\rho - \rho\hat{\sigma}_{33})\hat{a}] &= \\ Tr[\Gamma_{32}(\hat{\sigma}_{23}\rho\hat{\sigma}_{32}\hat{a} - \hat{\sigma}_{33}\rho\hat{a} - \rho\hat{\sigma}_{33}\hat{a})] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.75})$$

Para o termo γ_2

$$\begin{aligned} Tr[\gamma_2(\hat{\sigma}_{22}\rho\hat{\sigma}_{22} - \hat{\sigma}_{22}\rho - \rho\hat{\sigma}_{22})\hat{a}] &= \\ Tr[\gamma_2(\hat{\sigma}_{22}\rho\hat{\sigma}_{22}\hat{a} - \hat{\sigma}_{22}\rho\hat{a} - \rho\hat{\sigma}_{22}\hat{a})] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.76})$$

Para o termo γ_3

$$\begin{aligned} Tr[\gamma_3(\hat{\sigma}_{33}\rho\hat{\sigma}_{33} - \hat{\sigma}_{33}\rho - \rho\hat{\sigma}_{33})\hat{a}] &= \\ Tr[\gamma_3(\hat{\sigma}_{33}\rho\hat{\sigma}_{33}\hat{a} - \hat{\sigma}_{33}\rho\hat{a} - \rho\hat{\sigma}_{33}\hat{a})] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.77})$$

Para o termo κ

$$\begin{aligned} Tr[\kappa(2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\rho - \rho\hat{a}^\dagger\hat{a})\hat{a}] &= \\ Tr[\kappa(2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}\rho\hat{a} - \rho\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a})] &= \\ Tr[\kappa(\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}\rho\hat{a})] &= \\ Tr[\kappa(\hat{a}\rho[\hat{a}\hat{a}^\dagger - 1] - \hat{a}^\dagger\hat{a}\rho\hat{a})] &= \\ Tr[\kappa(-\hat{a}\rho)] &= -\kappa\langle \hat{a} \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.78})$$

Para o termo g_0

$$\begin{aligned}
 & Tr[-ig_0(\hat{a}\hat{\sigma}_{31}\rho + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{13}\rho - \rho\hat{a}\hat{\sigma}_{31} - \rho\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{13})\hat{a}] = \\
 & ig_0Tr[-\hat{a}\hat{\sigma}_{31}\rho\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{13}\rho\hat{a} + \rho\hat{a}\hat{\sigma}_{31}\hat{a} + \rho\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{13}\hat{a}] = \\
 & ig_0Tr[-\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{13}\rho\hat{a} + \rho\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{13}\hat{a}] = \\
 & ig_0Tr[-[\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1]\hat{\sigma}_{13}\rho + \rho\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{13}\hat{a}] = \\
 & ig_0Tr[-\hat{\sigma}_{13}\rho] = -ig_0\langle\hat{\sigma}_{13}\rangle
 \end{aligned} \tag{A.79}$$

Para o termo ε

$$\begin{aligned}
 & Tr[-i\varepsilon(\hat{a}\rho + \hat{a}^\dagger\rho - \rho\hat{a} - \rho\hat{a}^\dagger)\hat{a}] = \\
 & Tr[i\varepsilon(-\hat{a}\rho\hat{a} - \hat{a}^\dagger\rho\hat{a} + \rho\hat{a}\hat{a} + \rho\hat{a}^\dagger\hat{a})] = \\
 & Tr[i\varepsilon(-\hat{a}^\dagger\rho\hat{a} + \rho[\hat{a}\hat{a}^\dagger - 1])] = \\
 & Tr[i\varepsilon(-\rho)] = -i\varepsilon
 \end{aligned} \tag{A.80}$$

Para o termo Ω_c

$$\begin{aligned}
 & Tr[-i\Omega_c(2\hat{\sigma}_{32}\rho - 2\rho\hat{\sigma}_{32})\hat{a}] = \\
 & Tr[i\Omega_c(-2\hat{\sigma}_{32}\rho\hat{a} + 2\rho\hat{\sigma}_{32}\hat{a})] = 0
 \end{aligned} \tag{A.81}$$

Para o termo Δ_p

$$\begin{aligned}
 & Tr[-i(\Delta_p\hat{\sigma}_{11}\rho - \rho\Delta_p\hat{\sigma}_{11})\hat{a}] = \\
 & Tr[-i(\Delta_p\hat{\sigma}_{11}\rho\hat{a} - \rho\Delta_p\hat{\sigma}_{11}\hat{a})] = 0
 \end{aligned} \tag{A.82}$$

Para o termo Δ_p

$$\begin{aligned}
 & Tr[(\Delta_1 - \Delta_2)\hat{\sigma}_{22}\rho + \Delta_1\hat{\sigma}_{33}\rho - \rho(\Delta_1 - \Delta_2)\hat{\sigma}_{22} - \rho\Delta_1\hat{\sigma}_{33})\hat{a}] = \\
 & Tr[(\Delta_1 - \Delta_2)\hat{\sigma}_{22}\rho\hat{a} + \Delta_1\hat{\sigma}_{33}\rho\hat{a} - \rho(\Delta_1 - \Delta_2)\hat{\sigma}_{22}\hat{a} - \rho\Delta_1\hat{\sigma}_{33}\hat{a}] = 0
 \end{aligned} \tag{A.83}$$

Portanto,

$$\langle\dot{\hat{a}}\rangle = -\kappa\langle\hat{a}\rangle - i\varepsilon - ig_0\langle\hat{\sigma}_{13}\rangle \tag{A.84}$$