UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

IGOR PERUSSI CALCIA

ASPECTOS HISTÓRICOS E MATEMÁTICOS DA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DE 3º, 4º E 5º GRAUS

SÃO CARLOS
2023

IGOR PERUSSI CALCIA

ASPECTOS HISTÓRICOS E MATEMÁTICOS DA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DE 3º, 4º E 5º GRAUS

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

Orientador: Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio

SÃO CARLOS
2023

Perussi Calcia, Igor

Aspectos históricos e matemáticos da resolução de
equações de 3o., 4o. e 5o. graus / Igor Perussi Calcia --
2023.
36f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos,
campus São Carlos, São Carlos
Orientador (a): João Carlos Vieira Sampaio
Banca Examinadora: João Carlos Vieira Sampaio, Renato
José de Moura, Thaís Maria Dalbelo
Bibliografia

1. Equações polinomais. 2. Fórmula de Cardano. 3.
História da Matemática. I. Perussi Calcia, Igor. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática
(SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Ronildo Santos Prado - CRB/8 7325

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - CCM/CCET

Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905
Telefone: (16) 33518221 - http://www.ufscar.br

DP-TCC-FA nº 26/2023/CCM/CCET

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

IGOR PERUSSI CALCIA

APLICAÇÕES DE POLINÔMIOS CÚBICOS E RESOLUÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos

São Carlos, 06 de setembro de 2023

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	**Nome Completo**
Orientador	João Carlos Vieira Sampaio
Membro da Banca 1	Renato José de Moura
Membro da Banca 2	Thaís Maria Dalbelo

Documento assinado eletronicamente por **Joao Carlos Vieira Sampaio**, **Professor(a) do Ensino Superior**, em 29/10/2023, às 20:52, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Renato Jose de Moura**, **Professor(a) do Ensino Superior**, em 29/10/2023, às 22:37, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Thais Maria Dalbelo**, **Professor(a) do Ensino Superior**, em 01/11/2023, às 09:38, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Dedico este trabalho à minha família e amigos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, que sempre me apoiaram nas minhas decisões e escolhas, me incentivando e celebrando minhas conquistas juntos comigo. Agradeço à minha namorada também, por estar nessa caminhada comigo, me ajudando a conquistar e a realizar todos os nossos desejos. Aos amigos que fiz ao longo dessa jornada da graduação e a todos os envolvidos pela elaboração do nosso pensamento crítico e intelectual. Agradeço também ao Professor Dr. João Carlos Vieira Sampaio por me ajudar nesse trabalho e me guiar pelas escolhas na graduação.

RESUMO

No decorrer dos anos de 1530 a 1576, houve grandes avanços matemáticos na Europa, sendo um dos maiores, o grande duelo da resolução das equações cúbicas, batalhada por Niccolò Tartaglia e Gerolamo Cardano, o qual, trouxe renome a Cardano, e desgraças ao Tartaglia. A então fórmula para resolução das equações cúbicas, como sua história, faz parte de um longo duelo, no qual há uma grande amizade e uma reviravolta de uma publicação que fora prometida permanecer em segredo. Mesmo Tartaglia e Cardano resolvendo apenas as equações de 3º grau, Ferrari desenvolveu um método para a resolução de 4º grau, e com ajuda de derivadas conseguimos resolver quase todas as equações polinomiais de até 5º grau.

Palavras-chave: Tartaglia. Cardano. Cúbica. Derivada. Polinomial.

ABSTRACT

During the years from 1530 to 1576, there were great mathematical advances in Europe, one of the greatest being the great duel of the resolution of the cubic equations, fought between Niccolò Tartaglia and Gerolamo Cardano, which brought Cardano renown and Tartaglia disgrace. The then formula for solving the cubic equations, like its history, is part of a long duel, in which there is a great friendship and a turning point of a publication that had been promised to remain secret. Even though Tartaglia and Cardano solved only 3rd degree equations, Ferrari developed a method for solving 4th degree equations, and with the help of derivatives we can solve almost all polynomial equations up to 5th degree.

Keywords: Tartaglia. Cardano. Cubic. Derivative. Polynomial.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Scipione del Ferro, um professor da Universidade de Bolonha, na Itália, quando possuía 30 anos, na virada do século XV para o século XVI, desenvolveu um método para resolver equações cúbicas da forma

$$x^3 + ax = b.$$

Porém, o mantivera em segredo até a sua morte, quando um pouco antes de falecer, veio a revelar seu método a seu discípulo Antonio Fior e ao seu genro, Annibale della Nave, o qual foi seu sucessor na cadeira de professor de Matemática na Universidade de Bolonha.

Em 1499 nasce Niccolò Fontana em Brescia, na Itália. Seu apelido pelo qual era conhecido, Tartaglia (que significa "gago"), tem uma história curiosa, que ele mesmo conta no seu livro "Quesiti et inventioni diverse". Em 1512, enquanto Brescia era saqueada pelas tropas francesas comandadas por Gaston de Foix, Niccolò refugiou-se com a mãe e a irmã na igreja da cidade, acreditando ser um local seguro. Mas os soldados o encontraram e ele foi ferido com golpes no rosto e na cabeça. A mãe, viúva e sem condições de pagar um médico, tratou-lhe das feridas com o que podia e cuidou do filho. Niccolò salvou-se, mas ficou sempre com grande dificuldade em falar. Por essa razão, ficou com o apelido de Tartaglia. Viveu por quase duas décadas em Verona. Porém em 1534 Tartaglia se mudou para Veneza, que naquela época era o maior centro tipográfico da Europa.

> "A atividade científica de Tartaglia em Veneza foi intensa e variada, indo do ensino público ao ensino privado, das pesquisas pessoais as inúmeras assessorias prestadas a vários interlocutores sobre problemas matemáticos, mecânicos, topográficos e militares. Niccolò, na verdade, tinha adquirido grande notoriedade logo após sua chegada na cidade porque um estudioso muito estimado na sociedade veneziana, Antonio Maria Fior, quis desafiá-lo em público, num duelo algébrico. Esse duelo daria muito que falar nos meios matemáticos italianos, seja por seus conteúdos, seja por seu desfecho sensacional."(TOSCANO, 2012)

Na época era comum duelos acadêmicos, no qual, muitas vezes o ganhador era premiado com o emprego do perdedor. No ano de 1535, Antonio Maria Fior começou o duelo matemático com Tartaglia. Ele começou propondo 30 problemas a Tartaglia, que também lhe enviou outros 30 problemas a serem resolvidos. O ganhador seria aquele que resolvesse o maior número de problemas no período estipulado. Tartaglia literalmente humilhou Fior, resolvendo os problemas poucas horas depois que esses foram enviados para ele. Fior por sua vez, pareceu não ter conseguido resolver nenhum dos problemas propostos por Tartaglia.

> "...no dia 12 de fevereiro de 1535, Niccolò Tartaglia descobriu a fórmula resolutiva das equações de terceiro grau do tipo $x^3 + bx = c$, fórmula que, dali a alguns anos,

> se revelaria indispensável e fundamental para resolver qualquer equação cúbica." (TOSCANO, 2012)

Mesmo descobrindo a fórmula que resolvesse esse tipo de equação cúbica, Tartaglia não queria divulgá-la a outros matemáticos, guardando-a para si. Era hábito matemático da época, deixar o tempo passar antes de divulgar os resultados encontrados, mantendo-os em segredo para utilizá-los em duelos públicos e atrair novos alunos.

Girolamo Cardano era matemático, físico e médico italiano, lembrado principalmente por seu trabalho *Ars Magna* – tratado dedicado exclusivamente à Álgebra e publicado em 1545. Nasceu em Pavia no ano de 1501 e morreu em Roma no ano de 1576. Cardano iniciou seus estudos em Matemática com o pai, Fazio Cardano. Ele entrou na Universidade de Pavia, no qual seu pai havia estudado, para estudar medicina. Terminou seu curso na Universidade de Pádua, pois de 1521 a 1526 a Universidade de Pavia foi forçada a fechar, devido à Guerra da Itália.

> "Em fevereiro de 1532, logo após o casamento, Cardano decidiu, junto com sua mulher, sair de Sacco e estabelecer-se em Milão, visto que o exercício da medicina na pequena cidade veneta não lhe garantia um ordenado adequado para fazer frente à nova responsabilidade familiar." (TOSCANO, 2012)

Por volta de 1537, Cardano começou a escrever um texto sobre a matemática prática, um tipo de manual destinado a esclarecer questões aplicadas à aritmética, álgebra e geometria. Enquanto escrevia o seu livro, Cardano recebeu uma visita de Zuanne de Tonini da Coi, um professor italiano que já havia proposto em 1530 o problema da resolução das equações cúbicas a Tartaglia que porém, já sabia resolvê-los. Zuanne, gostava de propor problemas matemáticos que nem ele soubesse resolver a outros pesquisadores. Zuanne comentou a Cardano que alguém tinha a forma das equações cúbicas, e comentou também a notória disputa que ocorreu em Veneza anos antes. Após muitas trocas de cartas entre Cardano e Tartaglia, as quais algumas foram muito ríspidas, aos poucos, eles foram formando uma certa amizade, pois viram que essa amizade poderia ser muito vantajosa para ambos.

Em 1539, Tartaglia vai a Milão a pedido de Cardano, hospedando-se em sua casa. Após uma longa conversa e discussões matemáticas, Cardano faz um solene juramento, que ele guardaria todo o segredo de Tartaglia, mais especificamente, o da fórmula da resolução das equações cúbicas. Assim, mesmo após muita resistência, Tartaglia cede e começa a lhe contar como fizera para chegar e resolver as equações cúbicas da forma "cubo e coisa igual a número" ($x^3 + bx = c$), "cubo igual a coisa e número" ($x^3 = bx + c$) e "cubo e número igual a coisa" ($x^3 + c = bx$). Logo após a revelação da fórmula, Tartaglia pede a Cardano e ao seu discípulo de apenas 17 anos de idade com o nome de Ludovico Ferrari, para não compartilharem e nem publicarem tal fórmula, a fim de mantê-la em segredo.

Mesmo após Tartaglia ter voltado para Veneza, ele e Cardano continuaram trocando cartas sobre as resoluções das equações cúbicas. Cardano ainda não tendo entendido perfeitamente a fórmula, pede para que Tartaglia resolva a equação cúbica $x^3 + 3x = 10$, o qual Niccolò faz com bastante perfeição e detalhamento, mostrando que a solução em notações modernas é:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{26} + 5} - \sqrt[3]{\sqrt{26} - 5}.$$

Ao continuar com as trocas de cartas, Tartaglia então relaciona que a solução da equação $x^3 + bx = c$ (b e c não negativos) é a busca de dois números u e v, tais que ambos satisfaçam duas condições:

$$\begin{cases} u - v = c \\ u \cdot v = \left(\frac{b}{3}\right)^3 \end{cases}$$

A solução desse sistema de duas equações, pode até parecer, e com toda razão, uma tarefa bastante complicada para quem não entende do assunto, mas contudo, os matemáticos do século XVI não apresentavam nenhuma dificuldade em apresentar uma solução para esse problema, sendo assim, transformando um problema que ninguém conseguia resolver na época, em um problema simples de sistema. A resolução é bem simples, basta efetuar algumas passagens algébricas, que dão origem a uma equação de segundo grau $v^2 + cv = (b/3)^3$. Hoje já dominamos a resolução desse problema, do qual, extraímos o valor de v, e dado esse valor, conseguimos encontrar também o valor de u. Feito os cálculos necessários para a resolução, temos então que os valores (não negativos) de u e v são:

$$u = \sqrt{\frac{c^2}{2} + \frac{b^3}{27}} + \frac{c}{2},$$
$$v = \sqrt{\frac{c^2}{2} + \frac{b^3}{27}} - \frac{c}{2}.$$

E de acordo com Tartaglia, para obtermos a solução final da equação $x^3 + bx = c$, devemos então assumir que $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$. Assim, temos

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{c^2}{2} + \frac{b^3}{27}} + \frac{c}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{c^2}{2} + \frac{b^3}{27}} - \frac{c}{2}}.$$

E é essa, a fórmula tão desejada por Cardano, a qual Tartaglia possuía e a mantivera em segredo.

Uma vez obtida a tão esperada fórmula, ao pesquisar tipologias de equações cúbicas estudadas pelo matemático de Brescia, tais como $x^3 = bx + c$, Cardano percebeu que a fórmula parecia não funcionar, originando resultados insensatos para determinados valores dos coeficientes b e c. Em uma carta em agosto de 1539, Cardano descreve esse problema a Tartaglia, queixando-se de não ter recebido uma resposta anterior.

O problema levantado por Cardano, acontece quando escolhemos valores b e c, de tal maneira que, $\left(\frac{b}{3}\right)^3$ seja maior que $\left(\frac{c}{2}\right)^2$. Com isso a expressão sob a raiz quadrada vista anteriormente, dá um número negativo, ou seja, temos uma raiz quadrada de um número negativo. Atualmente sabemos que se trata de um número complexo, porém, para a época, a aritmética elementar dizia que tal número não existia, e assim, ficou um bom tempo sem solução.

Em 1540, Cardano mandou seu aluno e discípulo, Ludovico Ferrari assumir o seu lugar em um duelo matemático contra Tonini da Coi, o qual, Zuanne, como de costume, lançou um desafio que nem ele soubera resolver, sendo uma equação de quarto grau $x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$. Ferrari conseguiu resolvê-la através de brilhantes procedimentos algébricos, transformando a tal equação de quarto grau em uma equação cúbica da forma $y^3 + 15y^2 + 36y = 450$. Ela por sua vez, era resolvida através de técnicas recém criadas por Cardano, e sucessivamente, através da fórmula de Tartaglia.

> “Ao ganhar a disputa com Tonini da Coi, Ferrari obteve o encargo docente que seu mestre tinha deixado vago; mas, acima de tudo, com a descoberta do método para a solução das equações de quarto grau, acrescentou mais um marco miliário no campo da álgebra, garantindo um lugar para si na história da matemática”. (TOSCANO, 2012)

Com o passar dos meses, e posteriormente, anos, Cardano e Ferrari ficaram ainda mais convencidos de que seus grandes progressos na matemática deveriam ser publicados, mesmo tendo jurado que não o faria para Tartaglia.

> “De acordo com opinião amplamente compartilhada pelos especialistas, o ano de 1545 marca ‘o início da matemática moderna’. Justamente naquele ano, foi publicado em Nuremberg, na Alemanha, o pequeno, mas rico, volume escrito em latim ‘Artis magnae, sive de regulis algebraicis’ (A grande arte, ou as regras da álgebra), mais conhecido como ‘Ars Magna’, um texto destinado a imprimir uma virada profunda na história da álgebra, marcando o início de uma nova era para as pesquisas matemáticas.” (TOSCANO, 2012)

O então autor desse livro, Cardano, foi amplamente aclamado, como o maior algebrista de seu tempo, e hoje pode ser incluído como um dos maiores e mais influentes matemáticos de qualquer época. A Ars Magna apresenta pela primeira vez as fórmulas para a resolução das equações de terceiro e quarto graus para a comunidade científica matemática da Europa. Com isso, Cardano tinha rompido a promessa feita para Tartaglia de não publicar, ou de não revelar, a então fórmula para a resolução das equações cúbicas.

> “Na Ars Magna, de qualquer modo, Cardano não escondeu os nomes dos primeiros autores das fórmulas resolutivas para equações cúbicas, ou seja, Del Ferro e Tartaglia, dando-lhes o devido destaque e atribuindo-lhes os devidos méritos, além de reconhecer as contribuições de Ferrari.” (TOSCANO, 2012)

Tartaglia, mesmo tendo recebido os devidos méritos, não gostou da publicação de Cardano, ficando bravo e então, discutindo em suas cartas com o matemático.

Após saber das discussões, Ferrari lançou um desafio a Tartaglia, o qual não gostou e queria desafiar Cardano, pois a ele foi concebido o segredo da fórmula e prometido mantê-la em segredo. Porém, vale lembrar que Cardano já tinha adquirido enorme fama na Europa, e uma disputa pública com um estudioso tão eminente apresentava grandes vantagens para Tartaglia, cuja uma vitória o colocaria em muito prestígio, porém uma derrota não seria considerada uma desonra grave a ele.

Após longas trocas de cartas entre Tartaglia e Ferrari, sobre diversos duelos e desafios, apenas em 10 de agosto de 1548, chegou ao fim esse duelo, no qual os matemáticos em Milão, se desafiaram em batalhas matemáticas. Após algumas horas de batalha Tartaglia abandonou a disputa, visto que todo o público, ou quase todo presente no duelo, estava a favor de Ferrari, dando assim, a vitória a Ferrari.

Niccolò Tartaglia morreu em Veneza no dia de 13 de dezembro de 1557, na solidão e na pobreza. No ano anterior, ele tinha publicado as primeiras partes do ‘Tratado geral de números e medidas’, sua principal obra, cujas quatro partes seguintes foram publicadas postumamente, no ano de 1560.

Ludovico Ferrari interrompeu seu mandato junto ao cadastro milanês por volta de 1557, por motivos de saúde. No ano de 1564, Ferrari faleceu de repente, com apenas 40 anos, e muito provavelmente fora envenenado pela sua própria irmã.

Gerolamo Cardano usufruiu de muita fama e outros conhecimentos enquanto vivo. Porém, entre 1570 e 1571, foi atingido por uma série de desgraças, após ser condenado por heresia aplicado pela Inquisição. Não se sabe as acusações que lhe foram dirigidas, mas provavelmente, eram devidas às relações que Cardano mantinha com ambientes protestantes. Ele morreu no dia 20 de setembro de 1576, um pouco depois de escrever a sua autobiografia.

2 FÓRMULA DE CARDANO-TARTAGLIA

Mesmo tendo sido Tartaglia quem acabou deduzindo, a fórmula recebeu o nome de Cardano, pois foi ele quem a publicou em seu livro Ars Magna. Assim, a fórmula para a resolução das equações polinomiais cúbicas recebe o nome de A Fórmula de Cardano.

Quando Tartaglia, descobriu a solução para as equações polinomiais da forma

$$x^3 + ax + b = c \ (1)$$

ele deu as ferramentas, não apenas para esse tipo de equação cúbica, mas também para toda equação completa de terceiro grau (na qual todos os coeficientes são diferentes de zero), pois esta última podia ser reduzida a forma dada na equação (1), a qual chamou de forma reduzida.

Com isso, dada a equação polinomial cúbica completa $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com coeficientes reais e $a \neq 0$, conseguimos modificá-la, tomando $x = y + m$, obtendo

$$a(y + m)^3 + b(y + m)^2 + c(y + m) + d = 0$$

ou então, reescrevendo, temos

$$ay^3 + (3am + b)y^2 + (3am^2 + 2bm + c)y + (am^3 + bm2 + cm + d) = 0.$$

Comparando essas duas últimas equações, temos a impressão que ficou mais complicadas, porém, tomando $m = \frac{-b}{3a}$, conseguimos eliminar o termo de segundo grau da equação, sendo assim, obtendo uma nova equação polinomial cúbica em y, dada por

$$ay^3 + \left(\frac{-b^2}{3a} + c\right) y + \left(\frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d\right) = 0.$$

Dividindo agora, todos os membros por a, obtemos

$$y^3 + \left(\frac{-b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}\right) y + \left(\frac{2b^2}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}\right) = 0.$$

A princípio, parece ser uma equação, ainda muito complicada de se resolver, porém, comparando ela com a forma reduzida de equações cúbicas $y^3 + py + q = 0$, temos que

$$p = -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a} \text{ e } q = \frac{2b^2}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a},$$

o qual já se sabia resolver, desde del Ferro.

Para resolvermos essa equação, precisamos fazer algumas modificações e manipulações matemáticas.

Vamos supor que y é uma expressão da forma $y = u + v$. Substituindo y em $y^3 + py + q = 0$, obtemos

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$$

o qual, ao desenvolver o cubo e reagrupar, obtemos

$$(u^3 + v^3 + q) + (3uv + p)(u+v) = 0.$$

Sendo assim, se conseguirmos achar u e v que satisfaçam

$$u^3 + v^3 = -q, \quad u^3 \cdot v^3 = -p^3/27$$

teremos $y = u + v$ satisfazendo $y^3 + py + q = 0$.

Como temos u^3 e v^3 sendo números que conhecemos a soma e o produto, conseguimos encontrá-los como sendo as raízes da equação de segundo grau $w^2 + qw - p^3/27 = 0$, cujas soluções são dadas por

$$w_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \text{ e } w_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Dado isso, os números que queremos encontrar são tais que

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \text{ e } v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

assumindo, como Cardano, que $\delta = \dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27} \geq 0$. Deduzimos então que

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \text{ e } v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Logo a famosa fórmula de Cardano-Tartaglia é dada por

$$y = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Sendo assim, uma solução da equação polinomial cúbica completa da forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ é dada por

$$x = y + m = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{b}{3a}.$$

Destacamos que quando o discriminante $\delta = \dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27} < 0$, a equação cúbica reduzida $x^3 + px +$

$q = 0$ apresentará 3 raízes reais e distintas, as quais podemos encontrar através do método trigonométrico de Viete. Sendo assim, a fórmula de Cardano é válido para quando o discriminante $\delta \geq 0$

2.1 A FÓRMULA DE VIÈTE

Diferente de Cardano-Tartaglia, a solução trigonométrica de Viète, trata de uma solução utilizando $\cos\theta$ e depois, comparando com a equação desejada.

Ou seja, para toda equação do 3º grau, na forma $x^3 = 3R^2x + 2R^3\cos 3\theta$ buscamos uma raiz $x = 2R\cos\theta$. Partindo da identidade trigonométrica

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

ao reorganizar, temos

$$4\cos^3\theta = \cos 3\theta + 3\cos\theta,$$

na qual multiplicando ambos os membros por $2R^3$, sendo R diferente de 0 um número real,

$$8R^3\cos^3\theta = 2R^3\cos 3\theta + 6R^3\cos\theta$$

que pode ser reescrita como

$$(2R\cos\theta)^3 = 3R^2(2R\cos\theta) + 2R^3\cos 3\theta$$

e fazendo $x = 2R\cos\theta$ chegaremos à equação

$$x^3 = 3R^2x + 2R^3\cos 3\theta \Rightarrow x^3 - 3R^2x - 2R^3\cos 3\theta = 0.$$

Comparando a forma de Viète $x^3 - 3R^2x - 2R^3\cos 3\theta = 0$ com a forma reduzida $x^3 + px + q = 0$, tomamos $p = -3R^2$ com $p < 0$ e $q = -2R^3\cos 3\theta$. Como p e q são conhecidos, podemos encontrar os valores de R e θ.

Ou seja, dada a equação reduzida de 3º grau $x^3 + px + q = 0$, temos:
Se $\delta \geq 0$ podemos usar a fórmula de Cardano.
Se $\delta < 0$, então $p < 0$, que é a condição necessária à aplicação do método de Viète.

2.2 DISCRIMINANTE

Análise do discriminante $\delta = \dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}$ da fórmula de Cardano. Assim como na equação do 2º grau, o valor do discriminante δ da fórmula de Cardano está diretamente relacionado como número de raízes reais da equação do 3º grau. Vejamos os casos:

1º Caso: 3 raízes reais e distintas: Sejam a, b e c três números reais distintos que são soluções da equação $x^3 + px + q = 0$. Pelas relações de Girard temos:

$$a + b + c = 0 \Rightarrow c = -(a + b) \quad (1)$$
$$ab + ac + bc = p \quad (2)$$
$$abc = -q \quad (3)$$

Substituindo o valor de c na segunda e terceira equações tem-se que

$$p = ab - (a + b)^2 \text{ e } q = ab(a + b)$$

que substituídos em δ chega-se a

$$\delta = \left[\frac{ab(a + b)}{2}\right]^2 + \left[\frac{ab - (a + b)^2}{3}\right]^3 \Rightarrow -\frac{9(a - b)^2(2a + b)^2(a + 2b)^2}{108} \Rightarrow \delta < 0.$$

2º Caso: Uma real e duas raízes complexas. Sejam $a + bi$, $a - bi$ e c, com a, b e c números reais, soluções da equação $x^3 + px + q = 0$, então pelas relações de Girard, temos

$$2a + c = 0 \Rightarrow c = -2a \quad (1)$$
$$a^2 + b^2 + 2ac = p \quad (2)$$
$$c(a^2 + b^2) = -q. \quad (3)$$

Substituindo o valor de c nas equações (2) e (3), obtemos $p = b^2 - 3a^2$ e $q = 2a(a^2 + b^2)$ que substituídos em δ nos dá

$$\delta = \left[\frac{2a(a + b)}{2}\right]^2 + \left[\frac{b^2 - 3a^2}{3}\right]^3 \Rightarrow \frac{81a^4b^2 + 18a^2b^4 + b^6}{27} \Rightarrow \delta \geq 0.$$

Note que:

b $\neq 0 \Rightarrow \delta > 0$ e teremos duas raízes complexas e uma real.

Para b = 0 tem-se $\delta = 0$ o que torna as três raízes reais, sendo duas ou três coincidentes.

Vamos mostrar que as recíprocas também são verdadeiras, ou seja:

- Se $\delta < 0 \Rightarrow$ 3 raízes reais e distintas.
- Se $\delta = 0 \Rightarrow$ 3 raízes reais sendo duas ou três coincidentes.
- Se $\delta > 0 \Rightarrow$ 2 complexas conjugadas e uma real.

De fato, se $\delta < 0$ não implicasse em três raízes reais e distintas, teríamos uma raiz complexa e sua conjugada e assim estaríamos no 2º caso, o que é uma contradição.

3 RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DE 4^O GRAU

3.1 MÉTODO DE FERRARI

A história da solução algébrica da equação do quarto grau vem junto com a do terceiro grau, por ter sido encontrada pelo matemático Ludovico Ferrari. Certo dia, o Matemático Zuanne de Tonini da Coi propôs a Cardano o seguinte problema:

"Divida 10 em três partes tais que elas estejam em proporção continuada e que o produto das duas primeiras seja 6".

Se as três partes são denotadas por x, y e z, tem-se

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ xz = y^2 \\ xy = 6 \end{cases}$$

Esse sistema tem como consequência a equação $y^4 + 6y^2 - 60y + 36 = 0$. Depois de várias tentativas sem sucesso, Cardano passou o desafio a Ferrari que acabou encontrando uma fórmula geral para as equações do quarto grau. Este processo também foi publicado por Cardano, como continuação da solução feita por Tartaglia das equações do terceiro grau, em sua obra Ars Magna.

Dada a equação geral de quarto grau $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, com coeficientes reais e $a \neq 0$, substituindo x por $y - \frac{b}{4}$, tem-se como resultado a equação reduzida, sem o termo de terceiro grau, $y^4 + py^2 + qy + r = 0$, sendo p, q e r são:

$$\begin{aligned} p &= \frac{c}{a} - \frac{3b^2}{8a^2}, \\ q &= \frac{d}{a} - \frac{bc}{2a^2} + \frac{b^3}{8a^3}, \\ r &= \frac{e}{a} - \frac{bd}{4a^2} + \frac{b^2c}{16a^3} - \frac{3b^4}{256a^4}. \end{aligned}$$

Foi esse tipo de equação que Ferrari resolveu o desafio. Ele reagrupou os termos de modo que nos dois lados da igualdade houvesse polinômios quadrados perfeitos. Sendo isso possível, seriam extraídas as raízes quadradas, caindo em equações do segundo grau, e o problema estaria resolvido. Assim ele procedeu: Isolando $y^4 + py^2$ e somando $py^2 + p^2$ a ambos os membros

$$y^4 + 2py^2 + p^2 = py^2 - qy - r + p^2,$$

ou

$$(y^2 + p)^2 = py^2 - qy + p^2 - r.$$

Tomando s arbitrário,

$$(y^2 + p + s)^2 = py^2 - qy + p^2 - r + 2s(y^2 + p) + s^2 = (p + 2s)y^2 - qy + (p^2 - r + 2ps + s^2).$$

Agora escolhendo s de forma que o lado direito da equação acima seja um quadrado (a condição necessária e suficiente para que a equação $ax^2+bx+c = 0$ seja um quadrado é $\delta = b^2-4ac = 0$), tem-se

$$4(p + 2s)(p^2 - r + 2ps + s^2) - q^2 = 0.$$

Esta é uma equação do terceiro grau em s e como se sabe resolvê-la, chega-se a um valor de s que reduz a solução da equação original à extração de raízes quadradas, pois teria

$$(y^2 + p + s)^2 = (ty + u)^2.$$

Como t e u são números reais que dependem de p, q, r e s. Consequentemente,

$$y^2 + p + s = \pm(ty + u).$$

Logo, a solução completa da equação do 4º grau é dada por

$$x = y - \frac{b}{4a}.$$

3.2 MÉTODO DE EULER

Leonhard Euler (1707-1783) foi um matemático suíço que fez contribuições enormes para uma ampla gama da matemática e física, incluindo geometria analítica, trigonometria, geometria, cálculo e teoria dos números. Em 1772, Euler, em seu livro Elements of Algebra, publicou um novo método de resolver equações do 4º grau, baseado nas relações de Girard, produtos notáveis e na resolução de uma equação auxiliar do 3º grau. Assim, da mesma forma que Ferrari, o método de Euler passa pela resolução de uma equação do 3º grau.
Considere a equação do 3º grau $x^3 - Sx^2 + Sd - P = 0$, de raízes x_1, x_2 e x_3, que satisfazem : $x_1 + x_2 + x_3 = S$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = Sd$ e $x_1x_2x_3 = P$.
Tomando $y = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}$, temos

$$y^2 = x_1 + x_2 + x_3 + 2(\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_1x_3} + \sqrt{x_2x_3}),$$

que implica

$$(\frac{y^2 - S}{2})^2 = (\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_1x_3} + \sqrt{x_2x_3})^2 =$$
$$= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 2\sqrt{x_1x_2x_2}(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}),$$

ou seja,

$$(\frac{y^2 - S}{2})^2 = S_d + \sqrt{P}y,$$

ou

$$y^4 - 2Sy^2 - 8\sqrt{P} + S^2 - 4S_d = 0. \quad (*)$$

Dada a equação do 4º grau $ay^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ com coeficientes reais e $a \neq 0$, fazendo a substituição $x = y - \frac{b}{4a}$ tem-se a forma reduzida $y^4 + py^2 + qy + r = 0$ que, comparada com $(*)$ implica em

$$p = -2S, \ q = -8\sqrt{P} \ e \ r = S^2 - 4S_d.$$

Como p, q e r são conhecidos, podemos encontrar os valores de S, S_d e P, de modo que

$$S = -\frac{p}{2}, \ P = (\frac{q}{8})^2 \ e \ S_d = \frac{S^2 - r}{4} = \frac{p^2 - 4r}{16}.$$

Assim, reescrevendo a equação do 3º grau temos:

$$y^3 + \frac{p}{2}y^2 + (\frac{p^2 - 4r}{16})y + (\frac{q}{8})^2 = 0.$$

Obtemos x_1, x_2 e x_3 tais que:

$$y = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}$$

satisfaz a equação

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0.$$

Para encontrar as raízes da equação completa do 4º grau basta lembrar que $x = y - \frac{b}{4a}$, sendo y solução da equação $y^4 + py^2 + qy + r = 0$. Observe que cada raiz quadrada pode assumir dois valores complexos, mas a equação $\sqrt{P} = -\frac{q}{8}$ diz que $\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}\sqrt{x_3} = -\frac{q}{8}$. Assim, para cada valor de $\sqrt{x_1}$ e $\sqrt{x_2}$ há um único valor de $\sqrt{x_3}$. Dessa forma, obtemos todas as raízes da equação original.

4 RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DE 5º GRAU

As soluções de equações algébricas até o quarto grau são solúveis por fórmulas que envolvem as quatro operações aritméticas e a extração de raízes. Entretanto, nem todas as equações do 5º grau podem ser resolvidas por fórmulas gerais desse tipo.

> ”Em 1799, Ruffini (Paolo Ruffini, 1765-1822) publicou um trabalho em que, exceto por um pequeno engano, provava a impossibilidade de resolução da equação do 5º grau por fórmulas. Como na época não se acreditava que uma equação algébrica não pudesse ser resolvida por meio de fórmulas, morreu sem corrigir sua prova e sem ser reconhecido por ela. A primeira prova correta da impossibilidade de resolver as equações do 5º grau por meio de fórmulas foi publicada pelo norueguês Abel (Niels Henrik Abel, 1802-1829) em 1824. O curioso é que, três anos antes, Abel chegou a acreditar ter obtido a fórmula da equação do 5º grau, porém, ao produzir um exemplo de utilização da fórmula, percebeu que se enganou.” (PONTES et al., 2013)

Galois (1811-1832) também provou essa impossibilidade usando sua própria teoria, mais tarde chamada Teoria de Galois. Com isso, esse gênio francês, que morreu num duelo aos 21 anos de idade, nos permitiu hoje saber quais equações são ou não passíveis de resolução por fórmulas que envolvem os coeficientes.

5 USO DE DERIVADAS EM RESOLUÇÕES DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS

5.1 DERIVADA DE UMA FUNÇÃO POLINOMIAL

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial definida por

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Chamaremos de $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função polinomial derivada com relação a x da função f definida por

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + ... + 3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1.$$

Como a derivada de uma função polinomial também é um polinômio, podemos calcular a derivada da derivada com relação a x, a qual denotaremos por $f''(x)$, a qual é a derivada segunda de f com relação a x, temos

$$f''(x) = n(n-1) a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2) a_{n-1} x^{n-3} + ... + 6a_3 x + 2a_2.$$

Seguindo o mesmo procedimento, podemos calcular todas as derivadas da função polinomial $f(x)$.

5.2 MÉTODO DE NEWTON PARA ENCONTRAR RAÍZES

Os métodos que se usam atualmente para determinar uma raiz de uma função polinomial $f(x)$ localizada num intervalo $[a, b]$, quando se sabe que $f(a)$ e $f(b)$ possuem sinais opostos, não se baseiam em fórmulas fechadas, como as que foram obtidas para as equações de grau ≤ 4. Em vez disso, esse método se baseia em algoritmos aproximativos, os quais instruem, passo a passo, como proceder para obter uma sequência de números $x_1, x_2, ... , x_n, ...$, tais que os valores de $f(x_1), f(x_2), ... , f(x_n)$ estão cada vez mais próximos de zero.

Isaac Newton (1642-1727) desenvolveu um método iterativo para determinar uma raiz de uma função polinomial $f(x)$ localizada no intervalo $[a, b]$, quando se sabe que $f(a)$ e $f(b)$ possuem sinais opostos. Segundo este método, se x_1 é um valor próximo de uma raiz, a sequência $x_1, x_2, ..., x_n$ de números reais obtidos pela fórmula iterativa

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

tem como limite uma raiz de $f(x)$. Com $f'(x)$ representando a derivada da função polinomial $f(x)$.

5.3 DETERMINAR OS COEFICIENTES

Função polinomial do 1º grau:

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial do 1º grau definida por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$. Substituindo x por $y + m$, temos

$$f(x) = f(y + m) = a(y + m) + b = ay + (am + b).$$

Como $f(m) = am + b$ e $f'(m) = a$ podemos escrever

$$f(x) = f(y + m) = f'(m)y + f(m).$$

Portanto, os coeficientes da função do 1º grau transladada só depende das derivadas de f no ponto m.

Função polinomial do 2º grau:

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial do 2º grau definida por $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$. Substituindo x por $y + m$, temos

$$f(x) = f(y + m) = a(y + m)^2 + b(y + m) + c = ay^2 + (2am + b)y + (am^2 + bm + c).$$

Observando que

$$f(m) = am^2 + bm + c,$$
$$f'(m) = 2am + b \ e$$
$$f''(m) = 2a,$$

podemos escrever os coeficientes da função do 2ºgrau transladada em função das derivadas de f no ponto m. A função do 2º grau transladada é dada por

$$F(x) = f(y + m) = \frac{f'''(m)}{2}y^2 = f'(m)y = f(m).$$

Portanto, os coeficientes da função do 2º grau transladada só depende das derivadas de $f(x)$ no ponto m.

Funções polinomiais do 3º e 4º graus:

De forma semelhante, podemos escrever a função do 3º grau $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ transladada de x para $y + m$ em função das suas derivadas no ponto m, ou seja,

$$F(y + m) = \frac{f'''(m)}{6}y^3 = \frac{f''(m)}{2}y^2 + f'(m)y + f(m)$$

e a do 4º grau $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ transladada de x para $y + m$ em função das derivadas de $f(x)$ no ponto m, ou seja,

$$F(y+m) = \frac{f''''(m)}{24}y^4 + \frac{f'''(m)}{6}y^3 = \frac{f''(m)}{2}y^2 + f'(m)y + f(m).$$

Portanto, os coeficientes das funções do 3º e 4º graus transladadas só dependem das derivadas da função $f(x)$ aplicadas no ponto m.

Observe que todas as funções transladadas seguem o mesmo padrão.

Função polinomial do 1º grau:

$$f(y+m) = f'(m)y + f(m) = \sum_{k=0}^{1} \frac{f^k(m)}{k!}y^k.$$

Função polinomial do 2º grau:

$$f(y+m) = \frac{f''(m)}{2}y^2 + f'(m)y + f(m) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^k(m)}{k!}y^k.$$

Função polinomial do 3º grau:

$$f(y+m) = \frac{f'''(m)}{6}y^3 + \frac{f''(m)}{2}y^2 + f'(m)y + f(m) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^k(m)}{k!}y^k.$$

Função polinomial do 4º grau:

$$f(y+m) = \frac{f''''(m)}{24}y^4 + \frac{f'''(m)}{6}y^3 + \frac{f''(m)}{2}y^2 + f'(m)y + f(m) = \sum_{k=0}^{4} \frac{f^k(m)}{k!}y^k.$$

Generalizando temos que qualquer função polinomial de grau n transladada em m unidades possui coeficientes que só dependem das derivadas da função $f(x)$ original aplicadas no ponto m da seguinte forma

$$f(x) = f(y+m) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(m)}{k!}y^k,$$

na qual, n é o grau da função polinomial e $f^k(m)$ é a k-ésima derivada da função original aplicada no ponto m e considera-se a derivada de ordem zero como sendo a própria função.

5.4 ESCREVER OS COEFICIENTES

Podemos escrever qualquer função polinomial de grau n transladada m unidades com coeficientes que só depende das derivadas da função $f(x)$ original aplicadas no ponto m da seguinte forma:

$$f(x) = f(y+m) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(m)}{k!} y^k$$

como n é o grau da função polinomial e $f^k(m)$ é a k-ésima derivada da função original aplicada no ponto m.

Seguindo o mesmo procedimento de Viète, Cardano e Ferrari vamos substituir m por $-\dfrac{b}{na}$ na expressão anterior e fazendo $f(x) = 0$, obtemos

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(-\frac{b}{na})}{k!} y^k = 0.$$

Vamos escrever a equação reduzida do 1º grau. Usando a forma geral e considerando $f(x) = ax + b = 0$, temos

$$f'(-\frac{b}{a})y + f(-\frac{b}{a}) = 0.$$

Como $f'(-\dfrac{b}{a}) = a$ e $f(-\dfrac{b}{a}) = 0$, temos

$$ay = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Para a equação do 2º grau. Usando a forma geral e considerando $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$, temos

$$\frac{f''(-\frac{b}{2a})}{2} y^2 + f'(-\frac{b}{2a})y + f(-\frac{b}{2a}) = 0.$$

Como $f''(-\dfrac{b}{2a}) = 2a$ e $f'(-\dfrac{b}{2a}) = 0$, temos:

$$ay^2 + f(-\frac{b}{2a}) = 0 \Rightarrow y^2 + \frac{f(-\frac{b}{2a})}{a} = 0.$$

Comparando com a forma reduzida de Viète $y^2 + p = 0$, concluímos que

$$p = \frac{f(-\frac{b}{2a})}{a}.$$

Isso nos diz que os coeficientes da forma reduzida obtida através da translação de x por $y - \dfrac{b}{2a}$ dependem apenas da função do 2º grau aplicada no ponto $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Equação do 3º grau. Usando a forma geral e considerando $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, temos

$$\frac{f'''(-\frac{b}{3a})}{6}y^3 + \frac{f''(-\frac{b}{3a})}{2}y^2 + f'(-\frac{b}{3a})y + f(-\frac{b}{3a}) = 0.$$

Como $f'''(-\frac{b}{3a}) = 6a$ e $f''(-\frac{b}{3a}) = 0$, temos

$$ay^3 + f'(-\frac{b}{3a}) + f(-\frac{b}{3a}) = 0 \Rightarrow y^3 + \frac{f'(-\frac{b}{3a})}{a} + \frac{f(-\frac{b}{3a})}{a} = 0.$$

Comparando com a forma reduzida $y^3 + py + q = 0$, temos que

$$p = \frac{f'(-\frac{b}{3a})}{a} \ e \ q = \frac{f(-\frac{b}{3a})}{a}$$

são os coeficientes da fórmula de Cardano que dependem só da função do 3º grau e de suas derivadas aplicadas no ponto $x = -\frac{b}{3a}$.

Equação do 4o grau. Usando a forma geral e considerando $f(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e = 0$, temos

$$\frac{f''''(-\frac{b}{4a})}{24}y^4 + \frac{f'''(-\frac{b}{4a})}{6}y^3 + \frac{f''(-\frac{b}{4a})}{2}y^2 + f'(-\frac{b}{4a})y + f(-\frac{b}{4a}) = 0.$$

Como $f'''(-\frac{b}{4a}) = 24a$ e $f'''(-\frac{b}{4a}) = 0$ podemos escrever

$$y^4 + \frac{f''(-\frac{b}{4a})}{2a}y^2 + \frac{f'(-\frac{b}{4a})}{a}y\frac{f(-\frac{b}{4a})}{a} = 0$$

e comparando com a forma reduzida do 4º grau $y^4 + py^2 + qy + r = 0$, temos que

$$p = \frac{f''(-\frac{b}{4a})}{2a},\ q = \frac{f'(-\frac{b}{4a})}{a} \ e \ r = \frac{f(-\frac{b}{4a})}{a}$$

são os coeficientes da forma reduzida do 4º grau dependem apenas das derivadas da função $f(x)$ original aplicadas no ponto $x = -\frac{b}{4a}$.

6 APLICAÇÃO

6.1 PROBLEMAS DE EXPLORAÇÃO

Nos parágrafos seguintes, ilustramos métodos descritos neste trabalho através de problemas propostos.

1. Girolamo Cardano, no século 16, em seu livro *Ars Magna*, deduziu a fórmula de *del Ferro-Tartaglia-Cardano*, para encontrar uma solução real de uma equação cúbica reduzida. No nosso contexto, uma *equação cúbica reduzida* é uma equação polinomial do terceiro grau, da forma $x^3 + Px + Q = 0$, sendo P e Q números reais.

   Fórmula de Cardano, em versão modernizada: Sendo $D = \dfrac{Q^2}{4} + \dfrac{P^3}{27}$, se $D \geq 0$, então uma das raízes reais da equação $x^3 + Px + Q = 0$ é dada por

   $$x_0 = \sqrt[3]{\frac{-Q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{\frac{-Q}{2} - \sqrt{D}}$$

   Encontre uma raiz real da equação $x^3 + 3x = 10$ usando a fórmula de Cardano. *Resposta:* Da equação temos que $P = 3$ e $Q = -10$, com isso, temos que,

   $$D = \frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}$$

   $$D = \frac{(-10)^2}{4} + \frac{3^3}{27}$$

   $$D = 26$$

   Logo,

   $$x_0 = \sqrt[3]{\frac{-Q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{\frac{-Q}{2} - \sqrt{D}}$$

   $$x_0 = \sqrt[3]{\frac{-(-10)}{2} + \sqrt{26}} + \sqrt[3]{\frac{-(-10)}{2} - \sqrt{26}}$$

   $$x_0 = \sqrt[3]{5 + \sqrt{26}} + \sqrt[3]{5 - \sqrt{26}}$$

2. Considere o polinômio $f(x) = x^3+Px+Q$, com P e Q reais. Suponha que o *discriminante* $D = \dfrac{Q^2}{4} + \dfrac{P^3}{27}$ satisfaz $D \geq 0$. Para deduzir a fórmula de Cardano para uma raiz real de $f(x)$, é necessário seguir roteiro abaixo:

   a) Mostre que, sendo u e v números reais, temos $(u+v)^3-3uv(u+v)-(u^3+v^3) = 0$.

R: Como u e v são números reais, logo temos que:

$$(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$$

Sendo assim,

$$(u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3+v^3) =$$

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 3uv(u+v) - (u^3+v^3) =$$

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - (3u^2v + 3uv^2) - (u^3+v^3) = 0$$

b) Sendo u e v reais, mostre que se tivermos $3uv = -P$ e $u^3 + v^3 = -Q$ então $x_0 = u + v$ será raiz de $f(x)$.

R: Como $P = -3uv$ e $Q = -(u^3 + v^3)$, temos,

$$x^3 + Px + Q = 0$$

$$x^3 - (3uv)x - u^3 - v^3 = 0$$

Tomando $x = u + v$, obtemos

$$(u+v)^3 - (3uv)(u+v) - u^3 - v^3 = 0$$

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 3u^2v - 3uv^2 - u^3 - v^3 = 0$$

$$0 = 0$$

Logo, $x_0 = u + v$ é raiz de $f(x)$.

c) Mostre que se $3uv = -P$ e $u^3 + v^3 = -Q$ então $y_1 = u^3$ e $y_2 = v^3$ são as raízes da equação quadrática $y^2 + Qy - \dfrac{P^3}{27} = 0$.

R: Sendo $P = -3uv$ e $Q = -u^3 - v^3$, consideremos o polinômio quadrático

$$h(y) = y^2 + (-u^3 - v^3)y - \frac{(-3uv)^3}{27}$$

Se $y_1 = u^3$ e $y_2 = v^3$ então temos que:

$$h(y_1) = y_1^2 + (-u^3 - v^3)y_1 - \frac{(-3uv)^3}{27} = (u^3)^2 + (-u^3 - v^3)u^3 - \frac{(-3uv)^3}{27} =$$

$$u^6 - u^6 - u^3v^3 - (-u^3v^3) = 0.$$

$$h(y_2) = y_2^2 + (-u^3 - v^3)y_2 - \frac{(-3uv)^3}{27} = (v^3)^2 + (-u^3 - v^3)v^3 - \frac{(-3uv)^3}{27}$$

$$v^6 - v^6 - u^3v^3 - (-u^3v^3) = 0.$$

Logo, $y_1 = u^3$ e $y_2 = v^3$ são raízes da função $h(y) = y^2 + Qy - \dfrac{P^3}{27}$.

d) Determinando as raízes da equação quadrática $y^2 + Qy - \dfrac{P^3}{27} = 0$, e supondo $u \geq v$, conclua que $u = \sqrt[3]{-Q/2 + \sqrt{D}}$ e $v = \sqrt[3]{-Q/2 - \sqrt{D}}$, e que portanto $x_0 = \sqrt[3]{-Q/2 + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-Q/2 - \sqrt{D}}$.

R: Dada a função $x^3 + Px + Q = 0$, sabemos que $x_0 = u + v$, com isso, temos,

$$(u + v)^3 + P(u + v) + Q = 0$$

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = Pu + Pv + 1 = 0$$

$$(u^3 + v^3) + (u + v)(3uv + P) + Q = 0$$

Chamando $u^3 + v^3 = -Q$, temos

$$(u + v)(3uv + P) = 0$$

Logo, consideramos $3uv + P = 0$ ou seja $uv = -\dfrac{P}{3}$. Com isso, podemos concluir que $u^3v^3 = \dfrac{\sqrt[3]{-P}}{27}$ e $u^3 + v^3 = -Q$, chegando ao fato de que u^3 e v^3 são raízes da equação $y^2 + Qy - \dfrac{\sqrt[3]{-P}}{27} = 0$. Aplicando Bháskara, temos que as raízes são

$$u^3 = -Q/2 + \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}$$

$$v^3 = -Q/2 - \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}$$

Chamando $D = \dfrac{Q^2}{4} + \dfrac{P^3}{27}$, temos então

$$u = \sqrt[3]{-Q/2 + \sqrt{D}}$$

$$v = \sqrt[3]{-Q/2 - \sqrt{D}}$$

Ou seja, $x_0 = u + v = \sqrt[3]{-Q/2 + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-Q/2 - \sqrt{D}}$.

3. Neste problema deduziremos que a cúbica reduzida possui duas raízes complexas quando $D > 0$, e apenas raízes reais quando $D = 0$. Considere o polinômio $f(x) = x^3 + Px + Q$, com P e Q reais. Suponha que o *discriminante* $D = \dfrac{Q^2}{4} + \dfrac{P^3}{27}$ satisfaz $D \geq 0$.

Como vimos, no problema 2., tomando-se u e v satisfazendo $u \geq v$, $3uv = -P$ e

$u^3 + v^3 = -Q$, teremos $u = \sqrt[3]{-Q/2 + \sqrt{D}}$, $v = \sqrt[3]{-Q/2 - \sqrt{D}}$, e o número real $x_0 = u + v$ será raiz real de $f(x)$. Vamos agora determinar as demais raízes de $f(x)$.

a) Considere que $f(x) = x^3 - (3uv)x - (u^3 + v^3)$. Usando o algoritmo de Briot-Ruffini, divida $f(x)$ por $x - x_0$, mostrando que

$$f(x) = (x - (u + v))\left(x^2 + (u + v)x + (u^2 - uv + v^2)\right)$$

b) Usando o fato deduzido no item anterior, mostre que as demais raízes de $f(x)$ são dadas por

$$x_1 = -\frac{u+v}{2} + \frac{(u-v)\sqrt{3}}{2}\,i \qquad x_2 = -\frac{u+v}{2} - \frac{(u-v)\sqrt{3}}{2}\,i$$

c) Se $D > 0$, $f(x)$ tem uma raiz real e duas raízes complexas (conjugadas) não reais. Se $D = 0$, $f(x)$ tem três raízes reais, sendo duas delas (ao menos duas) coincidentes.

4. *Pesquisa de raízes racionais.* Se $\dfrac{p}{q}$ é uma fração de inteiros, primos entre si, e é raiz de um polinômio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, (com $n \geq 1$, $a_n \neq 0$), de coeficientes inteiros, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n. Para memorizar: o **d**enominador q divide o coeficiente **d**ominante, e o numerador p divide o coeficiente constante.

   Artigo do Professor Lenimar Nunes Andrade, RPM número 14, acrescenta as seguintes condições necessárias para p e q: $p - q$ é divisor de $f(1)$, e $p + q$ é divisor de $f(-1)$.

   Encontre as soluções das equações cúbicas seguintes, determinando uma delas através de pesquisa de raízes racionais.

   a) $x^3 + 10x = 6x^2 + 4$. *Resposta:* 2 e $2 \pm \sqrt{2}$.

   b) $x^3 + 6x - 20 = 0$. *Resposta:* 2 e $-1 \pm 3i$.

5. Mostre que $a = \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2}$ é um número inteiro.

   Resposta: Temos $a = u - v$, sendo $u = \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$ e $v = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2}$. Como $a^3 = -4 - 3a$ e então a é raiz da equação cúbica $x^3 + 3x + 4 = 0$. Pelo resultado deduzido no problema 3., esta equação possui uma única raiz real, que é um inteiro fácil de ser adivinhado.

6. *Método de Viète para equações cúbicas*: O método de François Viète (século 16), para buscar raízes de uma equação cúbica reduzida $x^3 + Px + Q = 0$, consiste em primeiramente assumir que a raiz procurada tem a forma $\boxed{x = r\cos\theta,\ \text{com } r > 0}$

Substituímos esta expressão de x na equação cúbica. Multiplicamos então a igualdade resultante por $4/r^3$, e igualamos os coeficientes da equação assim obtida (em r e θ) aos coeficientes da identidade $\boxed{4\cos^3\theta - 3\cos\theta - \cos 3\theta = 0}$.

No caso geral, para uma equação $x^3 + Px + Q = 0$, com P e Q reais, por este método obtemos $\boxed{r = \sqrt{-\dfrac{4P}{3}}}$ e procuramos θ satisfazendo $\boxed{\cos 3\theta = -\dfrac{4Q}{r^3}}$.

Um primeiro θ_0 é obtido fazendo-se $3\theta_0 = \arccos\left(-\dfrac{4Q}{r^3}\right)$, dando $x_0 = r\cos\theta_0$ como uma raiz da cúbica. Outras duas raízes são obtidas tomando-se $\theta_1 = \theta_0 + 120^\circ$ e $\theta_2 = \theta_0 + 240^\circ$.

7. Ludovico Ferrari, discípulo de Cardano, criou um método (não uma fórmula, como veremos) para encontrar raízes de uma equação quártica geral. Chamamos de *equação quártica* geral uma equação polinomial da forma $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Os passos do método, com adaptações livres e modernizadoras, é o seguinte.

   Primeiramente, escrevemos $x^4 + ax^3 = -bx^2 - cx - d$.

   Completando o quadrado do primeiro membro, chegamos à seguinte equação equivalente à equação quártica dada:

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}ax\right)^2 = -bx^2 - cx - d + \frac{1}{4}a^2x^2$$

   ou seja,

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}ax\right)^2 = \left(-b + \frac{1}{4}a^2\right)x^2 - cx - d$$

   Na tentativa de forçar que o segundo membro da equação tenha a forma $A(x+B)^2$, somamos um parâmetro t à expressão dentro dos parênteses do primeiro membro e desenvolvemos o quadrado perfeito:

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}ax + t\right)^2 = \left(x^2 + \frac{1}{2}ax\right)^2 + 2\left(x^2 + \frac{1}{2}ax\right)t + t^2$$

   Substituímos então o termo $(x^2 + \frac{1}{2}ax)^2$ pelo segundo membro da equação (7.):

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}ax + t\right)^2 = \left(-b + \frac{1}{4}a^2\right)x^2 - cx - d + 2\left(x^2 + \frac{1}{2}ax\right)t + t^2$$

   Rearranjando os termos temos uma nova equação equivalente à quártica original:

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}ax + t\right)^2 = \left(-b + \frac{1}{4}a^2 + 2t\right)x^2 + (-c + at)x + (-d + t^2)$$

Se a expressão quadrática do segundo membro tiver discriminante $\Delta = 0$, ela terá duas raízes coincidentes e terá então a forma almejada.

Determinando um número real t_0 que faça $\Delta = 0$ (explique porque isto é sempre possível), a equação quártica dada inicialmente passa a ser equivalente a uma equação da forma

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}ax + t_0\right)^2 = \pm A(x + B)^2 \quad \text{(com } A \text{ e } B \text{ reais, } A \geq 0)$$

7 CONCLUSÃO

A utilização das fórmulas para a resolução das equações de 1º, 2º, 3º e 4º grau facilitam o processo e as contas, porém ainda é necessário decorá-las e, em determinados casos, fazer manipulações algébricas nas funções originais. Com isso, utilizando as derivadas, fica mais simples a resolução desses problemas, sem depender de grandes contas e da necessidade de decorar muitas fórmulas, uma diferente da outra, facilitando o trabalho no processo.

Apesar disso, para a utilização de derivadas é necessário a utilização de conhecimentos avançados, fórmulas e métodos matemáticos que nem todos possuem, principalmente fora do meio acadêmico, sendo assim, limitando a utilização por todos que necessitem.

Com isso, mesmo a fórmula para a resolução de equações de 3º grau ser um pouco complexa, o raciocínio por trás dela é muito interessante e muito rico em métodos matemáticos, sendo muito vantajoso a aplicação dela para os estudantes, tanto nos anos seguintes ao que é ensinado Bháskara, quanto no aprofundamento nos meios acadêmicos. É uma fórmula pouco conhecida e utilizada, com isso, acredito que muitos matemáticos nem saibam da sua existência, sendo pouco divulgada e pouco utilizada.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, D. Determinando raízes da equação polinomial de terceiro grau. Universidade Estadual de Maringá, 2011. Nenhuma citação no texto.

DIERINGS, A. R. et al. Ensino de polinômios no ensino médio uma nova abordagem. Universidade Federal de Santa Maria, 2014. Nenhuma citação no texto.

PONTES, R. d. S. et al. Equações polinomiais: soluções algébricas, geométricas e com o auxílio de derivadas. Universidade Federal da Paraíba, 2013. Citado na página 22.

SAMPAIO, J. C. V. Equações do terceiro e quarto graus, de coeficientes reais, via álgebra elementar e trigonometria. IV Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, 2008. Nenhuma citação no texto.

TOSCANO, F. **A Formula Secreta. Tartaglia, Cardano e o duelo matemático que inflamou a Itália da renascença**. [S.l.]: Editora Unicamp, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 10, 11 e 13.