



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



OLAVO QUEIROGA DE MELO

O GRAU DE UMA APLICAÇÃO: UMA ABORDAGEM VIA APLICAÇÃO DIFERENCIAL

SÃO CARLOS
2023

OLAVO QUEIROGA DE MELO

O GRAU DE UMA APLICAÇÃO: UMA ABORDAGEM VIA APLICAÇÃO DIFERENCIAL

Monografia apresentada ao Curso de Bacharelado em Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

Orientadora: Profa. Dra. Thaís Maria Dalbello

SÃO CARLOS
2023

AGRADECIMENTOS

Agradeço,

à toda minha família, em especial aos meus pais Fátima Francisca de Queiroga Melo e Estevão José de Melo pelo apoio e assistência;

à minha irmã Thabata Maria Queiroga de Melo por ter me apresentado ao mundo da matemática, pelo apoio e pela parceria de vida;

ao meu irmão Diego de Melo que, apesar de distante, me inspira a cada dia;

à todos os professores com quem tive contato durante o período de graduação, em especial minha orientadora, Thaís Maria Dalbello, que me acompanhou desde meu primeiro semestre da graduação, sempre me auxiliando no que fosse necessário;

à todos os amigos que fiz durante este período, pelos momentos de estudo e descontração, além das diversas histórias que vivemos, tornando a graduação mais leve e prazerosa.

RESUMO

Neste trabalho, estudamos os conceitos de grau relativo e grau local para aplicações definidas entre variedades diferenciáveis. Além disso, definimos o índice de Poincaré-Hopf e vimos propriedades relevantes sobre esse índice como o célebre Teorema de Poincaré-Hopf. Na sequência, demonstramos este teorema para o caso de variedades suaves e fizemos um breve estudo de generalizações deste importante resultado para os casos de variedades diferenciáveis com bordo e variedades singulares.

Palavras-chave: Variedades Diferenciáveis. Grau Topológico. Aplicações Diferenciáveis. Poincaré-Hopf. Variedades Singulares.

ABSTRACT

In this work, we study the concepts of degree and local degree for maps between manifolds. Furthermore, we define the Poincaré-Hopf index and study some relevant properties of this index such as the famous Poincaré-Hopf Theorem. In the sequence, we prove this theorem in the case of manifolds and we present a brief study about some generalizations of this important theorem in the case of bordered manifolds and singular varieties.

Keywords: Manifolds. Topological Degree. Differential Maps. Poincaré-Hopf. Singular varieties.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Diagrama Teorema 2.1.10	12
Figura 2.2 – Fibrado tangente da esfera S^1	24
Figura 4.1 – Representação gráfica do campo de vetores v em \mathbb{R}^2	48
Figura 4.2 – Representação do campo de vetores v em \mathbb{R}^2	49
Figura 4.3 – Sentido positivo	50
Figura 4.4 – Sentido negativo	50
Figura 4.5 – $I_{PH}(v, \rho) = 1$	51
Figura 4.6 – $I_{PH}(v, \rho) = -1$	51
Figura 4.7 – S^2	52
Figura 4.8 – Vizinhança de b	52
Figura 4.9 – Vizinhança de a	52
Figura 4.10 – Representação Geométrica de uma Singularidade Simples	55
Figura 4.11 – Triangulação de S^2	63
Figura 4.12 – Triangulação do Toro	63
Figura 4.13 – Triangulação do Toro Pinçado	64
Figura 4.14 – Deformação das Esferas	64
Figura 4.15 – Campo de Hopf	70
Figura 5.1 – Toro pinçado com pinçamento no ponto a	77
Figura 5.2 – Campos vetoriais w e v sobre o toro pinçado	77
Figura 5.3 – Representação do campo de vetores w .	82
Figura 5.4 – Representação geométrica dos campos de vetores.	84
Figura A .1 – Representação Geométrica dos Vetores	89
Figura A .2 – Representação Geométrica da Projeção Ortogonal	90
Figura A .3 – Representação de um caminho poligonal no conjunto $B \setminus \{x_q\}$	124
Figura A .4 – Cone de \mathbb{R}^3	125

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	7
2	VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS	8
2.1	SUPERFÍCIES DIFERENCIÁVEIS	8
2.2	O ESPAÇO VETORIAL TANGENTE A UMA SUPERFÍCIE	15
2.3	VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS	20
2.4	ESPAÇO VETORIAL TANGENTE A UMA VARIEDADE	21
2.5	APLICAÇÕES DIFERENCIÁVEIS ENTRE VARIEDADES	25
2.6	TRANSVERSALIDADE	29
2.7	ORIENTAÇÃO EM VARIEDADES	31
2.8	HOMOTOPIA	31
3	GRAU DE UMA APLICAÇÃO	34
3.1	GRAU RELATIVO DE UMA APLICAÇÃO DIFERENCIÁVEL	34
3.2	GRAU LOCAL DE UMA APLICAÇÃO	42
4	ÍNDICE DE POINCARÉ-HOPF	48
4.1	CAMPOS DE VETORES E O ÍNDICE DE POINCARÉ-HOPF EM \mathbb{R}^2	48
4.2	CAMPOS DE VETORES EM VARIEDADES	53
4.3	ÍNDICE DE POINCARÉ-HOPF EM VARIEDADES	58
4.4	CARACTERÍSTICA DE EULER	61
4.5	TEOREMA DE POINCARÉ-HOPF	64
5	GENERALIZAÇÕES DO TEOREMA DE POINCARÉ-HOPF	72
5.1	VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS COM BORDO	72
5.2	VARIEDADES SINGULARES	76
5.3	VARIEDADES ALGÉBRICAS	78
5.4	ESPAÇOS ANALÍTICOS COMPLEXOS	80
5.5	ÍNDICE RADIAL	81
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	85
	REFERÊNCIAS	86
APÊNDICE A	TOPOLOGIA DO ESPAÇO EUCLIDIANO	87
APÊNDICE B	CÁLCULO DIFERENCIAL DE APLICAÇÕES EM GERAL	131

1 INTRODUÇÃO

Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Um problema amplamente estudado em diversos campos da matemática é o de encontrar soluções para equações do tipo $f(x) = y$, seja para demonstrar a existência ou a unicidade de soluções. Neste sentido, existem diversas áreas da matemática que abordam este tipo de problema. A teoria do grau topológico, presente em muitas áreas da matemática, nos fornece diversas informações de problemas como mencionado acima. Por exemplo, a teoria do grau é fundamental para provar a existência de soluções em problemas elípticos não lineares com condição de fronteira de Dirichlet no estudo de equações diferenciais parciais.

Assim, o objetivo principal deste trabalho é o estudo do grau topológico de aplicações diferenciais entre variedades diferenciáveis. Para isso, inicialmente, fizemos um estudo preliminar sobre o conceito de variedades diferenciáveis.

Primeiramente, motivamos tal estudo com as superfícies diferenciáveis e, logo após, definimos tais variedades. Na sequência, concentramos nossos estudos nos espaços vetoriais tangentes à essas variedades, os quais possuem grande importância no estudo do grau. Ademais, finalizando esta etapa, definimos aplicações diferenciáveis entre essas variedades, estudamos propriedades destas aplicações e introduzimos conceitos de transversalidade de aplicações, homotopia e orientação em variedades, sendo eles essenciais para alguns resultados seguintes.

Na seção seguinte, definimos o grau relativo de uma aplicação entre variedades diferenciáveis e demonstramos diversos resultados sobre este objeto, tais como a independência do cálculo do grau de uma aplicação ao ponto escolhido sob certas hipóteses.

Em seguida, definimos o grau local de uma aplicação e provamos diversos resultados recorrentes do estudo do grau relativo, visto anteriormente.

Na sequência, definimos o índice de Poincaré-Hopf utilizando o grau local visto anteriormente. Além disso, estudamos algumas propriedades deste índice e definimos a característica de Euler de uma variedade diferenciável, com o objetivo de enunciar e demonstrar o célebre Teorema de Poincaré-Hopf.

Finalmente, provamos o Teorema de Poincaré-Hopf e estudamos brevemente algumas generalizações deste importante resultado para o caso de variedades singulares.

2 VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

Nesta seção, faremos um estudo sobre as variedades diferenciáveis. Inicialmente, estudaremos Superfícies Diferenciáveis, um caso particular de variedade que servirá de motivação para o estudo de variedades diferenciáveis.

Posteriormente, definiremos variedades diferenciáveis no contexto geral e faremos um estudo acerca deste objeto.

As referências utilizadas foram [Lima \(2011\)](#), [Judice \(2012\)](#) e [Manfredo \(2014\)](#).

2.1 SUPERFÍCIES DIFERENCIÁVEIS

Para tratarmos de superfícies em \mathbb{R}^n , primeiramente, façamos algumas definições relevantes.

Definição 2.1.1. Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ uma aplicação diferenciável. Dizemos que f é uma imersão quando, para todo $x \in U$, a derivada $f'(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ é uma transformação linear injetora.

Definição 2.1.2. Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável no conjunto aberto U . O posto da aplicação f no ponto x é a dimensão da imagem de sua derivada $f'(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, ou seja, é o posto da transformação linear $f'(x)$.

Observação 2.1.3. Sendo $f = (f_1, \dots, f_n) : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma imersão, sendo $f_i : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, dado $x \in U$, sua derivada $f'(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é injetora. Como consequência, temos

a) $\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = f'(x)(e_i) \in \mathbb{R}^n; i = 1, \dots, m \right\}$, é um conjunto de vetores linearmente independente, em que $\{e_1, \dots, e_m\}$ é uma base de \mathbb{R}^m ;

b) $m \leq n$;

c) A matriz jacobiana, $\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right]_{n \times m}$ $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$ tem posto m , ou seja, m vetores coluna são linearmente independentes, ou ainda, a dimensão da imagem de $f'(c)$ é m .

Definição 2.1.4 (Parametrização). Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto. Um mergulho de classe C^k de U em \mathbb{R}^n é uma imersão de classe C^k , $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que φ é um homeomorfismo entre U e $\varphi(U)$. Nessas condições, φ é chamado de parametrização de classe C^k e dimensão m do subconjunto $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.

Vejamos alguns exemplos de parametrizações.

Exemplo 2.1.5 (Parametrizações de dimensão 1). Sendo $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e, considerando um caminho de classe C^k , $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, φ é um mergulho se, e somente se, $\varphi : I \rightarrow \varphi(I)$ é

um homeomorfismo e $\varphi'(t) = (\varphi'_1(t), \dots, \varphi'_n(t)) \neq (0, \dots, 0)$, para todo $t \in I$.

Notemos que, supondo que para algum $t \in I$, $\varphi'(t) = 0$, teríamos a transformação $\varphi'(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ identicamente nula, ou seja, $\varphi'(t)(v) = 0$, para todo $v \in \mathbb{R}$. Consequentemente, $\ker(\varphi'(t)) = \mathbb{R}$ e $\varphi'(t)$ não seria injetora.

Exemplo 2.1.6 (Parametrizações de Dimensão 2 em \mathbb{R}^3). Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e $\varphi : U \rightarrow V = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^3$ uma parametrização. Nessas condições, o conjunto V é chamado de superfície local e, sendo $\varphi(x_1, x_2) = (\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_1, x_2), \varphi_3(x_1, x_2))$, com $a = (x_1, x_2) \in U$, definimos

$$v_1 = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} \right)$$

$$v_2 = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} \right)$$

e

$$J(\varphi(a)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(a) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}(a) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2}(a) \end{bmatrix}$$

Afirmar que $\varphi'(x)$ é injetora para todo $x \in U$ equivale a dizer que os vetores v_1 e v_2 são linearmente independentes, para todo $x \in U$, ou ainda, que o produto vetorial $v_1 \times v_2$ seja não nulo.

Em geral, o vetor $n(x_1, x_2) = v_1 \times v_2$ é chamado de vetor normal a $\varphi(U)$ no ponto $\varphi(x_1, x_2)$.

Com isso, vamos a definição de superfície.

Definição 2.1.7. Uma superfície de classe C^k de dimensão m do \mathbb{R}^n é um subconjunto não vazio $M = M^m \subset \mathbb{R}^n$ tal que, para cada $p \in M$ existe uma vizinhança aberta U que possui uma parametrização de classe C^k e dimensão m , ou seja, existe $\varphi : U_0 \subset \mathbb{R}^m \rightarrow U \subset M$ que é uma parametrização de classe C^k e dimensão m de U . Chamamos o número $n - m$ de co-dimensão de M .

As hiperfícies apresentadas na Definição B.2.1 são importantes exemplos de superfícies.

Proposição 2.1.8. $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma superfície de classe C^k e dimensão n se, e somente se, M é uma hiperfície de classe C^k

Demonstração. Suponha que M é uma superfície de classe C^k e dimensão n . De fato, sendo $p \in M$ qualquer e $U_p \subset U \cap M \subset \mathbb{R}^{n+1}$, com U aberto, uma vizinhança aberta de p munida de uma parametrização de classe C^k e dimensão n , existe $V_p \subset \mathbb{R}^n$ aberto, tal que $\varphi : V_p \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U_p \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma parametrização.

Como φ é um mergulho, em particular, é um homeomorfismo, logo, existe um único $q \in V_p \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi(q) = p$.

Definindo $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_{n+1}$, teremos $f(p) = p_{n+1}$ e

$$\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(p) = 1 \neq 0.$$

Logo, a matriz de ordem 1×1 , $\left[\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(p) \right]$ será invertível.

Assim, do Teorema B.1.10, existem abertos $Z \subset U$, com $p \in Z$, $a \in V \subset \mathbb{R}^n$ e $\xi : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\xi(a) = p_{n+1}$, satisfazendo

$$f^{-1}(p_{n+1}) \cap Z = \{(x_1, \dots, x_n, \xi(x_1, \dots, x_n)); x = (x_1, \dots, x_n) \in U\}.$$

Tomando $M \cap Z$, teremos $M \cap Z \neq \emptyset$, pois $p \in M \cap Z$ e tal conjunto será localmente gráfico de uma restrição de ξ que é de classe C^k . Portanto, como tomamos p arbitrário, segue que M é uma hipersuperfície de classe C^k .

Reciprocamente, se $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma hipersuperfície de classe C^k , por definição, dado $p \in M$ qualquer, existe um aberto $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $p \in V$ e $V \cap M$ é gráfico de uma função $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, com U aberto em que para algum $i = 1, \dots, n+1$ vale $x_i = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$. Para simplificar notação, suporemos que $i = n+1$.

Assim, definindo $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, dada por

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)),$$

teremos φ um homeomorfismo sobre sua imagem $\varphi(U) = V$, pois V será gráfico de f e, portanto, é homeomorfo ao seu domínio.

Além disso, dado $x \in U$ qualquer, a jacobiana de $\varphi(x)$ será dada por

$$J(\varphi(x)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}_{(n+1) \times n}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \end{bmatrix}_{(n+1) \times n}.$$

A matriz acima terá posto n . Consequentemente, $\varphi'(x)$ será injetora. Portanto, φ será

uma parametrização de U sobre V de dimensão n .

Como tomamos $p \in M$ arbitrário, segue que M é uma superfície de classe C^k e dimensão n . \square

Uma superfície M , definida acima, é um subconjunto de \mathbb{R}^n , logo possui a topologia induzida de \mathbb{R}^n e, portanto, o conjunto aberto U pode ser visto como a interseção de M com um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n .

Assim, uma superfície de dimensão n em \mathbb{R}^n será um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n , pois poderá ser expresso como a união arbitrária de subconjuntos abertos.

Por outro lado, se M for uma superfície zero-dimensional, ou seja, dado $p \in M$, existe uma vizinhança de p dotada de uma parametrização com um ponto, então M será um conjunto de pontos isolados.

Vejam os um exemplo interessante de superfície.

Exemplo 2.1.9. A esfera unitária S^n é uma hipersuperfície de classe C^∞ compacta em \mathbb{R}^{n+1} . Logo, pela Proposição 2.1.8, S^n é uma superfície de classe C^∞ e dimensão n .

Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície de classe C^k e $U \subset M$ um conjunto aberto dotado de uma parametrização $\varphi : U_0 \subset \mathbb{R}^m \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$. Os pontos de U são determinados por m parâmetros, visto que $p \in U$ implica $p = \varphi(x_1, \dots, x_m)$, sendo $(x_1, \dots, x_m) \in U_0$.

Além disso, se tivermos um difeomorfismo de classe C^k , $\xi : V \rightarrow U_0$, então

$$\varphi \circ \xi : V \rightarrow U$$

será ainda uma parametrização de U , pois, como φ é uma parametrização, φ é um homeomorfismo sobre sua imagem e $\varphi'(x)$ é injetora para todo $x \in U$. Por outro lado, como ξ é um difeomorfismo, temos ξ bijetora, diferenciável e sua inversa também diferenciável.

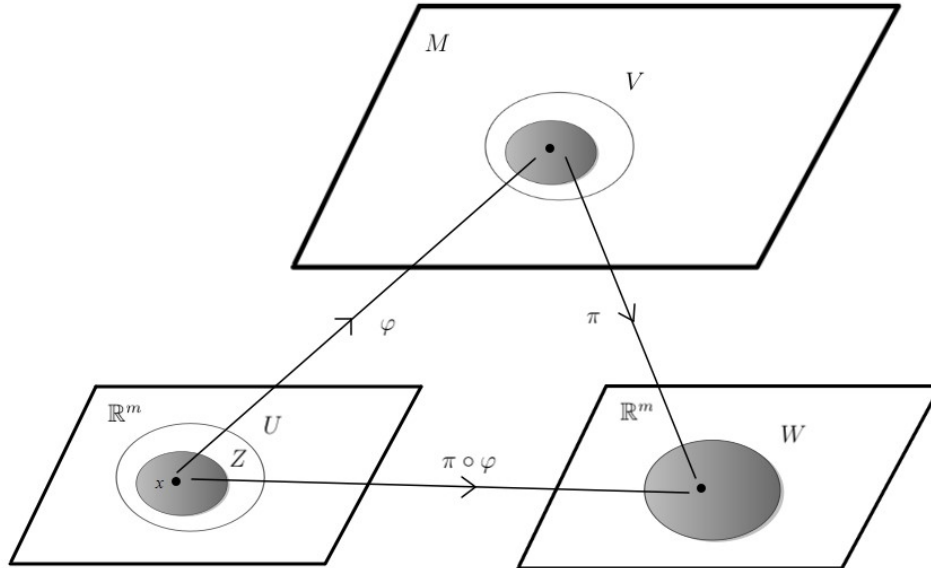
Assim, $\varphi \circ \xi$ será diferenciável, para cada $x \in \xi(V)$, teremos $\varphi'(\xi(x))$ injetora e, como a composição de aplicações contínuas é ainda contínua, $\varphi \circ \xi$ será um homeomorfismo sobre sua imagem U .

Nessas condições, a aplicação ξ é chamada de mudança de coordenadas.

Vejam agora que essa é a única maneira de obter novas parametrizações de U . Para isso, utilizaremos alguns resultados.

Teorema 2.1.10. *Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície de dimensão m e classe C^k , $V \subset M$ um conjunto aberto e $\varphi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V \subset M$ uma parametrização. Então, para cada $p = \varphi(x) \in V$, existe uma projeção $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $\pi \circ \varphi$ é um difeomorfismo entre abertos $Z \subset U$ e $W \subset \mathbb{R}^m$, com $x \in Z$.*

Figura 2.1 – Diagrama Teorema 2.1.10



Fonte: Elaborada pelo autor

Demonstração. De fato, como φ é uma parametrização, $\varphi'(x)$ é injetora para todo $x \in U$. Assim, considerando a matriz jacobiana $J(\varphi(x)) = \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) \right]_{n \times m}$ teremos que tal matriz terá posto m , logo m vetores linha linearmente independentes. Ordenando os índices desses vetores por $i_1 < i_2 < \dots < i_m$, teremos que a matriz $J = \left[\frac{\partial \varphi_{i_k}}{\partial x_j}(x) \right]_{m \times m}$ $k = 1, \dots, m$ será invertível. Consequentemente, considerando a projeção $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ a qual projeta as coordenadas de índice i_k , $k = 1, \dots, m$, teremos que J será a matriz jacobiana de $\pi \circ \varphi$ e, pelo Teorema da Aplicação Inversa (Teorema B.3.31), o resultado segue. \square

Corolário 2.1.11. *Toda superfície de classe C^k é localmente gráfico de uma aplicação de classe C^k .*

Demonstração. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície de classe C^k e dimensão m e considere $\varphi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V \subset M$ uma parametrização do aberto V . Pelo Teorema 2.1.10, para cada $p = \varphi(x) \in V$, existe uma projeção $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $\pi \circ \varphi$ é um difeomorfismo entre abertos $Z \subset U$ e $W \subset \mathbb{R}^m$, com $x \in Z$.

Assim, tomando π dessa forma e escrevendo os elementos de \mathbb{R}^n como $z = (x, x')$, em que $x = \pi(z)$ e sendo $W = \varphi(Z)$, como $\pi \circ \varphi$ é um difeomorfismo, a aplicação $\psi = \varphi \circ (\pi \circ \varphi)^{-1} :$

$W \rightarrow V$ será uma parametrização. Ademais, dado $x \in \mathbb{R}^m$, temos

$$\begin{aligned}\pi(\psi(x)) &= \pi \circ [\varphi \circ (\pi \circ \varphi)^{-1}](x) \\ &= (\pi \circ \varphi) \circ (\pi \circ \varphi)^{-1}(x) = x.\end{aligned}$$

Logo, $\psi(x) = (x, x')$.

Portanto, V é o gráfico da aplicação de classe C^k $f : W \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$ definida por $f(x) = x'$. \square

Corolário 2.1.12. *Sejam $V_0 \subset \mathbb{R}^m$ e $U_0 \subset \mathbb{R}^r$ conjuntos abertos, $V \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto qualquer e $\varphi : V_0 \rightarrow V$ uma parametrização de classe C^k . Se $f : U_0 \rightarrow V$ é uma aplicação de classe C^k , então a composta $\varphi^{-1} \circ f : U_0 \rightarrow V_0$ é de classe C^k e para cada $x \in U_0$ e $z = (\varphi^{-1} \circ f)(x)$, vale $(\varphi^{-1} \circ f)'(x) = [\varphi'(z)]^{-1} \circ f'(x)$.*

Demonstração. De fato, dado $a \in V$, com $\varphi(x) = a = f(y)$, pelo Teorema 2.1.10, sabemos que existe uma projeção $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $\pi \circ \varphi$ é um difeomorfismo de classe C^k sobre um conjunto aberto de \mathbb{R}^m . Assim, tomando uma vizinhança de x , teremos que

$$\varphi^{-1} \circ f = (\pi \circ \varphi)^{-1} \circ \pi \circ f.$$

Portanto, como a composição de aplicações de classe C^k é uma aplicação de classe C^k , segue que $\varphi^{-1} \circ f$ é de classe C^k .

Por outro lado, tomando $h = \varphi^{-1} \circ f$, teremos $\varphi \circ h = f$, logo, aplicando a regra da cadeia, obtemos

$$\varphi'(\varphi^{-1} \circ f(x))(\varphi^{-1} \circ f)'(x) = f'(x).$$

Aplicando a inversa da aplicação derivada $\varphi'(\varphi^{-1} \circ f(x))$ restrita a imagem de $\varphi'(\varphi^{-1} \circ f(x))$, obtemos

$$(\varphi^{-1} \circ f)'(x) = [\varphi'(\varphi^{-1} \circ f(x))]^{-1} \circ f'(x) = [\varphi'(z)]^{-1} \circ f'(x).$$

\square

Uma consequência direta do Teorema 2.1.10 com o Corolário acima é a seguinte.

Corolário 2.1.13. *Sejam $\varphi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ e $\psi : W \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ parametrizações de classe C^k . Então, a mudança de coordenadas $\xi = \psi^{-1} \circ \varphi$ é um difeomorfismo de classe C^k .*

Demonstração. De fato, pelo Corolário acima, teremos ξ de classe C^k . Fazendo $\xi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi$, novamente, do mesmo Corolário, ξ^{-1} será de classe C^k . Assim, como φ e ψ são bijetoras sobre as respectivas imagens, segue que ξ é um difeomorfismo de classe C^k . \square

Com isso, podemos concluir que a maneira de conseguir novas parametrizações de um subconjunto $U \subset M$ de uma superfície de classe C^k e dimensão m é única, pois, sendo

$\varphi : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow U$ e $\psi : W \subset \mathbb{R}^m \rightarrow Z$ parametrizações quaisquer com $U \cap Z \neq \emptyset$ e $U, Z \subset M$, teremos que a aplicação

$$\xi = \psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(U \cap Z) \rightarrow \psi^{-1}(U \cap Z)$$

é um homeomorfismo de abertos do \mathbb{R}^m .

Além disso, do Corolário 2.1.13, segue que ξ é um difeomorfismo, implicando que toda mudança de coordenadas será obtida por meio de difeomorfismos de abertos do \mathbb{R}^m .

Na sequência, podemos estender o conceito de diferenciabilidade, antes definido sobre conjuntos abertos de \mathbb{R}^n , agora para um caso mais geral, que é o seguinte.

Definição 2.1.14. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície de classe C^k e dimensão m . Dizemos que $f : M \rightarrow \mathbb{R}^p$ é diferenciável no ponto $p \in M$ quando existe uma parametrização $\varphi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$, com $p \in V \subset M$, de classe C^k tal que $f \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ é diferenciável no ponto $q \in U$, sendo $\varphi(q) = p$.

A definição acima não depende da parametrização φ escolhida, pois, sendo $\psi : W \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V$ uma parametrização de classe C^k qualquer, do Corolário 2.1.12, segue que

$$f \circ \psi = (f \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \psi)$$

é diferenciável no ponto $\varphi^{-1}(p) = q$, sendo W uma vizinhança qualquer do ponto q .

Com isso, podemos estender também o conceito de uma aplicação $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ ser de classe C^k , mas isso só irá fazer sentido se considerarmos M uma superfície de classe C^k .

Assim, podemos fazer outra definição de diferenciabilidade, porém entre superfícies.

Definição 2.1.15. Sejam $M^n \subset \mathbb{R}^p$ e $N^m \subset \mathbb{R}^q$ superfícies de classe C^k . Dizemos que uma aplicação $f : M^n \rightarrow N^m$ é diferenciável em um ponto $p \in M^n$ quando, considerando $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^q$, f é diferenciável nesse ponto.

Novamente, o conceito de aplicação acima ser de classe C^k será uma extensão do que vimos anteriormente. Logo, dizemos que $f : M^n \subset \mathbb{R}^p \rightarrow N^m \subset \mathbb{R}^q$ é de classe C^k quando para cada $p \in M^n$, existir uma parametrização $\varphi : U \rightarrow V \subset M^n$, com $p \in V$ de classe C^k tal que $f \circ \varphi$ é de classe C^k .

Do Corolário 2.1.12, tal definição vale para qualquer parametrização de classe C^k .

Com essas definições, temos o seguinte resultado.

Teorema 2.1.16. Sejam $M \subset \mathbb{R}^p$ e $N \subset \mathbb{R}^q$ superfícies de classe C^k e dimensão n e m , respectivamente e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação. Então, f é de classe C^k se, e somente se, para todo $p \in M$, existem parametrizações de classe C^k $\varphi : U \rightarrow V \subset M$ e $\psi : W \rightarrow Z \subset N$, com $p \in V$, $f(V) \subset Z$ tais que $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : U \rightarrow W$ é de classe C^k .

Demonstração. De fato, dado $p \in M$, considerando uma parametrização $\psi : W \rightarrow Z \subset N$ de classe C^k , com $f(p) \in Z$, como $f : M \rightarrow N$ é de classe C^k , segue que f é contínua. Assim, pela

continuidade de f , existe uma parametrização $\varphi : U \rightarrow V \subset M$, com $f(V) \subset Z$. Assim, como $f \in C^k$, por definição, $f \circ \varphi : U \rightarrow Z \subset \mathbb{R}^q$ é de classe C^k . Logo, pelo Corolário 2.1.12, segue que $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : U \rightarrow W$ é de classe C^k .

Reciprocamente, se $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : U \rightarrow W$ é de classe C^k , como ψ é de classe C^k , teremos

$$\psi \circ (\psi^{-1} \circ f \circ \varphi) : U \rightarrow Z \Rightarrow f \circ \varphi : U \rightarrow Z$$

de classe C^k .

Portanto, como $\varphi \in C^k$, segue da definição que $f \in C^k$. \square

Corolário 2.1.17. *Seja $M \subset \mathbb{R}^n$, $N \subset \mathbb{R}^r$ e $P \subset \mathbb{R}^s$ superfícies de classe C^k e dimensão d_1, d_2 e d_3 , respectivamente, se $f : M \rightarrow N$ e $g : N \rightarrow P$ são de classe C^k , então $g \circ f : M \rightarrow P$ é de classe C^k .*

2.2 O ESPAÇO VETORIAL TANGENTE A UMA SUPERFÍCIE

No apêndice B.2 deste trabalho, fizemos uma motivação ao estudo de superfícies e variedades diferenciáveis por meio de hiperfícies e seus espaços tangentes. Assim, é interessante analisarmos como se comporta o Espaço Tangente a uma Superfície. Veremos posteriormente que esses espaços possuem várias propriedades e nos trazem várias informações relevantes sobre a superfície.

A seguir, definimos o espaço tangente à uma superfície.

Definição 2.2.1. *Sejam $M \subset \mathbb{R}^m$ uma superfície de classe C^k e dimensão n , $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset M$ uma parametrização e $p = \varphi(x) \in V$ um ponto qualquer. O espaço tangente a M no ponto p é o espaço vetorial de dimensão n dado pela imagem de $\varphi'(x)$, ou seja, é o espaço vetorial $\varphi'(x)(\mathbb{R}^n)$. Denotamos tal espaço por T_pM .*

Como φ é uma parametrização, $\varphi'(x)$ é injetora. Conseqüentemente, o conjunto dos vetores

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \varphi'(x)(e_i), i = 1, \dots, n,$$

formam uma base de T_pM .

Ademais, como T_pM é um subespaço de \mathbb{R}^m , obrigatoriamente tal subespaço passa pela origem. Entretanto, o representamos graficamente como a *variedade afim tangente* $p + T_pM$, paralela a T_pM e passando por p .

Além disso, a definição do espaço tangente a M no ponto p independe da escolha da parametrização, pois, sendo $T_pM = \varphi'(x)(\mathbb{R}^n)$, com $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset M$ e tomando outra parametrização qualquer $\psi : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Z \subset M$, pelo o que vimos anteriormente, a mudança de

coordenadas $\xi = \psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(V \cap Z) \rightarrow \psi^{-1}(V \cap Z)$ é um difeomorfismo, conseqüentemente, pela Proposição B.3.20, $\xi'(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ será um isomorfismo, ou seja, $\xi'(x)(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^m$. Assim, como $\varphi = \psi \circ \xi$, dado $v \in \mathbb{R}^n$ qualquer, aplicando a regra da cadeia, obtemos

$$\varphi'(x)(v) = \psi'(\xi(x)) \circ \xi'(x)(v).$$

Logo, chamando $\xi(x) = z$, obtemos

$$\varphi'(x)(\mathbb{R}^n) = \psi'(z) \circ \xi'(x)(\mathbb{R}^n) = \psi'(z)(\mathbb{R}^n).$$

Com essas considerações, conseguimos exibir uma caracterização semelhante ao caso de hipérfaces para o espaço tangente de uma superfície qualquer.

Proposição 2.2.2. *Seja $M \subset \mathbb{R}^m$ uma superfície de classe C^k e dimensão n . Dado $p \in M$, o vetor v pertence ao espaço $T_p M$ se, e somente se, $v = \lambda'(0)$, sendo $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ diferenciável com $\lambda(0) = p$.*

Demonstração. De fato, tomando $v \in T_p M$, por definição, existe uma parametrização $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset M$, com $p = \varphi(x) \in V$ tal que $v = \varphi'(x)(u)$, para algum $u \in \mathbb{R}^n$, ou seja, da definição de diferenciabilidade de aplicações,

$$v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + tu) - \varphi(x)}{t}.$$

Definindo $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ por $\lambda(t) = \varphi(x + tu)$, temos λ diferenciável, $\lambda(0) = \varphi(x) = p$ e, pela regra da cadeia, $\lambda'(0) = \varphi'(x)(u) = v$.

Reciprocamente, sendo $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ um caminho diferenciável qualquer tal que $\gamma(0) = p$ e $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset M$ uma parametrização tal que $p = \varphi(x) \in V$. Supondo sem perda de generalidade que $\gamma((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset V$, pelo Corolário 2.1.10, temos $\varphi^{-1} \circ \gamma$ diferenciável e

$$(\varphi^{-1} \circ \gamma)'(0) = [\varphi'(\varphi^{-1}(\gamma(0)))]^{-1} \circ \gamma'(0) \Rightarrow (\varphi^{-1} \circ \gamma)'(0) = [\varphi'(x)]^{-1} \circ \gamma'(0).$$

Aplicando $\varphi'(x)$ de ambos os lados, obtemos

$$\varphi'(x)((\varphi^{-1} \circ \gamma)'(0)) = \gamma'(0).$$

Portanto, $\gamma'(0) \in T_p M$. □

Alguns exemplos de espaço vetorial tangente que podemos exibir são o caso em que a superfície possui dimensão 0. Neste caso, o espaço vetorial tangente a um ponto dessa superfície é apenas o vetor nulo.

Por outro lado, se considerarmos uma superfície de dimensão n em \mathbb{R}^n , o espaço vetorial tangente será o próprio \mathbb{R}^n .

Outro exemplo de superfície é a esfera unitária S^n de \mathbb{R}^{n+1} . Aqui, dado um ponto $p \in S^n$, o espaço tangente $T_p S^n$ será o complemento ortogonal do vetor p , $p^\perp = \{v \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle p, v \rangle = 0\}$, como vimos anteriormente.

Definição 2.2.3. Sejam $M \subset \mathbb{R}^m$ uma superfície de classe C^k e dimensão n e $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset M$ uma parametrização. O referencial móvel associado à φ no ponto $p = \varphi(x)$ é a base do espaço vetorial tangente a M no ponto p

$$\mathcal{B}_\varphi(x) = \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x) \right\}.$$

Como $\mathcal{B}_\varphi(x)$ é uma base de $T_p M$, dado $v \in T_p M$, podemos escrever v da forma

$$v = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x), a_i \in \mathbb{R}.$$

Se considerarmos outra parametrização $\psi : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Z \subset \mathbb{R}^m$ tal que $p \in Z$, determinemos as coordenadas de v na nova base $\mathcal{B}_\psi(y)$, sendo $p = \psi(y)$. Para isto, consideremos a mudança de coordenadas $\xi = \psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(V \cap Z) \rightarrow \psi^{-1}(V \cap Z)$. De fato, $\varphi|_{\varphi^{-1}(V \cap Z)} = \psi \circ \xi$. Aplicando a regra da cadeia, obtemos

$$\varphi'(x) = \psi'(\xi(x)) \circ \xi'(x).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) &= \varphi'(x)(e_i) \\ &= \psi'(\xi(x))(\xi'(x)(e_i)) \\ &= \psi'(\xi(x)) \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}(x) \cdot e_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}(x) \psi'(\xi(x))(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(\xi(x)). \end{aligned}$$

Ou seja, a matriz mudança de base $M_{B_\varphi(x)}^{B_\psi(y)}$ será dada por

$$M_{B_\varphi(x)}^{B_\psi(y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \xi_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix},$$

que é a matriz jacobiana de ξ calculada em x . Logo,

$$v = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial \psi}{\partial y_i}(y),$$

em que

$$b_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(x) a_j.$$

Agora, com intuito de generalizar um resultado visto sobre funções diferenciáveis, vejamos uma definição de valor regular para uma aplicação diferenciável

Definição 2.2.4. Seja $f : U \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável no aberto U . Um ponto $c \in \mathbb{R}^n$ é um valor regular de f se, e somente se, para todo $x \in U$ tal que $f(x) = c$, temos $f'(x) : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ sobrejetora.

De fato, quando $n = 1$, se c é valor regular, dado $x \in U$ tal que $f(x) = c$, $f'(x) : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ é sobrejetora. Em outras palavras, $f'(x)$ não é identicamente nula, ou seja, $\text{grad}(f(x)) \neq 0$. Portanto, tais definições são equivalentes quando considerado o caso de funções diferenciáveis.

Assim, vejamos um resultado sobre valores regulares para superfícies.

Teorema 2.2.5. Seja $f : U \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^k e $c \in U$ um valor regular de f . Então, a imagem inversa $M = f^{-1}(c) = \{x \in U; f(x) = c\}$ é uma superfície de classe C^k e dimensão m em \mathbb{R}^{m+n} . Além disso, o espaço vetorial tangente $T_p M$ em cada $p \in M$ é o núcleo de $f'(p) : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, definido por $\ker(f'(p)) = \{x \in \mathbb{R}^{m+n} : f'(p)(x) = 0\}$.

Demonstração. De fato, como f é uma aplicação de classe C^k e c um valor regular de f , dado $p = (a, b) \in M$, $f'(p)$ é sobrejetora, logo, a imagem de $f'(p)$ possui dimensão n . Em outras palavras a matriz associada à transformação derivada possui posto n . Logo, ordenando índices $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$ tais que os n vetores colunas desses índices sejam linearmente independentes e tomando a matriz

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \right]_{n \times n}, \quad i = i_1, i_2, \dots, i_n \text{ e } j = 1, \dots, n,$$

tal matriz será invertível e, pelo Teorema B.1.10, existem abertos $Z \subset U$, com $p \in Z$, $V \subset \mathbb{R}^m$ e uma aplicação $\xi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $\xi(a) = b$ de classe C^k tais que $f^{-1}(c) \cap Z = \{(x, \xi(x)); x \in V\}$.

Em outras palavras, $f^{-1}(c)$ é localmente gráfico de uma aplicação de classe C^k . Assim, considerando $\varphi : W \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$ dada por $\varphi(x) = (x, \xi(x))$, teremos que φ é uma parametrização de todo o conjunto M . Portanto, $f^{-1}(c) = M$ é uma superfície de classe C^k e dimensão m .

Ademais, dado $p \in M$ e sendo T_pM o espaço vetorial tangente a M no ponto p , dado $v \in T_pM$, pela Proposição 2.2.2, temos $v = \lambda'(0)$, sendo $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ um caminho diferenciável com $\lambda(0) = p$. Logo, $f'(p)(v) = (f \circ \lambda)'(0) = 0$, pois, como λ leva qualquer $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ para um ponto de M , teremos que f aplicada nesse ponto será constante igual a c .

Portanto, $T_pM \subset \ker(f'(p))$ e, como $f'(p)$ é sobrejetiva, segue do Teorema do núcleo e imagem que $\ker(f'(p))$ possui dimensão m e, conseqüentemente, $T_pM = \ker(f'(p))$. \square

Vejamos alguns exemplos de superfícies.

Exemplo 2.2.6 (O toro de dimensão 2). Sejam $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eixo } z\}$ e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2$. Então, f é de classe C^∞ e a derivada $f'(p) \neq 0$ para todo $p = (x, y, z) \in U$ tal que $p \notin S$, sendo $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 4 \text{ e } z = 0\}$.

Assim, 0 é o único valor não regular de f . Além disso, considerando uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $0 < c < 4$, teremos que $f^{-1}(c)$ será um toro gerado pela rotação de um círculo de raio \sqrt{c} com centro percorrendo S .

Exemplo 2.2.7 (Grupo especial linear $SL(\mathbb{R}^n)$). Os espaços vetoriais $M_{n \times p}(\mathbb{R})$ e \mathbb{R}^{np} são isomorfos. Sendo A uma matriz $n \times p$, ou seja, de n linhas e p colunas, denotaremos por A_1, A_2, \dots, A_n os vetores coluna de A .

Considerando $M_{n \times p}(\mathbb{R})$, a base canônica desse espaço é o conjunto de matrizes $\{E_{r,s} = (e_{ij})_{n \times p}; e_{ij} = 1, \text{ se } i = r, j = s, e_{ij} = 0, \text{ caso contrário}\}$, sendo $1 \leq r \leq n$ e $1 \leq s \leq p$.

Sendo $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, denotaremos por A_{rs} a matriz de ordem $(n-1) \times (n-1)$ obtida pela eliminação da r -ésima linha e s -ésima coluna.

Para prosseguir, precisaremos definir primeiro o grupo linear $GL(\mathbb{R}^n)$, que é o subconjunto de $M_n(\mathbb{R})$ constituído das matrizes que possuem determinante diferente de 0.

De fato, a função $\det : M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^∞ por conta de ser n -linear nos vetores colunas de uma matriz dada. Além disso, sua derivada é dada por, sendo $X, H \in M_n(\mathbb{R})$,

$$\det'(X)(H) = \sum_{i=1}^n \det(X_1, \dots, H_i, \dots, X_n).$$

No caso em que $X = I$, temos

$$\det'(I)(H) = \sum_{i=1}^n \det(e_1, \dots, H_i, \dots, e_n) = \sum_{i=1}^n h_{ii} = \text{traço de } H.$$

Além disso,

$$\frac{\partial \det}{\partial x_{rs}}(X) = \det'(X) \cdots E_{r,s} = (-1)^{r+s} \det(X_{rs}).$$

Considerando a restrição $\det : GL(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, da expansão do determinante, segue que para alguma matriz menor, digamos A_{rs} , teremos $\det(A_{rs}) \neq 0$. Logo, tal restrição será uma submersão de classe C^∞ , ou seja, todo valor $c \in \mathbb{R}$, com $c \neq 0$ será um valor regular dessa restrição.

Portando, do Teorema 2.2.5, segue que o conjunto

$$SL(\mathbb{R}^n) = \{X \in GL(\mathbb{R}^n); \det(X) = 1\} = \det^{-1}(1)$$

é uma superfície de classe C^∞ e dimensão $n^2 - 1$ em \mathbb{R}^{n^2} . Tal conjunto é um subgrupo de $GL(\mathbb{R}^n)$ e é chamado de grupo especial linear.

Pelo mesmo Teorema visto anteriormente, o espaço tangente a $SL(\mathbb{R}^n)$ em I é o conjunto de todas as matrizes de traço nulo, visto que

$$\det'(I)(H) = \sum_{i=1}^n \det(e_1, \dots, H_i, \dots, e_n) = \sum_{i=1}^n h_{ii} = \text{traço de } H.$$

2.3 VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

Agora, iremos estudar as Variedades Diferenciáveis, que como veremos é um conceito que generaliza os conceitos de hipersuperfícies e superfícies. Para isso, veremos alguns elementos para definir uma variedade diferenciável e, posteriormente, definir uma orientação sobre ela. Primeiramente, vejamos a definição de um espaço topológico de Hausdorff.

Definição 2.3.1 (Espaço de Hausdorff). Um espaço topológico Hausdorff é um espaço topológico A tal que para todos os elementos $a, b \in A$ com $a \neq b$ existem conjuntos abertos $V_a, V_b \subset A$ contendo os pontos a e b , respectivamente, satisfazendo $V_a \cap V_b = \emptyset$.

Vejamos alguns conceitos que servirão de base para definir uma variedade diferenciável.

Definição 2.3.2. Seja M um espaço topológico e suponha $U \subset M$ um aberto. Uma carta em M é um homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ sobre o aberto $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$.

Definição 2.3.3. Seja M um espaço topológico. Um atlas m -dimensional \mathcal{U} sobre M é uma coleção de cartas $\varphi : U \subset M \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ tal que os domínios dessas cartas cobrem M .

Definição 2.3.4. Sejam M um espaço topológico, $\varphi : U \subset M \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ e $\psi : V \subset M \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^m$ cartas tais que $U \cap V \neq \emptyset$. Nessas condições, o homeomorfismo

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

é denominado mudança de coordenadas.

Sendo $\psi \circ \varphi^{-1}$ uma mudança de coordenadas, sua inversa $(\psi \circ \varphi^{-1})^{-1} = \varphi \circ \psi^{-1}$ também será uma mudança de coordenadas.

Vejamos agora o conceito de diferenciabilidade em um atlas.

Definição 2.3.5. Seja \mathcal{U} um atlas m -dimensional sobre o espaço topológico M . Dizemos que \mathcal{U} é diferenciável de classe C^k quando todas as mudanças de coordenadas forem aplicações diferenciáveis de classe C^k .

Supondo que o atlas \mathcal{U} é diferenciável de classe C^k , todas as mudanças de coordenadas serão difeomorfismos.

Agora, munidos dessas definições, somos capazes de definir uma variedade diferenciável m -dimensional de classe C^k .

Definição 2.3.6. Sejam M um espaço topológico Hausdorff com base enumerável e \mathcal{U} um atlas m -dimensional de classe C^k sobre M . Nessas condições, dizemos que o par (M, \mathcal{U}) é uma variedade diferenciável m -dimensional de classe C^k .

Eventualmente, poderemos denotar por M^m uma variedade diferenciável m -dimensional.

Exemplo 2.3.7. Toda superfície M de classe C^k e dimensão n é uma variedade diferenciável de classe C^k , pois, para toda parametrização $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset M$, a sua inversa φ^{-1} é, em particular, uma carta. Portanto, a família de todas as inversas de parametrizações formam um atlas n -dimensional de classe C^k sobre M .

No decorrer do trabalho, em especial no estudo do grau de uma aplicação, precisaremos trabalhar com variedades diferenciáveis conexas. Tais variedades possuem uma importante propriedade, que é dada pelo Teorema 2.3.8.

Teorema 2.3.8. *Seja M uma variedade diferenciável conexa e de dimensão m . Então, dados quaisquer dois pontos $p, q \in M$, existe uma carta $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ de tal forma que $\varphi(V) = \mathbb{R}^m$ e $p, q \in V \subset M$.*¹

Agora, vejamos o conceito de espaço tangente à uma variedade.

2.4 ESPAÇO VETORIAL TANGENTE A UMA VARIEDADE

Sejam M uma variedade m -dimensional de classe C^k e $p \in M$. Denotaremos por C_p o conjunto de todos os caminhos definidos em intervalos I , com $0 \in I$, $\lambda : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$, diferenciáveis em 0, tais que $\lambda(0) = p$.

¹ Este teorema pode ser visto em Dalbello (2011, p. 20)

Definição 2.4.1. Sejam $\lambda, \mu \in C_p$. Dizemos que λ é equivalente a μ , e denotamos $\lambda \sim \mu$, quando existir uma carta $\varphi : U \subset M \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$, com $p \in U$ tal que $(\varphi \circ \lambda)'(0) = (\varphi \circ \mu)'(0)$.

Como toda mudança de coordenadas é um difeomorfismo em uma variedade de classe C^k , tal igualdade será válida para qualquer carta que considerarmos com p sendo um elemento de seu domínio. Assim, a relação \sim é uma relação de equivalência.

Sejam $\lambda, \mu, \xi \in C_p$.

- a) (Reflexividade) É evidente que $\lambda \sim \lambda$;
- b) (Simetria) Se $\lambda \sim \mu$, existe uma carta $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$, com $p \in U$, tal que $(\varphi \circ \lambda)'(0) = (\varphi \circ \mu)'(0)$, ou equivalentemente, $(\varphi \circ \mu)'(0) = (\varphi \circ \lambda)'(0)$. Logo, $\mu \sim \lambda$;
- c) (Transitividade) Se $\lambda \sim \mu$ e $\mu \sim \xi$, então existem cartas $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ e $\psi : V \rightarrow \xi(V)$, com $p \in U$ e $p \in V$, tais que

$$(\varphi \circ \lambda)'(0) = (\varphi \circ \mu)'(0) \text{ e } (\psi \circ \mu)'(0) = (\psi \circ \xi)'(0).$$

Como $U \cap V \neq \emptyset$, utilizando a mudança de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1}$, obtemos

$$\begin{aligned} (\psi \circ \lambda)'(0) &= ((\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \lambda))'(0) \\ &= (\psi \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p)) \cdot (\varphi \circ \lambda)'(0) \\ (\psi \circ \mu)'(0) &= ((\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \mu))'(0) \\ &= (\psi \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p)) \cdot (\varphi \circ \mu)'(0). \end{aligned}$$

Assim, como $(\varphi \circ \lambda)'(0) = (\varphi \circ \mu)'(0)$, segue que $(\psi \circ \lambda)'(0) = (\psi \circ \mu)'(0)$. Além disso, por hipótese, temos $(\psi \circ \mu)'(0) = (\psi \circ \xi)'(0)$. Logo, pela transitividade da relação de igualdade, segue que $(\psi \circ \lambda)'(0) = (\psi \circ \xi)'(0)$. Portanto, $\lambda \sim \xi$, comprovando que \sim é uma relação de equivalência.

Definição 2.4.2. O vetor velocidade λ' de um caminho $\lambda \in C_p$ será a classe de equivalência de λ , ou seja, $\lambda' = \{\mu \in C_p; \mu \sim \lambda\}$.

Assim, podemos definir o espaço vetorial tangente à uma variedade M em um ponto $p \in M$.

Definição 2.4.3. Sejam M uma variedade m -dimensional e $p \in M$. Definimos o espaço tangente à variedade M no ponto p como sendo o conjunto C_p / \sim . Denotaremos tal espaço por $T_p M$.

O conjunto $T_p M$ é a melhor aproximação linear de M em uma vizinhança de p , como mostra o seguinte teorema.

Teorema 2.4.4. Sejam M uma variedade diferenciável de dimensão k e $p \in M$. Então, $T_p M$ é um espaço vetorial de dimensão k .

Demonstração. De fato, como M é uma variedade diferenciável de dimensão k , obtemos um aberto $U \subset M$, com $p \in U$ tal que existe uma carta $\varphi : U \subset M \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^k$. Assim, definindo a aplicação

$$\begin{aligned}\bar{\varphi} : T_p M &\rightarrow \mathbb{R}^k \\ \lambda' &\mapsto (\varphi \circ \lambda)'(0),\end{aligned}$$

temos que $\bar{\varphi}$ está bem definida por conta da definição de $T_p M$. Mostremos que $\bar{\varphi}$ é bijetora. Se

$$(\varphi \circ \lambda)'(0) = (\varphi \circ \mu)'(0),$$

então $\lambda \sim \mu$. Logo, tratando de classes de equivalência, temos $\lambda' = \mu'$, provando a injetividade de $\bar{\varphi}$. Para a sobrejetividade, dado $v \in \mathbb{R}^k$, defina $\lambda \in C_p$ por $\lambda(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p) + tv)$, temos

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(\lambda') &= (\varphi \circ \lambda)'(0) \\ &= (\varphi(p) + tv)'(0) \\ &= v.\end{aligned}$$

Portanto, $\bar{\varphi}$ é bijetora e, considerando as operações:

$$+ : T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M \text{ e } \cdot : \mathbb{R} \times T_p M \rightarrow T_p M$$

dadas por

$$\begin{aligned}\lambda' + \mu' &= (\bar{\varphi})^{-1}(\bar{\varphi}(\lambda') + \bar{\varphi}(\mu')) \text{ e} \\ c \cdot \lambda' &= (\bar{\varphi})^{-1}(c \cdot \bar{\varphi}(\lambda')), \end{aligned}$$

então $\bar{\varphi}(\lambda') + \bar{\varphi}(\mu') \in \mathbb{R}^k$, $c \cdot \bar{\varphi}(\lambda') \in \mathbb{R}^k$ e, como $\bar{\varphi}$ é bijetora, existem $\eta', \tau' \in T_p M$ tais que $(\bar{\varphi})^{-1}(\bar{\varphi}(\lambda') + \bar{\varphi}(\mu')) = \eta'$ e $(\bar{\varphi})^{-1}(c \cdot \bar{\varphi}(\lambda')) = \tau'$.

Logo, a adição e a multiplicação estão bem definidas, sendo fácil verificar que $T_p M$ é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} com essas operações. Por outro lado,

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(\lambda' + \mu') &= \bar{\varphi}((\bar{\varphi})^{-1}(\bar{\varphi}(\lambda') + \bar{\varphi}(\mu'))) \\ &= \bar{\varphi} \circ (\bar{\varphi})^{-1}(\bar{\varphi}(\lambda') + \bar{\varphi}(\mu')) \\ &= \bar{\varphi}(\lambda') + \bar{\varphi}(\mu')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(\mathbf{c} \cdot \lambda') &= \bar{\varphi}((\bar{\varphi})^{-1}(\mathbf{c} \cdot \bar{\varphi}(\lambda'))) \\ &= \bar{\varphi} \circ (\bar{\varphi})^{-1}(\mathbf{c} \cdot \bar{\varphi}(\lambda')) \\ &= \mathbf{c} \cdot \bar{\varphi}(\lambda'),\end{aligned}$$

ou seja, $\bar{\varphi}$ é uma transformação linear e, conseqüentemente, um isomorfismo.

Portanto, $T_p M$ é um espaço vetorial de dimensão k . □

Denotaremos por

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k} \right\} \subset T_p M$$

a base que é levada a base canônica de \mathbb{R}^k pelo isomorfismo $\bar{\varphi}$ considerado anteriormente.

Observemos que tais propriedades independem da escolha da carta, pois, tomando $\xi : V \subset M \rightarrow \xi(V) \subset \mathbb{R}^k$, com $p \in V$, $(\xi \circ \varphi^{-1})' : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ será um isomorfismo e $\bar{\xi} = (\xi \circ \bar{\varphi}^{-1})' \circ \bar{\varphi} : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^k$.

Utilizando os espaços tangentes a uma variedade, podemos definir um outro elemento extremamente importante denominado Fibrado Tangente.

Definição 2.4.5. Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n . O conjunto de todos os espaços tangentes $T_p M$, com $p \in M$,

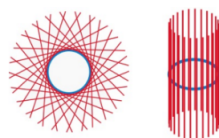
$$TM = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M$$

é denominado fibrado tangente de M .

É possível provar que o fibrado tangente TM de uma variedade m -dimensional é uma variedade $2m$ -dimensional. Não faremos a demonstração deste resultado aqui, mas posteriormente ele será essencial para a definição de campos de vetores (que veremos na segunda parte deste trabalho).

Exemplo 2.4.6. Considere a esfera S^1 . O fibrado tangente é obtido considerando todos os espaços tangentes e reunindo-os em um conjunto diferenciável e sem sobreposição, como ilustra a figura 2.2.

Figura 2.2 – Fibrado tangente da esfera S^1



Fonte: Dalbello (2011)

Observemos que na primeira imagem da Figura 2.2 não obtemos uma variedade, já na segunda sim, o fibrado tangente TS^1 é dado pela segunda imagem.

Com esses resultados, somos capazes de definir o conceito de aplicações diferenciáveis entre variedades por meio de conceitos já conhecidos de diferenciabilidade de aplicações entre abertos de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^m .

2.5 APLICAÇÕES DIFERENCIÁVEIS ENTRE VARIEDADES

Nesta seção, iremos definir diferenciabilidade de aplicações entre variedades e estudar alguns resultados semelhantes aos resultados do Apêndice B deste trabalho.

A definição de diferenciabilidade será baseada em aplicações entre espaços euclidianos. Portanto, veremos que vários dos resultados da seção B.3 continuam valendo para aplicações entre variedades.

Definição 2.5.1. Sejam M, N variedades diferenciáveis de dimensão n e m , respectivamente, e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação. Dizemos que f é diferenciável em um ponto $p \in M$ quando existem cartas $\varphi : U_1 \subset M \rightarrow V_1 \subset \mathbb{R}^n$, e $\psi : U_2 \subset N \rightarrow V_2 \subset \mathbb{R}^m$, com $p \in U_1$ e $f(U_1) \subset U_2$ tais que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ é diferenciável em $\varphi(p)$. Dizemos que f é diferenciável quando ela for diferenciável em todos os pontos de M . Denotaremos $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = f_{\varphi\psi}$.

Com essa definição e, de maneira semelhante ao feito com aplicações definidas em conjuntos abertos de \mathbb{R}^n , dizemos que uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é de classe C^k quando $f_{\varphi\psi}$ for de classe C^k .

A definição acima não depende da escolha das cartas φ e ψ escolhidas, uma vez que as mudanças de coordenadas são difeomorfismos.

Vejam alguns resultados sobre a diferenciabilidade de aplicações entre variedades. O primeiro deles é o de derivada de uma aplicação $f : M \rightarrow N$ diferenciável entre variedades M e N

Definição 2.5.2. Sejam M, N variedades diferenciáveis de dimensão r e s , respectivamente e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável em $p \in M$. A derivada de f em $p \in M$ é a transformação linear

$$f'(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$$

$$v = \lambda' \mapsto f'(p)(v) = (f \circ \lambda)',$$

em que λ' e $(f \circ \lambda)'$ são vetores velocidade de $T_p M$ e $T_{f(p)} N$, respectivamente (como definido em 2.4.2).

Verifiquemos que esta é uma boa definição. Para isso, primeiramente, mostremos que $f'(p)$ está bem definida e é uma transformação linear.

Tome $v = \lambda' \in T_p M$ qualquer. Então, tomando $\lambda, \mu \in \lambda'$, existe $\varphi : U_1 \subset M \rightarrow V_1 \subset \mathbb{R}^r$ tal que $(\varphi \circ \lambda)'(0) = (\varphi \circ \mu)'(0)$. Tomando $\psi : U_2 \subset N \rightarrow V_2 \subset \mathbb{R}^s$ tal que $f(U_1) \subset U_2$, temos

$$\begin{aligned}
 (\psi \circ f \circ \lambda)'(0) &= (\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \lambda)'(0) \\
 &= ((\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \lambda))'(0) \\
 &= (f_{\varphi\psi} \circ (\varphi \circ \lambda))'(0) \\
 &= f'_{\varphi\psi}(\varphi(p)) \cdot (\varphi \circ \lambda)'(0) \\
 &= f'_{\varphi\psi}(\varphi(p)) \cdot (\varphi \circ \mu)'(0) \\
 &= ((\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \mu))'(0) \\
 &= (\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \mu)'(0) \\
 &= (\psi \circ f \circ \mu)'(0).
 \end{aligned}$$

Ou seja, $f \circ \lambda \sim f \circ \mu$ e, conseqüentemente, o vetor velocidade do caminho $f \circ \lambda$ depende apenas do vetor velocidade de λ . Portanto, $f'(p)$ está bem definida. Mais que isso, considerando as aplicações

$$\begin{aligned}
 \bar{\varphi} : T_p M &\rightarrow \mathbb{R}^r \\
 \lambda' &\mapsto (\varphi \circ \lambda)'(0)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \bar{\psi} : T_{f(p)} N &\rightarrow \mathbb{R}^s \\
 \mu' &\mapsto (\psi \circ \mu)'(0),
 \end{aligned}$$

dado $\lambda' \in T_p M$ qualquer,

$$\begin{aligned}
 (\bar{\psi} \circ f'(p))(\lambda') &= \bar{\psi}(f \circ \lambda)' \\
 &= (\psi \circ (f \circ \lambda))'(0) \\
 &= (\psi \circ (f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \lambda))'(0) \\
 &= ((\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi \circ \lambda)'(0) \\
 &= (f_{\varphi\psi} \circ \varphi \circ \lambda)'(0) \\
 &= f'_{\varphi\psi}(\varphi(p)) \circ (\varphi \circ \lambda)'(0) \\
 &= (f'_{\varphi\psi}(\varphi(p)) \circ \bar{\varphi})(\lambda').
 \end{aligned}$$

Logo, como tomamos $\lambda' \in T_p M$ arbitrário, $\bar{\psi} \circ f'(p) = f'_{\varphi\psi}(\varphi(p)) \circ \bar{\varphi}$, ou seja, por conta de $\bar{\psi}$ ser bijetora, $f'(p) = \bar{\psi}^{-1} \circ f'_{\varphi\psi}(\varphi(p)) \circ \bar{\varphi}$.

Como vimos anteriormente, $\bar{\varphi}$ e $\bar{\psi}$ são transformações lineares, além disso, como $f_{\varphi\psi}$ é uma aplicação entre espaços euclidianos, sua derivada também será uma transformação linear.

Logo, $f'(p)$ é uma transformação linear e sua matriz em relação às bases $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$ de $T_p M$ e $\left\{ \frac{\partial}{\partial y_i} \right\}$ de $T_{f(p)} N$ será a matriz jacobiana $\left[\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \right]$ da aplicação $f_{\varphi\psi} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^s$ no ponto $\varphi(p)$.

Com isso, provemos um Teorema acerca da derivada de aplicações diferenciáveis entre variedades.

Teorema 2.5.3 (Regra da cadeia para variedades). *Sejam M, N, P variedades diferenciáveis, $f : M \rightarrow N$ e $g : N \rightarrow P$ aplicações diferenciáveis em $p \in M$ e $f(p) \in N$, respectivamente. Então, $g \circ f$ é diferenciável em $p \in M$ e*

$$(g \circ f)'(p) = g'(f(p)) \circ f'(p) : T_p M \rightarrow T_{g(f(p))} P.$$

Demonstração. Sejam $\varphi : U \subset M \rightarrow \varphi(U)$, $\psi : V \subset N \rightarrow \psi(V)$ e $\eta : W \subset P \rightarrow \eta(W)$, com $p \in U$, $f(U) \subset V$ e $g(V) \subset W$, cartas de M, N e P , respectivamente.

Considere as aplicações $f_{\varphi\psi} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$ e $g_{\psi\eta} = \eta \circ g \circ \psi^{-1} : \psi(V) \rightarrow \eta(W)$.

Como f é diferenciável em $p \in M$ e g é diferenciável em $f(p) \in N$, segue da definição que as aplicações $f_{\varphi\psi}$ e $g_{\psi\eta}$ são diferenciáveis em $\varphi(p)$ e $\psi(f(p))$, respectivamente.

Assim, pelo Teorema B.3.10 (Regra da Cadeia), segue que

$$\begin{aligned} g_{\psi\eta} \circ f_{\varphi\psi} &= (\eta \circ g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \\ &= \eta \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1} \end{aligned}$$

é diferenciável em $\varphi(p)$. Portanto, $g \circ f$ é diferenciável em p .

Agora, sendo $\lambda' \in T_p M$, aplicando a definição de derivada,

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(p)(\lambda') &= (g \circ f \circ \lambda)' \\ &= (g \circ (f \circ \lambda))' \\ &= g'(f(p))((f \circ \lambda)') \\ &= g'(f(p)) \circ f'(p)(\lambda'), \end{aligned}$$

para todo $\lambda' \in T_p M$.

Portanto, $(g \circ f)'(p) = g'(f(p)) \circ f'(p) : T_p M \rightarrow T_{g(f(p))} P$. □

Agora, façamos algumas definições relevantes.

Definição 2.5.4. Sejam M e N variedades m -dimensional e n -dimensional, respectivamente e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Então,

- (a) Se $f'(p)$ for injetora, ou seja, o posto da matriz jacobiana $[Jf(p)]_{n \times m}$ é igual a m , diremos que f é uma imersão em p ;

- (b) Se $f'(p)$ for sobrejetora, ou seja, o posto da matriz jacobiana $[Jf(p)]_{n \times m}$ é igual a n , diremos que f é uma submersão em p ;
- (c) Se f é uma submersão em p , diremos que p é um ponto regular de f , além disso, se dado $q \in N$, termos $f^{-1}(q)$ formado apenas por pontos regulares, diremos que q é um valor regular de f ;
- (d) Se f não for imersão, nem submersão em p , diremos que p é um ponto singular de f e $f(p)$ é um valor singular de f .

Observemos que se M e N são variedades diferenciáveis de mesma dimensão n e $p \in M$ é um ponto regular de $f : M \rightarrow N$, então pelo Teorema do Núcleo e Imagem, $f'(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ é um isomorfismo.

Definição 2.5.5 (Mergulho entre variedades). Sejam M e N variedades diferenciáveis m -dimensional e n -dimensional, respectivamente, com $m \leq n$. Uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow N$ é um mergulho se f é uma imersão e é um homeomorfismo entre M e $f(M) \subset N$.

Definição 2.5.6 (Subvariedade). Uma subvariedade M de classe C^k e dimensão m de uma variedade N de classe C^r ($r \geq k$) e dimensão n é um subconjunto $M \subset N$ munido da topologia induzida de N é dotado de uma estrutura de variedade C^k e a inclusão $i : M \rightarrow N$ é um mergulho, sendo $i \in C^k$.

Proposição 2.5.7. *Seja $f : M \rightarrow N$ uma imersão de classe C^k entre as variedades M e N de classe C^k e dimensões m e n , respectivamente, com $m \leq n$. Nessas condições, $f(M)$ é uma subvariedade de classe C^k e dimensão m de N se, e somente se, $f : M \rightarrow f(M)$ é uma aplicação aberta, tendo $f(M)$ a topologia induzida pela topologia de N . Se $f : M \rightarrow N$ é um mergulho de classe C^k , então $f(M)$ é uma subvariedade de dimensão m em N .*

Demonstração. Sendo f um imersão de classe C^k entre M e N , f é diferenciável e $f'(p)$ é injetora para todo $p \in M$.

Suponha que $f(M)$ é uma subvariedade de classe C^k e dimensão m de N . Então, considerando $g : M \rightarrow f(M)$ dada por $g(m) = f(m)$ para todo $m \in M$, segue que g é uma imersão de classe C^k e $\dim(M) = \dim(f(M))$. Assim, pela forma local das imersões de classe C^k (ver Lima, 2009, p. 148), tal aplicação será um difeomorfismo local. Em particular, $g : M \rightarrow f(M)$ será uma aplicação aberta. Logo, f é aberta.

Reciprocamente, se $f : M \rightarrow f(M)$ é uma aplicação aberta, tomando $p \in M$ arbitrário e uma vizinhança $U \subset M$ de p qualquer em que $\varphi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma carta, temos $f(U)$ aberto em N . Assim, $f(U) \cap f(M) = f(U)$ será aberto em $f(M)$ e, considerando $\psi = \varphi \circ (f|_U)^{-1} : f(U) \rightarrow \mathbb{R}^m$, ψ será uma carta e, procedendo desta maneira para outras vizinhanças, obteremos um atlas para $f(M)$.

Portanto, $f(M)$ é uma subvariedade de classe C^k em N . □

Proposição 2.5.8. *Sejam N uma variedade de classe C^r e $M \subset N$. Se para cada $p \in M$ existir uma vizinhança V em N tal que $M \cap V$ é uma subvariedade de dimensão m e classe C^k de N , então M é uma subvariedade de dimensão m e classe C^k de N .²*

Teorema 2.5.9. *Sejam M e N variedades m -dimensional e n -dimensional, respectivamente e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Suponha $p \in N$ um valor regular de f . Então, $f^{-1}(p) = P$ é uma subvariedade $(m - n)$ -dimensional de M e, se $q \in P$, então $T_qP = \ker(f'(q))$.*

Demonstração. Seja $p \in N$ um valor regular de f . Por definição, dado $q \in f^{-1}(p) \subset \mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n$, a derivada $f'(q) : T_qM \rightarrow T_pN$ é sobrejetora.

Tome $\varphi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\psi : V \subset N \rightarrow \mathbb{R}^n$ cartas tais que $p \in U$, $f(p) \in V$ e $f(U) \subset V$. Considerando $f_{\varphi\psi} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, como p é valor regular de f , segue que $\psi(p)$ é valor regular de $f_{\varphi\psi}$.

Assim, pelo Teorema 2.2.5, $f_{\varphi\psi}^{-1}(\psi(p)) = P'$ é uma superfície de classe C^k e dimensão $m - n$. Além disso, o espaço vetorial tangente T_qP' é o núcleo de $f'_{\varphi\psi} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Logo, da Proposição 2.5.7, $\varphi^{-1}(f_{\varphi\psi}^{-1}(\psi(p))) = f^{-1}(p) \cap U$ é uma subvariedade de classe C^k de M .

Como tomamos $q \in P$ arbitrário, segue da Proposição 2.5.8 que P é uma subvariedade de dimensão $m - n$ de N .

Para a segunda parte, o resultado decorre de forma análoga ao feito no Teorema 2.2.5. \square

Teorema 2.5.10 (de Sard). *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação de classe C^1 nas variedades diferenciáveis M , de dimensão m e N de dimensão n . Então, o subconjunto formado pelos valores regulares de f é denso em N .³*

2.6 TRANSVERSALIDADE

Nesta seção, introduziremos o conceito de transversalidade de uma aplicação. Tal conceito será fundamental no estudo do grau de uma aplicação.

Definição 2.6.1. *Sejam M e N variedades diferenciáveis de classe C^k e dimensão m e n , respectivamente, $S \subset N$ uma subvariedade de classe C^k e dimensão $s < n$ e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação de classe C^k . Dizemos que f é transversal a S no ponto $p \in f^{-1}(S)$ quando $f'(p) \cdot T_pM + T_{f(p)}S = T_{f(p)}N$, ou seja, quando a soma da imagem de $f'(p)$ e o espaço $T_{f(p)}S$ geram $T_{f(p)}N$.*

Dizemos que f é transversal a S quando f é transversal a S em p para todo $p \in f^{-1}(S)$.

Vejamos alguns resultados acerca desta definição.

² Ver Lima (2011)

³ Este teorema pode ser visto em Judice (2012, p. 41)

Proposição 2.6.2. *Seja $f : M^m \rightarrow N^n$ uma aplicação de classe C^k transversal a uma subvariedade $S \subset N$ de classe C^k . Então, $f^{-1}(S) = \emptyset$ ou $f^{-1}(S)$ é uma subvariedade de classe C^k de M , a qual possui codimensão em M igual a codimensão de S em N , ou seja, $f^{-1}(S)$ possui dimensão $m - n + p$. Além disso, $T_p(f^{-1}(S)) = f'(p)^{-1}(T_{f(p)}S)$ para todo $p \in f^{-1}(S)$.⁴*

Teorema 2.6.3. *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável de uma variedade diferenciável m -dimensional M e considere um ponto $a \in \mathbb{R}^m$. Sendo $v \neq 0$ um vetor não nulo em \mathbb{R}^m considere também a reta $\Delta_a := \{a + tv : t \in \mathbb{R}\}$, que é uma subvariedade de \mathbb{R}^m . Nessas condições, considerando a aplicação $\bar{f} : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, definida por $\bar{f}(p, t) = f(p) + tv$, f é transversal a Δ_a se, e somente se, $a \in \mathbb{R}^m$ é um valor regular de \bar{f} .*

Demonstração. Seja $\varphi : V \subset M \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m$ uma carta, com $p \in V$ e considere $[Jf(p)]_{m \times m}$ a matriz jacobiana de f calculada em p . Os vetores coluna desta matriz representam a imagem dos vetores da base de T_pM associada à carta φ pela aplicação $f'(p)$.

Considere a matriz $J = J_{m \times m+1}$, em que as primeiras m colunas são as colunas de $[Jf(p)]_{m \times m}$ e a última coluna representa as componentes do vetor v de \mathbb{R}^m . Tal matriz representa a matriz jacobiana da aplicação \bar{f} calculada no ponto $(p, t) \in M \times \mathbb{R}$.

Assim, sendo f transversal a Δ_a para todo $p \in M$, com $f(p) \in \Delta_a$, pela definição de transversalidade, temos

$$f'(p)(T_pM) + T_{f(p)}\Delta_a = \mathbb{R}^m.$$

Além disso, pela definição de espaço tangente, $T_{f(p)}\Delta_a = \{\lambda' : \lambda \in C_{f(p)}\}$, em que $\lambda : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \Delta_a$ é um caminho diferenciável satisfazendo $\lambda(0) = f(p)$. Como $f(p) \in \Delta_a$, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $f(p) = a + tv$. Assim, $\lambda(0) = a + tv$ para todo $\lambda \in C_{f(p)}$. Como $\dim(\Delta_a) = 1$, a dimensão de $T_{f(p)}\Delta_a$ será 1. Logo, dado $\lambda \in C_{f(p)}$, λ deverá necessariamente ser definido por $\lambda(q) = q(\alpha v) + (a + tv)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

Assim, $\lambda'(0) = \alpha v$, $\alpha \in \mathbb{R}$, para todo $\lambda \in C_{f(p)}$, ou seja, $T_{f(p)}\Delta_a = \{tv : t \in \mathbb{R}\}$.

Por outro lado, dado $(p, h) \in M \times \mathbb{R}$, temos

$$\bar{f}'(p, h)(T_pM \times \mathbb{R}) = f'(p)(T_pM) + \{tv : t \in \mathbb{R}\}.$$

Logo, da condição de f ser transversal a Δ_a , obtemos

$$\bar{f}'(p, h)(T_pM \times \mathbb{R}) = f'(p)(T_pM) + \{tv : t \in \mathbb{R}\} = f'(p)(T_pM) + T_{f(p)}\Delta_a = \mathbb{R}^m,$$

de onde decorre que a matriz J possui posto m . Portanto, se $p \in M$ é tal que $\bar{f}(p, t) = a$, para algum $t \in \mathbb{R}$, então $\bar{f}(p, t) = f(p) + tv = a$, implicando $f(p) \in \Delta_a$, ou seja, $a \in \mathbb{R}^m$ é um valor regular de \bar{f} .

Por outro lado, se $a \in \mathbb{R}^m$ é um valor regular de \bar{f} , então para todo $(p, t) \in \bar{f}^{-1}(a)$, temos

⁴ Este resultado pode ser visto em [Lima \(2011, p. 179\)](#)

$\bar{f}'(p, t)(T_p M \times \mathbb{R}) = f'(p)(T_p M) + \{tv : t \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^m$. Contudo, se $(p, t) \in \bar{f}^{-1}(a)$, $f(p) = a - tv$, ou seja, $f(p) \in \Delta_a$ e, conseqüentemente, f é transversal a Δ_a . \square

Outra definição importante é a de transversalidade de aplicações.

Definição 2.6.4. Sejam $f : M \rightarrow P$ e $g : N \rightarrow P$ duas aplicações diferenciáveis. Dizemos que f e g são transversais nos pontos $p \in M$ e $q \in N$ se $f(p) = g(q) = r \in P$ e $f'(p) \cdot T_p M + g'(q) \cdot T_q N = T_r P$.

2.7 ORIENTAÇÃO EM VARIEDADES

Na seção B.4 do Apêndice B deste trabalho, trabalhamos o conceito de orientação de espaços vetoriais. Nesta seção, iremos estender tal conceito para variedades diferenciáveis.

Definição 2.7.1. Seja $M^m \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade m -dimensional. Dizemos que a variedade M é orientável quando existe uma escolha contínua de orientações para todos os espaços tangentes $T_p M$, ou seja, para cada ponto $p \in M$, conseguimos obter uma carta $\varphi : U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ com $p \in U$ tal que $\varphi'(u) : T_u M \rightarrow \mathbb{R}^m$ preserva orientação em cada ponto $u \in U$. Uma variedade orientada é um par (M, O) , em que M é uma variedade diferenciável e O é uma orientação em M .

Tomando uma vizinhança $V_p \subset M$ de p e uma carta $\varphi : V_p \subset M \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m$, como dito anteriormente, iremos utilizar a notação $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}(p) \right\}$ para representar a base $\{(\varphi^{-1})'_{\varphi(p)}(e_1), \dots, (\varphi^{-1})'_{\varphi(p)}(e_m)\}$ de $T_p M$, em que $\{e_1, \dots, e_m\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^m e $\varphi(p) = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Em geral, consideraremos o espaço vetorial $T_p M$ orientado positivamente pela base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}(p) \right\}$.

Com isso, vejamos a noção de pontos positivos ou negativos de aplicações em variedades diferenciáveis de mesma dimensão.

Definição 2.7.2. Sejam M, N variedades n -dimensionais diferenciáveis orientadas, $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável e $p \in N$ um valor regular de f . Tomando os pontos regulares $q \in f^{-1}(p)$, se o isomorfismo $f'(q) : T_q M \rightarrow T_p N$ preserva orientação, diremos que q é um ponto positivo. Caso $f'(q)$ inverta orientação, diremos que q é um ponto negativo.

Teorema 2.7.3. Sejam M, N variedades m -dimensionais diferenciáveis orientadas com M conexo. Se $f : M \rightarrow N$ é um difeomorfismo local, então $f'(x) : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ é positivo ou é negativo para todo $x \in M$.

2.8 HOMOTOPIA

Outro conceito fundamental para o estudo do grau é o de homotopia, que veremos à seguir.

Definição 2.8.1 (Homotopia). Sejam X e Y espaços topológicos. Dizemos que duas aplicações contínuas $f : X \rightarrow Y$ e $g : X \rightarrow Y$ são homotópicas quando existir uma aplicação $H : X \times I \rightarrow Y$ contínua, sendo $I = [0, 1]$, tal que

$$H(x, 0) = f(x) \text{ e } H(x, 1) = g(x),$$

para todo $x \in X$. Chamaremos H de homotopia de f e g e escreveremos $f \simeq g$.

Proposição 2.8.2. Sejam X, Y e Z espaços topológicos e considere aplicações contínuas $f, f' : X \rightarrow Y$ e $g, g' : Y \rightarrow Z$. Se $f \simeq f'$ e $g \simeq g'$, então $g \circ f \simeq g' \circ f'$.

Demonstração. Sejam $I = [0, 1]$, $H : X \times I \rightarrow Y$ uma homotopia entre f e f' e $K : Y \times I \rightarrow Z$ uma homotopia entre g e g' . Defina $L : X \times I \rightarrow Z$ por $L(x, t) = K(H(x, t), t)$. Mostremos que L é uma homotopia.

Seja $x \in X$ qualquer. Então,

$$L(x, 0) = K(H(x, 0), 0) = K(f(x), 0) = (g \circ f)(x);$$

$$L(x, 1) = K(H(x, 1), 1) = K(f'(x), 1) = (g' \circ f')(x).$$

Além disso, como H e K são contínuas, segue que L também será contínua.

Portanto, $g \circ f \simeq g' \circ f'$. □

Proposição 2.8.3. Sejam X um espaço topológico e $B[0, 1] \subset \mathbb{R}^m$ a bola fechada de centro na origem e raio 1. Dada uma aplicação contínua $f : S^n \rightarrow X$, então, f estende-se continuamente a $B[0, 1]$ se, e somente se, é homotópica a uma constante.

Demonstração. Sejam $I = [0, 1]$ e $\varphi : S^n \times I \rightarrow B[0, 1]$, dada por $\varphi(x, t) = (1 - t)x$. Se $h : B[0, 1] \rightarrow X$ é uma extensão contínua de f , segue que

$$H = h \circ \varphi : S^n \times I \rightarrow X$$

é uma homotopia entre f e a aplicação constante $g : S^n \rightarrow X$ definida por $g(x) = h(0)$.

Reciprocamente, se f é homotópica a uma constante, suponha $H : S^n \times I \rightarrow X$ uma homotopia entre f e uma aplicação constante $g : S^n \rightarrow X$, sendo que $g(x) = c$, para todo $x \in S^n$. Definindo $h : B[0, 1] \rightarrow X$ por

$$h(x) = \begin{cases} H\left(\frac{x}{\|x\|}, 1 - \|x\|\right), & \text{se } x \neq 0 \\ c, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Então, h é contínua e $h|_{S^n} = f$. □

Vejamos um resultado que será importante para o desenvolvimento deste trabalho.

Teorema 2.8.4. *Sejam M e N variedades diferenciáveis compactas. Então, toda aplicação contínua $f : M \rightarrow N$ é homotópica a uma aplicação $g : M \rightarrow N$ tal que $g \in C^1$.*⁵

⁵ A demonstração deste Teorema pode ser vista em [Lima \(1961\)](#).

3 GRAU DE UMA APLICAÇÃO

Finalmente, chegamos à parte principal deste trabalho, que é o estudo do Grau com abordagem via aplicações diferenciáveis. Nesta seção, definiremos o grau relativo de uma aplicação diferenciável, provaremos diversos resultados sobre este objeto e, finalizaremos definindo e estudando propriedades do grau local de uma aplicação diferenciável.

As referências utilizadas nesta seção são [Dalbello \(2011\)](#) e [Lima \(1961\)](#).

3.1 GRAU RELATIVO DE UMA APLICAÇÃO DIFERENCIÁVEL

A fim de definir o grau de uma aplicação, precisaremos de algumas definições e resultados preliminares.

Definição 3.1.1. Seja X um conjunto topológico. Dizemos que X é localmente compacto quando dado qualquer elemento $x \in X$, é possível obter uma vizinhança compacta $V_x \subset X$ tal que $x \in V_x$.

Definição 3.1.2. Sejam X, Y espaços topológicos localmente compactos e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Dizemos que f é própria quando a imagem inversa $f^{-1}(K)$ é um subconjunto compacto de X para todo compacto $K \subset Y$.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.1.3. Considerando a função contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$, dado um compacto qualquer $K \subset \mathbb{R}$, pela caracterização dos conjuntos compactos no espaço euclidiano, K é fechado e limitado. Assim, da continuidade de f , segue que $f^{-1}(K)$ será também fechado e limitado, pois, $f^{-1}([0, \delta]) = [-\sqrt{\delta}, \sqrt{\delta}]$, para todo $\delta > 0$, com $\delta \in \mathbb{R}$.

Entretanto, se restringirmos o domínio, f nem sempre será própria. Por exemplo, definindo $h = f|_{(0,1)} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, teremos $h^{-1}([0, 1]) = (0, 1)$.

Exemplo 3.1.4. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sin(x)$ não é própria, pois, sendo $K = \{0\}$, teremos $f^{-1}(0) = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, o qual não é limitado e, portanto, não é compacto.

Exemplo 3.1.5. A função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$ é própria, já que $f^{-1}([0, \delta]) = B[0, \sqrt{\delta}]$, para todo $\delta > 0$.

Vejamos uma proposição relevante para a obtenção de exemplos de aplicações próprias.

Proposição 3.1.6. *Sejam X um espaço topológico compacto e Y um espaço topológico localmente compacto Hausdorff. Então, toda aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ é própria.*

Demonstração. De fato, supondo que Y é não vazio, a hipótese de que Y é localmente compacto garante a existência de subconjuntos compactos de Y . Assim, dado $K \subset Y$ compacto, mostremos

que K é fechado. Para isso, suponha $a \notin K$. Como Y é um espaço topológico Hausdorff, para cada $k \in K$, existem vizinhanças abertas V_k de k e U_k de a , tais que $V_k \cap U_k = \emptyset$.

Por outro lado, é fácil notar que $K \subset \bigcup_{k \in K} V_k$ é uma cobertura aberta de K . Assim, pela compacidade de K , segue que existem $k_1, \dots, k_n \in K$ tais que

$$K \subset V = \bigcup_{i=1}^n V_{k_i}.$$

Entretanto, tomando os respectivos conjunto U_{k_1}, \dots, U_{k_n} , teremos que $U = \bigcup_{i=1}^n U_{k_i}$ será uma vizinhança de a tal que $V \cap U = \emptyset$.

Portanto, a não será um ponto de acumulação de K , conseqüentemente, K é fechado.

Assim, pela continuidade de f , teremos $f^{-1}(K)$ fechado e, como X é um espaço topológico compacto, segue que $f^{-1}(K)$ é compacto. \square

Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação própria, dado $B \subset Y$ aberto e considerando $A = f^{-1}(B)$, a aplicação $g : A \rightarrow B$ dada por $g(x) = f(x)$ para todo $x \in A$ será também uma aplicação própria.

Além disso, supondo que Y é um espaço topológico localmente compacto de Hausdorff, dado um ponto $p \in Y$, o conjunto $\{p\} \subset Y$ é um conjunto compacto. Assim, $f^{-1}(\{p\})$ será um compacto em X .

Ademais, sendo M e N variedades diferenciáveis m -dimensionais e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável própria, se $p \in N$ é um valor regular de f , pelo Teorema 2.5.9, teremos $f^{-1}(\{p\})$ uma subvariedade 0-dimensional e, conseqüentemente, $f^{-1}(\{p\})$ possuirá uma quantidade finita de pontos.

Portanto, podemos fazer a seguinte definição.

Definição 3.1.7 (Grau Relativo de uma aplicação). Sejam M, N variedades diferenciáveis n -dimensionais, orientadas e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável própria. Dado $p \in N$ um valor regular de f , o grau relativo de f em p , que denotaremos por $gr_p(f)$, é o número de pontos positivos menos o número de pontos negativos em $f^{-1}(p)$.

Vejamos um exemplo acerca dessa definição.

Exemplo 3.1.8. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Dado $h \in \mathbb{R}$, a aplicação derivada de f em h é dada por $f'(h)(x) = 2hx$.

Se $h > 0$, teremos $f^{-1}(h) = \{\sqrt{h}, -\sqrt{h}\}$. Então, $f'(\sqrt{h})$ e $f'(-\sqrt{h})$ serão sobrejetoras e f uma submersão em \sqrt{h} e também em $-\sqrt{h}$. Assim, h será valor regular de f . Fazendo $f'(\sqrt{h})$ e $f'(-\sqrt{h})$, obtemos

$$\begin{aligned} f'(-\sqrt{h})(x) &= -2\sqrt{h}x \\ f'(\sqrt{h})(x) &= 2\sqrt{h}x. \end{aligned}$$

Observemos que a primeira transformação inverte orientação, enquanto a segunda a preserva. Logo, o grau de f em h é 0.

Agora, se $h = 0$, a transformação linear derivada será a transformação identicamente nula e, conseqüentemente, h não será valor regular de f .

Por fim, se $h < 0$, teremos $f^{-1}(h) = \emptyset$, implicando $gr_h(p) = 0$.

Agora, vejamos alguns resultados que conseguimos obter desta definição.

Proposição 3.1.9. *Sejam M e N variedades diferenciáveis de mesma dimensão n e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação própria de classe C^1 . Então, o conjunto de todos os valores regulares $R \subset N$ de f é um conjunto aberto em N .*

Demonstração. Primeiramente, escreveremos $R \subset N$ como sendo $R = R_1 \cup R_2$, em que

$$R_1 = \{p \in N; p \text{ é valor regular de } f \text{ e } f^{-1}(p) \neq \emptyset\};$$

$$R_2 = \{p \in N; p \text{ é valor regular de } f \text{ e } f^{-1}(p) = \emptyset\}.$$

Mostremos que R_1 e R_2 são abertos. De fato, dado $p \in R_1$, $f^{-1}(p)$ será uma subvariedade 0-dimensional de M e, como f é própria, o conjunto $f^{-1}(p)$ terá uma quantidade finita de pontos, digamos $f^{-1}(p) = \{q_1, \dots, q_k\}$. Além disso, como p é um valor regular de f , dado $i \in \{1, \dots, k\}$ arbitrário, teremos $f'(q_i) : T_{q_i}M \rightarrow T_pM$ sobrejetora e, como $\dim(T_{q_i}M) = \dim(T_pM)$, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, $f'(q_i)$ será um isomorfismo.

Assim, pelo Teorema da Aplicação Inversa (Teorema B.3.31), para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, existem vizinhanças abertas U_i de q_i em M e V_i de p em N tais que

$$f : U_i \rightarrow V_i$$

é um difeomorfismo.

Agora, sendo $V = \bigcap_{i=1}^k V_i$, como $p \in V$ é um valor regular de f e a função determinante é contínua, considerando a composição $h = (\det) \circ g : M \rightarrow \mathbb{R}$, sendo $g : M \rightarrow M_n(\mathbb{R})$, definida por $g(x) = [J(f(x))]$, temos h contínua. Logo, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ existe uma vizinhança $W_i \subset U_i$ de q_i tal que, para todo $x \in W_i$, temos $h(x) = \det[Jf(x)] \neq 0$ e, portanto, x é ponto regular de f .

Defina a vizinhança

$$W = \bigcap_{i=1}^k f(W_i)$$

de p em N . Da definição de W , dado $q \in W$, q é valor regular de f . Além disso, como f é um difeomorfismo nesses conjuntos, segue que W é aberto. Logo, p está no interior de W , o qual está contido em R_1 . Portanto, p está no interior de R_1 e, como p foi tomado de forma arbitrária, segue que R_1 é aberto.

Agora, para R_2 , suponha que tal conjunto não seja aberto e tome $p \in R_2$ tal que p não está no interior de R_2 .

Como p está fora do interior de R_2 , qualquer vizinhança V de p tão pequena quanto se queira não está contida em R_2 . Assim, podemos obter uma sequência $\{y_n\}$ tal que $y_n \notin R_2$ e $y_n \rightarrow p$.

O conjunto $K = \{y_n\} \cup \{p\}$ é um conjunto compacto e, como por hipótese f é uma aplicação própria, temos $f^{-1}(K)$ compacto. Além disso, sendo f contínua, $f(f^{-1}(K)) = \{y_n\}$ é compacto, que é um absurdo, pois p é ponto aderente de $f(f^{-1}(K))$ mas não pertence à esse conjunto.

Portanto, R_2 é um conjunto aberto de N e, conseqüentemente, $R = R_1 \cup R_2$ é um conjunto aberto de N . \square

Até o momento, sabemos que o grau de uma aplicação, da maneira que foi definido, depende do ponto escolhido. Entretanto, se adicionarmos a hipótese de que a variedade N é conexa, veremos que tal definição passa a não depender do ponto da variedade escolhido. À seguir veremos dois lemas que nos auxiliaram a provar tal propriedade.

Lema 3.1.10. *Sejam M, N variedades diferenciáveis de mesma dimensão n , orientadas, com N conexa e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação própria. Então, para todo valor regular $p \in N$ de f , existe uma vizinhança V de p tal que V possui somente valores regulares de f e, dado $q \in V$ qualquer, vale $gr_p(f) = gr_q(f)$.*

Demonstração. Supondo que o valor regular $p \in N$ de f seja tal que $f^{-1}(p) = \emptyset$, pela Proposição 3.1.9, segue que o conjunto $\{p \in N : f^{-1}(p) = \emptyset\}$ é aberto e temos a vizinhança desejada.

Por outro lado, supondo que $p \in N$ é valor regular de f tal que $f^{-1}(p) \neq \emptyset$, ou seja, $f^{-1}(p) = \{q_1, \dots, q_m\}$.

De acordo com a definição de ponto regular, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, a aplicação linear $f'(q_i) : T_{q_i}M \rightarrow T_pN$ é sobrejetora. Mas, como $T_{q_i}M$ e T_pN possuem mesma dimensão, segue que $f'(q_i)$ será um isomorfismo. Assim, pelo Teorema da Aplicação Inversa (Teorema B.3.31), existem vizinhanças U_i e V_i de q_i e p , respectivamente, sendo que podemos tomar as vizinhanças U_i conexas e disjuntas para cada q_i , de tal forma que $f : U_i \rightarrow V_i$ é um difeomorfismo para todo $i \in \{1, \dots, m\}$.

Como U_i é conexo, todos os pontos deste conjunto terão o mesmo sinal relativamente a f .

Agora, sendo $U = U_1 \cap \dots \cap U_m$, mostraremos que existe uma vizinhança V de p tal que $f^{-1}(V) \subset U$ e, para todo $y \in V$, o conjunto $f^{-1}(y)$ é formado por exatamente m pontos x_1, \dots, x_m tais que $x_i \in U_i$, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$.

Suponhamos que tal vizinhança V não exista. Então, para toda vizinhança V de p , em particular as vizinhanças satisfazendo $V \subset V_1 \cap \dots \cap V_m$, temos $f^{-1}(V) \not\subset U$.

Com isso, consideremos uma carta $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ de N , de tal forma que $V \subset W$ e $\varphi(p) = 0$. Então, como V é aberto, $\varphi(V) = A$ é um aberto em \mathbb{R}^n que contém a origem.

Agora, considerando, para cada $n \in \mathbb{N}$ a bola aberta de raio $\frac{1}{n}$ e centro na origem, $B_{\frac{1}{n}} = B_{\frac{1}{n}}(0) \subset \mathbb{R}^n$, obtemos que

$$\varphi^{-1}(B_{\frac{1}{n}} \cap A)$$

é uma vizinhança de p em N e, por hipótese,

$$f^{-1}(\varphi^{-1}(B_{\frac{1}{n}} \cap A)) \not\subset U.$$

Logo, existe $x_n \in f^{-1}(\varphi^{-1}(B_{\frac{1}{n}} \cap A))$ tal que $x_n \notin U$.

Portanto, obtemos uma sequência de pontos $\{x_n\}$ tal que $x_n \notin U$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora, definamos a sequência $\{y_n\} \subset N$, em que $y_n = f(x_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $\varphi(f(x_n)) = \varphi(y_n) \in B_{\frac{1}{n}}$, quando $n \rightarrow +\infty$, temos $\varphi(y_n) \rightarrow 0$ e, sendo φ uma carta, $y_n \rightarrow p$. Logo, sendo Z uma vizinhança de p tal que \bar{Z} é compacto, para um $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, temos $y_n \in \bar{Z}$, para todo $n \geq n_0$, ou seja, $x_n \in f^{-1}(\bar{Z})$, para todo $n \geq n_0$.

Sendo f uma aplicação própria, o conjunto $f^{-1}(\bar{Z})$ é compacto e, passando a uma subsequência caso necessário, existe $x \in M$ tal que $x_n \rightarrow x$. Ou seja, sendo f diferenciável, logo, em particular, contínua, temos

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = p.$$

Portanto, necessariamente, $x = q_i$ para algum $i \in \{1, \dots, m\}$. Entretanto, teríamos $x \in U$ e, sendo U aberto, $x_n \in U$ para todo n grande o suficiente, contrariando a hipótese de que $x_n \notin U$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Consequentemente, existe uma vizinhança V de p satisfazendo $f^{-1}(V) \subset U$.

Por fim, sendo V tal que $f^{-1}(V) \subset U = U_1 \cap \dots \cap U_m$ e $V \subset V_1 \cap \dots \cap V_m$ dado $y \in V$, segue da bijetividade de f em cada U_i que $f^{-1}(y) \cap U_i = \{x_i\}$ e, como $f^{-1}(V) \subset U$, $f^{-1}(y)$ possuirá exatamente m pontos em que o "sinal" relativo a f é o mesmo do respectivo ponto regular $q_i \in U_i$.

Portanto, o resultado segue. □

Lema 3.1.11. *Sejam M, N variedades diferenciáveis de mesma dimensão m , orientadas, com N conexa e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação própria de classe C^1 . Se p e q são valores regulares de f que pertencem a um conjunto aberto V homeomorfo ao \mathbb{R}^m por meio de uma carta, então $gr_p(f) = gr_q(f)$.*

Teorema 3.1.12. *Sejam M, N variedades diferenciáveis de mesma dimensão m , orientadas, com N conexa e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação própria de classe C^1 . Se p e q são valores regulares quaisquer de f , então $gr_p(f) = gr_q(f)$.*

Demonstração. Sejam $p, q \in N$ valores regulares quaisquer de f . Como N é conexa e toda variedade diferenciável é localmente conexa, segue que N é conexa por caminhos. Assim, existe

um caminho $\lambda : [0, 1] \rightarrow N$ que liga p e q .

Agora, como, por definição, todo caminho é contínuo e $[0, 1]$ é compacto, segue que $\lambda([0, 1])$ é compacto. Assim, considerando uma cobertura por abertos tal que para cada aberto existe uma carta (tal cobertura existe por conta de N ser variedade diferenciável), conseguimos extrair uma subcobertura finita, que denotaremos por $\{V_1, \dots, V_s\}$, de $\lambda([0, 1])$ destes abertos.

Chamando $p = a_0$ e $q = a_s$ e tomando pontos a_1, \dots, a_{s-1} de tal forma que a_{i-1} e a_i pertencem ao mesmo aberto V_i , pelo Teorema de Sard (Teorema 2.5.10), podemos escolher tais pontos de tal forma que sejam valores regulares.

Assim, como N é conexa, podemos tomar cada vizinhança V_i como sendo difeomorfa ao \mathbb{R}^m . Sendo $\varphi_i : V_i \rightarrow \mathbb{R}^m$ o difeomorfismo em questão, sendo $b_{i-1} = \varphi(a_{i-1})$ e $b_i = \varphi(a_i)$, pelo Lema 3.1.11, segue que $gr_{b_{i-1}}(\varphi \circ f) = gr_{b_i}(\varphi \circ f)$.

Entretanto, como V_i é conexo para cada $i \in \{1, \dots, s\}$ e φ é um difeomorfismo, então todo ponto $v \in V_i$ tem o mesmo sinal relativamente a φ , ou seja

$$gr_{a_{i-1}}(f) = gr_{a_i}(f),$$

para todo $i \in \{1, \dots, s\}$.

$$\text{Portanto, } gr_p(f) = gr_q(f). \quad \square$$

Com os resultados acima, vemos que a definição do grau não irá depender do ponto da variedade escolhido, desde que N seja conexa. Assim, podemos fazer a seguinte definição.

Definição 3.1.13. Sejam M, N variedades diferenciáveis orientadas e de mesma dimensão, com N conexa e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação própria de classe C^1 , definimos o grau de f , e denotamos por $gr(f)$ o número

$$gr(f) = gr_p(f)$$

para um valor regular $p \in N$ qualquer da aplicação f .

Como consequência do Teorema 3.1.12, temos o seguinte Corolário.

Corolário 3.1.14. *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação própria de classe C^1 entre as variedades diferenciáveis orientadas M e N de mesma dimensão m , com N conexa. Se $gr(f) \neq 0$, então f é sobrejetora.*

Demonstração. De fato, se existir $y \in N \setminus f(M)$, por definição y seria valor regular de f e, como $f^{-1}(y) = \emptyset$, segue que $gr(f) = 0$, o que contraria a hipótese.

Portanto, f é sobrejetora. □

Vejamos um exemplo sobre o Corolário acima.

Exemplo 3.1.15. Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação própria de classe C^1 definida sobre uma variedade diferenciável m -dimensional orientada e compacta. De fato, como em particular f é

contínua, segue que $f(M)$ é um subconjunto compacto de \mathbb{R}^m , ou seja, é fechado e limitado. Consequentemente, f não é sobrejetora e, pelo Corolário anterior, $gr(f) = 0$.

Notemos que pode existir uma aplicação entre variedades orientadas de mesma dimensão que são sobrejetoras e o grau da aplicação é nulo.

Exemplo 3.1.16. A aplicação $f : (-1, 0) \cup (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ dada por $f(t) = t^2$ é sobrejetora. Entretanto, dado $t \in (0, 1)$, temos $f^{-1}(t) = \pm\sqrt{t}$. Como $t > 0$, temos \sqrt{t} ponto positivo e $-\sqrt{t}$ ponto negativo. Portanto, $gr(f) = 0$.

Em alguns casos, o cálculo do grau de uma aplicação pode tornar-se demasiadamente difícil. Para contornar tal dificuldade, podemos usar algumas ferramentas que nos auxiliam neste cálculo. Uma delas é dada pelo Teorema 3.1.17.

Teorema 3.1.17. *Sejam M, N e P variedades diferenciáveis de mesma dimensão m , orientadas, com N e P conexas. Se $f : M \rightarrow N$ e $g : N \rightarrow P$ são aplicações próprias de classe C^1 , então $gr(g \circ f) = gr(g)gr(f)$.*

Demonstração. Sejam $A \subset P$ e $B \subset P$ os conjuntos dos valores regulares de g e $g \circ f$, respectivamente. Pela Proposição 3.1.9, A e B são abertos em P . Assim, pelo Teorema de Sard (Teorema 2.5.10), como o conjunto dos valores regulares de de uma aplicação é denso no contra domínio, deve existir $p \in P$ tal que p é valor regular de g e $g \circ f$, simultaneamente.

Se $(g \circ f)^{-1}(p) = \emptyset$, teríamos $g^{-1}(p) = \emptyset$ ou $f^{-1}(g^{-1}(p)) = \emptyset$. Em ambos os casos, o grau seria 0 em $g \circ f$ e a igualdade pretendida seria satisfeita.

Por outro lado, supondo que $(g \circ f)^{-1}(p) \neq \emptyset$, supondo $g^{-1}(p) = \{p_1, \dots, p_r\}$, tais pontos p_i seriam todos valores regulares de f , visto que, tendo N e P mesma dimensão, $g'(p_i) : T_{p_i}N \rightarrow T_{p_i}P$ é um isomorfismo.

Assim, para cada $p_i \in g^{-1}(p)$, suponhamos que $f^{-1}(p_i) = \{q_{i1}, \dots, q_{is_i}\}$. Logo, $(g \circ f)^{-1}(p) = \{q_{ij}, i \in \{1, \dots, r\} \text{ e } j \in \{1, \dots, s_i\}\}$ e o sinal de q_{ij} em relação a $g \circ f$ é o produto do sinal de q_{ij} em relação a f com o sinal de $p_i = f(q_{ij})$ em relação a g .

Sejam ξ_i o sinal de p_i relativamente a g , ou seja, $\xi = 1$ ou $\xi = -1$ se p_i é positivo ou negativo, respectivamente, η_{ij} o sinal de q_{ij} em relação a f e τ_{ij} o sinal de q_{ij} em relação a $g \circ f$. Então, da definição de grau,

$$gr(g) = \sum_{i=1}^r \xi_i \text{ e } gr(f) = \sum_{j=1}^{s_i} \eta_{ij},$$

sendo que o grau de f independe do i escolhido.

Como $\tau_{ij} = \eta_{ij}\xi_i$, temos

$$\begin{aligned} gr(g \circ f) &= \sum_{i,j=1}^{r,s_i} \tau_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=1}^{s_i} \eta_{ij} \right) \xi_i \\ &= \sum_{i=1}^r gr(f)\xi_i \\ &= gr(f) \sum_{i=1}^r \xi_i \\ &= gr(f)gr(g), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Com este Teorema, obtemos o seguinte Corolário.

Corolário 3.1.18. *Sejam $f : M \rightarrow N$ e $g : P \rightarrow Q$ aplicações próprias de classe C^1 , em que M e N são variedades diferenciáveis n -dimensionais, P e Q são variedades diferenciáveis n -dimensionais, sendo todas elas orientadas e N, R conexas. Então, considerando a aplicação $f \times g : M \times P \rightarrow N \times Q$, definida por $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$, temos $gr(f \times g) = gr(f)gr(g)$.*

Demonstração. De fato, como $f \times g = (f \times i) \circ (j \times g)$, sendo $i : Q \rightarrow Q$ e $j : M \rightarrow M$ as aplicações identidades, considerando $M \times P$ e $N \times Q$ com a orientação produto ¹, temos $gr(f \times i) = gr(f)$ e $gr(j \times g) = gr(g)$.

Portanto, o resultado segue do Teorema 3.1.17. □

Agora, veremos alguns resultados relevantes que não serão demonstrados aqui, pois as demonstrações fogem do escopo deste trabalho. O primeiro deles é um Teorema que relaciona os conceitos de grau de aplicações visto neste trabalho e homotopia.

Teorema 3.1.19. *Sejam M, N variedades diferenciáveis de mesma dimensão n , orientadas, com M compacta e $f, g : M \rightarrow N$ aplicações próprias de classe C^1 que possuem o mesmo ponto $p \in N$ como valor regular. Se $f \simeq g$ (ou seja, f é homotópica a g), então $gr_p(f) = gr_p(g)$. ²*

Munidos deste Teorema e, com o Teorema 2.8.4, podemos generalizar a definição de grau para o caso de aplicações contínuas entre variedades.

Definição 3.1.20. *Sejam M, N variedades diferenciáveis de mesma dimensão m , compactas e orientadas e tome $f : M \rightarrow N$ uma aplicação contínua. Então, pelo Teorema 2.8.4, existe*

¹ Ver Lima (1961, p. 9)

² Ver Lima (1961, p. 119)

$g : M \rightarrow N$ de classe C^1 homotópica a f . Definimos o grau de f , denotado por $gr(f)$ como sendo o grau da aplicação g .

Uma consequência muito interessante do Teorema 3.1.19 é o Teorema Fundamental da Álgebra, o qual veremos no próximo exemplo.

Exemplo 3.1.21 (Teorema Fundamental da Álgebra). Se $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é um polinômio de grau $n \geq 1$, então p é uma função sobrejetora. Em outras palavras, p admite pelo menos uma raiz.

De fato, identificando \mathbb{C} com \mathbb{R}^2 , a derivada de p em um ponto $z \in \mathbb{C}$ é uma transformação linear $p'(z) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida pelo produto por um número complexo. Consequentemente, $p'(z) \equiv 0$ ou a matriz jacobiana de p possui determinante positivo. Portanto, dado $w \in \mathbb{C}$ valor regular de p , o grau de p em w será o número de pontos em $p^{-1}(w)$.

Por simplicidade, supomos que $p(z) = z^m + q(z)$, sendo q um polinômio de grau menor ou igual a $m - 1$. Definindo $H : \mathbb{C} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ por $H(z, t) = z^m + (1 - t)q(z)$, por definição, teremos que H é uma homotopia entre p e o monômio mônico $\varphi(z) = z^m$.

Como, dado $0 \neq a \in \mathbb{C}$, a equação $z^m = a$ possui m soluções, segue que $gr(\varphi) = m$ e, pelo Teorema 3.1.19, $gr(p) = m$, implicando, do Corolário 3.1.14, que p é uma função sobrejetora.

Agora, sob certas condições, enunciaremos o caso em que a “recíproca” do Teorema 3.1.19 é válida.

Teorema 3.1.22. *Sejam $f, g : M \rightarrow S^m$ definidas em uma variedade diferenciável M de dimensão m orientada, compacta e conexa, chegando na esfera de dimensão m , S^m . Se $gr(f) = gr(g)$, então f e g são homotópicas.³*

Finalmente, a título de curiosidade, vale comentar que existe uma relação entre o grau que estudamos nesta seção com objetos envolvendo homologia. De fato, sendo $f : M \rightarrow N$ uma aplicação própria entre variedades diferenciáveis de mesma dimensão m , orientadas, compactas e conexas, tal aplicação induz um homeomorfismo $f_* : H_n(M) \rightarrow H_n(N)$, do grupo de homologia de M no grupo de homologia de N . Além disso, é possível provar que tais grupos de homologia na dimensão m são isomorfos ao grupo dos inteiros \mathbb{Z} . Assim, pela definição de homomorfismo, f_* será a multiplicação por um real r . Com algumas ferramentas de topologia algébrica, é possível mostrar que $gr(f) = r$.

Passemos agora para o estudo do grau local de uma aplicação.

3.2 GRAU LOCAL DE UMA APLICAÇÃO

Com o fim de definir o grau local de uma aplicação, precisaremos primeiro definir a noção de equivalência homotópica.

³ Ver Lima (1961, p.68)

Definição 3.2.1. Sejam X e Y espaços topológicos quaisquer e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Dizemos que f é uma equivalência homotópica quando existir $g : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ g \simeq id : Y \rightarrow Y$ e $g \circ f \simeq id : X \rightarrow X$. Neste caso, diremos que g é a equivalência inversa de f e que os espaços X e Y tem o mesmo tipo de homotopia.

Vejamos um exemplo relevante acerca da definição acima.

Exemplo 3.2.2. Dado um ponto $a \in \mathbb{R}^n$, considere a bola fechada $B = B[a, \varepsilon] \subset \mathbb{R}^n$, sendo $\varepsilon > 0$. Então, o conjunto $B \setminus \{a\}$ possui o mesmo tipo de homotopia da esfera unitária $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

De fato, definindo as aplicações $\rho = \rho_{a,\varepsilon} : B \setminus \{a\} \rightarrow S^{n-1}$ e $\sigma = \sigma_{a,\varepsilon} : S^{n-1} \rightarrow B \setminus \{a\}$, dadas por

$$\rho(x) = \frac{x - a}{|x - a|} \text{ e } \sigma(y) = a + \varepsilon y,$$

então $\rho \circ \sigma = id : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$.

Por outro lado, considerando a aplicação contínua $F : B \setminus \{a\} \times I \rightarrow B \setminus \{a\}$ definida por

$$F(x, t) = (1 - t) \left(a + \varepsilon \frac{x - a}{|x - a|} \right) + tx,$$

segue que $\sigma \circ \rho \simeq id : B \setminus \{a\} \rightarrow B \setminus \{a\}$.

Se tomarmos $\varepsilon = \infty$, teremos $B = \mathbb{R}^n$ e, de forma semelhante, $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ terá o mesmo tipo de homotopia de S^{n-1} . A única diferença neste caso é que a equivalência inversa de $\rho_{a,\infty}$ será dada por $\sigma_{a,\infty}(y) = a + y$.

Com isso, podemos definir o grau local de uma aplicação entre variedades.

Definição 3.2.3 (Grau Local). Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $a \in U$, $b \in \mathbb{R}^n$ qualquer, $f : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{b\}$ uma aplicação contínua e $B = B[a, \varepsilon] \subset \mathbb{R}^n$ uma bola fechada de centro a e raio $\varepsilon > 0$. Considere também as aplicações $\sigma = \sigma_{a,\varepsilon} : S^{n-1} \rightarrow B \setminus \{a\}$, $\rho = \rho_{a,\infty} : \mathbb{R}^n \setminus \{b\} \rightarrow S^{n-1}$ definidas como no exemplo acima e a composição $\rho \circ f \circ \sigma : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$. Definimos o grau local de f em a , denotado por $\gamma_a(f)$ como sendo o grau da aplicação $\rho \circ f \circ \sigma$, ou seja, $\gamma_a(f) = gr(\rho \circ f \circ \sigma)$.

Vale observar que a definição de grau local independe da escolha da bola fechada $B[a, \varepsilon] \subset U$. De fato, tomando $B[a, \varepsilon_1] \subset U$, com $\varepsilon_1 < \varepsilon$, considerando a inclusão

$$i : B[a, \varepsilon_1] \setminus \{a\} \rightarrow B[a, \varepsilon] \setminus \{a\},$$

e, sendo $J : S^{n-1} \times I \rightarrow B[a, \varepsilon] \setminus \{a\}$ definida por

$$J(x, t) = (1 - t)(a + \varepsilon_1 x) + t(a + \varepsilon x),$$

sendo $\sigma_1 = \sigma_{a, \varepsilon_1}$, temos $i \circ \sigma_1 \simeq \sigma : S^{n-1} \rightarrow B[a, \varepsilon] \setminus \{a\}$. Além disso, a composição

$$f \circ i : B[a, \varepsilon_1] \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{b\}$$

é a restrição de f em $B[a, \varepsilon_1] \setminus \{a\}$. Assim, o grau de f definido na bola $B[a, \varepsilon_1] \setminus \{a\}$ é o grau da aplicação

$$\rho \circ f \circ i \circ \sigma_1 : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}.$$

Portanto, pelo Teorema 3.1.19, como $\rho \circ f \circ i \circ \sigma_1 \simeq \rho \circ f \circ \sigma$, temos $gr(\rho \circ f \circ i \circ \sigma_1) = gr(\rho \circ f \circ \sigma)$.

Além dessa observação, façamos mais algumas observações importantes acerca da definição de grau local.

Observação 3.2.4. (a) Sendo $f : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{b\}$ uma aplicação contínua, o grau local irá depender apenas do comportamento de f em uma vizinhança pequena de a , visto que, se $U, V \subset \mathbb{R}^m$ são vizinhanças de a em \mathbb{R}^m e $g : V \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{b\}$ é uma aplicação contínua tal que $f|_W = g|_W$, sendo $W \subset U \cap V$ aberto, teremos $\gamma_a(f) = \gamma_a(g)$, pois, na definição de grau local, basta tomar a bola fechada B com raio suficientemente pequeno para que $B \subset W$ e usá-la para calcular o grau pretendido;

(b) Se $f \simeq g : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{b\}$, então, em particular, $f \simeq g : B \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{b\}$. Logo, $\rho \circ f \circ \sigma \simeq \rho \circ g \circ \sigma$ e, do Teorema 3.1.19, temos $\gamma_a(f) = \gamma_a(g)$.

Agora, vejamos algumas propriedades do grau local.

Teorema 3.2.5. *Sejam $f : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{b\}$ e $g : V \setminus \{b\} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{c\}$ aplicações contínuas com U e V subconjuntos abertos de \mathbb{R}^m , $a \in U$, $b \in V$ e $f(U \setminus \{a\}) \subset V \setminus \{b\}$. Então, $\gamma_a(g \circ f) = \gamma_b(g) \gamma_a(f)$.*

Demonstração. Sejam $B_1 = B[b, \varepsilon_1] \subset V$ a bola fechada de centro b e raio $\varepsilon_1 > 0$ e $B = [a, \varepsilon] \subset U$ a bola fechada de centro a e raio $\varepsilon > 0$ satisfazendo $f(B) \subset B_1$. Por definição de grau local, $\gamma_a(g \circ f) = gr(\rho \circ g \circ f \circ \sigma)$.

Consideremos $\rho_1 : B_1 \setminus \{b\} \rightarrow S^{m-1}$ e $\sigma_1 : S^{m-1} \rightarrow B_1 \setminus \{b\}$ as equivalências homotópicas naturais. Como $\sigma_1 \circ \rho_1 \simeq id : B_1 \setminus \{b\} \rightarrow B_1 \setminus \{b\}$, por propriedade de homotopia, obtemos

$$\rho \circ g \circ f \circ \sigma \simeq \rho \circ g \circ \sigma_1 \circ \rho_1 \circ f \circ \sigma.$$

Daí, pelos Teoremas 3.1.17 e 3.1.19, temos

$$gr(\rho \circ g \circ f \circ \sigma) = gr(\rho \circ g \circ \sigma_1) gr(\rho_1 \circ f \circ \sigma).$$

Assim, como $\gamma_b(g) = gr(\rho \circ g \circ \sigma_1)$ e, sendo $\rho_2 : \mathbb{R}^m \setminus \{b\} \rightarrow S^{m-1}$, temos $\rho_1 = \rho_2|_{B_1 \setminus \{b\}}$, segue que $\rho_1 \circ f \circ \sigma_1 = \rho_2 \circ f \circ \sigma_1$ e, conseqüentemente, $\gamma_a(f) = gr(\rho_1 \circ f \circ \sigma_1)$, de onde segue o

resultado. □

Deste Teorema, temos o seguinte Corolário.

Corolário 3.2.6. *Sejam U, V e W subconjuntos abertos de \mathbb{R}^m tais que $a \in W \subset U$ e $b \in V$. Se $f : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{b\}$ é uma aplicação contínua que aplica homeomorficamente $W \setminus \{a\}$ sobre $V \setminus \{b\}$, então $\gamma_a(f) = \pm 1$.*

Demonstração. De fato, sendo $g = f|_{W \setminus \{a\}}$, g é um homeomorfismo e possui inversa g^{-1} . Assim, do Teorema 3.2.5, temos $\gamma_a(\text{Id}) = \gamma_a(g \circ g^{-1}) = \gamma_a(g) \gamma_b(g^{-1}) = 1$. Daí, $\gamma_a(f) = \pm 1$. □

Vejamos um exemplo deste Corolário.

Exemplo 3.2.7. Seja $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear invertível. Mostremos que $\gamma_0(f) = 1$, se $\det(f) > 0$ e $\gamma_0(f) = -1$ se $\det(f) < 0$. De fato, como f é linear e invertível, temos $f^{-1}(0) = 0$ e $f(\mathbb{R}^m \setminus \{0\}) = \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Suponha primeiramente que $\det(f) > 0$. Nessas condições, f é um elemento da componente conexa da identidade em $Gl(m, \mathbb{R})$. Consequentemente, existe uma aplicação contínua $\lambda : [0, 1] \rightarrow Gl(m, \mathbb{R})$ dada por $\lambda(t) = f_t$, sendo $f_0 = f$ e $f_1 = \text{id} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ e f_t invertível, satisfazendo $f_t(\mathbb{R}^m \setminus \{0\}) \subset \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ para todo $t \in (0, 1)$. Logo, obtemos a homotopia $F : \mathbb{R}^m \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$, definida por $F(t, x) = f_t(x)$. Assim, $f \simeq \text{id} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ e, da observação 3.2.4, temos $\gamma_0(f) = 1$.

Por outro lado, caso $\det(f) < 0$, definindo $\mu : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ dada por $\mu(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, -x_m)$ (a reflexão relativamente ao hiperplano $x_m = 0$), teremos $\gamma_0(\mu) = -1$. Consequentemente, $\det(\mu f) = \det(\mu) \det(f) > 0$, ou seja, $1 = \gamma_0(\mu f) = \gamma_0(\mu) \gamma_0(f) = -\gamma_0(f)$.

Portanto, $\gamma_0(f) = -1$.

Utilizando o Corolário 3.2.6 e o Exemplo acima, podemos enunciar e demonstrar a seguinte proposição.

Proposição 3.2.8. *Sejam $a \in U \subset \mathbb{R}^m$ um ponto de um conjunto aberto de \mathbb{R}^m , $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável, com $b = f(a)$. Se $f(U \setminus \{a\}) \subset \mathbb{R}^m \setminus \{b\}$ e $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ invertível, então $\gamma_a(f) = 1$ se o determinante jacobiano $\det(Jf(a)) > 0$ e $\gamma_a(f) = -1$ se $\det(Jf(a)) < 0$.*

Demonstração. De fato, como $f'(a)$ é invertível, pelo Teorema B.3.31, f é um homeomorfismo sobre uma vizinhança de a em uma vizinhança de b . Logo, pelo Corolário 3.2.6, temos $\gamma_a(f) = \pm 1$.

Resta mostrar que $\gamma_a(f) = 1$ quando $\det(Jf(a)) > 0$ e $\gamma_a(f) = -1$, quando $\det(Jf(a)) < 0$. Para isso, suponhamos, sem perda de generalidade, que $a = 0$ e $f(a) = 0$. Definamos

$$h = \inf\{\|f'(a)(u)\| : u \in \mathbb{R}^m, \|u\| = 1\}.$$

Mostremos que $h > 0$. Para isso, suponha que $h = 0$. Então, dado $\varepsilon = \frac{1}{n} > 0$, com $n \in \mathbb{N}$, existira $u_n \in \mathbb{R}^m$, com $\|u_n\| = 1$ tal que $\|f'(0)(u_n)\| < \varepsilon = \frac{1}{n}$. Logo, a sequência $\{\|f'(0)(u_n)\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ tenderia a 0, implicando que $\{f'(0)(u_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergiria para $0 \in \mathbb{R}^m$. Assim, como f é de classe

C^1 , u_n convergiria para 0, que é uma contradição, pois $\|u_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $h > 0$.

Agora, da diferenciabilidade de f , em uma vizinhança de 0, existe $\theta : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $f(x) = f'(0)(x) + \theta(x)$, sendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|\theta(x)\|}{\|x\|} = 0$.

Assim, considere $W \subset U$ aberto, com $0 \in W$ e tal que $\frac{\|\theta(x)\|}{\|x\|} < h$, para todo $x \in W$. Então, para $x \in W \setminus \{0\}$ e $t \in [0, 1]$ arbitrários, temos

$$\begin{aligned} (1-t)f(x) + tf'(0)(x) &= (1-t)f'(0)(x) + (1-t)\theta(x) + tf'(0)(x) \\ &= f'(0)(x) + (1-t)\theta(x) \\ &= \|x\| \left(f'(0) \left(\frac{x}{\|x\|} \right) + (1-t) \frac{\theta(x)}{\|x\|} \right) \neq 0. \end{aligned}$$

Logo, as restrições $f, f'(0) : W \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ são homotópicas pela homotopia $F : (W \setminus \{0\}) \times I \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ dada por $F(x, t) = (1-t)f(x) + tf'(0)(x)$.

Portanto, da Observação 3.2.4, $\gamma_0(f) = \gamma_0(f'(0)) = \pm 1$, sendo 1 quando o determinante do jacobiano de f for positivo e -1 quando o determinante do jacobiano de f for negativo, como queríamos demonstrar. \square

Para finalizar esta seção, temos o Teorema 3.2.9.

Teorema 3.2.9. *Seja $f : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{b\}$ uma aplicação contínua, sendo $a \in U \subset \mathbb{R}^m$, com U aberto, e $b = f(a)$. Nestas condições, $\gamma_a(f) = 0$ se, e somente se, para toda bola fechada $B = B[a, \varepsilon] \subset U$ centrada em a e de raio $\varepsilon > 0$ existe uma aplicação contínua $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{b\}$ tal que $g|_{U \setminus B} = f|_{U \setminus B}$.*

Demonstração. Primeiramente, suponhamos que existe $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{b\}$ contínua tal que $g(x) = f(x)$, para todo $x \in U \setminus B$. Então, sendo $B_1 = B[0, 1]$ a bola fechada de centro na origem e raio 1 e considerando a aplicação $\sigma = \sigma_{a, \varepsilon} : S^{m-1} \rightarrow B \setminus \{a\}$, como definida no Exemplo 3.2.2, definindo $\sigma_1 : B_1 \rightarrow B$ com a mesma lei de formação de σ , obtemos que σ_1 é um homeomorfismo. Logo, tomando $i : S^{m-1} \rightarrow B_1$ a inclusão, segue que

$$f \circ \sigma = g \circ \sigma_1 \circ i : S^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{b\},$$

pois $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \sigma(S^{m-1})$. Ou seja,

$$h = \rho \circ f \circ \sigma : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$$

pode ser estendida para uma aplicação contínua $h_1 = \rho \circ g \circ \sigma_1 : B_1 \rightarrow S^{m-1}$. Assim, pela Proposição 2.8.3, h é homotópica a uma constante, resultando em $\gamma_a(f) = gr(h) = 0$.

Reciprocamente, supondo que $\gamma_a(f) = 0$, dada uma bola fechada $B = B[a, \varepsilon]$ qualquer, temos $gr(\rho \circ f \circ \sigma) = 0$, sendo $\sigma = \sigma_{a, \varepsilon} : S^{m-1} \rightarrow B$. Logo, pelo Teorema 3.1.22, segue que

$\rho \circ f \circ \sigma$ é homotópica a uma constante. Além disso, sendo $\sigma^1 : S^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{b\}$ a equivalência homotópica inversa de ρ , obtemos $\sigma^1 \circ \rho \simeq id : \mathbb{R}^m \setminus \{b\} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{b\}$. Daí, segue que

$$f \circ \sigma = id \circ (f \circ \sigma) \simeq \sigma^1 \circ \rho \circ f \circ \sigma \simeq \sigma^1 \circ (\text{constante}) = \text{constante} : S^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{b\}.$$

Assim, da Proposição 2.8.3, existe uma extensão contínua $k : B_1 \rightarrow B$ de $f \circ \sigma : S^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{b\}$. Logo, considerando novamente o homeomorfismo $\sigma_1 : B_1 \rightarrow B$, conseguimos definir a aplicação $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{b\}$ por

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in U \setminus B \\ k(\sigma_1^{-1}(x)), & \text{se } x \in B. \end{cases}$$

Portanto, g é contínua e obtemos a função pretendida. □

4 ÍNDICE DE POINCARÉ-HOPF

Nesta seção, apresentaremos uma importante aplicação da teoria de grau, o conceito de índice de Poincaré-Hopf. Iniciaremos apresentando tal conceito para campos de vetores em \mathbb{R}^2 e, posteriormente, estenderemos esse conceito para singularidades de campos de vetores em variedades diferenciáveis.

4.1 CAMPOS DE VETORES E O ÍNDICE DE POINCARÉ-HOPF EM \mathbb{R}^2

Primeiramente, definamos um campo de vetores em um conjunto aberto de \mathbb{R}^2 .

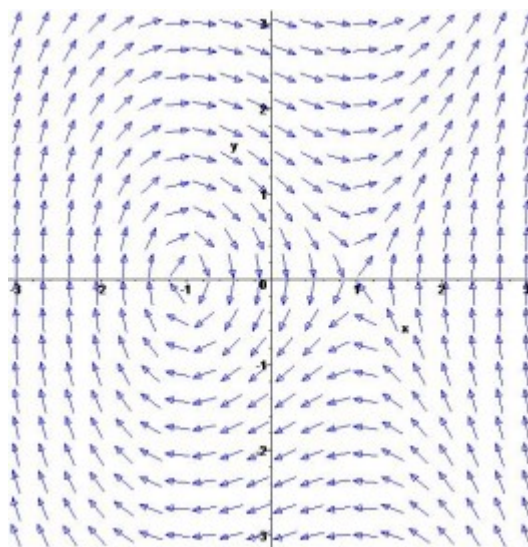
Definição 4.1.1. Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 . Um campo de vetores em U é uma aplicação $v : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que, para cada $(x, y) \in U$ associa o ponto $v(x, y) = (v_1(x, y), v_2(x, y))$.

As noções de continuidade e diferenciabilidade são análogos ao que vimos no caso de aplicações em geral.

Quando trabalhamos em \mathbb{R}^2 , podemos representar geometricamente um campo de vetores v . Tal representação é feita tomando em cada ponto $(x, y) \in U$ o vetor $v(x, y)$ com a origem em (x, y) .

Exemplo 4.1.2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x$. A aplicação $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $v(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), -\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) = (y, x^2 - 1)$ é um campo de vetores cuja representação gráfica é dada por

Figura 4.1 – Representação gráfica do campo de vetores v em \mathbb{R}^2



Fonte: Dalbello (2011)

A seguir, definiremos alguns conceitos relevantes para o estudo dos campos de vetores e para a definição do índice de Poincaré-Hopf no caso particular do \mathbb{R}^2 .

Definição 4.1.3 (Singularidade). Seja $v : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores no conjunto aberto U . Dado $p \in U$, dizemos que p é uma singularidade de v se, e somente se, $v(p) = (0, 0)$.

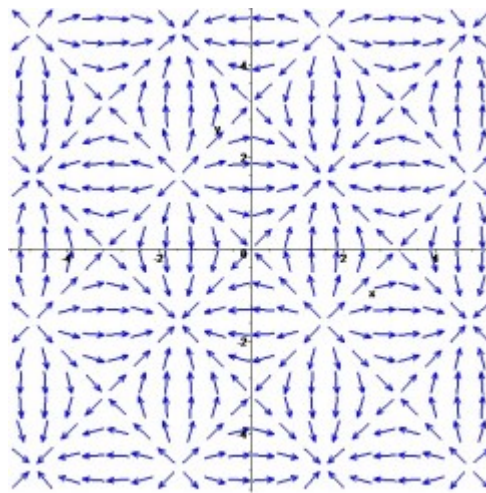
Definição 4.1.4 (Singularidade isolada). Seja $v : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores no aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Se $p \in U$ é uma singularidade de v e existe uma vizinhança aberta $V_p \subset U$ de p tal que p é a única singularidade de v nessa vizinhança, então p é uma singularidade isolada de v .

No exemplo anterior, os pontos $(1, 0)$ e $(-1, 0)$ são singularidades. Ainda mais, tais pontos são singularidades isoladas. Basta considerar as bolas abertas $B((1, 0); 1)$ e $B((-1, 0); 1)$.

Vejamos outro exemplo envolvendo singularidades isoladas.

Exemplo 4.1.5. Seja $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $v(x, y) = (\cos(x) \sin(y), \cos(y) \sin(x))$. Notemos que todos os pontos da forma $(n_1 \frac{\pi}{2}, n_2 \frac{\pi}{2})$, $(n_1 \pi, n_2 \pi)$, com $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ são singularidades isoladas de v , bastando considerar para cada ponto dessa forma a bola aberta centrada nesse ponto e de raio $\frac{\pi}{2}$, como podemos ver na figura abaixo.

Figura 4.2 – Representação do campo de vetores v em \mathbb{R}^2



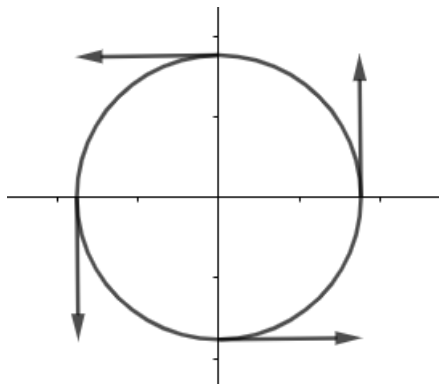
Fonte: Dalbello (2011)

Outra definição relevante é a de orientação de uma circunferência no \mathbb{R}^2 . Para isso, utilizaremos a noção de orientação de bases abordada no Apêndice B.4 deste trabalho. Tomemos, sem perda de generalidade, que a base canônica de \mathbb{R}^2 possui orientação positiva. Logo, dada uma base \mathcal{B} qualquer de \mathbb{R}^2 , se tal base possui mesma orientação quando comparada com a base canônica, diremos que esta base possui orientação positiva. Caso contrário, diremos que tal base possui orientação negativa. Neste sentido, se, ao percorrer a circunferência em um

sentido (horário ou anti-horário) e tomarmos dois vetores tangentes à circunferência em dois pontos distintos em uma mesma semi-circunferência de tal forma que eles sejam linearmente independentes e ordenados pelo sentido tomado, se a base formada por eles for positiva, diremos que o sentido percorrido é positivo. Caso contrário, diremos que o sentido é negativo. Assim, temos a Definição 4.1.6.

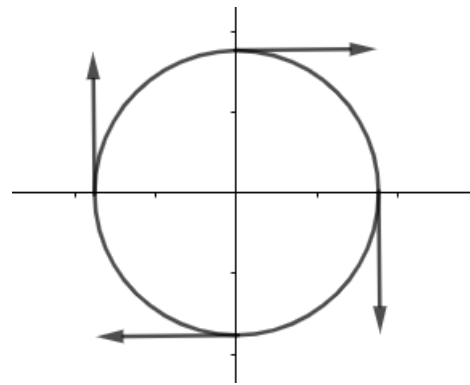
Definição 4.1.6. Seja $S = S(p, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2$ uma circunferência centrada em um ponto $p \in \mathbb{R}^2$ e de raio $\varepsilon > 0$. Diremos que o sentido anti-horário de S é o sentido positivo de S e o sentido horário de S é o sentido negativo de S .

Figura 4.3 – Sentido positivo



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 4.4 – Sentido negativo



Fonte: Elaborada pelo autor

Agora, vejamos a definição da aplicação de Gauss.

Definição 4.1.7 (Aplicação de Gauss). Sejam $v : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores contínuo no aberto U , p uma singularidade isolada e $S = S(p, \varepsilon) \subset U$ uma circunferência centrada em $p \in U$ e de raio $\varepsilon > 0$ tal que $v(q) \neq 0$ para todo $q \in S$. A aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : S &\rightarrow S^1 \\ x &\mapsto \varphi(x) := \frac{v(x)}{|v(x)|} \end{aligned}$$

é denominada aplicação de Gauss.

A aplicação de Gauss associa cada vetor $x \in S$ a um vetor unitário $\varphi(x)$. Ademais, dada a continuidade do campo v , podemos utilizar a noção de orientação da circunferência S e avaliar o comportamento de tal orientação após utilizar a aplicação de Gauss, que por sua vez é também contínua. Para isso, necessitaremos de mais alguns conceitos.

Definição 4.1.8. Sejam $v : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores contínuo no aberto U e p uma singularidade isolada de v . Dada uma circunferência $S = S(p, \varepsilon) \subset U$ de centro p e raio

$\varepsilon > 0$ pequeno o suficiente, se a aplicação de Gauss percorre positivamente a circunferência S^1 quando v percorre S positivamente, ou seja, no sentido anti-horário, diremos que φ percorre S^1 positivamente. Caso contrário, diremos que φ percorre S^1 negativamente.

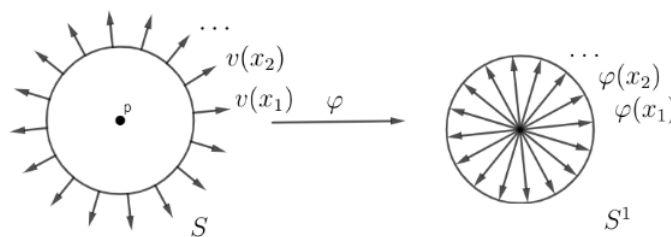
Com estas noções, somos capazes de definir o índice de Poincaré-Hopf em \mathbb{R}^2 .

Definição 4.1.9 (Índice de Poincaré-Hopf em \mathbb{R}^2). Sejam $v : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores contínuo no aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ e p uma singularidade isolada de v . Sendo $S = S(p, \varepsilon)$ uma circunferência suficientemente pequena centrada em p , definimos o índice de Poincaré-Hopf de v em p como sendo o número de voltas positivas menos o número de voltas negativas que a aplicação de Gauss φ dá na circunferência S^1 quando o campo v percorre S por completo. Denotaremos tal índice por $I_{PH}(v, p)$.

Vejamos alguns exemplos sobre essa definição.

Exemplo 4.1.10. Um exemplo de um campo contínuo v com uma singularidade isolada p com $I_{PH}(v, p) = 1$.

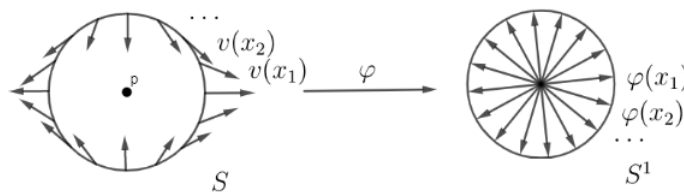
Figura 4.5 – $I_{PH}(v, p) = 1$



Fonte: Elaborada pelo autor

Exemplo 4.1.11. Um exemplo de um campo contínuo v com uma singularidade isolada p com $I_{PH}(v, p) = -1$.

Figura 4.6 – $I_{PH}(v, p) = -1$



Fonte: Elaborada pelo autor

Retornando ao exemplo 4.1.5, teremos que todos os pontos da forma $(n_1\pi, n_2\pi)$ e $(n_1\frac{\pi}{2}, n_2\frac{\pi}{2})$, $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ serão singularidades isoladas do campo de vetores

$$v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto v(x, y) = (\cos(x) \operatorname{sen}(y), \cos(y) \operatorname{sen}(x)).$$

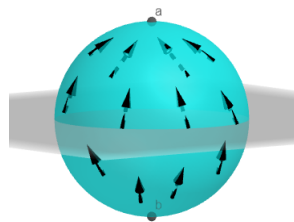
É fácil verificar que v é contínuo e, além disso, que o índice de Poincaré-Hopf para os pontos da forma $(n_1\pi, n_2\pi)$ será -1 , enquanto para os pontos da forma $(n_1\frac{\pi}{2}, n_2\frac{\pi}{2})$ o índice será 1 .

Vejamos agora um exemplo que servirá de motivação para estudarmos campos de vetores em variedades diferenciáveis. Tal exemplo, ocorre no \mathbb{R}^3 .

Primeiramente, notemos que as definições de campos de vetores, singularidades e singularidades isoladas em \mathbb{R}^3 são análogas as Definições 4.1.1, 4.1.3 e 4.1.4

Exemplo 4.1.12. Seja $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo de vetores contínuo cuja restrição à esfera unitária \mathbb{S}^2 é representada como na figura 4.7.

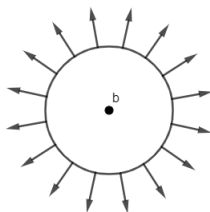
Figura 4.7 – \mathbb{S}^2



Fonte: Elaborada pelo autor

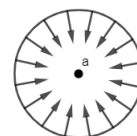
Notemos que os pontos a e b são os únicos que são singularidades. Além disso, como \mathbb{S}^2 é uma superfície diferenciável, podemos representar localmente o comportamento do campo nesses pontos em abertos do \mathbb{R}^2 como nas figuras 4.8 e 4.9.

Figura 4.8 – Vizinhança de b



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 4.9 – Vizinhança de a



Fonte: Elaborada pelo autor

De maneira intuitiva, parece que o “índice” dessas singularidades é 1. A seguir, faremos casos mais gerais em variedades diferenciáveis.

4.2 CAMPOS DE VETORES EM VARIEDADES

A ideia para definir o índice de Poincaré-Hopf nesta situação mais geral é baseada no exemplo anterior, ou seja, usar o fato que localmente variedades diferenciáveis são cópias de abertos em algum \mathbb{R}^n .

Definição 4.2.1. Seja M uma variedade diferenciável, m dimensional e TM o fibrado tangente de M . Um campo de vetores em M é uma correspondência $v : M \rightarrow TM$ que leva cada ponto $p \in M$ em um ponto (p, v_p) de TM , sendo $v_p \in T_pM$.

Notemos que, dada uma variedade diferenciável M m -dimensional, $p \in M$ e um campo de vetores $v : M \rightarrow TM$, sendo $\varphi : V \subset M \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m$ uma carta, com V uma vizinhança de p e U aberto em \mathbb{R}^m , o conjunto

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}(p) \right\} = \{(\varphi^{-1})'_{\varphi(p)}(\mathbf{e}_1), \dots, (\varphi^{-1})'_{\varphi(p)}(\mathbf{e}_m)\},$$

é uma base de T_pM associada à carta φ em cada $p \in M$. Assim, dado $v_p \in T_pM$, podemos escrever

$$v_p = \sum_{i=1}^m \alpha_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}(p),$$

ou seja, os elementos de T_pM ficam inteiramente determinados pelas funções $\alpha_i : V \rightarrow \mathbb{R}$.

Com isso, podemos definir a continuidade e diferenciabilidade de um campo de vetores.

Definição 4.2.2. Seja $v : M \rightarrow TM$ um campo de vetores na variedade diferenciável M de dimensão m . Dizemos que v é:

- (a) contínuo, quando para toda carta φ as funções α_i obtidas acima forem contínuas;
- (b) diferenciável, quando para toda carta φ as funções α_i obtidas acima forem diferenciáveis;
- (c) de classe C^k , quando para toda carta φ as funções α_i obtidas acima forem de classe C^k .

Vejamos um exemplo de campos de vetores em variedades.

Exemplo 4.2.3. A aplicação $v : S^1 \rightarrow TS^1$ definida por $v(x, y) = ((x, y), (-y, x))$ é um campo de vetores tangente à S^1 , tendo em vista que para cada $(x, y) \in S^1$ o espaço tangente é o conjunto $T_{(x,y)}S^1 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \langle (u, v), (x, y) \rangle = 0\}$.

Observemos que, sendo M uma variedade diferenciável, existe uma projeção natural $\pi : TM \rightarrow M$ definida por $\pi(p, v) = p$. Logo, segue da definição que, dado um campo de vetores $v : M \rightarrow TM$ qualquer, para cada $p \in M$, deve ocorrer $\pi(v(p)) = p$.

Teorema 4.2.4. *Sejam M uma variedade diferenciável e TM seu fibrado tangente. Então, todo campo de vetores diferenciável $v : M \rightarrow TM$ é um mergulho.*

Demonstração. De fato, como $\pi \circ v = Id : M \rightarrow M$, dado $p \in M$, pela regra da cadeia para variedades,

$$Id = (Id)'(p) = (I \circ v)'(p) = \pi'(v(p)) \cdot v'(p).$$

Assim, como a aplicação identidade Id é uma aplicação injetora, necessariamente $v'(p)$ deverá ser injetora.

Logo, v é uma imersão. Resta-nos mostrar agora que v é um homeomorfismo sobre sua imagem. De fato, como v é diferenciável, necessariamente v é contínuo. Além disso, v é injetor, já que, dados $(p, v_p) = (q, v_q)$, então $p = q$. Logo, v é bijetor sobre sua imagem.

Finalmente, notemos que podemos considerar como sua inversa na imagem a aplicação $\pi|_{v(M)}$, a qual é contínua.

Portanto, v é um homeomorfismo sobre sua imagem e, conseqüentemente, um mergulho. \square

Segue diretamente do Teorema 4.2.4 que $v(M)$ é uma subvariedade de TM .

Definição 4.2.5. Seja $v : M \rightarrow TM$ um campo de vetores tangentes sobre uma variedade m -dimensional M . Uma singularidade do campo v é um ponto $p \in M$ tal que $v(p) = \vec{0}$.

Se $p \in M$ é uma singularidade de um campo de vetores v e existe uma vizinhança $V \subset M$ de p tal que p é a única singularidade em V , então p é chamada de singularidade isolada do campo v .

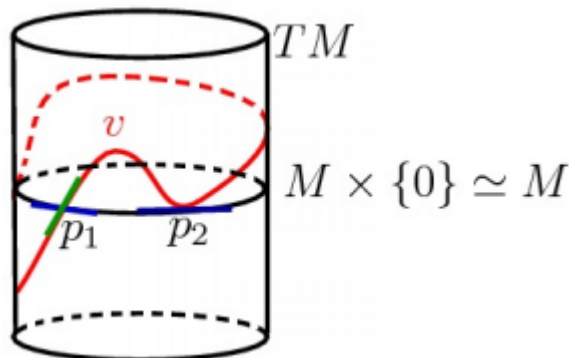
Definição 4.2.6. Seja $v : M \rightarrow TM$ um campo de vetores diferenciável em uma variedade diferenciável M . Diremos que uma singularidade $p \in M$ do campo v é simples se

$$\phi'(p)(T_p M) \oplus v'(p)(T_p M) = T_{(p,0)}(TM),$$

em que $\phi : M \rightarrow TM$ é o campo vetorial nulo, ou seja, $\phi(p) = (p, 0)$ para todo $p \in M$.

Notemos que se $p \in M$ é uma singularidade simples de um campo de vetores diferenciável v , então, geometricamente, isto significa que as subvariedades $\phi(M)$ e $v(M)$ interceptam-se transversalmente no ponto $(p, 0) = v(p) = \phi(p)$. Na figura 4.10, podemos ver a diferença entre uma singularidade simples p_1 e uma singularidade não simples p_2 de um campo v .

Figura 4.10 – Representação Geométrica de uma Singularidade Simples



Fonte: Dalbello (2011)

A seguir, apresentamos uma importante caracterização das singularidades simples.

Teorema 4.2.7. *Seja $v : M \rightarrow TM$ um campo de vetores diferenciável sobre a variedade m -dimensional M e $\varphi : V \subset M \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m$ uma carta de um aberto V de M em um aberto U de \mathbb{R}^m . Como vimos anteriormente, podemos descrever cada vetor $v(q) = (q, v_q)$, com $q \in V$, da seguinte forma:*

$$v_q = \sum_{i=1}^m \alpha_i(q) \frac{\partial}{\partial x_i}(q).$$

Assim, uma singularidade p de v é simples se, e somente se, $\det(J[\alpha(p)]) \neq 0$, em que $\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ é a aplicação diferenciável dada por $\alpha(q) = (\alpha_1(q), \dots, \alpha_m(q))$.

Demonstração. Seja $\varphi : V \subset M \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m$ uma carta, com V aberto em M e U aberto em \mathbb{R}^m , com $q \in V$. Sendo

$$T_V M = \bigcup_{q \in V} \{q\} \times T_q M,$$

$p = \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m)$ e u vetor tangente a M em p cujas coordenadas locais com respeito a φ são (v_1, \dots, v_m) , seja $\bar{\varphi} : T_V M \rightarrow U \times \mathbb{R}^m$ uma carta de TM dada por

$$\bar{\varphi}(p, u) = (\varphi(p), v_1, \dots, v_m) = (x_1, \dots, x_m, v_1, \dots, v_m).$$

Com respeito às cartas φ em M e $\bar{\varphi}$ em TM , os campos v e ϕ , sendo ϕ o campo vetorial nulo, se exprimem da seguinte forma:

$$\phi(p) = (p, 0)$$

$$v(p) = (p, v_p).$$

Aplicando a carta $\bar{\varphi}$, obtemos

$$\bar{\varphi}(\phi(p)) = \bar{\varphi}(p, 0) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$$

$$\bar{\varphi}(v(p)) = \bar{\varphi}(p, v_p) = (x_1, \dots, x_m, \alpha_1(p), \dots, \alpha_m(p)).$$

Observemos que $p = \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m)$, ou seja

$$\bar{\varphi}(\phi(\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m))) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$$

$$\bar{\varphi}(v(\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m))) = (x_1, \dots, x_m, \alpha_1(p), \dots, \alpha_m(p)).$$

Do Teorema (4.2.4), ϕ e v são mergulhos. Logo, sendo $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right\}$ a base de $T_p M$ associada a φ , então os vetores

$$\begin{aligned} &\phi'(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right), \dots, \phi'(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_m} \right), \\ &v'(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right), \dots, v'(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_m} \right) \end{aligned}$$

formam bases para $\phi'(p)(T_p M)$ e $v'(p)(T_p M)$, respectivamente.

Além disso, para p ser uma singularidade simples,

$$\left\{ \phi'(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right), \dots, \phi'(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_m} \right), v'(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right), \dots, v'(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_m} \right) \right\}$$

deve ser uma base de $T_{(p,0)} TM$.

Agora, considerando a carta $\bar{\varphi}$, cada vetor $\phi'(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)$ é da forma $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ com todas coordenadas nulas com exceção da i -ésima coordenada, que é igual a 1. Já as coordenadas do vetor $v'(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)$ são expressas da forma

$$\left(0, \dots, 1, \dots, 0, \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_i}(p), \dots, \frac{\partial \alpha_m}{\partial x_i}(p) \right),$$

em que as primeiras m coordenadas são nulas com exceção da i -ésima, que é igual a 1.

Assim, a matriz quadrada cujas colunas são os vetores $\phi'(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)$ e $v'(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)$ expressos como vetores colunas em coordenadas como acima, relativamente à carta $\bar{\varphi}$ assume a forma abaixo, sendo cada bloco de ordem $m \times m$

$$A = \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & J[\alpha(p)] \end{bmatrix}.$$

Assim, os $2m$ vetores são linearmente independentes se, e somente se, $\det(A) = \det(J[\alpha(p)]) \neq 0$, de onde o resultado segue. \square

Deste resultado, obtemos o seguinte Corolário.

Corolário 4.2.8. *Seja $v : M \rightarrow TM$ um campo de vetores diferenciável de uma variedade M . Então, as singularidades simples de v são isoladas no conjunto de todas as singularidades de v .*

Demonstração. Seja $p \in M$ uma singularidade simples de v e tome $\varphi : V \subset M \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m$ uma carta tal que $p \in V$. Dado $q \in V$, podemos expressar v_q da seguinte forma:

$$v_q = \sum_{i=1}^m \alpha_i(q) \frac{\partial}{\partial x_i}(q).$$

Considerando a aplicação diferenciável $\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por $\alpha(q) = (\alpha_1(q), \dots, \alpha_m(q))$, do Teorema 4.2.7, temos $\det(J[\alpha(p)]) \neq 0$. Logo, do Teorema da Aplicação Inversa (B.3.31), segue que α é um difeomorfismo local, ou seja, existe uma vizinhança W de p em M tal que α é um difeomorfismo de W em uma vizinhança de $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$. Em outras palavras, se $q \neq p$ em W , então $\alpha(q) = (\alpha_1(q), \dots, \alpha_m(q)) \neq (0, \dots, 0)$, implicando em p ser uma singularidade isolada de v . \square

Sejam M uma variedade compacta e consideremos seu fibrado tangente TM , $v : M \rightarrow TM$ um campo de vetores diferenciável e $\phi : M \rightarrow TM$ o campo de vetores nulo. Então, como ϕ é em particular uma aplicação contínua, temos $\phi(M)$ compacto. Entretanto, sendo TM um espaço topológico de Hausdorff (pois TM é, em particular, uma variedade diferenciável), segue que $\phi(M)$ é um subconjunto fechado em TM . Agora, como v é contínuo e M é compacto, $v^{-1}(\phi(M))$ é um subconjunto fechado de M , logo, compacto.

Entretanto, $v^{-1}(\phi(M))$ é o conjunto dos pontos singulares de v . Portanto, segue do Corolário 4.2.8 que se M é uma variedade compacta e v um campo diferenciável o qual possui apenas singularidades simples, então há apenas um número finito de singularidades de v .

Na sequência, mostraremos que dado um campo de vetores qualquer $v : M \rightarrow TM$, é possível aproximar tal campo por um campo $w : M \rightarrow TM$ tal que suas singularidades são todas simples. Para isso, precisaremos construir uma estrutura topológica no conjunto das aplicações diferenciáveis entre as variedades M e N dadas, que denotaremos por $\mathcal{F}(M, N)$.

Vejamos algumas definições relevantes para isso.

Definição 4.2.9. Sejam M e N variedades diferenciáveis. Definimos a métrica $d_\infty : \mathcal{F}(M, N) \times \mathcal{F}(M, N) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$d_\infty(f, g) = \sup_{p \in M} |f(p) - g(p)|,$$

sendo a norma $|\cdot|$ a usual do espaço \mathbb{R}^k em que N está imersa. A topologia induzida da métrica d_∞ em $\mathcal{F}(M, N)$ será chamada de topologia C^∞ .

Definição 4.2.10. Sejam M e N variedades diferenciáveis. Definimos a métrica $d_1 : \mathcal{F}(M, N) \times$

$\mathcal{F}(M, N) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$d_1(f, g) = \max\{d_\infty(f, g), \sup\{|f'(p)(u) - g'(p)(u)|; u \in T_p M, |u| = 1, p \in M\}\}$$

sendo a norma $|\cdot|$ a usual do espaço \mathbb{R}^k em que N está imersa. A topologia induzida da métrica d_1 em $\mathcal{F}(M, N)$ será chamada de topologia C^1 .

Teorema 4.2.11. *Seja M uma variedade diferenciável. Então, o conjunto de todos os difeomorfismos $f : M \rightarrow M$ é um aberto na topologia C^1 .*¹

Lema 4.2.12 (da transversalidade). *Sejam $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável entre as variedades diferenciáveis M e N e $S \subset N$ uma subvariedade de N . Consideremos $X \subset M$ um fechado de M tal que f é transversal a S em todos os pontos de $X \cap f^{-1}(S)$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $g : M \rightarrow N$ diferenciável tal que $d_1(f, g) < \varepsilon$, g é transversal a S e coincide com f em X .*²

Com isso, conseguimos enunciar e provar o principal teorema desta seção:

Teorema 4.2.13. *Seja M uma variedade diferenciável. Então, todo campo vetorial $v : M \rightarrow TM$ pode ser arbitrariamente aproximado, na topologia C^1 , por um campo de vetores diferenciável tal que todas as suas singularidades são simples.*

Demonstração. Seja $\phi : M \rightarrow TM$ o campo de vetores nulo. Definindo $S = \phi(M)$, do Lema da transversalidade (4.2.12), conseguimos aproximar arbitrariamente, considerando a topologia C^1 , a aplicação $v : M \rightarrow TM$ dada por uma aplicação diferenciável $g : M \rightarrow TM$ transversal a $\phi(M)$, isto é, tal que as singularidades de g são todas simples. \square

Notemos que na demonstração acima, o conjunto que desempenha o papel de X é o subconjunto $v^{-1}(\phi(M)) \subset M$.

4.3 ÍNDICE DE POINCARÉ-HOPF EM VARIEDADES

Sejam $v : M \rightarrow TM$ um campo vetorial contínuo, M uma variedade m -dimensional orientada, $p \in M$ uma singularidade isolada de v e $\varphi : V \subset M \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m$ uma carta, com V vizinhança de p satisfazendo $v_q \neq 0$, para todo $q \in V \setminus \{p\}$ e $U = \varphi(V) \subset \mathbb{R}^m$. Consideremos $a = \varphi(p)$ e $f : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ a aplicação contínua definida por

$$f(u) = (\alpha_1(u), \dots, \alpha_m(u)), u \in U,$$

em que $\alpha = \bar{\alpha} \circ \varphi^{-1}$, sendo $\bar{\alpha} : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por $\bar{\alpha}(q) = (\bar{\alpha}_1(q), \dots, \bar{\alpha}_m(q))$, $q \in V$, de acordo com o Teorema 4.2.7.

¹ Ver Dalbello (2011, p. 90)

² Ver Dalbello (2011, p. 90)

Definição 4.3.1. Definimos o índice de Poincaré-Hopf de v em p como sendo o grau local $\gamma_a(f)$ de f em a . Denotaremos tal índice por $I_{\text{PH}}(v, p)$.

Notemos que, como p é a única singularidade de v na vizinhança V , segue que $f(u) = 0$ se, e somente se, $u = a$.

A definição acima não depende da carta escolhida. Uma demonstração para esse fato pode ser encontrada em Dalbello (2011, p. 94). Isto garante a boa definição do índice de Poincaré-Hopf.

Na sequência, vejamos alguns resultados relevantes acerca do índice de Poincaré-Hopf.

Teorema 4.3.2. *Sejam $v : M \rightarrow TM$ um campo vetorial diferenciável e M uma variedade orientada. Se $p \in M$ é uma singularidade simples de v , então $I_{\text{PH}}(v, p) = \pm 1$.*

Demonstração. Seja $p \in M$ uma singularidade simples de v . Como vimos no Corolário 4.2.8, p é uma singularidade isolada de v , ou seja, existe uma vizinhança V de p tal que $v_q \neq 0$ para todo $q \in V$ com $q \neq p$.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que V seja um domínio de uma carta $\varphi : V \rightarrow U$, com $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Assim, podemos escrever

$$v_q = \sum_{i=1}^m \alpha_i(\varphi(q)) \frac{\partial}{\partial x_i}(q),$$

em que $\alpha_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável, para todo $i = 1, \dots, m$.

Com isso, definindo $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ por $\alpha(u) = (\alpha_1(u), \dots, \alpha_m(u))$, $u \in U$, consideremos a composição $\alpha \circ \varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$,

$$\alpha \circ \varphi(q) = (\alpha_1 \circ \varphi(q), \dots, \alpha_m \circ \varphi(q)).$$

Então, do Teorema 4.2.7, o determinante da matriz jacobiana de $\alpha \circ \varphi$ avaliada no ponto p é diferente de zero, implicando que a aplicação linear $d(\alpha \circ \varphi)_p$ é invertível. Assim, como φ é um difeomorfismo, segue que a derivada de α é também uma aplicação linear invertível.

Portanto, da Proposição 3.2.8, sendo $a = \varphi(p)$, segue que $\gamma_a(\alpha) = 1$ se $\det(J\alpha(a)) > 0$ e $\gamma_a(\alpha) = -1$ se $\det(J\alpha(a)) < 0$. Consequentemente, $I_{\text{PH}}(v, p) = 1$ se $\det(J\alpha(a)) > 0$ e $I_{\text{PH}}(v, p) = -1$ se $\det(J\alpha(a)) < 0$. \square

Agora, para prosseguirmos com o estudo do índice de Poincaré-Hopf, precisaremos definir o importante conceito de número de interseção.

Definição 4.3.3. *Sejam M uma variedade diferenciável m -dimensional, compacta e orientada, N uma variedade diferenciável n -dimensional orientada, S uma subvariedade s -dimensional de N , sendo $s = n - m$ e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável transversal à subvariedade S . Dado $p \in f^{-1}(S)$, considerando uma base positiva $\{e_1, \dots, e_m\}$ de $T_p M$ e uma base positiva $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_s\}$ de $T_{f(p)} S$, dizemos que p é um ponto positivo se $\{df_p(e_1), \dots, df_p(e_m), \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_s\}$ for uma base*

positiva de $T_{f(p)}N$. Caso $\{df_p(e_1), \dots, df_p(e_m), \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_s\}$ for uma base negativa, diremos que p é um ponto negativo.

Das condições acima e da proposição 2.6.2, sendo S uma subvariedade s -dimensional de N , então $f^{-1}(S)$ será uma subvariedade 0-dimensional de M . Consequentemente, $f^{-1}(S)$ possuirá uma quantidade finita de pontos.

Assim, podemos fazer a seguinte definição.

Definição 4.3.4. Sejam M uma variedade diferenciável m -dimensional, compacta e orientada, N uma variedade diferenciável n -dimensional orientada, S uma subvariedade s -dimensional de N , com $s = n - m$ e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável transversal à subvariedade S . O número de interseção de $f(M)$ e S , que denotaremos por $f(M)\#S$ é o número de pontos positivos menos o número de pontos negativos em $f^{-1}(S)$.

Observemos que o conceito de número de interseção generaliza a definição de grau relativo que vimos anteriormente, já que, considerando M, N variedades n -dimensionais orientadas, com M compacta, $p \in M$ e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável, temos que f é transversal à subvariedade $S = \{p\}$ de N se, e somente se, p é um valor regular de f e, neste caso, $gr_p(f) = f(M)\#\{p\}$.

Na sequência, considerando $v : M \rightarrow TM$ um campo de vetores diferenciável e $\phi : M \rightarrow TM$ o campo vetorial nulo, supondo que as subvariedades $v(M)$ e $\phi(M)$ são transversais, faz sentido a seguinte definição.

Definição 4.3.5. Sejam M uma variedade m -dimensional orientada e compacta e $v : M \rightarrow TM$ um campo de vetores diferenciável tal que, sendo $\phi : M \rightarrow TM$ o campo vetorial nulo, $v(M)$ e $\phi(M)$ são variedades transversais de TM . Então, o conjunto $v(M) \cap \phi(M)$ é finito e, sendo $\pi : TM \rightarrow M$ a projeção, está em correspondência biunívoca com o conjunto $\pi(v(M) \cap \phi(M)) = \{p_1, \dots, p_r\}$, com $p_i \in M$ tal que $v(p_i) = \phi(p_i) = (p_i, 0)$. Nestas condições, diremos que p_i é positivo se, dada uma base $\{e_1, \dots, e_m\}$ positiva de $T_{p_i}M$, o conjunto $\{dv_{p_i}(e_1), \dots, dv_{p_i}(e_m), d\phi_{p_i}(e_1), \dots, d\phi_{p_i}(e_m)\}$, ordenado desta forma, for uma base positiva de $T_{v(p_i)}M$. Caso contrário diremos que p_i é um ponto negativo. O número de interseção $v(M)\#\phi(M)$ é o número de pontos positivos menos o número de pontos negativos em $\pi(v(M) \cap \phi(M))$.

Vejamos um resultado sobre a definição acima.

Proposição 4.3.6. *Seja M uma variedade diferenciável m -dimensional, $v : M \rightarrow TM$ um campo vetorial contínuo e $\phi : M \rightarrow TM$ o campo vetorial nulo. Se $v(M)$ e $\phi(M)$ são transversais, então todas as singularidades de v são simples. Além disso, $v(M)\#\phi(M)$ é a soma dos índices das singularidades simples de v .*

Demonstração. Seja p uma singularidade qualquer de v . Como $v(M)$ e $\phi(M)$ são transversais, segue da definição de transversalidade que

$$dv_p(T_pM) + d\phi_p(T_pM) = T_{(p,0)}TM.$$

Logo, p é uma singularidade simples de v .

Por outro lado, sendo p uma singularidade qualquer de v , temos $v(p) = (p, 0) = \phi(p)$, ou seja, $p \in \pi(v(M) \cap \phi(M))$. Além disso, como p é singularidade simples, pelo Teorema 4.3.2, $I_{\text{PH}}(v, p) = \pm 1$, sendo 1 se dv_p manter orientação e -1 se dv_p inverter orientação.

Portanto, $v(M)\#\phi(M)$ será a soma dos índices das singularidades simples de v . \square

Uma importante propriedade do número de interseção é que tal número é invariante por homotopia.

Teorema 4.3.7. *Sejam $f, g : M \rightarrow N$ aplicações diferenciáveis transversais a uma subvariedade S , s -dimensional compacta de N , sendo M uma variedade m -dimensional, compacta e orientada, N uma variedade n -dimensional orientada e $s = n - m$. Se f e g são homotópicas, então $f(M)\#S = g(M)\#S$.³*

Utilizando o teorema acima, podemos mostrar que a soma dos índices de um campo vetorial diferenciável definido sobre uma variedade M compacta e orientada, cujas singularidades são todas simples é um invariante de M .

Teorema 4.3.8. *Seja $v : M \rightarrow TM$ um campo vetorial diferenciável definido sobre a variedade diferenciável M , m -dimensional, compacta e orientada, cujas singularidades são todas simples. Então, a soma dos índices das singularidades de v não depende da escolha do campo v .*

Demonstração. De fato, sendo $\phi : M \rightarrow TM$ o campo vetorial nulo, como todas as singularidades de v são simples, $v(M)$ e $\phi(M)$ são transversais. Assim, sendo $w : M \rightarrow TM$ outro campo vetorial diferenciável com todas as singularidades simples, considerando a aplicação $H : M \times [0, 1] \rightarrow TM$, definida por

$$H(p, t) = (1 - t)v(p) + tw(p),$$

temos H homotopia entre v e w .

Portanto, do Teorema 4.3.7, $v(M)\#\phi(M) = w(M)\#\phi(M)$, de onde o resultado segue. \square

Nas próximas seções, definiremos um importante invariante topológico que é a Característica de Euler. Na sequência, associaremos este invariante com a soma dos índices das singularidades de um campo vetorial definido em uma variedade específica com o célebre Teorema de Poincaré-Hopf, um dos resultados principais deste trabalho.

4.4 CARACTERÍSTICA DE EULER

Nesta seção, definiremos a Característica de Euler de maneira geral para um poliedro de \mathbb{R}^n , $n > 0$ e faremos algumas outras definições relevantes para prosseguir com o estudo.

³ Este Teorema pode ser visto em Dalbello (2011, p. 97)

Primeiramente, precisaremos definir um poliedro P em \mathbb{R}^n . Para isso, precisaremos do conceito de simplexo. Não iremos defini-los aqui, pois demandaria conceitos preliminares que fogem do escopo do trabalho. Para uma definição precisa deste objeto, ver [Lima \(2014a, p. 83\)](#).

Definição 4.4.1. Um poliedro P em \mathbb{R}^n é uma coleção finita de simplexos em \mathbb{R}^n tais que:

- a) Se S é um simplexo de P , então toda face de S também o é;
- b) Se S, T são simplexos de P , então $S \cap T$ é uma face comum a S e T , ou é vazia.

Na sequência, definamos a Característica de Euler de um poliedro.

Definição 4.4.2. Seja P um poliedro finito n -dimensional e denotemos por n_i o número de simplexos i -dimensionais desse poliedro. A característica de Euler de P é definida por

$$\chi(P) = \sum_i (-1)^i n_i.$$

Este invariante nos será útil em casos específicos de variedades diferenciáveis. Entretanto, para usá-lo em tais variedades, precisaremos de um conceito preliminar.

Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é triangularizável se existir um homeomorfismo $h : |K| \rightarrow X$ para algum poliedro K (em que $|K|$ é o espaço topológico dado pelo conjunto K com a topologia induzida do espaço ambiente). Neste caso, (K, h) é dito uma triangulação de X .

Um importante resultado que usaremos neste trabalho nos diz sobre a independência da característica de Euler pela triangulação adotada.

Teorema 4.4.3. *Sejam (K, h) e (K', h') duas triangulações de um mesmo espaço topológico X . Então, $\chi(K) = \chi(K')$.*⁴

O caso que será de nosso interesse é dado pelo Teorema 4.4.4.

Teorema 4.4.4. *Seja M uma variedade diferenciável compacta, então existe uma triangulação (K, h) de M .*⁵

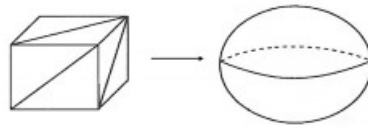
Vejamos alguns exemplos de triangulações de algumas variedades diferenciáveis e do cálculo da característica de Euler delas.

Exemplo 4.4.5. A característica de Euler da esfera \mathbb{S}^2 é 2.

De fato, considerando o homeomorfismo entre a esfera e o cubo de arestas de comprimento 1, como mostra a Figura 4.11

⁴ Este resultado é devido ao considerado último universalista matemático H. Poincaré e pode ser visto em [Dalbello \(2011, p. 99\)](#).

⁵ Ver [Burns \(2005, p. 4\)](#)

Figura 4.11 – Triangulação de S^2 

Fonte: Dalbello (2011)

Assim, temos

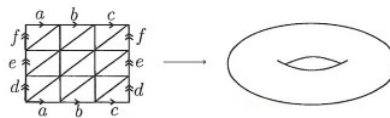
$$\chi(S^2) = 8 - 18 + 12 = 2.$$

Na verdade, podemos provar que a característica de Euler de uma esfera S_ϵ de dimensão par qualquer é 2.

Outro exemplo é o do Toro:

Exemplo 4.4.6. Consideremos o Toro T e sua triangulação, como mostra a Figura 4.12.

Figura 4.12 – Triangulação do Toro



Fonte: Dalbello (2011)

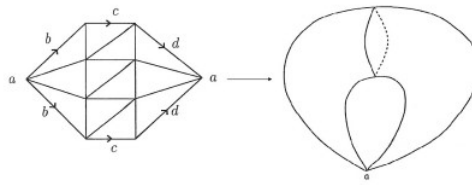
Logo,

$$\chi(T) = 9 - 27 + 18 = 0.$$

No exemplo 4.4.7, consideramos o toro pinçado que, apesar de não ser uma variedade diferenciável (exibiremos no decorrer da monografia), é um caso especial em que conseguimos obter uma triangulação.

Exemplo 4.4.7. Consideremos o toro pinçado \mathcal{T} e façamos uma triangulação, como na Figura 4.13.

Figura 4.13 – Triangulação do Toro Pinçado



Fonte: Dalbello (2011)

Então, temos $\chi(\mathcal{T}) = 7 - 18 + 12 = 1$.

4.5 TEOREMA DE POINCARÉ-HOPF

Nesta seção, iremos enunciar e provar o célebre Teorema de Poincaré-Hopf. Para isso, primeiro apresentaremos alguns resultados preliminares, começando pelo seguinte lema.

Lema 4.5.1. *Sejam $\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2 \subset \mathbb{R}^m$ esferas $(m-1)$ -dimensionais de centros a_1, a_2 , respectivamente, disjuntas e contidas no interior de uma esfera \mathbb{S}_0 . Considere $f : \mathbb{R}^m \setminus \{a_1, a_2\} \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ uma aplicação contínua e as restrições $f_i = f|_{\mathbb{S}_i}$, para $i \in \{0, 1, 2\}$. Nestas condições, se as esferas \mathbb{S}_i forem orientadas igualmente, então $gr(f_0) = gr(f_1) + gr(f_2)$.*

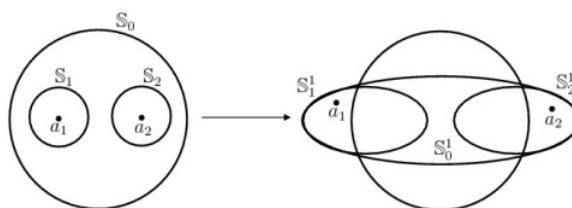
Demonstração. Primeiramente, façamos a demonstração para o caso em que f é diferenciável. Seja B uma bola fechada contida em $\mathbb{R}^m \setminus \{a_1, a_2\}$ tal que $f(B)$ não cubra totalmente a esfera \mathbb{S}^{m-1} .

Fazendo uma deformação de tal forma que as esferas sejam transformadas em elipsóides, que chamaremos de $\mathbb{S}_0^1, \mathbb{S}_1^1$ e \mathbb{S}_2^1 , sem que tais esferas toquem a_1 e a_2 durante a deformação e, após a deformação, \mathbb{S}_0^1 coincida com $\mathbb{S}_1^1 \cup \mathbb{S}_2^1$ fora de B , ou seja,

$$\mathbb{S}_0^1 \cap B^c = (\mathbb{S}_1^1 \cap B^c) \cup (\mathbb{S}_2^1 \cap B^c),$$

conforme vemos na Figura 4.14

Figura 4.14 – Deformação das Esferas



Fonte: Dalbello (2011)

Agora, definindo $f_i^1 = f|_{\mathbb{S}_i^1}$, $i = 0, 1, 2$, como o grau não se altera por deformações, segue que $gr(f_i) = gr(f_i^1)$.

Por outro lado, como $\mathbb{S}^{m-1} \setminus f(B)$ é não vazio e, pelo Teorema de Sard 2.5.10, o conjunto dos valores regulares de f é denso em \mathbb{S}^{m-1} , existe um valor regular $c \in \mathbb{S}^{m-1} \setminus f(B)$ e, conseqüentemente, $f^{-1}(c) \subset B^c$.

Como, fora de B , a aplicação f_0^1 coincide com f_1^1 e f_2^1 , segue que c é também valor regular dessas aplicações. Ademais, temos

$$(f_0^1)^{-1}(c) = (f_1^1)^{-1}(c) \cup (f_2^1)^{-1}(c)$$

e, como essa união é disjunta,

$$gr(f_0^1) = gr(f_1^1) + gr(f_2^1),$$

como queríamos demonstrar.

Agora, considerando f contínua, basta tomar uma aplicação diferenciável $g : \mathbb{R}^m \setminus \{a_1, a_2\} \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ tal que $\|f(x) - g(x)\| < 2$ para $x \in \mathbb{S}_0 \cup \mathbb{S}_1 \cup \mathbb{S}_2$, ou seja, tal que $f|_{\mathbb{S}_0 \cup \mathbb{S}_1 \cup \mathbb{S}_2} \simeq g|_{\mathbb{S}_0 \cup \mathbb{S}_1 \cup \mathbb{S}_2}$, que existe pelo Teorema 2.8.4.

Assim, definindo $g_i = g|_{\mathbb{S}_i}$, teremos $g_i \simeq f_i$, que implica $gr(g_i) = gr(f_i)$, caindo no caso anterior. \square

Notemos que este lema pode ser estendido para o caso em que tomamos um número finito de esferas satisfazendo as hipóteses acima.

Como importante consequência do Lema 4.5.1, temos o seguinte resultado.

Teorema 4.5.2. *Sejam v um campo vetorial contínuo sobre uma variedade M de dimensão m e $p_1, p_2 \in M$ duas singularidades isoladas de v . Dado um subconjunto aberto e conexo $V \subset M$ tal que $p_1, p_2 \in V$ são as únicas singularidades de v em V , então existe um campo vetorial contínuo u sobre M tal que u coincide com v em $M \setminus V$ e tal campo admite apenas uma singularidade $p \in V$. Além disso, temos*

$$I_{\text{PH}}(u, p) = I_{\text{PH}}(v, p_1) + I_{\text{PH}}(v, p_2).$$

Demonstração. De fato, sendo V um conjunto conexo, pelo Teorema 2.3.8, existe uma carta $\varphi : U \subset V \rightarrow \mathbb{R}^m$, com $p, q \in U$, U aberto de M , satisfazendo $\varphi(U) = \mathbb{R}^m$. Considere $q_1 = \varphi(p_1)$ e $q_2 = \varphi(p_2)$ e tome $r > 0$ de tal forma que a bola fechada $B = B_r(0) \subset \mathbb{R}^m$ de centro na origem e raio r contenha os pontos q_1 e q_2 no seu interior.

Para todo $q \in U$ arbitrário, considere também a base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}(q) \right\}_{i \in \{1, \dots, m\}}$ de $T_q M$ obtida

pela carta φ e a expressão

$$v_q = \sum_{i=1}^m \alpha_i(\varphi(q)) \frac{\partial}{\partial x_i}(q), q \in U$$

do campo v .

Como visto anteriormente, tal expressão nos fornece uma aplicação contínua $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por

$$f(x) = (\alpha_1(x), \dots, \alpha_m(x)), x \in \mathbb{R}^m.$$

Observemos que, $f(x) = 0$ se, e somente se, $x = q_1$ ou $x = q_2$ e notemos também que, como as singularidades p_1 e p_2 são isoladas, se considerarmos elementos do bordo de B , ou seja, para todo $x \in B$ tal que $\|x\| = r$, teremos $f(x) \neq 0$.

Assim, definamos $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ por

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } \|x\| \geq r \\ \frac{\|x\|}{r} f\left(\frac{r}{\|x\|}x\right), & \text{se } 0 < \|x\| \leq r \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

Então, g é contínua, coincide com f fora de B e assume o valor $0 \in \mathbb{R}^m$ somente no ponto $0 \in \mathbb{R}^m$.

Sejam $\beta_1, \dots, \beta_m : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ as funções coordenadas contínuas de g . Definamos $u : M \rightarrow TM$ tal que $u_q = v_q$ em $M \setminus U$ e

$$u_q = \sum_{i=1}^m \beta_i(\varphi(q)) \frac{\partial}{\partial x_i}(q), q \in U.$$

Então, u é contínuo, coincide com v em $M \setminus V$ e a única singularidade de u em V ocorre em $p = \varphi^{-1}(0)$.

Agora, tomando ε_1 e $\varepsilon_2 > 0$ tais que as bolas fechadas $B_1 = B_{\varepsilon_1}(q_1)$ e $B_2 = B_{\varepsilon_2}(q_2)$ estejam contidas em B , sejam $\mathbb{S}_0, \mathbb{S}_1$ e \mathbb{S}_2 as esferas que representam os bordo das bolas B, B_1 e B_2 , respectivamente.

Definindo

$$\sigma_0 : \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow B \setminus \{0\}, \sigma_1 : \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow B_1 \setminus \{q_1\} \text{ e } \sigma_2 : \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow B_2 \setminus \{q_2\}$$

as equivalências homotópicas vistas na definição 3.2.3, temos

$$\begin{aligned} I_{\text{PH}}(v, p_1) &= gr(\rho \circ f \circ \sigma_1), \\ I_{\text{PH}}(v, p_2) &= gr(\rho \circ f \circ \sigma_2), \\ I_{\text{PH}}(u, p) &= gr(\rho \circ g \circ \sigma_0) = gr(\rho \circ f \circ \sigma_0), \end{aligned}$$

em que a última igualdade é válida por conta das igualdades $g|_{\mathbb{S}_0} = f|_{\mathbb{S}_0}$ e $\sigma_0(\mathbb{S}^{m-1}) = \mathbb{S}_0$.

Portanto, do Lema 4.5.1, temos

$$I_{\text{PH}}(u, p) = I_{\text{PH}}(v, p_1) + I_{\text{PH}}(v, p_2).$$

□

À seguir, iremos generalizar o resultado anterior por meio do Corolário 4.5.3.

Corolário 4.5.3. *Seja $v : M \rightarrow TM$ um campo vetorial contínuo sobre uma variedade diferenciável M de dimensão m , admitindo um número finito de singularidades p_1, \dots, p_r isoladas. Dado $V \subset M$ um subconjunto aberto e conexo contendo todas essas singularidades, existe um campo vetorial $u : M \rightarrow TM$ contínuo que coincide com v em $M \setminus V$ e possui apenas uma singularidade $p \in M$ satisfazendo*

$$I_{\text{PH}}(u, p) = \sum_{i=1}^r I_{\text{PH}}(v, p_i).$$

Demonstração. Seja $V_{1,2} \subset V$ uma vizinhança conexa contendo apenas as singularidades p_1 e p_2 . Pelo Teorema 4.5.2, existe um campo $u_{1,2} : M \rightarrow TM$ contínuo, coincidente com v em $M \setminus V_{1,2}$, logo em $M \setminus V$, que possui apenas uma singularidade $q_2 \in M$ e satisfaz

$$I_{\text{PH}}(u_{1,2}, q_2) = I_{\text{PH}}(v, p_1) + I_{\text{PH}}(v, p_2)$$

Agora, tomando $V_{2,3} \subset V$ um aberto conexo contendo os pontos q_2 e p_3 , novamente pelo Teorema 4.5.2, existe $u_{2,3} : M \rightarrow TM$ contínuo, coincidindo com v em $M \setminus V$, que possui apenas uma singularidade q_3 e satisfaz

$$I_{\text{PH}}(u_{2,3}, q_3) = I_{\text{PH}}(v, p_3) + I_{\text{PH}}(u_{1,2}, q_2) = I_{\text{PH}}(v, p_1) + I_{\text{PH}}(v, p_2) + I_{\text{PH}}(v, p_3).$$

Seguindo indutivamente desta maneira, obtemos um campo vetorial $u : M \rightarrow TM$ contínuo, coincidente com v em $M \setminus V$, com apenas uma singularidade p e tal que

$$I_{\text{PH}}(u, p) = \sum_{i=1}^r I_{\text{PH}}(v, p_i).$$

□

Observemos que o Corolário 4.5.3 nos diz que o Índice de Poincaré-Hopf é estável sobre perturbações, isto é, sendo $v : M \rightarrow TM$ um campo de vetores contínuo com apenas uma singularidade isolada p , se perturbarmos levemente tal campo, acabamos dividindo a singularidade p em várias outras singularidades. Entretanto, a soma dos índices das singularidades obtidas da perturbação é igual ao índice do campo original v em sua singularidade p .

Na sequência, veremos um resultado de grande importância para a demonstração do Teorema principal desta seção.

Teorema 4.5.4. *Seja $v : M \rightarrow TM$ um campo vetorial diferenciável sobre uma variedade compacta e orientada M , com uma quantidade finita de singularidades isoladas p_1, \dots, p_r . Então, existe um campo vetorial diferenciável $w : M \rightarrow TM$ cujas singularidades são todas simples e tal que a soma dos índices das singularidades de v coincide com a soma dos índices das singularidades simples de w .*

Demonstração. De fato, como vimos no Corolário 4.5.3, existe um campo vetorial contínuo $u : M \rightarrow TM$ com apenas uma singularidade p tal que

$$I_{\text{PH}}(u, p) = \sum_{i=1}^r I_{\text{PH}}(v, p_i).$$

Pelo Teorema 2.3.8, sabemos que existe uma carta $\varphi : V \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $\varphi(V) = \mathbb{R}^m$, com $p \in V$. Sendo $a = \varphi(p)$, tomemos a bola fechada $\bar{B}(a) \subset \mathbb{R}^m$ de raio $\varepsilon > 0$ e centro a e consideremos $\mathbb{S} = \partial\bar{B}(a)$. Assim, pelo Teorema 4.2.13, existe um campo de vetores diferenciável $w : M \rightarrow TM$ com todas as suas singularidades simples de tal forma que está tão próximo de u que satisfaz algumas condições:

- (i) não existem singularidades de w na vizinhança $M \setminus \varphi^{-1}(B(a))$;
- (ii) Sendo $f, g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ aplicações definidas por $f(x) = (\alpha_1(x), \dots, \alpha_m(x))$ e $g(x) = (\beta_1(x), \dots, \beta_m(x))$, em que

$$u = \sum_{i=1}^m \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ e } w = \sum_{i=1}^m \beta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\text{em } V, \text{ então } \left| \frac{f(x)}{|f(x)|} - \frac{g(x)}{|g(x)|} \right| < 2, \text{ para todo } x \in \mathbb{S}.$$

Consequentemente, da condição (ii), $\rho \circ f \circ \sigma \simeq \rho \circ g \circ \sigma : \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ e, do Teorema 3.1.19,

$$I_{\text{PH}}(u, p) = \gamma_a(f) = gr(\rho \circ f \circ \sigma) = gr(\rho \circ g \circ \sigma),$$

implicando que $I_{\text{PH}}(u, p)$ é igual ao grau da restrição $(\rho \circ g)|_{\mathbb{S}}$.

Por outro lado, o campo w possui apenas uma quantidade finita de singularidades, digamos q_1, \dots, q_s em M , sendo todas simples e pertencentes a $\varphi(B(a))$. Tomando $a_1 = \varphi(q_1), \dots, a_s =$

$\varphi(q_s) \in B(a)$ e tomando esferas disjuntas \mathbb{S}_j com centro a_j contidas em \mathbb{S} , $j = 1, \dots, s$, sendo $h = \rho \circ g : \mathbb{R}^m \setminus \{a_1, \dots, a_s\} \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$, teremos

$$I_{\text{PH}}(u, p) = gr(h|_{\mathbb{S}}) \text{ e } I_{\text{PH}}(w, q_j) = gr(h|_{\mathbb{S}_j}).$$

Além disso, pelo Lema 4.5.1,

$$gr(h|_{\mathbb{S}}) = \sum_{j=1}^s gr(h|_{\mathbb{S}_j}),$$

implicando $I_{\text{PH}}(u, p) = \sum_{j=1}^s I_{\text{PH}}(w, q_j)$ e, conseqüentemente,

$$\sum_{i=1}^r I_{\text{PH}}(v, p_i) = \sum_{j=1}^s I_{\text{PH}}(w, q_j).$$

□

Na seção 4.4, definimos a característica de Euler e vimos que é possível calcular tal invariante topológico de uma variedade diferenciável compacta por meio de uma triangularização. Sendo M uma variedade diferenciável compacta, o próximo Teorema associa a soma dos índices de um campo de vetores diferenciáveis com todas as suas singularidades simples com a característica de Euler de M , independente do campo vetorial escolhido.

Teorema 4.5.5. *Seja $v : M \rightarrow TM$ um campo vetorial contínuo com todas as singularidades simples sobre uma variedade diferenciável M compacta e orientada. Então, a característica de Euler de M é igual a soma dos índices de Poincaré-Hopf de todas as singularidades de v , ou seja, $\chi(M) = \sum_{i=1}^r I_{\text{PH}}(v, p_i)$, em que $p_i \in M$ são as singularidades de v .*

Não faremos aqui a demonstração do caso geral, pois seriam necessários recursos da teoria de cohomologia, fugindo do escopo do trabalho. Entretanto, apresentaremos uma ideia geométrica para o caso particular de variedades diferenciáveis de dimensão 2, ou seja, de superfícies diferenciáveis.

Demonstração. Seja M uma variedade diferenciável 2-dimensional, compacta e orientada. Tomemos uma triangularização de M e denotemos por n_i o número de i -simplexos desta triangularização com $i = 0, 1, 2$.

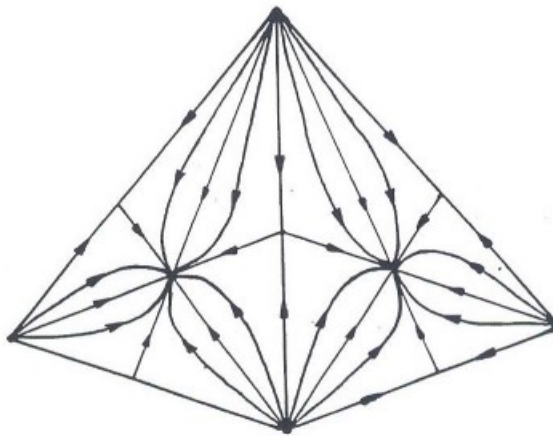
Subdividindo baricentricamente cada triângulo de M , ou seja, dividindo-os em 6 outros triângulos traçando suas 3 medianas e, em seguida, preenchendo-o com linhas integrais de campo, de tal forma que cada linha integral se inicie sempre do centro de um elemento de dimensão menor para o centro de um elemento de dimensão maior (ou seja, um vértice para o meio de um lado, de um vértice para o centro de um triângulo ou do meio de um lado para o

centro de um triângulo).

Desta forma, cada elemento, vértice, aresta ou face, irá contribuir precisamente com uma singularidade do campo construído, pois o centro deste elemento é um ponto singular. Logo, o campo construído terá $n_0 + n_1 + n_2$ singularidades.

Além disso, tais singularidades são semelhantes as que vimos no Exemplo 4.1.10, como vemos na Figura 4.15. Logo, o índice delas será 1 ou -1 e podemos supor que todas as singularidades deste campo são simples.

Figura 4.15 – Campo de Hopf



Fonte: Dalbello (2011)

Ademais, a soma dos índices das singularidades deste campo é $n_0 - n_1 + n_2$, que coincide com a característica de Euler de M .

Portanto, como M é uma variedade compacta e orientada, o Teorema 4.3.8 nos assegura que a soma dos índices não depende da escolha do campo, provando o que queríamos. \square

Na sequência, temos o seguinte corolário.

Corolário 4.5.6. *Seja M uma variedade diferenciável m -dimensional, compacta e orientada. Se m é ímpar, então $\chi(M) = 0$.*

Demonstração. Seja $v : M \rightarrow TM$ um campo vetorial diferenciável cujas singularidades p_1, \dots, p_r são todas simples. Então, as singularidades do campo $-v$ também serão. Logo, do Teorema 4.3.8,

$$\sum_{i=1}^r I_{\text{PH}}(v, p_i) = \sum_{i=1}^r I_{\text{PH}}(-v, p_i).$$

Considerando uma carta $\varphi : V_i \rightarrow U_i$ de M de tal forma que a singularidade p_i de v esteja em V_i ,

então podemos escrever

$$v_q = \sum_{i=1}^m \alpha_i(q) \frac{\partial}{\partial x_i}(q),$$

para todo $q \in V_j$. Assim, teremos

$$I_{\text{PH}}(v, p_i) = \det \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}(p_i) \right) \text{ e } I_{\text{PH}}(-v, p_i) = \det \left(-\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}(p_i) \right) = (-1)^m \det \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}(p_i) \right).$$

Então, teremos

$$\sum_{i=1}^r I_{\text{PH}}(v, p_i) = (-1)^m \sum_{i=1}^r I_{\text{PH}}(-v, p_i).$$

Como m é ímpar e pelo Corolário 4.5.1, $\sum_{i=1}^r I_{\text{PH}}(v, p_i) = 0$. Portanto, do Teorema 4.5.5, $\chi(M) = 0$. □

Finalmente, podemos enunciar e provar o célebre Teorema de Poincaré-Hopf.

Teorema 4.5.7 (Poincaré-Hopf). *Seja M uma variedade diferenciável compacta e orientada. Se $v : M \rightarrow TM$ é um campo vetorial contínuo com um número finito de singularidades p_1, \dots, p_r , então*

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^r I_{\text{PH}}(v, p_i).$$

Demonstração. De fato, pelo Teorema 4.5.4, existe um campo de vetores diferenciável $w : M \rightarrow TM$ tal que todas as suas singularidades q_1, \dots, q_s são simples e

$$\sum_{i=1}^r I_{\text{PH}}(v, p_i) = \sum_{i=1}^s I_{\text{PH}}(v, q_i).$$

Portanto, do Teorema 4.5.5, segue que

$$\sum_{i=1}^r I_{\text{PH}}(v, p_i) = \chi(M).$$

□

5 GENERALIZAÇÕES DO TEOREMA DE POINCARÉ-HOPF

Nesta seção, apresentaremos importantes generalizações do Teorema de Poincaré-Hopf. Iniciaremos estendendo tal resultado para o caso de variedades com bordo. Esta extensão por sua vez será essencial para obtermos um teorema do tipo para o caso de variedades singulares.

5.1 VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS COM BORDO

Quando definimos uma variedade sem bordo m -dimensional (M, \mathcal{U}) , sendo \mathcal{U} um atlas sobre M , para cada ponto $p \in M$, conseguimos obter uma vizinhança $V \subset M$ de p homeomorfa a um subconjunto aberto de \mathbb{R}^m , ou seja, todo ponto da variedade M é um ponto interior.

Assim, se um determinado conjunto B admite uma estrutura de variedade diferenciável segundo a Definição 2.3.6, necessariamente B deverá ser localmente homeomorfo a um aberto de um espaço euclidiano de dimensão finita.

Por exemplo, se considerarmos uma bola aberta de um espaço euclidiano n -dimensional, é possível dar uma estrutura de variedade diferenciável levando em conta a definição dada. Entretanto, quando tomamos uma bola fechada B de centro $p \in \mathbb{R}^m$ e raio $r > 0$, considerando $S \subset \mathbb{R}^m$ a esfera de mesmo centro e de mesmo raio de B , temos $S \subset B$ e, para qualquer ponto de S , não conseguimos obter uma vizinhança em B que é homeomorfa a um aberto de \mathbb{R}^m , visto que é um ponto de fronteira de B .

Neste sentido, com objetivo de abranger estes tipos de conjuntos no contexto de variedades diferenciáveis, é necessário modificar a definição dada. Para isso, faz-se necessário dar uma definição de carta mais geral, que veremos à seguir.

Definição 5.1.1 (Carta com bordo). Seja M um espaço topológico. Uma carta com bordo é uma aplicação $\varphi : U \subset M \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ que é um homeomorfismo sobre um aberto $\varphi(U)$ relativamente ao \mathbb{R}^m ou ao hiperplano

$$\mathbb{R}_0^m := \{x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_m \geq 0\}.$$

Denotaremos $H = \mathbb{R}_0^m$ e $\partial H = \{x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_m = 0\} \subset H$. O conjunto ∂H será chamado de bordo de H .

Na sequência, definimos um atlas mais geral para dar a definição de uma variedade diferenciável com bordo.

Definição 5.1.2 (Atlas com bordo). Seja M um espaço topológico. Um atlas m -dimensional \mathcal{V} com bordo sobre M é uma coleção de cartas com bordo $\varphi : V \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que os domínios dessas cartas cobrem M .

Definição 5.1.3 (Variedades diferenciáveis com bordo). Seja M um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável e \mathcal{V} um atlas com bordo sobre M m -dimensional e de classe C^k .

Nessas condições, dizemos que o par (M, \mathcal{V}) é uma variedade diferenciável com bordo de classe C^k e de dimensão m . Sendo $N \subset M$ o conjunto dos pontos que possuem vizinhanças homeomorfas a abertos do \mathbb{R}^m , dizemos que o conjunto $M \setminus N$ é o bordo de M , o qual denotaremos por ∂M

Notemos que, como para cada $p \in N$ conseguimos uma vizinhança V de M homeomorfa a um aberto de \mathbb{R}^m , em particular, todos os pontos em V estão inclusos em N , já que V é uma vizinhança desses pontos homeomorfa a um aberto de \mathbb{R}^m . Assim, segue que $V \subset N$, implicando que N é aberto em M . Consequentemente, o bordo ∂M , que é o complemento de N em M , é fechado em M .

Além disso, pode ocorrer que $\partial M = \emptyset$. Neste caso, dizemos que M é uma variedade diferenciável sem bordo. Além disso, nesse caso, a Definição 5.1.3 irá coincidir com a Definição 2.3.6.

Assim, daqui para frente, quando nos referirmos a uma variedade diferenciável, estaremos nos referindo a variedade segundo a Definição 5.1.3, explicitando quando tal variedade não tiver bordo.

Uma maneira equivalente de definir o bordo de uma variedade diferenciável é dada pelo próximo teorema

Teorema 5.1.4. *Seja M uma variedade diferenciável m -dimensional e ∂M o bordo de M . Nessas condições, $x \in \partial M$ se, e somente se, $x \in \varphi^{-1}(\partial H)$ para toda carta com bordo φ definida em uma vizinhança de x .*

Demonstração. De fato, se $x \in \partial M$, então não existem vizinhanças de x em M homeomorfas a um aberto de \mathbb{R}^m . Logo, sendo V uma vizinhança de x e $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma carta com bordo, $\varphi(V)$ é aberto em H , mas não é aberto em \mathbb{R}^m .

Suponha que $\varphi(x) \notin \partial H$. Então, como $\varphi(V) \subset H$ é um aberto de H com a topologia induzida e a fronteira de H é o conjunto ∂H , segue que $\varphi(x)$ está contido no interior de H e conseguimos uma vizinhança $W \subset \varphi(V)$ de $\varphi(x)$ inteiramente contida no interior de H . Por resultados de topologia, W é aberto em \mathbb{R}^m .

Assim, definindo a restrição $\varphi|_{\varphi^{-1}(W)} : \varphi^{-1}(W) \rightarrow W \subset \mathbb{R}^m$, tal restrição será um homeomorfismo sobre sua imagem, contrariando a hipótese de que não existem vizinhanças de x em M homeomorfas a abertos de \mathbb{R}^m . Logo, $\varphi(x) \in \partial H$.

Reciprocamente, se para toda carta com bordo φ definida em uma vizinhança de x , temos $x \in \varphi^{-1}(\partial H)$, então $\varphi(x) \in \partial H$ e, logo, nenhuma vizinhança de $\varphi(x)$ em H pode ser aberta em \mathbb{R}^m . Isto é, x não possuirá vizinhanças em M homeomorfas a abertos de \mathbb{R}^m . Portanto, $x \in \partial M$. \square

Do Teorema 5.1.4, conseguimos provar um corolário importante que nos traz informações sobre a estrutura do bordo de uma variedade.

Corolário 5.1.5. *Seja M uma variedade diferenciável m -dimensional e $\partial M \neq \emptyset$ seu bordo. Então, ∂M é uma variedade diferenciável (sem bordo) de dimensão $m - 1$.*

Demonstração. De fato, vimos no Teorema 5.1.4 que $x \in \partial M$ se, e somente se, $\varphi(x) \in \partial H$, para toda carta com bordo $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida em uma vizinhança de x . Assim, restringindo φ aos pontos do bordo, e considerando sua imagem, como $\varphi(V)$ é aberta em H , segue que a imagem restrita será aberta em ∂H com a topologia induzida de H e, conseqüentemente, o domínio restrito será aberto em ∂M com a topologia induzida de M , pois restrição de homeomorfismo é homeomorfismo.

Agora, fazendo isso para todas as cartas que atingem ∂H , teremos que ∂M será coberta pelos domínios restritos, formando um atlas de dimensão $m - 1$, implicando que ∂M é uma variedade diferenciável sem bordo de dimensão $m - 1$. \square

Com isso, podemos estender os resultados vistos para campos de vetores em variedades diferenciáveis sem bordo para este caso mais geral, já que uma variedade com bordo é uma variedade em que seu bordo é outra variedade de codimensão 1. Em particular, temos o seguinte teorema.

Teorema 5.1.6. *Sejam M uma variedade diferenciável com bordo, compacta e orientada e $v : \partial M \rightarrow T(\partial M)$ um campo de vetores sem singularidades em uma vizinhança W de ∂M . Então, valem:*

- (a) *O campo v pode ser estendido para o interior de M com um número finito de singularidades;*
- (b) *A soma dos índices de Poincaré-Hopf não depende da maneira que estendemos o campo v para o interior de M ;*
- (c) *Sendo w uma extensão de v em M , se w é transversal ao bordo de M e aponta para “fora” de M , então, sendo p_1, \dots, p_r as singularidades de w ,*

$$\sum_{i=1}^r I_{\text{PH}}(w, p_i) = \chi(M).$$

Agora, se w é transversal a ∂M e aponta para “dentro” de M , então

$$\sum_{i=1}^r I_{\text{PH}}(w, p_i) = \chi(M) - \chi(\partial M).$$

Este resultado pode ser encontrado em [Brasselet \(2009\)](#)

Notemos que o teorema acima estende o Teorema de Poincaré-Hopf para o caso de variedades diferenciáveis com bordo.

Na sequência, vejamos uma proposição sobre um caso particular de campos de vetores,

o qual desempenhará um importante papel no estudo das variedades singulares.

Tal proposição versa sobre o índice de uma classe de campos de vetores definido sobre uma variedade M .

Proposição 5.1.7. *Sejam M uma variedade diferenciável de dimensão m orientada e $v : M \rightarrow TM$ um campo de vetores com uma singularidade isolada $p \in M$ definido de tal forma que v seja transversal ao bordo da bola $\bar{B}_\varepsilon(p)$, de centro p e raio ε em M . Então,*

- (a) *Se v aponta para “fora” de \mathbb{S}_ε , então $I_{\text{PH}}(v, p) = +1$;*
- (b) *Se v aponta para “dentro” de \mathbb{S}_ε , então, se m é par, $I_{\text{PH}}(v, p) = +1$. Caso contrário, $I_{\text{PH}}(v, p) = -1$.*

Demonstraremos para o caso em que $M = \mathbb{R}^m$. O caso geral segue deste caso e da definição de índice.

Demonstração. Seja $B = \bar{B}_\varepsilon(p)$ a bola fechada de centro p e raio $\varepsilon > 0$ considerando a métrica usual. Como o índice é definido por meio do grau local de uma aplicação construída do campo, o índice é obtido localmente. Assim, sendo $w = v|_B$, temos $I_{\text{PH}}(v, p) = I_{\text{PH}}(w, p)$. Vejamos.

- (a) Se w é transversal a \mathbb{S}_ε e aponta para “fora”, segue do Teorema 5.1.6 que

$$\chi(B) = I_{\text{PH}}(w, p).$$

Como a bola é homotopicamente equivalente a um ponto, temos $\chi(B) = 1$, implicando $I_{\text{PH}}(v, p) = I_{\text{PH}}(w, p) = 1$;

- (b) Se w é transversal a \mathbb{S}_ε e aponta para “dentro”, segue novamente do Teorema 5.1.6 que

$$I_{\text{PH}}(w, p) = \chi(B) - \chi(\mathbb{S}_\varepsilon).$$

Assim, se m é par, temos $\dim(\mathbb{S}_\varepsilon) = m - 1$ é ímpar, implicando $\chi(\mathbb{S}_\varepsilon) = 0$. Consequentemente, $I_{\text{PH}}(v, p) = I_{\text{PH}}(w, p) = 1$.

Por outro lado, se m é ímpar, temos $\dim(\mathbb{S}_\varepsilon) = m - 1$ é par, implicando $\chi(\mathbb{S}_\varepsilon) = 2$. Consequentemente, $I_{\text{PH}}(v, p) = I_{\text{PH}}(w, p) = 1 - 2 = -1$.

□

Na sequência, utilizaremos os resultados vistos anteriormente para definir um tipo de índice de singularidades de campos definidos em variedades singulares. Para tanto, vejamos o que é uma variedade singular.

5.2 VARIEDADES SINGULARES

Para definirmos uma variedade singular, precisaremos lembrar a definição de variedade topológica.

Definição 5.2.1 (Variedade Topológica). Seja V um espaço topológico. Dizemos que V é uma variedade topológica de dimensão m se, para todo $a \in V$, conseguimos obter uma vizinhança de a em V homeomorfa a um aberto de \mathbb{R}^m .

Definição 5.2.2 (Variedade Singular). Seja V um espaço topológico. Dizemos que V é uma variedade singular de dimensão m se existe um subconjunto $S \subset V$ tal que $V \setminus S$ é uma variedade topológica de dimensão m e, para todo ponto $a \in S$, não existe vizinhança V_a de a em V homeomorfa a um aberto U de \mathbb{R}^m . Chamaremos S de conjunto singular de V e, se $a \in S$, chamaremos a de singularidade de V .

Da definição acima, denotaremos por $\Sigma(V)$ o conjunto S . Além disso, diremos que $a \in \Sigma(V)$ é uma singularidade isolada se existir uma vizinhança W_a de a em V tal que a é a única singularidade de V nesta vizinhança.

Neste estudo, iremos trabalhar com a situação em que $V \setminus \Sigma(V)$ é uma variedade diferenciável.

Agora, dada uma variedade singular, mergulhada em \mathbb{R}^n e com uma singularidade isolada, definimos um campo de vetores sobre tal variedade como segue.

Definição 5.2.3. Seja V uma variedade singular, mergulhada em \mathbb{R}^n , com uma singularidade isolada em a . Um campo vetorial contínuo v em V é uma aplicação contínua $v : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ o qual a imagem de cada ponto $x \in V \setminus \Sigma(V)$ está contida no espaço vetorial tangente $T_x(V \setminus \Sigma(V))$, ou seja, $v(x) \in T_x(V \setminus \Sigma(V))$, e $v(a) = 0$.

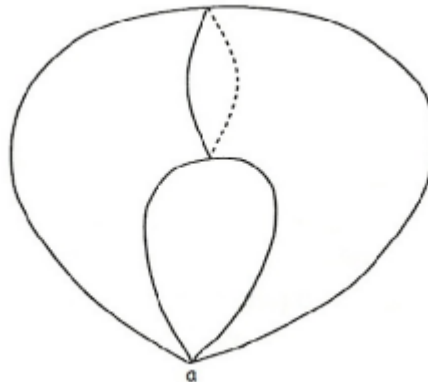
A seguir, apresentamos uma definição do índice de Poincaré-Hopf para o caso de variedades singulares.

Definição 5.2.4 (Índice de Poincaré-Hopf em variedades singulares). Seja V uma variedade singular, mergulhada em \mathbb{R}^n , com uma singularidade isolada a e v um campo vetorial contínuo que pode ser estendido sobre uma bola fechada $B = \bar{B}_\varepsilon(a) \subset \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$, com uma única singularidade a em B . Definimos o índice de Poincaré-Hopf de v em a como sendo o índice de Poincaré-Hopf de $\bar{v}|_B$ em a , em que \bar{v} é a extensão do campo v para B .

Vejamos um exemplo que serve de motivação para o estudo de outros índices sobre campos de vetores para o caso de variedades singulares.

Exemplo 5.2.5. Seja T o toro pinçado, mergulhado em \mathbb{R}^3 , como mostra a Figura 5.1.

Figura 5.1 – Toro pinçado com pinçamento no ponto a



Fonte: Dalbello (2011)

Mostremos que T é uma variedade singular, cuja singularidade ocorre no ponto a .

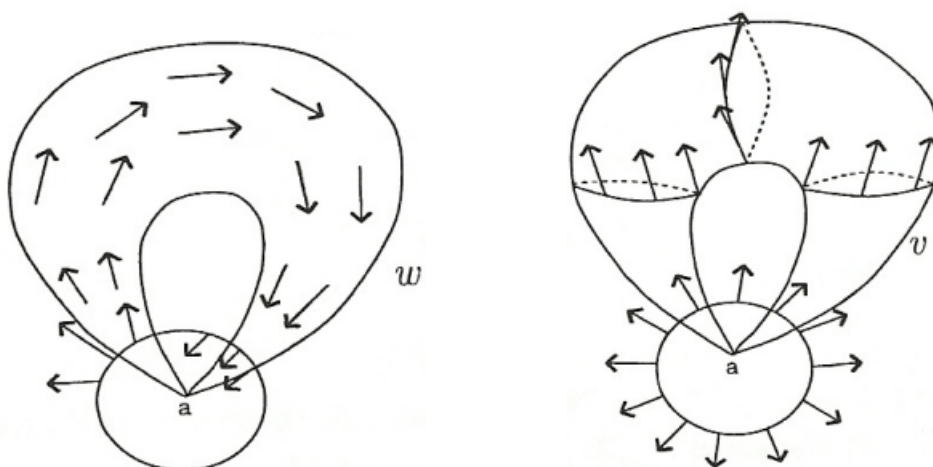
De fato, supondo que existe uma vizinhança V_a de a tal que $h : V_a \rightarrow B$ é um homeomorfismo, onde $B = B_\varepsilon(c) \subset \mathbb{R}^2$ é uma bola aberta de centro c e raio $\varepsilon > 0$. Sem perda de generalidade, consideremos $c = h(a)$.

Então $h : V_a \setminus \{a\} \rightarrow B \setminus \{c\}$ ainda é um homeomorfismo e, conseqüentemente, como $B \setminus \{c\}$ é conexo, teríamos $V_a \setminus \{a\}$ conexo, o que é um absurdo.

Logo, a é uma singularidade de T . Além disso, o ponto a é a única singularidade de T , pois $T \setminus \{a\}$ é uma variedade diferenciável de dimensão 2.

Agora, consideremos os campos de vetores em T descritos pela Figura 5.2.

Figura 5.2 – Campos vetoriais w e v sobre o toro pinçado



Fonte: Dalbello (2011)

Notemos que, considerando T' um toro e o campo vetorial tangente às paralelas de T' , podemos induzir um campo semelhante em T , resultando no campo w , que entra na bola $\bar{B}_\varepsilon(a)$ por um dos dois círculos de interseção de \mathbb{S}_ε com T e sai da bola ao longo do outro círculo.

Assim, o campo w definido sobre \mathbb{S}_ε é a restrição de um campo \bar{w} definido sobre $\bar{B}_\varepsilon(a)$ e de índice 0 em a .

Logo, neste caso, o Teorema de Poincaré-Hopf não se verifica, pois

$$\chi(T) = 1 \neq 0 = I_{\text{PH}}(\bar{w}, a).$$

Entretanto, tomando agora o campo \bar{v} sobre $\bar{B}_\varepsilon(a)$, que sai de $\bar{B}_\varepsilon(a)$ ao longo de \mathbb{S}_ε e tangente a T ao longo de $\bar{B}_\varepsilon(a) \cap (T \setminus \Sigma(T))$. Este campo tem índice 1 em a e pode ser estendido sobre T em um campo de vetores v sem outra singularidade além de a . De fato, podemos tomar v como mostra a Figura 5.2, em que o ângulo entre o vetor $v(x)$ e o espaço tangente ao “meridiano” que contém x diminua conforme x se afasta de a , sendo tal ângulo 0 no “meridiano” oposto de a .

Neste caso, o Teorema de Poincaré-Hopf é verificado, pois

$$\chi(T) = 1 = I_{\text{PH}}(\bar{v}, a).$$

Portanto, o Teorema de Poincaré-Hopf não é mais válido para campos de vetores arbitrários sobre uma variedade singular, já que depende da escolha do campo.

Uma pergunta interessante que surge é “o que o campo v tem de especial que faz o Teorema de Poincaré-Hopf funcionar?”

Na próxima seção, estudaremos uma classe de campos, conhecidos como campos radiais. Esta classe nos ajudará a responder a pergunta acima bem como a generalizar o Teorema de Poincaré-Hopf.

Entretanto, para este estudo, necessitaremos de alguns conceitos preliminares envolvendo espaços complexos, que apresentaremos nas próximas seções.

5.3 VARIEDADES ALGÉBRICAS

Seja \mathbb{C} o conjunto dos complexos. O n -espaço afim sobre \mathbb{C} , que denotamos por \mathbb{A}^n , é o conjunto das n -uplas de elementos de \mathbb{C} . Assim, um ponto $p \in \mathbb{A}^n$ é dado por $p = (a_1, \dots, a_n)$, com $a_i \in \mathbb{C}$, para todo $i = 1, \dots, n$. Dizemos que a_i é a i -ésima coordenada de p .

Seja $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ o anel de polinômios em n variáveis sobre \mathbb{C} . Podemos interpretar os elementos de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ como funções do espaço afim \mathbb{A}^n sobre \mathbb{C} . Para isso, considere a inclusão $i : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ dada por $i(z) = z$, para todo $z \in \mathbb{C}$ e defina, para cada n -upla $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$ o homomorfismo de anéis $\eta_{(a_1, \dots, a_n)} : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{C}$ por $\eta_{(a_1, \dots, a_n)}(x_i) = a_i$, para todo $i = 1, \dots, n$ e $\eta_{(a_1, \dots, a_n)}(z) = i(z)$, para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$. Tal homomorfismo é chamado

de homomorfismo de avaliação.

Assim, dado um polinômio $h(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, podemos definir a função $h : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$h(a_1, \dots, a_n) = \eta_{(a_1, \dots, a_n)}(h(x_1, \dots, x_n)).$$

De fato, da definição de $\eta_{(a_1, \dots, a_n)}$, a função h está bem definida e depende apenas do polinômio $h(x_1, \dots, x_n)$. Além disso, quando aplicamos um ponto p de \mathbb{A}^n pela função h , estamos avaliando o valor do polinômio $h(x_1, \dots, x_n)$ no ponto p .

Com isso, faz sentido analisarmos o conjunto de zeros de h . Denotaremos tal conjunto por $V(h) = \{p \in \mathbb{A}^n; h(p) = 0\}$. De maneira mais geral, sendo T um subconjunto de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, podemos definir o conjunto de zeros de T como sendo o conjunto de zeros comuns a todos os elementos de T . Denotaremos tal conjunto da forma $V(T) = \{p \in \mathbb{A}^n; h(p) = 0, \text{ para todo } h \in T\}$.

Notemos que, se I é um ideal de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ gerado por T , então, pela definição de ideal gerado, teríamos $V(T) = V(I)$. Mais ainda, sendo $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ um anel noetheriano, pelo Teorema da base de Hilbert¹ qualquer ideal I de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ terá apenas um número finito de geradores. Assim, $V(T)$ pode se expressar como o conjunto de zeros comuns de um número finito de polinômios, digamos f_1, \dots, f_r .

Assim, vejamos algumas definições relevantes que podemos fazer acerca do assunto discutido anteriormente.

Definição 5.3.1. Seja $Y \subset \mathbb{A}^n$. Dizemos que Y é um conjunto algébrico se existe um subconjunto $T \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ tal que $Y = V(T)$.

Proposição 5.3.2. A união de dois conjuntos algébricos é um conjunto algébrico e a interseção arbitrária de conjuntos algébricos é ainda um conjunto algébrico.²

Agora, para prosseguirmos para a definição de variedade algébrica, precisaremos definir uma topologia sobre \mathbb{A}^n , que é chamada de topologia de Zariski, e para isto, utilizaremos a Proposição 5.3.2.

Definição 5.3.3. Seja $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ o anel de polinômios em n variáveis com coeficientes complexos. Dado $S \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, considere o conjunto $V(S) = \{x \in \mathbb{A}^n : f(x) = 0, \text{ para todo } f \in S\}$ definido anteriormente. Definimos a topologia de Zariski como a coleção dos conjuntos da forma $\mathbb{A}^n \setminus V(S)$.

Observemos que esta é uma boa definição, pois as condições para ser topologia são facilmente verificadas utilizando a Proposição 5.3.2.

Como consequência desta definição, segue que os conjuntos algébricos serão fechados

¹ Ver Tengan (2020)

² Uma demonstração para essa proposição pode ser vista em Tengan (2020)

nesta topologia.

Ademais, podemos também definir o conceito de irredutibilidade de um conjunto em um espaço topológico.

Definição 5.3.4. Dado $Y \subset X$ não vazio, dizemos que Y é irredutível se, e somente se, tal conjunto não pode ser expresso da forma $Y = Y_1 \cup Y_2$ com Y_1 e Y_2 fechados distintos em Y .

Finalmente, conseguimos definir uma variedade algébrica.

Definição 5.3.5. Uma variedade algébrica afim é um subconjunto irredutível de \mathbb{A}^n munido da topologia de Zariski.

Na próxima seção, faremos uma discussão parecida com a realizada com os polinômios, mas com funções analíticas, com o objetivo de definir espaços analíticos complexos.

5.4 ESPAÇOS ANALÍTICOS COMPLEXOS

Primeiramente, vejamos o conceito de germe.

Definição 5.4.1. Sejam $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ funções holomorfas. Dizemos que f e g são equivalentes se existe um aberto $U \subset \mathbb{C}^n$ contendo a origem de tal forma que $f|_U \equiv g|_U$. As classes de equivalência desta relação são denominadas germes e as denotaremos por $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \mathbb{C}$, ou f . A coleção de todos esses germes é denotado por \mathcal{O}_n .

Como consequência da Definição 5.4.1, obtemos que a coleção \mathcal{O}_n é um anel noetheriano local tal que o ideal maximal é dado por $\mathcal{M}_n = \{f \in \mathcal{O}_n : f(0) = 0\}$.

Definição 5.4.2. Denotamos por $\mathcal{O}_{n,p}$ o conjunto dos germes de aplicações analíticas $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \mathbb{C}^p$ e por $\mathcal{O}_{n,p}^0$ o conjunto dos germes $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$.

Agora, de maneira semelhante ao que fizemos com polinômios na seção anterior, iremos estudar o conjunto de zeros de funções analíticas. Para isso, precisaremos de algumas definições.

Definição 5.4.3. Considere a coleção formada pelo pares (V_α, U_α) , em que U_α é uma vizinhança aberta da origem de \mathbb{C}^n e V_α subconjuntos quaisquer de U_α . Diremos que dois pares (V_1, U_1) e (V_2, U_2) são equivalentes quando existir uma vizinhança $W \subset U_1 \cap U_2$ da origem de tal forma que $V_1 \cap W = V_2 \cap W$. Tal relação será uma relação de equivalência e as classes de equivalência desta relação serão chamadas de germes na origem em \mathbb{C}^n .

Se $f \in \mathcal{O}_n$, a classe de equivalência do conjunto $\{x : f(x) = 0\}$, em que f é um representante do germe f , é denotada por $\mathcal{V}(f)$. Assim, se f_1 e f_2 são representantes de um mesmo germe, temos $\mathcal{V}(f_1) = \mathcal{V}(f_2)$.

Definição 5.4.4. Um germe de espaço analítico $(V, 0)$ em torno da origem é o germe do subconjunto $V = \mathcal{V}(f_1) \cap \cdots \cap \mathcal{V}(f_r) = \mathcal{V}(f_1, \dots, f_r)$, em que $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{O}_n$.

Definimos o ideal de um germe de espaço analítico V por

$$\mathcal{I}(V) = \{f \in \mathcal{O}_n : V \subset f^{-1}(0)\}.$$

De maneira análoga ao feito com os polinômios na seção anterior, diremos que um germe de espaço analítico V é irredutível quando, para quaisquer germes V_1 e V_2 tais que $V = V_1 \cup V_2$, temos $V = V_1$ ou $V = V_2$. neste caso, dizemos que V é uma variedade analítica.

Nosso intuito aqui é estudar tais espaços analíticos na vizinhança de um ponto de \mathbb{C}^n . Estudaremos, sem perda de generalidade, apenas vizinhanças da origem. Para isso, definiremos o conceito de germe de um espaço analítico complexo. Vejamos antes a seguinte proposição.

Proposição 5.4.5. *Seja V um germe de espaço analítico. Então, existem $p \in \mathbb{Z}$ positivo e V_1, \dots, V_p variedades irredutíveis tais que V_i não está contida em V_j , para todo $i \neq j$ e $V = V_1 \cup \dots \cup V_p$. Tais variedades são unicamente determinadas a menos de ordem e são denominadas componentes irredutíveis de V .*

Definição 5.4.6. Um germe de espaço analítico V é dito equidimensional quando todas as suas componentes irredutíveis tem a mesma dimensão.

Dado $x \in \mathbb{C}^n$, chamamos de germe de espaço analítico em x um germe de conjunto V em x tal que, para alguma vizinhança U de x , o germe $V \cap U$ pode ser descrito por $\mathcal{V}(f_1, \dots, f_r)$, para alguns $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{O}_n$.

Quando V pode ser descrito como o conjunto de zeros de apenas um germe, $\mathcal{V}(f)$, diremos que é um germe de hipersuperfície analítica.

Com isso, vejamos a seguinte definição.

Definição 5.4.7. Um germe $V = \mathcal{V}(f_1, \dots, f_r)$ é dito reduzido quando a \mathbb{C} -álgebra $\frac{\mathcal{O}_n}{\langle f_1, \dots, f_r \rangle}$ não possui elementos nilpotentes.

Finalmente, dizemos que um ponto z de um germe de espaço analítico V é um ponto regular ou suave se, para alguma vizinhança U de z , o germe $U \cap V$ pode ser descrito como o conjunto dos zeros de um número finito de germes de funções analíticas que possuem z como ponto regular. Caso o ponto não seja regular, diremos que tal ponto é um ponto singular de V .

5.5 ÍNDICE RADIAL

M. -H. Schwartz foi uma das pioneiras no estudo de índices de campos de vetores em variedades singulares. Ela realizou um estudo acerca do Teorema de Poincaré-Hopf e de classes de Chern para tais variedades.

Em seu estudo, ela considerou uma classe específica de campos de vetores, denominados campos de vetores radiais, obtidos pelo processo de extensão radial.

Nesta seção, introduziremos a definição de índice radial em um espaço analítico equidimensional $V \subset \mathbb{C}^m$ com uma singularidade isolada na origem.

Definição 5.5.1. Seja $V \subset \mathbb{C}^m$ um espaço analítico equidimensional de dimensão $n \geq 1$ com uma singularidade isolada em 0. Considere $\overline{\mathbb{B}}_\varepsilon(0) \subset \mathbb{C}^m$ uma bola fechada de centro 0 e raio ε pequeno o suficiente para que toda esfera de centro 0 contida em $\overline{\mathbb{B}}_\varepsilon(0)$, encontre V transversalmente. Seja v_{rad} um campo de vetores em $V \setminus \{0\}$ tal que é transversal a todas as esferas \mathbb{S}_ε centradas em 0, para qualquer $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, e que se estenda continuamente a $\mathbb{C}^m|_V$ com uma singularidade isolada em 0. O campo v_{rad} é chamado de *campo de vetores radial* em V .

O campo v_{rad} pode ser estendido a um campo de vetores tangente, que denotaremos por $v_{rad}^\#$, em $\overline{\mathbb{B}}_\varepsilon(0)$, sendo transversal a todas as esferas $\mathbb{S}_{\varepsilon'}$ com centro na origem, em que $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$, obtendo um campo de vetores em $\overline{\mathbb{B}}_\varepsilon(0)$ radial.

Definição 5.5.2. Definimos o *índice de Schwartz* de v_{rad} como sendo o índice de Poincaré-Hopf em 0 da extensão radial $v_{rad}^\#$, que é +1.

Agora, sendo v um campo de vetores contínuo em V com uma singularidade isolada em 0, queremos definir o *índice de Schwartz* de v em 0. Este índice terá relação com a “falta de radialidade do campo” e, por conta disso, o chamamos também de *índice radial*.

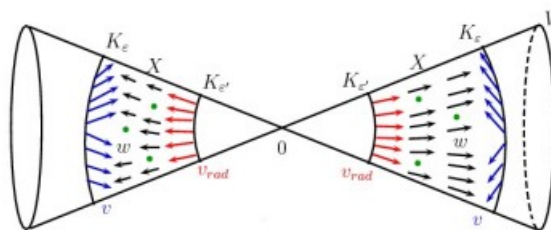
Para isso, necessitaremos da definição de diferença entre v e v_{rad} em 0.

Definição 5.5.3. Sejam $\mathbb{S}_\varepsilon, \mathbb{S}_{\varepsilon'}$ duas esferas centradas na origem, com $\varepsilon > \varepsilon' > 0$. Considere w o campo de vetores no cilindro X determinado pelos *links* $K_\varepsilon = \mathbb{S}_\varepsilon \cap V$ e $K_{\varepsilon'} = \mathbb{S}_{\varepsilon'} \cap V$, de tal forma que w tenha um número finito de singularidades no interior de X e suas restrições a K_ε e $K_{\varepsilon'}$ sejam v e v_{rad} , respectivamente. Nestas condições, a diferença entre v e v_{rad} é dada por

$$d(v, v_{rad}) := \text{IPH}(w, X).$$

Na figura 5.3, vemos uma representação do campo w descrito na definição anterior.

Figura 5.3 – Representação do campo de vetores w .



Fonte: Dalbello (2011)

Na sequência, definimos o *índice de Schwartz*.

Definição 5.5.4. Sejam $V \subset \mathbb{C}^m$ um espaço analítico equidimensional com singularidade isolada em 0 e v um campo de vetores contínuo em V com singularidade isolada em 0. O índice de Schwartz de v em 0 é definido por

$$I_{\text{Sch}}(v, 0; V) = 1 + d(v, v_{\text{rad}}).$$

Vejamos agora um resultado que relaciona o índice de Schwarz com o índice de Poincaré-Hopf.

Teorema 5.5.5. Sejam $V \subset \mathbb{C}^m$ um espaço analítico equidimensional compacto com singularidades isoladas q_1, \dots, q_r e v um campo de vetores contínuo em V , singular em q_1, \dots, q_r e, possivelmente, com outras singularidades, que denotaremos por y_1, \dots, y_s de V . Defina

$$I_{\text{Sch}}(v, V) := \sum_{i=1}^r I_{\text{Sch}}(v, q_i) + \sum_{j=1}^s I_{\text{PH}}(v, y_j).$$

Então,

$$I_{\text{Sch}}(v, V) = \chi(V).$$

Demonstração. Primeiramente, se supormos que v é radial em todas as singularidades q_1, \dots, q_r , temos

$$I_{\text{Sch}}(v, q_i) = 1, \text{ para todo } i \in \{1, \dots, r\}.$$

Assim, consideremos, em cada ponto singular, uma bola fechada $\overline{\mathbb{B}}_{\varepsilon_i}(q_i)$ de \mathbb{C}^m , com centro em q_i e raio $\varepsilon_i > 0$ suficientemente pequeno, de tal forma que q_i seja a única singularidade de v em $\overline{\mathbb{B}}_{\varepsilon_i}(q_i)$. Denotemos por \mathbb{D}_i o conjunto $V \cap \overline{\mathbb{B}}_{\varepsilon_i}(q_i)$. Assim, sendo \mathbb{A}_i o interior de \mathbb{D}_i ,

$$V^* = V \setminus \bigcup_{j=1}^r \mathbb{A}_j$$

é uma variedade diferenciável com bordo. Como v é transversal ao bordo de V^* , pelo Teorema 5.1.6,

$$\chi(V^*) = \sum_{j=1}^s I_{\text{PH}}(v, y_j).$$

Por outro lado,

$$\chi(V) = \chi\left(\bigcup \mathbb{A}_j\right) + \chi(V^*).$$

Portanto,

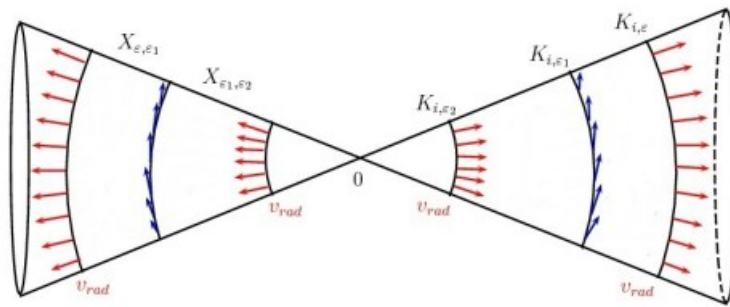
$$\chi(V) = \sum_{i=1}^r I_{\text{Sch}}(v, q_i) + \sum_{i=1}^s I_{\text{PH}}(v, y_j).$$

Agora, caso v não seja radial em alguma singularidade q_i , consideremos $\varepsilon > 0$ pequeno o suficiente e denotemos por $\overline{\mathbb{B}}_{i,\varepsilon}(q_i) \subset \mathbb{C}^m$ a bola fechada de centro q_i e raio ε , por $K_{i,\varepsilon}$ o conjunto $V \cap \overline{\mathbb{B}}_{i,\varepsilon}(q_i)$ e por V^* o conjunto $V \setminus \bigcup_i (V \cap \overline{\mathbb{B}}_{i,\varepsilon}(q_i))$.

Notemos que cada $K_{i,\varepsilon}$ tem uma vizinhança difeomorfa a um cilindro $K_{i,\varepsilon} \times [0, 1]$.

Considerando $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tais que $\varepsilon > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$, sejam $X_{\varepsilon,\varepsilon_1}$ e $X_{\varepsilon,\varepsilon_2}$ os cilindros em V limitados por $\{K_{i,\varepsilon}, K_{i,\varepsilon_1}\}$ e $\{K_{i,\varepsilon_1}, K_{i,\varepsilon_2}\}$, respectivamente. Definamos sobre o bordo destes cilindros um campo de vetores da seguinte forma: coloquemos o campo v sobre K_{i,ε_1} e o campo v_{rad} em $K_{i,\varepsilon}$ e K_{i,ε_2} , como ilustra a figura 5.4.

Figura 5.4 – Representação geométrica dos campos de vetores.



Fonte: Dalbello (2011)

Assim, $I_{\text{Sch}}(v, q_i) = 1 + d(v, v_{rad})$.

Sendo X o cilindro em V limitado por $K_{i,\varepsilon}$ e K_{i,ε_2} , que é uma variedade diferenciável com bordo. Coloquemos sobre $K_{i,\varepsilon}$ e K_{i,ε_2} o campo v e chamemos este campo de w .

Consideremos uma extensão contínua de w sobre X , tal que em K_{i,ε_1} tal extensão coincida com v_{rad} e denotemos ela por \hat{w} . Como X é um cilindro, podemos construir uma outra extensão de w sobre X sem singularidades. Logo, pelo Teorema 5.1.6, temos $d(v, v_{rad}) + d(v_{rad}, v) = 0$. Consequentemente, caímos novamente no primeiro caso, provando o teorema. \square

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta monografia apresentamos conceitos e resultados preliminares vistos durante todo o curso, entre eles, teoremas clássicos como o Teorema da Função Implícita e o Teorema da Aplicação Inversa, normalmente estudados na disciplina de Análise no \mathbb{R}^n . Além disso, introduzimos o conceito de variedades diferenciáveis e o de grau topológico via aplicações diferenciáveis, além de aplicações destes conceitos na teoria de campos de vetores.

Esperamos que esta monografia auxilie aos estudantes interessados em iniciar seus estudos/pesquisa na área de singularidades.

Quanto à contribuição na formação pessoal, tal estudo nos favoreceu de maneira muito significativa, pois nos permitiu estudar conceitos que geralmente não são vistos durante a graduação, complementando o curso. Além disso, foi essencial para a obtenção de maturidade no raciocínio e na escrita matemática.

Por fim, ressaltamos que muitos dos objetos e resultados estudados neste trabalho de conclusão de curso são itens abordados em cursos de pós-graduação em matemática e em temas de interesse de pesquisa na teoria de singularidades, nos proporcionando assim um excelente pré-requisito para estudos e pesquisa em nível de pós-graduação.

REFERÊNCIAS

- BOLDRINI, J. L. e. a. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Harper e Row do Brasil, 1984. 87
- BRASSELET, J. P. e. a. **Vector Fields on singular varieties**. Berlin: Springer-Verlag, 2009. (Lecture Notes in Mathematics). 74
- BURNS, K. e. a. **Differential geometry and topology with a view to dynamical systems**. [S.l.]: Chapman e Hall/CRC, 2005. 62
- DALBELO, T. M. Dissertação de Mestrado, **O Índice de Poincaré-Hopf e Generalizações no Caso Singular**. 2011. 21, 24, 34, 48, 49, 55, 58, 59, 61, 62, 63, 64, 70, 77, 82, 84
- DIOMARA, P. e. a. **Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis**. 1. ed. Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 2014. (Coleção Estudos). 131
- JUDICE, E. D. **O Teorema de Sard e suas aplicações**. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. (Publicações Matemáticas). 8, 29
- LIMA, E. L. **Introdução à topologia diferencial**. Rio de Janeiro: IMPA, 1961. (Notas de Matemática nº 23). 33, 34, 41, 42
- LIMA, E. L. **Análise Real, volume 2**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2004. (Coleção Matemática Universitária). 87, 131
- LIMA, E. L. **Variedades Diferenciáveis**. Rio de Janeiro: IMPA, 2011. (Publicações Matemáticas). 8, 29, 30
- LIMA, E. L. **Homologia básica**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. (Projeto Euclides). 62
- LIMA, E. L. **Álgebra Linear**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. (Coleção Matemática Universitária). 87
- MANFREDO, P. C. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. 6. ed. [S.l.]: SBM, 2014. 8
- TENGAN, E. e. a. **Álgebra Comutativa em Quatro Movimentos**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2020. 79

APÊNDICE A – TOPOLOGIA DO ESPAÇO EUCLIDIANO

Nesta parte, usamos como referências principais [Boldrini \(1984\)](#), [Lima \(2004\)](#) e [Lima \(2014b\)](#).

A.1 O ESPAÇO EUCLIDIANO E ALGUMAS OPERAÇÕES

Vejamos a definição geral de Espaço Euclidiano:

Definição A.1.1. Seja $n \in \mathbb{N}$. O Espaço Euclidiano n -dimensional é o produto cartesiano de n fatores iguais a \mathbb{R} :

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}.$$

Os elementos de \mathbb{R}^n , denominados pontos ou vetores, são n -uplas $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, em que $x_i \in \mathbb{R}$, para todo $i = 1, \dots, n$. Chamamos x_i de i -ésima coordenada de x .

Se $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ são elementos de \mathbb{R}^n , $x = y$ se, e somente se, $x_i = y_i$, para todo $i = 1, \dots, n$.

Definamos agora algumas operações primitivas características do \mathbb{R}^n :

Definição A.1.2. Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ elementos de \mathbb{R}^n e $\alpha \in \mathbb{R}$. Definimos a soma e o produto por um escalar como sendo, respectivamente,

$$(a) \quad x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$(b) \quad \alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n).$$

Alguns elementos especiais presentes no \mathbb{R}^n são os vetores $0 = (0, \dots, 0)$, denominado vetor nulo, ou origem de \mathbb{R}^n e, dado $x = (x_1, \dots, x_n)$, o vetor $-x = (-x_1, \dots, -x_n)$, que é o simétrico de x . tais vetores possuem algumas propriedades que veremos a seguir:

Teorema A.1.3. Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então, vale o seguinte:

$$(a) \quad x + y = y + x$$

$$(e) \quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$$

$$(b) \quad x + 0 = x$$

$$(f) \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

$$(c) \quad -x + x = 0$$

$$(g) \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

$$(d) \quad x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$(h) \quad 1x = x.$$

Demonstração. Vejamos,

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = (y_1 + x_1, \dots, y_n + x_n) = y + x.$$

Os demais itens saem de maneira análoga.

□

Agora, iremos definir a noção de linearidade entre elementos de \mathbb{R}^n para definir uma base.

Definição A .1.4. Seja $A = \{u, v, w\} \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto de \mathbb{R}^n .

Dizemos que A é um conjunto de elementos linearmente independentes (LI), se nenhum dos seus elementos pode ser escrito como combinação linear do outro, isto é, não existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \alpha v + \beta w.$$

Dizemos que A é um conjunto de elementos linearmente dependentes (LD), se A não é um conjunto de elementos linearmente independentes (LI).

Com isso, dado $B \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que B gera \mathbb{R}^n se, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, x pode ser escrito como combinação linear dos elementos de B .

Ademais, dizemos que B é base de \mathbb{R}^n se B gera \mathbb{R}^n e é LI.

Os vetores $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $e_n = (0, 0, \dots, 1)$, que possuem uma única coordenada não nula igual a 1 formam a base canônica do \mathbb{R}^n .

Com isso, partimos para a definição de produto interno:

Definição A .1.5. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$. O produto interno de x e y , denotado por $\langle x, y \rangle$, é dado por:

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

O número $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ é denominado norma, ou comprimento de x . Logo, $|x|^2 = \langle x, x \rangle$. Se $|x| = 1$, x é chamado de vetor unitário.

Vejam algumas propriedades do produto interno:

Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

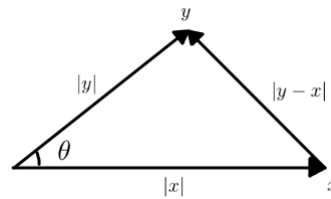
- (a) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
- (b) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$;
- (c) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$;
- (d) $\langle x, x \rangle > 0$, se $x \neq 0$.

Vejam um resultado interessante:

Proposição A .1.6. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$. x e y são ortogonais, ou seja, o ângulo entre eles θ é de 90° se, e somente se, $\langle x, y \rangle = 0$. Denotamos por $x \perp y$.

Demonstração. De fato, podemos representar tais vetores como na figura A .1.

Figura A.1 – Representação Geométrica dos Vetores



Fonte: Elaborada pelo autor

Pela lei dos cossenos,

$$|y - x|^2 = |y|^2 + |x|^2 - 2|x||y| \cos(\theta). \quad (\text{A.1})$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} |y - x|^2 &= \langle y - x, y - x \rangle \\ &= \langle y, y \rangle - \langle y, x \rangle - \langle x, y \rangle + \langle x, x \rangle \\ &= |y|^2 - 2\langle x, y \rangle + |x|^2. \end{aligned}$$

De (A.1),

$$|y|^2 - 2\langle x, y \rangle + |x|^2 = |y|^2 + |x|^2 - 2|x||y| \cos(\theta) \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{\langle x, y \rangle}{|x||y|}.$$

Logo, se $\theta = 90^\circ$, necessariamente $\langle x, y \rangle = 0$. Reciprocamente, se $\langle x, y \rangle = 0$, como $\theta \in (0, 180^\circ)$, segue que $\theta = 90^\circ$, provando o desejado. \square

Proposição A.1.7. *Seja $x \in \mathbb{R}^n$ não nulo. Para todo $y \in \mathbb{R}^n$, o vetor $z = y - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} x$ é ortogonal a x .*

Demonstração. De acordo com a definição de ortogonalidade entre elementos de \mathbb{R}^n , $z \perp x$, se e somente se $\langle z, x \rangle = 0$.

Vejamos,

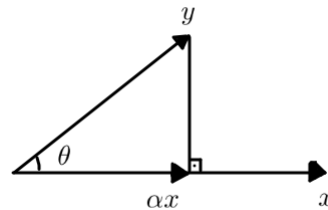
$$\begin{aligned} \langle z, x \rangle &= \left\langle y - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} x, x \right\rangle \\ &= \langle y, x \rangle - \left\langle \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} x, x \right\rangle \\ &= \langle y, x \rangle - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} \langle x, x \rangle \\ &= \langle y, x \rangle - \langle x, y \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, $z \perp x$. □

O vetor $\frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} x$ é a projeção ortogonal de y sobre x .

De fato, supondo $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que αx é a projeção ortogonal de y sobre x , teríamos algo parecido com o que é mostrado na figura A .2.

Figura A .2 – Representação Geométrica da Projeção Ortogonal



Fonte: Elaborada pelo autor

Trabalhando com o triângulo retângulo, teríamos

$$\cos(\theta) = \frac{|\alpha x|}{|y|} \Rightarrow |y| \cos(\theta) = |\alpha x|.$$

Por outro lado, pela lei dos cossenos, visto na Proposição A .1.6, temos

$$\cos(\theta) = \frac{\langle x, y \rangle}{|x||y|}.$$

Então,

$$\begin{aligned} |y| \frac{\langle x, y \rangle}{|x||y|} &= |\alpha x| \Rightarrow |y| \frac{\langle x, y \rangle}{|x||y|} = |\alpha| |x| \\ \Rightarrow |\alpha| &= \frac{\langle x, y \rangle}{|x|^2} = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle}. \end{aligned}$$

Portanto, $\alpha x = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} x$.

Feito isso, mais alguns resultados importantes que conseguimos provar são o Teorema de Pitágoras e a Desigualdade de Schwarz.

Teorema A .1.8 (de Pitágoras). *Se $x \perp y$, então $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$.*

Demonstração. Suponha $x \perp y$. Então,

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= |x|^2 + 2\langle x, y \rangle + |y|^2 \\ &= |x|^2 + |y|^2. \end{aligned}$$

□

Teorema A .1.9 (Desigualdade de Schwars). *Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se $|\langle x, y \rangle| \leq |x||y|$, valendo a igualdade se, e somente se, um dos vetores x ou y é múltiplo do outro.*

Demonstração. Se $x = 0$, a desigualdade é trivialmente satisfeita.

Se $x \neq 0$, então, existem y e z , com $z \perp y$, tais que

$$y = \alpha x + z,$$

em que $\alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{|x|^2}$.

Logo, por A .1.8,

$$|y|^2 = |\alpha x|^2 + |z|^2 \Rightarrow |y|^2 = \alpha^2 |x|^2 + |z|^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |y|^2 \geq \alpha^2 |x|^2 &= \frac{\langle x, y \rangle^2}{|x|^2} \Rightarrow \langle x, y \rangle^2 \leq |x|^2 |y|^2 \\ &\Rightarrow |\langle x, y \rangle| \leq |x||y|. \end{aligned}$$

Valendo a igualdade se, e somente se, $y = \alpha x$.

□

Vejamos algumas propriedades da norma:

- a) $|x| \geq 0$
- b) $|\alpha x| = |\alpha||x|$
- c) $|x + y| \leq |x| + |y| \Rightarrow |x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$.

Até o momento, trabalhamos com um tipo específico de norma, que é conhecida como norma euclidiana, que é da forma

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Podemos definir outros tipos de normas, como a norma do máximo e a da soma:

A norma do máximo, como diz o nome, é definida como sendo a maior coordenada de $x \in \mathbb{R}^n$, ou seja, $|x|_M = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$.

Já a norma da soma é dada pela soma das coordenadas, $|x|_S = |x_1| + \dots + |x_n|$.

Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, temos

$$|x|_M \leq |x| \leq |x|_S \leq n|x|_M,$$

em que $|x|$ é a norma euclidiana.

Para toda norma, vale a desigualdade

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Finalizando, definiremos a distância entre dois pontos, que é dada por, sendo $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$d(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

A.2 BOLAS E CONJUNTOS LIMITADOS

Definição A.2.1. Sejam $a \in \mathbb{R}^n$ e $r \in \mathbb{R}$ tal que $r > 0$. A bola aberta de centro a e raio r é o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ tais que $d(a; x) < r$:

$$B(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < r\}.$$

A bola fechada de centro a e raio r é o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ tais que $d(a; x) \leq r$:

$$B[a; r] = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| \leq r\}.$$

Outra nomenclatura utilizada para a bola fechada $B[a; r]$ é a de disco n -dimensional de centro a e raio r . Chamamos a bola $B[0; 1]$ de disco unitário de \mathbb{R}^n .

A esfera de centro a e raio r é o conjunto

$$S[a; r] = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| = r\}.$$

Utilizamos uma notação específica para a esfera unitária de dimensão $n - 1$:

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}.$$

Quando $n = 2$, a esfera unitária de dimensão 1 é a circunferência de centro na origem e raio 1.

Nas definições acima, tomamos a norma euclidiana. Caso tomássemos a norma do

máximo ou da soma, as formas das bolas e esferas definidas acima mudariam. Utilizando o exemplo acima, caso utilizássemos a norma do máximo, teríamos um quadrado de lados paralelos aos eixos com norma 1.

Qualquer das normas que tomarmos não influenciará nas aplicações que veremos posteriormente.

De fato, sendo B, B_M, B_S as bolas de centro a e raio r construídas com as normas euclidiana, do máximo e da soma, respectivamente, comparando as normas distintas, temos $|x|_M \leq |x| \leq |x|_S \leq n|x|_M$. Logo, sendo B'_M a bola de centro a e raio r/n , necessariamente $B'_M \subset B_S \subset B \subset B_M$.

Com isso, conseguimos definir conjuntos limitados:

Definição A .2.2. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que X é um conjunto limitado se, e somente se, X está contido em alguma bola $B[a; r]$.

Tomando $B[0; k]$, com $k = r + |a|$,

$$|x - a| \leq r \Rightarrow |x - a + a| \leq |x - a| + |a| \leq r + |a|.$$

Logo, se $x \in B[a; r]$, então, necessariamente $x \in B[0; k]$. Ou seja, dizer que X é limitado equivale a dizer que existe $k > 0$ tal que $|x| \leq k$, para todo $x \in X$.

Definição A .2.3. Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação. Dizemos que f é limitada quando sua imagem $f(X) \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto limitado.

Dados $a, b \in \mathbb{R}^n$, com $a \neq b$, a reta que une esses pontos é o conjunto $ab = \{x \in \mathbb{R}^n : x = (1 - t)a + tb, t \in \mathbb{R}\}$.

O segmento com extremos em a e b é o conjunto $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n : x = (1 - t)a + tb, t \in [0, 1]\}$.

Definição A .2.4. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que X é convexo quando todo segmento de reta que une quaisquer dois pontos de X está inteiramente contido em X .

Exemplo A .2.5. Toda bola aberta ou fechada é um conjunto convexo.

Demonstração. Seja $B(x_0; r) \subset \mathbb{R}^n$ uma bola aberta de centro x_0 e raio r . Tome $a, b \in B(x_0; r)$ quaisquer tais que $a \neq b$.

De fato, $|a - x_0| < r$ e $|b - x_0| < r$.

Tomemos o segmento com extremos em a e b dado por $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n : x = (1 - t)a + tb, t \in \mathbb{R}\}$.

Vejam, tome $x \in [a, b]$. Então,

$$\begin{aligned}
 |x - x_0| &= |(1 - t)a + tb - x_0| \\
 &= |(1 - t)a + tb - (1 - t)x_0 - tx_0| \\
 &= |(1 - t)(a - x_0) + (b - x_0)t| \\
 &\leq |(1 - t)(a - x_0)| + |(b - x_0)t| \\
 &\leq (1 - t)|a - x_0| + |b - x_0|t \\
 &< (1 - t)r + tr \\
 &\leq r.
 \end{aligned}$$

Portanto, $[a, b] \subset B(x_0; r)$, para todo $a, b \in B(x_0; r)$.

O caso da bola fechada é análogo. □

A .3 CONJUNTOS ABERTOS

Seja $a \in X \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que a é interior a X se é possível obter $r > 0$ tal que $B(a; r) \subset X$. O conjunto dos pontos interiores a X , denominado interior do conjunto X , é denotado por $int.X$.

Definição A .3.1. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto se, e somente se, dado qualquer ponto $a \in A$, é possível obter $r > 0$ tal que a bola aberta $B(a; r)$ está inteiramente contida em A .

Ou, equivalentemente, $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto se, e somente se $A = int.A$.

Exemplo A .3.2. Toda bola aberta é um conjunto aberto.

Demonstração. Seja $B = B(a; r) \subset \mathbb{R}^n$ uma bola aberta de centro a e raio r em \mathbb{R}^n .

Suponha $p \in B$ um ponto qualquer. Então, $|p - a| < r$.

Tome $z = r - |p - a|$ e considere a bola aberta $B(p; z)$ mostremos que $B(p; z) \subset B(a; r)$.

Vejam, seja $x \in B(p; z)$. Então,

$$|x - p| < z \Rightarrow |x - p| < r - |p - a|.$$

Entretanto,

$$|x - a| = |x - p + p - a| \leq |x - p| + |p - a| < r - |p - a| + |p - a| = r.$$

Portanto, $B(p; z) \subset B(a; r)$. Como tomamos um ponto arbitrário de $B(a; r)$, segue que $B(a; r)$ é um conjunto aberto. □

Definição A .3.3. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. A fronteira de X , denotado por $fr.X$, é o conjunto dos pontos que não são interiores a X e não são interiores a $\mathbb{R}^n \setminus X$.

Teorema A .3.4. (a) Se A_1 e A_2 são conjuntos abertos em \mathbb{R}^n , então $A_1 \cap A_2$ é um conjunto aberto.

(b) Seja $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família arbitrária de conjuntos abertos em \mathbb{R}^n . Então a reunião $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é um conjunto aberto.

Demonstração. (a) Sejam $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$ dois conjuntos abertos em \mathbb{R}^n .

Se $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, por vacuidade, segue que $A_1 \cap A_2$ é aberto.

Se $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ e $A_1 \subset A_2$ ou $A_2 \subset A_1$, segue imediatamente que $A_1 \cap A_2$ é aberto.

Se $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, $A_1 \not\subset A_2$ e $A_2 \not\subset A_1$, tome $p \in A_1 \cap A_2$. Então, pela definição de interseção e de conjuntos abertos, segue que é possível obter r_1 e r_2 tais que $B(p; r_1) \subset A_1$ e $B(p; r_2) \subset A_2$.

Suponha, sem perda de generalidade, que $r_2 < r_1$. Então, como as bolas são concêntricas, tomando qualquer ponto de $a \in B(p; r_2)$, teríamos

$$|a - p| < r_2 < r_1.$$

Portanto, $B(p; r_2) \subseteq B(p; r_1) \subset A_1$. Como, por hipótese, $B(p; r_2) \subset A_2$, segue que $B(p; r_2) \subset A_1 \cap A_2$, provando que $A_1 \cap A_2$ é um conjunto aberto em \mathbb{R}^n .

(b) Seja $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família arbitrária de conjuntos abertos em \mathbb{R}^n . Considere a reunião $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Suponha que $x \in A$. Então, para algum $\lambda \in L$, temos $x \in A_\lambda$.

Como A_λ é aberto, existe $r > 0$ tal que $B(x; r) \subset A_\lambda \subset A$. Portanto, A é um conjunto aberto em \mathbb{R}^n . \square

Definição A .3.5. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto qualquer. Um conjunto $A \subset X$ é aberto em X se, e somente se, $A = U \cap X$, em que U é um conjunto aberto em \mathbb{R}^n .

A .4 SEQUÊNCIAS

Definição A .4.1. Uma sequência em \mathbb{R}^n é uma função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ que associa cada $k \in \mathbb{N}$ a um ponto $x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn}) \in \mathbb{R}^n$.

Para cada $i = 1, \dots, n$, x_{ki} é a i -ésima coordenada de x_k .

A notação para uma sequência é dada por $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Observemos que dar uma sequência em \mathbb{R}^n equivale a dar n sequências em \mathbb{R} : $(x_{k1})_{k \in \mathbb{N}}, \dots, (x_{kn})_{k \in \mathbb{N}}$.

Dizemos que uma sequência é limitada se existe uma bola aberta $B(c; r)$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$, $x_k \in B(c; r)$.

Assim como feito na definição A .2.2, tomando $a = r + |c|$, teremos $B(c; r) \subset B(0; a)$. Ou seja, dizer que uma sequência é limitada equivale a dizer que é possível obter $a > 0$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$, $x_k \in B(0; a)$.

Com isso, podemos enunciar uma primeira proposição sobre sequências:

Proposição A .4.2. Seja $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de pontos em \mathbb{R}^n . $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada se, e somente se, para todo $i = 1, \dots, n$, a seqüência $(x_{ki})_{k \in \mathbb{N}}$, da i -ésima coordenada, é limitada.

Demonstração. Tomaremos a norma euclidiana para esta demonstração.

Suponha que $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ seja uma seqüência limitada. Então, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $|x_k| < c$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Logo,

$$|x_k| = \sqrt{x_{k1}^2 + \dots + x_{kn}^2} < c.$$

Por outro lado, para todo $i = 1, \dots, n$,

$$|x_{ki}| = \sqrt{x_{ki}^2} \leq \sqrt{x_{k1}^2 + \dots + x_{kn}^2} < c.$$

Portanto, para todo $i = 1, \dots, n$, a seqüência $(x_{ki})_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada.

Reciprocamente, suponha que para todo $i = 1, \dots, n$ a seqüência $(x_{ki})_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada. Então, para todo $i = 1, \dots, n$ existe c_i tal que

$$|x_{ki}| < c_i$$

Tomando $c = \max\{c_1, \dots, c_n\}$,

$$|x_k| = \sqrt{x_{k1}^2 + \dots + x_{kn}^2} < \sqrt{x_{k1}^2} + \dots + \sqrt{x_{kn}^2} = |x_{k1}| + \dots + |x_{kn}| < nc.$$

Portanto, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada. □

Vejamos um exemplo dessa proposição:

Exemplo A .4.3. Considere as seqüências reais $\left(\frac{1}{k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ e $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $a_1 = \sqrt{3}$ e $a_{k+1} = \sqrt{3 + 2a_k}$, $k = 2, 3, \dots$

De fato, $\left|\frac{1}{k}\right| = \frac{1}{k} \leq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, logo, $\left(\frac{1}{k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada.

Mostremos que $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada por meio do princípio de indução finita.

De fato, é fácil notar que $a_k > 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$, logo, $|a_k| = a_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Ademais, começando pelo primeiro elemento da seqüência, vemos que $a_1 = \sqrt{3} < 3$.

Suponha que $a_k = \sqrt{3 + 2a_{k-1}} < 3$, para um certo $k > 1$.

Provemos que $a_{k+1} < 3$. Vejamos,

$$a_{k+1} = \sqrt{3 + 2a_k} < \sqrt{3 + 2 \cdot 3} = 3.$$

Portanto, $|a_k| = a_k < 3$ para todo $k \in \mathbb{N}$, o que significa que $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada.

Com isso, pela Proposição A .4.2, as seqüências de \mathbb{R}^2 , $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{k}, a_k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ e $(y_k)_{k \in \mathbb{N}} =$

$(a_k, \frac{1}{k})_{k \in \mathbb{N}}$ são limitadas.

Vejam agora algumas definições importantes:

Definição A .4.4. Seja $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência em \mathbb{R}^n . Uma subsequência de $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma restrição dela a um subconjunto finito $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$. Denotamos-a por $(x_k)_{k \in \mathbb{N}'}$.

Definição A .4.5. Sejam $a \in \mathbb{R}^n$ um ponto e $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência. Dizemos que a é o limite de $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e denotamos por $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ ou $\lim_{k \in \mathbb{N}} x_k = a$ quando, dado $\varepsilon > 0$, é possível obter $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0$ implica $|x_k - a| < \varepsilon$, ou, equivalentemente, $k > k_0$ implica $x_k \in B(a; \varepsilon)$.

Observemos que a definição acima independe da norma escolhida, visto que $|x|_M < |x| < |x|_S < n|x|_M$. Quando uma sequência possui um limite, dizemos que a sequência é convergente.

Toda sequência convergente é limitada, pois, sendo $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = l$, temos, pela Definição A .4.5 que, dado $\varepsilon > 0$, em particular, $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $|x_k - l| < 1$. Sendo $M = \max\{|x_1|, \dots, |x_{n_0}|, |l| + 1\}$, temos que $|x_k| < M$, para todo $k \in \mathbb{N}$, implicando $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ limitada.

Além disso, é fácil ver que qualquer subsequência de uma sequência convergente é convergente.

Com isso, temos o seguinte Teorema:

Teorema A .4.6. Seja $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência de \mathbb{R}^n .

A sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge para o ponto $a = (a_1, \dots, a_n)$, ou seja, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ se, e somente se, para cada $i = 1, \dots, n$, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{ki} = a_i$.

Demonstração. Suponha que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$. Então, dado $\varepsilon > 0$, é possível obter $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0$ implica $|x_k - a| < \varepsilon$.

Por outro lado, para todo $i = 1, \dots, n$, independente da norma que tomarmos,

$$|x_{ki} - a_i| \leq |x_k - a| < \varepsilon.$$

Portanto, para cada $i = 1, \dots, n$, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{ki} = a_i$.

Reciprocamente, suponha que, para cada $i = 1, \dots, n$, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{ki} = a_i$. Isso significa que, dado $\varepsilon > 0$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_i$ implica $|x_{ki} - a_i| < \varepsilon$, para todo $i = 1, \dots, n$.

Sendo assim, tomando $k_0 = \max\{k_1, \dots, k_n\}$ e adotando a norma do máximo, $k > k_0$ implica $|x_k - a| < \varepsilon$.

Portanto, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$. □

Com isso, temos o seguinte Corolário:

Corolário A .4.7. Sejam $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sequências em \mathbb{R}^n e $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência real tais que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$, $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = b$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \beta$. Então, $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k + y_k) = a + b$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k x_k = \beta a$.

Feito isso, precisaremos de um resultado de seqüências reais importante, que servirá de suporte para provar resultados mais gerais em \mathbb{R}^n . Primeiramente, vejamos algumas definições:

Definição A .4.8. Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de números reais. Dizemos que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é:

- (a) estritamente crescente se, dados $m, n \in \mathbb{N}$ quaisquer, com $n > m$, então $a_n > a_m$;
- (b) estritamente decrescente se, dados $m, n \in \mathbb{N}$ quaisquer, com $n > m$, então $a_n < a_m$;
- (c) crescente se, dados $m, n \in \mathbb{N}$ quaisquer, com $n \geq m$, então $a_n \geq a_m$;
- (d) decrescente se, dados $m, n \in \mathbb{N}$ quaisquer, com $n \geq m$, então $a_n \leq a_m$.

Quando algum desses casos ocorre, dizemos que a seqüência é monótona.

Definição A .4.9. Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio. Dizemos que A é limitado superiormente (inferiormente) quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c \geq a$ ($c \leq a$), para todo $a \in A$. O ponto c é chamado de limitante superior (inferior) de A .

Definição A .4.10. Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio e limitado superiormente. Dizemos que $l \in \mathbb{R}$ é o supremo de A se, e somente se, l é o menor limitante superior de A .

Denotamo-o por $\sup A$.

Analogamente, sendo $B \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio e limitado inferiormente. Dizemos que $l' \in \mathbb{R}$ é o ínfimo de B se, e somente se, l' é o maior limitante inferior de B .

Denotamo-o por $\inf B$.

Observação A .4.11. Podemos interpretar a definição acima da seguinte forma:

Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio, limitado superiormente e $l = \sup A$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $a \in A$ tal que $l - \varepsilon < a < l$.

Analogamente, sendo $B \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio, limitado inferiormente e $l' = \inf B$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $b \in B$ tal que $l' < b < l' + \varepsilon$.

Com isso, provemos o seguinte Teorema.

Teorema A .4.12. *Toda seqüência real, monótona e limitada é convergente.*

Demonstração. Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência real, limitada e crescente. De fato, como $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|a_n| < M$, para todo $n \in \mathbb{N}$, ou, equivalentemente, $-M < a_n < M$.

Logo, como $a_n < M$, para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que a seqüência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada superiormente. Consequentemente, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite um supremo.

Sejam A o conjunto que contém todos os elementos da seqüência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e suponha $l = \sup A$. De acordo com a observação A .4.11, sabemos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $a_{n_0} \in A$ tal que $l - \varepsilon < a_{n_0} < l$.

Por outro lado, como, por hipótese, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência crescente, dado $n \in \mathbb{N}$ tal

que $n > n_0$, segue que $a_n \geq a_{n_0}$.

Logo,

$$\begin{aligned} l - \varepsilon < a_{n_0} < a_n < l < l + \varepsilon &\Rightarrow -\varepsilon < a_n - l < \varepsilon \\ &\Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$.

Os casos em que as sequências são limitadas e estritamente crescentes, estritamente decrescentes, ou decrescentes, são análogos. \square

Vejamos uma aplicação para esse Teorema, para isso, retomemos ao Exemplo A.4.3.

Nesse exemplo, vimos que a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por $a_1 = \sqrt{3}$ e $a_{n+1} = \sqrt{3 + 2a_n}$ era uma sequência limitada e um de seus limitantes superiores era 3. Vamos mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$.

Como $a_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, é fácil ver que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência crescente.

Portanto, pelo Teorema A.4.12, segue que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente.

Seja $l \in \mathbb{R}$ o limite da sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. De fato, é fácil ver que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l.$$

Sendo assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3 + 2a_n}.$$

Utilizando propriedades de limites de sequências reais, chegamos que

$$l = \sqrt{3 + 2l} \Rightarrow l^2 = 3 + 2l.$$

Utilizando Bháskara, chegamos que $l = 3$ ou $l = -1$. Como $a_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$.

Feito isso, somos capazes de provar o seguinte Teorema:

Teorema A.4.13 (Bolzano-Weierstrass). *Toda sequência limitada em \mathbb{R}^n possui uma subsequência convergente.*

Demonstração. Seja $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em \mathbb{R}^n .

Considere as n sequências reais coordenadas $(x_{ki})_{k \in \mathbb{N}}$, com $i = 1, \dots, n$.

De fato, como $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada, pela Proposição A.4.2, segue que, para cada $i = 1, \dots, n$, $(x_{ki})_{k \in \mathbb{N}}$ é também limitada.

Assim sendo, considere o seguinte conjunto:

$$D := \{k_i \in \mathbb{N} : \forall p > k_i, x_{k_i} > x_p\}.$$

Caso D for infinito, podemos reescrevê-lo da forma

$$D = \{k_{i1} < k_{i2} < \dots < k_{im} < \dots\}$$

Resultando, da definição de D , na subsequência decrescente

$$x_{k_{i1}} > x_{k_{i2}} > \dots > x_{k_{im}} > \dots$$

Portanto, pelo Teorema A .4.12, $(x_{ki})_{k \in D}$ é convergente.

Caso D não for infinito, então existe $k_0 \in D$ tal que, para todo $k \in D$, $k_0 > k$, implicando $x_{k_0} < x_k$, ou seja, k_0 é o máximo de D .

Sendo assim, por propriedade dos números naturais, sabemos que existe $k_{i1} > k_0$. Entretanto, como $k_{i1} \notin D$, necessariamente, $x_{k_{i1}} > x_{k_0}$.

Analogamente, tomando $k_{i2} > k_{i1}$, teríamos $x_{k_{i2}} > x_{k_{i1}} > x_{k_0}$.

Repetindo o processo sucessivamente, obteríamos um conjunto $\bar{D} = \{k_0 < k_{i1} < \dots < k_{im} < \dots\}$ tal que $x_{k_0} < x_{k_{i1}} < \dots < x_{k_{im}} < \dots$.

Ou seja, $(x_{ki})_{k \in \bar{D}}$ seria uma subsequência decrescente de $(x_{ki})_{k \in \mathbb{N}}$. Portanto, novamente pelo Teorema A .4.12, $(x_{ki})_{k \in \bar{D}}$ é convergente.

Com isso, provamos que toda sequência real limitada admite uma subsequência convergente.

Sendo assim, considere a sequência real relativa à primeira coordenada de $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(x_{k1})_{k \in \mathbb{N}}$. Como ela é limitada, sabemos que existe $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ tal que $(x_{k1})_{k \in \mathbb{N}_1}$ é convergente, ou seja, existe $a_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{k \in \mathbb{N}_1} x_{k1} = a_1$.

Agora, considerando a sequência real relativa à segunda coordenada de $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, mas restrita a \mathbb{N}_1 , $(x_{k2})_{k \in \mathbb{N}_1}$, sabemos que existe $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$ tal que $(x_{k2})_{k \in \mathbb{N}_2}$ é convergente, ou seja, existe $a_2 \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{k \in \mathbb{N}_2} x_{k2} = a_2$.

Seguindo o mesmo processo, obtemos $\mathbb{N}_n \subset \mathbb{N}_{n-1} \subset \dots \subset \mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ e números reais a_1, \dots, a_n tais que $\lim_{k \in \mathbb{N}_i} x_{ki} = a_i$, para $i = 1, \dots, n$.

Logo, considerando $a = (a_1, \dots, a_n)$, pelo Teorema A .4.6, $\lim_{k \in \mathbb{N}_n} x_k = a$, provando o Teorema. \square

Finalizando a parte de sequências, falemos um pouco sobre sequências de Cauchy:

Definição A .4.14. Uma sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de pontos do \mathbb{R}^n é uma sequência de Cauchy se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k, r > k_0$ implica $|x_k - x_r| < \varepsilon$.

Toda sequência de Cauchy é limitada, pois, dado $\varepsilon > 0$, exceto para um número finito de pontos da sequência, a partir de um k_0 , todos os outros pontos estarão contidos em uma bola de raio ε .

Uma condição equivalente a dada na definição para uma sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ser de Cauchy é que $\lim_{k, r \rightarrow \infty} |x_k - x_r| = 0$.

Agora, vejamos um resultado interessante, conhecido como Critério de Cauchy.

Teorema A .4.15 (Critério de Cauchy). *Uma seqüência em \mathbb{R}^n é convergente se, e somente se, é uma seqüência de Cauchy.*

Demonstração. Seja $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma seqüência tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$, $a \in \mathbb{R}^n$.

De fato, tomando $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$, a subsequência $(x_r)_{r \in \mathbb{N}'}$ também converge para a .

Por outro lado,

$$0 \leq |x_k - x_r| = |x_k - a + a - x_r| \leq |x_k - a| + |x_r - a|.$$

Aplicando o limite,

$$\lim_{k,r \rightarrow \infty} 0 \leq \lim_{k,r \rightarrow \infty} |x_k - x_r| \leq \lim_{k,r \rightarrow \infty} |x_k - a| + |x_r - a| \Rightarrow 0 \leq \lim_{k,r \rightarrow \infty} |x_k - x_r| \leq 0.$$

Pelo Teorema do Confronto, segue que $\lim_{k,r \rightarrow \infty} |x_k - x_r| = 0$, ou seja, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy.

Reciprocamente, se $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy, como $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada, existe $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ tal que $\lim_{r \in \mathbb{N}'} x_r = a$, para algum $a \in \mathbb{R}^n$.

Por outro lado, como $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy, segue que

$$\lim_{k,r \rightarrow \infty} |x_k - x_r| = 0.$$

Sendo assim, como

$$|x_k - a| \leq |x_k - x_r| + |x_r - a|,$$

segue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - a| = 0.$$

Portanto, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é convergente. □

A .5 CONJUNTOS FECHADOS

Com intuito de definir conjuntos fechados, primeiramente, precisamos de algumas definições:

Definição A .5.1. Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}^n$.

- (a) Dizemos que a é aderente ao conjunto X se, e somente se, existe uma seqüência de pontos $x_k \in X$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$;
- (b) O conjunto dos pontos aderentes a X , denotado por \overline{X} é chamado de fecho de X .

Com isso, temos a definição de conjuntos fechados

Definição A .5.2. Seja $F \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto. Dizemos que F é fechado em \mathbb{R}^n quando $F = \bar{F}$, ou seja, todo ponto aderente a F pertence a F .

Dado um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, todo ponto $x \in X$ é aderente a X , basta tomar a sequência constante (x, x, x, \dots) . Logo, para todo $X \subset \mathbb{R}^n$, têm-se $X \subset \bar{X}$.

Proposição A .5.3. *Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}^n$. Se $X \subset Y$, então $\bar{X} \subset \bar{Y}$.*

Demonstração. Com efeito, tome $a \in \bar{X}$ qualquer. Pela definição de ponto aderente, existe uma sequência de pontos $x_k \in X$, $k \in \mathbb{N}$, tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$.

Entretanto, como $X \subset Y$, segue que todo elemento de X é um elemento de Y , em particular, os elementos da sequência de pontos $x_k \in X$, $k \in \mathbb{N}$.

Portanto, como $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ e $x_k \in Y$, para todo $k \in \mathbb{N}$, a é aderente a Y . Consequentemente, $\bar{X} \subset \bar{Y}$. □

Vejam alguns resultados sobre conjuntos fechados.

Teorema A .5.4. (a) *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto. Dado $a \in \mathbb{R}^n$, dizemos que a é aderente ao conjunto X se, e somente se, toda bola de centro a possui algum ponto de X ;*

(b) *Um conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado se, e somente se, $\mathbb{R}^n \setminus F$ é aberto (Equivalentemente, $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto se, e somente se, $\mathbb{R}^n \setminus A$ é fechado);*

(c) *O fecho de qualquer conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto fechado.*

Demonstração. (a) Suponha que a é aderente a X . Então, existe uma sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de pontos de X tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$. Ou seja, para todo $\varepsilon > 0$, conseguimos obter $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0$ implica $|x_k - a| < \varepsilon$, ou ainda, $x_k \in B(a; \varepsilon)$.

Portanto, para toda bola de centro a , é possível obter $k \in \mathbb{N}$ tal que x_k é elemento da bola.

Reciprocamente, suponha que toda bola de centro a possui um elemento de X .

Logo, ao tomarmos a bola $B(a; \frac{1}{k_1})$, sabemos que existe $x_{k_1} \in B(a; \frac{1}{k_1})$. Se tomarmos $k_2 \gg k_1$, teremos $\frac{1}{k_2} \ll \frac{1}{k_1}$, sabemos que existe x_k tal que $x_k \in B(a; \frac{1}{k_2})$. Fazendo uma sequência desses pontos, dado $\varepsilon > 0$, existirá $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0$ implica $|x_k - a| < \varepsilon$. Portanto, a é aderente a X .

(b) Seja $F \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado. Suponha $x \in \mathbb{R}^n \setminus F$. Como, por definição, $F = \bar{F}$, dizer que $x \in \mathbb{R}^n \setminus F$ equivale a dizer que x não é aderente a F , o que é equivalente a afirmar, pelo item (a), que existe $r > 0$ tal que $B(x; r) \subset \mathbb{R}^n \setminus F$.

Portanto, F é fechado se, e somente se, $\mathbb{R}^n \setminus F$ é aberto.

(c) Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto e \bar{X} seu fecho. De fato, se $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{X}$, x não é aderente a X , o que significa, pelo item (a), que existe $r > 0$ tal que a bola $B = B(x; r)$ não possui pontos de X .

Sendo assim, $X \subset \mathbb{R}^n \setminus B$ e, pela Proposição A.5.3, $\bar{X} \subset \overline{\mathbb{R}^n \setminus B}$.

Entretanto, como B é aberto, pelo item (b), segue que $\mathbb{R}^n \setminus B$ é um conjunto fechado. Logo, $\bar{X} \subset \mathbb{R}^n \setminus B$, ou seja, $B \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{X}$.

Portanto $\mathbb{R}^n \setminus \bar{X}$ é um conjunto aberto, implicando, pelo item (b), \bar{X} fechado. \square

Vejamos agora um exemplo.

Exemplo A.5.5. O fecho de uma bola aberta é uma bola fechada. De fato, dada uma bola aberta qualquer $B(a, r)$, sabemos que $B(a, r) \subset B[a, r]$. Além disso, pela observação anterior, sabemos que $B(a, r) \subset \overline{B(a, r)}$. Mostremos que $\overline{B(a, r)} = B[a, r]$.

De fato, dado um ponto de fora da fronteira de $B(a, r)$, isto é, um ponto x tal que $|x - a| > r$, sabemos que não existe pontos de $B(a, r)$ nas proximidades de x . Assim, pelo Teorema A.5.4, (a), x não pode ser ponto aderente.

Feito isso, dado um ponto x pertencente à fronteira de $B(a, r)$, temos $|x - a| = r$, logo, $x \in B[a, r]$. Mostremos que x é aderente à $B(a, r)$.

De fato, tomando $x_k = (1 - \frac{1}{k})x$, $k \in \mathbb{N}$, teremos $x_k \in B(a, r)$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$. Portanto, x é aderente à bola $B(a, r)$.

Consequentemente, $\overline{B(a, r)} \subset B[a, r]$.

Reciprocamente, dado qualquer ponto $x \in \overline{B(a, r)}$, $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$, com $|x_k - a| < r$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto, $|x - a| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - a| \leq r$.

Portanto, $B[a, r] \subset \overline{B(a, r)}$. Consequentemente, $B[a, r] = \overline{B(a, r)}$.

Observação A.5.6. Como $B[a, r]$ é o fecho de $B(a, r)$, segue imediatamente do Teorema A.5.4, (c) que $B[a, r]$ é um conjunto fechado.

Definição A.5.7. Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto e $a \in \mathbb{R}^n$ um ponto qualquer. A distância do ponto a ao conjunto X é o número definido por

$$d(a, X) = \inf\{|x - a|; x \in X\}.$$

Teorema A.5.8. Seja $F \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado. Dado $a \in \mathbb{R}^n$ um ponto qualquer, existe $x_0 \in F$ tal que $|x_0 - a| \leq |x - a|$, para todo $x \in F$.

Demonstração. Seja $a \in \mathbb{R}^n$ um ponto qualquer.

Se $a \in X$, a propriedade é trivialmente satisfeita, visto que $|a - a| = 0 \leq |x - a|$, para todo $x \in X$, com $x \neq a$.

Se $a \notin X$, tomemos a distância entre o ponto a e o conjunto X ,

$$d(a, X) = \inf\{|x - a|; x \in X\}.$$

Pela definição de ínfimo, sabemos que existe $x_k \in X$, tal que

$$d(a; X) \leq |x_k - a| \leq d(a; x) - \frac{1}{k}.$$

Assim sendo, quando $k \rightarrow \infty$, pelo Teorema do Confronto, temos $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - a| = d(a; x)$.

Como a sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é claramente limitada, pelo Teorema A.4.13, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ admite uma subsequência convergente. Sendo assim, desconsiderando os x_k que não estão nessa subsequência, existe $x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ tal que $d(a; X) = |x_0 - a|$. Como F é fechado, $x_0 \in F$. \square

Feito isso, vejamos mais algumas definições relevantes acerca de conjuntos fechados.

Definição A.5.9. Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos tais que $X \subset Y$. Dizemos que o conjunto X é denso em Y se, e somente se, $\bar{X} = Y$.

Do Exemplo A.5.5, $B(a, r)$ é densa em $B[a, r]$.

Definição A.5.10. Sejam $a \in \mathbb{R}^n$ e $X \subset \mathbb{R}^n$. O ponto a é chamado de ponto de acumulação em X quando toda bola aberta de centro a possui algum ponto de X diferente de a .

Caso o ponto a não for um ponto de acumulação, ele será chamado de ponto isolado de X . Se X contiver apenas pontos isolados, ele será chamado de conjunto discreto.

Teorema A.5.11. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto e $a \in \mathbb{R}^n$ um ponto qualquer. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) a é um ponto de acumulação de X ;
- (ii) a é limite de uma sequência de pontos $x_k \in X \setminus \{a\}$;
- (iii) Toda bola de centro a possui uma infinidade de pontos de X .

Demonstração. Primeiramente, provemos a equivalência dos itens (i) e (ii).

De fato, supondo primeiramente que a é um ponto de acumulação de X , sabemos que para toda bola aberta B centrada em a existe pelo menos um ponto $x \in X$ diferente de a que pertence a B .

Assim, tomando a bola aberta de centro a e raio $\frac{1}{k}$, $B\left(a, \frac{1}{k}\right)$, para $k \in \mathbb{N}$, existe pelo menos um ponto, que denotaremos por x_k tal que $x_k \in B\left(a, \frac{1}{k}\right)$. Em outras palavras,

$$|x_k - a| < \frac{1}{k}.$$

Logo, ao tomarmos $\varepsilon > 0$ qualquer, pela propriedade arquimediana, sabemos que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, ou equivalentemente, $\frac{1}{k_0} < \varepsilon$. Como a é um ponto de acumulação de X , teremos que existe $x_{k_0} \in X$ tal que $|x_{k_0} - a| < \frac{1}{x_{k_0}} < \varepsilon$.

Além disso, ao tomarmos $k > k_0$, teremos $\frac{1}{k} < \varepsilon$ e, como a é um ponto de acumulação,

existe $x_k \in X$ tal que $|x_k - a| < \frac{1}{k} < \varepsilon$.

Portanto, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$, com $x_k \in X \setminus \{a\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Reciprocamente, se a é limite de uma sequência de pontos $x_k \in X \setminus \{a\}$, pela definição de limite, para todo $\varepsilon > 0$ é possível obter $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0$ implica $|x_k - a| < \varepsilon$.

Sendo assim, como vale para qualquer $\varepsilon > 0$, segue que a é ponto de acumulação.

Agora, provemos a equivalência das afirmações (i) e (iii).

Para isso, suponha que a é um ponto de acumulação de X e que, para alguma bola aberta B , de centro a e raio r existe um número finito de pontos de X . De fato, se existe um número finito de pontos, digamos $x_1, \dots, x_n \in B \cap X$, tomemos o ponto mais próximo de a , que será denotado por x .

De fato, $0 < |x - a| \leq |x_i - a|$ para todos $i = 1, \dots, n$. Assim, tomando $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > \frac{1}{|x - a|}$, $\frac{1}{k} < |x - a|$. Logo, ao tomarmos a bola $B\left(a, \frac{1}{k}\right)$ vemos que não existe $x \in X \setminus \{a\}$ tal que $x \in B\left(a, \frac{1}{k}\right)$, contrariando a hipótese de a ser ponto de acumulação.

Reciprocamente, se toda bola de centro a possui infinitos pontos de X , é direto que a é um ponto de acumulação de X . \square

Teorema A .5.12. *Todo subconjunto infinito limitado possui pelo menos um ponto de acumulação.*

Demonstração. De fato, tomando $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto infinito limitado, tomando qualquer sequência de pontos $x_k \in X$, vemos que $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada.

Assim, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass (A .4.13), existe uma subsequência convergente em X . Assim, sendo a o limite dessa subsequência de pontos $x'_k \in X$, $k' \in \mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$, para todo $\varepsilon > 0$, conseguimos obter $k_0 \in \mathbb{N}'$ tal que $k > k_0$, com $k \in \mathbb{N}'$ implica $|x_k - a| < \varepsilon$, ou seja, a é um ponto de acumulação de X . \square

Teorema A .5.13. (a) *Se $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^n$ são conjuntos fechados, então $F_1 \cup F_2$ também será fechado;*

(b) *Se $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família arbitrária de conjuntos fechados, então $\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ é fechado.*

Demonstração. (a) Sejam F_1 e F_2 conjuntos fechados. Pelo Teorema A.5.4, (b), $A_1 = \mathbb{R}^n \setminus F_1$ e $A_2 = \mathbb{R}^n \setminus F_2$ são abertos e, pelo Teorema A.3.4, (a), $A_1 \cap A_2$ é aberto. Por outro lado, $A_1 \cap A_2 = (\mathbb{R}^n \setminus F_1) \cap (\mathbb{R}^n \setminus F_2) = \mathbb{R}^n \setminus (F_1 \cup F_2)$. Logo, $\mathbb{R}^n \setminus (F_1 \cup F_2)$ é aberto e, novamente pelo Teorema A.5.4 (b), $F_1 \cup F_2$ é fechado.

(b) Seja $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família de conjuntos fechados. De fato, para cada $\lambda \in L$, temos, pelo Teorema A.5.4, (b), $A_\lambda = \mathbb{R}^n \setminus F_\lambda$ aberto e, pelo Teorema A.3.4, (b), $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é aberto.

Por outro lado, sendo $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$, temos $A = \mathbb{R}^n \setminus F$. Portanto, $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ é fechado. \square

Definição A .5.14. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto e $F \subset X$ um subconjunto de X . Dizemos que F é fechado em X se, e somente se, F possui todos os seus pontos aderentes que pertencem a X , em outras palavras, $F = \bar{F} \cap X$.

Equivalentemente, podemos dizer que F é fechado em X se $F = G \cap X$ para algum conjunto $G \subset \mathbb{R}^n$ fechado. Com efeito, se G é fechado, $\bar{F} \subset G$, logo, $F = F \cap X \subset \bar{F} \cap X \subset G \cap X = F$, em que $F = \bar{F} \cap X$, resultando em F fechado em X .

Um resultado interessante é o seguinte:

Teorema A .5.15. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto. $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado em X se, e somente se $X \setminus F$ é aberto em X . (Reciprocamente, $A \subset X$ é aberto em X se, e somente se $X \setminus A$ é fechado em X).*

Demonstração. De fato, sendo F um conjunto tal que $F = G \cap X$ para algum $G \subset \mathbb{R}^n$, $F = G \cap X$ se, e somente se $X \setminus F = (\mathbb{R}^n \setminus G) \cap X$, em que, pelo Teorema A.5.4, (b), G é fechado se, e somente se $(\mathbb{R}^n \setminus G)$ é aberto. Assim, F é fechado em X se, e somente se $X \setminus F$ é aberto em X . \square

A .6 CONJUNTOS COMPACTOS

Definição A .6.1. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto. X é dito compacto se, e somente se, é limitado e fechado.*

Um primeiro exemplo que podemos ver de conjunto compacto é o seguinte:

Exemplo A .6.2. *Toda bola fechada $B[a, r]$ é um conjunto compacto. Com efeito, conforme visto anteriormente, $B[a, r]$ é um conjunto fechado. Ademais, $B[a, r]$ é limitado, pois está inteiramente contida em $B(a, r + 1)$. Portanto, é compacto.*

Outro exemplo de conjunto compacto são as esferas de \mathbb{R}^n , $S[a, r]$.

Finalizando, vemos facilmente que \mathbb{Z}^n é um conjunto fechado que não é limitado, portanto, não é compacto.

Com isso, vamos ao primeiro Teorema que trata desse conjuntos.

Teorema A .6.3. *Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto. K é compacto se, e somente se, toda sequência de pontos $x_k \in K$ possui uma subsequência que converge para um ponto de K .*

Demonstração. Suponha $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto. Por definição, K é fechado e limitado. Isso significa que existe $M > 0$ tal que, para todo $x \in K$, $|x| < M$. Além disso, todos os pontos aderentes de K pertencem a K .

Assim, tomando uma sequência arbitrária $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos $x_n \in K$ para todo $n \in \mathbb{N}$, como K é limitado, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada.

Logo, pelo Teorema A .4.13, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite pelo menos uma subsequência convergente.

Assim, como, em particular, K é fechado, toda sequência em K admite pelo menos uma subsequência que converge para um ponto de K .

Reciprocamente, suponha K um conjunto tal que toda sequência de pontos $x_n \in K$ possui

uma subsequência que converge para um ponto de K .

Com isso, suponha que K não é limitado. Então, podemos tomar uma sequência de pontos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, teríamos $|x_n| > n$.

Entretanto, tal sequência não admite subsequência convergente, contrariando a hipótese.

Portanto, K é limitado.

Por outro lado, se tomarmos uma sequência convergente qualquer de pontos de K , digamos $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, conforme vimos anteriormente, toda subsequência de $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ também é convergente e, ainda mais, tais subsequências convergem para o mesmo ponto da sequência original. Logo, sendo $(x_k)_{k \in \mathbb{N}'}$ uma subsequência de $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, temos

$$\lim_{k \in \mathbb{N}} x_k = \lim_{k \in \mathbb{N}'} x_k = a.$$

Como a é o limite de uma subsequência de K , por hipótese, $a \in K$. Assim, como tomamos uma sequência convergente arbitrária de pontos de K , concluímos que K é um conjunto fechado.

Portanto, K é um conjunto compacto. \square

Com isso, vejamos uma definição relevante que trata de distância de conjuntos.

Definição A .6.4. Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ dois conjuntos. A distância entre X e Y , denotada por $d(X, Y)$ é definida da seguinte forma:

$$d(X, Y) := \inf\{|x - y|; x \in X, y \in Y\}.$$

Notemos que, dessa definição, dados dois subconjuntos fechados de $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ quaisquer, nem sempre é possível obter $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ tais que $|x_0 - y_0| = d(X, Y)$. Um exemplo particular desse fato pode ser tomando os subconjuntos de \mathbb{R}^2 , $X = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\}$ e $Y = \{(x, 1/x) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$. De fato, X e Y são fechados e $d(X, Y) = 0$, mas não temos pontos específicos tais que $|x_0 - y_0| = d(X, Y)$.

Entretanto, temos um caso em que é possível obter tais pontos, que é o seguinte:

Teorema A .6.5. Sejam $F, K \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos tais que F é fechado e K é compacto. Então, existem $x_0 \in K$ e $y_0 \in F$ tais que $|x_0 - y_0| \leq |x - y|$ para todos $x \in K$ e $y \in F$.

Demonstração. De fato, da definição de ínfimo (A .4.11), existem sequências de pontos $x_k \in K$ e $y_k \in F$ tais que $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - y_k| = d(K, F)$. Vejamos, dado $\varepsilon = \frac{1}{k_0}$, $k_0 \in \mathbb{N}$, da definição de ínfimo, existem $x_{k_0} \in K$ e $y_{k_0} \in F$ tais que $d(K, F) + \varepsilon \geq |x_{k_0} - y_{k_0}| \geq d(k, F)$.

Assim, tomando $k > k_0$, podemos encontrar $x_k \in K$ e $y_k \in F$ tais que $|x_{k_0} - y_{k_0}| \geq |x_k - y_k| \geq d(k, F)$.

Portanto, repetindo o processo, obtemos uma sequência tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - y_k| = d(K, F)$.

Ademais, $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada, visto que $|y_k| \leq |y_k - x_k| + |x_k|$, em que $|y_k - x_k|$ é limitada por ser convergente e $|x_k|$ é limitada por conta de $x_k \in K$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e K ser um conjunto compacto.

Assim, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass (A.4.13), ambas as seqüências admitem subsequências convergentes e, dessa forma, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y_0$, com $x_0 \in K$ e $y_0 \in F$, por conta de ambos os conjuntos serem fechados.

Portanto, $|x_0 - y_0| = \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - y_k| = d(K, F) \leq |x - y|$, para todos $x \in K$ e $y \in F$. \square

Corolário A.6.6. *Suponha $K \subset U \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos tais que K é compacto e U é aberto. Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que toda bola centrada em um ponto de K e raio ε está inteiramente contida em U .*

Demonstração. De fato, considerando os conjuntos K e $F = \mathbb{R}^n \setminus U$ pelo Teorema A.5.4, (b), F é fechado. Assim, do Teorema A.6.5, existem $x_0 \in K$ e $y_0 \in F$ tais, que $|x_0 - y_0| \leq |x - y|$ para todos $x \in K$ e $y \in F$. Assim, tomando $\varepsilon = |x_0 - y_0|$, teremos que, dados $x \in K$ e $y \in F$ quaisquer, $|x - y| \geq \varepsilon$. Portanto, $B(x, \varepsilon) \subset U$ para todo $x \in K$. \square

Outro resultado interessante que veremos nos compactos que não ocorrem nos conjuntos somente fechados é o seguinte:

Teorema A.6.7 (Cantor). *Considerando a ordem da inclusão, suponha $K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_n \supset \dots$ uma seqüência decrescente de compactos não vazios de \mathbb{R}^n . Então, existe pelo menos um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $a \in K_n$ para todos $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$.*

Demonstração. De fato, por hipótese, como para todos $n \in \mathbb{N}$, K_n é um conjunto compacto, então K_n é limitado. Assim, tomando o compacto K_1 , de sua definição, deve existir $M > 0$ tal que, para todo ponto $x \in K_1$, temos $|x| < M$. Ademais, como estamos tratando de uma seqüência decrescente de conjuntos compactos, então segue que, dado um ponto arbitrário x de um compacto K_n , sendo $n \in \mathbb{N}$ qualquer, teremos $|x| < M$.

Sendo assim, tomando para cada $k \in \mathbb{N}$ um ponto pertencente à K_k , que denotaremos por x_k , a seqüência obtida, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ será limitada.

Logo, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass (A.4.13), sabemos que existe $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ tal que $(x_k)_{k \in \mathbb{N}'}$ é convergente. Suponhamos que $\lim_{k \in \mathbb{N}'} x_k = a$.

Mostremos que $a \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, dado $n \in \mathbb{N}$ qualquer, pela propriedade dos naturais, existe $r \in \mathbb{N}'$ tal que $r > n$, assim, tomando x_r conforme a construção feita, teremos $x_r \in K_n$, já que $K_r \subset K_n$. Assim, dado qualquer $r > n$, obteremos $x_r \in K_n$.

Deste processo, obteremos uma subsequência de $(x_k)_{k \in \mathbb{N}'}$, que denotaremos por $(x_r)_{r \in \mathbb{N}'}$. Assim, como $(x_k)_{k \in \mathbb{N}'}$ é convergente, teremos $\lim_{r \in \mathbb{N}'} x_r = a$.

Sendo $x_r \in K_n$ para todos $r \in \mathbb{N}'$, com $r > n$, teremos que a é um ponto aderente de K_n , e, como K_n é compacto, $a \in K_n$.

Portanto, como tomamos $n \in \mathbb{N}$ arbitrário, segue que $a \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$. \square

Observemos que, se tivéssemos uma seqüência decrescente de conjuntos fechados $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n \supset \dots$, não necessariamente a interseção desses conjuntos seria não vazia.

Um exemplo disso seria tomar, em \mathbb{R} , os conjuntos $F_k = [k, \infty)$, sendo $k \in \mathbb{N}$. De fato, teríamos $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$, entretanto, $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_k = \emptyset$.

Vejamos agora algumas definições que nos auxiliarão posteriormente.

Definição A .6.8. Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto e L um conjunto de índices. Uma cobertura do conjunto X é uma família de conjuntos $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ em que $C_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ para todo $\lambda \in L$ tais que $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$.

Uma subcobertura é uma subfamília $(C_\lambda)_{\lambda \in L'}$, em que $L' \subset L$, valendo $X \subset \bigcup_{\lambda \in L'} C_\lambda$.

Dizemos que uma cobertura de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ é aberta quando, para todo $\lambda \in L$, C_λ é aberto. Da mesma forma, dizemos que $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ é finita quando L é um conjunto finito.

Definimos agora o conceito de diâmetro de um conjunto.

Definição A .6.9. O diâmetro de um conjunto limitado $X \subset \mathbb{R}^n$, denotado por $\text{diam}(X)$ é dado por

$$\text{diam}(X) = \max\{|x - y|; x, y \in X\}.$$

Vejamos a definição de um conjunto específico.

Definição A .6.10. Um cubo de aresta α em \mathbb{R}^n é um produto cartesiano

$$C = \prod_{i=1}^n [a_i, a_i + \alpha]$$

de n intervalos de tamanho α

De fato, considerando um cubo de aresta α , $C = \prod_{i=1}^n [a_i, a_i + \alpha]$, ao tomarmos dois pontos quaisquer, $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ de C , para cada $i = 1, \dots, n$, temos que $|x_i - y_i| \leq \alpha$, por conta da definição do cubo.

Assim,

$$|x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \leq \alpha\sqrt{n},$$

ocorrendo $|x - y| = \alpha\sqrt{n}$ quando $x = a_i$ e $y = a_i + \alpha$.

Portanto, $\alpha\sqrt{n}$ é o diâmetro do cubo de aresta α em \mathbb{R}^n .

Feito isso, conseguimos demonstrar o seguinte lema.

Lema A .6.11. Seja $K \in \mathbb{R}^n$ um compacto. Então, para todo $\varepsilon > 0$ existe uma decomposição $K = K_1 \cup \cdots \cup K_n$ de compactos em que para cada $i = 1, \dots, n$, temos $\text{diam}(K_i) \leq \varepsilon$.

Demonstração. De fato, é possível decompor a reta real \mathbb{R} em intervalos de tamanho $\alpha \in \mathbb{R}$, sendo eles $[m\alpha, (m+1)\alpha]$ com $m \in \mathbb{Z}$. Para isso, basta escrever a reta da forma

$$\mathbb{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} [m\alpha, (m+1)\alpha].$$

Da mesma forma, podemos decompor o \mathbb{R}^n como uma reunião de cubos, sendo eles dados por, sendo $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ qualquer, $C_m = \prod_{i=1}^n [m_i\alpha, (m_i + 1)\alpha]$.

Logo, o \mathbb{R}^n pode ser escrito como

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}^n} C_m.$$

Ainda mais, dado um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, podemos escrevê-lo da forma $X = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}^n} (X \cap C_m)$. Se X for limitado, então ele será uma união finita de tais interseções, ou seja,

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_k,$$

em que $X_i = X \cap C_{m_i}$, $i = 1, \dots, k$.

Pelo o que vimos anteriormente sobre o diâmetro dos cubos no \mathbb{R}^n , para todo $i = 1, \dots, k$, $\text{diam}(X_i) \leq \alpha\sqrt{n}$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, basta tomar $\alpha = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ que teremos $\text{diam}(X_i) \leq \varepsilon$.

Além disso, se X for compacto, então cada X_i também será, pois, pelo Teorema A.5.13, (b), a interseção finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado, provando o que queríamos. \square

Com isso, conseguimos enunciar e demonstrar o seguinte Teorema:

Teorema A .6.12 (Borel-Lebesgue). *Toda cobertura aberta de um compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ admite uma subcobertura finita.*

Demonstração. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um compacto e suponha $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \supset K$ uma subcobertura aberta de K que não admite uma subcobertura finita.

De fato, pelo Lema A .6.11, dado $\varepsilon = 1$, existe uma decomposição finita de compactos com diâmetro menor ou igual a 1.

Dessa forma, como K não admite uma subcobertura finita, pelo menos um desses compactos, digamos $K_1 \subset K$, não admite subcobertura finita.

Repetindo o processo em K_1 , entretanto tomando $\varepsilon = 1/2$, conseguimos obter $K_2 \subset K_1$, com diâmetro menor ou igual a $1/2$, tal que não admite subcobertura finita.

Continuando da mesma maneira e considerando a ordem da inclusão, conseguimos obter uma sequência decrescente de conjuntos compactos que não admitem subcobertura finita, $K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_n \supset \dots$, tal que para cada $i \in \mathbb{N}$, temos $\text{diam}(K_i) \leq 1/i$.

Para todo $i \in \mathbb{N}$, teremos $K_i \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \supset K$.

Por outro lado, pelo Teorema A .6.7, existe $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$.

Assim, devemos ter que $a \in A_\lambda$ para algum $\lambda \in L$.

Entretanto, por hipótese, A_λ é um conjunto aberto, logo, deve existir $k \in \mathbb{N}$ tal que $B(a, 1/k) \subset A_\lambda$. Tomando o conjunto K_k , vemos que $\text{diam}(K_k) \leq 1/k$, implicando $K_k \subset$

$B(a, 1/k) \subset A_\lambda$, contrariando a hipótese de que a cobertura $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \supset K$ não admite subcobertura finita.

Portanto, toda cobertura aberta de um compacto admite uma subcobertura finita. \square

A.7 APLICAÇÕES CONTÍNUAS

Primeiramente, vejamos o que é uma aplicação:

Definição A.7.1. Uma aplicação $f : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma relação que associa a cada $x \in X$ sua imagem $f(x) := (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in \mathbb{R}^n$, em que $f_1, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ são funções coordenadas de f .

Casualmente utilizaremos a notação $f(X)$ para representar o conjunto imagem de uma aplicação $f : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Definição A.7.2. Seja $f : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação. Dizemos que f é contínua em um ponto $a \in X$ quando, dado $\varepsilon > 0$ é possível obter $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in X$, se $|x - a| < \delta$, então $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Equivalentemente, podemos dizer que f é contínua no ponto $a \in X$ quando para cada bola $B(f(a), \varepsilon)$ dada, existe $B(a, \delta)$ tal que $f(B(a, \delta) \cap X) \subset B(f(a), \varepsilon)$.

Como tal definição é pontual, diremos que f é uma aplicação contínua quando for contínua em todos os pontos de seu domínio.

Com isso, podemos enunciar alguns Teoremas acerca de tais aplicações.

Teorema A.7.3. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^p$ tais que $f(X) \subset Y$. Se f e g são contínuas nos pontos a e $f(a)$, respectivamente, então $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}^p$ é contínua em a .*

Demonstração. De fato, como g é contínua em $f(a)$, pela definição, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $\lambda > 0$ tal que, para todo $y \in Y$, se $|y - f(a)| < \lambda$, então $|g(y) - g(f(a))| < \varepsilon$.

Por outro lado, como f é contínua em a , da definição de continuidade, dado $\varepsilon' > 0$, em particular, $\varepsilon' = \lambda$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in X$, se $|x - a| < \delta$, então $|f(x) - f(a)| < \lambda$.

Assim, como $|f(x) - f(a)| < \lambda$ e $f(x) \in Y$, da continuidade de g , $|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$.

Portanto, como tomamos $\varepsilon > 0$ arbitrário, segue que $g \circ f$ é contínua em a . \square

Teorema A.7.4. *Seja $f : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação.*

(a) *f é contínua em a se, e somente se, para toda sequência de pontos $x_k \in X$ com*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a, \text{ temos } \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(a);$$

(b) *f é contínua em a se, e somente se, todas as suas funções coordenadas forem contínuas em a .*

Demonstração. (a) Suponha que $f : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja contínua em a . Então, da definição de continuidade, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in X$, com $|x - a| < \delta$ vale $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Agora, tome uma sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ qualquer tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$. Então, da definição, dado $\varepsilon' > 0$, em particular, $\varepsilon' = \delta$ conseguimos obter $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$ com $k > k_0$ vale $|x_k - a| < \delta$.

Assim, da continuidade de f , obtemos que, se $k > k_0$, então $|f(x_k) - f(a)| < \varepsilon$.

Portanto, como ε foi tomado arbitrariamente, segue que a sequência $(f(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ é convergente e $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(a)$.

Reciprocamente, suponha que para toda sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de X , $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ implica $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(a)$.

Suponha que f não seja contínua em a . Então, deve existir $\lambda > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, $|x - a| < \delta$ implica $|f(x) - f(a)| \geq \lambda$.

Entretanto, dado $x_{k_0} \in X$ com $|x_{k_0} - a| < \delta$, teríamos que $k > k_0$ implicaria $|x_k - a| < \delta$. Consequentemente, $|f(x_k) - f(a)| \geq \lambda$, contrariando o fato de $(f(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ ser convergente.

Portanto, f é contínua em a .

(b) Suponha f contínua em $a \in X$. De fato, pelo item (a), dada uma sequência de pontos de X , $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, que converge para a , então a sequência $(f(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ de pontos de \mathbb{R}^n converge para $f(a)$.

Ademais, pelo Teorema A.4.6,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{ki} = a_i;$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(a) \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f_i(x_k) = f_i(a),$$

para todo $i = 1, \dots, n$.

Logo, como $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ implica $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(a)$, das equivalências acima, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{ki} = a_i$ implica $\lim_{k \rightarrow \infty} f_i(x_k) = f_i(a)$ e, pelo item (a), f_i é contínua em a para todo $i = 1, \dots, n$.

Reciprocamente, se $f_1, \dots, f_n : X \subset \mathbb{R}^m$ são contínuas em a , então, pelo item anterior,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{ki} = a_i \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f_i(x_k) = f_i(a),$$

para todo $i = 1, \dots, n$.

De acordo com Teorema A.4.6, temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{ki} = a_i \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_i(x_k) = f_i(a) \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(a).$$

Portanto, f é contínua. □

Vejamos algumas propriedades de aplicações contínuas:

Teorema A .7.5. *Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\alpha : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ aplicações contínuas no ponto $a \in X$. Então, também são contínuas nesse ponto as aplicações*

$$(a) f + g : X \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{ definida por } f + g(x) := f(x) + g(x);$$

$$(b) \langle f, g \rangle : X \rightarrow \mathbb{R}, \text{ definida por } \langle f, g \rangle(x) := \langle f(x), g(x) \rangle;$$

$$(c) |f| : X \rightarrow \mathbb{R}, \text{ definida por } |f|(x) := |f(x)|;$$

$$(d) (\alpha f) : X \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{ definida por } (\alpha f)x := \alpha(x)f(x).$$

Demonstração. Decorre imediatamente do Teorema A.7.4, item (a) com o Corolário A .4.7. \square

Teorema A .7.6. *A imagem de um conjunto compacto por uma aplicação contínua é compacto.*

Demonstração. Suponha $f : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua e $K \subset X$ um conjunto compacto. Considere o conjunto imagem $f(K)$.

De fato, dada uma sequência arbitrária $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $f(K)$, sabemos que, para todo $k \in \mathbb{N}$, deve existir $x_k \in K$ tal que $f(x_k) = y_k$. Assim, considerando a sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, como K é compacto, pelo Teorema A .6.3, deve existir $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ tal que $(x_k)_{k \in \mathbb{N}'}$ converge para um ponto de K .

Por outro lado, pelo Teorema A.7.4, (a), como f é contínua, se $\lim_{k \in \mathbb{N}'} x_k = a$, então $\lim_{k \in \mathbb{N}'} f(x_k) = f(a)$.

Portanto, $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ admite pelo menos uma subsequência convergente e, como tomamos uma sequência arbitrária de $f(K)$, segue que toda a sequência de $f(K)$ admite uma subsequência convergente.

Portanto, pelo Teorema A .6.3, $f(K)$ é compacto. \square

Corolário A .7.7 (Weierstrass). *Seja $K \subset \mathbb{R}^m$ um compacto. Se $f : K \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então existem $x_0, x_1 \in K$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in K$.*

Demonstração. De fato, pelo Teorema anterior, sabemos que $f(K)$ é um conjunto compacto. Assim, tomando $y_0 = \inf(K)$ e $y_1 = \sup(K)$, pela definição de supremo e ínfimo (A .4.10), dado $k_0 \in \mathbb{N}$, conseguimos obter $y_{k_0} \in f(K)$ tal que

$$y_0 < y_{k_0} < y_0 + \frac{1}{k_0}.$$

Tomando $k > k_0$, com $k \in \mathbb{N}$, novamente, conseguimos obter $y_k \in f(K)$ tal que

$$y_0 < y_k < y_0 + \frac{1}{k}.$$

Assim, $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y_0$, ou seja, y_0 é aderente a K , conseqüentemente, $y_0 \in f(K)$.

Com argumentos análogos, obtemos $y_1 \in f(K)$. Portanto, existem $x_0, x_2 \in X$ tais que $f(x_0) < f(x) < f(x_1)$ para todo $x \in K$. \square

Teorema A .7.8. *Seja $f : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação. Nessas condições, f é contínua se, e somente se, a imagem inversa de todo conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^n$, $f^{-1}(A)$, é um subconjunto aberto em X .*

Demonstração. De fato, supondo f contínua, dado o aberto $A \subset \mathbb{R}^n$, se $A \cap f(X) = \emptyset$, necessariamente $f^{-1}(A) = \emptyset$. Por vacuidade, \emptyset é um subconjunto aberto em X .

Supondo $A \cap f(X)$ não vazio, da definição de continuidade, sendo $a \in X$, dado $\varepsilon > 0$, é possível obter $\delta > 0$ tal que se $x \in B(a, \delta) \cap X$, então $f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$.

Por outro lado, sendo A um conjunto aberto, dado $x_0 \in f^{-1}(A)$ qualquer, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(x_0), \varepsilon) \subset A$. Da continuidade de f , segue que existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in B(x_0, \delta) \cap X$, que denotaremos por $B_{x_0} \cap X$, então, $f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$.

Em outras palavras, $f(B_{x_0} \cap X) \subset B(f(x_0), \varepsilon) \subset A$, implicando $B_{x_0} \cap X \subset f^{-1}(A)$, sendo que, como tomamos x_0 arbitrário, vale para todo $x \in f^{-1}(A)$.

Assim, considerando o conjunto

$$U = \bigcup_{x \in f^{-1}(A)} (B_x \cap X),$$

$U \subset f^{-1}(A)$ e, como dado $x \in f^{-1}(A)$, podemos obter $B_x \cap X$, com $x \in B_x \cap X$, segue que $f^{-1}(A) \subset U$. Portanto, $f^{-1}(A) = U$.

Como U é a reunião de abertos em X , segue que U é aberto em X .

Reciprocamente, se a imagem inversa pela aplicação $f : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ de todo conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto aberto em X , tomando $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto qualquer, $f^{-1}(A) = C \cap X$, com $C \subset \mathbb{R}^n$ aberto.

Logo, tomando $A = B(f(x), \varepsilon)$, com $x \in X$ qualquer e $\varepsilon > 0$, $f^{-1}(A) = C \cap X$, com C aberto.

Como $x \in C$ e C é aberto, podemos obter $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset C$. Assim, $f(B(x, \delta) \cap X) \subset B(f(x), \varepsilon)$, implicando que f é contínua em $x \in X$. Como tomamos x arbitrário, segue que f é contínua. \square

Teorema A .7.9. *Seja $f : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação. Nessas condições, f é contínua se, e somente se, a imagem inversa de todo conjunto fechado $F \subset \mathbb{R}^n$, $f^{-1}(F)$, é um subconjunto fechado em X .*

Demonstração. De fato, sendo f contínua, tomando $F \subset \mathbb{R}^n$ fechado, pelo Teorema A.5.4, (b), $A = \mathbb{R}^n \setminus F$ é aberto. Assim, pelo Teorema A .7.8, $f^{-1}(A)$ é aberto e, conseqüentemente, pelo Teorema A .5, $f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(A)$ é fechado em X .

Reciprocamente, se a imagem inversa de todo conjunto fechado $F \subset \mathbb{R}^n$, $f^{-1}(F)$, é um subconjunto fechado em X , pelos mesmos Teoremas, $A = \mathbb{R}^n \setminus F$ é aberto e $f^{-1}(A) = X \setminus f^{-1}(F)$ é aberto em X , valendo para todo conjunto A obtido dessa forma.

Portanto, pelo Teorema A .7.8, f é contínua. \square

Feito isso, podemos generalizar ver versões mais gerais desses Teoremas através dos seguintes Corolários:

Corolário A .7.10. *Seja $X \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto (fechado). Uma aplicação $f : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua se, e somente se, a imagem inversa de todo conjunto aberto (fechado) de \mathbb{R}^n é um conjunto aberto (fechado) de \mathbb{R}^m .*

Demonstração. De fato, dado um conjunto aberto (fechado) em \mathbb{R}^n , pelo Teorema A .7.9, sendo f contínua, a imagem inversa desse conjunto é aberto (fechado) em X . Entretanto, como X é aberto (fechado), segue que a imagem inversa do conjunto aberto (fechado) é aberto (fechado).

A recíproca é imediata do Teorema A .7.9. □

Corolário A .7.11. *Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ aplicações contínuas. Então, o conjunto $A = \{x \in X; f(x) < g(x)\}$ é aberto em X e os conjuntos $F_1 = \{x \in X; f(x) = g(x)\}$ e $F_2 = \{x \in X; f(x) \leq g(x)\}$ são fechados em X .*

Demonstração. De fato, considerando o conjunto A ,

$$A = \{x \in X; f(x) < g(x)\} = \{x \in X; f(x) - g(x) < 0\}.$$

Tomando $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) := f(x) - g(x)$, como f e g são contínuas, necessariamente h será contínua. Assim, podemos reescrever A da forma

$$A = \{x \in X; h(x) < 0\} = \{x \in X; h(x) \in (-\infty, 0)\}.$$

Assim, $A = h^{-1}((-\infty, 0))$. Como $(-\infty, 0)$ é aberto e h é contínua, pelo Teorema A .7.8, segue que A é um conjunto aberto em X .

Os demais casos são análogos, porém tomando por base o Teorema A .7.9. □

Teorema A .7.12. *Sejam $K \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto compacto, $\varphi : K \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua e $f : L = \varphi(K) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma aplicação. Nessas condições, f é contínua se, e somente se, $f \circ \varphi : K \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ é contínua.*

Demonstração. De fato, se f é contínua, pelo Teorema A .7.3, segue que $f \circ \varphi$ é contínua.

Reciprocamente, se $f \circ \varphi$ é contínua, dado um conjunto fechado $F \subset \mathbb{R}^p$, a imagem inversa $(f \circ \varphi)^{-1}(F) = (\varphi^{-1} \circ f^{-1})(F)$ é um subconjunto fechado em K , logo, compacto em \mathbb{R}^m . Assim, aplicando φ , pelo Teorema A.7.6, obtemos que $[\varphi \circ (\varphi^{-1} \circ f^{-1})](F) = f^{-1}(F)$ é um conjunto compacto, logo fechado em \mathbb{R}^n .

Portanto, pelo Corolário A .7.10, f é contínua. □

A .8 HOMEOMORFISMOS

Definição A .8.1. Um homeomorfismo de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ em um conjunto $Y \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ injetora e sobrejetora tal que $f^{-1} : Y \rightarrow X$ é também contínua.

Quando existe um homeomorfismo entre os conjuntos X e Y , dizemos que X é homeomorfo a Y .

Um primeiro exemplo que podemos tomar de um homeomorfismo é, dada uma aplicação qualquer $f : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua, f é homeomorfa ao seu gráfico $\text{graf}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n; y = f(x)\}$. De fato, sendo $\varphi : X \rightarrow \text{graf}(f)$ dada por $\varphi(x) = (x, f(x))$, φ será injetora e sobrejetora. Além disso, da continuidade de f , segue que φ é contínua. Ademais, a inversa de φ é a projeção $\varphi^{-1}((x, f(x))) = x$. Logo, é contínua.

Vejamos outros exemplos de homeomorfismos.

Exemplo A .8.2. Seja $f : [0, 2\pi) \rightarrow S^1$ definida por $f(t) = (\cos(t), \text{sen}(t))$. Então, f é contínua, porém não é um homeomorfismo.

De fato, f é bijetora, pois, dados $t_1, t_2 \in (0, 2\pi]$, com $t_1 \neq t_2$, $f(t_1) = (\cos(t_1), \text{sen}(t_1)) \neq (\cos(t_2), \text{sen}(t_2)) = f(t_2)$, implicando f injetora. Ademais, dados $(x, y) \in S^1$, $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$. Considerando θ o ângulo entre (x, y) e o semi-eixo positivo Ox , $\cos(\theta) = x$ e $\text{sen}(\theta) = y$, com $0 \leq \theta < 2\pi$. Logo, existe θ tal que $f(\theta) = (x, y)$. Portanto, f é bijetora.

Ademais, a continuidade de f se dá por conta das funções sen e \cos serem contínuas.

Entretanto, considerando a inversa $f^{-1} : S^1 \rightarrow [0, 2\pi)$, f^{-1} leva o compacto S^1 no conjunto $[0, 2\pi)$ que não é compacto. Em outras palavras, tomando o ponto $(1, 0)$, $(1, 0) = f(0)$. Além disso, considerando a sequência dada por $z_k = (\cos(t_k), \text{sen}(t_k))$, em que, para cada $k \in \mathbb{N}$, temos $t_k = (1 - 1/k)2\pi$, teremos $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = (1, 0)$.

Entretanto, $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{-1}(z_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = 2\pi$. Assim, não teremos $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{-1}(z_k) = f^{-1}(1, 0) = 0$, implicando f^{-1} descontínua em $(1, 0)$.

Exemplo A .8.3. A bola aberta $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ é homeomorfa ao conjunto \mathbb{R}^n . De fato, basta considerar as aplicações $f : \mathbb{R}^n \rightarrow B(0, 1)$ e $f^{-1} : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$ dadas por

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}, f^{-1}(y) = \frac{y}{1 - |y|}.$$

As aplicações f e f^{-1} são contínuas e, dados $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in B(0, 1)$ quaisquer,

$$(f \circ f^{-1})(y) = \frac{\frac{y}{1 - |y|}}{1 + \left| \frac{y}{1 - |y|} \right|} = \frac{\frac{y}{1 - |y|}}{\frac{1}{1 - |y|}} = y$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = \frac{\frac{x}{1 + |x|}}{1 - \left| \frac{x}{1 + |x|} \right|} = \frac{\frac{x}{1 + |x|}}{\frac{1}{1 + |x|}} = x.$$

Portanto, f^{-1} é a inversa de f , comprovando que $B(0, 1)$ é homeomorfa a \mathbb{R}^n .

A .9 CONJUNTOS CONEXOS

Uma cisão de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma decomposição $X = A \cup B$ em que $A \cap \bar{B} = \emptyset$ e $B \cap \bar{A} = \emptyset$.

Dado $X \subset \mathbb{R}^n$, é evidente que $X = X \cup \emptyset$ é uma cisão de X . Essa decomposição é denominada cisão trivial.

Proposição A .9.1. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. $X = A \cup B$ é uma cisão de X se, e somente se, A e B forem abertos e fechados em X .*

Demonstração. Se $X = A \cup B$ é uma cisão, $A \cap \bar{B} = \emptyset$ e $B \cap \bar{A} = \emptyset$. Ao tomarmos os pontos de X aderentes a A , sabemos que tais pontos não pertencem a B . Caso tal ponto fosse aderente a B , teríamos $A \cap \bar{B} \neq \emptyset$, que é um absurdo. Supondo que exista um ponto de X que não pertence a A , mas é aderente a A , isto é, existe $a \in X \setminus A$ tal que $a \in \bar{A}$, teríamos que $a \in B$, contradizendo a hipótese de que $B \cap \bar{A} = \emptyset$.

Portanto, $A = \bar{A} = \bar{A} \cap X$. Analogamente, $B = \bar{B} \cap X$. Portanto, A e B são fechados em X .

Mostremos que $A \cap B$ é vazio. De fato, se existe $x \in X$ tal que $x \in A \cap B$, teríamos uma contradição, pois x seria aderente tanto a A quanto a B .

Sendo assim, $X = A \cup B$ e $A \cap B = \emptyset$. Consequentemente, $A = X \setminus B$ e $B = X \setminus A$. Como visto anteriormente, A e B são abertos em X .

Reciprocamente, se $A \subset X$ é aberto e fechado em X , definindo $B = X \setminus A$, todo ponto aderente de A não pertence a B , por conta de A ser fechado. Além disso, pelo mesmo fato, todo ponto aderente de B não pertence a A .

Portanto, $X = A \cup B$ é uma cisão de X . □

Com isso, é imediato que se $X \subset \mathbb{R}^n$ é aberto (fechado), então $A \cup B$ é uma união disjunta de abertos (fechados). Ademais, se X é compacto, então A e B são compactos.

Definição A .9.2 (Conjunto Conexo). Diz-se que um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é conexo se, e somente se, admite apenas a cisão trivial.

Um primeiro Teorema que podemos enunciar, no caso particular da reta real, é o seguinte

Teorema A .9.3. *Todo intervalo da reta real é um conjunto conexo*

Demonstração. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo da reta. Suponha que existem $A, B \subset \mathbb{R}$ tais que $I = A \cup B$ é uma cisão não trivial de I .

Sejam $a \in A$ e $b \in B$, com $a < b$. De fato, $[a, b] \subset I$.

Tome $c \in [a, b]$ ponto médio do intervalo $[a, b]$.

Suponha sem perda de generalidade que $c \in A$, chamando $c = a_1$ e $b = b_1$, temos o intervalo $I_1 = [a_1, b_1]$, em que $c_1 = b_1 - a_1 = \frac{b - a}{2}$.

Repetindo o processo, obtemos o ponto médio de $I_1 = [a_1, b_1]$, c' . Supondo novamente sem perda de generalidade que $c' \in A$ e chamando $c' = a_2$ e $b_1 = b_2$ teremos o intervalo $I_2 = [a_2, b_2]$ tal que $c_2 = b_2 - a_2 = \frac{b - a}{2^2}$.

Com isso, realizando o mesmo processo n vezes, teremos uma sequência de intervalos

de termo geral $l_n = [a_n, b_n]$ tais que $c_n = b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, com $a_n \in A$ e $b_n \in B$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como existe $d \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq d \leq b_n$, como $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$, segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = d$, que é uma contradição.

Portanto, todo intervalo da reta real é um conjunto conexo. \square

Outro resultado importante é que os intervalos da reta real são os únicos subconjuntos conexos de \mathbb{R} . De fato, supondo um conjunto $X \subset \mathbb{R}$, conexo e que não é um intervalo, sabemos que existe $c \notin X$ tal que, dados $a, b \in X$, com $a < b$, $a < c < b$.

Logo, podemos dividir X como sendo $X = A \cup B$, em que $A = \{a \in X : a < c\}$ e $B = \{b \in X : c < b\}$. Assim, $A \cup B$ é uma cisão não trivial de X , que é uma contradição. Portanto, X é desconexo.

Feito isso, temos o seguinte Teorema:

Teorema A .9.4. (a) *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua e $f(X)$ a imagem de f . Se X é conexo, então $f(X)$ é conexo.*

(b) *Seja $\{X_\lambda \subset \mathbb{R}^n : \lambda \in L\}$ uma família de conjuntos conexos tal que, para todo $\lambda \in L$, $a \in X_\lambda$. Então, a reunião $X = \bigcup_{\lambda \in L} X_\lambda$ é um conjunto conexo.*

(c) *$X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ são conexos se, e somente se, $X \times Y \subset \mathbb{R}^{m+n}$ é conexo.*

(d) *Seja $X \in \mathbb{R}^n$. Se X é conexo, então \bar{X} é conexo.*

Demonstração. (a) Seja X um conjunto conexo. Considere sua imagem $f(X)$. Suponha que $f(X) = A \cup B$ seja uma cisão do conjunto imagem de f .

Pela Proposição A .9.1, sabemos que A e B são abertos e fechados em $f(X)$. Sendo assim, como f é contínua, ao analisarmos $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$, ambos são abertos e fechados em X , logo, $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ é uma cisão de X .

Entretanto, X é conexo. Então, $f^{-1}(A)$ ou $f^{-1}(B)$ é o conjunto vazio.

Supondo $f^{-1}(A) = \emptyset$, como $ff^{-1}(A) = A$ e $ff^{-1}(B) = B$, teremos $A = \emptyset$.

Portanto, $f(X)$ é um conjunto conexo.

(b) Seja $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $a \in X_\lambda$ para todo $\lambda \in L$. Então, $a \in X$.

Suponha que $X = A \cup B$ seja uma cisão de X . Logo, $a \in A$ ou $a \in B$.

Tomemos, sem perda de generalidade, que $a \in A$.

Como $X = A \cup B = \bigcup_{\lambda \in L} X_\lambda$, segue que $X_\lambda = (A \cap X_\lambda) \cup (B \cap X_\lambda)$ é uma cisão de X_λ .

Como X_λ é conexo para todo $\lambda \in L$, segue que $(A \cap X_\lambda)$ ou $(B \cap X_\lambda)$ é vazio. Como $a \in A$ e $a \in X_\lambda$, para todo λ , $a \in (A \cap X_\lambda)$.

Assim sendo, $B \cap X_\lambda = \emptyset$, para todo $\lambda \in L$, implicando $B = \emptyset$.

Portanto, X é conexo.

(c) Sejam $X \in \mathbb{R}^m$ e $Y \in \mathbb{R}^n$ dois conjuntos conexos. Considere o conjunto $X \times Y \subset \mathbb{R}^{m+n}$. Seja $c = (a, b)$ pertencente a $X \times Y$. De fato, para todo $z = (x, y)$ pertencente a $X \times Y$, os conjuntos $X \times \{b\}$ e $\{x\} \times Y$ são conexos, visto que as aplicações $f : X \rightarrow X \times Y$ dada por $f(x) = (x, b)$ e $g : Y \rightarrow X \times Y$ dada por $f(x) = (x, y)$ são homeomorfismos de X e Y , respectivamente, pois admitem inversas dadas pelas projeções $f^{-1}((x, b)) = x$ e $g^{-1}((x, y)) = y$ que, como são projeções, necessariamente são contínuas.

Agora, pelo item anterior, como $X \times \{b\}$ e $\{x\} \times Y$ são conexos, a união $A_x = X \times \{b\} \cup \{x\} \times Y$ também será. Ademais, temos $A_x \subseteq X \times Y$, para todo $x \in X$.

Por outro lado, para todo $(x, y) \in X \times Y$, se $y = b$, $(x, b) \in X \times \{b\} \subset A_x$ e $(x, b) \in \{x\} \times Y \subset A_x$, se $y \neq b$, $(x, y) \in \{x\} \times Y \subset A_x$ para algum $x \in X$. Sendo assim, $X \times Y \subseteq \bigcup_{x \in X} A_x$.

Portanto, $X \times Y = \bigcup_{x \in X} A_x$ é conexo.

Reciprocamente, se $X \times Y$ é conexo, como as projeções $\psi : X \times Y \rightarrow X$ e $\varphi : X \times Y \rightarrow Y$ são contínuas, pelo item (a), segue que X e Y são conexos.

(d) Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto conexo. De fato, $X \subset \bar{X}$. Suponha $\bar{X} = A \cup B$ uma cisão de \bar{X} . Então, X pode ser escrito da seguinte maneira $X = (A \cap X) \cup (B \cap X)$.

Observemos que $(\overline{A \cap X}) \cap (B \cap X) \subset \bar{A} \cap B$. Como A e B formam uma cisão de \bar{X} , temos, da definição, $\bar{A} \cap B = \emptyset$, implicando em $(\overline{A \cap X}) \cap (B \cap X) = \emptyset$.

Analogamente, chegamos que $(A \cap X) \cap (\overline{B \cap X}) = \emptyset$.

Portanto, $X = (A \cap X) \cup (B \cap X)$ é uma cisão de X .

Entretanto, como X é conexo, teremos $(A \cap X) = \emptyset$ ou $(B \cap X) = \emptyset$. Tomemos, sem perda de generalidade, $(A \cap X) = \emptyset$. De fato, como $\bar{X} = A \cup B$ uma cisão de \bar{X} , sabemos pela proposição A.9.1 que A é aberto em \bar{X} . Logo, existe $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $A = U \cap \bar{X}$. Sendo assim, $(A \cap X) = (U \cap \bar{X}) \cap X = U \cap X = \emptyset$. Logo, $U \cap X = A \cap X = \emptyset$. Como U é aberto, segue que X não possui pontos aderentes em U , pois, caso contrário, se um ponto de U fosse aderente a X , toda bola aberta centrada nesse ponto deveria ter um ponto de X . Por outro lado, como U é aberto, é possível traçar uma bola aberta centrada em qualquer ponto de U inteiramente contida em U . Logo, se $u \in U$ fosse aderente a X , fazendo a bola aberta em u inteiramente contida em U , haveria tanto elementos de X como elementos de U . Logo, a interseção seria não vazia, que é uma contradição.

Sendo assim, $A = U \cap \bar{X} = \emptyset$. Portanto, $A = \emptyset$. Como tomamos uma cisão arbitrária de \bar{X} , segue que \bar{X} é conexo.

□

Com isso, segue imediatamente os seguintes resultados:

Corolário A.9.5. Sejam $X_i, i = 1, \dots, k$ conjuntos conexos. Então, o produto cartesiano $\prod_{i=1}^k X_i$ é

um conjunto conexo.

Corolário A .9.6. Se $X \subset \mathbb{R}^n$ é conexo, então o conjunto imagem da aplicação contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é um intervalo.

Esse Corolário pode ser re-enunciado da seguinte forma, conhecido como Teorema do valor intermediário:

Teorema A .9.7 (do Valor Intermediário). Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto conexo e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação contínua. Se $a, b \in X$ tais que $f(a) < f(b)$, então para todo $d \in \mathbb{R}$ com $f(a) < d < f(b)$, existe $c \in X$ tal que $f(c) = d$.

Feito isso, vejamos outros resultados.

Teorema A .9.8 (da Alfândega). Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto qualquer e $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto conexo. Se $a \in X$ e $b \notin X$ pertencem a C , então existe $c \in C$ tal que $c \in fr.X$.

Demonstração. Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto qualquer, $C \subset \mathbb{R}^n$ um conexo e $a \in X$ e $b \notin X$ pontos de C .

Considere uma aplicação contínua $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) := d(x, X) - d(x, \mathbb{R}^n \setminus X)$.

É fácil verificar que $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Sendo assim, pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(c) = 0$. Ou seja, $d(c, X) = d(c, \mathbb{R}^n \setminus X)$. Como c deve pertencer a um desses conjuntos, segue que $d(c, X) = d(c, X \setminus \mathbb{R}^n) = 0$.

Portanto $c \in fr.X$. □

Feito isso, definiremos a seguir uma condição suficiente para determinar a conexidade de conjuntos, que é a conexidade por caminhos.

Para isso, primeiramente, definiremos o que é um caminho:

Definição A .9.9. Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto qualquer e $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Um caminho em X é uma aplicação contínua $f : I \rightarrow X$.

Um exemplo de caminho é o *caminho retilíneo*, definido da seguinte forma: sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$. o caminho $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por $f(t) = (1 - t)x + ty$ é denominado caminho retilíneo de x e y . Denotamos tal caminho por $[x, y]$.

Se a e b podem ser ligados por um caminho $f : I \rightarrow X$, então existe um caminho $\varphi : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\varphi(0) = a$ e $\varphi(1) = b$. De fato, sendo $a = f(\alpha)$ e $b = f(\beta)$, basta definir φ como sendo $\varphi(t) = f((1 - t)\alpha + t\beta)$

Sejam $f, g : [0, 1] \rightarrow X$ caminhos tais que $f(1) = g(0)$. Definimos o caminho justaposto $h = f \vee g : [0, 1] \rightarrow X$ dado por $h(t) = f(2t)$ se $t \in [0, 1/2]$ e $h(t) = g(2t - 1)$, se $t \in [1/2, 1]$.

Definamos agora conjuntos conexos por caminhos:

Definição A .9.10. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é conexo por caminhos se, e somente se, dados quaisquer dois pontos $a, b \in X$, eles podem ser ligados por um caminho em X .

Proposição A .9.11. *Todo conjunto conexo por caminhos é conexo.*

Demonstração. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto conexo por caminhos. Tome $a \in X$. De fato, para todo $x \in X$, existe um caminho $f_x : I \rightarrow X$ ligando a em x . Seja C_x a imagem desse caminho.

De acordo com o Teorema A .9.3, I é conexo. Como f é contínua, pelo Teorema A.9.4, item (a), segue que C_x é conexo. Além disso, considerando a união de todos os caminhos de X , $\bigcup_{x \in X} C_x$, novamente pelo Teorema A.9.4, item (a), ela é conexa.

Como $X = \bigcup_{x \in X} C_x$, então X é conexo. □

A recíproca dessa proposição nem sempre vale, entretanto, temos um caso particular em que vale, que é dos conjuntos abertos. Primeiramente, vejamos a seguinte definição.

Definição A .9.12. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto. Diz-se que $f : [0, 1] \rightarrow X$ é um caminho poligonal em X quando f é uma justaposição de uma quantidade finita de caminhos retilíneos.

Com isso, podemos enunciar e provar o seguinte Teorema

Teorema A .9.13. *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto qualquer. A é conexo se, e só se, A é conexo por caminhos.*

Demonstração. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e conexo. Suponha $a \in A$ um ponto e $C \subset A$ o conjunto de todos os pontos que podem ser ligados ao ponto a por um caminho inteiramente contido em A .

De fato, como A é aberto, para todo $a \in A$, é possível tomar uma bola aberta B inteiramente contida em A .

Seja $c \in C$. Tome $B(c; r) \subset A$ uma bola aberta. De fato, como $B(c; r)$ é um conjunto convexo, dados quaisquer dois pontos dessa bola, é possível traçar um segmento de reta inteiramente contido na bola.

Sendo assim, como c é um elemento de C , qualquer ponto que tomarmos de $B(c; r)$ pode ser ligado por um caminho poligonal ao ponto a . Logo, $B(c; r) \subset C$.

Como tomamos c um ponto arbitrário de C e provamos que é possível definir uma bola aberta inteiramente contida em C , segue que C é aberto.

Por outro lado, tome o conjunto $D = A \setminus C$, vejamos que ele também é um conjunto aberto.

De fato, dado $d \in D$ e considerando uma bola aberta $B(d; r') \subset A$, como $d \in D$, não é possível criar um caminho poligonal inteiramente contido em A entre a e d . Por outro lado, como $B(d; r')$ é um conjunto convexo, para todo $d \in D$, se $z \in B(d; r')$ pudesse ser ligado a a por um caminho inteiramente contido em A , teríamos que a poderia ser ligado a d por um caminho justaposto de $[d, z]$, o que implicaria $d \in C$, que é uma contradição.

Portanto, toda bola aberta centrada em pontos de D está inteiramente contida em D .

Como C é aberto, $C \cap A = C$ é aberto em A . Por conta disso, como $D = A \setminus C$ é fechado em A .

Por outro lado, como D é aberto, segue que $D \cap A = D$ é aberto em A . Consequentemente, $C = A \setminus D$ é fechado em A .

Logo, pela proposição A.9.1 $A = C \cup D$ é uma cisão de A . Como A é conexo, e $a \in C$, $D = \emptyset$.

Portanto, $A = C \cup D = C$ é conexo por caminhos.

A recíproca segue diretamente da Proposição A.9.11. □

Corolário A.9.14. *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Se A é aberto e conexo, então é possível ligar dois pontos quaisquer de A por um caminho poligonal inteiramente contido em A .*

Definição A.9.15. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Dado $x \in X$, a componente conexa do ponto x no conjunto X é a reunião de todos os subconjuntos conexos de X que contêm o ponto x .*

A componente conexa é denotada por C_x .

Exemplo A.9.16. *Seja $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. A componente conexa do ponto 1 é o intervalo $(0, \infty)$. Por outro lado, a componente conexa do ponto -1 é $(-\infty, 0)$.*

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto e C_x uma componente conexa do ponto $x \in X$ no conjunto X . De fato, pelo Teorema A.9.4, item (b), C_x é conexo, visto que é uma reunião de conexos.

Mostremos que C_x é o maior conjunto conexo de X que contém o ponto x .

Suponha $C \subset X$ um conexo qualquer tal que $x \in C$. Então, pela definição de C_x , $C \subset C_x$. Ademais, se C for tal que $x \notin C$, mas contém um ponto de C_x , teremos que $C \cup C_x$ contém x , daí, $C \cup C_x \subseteq C_x$. Consequentemente, $C \subset C_x$.

Podemos fazer também uma proposição sobre a relação de duas componentes conexas:

Proposição A.9.17. *Sejam $x, y \in X$ com $x \neq y$. Se C_x e C_y são as componentes conexas dos pontos x e y no conjunto X , então ou $C_x = C_y$, ou C_x e C_y são disjuntos.*

Demonstração. De fato, caso $C_x \cap C_y = \emptyset$ eles serão disjuntos, entretanto, se $C_x \cap C_y \neq \emptyset$, $C_x \cup C_y \subset C_y$, implicando $C_x \subset C_y$.

Por outro lado, teremos $C_y \cup C_x \subset C_x$, implicando $C_y \subset C_x$.

Portanto, $C_x = C_y$. □

Proposição A.9.18. *A relação de pertinência em uma componente conexa é uma relação de equivalência.*

Demonstração. Para provar esse fato, devemos mostrar que tal relação é reflexiva, simétrica, e transitiva.

Denotaremos a relação de x e y por xRY ("x se relaciona com y").

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto qualquer e C_x uma componente conexa do ponto $x \in X$ no conjunto X .

É evidente que, yRy , pois $y \in C_x$

Se yRz , então $y \in C_x$ e $z \in C_x$, que equivale afirmar que $z \in C_x$ e $y \in C_x$. Portanto, zRy .

Finalmente, se yRz e zRw , $y \in C_x$, $z \in C_x$ e $w \in C_x$. Portanto, yRw . □

As classes de equivalência são as componentes conexas dos pontos distintos de X .

Vejamos agora que C_x é fechado em X . De fato, $C_x \subset \bar{C}_x \cap X \subset \bar{C}_x$. Pelo Teorema A.9.4, item (d), \bar{C}_x é conexo. Em particular, $X \cap \bar{C}_x$ é um subconjunto conexo de X . Notemos que $C_x \subset X \cap \bar{C}_x$.

Por outro lado, como $X \cap \bar{C}_x$ é um subconjunto conexo de X , pela definição de C_x , $X \cap \bar{C}_x \subset C_x$.

Portanto, $C_x = X \cap \bar{C}_x$, ou seja, C_x é fechado em X .

Vejamos um resultado sobre componentes conexas:

Teorema A .9.19. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$ dois conjuntos. Se $f : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo então f preserva o número de componentes conexas.*

Demonstração. Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ e $f : X \rightarrow Y$ um homeomorfismo.

Como f é um homeomorfismo, sabemos que f é bijetiva e contínua. Além disso, sua inversa f^{-1} é também contínua.

Por outro lado, sabemos que dadas duas componentes conexas quaisquer de X , ou elas são disjuntas, ou coincidem. Além disso, X pode ser expresso como a reunião finita de suas componentes conexas.

Sendo assim, suponha que o conjunto X possua n componentes conexas disjuntas. Iremos denotá-las por C_{x_i} , $i = 1, \dots, n$.

Então,

$$X = \bigcup_{i=1}^n C_{x_i}$$

Como a restrição de uma função contínua é contínua,

$$f|_{C_{x_i}} : C_{x_i} \rightarrow f(C_{x_i}), i = 1, \dots, n$$

é contínua.

Ademais, $f(C_{x_i})$ é um conjunto conexo.

Por outro lado, considerando a união das imagens $\bigcup_{i=1}^n f(C_{x_i})$, pela sobrejetividade de f ,

$$Y = \bigcup_{i=1}^n f(C_{x_i}).$$

Além disso, como $C_{x_i} \cap C_{x_j} = \emptyset$, para todo $i, j = 1, \dots, n$, com $i \neq j$, segue da injetividade de f que $f(C_{x_i}) \cap f(C_{x_j}) = \emptyset$, para todo $i, j = 1, \dots, n$, com $i \neq j$.

Portanto, Y possui n componentes conexas. □

Com isso, podemos definir uma superfície topológica:

Definição A .9.20 (Superfície Topológica). Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que X é uma superfície topológica se dado $a \in X$, existe um aberto em X contendo o ponto a que é homeomorfo a uma bola aberta de \mathbb{R}^{n-1} .

Exemplo A .9.21. O cone $C = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0; a, b, c \in \mathbb{R}^+ \right\}$ de \mathbb{R}^3 não é uma superfície topológica.

De fato, Suponha que C é uma superfície topológica. Então, por definição, para todo $q \in C$, existe um aberto em C contendo o ponto q que é homeomorfo a uma bola aberta de \mathbb{R}^2 .

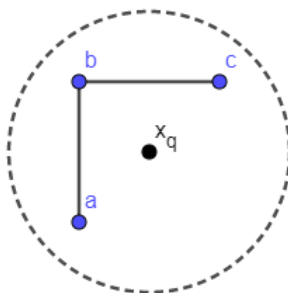
Tomemos, em particular, o ponto $q = (0, 0, 0)$. Pela definição, existe $A \subset \mathbb{R}^3$ aberto, tal que $U = A \cap C$ é homeomorfo à uma bola aberta $B = B(x_q; \delta) \subset \mathbb{R}^2$, com $x_q \in \mathbb{R}^2$ e $\delta > 0$. Em outras palavras, existe uma bijeção contínua $f : U \rightarrow B$ tal que $\varphi = f^{-1} : B \rightarrow U$ é contínua.

Como f e φ são bijetoras, ambas são injetoras e sobrejetoras, o que significa que para cada $y \in B$, existe um único $x \in U$ associado a y por f e φ . Suponha, sem perda de generalidade, que $f(q) = x_q$ e $\varphi(x_q) = q$.

Considere os conjuntos $U \setminus \{q\}$ e $B \setminus \{x_q\}$, como φ é contínua, segue que a restrição $\varphi|_{B \setminus \{x_q\}}$, que vai de $B \setminus \{x_q\}$ para $U \setminus \{q\}$ também é contínua.

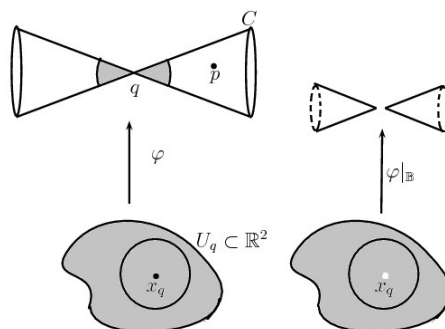
O conjunto $B \setminus \{x_q\}$ é conexo, pois dados quaisquer dois pontos, é possível traçar um caminho poligonal inteiramente contido em $B \setminus \{x_q\}$, como mostra a figura A .3.

Figura A .3 – Representação de um caminho poligonal no conjunto $B \setminus \{x_q\}$



Fonte: Elaborada pelo autor

Por outro lado, sendo $D = \{(x, y, z) \in U \setminus \{q\} : z \in \mathbb{R}^+\}$ e $E = \{(x, y, z) \in U \setminus \{q\} : z \in \mathbb{R}^-\}$, $D \cap E = E \cap D = \emptyset$, pois $q \notin D$ e $q \notin E$. Logo, $U \setminus \{q\} = D \cup E$ é uma cisão não trivial de $U \setminus \{q\}$, implicando que $U \setminus \{q\}$ é desconexo e contrariando a hipótese de que a aplicação φ é contínua, como mostra a figura A .4

Figura A .4 – Cone de \mathbb{R}^3 

Fonte: Elaborada pelo autor

Portanto, C não é uma superfície topológica.

Definição A .9.22 (Variedade Topológica de dimensão n). Seja $X \subset \mathbb{R}^m$. Dizemos que X é uma variedade topológica de dimensão n se dado $a \in X$, existe um aberto em X contendo o ponto a que é homeomorfo a uma bola aberta de \mathbb{R}^n .

Exemplo A .9.23. A união do eixo x contido em \mathbb{R}^2 com o eixo y contido em \mathbb{R}^2 não é uma variedade topológica de dimensão 1.

Demonstração. Sejam $Ox \subset \mathbb{R}^2$ e $Oy \subset \mathbb{R}^2$ os eixos x , e y , respectivamente.

Suponha que o conjunto $X = Ox \cup Oy$ seja uma variedade topológica de dimensão 1. Então, dado $a \in X$, em particular, $a = (0, 0)$ existe um conjunto $A \subset X$ aberto em X , com $a \in A$, tal que A é homeomorfo a uma bola aberta de \mathbb{R} , $B(c; r) = B \subset \mathbb{R}$.

De fato, pelo homeomorfismo, existe $f : A \rightarrow B$ bijetora e contínua tal que f^{-1} é contínua.

Como f é contínua, então

$$f|_{A \setminus \{a\}} : A \setminus \{a\} \rightarrow B$$

é uma aplicação contínua.

Como f é bijetora, ao retirarmos um ponto de seu domínio, a imagem restrita terá exatamente um ponto a menos. Suponha sem perda de generalidade que a imagem de $f|_{A \setminus \{a\}}$ seja $B \setminus \{c\}$.

Analisemos os conjuntos $A \setminus \{a\}$ e $B \setminus \{c\}$.

De fato, o conjunto $A \setminus \{a\}$ pode ter, no máximo, quatro componentes conexas, pois,

sendo C , D , E e F da forma

$$C = \{(x, 0) : x > 0\}$$

$$D = \{(0, y) : y > 0\}$$

$$E = \{(x, 0) : x < 0\}$$

$$F = \{(0, y) : y < 0\}.$$

Caso $A \cap C$, $A \cap D$, $A \cap E$ e $A \cap F$ forem não vazios, teremos que

$$A \setminus \{a\} = (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (A \cap E) \cup (A \cap F).$$

Além disso, é evidente que $A \cap C$, $A \cap D$, $A \cap E$ e $A \cap F$ são conexos e disjuntos, pois são todos conexos por caminhos (basta tomar os caminhos retilíneos dados dois pontos quaisquer de um desses conjuntos) e cada um deles está inteiramente contido em um semi-eixo distinto dos demais.

Entretanto, como $B \subset \mathbb{R}$ é uma bola aberta em \mathbb{R} , B é um intervalo. Logo, $B(c; r) \setminus \{c\}$ será a união de dois intervalos distintos: $(c - r, c) \cup (c, c + r)$. Sendo assim, $B(c; r) \setminus \{c\}$ possui apenas duas componentes conexas, contrariando, pelo Exercício A.6.11, o fato de uma aplicação contínua preservar o número de componentes conexas.

Sendo assim, $f|_{X \setminus \{a\}}$ não é uma aplicação contínua, implicando f não contínua.

Portanto, $O_x \cup O_y$ não é uma variedade topológica de dimensão 1. \square

A.10 LIMITES

Inicialmente, definamos o conceito de limite:

Definição A.10.1 (Limite). Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^m$ um ponto de acumulação em X e $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dizemos que $b \in \mathbb{R}^n$ é o limite de $f(x)$ quando x tende a a se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$, $|x - a| < \delta$ implica $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Denotamos tal limite por:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

De fato, não é necessário que a pertença a X , pois é apenas exigido que a seja um ponto de acumulação de X .

Sendo assim, podemos definir a continuidade de uma função em um determinado ponto:

Definição A.10.2. Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $a \in X$ e $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$. Diz-se que f é contínua no ponto $a \in X$ se, e somente se,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Com isso, podemos enunciar um primeiro Teorema, que diz respeito à permanência de sinal:

Teorema A .10.3 (Permanência de sinal). *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^m$ um ponto de acumulação em X , $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b > 0$. Então, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ implica $f(x) > 0$.*

Demonstração. Suponha que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b > 0$. Então, pela definição de limite, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ tal que $|x - a| < \delta$ implica $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Tome, em particular, $\varepsilon = b > 0$. Logo, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ tal que $|x - a| < \delta$ implica

$$|f(x) - b| < b \Rightarrow -b < f(x) - b < b \Rightarrow 0 < f(x) < 2b.$$

Portanto, $f(x) > 0$, comprovando o Teorema. □

Quando trabalhamos com uma função de um intervalo real $I \subset \mathbb{R}$ em \mathbb{R}^n , faz sentido analisarmos os limites laterais, que veremos na seguinte definição:

Definição A .10.4. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $a \in I$ um ponto e $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

(a) Se a não é o extremo superior do intervalo, dizemos que b é o *limite à direita* de $f(x)$ quando x tende a a se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in I$, tal que $a < x < a + \delta$ implica $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Notação: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$

(b) Se a não é o extremo inferior do intervalo, dizemos que b é o *limite à esquerda* de $f(x)$ quando x tende a a se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in I$, tal que $a - \delta < x < a$ implica $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Notação: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$.

Sendo assim, veremos um resultado que trata das funções coordenadas:

Teorema A .10.5. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^m$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação e $f_1, f_2, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ as funções coordenadas de f . Então, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b = (b_1, \dots, b_n)$ se, e somente se, $\lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = b_i$, $i = 1, \dots, n$.*

Demonstração. Suponha que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b = (b_1, \dots, b_n).$$

Por definição, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in X$, com $|x - a| < \delta$ implica $|f(x) - b| < \varepsilon$. Ou seja,

$$\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2} < \delta \Rightarrow \sqrt{(f_1(x) - b_1)^2 + \dots + (f_n(x) - b_n)^2} < \varepsilon$$

Para todo $i = 1, \dots, n$, temos

$$|x_i - a_i| = \sqrt{(x_i - a_i)^2} \leq \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2} < \delta.$$

Implicando,

$$|f_i(x) - b_i| < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n.$$

Reciprocamente, se $\lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = b_i, i = 1, \dots, n$, dado $\varepsilon_i > 0$, existe $\delta_i > 0$ tal que, para todo $x \in X$ que satisfaz $|x_i - a_i| < \delta_i$, implica $|f_i(x) - b_i| < \varepsilon_i, i = 1, \dots, n$.

Vejamos,

$$|x - a| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2} \leq x_1 - a_1 + \dots + x_n - a_n = \sum_{i=1}^n |x_i - a_i| < \sum_{i=1}^n \delta_i,$$

o que implica,

$$|f(x) - b| < \sum_{i=1}^n \varepsilon_i.$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. □

Teorema A .10.6. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ e $a \in \mathbb{R}^m$ um ponto de acumulação em X . Então, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ se, e somente se, para toda seqüência de pontos $x_k \in X \setminus \{a\}$, com $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$, $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = b$.*

Demonstração. Suponha que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ considere as seqüências de pontos $x_k \in X \setminus \{a\}$ tais que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$.

Pela definição de limite, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ que satisfaz $|x - a| < \delta$ implica $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Por outro lado, a definição de limite de seqüência nos diz que dado $\bar{\varepsilon} > 0$, em particular, tomando $\bar{\varepsilon} = \delta$ do limite anterior, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}, k > k_0$ implica $|x_k - a| < \delta$.

Sendo assim, das duas definições, dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta > 0$ e $k_0 \in \mathbb{N}$ tais que $k > k_0$ implica $|x_k - a| < \delta$, resultando em $|f(x_k) - b| < \varepsilon$.

Portanto, $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = b$.

Reciprocamente, suponha que para toda seqüência de pontos $x_k \in X \setminus \{a\}$, com $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$, $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = b$.

Suponha que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq b$ ou que o limite não exista. Então, dado $\varepsilon > 0$, teríamos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|x_k - a| < 1/k$ implica $|f(x_k) - b| > \varepsilon$.

De fato, a seqüência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge para a , entretanto, a seqüência $(f(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ não converge, contrariando a hipótese.

Portanto, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. □

Teorema A .10.7. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^m$ um ponto de acumulação em X , $f : X \rightarrow Y$ tal que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ e $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^p$ contínua em b . Então, $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(b)$.*

Demonstração. De fato, como g é contínua em b , dado $\varepsilon > 0$, existe $\lambda > 0$ tal que, para todo $y \in Y$, em particular, tomando todos $f(x) \in Y$, temos

$$|f(x) - b| < \lambda \Rightarrow |g(f(x)) - g(b)| < \varepsilon.$$

Por outro lado, dado $\bar{\varepsilon} > 0$, em particular, $\bar{\varepsilon} = \lambda$, por hipótese, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$, satisfazendo $|x - a| < \delta$ implica $|f(x) - b| < \lambda$.

Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$, $|x - a| < \delta$ implica $|g(f(x)) - g(b)| < \varepsilon$.

$$\text{Portanto, } \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(b). \quad \square$$

Agora, veremos algumas propriedades de limites:

Teorema A .10.8. *Seja $X \subset \mathbb{R}^m$, a um ponto de acumulação em X , $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}$ aplicações tais que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ e $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = \beta$. Então, vale as seguintes igualdades:*

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = b + c, & \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x)f(x) = \beta \cdot b, \\ \lim_{x \rightarrow a} \langle f(x), g(x) \rangle = \langle b, c \rangle, & \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |b|. \end{array}$$

Demonstração. Por hipótese, sabemos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ e $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = \beta$.

Sendo assim, considerando as aplicações:

$$\begin{array}{ll} \varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n & \theta : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \varphi(x, y) := x + y & \theta(\beta, x) := \beta \cdot x \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \gamma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n & \lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \gamma(x, y) := \langle x, y \rangle & \lambda(x) := |x| \end{array}$$

De fato, sabemos que todas essas aplicações são contínuas, ademais, pelo Teorema A .10.7, segue que a tese trabalhada é satisfeita. \square

Um resultado interessante é o seguinte:

Proposição A .10.9. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}$. Se $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ e f é limitada na vizinhança de a , então $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x)f(x) = 0$.*

Demonstração. De fato, se f é limitada nas vizinhanças de a , existe $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta$ implica $|f(x)| < M$ para algum $M > 0$. Sendo assim, considerando todo $x \in X$ com $|x - a| < \delta$,

temos

$$\begin{aligned} 0 \leq |f(x)| \leq M &\Rightarrow 0 \leq |\alpha(x)||f(x)| \leq |\alpha(x)|M \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} 0 \leq \lim_{x \rightarrow a} |\alpha(x)||f(x)| \leq \lim_{x \rightarrow a} |\alpha(x)|M \\ &\Rightarrow 0 \leq \lim_{x \rightarrow a} |\alpha(x)||f(x)| \leq 0. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema do confronto, $\lim_{x \rightarrow a} |\alpha(x)||f(x)| = 0$.

Portanto, $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x)f(x) = 0$. □

Finalmente, temos o Teorema que fala sobre a permanência da desigualdade:

Teorema A .10.10 (Permanência da desigualdade). *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^m$ um ponto de acumulação em X e $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ tais que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in X$. Se existirem $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.*

Demonstração. Suponha que exista $b \in X$ tal que $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow b} g(x)$ existem e

$$\lim_{x \rightarrow b} g(x) < \lim_{x \rightarrow b} f(x).$$

Logo, teríamos, pelo Teorema A .10.8 $\lim_{x \rightarrow b} f(x) - \lim_{x \rightarrow b} g(x) = \lim_{x \rightarrow b} [f(x) - g(x)] > 0$, que resultaria, pelo Teorema A .10.3 $f(x) > g(x)$ para algum $x \in X$, contrariando a hipótese.

Portanto, $\lim_{x \rightarrow b} f(x) < \lim_{x \rightarrow b} g(x)$. □

APÊNDICE B – CÁLCULO DIFERENCIAL DE APLICAÇÕES EM GERAL

Nesta seção, para comodidade do leitor, traremos alguns conceitos e resultados preliminares que versam sobre cálculo diferencial de aplicações em geral. Não faremos algumas demonstrações, as quais podem ser vistas nas referências utilizadas para elaboração deste trabalho. Além disso, na última seção apresentaremos o conceito e alguns resultados sobre orientação em espaços vetoriais.

Inicialmente, recordaremos resultados envolvendo funções de várias variáveis reais chegando a um valor real. Posteriormente, exibiremos generalizações de alguns resultados para o caso de funções de várias variáveis reais à vários valores reais.

As referências utilizadas como base foram Lima (2004) e Diomara (2014).

B.1 FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS DE VÁRIAS VARIÁVEIS A UM VALOR REAL

Nesta seção, veremos algumas definições e resultados sobre diferenciabilidade de funções da forma $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, com U aberto de \mathbb{R}^n .

Primeiramente, recordemos a definição de diferenciabilidade para essas funções.

Definição B.1.1. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é diferenciável em um ponto $a \in U$ se existem as n derivadas parciais, que denotaremos por $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$ e, para todo $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ suficientemente pequeno, tem-se

$$\lim_{v \rightarrow 0} \left[\frac{f(a+v) - f(a) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) v_i \right)}{|v|} \right] = 0.$$

Dizemos que f é diferenciável se ela for diferenciável em todos os pontos de U .

Assim como para funções de uma variável a valores reais, toda função diferenciável é, em particular, contínua.

Quando uma função $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, com U aberto possuir todas as n derivadas parciais e elas forem contínuas, diremos que f é de classe C^1 . Tal condição é mais forte que a diferenciabilidade, visto que, se uma aplicação é de classe C^1 , então, em particular, tal aplicação será diferenciável.

Na sequência, veremos um importante Teorema que nos fornece diversas propriedades.

Teorema B.1.2 (Regra da Cadeia). Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abertos, $f : U \rightarrow V$ tal que, para todo $j = 1, \dots, n$, a função coordenada f_j possui derivada parcial no ponto $a \in U$

e $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $b = f(a)$. Então, a composição $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}$ possui derivadas parciais no ponto a e, para todo $i = 1, \dots, m$, temos a igualdade abaixo

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_k}(b) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a).$$

Ademais, se f e g são funções de classe C^1 , então $g \circ f$ também será.

Demonstração. De fato, como g é diferenciável no ponto $b = f(a)$, por definição, g possui derivadas parciais em b e vale o seguinte limite:

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{g(b+v) - g(b) - \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial y_k}(b) v_k \right)}{|v|} = 0.$$

Logo, como $b = f(a)$, e U é aberto, para todo $t \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeno, $a + te_i \in U$ para todo $i = 1, \dots, m$, então, $f(a + te_i) \in V$, conseqüentemente, pela diferenciabilidade de g , temos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(f(a + te_i)) - g(f(a)) - \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a)) \cdot [f_k(a + te_i) - f_k(a)] \right)}{|t|} = 0.$$

Por propriedade de limite, temos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(f(a + te_i)) - g(f(a))}{|t|} - \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a)) \cdot \frac{[f_k(a + te_i) - f_k(a)]}{|t|} \right) = 0.$$

O que implica

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(f(a + te_i)) - g(f(a))}{|t|} = \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a)) \cdot \frac{[f_k(a + te_i) - f_k(a)]}{|t|} \right).$$

Com algumas propriedades de somatório e limite, chegamos a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(f(a + te_i)) - g(f(a))}{|t|} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a)) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[f_k(a + te_i) - f_k(a)]}{|t|} \right).$$

Como as funções coordenadas de f têm derivadas parciais em a , por definição, temos, para todo $i = 1, \dots, m$

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[f_k(a + te_i) - f_k(a)]}{|t|}.$$

Logo, da definição de derivada parcial, para todo $i = 1, \dots, m$, vale

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a).$$

Ademais, $g \circ f \in C^1$ decorre do fato de que, para cada $i = 1, \dots, n$, $\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i}$ pode ser expressa em termos das derivadas parciais de g e das funções coordenadas f_k 's, que são contínuas. \square

A seguir, recordaremos algumas definições que servirão de base para alguns resultados que são obtidos do teorema acima.

Definição B .1.3 (Vetor Gradiente). Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $a \in U$ um ponto. O gradiente de f no ponto a é o vetor

$$\text{grad } f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

Definição B .1.4 (Derivada Direcional). Seja $v \in \mathbb{R}^n$ um vetor qualquer. A derivada direcional de f no ponto a , na direção de v é

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

Na sequência, vejamos alguns Corolários dos resultados acima e o Teorema do Valor Médio.

Corolário B .1.5. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $a \in U$ e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável. Dado $v = (v_1, \dots, v_n)$, se $\lambda : (-\delta, \delta) \rightarrow U$ é um caminho diferenciável tal que $\lambda(0) = a$ e $\lambda'(0) = v$, então

$$(f \circ \lambda)'(0) = \langle \text{grad } f(a), v \rangle = \frac{\partial f}{\partial v}(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) v_i.$$

Teorema B .1.6 (do Valor Médio). Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável. Se o segmento de reta $[a, a + v]$ estiver inteiramente contido em U , com $v = (v_1, \dots, v_n)$, então existe $\theta \in (0, 1)$ tal que:

$$f(a + v) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial v}(a + \theta v) = \langle \text{grad } f(a + \theta v), v \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + \theta v) \cdot v_i.$$

Corolário B .1.7. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se U for um conjunto conexo e $\text{grad } f(x)$ é o vetor nulo para todo $x \in U$, então f é uma função constante.

Munidos desses conceitos e resultados, agora iremos enunciar e provar um caso particular do Teorema da Função Implícita e apresentar um enunciado mais geral deste teorema.

Com o fim de simplificar a notação, denotaremos por $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$ o ponto $(x_1, \dots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$, em que $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}$.

Vejam este importante teorema.

Teorema B .1.8 (da Função Implícita). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um conjunto aberto,*

$f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^k , $k \geq 1$ e $(x_0, y_0) \in U$ tal que $f(x_0, y_0) = c$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Então, existem uma bola aberta $B = B(x_0, \delta) \subset \mathbb{R}^n$ e um intervalo real $J = (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$ tais que

– $B \times \bar{J} \subset U$ e, para todo $(x, y) \in B \times \bar{J}$, temos $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$;

– Para cada $x \in B$, existe um único $y = \xi(x) \in J$ tal que $f(x, \xi(x)) = c$, sendo $\xi : B \rightarrow J$ uma função de classe C^k tal que suas derivadas parciais são dadas por

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \xi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi(x))}.$$

Demonstração. De fato, por hipótese, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, então necessariamente $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) < 0$.

Além disso, como U é aberto, podemos obter $\bar{\delta} > 0$ e $\bar{\varepsilon} > 0$ tal que $B(x, \bar{\delta}) \times J = (y - \bar{\varepsilon}, y + \bar{\varepsilon}) \subset B(x, \lambda) \subset U$. Basta tomar $\bar{\varepsilon}$ e $\bar{\delta}$ tais que $\lambda > \bar{\varepsilon}$ e $\lambda > \bar{\delta}$.

Assumindo sem perda de generalidade que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) < 0$, pelo fato de f ser de classe C^k , com $k \geq 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ é uma função contínua. Logo, dado $\varepsilon > 0$, é possível obter $\delta > 0$ tal que, se

$|(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta$, então $\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right| < \varepsilon$.

Como f é decrescente na direção de y em (x_0, y_0) , podemos tomar ε tal que δ é suficientemente pequeno para que $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) < 0$ para todo $(x, y) \in B \times \bar{J} \subset U$, sendo $B = B(x_0, \delta)$ e $\bar{J} = [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$.

Assim, $f(x, y)$ é decrescente na direção de y para todo $(x, y) \in B \times \bar{J}$. Consequentemente, como $f(x_0, y_0) = c$, temos $f(x_0, y_0 + \varepsilon) < c < f(x_0, y_0 - \varepsilon)$ e, pela sua continuidade, podemos tomar δ pequeno o suficiente para tais desigualdades valerem para todo $x \in B$, ou seja, $f(x, y_0 + \varepsilon) < c < f(x, y_0 - \varepsilon)$, para todo $x \in B$.

Por outro lado, como f é de classe C^k , consequentemente, é uma função contínua e, pelo Teorema A .9.7, considerando a função $y \rightarrow f(x, y)$, para cada $x \in B$, existe um único $y = \xi(x) \in \bar{J}$ tal que $f(x, y) = c$. Pela continuidade de f , necessariamente $y \in J$.

Provemos agora a existência das derivadas parciais de ξ . De fato, tome $k = \xi(x + te_i) - \xi(x)$,

com $x + te_i \in B$. Logo, pelo que vimos anteriormente,

$$f(x + te_i, \xi(x) + k) = f(x, \xi(x)) = c.$$

Logo, como f é de classe C^k , f é diferenciável em $B \times J \subset U$, B é convexa, logo conexa por caminhos, J é um intervalo, logo conexo, então, para quaisquer dois pontos $(x, \xi(x))$ e $(\bar{x}, \xi(\bar{x}))$ de $B \times J$, temos $[(x, \xi(x)), (\bar{x}, \xi(\bar{x}))] \subset B \times J$, sendo $[(x, \xi(x)), (\bar{x}, \xi(\bar{x}))]$ o segmento de reta ligando tais pontos. Pelo Teorema B.1.6, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{aligned} 0 &= f(x + te_i, \xi(x) + k) - f(x, \xi(x)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \theta te_i, \xi(x) + \theta k) \cdot t + \frac{\partial f}{\partial y}(x + \theta te_i, \xi(x) + \theta k) \cdot k. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \theta te_i, \xi(x) + \theta k) \cdot t &= -\frac{\partial f}{\partial y}(x + \theta te_i, \xi(x) + \theta k) \cdot k \\ \Rightarrow \frac{k}{t} &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \theta te_i, \xi(x) + \theta k)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x + \theta te_i, \xi(x) + \theta k)} \\ \Rightarrow \frac{\xi(x + te_i) - \xi(x)}{t} &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \theta te_i, \xi(x) + \theta k)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x + \theta te_i, \xi(x) + \theta k)}. \end{aligned}$$

Agora, mostremos que ξ é contínua. De fato, pelo Teorema A.7.9, para ξ ser contínua, é suficiente mostrar que para todo conjunto fechado $F \subset \bar{J}$, a imagem inversa $\xi^{-1}(F)$ é fechada em B .

Com efeito, se F é fechado, como \bar{J} é um intervalo, F é compacto. Então, para todo $y \in F$, existe uma sequência $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim y_k = y$.

Tome uma sequência de pontos $x_k \in \xi^{-1}(F)$ tal que $\lim x_k = x \in B$. Mostremos que $x \in \xi^{-1}(F)$. De fato, como F é compacto, deve existir uma subsequência de pontos $x'_k \in \xi^{-1}(F)$ tal que $\lim \xi(x'_k) = a$, para algum $a \in F$. Assim, $x = \lim x'_k$. Além disso, para cada $k' \in \mathbb{N}$, existe um único $y' = \xi(x'_k) \in F$ tal que $f(x'_k, \xi(x'_k)) = c$.

Por outro lado, sendo $x \in B$, deve existir um único $y = \xi(x) \in J$ tal que $f(x, \xi(x)) = c$. Assim, da continuidade de f

$$\begin{aligned} f(x, \xi(x)) &= c \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} c \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} f(x'_k, \xi(x'_k)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x'_k, \lim_{k \rightarrow \infty} \xi(x'_k)\right) \\
&= f(x, a).
\end{aligned}$$

Logo, devido à unicidade do a , $a = \lim \xi(x'_k) = \xi(x) \in F$. Ou seja, $x \in \xi^{-1}(F)$.

Portanto, ξ é contínua. Assim,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\xi(x + te_i) - \xi(x)}{t} = \frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \xi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi(x))},$$

para todo $i = 1, \dots, n$.

Além disso, como f é de classe C^k , $\frac{\partial \xi}{\partial x_i}$ é de classe C^{k-1} , para todo $i = 1, \dots, n$, o que implica ξ de classe C^k . \square

O resultado acima independe da escolha da variável, pois poderíamos ter uma função $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k , $k \geq 1$, com $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, y_0) \neq 0$ para algum $i = 1, \dots, n+1$. Sendo assim, teríamos uma função implícita $\xi : B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow J \subset \mathbb{R}$ tal que $f(x_1, \dots, \xi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_n), \dots, x_{n+1}) = c$.

Vejamos um exemplo sobre esse teorema.

Exemplo B .1.9. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 + y^2$. Considerando o conjunto de nível $f(x, y) = c$, vemos que se $c < 0$, $f^{-1}(c) = \emptyset$.

Por outro lado, se $c = 0$, $f(x, y) = c$ será um ponto, que não irá satisfazer as hipóteses do Teorema B .1.8.

Se $c > 0$, teremos que $f^{-1}(c)$ será uma circunferência. Além disso,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

Se $f(x, y) = c$, tomando (x_0, y_0) tal que $y_0 \neq 0$ e $f(x_0, y_0) = c$, pelo Teorema B .1.8, podemos definir implicitamente uma função $\xi : B \subset \mathbb{R} \rightarrow J \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{d\xi}{dx}(x) = -\frac{2x}{2y}.$$

De fato, tomando $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, ξ dada por $\xi(x) = \sqrt{c - x^2}$ define implicitamente y em função de x em V , visto que $f^{-1}(c) \cap V$ é gráfico de ξ .

Além disso,

$$\frac{d\xi}{dx}(x) = -\frac{2x}{2\sqrt{c - x^2}} = -\frac{2x}{2y}.$$

Abaixo, enunciaremos a versão mais geral do Teorema da Função Implícita.

Teorema B .1.10 (Várias Funções Implícitas). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ um conjunto aberto, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^k , com $k \geq 1$ no conjunto U . Se dado $p = (a, b) \in U$ temos $f(p) = c$ e a matriz*

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(p) & \frac{\partial f_n}{\partial y_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(p) \end{bmatrix}_{n \times n}$$

for invertível, então existem um aberto $Z \subset U$, com $p \in Z$, um aberto $V \subset \mathbb{R}^m$ com $a \in V$ e $\xi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k tal que $\xi(a) = b$, valendo

$$(x, y) \in Z \text{ e } f(x, y) = c \Leftrightarrow x \in V \text{ e } y = \xi(x).$$

Em outras palavras, dentro das hipóteses desse Teorema, $f^{-1}(c) \cap Z$ é gráfico de ξ , ou seja, $f^{-1}(c) \cap Z = \{(x, \xi(x)); x \in V\}$.

B .2 HIPERFÍCIES

Agora, com o intuito de motivar o estudo de superfícies diferenciáveis (e posteriormente variedades diferenciáveis), veremos o caso particular das hiperfícies.

Definição B .2.1. *Seja $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um conjunto. Dizemos que M é uma hiperfície de classe C^k quando, dado $p \in M$, existe um aberto $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $p \in V$ e $V \cap M$ é gráfico de uma função $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k , com U aberto, em que para um certo $i \in \{1, \dots, n+1\}$, $x_i = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$. Assim,*

$$V \cap M = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})\}.$$

Em outras palavras, M é uma hiperfície de classe C^k se é localmente gráfico de uma função definida de \mathbb{R}^n em \mathbb{R} de classe C^k .

Quando $n = 1$, a hiperfície será uma curva e, quando $n = 2$, a hiperfície será uma superfície.

Vejamos um exemplo dessa definição:

Exemplo B .2.2. *Considere a esfera $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = \langle x, x \rangle = 1\}$.*

Mostremos que S^n é uma hiperfície de classe C^∞ .

Primeiramente, para cada $i = 1, \dots, n+1$, defina os conjuntos $V_i = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i > 0\}$ e $W_i = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i < 0\}$, com $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$. Considerando $U = B(0; 1) \subset \mathbb{R}^n$ a bola aberta

de centro 0 e raio 1 de \mathbb{R}^n , temos,

$$\begin{aligned} x \in S^n &\Leftrightarrow |x| = \langle x, x \rangle = 1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2} = 1. \end{aligned}$$

Sendo assim, se $x \in S^n \cap V_i$, então $x_i > 0$ e

$$\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{i-1}^2 + x_{i+1}^2 + \cdots + x_{n+1}^2} < \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{i-1}^2 + x_i^2 + x_{i+1}^2 + \cdots + x_{n+1}^2} = \langle x, x \rangle,$$

onde $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$.

Consequentemente, como $\langle x, x \rangle = 1$, $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < 1$ e

$$\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{i-1}^2 + x_i^2 + x_{i+1}^2 + \cdots + x_{n+1}^2} = 1 \Rightarrow x_i = \sqrt{1 - \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle}.$$

De maneira análoga, se $x \in S^n \cap W_i$, obtemos

$$\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < 1 \text{ e } x_i = -\sqrt{1 - \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle}.$$

Com isso, tomando as funções $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(u) = \sqrt{1 - \langle u, u \rangle}$ e $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(v) = -\sqrt{1 - \langle v, v \rangle}$, $S^n \cap V_i$ e $S^n \cap W_i$ são gráficos de f e g , respectivamente. Como, dado $x \in S^n$, $x \in S^n \cap V_i$ ou $x \in S^n \cap W_i$ e f e g são funções de classe C^∞ , visto que $\langle u, u \rangle < 1$ para todo $u \in U$, segue que S^n é uma hipersuperfície de classe C^∞ .

Feito isso, vejamos mais uma definição.

Definição B .2.3. Seja $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície de classe C^k . Dado $p \in M$, o espaço vetorial tangente de M no ponto p , denotado por TpM , é o conjunto de todos os vetores $v = \lambda'(0)$, dos caminhos $\lambda : (-\delta, \delta) \rightarrow M$ diferenciáveis em 0 satisfazendo $\lambda(0) = p$.

O nome desse conjunto se deve ao seguinte Teorema.

Teorema B .2.4. O conjunto TpM é subespaço vetorial de dimensão n de \mathbb{R}^{n+1} .

Por simplicidade, colocaremos em último lugar a coordenada de $V \cap M$ que é função das outras.

Demonstração. Sendo $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície de classe C^k , com $k \geq 1$, dado $p \in M$, existe um aberto $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $p \in V$ e $V \cap M$ é localmente gráfico de uma função $\xi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k , com U aberto, em que, dado $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in V \cap M$, denotando $x_0 = (x_1, \dots, x_n) \in U \subset \mathbb{R}^n$, tem-se $x = (x_0, \xi(x_0))$. Em particular, $p = (p_0, \xi(p_0))$.

Por outro lado, pela definição do espaço tangente de M no ponto p , dado $v \in TpM$, existe um caminho $\lambda : (-\delta, \delta) \rightarrow M$, diferenciável em 0 que satisfaz $\lambda(0) = p$ e $\lambda'(0) = v$.

Como o caminho λ chega em M e é diferenciável em 0, para um certo $\delta > 0$, é possível

obter λ de tal forma que $\lambda(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t), \xi(x_0(t)))$.

Assim,

$$\frac{d\lambda}{dt}(t) = \left(\frac{dx_1}{dt}(t), \dots, \frac{dx_n}{dt}(t), \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x_0(t)) \cdot \frac{dx_i}{dt}(t) \right).$$

Aplicando em $t = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt}(0) &= \left(\frac{dx_1}{dt}(0), \dots, \frac{dx_n}{dt}(0), \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x_0(0)) \cdot \frac{dx_i}{dt}(0) \right) \\ &= \left(\frac{dx_1}{dt}(0), \dots, \frac{dx_n}{dt}(0), \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi}{\partial x_i}(\rho_0) \cdot \frac{dx_i}{dt}(0) \right) \\ &= v. \end{aligned}$$

Com isso, independente do caminho λ tomado, teremos que $v = \lambda'(0)$ vai ser escrito como combinação linear dos vetores

$$v_1 = \left(1, 0, \dots, 0, \frac{\partial \xi}{\partial x_1}(\rho_0) \right), \dots, v_n = \left(0, \dots, 1, \frac{\partial \xi}{\partial x_n}(\rho_0) \right).$$

Portanto, TpM está contido no subespaço gerado por $\{v_1, \dots, v_n\}$, que é um conjunto de vetores linearmente independente.

Por outro lado, dado um vetor v pertencente ao subespaço gerado por $\{v_1, \dots, v_n\}$, v será da forma:

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i.$$

Mostremos que $v \in TpM$. De fato, sendo $v_0 = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, existe um caminho $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow M$ diferenciável em 0, dado por $\gamma(t) = (\rho_0 + tv_0, \xi(\rho_0 + tv_0))$, sendo $\delta > 0$ suficientemente pequeno para que $[\rho_0 - \delta v_0, \rho_0 + \delta v_0] \subset U$.

Temos $\gamma(0) = p$. Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt}(t) &= \left(\frac{d\gamma_1}{dt}(t), \dots, \frac{d\gamma_n}{dt}(t), \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi}{\partial x_i}(\gamma(t)) \frac{d\gamma_i}{dt}(t) \right) \\ &= \left(\frac{d}{dt}(\rho_0^1 + t\alpha_1), \dots, \frac{d}{dt}(\rho_0^n + t\alpha_n), \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi}{\partial x_i}(\rho_0 + tv_0) \frac{d}{dt}(\rho_0^i + t\alpha_i) \right) \\ &= \left(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi}{\partial x_i}(\rho_0 + tv_0) \alpha_i \right) \end{aligned}$$

que, aplicando em 0, resulta

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt}(0) &= \left(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi}{\partial x_i}(p_0) \alpha_i \right) \\ &= \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n. \end{aligned}$$

Portanto, o subespaço gerado por $\{v_1, \dots, v_n\}$ está contido em T_pM , resultando que T_pM é igual a esse subespaço, ou seja, T_pM é um subespaço vetorial de dimensão n . \square

Como T_pM é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^{n+1} , necessariamente a origem pertence a T_pM . Vejamos um exemplo sobre esse Teorema. Para isso, considere a seguinte definição.

Definição B .2.5. Seja $W \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço vetorial. O conjunto dos vetores $v \in \mathbb{R}^n$ tais que $\langle v, w \rangle = 0$, para todo $w \in W$ é denominado complemento ortogonal de W . Denotamos esse conjunto por $[W]^\perp$.

Quando temos um subespaço gerado por um único vetor p , denotaremos o complemento ortogonal ao subespaço gerado por p por $[p]^\perp$.

Com fim de utilizar algumas propriedades do complemento ortogonal, vamos enunciar e provar alguns resultados. O primeiro deles é sobre tal conjunto ser um subespaço vetorial:

Proposição B .2.6. Sejam $W \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço vetorial de dimensão $m < n$ e $[W]^\perp$ seu complemento ortogonal. Então, $[W]^\perp$ é um subespaço vetorial e $\mathbb{R}^n = W \oplus [W]^\perp$.

Demonstração. Primeiramente, observemos que $[W]^\perp$ é não vazio, já que $\langle 0, w \rangle = 0$ para todo $w \in W$.

Assim, suponha $v_1, v_2 \in [W]^\perp$. Por definição, temos

$$\langle v_1, w \rangle = 0 \text{ e } \langle v_2, w \rangle = 0.$$

Logo, dado $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\langle v_1 + \lambda v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle + \lambda \langle v_2, w \rangle = 0.$$

Portanto, $[W]^\perp$ é um subespaço vetorial.

Por outro lado, como $\dim(W) = m < n$, sabemos que W é gerado por m vetores linearmente independentes. Dessa forma, há m elementos de uma base ortonormal de \mathbb{R}^n que geram W , digamos $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_m}$, com $i = 1, \dots, n$. Em outras palavras, dado $w \in W$, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ tais que $w = \alpha_1 e_{i_1} + \dots + \alpha_m e_{i_m}$.

Entretanto, tomando um vetor qualquer da base ortonormal e_k tal que $e_k \neq e_{i_j}$, para todo

$j = 1, \dots, m$, para todo $w \in W$,

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{w} \rangle &= \langle \mathbf{e}_k, \alpha_1 \mathbf{e}_{i_1} + \dots + \alpha_m \mathbf{e}_{i_m} \rangle \\ &= \alpha_1 \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{i_1} \rangle + \dots + \alpha_m \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{i_m} \rangle \\ &= 0 + \dots + 0 = 0.\end{aligned}$$

Portanto, todo $\mathbf{e}_k \notin W$ pertence a $[W]^\perp$, o que significa que $[W]^\perp$ é igual ao subespaço gerado pelos vetores da base ortonormal de \mathbb{R}^n que não estão em W . Assim, como qualquer vetor de \mathbb{R}^n pode ser escrito de forma única como combinação linear dos vetores da base ortonormal, dado $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \alpha_1 \mathbf{e}_{i_1} + \dots + \alpha_m \mathbf{e}_{i_m} + \alpha_{m+1} \mathbf{e}_{k_1} + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_{k_{n-m}} \\ &= \mathbf{w} + \mathbf{w}',\end{aligned}$$

em que $\mathbf{w} \in W$ e $\mathbf{w}' \in [W]^\perp$.

Além disso, dado $\mathbf{w} \in W \cap [W]^\perp$, como $\mathbf{w} \in W$ e $\mathbf{w} \in [W]^\perp$, segue que $\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = 0$, ou seja, $\|\mathbf{w}\| = 0$, implicando $\mathbf{w} = \mathbf{0}$.

Assim, $W \cap [W]^\perp = \{\mathbf{0}\}$ e, como as bases de W e $[W]^\perp$, $\{\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_m}\} \cup \{\mathbf{e}_{k_1}, \dots, \mathbf{e}_{k_{n-m}}\}$ formam uma base de \mathbb{R}^n , $\mathbb{R}^n = W \oplus [W]^\perp$. \square

Feito isso, por propriedade da soma direta de subespaços, temos $\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(W) + \dim([W]^\perp)$.

Vejam agora um exemplo de espaço tangente.

Exemplo B .2.7. Considere a esfera $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, x \rangle = 1\}$. O espaço vetorial tangente $T_p S^n$ é o complemento ortogonal $[p]^\perp$, para todo $p \in S^n$.

De fato, como o subespaço gerado por p possui dimensão 1, de acordo com o que vimos anteriormente, $[p]^\perp$ é um subespaço vetorial de dimensão n .

Assim, para mostrar que $[p]^\perp = T_p S^n$, basta mostrar que $T_p S^n \subset [p]^\perp$. Para isso, dado $\mathbf{v} \in T_p S^n$, existe um caminho λ tal que $\lambda(0) = p$ e $\lambda'(0) = \mathbf{v}$.

Assim, para t suficientemente pequeno, como $\lambda(t) \in S^n$, temos $\langle \lambda(t), \lambda(t) \rangle = 1$. Logo,

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d}{dt} \langle \lambda(t), \lambda(t) \rangle = \frac{d}{dt} (\lambda_1^2(t) + \dots + \lambda_{n+1}^2(t)) \\ &= 2(\lambda_1(t)\lambda_1'(t) + \dots + \lambda_{n+1}(t)\lambda_{n+1}'(t)) \\ &= 2\langle \lambda(t), \lambda'(t) \rangle.\end{aligned}$$

Assim, aplicando em 0, obtemos

$$\begin{aligned}0 &= 2\langle \lambda(0), \lambda'(0) \rangle \\ &= 2\langle p, \mathbf{v} \rangle.\end{aligned}$$

Então, $\langle p, v \rangle = 0$.

Definição B .2.8. Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e $c \in \mathbb{R}$. Dizemos que c é um valor regular (ou nível regular) de f , quando para todo $x \in U$ tal que $f(x) = c$ ocorre $\text{grad } f(x) \neq 0$. Em outras palavras, não existem pontos críticos de f no nível c .

Quando existe algum $x \in U$ tal que $f(x) = c$ e $\text{grad } f(x) = 0$, dizemos que c é um nível crítico de f .

Com isso, veremos um resultado muito útil na construção de exemplos de superfícies.

Teorema B .2.9. Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^k e $c \in \mathbb{R}$ um valor regular de f . Então, o conjunto $M = f^{-1}(c)$ é uma superfície de classe C^k e, o espaço vetorial tangente a um ponto $p \in M$, T_pM é o complemento ortogonal de $\text{grad } f(p)$, $[\text{grad } f(p)]^\perp$.

Demonstração. De fato, como f é de classe C^k e c é um valor regular de f , para todo $x \in U$ tal que $f(x) = c$, $\text{grad } f(x) \neq 0$. Dessa forma, para todo $x_0 \in f^{-1}(c)$, existe um $i = 1, \dots, n+1$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \neq 0.$$

Assim, pelo Teorema da Função Implícita, existem uma bola aberta $B \subset \mathbb{R}^n$ e um intervalo real J tais que $B \times \bar{J} \subset U$ e para todo $x \in B \times \bar{J}$, ocorre $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \neq 0$.

Além disso, existe $\xi : B \rightarrow J$ tal que, para todo $x \in B \times \bar{J}$,

$$x = (x_1, \dots, x_{i-1}, \xi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}), x_{i+1}, \dots, x_{n+1}).$$

Em outras palavras, $f^{-1}(c) \cap U$ é localmente gráfico de ξ , ou seja, é uma superfície de classe C^k .

Mostremos agora que $T_pM = [\text{grad } f(p)]^\perp$ para todo $p \in M$. De fato, como T_pM e $[\text{grad } f(p)]^\perp$ são ambos subespaços vetoriais de dimensão n , basta mostrar que $T_pM \subset [\text{grad } f(p)]^\perp$.

Por definição, $M = f^{-1}(c)$ é uma curva de nível de f e, como vimos anteriormente, $\langle \lambda'(0), \text{grad } f(p) \rangle = 0$, para todo caminho diferenciável $\lambda : (-\delta, \delta) \rightarrow f^{-1}(c)$ tal que $\lambda(0) = p$. Logo, como para todo $v \in T_pM$, por definição, v é tal que, $v = \gamma'(0)$, sendo γ um caminho diferenciável qualquer com $\gamma(0) = p$, necessariamente $v \in [\text{grad } f(p)]^\perp$.

Portanto, $T_pM = [\text{grad } f(p)]^\perp$. □

Exemplo B .2.10. Seja $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, x \rangle = 1\}$. Temos que S^n é a curva de nível 1 da função $f(x) = \langle x, x \rangle$ e, como $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 2x_i$, para todo $i = 1, \dots, n+1$, segue que $\text{grad } f(x) = 2x$, mas, $0 \notin S^n$, ou seja, 1 é valor regular de f .

Assim, pelo Teorema B .2.9, dado $p \in f^{-1}(1) = M = S^n$, o espaço tangente de M em p é dado por $T_pM = [\text{grad } f(p)]^\perp = [2p]^\perp = [p]^\perp$, como vimos anteriormente.

B.3 DIFERENCIABILIDADE DE APLICAÇÕES EM GERAL

Nesta seção, iremos estudar a diferenciabilidade de aplicações mais gerais quando comparadas com as que vimos anteriormente. Tais aplicações serão da forma $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Nosso estudo consistirá na generalização de alguns resultados vistos na seção anterior que serão de grande utilidade quando começarmos a trabalhar com variedades diferenciáveis e aplicações entre estes objetos. Nesta seção, utilizamos como referência Lima, 2004.

B.3.1 A derivada como transformação linear

Nesta seção, veremos que a derivada é uma transformação linear. Para isso, inicialmente, estendemos o conceito de diferenciabilidade para o caso de aplicações de maneira análoga à feita na Definição B.1.1.

Definição B.3.1. Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação. Dizemos que f é diferenciável em um ponto $a \in U$ se, para cada $i = 1, \dots, n$ a i -ésima função coordenada f_i é diferenciável em a , isto é, para todo i , existem as m derivadas parciais e, para todo $v = (v_1, \dots, v_m)$ tal que $a + v \in U$,

$$\lim_{v \rightarrow 0} \left[\frac{f_i(a + v) - f_i(a) - \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) v_j \right)}{|v|} \right] = 0,$$

com $j = 1, \dots, m$.

Uma forma equivalente de definir diferenciabilidade de uma aplicação é a seguinte:

Definição B.3.2. Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação. Dizemos que f é diferenciável em um ponto $a \in U$ se, para cada $i = 1, \dots, n$ a i -ésima função coordenada f_i é diferenciável, isto é, para todo i existem as m derivadas parciais e, para todo $v = (v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^m$ tal que $a + v \in U$, vale

$$f_i(a + v) - f_i(a) - \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) v_j \right) = r(v),$$

sendo $r(v)$ tal que $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0$.

Outra definição importante é a da matriz jacobiana.

Definição B.3.3. Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável num aberto U . A matriz

jacobiiana de f em um ponto $a \in U$, denotada por $Jf(a)$ é dada por

$$Jf(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{bmatrix}_{n \times m}.$$

Com isso, vamos à definição de derivada de uma aplicação f como transformação linear.

Definição B .3.4. A transformação linear $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ com matriz em relação às bases canônicas de \mathbb{R}^m e \mathbb{R}^n sendo $Jf(a)$ é chamada de derivada da aplicação f no ponto a .

Por propriedade de transformações lineares, sabemos que, dado $v = (v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^m$, $f'(a) \cdot v = (\beta_1, \dots, \beta_n)$. Assim,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}_{n \times 1} &= f'(a) \cdot v \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{bmatrix}_{n \times m} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}_{m \times 1} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a) v_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(a) v_i \end{bmatrix}_{n \times 1}. \end{aligned}$$

Logo, para cada $j = 1, \dots, m$, $\beta_j = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) v_i$.

Pelo Corolário B .1.5, $\beta_j = \frac{\partial f_j}{\partial v}(a)$.

Assim, temos a seguinte Definição (análoga à Definição B .1.4).

Definição B .3.5. Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável no aberto U e $a \in U$. A derivada direcional de f em relação a v no ponto a é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

Dessa definição, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a}) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f_1(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f_1(\mathbf{a}), \dots, f_n(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f_n(\mathbf{a}))}{t} \\ &= \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_1(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f_1(\mathbf{a})}{t}, \dots, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_n(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f_n(\mathbf{a})}{t} \right).\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a}) \right) = f'(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}.$$

Com isso, percebamos que os limites da definição de diferenciabilidade equivalem ao seguinte limite:

$$\lim_{\mathbf{v} \rightarrow 0} \left[\frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{v}) - f(\mathbf{a}) - f'(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right] = 0.$$

Ou, equivalentemente,

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{v}) - f(\mathbf{a}) - f'(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} = r(\mathbf{v}), \text{ sendo que } \lim_{\mathbf{v} \rightarrow 0} \frac{r(\mathbf{v})}{|\mathbf{v}|} = 0.$$

De fato,

$$\begin{aligned}& \lim_{\mathbf{v} \rightarrow 0} \left[\frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{v}) - f(\mathbf{a}) - f'(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right] \\ &= \left(\lim_{\mathbf{v} \rightarrow 0} \frac{f_1(\mathbf{a} + \mathbf{v}) - f_1(\mathbf{a}) - \beta_1}{|\mathbf{v}|}, \dots, \lim_{\mathbf{v} \rightarrow 0} \frac{f_n(\mathbf{a} + \mathbf{v}) - f_n(\mathbf{a}) - \beta_n}{|\mathbf{v}|} \right) \\ &= \left(\lim_{\mathbf{v} \rightarrow 0} \frac{f_1(\mathbf{a} + \mathbf{v}) - f_1(\mathbf{a}) - \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\mathbf{a})v_i}{|\mathbf{v}|}, \dots, \lim_{\mathbf{v} \rightarrow 0} \frac{f_n(\mathbf{a} + \mathbf{v}) - f_n(\mathbf{a}) - \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(\mathbf{a})v_i}{|\mathbf{v}|} \right) \\ &= (0, \dots, 0).\end{aligned}$$

Observemos também que tal condição implica na unicidade da derivada da aplicação de f no ponto \mathbf{a} .

Com efeito, sendo $T : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que, para $\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{v} \in U$,

$$\lim_{\mathbf{v} \rightarrow 0} \left[\frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{v}) - f(\mathbf{a}) - T \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right] = 0,$$

substituindo v por tv , $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{f(a+tv) - f(a) - T \cdot tv}{|tv|} \right] = 0 &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{f(a+tv) - f(a)}{|tv|} \right] = \frac{T \cdot v}{|v|} \\ &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{f(a+tv) - f(a)}{|t|} \right] = T \cdot v. \end{aligned}$$

Portanto,

$$f'(a) \cdot v = T \cdot v,$$

provando o que queríamos.

Dizemos que f é diferenciável se ela for diferenciável em todos os pontos do domínio.

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável. Nesse caso, definimos a aplicação $f' : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ que leva cada $a \in U$ em uma transformação linear $f'(a) : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Além disso, observemos que o conjunto $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ pode ser identificado, a menos de um isomorfismo, com o espaço das matrizes de ordem $n \times m$, $M_{n \times m}$ ou com o \mathbb{R}^{mn} , o que resulta, pelo Teorema de Núcleo e Imagem, que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ tem dimensão mn .

Assim, se $f' : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ é contínua, então todas as suas funções coordenadas $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, com $i = 1, \dots, mn$ e $j = 1, \dots, n$, são contínuas, ou seja, f é de classe C^1 , resultando em f diferenciável.

Vejamos alguns exemplos de derivadas.

Exemplo B .3.6. Toda transformação linear $T : U = \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável e $T'(x) = T$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$.

De fato, dado $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_i(a + te_j) - T_i(a)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{tT_i(e_j)}{t} \\ &= T_i(e_j). \end{aligned}$$

Ou seja, como i e j foram tomados arbitrariamente, para todo $i = 1, \dots, n$, as derivadas parciais de T_i existem e são dadas por

$$\frac{\partial T_i}{\partial x_j}(a) = T_i(e_j),$$

para todo $a \in \mathbb{R}^m$ e $j = 1, \dots, m$.

Verifiquemos agora se T é diferenciável. Para isso, tomando $i = 1, \dots, n$, $a \in \mathbb{R}^m$ qualquer

e $v \in \mathbb{R}^m$, analisemos o seguinte limite:

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow 0} \frac{T_i(a+v) - T_i(a) - \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial T_i}{\partial x_j}(a) v_j \right)}{|v|} &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{T_i(v) - \sum_{j=1}^m (T_i(e_j) v_j)}{|v|} \\ &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{T_i(v) - T_i(v)}{|v|} = 0. \end{aligned}$$

Portanto, T é diferenciável.

Além disso, sua matriz jacobiana é dada por

$$\begin{aligned} JT(a) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial T_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial T_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial T_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial T_2}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial T_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial T_n}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial T_n}{\partial x_m}(a) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T_1(e_1) & T_1(e_2) & \cdots & T_1(e_m) \\ T_2(e_1) & T_2(e_2) & \cdots & T_2(e_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_n(e_1) & T_n(e_2) & \cdots & T_n(e_m) \end{bmatrix} = [T]_{n \times m}. \end{aligned}$$

Portanto, $T'(a) = T$ para toda transformação linear.

Exemplo B .3.7. Considere $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação diferenciável em $a \in U$. A matriz jacobiana de f em a é dada por:

$$Jf(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}.$$

Assim, como $[Jf(a)] = [f'(a)]$, $f'(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear, em que, dado $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, temos

$$f'(a)v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) v_i.$$

Logo, pelo o que vimos anteriormente,

$$f'(a)v = \langle \text{grad}(f(a)), v \rangle = \frac{\partial f}{\partial v}(a).$$

Tal funcional linear, denotado por $df(a)$ é chamado de diferencial de f no ponto a .

Em particular, definimos $x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tal que para cada $x \in \mathbb{R}^n$ associa a sua i -ésima coordenada.

Observemos que x_i é um funcional linear, assim, pelo Exemplo B.3.6, $dx_i \cdot v = v_i$. Portanto, podemos escrever o funcional linear obtido por meio da aplicação f da forma:

$$df(a) \cdot v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) v_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i \cdot v.$$

O que justifica a notação clássica

$$df = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Exemplo B.3.8. Seja $B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma aplicação bilinear, ou seja, linear nas duas variáveis. Então, dados $x, x' \in \mathbb{R}^m$, $y, y' \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, vale o seguinte:

- $B(x + x', y) = B(x, y) + B(x', y)$;
- $B(x, y + y') = B(x, y) + B(x, y')$;
- $B(\alpha x, y) = B(x, \alpha y) = \alpha B(x, y)$.

Assim, para $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$ tomando os elementos e_i, e_j das bases canônicas de \mathbb{R}^m e \mathbb{R}^n , respectivamente e considerando $B(e_i, e_j) = v_{ij}$, dados $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ e $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} B(x, y) &= B(x_1 e_1 + \dots + x_m e_m, y_1 e_1 + \dots + y_n e_n) \\ &= B(x_1 e_1, y_1 e_1 + \dots + y_n e_n) + \dots + B(x_m e_m, y_1 e_1 + \dots + y_n e_n) \\ &= \sum_{i=1}^m B(x_i e_i, y_1 e_1 + \dots + y_n e_n) \\ &= \sum_{i=1}^m B(x_i e_i, y_1 e_1) + \dots + B(x_i e_i, y_n e_n) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n B(x_i e_i, y_j e_j) \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j B(e_i, e_j) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j B(e_i, e_j) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j v_{ij}. \end{aligned}$$

Podemos interpretar tal transformação como um aplicação contínua, pois, para todo $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$, sendo $f_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $g_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f_i(x) = x_i$ e $g_j(y) = y_j$, respectivamente, f_i e g_j são projeções, logo, são funções contínuas.

Assim,

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f_i(x)g_j(y)v_{ij}$$

é uma soma de produtos de aplicações contínuas. Portanto, é contínua.

Como B é contínua, segue de Weierstrass que, quando tomamos o compacto $S^{m-1} \times S^{n-1}$, B assume seu valor máximo, que denotaremos $|B|$. Assim, para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, $|B(x, y)| = |B(x/|x|, y/|y|)| \cdot |x| \cdot |y| \leq |B| \cdot |x| \cdot |y|$. No caso em que $x = 0$ ou $y = 0$, tal desigualdade seria trivialmente satisfeita.

Assim, mostremos que B é diferenciável. De fato, dados $x, u \in \mathbb{R}^m$ e $y, v \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\begin{aligned} B(x+u, y+v) - B(x, y) &= B(x, y) + B(x, v) + B(u, y) + B(u, v) - B(x, y) \\ &= B(x, v) + B(u, y) + B(u, v). \end{aligned}$$

Logo, como $|(u, v)| = \sqrt{|u|^2 + |v|^2} \geq |v|$, temos

$$\frac{|B(u, v)|}{|(u, v)|} \leq \frac{|B(u, v)| \cdot |u| \cdot |v|}{\sqrt{|u|^2 + |v|^2}} \leq |B(u, v)| \cdot |u|.$$

Assim, $\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{B(u, v)}{|(u, v)|} = 0$, mostrando que B é diferenciável e $B'(x, y) \cdot (u, v) = B(x, v) + B(u, y)$.

Exemplo B .3.9. Sejam $f, g : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciáveis no ponto $a \in U$. Então, a aplicação $(f, g) : U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, dada por $(f, g)(x) = (f(x), g(x))$ é diferenciável no ponto a e $(f, g)'(a) \cdot v = (f'(a) \cdot v, g'(a) \cdot v)$. Além disso, se f, g forem de classe C^k , então (f, g) também será.

B .3.2 Alguns resultados sobre diferenciabilidade de aplicações

A seguir, apresentaremos alguns resultados sobre diferenciabilidade de aplicações que serão importantes ao longo desse trabalho.

Teorema B .3.10 (Regra da Cadeia para Aplicações). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ abertos, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ tais que $f(U) \subset V$ e f e g diferenciáveis em $a \in U$ e $f(a) \in V$, respectivamente. Então, a composição $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ é diferenciável em a e*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p.$$

Ou seja, a derivada da função composta é a composta das derivadas.

Demonstração. De fato, como f e g são diferenciáveis em $a \in U$ e $f(a) \in V$, respectivamente, dados $v \in \mathbb{R}^m$ e $w \in \mathbb{R}^n$ tais que $a + v \in U$ e $f(a) + w \in V$, então

$$\begin{aligned} f(a + v) &= f(a) + f'(a) \cdot v + \sigma(v)|v| \\ g(f(a) + w) &= g(f(a)) + g'(f(a)) \cdot w + \omega(w)|w|, \end{aligned}$$

em que $\sigma(v) = \frac{r(v)}{|v|}$ e $\omega(w) = \frac{r(w)}{|w|}$, com $\lim_{v \rightarrow 0} \sigma(v) = 0$ e $\lim_{w \rightarrow 0} \omega(w) = 0$.

Assim, se tomarmos $w = f'(a) \cdot v + \sigma(v)|v|$, como $a + v \in U$, necessariamente $f(a + v) \in V$ e, conseqüentemente, $f(a) + f'(a) \cdot v + \sigma(v)|v| = f(a) + w \in U$. Logo,

$$\begin{aligned} g \circ f(a + v) &= g(f(a + v)) \\ &= g(f(a) + f'(a) \cdot v + \sigma(v)|v|) \\ &= g(f(a) + w) \\ &= g(f(a)) + g'(f(a)) \cdot w + \omega(w)|w| \\ &= g(f(a)) + g'(f(a)) \cdot (f'(a) \cdot v + \sigma(v)|v|) + \omega(w)|w|. \end{aligned}$$

Como $g'(f(a))$ é uma transformação linear, segue que

$$\begin{aligned} (g \circ f)(a + v) &= g(f(a)) + g'(f(a)) \cdot (f'(a) \cdot v) + g'(f(a)) \cdot \sigma(v)|v| + \omega(w)|w| \\ &= g(f(a)) + [g'(f(a)) \cdot f'(a)] \cdot v + g'(f(a)) \cdot \sigma(v)|v| + \omega(w)|w| \end{aligned}$$

Chamando $R(v) = g'(f(a)) \cdot \sigma(v) + \omega(w) \left| \frac{f'(a) \cdot v}{|v|} + \sigma(v) \right|$, temos

$$(g \circ f)(a + v) = g(f(a)) + [g'(f(a)) \cdot f'(a)] \cdot v + R(v) \cdot |v|.$$

Ademais,

$$\lim_{v \rightarrow 0} R(v) = \lim_{v \rightarrow 0} g'(f(a)) \cdot \sigma(v) + \omega(w) \left| \frac{f'(a) \cdot v}{|v|} + \sigma(v) \right|.$$

De fato, quando $v \rightarrow 0$, temos $w \rightarrow 0$ e, como $f'(a)$ é uma transformação linear, pelo Exemplo B.3.6, $f'(a)$ é diferenciável e conseqüentemente contínua. Logo, quando tomamos o compacto S^{m-1} , por Weierstrass, f é limitada em S^{m-1} e, portanto, como $\frac{v}{|v|} \in S^{m-1}$ para todo

$v \in \mathbb{R}^m$, $f'(a) \cdot \frac{v}{|v|}$ é limitada. Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow 0} R(v) &= \lim_{v \rightarrow 0} g'(f(a)) \cdot \sigma(v) + \omega(w) \left| \frac{f'(a) \cdot v}{|v|} + \sigma(v) \right| \\ &= 0, \end{aligned}$$

provando que $g \circ f$ é diferenciável em a e $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$. \square

Corolário B .3.11. *Nas condições do Teorema B .3.10, a matriz jacobiana de $(g \circ f)'(a)$ é o produto das matrizes jacobianas de $g'(f(a))$ e $f'(a)$.*

Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, com U e V abertos e $f(U) \subset V$. Se f e g são de classe C^k , então a composição $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ é também de classe C^k .

Assim, como para funções da reta na reta, a derivada de aplicações satisfaz as seguintes propriedades.

Corolário B .3.12 (Regras de Derivação). *Sejam $f, g : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, diferenciáveis no ponto $a \in U$, $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ bilinear e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então,*

- (i) $f + g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável no ponto a e $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;
- (ii) $\alpha \cdot f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto a e $(\alpha \cdot f)'(a) = \alpha \cdot f'(a)$;
- (iii) $B(f, g) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $B(f, g)(x) = (f(x), g(x))$ é diferenciável em a e

$$B'(f, g)(a) \cdot v = B(f'(a) \cdot v, g(a)) + B(f(a), g'(a) \cdot v).$$

A parte (iii) do Corolário B .3.12 pode ser interpretada como um produto de elementos do \mathbb{R}^n . Para isso, basta denotar $B(x, y)$ como sendo $x \bullet y$. Assim, teríamos que o "produto" de aplicações $f \bullet g$ possui derivada $(f \bullet g)' = f' \bullet g + f \bullet g'$. Ou ainda, para todo $x \in U$, e $v \in \mathbb{R}^n$, $(f \bullet g)'(x) \cdot v = (f'(x) \cdot v) \bullet g(x) + f(x) \bullet (g'(x) \cdot v)$, em que \bullet denota a aplicação de v à transformação linear correspondente.

Um exemplo disso seria o próprio produto interno, ou produto escalar de vetores.

Exemplo B .3.13. Seja $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\phi(x, y) = \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$, sendo $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$. Por definição, ϕ é bilinear. Assim, considerando $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, diferenciáveis em $a \in U$, temos pelo Corolário B .3.12 que, para todo $v \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle (f(a), g(a))' \cdot v \rangle = \langle f'(a) \cdot v, g(a) \rangle + \langle f(a), g'(a) \cdot v \rangle$$

Em particular, $\langle f(x), f(x) \rangle = |f(x)|^2$ e $(\langle f(a), f(a) \rangle)' \cdot v = 2\langle f(a), f'(a) \cdot v \rangle$. Assim, sendo u uma função real positiva, temos $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$. Como $\phi(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \subseteq \mathbb{R}$, se $f(a) \neq 0$,

$$\begin{aligned} (\sqrt{\langle f(a), f(a) \rangle})' \cdot v &= \frac{\langle f(a), f'(a) \cdot v \rangle}{\sqrt{|f(a)|^2}} \\ &= \frac{\langle f(a), f'(a) \cdot v \rangle}{|f(a)|} \end{aligned}$$

Vejamos outro exemplo de aplicação bilinear que pode ser interpretada como produto.

Exemplo B .3.14. Seja $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ um operador auto-adjunto, ou seja, tal que $[A] = [A]^t$. Por propriedade de operadores auto-adjuntos, A é um operador auto-adjunto se, e somente se, $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^m$. Assim, ao considerarmos $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x) = \langle Ax, x \rangle$, como A é um operador linear, temos $A' = A$. Por conta disso, $\varphi'(x) \cdot v = \langle A \cdot v, x \rangle + \langle A \cdot x, v \rangle$ e, pela propriedade vista acima de operadores auto-adjuntos e do produto interno, $\varphi'(x) \cdot v = 2\langle A \cdot x, v \rangle$.

Exemplo B .3.15. Seja $U \subset \mathcal{M}_{n \times n}$ o conjunto das matrizes de ordem $n \times n$ com determinante não nulo, ou seja, das matrizes invertíveis. Considerando a função $f : \mathcal{M}_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(A) = \det(A)$, como a função determinante é contínua e $f(U) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é aberto, $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = U$ é aberto.

Feito isso, considere a aplicação $g : U \subset \mathcal{M}_{n \times n} \rightarrow \mathcal{M}_{n \times n}$ dada por $g(A) = A^{-1}$. Mostremos que g é diferenciável e que $g'(A) \cdot v = -A^{-1} \cdot v \cdot A^{-1}$. Para isso, tomaremos a norma $|x| = \max\{|X \cdot u|; u \in S^{n-1}\}$, em que X é a transformação linear que tem x como matriz na base canônica.

Dados $x, y \in \mathcal{M}_{n \times n}$, $|x \cdot y| \leq |x| \cdot |y|$. De fato,

$$|x \cdot y| = \max\{|XY \cdot u|; u \in S^{n-1}\}.$$

Como o produto de matrizes de transformações lineares pode ser interpretado como a composição dessas transformações, $XY \cdot u = (X \circ Y) \cdot u = X \cdot (Y \cdot u)$, em que $Y \cdot u \in \mathbb{R}^n$. Além disso, dado $v \in \mathbb{R}^n$ qualquer, vale $|Xv| \leq |x| \cdot |v|$, pois, se $v \neq 0$, $\frac{v}{|v|} \in S^{n-1}$, implicando

$$|X \cdot v| = |v| \cdot \left| X \cdot \frac{v}{|v|} \right| \leq |x| \cdot |v|.$$

Caso $v = 0$, o resultado é imediato.

Com isso, supondo u tal que $|x \cdot y| = |XY \cdot u|$, temos $|x \cdot y| = |X \cdot (Y \cdot u)| \leq |x| \cdot |Y \cdot u| \leq |x| \cdot |y|$.

Ademais, como U é aberto, dado $u \in U$ é possível obter $v \in U$ tal que $u + v \in U$. Assim,

escrevendo

$$\begin{aligned}g(u+v) - g(u) + u^{-1} \cdot v \cdot u^{-1} &= r(v) \\ \Rightarrow (u+v)^{-1} - u^{-1} + u^{-1} \cdot v \cdot u^{-1} &= r(v).\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados por $u+v$ pela direita, obtemos

$$\begin{aligned}((u+v)^{-1} - u^{-1} + u^{-1} \cdot v \cdot u^{-1}) \cdot (u+v) &= r(v)(u+v) \\ \Rightarrow (u^{-1} \cdot v)^2 &= r(v)(u+v) \\ \Rightarrow r(v) &= (u^{-1} \cdot v)^2 (u+v)^{-1}\end{aligned}$$

Assim,

$$|r(v)| = |(u^{-1} \cdot v)^2 (u+v)^{-1}| \leq |u^{-1}|^2 \cdot |v|^2 \cdot |(u+v)^{-1}|.$$

Logo,

$$\frac{|r(v)|}{|v|} \leq |u^{-1}|^2 \cdot |v| \cdot |(u+v)^{-1}|,$$

implicando

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{|r(v)|}{|v|} = 0 \Leftrightarrow \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0,$$

provando o que queríamos.

Para os próximos resultados, precisaremos do seguinte Teorema.

Teorema B .3.16 (Desigualdade do Valor Médio para Caminhos). *Seja $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho diferenciável em (a, b) tal que $f'(t) \leq M$ para todo $t \in (a, b)$. Então, $|f(b) - f(a)| \leq M(b - a)$.*

Com isso, vejamos alguns resultados relevantes.

Teorema B .3.17 (Desigualdade do Valor Médio para Aplicações). *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável no segmento de reta $[a, a+v] \subset U$ tal que $|f'(a+tv)| \leq M$ para todo $t \in [0, 1]$. Então, $|f(a+v) - f(a)| \leq M \cdot |v|$.*

Demonstração. De fato, considerando o caminho $\lambda : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por $\lambda(t) = f(a+tv)$, $\lambda = f \circ \phi$, com $\phi : [0, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por $\phi(t) = a+tv$.

Como f é diferenciável em $[a, a+v]$, pela regra da cadeia, λ será diferenciável em $[0, 1]$. Além disso, $\lambda'(t) = (f \circ \phi)'(t) = f'(\phi(t)) \cdot \phi'(t) = f'(a+tv) \cdot v$.

Com isso, temos $|\lambda'(t)| \leq |f'(a+tv)| \cdot |v| \leq M \cdot |v|$, para todo $t \in [0, 1]$.

Assim, pelo Teorema B.3.16, $|\lambda(1) - \lambda(0)| \leq M|v|(1 - 0)$, o que implica $|f(a + tv) - f(a)| \leq M \cdot |v|$, provando o que queríamos. \square

Um importante Corolário desse resultado é o seguinte.

Corolário B.3.18. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto convexo e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável tal que, para todo $x \in U$, vale $|f'(x)| \leq M$ para $M > 0$. Então, f satisfaz a condição de Lipschitz $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ para todo $x, y \in U$.*

Demonstração. De fato, dados $x, y \in U$ quaisquer, como U é convexo, o segmento de reta ligando os pontos x e y , $[y, x]$ está inteiramente contido em U . Logo, como f é diferenciável, pelo Teorema acima, $|f(y + (x - y)) - f(y)| \leq M|x - y|$, ou seja, $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$. \square

B.3.3 Teorema da Aplicação Inversa

Nesta seção, apresentaremos um resultado de suma importância em várias partes da Matemática. Tal resultado terá grande destaque neste trabalho para mostrarmos a boa definição do conceito de grau. Para chegar nele, precisaremos de alguns conceitos e resultados preliminares.

Definição B.3.19 (Difeomorfismo). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abertos e $f : U \rightarrow V$ uma aplicação. Dizemos que f é um difeomorfismo se ela for bijetora, diferenciável e sua aplicação inversa $f^{-1} : V \rightarrow U$ também for diferenciável.*

Nessas condições, dizemos que U e V são conjuntos difeomorfos.

Um primeiro resultado que temos é o seguinte.

Proposição B.3.20. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abertos. Se $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo, então $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo.*

Demonstração. De fato, como f é um difeomorfismo, sabemos que existe $f^{-1} : V \rightarrow U$ inversa de f diferenciável. Ou seja, $f \circ f^{-1} = Id_V$ e $f^{-1} \circ f = Id_U$. Assim,

$$\begin{aligned}
 J(f^{-1} \circ f)(a) &= J(Id_U(a)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial Id_{U1}}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial Id_{U1}}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial Id_{U1}}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial Id_{U2}}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial Id_{U2}}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial Id_{U2}}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Id_{Um}}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial Id_{Um}}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial Id_{Um}}{\partial x_m}(a) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial x_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial x_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial x_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial x_m}(a) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = Id_m.$$

De forma análoga, dado $b \in V$, obtemos $J(f \circ f^{-1}(b)) = Id_{\mathbb{R}^n}$. Assim, $(f^{-1} \circ f)'(a) = Id_{\mathbb{R}^m}$ e $(f \circ f^{-1})'(a) = Id_{\mathbb{R}^n}$, sendo $Id_{\mathbb{R}^m}$ e $Id_{\mathbb{R}^n}$ as transformações lineares identidades de \mathbb{R}^m e \mathbb{R}^n , respectivamente.

Além disso, pela regra da cadeia, dado $a \in U$,

$$(f^{-1} \circ f)'(a) = f^{-1}'(f(a)) \cdot f'(a) = Id_{\mathbb{R}^m}.$$

$$(f \circ f^{-1})'(a) = f'(f^{-1}(a)) \cdot f^{-1}'(a) = Id_{\mathbb{R}^n}.$$

Logo, $f' : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo. □

Como consequência direta dessa proposição, temos $n = m$. Assim, dados dois abertos quaisquer de \mathbb{R}^m e \mathbb{R}^n com $n \neq m$, eles não podem ser difeomorfos.

Um primeiro exemplo que podemos ter é o seguinte.

Exemplo B .3.21. Sejam $B(0, 1) = B \subset \mathbb{R}^m$ a bola aberta de centro 0 e raio 1 e $f : \mathbb{R}^m \rightarrow B$ dada por $f(x) = x/\sqrt{1 + |x|^2}$. Então, f é um difeomorfismo em que $g : B \rightarrow \mathbb{R}^m$, definida por $g(y) = y/\sqrt{1 - |y|^2}$ é a sua inversa.

De fato, é fácil verificar que g é a inversa de f , para isso, podemos ver o Exemplo A .8.3.

Assim, mostremos que f e g são ambas diferenciáveis. Para isso, sendo $a \in \mathbb{R}^m$, para todo $i, j = 1, \dots, n$, teremos que

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) = \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{1 + |x|^2}} - \frac{x_i x_j}{(1 + |x|^2)^{3/2}},$$

em que

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, como $|x| \geq 0$, para todo $x \in B$, então $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ será contínua para todo $i, j = 1, \dots, m$, implicando em f de classe C^1 e, conseqüentemente, f diferenciável.

No caso da função g , teremos que

$$\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(a) = \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{1 - |y|^2}} + \frac{y_i y_j}{(1 - |y|^2)^{3/2}}.$$

Como $|y| < 1$, segue que $\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(a)$ será contínua para todo $i, j = 1, \dots, m$. Consequentemente, g será diferenciável.

Nem todo homeomorfismo diferenciável é um difeomorfismo, pois, considerando $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3$, temos f diferenciável. Entretanto, a sua inversa $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ não é diferenciável em $x = 0$, pois $f'(0) = 0$.

Com isso, vejamos mais alguns conceitos.

Definição B .3.22. Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto e $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável. Dizemos que f é um difeomorfismo local quando, para cada $x \in U$, existe uma bola $B(x, \delta) = B \subset U$ tal que $f|_B$ é um difeomorfismo sobre um aberto V de \mathbb{R}^m , com $f(x) \in V$.

Dessa definição e da Proposição B .3.20, se $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um difeomorfismo local, então $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo, para todo $a \in U$.

Com isso, podemos enunciar uma primeira proposição acerca de difeomorfismo locais.

Proposição B .3.23. Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ um difeomorfismo local. Então, f é uma aplicação aberta, ou seja, a imagem $f(A)$ de um aberto A é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^m .

Demonstração. De fato, pela definição de difeomorfismo local, sendo $A \subset U$ aberto, para cada $x \in A$, existe uma bola aberta $B(x, \delta_x) \subset A$ tal que f é um difeomorfismo de $B(x, \delta_x)$ sobre um aberto $V_x \subset \mathbb{R}^m$. Assim, como

$$A = \bigcup_{x \in A} B(x, \delta_x),$$

$f(A) = V$, sendo $V = \bigcup_{x \in A} V_x$, que é um conjunto aberto. □

Ademais, vejamos outro resultado acerca desses difeomorfismos locais.

Proposição B .3.24. Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ um difeomorfismo local. Nessas condições, f é um difeomorfismo de U sobre $V = f(U)$ se, e somente se, f é injetora.

Demonstração. De fato, supondo que f é um difeomorfismo de U sobre V , necessariamente, da definição de difeomorfismo, f é injetora.

Reciprocamente, se f é injetora, sabemos que f será bijetiva, pois é sobrejetora sobre sua imagem $f(U)$. Além disso, como f é um difeomorfismo local, para todo $x \in U$, existe $B(x, \delta_x) \subset U$ que é difeomorfa a um aberto $V = f(B(x, \delta_x))$, ou seja, $f|_{B(x, \delta_x)}$ é diferenciável com inversa $f^{-1}|_{V_x}$ também diferenciável. Assim, como $U = \bigcup_{x \in U} B(x, \delta_x)$ e $V = f(U) = \bigcup_{x \in U} V_x$, definindo $f^{-1} : V \rightarrow U$, dada por, sendo $y = f(x)$, $f^{-1}(y) = f^{-1}|_{V_x}(y)$, temos pela injetividade de f que f^{-1} é bem definida e é fácil verificar que f^{-1} é a inversa de f .

Assim, f será diferenciável em todos os pontos de U , e admitirá inversa diferenciável.

Portanto, f é um difeomorfismo entre U e $V = f(U)$. □

Sem a injetividade, podemos ter difeomorfismos locais que não são difeomorfismos, como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo B .3.25. Considere $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y))$. De fato, f é de classe C^∞ . Além disso, fixado $a \in \mathbb{R}$, se $f(a, y) = f(a, y')$, então

$$\begin{aligned} f(a, y) = f(a, y') &\Leftrightarrow (e^a \cos(y), e^a \sin(y)) = (e^a \cos(y'), e^a \sin(y')) \\ &\Leftrightarrow (\cos(y), \sin(y)) = (\cos(y'), \sin(y')) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(y) = \cos(y') \\ \sin(y) = \sin(y') \end{cases} \end{aligned}$$

Tal sistema é satisfeito ao considerarmos $y - y' = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Por conta disso, cada reta $x = a$ é levada a uma circunferência de centro 0 e raio e^a , pois, dado um ponto $f(a, y) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$|f(a, y)| = |(e^a \cos(\theta), e^a \sin(\theta))| = \sqrt{(e^a)^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} = e^a.$$

Por outro lado, considerando agora as retas do tipo $y = b$, teremos

$$f(x, b) = (e^x \cos(b), e^x \sin(b)),$$

ou seja, f leva cada reta $y = b$ bijetivamente na semi-reta que parte da origem e passa pelo ponto $(\cos(b), \sin(b))$. Assim, a imagem de f é $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Além disso, f é um difeomorfismo local que não é global, pois $f(x, y + 2k\pi) = f(x, y)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, ou seja, f não é injetora.

Na sequência, apresentaremos mais alguns Teoremas sobre difeomorfismos. Tais resultados serão utilizados mais adiante para apresentarmos o importante Teorema da Aplicação Inversa.

Teorema B .3.26. *Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^n$ dois conjuntos abertos e $f : U \rightarrow V$ um difeomorfismo. Se f é um difeomorfismo de classe C^k , então sua inversa $g = f^{-1} : V \rightarrow U$ é também de classe C^k .*

Demonstração. Para demonstrar esse fato, façamos uma indução sobre k .

De fato, sendo f um difeomorfismo de classe C^0 , segue da definição de difeomorfismo que $g = f^{-1}$ será uma aplicação diferenciável, logo contínua.

Assim, supondo que todo difeomorfismo de classe C^{k-1} possui inversa de classe C^{k-1} , provemos que, dado f de classe C^k , a aplicação inversa $g = f^{-1}$ é também de classe C^k .

Para isso, como $g'(y) = [f'(x)]^{-1} = [f'(f^{-1}(y))]^{-1}$, teremos que a aplicação $g' : V \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ será dada por

$$g' = \varphi \circ f' \circ f^{-1},$$

em que, sendo $Gl(n) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes com determinante não nulo e $X \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ o conjunto dos operadores definidos por essas matrizes considerando a base canônica, $\varphi : X \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ é a aplicação que leva cada operador de X no seu inverso X^{-1} .

Pelo Exemplo B.3.6, segue que φ é de classe C^∞ . Ademais, como f é de classe C^k , teremos f' de classe C^{k-1} . Pela hipótese de indução, como f é em particular C^{k-1} , teremos f^{-1} de classe C^{k-1} . Assim, g' será de classe C^{k-1} e, conseqüentemente, g é de classe C^k .

Portanto, se um difeomorfismo é de classe C^k , então seu inverso é também de classe C^k , para todo $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. \square

Teorema B.3.27. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1 . Se a derivada $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ for injetora para algum $a \in U$, então existem $\delta > 0$ e $c > 0$ tais que $B(a, \delta) \subset U$ e, para todo $x, y \in B(a, \delta)$, vale $|f(x) - f(y)| \geq c|x - y|$. Nessas condições, $f|_{B(a, \delta)}$ é injetora.*

Demonstração. De fato, supondo $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ injetora para algum $a \in U$, como $f'(a)$ é uma transformação linear, segue que $f'(a)(u) = 0$ se, e somente se $u = 0$. Assim, considerando a função $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\varphi(u) = |f'(a)(u)|$, teremos que $\varphi(u) > 0$ para todo $u \in S^{m-1}$.

Como por hipótese $f \in C^1$, $f'(a)$ é contínua, logo, pelo Teorema de Weierstrass (A.7.7), existe $c > 0$ tal que $|f'(a)(u)| \geq 2c$ para todo $u \in S^{m-1}$. Assim, como $f'(a)$ é uma transformação linear, para todo $v \in \mathbb{R}^m$, $\frac{v}{|v|} \in S^{m-1}$ e,

$$\left| f'(a) \left(\frac{v}{|v|} \right) \right| \geq 2c \Rightarrow \frac{|f'(a)(v)|}{|v|} \geq 2c \Rightarrow |f'(a)(v)| \geq 2c|v|.$$

Agora, defina $r : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $r(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$. Então, dados $x, y \in U$ quaisquer,

$$f(x) = r(x) + f(a) + f'(a)(x - a)$$

$$f(y) = r(y) + f(a) + f'(a)(y - a).$$

Da linearidade de $f'(a)$, obtemos

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= r(x) - r(y) + f'(a)(x - a) - f'(a)(y - a) \\ &= r(x) - r(y) + f'(a)(x - y). \end{aligned}$$

Como $|u + v| \geq |u| - |v|$, para todo $u, v \in \mathbb{R}^n$, segue que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\geq |f'(a)(x - y)| - |r(x) - r(y)| \\ &\geq 2c - |r(x) - r(y)|. \end{aligned}$$

Com isso, a aplicação r será de classe C^1 , pois é a soma de aplicações de classe C^1 ,

sendo $f'(a)$ de classe C^1 por conta de ser uma transformação linear. Além disso, $r(a) = 0$ e $r'(a) = 0$. Assim, da continuidade de r' , dado $\varepsilon = c > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta$ implica $x \in U$ e $|r'(x)| < c$. A Desigualdade do Valor Médio (B .3.17) nos garante que dados quaisquer $x, y \in B(a, \delta)$, sendo $B(a, \delta)$ um conjunto convexo, então, $|r(x) - r(y)| \leq c|x - y|$.

Portanto, se $x, y \in B(a, \delta)$, então $|f(x) - f(y)| \geq 2c|x - y| - c|x - y| = c|x - y|$.

Em particular, como dados $x, y \in B(a, \delta)$, com $x \neq y$ temos $|f(x) - f(y)| \geq c|x - y| > 0$, necessariamente $f(x) \neq f(y)$, implicando que $f|_{B(a, \delta)}$ injetora. \square

Teorema B .3.28 (Diferenciabilidade do Homeomorfismo Inverso). *Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abertos e $f : U \rightarrow V$ um homeomorfismo de classe C^1 . Se para algum $x \in U$ a derivada $f'(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ for inversível, então a inversa de f , $g = f^{-1} : V \rightarrow U$ será diferenciável no ponto $f(x)$ e $g'(f(x)) = [f'(x)]^{-1}$.*

Demonstração. Sejam $x, x + v \in U$ e considere $y = f(x)$ e $y + w = f(x + v)$. Da diferenciabilidade de f ,

$$f(x + v) - f(x) - f'(x)(v) = r(v),$$

sendo $r(v)$ tal que $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0$.

Assim, da equação acima e de como definimos w , temos

$$w = f(x + v) - f(x) = f'(x)(v) + r(v). \quad (\text{B .1})$$

Além disso, considerando o homeomorfismo inverso $g = f^{-1}$,

$$v = g(f(x + v)) - g(f(x)) = g(y + w) - g(y). \quad (\text{B .2})$$

Para mostrar que $[f'(x)]^{-1}$ é a derivada de g , escrevendo

$$g(y + w) - g(y) - [f'(x)]^{-1}(w) = s(w),$$

devemos mostrar que $\lim_{w \rightarrow 0} \frac{s(w)}{|w|} = 0$.

Da expressão acima e das expressões obtidas em (B .1) e (B .2), temos

$$\begin{aligned} g(y + w) - g(y) - [f'(x)]^{-1}(w) = s(w) &\Rightarrow v = [f'(x)]^{-1}[f'(x)(v) + r(v)] + s(w). \\ &\Rightarrow v = v + [f'(x)]^{-1}(r(v)) + s(w). \end{aligned}$$

Assim, $s(w) = -[f'(x)]^{-1}(r(v))$. Consequentemente, da linearidade de $[f'(x)]^{-1}$, obtemos

$$\frac{s(w)}{|w|} = \frac{-[f'(x)]^{-1}(r(v))}{|w|} = -[f'(x)]^{-1} \left(\frac{r(v)}{|v|} \frac{|v|}{|w|} \right).$$

Substituindo w por $f(x + v) - f(x)$, obtemos

$$\frac{s(w)}{|w|} = -[f'(x)]^{-1} \left(\frac{r(v)}{|v|} \frac{|v|}{|f(x + v) - f(x)|} \right).$$

Quando $w \rightarrow 0$, de (B.2) e como g é contínua, $v \rightarrow 0$. Assim, $\frac{r(v)}{|v|} \rightarrow 0$ e, pelo Teorema B.3.27, existe $\delta > 0$ e $c > 0$ tais que $|v| < \delta$ implica

$$|f(x + v) - f(x)| \geq c|v| \Rightarrow \frac{|v|}{|f(x + v) - f(x)|} \leq \frac{1}{c},$$

ou seja, $\frac{|v|}{|f(x + v) - f(x)|}$ é limitada.

Portanto, $\lim_{w \rightarrow 0} \frac{s(w)}{|w|} = 0$, comprovando que g é diferenciável em $f(x)$ e $g'(f(x)) = [f'(x)]^{-1}$. \square

Na sequência, temos um Corolário interessante sobre esse Teorema.

Corolário B.3.29. *Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abertos. Se $f : U \rightarrow V$ é um homeomorfismo de classe C^k tal que para todo $x \in U$ a derivada $f'(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é invertível, então a inversa de f , $g = f^{-1} : V \rightarrow U$ é de classe C^k .*

Demonstração. Para provar tal fato, façamos uma indução sobre k .

De fato, como $f \in C^k$ e para todo $x \in U$, $f'(x)$ admite inversa, em particular, $f \in C^1$ e, pelo Teorema acima, sua inversa $g = f^{-1}$ é diferenciável em todo $f(x) \in V$ e sua derivada será dada por $g'(f(x)) = [f'(x)]^{-1}$.

Assim, suponha que todo homeomorfismo de classe C^{k-1} tal que para todo $x \in U$ a derivada $f'(x)$ é invertível, a inversa $g = f^{-1}$ seja de classe C^{k-1} .

Provemos que vale para k . De fato, derivando g , como vimos no Teorema B.3.26, $g'(y) = [f'(f^{-1}(y))]^{-1}$. Assim, a aplicação $g' : V \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ que leva cada $y \in V$ no operador derivada $g'(y)$ será dada por

$$g' = \varphi \circ f' \circ f^{-1},$$

em que $\varphi : X \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ associa cada operador de X definido pelas matrizes de $Gl(n)$ ao seu inverso.

Logo, como por hipótese $f \in C^k$, teremos $f' \in C^{k-1}$, pela hipótese de indução, $f^{-1} \in C^{k-1}$, por conta de $f \in C^{k-1}$ e como visto no mesmo Teorema, $\varphi \in C^\infty$, segue que $g' \in C^{k-1}$. Consequentemente, $g \in C^k$.

Portanto, o resultado pretendido é válido pelo Princípio de Indução Finita. \square

Com isso, vejamos um Lema que servirá de base para demonstrar o Teorema da Aplicação Inversa.

Lema B .3.30. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável no ponto $a \in U$ com $f'(a)$ sobrejetora. Se a é ponto de mínimo local da função $|f(x)|$, então $f(a) = 0$.*

Demonstração. De fato, sendo $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ e definindo $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x) = |f(x)|^2 = f_1^2(x) + \dots + f_n^2(x)$, como a é um ponto de mínimo para $|f(x)|$, necessariamente a será ponto de mínimo de φ .

Ademais, $\varphi = g \circ f$, sendo $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = |x|^2$. Assim, pelo Regra da Cadeia para Aplicações (Teorema B .3.10), temos

$$\begin{aligned} (\varphi)'(a) &= (g \circ f)'(a) \\ &= g'(f(a))(f'(a)). \end{aligned}$$

Agora, pelo Exemplo B .3.7, dado $v \in \mathbb{R}^m$ e sendo $b \in \mathbb{R}^n$ um ponto em que g é diferenciável,

$$\begin{aligned} g'(b)(v) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(b)v_i \\ &= 2b_1v_1 + 2b_2v_2 + \dots + b_nv_n \\ &= 2\langle v, b \rangle. \end{aligned}$$

Logo, tomando $v \in \mathbb{R}^m$ qualquer, segue que

$$0 = (\varphi)'(a)(v) = 2\langle f'(a)(v), f(a) \rangle.$$

Ou seja, $f(a)$ é ortogonal a \mathbb{R}^n , implicando $f(a) = 0$. □

Feito isso, vejamos o importante Teorema da Aplicação Inversa:

Teorema B .3.31 (da Aplicação Inversa). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^k , $k \geq 1$. Se $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é invertível para algum $a \in U$, então existe uma bola aberta $B(a, \bar{\delta})$ tal que $f|_{B(a, \bar{\delta})}$ é um difeomorfismo sobre um aberto V , com $f(a) \in V$.*

Demonstração. De fato, se $\delta > 0$ dado pelo Teorema B .3.27 e tomando $\delta_1 > 0$ com $\delta_1 < \delta$, também pelo Teorema B .3.27, podemos admitir que o conjunto $B[a, \delta_1] \subset U$ e, como a derivada $f'(a)$ é invertível, necessariamente é injetora. Logo, a restrição $f|_{B[a, \delta_1]}$ será injetora, ou seja, f será injetora no compacto $B[a, \delta_1]$, em que $B[a, \delta_1]$ denota a bola fechada de centro a e raio δ_1 .

Assim, como f é de classe C^k , segue que $f(B[a, \delta_1])$ será compacto. Além disso, teremos que a imagem inversa de $f(B[a, \delta_1])$ será o compacto $B[a, \delta_1]$, pois f será bijetora sobre $f(B[a, \delta_1])$. Logo, teremos que a aplicação $f^{-1} : f(B(a, \delta)) \rightarrow B(a, \delta)$ é contínua, resultando que f é um homeomorfismo de $B(a, \delta)$ sobre $f(B(a, \delta))$.

Além disso, como $f'(x)$ depende continuamente de x , e todo operador linear suficientemente próximo de um operador invertível é invertível, podemos supor que $f'(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um

isomorfismo para todo $x \in B(a, \delta')$, com $0 < \delta' \ll \delta$.

Resumindo, tomando $\delta > 0$ suficientemente pequeno, vimos que $f|_{B(a, \delta)} : B(a, \delta) \rightarrow f(B(a, \delta))$ é um homeomorfismo com $f \in C^k$ e dado $x \in B(a, \delta)$, $f'(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo, logo inversível. Assim, se provarmos que $f(B(a, \delta))$ é um conjunto aberto, pelo Teorema B .3.28, teremos que f^{-1} será diferenciável, resultando em $f|_{B(a, \delta)}$ um difeomorfismo.

Vejam, tomando $q = f(p)$, com $p \in B(a, \delta)$ e considerando a esfera $S = S[a, \delta]$ que é a fronteira de $B[a, \delta]$, como f é injetora em $B[a, \delta]$, segue que $f(p) \notin f(S)$. Logo, sendo $f(S)$ compacto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|f(x) - q| \geq 2\varepsilon$ para todo $x \in S$.

Mostremos que $B(q, \varepsilon) \subset f(B(a, \delta))$. De fato, sendo $y \in B(q, \varepsilon)$ e $\varphi(x) = f(x) - y$, a aplicação $|\varphi(x)|$ não atingirá seu mínimo em um ponto de $f(S)$, pois, $|q - y| < \varepsilon$. Assim, $|\varphi|$ atingirá seu mínimo em um ponto de $B(a, \delta)$.

Por outro lado, pela definição de φ , sabemos que ela é sobrejetora em $B[a, \delta]$ e diferenciável. Logo, pelo Lema B .3.30, supondo que $x \in B(a, \delta)$ é ponto de mínimo de $|\varphi|$ teremos $\min |\varphi(x)| = |\varphi(x)| = |0| = 0$. Logo, $|f(x) - y| = 0$, implicando que $y \in f(B(a, \delta))$.

Portanto, $B(q, \varepsilon) \subset f(B(a, \delta))$, implicando $f(B(a, \delta))$ aberto e, conseqüentemente, $f|_{B(a, \delta)}$ é um difeomorfismo sobre o aberto $f(B(a, \delta))$. \square

Corolário B .3.32. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e $a \in U$ um ponto crítico de f . Se a matriz hessiana de f em a ,*

$$H(f(a)) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right], i, j = 1, \dots, n$$

for invertível, então existe um aberto $V \subset U$ com $a \in V$ tal que não possui outros pontos críticos de f .

Demonstração. De fato, sendo $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$F(x) = \text{grad}(f(x)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right),$$

a matriz hessiana de f em x , $H(f(x))$ é a matriz Jacobiana de F em x , para todo $x \in U$.

Assim, como $H(f(a))$ é invertível, pelo Teorema B .3.31, existe uma vizinhança de a que é difeomorfa a um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$. Em particular, nessa vizinhança, F será injetora, implicando $F(x) \neq F(a)$ e, conseqüentemente, $\text{grad}(f(x)) \neq 0$ para todo $x \neq a$ sendo $x \in V \setminus \{a\}$. \square

Quando temos $\text{grad}(f(a)) \neq 0$ e $H(f(a))$ é invertível, denominamos o ponto a de "ponto crítico não-degenerado". Do Corolário acima, todo ponto crítico não degenerado é em particular um ponto crítico isolado.

Aqui encerramos a parte que trata sobre diferenciabilidade de aplicações entre espaços euclidianos.

B .4 ORIENTAÇÃO EM ESPAÇOS VETORIAIS

Nesta seção, recordaremos alguns conceitos de orientação de espaços vetoriais, os quais terão grande importância no estudo do Grau de aplicações diferenciáveis.

Seja V um espaço vetorial de dimensão n . Suponha $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $B' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ bases ordenadas distintas de V . Diremos que B e B' possuem mesma orientação se $\det(I) > 0$ e, B e B' possuem orientação distinta se $\det(I) < 0$, em que I é a matriz de mudança de bases entre B e B' . Tal relação entre bases é uma relação de equivalência e separa todas as bases de V em duas classes.

Definição B .4.1 (Orientação em Espaços Vetoriais). Uma orientação de V é uma escolha arbitrária para fixar um sinal positivo para os elementos de uma determinada classe e negativo para os elementos da outra classe. Um espaço vetorial orientado V é um par constituído por V e uma orientação de V . As bases de V que seguem tal orientação serão denominadas bases positivas, enquanto as bases restantes serão chamadas de bases negativas.

A utilização de bases ordenadas é fundamental para o conceito de orientação.

Exemplo B .4.2. Em $V = \mathbb{R}^2$, fixando a base canônica para orientar V , obtemos que a base ordenada $\{(0, 1), (-1, 0)\}$ é positiva, enquanto a base ordenada $\{(-1, 0), (0, 1)\}$ é negativa.

Agora, vejamos algumas definições relevantes acerca de isomorfismos e orientação.

Definição B .4.3. Sejam V, W espaços vetoriais orientados isomorfos e $I : V \rightarrow W$ um isomorfismo. Dizemos que I preserva orientação se I leva bases positivas de V em bases positivas de W , ou também, leva bases negativas de V em bases negativas de W . Caso contrário, dizemos que I inverte orientação.

Quando um isomorfismo preservar orientação, diremos que o isomorfismo é positivo. Por outro lado, quando um isomorfismo inverter orientação, diremos que tal isomorfismo é negativo.

Exceto quando indicado o contrário, a licença deste item é descrito como
Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Brazil

AUTORIZAÇÃO

Eu, ,
, , portador do documento
de identidade, nº ,
na qualidade de titular dos direitos morais e patrimoniais de autor que recaem sobre a minha
produção do tipo , intitulada

em consonância com as disposições da Lei nº 9.610, de 19 de fevereiro de 1998, autorizo a UFSCar a:

- a) Reproduzi-la por meios eletrônicos, mediante cópia digital, para armazená-la permanentemente no Repositório Institucional da UFSCar (RI UFSCar), disponibilizando-a de acordo com os termos de uma licença Creative Commons;
- b) Colocá-la ao alcance do público, a partir de por meios eletrônicos, em especial mediante acesso on-line pela Web;
- c) Permitir a quem a ela tiver acesso, por meios eletrônicos, inclusive pela Internet, que a reproduza, dela extraíndo cópias, gratuita ou onerosamente, a critério da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar).