

**OTIMIZAÇÃO DOS CAMPOS DE PROTEÇÃO NAS TÉCNICAS DE  
DESACOPLAMENTO DINÂMICO CONTÍNUO**

PAULO EDUARDO ZANNI JUNIOR

São Carlos – SP – Brasil

Setembro de 2023



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**OTIMIZAÇÃO DOS CAMPOS DE  
PROTEÇÃO NAS TÉCNICAS DE  
DESACOPLAMENTO DINÂMICO  
CONTÍNUO**

PAULO EDUARDO ZANNI JUNIOR

**Dissertação** apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de São Carlos como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

**Orientador:** Prof. Dr. Leonardo Kleber Castelano

São Carlos – SP – Brasil

Setembro de 2023



# BANCA EXAMINADORA

Dissertação do discente Paulo Eduardo Zanni Junior, intitulado “OTIMIZAÇÃO DOS CAMPOS DE PROTEÇÃO NAS TÉCNICAS DE DESACOPLAMENTO DINÂMICO CONTÍNUO”, apresentada ao Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal de São Carlos como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física, defendido perante a seguinte banca examinadora:

---

Prof. Dr. Leonardo Kleber Castelano

Universidade Federal de São Carlos

---

Prof. Dr. Felipe Fernandes Fanchini

Universidade Estadual Paulista

---

Prof. Dr. Victor Lopez Richard

Universidade Federal de São Carlos

Aprovado em: 15 de Setembro de 2023



# RESUMO

Neste projeto de pesquisa, nós investigamos o método conhecido como *desacoplamento dinâmico contínuo*, que baseia-se em utilizar campos externos aplicados continuamente para maximizar a fidelidade das operações lógicas quânticas que são realizadas em um qubit que sofre decoerência. Em nosso modelo, supomos um sistema quântico aberto, no qual um qubit interage continuamente com os seus arredores, e desta forma dizemos que o qubit está acoplado ao ambiente que o perturba de forma irreversível causando decoerência. O *desacoplamento dinâmico contínuo* nos diz que assumindo um operador de erro conhecido e um ambiente representado por um campo de bósons escalares a uma temperatura finita, a decoerência durante as operações lógicas pode ser eficientemente reduzida aplicando uma superposição de dois campos vetoriais externos: um girando ortogonalmente à direção do outro, que permanece estático. O principal objetivo deste projeto é aperfeiçoar o método encontrando as direções otimizadas dos campos externos que aplicados continuamente maximizem a fidelidade das operações lógicas realizadas em um qubit, e para isso precisaremos resolver numericamente a equação mestra do sistema – onde durante o processo de otimização os campos externos serão aplicados com direções (ângulos) variáveis – com o intuito de encontrarmos os melhores campos de proteção para uma dada operação lógica. Ao final, apresentamos os resultados que foram obtidos para um qubit em um ambiente com densidade espectral ôhmica, e discutiremos sobre os resultados obtidos.

**Palavras-chave:** Computação Quântica, Informação Quântica, Sistema Aberto, Decoerência Quântica, Desacoplamento Dinâmico, Desacoplamento Dinâmico Contínuo.



# ABSTRACT

In this research project, we investigate the method known as *continuous dynamical decoupling*, which is based on the use of continuously applied external fields to maximize the fidelity of quantum logical operations performed on a qubit experiencing decoherence. In our model, we assume an open quantum system in which a qubit continuously interacts with its surroundings, and thus we say that the qubit is coupled to the environment, which irreversibly disturbs it, causing decoherence. The *continuous dynamical decoupling* tells us that assuming a known error operator and an environment represented by a field of scalar bosons at a finite temperature, decoherence during logical operations can be efficiently reduced by applying a superposition of two external vector fields: one rotating orthogonally to the direction of the other, which remains static. The main objective of this project is to improve the method by finding optimized directions of external fields that, when continuously applied, maximize the fidelity of logical operations performed on a qubit. To achieve this, we will need to numerically solve the master equation of the system – where the external fields will be applied with variable directions (variable angles) during the optimization process – in order to find the best protective fields for a given logical operation. Finally, we present the results obtained for a qubit in an environment with ohmic spectral density and briefly discuss the findings.

**Keywords:** Quantum Computing, Quantum Information, Open System, Quantum Decoherence, Dynamical Decoupling, Continuous Dynamical Decoupling.



# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>Fundamentação Teórica</b>	<b>17</b>
2.1	Bits quânticos (qubits)	17
2.2	Operador densidade	18
2.3	Esfera de Bloch	23
2.4	Operações lógicas quânticas	25
2.5	Fidelidade	27
2.6	Formalismo de interação	29
2.7	Equação mestra de Redfield	32
<b>3</b>	<b>Modelo Teórico</b>	<b>35</b>
3.1	Desacoplando continuamente operações de um qubit	35
3.1.1	A equação mestra para um único reservatório	36
3.1.2	Proteção da operação lógica	40
3.1.3	Otimização do método	43
3.2	Classes independentes de erros	44
3.2.1	Equação mestra para reservatórios independentes	45
3.2.2	Erros independentes de decoerência, bit-flip e amplitude	47
3.2.3	Proteção contra classes independentes de erros	50
3.2.4	Otimização do método	53
<b>4</b>	<b>Resultados</b>	<b>55</b>
4.1	Caso para um reservatório	55
4.1.1	Um único erro em uma única direção	55
4.2	Caso para três reservatórios independentes	68

4.2.1	Erros de bit-flip, amplitude e decoerência . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>78</b>



# 1 Introdução

Atualmente, sabemos que a computação quântica apresentou ao mundo a possibilidade de uma revolução completa no poder de processamento dos computadores. Nesta nova computação, teoriza-se que certos problemas que levariam anos para serem resolvidos em supercomputadores clássicos podem ser resolvidos em poucos segundos. Isso é possível porque os computadores quânticos não são uma evolução dos clássicos, mas são construídos baseados em conceitos quânticos como superposição e emaranhamento, que podem fornecer uma vantagem computacional imensa em relação à computação clássica.

Neste projeto de pesquisa vamos investigar o desacoplamento dinâmico contínuo aplicado à proteção de erros de um qubit durante a realização de uma operação lógica. O desacoplamento dinâmico contínuo é um método sofisticado para tratar e superar os erros de decoerência intrínsecos aos qubits reais que são sistemas quânticos abertos e podem ser modelados estando acoplados a um reservatório térmico. Levando em consideração a importância do assunto, cuja relevância é fundamental para o progresso da computação quântica, realizamos um estudo teórico visando a otimização do método.

Há diferentes modelos de computação quântica em desenvolvimento (*gate-model* [1], *adiabatic* [2], *topological* [3], etc.) e para implementá-los fisicamente é necessário o qubit. Além dos qubits, outro aspecto de fundamental importância para a computação quântica são as portas lógicas, responsáveis por realizar operações que manipulam os estados dos qubits. Contudo, devido às limitações tecnológicas, estamos em uma era chamada *Noisy Intermediate-Scale Quantum* (NISQ) [4] em que os computadores quânticos possuem um número limitado de qubits e a tecnologia ainda não é completamente livre de erros. Assim, devemos nos preocupar com a qualidade dos qubits e, em particular, com a precisão com que podemos realizar operações através das portas lógicas.

Nesta dissertação, abordaremos o qubit como um sistema quântico aberto, ou seja, um sistema que está constantemente interagindo com seu ambiente. Assim, consideramos que o qubit está em contato com um reservatório térmico externo causando perturbações irreversíveis. Nesse contexto, descrevemos o qubit estando acoplado ao reservatório, sendo esse tipo de interação conhecido como banho térmico. Em um sistema quântico aberto – qubit interagindo com o ambiente – pode haver trocas de energia, matéria ou informação. Logo, é natural que ocorram ruídos externos, e nestas circunstâncias, não há como realizar

as operações lógicas necessárias para uma computação quântica com alta fidelidade, visto que os ruídos associados as descaracterizariam. Assim, estudar e encontrar alternativas de proteção contra tais ruídos são cruciais para o desenvolvimento da computação quântica em sua plenitude.

Na literatura, há alguns métodos amplamente discutidos capazes de prevenir e mitigar o efeito prejudicial da decoerência [5], sendo que os principais são os *códigos de correção de erros* [6, 7, 8], os *subespaços livres de erros* [9, 10, 11] e o *desacoplamento dinâmico* [12, 13, 14, 15]. Sem entrar em detalhes sobre os dois primeiros, vamos focar no desacoplamento dinâmico, que é um método que consiste em aplicar sequências periódicas de pulsos de controle instantâneos, cujo efeito é acabar com o acoplamento indesejado entre o sistema e o ambiente, mas para ser efetivo os pulsos devem ser tão curtos que comecem e terminem dentro do intervalo de tempo de correlação entre o qubit e o banho, de modo que os campos envolvidos devem ter altas frequências.

Alguns estudos relativamente recentes [16, 17, 18] aprimoraram o método do desacoplamento dinâmico, pois mostrou-se que o método – até então fundamentado através de pulsos de alta frequência para desacoplar o sistema do ambiente – pode ser realizado de uma forma mais adequada através de campos externos contínuos, e essa nova maneira de aplicar o método ficou conhecida como desacoplamento dinâmico contínuo. O método do desacoplamento dinâmico contínuo, uma vez que a estrutura de erro é conhecida, consiste em aplicar campos externos contínuos de alta frequência capazes de guiar a dinâmica do sistema quântico de forma controlada em uma escala de tempo rápida o suficiente para a realização de um protocolo desejado preservando o estado quântico do sistema. Assim, é possível realizar com alta fidelidade qualquer operação lógica em um qubit fracamente perturbado por um ambiente representado por um campo de bósons escalares a uma temperatura finita, pois desta forma, certos tipos de erros como a decoerência podem ser eficientemente reduzidos durante as operações lógicas. As amplitudes, frequências e direções desses campos são determinadas pela operação lógica pretendida, estrutura de erro e características do ambiente.

O principal objetivo deste projeto é otimizar as direções dos campos externos que aplicados continuamente maximizem a fidelidade de um estado quântico (qubit) que pode ou não estar sujeito a operações lógicas. Para isso, a nossa estratégia é resolver numericamente a equação mestra de Redfield que rege a dinâmica do sistema quântico – durante o processo de otimização os campos externos serão aplicados com parâmetros (direções) variáveis – com

o intuito de encontrarmos os melhores campos de proteção, uma vez que a estrutura de erro é conhecida. Para alcançarmos esse objetivo, nos baseamos no modelo teórico apresentado nos estudos [16, 17, 18] e, portanto, essa dissertação é de certa forma uma pequena extensão desses trabalhos, visto que a otimização será realizada a partir das equações apresentadas nesses estudos.

O método do desacoplamento dinâmico contínuo demonstrou-se efetivo, pois nesses estudos referenciados acima vários casos foram testados, e neste trabalho dedicaremos esforços para otimizar dois casos: i) qubit acoplado a um único reservatório, em que devemos ter o campo de proteção perpendicular ao vetor de erro, e portanto, a otimização do campo de controle estará restrito a um plano; ii) qubit acoplado a três reservatórios independentes, em que devemos ter dois campos de proteção perpendiculares entre si, e portanto, a otimização estará restrito a uma esfera unitária tridimensional. Em ambos os casos, nosso objetivo é fazer uma varredura (no plano e na esfera) para verificar se há direções que maximizem a fidelidade.

Para uma melhor compreensão, organizamos esta dissertação da seguinte forma: Na seção 2, apresentamos uma fundamentação teórica com conceitos básicos para entendermos o modelo teórico. Na seção 3, expomos as equações do modelo teórico que será investigado e discutimos a solução numérica e a otimização do problema. Na seção 4, apresentamos e discutimos os resultados obtidos. Na seção 5, apresentamos nossas conclusões.

## 2 Fundamentação Teórica

Nesta seção, apresentamos as ferramentas matemáticas e os conceitos importantes para bem entendermos o modelo teórico que será estudado e otimizado nesse trabalho. Mais especificamente, apresentaremos os bits quânticos, mostraremos como representá-los através do operador densidade, apresentaremos a esfera de Bloch e mostraremos como representar o estado geral de um qubit na esfera de Bloch através do operador densidade, abordaremos como uma operação lógica quântica é realizada, veremos o conceito de fidelidade, discutiremos o que é o formalismo de interação e a sua importância, e demonstraremos a equação mestra de Redfield que rege a dinâmica de sistemas quânticos abertos.

### 2.1 Bits quânticos (qubits)

Os computadores utilizados atualmente, denominados de computadores clássicos, são máquinas que processam informações através da manipulação de dados. A unidade básica de dado em um computador clássico é o dígito binário – **binary digit** – simplesmente chamado de bit. Um bit booleano pode assumir dois valores distintos, e geralmente são representado por 0 e 1, de forma que o seu estado sempre é ou 0 ou 1.

Sob outra perspectiva, a computação quântica é fundamentada em um conceito análogo, o bit quântico – **quantum bit** – simplesmente chamado de qubit. Por sua vez, o qubit é a unidade básica de dado em um computador quântico, sendo matematicamente definido como [19] um vetor unitário no espaço vetorial  $\mathbb{C}^2$ , cujos vetores da base computacional são denotados como

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

A principal diferença entre os bits e os qubits é que os qubits podem estar em estados diferentes de  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , pois um qubit pode existir em um contínuo de estados entre  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  até que uma medição seja feita. Isso ocorre porque é possível fazer uma combinação linear dos estados, frequentemente chamada de superposição,

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \quad \text{com} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 .$$

O requisito fundamental da mecânica quântica é que se fizermos uma medição em  $|\psi\rangle$  para ver se está em  $|0\rangle$  ou  $|1\rangle$ , o resultado será  $|0\rangle$  ( $|1\rangle$ ) com a probabilidade  $|\alpha|^2$  ( $|\beta|^2$ ), e o estado imediatamente após a medição será  $|0\rangle$  ( $|1\rangle$ ).

É importante dizer que na computação clássica os bits são implementados fisicamente pelos transistores. Entretanto, os qubits utilizados na computação quântica são baseados em diferentes realizações físicas (supercondutor [20], íon aprisionado [21], spin do elétron [22], etc.), e apesar das diferentes possibilidades de implementação, atualmente os qubits apresentam inúmeras fontes de erros, e portanto, muitos avanços ainda são necessários.

Os qubits [23], quando completamente isolado do ambiente em um estado quântico, obedecem as leis da mecânica quântica. Em um estado quântico, os qubits realizam cálculos aproveitando fenômenos da mecânica quântica como superposição e emaranhamento. Um sistema quântico isolado que exhibe propriedades de superposição e emaranhamento é dito estar em um estado de coerência quântica. Os computadores quânticos somente podem realizar cálculos úteis em um estado de coerência quântica. Mesmo a menor das interações com o ambiente faz com que o sistema quântico decoerencie lentamente, então os qubits devem ser completamente isolados e mantidos em baixa temperatura. Uma perda de coerência quântica é chamada de decoerência quântica.

## 2.2 Operador densidade

Em mecânica quântica, um sistema é descrito por um vetor de estado  $|\psi\rangle$  ou um operador densidade  $\rho$  que permite prever estatisticamente o sistema no futuro. Embora sejam matematicamente equivalentes à abordagem do operador densidade fornece uma linguagem muito mais conveniente para pensarmos sobre alguns cenários comumente encontrados na mecânica quântica. A representação da mecânica quântica em termos do operador densidade é útil quando se trata de sistemas abertos onde o sistema é perturbado por fatores externos indesejados.

Supondo que um sistema quântico esteja no estado  $|\psi(t)\rangle$ , o operador densidade deste sistema é definido matematicamente pela equação

$$\rho(t) \equiv |\psi(t)\rangle \langle\psi(t)| ,$$

representado na base  $\{|\phi_n\rangle\}$  por uma matriz chamada Matriz Densidade cujos elementos são

dados por

$$\rho_{mn}(t) = \langle \phi_m | \rho(t) | \phi_n \rangle = \alpha_m^* \alpha_n ,$$

e o valor médio de um operador  $P$  pode ser escrito como,

$$\langle P(t) \rangle = \sum_n \sum_m \langle \phi_m | \rho(t) | \phi_n \rangle \langle \phi_n | P | \phi_m \rangle = \text{Tr}\{\rho(t)P\} = \text{Tr}\{P\rho(t)\} ,$$

pois  $\sum_n |\phi_n\rangle \langle \phi_n| = 1$  e  $\sum_m \langle \phi_m | A | \phi_m \rangle = \text{Tr}\{A\}$ . Assim, vemos que podemos calcular os valores esperados para qualquer observável através de uma operação simples de multiplicação de matrizes e respectivo traço, onde  $\text{Tr}$  indica o traço – a soma dos elementos diagonais da matriz.

Uma vez que a linguagem do operador densidade e a linguagem do vetor de estado são equivalentes, pois ambas fornecem os mesmos resultados, todos os postulados da mecânica quântica podem ser reformulados em termos da linguagem do operador de densidade.

Desta forma, podemos deduzir equação que expressa a evolução temporal do operador densidade  $\rho(t)$ . Para isto, começamos tomando a sua derivada temporal,

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \frac{d}{dt}\left(|\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|\right).$$

Pela regra do produto da derivada temos,

$$\dot{\rho}(t) = \frac{d}{dt}\left(|\psi(t)\rangle\right)\langle \psi(t)| + |\psi(t)\rangle \frac{d}{dt}\left(\langle \psi(t)|\right).$$

Utilizando a equação de Schrödinger,

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar}H(t)|\psi(t)\rangle ,$$

e substituindo na equação anterior, segue-se que

$$\dot{\rho}(t) = \frac{1}{i\hbar}\left\{H(t)|\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| - |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| H(t)\right\},$$

que também pode ser escrito como,

$$\dot{\rho}(t) = \frac{1}{i\hbar} \left\{ H(t)\rho(t) - \rho(t)H(t) \right\}.$$

E usando a relação de comutação de operadores  $[A, B] = AB - BA$ , onde  $A$  e  $B$  são duas matrizes quaisquer de mesma dimensão, reescrevemos a equação de forma mais compacta,

$$\dot{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar} [H(t), \rho(t)],$$

sendo conhecida como equação de Liouville-von Neumann.

Um operador  $\rho$  é chamado de operador de densidade se, e somente se, satisfaz as seguintes condições [19, 24]:

1.  $\rho$  tem traço igual a um.
2.  $\rho$  é um operador positivo.

A primeira nos traz a condição de que o traço de  $\rho$  deve ser sempre igual a 1, isto é, temos a conservação da probabilidade.

Prova 1:

Supondo que  $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$  é um operador densidade onde  $p_i$  é a probabilidade do sistema estar no  $i$ -ésimo estado. Então

$$\text{Tr}(\rho) = \sum_i p_i \text{Tr}(|\psi_i\rangle \langle \psi_i|) = \sum_i p_i = 1,$$

e portanto, a condição do traço  $\text{Tr}(\rho) = 1$  é satisfeita.

A segunda nos traz a condição de positividade, isto é, um operador tem que ser sempre positivo, além de ser Hermitiano ( $\rho = \rho^{*T} \equiv \rho^\dagger$ ), onde  $*$  é o complexo conjugado da matriz e  $T$  representa a operação de transposição da matriz, positiva semidefinida, de forma que todos os autovalores de  $\rho$  sejam maiores ou igual a zero.

Prova 2:

Supondo que  $|\phi\rangle$  é um vetor arbitrário no espaço de estado. Então

$$\langle \phi | \rho | \phi \rangle = \sum_i p_i \langle \phi | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \phi \rangle = \sum_i p_i |\langle \phi | \psi_i \rangle|^2 \geq 0,$$

e portanto, a condição da positividade é satisfeita.

Assim, apresentamos e provamos as duas condições, que nos dizem que o operador densidade é um operador Hermitiano, positivo e de traço igual a 1.

Um conceito importante que também devemos abordar é o conceito de estados puros e estados mistos [19, 24, 25]. Um conjunto de estados quânticos pode ser constituído de estados puros ou pode ser composto por uma mistura estatística. Um conjunto constituído por estados puros é constituído por estados idênticos, de forma que a dinâmica do todo é equivalente a dinâmica de um único elemento do conjunto. Definimos um estado puro como  $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$  e em um estado puro temos  $\text{Tr}(\rho^2) = 1$ , e portanto,  $\text{Tr}(\rho^2) = \text{Tr}(\rho) = 1$ . Em contraste, definimos um estado misto como  $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$  onde  $p_i$  é a probabilidade do sistema estar em cada estado e em uma mistura estatística temos  $\text{Tr}(\rho^2) < 1$ . Desta forma, para verificarmos a pureza do operador densidade, basta verificarmos o resultado de quadrado de traço do operador densidade  $\text{Tr}(\rho^2)$ , se for igual a 1 o estado é puro, e se for menor que 1 é uma mistura estatística.

Além disso, uma importante operação é o traço parcial, útil quando um sistema quântico é constituído por vários subsistemas, como por exemplo o qubit (subsistema 1) mais o reservatório (subsistema 2). O traço parcial, também chamado de operador densidade reduzido, é definido por

$$\rho^A \equiv \text{Tr}_B\{\rho^{AB}\}$$

$$\rho^B \equiv \text{Tr}_A\{\rho^{AB}\},$$

onde podemos ver que o operador densidade de subsistema A(B) é definido a partir do traço do subsistema B(A). Desta forma, a operação traço parcial fornece a informação quântica de cada subsistema de forma separada, sendo a forma mais adequada de analisar as propriedades quânticas dos sistemas compostos. O traço parcial do sistema B(A) é dado por

$$\text{Tr}_B\{\rho^{AB}\} = \text{Tr}_B\{|a_1 b_1\rangle \langle a_2 b_2|\} = |a_1\rangle \langle a_2| \text{Tr}_B\{|b_1\rangle \langle b_2|\}$$

$$\text{Tr}_A\{\rho^{AB}\} = \text{Tr}_A\{|a_1 b_1\rangle \langle a_2 b_2|\} = |b_1\rangle \langle b_2| \text{Tr}_A\{|a_1\rangle \langle a_2|\},$$

sendo que os vetores desta equação correspondem aos vetores de estado de cada subsistema.

De forma geral, um qubit é um sistema quântico de dois níveis, e conforme dito anteriormente podem ser representados como  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ , onde  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ , de forma que o operador densidade na base computacional  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  pode ser escrito como

$$\rho = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix}.$$

O estado geral de um qubit, na representação do operador densidade, pode ser escrito como [26] uma combinação linear da matriz identidade mais as matrizes de Pauli,

$$\rho = \frac{1}{2} \left( I + b\sigma_x + c\sigma_y + d\sigma_z \right),$$

onde

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Assim, o operador densidade pode ser definido de tal forma que,

$$\rho = \frac{1}{2} \left( I + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right),$$

onde

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_x \hat{\mathbf{x}} + \sigma_y \hat{\mathbf{y}} + \sigma_z \hat{\mathbf{z}},$$

e  $\mathbf{r}$  é um vetor de três dimensões com  $|\mathbf{r}| = 1$ , sendo o vetor  $\mathbf{r}$  conhecido como o vetor de Bloch, uma vez que qualquer estado de um qubit pode geometricamente representado na esfera de Bloch. Assim, como  $|\mathbf{r}| = 1$ , podemos definir  $\mathbf{r}$  como sendo dado por,

$$\hat{\mathbf{r}} = \sin(\theta) \cos(\phi) \hat{\mathbf{x}} + \sin(\theta) \sin(\phi) \hat{\mathbf{y}} + \cos(\theta) \hat{\mathbf{z}}.$$

onde  $\hat{\mathbf{r}}$  é um vetor unitário real escrito em termos de dois angulos esféricos polares.

## 2.3 Esfera de Bloch

A esfera de Bloch é uma representação geométrica para os estados quânticos de um único qubit. Ela é uma esfera unitária no espaço tridimensional em que cada ponto na superfície corresponde a um estado quântico possível do qubit. A direção do vetor que conecta o centro da esfera a um ponto na superfície representa a orientação do qubit. Os estados  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  são representados pelos polos norte e sul da esfera, respectivamente, enquanto os estados superpostos são representados por pontos intermediários. A esfera de Bloch é usada para visualizar e descrever operações quânticas.

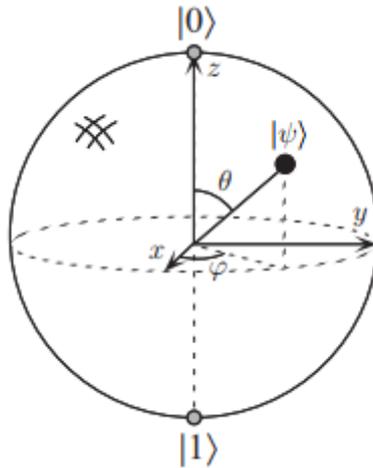


Figura 1: Um qubit no estado  $|\psi\rangle$  representado na esfera de Bloch (imagem retirada da referência [24]).

Podemos reescrever o estado de um qubit dado pela equação  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  fazendo  $\alpha = ae^{ir_0}$  e  $\beta = be^{ir_1}$ , onde  $a$  e  $b$  são números reais e  $r_0$  e  $r_1$  são raios que ligam a origem ao estado  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , respectivamente. Fazendo essa substituição, temos

$$|\psi\rangle = ae^{ir_0}|0\rangle + be^{ir_1}|1\rangle,$$

multiplicando por  $e^{-ir_0}$ , temos

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + be^{i(r_1-r_0)}|1\rangle,$$

chamando de  $\phi = r_1 - r_0$ , temos

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + be^{i\phi}|1\rangle,$$

onde  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . Chamando  $a = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$  e  $b = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ , temos a representação de estado de um qubit da equação  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  na esfera de Bloch como

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle,$$

onde  $\theta$  e  $\phi$  são variáveis reais que definem um ponto na esfera unitária tridimensional. A matriz densidade que representa esse estado é dada por

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|,$$

onde escrevendo de forma explícita, temos

$$\rho = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\langle 0| + e^{-i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\langle 1|\right),$$

fazendo as devidas manipulações matemáticas, temos

$$\rho = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle\langle 0| + e^{-i\phi}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle\langle 1| + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle\langle 0| + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle\langle 1|,$$

sendo que  $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ , chamando  $x = \frac{\theta}{2}$ , temos  $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin(\theta)$ , e substituindo na equação temos

$$\rho = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}e^{-i\phi}\sin(\theta)|0\rangle\langle 1| + \frac{1}{2}e^{i\phi}\sin(\theta)|1\rangle\langle 0| + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle\langle 1|,$$

que escrevendo explicitamente em forma de matriz fica

$$\rho = \begin{pmatrix} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) & \frac{1}{2}e^{-i\phi}\sin(\theta) \\ \frac{1}{2}e^{i\phi}\sin(\theta) & \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix},$$

onde podemos ver que o traço é igual a 1 pela soma dos elementos da diagonal, e pelos elementos fora de diagonal podemos ver que é hermitiano, isto é,  $\rho = \rho^\dagger$ ; É possível demonstrar também que  $\rho$  é sempre positivo.

## 2.4 Operações lógicas quânticas

As operações lógicas quânticas são transformações unitárias ( $XX^\dagger = X^\dagger X = I$ ) aplicadas aos estados quânticos, no caso os qubits, sendo que essas operações são responsáveis por manipular e evoluir tais estados quânticos. As operações lógicas quânticas, muitas vezes chamadas de portas quânticas, podem ser representadas por matrizes unitárias ( $X^{-1} = X^\dagger$ ) que atuam nos qubits realizando uma variedade de transformações, como rotações, inversões, superposições e emaranhamentos. As operações mais comumente utilizadas são as portas de Pauli (X, Y, Z), a porta de Hadamard (H) e as portas de controle (Control-NOT, por exemplo).

No contexto da computação quântica, é possível definir um conjunto universal de operações lógicas quânticas, isto é, um conjunto mínimo de operações que podem ser utilizados para construir qualquer outra operação lógica quântica. Há diversas portas, e portanto, há diversas maneiras de construir os conjuntos universais. Sendo assim, é importante notar que, embora diferentes conjuntos universais possam ser utilizados, eles têm o mesmo poder computacional, ou seja, são capazes de realizar qualquer operação lógica quântica. A escolha de um determinado conjunto universal pode depender de fatores como a facilidade de implementação experimental, o número de portas necessárias ou a eficiência em termos de recursos quânticos.

A seguir, em termos das matrizes de Pauli, mostraremos as representações matriciais e os respectivos operadores de evolução temporal das operações lógicas quânticas mais usuais, como as portas de Pauli (X, Y, Z) e a porta de Hadamard (H). Inicialmente, consideremos a porta Identidade (I) atuando na base de vetores da seguinte forma,  $I : |0\rangle \rightarrow |0\rangle, |1\rangle \rightarrow |1\rangle$ , sendo a matriz que representa essa porta dada por

$$I = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Similarmente, nós também temos que  $X : |0\rangle \rightarrow |1\rangle, |1\rangle \rightarrow |0\rangle$ ,  $Y : |0\rangle \rightarrow i|1\rangle, |1\rangle \rightarrow -i|0\rangle$ , e  $Z : |0\rangle \rightarrow |0\rangle, |1\rangle \rightarrow -|1\rangle$ , sendo as matrizes que representam essas portas dadas por

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_x, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_y \quad e \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_z.$$

Em geral, qualquer porta unitária de um qubit pode ser expressa como  $U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}At}$ , onde  $A$  é uma matriz Hermitiana que representa a operação desejada. Usando a expansão em série de Taylor-Maclaurin podemos escrever  $U(t) = e^{-i\theta A} = \cos(\theta)I - i \sin(\theta)A$ . Desta forma, dada uma matriz que representa uma determinada operação lógica, podemos encontrar o operador evolução temporal correspondente, e assim temos que

$$\begin{aligned} U_X(t) &= e^{-\frac{i}{\hbar}t\sigma_x} = \cos\left(\frac{t}{\hbar}\right)I - i\sigma_x \sin\left(\frac{t}{\hbar}\right), \\ U_Y(t) &= e^{-\frac{i}{\hbar}t\sigma_y} = \cos\left(\frac{t}{\hbar}\right)I - i\sigma_y \sin\left(\frac{t}{\hbar}\right), \\ U_Z(t) &= e^{-\frac{i}{\hbar}t\sigma_z} = \cos\left(\frac{t}{\hbar}\right)I - i\sigma_z \sin\left(\frac{t}{\hbar}\right). \end{aligned}$$

A matriz que representa a operação de Hadamard é dada por

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{\sqrt{2}},$$

e o seu respectivo operador evolução temporal é

$$U_H(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}t\frac{\sigma_x + \sigma_z}{\sqrt{2}}} = \cos\left(\frac{t}{\hbar}\right)I - i\frac{\sigma_x + \sigma_z}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{t}{\hbar}\right).$$

Ao aplicarmos uma determinada operação lógica em um qubit, desejamos levar qubit de um estado inicial para um estado final, e isso acontece em um determinado período de tempo. Assim, definimos um ciclo completo de uma operação lógica quando

$$t = \frac{\hbar\pi}{2},$$

pois nesse tempo as mudanças necessárias no estado do qubit ocorrem por completo resultando no estado final desejado. Assim, a dinâmica de um qubit no estado  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  sob ação de uma determinada porta  $A$ , por exemplo, é dada por

$$U_A(t)|\psi\rangle = U_A\left(\frac{\hbar\pi}{2}\right)\left[\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle\right].$$

Segue alguns exemplos de aplicações das portas para alguns casos específicos,

$$U_X\left(\frac{\hbar\pi}{2}\right)\left[\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle\right] = -i\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix},$$

$$U_Z\left(\frac{\hbar\pi}{2}\right)\left[\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle\right] = -i\begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix},$$

e para o caso da operação de Hadamard temos

$$U_H\left(\frac{\hbar\pi}{2}\right)|0\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}},$$

$$U_H\left(\frac{\hbar\pi}{2}\right)|1\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

No geral, as operações lógicas quânticas permitem a execução de algoritmos quânticos, como o algoritmo de Grover e o algoritmo de Shor, que têm aplicações em criptografia, otimização, simulação de sistemas quânticos, entre outros. Além disso, as operações lógicas quânticas são essenciais para a implementação de circuitos quânticos e a construção de computadores quânticos escaláveis. No entanto, é importante ressaltar que as operações lógicas quânticas também estão sujeitas a erros devido ao ruído e às imperfeições dos qubits físicos. Portanto, a correção de erros quânticos e a implementação de técnicas de tolerância a falhas são desafios importantes na construção de sistemas de computação quântica confiáveis e robustos.

## 2.5 Fidelidade

A fidelidade dos estados quânticos é uma medida de quão bem um estado quântico é preservado durante uma determinada operação ou processo. A fidelidade caracteriza a concordância entre o resultado real da operação e o estado desejado, e de forma geral depende do estado inicial sobre o qual a operação é aplicada. Podemos ainda dizer que a fidelidade é uma forma de mensurar a proximidade entre dois estados quânticos, e por isso muitas vezes é usada para avaliar a qualidade das operações lógicas quânticas que são realizadas para manipular os qubits.

A definição da fidelidade [27] é uma questão de livro de texto padrão. Dado dois operadores densidades  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , a fidelidade é geralmente definida como

$$F(\rho_1, \rho_2) = \left( \text{Tr} \sqrt{\sqrt{\rho_1} \rho_2 \sqrt{\rho_1}} \right)^2.$$

No caso especial em que  $\rho_1$  e  $\rho_2$  representam estados quânticos puros, ou seja,  $\rho_1 = |\psi_1\rangle \langle \psi_1|$  e  $\rho_2 = |\psi_2\rangle \langle \psi_2|$ , a definição se reduz à

$$F(\rho_1, \rho_2) = \text{Tr}(\rho_1 \rho_2) = |\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|^2.$$

E no caso em que apenas um dos dois estados é puro, temos

$$F(\rho_1, \rho_2) = \text{Tr}(\rho_1 \rho_2) = \langle \psi_1 | \rho_2 | \psi_1 \rangle,$$

onde  $\rho_1$  é o estado puro.

A fidelidade das operações lógicas em sistemas abertos é calculada comparando o operador densidade *ideal*, com o operador densidade *perturbado*. No caso ideal, os qubits não estão acoplados a outros sistemas e suas dinâmicas são unitárias. No caso perturbado, os qubits estão acoplados a outros sistemas externos, de forma que suas dinâmicas podem ou não ser unitárias dependendo da condição inicial dos qubits, da operação lógica desejada e da simetria do acoplamento com os outros sistemas. Além disso, na maioria dos casos de computação quântica, a condição inicial do sistema é dada por um estado puro, de forma que o operador densidade ideal, que está sujeito a uma dinâmica unitária, também é puro. Assim, utilizando a equação para o caso dos estados puros, escrevemos a fidelidade das operações lógicas quânticas como

$$F(t) = \text{Tr}[\rho_I(t) \rho_P(t)],$$

onde  $\rho_I(t)$  é a dinâmica do operador densidade ideal, e  $\rho_P(t)$  é o operador densidade perturbado. Através da fidelidade quantificaremos a eficiência das operações lógicas quânticas, calculando, em função do tempo quão distante estão os resultados perturbados dos estados quânticos desejados.

A definição geral da fidelidade traz consigo algumas propriedades importantes. Uma dessas propriedades nos diz que a fidelidade é simétrica em seus argumentos, ou seja,  $F(\rho_1, \rho_2) = F(\rho_2, \rho_1)$ , embora não seja óbvio de visualizar na definição. Além disso, temos

que  $F(\rho_1, \rho_2) \in [0, 1]$ , e temos o caso  $F(\rho_1, \rho_2) = 1$ , se e somente se,  $\rho_1 = \rho_2$ . Outra importante propriedade é que  $F(\rho_1, \rho_2)$  é invariante por transformações unitárias no espaço dos estados, ou seja,  $F(\rho_1, \rho_2) = F(U\rho_1U^*, U\rho_2U^*) = F(\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2)$ , para qualquer operador unitário  $U$ , onde  $\tilde{\rho}_j = U\rho_jU^*$ . Essa última propriedade nos permite calcular a fidelidade diretamente no formalismo de interação.

## 2.6 Formalismo de interação

A evolução temporal de sistemas quânticos é descrita pela teoria da mecânica quântica, que descreve o comportamento de partículas subatômicas e sistemas quânticos em geral. A evolução temporal de um determinado sistema quântico pode aparecer representada de várias formas diferentes, sendo essas diversas formas conhecidas como formalismos. Os principais são o *formalismo de Schrödinger* e o *formalismo de Heisenberg*, mas além destas duas descrições há uma terceira, conhecida como *formalismo de interação*.

No formalismo de Schrödinger, o estado do sistema evolui no tempo, enquanto os operadores (observáveis) permanecem inalterados. Por outro lado, no formalismo de Heisenberg, são os operadores (observáveis) que evoluem no tempo, enquanto o estado do sistema permanece inalterado. Ambas as representações são equivalentes e fornecem descrições precisas dos sistemas quânticos, mas cada uma possui vantagens e desvantagens dependendo do problema específico a ser resolvido. Desta forma, quando um sistema quântico está em interação com um ambiente externo, a evolução temporal é melhor descrita no formalismo de interação, que combina características das representações de Schrödinger e Heisenberg, tornando-se especialmente útil para tratar de sistemas que envolvem interações [28].

Consideremos um sistema quântico em que o operador hamiltoniano é escrito como a soma de duas partes,

$$H(t) = H_s + H_i(t),$$

onde  $H_s$  é o hamiltoniano do sistema e  $H_i(t)$  é o hamiltoniano de interação que acopla o sistema ao reservatório. A equação para um hamiltoniano dependente do tempo na representação de Schrödinger é dada por

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle = [H_s + H_i(t)] |\psi(t)\rangle.$$

Isso nos permite introduzir um operador de evolução temporal unitário  $U_s(t, t_0) = e^{\frac{i}{\hbar} H_s(t-t_0)}$  associado somente à  $H_s$ . Com isso, definimos

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = U_s(t, t_0) |\psi(t)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar} H_s(t-t_0)} |\psi(t)\rangle,$$

onde o vetor  $|\tilde{\psi}(t)\rangle$  representa o sistema quântico de forma idêntica, visto que ambos estados são iguais a menos de uma fase global. Observando-se que a um operador  $P$  na representação de Schrödinger pode ser escrito como

$$\langle P \rangle = \langle \psi(t) | P | \psi(t) \rangle,$$

podemos reescrevê-lo na representação de interação como

$$\langle P \rangle = \langle \tilde{\psi}(t) | \tilde{P} | \tilde{\psi}(t) \rangle,$$

implicando em

$$\tilde{P} = U_s(t, t_0) P U_s^\dagger(t, t_0) = e^{\frac{i}{\hbar} H_s(t-t_0)} P e^{-\frac{i}{\hbar} H_s(t-t_0)},$$

onde  $\tilde{P}$  representa, então, o operador  $P$  no formalismo de interação.

A dinâmica neste formalismo pode ser facilmente calculada diferenciando  $|\tilde{\psi}(t)\rangle$  em relação ao tempo, pois calculando sua derivada temporal temos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\tilde{\psi}(t)\rangle = -H_s |\tilde{\psi}(t)\rangle + e^{\frac{i}{\hbar} H_s(t-t_0)} [H_s + H_i(t)] |\psi(t)\rangle,$$

onde o primeiro termo no lado direito da equação surge da diferenciação da função exponencial, e o segundo termo surge da diferenciação do vetor de estado que em seguida foi substituído pelo lado direito da equação de Schrödinger para aparecer o hamiltoniano. Assim, reescrevendo para simplificar ficamos com

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\tilde{\psi}(t)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar} H_s(t-t_0)} H_i(t) |\psi(t)\rangle,$$

implicando em

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\tilde{\psi}(t)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar} H_s(t-t_0)} H_i(t) e^{-\frac{i}{\hbar} H_s(t-t_0)} |\tilde{\psi}(t)\rangle,$$

e reescrevendo temos a forma final

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\tilde{\psi}(t)\rangle = \tilde{H}_i(t) |\tilde{\psi}(t)\rangle,$$

onde  $\tilde{H}_i(t)$  é o hamiltoniano de interação no formalismo de interação e  $|\tilde{\psi}(t)\rangle$  representa o sistema quântico. Assim, podemos estudar as dinâmicas impostas pelo hamiltoniano de interação, desprezando as dinâmicas impostas pelo hamiltoniano do sistema. De fato, quando  $H_i(t) = 0$ , o estado quântico representado no formalismo de interação é constante no tempo.

No formalismo de interação, o estado do sistema muitas vezes é descrito pelo operador de densidade, desta forma podemos escrever o operador densidade no formalismo de interação como

$$\tilde{\rho}(t) = |\tilde{\psi}(t)\rangle \langle \tilde{\psi}(t)|,$$

e podemos calcular a sua dinâmica nesse formalismo

$$\frac{d\tilde{\rho}(t)}{dt} = \frac{d|\tilde{\psi}(t)\rangle}{dt} \langle \tilde{\psi}(t)| + |\tilde{\psi}(t)\rangle \frac{d\langle \tilde{\psi}(t)|}{dt},$$

de forma que fazendo uma simples substituição temos

$$\frac{d\tilde{\rho}(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \tilde{H}_i(t) |\tilde{\psi}(t)\rangle \langle \tilde{\psi}(t)| + \frac{i}{\hbar} |\tilde{\psi}(t)\rangle \langle \tilde{\psi}(t)| \tilde{H}_i(t),$$

simplificando a notação, reescrevemos a equação de forma mais compacta, e obtemos a dinâmica do operador densidade no formalismo de interação,

$$\frac{d\tilde{\rho}(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\tilde{H}_i(t), \tilde{\rho}(t)].$$

## 2.7 Equação mestra de Redfield

Sistemas quânticos abertos, são sistemas quânticos que interagem com um ambiente externo e, portanto, estão sujeitos a perda ou ganho de energia e informações. Enquanto sistemas quânticos isolados são tratados de forma unitária, ou seja, suas evoluções são regidas por operadores unitários reversíveis, sistemas quânticos abertos apresentam uma evolução não unitária, com perda de coerência e informações para o ambiente circundante. A descrição matemática dos sistemas quânticos abertos é feita através de uma expressão denominada de *equação mestra*, que governa a evolução do operador densidade do sistema. As principais equações mestras que descrevem a evolução de sistemas quânticos abertos são a equação mestra de Lindblad e a equação mestra de Redfield. O modelo teórico apresentado na próxima seção, que será a base para todas as dinâmicas calculadas nesta tese, baseia-se na equação mestra de Redfield.

A equação mestra de Redfield é um importante conceito na teoria quântica de sistemas abertos e é usada para descrever a dinâmica temporal de sistemas quânticos que interagem com um ambiente externo termal, muitas vezes chamados de banho térmico, cuja validade da equação ocorre em situações nas quais as interações com o ambiente são fracas e de curto alcance. Devido a essas limitações, em sistemas com interações fortes com o ambiente ou em casos em que a escala de tempo das interações ambientais é comparável à do sistema, outras técnicas mais avançadas – como a equação mestra de Lindblad – são frequentemente usadas para obter resultados mais precisos.

A forma geral de um hamiltoniano que reproduz um sistema acoplado a um reservatório externo pode ser escrita como

$$H(t) = H_S(t) + H_R(t) + H_I(t),$$

onde  $H_S(t)$  é o hamiltoniano do sistema,  $H_R(t)$  é o hamiltoniano do reservatório, e  $H_I(t)$  é o hamiltoniano de interação, isto é, é o hamiltoniano que acopla de forma irreversível o reservatório ao sistema causando perturbações. O sistema quântico é geral, e podendo ser dado por spins, fótons, polarização da luz, entre outros. O reservatório pode ser dado por um banho de bósons, de spins, ou qualquer outro que acople com o sistema. A interação, por sua vez, perturba o sistema, e no contexto da computação quântica, gera os erros aos quais os qubits estão sujeitos.

Para demonstrarmos a equação mestra de Redfield, consideremos o hamiltoniano total do sistema quântico definido acima, cuja dinâmica total no formalismo de interação é dada por

$$\frac{d\tilde{\rho}(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\tilde{H}_I(t), \tilde{\rho}(t)],$$

onde definimos  $H_0(t)$  como sendo a soma dos termos desacoplados dados por  $H_0(t) = H_S(t) + H_R(t)$ , e assim temos

$$\tilde{H}_I(t) = \mathcal{U}_0^\dagger(t)H_I\mathcal{U}_0(t),$$

com

$$\mathcal{U}_0(t) = \exp(-iH_0(t)t/\hbar).$$

Assim, uma solução formal para a equação que rege a dinâmica do sistema quântico no formalismo de interação é dada por

$$\tilde{\rho}(t) = \tilde{\rho}(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' [\tilde{H}_I(t'), \tilde{\rho}(t')],$$

de forma que iterando obtemos uma solução aproximada

$$\frac{d\tilde{\rho}(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\tilde{H}_I(t), \tilde{\rho}(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' [\tilde{H}_I(t), [\tilde{H}_I(t'), \tilde{\rho}(t')]].$$

Assim, traçando as variáveis pertinentes ao reservatório obtemos

$$\frac{d\tilde{\rho}_S(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \text{Tr}_R \{[\tilde{H}_I(t), \tilde{\rho}(0)]\} - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_R \{[\tilde{H}_I(t), [\tilde{H}_I(t'), \tilde{\rho}(t')]]\}.$$

Na equação acima, uma vez que definimos  $\tilde{H}_I(t)$  como  $\mathcal{U}_0^\dagger(t)H_I\mathcal{U}_0(t)$ , temos que  $\tilde{H}_I(t)$  é dependente de  $H_S(t)$  e, portanto, sempre podemos fazer  $H_S(t)$  ser definido de uma maneira que o primeiro termo do lado direito da equação acima seja zero. Assim, para simplificar podemos reescrever a equação como

$$\frac{d\tilde{\rho}_S(t)}{dt} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' Tr_R \{ [\tilde{H}_I(t), [\tilde{H}_I(t'), \tilde{\rho}(t')]] \}.$$

A seguir, incluímos algumas aproximações para a equação acima. Uma vez que realizamos uma aproximação de segunda ordem, podemos supor que o operador densidade fatora para qualquer tempo  $t$ , em  $\tilde{\rho}(t') = \tilde{\rho}_S(t') \otimes \tilde{\rho}_R(0)$ , de forma que o operador densidade do reservatório é constante no tempo, ou seja, temos um reservatório com capacidade térmica infinita. Além disso, supomos que a escala de tempo característica da memória do sistema, representada pela integral na equação acima, é curta de tal maneira que o operador densidade do sistema é insignificamente diferente do seu valor atual, e por isso podemos substituir  $\tilde{\rho}(t') \rightarrow \tilde{\rho}(t)$ . Dessa forma, temos que a equação mestra de Redfield é dada por

$$\frac{d\tilde{\rho}_S(t)}{dt} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' Tr_R \{ [\tilde{H}_I(t), [\tilde{H}_I(t'), \tilde{\rho}_S(t) \otimes \tilde{\rho}_R(0)]] \}.$$

É importante frisar que a equação mestra de Redfield, apesar de ser local no tempo, já que envolve somente  $\tilde{\rho}_S(t)$ , é não Markoviana, visto que esta ainda contém uma referência explícita com o tempo inicial e o tempo local. A aproximação Markoviana é escrita substituindo o limite superior da integral por  $\infty$ , de forma que desta maneira excluimos da dinâmica toda referência com o tempo passado.

### 3 Modelo Teórico

Nesta seção, apresentamos o modelo teórico utilizado como base deste trabalho, expomos as equações do sistema físico que será investigado e discutimos sobre a otimização do problema em questão. É importante ressaltar que este trabalho de mestrado baseia-se nos estudos [16, 17, 18], visto que o modelo teórico apresentado abaixo foi desenvolvido nesses estudos, e a nossa contribuição é apenas a otimização do método. A seguir, dividimos essa seção da seguinte forma: na subseção 3.1 apresentamos o desacoplamento dinâmico contínuo para um qubit acoplado a um único reservatório que causa um tipo de erro e discutimos como pretendemos otimizar o método, e na subseção 3.2 apresentamos o desacoplamento dinâmico contínuo para um qubit acoplado a três reservatórios independentes que causam três tipos de erros independentes (decoerência, bit-flip e amplitude) e discutimos como pretendemos otimizar o método.

#### 3.1 Desacoplando continuamente operações de um qubit

Há como fazer modelos para um ou mais qubits acoplados a um ou mais reservatórios térmicos. Nesta subseção vamos apresentar o caso em que apenas um qubit está acoplado a um único reservatório.

Inicialmente, consideremos um qubit acoplado a um reservatório térmico a uma temperatura finita. O reservatório será representado por um campo escalar de bósons que interage continuamente com o qubit causando ruídos externos. Esses ruídos naturalmente interferem nos estados dos qubits causando certos tipos de erros. Uma vez que sabemos qual é a estrutura de erro que age nesse qubit, podemos aplicar uma superposição de campos externos de altas frequências, capazes de proteger o qubit em seu estado inicial ou enquanto realiza-se qualquer operação lógica. Para a efetividade do método, a interação entre o qubit e o reservatório deve ser fraca de forma que uma teoria de perturbação possa ser aplicada, e as dinâmicas controladas devem ser mais rápidas que o tempo médio de correlação do reservatório, ou seja, o tempo que o reservatório interage com o sistema físico. As amplitudes, frequências e as direções desses campos externos contínuos de altas frequências são determinadas pela operação lógica pretendida, pela estrutura de erro ao qual o qubit está sujeito e pelas características do meio ambiente.

### 3.1.1 A equação mestra para um único reservatório

A seguir, vamos mostrar a equação mestra para um qubit acoplado a um único reservatório. Para isso, começamos notando que o Hamiltoniano total do sistema (qubit+reservatório), na representação de Schrödinger, é dado por

$$H(t) = H_C(t) + H_R + H_I, \quad (1)$$

onde  $H_C(t)$  é o Hamiltoniano de controle,  $H_R = \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k$  é o Hamiltoniano do reservatório e  $H_I$  é o Hamiltoniano de interação, o qual pode ser escrito como

$$H_I = (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\sigma})B + (\boldsymbol{\lambda}^* \cdot \boldsymbol{\sigma})B^\dagger, \quad (2)$$

onde  $\boldsymbol{\lambda}$  é o vetor de erro cujas componentes podem ser complexas e  $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_x \hat{\boldsymbol{x}} + \sigma_y \hat{\boldsymbol{y}} + \sigma_z \hat{\boldsymbol{z}}$ , sendo  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  as matrizes de Pauli. O operador que atua no banho de bósons é dado por  $B = \sum_k g_k a_k$ , onde  $g_k$  é um número complexo que representa a constante de acoplamento para o modo normal  $k$  com dimensão de frequência e  $a_k$  é o operador que aniquila um quantum no modo  $k$  do reservatório. Para facilitar as contas, de agora em diante, utilizamos  $\hbar = 1$ .

Em seguida, calculamos o Hamiltoniano de controle, que pode ser obtido através da diferenciação do operador de evolução expresso por,

$$\mathcal{U}(t) = I \cos[\alpha(t)] - i \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{u}}(t) \sin[\alpha(t)], \quad (3)$$

onde  $I$  é a matriz identidade  $2 \times 2$ ,  $\alpha(t)$  é uma função do tempo  $t$ ,  $\hat{\boldsymbol{u}}(t)$  é um vetor unitário dependente do tempo. Logo, o Hamiltoniano de controle  $H_C(t)$  é obtido através da diferenciação da equação (3) da seguinte maneira:

$$H_C(t) = i \frac{d\mathcal{U}(t)}{dt} \mathcal{U}^\dagger(t) = \boldsymbol{\Omega}(t) \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (4)$$

com

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt} \hat{\boldsymbol{u}}(t) + \sin[\alpha(t)] \cos[\alpha(t)] \frac{d\hat{\boldsymbol{u}}(t)}{dt} + \sin^2[\alpha(t)] \hat{\boldsymbol{u}}(t) \times \frac{d\hat{\boldsymbol{u}}(t)}{dt} \quad (5)$$

onde  $\mathcal{U}^\dagger(t)$  é o hermitiano conjugado de  $\mathcal{U}(t)$  e o cálculo de  $\mathbf{\Omega}(t)$  é direto.

Pela referência [29], temos que a equação mestra de segunda ordem, local no tempo, que descreve a evolução da matriz do operador densidade do qubit, no formalismo de interação, é escrita como

$$\frac{d\tilde{\rho}(t)}{dt} = - \int_0^t dt' \text{Tr}_R \{ [\tilde{H}_I(t), [\tilde{H}_I(t'), \rho_R \tilde{\rho}(t)]] \}, \quad (6)$$

onde  $\tilde{H}_I(t)$  é o Hamiltoniano de interação no formalismo de interação, ou seja,

$$\tilde{H}_I(t) = \mathcal{U}^\dagger(t) \mathcal{U}_R^\dagger(t) H_I \mathcal{U}_R(t) \mathcal{U}(t), \quad (7)$$

com

$$\mathcal{U}_R(t) = \exp(-iH_R t), \quad (8)$$

onde

$$H_R = \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k \quad (9)$$

sendo  $\omega_k$  a frequência do modo normal  $k$  do reservatório térmico, e  $\mathcal{U}(t)$  é como na equação (3). É importante destacar que a equação mestra (6) é uma aproximação de segunda ordem em termos da constante de acoplamento, de forma que é válida no regime no qual o tamanho do acoplamento, expresso em unidades de frequência, multiplicado pelo tempo de correlação do reservatório térmico é muito menor que 1.

Acima,  $\rho_R$  é a matriz densidade inicial do reservatório térmico,

$$\rho_R = \frac{1}{Z} \exp(-\beta H_R), \quad (10)$$

onde  $Z$  é a função de partição que é dada por

$$Z = \text{Tr}_R [\exp(-\beta H_R)]. \quad (11)$$

Aqui,  $\beta = 1/k_B T$ , onde  $k_B$  é a constante de Boltzmann, e  $T$  é a temperatura absoluta do meio ambiente.

Na equação (2) temos o Hamiltoniano de interação  $H_I$ , que expressa a interação entre o qubit e seu meio ambiente; E passando o Hamiltoniano de interação para o formalismo de interação, nós obtemos,

$$\tilde{H}_I(t) = \tilde{B}(t)\mathbf{\Lambda}(t) \cdot \boldsymbol{\sigma} + \tilde{B}^\dagger(t)\mathbf{\Lambda}^*(t) \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (12)$$

onde

$$\tilde{B}(t) = \mathcal{U}_R^\dagger(t) B \mathcal{U}_R(t) = \sum_k g_k a_k \exp(-i\omega_k t), \quad (13)$$

e  $\mathbf{\Lambda}(t)$  é definido como um vetor dependente do tempo, e é dado por

$$\mathbf{\Lambda}(t) = \boldsymbol{\lambda} \cos[2\alpha(t)] + [\boldsymbol{\lambda} \times \hat{\mathbf{u}}(t)] \sin[2\alpha(t)] + \hat{\mathbf{u}}(t)[\hat{\mathbf{u}}(t) \cdot \boldsymbol{\lambda}] \{1 - \cos[2\alpha(t)]\}. \quad (14)$$

Substituindo a equação (12) na equação (6), nós obtemos

$$\frac{d\tilde{\rho}(t)}{dt} = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \{D_{\alpha\beta}(t)[\sigma_\alpha, \rho_I(t)\sigma_\beta] + D_{\alpha\beta}^*(t)[\sigma_\beta \rho_I(t), \sigma_\alpha]\}, \quad (15)$$

onde definimos

$$D_{\alpha\beta}(t) = \int_0^t dt' \text{Tr}_R [b_\alpha(t)\rho_R b_\beta(t')], \quad (16)$$

com o operador do reservatório  $\mathbf{b}(t)$  dado por  $\mathbf{b}(t) = \tilde{B}(t)\mathbf{\Lambda}(t) + \tilde{B}^\dagger(t)\mathbf{\Lambda}^*(t)$ . E substituindo a equação (10) na (16) obtemos então

$$D_{\alpha\beta}(t) = 2\Re \left\{ \Lambda_\alpha^*(t) \int_0^t dt' \Lambda_\beta(t') \mathcal{I}_1(t-t') \right\} + \Lambda_\alpha^*(t) \int_0^t dt' \Lambda_\beta(t') \mathcal{I}_2(t-t') \quad (17)$$

onde  $\Re \{.\}$  é dado pela parte real do argumento, e definimos

$$\mathcal{I}_1(t) = \sum_k |g_k|^2 \frac{\exp(i\omega_k t)}{\exp(\beta\omega_k) - 1} \quad (18)$$

e

$$\mathcal{I}_2(t) = \sum_k |g_k|^2 \exp(i\omega_k t), \quad (19)$$

sendo  $\mathcal{I}_1(t)$  e  $\mathcal{I}_2(t)$  as correlações do reservatório térmico.

No limite em que o número de modos normais do reservatório por unidade de frequência se torna infinito, nós definimos a densidade espectral como,

$$J(\omega) = \sum_k |g_k|^2 \delta(\omega - \omega_k), \quad (20)$$

com  $\omega \in [0, +\infty)$  e interpretamos a somatória nas equações (18) e (19) como integrais sobre  $\omega$ , assim temos

$$\mathcal{I}_1(t) = \int_0^\infty d\omega J(\omega) \frac{\exp(i\omega t)}{\exp(\beta\omega) - 1}, \quad (21)$$

$$\mathcal{I}_2(t) = \int_0^\infty d\omega J(\omega) \exp(i\omega t). \quad (22)$$

Se nós escrevermos agora  $\tilde{\rho}(t) = \frac{1}{2}[I + \mathbf{r}(t) \cdot \boldsymbol{\sigma}]$ , o vetor de Bloch  $\mathbf{r}(t)$  é real e, pelas equações (15) e (17), satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = 4\Re\{\boldsymbol{\Lambda}^*(t) \times [(2\mathbf{F}(t) + \mathbf{G}(t)) \times 2\mathbf{r}(t)]\} + 2\Im[\boldsymbol{\Lambda}^*(t) \times \mathbf{G}(t)] \quad (23)$$

onde definimos

$$\mathbf{F}(t) = \int_0^t dt' \boldsymbol{\Lambda}(t') \mathcal{I}_1(t - t') \quad (24)$$

e

$$\mathbf{G}(t) = \int_0^t dt' \mathbf{\Lambda}(t') \mathcal{I}_2(t - t'). \quad (25)$$

Os vetores  $\mathbf{F}(t)$  e  $\mathbf{G}(t)$  podem ser interpretados como médias temporais do vetor  $\mathbf{\Lambda}(t')$  pesados pelas funções  $\mathcal{I}_1(t - t')$  e  $\mathcal{I}_2(t - t')$ , respectivamente. Dependendo do tamanho da densidade espectral do reservatório,  $J(\omega)$  na equação (20), as funções peso,  $\mathcal{I}_1(t - t')$  e  $\mathcal{I}_2(t - t')$ , determinam quanto da história passada de  $\mathbf{\Lambda}(t')$  efetivamente contribui para as duas médias temporais,  $\mathbf{F}(t)$  e  $\mathbf{G}(t)$ . Portanto, a equação (23) não é restrita por uma aproximação Markoviana.

### 3.1.2 Proteção da operação lógica

Para proteger o sistema durante a aplicação de uma porta lógica, devemos encontrar um operador evolução temporal  $\mathcal{U}(t)$  tal que a equação (23), a qual se refere ao formalismo de interação, resulte, após um certo tempo de duração  $\tau$  na operação lógica quântica, em  $\mathbf{r}(\tau) \approx \mathbf{r}(0)$ . Na representação de Schrödinger, este resultado significa que, efetivamente, a dinâmica descrita pela equação (23) é equivalente ao operador  $\mathcal{U}(\tau)$ , como se o qubit não fosse perturbado pelo meio ambiente durante o intervalo de tempo  $\tau$ . A metodologia aqui apresentada pode ser aplicada para qualquer operação lógica de um qubit.

O Hamiltoniano total do sistema, na representação de Schrödinger, é dado por

$$H(t) = H_U(t) + H_R + H_I, \quad (26)$$

onde  $H_U(t)$  é o Hamiltoniano de controle determinado conforme descrito pela equação (4) após encontrarmos  $\mathcal{U}(t)$ ,  $H_R$  é o Hamiltoniano do reservatório e  $H_I$  é o Hamiltoniano de interação dado na equação (2).

Como pretendemos realizar uma operação lógica simultaneamente com a proteção de erros, nós dividimos o Hamiltoniano de controle  $H_U(t)$  em dois termos,  $H_U(t) = H_0(t) + H_c(t)$ , onde  $H_0(t)$  executa a operação lógica quântica, enquanto  $H_c(t)$  age contra a ação perturbatória do meio ambiente.

De acordo com a referência [30], temos que o operador unitário  $\mathcal{U}_c(t)$  correspondente ao Hamiltoniano  $H_c(t)$  deve ser periódico e satisfazer

$$\int_0^{t_c} dt \mathcal{U}_c^\dagger(t) H_I \mathcal{U}_c(t) = 0, \quad (27)$$

onde  $t_c < \tau$  é o período de  $\mathcal{U}_c(t)$ , ou seja,  $\mathcal{U}_c(t + t_c) = \mathcal{U}_c(t)$ . Por conveniência, escolhemos  $\tau$  como um múltiplo inteiro  $n$  de  $t_c$ , ou seja,  $\tau = nt_c$ , tal que  $\mathcal{U}_c(\tau) = I$ . Assim, se escolhermos

$$H_c = (2n\pi/t_c) \hat{\mathbf{u}}_c \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (28)$$

então

$$\mathcal{U}_c(t) = I \cos(2n\pi t/\tau) - i \hat{\mathbf{u}}_c \cdot \boldsymbol{\sigma} \sin(2n\pi t/\tau). \quad (29)$$

Seguindo o mesmo procedimento utilizado para obter as equações (12) e (14), nós descobrimos que a integral de  $\mathcal{U}_c^\dagger(t) H_I \mathcal{U}_c(t)$  sobre um período  $t_c$  resulta zero somente se nós escolhermos  $\hat{\mathbf{u}}_c$  ortogonal ao vetor  $\boldsymbol{\lambda}$ , o que é sempre possível, mesmo se  $\boldsymbol{\lambda}$  tiver uma componente complexa.

No formalismo obtido utilizando a transformação unitária  $\mathcal{U}_c(t)$  como dado acima, nós escolhemos  $H_0(t)$  tal que

$$\mathcal{U}_c^\dagger(t) H_0(t) \mathcal{U}_c(t) = \frac{\theta_0}{\tau} \hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (30)$$

onde  $\hat{\mathbf{u}}_0$  e  $\theta_0$  são constantes a serem determinadas de acordo com a operação lógica pretendida, conforme explicamos a seguir. Visto que  $\mathcal{U}_c^\dagger(t) H_0(t) \mathcal{U}_c(t)$  é independente no tempo, o operador unitário de evolução temporal associado a ele é dado por

$$\mathcal{U}_0(t) = I \cos(\theta_0 t/\tau) - i \hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \boldsymbol{\sigma} \sin(\theta_0 t/\tau), \quad (31)$$

dando

$$\mathcal{U}_0(\tau) = I \cos(\theta_0) - i \hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \boldsymbol{\sigma} \sin(\theta_0) \quad (32)$$

no fim da operação lógica,  $t = \tau$ . Desta forma, se nós escolhermos  $\mathcal{U}(t)$  como um operador unitário composto, formado por dois campos,  $\mathcal{U}(t) = \mathcal{U}_c(t) \mathcal{U}_0(t)$ , então, em  $t = \tau$ ,

$$\mathcal{U}(\tau) = I \cos(\theta_0) - i \hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \boldsymbol{\sigma} \sin(\theta_0), \quad (33)$$

de forma que a operação lógica desejada determina a escolha de  $\hat{\mathbf{u}}_0$  e  $\theta_0$ . Comparando estas conclusões com a equação (3), nós obtemos:

$$\begin{aligned} \cos[\alpha(t)] = & -\hat{\mathbf{u}}_c \cdot \hat{\mathbf{u}}_0 \sin(2n\pi t/\tau) \sin(\theta_0 t/\tau) \\ & + \cos(2n\pi t/\tau) \cos(\theta_0 t/\tau), \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}(t) \sin[\alpha(t)] = & (\hat{\mathbf{u}}_c \times \hat{\mathbf{u}}_0) \sin(2n\pi t/\tau) \sin(\theta_0 t/\tau) \\ & + \hat{\mathbf{u}}_c \sin(2n\pi t/\tau) \cos(\theta_0 t/\tau) \\ & + \hat{\mathbf{u}}_0 \cos(2n\pi t/\tau) \sin(\theta_0 t/\tau) \end{aligned} \quad (35)$$

A forma explícita do Hamiltoniano  $H_U$  é aquela já dada pela equação (4),  $H_U = \boldsymbol{\Omega}(t) \cdot \boldsymbol{\sigma}$ , onde o campo externo aplicado é calculado das equações (34) e (35) de acordo com a prescrição da equação (5):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}(t) = & [(2n\pi/\tau) + (\theta_0/\tau) \hat{\mathbf{u}}_c \cdot \hat{\mathbf{u}}_0] \hat{\mathbf{u}}_c \\ & + (\theta_0/\tau) [\hat{\mathbf{u}}_c \times (\hat{\mathbf{u}}_0 \times \hat{\mathbf{u}}_c)] \cos(2n\pi t/\tau) \\ & + (\theta_0/\tau) (\hat{\mathbf{u}}_c \times \hat{\mathbf{u}}_0) \sin(2n\pi t/\tau). \end{aligned} \quad (36)$$

Assim, como podemos observar, o primeiro termo da equação (36) é um campo estático ao longo da direção que é perpendicular ao vetor de erro, como discutido acima, e os outros dois termos geram um campo girante perpendicular à direção do campo estático.

A resolução deste problema é feita através de cálculos numéricos, em que resolvemos a equação (23), a fim de apresentar a estratégia descrita acima. Para resolver este problema, assumimos uma densidade espectral ôhmica com uma frequência de corte  $\omega_c$ , ou seja,  $J(\omega) = \eta\omega \exp(-\omega/\omega_c)$ , onde  $\eta$  é uma constante adimensional. Assim, as versões integrais das equações (18) e (19) podem ser explicitamente calculadas dando

$$\mathcal{I}_1(t) = (\eta/\beta^2) \Psi^{(1)}(1 + 1/(\beta\omega_c) - it/\beta) \quad (37)$$

e

$$\mathcal{I}_2(t) = \eta\omega_c^2/(1 - i\omega_c t)^2, \quad (38)$$

onde  $\Psi^{(1)}$  é a primeira função poligamma, que é definida como a derivada segunda do logaritmo da função gamma que por sua vez é uma extensão para números reais e complexos da função fatorial,

$$\Psi^{(1)}(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z), \quad (39)$$

onde

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad (40)$$

onde  $z$  é um número complexo com sua parte real positiva.

Como no caso do desacoplamento dinâmico pulsado [12, 13, 14, 15], nós obtemos que o campo girante deve possuir uma frequência suficientemente maior que  $\omega_c$  para ser eficiente na proteção do estado quântico. Devido a esta hipótese inicial, nós escolhemos  $\omega_c \tau = 2\pi$  nos cálculos numéricos.

Para os parâmetros do reservatório, além de supormos uma densidade espectral ôhmica, nós escolhemos  $\eta = 1/16$ ,  $T = 0.25\text{K}$ , e  $\tau = 10^{-10}\text{s}$ .

### 3.1.3 Otimização do método

O método do desacoplamento dinâmico contínuo descrito acima demonstrou-se efetivo, pois foi resolvido numericamente para a operação de Hadamard  $\hat{\mathbf{u}}_0 = (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}})/\sqrt{2}$ , onde utilizou-se para o vetor de erro  $\boldsymbol{\lambda} = (4\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}} + 2\sqrt{2}\hat{\mathbf{z}})/5$  e o campo de controle utilizado foi  $\hat{\mathbf{u}}_c = (\hat{\mathbf{x}} - \sqrt{2}\hat{\mathbf{z}})/\sqrt{3}$ , é importante notar que  $\boldsymbol{\lambda}$  e  $\hat{\mathbf{u}}_c$  são ortogonais. Neste caso, para a frequência  $n = 5$  dos campos de proteção, testou-se 20.000 condições iniciais, o pior e o melhor caso para as fidelidades foram de 0.99622 e 0.99987 e, portanto, concluí-se que a proteção é efetiva.

Portanto, sabemos que é possível proteger o estado do qubit enquanto uma operação lógica é realizada, e também é possível proteger o qubit em ser estado inicial, ou seja, sem a aplicação de uma operação lógica. Na otimização do método, protegeremos o qubit em ambos

os casos, sem a aplicação de uma porta lógica e com a aplicação de um porta lógica, e em todos os casos que envolverem uma operação lógica que pode ser qualquer, neste trabalho nós estaremos realizando especificamente a operação de Hadamard, em que  $\hat{\mathbf{u}}_0 = (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}})/\sqrt{2}$ .

Uma vez que a operação lógica  $\hat{\mathbf{u}}_0$  é definida, sabemos que devemos ter  $\boldsymbol{\lambda}$  e  $\hat{\mathbf{u}}_c$  ortogonais entre si, para a efetividade da proteção, conforme discutido previamente acima. Portanto, a partir daqui nota-se que é possível otimizar o método, visto que para um dado vetor de erro  $\boldsymbol{\lambda}$  há uma infinidade de possibilidades, restrita a um plano, em que o campo de proteção  $\hat{\mathbf{u}}_c$  seja ortogonal ao vetor de erro. Assim, para uma dada operação lógica  $\hat{\mathbf{u}}_0$  e para um dado vetor de erro  $\boldsymbol{\lambda}$ , pretendemos descobrir em qual direção devemos aplicar o campo  $\hat{\mathbf{u}}_c$  para realizarmos a melhor proteção possível.

Como exemplo, vamos supor que temos um vetor de erro  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{z}}$ , e devemos escolher um campo  $\hat{\mathbf{u}}_c$  que seja ortogonal em relação a direção  $\hat{\mathbf{z}}$ . Logo, podemos escrever  $\hat{\mathbf{u}}_c = \alpha\hat{\mathbf{x}} + \beta\hat{\mathbf{y}}$  que será sempre ortogonal ao vetor de erro, independentemente dos valores dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , sendo que a condição de normalização  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  deve ser satisfeita. A otimização estará completa quando encontrarmos os valores dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  que realizam a melhor proteção para uma dada operação lógica.

## 3.2 Classes independentes de erros

Abaixo, mostraremos uma extensão do método do desacoplamento dinâmico contínuo apresentado na seção anterior. Antes, tínhamos um qubit acoplado a um reservatório que causava um determinado tipo de erro. Agora, teremos um qubit acoplado a três reservatórios independentes que causarão três tipos de erros independentes (decoerência, bit-flip e amplitude). Assim como antes, vamos considerar reservatórios térmicos a temperaturas finita, sendo cada um deles representados por um campo escalar de bósons que interage continuamente com o qubit causando ruídos externos, gerando assim três tipos de erros independentes. Novamente, para a efetividade do método, a interação entre o qubit e o reservatório deve ser fraca de forma que uma teoria de perturbação possa ser aplicada, e as dinâmicas controladas devem ser mais rápidas que o tempo médio de correlação do reservatório, ou seja, o tempo que o reservatório interage com o sistema físico. Ao final, veremos que é possível eliminar todas as três classes de erros utilizando campos de controle externos de altas frequências.

### 3.2.1 Equação mestra para reservatórios independentes

Começamos observando que a evolução controlada de um qubit, livre de ruídos do ambiente, é dada por uma transformação unitária geral da forma

$$\mathcal{U}(t) = I \cos[\alpha(t)] - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{u}}(t) \sin[\alpha(t)], \quad (41)$$

onde  $I$  é a matriz identidade  $2 \times 2$ ,  $\alpha(t)$  é uma função do tempo  $t$ ,  $\hat{\mathbf{u}}(t)$  é um vetor unitário dependente do tempo e  $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_x \hat{\mathbf{x}} + \sigma_y \hat{\mathbf{y}} + \sigma_z \hat{\mathbf{z}}$ , sendo  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  as matrizes de Pauli. Logo, o Hamiltoniano de controle  $H_U(t)$  é obtido através da diferenciação da equação (41) originando

$$H_U(t) = i\hbar \frac{d\mathcal{U}(t)}{dt} \mathcal{U}^\dagger(t) = \hbar \boldsymbol{\Omega}(t) \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (42)$$

com

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt} \hat{\mathbf{u}}(t) + \sin[\alpha(t)] \cos[\alpha(t)] \frac{d\hat{\mathbf{u}}(t)}{dt} + \sin^2[\alpha(t)] \hat{\mathbf{u}}(t) \times \frac{d\hat{\mathbf{u}}(t)}{dt} \quad (43)$$

onde  $\hbar$  é a constante de Planck reduzida e  $\mathcal{U}^\dagger(t)$  é o hermitiano conjugado de  $\mathcal{U}(t)$ .

Por sua vez, o Hamiltoniano de interação, que acopla o qubit ao reservatório, é representado por

$$H_I = (\mathcal{L} + \mathcal{L}^\dagger) \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (44)$$

onde  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \hat{\mathbf{x}} + \mathcal{L}_2 \hat{\mathbf{y}} + \mathcal{L}_3 \hat{\mathbf{z}}$  é um operador cujas componentes  $\mathcal{L}_1$ ,  $\mathcal{L}_2$  e  $\mathcal{L}_3$  agem no espaço de Hilbert e  $\mathcal{L}^\dagger$  é o Hermitiano conjugado de  $\mathcal{L}$ .

Utilizamos igualmente a antes, pela referência [29], a equação mestra de segunda ordem, local no tempo, que descreve a evolução da matriz do operador densidade do qubit, no formalismo de interação, escrita como

$$\frac{d\tilde{\rho}(t)}{dt} = - \int_0^t dt' \text{Tr}_R \left\{ [\tilde{H}_I(t), [\tilde{H}_I(t'), \rho_R \tilde{\rho}(t)]] \right\}, \quad (45)$$

onde  $\tilde{H}_I(t)$  é o Hamiltoniano de interação no formalismo de interação, ou seja,

$$\tilde{H}_I(t) = \mathcal{U}^\dagger(t)\mathcal{U}_R^\dagger(t)H_I\mathcal{U}_R(t)\mathcal{U}(t), \quad (46)$$

com

$$\mathcal{U}_R(t) = \exp(-iH_R t), \quad (47)$$

onde  $H_R$  é o Hamiltoniano do reservatório externo,  $\mathcal{U}(t)$  é como na equação (41). Para facilitar as contas, de agora em diante, utilizamos  $\hbar = 1$ . É importante destacar que a equação mestra (45) é uma aproximação de segunda ordem em termos da constante de acoplamento, de forma que é válida no regime no qual o tamanho do acoplamento, expresso em unidades de frequência, multiplicado pelo tempo de correlação do reservatório térmico é muito menor que 1. Acima,  $\rho_R$  é a matriz densidade inicial do ambiente,

$$\rho_R = \frac{1}{Z} \exp(-\beta H_R), \quad (48)$$

onde  $Z$  é a função de partição que é dada por

$$Z = \text{Tr}_R [\exp(-\beta H_R)]. \quad (49)$$

Aqui,  $\beta = 1/k_B T$ , onde  $k_B$  é a constante de Boltzmann, e  $T$  é a temperatura absoluta do meio ambiente.

Escrevendo explicitamente o Hamiltoniano de interação no formalismo de interação obtemos

$$\tilde{H}_I(t) = \mathbf{\Lambda}(t) \cdot [\tilde{\mathcal{L}}(t) + \tilde{\mathcal{L}}^\dagger(t)], \quad (50)$$

onde  $\tilde{\mathcal{L}}(t) = \mathcal{U}_R^\dagger(t)\mathcal{L}\mathcal{U}_R(t)$  e  $\mathbf{\Lambda}(t) = \mathcal{U}^\dagger(t)\boldsymbol{\sigma}\mathcal{U}(t)$ . Visto que  $\mathbf{\Lambda}(t)$  é somente uma rotação de  $\boldsymbol{\sigma}$ , é conveniente escrevermos suas componentes como

$$\Lambda_\mu(t) = \sum_{\nu=1}^3 R_{\mu,\nu}(t)\sigma_\nu, \quad (51)$$

onde  $R_{\mu,\nu}(t)$ , para  $\mu, \nu = 1, 2, 3$  são as matrizes de rotação dependentes do tempo correspon-

dente à transformação unitária representada por  $\mathcal{U}(t)$  conforme a equação (41).

Substituindo as equações (50) e (51) na equação (45), nós obtemos

$$\frac{d\tilde{\rho}(t)}{dt} = \sum_{\alpha,\beta=1}^3 D_{\alpha\beta}(t)[\sigma_\alpha, \tilde{\rho}(t)\sigma_\beta] + \sum_{\alpha,\beta=1}^3 D_{\alpha\beta}^*(t)[\sigma_\beta\tilde{\rho}(t), \sigma_\alpha], \quad (52)$$

onde definimos

$$D_{\alpha\beta}(t) = \sum_{\mu,\nu=1}^3 R_{\mu,\alpha}(t) \int_0^t dt' R_{\nu,\beta}(t') C_{\mu,\nu}(t, t') \quad (53)$$

com

$$C_{\mu,\nu}(t, t') = \text{Tr}_B \left[ \left( \tilde{\mathcal{L}}_\mu(t) + \tilde{\mathcal{L}}_\mu^\dagger(t) \right) \rho_B \left( \tilde{\mathcal{L}}_\nu(t') + \tilde{\mathcal{L}}_\nu^\dagger(t') \right) \right]. \quad (54)$$

É importante notar que a equação (52) não é restrita à escolha específica do Hamiltoniano do reservatório. Abaixo, definimos três banhos de osciladores harmônicos independentes, cada um representando uma classe distinta de erro.

### 3.2.2 Erros independentes de decoerência, bit-flip e amplitude

Assumimos o Hamiltoniano do reservatório como

$$H_R = \sum_{i=1}^3 \sum_k \omega_{i,k} a_{i,k}^\dagger a_{i,k}, \quad (55)$$

onde  $\omega_{i,k}$  é a frequência do modo normal  $k$  do  $i$ -ésimo reservatório independente. Escrevemos o operador  $\mathcal{L}$  como sendo

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i B_i \quad (56)$$

com

$$B_i = \sum_k g_{i,k} a_{i,k} \quad (57)$$

onde  $g_{i,k}$  é a constante de acoplamento (complexa inclusive) para o modo  $k$  do  $i$ -ésimo

reservatório,  $a_{i,k}$  é um operador que aniquila um quantum do modo  $k$  do  $i$ -ésimo reservatório, e  $\boldsymbol{\lambda}_i$  é o vetor de erro do  $i$ -ésimo reservatório. Nós escolhemos o vetor de erro

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda}_1 &= \hat{\boldsymbol{x}}, \\ \boldsymbol{\lambda}_2 &= \frac{\hat{\boldsymbol{x}} + i\hat{\boldsymbol{y}}}{2}, \\ \boldsymbol{\lambda}_3 &= \hat{\boldsymbol{z}},\end{aligned}\tag{58}$$

representando erros de bit-flip, erros na amplitude, e decoerência respectivamente. Assim, o Hamiltoniano de interação, dado pela equação (44), é escrito como

$$H_I = \sum_{i=1}^3 (B_i \boldsymbol{\lambda}_i + B_i^\dagger \boldsymbol{\lambda}_i^*) \cdot \boldsymbol{\sigma},\tag{59}$$

de forma que, comparando a equação (44) com a equação (59), nós encontramos que as componentes de  $\mathcal{L}$ , no formalismo de interação, são dadas por

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}}_1(t) &= \tilde{B}_1(t) + \frac{1}{2}\tilde{B}_2(t), \\ \tilde{\mathcal{L}}_2(t) &= i\frac{1}{2}\tilde{B}_2(t), \\ \tilde{\mathcal{L}}_3(t) &= \tilde{B}_3(t),\end{aligned}\tag{60}$$

e, usando as equações (47), (55) e (57), temos

$$\tilde{B}_i(t) = \mathcal{U}_R^\dagger(t) B_i \mathcal{U}_R(t) = \sum_k g_{i,k} a_{i,k} \exp(-i\omega_{i,k}t).\tag{61}$$

Com estas considerações, calcula-se a função correlação do reservatório  $C_{\mu,\nu}(t,t')$  pela equação (54), usando-se as equações (48), (49), (60) e (61). Observando as componentes de  $\mathcal{L}$  dadas pela equação (60), as únicas componentes diferentes de zero são

$$\begin{aligned}
C_{1,1}(t, t') &= \sum_{k=1}^2 \left( \mathcal{G}_{1,1}^{(k)}(t - t') + \frac{1}{4} \mathcal{G}_{2,2}^{(k)}(t - t') \right), \\
C_{1,2}(t, t') &= C_{2,1}(t, t') = i \frac{1}{4} \sum_{k=1}^2 \mathcal{G}_{2,2}^{(k)}(t - t'), \\
C_{2,2}(t, t') &= -\frac{1}{4} \sum_{k=1}^2 \mathcal{G}_{2,2}^{(k)}(t - t'), \\
C_{3,3}(t, t') &= -\frac{1}{4} \sum_{k=1}^2 \mathcal{G}_{3,3}^{(k)}(t - t'), \tag{62}
\end{aligned}$$

com

$$\mathcal{G}_{i,j}^{(1)}(t - t') \equiv \text{Tr}_B \left[ \tilde{B}_i(t) \rho_B \tilde{B}_j^\dagger(t') \right] = \delta_{ij} \sum_k |g_{i,k}|^2 n_{i,k} \exp \left[ -i\omega_{i,k}(t - t') \right] \tag{63}$$

e

$$\mathcal{G}_{i,j}^{(2)}(t - t') \equiv \text{Tr}_B \left[ \tilde{B}_i^\dagger(t) \rho_B \tilde{B}_j(t') \right] = \delta_{ij} \sum_k |g_{i,k}|^2 (n_{i,k} + 1) \exp \left[ i\omega_{i,k}(t - t') \right], \tag{64}$$

onde  $n_{i,k}$  é o número médio de ocupação do modo  $k$  do  $i$ -ésimo reservatório,

$$n_{i,k} = \frac{1}{\exp(\beta\omega_{i,k}) - 1}. \tag{65}$$

Aqui  $\mathcal{G}_{i,j}^{(1)}(t - t')$  e  $\mathcal{G}_{i,j}^{(2)}(t - t')$  determinam quanto da história passada das componentes de cada acoplamento contribui para as médias temporais da equação (53). Assim, vale ressaltar que a equação (52) não é restrita a uma aproximação Markoviana. No limite em que o número de modos por unidade de frequência se torna infinito, interpretamos a soma nas equações (63) e (64) como integrais,

$$\mathcal{G}_{i,j}^{(1)}(t) = \int_0^\infty d\omega J_i(\omega) n_i(\omega) \exp(-i\omega t) \tag{66}$$

e

$$\mathcal{G}_{i,j}^{(2)}(t) = \int_0^\infty d\omega J_i(\omega) \exp(i\omega t) [n_i(\omega) + 1], \quad (67)$$

com  $n_i(\omega)$  sendo a versão da frequência contínua da equação (65) que é dada por

$$n_i(\omega) = \frac{1}{\exp(\beta\omega) - 1}, \quad (68)$$

e a densidade espectral é definida como

$$J_i(\omega) = \eta_i \frac{\omega^{s_i}}{\omega_c^{s_i-1}} \exp(-\omega/\omega_c), \quad (69)$$

onde  $\eta_i$  é uma constante adimensional proporcional ao tamanho do acoplamento do sistema com o  $i$ -ésimo reservatório,  $s_i$  define a densidade espectral do  $i$ -ésimo reservatório como sendo ôhmico ( $s_i = 1$ ) ou super ôhmico ( $s_i > 1$ ), e  $\omega_c$  é a frequência de corte. *É importante mencionar que durante a solução numérica em que realizamos a otimização do método consideramos como ôhmico todos os reservatórios envolvidos.* Seguindo, usando as equações (68) e (69), as integrais das equações (66) e (67) são calculadas, dando

$$\mathcal{I}_1(t) = \int_0^\infty d\omega J(\omega) n(\omega) \exp(-i\omega t) = \eta\omega_c^2 \sum_{n=0}^\infty \frac{s!}{[1 + i\omega_c t + \beta\omega_c(n+1)]^{s+1}}, \quad (70)$$

e

$$\mathcal{I}_2(t) = \int_0^\infty d\omega J(\omega) \exp(i\omega t) = \eta\omega_c^2 \sum_{n=0}^\infty \frac{s!}{[1 - i\omega_c t]^{s+1}}. \quad (71)$$

Com estes resultados, calculamos  $\mathcal{G}_{i,j}^{(1)}(t)$  que é dado pela equação (70), e também calculamos  $\mathcal{G}_{i,j}^{(2)}(t)$  que é dado pela soma de  $\mathcal{I}_1^*(t)$  e  $\mathcal{I}_2(t)$ .

### 3.2.3 Proteção contra classes independentes de erros

O Hamiltoniano total do sistema, na representação de Schrödinger, é dado por

$$H(t) = H_U(t) + H_R + H_I, \quad (72)$$

onde  $H_U(t)$  é o Hamiltoniano de controle determinado conforme descrito pela equação (42) após encontrarmos  $\mathcal{U}(t)$ ,  $H_R$  é o Hamiltoniano do reservatório dado pela equação (55), e  $H_I$  é o Hamiltoniano de interação dado na equação (59).

Como pretendemos realizar uma operação lógica simultaneamente com a proteção de erros, nós procedemos como no capítulo anterior, e dividimos o Hamiltoniano de controle  $H_U(t)$  em dois termos

$$H_U(t) = H_0(t) + H_c(t) \quad (73)$$

onde  $H_0(t)$  executa a operação lógica quântica após um certo intervalo de tempo, enquanto  $H_c(t)$  age contra a ação perturbatória do meio ambiente.

De acordo com a referência [30], temos que o operador unitário  $\mathcal{U}_c(t)$  correspondente ao Hamiltoniano  $H_c(t)$  deve ser periódico e satisfazer

$$\int_0^{t_c} dt \mathcal{U}_c^\dagger(t) H_I \mathcal{U}_c(t) = 0, \quad (74)$$

onde  $t_c < \tau$  é o período de  $\mathcal{U}_c(t)$ , ou seja,  $\mathcal{U}_c(t + t_c) = \mathcal{U}_c(t)$ . Por conveniência, escolhemos  $\tau$  como um múltiplo inteiro  $n$  de  $t_c$ , ou seja,  $\tau = nt_c$ , tal que  $\mathcal{U}_c(\tau) = I$ .

A fim de obtermos simultaneamente a redução da decoerência, do bit-flip e dos erros na amplitude, nós definimos

$$\mathcal{U}_c(t) = \mathcal{U}_{cx}(t) \mathcal{U}_{cz}(t) \quad (75)$$

com

$$\mathcal{U}_{cx}(t) = I \cos(2n\pi t/\tau) - i\sigma_x \sin(2n\pi t/\tau), \quad (76)$$

$$\mathcal{U}_{cz}(t) = I \cos(2m\pi t/\tau) - i\sigma_z \sin(2m\pi t/\tau), \quad (77)$$

onde  $m$  é um número inteiro diferente de  $n$ . O operador  $\mathcal{U}_{cx}(t)$  corresponde a proteção contra decoerência, e  $\mathcal{U}_{cz}(t)$  está associado com a proteção dos erros de bit-flip e amplitude.

No formalismo obtido utilizando a transformação unitária  $\mathcal{U}_c(t)$  como dado acima, nós escolhemos  $H_0(t)$  tal que

$$\mathcal{U}_c^\dagger(t)H_0(t)\mathcal{U}_c(t) = \frac{\theta_0}{\tau}\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (78)$$

onde  $\hat{\mathbf{u}}_0$  e  $\theta_0$  são constantes a serem determinadas de acordo com a operação lógica pretendida, conforme explicamos a seguir. Visto que  $\mathcal{U}_c^\dagger(t)H_0(t)\mathcal{U}_c(t)$  é independente no tempo, o operador unitário de evolução temporal associado a ele é dado por

$$\mathcal{U}_0(t) = I \cos(\theta_0 t/\tau) - i\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \boldsymbol{\sigma} \sin(\theta_0 t/\tau), \quad (79)$$

dando

$$\mathcal{U}_0(\tau) = I \cos(\theta_0) - i\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \boldsymbol{\sigma} \sin(\theta_0) \quad (80)$$

no fim da operação lógica,  $t = \tau$ . Desta forma, se nós escolhermos  $\mathcal{U}(t)$  como um operador unitário composto, formado por dois campos,

$$\mathcal{U}(t) = \mathcal{U}_c(t)\mathcal{U}_0(t), \quad (81)$$

lembrando que  $\mathcal{U}_c(t)$  é dado pela equação (75), e então, em  $t = \tau$ ,

$$\mathcal{U}(\tau) = I \cos(\theta_0) - i\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \boldsymbol{\sigma} \sin(\theta_0), \quad (82)$$

de forma que a operação lógica desejada determina a escolha de  $\hat{\mathbf{u}}_0$  e  $\theta_0$ .

Uma vez que desejamos realizar a operação lógica de Hadamard, nós temos que

$$\mathcal{U}(\tau) = -i \frac{\sigma_x + \sigma_z}{\sqrt{2}}, \quad (83)$$

e o Hamiltoniano de controle  $H_U(t)$  é obtido explicitamente através das equações (42) e (81), e as componentes do campo de controle  $\boldsymbol{\Omega}(t)$  são dadas por

$$\Omega_x(t) = \frac{\pi}{\tau} \left[ 2n + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cos\left(\frac{4m\pi t}{\tau}\right) \right], \quad (84)$$

$$\Omega_y(t) = -\frac{\pi}{\tau} \left[ 2m + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right] \sin\left(\frac{4n\pi t}{\tau}\right) + \frac{\pi}{2\sqrt{2}\tau} \cos\left(\frac{4n\pi t}{\tau}\right) \sin\left(\frac{4m\pi t}{\tau}\right), \quad (85)$$

$$\Omega_z(t) = \frac{\pi}{\tau} \left[ 2m + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right] \cos\left(\frac{4n\pi t}{\tau}\right) + \frac{\pi}{2\sqrt{2}\tau} \sin\left(\frac{4n\pi t}{\tau}\right) \sin\left(\frac{4m\pi t}{\tau}\right). \quad (86)$$

Assim, utilizando este campo, somos capazes de proteger a porta lógica de Hadamard simultaneamente contra a decoerência, erros de bit-flip e amplitude.

### 3.2.4 Otimização do método

No caso anterior, em que tínhamos um único reservatório, a otimização estava restrita ao plano, visto que o campo de proteção deveria ser perpendicular ao vetor de erro. Contudo, neste caso, em que temos três reservatórios independentes, devemos ter apenas dois campos de proteção que sejam perpendiculares entre si, que acima foram dados por  $\mathcal{U}_{cx}(t)$  e  $\mathcal{U}_{cz}(t)$ , e portanto, a otimização não está restrita ao plano, e deve ser feita considerando uma esfera unitária tridimensional. A ideia para otimizarmos este caso é definirmos dois campos de controle genéricos,  $\mathcal{U}_{c_1}(t)$  e  $\mathcal{U}_{c_2}(t)$ , que sejam perpendiculares entre si, dados por

$$\mathcal{U}_{c_1}(t) = I \cos(2n\pi t/\tau) - i\hat{\mathbf{u}}_{c_1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \sin(2n\pi t/\tau), \quad (87)$$

$$\mathcal{U}_{c_2}(t) = I \cos(2m\pi t/\tau) - i\hat{\mathbf{u}}_{c_2} \cdot \boldsymbol{\sigma} \sin(2m\pi t/\tau), \quad (88)$$

em que escrevemos os vetores dos campos de controle,  $\hat{\mathbf{u}}_{c_1}$  e  $\hat{\mathbf{u}}_{c_2}$ , em coordenadas esféricas, de forma genérica dados por

$$\hat{\mathbf{u}}_{c_1} = \sin(\theta_1) \cos(\phi_1) \hat{\mathbf{x}} + \sin(\theta_1) \sin(\phi_1) \hat{\mathbf{y}} + \cos(\theta_1) \hat{\mathbf{z}}, \quad (89)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_{c_2} = \sin(\theta_2) \cos(\phi_2) \hat{\mathbf{x}} + \sin(\theta_2) \sin(\phi_2) \hat{\mathbf{y}} + \cos(\theta_2) \hat{\mathbf{z}}, \quad (90)$$

e ressaltando que esses vetores devem ser perpendiculares entre si, fazemos a seguinte transformação:

$$\theta_2 = \theta_1 + \pi/2, \quad (91)$$

$$\phi_2 = \phi_1, \quad (92)$$

e renomeamos  $\theta = \theta_1$  e  $\phi = \phi_1$ , desta forma temos,

$$\hat{\mathbf{u}}_{c_1} = \sin(\theta) \cos(\phi) \hat{\mathbf{x}} + \sin(\theta) \sin(\phi) \hat{\mathbf{y}} + \cos(\theta) \hat{\mathbf{z}}, \quad (93)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_{c_2} = \cos(\theta) \cos(\phi) \hat{\mathbf{x}} + \cos(\theta) \sin(\phi) \hat{\mathbf{y}} - \sin(\theta) \hat{\mathbf{z}}, \quad (94)$$

e pelo produto escalar entre  $\hat{\mathbf{u}}_{c_1}$  e  $\hat{\mathbf{u}}_{c_2}$  constatamos que esses vetores serão sempre perpendiculares entre si. Assim, com os vetores dos campos de controle definidos de acordo com as equações (93) e (94), é possível fazer uma varredura em toda a esfera para encontrarmos quais são as direções (ângulos  $\theta$  e  $\phi$ ) que realizam a melhor proteção, ou seja, estamos procurando quais são as direções (ângulos) dos campos de controle que otimizam a proteção do estado quântico.

## 4 Resultados

Nesta seção, apresentaremos os resultados mais significativos de nossa pesquisa, destacando as contribuições mais pertinentes ao campo do desacoplamento dinâmico contínuo. A apresentação dos resultados seguirá a seguinte estrutura organizacional: inicialmente, na subseção 4.1 faremos a explanação dos dados obtidos para o caso de um único reservatório apresentado na subseção 3.1 do modelo teórico, e em seguida, na subseção 4.2 faremos a explanação dos dados obtidos para o caso de três reservatórios independentes apresentado na subseção 3.2 do modelo teórico. Para fazermos uma discussão com análises detalhadas, apresentaremos os resultados obtidos através de gráficos para melhor ilustrar nossas observações.

### 4.1 Caso para um reservatório

Para os parâmetros do reservatório, em todos os casos nós supomos uma densidade espectral ôhmica, e utilizamos  $T = 0.25$  K, e  $\tau = 10^{-10}$  s. Além disso, em todos os casos analisados, realizamos a proteção do estado quântico sem a aplicação de uma operação lógica e também com tal operação, ou seja, verificamos os casos sem porta e com porta, sendo que em todos os casos que uma operação lógica foi realizada juntamente com a proteção, utilizamos a porta de Hadamard, que é dada por  $\hat{\mathbf{u}}_0 = (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}})/\sqrt{2}$ .

Uma vez que devemos ter o erro  $\boldsymbol{\lambda}$  e o campo de proteção  $\hat{\mathbf{u}}_c$  ortogonais entre si, conforme discutido previamente, decidimos verificar alguns erros  $\boldsymbol{\lambda}$  em específico, e para esses erros nós utilizamos diferentes valores para condição inicial  $\rho_I(0)$  do estado que será protegido e para o acoplamento  $\eta$  do reservatório.

#### 4.1.1 Um único erro em uma única direção

Começamos analisando o erro  $\boldsymbol{\lambda}$  em uma única direção, ou seja, fizemos  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{x}}$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{y}}$  e  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{z}}$ ; E os campos de proteção utilizados para esses erros foram  $\hat{\mathbf{u}}_c = \sin(\alpha)\hat{\mathbf{y}} + \cos(\alpha)\hat{\mathbf{z}}$ ,  $\hat{\mathbf{u}}_c = \sin(\alpha)\hat{\mathbf{x}} + \cos(\alpha)\hat{\mathbf{z}}$  e  $\hat{\mathbf{u}}_c = \sin(\alpha)\hat{\mathbf{x}} + \cos(\alpha)\hat{\mathbf{y}}$ , respectivamente. Desta forma, a ortogonalidade entre  $\boldsymbol{\lambda}$  e  $\hat{\mathbf{u}}_c$  se mantém, e com o intuito de otimizarmos a proteção encontrando o melhor ângulo, em todos os casos variamos o parâmetro  $\alpha$  de 0 até  $2\pi$ , sendo essa variação realizada em intervalos regularmente espaçados, que foram particionados em 1000 divisões.

- Abaixo, seguem os resultados obtidos para os casos em que a proteção foi realizada sem uma operação lógica.

Na Figura 2, nós mostramos a fidelidade final calculada no tempo  $t = \tau$ , dada por  $F(\tau) = \text{Tr}[\tilde{\rho}(\tau)\tilde{\rho}(0)]$ , como função do ângulo  $\alpha$ . Utilizamos  $n = 4$  para o campo de proteção,  $\rho_I(0) = I/2 + \sigma_x/2$  para a condição inicial, e (a)  $\eta = 0.001$  e (b)  $\eta = 0.004$  para o acoplamento.

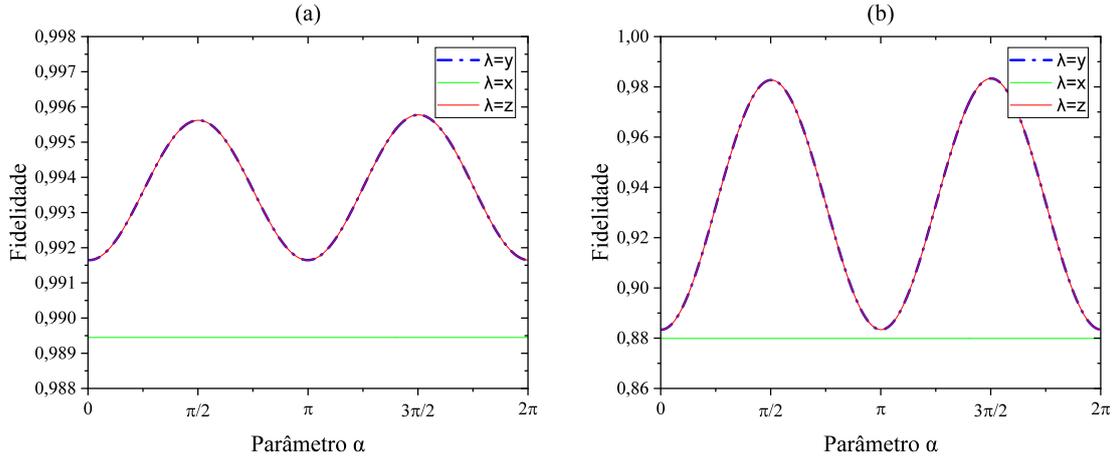


Figura 2: Fidelidade em  $t = \tau$  como função do ângulo  $\alpha$  para o estado cuja condição inicial é dada por  $\rho_I(0) = I/2 + \sigma_x/2$  e o acoplamento do reservatório é dado em (a) por  $\eta = 0.001$  e em (b) por  $\eta = 0.004$ . A linha azul representa o vetor de erro  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\boldsymbol{y}}$ , a linha verde representa o vetor de erro  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\boldsymbol{x}}$ , e a linha vermelha representa o vetor de erro  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\boldsymbol{z}}$ .

Para termos um valor de referência, quando o campo de proteção está desligado, isto é, quando utilizamos  $n = 0$  para o campo de proteção, as fidelidades que obtemos para os vetores de erros  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\boldsymbol{x}}$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\boldsymbol{y}}$  e  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\boldsymbol{z}}$  são, respectivamente,  $F(\tau) = 1.0$ ,  $F(\tau) \approx 0.526$  e  $F(\tau) \approx 0.526$ , para  $\eta = 0.001$  e  $F(\tau) = 1.0$ ,  $F(\tau) \approx 0.500$  e  $F(\tau) \approx 0.500$ , para  $\eta = 0.004$ .

Assim, considerando os valores da fidelidade para o campo de proteção desligado, juntamente com os valores apresentados nos gráficos, notamos que a otimização da proteção é dependente da condição inicial, pois no caso em que a condição inicial está na mesma direção do erro, ou seja, quando ambos estão na direção  $\hat{\boldsymbol{x}}$ , temos que  $F(\tau) = 1.0$  para a proteção desligada. Isso ocorre porque o tipo de erro que estamos usando não deforma a esfera de Bloch na direção paralela ao erro, que nesse caso é ao longo do eixo  $x$ . Desse modo, para um estado inicial preparado na mesma direção do ruído, a melhor proteção é não aplicar nenhum campo externo no sistema.

Ao compararmos o painel (a) com o (b) da Fig. 2, levando em conta os valores máximos e mínimos das fidelidades, constatamos que para um acoplamento mais fraco ( $\eta = 0.001$ ) o

ângulo de otimização é praticamente irrelevante, pois a diferença entre as fidelidades máximas e mínimas é  $F_{max}(\tau) - F_{min}(\tau) \approx 0.004$ , mas para um acoplamento mais forte ( $\eta = 0.004$ ), o ângulo de otimização passa a ser um fator relevante e deve ser considerado, pois a diferença entre as fidelidades máximas e mínimas é  $F_{max}(\tau) - F_{min}(\tau) \approx 0.099$ . Portanto, a otimização é dependente da constante de acoplamento  $\eta$  do reservatório, e no caso em que  $\eta = 0.004$  temos que a melhor fidelidade é obtida para  $\alpha = \pi/2$  e  $\alpha = 3\pi/2$ .

Para verificarmos se o tempo da dinâmica do sistema causaria alguma mudança significativa com relação ao ângulo otimizado mudamos o tempo de evolução do sistema. Usamos o painel (b) da Fig. 2 como referência, mantivemos os outros parâmetros iguais, e mudamos apenas o tempo de  $\tau$  para  $0.7\tau$  e  $1.3\tau$ . Abaixo, na Figura 3, apresentamos os resultados obtidos para os  $\tau$ 's diferentes.

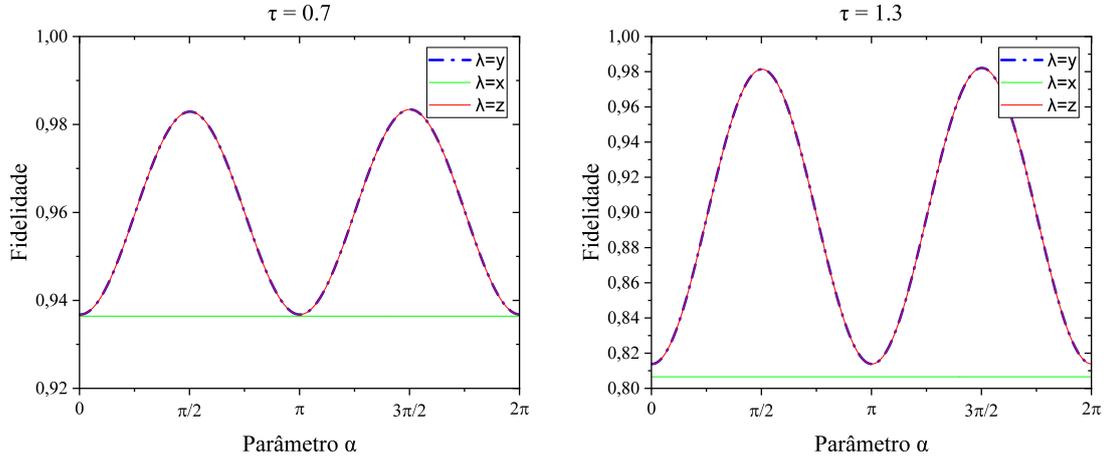


Figura 3: Fidelidade em (a)  $t = 0.7\tau$  e em (b)  $t = 1.3\tau$  como função do ângulo  $\alpha$  para o estado cuja condição inicial é dada por  $\rho_I(0) = I/2 + \sigma_x/2$  e o acoplamento do reservatório em ambos os gráficos é dado por  $\eta = 0.004$ . A linha azul representa o vetor de erro  $\lambda = \hat{y}$ , a linha verde representa o vetor de erro  $\lambda = \hat{x}$ , e a linha vermelha representa o vetor de erro  $\lambda = \hat{z}$ .

Pela Fig. 3, constatamos que apesar de haver uma variação na amplitude das fidelidades para os  $\tau$ 's diferentes, não se observa uma mudança em relação ao ângulo otimizado. Portanto, podemos dizer que a otimização para o caso sem porta depende da condição inicial  $\rho(0)$  e da constante de acoplamento  $\eta$  do reservatório, mas não há uma dependência do tempo  $\tau$  da dinâmica do sistema. Assim, a melhor fidelidade obtida continua sendo para o ângulo  $\alpha = \pi/2$  e  $\alpha = 3\pi/2$ . Isso ocorre porque estamos mantendo o estado quântico parado na esfera de Bloch conforme a dinâmica do sistema evolui.

Então, concluímos que para a condição inicial  $\rho_I(0) = I/2 + \sigma_x/2$ , isto é, uma condição

inicial que aponta na direção  $\hat{\mathbf{x}}$ , a melhor proteção para quando temos um erro  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{x}}$  é não aplicar nenhum campo externo ao sistema, mas para os erros nas direções  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{y}}$  e  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{z}}$  a melhor proteção ocorre para um campo externo cujo ângulo é  $\alpha = \pi/2$  ou  $\alpha = 3\pi/2$ , isto é, um campo externo que aponta na direção  $\hat{\mathbf{x}}$ .

Para contrastarmos com o resultado exibido acima, mudamos a condição inicial e fizemos a mesma análise. Abaixo, na Figura 4, nós mostramos a fidelidade final calculada no tempo  $t = \tau$ , dada por  $F(\tau) = \text{Tr}[\tilde{\rho}(\tau)\tilde{\rho}(0)]$ , como função do ângulo  $\alpha$ . Utilizamos  $n = 4$  para o campo de proteção,  $\rho_I(0) = I/2 + \sigma_y/2$  para a condição inicial, e (a)  $\eta = 0.001$  e (b)  $\eta = 0.004$  para o acoplamento.

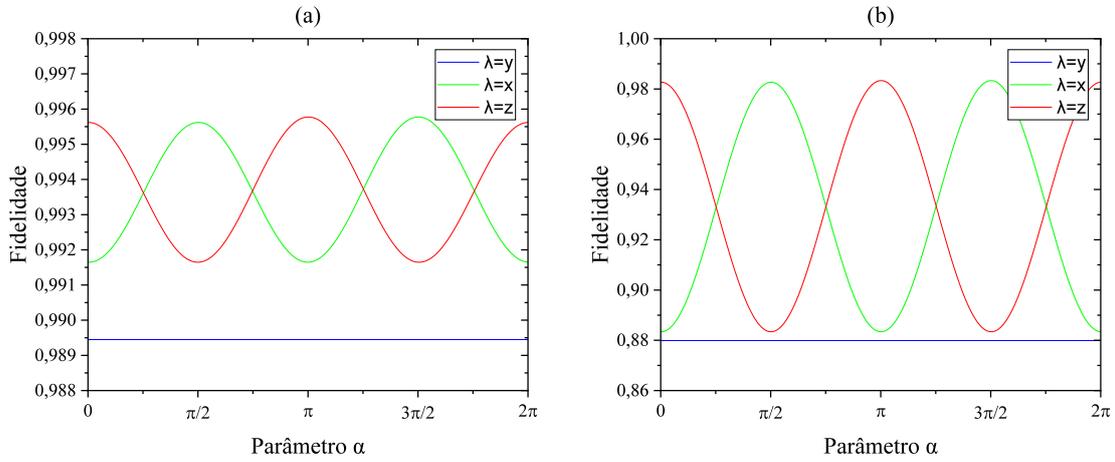


Figura 4: Fidelidade em  $t = \tau$  como função do ângulo  $\alpha$  para o estado cuja condição inicial é dada por  $\rho_I(0) = I/2 + \sigma_y/2$  e o acoplamento do reservatório é dado em (a) por  $\eta = 0.001$  e em (b) por  $\eta = 0.004$ . A linha azul representa o vetor de erro  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{y}}$ , a linha verde representa o vetor de erro  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{x}}$ , e a linha vermelha representa o vetor de erro  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{z}}$ .

Novamente, para termos um valor de referência, quando o campo de proteção está desligado, isto é, quando utilizamos  $n = 0$  para o campo de proteção, as fidelidades que obtemos para os vetores de erros  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{x}}$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{y}}$  e  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{z}}$  são, respectivamente,  $F(\tau) \approx 0.526$ ,  $F(\tau) = 1.0$  e  $F(\tau) \approx 0.526$ , para  $\eta = 0.001$  e  $F(\tau) \approx 0.500$ ,  $F(\tau) = 1.0$  e  $F(\tau) \approx 0.500$ , para  $\eta = 0.004$ .

Ao mudarmos apenas a condição inicial da direção  $\hat{\mathbf{x}}$  para a direção  $\hat{\mathbf{y}}$  alcançamos resultados similares aos apresentados acima. A diferença foi que neste caso, a melhor proteção para o erro  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{y}}$  é não aplicar nenhum campo externo ao sistema, e para os erros nas direções ( $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{x}}$ ) e [ $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{z}}$ ] a melhor proteção ocorre para um campo externo cujo ângulo é ( $\alpha = \pi/2$  ou  $\alpha = 3\pi/2$ ) e [ $\alpha = 0$  ou  $\alpha = \pi$  ou  $\alpha = 2\pi$ ], isto é, um campo externo que aponta

na direção  $\hat{\mathbf{y}}$ . Considerando os dois casos estudados, cujas condições iniciais foram dadas por  $\rho_I(0) = I/2 + \sigma_x/2$  (direção  $\hat{\mathbf{x}}$ ) e  $\rho_I(0) = I/2 + \sigma_y/2$  (direção  $\hat{\mathbf{y}}$ ), notamos que em ambos os casos a melhor fidelidade é obtida para um campo de proteção que aponta na mesma direção da condição inicial.

Neste caso, também nos atentamos em verificar se o tempo da dinâmica do sistema causaria alguma mudança significativa com relação ao ângulo otimizado. Usamos o painel (b) da Fig. 4 como referência, mantivemos os outros parâmetros iguais, e mudamos apenas o tempo de  $\tau$  para  $0.7\tau$  e  $1.3\tau$ . Abaixo, na Figura 5, apresentamos os resultados obtidos para os  $\tau$ 's diferentes. Assim, mais uma vez verificamos que o tempo da dinâmica do sistema não afeta o ângulo que otimiza proteção para o caso sem porta.

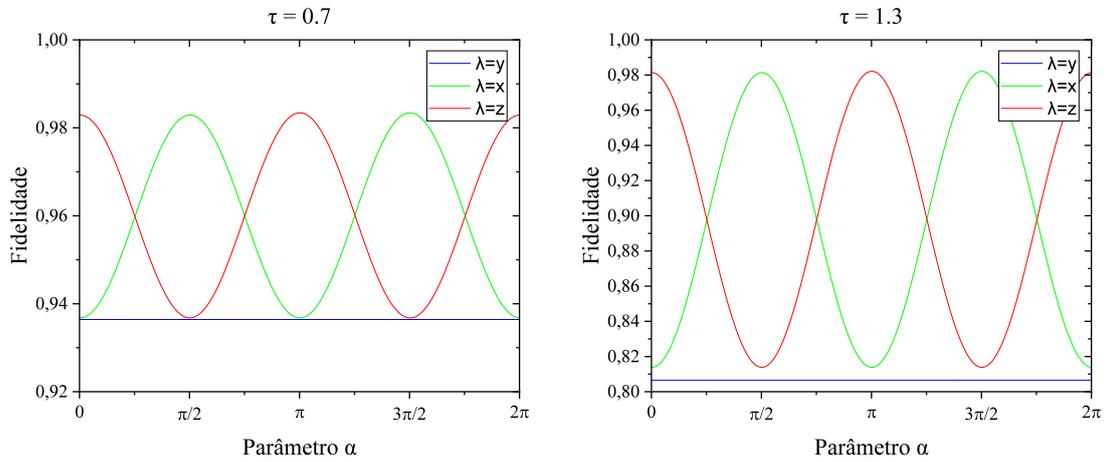


Figura 5: Fidelidade em (a)  $t = 0.7\tau$  e em (b)  $t = 1.3\tau$  como função do ângulo  $\alpha$  para o estado cuja condição inicial é dada por  $\rho_I(0) = I/2 + \sigma_y/2$  e o acoplamento do reservatório em ambos os gráficos é dado por  $\eta = 0.004$ . A linha azul representa o vetor de erro  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{y}}$ , a linha verde representa o vetor de erro  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{x}}$ , e a linha vermelha representa o vetor de erro  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{z}}$ .

Além dos dois casos exibidos acima, fizemos um terceiro e último teste para o caso sem porta, em que utilizamos uma condição inicial mais genérica, composta por duas direções. Abaixo, na Figura 6, nós mostramos a fidelidade final calculada no tempo  $t = \tau$ , dada por  $F(\tau) = \text{Tr}[\tilde{\rho}(\tau)\tilde{\rho}(0)]$ , como função do ângulo  $\alpha$ . Utilizamos  $n = 4$  para o campo de proteção,  $\rho_I(0) = I/2 + \sin(\pi/4)\sigma_x/2 + \cos(\pi/4)\sigma_z/2$  para a condição inicial, e (a)  $\eta = 0.001$  e (b)  $\eta = 0.004$  para o acoplamento.

Uma vez mais, para termos um valor de referência, utilizamos  $n = 0$  para o campo de proteção, e as fidelidades que obtemos para os vetores de erros  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{x}}$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{y}}$  e  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{z}}$  são, respectivamente,  $F(\tau) \approx 0.763$ ,  $F(\tau) \approx 0.526$  e  $F(\tau) \approx 0.763$ , para  $\eta = 0.001$  e  $F(\tau) \approx 0.749$ ,

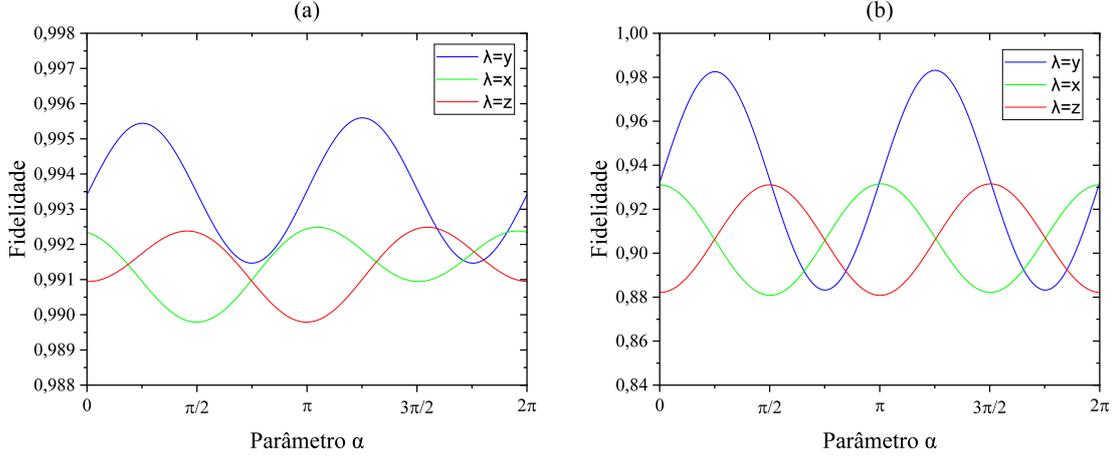


Figura 6: Fidelidade em  $t = \tau$  como função do ângulo  $\alpha$  para o estado cuja condição inicial é dada por  $\rho_I(0) = I/2 + \sin(\pi/4)\sigma_x/2 + \cos(\pi/4)\sigma_z/2$  e o acoplamento do reservatório é dado em (a) por  $\eta = 0.001$  e em (b) por  $\eta = 0.004$ . A linha azul representa o vetor de erro  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{y}$ , a linha verde representa o vetor de erro  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{x}$ , e a linha vermelha representa o vetor de erro  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{z}$ .

$F(\tau) \approx 0.500$  e  $F(\tau) \approx 0.749$ , para  $\eta = 0.004$ .

A primeira constatação que fizemos é que como a condição inicial não está na mesma direção de nenhum dos vetores de erro não temos mais uma fidelidade constante. Além disto, tomando como base os valores de referência para o campo de proteção desligado, pelos gráficos notamos que em todos os casos campo de proteção aumentou a fidelidade. Reforçamos também a observação da dependência do  $\eta$  para a otimização, no sentido que para um acoplamento mais fraco a otimização tem menor importância que para um acoplamento mais forte.

Dito isto, para  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{x}$  a maior fidelidade foi obtida para uma proteção na direção  $\hat{z}$ , para  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{z}$  a maior fidelidade foi obtida para uma proteção na direção  $\hat{x}$ , e para  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{y}$  a maior fidelidade foi obtida para uma proteção na direção  $[\sin(\pi/4)\hat{x} + \cos(\pi/4)\hat{z}]$ , ou seja, nesta caso a melhor proteção foi obtida para a mesma direção da condição inicial, da mesma forma que nos casos vistos anteriormente, e assim fica evidente a influência da condição inicial para a otimização.

Através da Figura 7, exibida abaixo, da mesma forma que nos casos anteriores, verificamos que os  $\tau$ 's diferentes ( $0.7\tau$  e  $1.3\tau$ ) não influenciam nos ângulos otimizados que se mantém os mesmos.

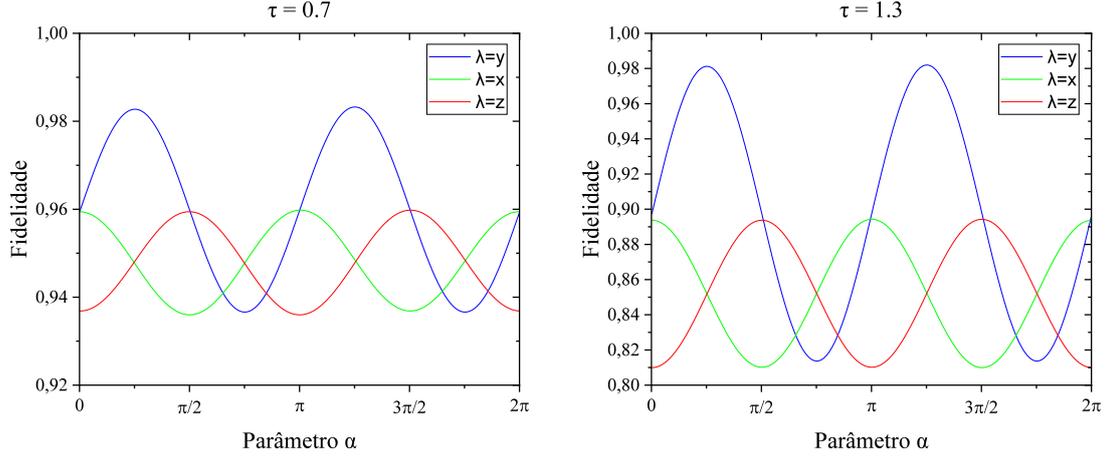


Figura 7: Fidelidade em (a)  $t = 0.7\tau$  e em (b)  $t = 1.3\tau$  como função do ângulo  $\alpha$  para o estado cuja condição inicial é dada por  $\rho_I(0) = I/2 + \sin(\pi/4)\sigma_x/2 + \cos(\pi/4)\sigma_z/2$  e o acoplamento do reservatório em ambos os gráficos é dado por  $\eta = 0.004$ . A linha azul representa o vetor de erro  $\lambda = \hat{y}$ , a linha verde representa o vetor de erro  $\lambda = \hat{x}$ , e a linha vermelha representa o vetor de erro  $\lambda = \hat{z}$ .

- **Abaixo, seguem os resultados obtidos para os casos em que a proteção foi realizada juntamente com uma operação lógica de Hadamard.**

A seguir, vamos repetir as análises realizadas anteriormente, seguiremos o mesmo passo a passo, mas desta vez teremos a inclusão de uma operação lógica de Hadamard atuando no estado inicial. Isso terá um impacto na dinâmica do sistema, uma vez que o estado quântico não permanecerá parado na esfera de Bloch, em vez disso, sofrerá uma rotação para mover-se de um ponto para outro na esfera. Podemos ter uma noção para onde o estado inicial será levado uma vez que sabemos que a porta Hadamard faz uma rotação de  $180^\circ$  em torno do eixo  $(\hat{x} + \hat{z})/\sqrt{2}$ , mas para uma melhor visualização essa rotação também pode ser decomposta em duas rotações, sendo expressa como uma rotação de  $90^\circ$  em torno do eixo  $\hat{y}$ , seguida por uma rotação de  $180^\circ$  em torno do eixo  $\hat{x}$ . Contudo, há outras decomposições possíveis que são bem úteis, sendo uma dessas expressa por uma rotação de  $180^\circ$  em torno do eixo  $\hat{z}$ , seguida por uma rotação de  $90^\circ$  em torno do eixo  $\hat{y}$ .

Na Figura 8, nós mostramos a fidelidade final calculada no tempo  $t = \tau$ , dada por  $F(\tau) = \text{Tr}[\tilde{\rho}(\tau)\tilde{\rho}(0)]$ , como função do ângulo  $\alpha$ . Utilizamos  $n = 4$  para o campo de proteção,  $\rho_I(0) = I/2 + \sigma_x/2$  para a condição inicial, e (a)  $\eta = 0.001$  e (b)  $\eta = 0.004$  para o acoplamento.

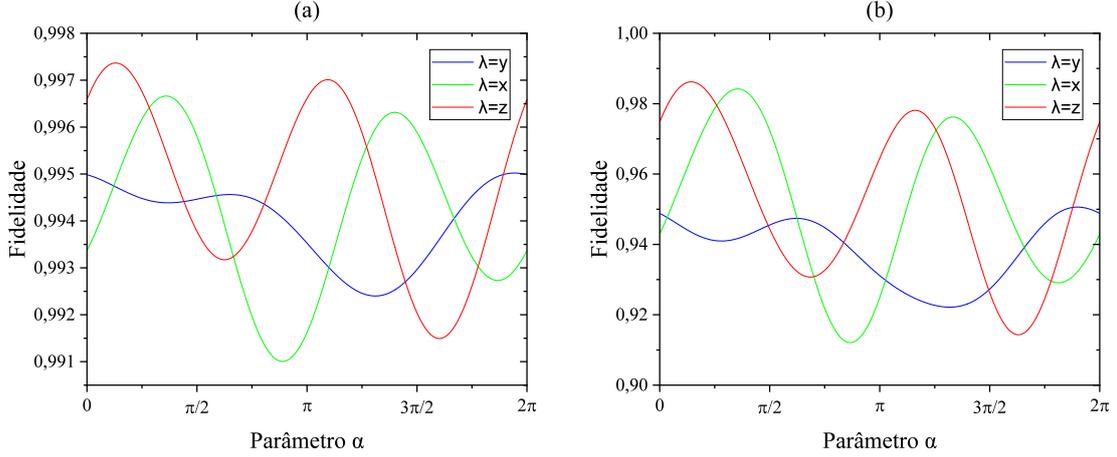


Figura 8: Fidelidade em  $t = \tau$  como função do ângulo  $\alpha$  para o estado cuja condição inicial é dada por  $\rho_I(0) = I/2 + \sigma_x/2$  e o acoplamento do reservatório é dado em (a) por  $\eta = 0.001$  e em (b) por  $\eta = 0.004$ . A linha azul representa o vetor de erro  $\lambda = \hat{y}$ , a linha verde representa o vetor de erro  $\lambda = \hat{x}$ , e a linha vermelha representa o vetor de erro  $\lambda = \hat{z}$ .

Para termos um valor de referência, quando o campo de proteção está desligado, isto é, quando utilizamos  $n = 0$  para o campo de proteção, as fidelidades que obtemos para os vetores de erros  $\lambda = \hat{x}$ ,  $\lambda = \hat{y}$  e  $\lambda = \hat{z}$  são, respectivamente,  $F(\tau) \approx 0.632$ ,  $F(\tau) \approx 0.601$  e  $F(\tau) \approx 0.622$ , para  $\eta = 0.001$  e  $F(\tau) \approx 0.553$ ,  $F(\tau) \approx 0.515$  e  $F(\tau) \approx 0.522$ , para  $\eta = 0.004$ .

Começamos analisando este caso sabendo que o estado inicial  $\rho_I(0) = I/2 + \sigma_x/2$  (eixo x) ao receber uma operação lógica da porta Hadamard sofrerá uma rotação e será levado para a condição final  $\rho(\tau) = I/2 + \sigma_z/2$  (eixo z). A primeira observação que fizemos para o caso com porta, levando em consideração os valores de referência para o campo de proteção desligado, foi verificar que independente da direção do vetor de erro, em todos os casos a fidelidade foi maior para o campo de proteção ligado. Além disso, ao examinarmos os gráficos, torna-se evidente que existe uma relação entre a fidelidade final e as orientações nas quais os campos externos são aplicados, sendo conseqüentemente possível otimizar a técnica ao identificar as orientações mais adequadas.

Da mesma forma que para o caso sem porta, ao compararmos o painel (a) com o (b) da Fig. 8, levando em conta os valores máximos e mínimos das fidelidades, constatamos que para um acoplamento mais fraco ( $\eta = 0.001$ ) o ângulo de otimização é praticamente irrelevante, pois a diferença entre as fidelidades máximas e mínimas é muito pequena, mas para um acoplamento mais forte ( $\eta = 0.004$ ), o ângulo de otimização passa a ser um fator relevante e deve ser considerado, pois a diferença entre as fidelidades máximas e mínimas

passa a ser maior. Portanto, no caso com porta, assim como no caso sem porta, a otimização é dependente da constante de acoplamento  $\eta$  do reservatório. A dependência de  $\eta$  para a otimização ficará mais evidente com os valores numéricos exibidos abaixo.

No caso em que  $\eta = 0.001$ , temos que a melhor fidelidade obtida para  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\boldsymbol{x}}$  é quando  $\alpha = 1.12$  rad, para  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\boldsymbol{y}}$  é quando  $\alpha = 6.09$  rad, e para  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\boldsymbol{z}}$  é quando  $\alpha = 0.40$  rad, e assim temos que os melhores campos externos de proteção são dados, respectivamente, por:  $\hat{\boldsymbol{u}}_c = 0.900\hat{\boldsymbol{y}} + 0.435\hat{\boldsymbol{z}}$ ,  $\hat{\boldsymbol{u}}_c = -0.192\hat{\boldsymbol{x}} + 0.981\hat{\boldsymbol{z}}$  e  $\hat{\boldsymbol{u}}_c = 0.389\hat{\boldsymbol{x}} + 0.921\hat{\boldsymbol{y}}$ . No caso em que  $\eta = 0.004$ , temos que a melhor fidelidade obtida para  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\boldsymbol{x}}$  é quando  $\alpha = 1.11$  rad, para  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\boldsymbol{y}}$  é quando  $\alpha = 5.96$  rad, e para  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\boldsymbol{z}}$  é quando  $\alpha = 0.45$  rad, e assim temos que os melhores campos externos de proteção são dados, respectivamente, por:  $\hat{\boldsymbol{u}}_c = 0.896\hat{\boldsymbol{y}} + 0.445\hat{\boldsymbol{z}}$ ,  $\hat{\boldsymbol{u}}_c = -0.318\hat{\boldsymbol{x}} + 0.948\hat{\boldsymbol{z}}$  e  $\hat{\boldsymbol{u}}_c = 0.435\hat{\boldsymbol{x}} + 0.900\hat{\boldsymbol{y}}$ . Observarmos uma proximidade entre os valores numéricos, mas os campos são distintos, portanto há uma dependência de  $\eta$  para a otimização. Essa dependência ficará ainda mais clara nos casos que serão analisados abaixo.

Os diferentes vetores de erro deram diferentes otimizações para os campos externos. Apesar do tipo de erro que estamos usando não deformar a esfera de Bloch na direção paralela ao erro, os resultados obtidos se diferenciaram do caso sem porta, e aqui não chegamos a dois resultados iguais (linhas sobrepostas) como anteriormente. Isso ocorre porque estamos rotacionando o estado quântico de um ponto a outro da esfera, e por esse motivo é explícito que a condição inicial influencia na dinâmica do sistema.

Para verificarmos se o tempo da dinâmica do sistema causaria alguma mudança significativa com relação ao ângulo otimizado mudamos o tempo de evolução do sistema. Usamos o painel (b) da Fig. 8 como referência, mantivemos os outros parâmetros iguais, e mudamos apenas o tempo de  $\tau$  para  $0.7\tau$  e  $1.3\tau$ . Abaixo, na Figura 9, apresentamos os resultados obtidos para os  $\tau$ 's diferentes.

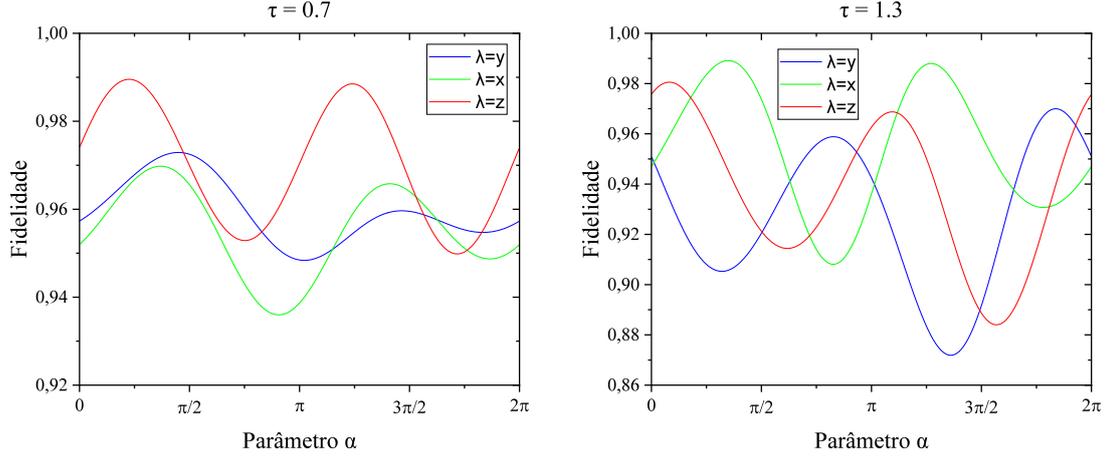


Figura 9: Fidelidade em (a)  $t = 0.7\tau$  e em (b)  $t = 1.3\tau$  como função do ângulo  $\alpha$  para o estado cuja condição inicial é dada por  $\rho_I(0) = I/2 + \sigma_x/2$  e o acoplamento do reservatório em ambos os gráficos é dado por  $\eta = 0.004$ . A linha azul representa o vetor de erro  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{y}}$ , a linha verde representa o vetor de erro  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{x}}$ , e a linha vermelha representa o vetor de erro  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{z}}$ .

Pela Fig. 9, se observa uma mudança em relação aos ângulos otimizado. Visualmente, pelas linhas verdes e azuis, claramente observamos que os ângulos otimizados estão em diferentes posições para os  $\tau$ 's diferentes. Numericamente, para  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{x}}$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{y}}$  e  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{z}}$ , no caso do painel (b) da Fig. 8 temos  $\alpha = 1.11$  rad,  $\alpha = 5.96$  rad, e  $\alpha = 0.45$  rad; no caso do painel (a) da Fig. 9 temos  $\alpha = 1.15$  rad,  $\alpha = 1.41$  rad, e  $\alpha = 0.70$  rad; no caso do painel (b) da Fig. 9 temos  $\alpha = 1.09$  rad,  $\alpha = 5.77$  rad, e  $\alpha = 0.25$  rad; Portanto, concluímos que a otimização para o caso com porta depende da condição inicial  $\rho(0)$ , da constante de acoplamento  $\eta$  do reservatório, e também do tempo  $\tau$  da dinâmica do sistema. Isso ocorre porque estamos rotacionando o estado quântico na esfera de Bloch conforme a dinâmica do sistema evolui, e aqui o  $\tau$  passa a influenciar na otimização diferentemente do caso sem porta em que o estado quântico permanecia parado na esfera.

Um ponto interessante de notar é que se estabeleceu uma diferença em relação ao caso sem porta, pois antes tínhamos uma direção que otimizava a proteção, e aqui temos apenas um ponto que otimiza a proteção, uma vez que pelos gráficos Fig. 8 vemos que os três erros tem único ponto em que a fidelidade final é máxima.

Um resultado semelhante ocorre quando o estado inicial  $\rho_I(0) = I/2 + \sigma_z/2$  (eixo z) recebe uma operação de Hamamard e através de uma rotação é levado para o estado final  $\rho(\tau) = I/2 + \sigma_x/2$  (eixo x). Exibimos esse caso na Figura 10, onde nós mostramos a fidelidade final calculada no tempo  $t$ , dada por  $F(t) = \text{Tr}[\tilde{\rho}(t)\tilde{\rho}(0)]$ , como função do ângulo

$\alpha$ . Utilizamos  $n = 4$  para o campo de proteção,  $\rho_I(0) = I/2 + \sigma_z/2$  para a condição inicial, e (a)  $\eta = 0.001$  e (b)  $\eta = 0.004$  para o acoplamento.

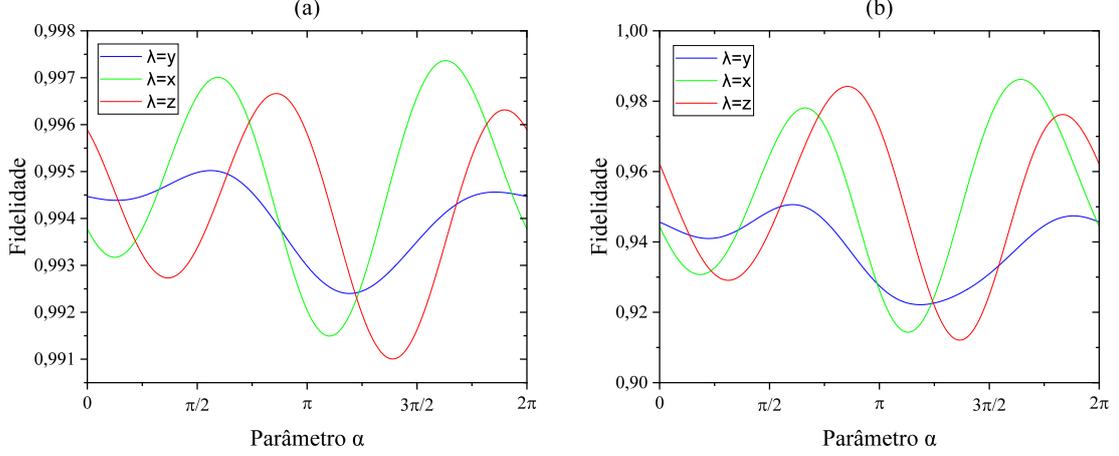


Figura 10: Fidelidade em  $t = \tau$  como função do ângulo  $\alpha$  para o estado cuja condição inicial é dada por  $\rho_I(0) = I/2 + \sigma_z/2$  e o acoplamento do reservatório é dado em (a) por  $\eta = 0.001$  e em (b) por  $\eta = 0.004$ . A linha azul representa o vetor de erro  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{y}}$ , a linha verde representa o vetor de erro  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{x}}$ , e a linha vermelha representa o vetor de erro  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{z}}$ .

Para termos um valor de referência, quando o campo de proteção está desligado, isto é, quando utilizamos  $n = 0$  para o campo de proteção, as fidelidades que obtemos para os vetores de erros  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{x}}$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{y}}$  e  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{z}}$  são, respectivamente,  $F(\tau) \approx 0.622$ ,  $F(\tau) \approx 0.601$  e  $F(\tau) \approx 0.632$ , para  $\eta = 0.001$  e  $F(\tau) \approx 0.522$ ,  $F(\tau) \approx 0.515$  e  $F(\tau) \approx 0.553$ , para  $\eta = 0.004$ .

Assim como antes, olhando as fidelidades nos valores de referência e comparando-as com os valores dos gráficos vemos que os campos externos de proteção são efetivos em todos os casos. Além disso, para  $\eta = 0.001$  o acoplamento é fraco, e portanto, a análise feita anteriormente é válida aqui também. E para  $\eta = 0.004$  nós também chegamos em resultados similares aos anteriores, pois vemos pela Fig. 10 que é possível otimizar o ângulo  $\alpha$  e conseqüentemente encontrar as direções mais adequadas para a aplicação do campo externo de proteção.

Aqui, não mostraremos os valores numéricos do ângulo  $\alpha$  para esse caso, pois isso não acrescentaria em nossa análise, uma vez que a física exibida aqui é semelhante à física exibida no caso anterior. Isso fica evidente quando comparamos o painel (b) da Fig. 10 com os painéis (a) e (b) da Fig. 11, pois alterando o tempo  $t$  de  $\tau$  para  $0.7\tau$  e  $1.3\tau$  o ângulo otimizado se modifica, isso é simples de visualizar se observarmos as curvas azuis.

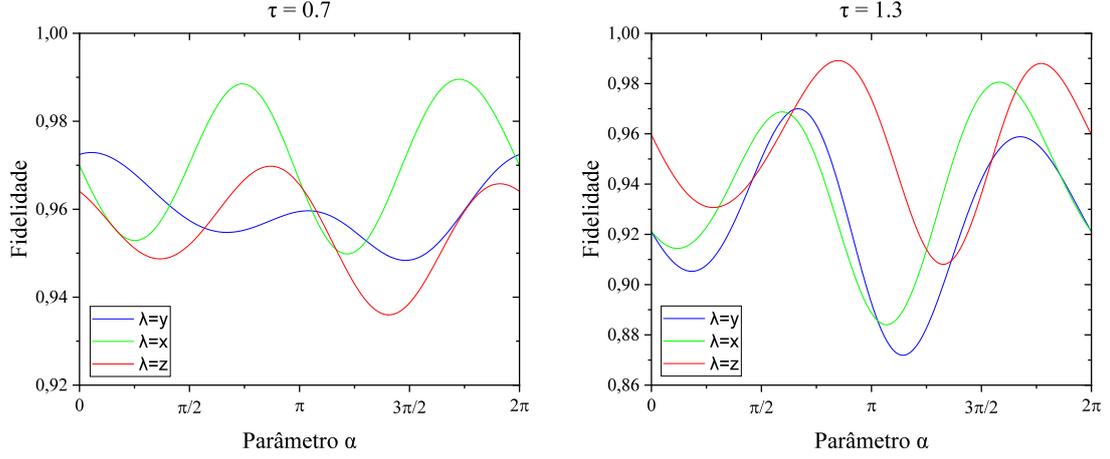


Figura 11: Fidelidade em (a)  $t = 0.7\tau$  e em (b)  $t = 1.3\tau$  como função do ângulo  $\alpha$  para o estado cuja condição inicial é dada por  $\rho_I(0) = I/2 + \sigma_z/2$  e o acoplamento do reservatório em ambos os gráficos é dado por  $\eta = 0.004$ . A linha azul representa o vetor de erro  $\lambda = \hat{y}$ , a linha verde representa o vetor de erro  $\lambda = \hat{x}$ , e a linha vermelha representa o vetor de erro  $\lambda = \hat{z}$ .

Após essa análise simplificada, avançamos para o terceiro e último estado inicial que examinamos, o qual produziu um resultado diferente e mais interessante, que será apresentado e explicado em detalhes. Na Figura 12, nós mostramos a fidelidade final calculada no tempo  $t = \tau$ , dada por  $F(\tau) = \text{Tr}[\tilde{\rho}(\tau)\tilde{\rho}(0)]$ , como função do ângulo  $\alpha$ . Utilizamos  $n = 4$  para o campo de proteção,  $\rho_I(0) = I/2 + \sin(\pi/4)\sigma_x/2 + \cos(\pi/4)\sigma_z/2$  para a condição inicial, e (a)  $\eta = 0.001$  e (b)  $\eta = 0.004$  para o acoplamento.

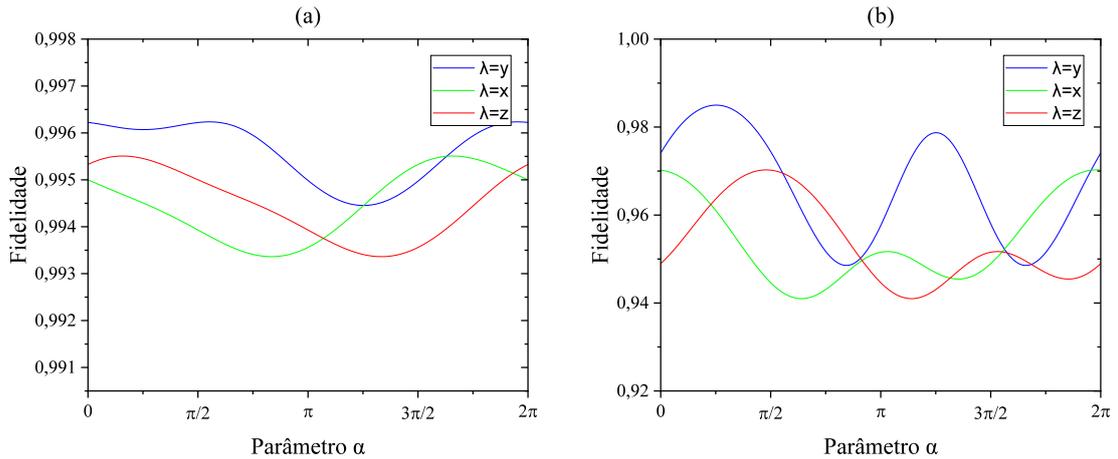


Figura 12: Fidelidade em  $t = \tau$  como função do ângulo  $\alpha$  para o estado cuja condição inicial é dada por  $\rho_I(0) = I/2 + \sin(\pi/4)\sigma_x/2 + \cos(\pi/4)\sigma_z/2$  e o acoplamento do reservatório é dado em (a) por  $\eta = 0.001$  e em (b) por  $\eta = 0.004$ . A linha azul representa o vetor de erro  $\lambda = \hat{y}$ , a linha verde representa o vetor de erro  $\lambda = \hat{x}$ , e a linha vermelha representa o vetor de erro  $\lambda = \hat{z}$ .

Os valores de referência das fidelidades para campo de proteção desligado ( $n = 0$ ) são, para  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\boldsymbol{x}}$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\boldsymbol{y}}$  e  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\boldsymbol{z}}$ , respectivamente,  $F(\tau) \approx 0.699$ ,  $F(\tau) \approx 0.543$  e  $F(\tau) \approx 0.699$ , para  $\eta = 0.001$  e  $F(\tau) \approx 0.635$ ,  $F(\tau) \approx 0.498$  e  $F(\tau) \approx 0.635$ , para  $\eta = 0.004$ .

Neste último caso, começamos com o estado inicial  $\rho_I(0) = I/2 + \sin(\pi/4)\sigma_x/2 + \cos(\pi/4)\sigma_z/2$  ( $45^\circ$  entre o eixo x e z) que ao receber uma operação de Hadamard será levado para a condição final  $\rho(\tau) = I/2 + \sin(\pi/4)\sigma_x/2 + \cos(\pi/4)\sigma_z/2$  ( $45^\circ$  entre o eixo x e z) através de uma rotação, ou seja, o estado final está no mesmo lugar do estado inicial. Pelo gráfico da Fig. 12, verificamos que em (a) as curvas praticamente não oscilam devido a pouca influência que a interferência do ambiente causa neste caso e aqui não há necessidade de uma otimização, mas em (b) temos uma influência maior do ruído e a oscilação das curvas se torna perceptível e suscetível a uma otimização. Isso ocorre porque o estado inicial está na mesma posição do eixo de rotação, e nestas circunstâncias em específico temos um resultado interessante para o caso com porta, o ângulo de otimização permanece o mesmo para  $\tau$ 's diferentes. Na Fig. 12, em (b), vemos que os ângulos otimizados para os erros  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\boldsymbol{x}}$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\boldsymbol{y}}$  e  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\boldsymbol{z}}$  são, respectivamente,  $\alpha = 0$  ou  $2\pi$  rad,  $\alpha = \pi/4$  rad, e  $\alpha = \pi/2$  rad. E pela Figura 13, vemos que tanto para o tempo igual a  $0.7\tau$  quanto para o tempo igual a  $1.3\tau$  os ângulos de otimização não se alteraram.

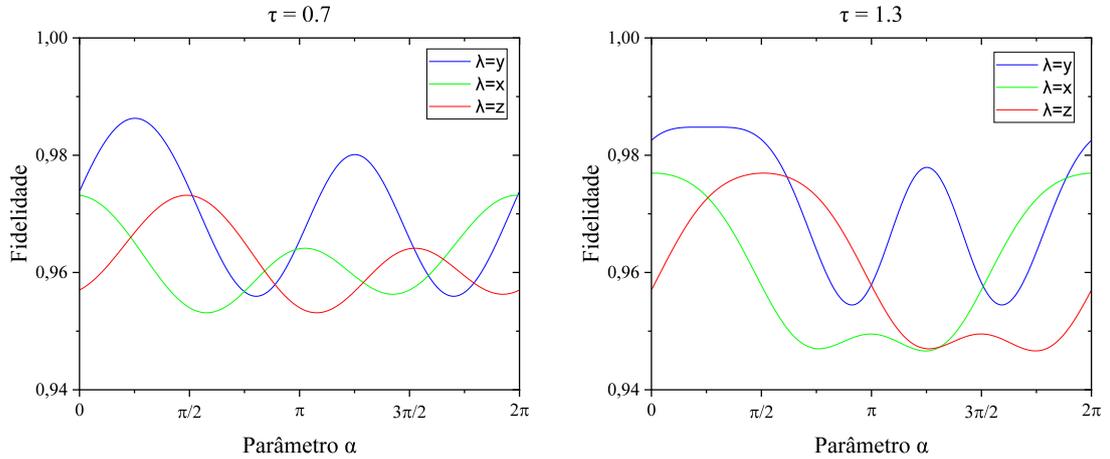


Figura 13: Fidelidade em (a)  $t = 0.7\tau$  e em (b)  $t = 1.3\tau$  como função do ângulo  $\alpha$  para o estado cuja condição inicial é dada por  $\rho_I(0) = I/2 + \sin(\pi/4)\sigma_x/2 + \cos(\pi/4)\sigma_z/2$  e o acoplamento do reservatório em ambos os gráficos é dado por  $\eta = 0.004$ . A linha azul representa o vetor de erro  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\boldsymbol{y}}$ , a linha verde representa o vetor de erro  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\boldsymbol{x}}$ , e a linha vermelha representa o vetor de erro  $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\boldsymbol{z}}$ .

É importante dizer que embora não tenha sido apresentado um gráfico, também examinamos uma situação que envolve um acoplamento intermediário entre os painéis (a) e

(b) da Fig. 12, onde o valor de  $\eta = 0.002$  foi adotado para o acoplamento, e constatamos que a partir deste valor as curvas passaram a exibir oscilações, e embora os ângulos de otimização não coincidam com aqueles obtidos para (b) da Fig. 12 em que  $\eta = 0.004$ , os valores são próximos.

## 4.2 Caso para três reservatórios independentes

Para os parâmetros dos reservatórios, em todos os casos nós supomos uma densidade espectral ôhmica, e utilizamos  $T = 0.25$  K, e  $\tau = 10^{-10}$  s. Além disso, em todos os casos analisados, realizamos a proteção do estado quântico sem a aplicação de uma operação lógica e também com tal operação, ou seja, verificamos os casos sem porta e com porta, sendo que em todos os casos que uma operação lógica foi realizada juntamente com a proteção, utilizamos a porta de Hadamard, que é dada por  $\hat{\mathbf{u}}_0 = (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}})/\sqrt{2}$ .

Vamos verificar apenas o caso em que a estrutura de erro é dada pela equação (58), onde as componentes do vetor de erro são:  $\boldsymbol{\lambda}_1 = \hat{\mathbf{x}}$ ,  $\boldsymbol{\lambda}_2 = \frac{\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}}{2}$  e  $\boldsymbol{\lambda}_3 = \hat{\mathbf{z}}$ , representando os erros de bit-flip, amplitude e decoerência, respectivamente. Os campos de proteção serão adotados conforme a discussão feita previamente na subseção 3.2.4. E nós utilizamos diferentes valores para condição inicial  $\rho_I(0)$  do estado que será protegido e para o acoplamento  $\eta$  do reservatório.

### 4.2.1 Erros de bit-flip, amplitude e decoerência

Começamos lembrando que os campos de controle utilizados na otimização são dados por pelas equações (93) e (94) reescritas novamente abaixo,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}}_{c_1} &= \sin(\theta) \cos(\phi) \hat{\mathbf{x}} + \sin(\theta) \sin(\phi) \hat{\mathbf{y}} + \cos(\theta) \hat{\mathbf{z}}, \\ \hat{\mathbf{u}}_{c_2} &= \cos(\theta) \cos(\phi) \hat{\mathbf{x}} + \cos(\theta) \sin(\phi) \hat{\mathbf{y}} - \sin(\theta) \hat{\mathbf{z}}.\end{aligned}$$

Desta forma, com o intuito de encontrarmos as direções (ângulos  $\theta$  e  $\phi$ ) que otimizam a proteção, em todos os casos variamos o parâmetro  $\theta$  de 0 até  $\pi$ , e o parâmetro  $\phi$  de 0 até  $2\pi$ , sendo essa variação realizada em intervalos regularmente espaçados, que foram particionados em 25 divisões para  $\theta$  e em 50 divisões para  $\phi$ , ou seja, a varredura foi realizada em intervalos de 0.12566370614 radianos para ambos os ângulos.

- Abaixo, seguem os resultados obtidos para os casos em que a proteção foi realizada sem uma operação lógica.

Na Figura 14, nós mostramos o mapa de calor para a fidelidade final calculada no tempo  $t = \tau$ , dada por  $F(\tau) = \text{Tr}[\tilde{\rho}(\tau)\tilde{\rho}(0)]$ , como função dos ângulos  $\theta$  e  $\phi$ . Utilizamos  $\rho_I(0) = I/2 + \sigma_x/2$  para a condição inicial, e  $\eta = 0.001$  para o acoplamento, e usamos em (a)  $n = 4$  e  $m = 8$  e em (b)  $n = 8$  e  $m = 4$  para os campos de proteção.

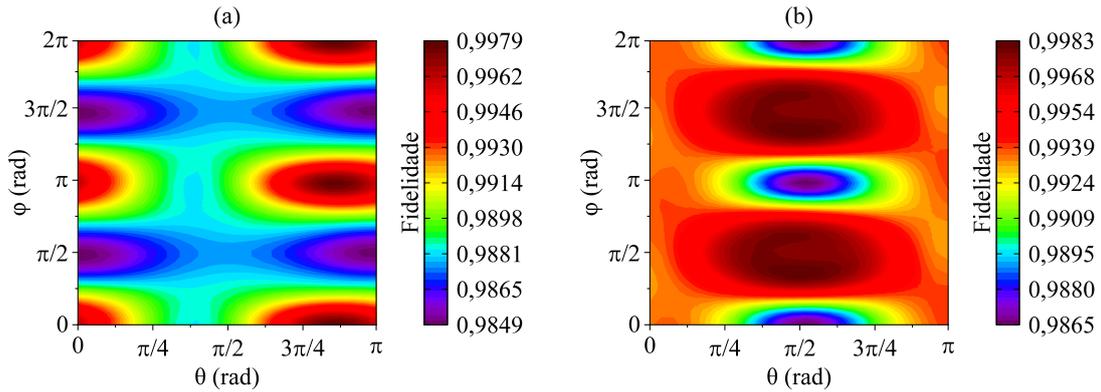


Figura 14: Estado Inicial  $\rho_I(0) = I/2 + \sigma_x/2$ , caso sem porta, acoplamento  $\eta = 0.001$ , e (a)  $n = 4$  e  $m = 8$  e (b)  $n = 8$  e  $m = 4$  para os campos de proteção.

Para termos um valor de referência, quando o campo de proteção está desligado, isto é, quando utilizamos ( $n = m = 0$ ) para o campo de proteção, a fidelidade que obtemos quando  $\eta = 0.001$  é de  $F(\tau) \approx 0.500$ . Assim, verificamos que a proteção com o campo ligado é efetiva, e comparando (a) com (b) na Fig. 14 vemos que as fidelidades máximas e mínimas são similares, mas as regiões de máximos e mínimos se encontram em locais distintos, e esse fato evidência a importância das direções de aplicação dos campos externos, e portanto, concluímos que é possível otimizar o método uma vez que as direções exercem uma influência direta na fidelidade final.

Com o intuito de averiguar como as fidelidades seriam afetadas, e também para verificar se as regiões de máximos e mínimos sofreriam alterações significativas, modificamos para  $\eta = 0.004$  o acoplamento do reservatório, e mantivemos os demais parâmetros inalterados. Na Figura 15, nós mostramos o mapa de calor para a fidelidade final calculada no tempo  $t = \tau$ , dada por  $F(\tau) = \text{Tr}[\tilde{\rho}(\tau)\tilde{\rho}(0)]$ , como função dos ângulos  $\theta$  e  $\phi$  para esse caso.

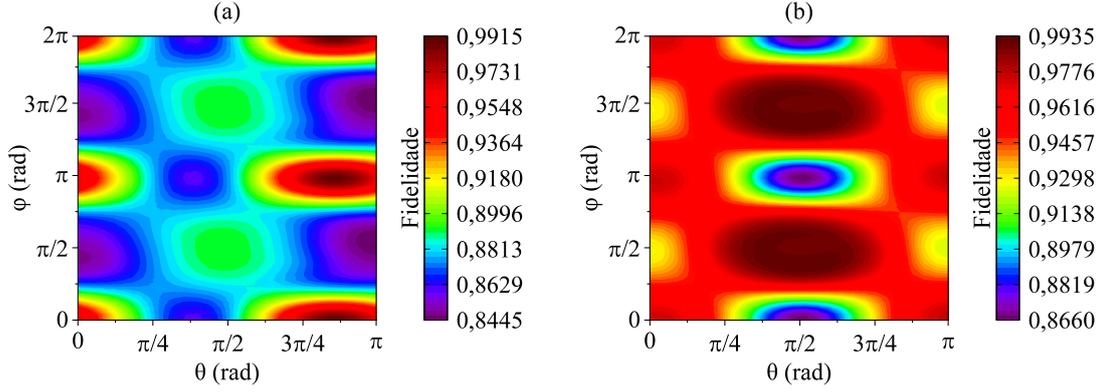


Figura 15: Estado Inicial  $\rho_I(0) = I/2 + \sigma_x/2$ , caso sem porta, acoplamento  $\eta = 0.004$ , e (a)  $n = 4$  e  $m = 8$  e (b)  $n = 8$  e  $m = 4$  para os campos de proteção.

O valor de referência quando o campo de proteção está desligado ( $n = m = 0$ ) para  $\eta = 0.004$  também é de  $F(\tau) \approx 0.500$ . Ao compararmos o mapa de calor da Fig. 15 com a Fig. 14, vemos que de modo geral as regiões de melhores e piores fidelidades continuam similares. Nós ainda notamos que na Fig. 15 onde fizemos o acoplamento  $\eta = 0.004$  a fidelidade máxima se manteve alta ( $\approx 0.99$ ) como no caso visto anteriormente na Fig. 14, mas a fidelidade mínima foi bastante prejudicada, saindo de ( $\approx 0.98$  quando  $\eta = 0.001$ ) e indo para ( $\approx 0.85$  quando  $\eta = 0.004$ ). Essa constatação é de grande relevância, pois verificamos que para um acoplamento mais forte a fidelidade mínima é bastante prejudicada, e para o método continuar sendo efetivo devemos aumentar os valores de  $n$  e  $m$  para que a fidelidade mínima aumente, abrindo caminho para uma otimização no sentido de encontrarmos os menores  $n$  e  $m$  para que a fidelidade mínima volte a ser ( $\approx 0.99$ ), pois assim o método será totalmente efetivo independentemente das direções dos campos externos.

Na Figura 16, modificamos o tempo  $t$  de  $\tau$  para  $0.7\tau$ , utilizamos  $\eta = 0.001$  para o acoplamento, e verificamos que as fidelidades finais não se alteram para  $\tau$ 's diferentes no caso sem porta, e portanto, verificamos que o método é efetivo e a proteção continua sendo eficaz mesmo quando  $\tau$  sofre pequenas variações.

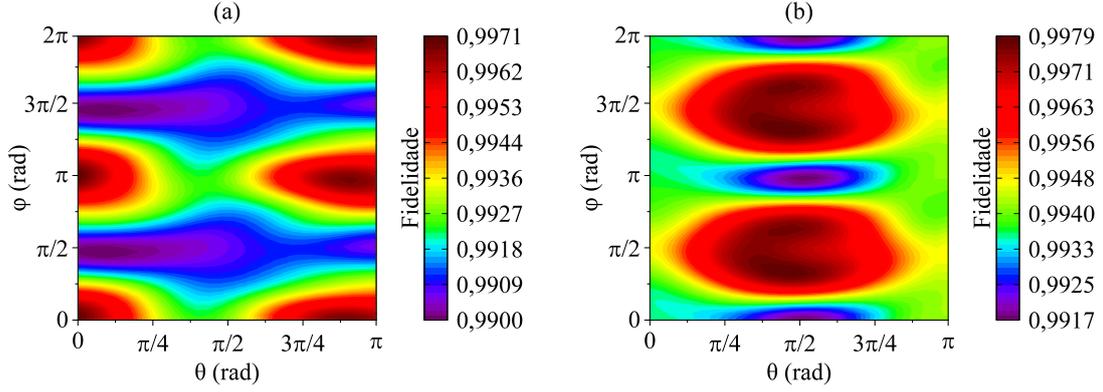


Figura 16: Estado Inicial  $\rho_I(0) = I/2 + \sigma_x/2$ , caso sem porta, acoplamento  $\eta = 0.001$ , tempo  $t = 0.7\tau$ , e (a)  $n = 4$  e  $m = 8$  e (b)  $n = 8$  e  $m = 4$  para os campos de proteção.

Deliberamos realizar uma modificação na condição inicial com o propósito de investigar se essa alteração teria influência sobre as fidelidades finais e sobre as direções de melhores e piores proteção. Ilustramos os resultados obtidos na Figura 17, onde nós mostramos o mapa de calor para a fidelidade final calculada no tempo  $t = \tau$ , dada por  $F(\tau) = \text{Tr}[\tilde{\rho}(\tau)\tilde{\rho}(0)]$ , como função dos ângulos  $\theta$  e  $\phi$ . Utilizamos  $\rho_I(0) = I/2 + \sin(\pi/4)\sigma_x/2 + \cos(\pi/4)\sigma_z/2$  para a condição inicial, e  $\eta = 0.001$  para o acoplamento, e usamos em (a)  $n = 4$  e  $m = 8$  e em (b)  $n = 8$  e  $m = 4$  para os campos de proteção.

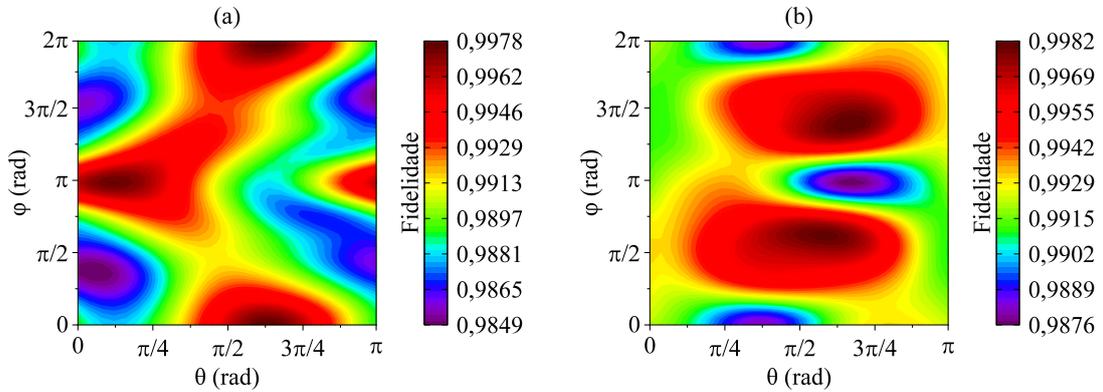


Figura 17: Estado Inicial  $\rho_I(0) = I/2 + \sin(\pi/4)\sigma_x/2 + \cos(\pi/4)\sigma_z/2$ , caso sem porta, acoplamento  $\eta = 0.001$ , e (a)  $n = 4$  e  $m = 8$  e (b)  $n = 8$  e  $m = 4$  para os campos de proteção.

Para termos um valor de referência, quando o campo de proteção está desligado, isto é, quando utilizamos ( $n = m = 0$ ) para o campo de proteção, a fidelidade que obtemos quando  $\eta = 0.001$  é de  $F(\tau) \approx 0.500$ . Neste caso, a análise é exatamente a mesma realizada no caso acima, mas com a diferença que aqui as regiões de máximas e mínimas fidelidades estão em regiões diferentes. A partir disto, concluímos que ao modificarmos o estado inicial que

queremos proteger, nós obtemos diferentes regiões que fornecem as melhores e piores proteção, ou seja, para diferentes estados iniciais chegamos em diferentes direções mais adequadas para as aplicações dos campos externos de proteção.

Na Figura 18, modificamos para  $\eta = 0.004$  o acoplamento do reservatório, mantivemos os demais parâmetros inalterados, e nós mostramos o mapa de calor para a fidelidade final calculada no tempo  $t = \tau$ , dada por  $F(\tau) = \text{Tr}[\tilde{\rho}(\tau)\tilde{\rho}(0)]$ , como função dos ângulos  $\theta$  e  $\phi$  para esse caso.

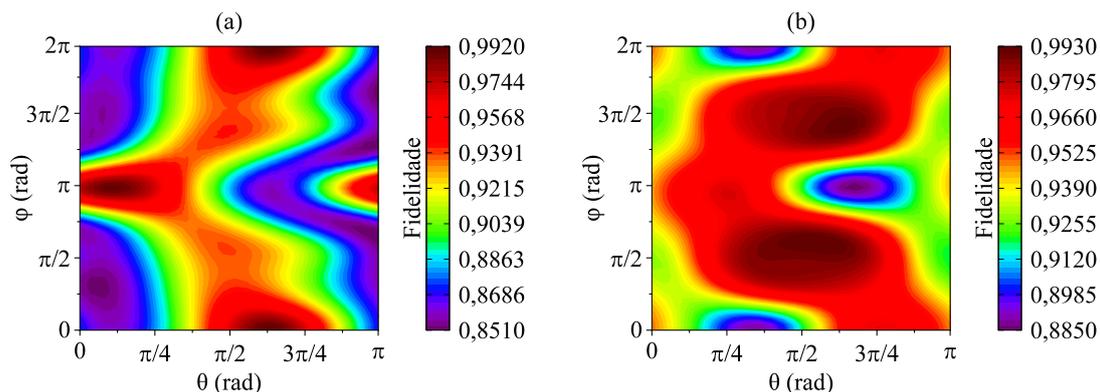


Figura 18: Estado Inicial  $\rho_I(0) = I/2 + \sin(\pi/4)\sigma_x/2 + \cos(\pi/4)\sigma_z/2$ , caso sem porta, acoplamento  $\eta = 0.004$ , e (a)  $n = 4$  e  $m = 8$  e (b)  $n = 8$  e  $m = 4$  para os campos de proteção.

O valor de referência quando o campo de proteção está desligado ( $n = m = 0$ ) para  $\eta = 0.004$  também é de  $F(\tau) \approx 0.500$ . Novamente, ao compararmos o mapa de calor da Fig. 18 com a Fig. 17, vemos que as regiões de melhores e piores fidelidade continuam similares. E mais uma vez, notamos que a fidelidade máxima se mantém ( $\approx 0.99$ ) tanto para  $\eta = 0.001$  quanto para  $\eta = 0.004$ , mas a fidelidade mínima é prejudicada saindo de ( $\approx 0.98$  quando  $\eta = 0.001$ ) e indo para ( $\approx 0.86$  quando  $\eta = 0.004$ ). Assim, mais uma vez concluímos que em situações onde acoplamento é mais fraco as direções dos campos externos tem pouca influência, por outro lado, se o acoplamento é mais fortes as direções dos campos externos exerce um impacto mais significativo. Logo, se o acoplamento aumenta, para a fidelidade mínima também aumentar e o método continuar efetivo independentemente das direções dos campos externos, devemos utilizar  $n$  e  $m$  maiores. Contudo, aumentar os  $n$ 's e  $m$ 's pode ser um problema para uma implementação experimental devido as altas frequências, amplitudes e intensidades dos campos envolvidos.

Na Figura 19, modificamos o tempo  $t$  de  $\tau$  para  $0.7\tau$ , utilizamos  $\eta = 0.001$  para o acoplamento, e verificamos que as fidelidades finais continuam altas para pequenas variações de  $\tau$ 's no caso sem porta, isto é, o método é efetivo e a proteção continua sendo eficaz mesmo quando  $\tau$  sofre pequenas variações.

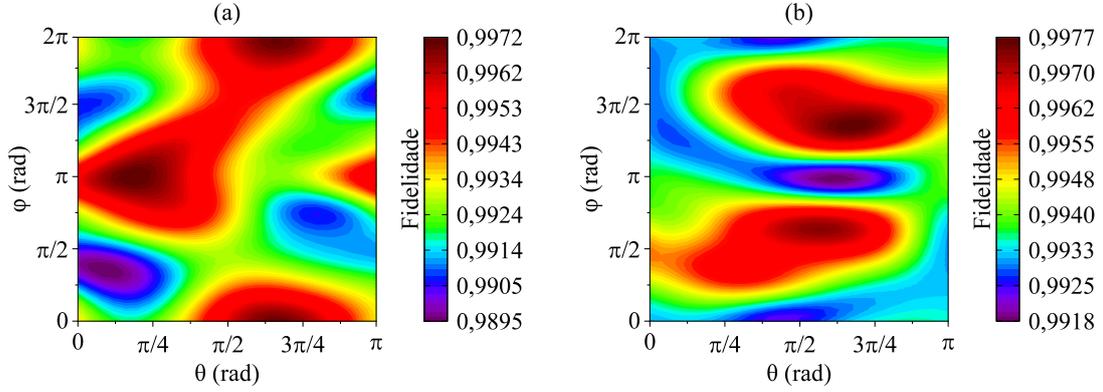


Figura 19: Estado Inicial  $\rho_I(0) = I/2 + \sin(\pi/4)\sigma_x/2 + \cos(\pi/4)\sigma_z/2$ , caso sem porta, acoplamento  $\eta = 0.001$ , tempo  $t = 0.7\tau$ , e (a)  $n = 4$  e  $m = 8$  e (b)  $n = 8$  e  $m = 4$  para os campos de proteção.

- **Abaixo, seguem os resultados obtidos para os casos em que a proteção foi realizada juntamente com uma operação lógica de Hadamard.**

A seguir, realizaremos uma análise semelhante à que foi previamente executada. Para isso, utilizaremos as mesmas condições iniciais, os mesmos parâmetros e aplicaremos as mesmas variações, a fim de garantir a consistência e comparabilidade dos resultados. Contudo, é fundamental destacar que neste contexto, introduzimos um elemento adicional: a inclusão de uma porta lógica de Hadamard.

Na Figura 20, nós mostramos o mapa de calor para a fidelidade final calculada no tempo  $t = \tau$ , dada por  $F(\tau) = \text{Tr}[\tilde{\rho}(\tau)\tilde{\rho}(0)]$ , como função dos ângulos  $\theta$  e  $\phi$ . Utilizamos  $\rho_I(0) = I/2 + \sigma_x/2$  para a condição inicial, e  $\eta = 0.001$  para o acoplamento, e usamos em (a)  $n = 4$  e  $m = 8$  e em (b)  $n = 8$  e  $m = 4$  para os campos de proteção.

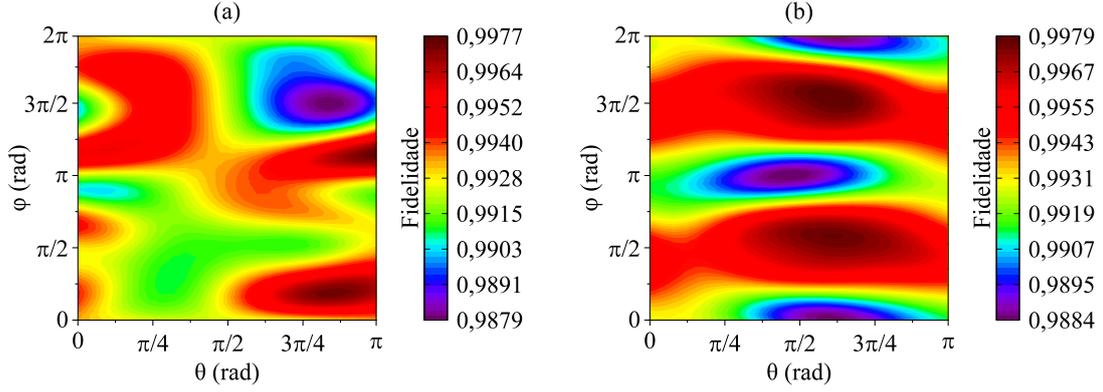


Figura 20: Estado Inicial  $\rho_I(0) = I/2 + \sigma_x/2$ , caso com porta, acoplamento  $\eta = 0.001$ , e (a)  $n = 4$  e  $m = 8$  e (b)  $n = 8$  e  $m = 4$  para os campos de proteção.

Para termos um valor de referência, quando o campo de proteção está desligado, isto é, quando utilizamos ( $n = m = 0$ ) para o campo de proteção, a fidelidade que obtemos quando  $\eta = 0.001$  é de  $F(\tau) \approx 0.498$ . Pela Fig. 20, vemos que a proteção é efetiva para o campo ligado, e comparando (a) com (b) notamos que as melhores e piores fidelidades são similares em ambos os casos. Contudo, assim como no caso sem porta, as regiões de melhores e piores proteção estão em locais distintos. Assim, novamente concluímos que os ângulos podem ser otimizados, pois é evidente que há uma dependência entre a fidelidade final e as direções dos campos externos de proteção.

Modificamos para  $\eta = 0.004$  o acoplamento do reservatório, e mantivemos os demais parâmetros inalterados. Na Figura 21, nós mostramos o mapa de calor para a fidelidade final calculada no tempo  $t = \tau$ , dada por  $F(\tau) = \text{Tr}[\tilde{\rho}(\tau)\tilde{\rho}(0)]$ , como função dos ângulos  $\theta$  e  $\phi$  para esse caso.

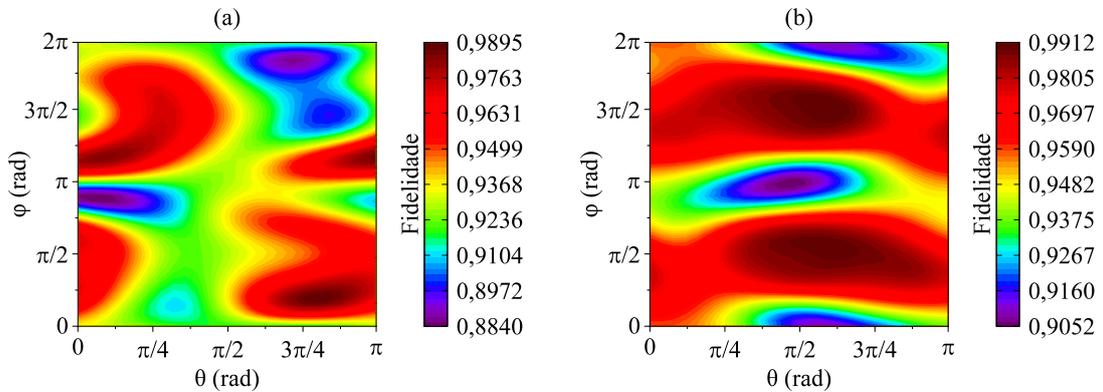


Figura 21: Estado Inicial  $\rho_I(0) = I/2 + \sigma_x/2$ , caso com porta, acoplamento  $\eta = 0.004$ , e (a)  $n = 4$  e  $m = 8$  e (b)  $n = 8$  e  $m = 4$  para os campos de proteção.

O valor de referência quando o campo de proteção está desligado ( $n = m = 0$ ) para  $\eta = 0.004$  também é de  $F(\tau) \approx 0.498$ . Neste mapa de calor da Fig. 21, vemos que as fidelidades máximas continuam similares à Fig. 20, porém constatamos que se aumentarmos o acoplamento as fidelidade mínimas diminuem consideravelmente, isso sugere que  $\eta$  desempenha um papel crucial na otimização, pois para acoplamentos maiores as direções dos campos externos exercem influências mais significativas na fidelidade final.

Na Figura 22, modificarmos o tempo  $t$  de  $\tau$  para  $0.7\tau$ , utilizamos  $\eta = 0.001$  para o acoplamento, e verificamos que as fidelidades continuam altas e pouco se alteram para  $\tau$ 's diferentes no caso com porta, e portanto, o método é efetivo e a proteção continua sendo eficaz mesmo quando  $\tau$  sofre pequenas variações.

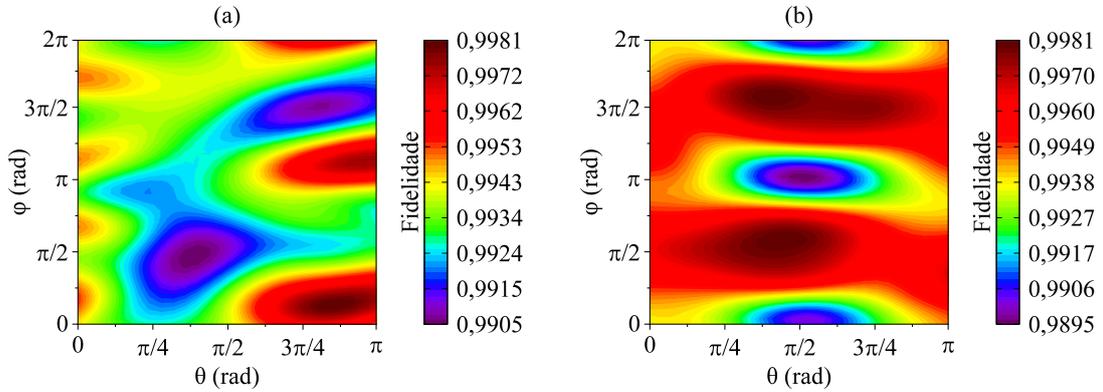


Figura 22: Estado Inicial  $\rho_I(0) = I/2 + \sigma_x/2$ , caso com porta, acoplamento  $\eta = 0.001$ , tempo  $t = 0.7\tau$ , e (a)  $n = 4$  e  $m = 8$  e (b)  $n = 8$  e  $m = 4$  para os campos de proteção.

Os resultados obtidos no caso com porta examinado acima (Fig. 20, 21, 22) mostraram que as direções dos campos externos empregadas nos trabalhos das referências [17, 18] dadas por  $\mathcal{U}_{cx}(t)$  e  $\mathcal{U}_{cz}(t)$ , apesar de serem efetivas, não são necessariamente as melhores. Além disto, chegamos em um resultado interessante, pois verificamos que para uma determinada condição inicial, tanto o caso sem porta quanto o caso com porta, apresentam resultados semelhantes, pois em ambos os casos as pequenas variações no tempo  $\tau$  pouco influenciam na fidelidade final, mas variações em  $\eta$  causam grande impacto na fidelidade final.

Para confirmarmos esses resultados, apresentaremos abaixo o segundo e último caso com porta que estudamos. Na Figura 23, nós mostramos o mapa de calor para a fidelidade final calculada no tempo  $t = \tau$ , dada por  $F(\tau) = \text{Tr}[\tilde{\rho}(\tau)\tilde{\rho}(0)]$ , como função dos ângulos  $\theta$  e  $\phi$ . Utilizamos  $\rho_I(0) = I/2 + \sin(\pi/4)\sigma_x/2 + \cos(\pi/4)\sigma_z/2$  para a condição inicial, e  $\eta = 0.001$  para o acoplamento, e usamos em (a)  $n = 4$  e  $m = 8$  e em (b)  $n = 8$  e  $m = 4$  para os campos.

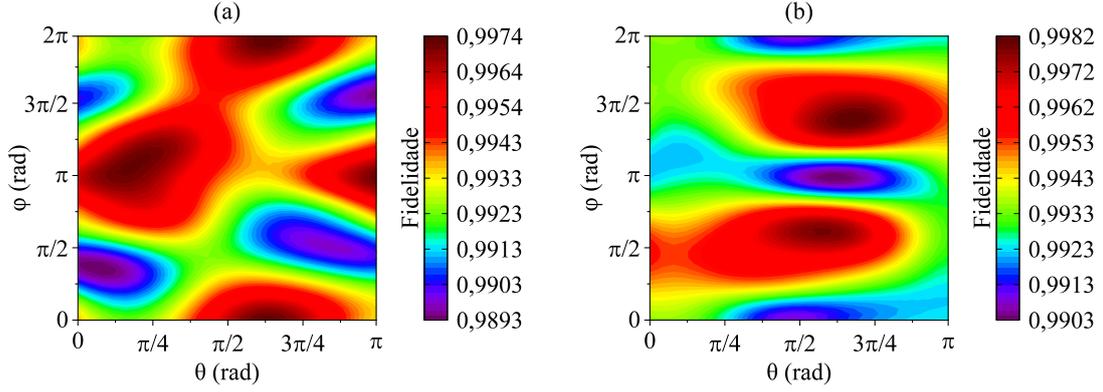


Figura 23: Estado Inicial  $\rho_I(0) = I/2 + \sin(\pi/4)\sigma_x/2 + \cos(\pi/4)\sigma_z/2$ , caso com porta, acoplamento  $\eta = 0.001$ , e (a)  $n = 4$  e  $m = 8$  e (b)  $n = 8$  e  $m = 4$  para os campos de proteção.

O valor de referência quando o campo de proteção está desligado ( $n = m = 0$ ) para  $\eta = 0.001$  é  $F(\tau) \approx 0.499$ . Comparando os resultados da Fig. 23, vemos que tanto em (a) quanto em (b), as fidelidades máximas e mínimas são similares, mas as regiões de máximos e mínimos estão em locais diferentes, logo as análises feitas anteriormente continuam válidas. Esses dois casos com diferentes condições iniciais que analisamos (Fig. 20 e Fig. 23) evidenciam que há diferenças entre os locais de máximos e mínimos para as diferentes condições iniciais, e portanto, se não houver uma independência das direções dos campos externos, devemos examinar essas peculiaridades caso a caso.

Abaixo, temos a Figura 24 onde fizemos  $\eta = 0.004$ , nós mostramos o mapa de calor para a fidelidade final calculada no tempo  $t = \tau$ , dada por  $F(\tau) = \text{Tr}[\tilde{\rho}(\tau)\tilde{\rho}(0)]$ , como função dos ângulos  $\theta$  e  $\phi$  para esse caso.

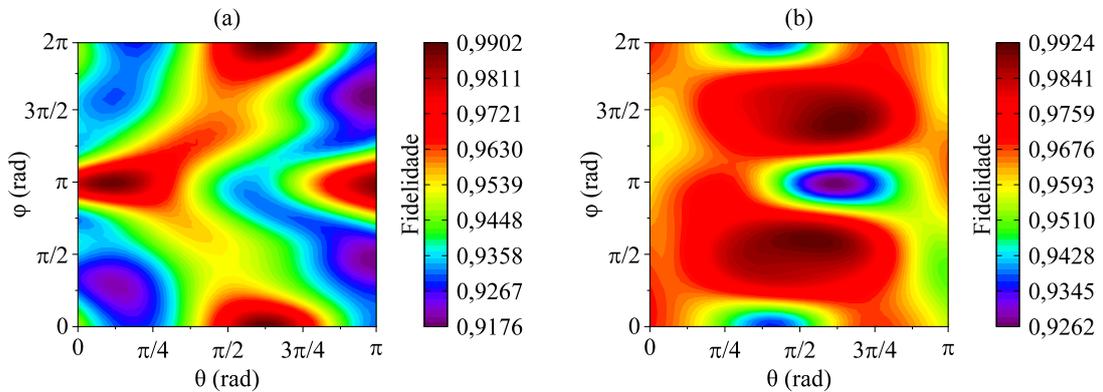


Figura 24: Estado Inicial  $\rho_I(0) = I/2 + \sin(\pi/4)\sigma_x/2 + \cos(\pi/4)\sigma_z/2$ , caso com porta, acoplamento  $\eta = 0.004$ , e (a)  $n = 4$  e  $m = 8$  e (b)  $n = 8$  e  $m = 4$  para os campos de proteção.

O valor de referência quando o campo de proteção está desligado ( $n = m = 0$ ) para  $\eta = 0.004$  é  $F(\tau) \approx 0.498$ . Aqui, ao alterarmos o  $\eta$  de 0.001 (Fig. 24) para 0.004 (Fig. 24), comparando os resultados de ambos os gráficos, vemos que o mesmo ocorre em ambas as situações, quando o acoplamento aumenta, as fidelidades máximas permanecem altas ( $\approx 0.99$ ), porém as fidelidades mínimas diminuem ( $\approx 0.90$ ), desta forma concluímos que as diferentes condições iniciais fornecem resultados similares.

Por fim, na Figura 25, modificarmos o tempo  $t$  de  $\tau$  para  $0.7\tau$ , utilizamos  $\eta = 0.001$  para o acoplamento, e verificamos que as fidelidades máximas e mínimas não são muito modificadas para  $\tau$ 's com pequenas variações no caso com porta, como era de se esperar, uma vez que verificamos isso no caso com porta visto acima.

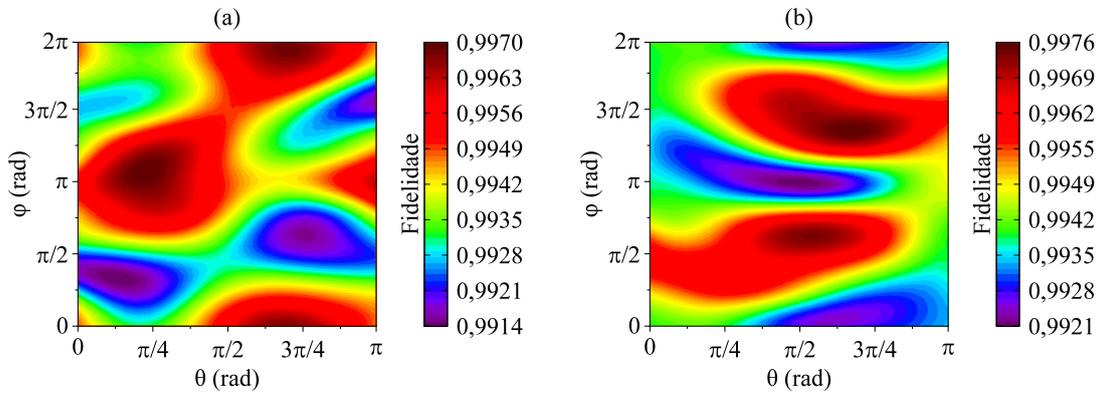


Figura 25: Estado Inicial  $\rho_I(0) = I/2 + \sin(\pi/4)\sigma_x/2 + \cos(\pi/4)\sigma_z/2$ , caso com porta, acoplamento  $\eta = 0.001$ , tempo  $t = 0.7\tau$ , e (a)  $n = 4$  e  $m = 8$  e (b)  $n = 8$  e  $m = 4$  para os campos de proteção.

## 5 Conclusão

Neste trabalho, nós estudamos as técnicas de desacoplamento dinâmico contínuo e mostramos que é possível realizar uma otimização nas direções dos campos externos de proteção. Entretanto, chegamos à conclusão de que essa otimização não é trivial e requer uma análise individual em cada situação, pois as direções otimizadas dependem de vários fatores, como o estado inicial, o acoplamento  $\eta$  do reservatório, a aplicação ou não de operações lógicas no estado quântico e, em alguns casos, do tempo  $\tau$  da dinâmica do sistema. Contudo, embora a exigência de compreendermos o acoplamento  $\eta$  torne essa otimização mais desafiadora, existem técnicas disponíveis que nos possibilitam calcular o grau de interação entre o estado quântico e o reservatório, de modo que essa complexidade pode ser contornada. Adicionalmente, é relevante destacar que existem algumas possibilidades de estudos futuros, uma vez que não investigamos certos elementos que poderiam afetar a otimização, como a temperatura  $T$  que permaneceu constante em todas as nossas análises, e a densidade espectral que consideramos como ôhmica em todos os cenários. Além disto, futuramente pretendemos explorar a otimização dos valores  $n$ 's e  $m$ 's dos campos externos, com o intuito de definir um protocolo a ser seguido para a implementação do método, de forma que uma vez definido o acoplamento entre o sistema e o reservatório, encontraremos os valores mínimos dos  $n$ 's e  $m$ 's que deixam a fidelidade mínima alta ( $\approx 0.99$ ) eliminando a dependência das direções dos campos externos. De modo geral, este estudo demonstrou resultados positivos, mesmo diante de desafios significativos, chegamos à conclusão de que é viável aprimorar as técnicas de desacoplamento dinâmico contínuo.

## Referências

- [1] Laszlo Gyongyosi and Sandor Imre. Scalable distributed gate-model quantum computers. *Scientific Reports*, 11, 02 2021.
- [2] Tameem Albash and Daniel A. Lidar. Adiabatic quantum computation. *Reviews of Modern Physics*, 90(1), jan 2018.
- [3] Ville Lahtinen and Jiannis K. Pachos. A Short Introduction to Topological Quantum Computation. *SciPost Phys.*, 3:021, 2017.
- [4] John Preskill. Quantum Computing in the NISQ era and beyond. *Quantum*, 2:79, August 2018.
- [5] Maximilian Schlosshauer. Quantum decoherence. *Physics Reports*, 831:1–57, 2019. Quantum decoherence.
- [6] A. R. Calderbank and Peter W. Shor. Good quantum error-correcting codes exist. *Phys. Rev. A*, 54:1098–1105, Aug 1996.
- [7] A. M. Steane. Simple quantum error-correcting codes. *Phys. Rev. A*, 54:4741–4751, Dec 1996.
- [8] Mark S. Byrd, Lian-Ao Wu, and Daniel A. Lidar. Overview of quantum error prevention and leakage elimination. *Journal of Modern Optics*, 51(16-18):2449–2460, 2004.
- [9] P. Zanardi and M. Rasetti. Noiseless quantum codes. *Phys. Rev. Lett.*, 79:3306–3309, Oct 1997.
- [10] D. A. Lidar, I. L. Chuang, and K. B. Whaley. Decoherence-free subspaces for quantum computation. *Phys. Rev. Lett.*, 81:2594–2597, Sep 1998.
- [11] Paulo E M F Mendonça, Marcelo A Marchioli, and Reginaldo d J Napolitano. Using continuous measurement to protect a universal set of quantum gates within a perturbed decoherence-free subspace. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 38(6):L95, jan 2005.
- [12] Lorenza Viola and Seth Lloyd. Dynamical suppression of decoherence in two-state quantum systems. *Phys. Rev. A*, 58:2733–2744, Oct 1998.

- [13] Lorenza Viola, Emanuel Knill, and Seth Lloyd. Dynamical decoupling of open quantum systems. *Phys. Rev. Lett.*, 82:2417–2421, Mar 1999.
- [14] Lorenza Viola, Seth Lloyd, and Emanuel Knill. Universal control of decoupled quantum systems. *Phys. Rev. Lett.*, 83:4888–4891, Dec 1999.
- [15] Lorenza Viola. Advances in decoherence control. *Journal of Modern Optics*, 51(16-18):2357–2367, 2004.
- [16] F. F. Fanchini, J. E. M. Hornos, and R. d. J. Napolitano. Continuously decoupling single-qubit operations from a perturbing thermal bath of scalar bosons. *Phys. Rev. A*, 75:022329, Feb 2007.
- [17] F. F. Fanchini, J. E. M. Hornos, and R. d. J. Napolitano. Continuously decoupling a hadamard quantum gate from independent classes of errors. *Phys. Rev. A*, 76:032319, Sep 2007.
- [18] F. F. Fanchini. Desacoplamento dinâmico de estados quânticos via campos contínuos de alta frequência. *Tese de Doutorado, Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos*, 2008.
- [19] M. Nakahara and T. Ohmi. *Quantum Computing: From Linear Algebra to Physical Realizations*. CRC Press, 2008.
- [20] Morten Kjaergaard, Mollie E. Schwartz, Jochen Braumüller, Philip Krantz, Joel I.-J. Wang, Simon Gustavsson, and William D. Oliver. Superconducting qubits: Current state of play. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, 11(1):369–395, Mar 2020.
- [21] Colin D. Bruzewicz, John Chiaverini, Robert McConnell, and Jeremy M. Sage. Trapped-ion quantum computing: Progress and challenges. *Applied Physics Reviews*, 6(2):021314, Jun 2019.
- [22] Jarryd J. Pla, Kuan Y. Tan, Juan P. Dehollain, Wee H. Lim, John J. L. Morton, David N. Jamieson, Andrew S. Dzurak, and Andrea Morello. A single-atom electron spin qubit in silicon. *Nature*, 489(7417):541–545, Sep 2012.
- [23] A. Radovanovic. *Quantum Programming Illustrated*. Aleksandar Radovanovic, 2021.
- [24] M.A. Nielsen and I.L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, 2010.

- [25] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Franck Lalöe. *Quantum Mechanics*, volume 1. John Wiley & Sons, 1<sup>a</sup> edition, 1981.
- [26] E.G. Rieffel and W.H. Polak. *Quantum Computing: A Gentle Introduction*. Scientific and Engineering Computation. MIT Press, 2011.
- [27] Armin Uhlmann. Transition probability (fidelity) and its relatives. *Foundations of Physics*, 41(3):288–298, jan 2010.
- [28] A.F.R. de Toledo Piza. *Mecanica quantica*. EDUSP, 2001.
- [29] Fumiaki Shibata, Yoshinori Takahashi, and Natsuki Hashitsume. A generalized stochastic liouville equation. non-markovian versus memoryless master equations. *Journal of Statistical Physics*, 17(4):171–187, 1977.
- [30] P. Facchi, S. Tasaki, S. Pascazio, H. Nakazato, A. Tokuse, and D. A. Lidar. Control of decoherence: Analysis and comparison of three different strategies. *Phys. Rev. A*, 71:022302, Feb 2005.