Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Estatística

Distribuição da estatística de Wald em amostras finitas para modelos GAMLSS paramétricos

Gabriel Cezar Lopes dos Santos

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Estatística

Distribuição da estatística de Wald em amostras finitas para modelos GAMLSS paramétricos

Gabriel Cezar Lopes dos Santos
Orientador: Gustavo Henrique de Araujo Pereira

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como parte dos requisitos para obtenção do título de Bacharel em Estatística.

São Carlos
Setembro de 2023

Resumo

Em modelos de regressão paramétrica, frequentemente desejamos testar hipóteses em relação ao valor de seus parâmetros. Mais especificamente, quando estamos fora do modelo linear geral (erros aleatórios com distribuição Normal), o teste de Wald é um dos mais utilizados para essa finalidade. A raiz quadrada sinalizada da estatística utilizada no teste em questão, denominada estatística de Wald, possui distribuição assintótica normal padrão sob a hipótese nula. Entretanto, diversos softwares estatísticos aproximam a distribuição da raiz quadrada sinalizada da estatística pela distribuição t. O principal objetivo deste trabalho é verificar se, para modelos de regressão considerando diferentes distribuições da variável resposta, a distribuição da raiz quadrada sinalizada da estatística de Wald é melhor aproximada em amostras pequenas e moderadas pela distribuição t ou pela normal padrão. As conclusões serão obtidas a partir da condução de estudos de simulação de Monte Carlo e serão consideradas para a variável resposta tanto distribuições pertencentes como não pertencentes à família exponencial.

Palavras-chave: *estatística de Wald, GAMLSS, simulação de Monte Carlo.*

Lista de Tabelas

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Os Modelos Lineares Generalizados (MLG), propostos por Nelder e Wedderburn (1972), formam uma classe de modelos que expandiu, significativamente, a área de regressão paramétrica, já que, anteriormente, era necessário assumir que os erros aleatórios do modelo são independentes com distribuição normal e variância constante, e essas suposições, frequentemente, não eram válidas. Mais especificamente, os MLGs são capazes de modelar variáveis resposta que possuem qualquer distribuição pertencente à família exponencial, como gama, Poisson, binomial, entre outras (McCullagh e Nelder, 2019).

Rigby e Stasinopoulos (2005) propuseram uma classe de modelos de regressão ainda mais ampla e que contém os MLGs, denominada GAMLSS(*Generalized additive models for location, shape and scale*). Esses modelos permitem a modelagem de variáveis resposta com diversas distribuições, incluindo distribuições que não pertencem à família exponencial. Outras diferenças do GAMLSS, em relação aos MLGs, são descritas no Capítulo 2. Neste trabalho, utilizamos uma subclasse desses modelos denominada GAMLSS paramétrico, que também é descrita no Capítulo 2.

Em modelos de regressão paramétricos, frequentemente, desejamos testar hipóteses em relação ao valor de seus parâmetros. Mais especificamente, quando estamos fora do modelo linear geral (erros aleatórios com distribuição Normal), o teste de Wald é um dos mais utilizados para essa finalidade (Paula, 2004). A estatística utilizada no teste em questão, denominada estatística de Wald, possui distribuição assintótica qui-quadrado com 1 grau de liberdade, sob a hipótese nula, quando esta envolve um único parâmetro (Sen *et al.*, 2010). Porém, a raiz quadrada sinalizada da estatística de Wald é mais comumente utilizada, pois com ela é possível testar hipóteses unicaudais.

Dada a distribuição assintótica da estatística de Wald, sob H_0, a raiz quadrada sinalizada dessa estatística possui distribuição assintótica normal padrão. Entretanto, como a variância do estimador do parâmetro a ser testado precisa ser estimada para a obtenção da estatística, alguns pacotes computacionais aproximam a distribuição da raiz quadrada sinalizada da estatística de Wald pela distribuição t, e não pela Normal padrão. Um dos pacotes que usa essa aproximação pela distribuição t é o pacote Gamlss do software R (Stasinopoulos e Rigby, 2008). A aproximação da distribuição da raiz quadrada sinalizada da estatística de Wald pela distribuição t é uma analogia com o caso do modelo de regressão normal. Para esse modelo, sob a hipótese nula, a raiz quadrada sinalizada da estatística de Wald tem distribuição exata t.

Brolo (2019) realizou um trabalho de Iniciação Científica, em que verificou, por meio de simulações de Monte Carlo, para amostras pequenas e moderadas em modelos de regressão que assumem para a variável resposta as distribuições Poisson e gama, se a raiz quadrada sinalizada da estatística de Wald, sob a hipótese nula, é melhor aproximada pela distribuição t ou pela normal padrão.

1.1 Objetivos

Este trabalho é uma extensão da pesquisa realizada por Brolo (2019). O principal objetivo é verificar qual das duas distribuições (normal padrão ou t) aproxima melhor a raiz quadrada sinalizada da estatística de Wald, para outros modelos de regressão, cuja distribuição da variável resposta pertence ou não à família exponencial.

Capítulo 2

Modelos GAMLSS paramétricos

Neste capítulo são discutidos de forma breve os principais aspectos dos modelos GAMLSS, com exceção de testes de hipóteses, que serão apresentados no capítulo seguinte.

2.1 Especificação do modelo

A classe de modelos GAMLSS, proposta por Rigby e Stasinopoulos (2005), é uma extensão dos modelos lineares generalizados. As três principais diferenças entre as duas classes são: (i) Um GAMLSS permite modelar todos os parâmetros associados à distribuição da variável resposta Y em função de variáveis preditoras, e não apenas a sua média; (ii) Não é necessário que a distribuição da variável resposta pertença à família exponencial, o que abre uma gama muito maior de distribuições que podem ser modeladas; (iii) Por fim, a classe GAMLSS permite a adição de termos não paramétricos no modelo.

Neste trabalho utilizamos um caso particular de GAMLSS, denominado GAMLSS paramétrico, no qual apenas termos paramétricos são utilizados.

O GAMLSS é definido como:

$$g_k(\boldsymbol{\theta}_k) = \boldsymbol{\eta}_k = \mathrm{x}_k\boldsymbol{\beta}_k + \sum_{j=1}^{J_k} \mathbf{Z}_{jk}\gamma_{jk} \ ,$$

em que:

- k é o índice que representa qual parâmetro está sendo referido;
- $\boldsymbol{y}^T = (y_1, y_2, ..., y_n)$ é um vetor de observações independentes da variável resposta Y;

- $g_k(\cdot)$ é uma função de ligação conhecida, monótona e duplamente diferenciável, que relaciona o k-ésimo parâmetro com as variáveis preditoras;

- $\boldsymbol{\theta}_k$ é um vetor de tamanho n, cujo i-ésimo componente representa o k-ésimo parâmetro da distribuição de Y_i, associado ao i-ésimo elemento amostral (θ_{ik}), $i = 1, \ldots, n$;

- $\boldsymbol{\beta}_k^T = (\beta_{1k}, \beta_{2k}, ..., \beta_{J_k^{'}k})$ é um vetor de tamanho $J_k^{'}$ associado ao k-ésimo parâmetro;

- $\mathbf{x}_k$ é uma matriz do modelo conhecida de dimensão $n \times J_k^{'}$;

- $\mathbf{Z}_{jk}$ é uma matriz do modelo fixa e conhecida;

- γ_{jk} é uma variável aleatória de dimensão q_{jk}.

Tomando $\sum_{j=1}^{J_k} \mathbf{Z}_{jk}\gamma_{jk} = 0$, obtemos o modelo definido como GAMLSS paramétrico, dado por

$$g_k(\boldsymbol{\theta}_k) = \boldsymbol{\eta}_k = \mathbf{x}_k\boldsymbol{\beta}_k \,.$$

Como um exemplo, considere que a distribuição de Y possui um parâmetro de locação (μ), um parâmetro de escala (σ) e dois parâmetros de forma (ν e τ). Neste caso, $\boldsymbol{\theta}_1 = \boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\theta}_2 = \boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\theta}_3 = \boldsymbol{\nu}$ e $\boldsymbol{\theta}_4 = \boldsymbol{\tau}$.

Assim, obtemos o modelo

$$\begin{aligned}
g_1(\boldsymbol{\mu}) &= \boldsymbol{\eta}_1 = \mathbf{x}_1\boldsymbol{\beta}_1; \\
g_1(\boldsymbol{\sigma}) &= \boldsymbol{\eta}_2 = \mathbf{x}_2\boldsymbol{\beta}_2; \\
g_1(\boldsymbol{\nu}) &= \boldsymbol{\eta}_3 = \mathbf{x}_3\boldsymbol{\beta}_3; \\
g_1(\boldsymbol{\tau}) &= \boldsymbol{\eta}_4 = \mathbf{x}_4\boldsymbol{\beta}_4 \,.
\end{aligned}$$

Considerando $\boldsymbol{x}_k = 0$ para $k \geq 2$, obtemos o seguinte modelo:

$$g(\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\eta} = \mathbf{x}\boldsymbol{\beta},$$

que é exatamente a estrutura de um modelo linear generalizado.

2.2 Estimação dos parâmetros

A estimação dos parâmetros do GAMLSS paramétrico é obtida a partir do método da máxima verossimilhança. Entretanto, assim como para MLGs, não há solução analítica para a maximização da função de verossimilhança e, portanto, a solução deve ser obtida a partir de algoritmos numéricos.

Rigby e Stasinopoulos propuseram dois algoritmos para a estimação dos parâmetros de um GAMLSS. O primeiro deles, denominado algoritmo CG, é uma generalização do algoritmo de Cole e Green (1992). O segundo, denominado algoritmo RS, é uma generalização do algoritmo proposto por Rigby e Stasinopoulos (1996a,b).

Na implementação do GAMLSS no *software R*, descrita na Seção 2.3, o *default* é o algoritmo RS. Maiores detalhes desses algoritmos são encontrados em Rigby e Stasinopoulos (2005).

2.3 Implementação no R

Os modelos GAMLSS estão implementados no *software R* a partir de diversos pacotes. Os principais são:

- **gamlss**, que é o pacote original e contém as principais funções de ajuste de modelos;
- **gamlss.dist**, que contém funções relacionadas a todas as distribuições de probabilidade que podem ser modeladas com um GAMLSS;
- **gamlss.cens**, utilizado para modelar variáveis resposta que possuam censura;
- **gamlss.mx**, utilizado para ajustar modelos de mistura finitos;
- **gamlss.nl**, utilizado para ajustar modelos não lineares;
- **gamlss.tr**, utilizado para a modelagem de distribuições truncadas;
- **gamlss.inf**, utilizado para a modelagem de distribuições contínuas inflacionadas de zero;
- **gamlss.add**, utilizado para adicionar termos aditivos no modelo.

Para ajustarmos um modelo da classe GAMLSS paramétrico no R, devemos especificar a distribuição da variável resposta, os parâmetros da distribuição da variável resposta a serem modelados, as expressões do modelo para cada parâmetro e as funções de ligação. Além disso, podemos especificar qual algoritmo será utilizado para estimar o modelo, o número máximo de iterações do algoritmo, um vetor de pesos para as observações e valores iniciais para cada parâmetro. A seguir, apresentamos um exemplo de ajuste de um modelo GAMLSS com o uso da linguagem R.

Primeiramente, devemos instalar e carregar o pacote **gamlss**:

```
install.packages("gamlss")
library(gamlss)
```

Agora, simulamos 100 observações de uma variável resposta Y e de quatro variáveis preditoras, seguindo a distribuição uniforme contínua entre 0 e 1. Além disso, Y segue a distribuição gaussiana inversa, cuja média varia em função de X_1.

```
X1 = runif(100)
X2 = runif(100)
X3 = runif(100)
X4 = runif(100)
Y = rIG(100, mu = exp(5 + 2*X1), sigma = 1)

dados = data.frame(Y,X1,X2,X3,X4)
```

Por fim, o ajuste do modelo GAMLSS é feito, assumindo que Y segue distribuição gaussiana inversa. Em relação a seus parâmetros, queremos modelar μ como função de X_1, X_2, X_3 e X_4, e σ como função de X_3 e X_4. Por fim, utilizamos o logaritmo natural como função de ligação, tanto na modelagem de μ quanto na de σ.

```
modelo = gamlss(Y ~ X1 + X2 + X3 + X4, sigma.formula = ~ X3 + X4,
           family = IG(mu.link = "log", mu.sigma = "log"), data = dados)
```

Ao final, temos um modelo GAMLSS ajustado. Como nesse exemplo geramos Y como sendo função apenas de X_1, o ajuste, conforme esperado, sugere que apenas X_1 deve ser mantida no modelo. Maiores detalhes sobre o pacote **gamlss** podem ser vistos em Stasinopoulos e Rigby (2008).

Capítulo 3

Testes de hipóteses

Em modelos de regressão da classe GAMLSS paramétricos, quatro diferentes estatísticas podem ser utilizadas para testar hipóteses: Wald, razão de verossimilhanças, escore e gradiente (Buse, 1982; Lemonte, 2016).

Quando se deseja testar uma hipótese referente a um único parâmetro do modelo, é bastante conveniente o uso da estatística de Wald, pois ela é função apenas do estimador do parâmetro em teste e do estimador da variância do estimador do parâmetro em teste. Por esse motivo, essa estatística é bastante utilizada para testar hipóteses referentes a um único parâmetro em modelos GAMLSS paramétricos.

3.1 Teste de Wald

Em modelos paramétricos como o GAMLSS paramétrico, frequentemente, desejamos testar se um dos coeficientes do modelo β_{jk} é diferente de zero ou não, isto é, desejamos testar as hipóteses $H_0 : \beta_{jk} = 0$ *versus* $H_1 : \beta_{jk} \neq 0$. Em outras palavras, neste caso, queremos verificar se o parâmetro θ_k (k-ésimo parâmetro associado à distribuição da variável resposta) a ser modelado é ou não função da j-ésima variável preditora. Para testar essas hipóteses, o teste de Wald é comumente utilizado (Turkman e Silva, 2000).

A estatística de teste, denominada estatística de Wald, é dada por

$$T_W = \frac{\hat{\beta}_{jk}^2}{\widehat{Var(\hat{\beta}_{jk})}},$$

em que $\hat{\beta}_{jk}$ é o estimador de máxima verossimilhança de β_{jk} e $\widehat{Var(\hat{\beta}_{jk})}$ é o estimador da variância assintótica de $\hat{\beta}_{jk}$, calculada a partir da inversa da matriz de informação de

Fisher do modelo (Bolfarine e Sandoval, 2001). Além disso, sob a hipótese nula de que $\beta_{jk} = 0$, T_W possui distribuição assintótica qui-quadrado com 1 grau de liberdade, ou seja, ao nível de significância α, rejeita-se H_0 caso o valor observado da estatística seja superior ao quantil $1 - \alpha$ da distribuição χ^2_1.

A raiz quadrada sinalizada de T_W é, usualmente, mais utilizada do que T_W na condução do teste, pois, utilizando a raiz da estatística, também conseguimos realizar testes unicaudais. A raiz quadrada sinalizada de T_W é definida como

$$T_W^{1/2} = \{sinal\ de\ \hat{\beta}_{jk}\}\sqrt{T_W}\ .$$

Dada a distribuição assintótica de T_W, sabemos que, sob a hipótese nula, a sua raiz quadrada sinalizada possui distribuição assintótica normal padrão. Entretanto, também sabemos que, em um modelo de regressão normal, $T_W^{1/2}$ possui distribuição exata t, pois o valor de T_W é calculado a partir da variância estimada de β_{jk}. Dessa forma, em analogia com o caso normal, diversos *softwares* estatísticos optam por aproximar a distribuição da sua raiz quadrada sinalizada pela distribuição t, ao invés da normal padrão.

Como utilizamos a estimativa da variância de $\hat{\beta}_{jk}$ ao invés de seu valor exato, há um aumento na variância de $T_W^{1/2}$. Entretanto, isso não nos garante que a distribuição t seja mais adequada, pois não sabemos se a variância de $T_W^{1/2}$ está mais próxima da variância da normal padrão ou da t, principalmente para menores amostras. Isso, portanto, motiva o objetivo deste trabalho.

3.2 Teste de Anderson-Darling

O teste de Anderson-Darling (Stephens, 1974) é um teste de aderência a distribuições, utilizado para testar as seguintes hipóteses:

H_0: A amostra é proveniente de uma determinada distribuição completamente especificada; e

H_1: A amostra não é proveniente de uma determinada distribuição completamente especificada.

A estatística de teste é definida como

$$A^2 = -n - S\ ,$$

em que S é dado pela expressão

$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{(2i-1)}{n}[ln(F(Y_{(i)} + ln(1 - F(Y_{(n+1-i)}))] \ ,$$

na qual F é a função de distribuição acumulada da distribuição de probabilidade especificada e $Y_{(i)}$ são os dados ordenados da amostra.

Rejeita-se H_0 para valores altos da estatística A^2, isto é, conclui-se que a amostra em questão não é proveniente da distribuição especificada. Os valores críticos para essa estatística são apresentados em Stephens (1986) e o teste está implementado no pacote **goftest** do *software* R (Faraway *et al.*, 2021).

Capítulo 4

Distribuições de probabilidade

Neste Capítulo discutiremos brevemente as distribuições de probabilidade que serão utilizadas no trabalho. Apresentamos as funções densidade de probabilidade dessas distribuições considerando a parametrização utilizada no pacote **gamlss.dist** do software R.

4.1 Distribuição uniforme contínua

Se X segue uma distribuição uniforme contínua com parâmetros a e b, denotamos $X \sim U(a, b)$ e sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x; a, b) = \frac{1}{b-a} \, ,$$

em que $x \in [a, b]$ e $-\infty < a < b < \infty$. Além disso, $E[X] = \frac{1}{2}(a+b)$ e $VAR[X] = \frac{1}{12}(b-a)^2$.

4.2 Distribuição normal

A distribuição normal é uma distribuição de probabilidade contínua e simétrica com suporte na reta real. Se X segue distribuição normal. denotamos $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right],$$

em que x e $\mu\in(-\infty,\infty)$ e $\sigma^2>0$. Além disso, $E[X]=\mu$ e $VAR[X]=\sigma^2$.

4.3 Distribuição gaussiana inversa

A distribuição gaussiana inversa é uma distribuição de probabilidade contínua e assimétrica com suporte nos reais positivos. Se X segue distribuição gaussiana inversa, denotamos $X\sim IG(\mu,\sigma^2)$ e sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2x^3}}\exp\left[-\frac{1}{2\mu^2\sigma^2x}(x-\mu)^2\right],$$

em que $x>0$, $\mu>0$ e $\sigma^2>0$. Além disso, $E[X]=\mu$ e $VAR[X]=\sigma^2\mu^3$.

4.4 Distribuição gama

A distribuição gama também é uma distribuição de probabilidade contínua e assimétrica com suporte nos reais positivos. Se X segue distribuição gama, denotamos $X\sim GA(\mu,\sigma^2)$ e sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{(\sigma^2\mu)^{(\frac{1}{\sigma^2})}\Gamma(\frac{1}{\sigma^2})}x^{(\frac{1}{\sigma^2}-1)}\exp\left(-\frac{x}{\sigma^2\mu}\right),$$

em que $x>0$, $\mu>0$ e $\sigma^2>0$. Além disso, $E[X]=\mu$ e $VAR[X]=\sigma^2\mu^2$.

4.5 Distribuição Bernoulli

A distribuição Bernoulli é uma distribuição de probabilidade discreta, de espaço amostral $\{0,1\}$. A sua função de probabilidade é dada por

$$f(x;p) = p^x(1-p)^{1-x} \ ,$$

onde $x \in \{0,1\}$ e $p \in (0,1)$. Além disso, $E[X] = p$ e $VAR[X] = p(1-p)$.

4.6 Distribuição beta

A distribuição beta é uma distribuição de probabilidade contínua e assimétrica com suporte em (0,1). A sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{(\alpha-1)}(1-x)^{\beta-1} \ ,$$

onde $0 < x < 1$ e α e $\beta > 0$. Além disso, $E[X] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ e $VAR[X] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$.

4.7 Distribuição binomial negativa

Por fim, a distribuição binomial negativa é uma distribuição de probabilidade discreta e com suporte nos naturais. Sua função de probabilidade é dada por

$$f(x;r,p) = \binom{x+r-1}{x}(1-p)^x p^r \ ,$$

onde $x \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$ e $r > 0$, e $p \in (0,1)$. Além disso, $E[X] = \frac{rp}{1-p}$ e $VAR[X] = \frac{rp}{(1-p)^2}$.

Capítulo 5

Estudos de simulação

Conforme citado anteriormente, o principal objetivo deste trabalho é verificar se a distribuição da raiz quadrada sinalizada da estatística de Wald é melhor aproximada pela distribuição normal padrão ou pela distribuição t. Para isso, são realizados estudos de simulação de Monte Carlo, consistindo em amostragens aleatórias massivas para estudar a estimação de parâmetros. As simulações foram feitas com o uso do *software R*, utilizando diferentes distribuições para a variável resposta: distribuição gaussiana inversa; distribuição Bernoulli, distribuição beta, distribuição binomial negativa.

5.1 Distribuição gaussiana inversa

Primeiramente, queremos estudar a distribuição da raiz quadrada sinalizada da estatística de Wald para modelos GAMLSS, nos quais a variável resposta segue uma distribuição gaussiana inversa.

Para isto, determinamos 4 cenários de simulação. Em todos eles, as observações da variável resposta provêm de uma distribuição gaussiana inversa e, para cada cenário, alteramos as distribuições das variáveis preditoras ou o valor do parâmetro de escala (σ) da variável resposta em relação ao Cenário 1. Na Tabela 5.1 são apresentadas as especificações de cada cenário.

Além disso, replicamos cada cenário de simulação para tamanhos de amostra iguais a 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 e 100, nos quais consideramos os valores das variáveis preditoras fixos.

A partir do algoritmo de simulação de Monte Carlo, realizamos 5000 repetições para a geração de amostras e, para cada uma delas, ajustamos um modelo GAMLSS e calculamos o valor da estatística de Wald referente ao teste $H_0 : \beta_3 = 0$. Isto é, para cada combinação entre cenário e tamanho de amostra, obtemos uma amostra de 5000 valores para a estatística de Wald. A partir disso, com o uso do teste de Anderson-Darling, comparamos a aderência da raiz quadrada sinalizada da estatística de Wald às distribuições normal padrão e t. Também calculamos a taxa de rejeição de H_0 para o teste de Wald considerando níveis de significância iguais a 10%, 5% e 1%. Quando β_3 é de fato zero, isto é, H_0 é verdadeira, esperamos que as taxas de rejeição calculadas sejam próximas do nível de significância especificado.

Por fim, para compararmos o poder do teste de Wald para as distribuições normal padrão e t, estudamos os mesmos quatro cenários já especificados, mas considerando dois outros valores para β_3, que são 0.25 e 0.5.

Tabela 5.1: Cenários de simulação para a distribuição gaussiana inversa.

Cenários	**Função de ligação**	**Coeficientes**	**Covariáveis**	σ
1	$log(\mu_t)$	$\beta_0 = 3$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 1$ e $\beta_3 = 0$	$X_1 \sim U(0,1)$, $X_2 \sim U(0,1)$ e $X_3 \sim U(0,1)$	0.01
2	$log(\mu_t)$	$\beta_0 = 3$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 1$ e $\beta_3 = 0$	$X_1 \sim U(0,1)$, $X_2 \sim U(0,1)$ e $X_3 \sim U(0,1)$	0.03
3	$log(\mu_t)$	$\beta_0 = 3$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 1$ e $\beta_3 = 0$	$X_1 \sim N(0.5, \frac{1}{12})$, $X_2 \sim GA(0.5, \frac{1}{3})$ e $X_3 \sim GA(0.5, \frac{1}{3})$	0.01
4	$log(\mu_t)$	$\beta_0 = 3$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 1$ e $\beta_3 = 0$	$X_1 \sim N(0.5, \frac{1}{12})$, $X_2 \sim IG(0.5, \frac{2}{3})$ e $X_3 \sim IG(0,5, \frac{2}{3})$	0.01
5	$log(\mu_t)$	$\beta_0 = 3$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 1$ e $\beta_3 = 0$	$X_1 \sim Bern(0.5)$, $X_2 \sim Bern(0.5)$ e $X_3 \sim Bern(0.5)$	0.1
6	$log(\mu_t)$	$\beta_0 = 3$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 1$ e $\beta_3 = 0$	$X_1 \sim U(0,1)$, $X_2 \sim Bern(0.5)$ e $X_3 \sim Bern(0.5)$	0.1

Segue abaixo um passo a passo de como foi feita a simulação, utilizando como exemplo o cenário 1 e o tamanho amostral igual a 10.

- Primeiramente, fixamos os valores dos betas e de sigma especificados no cenário.

- Geramos três valores provenientes de distribuições uniformes (0,1).

- Dada a função de ligação, sabemos que o modelo tem a forma

$$log(\boldsymbol{\mu}) = \beta_0 + \beta_1\mathbf{x_1} + \beta_2\mathbf{x_2} + \beta_3\mathbf{x_3} \ .$$

  Portanto, com a inversa da função de ligação, geramos um valor de μ, que é justamente o parâmetro da distribuição gaussiana inversa que desejamos simular.

- Com μ que geramos e com σ já fixado anteriormente, geramos um valor proveniente de uma distribuição gaussiana inversa com parâmetros μ e σ.

- Repetimos todo o o processo anterior n vezes, onde n se refere ao tamanho amostral em questão, que nesse caso é igual a 10. Portanto, temos 10 valores gerados a partir de uma gaussiana inversa e 10 vetores de valores das variáveis preditoras, que seguem distribuição uniforme.

- Com essa amostra gerada, ajustamos um modelo GAMLSS no qual assumimos que a variável resposta segue distribuição gaussiana inversa.

- Repetimos todo o processo anterior 5000 vezes. No fim, temos 5000 modelos GAMLSS ajustados.

- Para cada um dos 5000 modelos, calculamos a raiz quadrada sinalizada da estatística de Wald referente a β_3. Isto é, a partir do procedimento descrito, obtemos uma amostra de tamanho 5000 de valores da raiz quadrada sinalizada da estatística de Wald para β_3.

- Repetimos todo o processo anterior para os outros tamanhos amostrais.

5.1.1 Uso das funções `glm()` e `gamlss()`

Como a distribuição gaussiana inversa pertence à família exponencial, podemos utilizar dois diferentes métodos para o ajuste dos modelos. Um deles é a função `gamlss()`, que faz o ajuste do modelo GAMLSS propriamente dito, e o outro é a função `glm()`, que ajusta um modelo linear generalizado. Entretanto, existem algumas diferenças no uso desses dois métodos.

Primeiramente, a função `glm()` realiza a estimação do parâmetro de dispersão a partir do método dos momentos, enquanto a `gamlss()` utiliza o método da máxima verossimilhança, o que pode causar diferenças nas estimativas dos parâmetros e na performance de cada modelo.

Em segundo lugar, a função `glm()`, em analogia ao modelo linear geral, calcula os graus de liberdade da distribuição t que busca aproximar a distribuição de $T_W^{1/2}$ como o tamanho da amostra menos a quantidade de parâmetros do modelo utilizados para modelar a média da variável resposta. Como em todos os cenários existem três variáveis preditoras e é utilizado também um intercepto para modelar a média, há $n - 4$ graus de liberdade.

Na função `gamlss()`, em contrapartida, além de serem descontados dos graus de liberdade os parâmetros do submodelo da média, também são considerados os outros parâmetros da distribuição da variável resposta, além da média. Portanto, como a gaussiana inversa também possui o parâmetro de escala σ, se perde um grau de liberdade a mais no modelo, restando $n-5$.

Considerando esses pontos, decidimos, apenas para o primeiro cenário, calcular os resultados considerando as quatro combinações de funções e graus de liberdade, isto é:

- Ajustar os modelos com a função `gamlss()` e considerar $n-5$ graus de liberdade;
- Ajustar os modelos com a função `gamlss()` e considerar $n-4$ graus de liberdade;
- Ajustar os modelos com a função `glm()` e considerar $n-5$ graus de liberdade;
- Ajustar os modelos com a função `glm()` e considerar $n-4$ graus de liberdade.

5.1.2 Resultados considerando $\beta_3 = 0$

Nesta seção, são apresentadas as tabelas com os resultados das simulações para cada cenário considerando $\beta_3 = 0$. Apresentamos, para as distribuições normal padrão e t, a estatística do teste de Anderson-Darling e seu valor-p, além das taxas de rejeição de H_0 do teste de Wald.

Analisando as Tabelas 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5, notamos uma clara diferença entre as funções `glm()` e `gamlss()`, pois os valores-p do teste de Anderson-Darling são substancialmente maiores quando consideramos a primeira função. Além disso, as taxas de rejeição de H_0 do teste de Wald convergem mais rapidamente para os respectivos níveis de significância especificados.

Comparando as Tabelas 5.3 e 5.5, na linha correspondente a $n = 30$, por exemplo, observamos que, quando utilizamos a função `gamlss()`, o valor-p do teste de Anderson-Darling para a distribuição t é de 0.0019 e a taxa de rejeição para 5% é de 0.0620. Entretanto, quando utilizamos a função `glm()`, o valor-p do teste de Anderson-Darling é igual a 0.4653 e a taxa de rejeição para 5% é igual a 0.0480. Portanto, os resultados sugerem que, para modelos de regressão com distribuição gaussiana inversa e σ fixo, é melhor estimar σ pelo método dos momentos.

Em relação aos graus de liberdade da distribuição t, entretanto, não há uma diferença significativa, principalmente para os maiores tamanhos de amostra. Por exemplo, comparando, agora, as Tabelas 5.4 e 5.5 para $n = 30$, observa-se que, com $n-5$ graus de liberdade para a distribuição t, o valor-p do teste de Anderson-Darling é de 0.4535 e a taxa de rejeição para 5% é de 0.0478, que são valores muito próximos a quando consideramos $n-4$ graus de liberdade.

Assim, a partir desses pontos expostos, seguimos com os outros cenários considerando apenas a função `glm()` pelo método de estimação de σ e $n-4$ graus de liberdade, em analogia com o modelo linear geral.

Observa-se também, em todos os cenários, principalmente para os menores tamanhos amostrais, que os valores-p do teste de Anderson-Darling são maiores e as taxas de rejeição convergem mais rápido para o nível de significância especificado quando consideramos a distribuição t ao invés da normal padrão. Portanto, concluímos que, para os cenários especificados, quando a variável resposta segue distribuição gaussiana inversa e o tamanho amostral é pequeno, a distribuição da raiz quadrada sinalizada da estatística de Wald, sob H_0, é melhor aproximada pela distribuição t do que pela normal padrão. Em tamanhos amostrais maiores, vemos que praticamente não há diferenças entre as distribuições normal padrão e t.

Em relação à distribuição t, pelas Tabelas 5.6 a 5.10, nota-se uma diferença entre os resultados quando mudamos o cenário. Os valores da estatística do teste de Anderson-Darling são, em geral, maiores para um valor mais alto de σ (Cenário 2). Consequentemente, o tamanho da amostra para que a distribuição t seja uma boa aproximação da distribuição de $T_W^{1/2}$, sob H_0, aumenta. No entanto, mesmo nesse cenário, a distribuição de $T_W^{1/2}$ sob H_0 é melhor aproximada pela t do que pela normal padrão. Além disso, nos Cenários 5 e 6, os valores-p são maiores ainda, o que indica uma maior aderência à distribuição t.

Tabela 5.2: Resultados das simulações para a distribuição gaussiana inversa utilizando `gamlss()` e considerando $n-5$ graus de liberdade - Cenário 1 com $\beta_3 = 0$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	234.7653	< 0.0001	0.2452	0.1732	0.0916	65.6118	< 0.0001	0.1632	0.0924	0.0198
20	46.4391	< 0.0001	0.1718	0.1096	0.0422	21.4848	< 0.0001	0.1482	0.0874	0.0200
30	11.5766	< 0.0001	0.1284	0.0732	0.0260	5.1738	0.0024	0.1182	0.0616	0.0172
40	8.2238	0.0001	0.1248	0.0628	0.0172	5.4773	0.0017	0.1142	0.0550	0.0128
50	4.0874	0.0079	0.1194	0.0626	0.0186	2.0976	0.0812	0.1098	0.0570	0.0150
60	3.9192	0.0096	0.1114	0.0602	0.0178	2.9344	0.0296	0.1058	0.0552	0.0144
70	5.0171	0.0028	0.1214	0.0650	0.0204	3.3792	0.0176	0.1152	0.0600	0.0176
80	1.6819	0.1384	0.1132	0.0600	0.0120	1.0583	0.3281	0.1078	0.0564	0.0104
90	1.5586	0.1631	0.1068	0.0582	0.0156	1.0410	0.3364	0.1038	0.0544	0.0126
100	1.5621	0.1623	0.1066	0.0558	0.0114	1.1199	0.3001	0.1034	0.0514	0.0098

Tabela 5.3: Resultados das simulações para a distribuição gaussiana inversa utilizando `gamlss()` e considerando $n-4$ graus de liberdade - Cenário 1 com $\beta_3 = 0$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	234.7653	$<$ 0.0001	0.2452	0.1732	0.0916	81.0167	$<$ 0.0001	0.1754	0.1042	0.0272
20	46.4391	$<$ 0.0001	0.1718	0.1096	0.0422	22.6376	$<$ 0.0001	0.1500	0.0890	0.0216
30	11.5766	$<$ 0.0001	0.1284	0.0732	0.0260	5.3557	0.0019	0.1188	0.0620	0.0178
40	8.2238	0.0001	0.1248	0.0628	0.0172	5.5331	0.0016	0.1144	0.0552	0.0128
50	4.0874	0.0079	0.1194	0.0626	0.0186	2.1311	0.0779	0.1100	0.0572	0.0152
60	3.9192	0.0096	0.1114	0.0602	0.0178	2.9470	0.0291	0.1058	0.0552	0.0144
70	5.0171	0.0028	0.1214	0.0650	0.0204	3.4005	0.0172	0.1152	0.0604	0.0176
80	1.6819	0.1384	0.1132	0.0600	0.0120	1.0646	0.3251	0.1080	0.0566	0.0104
90	1.5586	0.1631	0.1068	0.0582	0.0156	1.0457	0.3342	0.1038	0.0544	0.0128
100	1.5621	0.1623	0.1066	0.0558	0.0114	1.1235	0.2985	0.1034	0.0514	0.0098

Tabela 5.4: Resultados das simulações para a distribuição gaussiana inversa utilizando `glm()` e considerando $n-5$ graus de liberdade - Cenário 1 com $\beta_3 = 0$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	29.2139	$<$ 0.0001	0.1466	0.0988	0.0420	5.3012	0.0021	0.0902	0.0422	0.0064
20	7.6211	0.0002	0.1322	0.0812	0.0236	0.7608	0.5102	0.1096	0.0592	0.0106
30	1.5670	0.1613	0.1088	0.0576	0.0194	0.8394	0.4535	0.0950	0.0478	0.0126
40	3.6178	0.0134	0.1062	0.0512	0.0126	3.6753	0.0126	0.0962	0.0460	0.0098
50	0.6901	0.5671	0.1024	0.0524	0.0156	0.4654	0.7822	0.0950	0.0488	0.0112
60	2.3639	0.0584	0.0996	0.0520	0.0138	2.4959	0.0498	0.0942	0.0470	0.0110
70	1.8398	0.1127	0.1120	0.0592	0.0174	1.0847	0.3157	0.1064	0.0540	0.0138
80	0.6437	0.6077	0.1024	0.0538	0.0106	0.6410	0.6101	0.0978	0.0492	0.0090
90	0.7242	0.5389	0.1004	0.0536	0.0124	0.6850	0.5715	0.0982	0.0496	0.0106
100	0.6119	0.6368	0.0996	0.0502	0.0100	0.5581	0.6885	0.0958	0.0470	0.0082

Tabela 5.5: Resultados das simulações para a distribuição gaussiana inversa utilizando `glm()` e considerando $n-4$ graus de liberdade - Cenário 1 com $\beta_3 = 0$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	29.2139	$<$ 0.0001	0.1466	0.0988	0.0420	4.6893	0.0040	0.0998	0.0488	0.0102
20	7.6211	0.0002	0.1322	0.0812	0.0236	0.9474	0.3861	0.1106	0.0602	0.0114
30	1.5670	0.1613	0.1088	0.0576	0.0194	0.8221	0.4653	0.0960	0.0480	0.0126
40	3.6178	0.0134	0.1062	0.0512	0.0126	3.6580	0.0128	0.0972	0.0460	0.0098
50	0.6901	0.5671	0.1024	0.0524	0.0156	0.4624	0.7853	0.0950	0.0488	0.0112
60	2.3639	0.0584	0.0996	0.0520	0.0138	2.4894	0.0502	0.0942	0.0470	0.0110
70	1.8398	0.1127	0.1120	0.0592	0.0174	1.0931	0.3119	0.1066	0.0540	0.0138
80	0.6437	0.6077	0.1024	0.0538	0.0106	0.6393	0.6116	0.0978	0.0492	0.0090
90	0.7242	0.5389	0.1004	0.0536	0.0124	0.6842	0.5721	0.0982	0.0496	0.0106
100	0.6119	0.6368	0.0996	0.0502	0.0100	0.5578	0.6888	0.0958	0.0470	0.0082

Tabela 5.6: Resultados das simulações para a distribuição gaussiana inversa - Cenário 2 com $\beta_3 = 0$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	61.2934	< 0.0001	0.1724	0.1164	0.0492	12.4476	< 0.0001	0.1180	0.0586	0.0124
20	18.6022	< 0.0001	0.1468	0.0850	0.0266	6.8400	0.0004	0.1262	0.0652	0.0154
30	7.2557	0.0003	0.1202	0.0694	0.0214	3.9395	0.0093	0.1118	0.0552	0.0126
40	5.4246	0.0018	0.1202	0.0596	0.0148	3.9931	0.0088	0.1104	0.0516	0.0102
50	2.8637	0.0321	0.1146	0.0612	0.0174	1.5132	0.1734	0.1074	0.0556	0.0150
60	3.4602	0.0161	0.1090	0.0610	0.0140	2.6437	0.0417	0.1028	0.0534	0.0098
70	4.5616	0.0047	0.1190	0.0662	0.0178	3.1722	0.0224	0.1120	0.0620	0.0140
80	1.1404	0.2913	0.1104	0.0598	0.0134	0.6019	0.6462	0.1058	0.0570	0.0108
90	1.7658	0.1240	0.1038	0.0524	0.0126	1.7203	0.1316	0.1014	0.0498	0.0098
100	1.2278	0.2572	0.1072	0.0530	0.0086	1.0364	0.3387	0.1030	0.0504	0.0078

Tabela 5.7: Resultados das simulações para a distribuição gaussiana inversa - Cenário 3 com $\beta_3 = 0$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	> 100000	< 0.0001	0.1526	0.0944	0.0416	2.9764	0.0281	0.0962	0.0496	0.0090
20	8.3172	0.0001	0.1286	0.0750	0.0282	1.4337	0.1931	0.1092	0.0550	0.0120
30	2.4808	0.0507	0.1154	0.0630	0.0164	1.5496	0.1651	0.1022	0.0506	0.0098
40	1.1725	0.2782	0.1064	0.0560	0.0126	0.7808	0.4951	0.0992	0.0472	0.0082
50	1.3053	0.2306	0.1076	0.0576	0.0116	0.8901	0.4204	0.1028	0.0508	0.0090
60	0.7469	0.5209	0.1004	0.0524	0.0118	0.5424	0.7040	0.0954	0.0480	0.0096
70	2.3537	0.0592	0.1090	0.0574	0.0130	2.0712	0.0840	0.1044	0.0520	0.0116
80	0.8300	0.4599	0.1074	0.0580	0.0092	0.6053	0.6430	0.1034	0.0542	0.0072
90	1.1715	0.2786	0.1070	0.0542	0.0116	0.8125	0.4721	0.1026	0.0510	0.0096
100	0.6290	0.6210	0.0994	0.0514	0.0104	0.7603	0.5106	0.0964	0.0490	0.0092

Tabela 5.8: Resultados das simulações para a distribuição gaussiana inversa - Cenário 4 com $\beta_3 = 0$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	> 100000	< 0.0001	0.1540	0.0962	0.0416	2.9440	0.0292	0.0982	0.0516	0.0094
20	8.2703	0.0001	0.1304	0.0760	0.0274	1.3978	0.2029	0.1078	0.0560	0.0136
30	2.4857	0.0504	0.1160	0.0608	0.0160	1.5195	0.1719	0.1018	0.0506	0.0094
40	1.0330	0.3404	0.1088	0.0550	0.0144	0.5886	0.6588	0.1010	0.0478	0.0102
50	1.6570	0.1431	0.1076	0.0574	0.0106	1.3173	0.2268	0.1014	0.0498	0.0084
60	0.9108	0.4076	0.1032	0.0526	0.0120	0.6961	0.5621	0.0972	0.0486	0.0084
70	2.8676	0.0320	0.1088	0.0580	0.0120	2.5712	0.0455	0.1038	0.0534	0.0102
80	0.9625	0.3776	0.1064	0.0584	0.0100	0.7285	0.5355	0.1030	0.0536	0.0080
90	1.0060	0.3542	0.1072	0.0532	0.0116	0.6701	0.5843	0.1030	0.0498	0.0096
100	0.6963	0.5619	0.1016	0.0528	0.0118	0.7982	0.4823	0.0982	0.0506	0.0098

Tabela 5.9: Resultados das simulações para a distribuição gaussiana inversa - Cenário 5 com $\beta_3 = 0$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	25.0632	< 0.0001	0.1506	0.0978	0.0444	0.5753	0.6717	0.1002	0.0534	0.0088
20	6.1413	0.0008	0.1272	0.0778	0.0252	0.6876	0.5693	0.1062	0.0570	0.0120
30	1.7395	0.1284	0.1104	0.0620	0.0154	0.6988	0.5598	0.0978	0.0504	0.0104
40	4.1557	0.0073	0.1036	0.0536	0.0120	3.8923	0.0098	0.0966	0.0466	0.0078
50	0.9936	0.3606	0.1088	0.0574	0.0118	0.7020	0.5572	0.1020	0.0516	0.0092
60	1.0239	0.3450	0.1036	0.0546	0.0110	0.9593	0.3794	0.0984	0.0506	0.0090
70	1.3498	0.2168	0.1100	0.0578	0.0152	0.7847	0.4922	0.1066	0.0536	0.0130
80	1.1012	0.3083	0.1064	0.0572	0.0110	0.7629	0.5085	0.1032	0.0528	0.0102
90	0.5785	0.6685	0.1034	0.0566	0.0116	0.4725	0.7750	0.0984	0.0522	0.0104
100	0.3577	0.8894	0.1030	0.0546	0.0144	0.2984	0.9394	0.1006	0.0532	0.0130

Tabela 5.10: Resultados das simulações para a distribuição gaussiana inversa - Cenário 6 com $\beta_3 = 0$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	> 100000	< 0.0001	0.1472	0.0968	0.0432	0.4289	0.8196	0.0982	0.0506	0.0084
20	5.3091	0.0020	0.1276	0.0692	0.0240	0.4436	0.8046	0.1070	0.0506	0.0114
30	2.0795	0.0831	0.1074	0.0594	0.0162	1.0422	0.3359	0.0950	0.0500	0.0100
40	4.5547	0.0047	0.1048	0.0556	0.0128	4.4063	0.0055	0.0972	0.0472	0.0084
50	0.8586	0.4406	0.1050	0.0568	0.0140	0.6813	0.5747	0.0992	0.0510	0.0118
60	1.1334	0.2943	0.1042	0.0562	0.0132	0.8941	0.4179	0.0984	0.0502	0.0098
70	2.0101	0.0907	0.1082	0.0584	0.0166	1.2468	0.2504	0.1028	0.0542	0.0136
80	0.9256	0.3988	0.1106	0.0548	0.0114	0.5157	0.7308	0.1068	0.0508	0.0098
90	0.5994	0.6485	0.1060	0.0564	0.0120	0.4418	0.8065	0.1022	0.0536	0.0106
100	0.3468	0.8994	0.1026	0.0536	0.0126	0.3458	0.9002	0.0992	0.0510	0.0102

5.1.3 Resultados considerando $\beta_3 \neq 0$

Nesta Seção são apresentados os resultados para a comparação do poder do teste de Wald, considerando $\beta_3 = 0.25$ e $\beta_3 = 0.5$.

Nota-se, para todos os cenários, que a hipótese nula do teste de Anderson-Darling é sempre rejeitada, tanto para a distribuição normal padrão quanto para a t. Isto já é esperado, pois, como β_3 é diferente de zero, ou seja, H_0 para o teste de Wald não é verdadeira, não se sabe a distribuição da estatística de teste. Além disso, o poder do teste de Wald é maior quando $\beta_3 = 0.5$ do que quando $\beta_3 = 0.25$. Isso também é esperado, pois, quanto maior a distância entre o valor real do parâmetro e valor especificado em H_0, maiores são as chances de rejeitarmos a hipótese nula.

Observa-se, também, que o poder do teste de Wald é ligeiramente maior quando consideramos a distribuição normal padrão ao invés da t. Isso se dá pois, para a normal padrão, as taxas de rejeição de H_0 são consistentemente mais próximas de 1, principalmente, para as amostras menores. No entanto, isso não significa que deve-se escolher a normal padrão para aproximar a distribuição de $T_W^{1/2}$, pois, quando $\beta_3 = 0$, as taxas de rejeição de H_0 em amostras pequenas, usando esta distribuição, são consideravelmente maiores (e mais distantes do nível de significância especificado) do que quando usamos a t. Além disso, é importante notar que, mesmo para tamanhos de amostra medianos, o teste de Wald quando consideramos a distribuição t também apresenta um alto poder.

Em relação a diferenças entre os cenários, vemos que o teste de Wald apresenta um poder menor quando aumentamos o valor de σ, tanto para a normal padrão quanto para a t. Novamente, a alteração das distribuições das variáveis preditoras não provoca uma grande alteração nos resultados. Portanto, baseando-se nos resultados das Seções 4.2 e 4.3, quando a variável resposta segue distribuição gaussiana inversa, a melhor distribuição a ser utilizada para aproximar a distribuição de $T_W^{1/2}$ é a distribuição t.

Tabela 5.11: Resultados das simulações para a distribuição gaussiana inversa - Cenário 1 com $\beta_3 = 0.25$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	> 100000	< 0.0001	0.4940	0.3864	0.2226	4828.8543	< 0.0001	0.3912	0.2504	0.0704
20	> 100000	< 0.0001	0.8700	0.7986	0.6066	15530.8134	< 0.0001	0.8470	0.7546	0.4756
30	> 100000	< 0.0001	0.9856	0.9686	0.8946	28209.9516	< 0.0001	0.9830	0.9614	0.8476
40	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	0.9994	55843.6872	< 0.0001	1.0000	1.0000	0.9982
50	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
60	> 100000	< 0.0001	0.9996	0.9994	0.9960	53302.4556	< 0.0001	0.9996	0.9992	0.9944
70	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	0.9998	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	0.9996
80	> 100000	< 0.0001	1.0000	0.9998	0.9986	> 100000	< 0.0001	1.0000	0.9996	0.9984
90	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
100	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000

Tabela 5.12: Resultados das simulações para a distribuição gaussiana inversa - Cenário 1 com $\beta_3 = 0.5$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	> 100000	< 0.0001	0.8842	0.8202	0.6334	13266.0811	< 0.0001	0.8232	0.6772	0.3262
20	> 100000	< 0.0001	0.9998	0.9988	0.9910	40070.5415	< 0.0001	0.9996	0.9974	0.9812
30	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	70597.4128	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
40	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
50	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
60	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
70	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
80	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
90	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
100	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000

Tabela 5.13: Resultados das simulações para a distribuição gaussiana inversa - Cenário 2 com $\beta_3 = 0.25$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	> 100000	< 0.0001	0.2172	0.1446	0.0626	530.7143	< 0.0001	0.1484	0.0758	0.0138
20	4851.3304	< 0.0001	0.4212	0.3176	0.1638	4337.5063	< 0.0001	0.3858	0.2684	0.1030
30	7088.5295	< 0.0001	0.5272	0.4152	0.2192	6540.2320	< 0.0001	0.5052	0.3802	0.1752
40	5636.6004	< 0.0001	0.4648	0.3418	0.1634	5350.3513	< 0.0001	0.4474	0.3182	0.1330
50	9791.9641	< 0.0001	0.6444	0.5278	0.3086	9275.3082	< 0.0001	0.6310	0.5072	0.2766
60	10826.9994	< 0.0001	0.6836	0.5660	0.3480	10328.2011	< 0.0001	0.6742	0.5492	0.3140
70	9929.3423	< 0.0001	0.6536	0.5362	0.3072	9556.4723	< 0.0001	0.6444	0.5240	0.2844
80	14841.8897	< 0.0001	0.8002	0.7052	0.4752	14222.9483	< 0.0001	0.7936	0.6970	0.4484
90	14100.4145	< 0.0001	0.7886	0.6814	0.4488	13604.6871	< 0.0001	0.7834	0.6722	0.4284
100	19979.9620	< 0.0001	0.8966	0.8308	0.6270	19159.9451	< 0.0001	0.8940	0.8214	0.6060

Tabela 5.14: Resultados das simulações para a distribuição gaussiana inversa - Cenário 2 com $\beta_3 = 0.5$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	> 100000	< 0.0001	0.3170	0.2350	0.1164	1951.4775	< 0.0001	0.2394	0.1384	0.0300
20	8754.6503	< 0.0001	0.6094	0.4918	0.2754	7617.9393	< 0.0001	0.5764	0.4252	0.1894
30	> 100000	< 0.0001	0.8396	0.7560	0.5524	15176.1090	< 0.0001	0.8252	0.7228	0.4794
40	> 100000	< 0.0001	0.9688	0.9348	0.8242	25926.1214	< 0.0001	0.9650	0.9236	0.7888
50	> 100000	< 0.0001	0.9778	0.9572	0.8630	28303.0335	< 0.0001	0.9764	0.9510	0.8336
60	24219.5408	< 0.0001	0.9328	0.8864	0.7356	22311.2962	< 0.0001	0.9286	0.8780	0.7068
70	> 100000	< 0.0001	0.9912	0.9794	0.9272	35430.7359	< 0.0001	0.9908	0.9780	0.9146
80	> 100000	< 0.0001	0.9960	0.9900	0.9530	38862.8965	< 0.0001	0.9956	0.9890	0.9444
90	37140.5781	< 0.0001	0.9890	0.9796	0.9138	34366.1947	< 0.0001	0.9890	0.9778	0.9044
100	> 100000	< 0.0001	0.9998	0.9992	0.9932	> 100000	< 0.0001	0.9998	0.9992	0.9916

Tabela 5.15: Resultados das simulações para a distribuição gaussiana inversa - Cenário 3 com $\beta_3 = 0.25$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	> 100000	< 0.0001	0.6474	0.5390	0.3520	7371.0769	< 0.0001	0.5448	0.3862	0.1372
20	> 100000	< 0.0001	0.8678	0.8026	0.6044	15514.1940	< 0.0001	0.8496	0.7510	0.4838
30	> 100000	< 0.0001	0.9786	0.9606	0.8720	27203.0288	< 0.0001	0.9766	0.9496	0.8288
40	> 100000	< 0.0001	0.9470	0.8988	0.7434	22006.1753	< 0.0001	0.9426	0.8888	0.6966
50	> 100000	< 0.0001	1.0000	0.9998	0.9984	57328.5760	< 0.0001	1.0000	0.9998	0.9978
60	> 100000	< 0.0001	0.9990	0.9968	0.9826	45002.2265	< 0.0001	0.9986	0.9956	0.9800
70	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	67078.4032	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
80	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
90	> 100000	< 0.0001	1.0000	0.9998	0.9996	67025.1517	< 0.0001	1.0000	0.9998	0.9996
100	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000

Tabela 5.16: Resultados das simulações para a distribuição gaussiana inversa - Cenário 3 com $\beta_3 = 0.5$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	> 100000	< 0.0001	0.9740	0.9470	0.8468	18607.0593	< 0.0001	0.9492	0.8732	0.5652
20	> 100000	< 0.0001	0.9998	0.9992	0.9934	40004.2519	< 0.0001	0.9996	0.9980	0.9810
30	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	66605.6422	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
40	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	0.9996	59648.0654	< 0.0001	1.0000	1.0000	0.9996
50	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
60	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
70	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
80	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
90	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
100	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000

Tabela 5.17: Resultados das simulações para a distribuição gaussiana inversa - Cenário 4 com $\beta_3 = 0.25$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	> 100000	< 0.0001	0.5698	0.4642	0.2924	6096.9884	< 0.0001	0.4708	0.3220	0.1096
20	> 100000	< 0.0001	0.8196	0.7200	0.5072	13086.1279	< 0.0001	0.7892	0.6688	0.3882
30	> 100000	< 0.0001	0.9740	0.9504	0.8514	25860.8230	< 0.0001	0.9714	0.9402	0.8020
40	22761.9735	< 0.0001	0.9288	0.8740	0.6952	20290.5019	< 0.0001	0.9230	0.8562	0.6436
50	> 100000	< 0.0001	1.0000	0.9998	0.9988	58293.7510	< 0.0001	1.0000	0.9998	0.9984
60	> 100000	< 0.0001	0.9978	0.9938	0.9714	40886.9170	< 0.0001	0.9978	0.9926	0.9648
70	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	67705.2137	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
80	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
90	> 100000	< 0.0001	0.9998	0.9998	0.9986	61498.5674	< 0.0001	0.9998	0.9998	0.9978
100	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000

Tabela 5.18: Resultados das simulações para a distribuição gaussiana inversa - Cenário 4 com $\beta_3 = 0.5$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	> 100000	< 0.0001	0.9420	0.8964	0.7610	16116.5771	< 0.0001	0.8998	0.7918	0.4566
20	> 100000	< 0.0001	0.9984	0.9958	0.9774	34982.5995	< 0.0001	0.9974	0.9934	0.9486
30	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	63565.2263	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
40	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	0.9994	55018.4569	< 0.0001	1.0000	1.0000	0.9992
50	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
60	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
70	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
80	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
90	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
100	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000

Tabela 5.19: Resultados das simulações para a distribuição gaussiana inversa - Cenário 5 com $\beta_3 = 0.25$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	> 100000	< 0.0001	0.9974	0.9922	0.9566	23551.7038	< 0.0001	0.9926	0.9682	0.7774
20	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	0.9994	49923.8308	< 0.0001	1.0000	1.0000	0.9978
30	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	76654.3316	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
40	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
50	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
60	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
70	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
80	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
90	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
100	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000

Tabela 5.20: Resultados das simulações para a distribuição gaussiana inversa - Cenário 5 com $\beta_3 = 0.5$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	40839.9024	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
20	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	90541.7350	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
30	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
40	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
50	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
60	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
70	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
80	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
90	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
100	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000

Tabela 5.21: Resultados das simulações para a distribuição gaussiana inversa - Cenário 6 com $\beta_3 = 0.25$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	> 100000	< 0.0001	0.9876	0.9670	0.8938	20042.2477	< 0.0001	0.9676	0.9130	0.6312
20	> 100000	< 0.0001	0.9992	0.9976	0.9886	38182.6463	< 0.0001	0.9982	0.9968	0.9758
30	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	61179.8104	< 0.0001	1.0000	1.0000	0.9998
40	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
50	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
60	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
70	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
80	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
90	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
100	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000

Tabela 5.22: Resultados das simulações para a distribuição gaussiana inversa - Cenário 6 com $\beta_3 = 0.5$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	36927.9083	< 0.0001	1.0000	1.0000	0.9960
20	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	76057.7743	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
30	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
40	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
50	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
60	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
70	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
80	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
90	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
100	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000

5.2 Distribuição Bernoulli

Agora, desejamos estudar a distribuição da raiz quadrada sinalizada da estatística de Wald para modelos GAMLSS, nos quais a variável resposta segue uma distribuição Bernoulli.

As simulações são conduzidas da mesma forma que foi feito para a distribuição gaussiana inversa. Dessa forma, determinamos também 5 cenários de simulação, apresentados na Tabela 5.23. É importante notar que, especialmente para a distribuição Bernoulli, consideramos apenas uma variável preditora nos modelos, para garantir que o algoritmo de estimação dos parâmetros do modelo convergisse em todos os cenários.

Tabela 5.23: Cenários de simulação para a distribuição Bernoulli.

Cenário	**Função de ligação**	**Coeficientes**	**Covariáveis**
1	Logito	$\beta_0 = 0,\ \beta_1 = 0$	$X_1 \sim Bern(0.5)$
2	Logito	$\beta_0 = 0,\ \beta_1 = 0$	$X_1 \sim U(0, 1)$
3	Probito	$\beta_0 = 0,\ \beta_1 = 0$	$X_1 \sim U(0, 1)$
4	Complemento log - log	$\beta_0 = 0,\ \beta_1 = 0$	$X_1 \sim U(0, 1)$
5	Logito	$\beta_0 = 0,\ \beta_1 = 0$	$X_1 \sim GA(0.5, \frac{1}{3})$

5.2.1 Resultados considerando $\beta_1 = 0$

Analisando as Tabelas 5.24 a 5.28, observa-se o contrário dos resultados que foram apresentados para a gaussiana inversa. Para a distribuição Bernoulli, em todos os cenários, os valores-p do teste de Anderson-Darling são maiores e as taxas de rejeição de H_0 do teste de Wald são mais próximas do nível de significância especificado quando utilizamos a normal padrão ao invés da t, principalmente, para os menores tamanhos de amostra.

Para amostras de tamanho maior ou igual 30, os valores-p e as taxas de rejeição passam a ser mais próximos, independente da distribuição. Portanto, concluímos que, considerando os cenários especificados, quando a variável resposta segue distribuição Bernoulli e o tamanho amostral é relativamente pequeno, a distribuição da raiz quadrada sinalizada da estatística de Wald, sob H_0, é melhor aproximada pela normal padrão do que pela t.

Em relação à normal padrão, quando comparamos os cenários, notamos que, quando a variável preditora é uma uniforme, os valores-p do teste AD são maiores do que quando a variável preditora segue a distribuição Bernoulli.

Já, quando a variável preditora segue a distribuição gama, os valores-p são maiores ainda. Além disso, os valores-p também aumentam quando utilizamos o complemento log

- log ao invés da logito como função de ligação e, aumentam ainda mais quando utilizamos a função probito. De qualquer forma, mesmo com essas diferenças, as conclusões quando comparamos as distribuições normal padrão e t continuam as mesmas em todos os 5 cenários.

Tabela 5.24: Resultados das simulações para a distribuição Bernoulli - Cenário 1 com β_1 = 0.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	121.9137	< 0.0001	0.0476	0.0000	0.0000	158.3681	< 0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
20	7.6835	0.0002	0.1170	0.0434	0.0024	10.0755	< 0.0001	0.0752	0.0318	0.0002
30	23.1547	< 0.0001	0.0978	0.0442	0.0050	23.1110	< 0.0001	0.0976	0.0442	0.0008
40	5.9672	0.0010	0.0856	0.0390	0.0072	6.5239	0.0006	0.0770	0.0366	0.0070
50	0.9073	0.4098	0.0968	0.0462	0.0072	1.2334	0.2552	0.0968	0.0400	0.0060
60	2.2618	0.0662	0.0918	0.0500	0.0062	2.4865	0.0503	0.0918	0.0454	0.0058
70	1.2995	0.2325	0.1006	0.0468	0.0098	1.3995	0.2024	0.0910	0.0442	0.0070
80	2.9255	0.0299	0.0966	0.0490	0.0084	3.1552	0.0228	0.0966	0.0452	0.0074
90	4.9978	0.0029	0.1202	0.0474	0.0064	4.8028	0.0036	0.1202	0.0464	0.0060
100	0.7722	0.5016	0.1018	0.0476	0.0076	0.7126	0.5484	0.1008	0.0448	0.0068

Tabela 5.25: Resultados das simulações para a distribuição Bernoulli - Cenário 2 com β_1 = 0.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	24.3125	< 0.0001	0.0266	0.0000	0.0000	45.8586	< 0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
20	2.9096	0.0304	0.0878	0.0306	0.0000	6.8813	0.0004	0.0662	0.0128	0.0000
30	3.1863	0.0220	0.0990	0.0446	0.0024	3.4783	0.0158	0.0858	0.0352	0.0004
40	1.0223	0.3458	0.0978	0.0496	0.0050	1.5866	0.1571	0.0916	0.0420	0.0026
50	0.8460	0.4490	0.0970	0.0478	0.0054	1.1817	0.2746	0.0910	0.0412	0.0030
60	1.1137	0.3028	0.0980	0.0486	0.0066	1.2257	0.2580	0.0932	0.0432	0.0054
70	0.8629	0.4378	0.0940	0.0484	0.0072	1.3922	0.2045	0.0894	0.0440	0.0054
80	0.7125	0.5485	0.0976	0.0474	0.0082	0.8790	0.4274	0.0938	0.0450	0.0066
90	3.0423	0.0260	0.1064	0.0478	0.0080	2.8853	0.0313	0.1010	0.0448	0.0064
100	0.4688	0.7788	0.1046	0.0508	0.0076	0.4130	0.8357	0.1014	0.0480	0.0056

Tabela 5.26: Resultados das simulações para a distribuição Bernoulli - Cenário 3 com β_1 = 0.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	11.7875	< 0.0001	0.0614	0.0130	0.0000	40.9714	< 0.0001	0.0066	0.0000	0.0000
20	3.6428	0.0131	0.1084	0.0450	0.0014	3.8715	0.0101	0.0816	0.0258	0.0000
30	1.3135	0.2280	0.1032	0.0524	0.0088	1.9913	0.0929	0.0906	0.0408	0.0032
40	2.8367	0.0331	0.1040	0.0560	0.0108	2.3721	0.0579	0.0962	0.0478	0.0072
50	1.3747	0.2094	0.1128	0.0542	0.0122	0.6115	0.6372	0.1042	0.0466	0.0078
60	0.9602	0.3789	0.0950	0.0450	0.0060	1.3445	0.2184	0.0890	0.0412	0.0038
70	1.2673	0.2433	0.1052	0.0570	0.0108	0.9180	0.4033	0.1006	0.0520	0.0086
80	0.6947	0.5633	0.1028	0.0542	0.0100	0.5649	0.6818	0.1000	0.0504	0.0088
90	1.9381	0.0994	0.1034	0.0534	0.0110	1.4498	0.1889	0.0978	0.0512	0.0096
100	2.6313	0.0423	0.1080	0.0546	0.0114	2.4349	0.0536	0.1038	0.0518	0.0096

Tabela 5.27: Resultados das simulações para a distribuição Bernoulli - Cenário 4 com $\beta_1 = 0$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	15.1138	< 0.0001	0.0390	0.0032	0.0000	50.2970	< 0.0001	0.0018	0.0000	0.0000
20	4.3298	0.0060	0.1074	0.0476	0.0032	3.8645	0.0102	0.0868	0.0258	0.0000
30	4.4019	0.0056	0.1170	0.0582	0.0078	2.2595	0.0664	0.1016	0.0446	0.0024
40	2.3507	0.0594	0.1030	0.0524	0.0076	1.7779	0.1221	0.0934	0.0438	0.0034
50	1.0145	0.3497	0.0978	0.0532	0.0082	1.0281	0.3429	0.0896	0.0464	0.0052
60	0.7109	0.5498	0.1094	0.0514	0.0106	0.3592	0.8880	0.1032	0.0448	0.0080
70	0.4528	0.7952	0.1078	0.0550	0.0118	0.3286	0.9153	0.1032	0.0508	0.0096
80	0.9109	0.4076	0.1036	0.0492	0.0100	0.8057	0.4770	0.0998	0.0460	0.0088
90	1.5685	0.1609	0.1064	0.0538	0.0114	1.2460	0.2507	0.1042	0.0508	0.0092
100	0.2569	0.9666	0.1020	0.0530	0.0080	0.3556	0.8913	0.0980	0.0492	0.0070

Tabela 5.28: Resultados das simulações para a distribuição Bernoulli - Cenário 5 com $\beta_1 = 0$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	20.9370	< 0.0001	0.0270	0.0000	0.0000	37.9457	< 0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
20	8.2641	0.0001	0.0652	0.0078	0.0000	13.7407	< 0.0001	0.0430	0.0026	0.0000
30	3.7319	0.0118	0.0930	0.0368	0.0006	4.6967	0.0040	0.0788	0.0270	0.0000
40	1.0045	0.3549	0.0928	0.0474	0.0046	1.9510	0.0977	0.0838	0.0394	0.0028
50	0.8809	0.4262	0.0958	0.0436	0.0048	1.2756	0.2404	0.0884	0.0388	0.0032
60	1.5966	0.1550	0.0902	0.0388	0.0034	2.1975	0.0717	0.0846	0.0336	0.0022
70	0.6060	0.6423	0.0984	0.0438	0.0064	1.1300	0.2957	0.0936	0.0394	0.0052
80	1.0942	0.3114	0.0978	0.0432	0.0058	1.2881	0.2363	0.0928	0.0386	0.0048
90	3.5072	0.0152	0.0994	0.0474	0.0056	3.4110	0.0170	0.0964	0.0436	0.0042
100	0.5630	0.6837	0.1014	0.0480	0.0054	0.6408	0.6103	0.0996	0.0460	0.0036

5.2.2 Resultados considerando $\beta_1 \neq 0$

Analisando os resultados para $\beta_1 = 0.25$ e $\beta_1 = 0.5$, obtemos as mesmas conclusões de quando utilizamos a distribuição gaussiana inversa. Nota-se que a hipótese nula do teste de Anderson-Darling é sempre rejeitada, em todos os cenários. Isso, novamente, é esperado, pois, como β_1 é de fato diferente de zero, não podemos afirmar nada sobre a distribuição da raiz quadrada sinalizada da estatística de Wald.

Além disso, observamos que as taxas de rejeição calculadas são ligeiramente maiores quando utilizamos a normal padrão, principalmente, para os menores tamanhos amostrais, isto é, o poder do teste é maior. É importante notar, também, que as taxas de rejeição não chegam perto de 1, mesmo com amostras de tamanho 100. Isso pode ser um indicativo de que, em modelos de regressão logística, nos quais a variável resposta é binária, o teste de Wald só deve ser utilizado quando o tamanho amostral é bem alto, para garantir um poder de teste razoável.

Tabela 5.29: Resultados das simulações para a distribuição Bernoulli - Cenário 1 com β_1 = 0.25.

	Normal					**t**				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	199.0876	< 0.0001	0.0474	0.0000	0.0000	231.2279	< 0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
20	193.7004	< 0.0001	0.1286	0.0460	0.0018	186.9794	< 0.0001	0.0726	0.0316	0.0008
30	331.8907	< 0.0001	0.1150	0.0512	0.0080	320.6990	< 0.0001	0.1146	0.0512	0.0024
40	410.4527	< 0.0001	0.1214	0.0602	0.0110	398.5132	< 0.0001	0.1148	0.0576	0.0108
50	475.5292	< 0.0001	0.1200	0.0610	0.0128	465.3456	< 0.0001	0.1200	0.0540	0.0090
60	547.1998	< 0.0001	0.1394	0.0784	0.0168	536.2547	< 0.0001	0.1392	0.0740	0.0146
70	602.6752	< 0.0001	0.1444	0.0722	0.0188	592.8771	< 0.0001	0.1332	0.0674	0.0126
80	709.2849	< 0.0001	0.1498	0.0846	0.0240	698.2496	< 0.0001	0.1498	0.0782	0.0198
90	835.7838	< 0.0001	0.1708	0.0824	0.0218	824.5376	< 0.0001	0.1708	0.0800	0.0206
100	912.7137	< 0.0001	0.1668	0.0934	0.0268	901.3736	< 0.0001	0.1584	0.0878	0.0254

Tabela 5.30: Resultados das simulações para a distribuição Bernoulli - Cenário 1 com β_1 = 0.5.

	Normal					**t**				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	342.2934	< 0.0001	0.0612	0.0000	0.0000	363.3364	< 0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
20	731.5722	< 0.0001	0.1714	0.0690	0.0030	693.8842	< 0.0001	0.0932	0.0420	0.0012
30	1152.1506	< 0.0001	0.1704	0.0848	0.0174	1106.5933	< 0.0001	0.1696	0.0848	0.0050
40	1510.4895	< 0.0001	0.1910	0.1124	0.0250	1460.8009	< 0.0001	0.1860	0.1114	0.0244
50	1803.9074	< 0.0001	0.2180	0.1306	0.0336	1757.1242	< 0.0001	0.2180	0.1166	0.0234
60	2175.9412	< 0.0001	0.2430	0.1496	0.0456	2126.1613	< 0.0001	0.2426	0.1466	0.0354
70	2466.2672	< 0.0001	0.2740	0.1642	0.0556	2416.9217	< 0.0001	0.2584	0.1524	0.0414
80	2798.8654	< 0.0001	0.2884	0.1894	0.0676	2746.4542	< 0.0001	0.2884	0.1820	0.0588
90	3249.9041	< 0.0001	0.3300	0.2086	0.0682	3194.7248	< 0.0001	0.3300	0.2010	0.0626
100	3509.0954	< 0.0001	0.3400	0.2270	0.0846	3454.3539	< 0.0001	0.3288	0.2054	0.0790

Tabela 5.31: Resultados das simulações para a distribuição Bernoulli - Cenário 2 com β_1 = 0.25.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	79.7386	< 0.0001	0.0290	0.0000	0.0000	96.0894	< 0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
20	36.1015	< 0.0001	0.0798	0.0286	0.0000	38.0778	< 0.0001	0.0572	0.0132	0.0000
30	97.2611	< 0.0001	0.0998	0.0474	0.0046	95.5335	< 0.0001	0.0870	0.0342	0.0012
40	110.4944	< 0.0001	0.1030	0.0424	0.0068	108.2354	< 0.0001	0.0924	0.0352	0.0034
50	168.3759	< 0.0001	0.1042	0.0518	0.0088	165.3642	< 0.0001	0.0988	0.0436	0.0066
60	189.3657	< 0.0001	0.1122	0.0554	0.0098	186.3005	< 0.0001	0.1062	0.0494	0.0080
70	231.9175	< 0.0001	0.1138	0.0576	0.0100	228.2988	< 0.0001	0.1090	0.0524	0.0076
80	290.2766	< 0.0001	0.1194	0.0660	0.0128	286.0738	< 0.0001	0.1150	0.0614	0.0112
90	298.8098	< 0.0001	0.1140	0.0554	0.0116	295.4826	< 0.0001	0.1108	0.0516	0.0100
100	305.2848	< 0.0001	0.1232	0.0662	0.0154	301.5921	< 0.0001	0.1196	0.0632	0.0122

Tabela 5.32: Resultados das simulações para a distribuição Bernoulli - Cenário 2 com β_1 = 0.5.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	220.5423	< 0.0001	0.0338	0.0000	0.0000	225.8720	< 0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
20	274.6778	< 0.0001	0.1180	0.0456	0.0000	262.9018	< 0.0001	0.0910	0.0242	0.0000
30	334.8967	< 0.0001	0.1178	0.0516	0.0058	324.3576	< 0.0001	0.1050	0.0394	0.0016
40	415.1659	< 0.0001	0.1224	0.0622	0.0084	404.1629	< 0.0001	0.1134	0.0520	0.0032
50	624.8908	< 0.0001	0.1354	0.0660	0.0104	612.0628	< 0.0001	0.1262	0.0590	0.0066
60	713.5104	< 0.0001	0.1516	0.0814	0.0168	698.7929	< 0.0001	0.1446	0.0750	0.0116
70	1021.2489	< 0.0001	0.1672	0.0920	0.0212	1003.7954	< 0.0001	0.1612	0.0854	0.0156
80	722.8574	< 0.0001	0.1412	0.0788	0.0172	712.8635	< 0.0001	0.1366	0.0742	0.0134
90	924.4538	< 0.0001	0.1598	0.0884	0.0216	912.3589	< 0.0001	0.1552	0.0836	0.0182
100	1054.4844	< 0.0001	0.1700	0.1008	0.0258	1041.4360	< 0.0001	0.1648	0.0970	0.0224

Tabela 5.33: Resultados das simulações para a distribuição Bernoulli - Cenário 3 com β_1 = 0.25.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	143.1858	< 0.0001	0.0590	0.0128	0.0000	155.6111	< 0.0001	0.0060	0.0000	0.0000
20	181.5717	< 0.0001	0.1216	0.0562	0.0036	170.9881	< 0.0001	0.0952	0.0308	0.0000
30	190.4175	< 0.0001	0.1246	0.0664	0.0076	180.7545	< 0.0001	0.1088	0.0524	0.0024
40	282.1976	< 0.0001	0.1280	0.0654	0.0132	273.3628	< 0.0001	0.1168	0.0546	0.0090
50	432.2682	< 0.0001	0.1336	0.0730	0.0162	421.5410	< 0.0001	0.1258	0.0644	0.0098
60	426.0142	< 0.0001	0.1238	0.0666	0.0152	417.8490	< 0.0001	0.1180	0.0594	0.0124
70	732.8867	< 0.0001	0.1614	0.0866	0.0204	719.4804	< 0.0001	0.1522	0.0806	0.0164
80	545.9734	< 0.0001	0.1370	0.0740	0.0180	537.4326	< 0.0001	0.1320	0.0678	0.0142
90	728.0257	< 0.0001	0.1552	0.0852	0.0202	717.9398	< 0.0001	0.1516	0.0816	0.0172
100	821.5126	< 0.0001	0.1612	0.0968	0.0218	810.9479	< 0.0001	0.1588	0.0904	0.0196

Tabela 5.34: Resultados das simulações para a distribuição Bernoulli - Cenário 3 com β_1 = 0.5.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	498.0400	< 0.0001	0.0800	0.0214	0.0000	458.4375	< 0.0001	0.0110	0.0000	0.0000
20	559.8963	< 0.0001	0.1446	0.0728	0.0090	521.7579	< 0.0001	0.1148	0.0466	0.0000
30	1192.9600	< 0.0001	0.1806	0.0994	0.0202	1140.5718	< 0.0001	0.1600	0.0812	0.0088
40	1546.6026	< 0.0001	0.2190	0.1322	0.0348	1490.6599	< 0.0001	0.2076	0.1164	0.0210
50	1600.6241	< 0.0001	0.2108	0.1260	0.0360	1556.1346	< 0.0001	0.1974	0.1176	0.0258
60	1979.5482	< 0.0001	0.2464	0.1558	0.0468	1930.3943	< 0.0001	0.2364	0.1436	0.0386
70	2047.0678	< 0.0001	0.2394	0.1500	0.0446	2005.4751	< 0.0001	0.2308	0.1418	0.0376
80	2642.5883	< 0.0001	0.2812	0.1834	0.0548	2592.9882	< 0.0001	0.2750	0.1730	0.0484
90	2646.5031	< 0.0001	0.2882	0.1868	0.0630	2600.8397	< 0.0001	0.2834	0.1784	0.0548
100	2609.6894	< 0.0001	0.2768	0.1758	0.0538	2571.5966	< 0.0001	0.2714	0.1670	0.0490

Tabela 5.35: Resultados das simulações para a distribuição Bernoulli - Cenário 4 com β_1 = 0.25.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	131.2429	< 0.0001	0.0396	0.0012	0.0000	149.2876	< 0.0001	0.0012	0.0000	0.0000
20	196.5196	< 0.0001	0.1152	0.0444	0.0004	185.8704	< 0.0001	0.0920	0.0210	0.0000
30	237.3024	< 0.0001	0.1186	0.0592	0.0044	227.7409	< 0.0001	0.1062	0.0456	0.0004
40	347.9997	< 0.0001	0.1346	0.0658	0.0114	336.6320	< 0.0001	0.1240	0.0582	0.0052
50	342.0023	< 0.0001	0.1318	0.0716	0.0154	333.0101	< 0.0001	0.1240	0.0620	0.0106
60	499.2881	< 0.0001	0.1486	0.0796	0.0196	488.7024	< 0.0001	0.1428	0.0714	0.0164
70	474.0746	< 0.0001	0.1358	0.0758	0.0224	465.5726	< 0.0001	0.1302	0.0716	0.0174
80	770.3494	< 0.0001	0.1518	0.0832	0.0202	758.6777	< 0.0001	0.1460	0.0782	0.0166
90	667.0625	< 0.0001	0.1506	0.0864	0.0228	657.6282	< 0.0001	0.1454	0.0832	0.0200
100	904.9048	< 0.0001	0.1664	0.0910	0.0228	893.6833	< 0.0001	0.1630	0.0866	0.0206

Tabela 5.36: Resultados das simulações para a distribuição Bernoulli - Cenário 4 com β_1 = 0.5.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	415.3858	< 0.0001	0.0466	0.0006	0.0000	401.6859	< 0.0001	0.0002	0.0000	0.0000
20	386.9644	< 0.0001	0.1012	0.0380	0.0000	364.8102	< 0.0001	0.0770	0.0098	0.0000
30	1078.0237	< 0.0001	0.1836	0.1016	0.0162	1026.4803	< 0.0001	0.1646	0.0802	0.0054
40	1282.7143	< 0.0001	0.2010	0.1192	0.0266	1236.6615	< 0.0001	0.1896	0.1070	0.0134
50	1892.8859	< 0.0001	0.2294	0.1446	0.0438	1838.4373	< 0.0001	0.2178	0.1330	0.0342
60	1780.1362	< 0.0001	0.2246	0.1382	0.0378	1738.3766	< 0.0001	0.2144	0.1276	0.0306
70	2115.3867	< 0.0001	0.2406	0.1474	0.0438	2072.9973	< 0.0001	0.2314	0.1396	0.0356
80	2229.8646	< 0.0001	0.2688	0.1692	0.0540	2187.5557	< 0.0001	0.2626	0.1604	0.0450
90	2568.8724	< 0.0001	0.2726	0.1724	0.0586	2526.6059	< 0.0001	0.2658	0.1664	0.0498
100	2868.8765	< 0.0001	0.2920	0.1884	0.0648	2825.5210	< 0.0001	0.2866	0.1814	0.0568

Tabela 5.37: Resultados das simulações para a distribuição Bernoulli - Cenário 5 com β_1 = 0.25.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	78.8493	< 0.0001	0.0262	0.0000	0.0000	92.2270	< 0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
20	61.0022	< 0.0001	0.0674	0.0140	0.0000	64.3555	< 0.0001	0.0470	0.0042	0.0000
30	164.8860	< 0.0001	0.0960	0.0378	0.0020	161.6784	< 0.0001	0.0826	0.0284	0.0006
40	133.5006	< 0.0001	0.0960	0.0486	0.0060	131.6890	< 0.0001	0.0898	0.0382	0.0026
50	179.7409	< 0.0001	0.1016	0.0400	0.0046	177.0013	< 0.0001	0.0946	0.0334	0.0030
60	162.0973	< 0.0001	0.1114	0.0518	0.0078	159.4162	< 0.0001	0.1070	0.0466	0.0054
70	212.8185	< 0.0001	0.1044	0.0446	0.0062	210.4629	< 0.0001	0.0982	0.0370	0.0040
80	174.3408	< 0.0001	0.1006	0.0454	0.0056	172.4174	< 0.0001	0.0968	0.0424	0.0042
90	244.2486	< 0.0001	0.1114	0.0520	0.0070	241.6311	< 0.0001	0.1072	0.0470	0.0054
100	227.4916	< 0.0001	0.1112	0.0538	0.0080	225.2557	< 0.0001	0.1088	0.0510	0.0068

Tabela 5.38: Resultados das simulações para a distribuição Bernoulli - Cenário 5 com β_1 = 0.5.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	222.2807	< 0.0001	0.0304	0.0000	0.0000	231.7056	< 0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
20	160.5562	< 0.0001	0.0666	0.0020	0.0000	160.1329	< 0.0001	0.0416	0.0002	0.0000
30	333.8324	< 0.0001	0.1046	0.0426	0.0012	324.1901	< 0.0001	0.0884	0.0292	0.0000
40	468.4032	< 0.0001	0.1276	0.0594	0.0080	455.0922	< 0.0001	0.1148	0.0490	0.0032
50	774.0851	< 0.0001	0.1448	0.0756	0.0092	756.4853	< 0.0001	0.1370	0.0658	0.0056
60	640.3058	< 0.0001	0.1392	0.0716	0.0106	628.2601	< 0.0001	0.1330	0.0644	0.0080
70	937.3502	< 0.0001	0.1624	0.0868	0.0152	921.0254	< 0.0001	0.1554	0.0806	0.0124
80	867.4388	< 0.0001	0.1404	0.0758	0.0092	855.6357	< 0.0001	0.1360	0.0698	0.0058
90	764.0792	< 0.0001	0.1478	0.0822	0.0172	753.8201	< 0.0001	0.1430	0.0750	0.0140
100	1105.1355	< 0.0001	0.1688	0.0920	0.0210	1091.9708	< 0.0001	0.1644	0.0888	0.0174

5.3 Distribuição beta

Como terceira etapa, vamos estudar a distribuição da raiz quadrada sinalizada da estatística de Wald em modelos GAMLSS nos quais a variável resposta segue uma distribuição beta. A Tabela 5.39 apresenta os cenários de simulação.

Tabela 5.39: Cenários de simulação para a distribuição beta.

Cenário	Função de ligação	Coeficientes	Covariáveis	σ
1	Logito	$\beta_0 = -1$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 1$ e $\beta_3 = 0$	$X_1 \sim U(0,1)$, $X_2 \sim U(0,1)$ e $X_3 \sim U(0,1)$	0.1
2	Logito	$\beta_0 = -1$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 1$ e $\beta_3 = 0$	$X_1 \sim U(0,1)$, $X_2 \sim U(0,1)$ e $X_3 \sim U(0,1)$	0.25
3	Logito	$\beta_0 = -4.5$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 1$ e $\beta_3 = 0$	$X_1 \sim U(0,1)$, $X_2 \sim U(0,1)$ e $X_3 \sim U(0,1)$	0.1
4	Logito	$\beta_0 = -1$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 1$ e $\beta_3 = 0$	$X_1 \sim N(0.5, \frac{1}{12})$, $X_2 \sim GA(0.5, \frac{1}{3})$ e $X_3 \sim GA(0.5, \frac{1}{3})$	0.1
5	Logito	$\beta_0 = -1$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 1$ e $\beta_3 = 0$	$X_1 \sim Bern(0.5)$, $X_2 \sim Bern(0.5)$ e $X_3 \sim Bern(0.5)$	0.1
6	Logito	$\beta_0 = -1$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 1$ e $\beta_3 = 0$	$X_1 \sim U(0,1)$, $X_2 \sim Bern(0.5)$ e $X_3 \sim Bern(0.5)$	0.1

5.3.1 Resultados considerando $\beta_3 = 0$

Analisando as Tabelas 5.40 até 5.45, obtemos as mesmas conclusões de quando consideramos a distribuição gaussiana inversa. Notamos que os valores-p do teste de Anderson-Darling são sempre maiores e as taxas de rejeição calculadas são mais próximas do nível de significância especificado quando utilizamos a distribuição t. Portanto, temos evidências de que, para os cenários especificados, quando a variável resposta segue distribuição beta, a hipótese nula do teste de Wald é verdadeira e o tamanho amostral é pequeno, a distribuição da raiz quadrada sinalizada da estatística de Wald é melhor aproximada pela distribuição t do que pela normal padrão.

Em relação à distribuição t, observa-se que, praticamente, não há diferenças nos resultados quando alteramos os cenários.

Tabela 5.40: Resultados das simulações para a distribuição beta - Cenário 1 com $\beta_3 = 0$.

	Normal					t				
n	AD	Valor-p	10%	5%	1%	AD	Valor-p	10%	5%	1%
10	> 100000	< 0.0001	0.2418	0.1746	0.0904	55.4230	< 0.0001	0.1666	0.0910	0.0196
20	43.7913	< 0.0001	0.1702	0.1106	0.0406	19.7156	< 0.0001	0.1476	0.0846	0.0194
30	11.1823	< 0.0001	0.1322	0.0784	0.0256	4.9002	0.0032	0.1200	0.0650	0.0186
40	8.7610	< 0.0001	0.1222	0.0660	0.0180	5.8106	0.0012	0.1126	0.0588	0.0122
50	4.0698	0.0081	0.1224	0.0630	0.0190	2.0311	0.0883	0.1138	0.0558	0.0152
60	2.8540	0.0325	0.1140	0.0598	0.0170	1.7953	0.1194	0.1084	0.0538	0.0130
70	4.9219	0.0031	0.1186	0.0660	0.0216	3.3501	0.0182	0.1128	0.0606	0.0180
80	1.5620	0.1623	0.1070	0.0556	0.0120	1.0292	0.3423	0.1010	0.0504	0.0094
90	1.5874	0.1569	0.1090	0.0578	0.0136	1.0758	0.3198	0.1044	0.0536	0.0128
100	1.6925	0.1365	0.1112	0.0520	0.0108	1.2292	0.2567	0.1072	0.0484	0.0096

Tabela 5.41: Resultados das simulações para a distribuição beta - Cenário 2 com $\beta_3 = 0$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	> 100000	< 0.0001	0.2448	0.1764	0.0900	57.4515	< 0.0001	0.1664	0.0910	0.0190
20	43.7336	< 0.0001	0.1700	0.1098	0.0384	19.8028	< 0.0001	0.1474	0.0848	0.0186
30	11.0071	< 0.0001	0.1330	0.0772	0.0244	4.9234	0.0031	0.1192	0.0642	0.0178
40	9.1623	< 0.0001	0.1238	0.0664	0.0178	6.1518	0.0008	0.1132	0.0576	0.0124
50	4.0312	0.0084	0.1220	0.0632	0.0186	2.0125	0.0904	0.1130	0.0550	0.0162
60	2.7474	0.0368	0.1160	0.0586	0.0168	1.6963	0.1358	0.1108	0.0530	0.0134
70	4.9057	0.0032	0.1202	0.0662	0.0206	3.3241	0.0188	0.1148	0.0610	0.0170
80	1.6574	0.1430	0.1092	0.0548	0.0112	1.1103	0.3043	0.1040	0.0518	0.0090
90	1.5002	0.1764	0.1092	0.0570	0.0142	0.9876	0.3639	0.1042	0.0538	0.0116
100	1.7044	0.1344	0.1104	0.0520	0.0110	1.2509	0.2489	0.1066	0.0476	0.0100

Tabela 5.42: Resultados das simulações para a distribuição beta - Cenário 3 com $\beta_3 = 0$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	275.6966	< 0.0001	0.2576	0.1868	0.1006	80.1738	< 0.0001	0.1770	0.1010	0.0238
20	45.8663	< 0.0001	0.1718	0.1086	0.0406	21.1895	< 0.0001	0.1512	0.0826	0.0194
30	16.0961	< 0.0001	0.1424	0.0850	0.0262	7.9509	0.0001	0.1276	0.0726	0.0172
40	7.7890	0.0001	0.1260	0.0702	0.0206	4.3799	0.0057	0.1142	0.0610	0.0134
50	6.2426	0.0007	0.1234	0.0656	0.0156	3.8291	0.0106	0.1170	0.0584	0.0126
60	4.4371	0.0053	0.1136	0.0636	0.0152	2.8963	0.0309	0.1076	0.0598	0.0122
70	5.1627	0.0024	0.1140	0.0652	0.0190	3.6860	0.0124	0.1084	0.0612	0.0164
80	1.6189	0.1505	0.1030	0.0530	0.0118	1.1331	0.2944	0.0998	0.0496	0.0104
90	2.2479	0.0674	0.1126	0.0576	0.0142	1.6050	0.1533	0.1066	0.0544	0.0124
100	1.6835	0.1382	0.1120	0.0566	0.0106	1.1540	0.2857	0.1094	0.0536	0.0098

Tabela 5.43: Resultados das simulações para a distribuição beta - Cenário 4 com $\beta_3 = 0$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	> 100000	< 0.0001	0.2532	0.1756	0.0890	62.9507	< 0.0001	0.1672	0.0894	0.0198
20	48.5184	< 0.0001	0.1728	0.1072	0.0378	23.4292	< 0.0001	0.1522	0.0838	0.0192
30	11.7676	< 0.0001	0.1368	0.0790	0.0224	5.3604	0.0019	0.1238	0.0670	0.0138
40	7.1325	0.0003	0.1260	0.0666	0.0162	4.0225	0.0085	0.1142	0.0582	0.0120
50	4.8244	0.0035	0.1240	0.0654	0.0138	2.7299	0.0376	0.1146	0.0582	0.0112
60	3.5289	0.0149	0.1130	0.0618	0.0150	2.2140	0.0703	0.1066	0.0566	0.0120
70	3.8131	0.0108	0.1172	0.0648	0.0140	2.7306	0.0376	0.1124	0.0592	0.0114
80	2.4583	0.0521	0.1136	0.0638	0.0142	1.5400	0.1672	0.1102	0.0600	0.0110
90	2.7483	0.0368	0.1160	0.0588	0.0122	1.9770	0.0946	0.1116	0.0552	0.0106
100	1.2770	0.2400	0.1088	0.0532	0.0124	0.9849	0.3653	0.1060	0.0498	0.0108

Tabela 5.44: Resultados das simulações para a distribuição beta - Cenário 5 com $\beta_3 = 0$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	$>$ 100000	$<$ 0.0001	0.2438	0.1712	0.0826	50.3137	$<$ 0.0001	0.1600	0.0826	0.0196
20	36.1824	$<$ 0.0001	0.1570	0.1008	0.0368	15.7997	$<$ 0.0001	0.1356	0.0766	0.0200
30	14.8896	$<$ 0.0001	0.1432	0.0794	0.0232	7.3783	0.0002	0.1260	0.0672	0.0156
40	9.6465	$<$ 0.0001	0.1260	0.0668	0.0178	6.6601	0.0005	0.1156	0.0588	0.0122
50	4.6760	0.0041	0.1220	0.0682	0.0202	2.4406	0.0532	0.1148	0.0624	0.0160
60	2.4555	0.0523	0.1198	0.0640	0.0142	1.1984	0.2681	0.1152	0.0582	0.0124
70	5.4957	0.0017	0.1210	0.0676	0.0188	3.8606	0.0102	0.1154	0.0624	0.0154
80	3.3427	0.0184	0.1182	0.0598	0.0128	2.2572	0.0666	0.1140	0.0564	0.0108
90	1.2629	0.2447	0.1096	0.0578	0.0138	0.8646	0.4367	0.1060	0.0530	0.0118
100	0.7298	0.5345	0.1072	0.0578	0.0128	0.4595	0.7883	0.1040	0.0554	0.0118

Tabela 5.45: Resultados das simulações para a distribuição beta - Cenário 6 com $\beta_3 = 0$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	$>$ 100000	$<$ 0.0001	0.2424	0.1686	0.0842	50.5156	$<$ 0.0001	0.1598	0.0844	0.0182
20	36.1660	$<$ 0.0001	0.1594	0.0982	0.0382	15.7719	$<$ 0.0001	0.1364	0.0770	0.0196
30	14.4063	$<$ 0.0001	0.1378	0.0796	0.0238	7.0055	0.0003	0.1246	0.0690	0.0146
40	9.9661	$<$ 0.0001	0.1244	0.0690	0.0188	6.7803	0.0004	0.1162	0.0594	0.0140
50	4.5657	0.0046	0.1190	0.0678	0.0190	2.3945	0.0563	0.1136	0.0602	0.0152
60	2.2454	0.0676	0.1148	0.0614	0.0150	1.0609	0.3268	0.1108	0.0582	0.0126
70	5.5206	0.0016	0.1232	0.0684	0.0188	3.8478	0.0104	0.1180	0.0626	0.0166
80	3.3200	0.0189	0.1194	0.0582	0.0138	2.2288	0.0690	0.1142	0.0540	0.0112
90	1.2827	0.2380	0.1090	0.0592	0.0136	0.8114	0.4729	0.1056	0.0558	0.0124
100	0.8295	0.4602	0.1106	0.0578	0.0128	0.5427	0.7037	0.1076	0.0550	0.0116

5.3.2 Resultados considerando $\beta_3 \neq 0$

Analisando os resultados com $\beta_3 \neq 0$, observamos que, novamente, as taxas de rejeição são ligeiramente mais próximas de 1 quando utilizamos a normal padrão. Entretanto, é importante notar que a distribuição t também apresenta um poder de teste satisfatório, principalmente, quando aumentamos o tamanho amostral. Além disso, conforme já foi visto, quando β_3 é igual a zero, isto é, H_0 é verdadeira, o desempenho usando a distribuição t é melhor.

Tabela 5.46: Resultados das simulações para a distribuição beta - Cenário 1 com $\beta_3 = 0.25$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	> 100000	< 0.0001	0.3210	0.2344	0.1330	1180.7161	< 0.0001	0.2230	0.1338	0.0300
20	4935.8884	< 0.0001	0.4358	0.3292	0.1828	4333.8442	< 0.0001	0.3960	0.2794	0.1182
30	5683.2124	< 0.0001	0.4662	0.3566	0.1864	5254.1320	< 0.0001	0.4398	0.3270	0.1400
40	14381.0646	< 0.0001	0.7836	0.6870	0.4684	13161.1377	< 0.0001	0.7708	0.6632	0.4140
50	17516.2285	< 0.0001	0.8452	0.7722	0.5614	16174.1437	< 0.0001	0.8360	0.7534	0.5230
60	11782.8838	< 0.0001	0.7158	0.6048	0.3770	11205.4862	< 0.0001	0.7058	0.5866	0.3396
70	> 100000	< 0.0001	0.8708	0.7946	0.5970	17548.2124	< 0.0001	0.8672	0.7850	0.5652
80	18445.5687	< 0.0001	0.8726	0.7954	0.5902	17541.4029	< 0.0001	0.8678	0.7866	0.5690
90	22790.3608	< 0.0001	0.9270	0.8712	0.7020	21630.5159	< 0.0001	0.9256	0.8656	0.6842
100	> 100000	< 0.0001	0.9604	0.9296	0.7960	26282.4074	< 0.0001	0.9590	0.9256	0.7838

Tabela 5.47: Resultados das simulações para a distribuição beta - Cenário 1 com $\beta_3 = 0.5$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	> 100000	< 0.0001	0.5138	0.4286	0.2698	4305.0503	< 0.0001	0.4128	0.2708	0.0836
20	> 100000	< 0.0001	0.8402	0.7744	0.5906	14713.2402	< 0.0001	0.8188	0.7306	0.4610
30	> 100000	< 0.0001	0.9054	0.8404	0.6692	18557.0270	< 0.0001	0.8946	0.8164	0.6004
40	> 100000	< 0.0001	0.9988	0.9960	0.9808	42662.5000	< 0.0001	0.9984	0.9954	0.9750
50	> 100000	< 0.0001	0.9996	0.9988	0.9948	53136.6743	< 0.0001	0.9996	0.9988	0.9926
60	> 100000	< 0.0001	0.9960	0.9890	0.9560	38610.7890	< 0.0001	0.9960	0.9880	0.9478
70	> 100000	< 0.0001	1.0000	0.9998	0.9964	> 100000	< 0.0001	1.0000	0.9996	0.9954
80	> 100000	< 0.0001	0.9996	0.9988	0.9974	59642.9260	< 0.0001	0.9996	0.9988	0.9964
90	> 100000	< 0.0001	1.0000	0.9998	0.9990	> 100000	< 0.0001	1.0000	0.9998	0.9990
100	> 100000	0.0000	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	0.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabela 5.48: Resultados das simulações para a distribuição beta - Cenário 2 com $\beta_3 = 0.25$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	> 100000	< 0.0001	0.2546	0.1872	0.0974	228.3902	< 0.0001	0.1756	0.0982	0.0210
20	863.0608	< 0.0001	0.2228	0.1490	0.0650	764.7452	< 0.0001	0.1962	0.1168	0.0366
30	978.2255	< 0.0001	0.2012	0.1288	0.0458	921.3228	< 0.0001	0.1852	0.1104	0.0324
40	2508.6370	< 0.0001	0.2846	0.1944	0.0790	2399.9212	< 0.0001	0.2716	0.1782	0.0598
50	2908.4213	< 0.0001	0.3114	0.2110	0.0870	2807.9683	< 0.0001	0.2986	0.1976	0.0712
60	2019.1769	< 0.0001	0.2490	0.1606	0.0594	1966.9802	< 0.0001	0.2416	0.1496	0.0486
70	3067.4019	< 0.0001	0.3212	0.2186	0.0888	2991.8748	< 0.0001	0.3140	0.2088	0.0776
80	3126.3864	< 0.0001	0.3204	0.2228	0.0864	3061.5330	< 0.0001	0.3136	0.2128	0.0736
90	3777.3539	< 0.0001	0.3568	0.2484	0.1004	3704.2063	< 0.0001	0.3496	0.2388	0.0886
100	4628.3401	< 0.0001	0.4068	0.2932	0.1286	4542.1478	< 0.0001	0.3986	0.2876	0.1180

Tabela 5.49: Resultados das simulações para a distribuição beta - Cenário 2 com $\beta_3 = 0.5$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	> 100000	< 0.0001	0.2954	0.2152	0.1188	791.1827	< 0.0001	0.2042	0.1194	0.0280
20	3155.8588	< 0.0001	0.3430	0.2516	0.1304	2802.2570	< 0.0001	0.3086	0.2120	0.0798
30	3716.7950	< 0.0001	0.3644	0.2678	0.1212	3469.5653	< 0.0001	0.3452	0.2402	0.0860
40	9304.9030	< 0.0001	0.6280	0.5124	0.2958	8683.4799	< 0.0001	0.6114	0.4880	0.2494
50	11192.4995	< 0.0001	0.7010	0.5834	0.3592	10544.4003	< 0.0001	0.6866	0.5648	0.3202
60	7589.2058	< 0.0001	0.5580	0.4396	0.2290	7295.8141	< 0.0001	0.5470	0.4256	0.2012
70	11891.3499	< 0.0001	0.7180	0.6138	0.3854	11383.7845	< 0.0001	0.7136	0.6010	0.3564
80	11849.6688	< 0.0001	0.7216	0.6100	0.3756	11417.0555	< 0.0001	0.7142	0.5976	0.3516
90	14654.2622	< 0.0001	0.7958	0.7020	0.4696	14111.4890	< 0.0001	0.7908	0.6918	0.4498
100	17824.6685	< 0.0001	0.8562	0.7790	0.5780	17143.3266	< 0.0001	0.8508	0.7720	0.5576

Tabela 5.50: Resultados das simulações para a distribuição beta - Cenário 3 com $\beta_3 = 0.25$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	> 100000	< 0.0001	0.2734	0.2038	0.1120	377.6759	< 0.0001	0.1934	0.1122	0.0252
20	1321.6332	< 0.0001	0.2448	0.1652	0.0788	1178.6645	< 0.0001	0.2164	0.1372	0.0428
30	1352.8556	< 0.0001	0.2300	0.1498	0.0594	1270.3629	< 0.0001	0.2134	0.1294	0.0446
40	3667.8671	< 0.0001	0.3596	0.2498	0.1062	3496.2678	< 0.0001	0.3446	0.2316	0.0858
50	4619.2617	< 0.0001	0.4152	0.3062	0.1440	4432.9762	< 0.0001	0.4018	0.2918	0.1202
60	3624.5162	< 0.0001	0.3512	0.2500	0.1090	3514.2735	< 0.0001	0.3410	0.2344	0.0938
70	5992.7800	< 0.0001	0.4808	0.3678	0.1738	5811.5618	< 0.0001	0.4700	0.3560	0.1566
80	7008.0462	< 0.0001	0.5318	0.4152	0.2120	6813.9526	< 0.0001	0.5240	0.4004	0.1932
90	6412.5321	< 0.0001	0.5052	0.3842	0.1846	6262.0734	< 0.0001	0.4984	0.3722	0.1682
100	8242.5432	< 0.0001	0.5890	0.4602	0.2482	8045.9013	< 0.0001	0.5840	0.4506	0.2332

Tabela 5.51: Resultados das simulações para a distribuição beta - Cenário 3 com $\beta_3 = 0.5$.

	Normal					t				
n	AD	Valor-p	10%	5%	1%	AD	Valor-p	10%	5%	1%
10	> 100000	< 0.0001	0.3580	0.2724	0.1566	1629.6839	< 0.0001	0.2566	0.1570	0.0392
20	5478.6716	< 0.0001	0.4670	0.3540	0.1994	4793.9893	< 0.0001	0.4280	0.3044	0.1310
30	5729.5182	< 0.0001	0.4724	0.3606	0.1948	5286.0580	< 0.0001	0.4486	0.3246	0.1480
40	15459.9584	< 0.0001	0.8072	0.7168	0.5004	14101.5941	< 0.0001	0.7968	0.6942	0.4494
50	19826.3391	< 0.0001	0.8786	0.8078	0.6256	18156.4535	< 0.0001	0.8736	0.7936	0.5874
60	15585.3467	< 0.0001	0.8124	0.7174	0.5020	14664.1700	< 0.0001	0.8058	0.7042	0.4656
70	26133.1232	< 0.0001	0.9476	0.9064	0.7730	24227.2151	< 0.0001	0.9444	0.9026	0.7506
80	29821.6364	< 0.0001	0.9718	0.9442	0.8340	27716.7502	< 0.0001	0.9692	0.9412	0.8158
90	27769.1108	< 0.0001	0.9614	0.9276	0.8036	26121.7123	< 0.0001	0.9598	0.9222	0.7876
100	> 100000	< 0.0001	0.9860	0.9748	0.9012	33281.5753	< 0.0001	0.9854	0.9724	0.8924

Tabela 5.52: Resultados das simulações para a distribuição beta - Cenário 4 com $\beta_3 = 0.25$.

	Normal					t				
n	AD	Valor-p	10%	5%	1%	AD	Valor-p	10%	5%	1%
10	> 100000	< 0.0001	0.3578	0.2782	0.1664	1743.9610	< 0.0001	0.2648	0.1674	0.0404
20	4337.0700	< 0.0001	0.4108	0.3118	0.1582	3820.8169	< 0.0001	0.3726	0.2648	0.1036
30	8214.9670	< 0.0001	0.5864	0.4740	0.2670	7503.5188	< 0.0001	0.5642	0.4352	0.2046
40	6912.3228	< 0.0001	0.5276	0.4148	0.2084	6514.9252	< 0.0001	0.5122	0.3862	0.1706
50	18745.0064	< 0.0001	0.8698	0.7980	0.6004	17262.9394	< 0.0001	0.8622	0.7832	0.5588
60	10781.2632	< 0.0001	0.6840	0.5726	0.3460	10276.0810	< 0.0001	0.6766	0.5578	0.3100
70	18487.9595	< 0.0001	0.8756	0.7946	0.5844	17451.8653	< 0.0001	0.8706	0.7814	0.5550
80	21070.0789	< 0.0001	0.9052	0.8444	0.6598	19928.9152	< 0.0001	0.9008	0.8358	0.6372
90	16445.8135	< 0.0001	0.8340	0.7488	0.5256	15785.5407	< 0.0001	0.8290	0.7392	0.5048
100	31411.5274	< 0.0001	0.9752	0.9530	0.8590	29558.1375	< 0.0001	0.9740	0.9514	0.8464

Tabela 5.53: Resultados das simulações para a distribuição beta - Cenário 4 com $\beta_3 = 0.5$.

	Normal					t				
n	AD	Valor-p	10%	5%	1%	AD	Valor-p	10%	5%	1%
10	> 100000	< 0.0001	0.5960	0.5046	0.3474	5798.8060	< 0.0001	0.4902	0.3480	0.1198
20	> 100000	< 0.0001	0.8072	0.7216	0.5298	13125.2972	< 0.0001	0.7826	0.6764	0.4084
30	> 100000	< 0.0001	0.9646	0.9322	0.8248	24744.5734	< 0.0001	0.9590	0.9188	0.7760
40	> 100000	< 0.0001	0.9338	0.8878	0.7296	21466.1180	< 0.0001	0.9286	0.8750	0.6820
50	> 100000	< 0.0001	1.0000	0.9998	0.9970	52904.6266	< 0.0001	1.0000	0.9998	0.9954
60	> 100000	< 0.0001	0.9918	0.9824	0.9368	35698.7458	< 0.0001	0.9910	0.9800	0.9256
70	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	0.9972	57866.7899	< 0.0001	1.0000	1.0000	0.9968
80	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	0.9996	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	0.9994
90	> 100000	< 0.0001	0.9998	0.9996	0.9946	54085.8523	< 0.0001	0.9998	0.9996	0.9936
100	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000

Tabela 5.54: Resultados das simulações para a distribuição beta - Cenário 5 com $\beta_3 = 0.25$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	> 100000	< 0.0001	0.5166	0.4304	0.2824	4538.1949	< 0.0001	0.4160	0.2842	0.0928
20	> 100000	< 0.0001	0.7726	0.6866	0.4852	12068.6914	< 0.0001	0.7422	0.6332	0.3718
30	17714.9362	< 0.0001	0.8396	0.7644	0.5636	15397.9810	< 0.0001	0.8266	0.7392	0.4898
40	> 100000	< 0.0001	0.9658	0.9374	0.8348	26204.5867	< 0.0001	0.9632	0.9296	0.7986
50	> 100000	< 0.0001	0.9820	0.9684	0.8968	31277.1211	< 0.0001	0.9810	0.9652	0.8774
60	> 100000	< 0.0001	0.9890	0.9758	0.9142	33309.3111	< 0.0001	0.9880	0.9732	0.9012
70	> 100000	< 0.0001	0.9958	0.9886	0.9582	39875.6071	< 0.0001	0.9950	0.9876	0.9526
80	> 100000	< 0.0001	0.9984	0.9966	0.9796	46827.1230	< 0.0001	0.9984	0.9964	0.9768
90	> 100000	< 0.0001	0.9992	0.9980	0.9900	52119.2862	< 0.0001	0.9992	0.9980	0.9890
100	> 100000	< 0.0001	1.0000	0.9994	0.9968	> 100000	< 0.0001	1.0000	0.9994	0.9964

Tabela 5.55: Resultados das simulações para a distribuição beta - Cenário 5 com $\beta_3 = 0.5$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	> 100000	< 0.0001	0.8938	0.8458	0.7052	13653.4620	< 0.0001	0.8362	0.7072	0.3576
20	> 100000	< 0.0001	0.9966	0.9926	0.9758	35308.1227	< 0.0001	0.9958	0.9894	0.9480
30	> 100000	< 0.0001	1.0000	0.9992	0.9930	46994.5193	< 0.0001	1.0000	0.9988	0.9888
40	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	76726.0239	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
50	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
60	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
70	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
80	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
90	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
100	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000

Tabela 5.56: Resultados das simulações para a distribuição beta - Cenário 6 com $\beta_3 = 0.25$

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	> 100000	< 0.0001	0.5326	0.4430	0.2948	4807.3822	< 0.0001	0.4268	0.2964	0.0964
20	> 100000	< 0.0001	0.7970	0.7086	0.5138	12744.3202	< 0.0001	0.7658	0.6530	0.3966
30	18893.3590	< 0.0001	0.8626	0.7894	0.5970	16330.8167	< 0.0001	0.8496	0.7632	0.5252
40	> 100000	< 0.0001	0.9770	0.9534	0.8696	28477.1771	< 0.0001	0.9738	0.9474	0.8404
50	> 100000	< 0.0001	0.9886	0.9772	0.9226	33711.3789	< 0.0001	0.9876	0.9746	0.9050
60	> 100000	< 0.0001	0.9962	0.9886	0.9558	38660.8468	< 0.0001	0.9962	0.9876	0.9456
70	> 100000	< 0.0001	0.9984	0.9952	0.9768	45175.3235	< 0.0001	0.9980	0.9944	0.9738
80	> 100000	< 0.0001	0.9994	0.9988	0.9912	53074.8361	< 0.0001	0.9994	0.9986	0.9900
90	> 100000	< 0.0001	0.9994	0.9992	0.9942	57122.7862	< 0.0001	0.9994	0.9992	0.9942
100	> 100000	< 0.0001	1.0000	0.9998	0.9988	> 100000	< 0.0001	1.0000	0.9998	0.9986

Tabela 5.57: Resultados das simulações para a distribuição beta - Cenário 6 com $\beta_3 = 0.5$

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
10	> 100000	< 0.0001	0.9066	0.8626	0.7304	14212.0043	< 0.0001	0.8526	0.7310	0.3840
20	> 100000	< 0.0001	0.9976	0.9946	0.9804	36275.2783	< 0.0001	0.9972	0.9920	0.9536
30	> 100000	< 0.0001	1.0000	0.9998	0.9948	48422.7947	< 0.0001	1.0000	0.9994	0.9916
40	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
50	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
60	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
70	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
80	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
90	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000
100	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000	> 100000	< 0.0001	1.0000	1.0000	1.0000

5.4 Distribuição binomial negativa

Por fim, vamos estudar o comportamento da distribuição da raiz quadrada sinalizada da estatística de Wald em modelos em que a variável resposta segue a distribuição binomial negativa. A Tabela 5.58 apresenta os cenários de simulação.

Note que, especialmente para essa distribuição, as simulações começam com tamanho amostral a partir de 20, pois, com tamanho 10, os ajustes dos modelos raramente convergiram.

Tabela 5.58: Cenários de simulação para a distribuição binomial negativa.

Cenário	Função de ligação	Coeficientes	Covariáveis	σ
1	Log	$\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 1$ e $\beta_3 = 0$	$X_1 \sim U(0,1)$, $X_2 \sim U(0,1)$ e $X_3 \sim U(0,1)$	0.5
2	Log	$\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 1$ e $\beta_3 = 0$	$X_1 \sim U(0,1)$, $X_2 \sim U(0,1)$ e $X_3 \sim U(0,1)$	1
3	Log	$\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 1$ e $\beta_3 = 0$	$X_1 \sim N(0.5, \frac{1}{12})$, $X_2 \sim GA(0.5, \frac{1}{3})$ e $X_3 \sim GA(0.5, \frac{1}{3})$	0.5
4	Log	$\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 1$ e $\beta_3 = 0$	$X_1 \sim Bern(0.5)$, $X_2 \sim Bern(0.5)$ e $X_3 \sim Bern(0.5)$	0.5
5	Log	$\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 1$ e $\beta_3 = 0$	$X_1 \sim U(0,1)$, $X_2 \sim Bern(0.5)$ e $X_3 \sim Bern(0.5)$	0.5

5.4.1 Resultados considerando $\beta_3 = 0$

Novamente, obtemos as mesmas conclusões que obtidas para as distribuições gaussiana inversa e beta, ou seja, os valores da estatística do teste de Anderson Darling são sempre menores e as taxas de rejeição calculadas são mais próximas dos níveis de significância especificados quando utilizamos a distribuição t.

Portanto, considerando os cenários especificados, em modelos GAMLSS nos quais a variável resposta segue distribuição binomial negativa e o tamanho amostral é pequeno, há evidências de que a distribuição da raiz quadrada sinalizada da estatística de Wald é melhor aproximada pela distribuição t do que pela normal padrão.

Além disso, também não há diferenças significativas nos resultados quando mudamos de cenário.

Tabela 5.59: Resultados das simulações para a distribuição binomial negativa - Cenário 1 com $\beta_3 = 0$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
20	50.2026	< 0.0001	0.1608	0.1032	0.0398	26.4548	< 0.0001	0.1358	0.0806	0.0204
30	15.3632	< 0.0001	0.1448	0.0828	0.0226	7.5378	0.0002	0.1288	0.0718	0.0142
40	12.0055	< 0.0001	0.1236	0.0680	0.0184	8.6921	< 0.0001	0.1152	0.0582	0.0146
50	7.7716	0.0001	0.1276	0.0678	0.0202	4.8413	0.0034	0.1208	0.0620	0.0160
60	4.5246	0.0049	0.1154	0.0578	0.0154	3.2640	0.0201	0.1094	0.0544	0.0126
70	5.4668	0.0017	0.1132	0.0606	0.0162	4.3285	0.0060	0.1074	0.0554	0.0128
80	1.4850	0.1801	0.1078	0.0598	0.0128	0.9509	0.3841	0.1038	0.0570	0.0100
90	3.3616	0.0180	0.1222	0.0598	0.0110	2.4710	0.0513	0.1184	0.0548	0.0092
100	2.1775	0.0735	0.1082	0.0574	0.0154	1.5398	0.1673	0.1040	0.0546	0.0118

Tabela 5.60: Resultados das simulações para a distribuição binomial negativa - Cenário 2 com $\beta_3 = 0$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
20	69.3705	< 0.0001	0.1826	0.1186	0.0436	38.1899	< 0.0001	0.1580	0.0948	0.0216
30	31.1193	< 0.0001	0.1520	0.0892	0.0276	20.0404	< 0.0001	0.1358	0.0732	0.0158
40	17.8248	< 0.0001	0.1420	0.0838	0.0262	11.4821	< 0.0001	0.1298	0.0722	0.0206
50	6.4099	0.0006	0.1266	0.0694	0.0202	3.7167	0.0120	0.1192	0.0642	0.0144
60	6.7584	0.0004	0.1246	0.0736	0.0208	4.3366	0.0060	0.1180	0.0680	0.0166
70	14.3822	< 0.0001	0.1274	0.0708	0.0178	11.9825	< 0.0001	0.1240	0.0658	0.0138
80	3.1210	0.0238	0.1186	0.0678	0.0170	2.0142	0.0902	0.1150	0.0630	0.0140
90	4.3778	0.0057	0.1200	0.0648	0.0156	3.2256	0.0211	0.1156	0.0602	0.0132
100	1.8632	0.1094	0.1118	0.0600	0.0146	1.2796	0.2391	0.1096	0.0570	0.0130

Tabela 5.61: Resultados das simulações para a distribuição binomial negativa - Cenário 3 com $\beta_3 = 0$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
20	38.0231	< 0.0001	0.1626	0.0970	0.0348	17.6810	< 0.0001	0.1376	0.0744	0.0172
30	13.5796	< 0.0001	0.1380	0.0808	0.0236	6.7682	0.0004	0.1254	0.0670	0.0142
40	9.5083	< 0.0001	0.1244	0.0736	0.0186	5.9400	0.0010	0.1150	0.0630	0.0146
50	5.4936	0.0017	0.1234	0.0688	0.0152	3.1399	0.0233	0.1174	0.0612	0.0130
60	8.8533	< 0.0001	0.1194	0.0654	0.0164	7.0936	0.0003	0.1128	0.0606	0.0134
70	6.7488	0.0004	0.1260	0.0670	0.0176	4.8417	0.0034	0.1216	0.0626	0.0140
80	6.8532	0.0004	0.1108	0.0592	0.0122	6.0866	0.0009	0.1072	0.0552	0.0108
90	2.6288	0.0424	0.1174	0.0602	0.0134	1.8681	0.1087	0.1136	0.0562	0.0104
100	3.5753	0.0141	0.1112	0.0626	0.0166	2.7385	0.0372	0.1080	0.0606	0.0144

Tabela 5.62: Resultados das simulações para a distribuição binomial negativa - Cenário 4 com $\beta_3 = 0$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
20	> 100000	< 0.0001	0.1820	0.1168	0.0414	31.6170	< 0.0001	0.1532	0.0880	0.0238
30	19.6357	< 0.0001	0.1444	0.0834	0.0288	10.7322	< 0.0001	0.1288	0.0712	0.0170
40	15.7703	< 0.0001	0.1312	0.0690	0.0196	11.3836	< 0.0001	0.1220	0.0594	0.0146
50	9.1972	< 0.0001	0.1242	0.0738	0.0238	5.9507	0.0010	0.1156	0.0662	0.0170
60	5.6615	0.0014	0.1190	0.0642	0.0174	3.7509	0.0116	0.1116	0.0596	0.0128
70	3.7228	0.0119	0.1182	0.0642	0.0138	2.6130	0.0432	0.1130	0.0588	0.0118
80	2.2690	0.0657	0.1124	0.0598	0.0120	1.5657	0.1615	0.1086	0.0554	0.0106
90	6.1667	0.0008	0.1224	0.0640	0.0156	5.0102	0.0028	0.1178	0.0604	0.0140
100	2.2280	0.0691	0.1138	0.0610	0.0134	1.6150	0.1513	0.1098	0.0578	0.0106

Tabela 5.63: Resultados das simulações para a distribuição binomial negativa - Cenário 5 com $\beta_3 = 0$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
20	53.9919	< 0.0001	0.1742	0.1098	0.0362	27.7932	< 0.0001	0.1482	0.0814	0.0224
30	17.3431	< 0.0001	0.1406	0.0794	0.0248	9.4697	< 0.0001	0.1286	0.0690	0.0148
40	10.9204	< 0.0001	0.1254	0.0744	0.0198	6.9970	0.0003	0.1154	0.0634	0.0146
50	8.0888	0.0001	0.1228	0.0740	0.0238	4.9607	0.0030	0.1170	0.0670	0.0180
60	5.2136	0.0023	0.1180	0.0624	0.0168	3.4759	0.0158	0.1096	0.0580	0.0130
70	4.2452	0.0066	0.1170	0.0612	0.0156	3.1454	0.0231	0.1108	0.0566	0.0130
80	2.5243	0.0481	0.1116	0.0610	0.0128	1.8072	0.1176	0.1084	0.0574	0.0098
90	7.0216	0.0003	0.1194	0.0628	0.0156	5.8834	0.0011	0.1172	0.0590	0.0136
100	1.8301	0.1141	0.1134	0.0598	0.0112	1.2417	0.2522	0.1094	0.0558	0.0094

5.4.2 Resultados considerando $\beta_3 \neq 0$

Analisando os resultados mostrados nas Tabelas 5.64 a 5.73, concluímos, novamente, que o teste de Wald possui um maior poder quando utilizamos a distribuição normal padrão, pois vemos que as taxas rejeição se aproximam mais rapidamente de 1, principalmente para as menores amostras. Dessa forma, as conclusões sobre o poder do teste de Wald foram as mesmas para as quatro distribuições estudadas.

Tabela 5.64: Resultados das simulações para a distribuição binomial negativa - Cenário 1 com $\beta_3 = 0.25$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
20	701.8775	< 0.0001	0.2136	0.1418	0.0600	613.2648	< 0.0001	0.1854	0.1112	0.0334
30	574.6018	< 0.0001	0.1798	0.1100	0.0426	535.3615	< 0.0001	0.1652	0.0958	0.0292
40	946.8686	< 0.0001	0.1944	0.1220	0.0386	907.2706	< 0.0001	0.1852	0.1094	0.0282
50	1366.9038	< 0.0001	0.2172	0.1378	0.0506	1323.1480	< 0.0001	0.2054	0.1270	0.0412
60	1321.7745	< 0.0001	0.2026	0.1310	0.0426	1288.3466	< 0.0001	0.1962	0.1236	0.0372
70	1806.9035	< 0.0001	0.2364	0.1508	0.0536	1767.0793	< 0.0001	0.2314	0.1434	0.0454
80	1683.0942	< 0.0001	0.2228	0.1446	0.0508	1651.7307	< 0.0001	0.2172	0.1372	0.0456
90	1558.2959	< 0.0001	0.2232	0.1388	0.0488	1532.4729	< 0.0001	0.2196	0.1324	0.0432
100	2075.7654	< 0.0001	0.2518	0.1640	0.0580	2044.3803	< 0.0001	0.2468	0.1584	0.0522

Tabela 5.65: Resultados das simulações para a distribuição binomial negativa - Cenário 1 com $\beta_3 = 0.5$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
20	2414.1749	< 0.0001	0.3090	0.2250	0.1112	2141.0405	< 0.0001	0.2792	0.1850	0.0702
30	2311.4800	< 0.0001	0.2888	0.2032	0.0868	2162.0477	< 0.0001	0.2726	0.1762	0.0624
40	3703.6631	< 0.0001	0.3598	0.2642	0.1160	3524.3324	< 0.0001	0.3444	0.2452	0.0930
50	5687.2060	< 0.0001	0.4720	0.3564	0.1684	5443.5435	< 0.0001	0.4568	0.3314	0.1444
60	5397.0779	< 0.0001	0.4542	0.3350	0.1584	5213.2274	< 0.0001	0.4418	0.3206	0.1410
70	6908.0263	< 0.0001	0.5270	0.4064	0.2036	6687.8665	< 0.0001	0.5184	0.3932	0.1846
80	6847.8740	< 0.0001	0.5214	0.4000	0.2004	6660.6126	< 0.0001	0.5134	0.3874	0.1816
90	6076.7652	< 0.0001	0.4822	0.3694	0.1786	5935.6382	< 0.0001	0.4738	0.3614	0.1624
100	8344.6128	< 0.0001	0.5946	0.4688	0.2536	8144.0135	< 0.0001	0.5910	0.4588	0.2380

Tabela 5.66: Resultados das simulações para a distribuição binomial negativa - Cenário 2 com $\beta_3 = 0.25$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
20	466.9549	< 0.0001	0.2070	0.1382	0.0570	396.4508	< 0.0001	0.1820	0.1084	0.0320
30	314.6439	< 0.0001	0.1744	0.1008	0.0392	288.1962	< 0.0001	0.1544	0.0856	0.0266
40	528.4557	< 0.0001	0.1710	0.1054	0.0328	503.9058	< 0.0001	0.1598	0.0940	0.0242
50	682.6307	< 0.0001	0.1718	0.1056	0.0378	660.1463	< 0.0001	0.1644	0.0960	0.0306
60	690.2467	< 0.0001	0.1656	0.1066	0.0320	672.4970	< 0.0001	0.1594	0.0982	0.0260
70	1031.7313	< 0.0001	0.1866	0.1162	0.0358	1009.5797	< 0.0001	0.1824	0.1092	0.0294
80	880.2587	< 0.0001	0.1742	0.1036	0.0350	864.4386	< 0.0001	0.1690	0.0992	0.0314
90	881.9737	< 0.0001	0.1806	0.1092	0.0330	867.5179	< 0.0001	0.1750	0.1024	0.0296
100	1140.2732	< 0.0001	0.1888	0.1148	0.0356	1124.1382	< 0.0001	0.1852	0.1102	0.0312

Tabela 5.67: Resultados das simulações para a distribuição binomial negativa - Cenário 2 com $\beta_3 = 0.5$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
20	1412.8274	< 0.0001	0.2616	0.1822	0.0858	1245.2465	< 0.0001	0.2314	0.1492	0.0516
30	1222.8647	< 0.0001	0.2274	0.1508	0.0580	1143.7869	< 0.0001	0.2102	0.1278	0.0430
40	2014.9410	< 0.0001	0.2698	0.1810	0.0730	1925.1440	< 0.0001	0.2560	0.1660	0.0552
50	2924.9845	< 0.0001	0.3214	0.2164	0.0880	2820.3182	< 0.0001	0.3070	0.2030	0.0728
60	2827.7888	< 0.0001	0.3038	0.2116	0.0896	2746.7229	< 0.0001	0.2962	0.1984	0.0744
70	3815.2084	< 0.0001	0.3646	0.2588	0.1098	3716.0015	< 0.0001	0.3554	0.2480	0.0978
80	3601.7498	< 0.0001	0.3464	0.2378	0.0994	3523.1355	< 0.0001	0.3388	0.2288	0.0898
90	3354.6903	< 0.0001	0.3352	0.2342	0.0962	3290.1933	< 0.0001	0.3296	0.2254	0.0880
100	4531.7330	< 0.0001	0.4028	0.2944	0.1250	4447.5008	< 0.0001	0.3960	0.2874	0.1148

Tabela 5.68: Resultados das simulações para a distribuição binomial negativa - Cenário 3 com $\beta_3 = 0.25$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
20	542.0428	< 0.0001	0.1966	0.1240	0.0490	476.4602	< 0.0001	0.1676	0.0964	0.0268
30	829.8045	< 0.0001	0.2016	0.1276	0.0422	779.2404	< 0.0001	0.1846	0.1064	0.0280
40	1484.9680	< 0.0001	0.2352	0.1468	0.0540	1422.4990	< 0.0001	0.2192	0.1328	0.0412
50	888.4838	< 0.0001	0.1858	0.1152	0.0382	860.6476	< 0.0001	0.1772	0.1050	0.0304
60	1162.6113	< 0.0001	0.1992	0.1236	0.0400	1133.0891	< 0.0001	0.1910	0.1150	0.0344
70	1427.3146	< 0.0001	0.2234	0.1400	0.0466	1394.9473	< 0.0001	0.2148	0.1348	0.0394
80	1273.6685	< 0.0001	0.2074	0.1300	0.0418	1249.7166	< 0.0001	0.2022	0.1238	0.0370
90	1284.4274	< 0.0001	0.1988	0.1258	0.0428	1263.7563	< 0.0001	0.1952	0.1204	0.0360
100	2321.7579	< 0.0001	0.2768	0.1820	0.0618	2284.7302	< 0.0001	0.2724	0.1758	0.0562

Tabela 5.69: Resultados das simulações para a distribuição binomial negativa - Cenário 3 com $\beta_3 = 0.5$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
20	2239.9671	< 0.0001	0.3020	0.2136	0.0972	1996.5321	< 0.0001	0.2690	0.1744	0.0560
30	3482.3255	< 0.0001	0.3598	0.2584	0.1216	3246.2931	< 0.0001	0.3358	0.2320	0.0884
40	6242.2237	< 0.0001	0.5006	0.3906	0.2010	5882.5994	< 0.0001	0.4856	0.3656	0.1650
50	3647.2068	< 0.0001	0.3574	0.2540	0.1140	3511.4430	< 0.0001	0.3434	0.2370	0.0956
60	5026.1843	< 0.0001	0.4340	0.3202	0.1484	4857.6784	< 0.0001	0.4242	0.3034	0.1266
70	5846.2687	< 0.0001	0.4796	0.3710	0.1802	5665.1611	< 0.0001	0.4714	0.3582	0.1622
80	5527.4412	< 0.0001	0.4556	0.3442	0.1676	5385.3180	< 0.0001	0.4480	0.3328	0.1514
90	5085.6131	< 0.0001	0.4310	0.3152	0.1498	4975.6865	< 0.0001	0.4258	0.3036	0.1350
100	9457.2549	< 0.0001	0.6360	0.5246	0.2990	9210.2620	< 0.0001	0.6318	0.5160	0.2792

Tabela 5.70: Resultados das simulações para a distribuição binomial negativa - Cenário 4 com $\beta_3 = 0.25$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
20	> 100000	< 0.0001	0.2644	0.1850	0.0870	1310.1164	< 0.0001	0.2334	0.1488	0.0564
30	1957.2523	< 0.0001	0.2656	0.1778	0.0798	1834.0884	< 0.0001	0.2436	0.1612	0.0568
40	2440.5558	< 0.0001	0.2892	0.1984	0.0766	2332.2945	< 0.0001	0.2770	0.1814	0.0596
50	2997.1729	< 0.0001	0.3226	0.2230	0.0884	2890.5268	< 0.0001	0.3126	0.2094	0.0728
60	3827.3984	< 0.0001	0.3702	0.2626	0.1136	3708.6241	< 0.0001	0.3606	0.2506	0.0956
70	4430.3193	< 0.0001	0.3944	0.2758	0.1278	4312.5761	< 0.0001	0.3842	0.2640	0.1124
80	5208.2390	< 0.0001	0.4320	0.3202	0.1526	5080.5772	< 0.0001	0.4248	0.3096	0.1372
90	5415.8491	< 0.0001	0.4478	0.3298	0.1590	5294.9654	< 0.0001	0.4398	0.3206	0.1480
100	6094.3169	< 0.0001	0.4872	0.3700	0.1716	5967.4186	< 0.0001	0.4816	0.3586	0.1614

Tabela 5.71: Resultados das simulações para a distribuição binomial negativa - Cenário 4 com $\beta_3 = 0.5$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
20	> 100000	< 0.0001	0.4752	0.3768	0.2178	5020.0123	< 0.0001	0.4430	0.3312	0.1470
30	> 100000	< 0.0001	0.5758	0.4584	0.2642	7330.5641	< 0.0001	0.5540	0.4236	0.2118
40	9298.9576	< 0.0001	0.6266	0.5112	0.3030	8672.1168	< 0.0001	0.6124	0.4860	0.2570
50	11857.1132	< 0.0001	0.7150	0.6142	0.3850	11143.7939	< 0.0001	0.7042	0.5942	0.3472
60	15310.8037	< 0.0001	0.8080	0.7118	0.4922	14418.3963	< 0.0001	0.7996	0.6994	0.4606
70	17381.3784	< 0.0001	0.8546	0.7710	0.5630	16449.7386	< 0.0001	0.8474	0.7604	0.5346
80	20786.1568	< 0.0001	0.9062	0.8446	0.6448	19678.3651	< 0.0001	0.9038	0.8360	0.6206
90	21179.5381	< 0.0001	0.9076	0.8468	0.6640	20156.1602	< 0.0001	0.9050	0.8394	0.6442
100	24591.9997	< 0.0001	0.9400	0.8964	0.7356	23389.1582	< 0.0001	0.9384	0.8930	0.7202

Tabela 5.72: Resultados das simulações para a distribuição binomial negativa - Cenário 5 com $\beta_3 = 0.25$

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
20	> 100000	< 0.0001	0.2554	0.1766	0.0824	1197.5705	< 0.0001	0.2258	0.1440	0.0492
30	1957.1127	< 0.0001	0.2644	0.1798	0.0718	1837.2474	< 0.0001	0.2450	0.1568	0.0500
40	2923.1169	< 0.0001	0.3138	0.2122	0.0902	2793.1452	< 0.0001	0.2978	0.1932	0.0732
50	3116.0645	< 0.0001	0.3324	0.2304	0.0960	3002.5534	< 0.0001	0.3192	0.2140	0.0792
60	3641.6661	< 0.0001	0.3494	0.2506	0.1130	3531.2887	< 0.0001	0.3418	0.2382	0.0970
70	4440.3971	< 0.0001	0.3970	0.2856	0.1292	4320.6967	< 0.0001	0.3868	0.2764	0.1124
80	5132.6988	< 0.0001	0.4324	0.3156	0.1464	5008.0083	< 0.0001	0.4232	0.3034	0.1324
90	5749.4422	< 0.0001	0.4586	0.3484	0.1676	5619.4459	< 0.0001	0.4514	0.3388	0.1534
100	6232.0073	< 0.0001	0.4898	0.3738	0.1860	6100.5576	< 0.0001	0.4832	0.3636	0.1708

Tabela 5.73: Resultados das simulações para a distribuição binomial negativa - Cenário 5 com $\beta_3 = 0.5$.

	Normal					t				
n	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**	**AD**	**Valor-p**	**10%**	**5%**	**1%**
20	> 100000	< 0.0001	0.4608	0.3628	0.2062	4714.6095	< 0.0001	0.4260	0.3092	0.1368
30	> 100000	< 0.0001	0.5830	0.4670	0.2670	7541.0353	< 0.0001	0.5614	0.4326	0.2164
40	8845.8712	< 0.0001	0.6114	0.4898	0.2832	8267.1750	< 0.0001	0.5930	0.4654	0.2386
50	12635.5986	< 0.0001	0.7416	0.6374	0.4102	11844.5474	< 0.0001	0.7320	0.6214	0.3726
60	15812.6142	< 0.0001	0.8180	0.7300	0.5044	14872.9727	< 0.0001	0.8132	0.7154	0.4736
70	18121.4399	< 0.0001	0.8648	0.7886	0.5840	17121.5017	< 0.0001	0.8612	0.7772	0.5566
80	21372.2502	< 0.0001	0.9150	0.8510	0.6582	20209.9495	< 0.0001	0.9116	0.8444	0.6364
90	21920.6545	< 0.0001	0.9170	0.8608	0.6820	20835.0316	< 0.0001	0.9150	0.8530	0.6584
100	25504.5734	< 0.0001	0.9466	0.9050	0.7578	24220.0118	< 0.0001	0.9456	0.9016	0.7422

Capítulo 6

Conclusões

O principal objetivo deste trabalho foi verificar se, em modelos GAMLSS, a distribuição da raiz quadrada sinalizada da estatística de Wald é, sob H_0, melhor aproximada pela distribuição normal padrão ou pela t. Para isso, conduzimos estudos de simulação de Monte Carlo com modelos GAMLSS, nos quais a variável resposta seguiu distribuição gaussiana inversa, Bernoulli, beta ou binomial negativa.

A partir das análises dos resultados, a conclusão final foi que, nos casos em que a variável resposta segue distribuição gaussiana inversa, beta ou binomial negativa e o tamanho amostral é pequeno, a distribuição da raiz quadrada sinalizada da estatística de Wald é melhor aproximada, sob H_0, pela distribuição t. Isso se dá pois, em todos os cenários em que H_0 é verdadeira, os valores-p do teste de Anderson-Darling são maiores para a distribuição t nas menores amostras, além das taxas de rejeição calculadas serem consistentemente mais próximas dos níveis de significância especificados. Entretanto, para a distribuição Bernoulli concluímos o contrário, ou seja, o desempenho da normal padrão foi melhor em aproximar a distribuição da raiz quadrada sinalizada da estatística de Wald.

É importante lembrar que as conclusões obtidas são específicas para os cenários utilizados nas simulações. Além disso, vemos que, em geral, não existe diferença entre o uso da distribuição normal padrão e da distribuição t quando o tamanho amostral é grande.

Observamos também que, para todos os cenários e distribuições, o teste de Wald possui poder um pouco maior quando utilizamos a normal padrão, principalmente, em amostras menores. Entretanto, para podermos comparar o poder entre dois testes, devemos garantir que o erro tipo I dos dois testes é igual. Nesse caso, vimos que isso não ocorre.

Por fim, nota-se também que, nos casos em que $\beta_i \neq 0$, o teste de Wald apresenta um desempenho melhor para as distribuições contínuas (gaussiana inversa e beta) do que para as discretas (Bernoulli e binomial negativa), tanto na distribuição normal padrão quanto na t. Isso fica claro quando observamos que as taxas de rejeição calculadas sob H_1 costumam ser mais próximas de 1 nos casos em que as distribuições são contínuas, isto é, o poder do teste de Wald é maior. É claro que para alguns cenários específicos essa conclusão não vale, mas percebemos essa diferença na maior parte dos resultados.

Referências Bibliográficas

Bolfarine, H. e Sandoval, M. C. (2001). *Introdução à inferência estatística*, volume 2. SBM.

Brolo, C. (2019). Distribuição da estatística de wald em amostras finitas para modelos de regressão não normais. Relatório de iniciação científica, Universidade Federal de São Carlos.

Buse, A. (1982). The likelihood ratio, wald, and lagrange multiplier tests: An expository note. *The American Statistician*, **36**(3a), 153–157.

Cole, T. J. e Green, P. J. (1992). Smoothing reference centile curves: the lms method and penalized likelihood. *Statistics in medicine*, **11**(10), 1305–1319.

Faraway, J., Marsaglia, G., Marsaglia, J. e Baddeley, A. (2021). *goftest: Classical Goodness-of-Fit Tests for Univariate Distributions*. R package version 1.2-3.

Lemonte, A. (2016). *The gradient test: another likelihood-based test*. Academic Press.

McCullagh, P. e Nelder, J. A. (2019). *Generalized linear models*. Routledge.

Nelder, J. A. e Wedderburn, R. W. (1972). Generalized linear models. *Journal of the Royal Statistical Society: Series A (General)*, **135**(3), 370–384.

Paula, G. A. (2004). *Modelos de regressão: com apoio computacional*. IME-USP São Paulo.

Rigby, R. A. e Stasinopoulos, D. (1996a). A semi-parametric additive model for variance heterogeneity. *Statistics and Computing*, **6**(1), 57–65.

Rigby, R. A. e Stasinopoulos, D. M. (2005). Generalized additive models for location, scale and shape. *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)*, **54**(3), 507–554.

Rigby, R. A. e Stasinopoulos, M. D. (1996b). Mean and dispersion additive models. Em *Statistical theory and computational aspects of smoothing*, páginas 215–230. Springer.

Sen, P. K., Singer, J. M. e de Lima, A. C. P. (2010). *From finite sample to asymptotic methods in statistics*, volume 28. Cambridge University Press.

Stasinopoulos, D. M. e Rigby, R. A. (2008). Generalized additive models for location scale and shape (gamlss) in r. *Journal of Statistical Software*, **23**, 1–46.

Stephens, M. A. (1974). Edf statistics for goodness of fit and some comparisons. *Journal of the American statistical Association*, **69**(347), 730–737.

Stephens, M. A. (1986). Tests based on edf statistic. Em *Goodness-of-fit Techniques*, páginas 97–193. Marcel Dekker.

Turkman, M. A. A. e Silva, G. L. (2000). Modelos lineares generalizados-da teoria à prática. *Sociedade Portuguesa de Estatística, Lisboa*.

Apêndice A

Códigos de simulação

Seguem abaixo os códigos utilizados nos estudos de simulação. Nesse caso, o código se refere ao cenário 1 para a distribuição beta. A simulação de outros cenários e para outras distribuições foi feita de forma análoga.

```
library(gamlss.dist)
library(gamlss)
library(nortest)
library(goftest)
library(ADGofTest)
library(glm2)
library(kableExtra)
library(dplyr)

options(scipen = 100)
options(digits = 9)
options(warn = 2)
options(max.print = 5000)

set.seed(89)

k = 5000 ## numero de iteracoes
## tamanho da amostra
```

```
## valores dos parametros
beta_0 = -1
beta_1 = 2
beta_2 = 1
beta_3 = 0.5
sigma = 0.1



monte_carlo_wald = function(n){

  X1 = runif(n,0,1)
  X2 = runif(n,0,1)
  X3 = runif(n,0,1)

  cont_erros = 0
  nao_deu_erro = 0

  valores_wald_lss = rep(NA,k)
  valores_wald_glm = rep(NA,k)

  normal_10_lss = 0
  normal_5_lss = 0
  normal_1_lss = 0

  normal_10_glm = 0
  normal_5_glm = 0
  normal_1_glm = 0



  t_10_lss_lss = 0
  t_5_lss_lss = 0
  t_1_lss_lss = 0
```

```
t_10_lss_glm = 0
t_5_lss_glm = 0
t_1_lss_glm = 0

t_10_glm_lss = 0
t_5_glm_lss = 0
t_1_glm_lss = 0

t_10_glm_glm = 0
t_5_glm_glm = 0
t_1_glm_glm = 0


for (j in 1:k){


  valores_Y = rep(NA,n)

  for (i in 1:n){

    eta = beta_0 + beta_1*X1[i] + beta_2*X2[i] + beta_3*X3[i]

    mu = exp(eta)/(1+exp(eta))

    valores_Y[i] = rBE(1, mu = mu, sigma = sigma)

  }

  dados = data.frame(valores_Y, X1, X2, X3)

  modelo_lss = gamlss(valores_Y ~ X1 + X2 + X3, family = BE(mu.link = "logit"),
                      data = dados)
  print(j)
```

```
valores_wald_lss[j] = as.data.frame(summary(modelo_lss, type = "qr"))$`t value`[4]

if(abs(valores_wald_lss[j]) >= abs(qt(0.05,n-5))){
  t_10_lss_lss = t_10_lss_lss + 1
}
if(abs(valores_wald_lss[j]) >= abs(qt(0.025,n-5))){
  t_5_lss_lss = t_5_lss_lss + 1
}
if(abs(valores_wald_lss[j]) >= abs(qt(0.005,n-5))){
  t_1_lss_lss = t_1_lss_lss + 1
}

if(abs(valores_wald_lss[j]) >= abs(qt(0.05,n-4))){
  t_10_lss_glm = t_10_lss_glm + 1
}
if(abs(valores_wald_lss[j]) >= abs(qt(0.025,n-4))){
  t_5_lss_glm = t_5_lss_glm + 1
}
if(abs(valores_wald_lss[j]) >= abs(qt(0.005,n-4))){
  t_1_lss_glm = t_1_lss_glm + 1
}


if(abs(valores_wald_lss[j]) >= abs(qnorm(0.05))){
  normal_10_lss = normal_10_lss + 1
}
if(abs(valores_wald_lss[j]) >= abs(qnorm(0.025))){
  normal_5_lss = normal_5_lss + 1
}
if(abs(valores_wald_lss[j]) >= abs(qnorm(0.005))){
  normal_1_lss = normal_1_lss + 1
```

```
    }

    ####################################################################

  }

  taxa_normal_10_lss = normal_10_lss/k
  taxa_normal_5_lss = normal_5_lss/k
  taxa_normal_1_lss = normal_1_lss/k

  taxa_t_10_lss_lss = t_10_lss_lss/k
  taxa_t_5_lss_lss = t_5_lss_lss/k
  taxa_t_1_lss_lss = t_1_lss_lss/k

  ############################################


  resultados = list("wald_lss" = valores_wald_lss,
                    "taxa_normal_1_lss" = taxa_normal_1_lss,
                    "taxa_normal_5_lss" = taxa_normal_5_lss,
                    "taxa_normal_10_lss" = taxa_normal_10_lss,
                    "taxa_t_1_lss_lss" = taxa_t_1_lss_lss,
                    "taxa_t_5_lss_lss" = taxa_t_5_lss_lss,
                    "taxa_t_10_lss_lss" = taxa_t_10_lss_lss)

  return(resultados)
}

n_10 = monte_carlo_wald(10)
n_20 = monte_carlo_wald(20)
```

```
n_30 = monte_carlo_wald(30)
n_40 = monte_carlo_wald(40)
n_50 = monte_carlo_wald(50)
n_60 = monte_carlo_wald(60)
n_70 = monte_carlo_wald(70)
n_80 = monte_carlo_wald(80)
n_90 = monte_carlo_wald(90)
n_100 = monte_carlo_wald(100)


n_10_normal_lss = goftest::ad.test(n_10$wald_lss, null = 'pnorm', mean = 0,
    sd = 1)
n_10_t_lss_lss = goftest::ad.test(n_10$wald_lss, null = 'pt', df = 5)

n_20_normal_lss = goftest::ad.test(n_20$wald_lss, null = 'pnorm', mean = 0,
    sd = 1)
n_20_t_lss_lss = goftest::ad.test(n_20$wald_lss, null = 'pt', df = 15)


n_30_normal_lss = goftest::ad.test(n_30$wald_lss, null = 'pnorm', mean = 0,
    sd = 1)
n_30_t_lss_lss = goftest::ad.test(n_30$wald_lss, null = 'pt', df = 25)


n_40_normal_lss =goftest::ad.test(n_40$wald_lss, null = 'pnorm', mean = 0,
    sd = 1)
n_40_t_lss_lss = goftest::ad.test(n_40$wald_lss, null = 'pt', df = 35)


n_50_normal_lss =goftest::ad.test(n_50$wald_lss, null = 'pnorm', mean = 0,
    sd = 1)
n_50_t_lss_lss = goftest::ad.test(n_50$wald_lss, null = 'pt', df = 45)
```

```
n_60_normal_lss =goftest::ad.test(n_60$wald_lss, null = 'pnorm', mean = 0,
    sd = 1)
n_60_t_lss_lss = goftest::ad.test(n_60$wald_lss, null = 'pt', df = 55)

n_70_normal_lss =goftest::ad.test(n_70$wald_lss, null = 'pnorm', mean = 0,
    sd = 1)
n_70_t_lss_lss = goftest::ad.test(n_70$wald_lss, null = 'pt', df = 65)



n_80_normal_lss =goftest::ad.test(n_80$wald_lss, null = 'pnorm', mean = 0,
    sd = 1)
n_80_t_lss_lss = goftest::ad.test(n_80$wald_lss, null = 'pt', df = 75)

n_90_normal_lss =goftest::ad.test(n_90$wald_lss, null = 'pnorm', mean = 0,
    sd = 1)
n_90_t_lss_lss = goftest::ad.test(n_90$wald_lss, null = 'pt', df = 85)

n_100_normal_lss =goftest::ad.test(n_100$wald_lss, null = 'pnorm', mean = 0,
    sd = 1)
n_100_t_lss_lss = goftest::ad.test(n_100$wald_lss, null = 'pt', df = 95)

amostras = c(10,20,30,40,50,60,70,80,90,100)

ad_normal_lss = rbind(n_10_normal_lss$statistic,
                      n_20_normal_lss$statistic,
                      n_30_normal_lss$statistic,
                      n_40_normal_lss$statistic,
                      n_50_normal_lss$statistic,
                      n_60_normal_lss$statistic,
                      n_70_normal_lss$statistic,
                      n_80_normal_lss$statistic,
                      n_90_normal_lss$statistic,
                      n_100_normal_lss$statistic)
```

```
pvalor_normal_lss = rbind(n_10_normal_lss$p.value,
                          n_20_normal_lss$p.value,
                          n_30_normal_lss$p.value,
                          n_40_normal_lss$p.value,
                          n_50_normal_lss$p.value,
                          n_60_normal_lss$p.value,
                          n_70_normal_lss$p.value,
                          n_80_normal_lss$p.value,
                          n_90_normal_lss$p.value,
                          n_100_normal_lss$p.value)

taxas_normal_10_lss = rbind(n_10$taxa_normal_10_lss,
                            n_20$taxa_normal_10_lss,
                            n_30$taxa_normal_10_lss,
                            n_40$taxa_normal_10_lss,
                            n_50$taxa_normal_10_lss,
                            n_60$taxa_normal_10_lss,
                            n_70$taxa_normal_10_lss,
                            n_80$taxa_normal_10_lss,
                            n_90$taxa_normal_10_lss,
                            n_100$taxa_normal_10_lss)

taxas_normal_5_lss = rbind( n_10$taxa_normal_5_lss,
                            n_20$taxa_normal_5_lss,
                            n_30$taxa_normal_5_lss,
                            n_40$taxa_normal_5_lss,
                            n_50$taxa_normal_5_lss,
                            n_60$taxa_normal_5_lss,
                            n_70$taxa_normal_5_lss,
                            n_80$taxa_normal_5_lss,
                            n_90$taxa_normal_5_lss,
                            n_100$taxa_normal_5_lss)
```

```
taxas_normal_1_lss = rbind(n_10$taxa_normal_1_lss,
                           n_20$taxa_normal_1_lss,
                           n_30$taxa_normal_1_lss,
                           n_40$taxa_normal_1_lss,
                           n_50$taxa_normal_1_lss,
                           n_60$taxa_normal_1_lss,
                           n_70$taxa_normal_1_lss,
                           n_80$taxa_normal_1_lss,
                           n_90$taxa_normal_1_lss,
                           n_100$taxa_normal_1_lss)

ad_t_lss_lss = rbind(n_10_t_lss_lss$statistic,
                     n_20_t_lss_lss$statistic,
                     n_30_t_lss_lss$statistic,
                     n_40_t_lss_lss$statistic,
                     n_50_t_lss_lss$statistic,
                     n_60_t_lss_lss$statistic,
                     n_70_t_lss_lss$statistic,
                     n_80_t_lss_lss$statistic,
                     n_90_t_lss_lss$statistic,
                     n_100_t_lss_lss$statistic)

pvalor_t_lss_lss = rbind(n_10_t_lss_lss$p.value,
                         n_20_t_lss_lss$p.value,
                         n_30_t_lss_lss$p.value,
                         n_40_t_lss_lss$p.value,
                         n_50_t_lss_lss$p.value,
                         n_60_t_lss_lss$p.value,
                         n_70_t_lss_lss$p.value,
                         n_80_t_lss_lss$p.value,
                         n_90_t_lss_lss$p.value,
                         n_100_t_lss_lss$p.value)
```

```
taxas_t_10_lss_lss = rbind(n_10$taxa_t_10_lss_lss,
                           n_20$taxa_t_10_lss_lss,
                           n_30$taxa_t_10_lss_lss,
                           n_40$taxa_t_10_lss_lss,
                           n_50$taxa_t_10_lss_lss,
                           n_60$taxa_t_10_lss_lss,
                           n_70$taxa_t_10_lss_lss,
                           n_80$taxa_t_10_lss_lss,
                           n_90$taxa_t_10_lss_lss,
                           n_100$taxa_t_10_lss_lss)

taxas_t_5_lss_lss = rbind( n_10$taxa_t_5_lss_lss,
                           n_20$taxa_t_5_lss_lss,
                           n_30$taxa_t_5_lss_lss,
                           n_40$taxa_t_5_lss_lss,
                           n_50$taxa_t_5_lss_lss,
                           n_60$taxa_t_5_lss_lss,
                           n_70$taxa_t_5_lss_lss,
                           n_80$taxa_t_5_lss_lss,
                           n_90$taxa_t_5_lss_lss,
                           n_100$taxa_t_5_lss_lss)

taxas_t_1_lss_lss = rbind(n_10$taxa_t_1_lss_lss,
                          n_20$taxa_t_1_lss_lss,
                          n_30$taxa_t_1_lss_lss,
                          n_40$taxa_t_1_lss_lss,
                          n_50$taxa_t_1_lss_lss,
                          n_60$taxa_t_1_lss_lss,
                          n_70$taxa_t_1_lss_lss,
                          n_80$taxa_t_1_lss_lss,
                          n_90$taxa_t_1_lss_lss,
                          n_100$taxa_t_1_lss_lss)
```

```
resultados_lss_lss = format(round(data.frame(amostras,
                                             ad_normal_lss,
                                             pvalor_normal_lss,
                                             taxas_normal_10_lss,
                                             taxas_normal_5_lss,
                                             taxas_normal_1_lss,
                                             ad_t_lss_lss,
                                             pvalor_t_lss_lss,
                                             taxas_t_10_lss_lss,
                                             taxas_t_5_lss_lss,
                                             taxas_t_1_lss_lss),4), nsmall = 4)


resultados_lss_lss %>% kbl(format = "latex",
    caption = "Modelando pelo GAMLSS e graus de liberdade dados pelo GAMLSS (n-5)",
    col.names = c("n", "AD", "Valor-p", "10%", "5%", "1%",
                  "AD", "Valor-p", "10%", "5%", "1%"))
```