UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Multiplicação de Distribuições no Estudo de Soluções de Ondas Delta Choque

Liliane da Cunha Ferreira

São Carlos-SP
Dezembro de 2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Multiplicação de Distribuições no Estudo de Soluções de Ondas Delta Choque

Liliane da Cunha Ferreira

Orientador: Prof. Dr. Cezar Issao Kondo

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Doutor em Matemática.

São Carlos-SP
Dezembro de 2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Tese de Doutorado da candidata Liliane da Cunha Ferreira, realizada em 15/12/2023.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Cezar Issao Kondo (UFSCar)

Prof. Dr. Jose Ruidival Soares dos Santos Filho (UFSCar)

Prof. Dr. Marcelo Rempel Ebert (USP)

Prof. Dr. Marcelo Martins dos Santos (UNICAMP)

Prof. Dr. Richard Alexander de La Cruz Guerrero (Uptc)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Agradecimentos

Agradeço ao Dr. Cezar Issao Kondo por ter me aceitado como sua orientanda, pelos ensinamentos e conselhos.

Agradeço a comissão julgadora pela atenção dada ao trabalho, pelas sugestões e correções sugeridas.

Também agradeço aos professores da Universidade Federal de São Carlos pela compreensão e pelos saberes ensinados durante toda minha vida acadêmica e aos meus amigos e colegas de curso pela companhia nos estudos.

Por fim, agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de estudos de doutorado.

Resumo

Neste trabalho, encontraremos soluções de ondas delta choque para três problemas de Riemann sendo dois sistemas hiperbólicos de leis de conservação com amortecimento linear e um modelo de cromatografia não linear de três componentes. Aplicaremos o conceito de α-soluções para encontrar tais soluções. Tal conceito é feito utilizando o produto de distribuições.

Palavras-chave: Amortecimento linear, Cromatografia, Onda delta choque, Problema Riemann, Produto de distribuição, Sistema não estritamente hiperbólico.

Abstract

In this work, we will find the delta shock wave solution for three Riemann problem where two are hyperbolic systems of conservation laws with linear damping and a three-component nonlinear chromatography model. We will apply concept of α-solutions to find them. This concept uses the product of distributions.

Keywords: Linear damping, Chromatography, Delta shock wave, Riemann problem, Product of distributions, Non-strictly hyperbolic system.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, estudaremos o problema de Riemann para os sistemas hiperbólicos de leis de conservação com amortecimento linear

$$\begin{cases} u_t + \dfrac{1}{k+1}(u^{k+1})_x = -\beta u, \\ \rho_t + (\rho u^k)_x = 0, \end{cases} \tag{1}$$

e

$$\begin{cases} u_t + (u^{k+1})_x = \beta u, \\ \rho_t + (k+1)(\rho u^k)_x = 0, \end{cases} \tag{2}$$

onde β uma constante positiva e $k \in \mathbb{N}$ um número ímpar. Por conveniência, supomos $\rho \geq 0$ ao longo deste trabalho. As condições iniciais são dadas por

$$(\rho, u)(x, 0) = \begin{cases} (\rho_-, u_-), & \text{se } x < 0, \\ (\rho_+, u_+), & \text{se } x > 0. \end{cases} \tag{3}$$

Como já sabemos os sistemas (1) e (2) não são estritamente hiperbólicos e são linearmente degenerados. Os sistemas (1) e (2) são casos particulares do seguinte sistema triangular de leis de conservação

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = \pm\beta, \\ \rho_t + (\rho g(u))_x = 0, \end{cases} \tag{4}$$

para $f(u) = \frac{1}{k+1}u^{k+1}$ em (1), $f(u) = u^{k+1}$ em (2) e $g(u) = f'(u)$. O sistema triangular de leis de conservação (4) surge em uma grande variedade de modelos físicos e de engenharia, veja por exemplo [20] e suas referências. Quando $k = 1$, o caso homogêneo do sistema (1) é usado para modelar a evolução das heterogeneidades da densidade na matéria do universo [45] e quando $k = 1$ e $\beta = 0$ as primeiras equações de (1) e (2) são chamadas de equações de Burgers e são usadas para modelar vários fenômenos como ondas de choque na dinâmica dos gases e turbulência hidrodinâmica [4, 19, 36]. Em 1990, LeFloch [26] estabeleceu a existência de soluções fracas para o caso homogêneo do problema de Cauchy do sistema (4) com $g(u) = f'(u)$ e $f''(u) > 0$. O problema de Riemann para o caso homogêneo do sistema (1) com $k = 1$ foi estudado por Joseph [22] em 1993. Seu trabalho incluiu soluções ondas delta choque. Ele usa um sistema de regularização parabólico para obter fórmulas explícitas das soluções de Riemann. Assim, ele construiu o limite fraco da solução de aproximação e este é definido como uma solução do tipo onda delta choque. Em 2000, Ercole [16] obteve uma solução de onda delta choque como limite de soluções suaves pelo método da viscosidade nula para o problema de Riemann do sistema (4) com $g'(u) > 0$, $f''(u) > 0$ e $f'(u) < g(u)$. Esta abordagem foi desenvolvida por Dafermos em [9]. Em 2019, Keita e Bourgault [23] resolveram o problema de Riemann para o sistema (1) para o caso $k = 1$. Recentemente, De la Cruz e Juajibioy [15] resolveram o problema de Riemann para o sistema (1) e De La Cruz também resolveu para o caso $k = 1$ em [14]. Seus trabalhos incluem solução clássica de Riemann e solução de onda delta choque.

Também estudaremos o problema de Riemann do seguinte modelo de cromatografia não linear de três componentes com o reator isotérmico de Langmuir generalizado competitivo-cooperativo misto na forma

$$\begin{cases} u_t + \left(u + \dfrac{u}{1+u+v-w}\right)_x = 0, \\ v_t + \left(v + \dfrac{v}{1+u+v-w}\right)_x = 0, \\ w_t + \left(w + \dfrac{w}{1+u+v-w}\right)_x = 0, \end{cases} \tag{5}$$

com os dados iniciais

$$(u,v,w)(x,0) = \begin{cases} (u_-, v_-, w_-), & \text{se } x < 0, \\ (u_+, v_+, w_+), & \text{se } x > 0. \end{cases} \tag{6}$$

As variáveis de estado u, v e w são duas componentes tipo Langmuir e uma componente tipo anti-Langmuir respectivamente, ou seja, concentrações de três espécies diferentes, o que nos permite supor que u, v e w são funções não negativas de $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$ satisfazendo $1 + u + v - w > 0$. O estudo do problema de Riemann é muito importante na teoria da cromatografia devido ao fato de que o estado inicial (u_-, v_-, w_-) corresponde à composição inicial e o outro (u_+, v_+, w_+) corresponde à composição da alimentação.

Atualmente, a cromatografia é uma técnica eficaz para separar misturas de multicomponentes e tem sido muito utilizada e investigada na teoria do equilibrio local [2]. Portanto, a teoria da cromatografia não linear desempenha um papel importante na indústria moderna. Em 2010, [28] encontraram experimentalmente uma solução onda delta choque para um modelo cromatográfico da isoterma de Langmuir generalizada mista. A partir daí, as soluções de ondas delta choque para todos os tipos de sistemas de cromatografia têm sido investigadas como em [29, 31, 48, 49] por análises teóricos e [21] por cálculos numéricos.

Usaremos outro método para encontrar uma solução envolvendo ondas delta choque para o problema de Riemann dos sistemas (1), (2) e (5) sob as condições iniciais (3) e (6), respectivamente. Este conceito de soluções contendo ondas delta choque tem sido muito usado para resolver sistemas hiperbólicos não lineares das leis de conservação e é uma generalização de uma onda de choque clássica. Esta generalização foi abordada por Zeldovich e Myshkis [57] em 1973, mas, foi Korchinski [25] em 1977 em sua tese de doutorado não publicada que considerou o problema de Riemann para o sistema (4) com $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ e $g(u) = \frac{1}{2}f'(u)$ e motivado por alguns resultados numéricos, construiu única solução de Riemann para obter choques singulares no sentido de distribuições. Em 1994, Tan, Zhang e Zheng [51] estabeleceram a existência, singularidade e estabilidade de ondas delta choque para uma pertubação viscosa do sistema estudado por Korchinski e a partir daí, este conceito foi amplamente estudado por matemáticos e físicos, para exemplos dos resultados consulte [3, 12, 13, 16, 30, 32, 48, 43, 46, 47, 50, 51, 56] e diferentes métodos tem sido utilizados para mostrar a existência de soluções de ondas de delta choque [5, 8, 13, 16, 30, 48, 56]. A função delta de Dirac na solução de onda delta choque do problema de Riemann (5) e (6) estão envolvidas nas três variáveis de estado u, v e w simultaneamente, o que distingue das soluções de ondas de delta choque para problemas de Riemann de (1) e (2) em que a função delta de Dirac está envolvida em apenas uma variável de estado. É interessante notar que a curva de rarefação de (5) é a mesma que a curva de choque no espaço de estados (u,v,w). Assim, o sistema (5) pertence aos conhecidos sistemas hiperbólicos do Tipo Temple de leis de conservação [52, 53, 54].

Fazendo as substituições de variáveis $s = u+v$ e $r = s-w$ como em [48], o sistema (5) nós dá o sistema desacoplado

$$\begin{cases} r_t + \left(r + \dfrac{r}{1+r}\right)_x = 0, \\ s_t + \left(s + \dfrac{s}{1+s}\right)_x = 0, \end{cases} \tag{7}$$

com os dados iniciais

$$(r,s)(x,0) = \begin{cases} (r_-,s_-), & \text{se } x < 0, \\ (r_+,s_+), & \text{se } x > 0, \end{cases} \tag{8}$$

sendo $r_\pm = s_\pm - w_\pm$ e $s_\pm = u_\pm + v_\pm$. As soluções de Riemann não são modificadas porque a substituições de variáveis são lineares nas quantidades conservadas. É fácil ver que a soma das forças da função delta de Dirac de u, v é igual a força da função delta de Dirac de w devido ao fato da função delta de Dirac não estar incluída na variável de estado $r = s-w$ para nenhuma condição inicial (8). Por efeito do fato acima, buscaremos soluções onda delta choque para o problema de Riemann (5) – (6) considerando $\beta_1(t) + \beta_2(t) = \beta_3(t)$ sendo β_1, β_2 e β_3 as forças da função delta de Dirac das variáveis u, v e w, respectivamente.

Neste trabalho, utilizaremos o produto de distribuições para estudar as soluções dos problema de Riemann (1), (2) e (5) com as condições iniciais (3) e (6). König [24] foi o primeiro que tentou construir uma boa definição para o produto de distribuições. O produto que usaremos é o α-produto de Sarrico [33, 34] cujo produto continua sendo uma distribuição, mas existem definições de produtos que não são, por exemplo Colombeau [7]. Estes α-produtos são definidos de forma puramente algébrica. Assim, tanto os α-produtos quanto as soluções que eles oferecem não dependem do processo de aproximação, então as soluções obtidas podem ser substituídas diretamente nos sistemas e equações, tal soluções são denominadas α-soluções. O conceito de α-solução é uma extensão consistente do conceito de solução clássica e também do conceito de solução fraca.

Sarrico foi o primeiro a utilizar este método para estudar as soluções descontínuas para várias equações do tipo Burgers [35, 36]. Em 2014, ele mostrou em [38] uma solução de onda delta choque para o problema de Riemann do sistema (4). Sua solução concide com os resultados obtidos em [10, 11] em que usaram o método assintótivo fraco e o processo de linearização. Sun [49], utilizou o conceito de α-soluções, para obter as soluções descontínuas do problema de Riemann para um sistema cromatográfico não linear de duas componentes e os resultados coincidem com os obtidos usando outras técnicas [6, 18, 48]. Existem outros trabalhos de Sarrico em que foi utilizado o conceito de α-solução para mostrar as soluções de EDP's, por exemplo [32, 37, 39, 40, 41, 42].

O α-produto depende da função suave α e cada α determina um produto de distribuições bem definido, mas pode fornecer resultados diferentes dependendo da escolha de α. Logo, em alguns casos, pode ocorrer uma indeterminação que pode ser passada para as soluções dos sistemas. As α-soluções para os problemas de Riemann (1)–(3), (2)–(3) e (5)–(6) são independentes da escolha do α e satisfazem a condição generalizada de Ranking Hugoniot. A maior dificuldade na utilização do conceito de α-solução é calcular os produtos de distribuições. Mas, para Shen e Sun em [48] estes cálculos são uma vantagem, pois fica mais fácil usar o conceito de α-solução para obter soluções com ondas delta choque. Além disso, a α-solução de (5) e (6) é uma onda delta choque quando

$$\begin{aligned}
&u_-v_+ + u_+w_- > u_-w_+ + u_+v_-,\\
&v_+w_- + v_-u_+ > v_+u_- + v_-w_+,\\
&w_-u_+ + w_-v_+ > w_+u_- + w_+v_-,
\end{aligned}$$

e $-1 < u_- + v_- - w_- \leq 0 \leq u_+ + v_+ - w_+$, o que coincide com a solução obtida em [55]. Analogamente, a α-solução para o modelo não linear de cromatografia de n-componentes é uma onda delta choque se

$$u_i^+\left(\sum_{i=1}^{n-1} u_i^- - u_n^-\right) > u_i^-\left(\sum_{i=1}^{n-1} u_i^+ - u_n^+\right)$$

para $i = 1,2,\cdots,n$ e $-1 < \sum_{i=1}^{n-1} u_i^- - u_n^- \leq 0 \leq \sum_{i=1}^{n-1} u_i^+ - u_n^+$. Os sistemas (1) e (2) são casos generalizados do sistema tipo Keyfitz-Kranzer para $f(u) = u^k$ em (1), $f(u) = (k+1)u^k$ em (2) e $P(\rho) = 0$. Em 2021, Abreu, De la Cruz e Lambert [1] mostraram a existência de solução onda delta choque para o sistema Keyfitz-Kranzer assimétrico com amortecimento linear $G(\rho,u) = -\alpha\rho u$ para o caso $f(u) = u$ se apoiando na solução do sistema homogêneo em que $\sigma = u_\delta$ é uma constante. Utilizando o conceito de α-solução concluímos com os cálculos que σ é constante sem precisar relacionar com o caso homogêneo.

Usando o conceito de α-solução e seguindo os trabalhos de Paiva [30] e de Shen e Sun [47] investigaremos a existência de soluções de ondas delta choque para os sistemas (1) e (2). E baseando no trabalho de Sun [49] investigaremos a existência de uma α-solução para o sistema (5).

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No capítulo 1, apresentaremos alguns resultados e notações que utilizaremos para definir o conceito de α-produto. No capítulo 2, introduziremos as fórmulas de α-produtos. Em seguida, definimos no capítulo 3, o conceito de α-solução para os sistemas (1),(2) e (5). No capítulo 4 e 5, resolvemos detalhadamente as α-soluções para os problemas de Riemann (1) e (2) com a condição inicial (3). Por fim, no capítulo 6, encontraremos a α-solução para o problema de Riemann (5) e (6).

CAPÍTULO 1

Pré-Requisitos

Neste capítulo, vamos apresentar alguns resultados e notações que utilizaremos no decorrer do trabalho.

1.1 Conceitos Iniciais e Notações

Denotaremos por $\mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções complexas infinitamente diferenciáveis no $\mathbb{R}^n$ e $\mathscr{D} = \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) = \mathscr{C}_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ o subespaço de $\mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ das funções com suporte compacto. $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ o espaço das distribuições e $\mathscr{L}(\mathscr{D})$ o espaço dos operadores lineares contínuos, $\Phi : \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ com a topologia usual em $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. A composição usual dos operadores será denotado por um ponto e a composição de funções pela maneira usual.

Para representação $\rho : \mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{L}(\mathscr{D})$ em que $\rho(\mathscr{C}^{\infty})$ é um subconjunto de $\mathscr{L}(\mathscr{D})$ e $\rho(\beta)$, para algum $\beta \in \mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ denota um operador que aplica $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ em $\rho(\beta)(\xi) = \beta\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, temos:

(a) $\rho(\beta+\gamma) = \rho(\beta) + \rho(\gamma), \ \forall \ \beta, \gamma \in \mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$;

(b) $\rho(a\beta) = a\rho(\beta), \ \forall \ a \in \mathbb{C}, \ \beta \in \mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$;

(c) $\rho(\beta\gamma) = \rho(\beta).\rho(\gamma), \ \forall \ \beta, \gamma \in \mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Provaremos o item (c), os outros são triviais. Então, para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ temos que

$$\rho(\beta\gamma)(\xi) = (\beta\gamma)\xi = \beta(\gamma\xi) = \beta(\rho(\gamma)(\xi)) = \rho(\beta)(\rho(\gamma)(\xi)) = \rho(\beta).\rho(\gamma)(\xi).$$

Assim, a representação ρ é uma extensão natural da representação regular de $\mathscr{D}$ em $\mathscr{L}(\mathscr{D})$. Diz-se que um operador $\Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$ é nulo em um conjunto aberto Ω, se $\Phi(\xi) = 0$, para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ cujo suporte está contido em Ω. Como usual, denotamos o suporte de um operador Φ por supp(Φ), ou seja, o complemento do maior conjunto aberto no qual Φ é nula. Já o suporte de $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ e $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ são denotados por spt(ξ) e por supp(T), respectivamente.

Observe que esses conceitos são coerentes com a representação natural ρ no sentido de que para $\beta \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, β é nula em Ω se e somente se $\rho(\beta)$ também é nula em Ω. De fato, se β é nula em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, considere $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathrm{spt}(\xi) \subset \Omega$. Então, para todo $t \in \Omega$, temos $\rho(\beta)(\xi)(t) = (\beta\xi)(t) = \beta(t)\xi(t) = 0$. Assim, $\rho(\beta)$ é nula em Ω. Por outro lado, se $\rho(\beta)$ é nula em Ω, então $\rho(\beta)(\xi)(t) = \beta\xi(t) = 0$, para todo $t \in \Omega$ e $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ com $\mathrm{spt}(\xi) \subset \Omega$, mas ξ não é nula no suporte, então β é nula em Ω. Com isso, podemos concluir que $\mathrm{supp}(\rho(\beta)) = \mathrm{spt}(\beta)$.

Lembre-se que $\mathrm{supp}(\Phi.\Psi) \subset \mathrm{supp}(\Psi)$. De fato, se $t \notin \mathrm{supp}(\Psi)$, temos $\Psi(\xi)(t) = 0$, para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ cujo suporte está contido em um conjunto aberto. Assim, como $\Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$, temos que $\Phi[\Psi(\xi)] = 0$, para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ cujo suporte está contido no maior conjunto aberto. Portanto, $t \notin \mathrm{supp}(\Phi.\Psi)$.

1.2 Mudança de Variável em $\mathscr{L}(\mathscr{D})$

Seja h um difeomorfismo $\mathscr{C}^\infty$ do $\mathbb{R}^n$. Considere o operador $S_h : \mathscr{D} \to \mathscr{D}$ definido por $S_h(\xi) = \xi \circ h$, então diremos que o operador $\Phi \odot h = S_h.\Phi.S_{h^{-1}}$, resulta de $\Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$ através da mudança de variável h. Logo, $\Phi \odot h \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$.

A coerência com a representação natural segue da próxima proposição.

Proposição 1.1. *Sejam h um difeomorfismo $\mathscr{C}^\infty$ do $\mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\Phi = \rho(\beta)$. Então, $\Phi \odot h = \rho(\beta \circ h)$.*

Demonstração. Para qualquer $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\begin{aligned}(\Phi \odot h)(\xi) &= S_h.\Phi.S_{h^{-1}}(\xi) = S_h.\Phi(\xi \circ h^{-1}) = S_h[\beta(\xi \circ h^{-1})] = \beta(\xi \circ h^{-1}) \circ h \\ &= S_h.\beta.S_{h^{-1}}(\xi) = (\beta \circ h)(\xi) = [\rho(\beta \circ h)](\xi).\end{aligned}$$

$\square$

As propriedades desta operação são semelhantes as propriedades de funções e decorrem da definição.

Proposição 1.2. *Sejam h um difeomorfismo $\mathscr{C}^\infty$ do $\mathbb{R}^n$, $\Phi, \Psi \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então:*

(a) $(\lambda\Phi) \odot h = \lambda(\Phi \odot h)$;

(b) $(\Phi + \Psi) \odot h = (\Phi \odot h) + (\Psi \odot h)$;

(c) $(\Phi.\Psi) \odot h = (\Phi \odot h)(\Psi \odot h)$;

(d) $\mathrm{supp}(\Phi \odot h) = h^{-1}(\mathrm{supp}(\Phi))$.

Assim, $\Phi \to \Phi \odot h$ é um automorfismo.

Demonstração. Vamos provar o item (c) e (d), os outros são triviais. Então, para qualquer $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ temos que

$$\begin{aligned}(\Phi.\Psi)\odot h(\xi)(t) &= S_h.\Phi.\Psi.S_{h^{-1}}(\xi)(t) = S_h.\Phi[\Psi(\xi\circ h^{-1})](t) = \Phi[\Psi(\xi\circ h^{-1})\circ h](t)\\ &= \Phi[\Psi(\xi\circ h^{-1})\circ h](h^{-1}(h(t))) = [[\Phi[\Psi(\xi\circ h^{-1})\circ h]]\circ h^{-1}]\circ h(t)\\ &= S_h.\Phi[[\Psi(\xi\circ h^{-1})\circ h]\circ h^{-1}](t) = S_h.\Phi.S_{h^{-1}}[\Psi(\xi\circ h^{-1})\circ h](t)\\ &= \Phi\odot h.[\Psi(\xi\circ h^{-1})\circ h](t) = \Phi\odot h.[\Psi\odot(\xi)](t) = (\Phi\odot h).(\Psi\odot h)(\xi)(t),\end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}^n$. Portanto, $(\Phi.\Psi)\odot h = (\Phi\odot h).(\Psi\odot h)$ e concluímos (c). Para provar o item (d) verificaremos que $h^{-1}(\mathrm{supp}(\Phi)) \subset \mathrm{supp}(\Phi\odot h)$ e $\mathrm{supp}(\Phi\odot h) \subset h^{-1}(\mathrm{supp}(\Phi))$, então se $t \notin \mathrm{supp}(\Phi\odot h)$, temos $\Phi\odot h(\xi)(t) = 0, \forall t \in \Omega$ e $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ com $\mathrm{spt}(\xi) \subset \Omega$. Daí, $\Phi(\xi\circ h^{-1})(h(t)) = 0$, para $t \in \Omega$ o que implica que $h(t) \notin \mathrm{supp}(\Phi)$. Logo, $t \notin h^{-1}(\mathrm{supp}(\Phi))$ e mostramos $h^{-1}(\mathrm{supp}(\Phi)) \subset \mathrm{supp}(\Phi\odot h)$.

Agora, para provarmos a outra inclusão, observe que $h(\mathrm{spt}(\xi)) = \mathrm{spt}(\xi\circ h^{-1})$. Então, se $t \notin h^{-1}(\mathrm{supp}(\Phi))$, temos $h(t) \notin \mathrm{supp}(\Phi)$, ou seja, $\Phi(\xi)(h(t)) = 0$ para $t \in h^{-1}(\Omega)$ e $\forall \xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ com $\mathrm{spt}(\xi) \subset \Omega$. Daí, $\Phi\odot h(\xi)(t) = \Phi(\xi\circ h^{-1})(h(t)) = 0$ em Ω para $\xi\circ h^{-1} \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ com $\mathrm{spt}(\xi\circ h^{-1}) \subset h(\Omega)$. Portanto, $t \notin \mathrm{supp}(\Phi\odot h)$. Falta verificar que $\Phi \to (\Phi\odot h)$ é um automorfismo, que preserva as operações é óbvio pelos itens (a), (b) e (c). Então, devemos mostrar que é um isomorfismo, se $\Phi\odot h = \Psi\odot h$, então $S_h.\Phi.S_{h^{-1}} = S_h.\Psi.S_{h^{-1}}$ usando que h é um difeomorfismo temos que $\Phi = \Psi$, então temos a injetividade. Seja $\Psi = \Phi\odot h \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$, tome $\Phi = S_{h^{-1}}.\Psi.S_h$, então $\Phi\odot h(\xi) = \Psi(\xi)$ para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Assim, temos que aplicação é sobrejetora e concluímos o isomorfismo. □

Um caso particular importante é a-translação de um operador $\Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$ com $a \in \mathbb{R}^n$ que é definido como o operador $\overline{\tau}_a\Phi = \Phi\odot h$ com $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $h(t) = t - a = \tau_a(t)$. Denotamos por $\overline{\tau}_a$ o operador translação em $\mathscr{L}(\mathscr{D})$ para distingui-lo do operador translação usual τ_a definido por $(\tau_a\xi)(t) = \xi(t-a) = \xi\circ\tau_a(t)$ para usuais funções ξ. Claramente, podemos escrever $\overline{\tau}_a\Phi = \tau_a.\Phi.\tau_{-a}$ e a coerência com a representação natural segue da Proposição 1.1 ($\overline{\tau}_a\Phi = \Phi\odot\tau_a = \rho(\beta\circ\tau_a)$).

1.3 Derivadas Direcional e parcial para um operador $\Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$

Seja $\xi(t_1,\ldots,t_n) \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ uma função complexa de variáveis $(t_1,\ldots,t_n) \in \mathbb{R}^n$. Geralmente denotamos por $\mathrm{D}_k\xi = \dfrac{\partial\xi}{\partial t_k}$. Lembre-se que o operador D_k é um operador em $\mathscr{L}(\mathscr{D})$ e associa a derivação interna do $\mathscr{L}(\mathscr{D})$, isto é, $\Phi \to [\mathrm{D}_k,\Phi] = \mathrm{D}_k.\Phi - \Phi.\mathrm{D}_k$.

Definição 1.3. Seja $\Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$ chamamos de derivada parcial de Φ de ordem t_k, o operador $\overline{\mathrm{D}}_k\Phi = [\mathrm{D}_k,\Phi]$.

Segue da seguinte proposição que a Definição 1.3 é coerente com a representação natural no seguinte sentido:

Proposição 1.4. *Sejam $\beta \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\Phi = \rho(\beta)$ então $\overline{\mathrm{D}}_k\Phi = \rho(\mathrm{D}_k\beta)$, sendo $\mathrm{D}_k\beta$ é a derivada parcial de β.*

A demonstração pode ser encontrada em [33].

As propriedades da derivada parcial de um operador em $\mathscr{L}(\mathscr{D})$ são as usuais.

Proposição 1.5. *A aplicação $\overline{\mathrm{D}}_k : \mathscr{L}(\mathscr{D}) \to \mathscr{L}(\mathscr{D})$ para todo $\Phi, \Psi \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$ têm as seguintes propriedades:*

(a) $\overline{\mathrm{D}}_k$ *é linear;*

(b) $\overline{\mathrm{D}}_k(\Phi.\Psi) = (\overline{\mathrm{D}}_k\Phi).\Psi + \Phi.(\overline{\mathrm{D}}_k\Psi)$ *(Fórmula de Leibniz);*

(c) $\mathrm{supp}(\overline{\mathrm{D}}_k\Phi) \subset \mathrm{supp}(\Phi)$.

Demonstração. A linearidade do operador $\overline{\mathrm{D}}_k$ é trivial, basta usar a definição. Vamos provar a usual fórmula de Leibniz e em seguida (c). Para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ temos que

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{D}}_k(\Phi.\Psi)(\xi) &= [\mathrm{D}_k.(\Phi.\Psi) - (\Phi.\Psi).\mathrm{D}_k](\xi) = [\mathrm{D}_k.(\Phi.\Psi) - \Phi.\mathrm{D}_k.\Psi + \Phi.\mathrm{D}_k.\Psi - (\Phi.\Psi).\mathrm{D}_k](\xi) \\
&= [(\mathrm{D}_k.\Phi - \Phi.\mathrm{D}_k).\Psi](\xi) + [\Phi.(\mathrm{D}_k.\Psi - \Psi.\mathrm{D}_k)](\xi) \\
&= [\overline{\mathrm{D}}_k\Phi.\Psi + \Phi.\overline{\mathrm{D}_k}\Psi](\xi).
\end{aligned}$$

Agora, mostraremos $\mathrm{supp}(\overline{\mathrm{D}}_k\Phi) \subset \mathrm{supp}(\Phi)$. Se $t \notin \mathrm{supp}(\Phi)$, então existe Ω um cojunto aberto do $\mathbb{R}^n$ tal que $\Phi(\xi)(t) = 0$ em Ω, $\forall \xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ com $\mathrm{spt}(\xi) \subset \Omega$. Daí, $\overline{\mathrm{D}}_k\Phi(\xi)(t) = \mathrm{D}_k.[\Phi(\xi)(t)] - \Phi.[\mathrm{D}_k(\xi)](t) = 0$ em Ω, porque $\mathrm{D}_k(\xi) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Portanto, $t \notin \mathrm{supp}(\overline{\mathrm{D}}_k\Phi)$. $\square$

Definição 1.6. Seja $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$. Denote $\mathrm{D}_u = \sum_{k=1}^{n} u_k\mathrm{D}_k$, podemos definir o conceito de derivada direcional de um operador $\Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$ por

$$\overline{\mathrm{D}}_u\Phi = \mathrm{D}_u.\Phi - \Phi.\mathrm{D}_u = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\overline{\mathrm{D}}_k\right)\Phi. \tag{1.1}$$

A coerência deste conceito com a representação natural é automática. De fato, se $\Phi = \rho(\beta) \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$, com $\beta \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ temos

$$(\overline{\mathrm{D}}_u\Phi)(\xi) = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\overline{\mathrm{D}}_k\Phi(\xi)\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\rho(\mathrm{D}_k\beta)(\xi)\right) = \rho\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\mathrm{D}_k\beta\right)(\xi) = \rho(\mathrm{D}_u\beta)(\xi),$$

para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Portanto, $(\overline{\mathrm{D}}_u\Phi) = \rho(\mathrm{D}_u\beta)$.

As propriedades da Proposição 1.5 estende-se a esta nova definição.

CAPÍTULO 2

Produto de Distribuições

Neste capítulo, vamos apresentar as fórmulas da teoria do produtos distribucionais que são importantes para continuação do trabalho. Para detalhes relativos a este produto, consulte [33, 34, 35, 37].

2.1 As Famílias de Produtos de Distribuições

2.1.1 O produto de distribuições contínuo à esquerda

Definição 2.1. Sejam $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$. Definimos o produto contínuo à esquerda $T\Phi \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ por $\langle T\Phi, \xi \rangle = \langle T, \Phi(\xi) \rangle$, para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Assim, dado Φ, o operador $\Gamma : T \longmapsto T\Phi$ nada mais é que o operador transposto Φ^t, isto é, $\langle T\Phi, \xi \rangle = \langle T, \Phi(\xi) \rangle = \langle \Phi^t(T), \xi \rangle$, para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

Este conceito é uma extensão do produto de distribuições por uma função $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ no seguinte sentido:

Proposição 2.2. *Se $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\beta \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\Phi = \rho(\beta)$ então $T\Phi = T\beta$, sendo $T\beta$ o produto à direita usual de uma distribuição com uma função $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ (no sentido de [44]).*

A demonstração desta proposição, pode ser encontrada em [33].

Proposição 2.3. *Sejam $T, T_1, T_2, \ldots, T_n \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$, então*

(a) $T\Phi_1 \ldots \Phi_n$ é independente da maneira como associamos os fatores;

(b) $T(\Phi_1 + \Phi_2 + \ldots \Phi_n) = T\Phi_1 + T\Phi_2 + \ldots + T\Phi_n$;

(c) $(T_1 + T_2 + \ldots T_n)\Phi = T_1\Phi + T_2\Phi + \ldots + T_n\Phi$.

As propriedades acima são consequências automáticas da relação $\Gamma = \Phi^t$.

Proposição 2.4. *Sejam $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$ e $u \in \mathbb{R}^n$. Então $\mathrm{D}_u(T\Phi) = (\mathrm{D}_u T)\Phi + T(\overline{\mathrm{D}}_u\Phi)$ e a extensão desta fórmula para a derivada do produto $T\Phi_1 \ldots \Phi_n$, sendo $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\Phi_1, \ldots, \Phi_n \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$ pode ser feito usualmente.*

Demonstração. Para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\langle (\mathrm{D}_u T)\Phi, \xi \rangle = -\langle T, \mathrm{D}_u \Phi(\xi) \rangle,$$

e

$$\left\langle T(\overline{\mathrm{D}}_u \Phi), \xi \right\rangle = \langle T(\mathrm{D}_u \Phi), \xi \rangle - \langle T(\Phi.\mathrm{D}_u), \xi \rangle,$$

como $\overline{\mathrm{D}}_u \Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$ obtemos

$$\langle T(\mathrm{D}_u \Phi), \xi \rangle - \langle T(\Phi.\mathrm{D}_u), \xi \rangle = \langle T, \mathrm{D}_u \Phi(\xi) \rangle + \langle \mathrm{D}_u(T\Phi), \xi \rangle.$$

Então,

$$\left\langle (\mathrm{D}_u T)\Phi + T(\overline{\mathrm{D}}_u \Phi), \xi \right\rangle = \langle \mathrm{D}_u(T\Phi), \xi \rangle.$$

Portanto, $(\mathrm{D}_u T)\Phi + T(\overline{\mathrm{D}}_u \Phi) = \mathrm{D}_u(T\Phi)$. A extensão desta fórmula para a derivada do produto e feita por indução. Primeiro, mostraremos que vale para $n = 2$. De fato,

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_u((T\Phi_1)\Phi_2) &= (\mathrm{D}_u(T\Phi_1))\Phi_2 + T\Phi_1(\overline{\mathrm{D}}_u \Phi_2) = ((\mathrm{D}_u T)\Phi_1 + T(\overline{\mathrm{D}}_u \Phi_1))\Phi_2 + T\Phi_1(\overline{\mathrm{D}}_u \Phi_2) \\
&= (\mathrm{D}_u T)\Phi_1\Phi_2 + T(\overline{\mathrm{D}}_u \Phi_1\Phi_2)
\end{aligned}$$

no sentido de distribuição. Agora, suponha que vale para $n = k$, ou seja, $(\mathrm{D}_u T)\Phi_1 \ldots \Phi_k + T(\overline{\mathrm{D}}_u \Phi_1 \ldots \Phi_k) = \mathrm{D}_u(T\Phi_1 \ldots \Phi_k)$, então para $n = k+1$ temos que

$$\mathrm{D}_u(T\Phi_1 \ldots \Phi_k \Phi_{k+1}) = \mathrm{D}_u(T(\Phi_1 \ldots \Phi_k)\Phi_{k+1}) = (\mathrm{D}_u T)\Phi_1 \ldots \Phi_k \Phi_{k+1} + T(\overline{\mathrm{D}}_u \Phi_1 \ldots \Phi_k \Phi_{k+1}).$$

□

Quando $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo, definimos então

$$\langle (T \circ h)(\phi), \xi \rangle = \left\langle T, (\phi(\xi \circ h^{-1})) \left| \mathrm{J}(h^{-1}) \right| \right\rangle.$$

$(T \circ h)$ denota a distribuição T após uma mudança de variável h.

Em relação à mudança de variável, temos

Proposição 2.5. *Sejam $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$ e $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ difeomorfismo linear, então*

$$(T \circ h)(\Phi \odot h) = (T\Phi) \circ h.$$

Demonstração. Para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, como $\Phi \odot h \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$ temos que

$$\begin{aligned}
\langle (T \circ h)(\Phi \odot h), \xi \rangle &= \left\langle T, (\phi \odot h)(\xi \circ h^{-1})) \left| \mathrm{J}(h^{-1}) \right| \right\rangle \\
&= \left\langle T, ((\Phi(\xi \circ h^{-1}) \circ h^{-1}) \circ h) \left| \mathrm{J}(h^{-1}) \right| \right\rangle \\
&= \left\langle T, \Phi(\xi \circ h^{-1}) \left| \mathrm{J}(h^{-1}) \right| \right\rangle = \left\langle T\Phi, (\xi \circ h^{-1}) \left| \mathrm{J}(h^{-1}) \right| \right\rangle = \langle (T\Phi) \circ h, \xi \rangle.
\end{aligned}$$

Assim, $(T\Phi) \circ h = (T \circ h)(\Phi \odot h)$. □

Em particular, temos que $(\tau_a T)(\overline{\tau_a}\Phi) = \tau_a(T\Phi)$, sendo τ_a a translação usual quando aplicada uma distribuição com $a \in \mathbb{R}^n$. De fato, para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}\langle(\tau_a T)(\overline{\tau_a}\Phi), \xi\rangle &= \langle \tau_a T, \overline{\tau_a}\Phi(\xi)\rangle = \langle \tau_a T, \Phi(\xi \circ \tau_{-a}) \circ \tau_a\rangle = \langle T, [\Phi(\xi \circ \tau_{-a}) \circ \tau_a] \circ \tau_{-a}\rangle \\ &= \langle T, \Phi(\xi \circ \tau_{-a})\rangle = \langle T\Phi, \xi \circ \tau_{-a}\rangle = \langle \tau_a(T\Phi), \xi\rangle .\end{aligned}$$

Observe que $(\overline{\tau_a}\Phi) = \Phi \odot h$.

Sobre o suporte temos que :

Proposição 2.6. *Sejam $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$, então* $\operatorname{supp}(T\Phi) \subset \operatorname{supp}(\Phi)$.

Demonstração. Se $t \notin \operatorname{supp}(\Phi)$ então $\Phi(\xi)(t) = 0$ em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ com $\operatorname{spt}(\xi) \subset \Omega$, então

$$\langle T\Phi, \xi\rangle = \langle T, \Phi(\xi)\rangle = \langle 0, \xi\rangle, \ \forall \ \xi \in \mathscr{D}(\Omega). \tag{2.1}$$

Portanto, $t \notin \operatorname{supp}(T\Phi)$. □

Quanto à continuidade deste produto temos

Proposição 2.7. *(Continuidade à esquerda do produto) Seja $\Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$ então a aplicação $\Phi^t : \mathscr{D}' \to \mathscr{D}'$ dada por $\Phi^t = T\Phi$ é contínua, para todo $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Seja $\xi_j \to 0$ em $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Temos $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, então para todo $\mathrm{K} \subset\subset \mathbb{R}^n$ tal que $\operatorname{spt}(\xi_j) \subset \mathrm{K}$ para todo j, existe $l \geq 0$ e uma constante $c > 0$ tal que,

$$\left|T(\xi_j)\right| \leq c \left\|\xi_j\right\|_{l,\infty} \to 0$$

Como $\Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$ temos que $\Phi(\xi_j) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, para todo j. Observe que $\operatorname{spt}(\Phi(\xi_j)) \subset \operatorname{spt}(\xi_j)$, para todo j.

De fato, se $t \notin \operatorname{spt}(\xi_j)$, então $\xi_j(t) = 0$, $\forall j$ em um conjunto aberto Ω com $t \in \Omega$. Logo, $\Phi(\xi_j)(t) = \Phi(\xi_j(t)) = \Phi(0) = 0$ para todo $t \in \Omega$, ou seja, $t \notin \operatorname{spt}(\Phi(\xi_j))$, para todo j. Portanto, $\operatorname{spt}(\Phi(\xi_j)) \subset \mathrm{K}$. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left\|\xi_j - 0\right\|_{l,\infty} < \delta \Longrightarrow \left\|\Phi(\xi_j) - \Phi(0)\right\|_{l,\infty} < \varepsilon,$$

para todo $\mathrm{K} \subset\subset \mathbb{R}^n$ com $\operatorname{spt}(\xi_j) \subset \mathrm{K}$.

Daí, $\left|T\Phi(\xi_j)\right| \leq c \left\|\Phi(\xi_j)\right\|_{l,\infty} < \varepsilon$ e concluímos que a aplicação Φ^t é contínua. □

A seguir é definida uma projeção do espaço $\mathscr{L}(\mathscr{D})$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, o que permitirá interpretar uma distribuição como um operador em $\mathscr{L}(\mathscr{D})$. Está interpretação é a base do nosso produto.

2.1.2 A projeção $\tilde{\zeta}$ e a representação de uma distribuição por um operador

Considere as seguintes operações em $\mathscr{L}(\mathscr{D})$

(a) Adição: $(\Phi,\Psi) \longmapsto \Phi+\Psi$ de $\mathscr{L}(\mathscr{D}) \times \mathscr{L}(\mathscr{D})$ para $\mathscr{L}(\mathscr{D})$;

(b) Produto à direita induzido pela representação natural $\Psi : \Phi \longmapsto \Phi.\Psi$ de $\mathscr{L}(\mathscr{D})$ para $\mathscr{L}(\mathscr{D})$;

(c) Derivada direcional na direção $u \in \mathbb{R}^n : \Phi \longmapsto \overline{\mathrm{D}}_u\Phi$ de $\mathscr{L}(\mathscr{D})$ para $\mathscr{L}(\mathscr{D})$;

(d) Translação definida por $a \in \mathbb{R}^n : \Phi \longmapsto \overline{\tau}_a\Phi$ de $\mathscr{L}(\mathscr{D})$ para $\mathscr{L}(\mathscr{D})$;

(e) Mudança de variável definida por uma transformação unimodular $h : \Phi \longmapsto \Phi \odot h$ de $\mathscr{L}(\mathscr{D})$ para $\mathscr{L}(\mathscr{D})$.

Uma transformação unimodular é uma aplicação linear $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $|\det\ h| = 1$.
Agora, considere a aplicação $\tilde{\zeta} : \mathscr{L}(\mathscr{D}) \longmapsto \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ definido por

$$< \tilde{\zeta}(\Phi), \xi >= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\xi)(t)\mathrm{d}t, \tag{2.2}$$

para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 2.8. *A aplicação $\tilde{\zeta}$ é um epimorfismo para estrutura definida pela operação (a), (b), (c), (d) e (e) em $\mathscr{L}(\mathscr{D})$ e os correspondentes em $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. O morfismo (a) é trivial. Para o morfismo (b), como Ψ é uma representação natural, temos que $\Psi = \rho(\gamma)$, para algum $\gamma \in \mathscr{C}^\infty$. Então, para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ temos que

$$\begin{aligned}\left\langle \tilde{\zeta}(\Phi.\Psi), \xi \right\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi.\Psi(\xi)(t)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi[\rho(\gamma)(\xi)](t)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi[\gamma(\xi)](t)\mathrm{d}t \\ &= \left\langle \tilde{\zeta}(\Phi), \gamma(\xi) \right\rangle = \left\langle \tilde{\zeta}(\Phi), \Psi(\xi) \right\rangle = \left\langle \tilde{\zeta}(\Phi).\Psi, \xi \right\rangle.\end{aligned}$$

Portanto, $\tilde{\zeta}(\Phi.\Psi) = \tilde{\zeta}(\Phi).\Psi$. O item (c), $\tilde{\zeta}(\overline{\mathrm{D}}_u\Phi) = \mathrm{D}_u\tilde{\zeta}(\Phi)$ foi provado na Proposição 1.2.1 em [33]. Agora, provaremos os morfismo (d) e (e), para qualquer $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ temos que

$$\begin{aligned}\left\langle \tilde{\zeta}(\overline{\tau}_a\Phi), \xi \right\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\tau}_a\Phi(\xi)(t)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^n} \tau_a.\Phi.\tau_{-a}(\xi)(t)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\tau_{-a}\xi)(t-a)\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\tau_{-a}\xi)(y)\mathrm{d}y = \left\langle \tilde{\zeta}(\Phi), \tau_{-a}\xi \right\rangle = \left\langle \tau_a\tilde{\zeta}(\Phi), \xi \right\rangle.\end{aligned}$$

em que fizemos a mudança de variável $y = t - a$. Portanto, $\tilde{\zeta}(\overline{\tau}_a\Phi) = \tau_a\tilde{\zeta}(\Phi)$. Da mesma maneira,

$$\begin{aligned}\left\langle \tilde{\zeta}(\Phi \odot h), \xi \right\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi \odot h(\xi)(t)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^n} S_h.\Phi.S_{-h}(\xi)(t)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\xi \circ h^{-1}) \circ h(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\xi \circ h^{-1})(y)\mathrm{d}y = \left\langle \tilde{\zeta}(\Phi), \xi \circ h^{-1} \right\rangle = \left\langle \tilde{\zeta}(\Phi) \circ h, \xi \right\rangle,\end{aligned}$$

para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, portanto $\tilde{\zeta}(\Phi \odot h) = \tilde{\zeta}(\Phi) \circ h$.

Falta verificar que $\tilde{\zeta}$ é sobrejetora para provar o epimorfismo, então se $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$ é definido por $\Phi(\xi) = \alpha < T, \xi >$, com $\alpha, \xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \alpha(t)\mathrm{d}t = 1$, temos que

$$\begin{aligned}\left\langle \tilde{\zeta}(\Phi), \xi \right\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\xi)(t)\mathrm{d}t =< T, \xi > \int_{\mathbb{R}^n} \alpha(t)\mathrm{d}t \\ &= \langle T, \xi \rangle,\end{aligned}$$

ou seja, $\tilde{\zeta} = T$ e concluímos que $\tilde{\zeta}$ é sobrejetora. □

Se $S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\Phi \in \tilde{\zeta}^{-1}(S)$ chamamos Φ uma representação de S em $\mathscr{L}(\mathscr{D})$. Note que se $\Phi_S \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$ é uma representação de $S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ o produto $T\Phi_S$ com $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ não é independente da representação de S e, portanto, por enquanto não podemos definir o produto das distribuições T e S.

Definiremos a seguir uma família de projetores $s_\alpha : \mathscr{L}(\mathscr{D}) \to \mathscr{L}(\mathscr{D})$ que fornecem a base para definição do produto de distribuições.

2.1.3 A α-representação do operador $\Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$

Definição 2.9. Dado $\alpha \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ com $\int_{\mathbb{R}^n} \alpha(t)\mathrm{d}t = 1$, definimos o operador $s_\alpha : \mathscr{L}(\mathscr{D}) \to \mathscr{L}(\mathscr{D})$ por $s_\alpha(\Phi) = \Psi$ sendo que Ψ é dado por

$$[\psi(\xi)](y) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_t[\check{\alpha}(y-t)\xi(t)]\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_t[\alpha(t-y)\xi(t)]\mathrm{d}t,$$

para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ e $y \in \mathbb{R}^n$, sendo $\check{\alpha}(y-t) = \alpha(t-y)$ para todo $t \in \mathbb{R}^n$ e Φ_t denota o operador Φ quando atua nas funções de t em $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

É trivial que sempre existe um operador $s_\alpha(\Phi)$. De fato, pois dado $\Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$ tal que $\tilde{\zeta}(\Phi) = T$ podemos verificar em [34] que $(s_\alpha(\Phi)) = \check{\alpha} * \tilde{\zeta}(\Phi) \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$. O operador s_α é a α-representação do operador $\Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$.

Em [33] podemos encontrar a prova da próxima proposição.

Proposição 2.10. *Se $\Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$ então $s_\alpha(\Phi) \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$.*

As principais propriedades de s_α são as seguintes:

Proposição 2.11. *Seja $\Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação unimodular, $a \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \alpha(t)\mathrm{d}t = 1$ com $\alpha \circ h = \alpha$. Então, a operação s_α em $\mathscr{L}(\mathscr{D})$ é um endomorfismo, isto é, vale as seguintes propriedades:*

(a) $s_\alpha(\Phi + \Psi) = s_\alpha(\Phi) + s_\alpha(\Psi)$, $\forall\, \Phi, \Psi \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$;

(b) $s_\alpha(\Phi.\Psi) = s_\alpha(\Phi).\Psi$, $\forall\, \Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$ *e* $\Psi = \rho(\beta)$, $\forall\ \beta \in \mathscr{C}^\infty$;

(c) $s_\alpha(\overline{\mathrm{D}}_u\Phi) = \overline{\mathrm{D}}_u[s_\alpha(\Phi)]$, $\forall\, \Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$ *com* $u \in \mathbb{R}^n$;

(d) $s_\alpha(\overline{\tau}_a\Phi) = \overline{\tau}_a[s_\alpha(\Phi)]$, $\forall\, \Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$;

(e) $s_\alpha(\Phi \odot h) = [s_\alpha(\Phi)] \odot h$, $\forall\, \Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$.

Além disso, $s_\alpha \circ s_\alpha = s_\alpha$ *o que prova que* s_α *é um projetor e, portanto, o principal ideal esquerdo (direito) gerado por* s_α *é idempotente.*

Demonstração. A propriedade (a) é trivial. Vamos provar (d) e as outras demonstrações podem ser verificadas em [33, 34]. Se $s_\alpha(\Phi) = \Psi$, então $[\psi(\xi)](y) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_t[\alpha(t-y)\xi(t)]\mathrm{d}t$. Assim,

$$\begin{aligned}[\overline{\tau}_a\Psi(\xi)](y) &= [(\tau_a.\Psi.\tau_{-a})(\xi)](y) = [\Psi(\xi\circ\tau_{-a})\circ\tau_a](y) = [\Psi(\xi\circ\tau_{-a})](\tau_a(y))\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_t[\alpha(t-\tau_a(y))(\xi\circ\tau_{-a})(t)]\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Por outro lado, se $s_\alpha(\overline{\tau_a}\Phi) = \eta$ temos

$$\begin{aligned}[\eta(\xi)](y) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\overline{\tau}_a\Phi)_t[\alpha(t-y)\xi(t)]\mathrm{d}t\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_a.\Phi.\tau_{-a})_t[\alpha(t-y)\xi(t)]\mathrm{d}t\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_a.\Phi)_t[\alpha(\tau_{-a}(t)-y)(\xi\circ\tau_{-a})(t)]\mathrm{d}t\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_a\Phi_t)[\alpha(t-\tau_a(y))(\xi\circ\tau_{-a})(t)]\mathrm{d}t\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_t[\alpha(\tau_a(t)-\tau_a(y))(\xi\circ\tau_{-a})(\tau_a(t))]\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

fazendo a mudança de variável $t = \tau_a(t)$ obtemos que

$$[\eta(\xi)](y) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_t[\alpha(t-\tau_a(y))(\xi\circ\tau_{-a})(t)]\mathrm{d}t.$$

Portanto, (d) está provado. □

A seguinte proposição estabelece uma relação entre $\tilde{\zeta}$ e s_α.

Proposição 2.12. *Para todo* $\alpha \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ *tal que* $\int_{\mathbb{R}^n} \alpha(t)\mathrm{d}t = 1$, *temos que:*

(a) $\tilde{\zeta} \circ s_\alpha = \tilde{\zeta}$;

(b) $\mathrm{Ker}(\tilde{\zeta}) = \mathrm{Ker}(s_\alpha)$.

Demonstração. Veja a Seção 1.3 em [33]. □

Observe que $\mathrm{supp}(\tilde{\zeta}(\Phi)) \subset \mathrm{supp}(\Phi)$, para todo $\Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$.

De fato, dado $\Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$, se $t \notin \mathrm{supp}(\Phi)$ temos que $\Phi(\xi)(t) = 0$ em um conjunto aberto Ω tal que $t \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathrm{spt}(\xi) \subset \Omega$. Daí,

$$\left\langle \tilde{\zeta}(\Phi), \xi \right\rangle = \int_\Omega \Phi(\xi)(t)\mathrm{d}t =< 0, \xi >,$$

para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Logo, $\tilde{\zeta}(\Phi) = 0$ em Ω, o que implica que $t \notin \mathrm{supp}(\tilde{\zeta}(\Phi))$.

Proposição 2.13. *Para todo* $\alpha \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ *com* $\int_{\mathbb{R}^n} \alpha(t)\mathrm{d}t = 1$, *se* $\Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$ *então* $\operatorname{supp}(\tilde{\zeta}(\Phi)) = \operatorname{supp}(s_\alpha(\Phi))$.

Demonstração. A demosntração de $\operatorname{supp}(s_\alpha(\Phi)) \subset \operatorname{supp}(\tilde{\zeta}(\Phi))$ pode ser vista em [33]. Vamos provar que $\operatorname{supp}(\tilde{\zeta}(\Phi)) \subset \operatorname{supp}(s_\alpha(\Phi))$.

Então, se $t \notin \operatorname{supp}(s_\alpha(\Phi))$ temos que $[s_\alpha(\Phi)(\xi)](t) = 0$ em um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com $t \in \Omega$, para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\operatorname{spt}(\xi) \subset \Omega$. Pela Proposição 2.12 (a), $\tilde{\zeta}(s_\alpha(\Phi)(\xi))(t) = \tilde{\zeta}(\Phi)(\xi)(t) = 0$ com $t \in \Omega$, para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\operatorname{spt}(\xi) \subset \Omega$. Logo, $t \notin \operatorname{supp}(\tilde{\zeta}(\Phi))$ e concluímos a demonstração da proposição. □

O resultado a seguir é uma das etapas cruciais para definição da família de produtos de distribuição. Dado $\alpha \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ com $\int_{\mathbb{R}^n} \alpha(t)\mathrm{d}t = 1$ com a Definição 2.9 temos que :

Proposição 2.14. *Sejam* Φ *e* Ψ *as representações das distribuições* T *e* S *respectivamente, então a distribuição*

$$\tilde{\zeta}[s_\alpha(\Phi).s_\alpha(\Psi)] = \tilde{\zeta}[\Phi.s_\alpha(\Psi)] = \tilde{\zeta}(\Phi)[s_\alpha(\Psi)] = T.[s_\alpha(\Psi)] \tag{2.3}$$

é independente da representação Φ *e* Ψ *de* T *e* S.

Demonstração. Temos que $\tilde{\zeta}(\Phi) = T$ e $\tilde{\zeta}(\Psi) = S$, usando a Proposição 2.12 e a definição da projeção $\tilde{\zeta}$ obtemos que

$$\begin{aligned}
\left\langle \tilde{\zeta}[s_\alpha(\Phi).s_\alpha(\Psi)], \xi \right\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} s_\alpha(\Phi).s_\alpha(\Psi)(\xi)(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} s_\alpha(\Phi)[s_\alpha(\Psi)(\xi)](t)\mathrm{d}t \\
&= \left\langle \tilde{\zeta}[s_\alpha(\Phi)], s_\alpha(\Psi)(\xi) \right\rangle = \left\langle \tilde{\zeta}(\Phi), s_\alpha(\Psi)(\xi) \right\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi.s_\alpha(\Psi)(\xi)(t)\mathrm{d}t \\
&= \left\langle \tilde{\zeta}[\Phi.s_\alpha(\Psi)], \xi \right\rangle,
\end{aligned}$$

para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

Com isso provamos a primeira igualdade. Para demonstrar a segunda igualdade, basta notar que $\tilde{\zeta}(\Phi) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $s_\alpha(\Psi) \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$, de fato

$$\begin{aligned}
\left\langle \tilde{\zeta}[s_\alpha(\Phi).s_\alpha(\Psi)], \xi \right\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} s_\alpha(\Phi).s_\alpha(\Psi)(\xi)(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} s_\alpha(\Phi)[s_\alpha(\Psi)(\xi)](t)\mathrm{d}t \\
&= \left\langle \tilde{\zeta}[s_\alpha(\Phi)], s_\alpha(\Psi)(\xi) \right\rangle = \left\langle \tilde{\zeta}(\Phi), s_\alpha(\Psi)(\xi) \right\rangle \\
&= \left\langle \tilde{\zeta}(\Phi)s_\alpha(\Psi), \xi \right\rangle.
\end{aligned}$$

Já, a terceira é trivial, porque $T = \tilde{\zeta}(\Phi)$. Para mostrar a independência da representação de S, tome Ψ_1 e Ψ_2 tais que $\tilde{\zeta}(\Psi_1) = \tilde{\zeta}(\Psi_2) = S$, então $\Psi_1 - \Psi_2 \in \mathrm{Ker}(s_\alpha) = \mathrm{Ker}(\tilde{\zeta})$. Portanto, para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ temos que

$$T(s_\alpha \Psi_1) - T(s_\alpha \Psi_2) = T(s_\alpha \Psi_1 - s_\alpha \Psi_2) = T[s_\alpha(\Psi_1 - \Psi_2)] = 0.$$

Analogamente, provamos a independência da representação de T, tome Ψ_1 e Ψ_2 tais que $\tilde{\zeta}(\Phi_1) = \tilde{\zeta}(\Phi_2) = S$, então $\Phi_1 - \Phi_2 \in \mathrm{Ker}(\tilde{\zeta})$. Portanto, para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ temos que

$$\tilde{\zeta}(\Phi_1)(s_\alpha \Psi) - \tilde{\zeta}(\Phi_2)(s_\alpha \Psi) = \tilde{\zeta}(\Phi_1 - \Phi_2) s_\alpha \Psi = 0.$$

□

Está propriedade define o primeiro α-produto $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ por

$$T \underset{\alpha}{\odot} S = T(s_\alpha \Phi), \tag{2.4}$$

para cada $\alpha \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ com $\int_{\mathbb{R}^n} \alpha(t)\mathrm{d}t = 1$.

Agora, $(s_\alpha(\Phi))(\xi) = \check{\alpha} * \tilde{\zeta}(\Phi)\xi$, para cada $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, veja [34]. O operador Φ em (2.4) satisfaz $\tilde{\zeta}(\Phi) = S$, então para cada $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ temos que

$$\begin{aligned}
< T \underset{\alpha}{\odot} S, \xi > &= \langle T(s_\alpha \Phi), \xi \rangle = \langle T, s_\alpha(\Phi)(\xi) \rangle \\
&= < T, \check{\alpha} * \tilde{\zeta}(\Phi)\xi > = \langle T, \check{\alpha} * S\xi \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} T_y \int_{\mathbb{R}^n} \check{\alpha}(y-t) S_t \xi(t) \mathrm{d}t \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} T_y \alpha(t-y) S_t \xi(t) \mathrm{d}y \mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (T * \alpha)(t) S(t) \xi(t) \mathrm{d}t \\
&= \langle (T * \alpha) S, \xi \rangle
\end{aligned}$$

e obtemos uma outra fórmula para o α-produto (2.4) dada por

$$T \underset{\alpha}{\odot} S = (T * \alpha) S. \tag{2.5}$$

Infelizmente, quando $S \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ o resultado não é consistente com o produto usual de uma distribuição por uma função $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

A seguir vamos introduzir um subespaço $\mathscr{H}_\alpha$ de $\mathscr{L}(\mathscr{D})$ para obter a consistência do produto usual de uma distribuição por uma função $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

2.1.4 Fórmulas do α-produto

Seja $\mathscr{N} \subset \mathscr{L}(\mathscr{D})$ o conjunto dos operadores com suporte não denso. Podemos considerar a soma direta $\mathscr{H}_\alpha = \rho(\mathscr{C}^\infty) \oplus s_\alpha(\mathscr{N}) \subset \mathscr{L}(\mathscr{D})$, pois para cada $\alpha \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \alpha(t)\mathrm{d}t = 1$ temos que $\rho(\mathscr{C}^\infty) \cap s_\alpha[\mathscr{L}(\mathscr{D})] = \{0\}$, veja a demonstração em [33].

Proposição 2.15. *Seja* $\Phi \in \mathscr{H}_\alpha$ *e* $\tilde{\zeta}(\Phi) = 0$ *então* $\Phi = 0$.

Demonstração. Suponha que $\Phi = \Psi_\beta + s_\alpha(\eta)$ sendo $\Psi_\beta = \rho(\beta)$, para algum $\beta \in \mathscr{C}^\infty$ e $\eta \in \mathscr{N}$, então pelas Proposições 2.8 e 2.12 obtemos

$$\begin{aligned}\tilde{\zeta}(\Phi) &= \tilde{\zeta}(\Psi_\beta + s_\alpha(\eta))\\ &= \tilde{\zeta}(\Psi_\beta) + \tilde{\zeta}(s_\alpha(\eta))\\ &= \tilde{\zeta}(\Psi_\beta) + \tilde{\zeta}(\eta)\\ &= \beta + \tilde{\zeta}(\eta).\end{aligned}$$

Por hipótese, temos que $\beta = -\tilde{\zeta}(\eta)$. Mas, $\tilde{\zeta}(\eta)$ tem suporte não denso. Assim, $\beta = \tilde{\zeta}(\eta) = 0$ e pela Proposição 2.12, $s_\alpha(\eta) = 0$. Então, $\Phi = \Psi_\beta + s_\alpha(\eta) = \beta = 0$. $\square$

Com isso concluímos que a restrição $\zeta_\alpha := \tilde{\zeta}|_{\mathscr{H}_\alpha}$ é um isormofismo.

Observação 2.16. Como ζ_α é isomorfismo e $\rho(\mathscr{C}^\infty) \cap s_\alpha[\mathscr{L}(\mathscr{D})] = \{0\}$ temos que $\zeta_\alpha(\mathscr{H}_\alpha) = \mathscr{C}^\infty \oplus \mathscr{D}'_n$ sendo $\mathscr{D}'_n(\mathbb{R}^n) = \zeta_\alpha(s_\alpha(\mathscr{N}))$.

Assim, podemos definir o α-produto.

Definição 2.17. Se $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $S = \beta + f \in \mathscr{C}^\infty \oplus \mathscr{D}'_n$ definimos o α-produto, $\dot{\alpha}$, dado por

$$T_{\dot{\alpha}}S := T\Phi_\alpha, \tag{2.6}$$

para cada $\alpha \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ com $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \alpha(t)\mathrm{d}t = 1$ e $\Phi_\alpha = \zeta_\alpha^{-1}(S) \in \mathscr{H}_\alpha$.

Pela Proposição 2.2 e por (2.5), podemos expressar (2.6) por

$$T_{\dot{\alpha}}S = T\beta + (T * \alpha)f. \tag{2.7}$$

Exemplo 2.18. $\delta_{a\dot{\alpha}}\delta_b = \alpha(b-a)\delta_b$ com $a, b \in \mathbb{R}^n$.

De fato, como $\delta_b = 0 + \delta_b \in \mathscr{C}^\infty \oplus \mathscr{D}'_n$ usando a fórmula (2.7), temos que

$$\begin{aligned}< \delta_{a\dot{\alpha}}\delta_b, \xi > &= \langle \delta_a 0 + (\delta_a * \alpha)\delta_b, \xi\rangle = \langle (\delta_a * \alpha)\delta_b, \xi\rangle\\ &= < \delta_b, (\delta_a * \alpha)\xi >= \langle \alpha(b-a)\delta_b, \xi\rangle,\end{aligned}$$

para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

Este exemplo também mostra que o α-produto definido, em geral, não é comutativo, pois $\delta_{b\dot{\alpha}}\delta_a = \alpha(a-b)\delta_a$.

Exemplo 2.19. $(V.P.\frac{1}{t}t)_{\dot{\alpha}}\delta = \delta$.

De fato, para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\begin{aligned} < V.P.\frac{1}{t}t, \xi > &= \left\langle V.P\frac{1}{t}, t\xi \right\rangle \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|t|>\varepsilon} \xi(t)\mathrm{d}t \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \xi(t)\mathrm{d}t - \int_{|t|\leq\varepsilon} \xi(t)\mathrm{d}t \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \xi(t)\mathrm{d}t = \langle 1, \xi \rangle . \end{aligned}$$

Então, $(V.P.\frac{1}{t}t)_{\dot{\alpha}}\delta = 1_{\dot{\alpha}}\delta$. Agora,

$$\langle 1_{\dot{\alpha}}\delta, \xi \rangle = \langle (1*\alpha)\delta, \xi \rangle = \left\langle \left(\int_{\mathbb{R}} \alpha(t-y)\mathrm{d}t \right) \delta, \xi \right\rangle = \langle \delta, \xi \rangle , \tag{2.8}$$

para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ e portanto, $(V.P.\frac{1}{t}t)_{\dot{\alpha}}\delta = \delta$.

Com o próximo exemplo concluímos que os α-produtos, em geral, não são associativos.

Exemplo 2.20. $(V.P.\frac{1}{t})_{\dot{\alpha}}(t\delta) = 0$.

De fato, para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\begin{aligned} < t\delta, \xi > &= \langle \delta, t\xi \rangle \\ &= 0\xi(0) = 0. \end{aligned}$$

As provas das propriedades dos α-produtos são triviais, basta prestar atenção nas propriedades da Proposição 2.3:

Proposição 2.21. *Sejam $T, T_1, T_2, \ldots, T_n \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $S, S_1, \ldots, S_n \in \mathscr{C}^\infty \oplus \mathscr{D}'_n = \zeta_\alpha(\mathscr{H}_\alpha)$, então*

(a) $T_{\dot{\alpha}}(S_1 + S_2 + \ldots + S_n) = T_{\dot{\alpha}}S_1 + T_{\dot{\alpha}}S_2 + \ldots + T_{\dot{\alpha}}S_n$;

(b) $(T_1 + T_2 + \ldots + T_n)_{\dot{\alpha}}S = T_{1\dot{\alpha}}S + T_{2\dot{\alpha}}S + \ldots + T_{n\dot{\alpha}}S$.

Demonstração. Vamos demonstrar (a), como $S_1, \ldots, S_n \in \mathscr{C}^\infty \oplus \mathscr{D}'_n = \zeta_\alpha(\mathscr{H}_\alpha)$ e usando a Proposição 2.3 (b) temos que

$$\begin{aligned} T_{\dot{\alpha}}(S_1 + S_2 + \ldots + S_n) &= T_{\dot{\alpha}}(\zeta_\alpha^{-1}(S_1) + \zeta_\alpha^{-1}(S_2) + \ldots + \zeta_\alpha^{-1}(S_n)) \\ &= T_{\dot{\alpha}}\zeta_\alpha^{-1}(S_1) + T_{\dot{\alpha}}\zeta_\alpha^{-1}(S_2) + \ldots + T_{\dot{\alpha}}\zeta_\alpha^{-1}(S_n) \\ &= T_{\dot{\alpha}}S_1 + T_{\dot{\alpha}}S_2 + \ldots T_{\dot{\alpha}}S_n. \end{aligned}$$

Para demonstrar o item (b) basta utilizar Proposição 2.3 (c). □

A regra de derivação usual para α-produto também é válida.

Proposição 2.22. *Sejam* $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $S \in \mathscr{C}^\infty \oplus \mathscr{D}'_n = \zeta_\alpha(\mathscr{H}_\alpha)$ *e* $u \in \mathbb{R}^n$, *então*

$$\mathrm{D}_u(T\dot{\alpha}S) = (\mathrm{D}_u T)\dot{\alpha}S + T\dot{\alpha}(\mathrm{D}_u S), \tag{2.9}$$

Demonstração. Pela aplicação da Proposição 2.4, temos

$$\mathrm{D}_u(T\dot{\alpha}S) = \mathrm{D}_u[T\dot{\alpha}\zeta_\alpha^{-1}(S)] = (\mathrm{D}_u T)\dot{\alpha}\zeta_\alpha^{-1}(S) + T\dot{\alpha}[\overline{\mathrm{D}}_u\zeta_\alpha^{-1}(S)].$$

Agora, utilizando a Proposição 2.8 obtemos que $\overline{\mathrm{D}}_u\zeta_\alpha^{-1}(S) = \zeta_\alpha^{-1}(\mathrm{D}_u(S))$, então

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}_u T)\dot{\alpha}\zeta_\alpha^{-1}(S) + T\dot{\alpha}[\overline{\mathrm{D}}_u\zeta_\alpha^{-1}(S)] &= (\mathrm{D}_u T)\dot{\alpha}\zeta_\alpha^{-1}(S) + T\dot{\alpha}[\zeta_\alpha^{-1}(\mathrm{D}_u(S))]\\ &= (\mathrm{D}_u T)\dot{\alpha}S + T\dot{\alpha}(\mathrm{D}_u S).\end{aligned}$$

□

Quanto à invariância por translação e por uma transformação unimodular, temos que

Proposição 2.23. *Sejam* $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $S \in \mathscr{C}^\infty \oplus \mathscr{D}'_n = \zeta_\alpha(\mathscr{H}_\alpha)$, $a \in \mathbb{R}^n$ *e a transformação unimodular* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. *Então,*

(a) $\tau_a(T\dot{\alpha}S) = (\tau_a T)\dot{\alpha}(\tau_a S)$;

(b) $(T\dot{\alpha}S)\circ h = (T\circ h)\dot{\alpha}(S\circ h)$.

Demonstração. Vamos provar primeiro o item (a), como $S \in \mathscr{C}^\infty \oplus \mathscr{D}'_n = \zeta_\alpha(\mathscr{H}_\alpha)$ e $\tau_a(T\Phi_S) = (\tau_a T)\dot{\alpha}(\overline{\tau_a}\Phi_S)$ temos que

$$\tau_a(T\dot{\alpha}S) = \tau_a(T\dot{\alpha}\zeta_\alpha^{-1}(S)) = (\tau_a T)\dot{\alpha}(\overline{\tau_a}\zeta_\alpha^{-1}(S)).$$

Pela Proposição 2.8 obtemos $\overline{\tau}_a\zeta_\alpha^{-1}(S) = \zeta_\alpha^{-1}(\tau_a S)$, então

$$\begin{aligned}(\tau_a T)\dot{\alpha}(\overline{\tau_a}\zeta_\alpha^{-1}(S)) &= (\tau_a T)\dot{\alpha}(\zeta_\alpha^{-1}(\tau_a S))\\ &= (\tau_a T)\dot{\alpha}(\tau_a S).\end{aligned}$$

Agora, para o item (b) usamos a Proposição 2.5, obtemos

$$(T\dot{\alpha}S)\circ h = (T\dot{\alpha}\zeta_\alpha^{-1}(S))\circ h = (T\circ h)\dot{\alpha}(\zeta_\alpha^{-1}(S)\odot h).$$

Pela Proposição 2.8, temos que $\zeta_\alpha^{-1}\zeta_\alpha\left(\zeta_\alpha^{-1}(S)\odot h\right) = \zeta_\alpha^{-1}(S\circ h)$, então

$$(T\circ h)\dot{\alpha}(\zeta_\alpha^{-1}(S\circ h)) = (T\circ h)\dot{\alpha}(S\circ h).$$

□

Para o suporte do α-produto temos o seguinte resultado:

Proposição 2.24. *Sejam* $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ *e* $S \in \mathscr{C}^\infty \oplus \mathscr{D}'_n = \zeta_\alpha(\mathscr{H}_\alpha)$, *então* $\mathrm{supp}(T\dot{\alpha}S) \subset \mathrm{supp}(S)$.

A demonstração é trivial, basta observar a Proposição 2.6.

Em geral, não temos que $\mathrm{supp}(T_{\dot{\alpha}}S) \subset \mathrm{supp}(T)$, por exemplo, considere o Exemplo 2.18, então

$$\mathrm{supp}((\delta_a)_{\dot{\alpha}}(\delta_b)) = \alpha(b-a)\{b\} \not\subset \mathrm{supp}(\delta_a) = \{a\}.$$

Pela aplicação da Proposição 2.7, temos a continuidade à esquerda:

Proposição 2.25. *Seja $S \in \mathscr{C}^\infty \oplus \mathscr{D}'_n = \zeta_\alpha(\mathscr{H}_\alpha)$, então a aplicação $\Theta : \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ dada por $\Theta(T) = T_{\dot{\alpha}}S$ é contínua.*

O α-produto (2.7) tem consistência com o produto usual de distribuições por funções $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ quando estas são colocadas no lado direito, ou seja, se $S \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ temos $f = 0$ e $S = \beta$ então $T_{\dot{\alpha}}S = T\beta$.

Podemos estender o α-produto (2.7) para $T \in \mathscr{D}'^p(\mathbb{R}^n)$ e $S \in \mathscr{C}^p \oplus \mathscr{D}'_n$, sendo $p = 1, 2, \ldots, \infty$, $\mathscr{D}'^p(\mathbb{R}^n)$ o espaço das distribuições de ordem $\leq p$ (assuma que $\mathscr{D}'^\infty(\mathbb{R}^n)$ significa $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$), $T\beta$ é o produto de uma distribuição $\mathscr{D}'^p(\mathbb{R}^n)$ por uma função $\mathscr{C}^p(\mathbb{R}^n)$ e $(T * \alpha)f$ é o produto de duas funções $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Esta extensão é claramente consistente com os produtos de distribuições $\mathscr{D}'^p(\mathbb{R}^n)$ com as funções $\mathscr{C}^p(\mathbb{R}^n)$, se as funções $\mathscr{C}^p(\mathbb{R}^n)$ são colocadas no lado direito. Também satifaz as propriedades de (2.5) e (2.7), apenas a regra de Leibniz dada por

$$\mathrm{D}_k(T_{\dot{\alpha}}S) = (\mathrm{D}_k T)_{\dot{\alpha}}S + T_{\dot{\alpha}}(\mathrm{D}_k S),$$

deve ter as seguintes condições: para $T \in \mathscr{D}'^p(\mathbb{R}^n)$, suponha que $S \in \mathscr{C}^{p+1} \oplus \mathscr{D}'_n$. Logo, para cada $\alpha \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ com $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \alpha(t)\mathrm{d}t = 1$, a fórmula (2.7) permite avaliar o produto de $T \in \mathscr{D}'^p(\mathbb{R}^n)$ com $S \in \mathscr{C}^p \oplus \mathscr{D}'_n$.

A partir de agora, considere $n = 1$. Para estender o α-produto, seja $\mathscr{D}'_\mu(\mathbb{R}) \subset \mathscr{D}'_n(\mathbb{R})$ o espaço das distribuições cujo suporte tem medida zero no sentido de Lebesgue. Se $T \in \mathscr{D}'^p(\mathbb{R})$ e $S = \beta + f \in \mathscr{C}^p \oplus \mathscr{D}'_\mu$, com $p = 1, 2, \ldots, \infty$, então o α-produto definido por (2.7) é chamado de *α-produto básico*.

Seja $\mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ o espaço de funções complexas localmente integrável em $\mathbb{R}$. Observe que $\mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R}) \cap \mathscr{D}'_\mu(\mathbb{R}) = \{0\}$, pois se $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R}) \cap \mathscr{D}'_\mu(\mathbb{R})$ temos que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = 0$, para todo $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Então, $f = 0$ em quase todos os pontos de $\mathbb{R}$, o que implica que $f = 0$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Assim, $\mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{D}'_\mu(\mathbb{R})$ é a soma direta de subespaços de $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

Denotaremos por $\mathscr{D}'^{-1}(\mathbb{R})$ o espaço das distribuições $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ cuja derivada distribucional $\mathrm{D}T \in \mathscr{D}'^0(\mathbb{R})$, de modo que, localmente, T é uma função de variação limitada.

Assim, podemos definir a segunda fórmula do α-produto:

Definição 2.26. Se $T \in \mathscr{D}'^{-1}(\mathbb{R})$ e $S = w + f \in \mathscr{L}^1_{loc} \oplus \mathscr{D}'_\mu$, definimos o segundo α-produto por

$$T_{\dot{\alpha}}S = \mathrm{D}(TF) - (\mathrm{D}T)F + (T * \alpha)f, \tag{2.10}$$

sendo $F \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{D}F = w$.

Lembre-se que, F pode ser vista como uma função absolutamente contínua, veja o Teorema Fundamental do Cálculo para Integral de Lebesgue em [17]. Observe que TF é o produto de $\mathscr{D}'^{-1}(\mathbb{R})$ por uma função contínua em $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, ou seja, para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ temos que

$$\langle TF, \xi \rangle := \int_{\mathbb{R}} T(t)F(t)\xi(t)\mathrm{d}.$$

Então, $\mathrm{D}(TF)$ é a derivada distribucional. O $(\mathrm{D}T)F$ é o produto de $\mathscr{D}'^{0}(\mathbb{R})$ com uma função contínua e $(T * \alpha)f$ como definido em (2.5) e (2.7).

Agora, provaremos que $T_{\dot{\alpha}}S$ é dado pela fórmula (2.10) é independente da função $F \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{D}F = w$.

Lema 2.27. *O α-produto dado pela fórmula* (2.10) *é independente da função $F \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ tal que* $\mathrm{D}F = w$

Demonstração. Se $F_1, F_2 \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ são tais que $\mathrm{D}F_1 = w = \mathrm{D}F_2$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, então

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{D}(F_1 - F_2)(t)\xi(t)\mathrm{d}t = 0,$$

para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.

Logo, $\mathrm{D}(F_1 - F_2) = 0$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, então $F_1 - F_2$ é uma constante vista como uma distribuição.

Provaremos que o valor do α-produto (2.10) não muda se substituirmos F por $F + C$, sendo C uma constante, então

$$\langle T(F+C), \xi \rangle = \langle TF + TC, \xi \rangle,$$

para qualquer $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.

Daí,

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{D}(TF+TC), \xi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{D}(TF)(t)\xi(t)\mathrm{d}t - \left(\int_{\mathbb{R}} T(t)\mathrm{D}\xi(t)\mathrm{d}t \right) C \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{D}(TF)(t)\xi(t)\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}} (\mathrm{D}T(t))C\xi(t)\mathrm{d}t \\
&= \langle \mathrm{D}(TF) + (\mathrm{D}T)C, \xi \rangle,
\end{aligned}$$

para qualquer $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Logo,

$$T_{\dot{\alpha}}S = \mathrm{D}(TF+TC) - (\mathrm{D}T)(F+C) + (T*\alpha)f = \mathrm{D}(TF) - (\mathrm{D}T)F + (T*\alpha)f.$$

□

Como F é uma absolutamente contínua, então temos:

Lema 2.28. *Seja $T \in \mathscr{D}'^{-1}(\mathbb{R})$ e F absolutamente contínua, então*

$$\mathrm{D}(TF) = (\mathrm{D}T)F + T(\mathrm{D}F), \tag{2.11}$$

sendo $(\mathrm{D}T)F$ o produto usual de uma medida com uma função contínua e $T(\mathrm{D}F)$ a distribuição correspondente ao produto por funções.

Demonstração. Sejam $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ e $a,b \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{spt}(\xi) \subset (a,b)$. Considere

$$\langle T(\mathrm{D}F), \xi \rangle = \int_a^b TF'\xi \mathrm{d}t,$$

o que implica que $T(\mathrm{D}F) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. De fato, a linearidade é trivial e temos que

$$|\langle T(\mathrm{D}F), \xi \rangle| \le \int_a^b |T||F'||\xi|\mathrm{d}t \le \|\xi\|_\infty \int_a^b |T||F'|\mathrm{d}t,$$

para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Então, como $T \in \mathscr{D}'^{-1}(\mathbb{R})$, temos que T é limitada e pelo Teorema Fundamental do Cálculo para Integral de Lebesgue em [17], F' também é limitada. Portanto, $T(\mathrm{D}F)$ é contínuo e concluímos que $T(\mathrm{D}F) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Considere

$$\langle (\mathrm{D}T)F, \xi \rangle = \langle \mathrm{D}T, F\xi \rangle = \int_a^b F\xi \mathrm{d}T \tag{2.12}$$

no qual esta integral deve ser considerada no sentido de Stieltjes, o que implica que $(\mathrm{D}T)F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. De fato, a linearidade é trivial e como temos que

$$|\langle (\mathrm{D}T)F, \xi \rangle| \le \int_a^b |F||\xi||\mathrm{d}T| \le \|\xi\|_\infty \int_a^b |F||\mathrm{d}T|,$$

para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Então, como F é absolutamente contínua em $[a,b]$, temos que F é uma função de variação limitada em $[a,b]$, portanto limitada. Daí,

$$|\langle (\mathrm{D}T)F, \xi \rangle| \le \|\xi\|_\infty C \int_a^b |\mathrm{d}T|,$$

para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ e sendo C uma constante. Então, como $T \in \mathscr{D}'^{-1}(\mathbb{R})$ e pelas propriedades da integral de Stieltjes em [27], obtemos que $(\mathrm{D}T)F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

Como F, ξ são funções de variação limitada no intervalo $[a,b]$ e não possuem nenhum ponto comum de descontinuidade, então pelo Teorema 1.6.7 em [27] temos que

$$\langle (\mathrm{D}T)F, \xi \rangle = \int_a^b F\xi \mathrm{d}T = TF\xi|_a^b - \int_a^b T\mathrm{d}(F\xi) = -\int_a^b T\mathrm{d}(F\xi).$$

Assim,

$$\langle (\mathrm{D}T)F, \xi \rangle = -\int_a^b T(F\xi)' = -\int_a^b TF'\xi \mathrm{d}t - \int_a^b TF\xi'\mathrm{d}t,$$

pois, T é mensurável e limitada em $[a,b]$ e $(F'\xi + F\xi')$ é somável em $[a,b]$. Portanto,

$$\langle (\mathrm{D}T)F, \xi \rangle + \langle T(\mathrm{D}F), \xi \rangle = -\int_a^b TF\xi'\mathrm{d}t = \langle \mathrm{D}(TF), \xi \rangle,$$

provamos a afirmação. □

Assim, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.29. *Sejam $T \in \mathscr{D}'^{-1}(\mathbb{R})$ e $S \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$, então temos $T_{\dot\alpha}S = TS$, sendo $TS \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ o correspondente ao produto usual pontual de T com S.*

Demonstração. Para $f = 0$ em (2.10), temos que $T\dot{\alpha}S = \mathrm{D}(TF) - (\mathrm{D}T)F$, sendo $F \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{D}F = S$. Como F é absolutamente contínua pelo Lema 2.28, obtemos que

$$T\dot{\alpha}S = \mathrm{D}(TF) - (\mathrm{D}T)F = (\mathrm{D}T)F + T(\mathrm{D}F) - (\mathrm{D}T)F = T(\mathrm{D}F) = TS,$$

o que demonstrar o teorema. □

Agora, iremos provar que $T\dot{\alpha}S$ dada pela fórmula (2.10) é consistente com os α-produtos básicos.

Lema 2.30. *Sejam $p \in \{1,2,\ldots,\infty\}$, $T \in \mathscr{D}'^p \cap \mathscr{D}'^{-1}$ e $S \in (\mathscr{C}^p \oplus \mathscr{D}'_\mu) \cap (\mathscr{L}^1_{loc} \oplus \mathscr{D}'_\mu)$, então os valores de $T\dot{\alpha}S$ dados pelas fórmulas* (2.7) *e* (2.10) *são os mesmos.*

Demonstração. Se $S = w + f \in \mathscr{C}^p \oplus \mathscr{D}'_\mu$ e $S = w_1 + f_1 \in (\mathscr{L}^1_{loc} \oplus \mathscr{D}'_\mu)$, então

$$\int_{\mathbb{R}} (w - w_1)\xi(t)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} (f_1 - f)\xi(t)\mathrm{d}t,$$

para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, o que implica que $w - w_1 = f_1 - f$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Observe que $w - w_1 \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$, pois $w_1 \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ e $w \in \mathscr{C}^p \subset \mathscr{L}^p \subset \mathscr{L}^p_{loc} \subset \mathscr{L}^1_{loc}$, para $1 \le p < \infty$. Como $f, f_1 \in \mathscr{D}'_\mu(\mathbb{R})$ temos $f_1 - f \in \mathscr{D}'_\mu(\mathbb{R})$. Entretanto, $\mathscr{L}^1_{loc} \cap \mathscr{D}'_\mu = \{0\}$, então $w - w_1 = f_1 - f = 0$ no sentido de distribuições. Daí, $w = w_1$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ e $f_1 = f$ em $\mathscr{D}'_\mu$, mas $w \in \mathscr{C}^p \subset \mathscr{C}^0$, então $w = w_1 \in \mathscr{C}^0$. Claramente existe $F \in \mathscr{C}^1$ tal que $\mathrm{D}F = w$. Logo, F é absolutamente contínua em qualquer intervalo $[a,b]$.

Assim, podemos usar o Lema 2.28, então temos

$$\langle T\dot{\alpha}S, \xi\rangle = \langle (\mathrm{D}T)F + T(\mathrm{D}F) - (\mathrm{D}T)F + (T*\alpha)f, \xi\rangle = \langle T(\mathrm{D}F) + (T*\alpha)f, \xi\rangle,$$

para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ com $\mathrm{spt}(\xi) \subset (a,b)$. Portanto, os valores de $T\dot{\alpha}S$ dados pelas fórmulas (2.7) e (2.10) são os mesmos. □

Usaremos a fórmula (2.10) para calcular o próximo exemplo.

Exemplo 2.31. Calcularemos $H\dot{\alpha}H$, temos que $H \in \mathscr{D}'^{-1}(\mathbb{R})$ e $H = H + 0 \in \mathscr{L}^1_{loc} \oplus \mathscr{D}'_\mu$. Observe que para

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0; \\ t, & t > 0, \end{cases}$$

temos que $\mathrm{D}F = H$. Dado $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{spt}(\xi) \subset (a,b)$ com $a, b \in \mathbb{R}$. Considere $0 \in (a,b)$ (os outros casos são análogos), então

$$\langle HF, \xi\rangle = \int_a^b H(t)F(t)\xi(t)\mathrm{d}t = \int_0^b t\xi(t)\mathrm{d}t = \int_a^b F(t)\xi(t)\mathrm{d}t = \langle F, \xi\rangle$$

e

$$\langle (\mathrm{D}H)F, \xi\rangle = \langle \delta, F\xi\rangle = 0\xi(0) = \langle 0, F\xi\rangle.$$

Daí, para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, temos

$$\begin{aligned}\langle H_{\dot{\alpha}}H,\xi\rangle &= \langle \mathrm{D}(HF)-(\mathrm{D}H)F+(H*\alpha)0,\xi\rangle = \langle \mathrm{D}(HF)-\delta F,\xi\rangle \\ &= \langle \mathrm{D}(HF),\xi\rangle - \langle \delta F,\xi\rangle = \langle \mathrm{D}(F),\xi\rangle \\ &= \langle H,\xi\rangle,\end{aligned}$$

o que implica que $H_{\dot{\alpha}}H = H$.

Definiremos a terceira fórmula do α-produto que é consistente com o produto de distribuição por uma função $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Seja $\mathscr{D}'_c(\mathbb{R}) \subset \mathscr{D}'_\mu(\mathbb{R})$ o espaço das distribuições cujo suporte é no máximo enumerável.

Definição 2.32. Sejam $T \in \mathscr{D}'^0(\mathbb{R}) \cap \mathscr{D}'_\mu(\mathbb{R})$ e $S \in \mathscr{L}^1_{loc} \oplus \mathscr{D}'_c$ com $\mathrm{D}S \in \mathscr{L}^1_{loc} \oplus \mathscr{D}'_c$. Definimos a terceira fórmula do α-produto $T_{\dot{\alpha}}S$ por

$$T_{\dot{\alpha}}S = \mathrm{D}(Y_{\dot{\alpha}}S) - Y_{\dot{\alpha}}(\mathrm{D}S), \tag{2.13}$$

sendo $Y \in \mathscr{D}'^{-1}(\mathbb{R})$ é tal que $\mathrm{D}Y = T$.

Os α-produtos $Y_{\dot{\alpha}}S$ e $Y_{\dot{\alpha}}(\mathrm{D}S)$ são supostamente calculados pelas fórmulas (2.7) e (2.10). A consistência desta definição segue do seguinte resultado.

Teorema 2.33. *O α-produto $T_{\dot{\alpha}}S$ dado pela fórmula* (2.13) *é independente da escolha de $Y \in \mathscr{D}'^{-1}(\mathbb{R})$ tal que* $\mathrm{D}Y = T$.

Demonstração. Se $Y, Y_1 \in \mathscr{D}'^{-1}(\mathbb{R})$ são tais que $\mathrm{D}Y = T$ e $\mathrm{D}Y_1 = T$. Então, para toda $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ temos que

$$\int_{\mathbb{R}} (\mathrm{D}Y - \mathrm{D}Y_1)(t)\xi(t)\mathrm{d}t = 0,$$

o que implica que $\mathrm{D}(Y - Y_1) = 0$, então $Y - Y_1$ é uma constante no sentido de distribuições. Assim, provaremos que o valor de $T_{\dot{\alpha}}S$ dado pela terceira fórmula (2.13) não muda se substituirmos Y por $Y_1 + C$ sendo C uma constante. De fato, para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ e usando as propriedades dos α-produtos (2.7) ou (2.10), temos

$$\begin{aligned}\langle T_{\dot{\alpha}}S,\xi\rangle &= \langle \mathrm{D}(Y_{\dot{\alpha}}S) - Y_{\dot{\alpha}}(\mathrm{D}S),\xi\rangle = \langle \mathrm{D}[(Y_1+C)_{\dot{\alpha}}S] - (Y_1+C)_{\dot{\alpha}}(\mathrm{D}S),\xi\rangle \\ &= \langle \mathrm{D}(Y_{1\dot{\alpha}}S) + C_{\dot{\alpha}}(\mathrm{D}S) - Y_{1\dot{\alpha}}(\mathrm{D}S) - C_{\dot{\alpha}}(\mathrm{D}S),\xi\rangle \\ &= \langle \mathrm{D}(Y_{1\dot{\alpha}}S) - Y_{1\dot{\alpha}}(\mathrm{D}S),\xi\rangle.\end{aligned}$$

□

Se $T \in \mathscr{D}'^{-1}(\mathbb{R})$ e $T \in \mathscr{D}'_\mu(\mathbb{R})$, temos que $T = 0$ no sentido de distribuições. De fato, seja $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ qualquer com $\mathrm{spt}(\xi) \subset \mathbb{R} - \mathrm{supp}(T)$. Então,

$$\int_{\mathbb{R}} T\xi\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}-\mathrm{supp}(T)} T\xi\mathrm{d}t + \int_{\mathrm{supp}(T)} T\xi\mathrm{d}t = 0,$$

pois, $T \in \mathscr{D}'_\mu(\mathbb{R})$ e $T = 0$ em $\mathbb{R} - \mathrm{supp}(T)$, o que implica que $T = 0$. Pelas fórmulas (2.7) e (2.13), temos que $T_{\dot{\alpha}}S = 0$. Assim, a compatibilidade dos α-produtos (2.7) e (2.13) é direta para este caso.

Para compatibilidade das fórmulas (2.7) e (2.13) precisamos do seguinte lema:

Lema 2.34. *Sejam* $f, f_1 \in \mathscr{D}'_c(\mathbb{R})$, $\beta \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ *e* $v \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$. *Então, se* $\mathrm{D}(\beta + f) = v + f_1$ *temos necessariamente* $\mathrm{D}\beta = v$ *e* $\mathrm{D}f = f_1$.

Demonstração. Se $\mathrm{D}(\beta + f) = v + f_1$, então

$$\int_{\mathbb{R}} (\mathrm{D}\beta - v)\xi \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} (f_1 - \mathrm{D}f)\xi \mathrm{d}t,$$

para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Como $f \in \mathscr{D}'_c(\mathbb{R})$ e $\mathrm{supp}(\mathrm{D}f) \subset \mathrm{supp}(f)$, temos que $\mathrm{supp}(\mathrm{D}f)$ é no máximo enumerável e com isso, $f_1 - \mathrm{D}f \in \mathscr{D}'_c(\mathbb{R}) \subset \mathscr{D}'_\mu(\mathbb{R})$.

Considere $\Omega = \mathbb{R} \backslash \mathrm{supp}(f_1 - \mathrm{D}f)$ um conjunto aberto, então temos

$$\int_{\mathbb{R}} (f_1 - \mathrm{D}f)\xi \mathrm{d}t = 0,$$

para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, pois $f_1 - \mathrm{D}f|_\Omega = 0$. Daí,

$$\int_{\mathbb{R}} (\mathrm{D}\beta - v)\xi \mathrm{d}t = 0,$$

para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, então $\mathrm{D}\beta = v$ em Ω. Concluímos pelo Teorema Fundamental do Cálculo para Integral de Lebesgue em [17] que β é absolutamente contínua para cada intervalo compacto de Ω e $\beta' = v$ em quase todos os pontos de Ω. Seja $\tilde{v}$ tal que $\mathrm{D}\tilde{v} = v$, então $\mathrm{D}(\beta - \tilde{v}) = f_1 - \mathrm{D}f$, tome $\eta = \beta - \tilde{v}$. Assim, $\mathrm{D}\eta = f_1 - \mathrm{D}f \in \mathscr{D}'_c(\mathbb{R})$ e $\mathrm{D}\eta = 0$ em Ω.

Por outro lado, $\Omega \subset \mathbb{R}$ é a união de intervalos abertos I_i (no máximo enumerável). Logo, $\mathrm{D}\eta = 0$ em cada I_i, então η é constante em cada I_i. Mas, η é uma função contínua em cada intervalo fechado $\overline{I}_i$, o que implica que η é constante em cada $\overline{I}_i$ e assume valores em um conjunto no máximo enumerável. Daí, segue que $\eta(\mathbb{R}) = \{k\}$ sendo k constante. Então, $\beta - \tilde{v} = k$, $\mathrm{D}\beta - \mathrm{D}\tilde{v} = 0$, $\mathrm{D}\beta = v$ e $\mathrm{D}f = f_1$. □

Observação 2.35. A continuidade de β é essencial. De fato, se $H = \beta$, então $\mathrm{D}(H + 0) = 0 + \delta$ e não temos $\mathrm{D}H = 0$ ou $\mathrm{D}0 = \delta$.

Teorema 2.36. *Sejam* $T \in \mathscr{D}'^0(\mathbb{R}) \cap \mathscr{D}'_\mu(\mathbb{R})$ *e* $S \in (\mathscr{C}^p \oplus \mathscr{D}'_\mu) \cap (\mathscr{L}^1_{loc} \oplus \mathscr{D}'_c)$ *com* $\mathrm{D}S \in \mathscr{L}^1_{loc} \oplus \mathscr{D}'_c$. *Então, o valor de* $T_{\dot{\alpha}}S$ *dado pelas fórmulas* (2.7) *e* (2.13) *são o mesmos.*

Demonstração. Como $\mathscr{D}'_c(\mathbb{R}) \subset \mathscr{D}'_\mu(\mathbb{R})$ e $\mathscr{C}^p(\mathbb{R}) \subset \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$, temos que $(\mathscr{C}^p \oplus \mathscr{D}'_\mu) \cap (\mathscr{L}^1_{loc} \oplus \mathscr{D}'_c) = \mathscr{C}^p \oplus \mathscr{D}'_c$. Assim, seja $S = \beta + f$ com $\beta \in \mathscr{C}^p$ e $f \in \mathscr{D}'_c$. Pela fórmula (2.13) temos

$$\langle T_{\dot{\alpha}}S, \xi \rangle = \langle \mathrm{D}(Y_{\dot{\alpha}}S) - Y_{\dot{\alpha}}(\mathrm{D}S), \xi \rangle = \langle \mathrm{D}[Y_{\dot{\alpha}}(\beta + f)] - Y_{\dot{\alpha}}(\mathrm{D}\beta + \mathrm{D}f), \xi \rangle,$$

para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, sendo $Y \in \mathscr{D}'^{-1}(\mathbb{R})$ é tal que $\mathrm{D}Y = T$. Como $\mathrm{D}S \in \mathscr{L}^1_{loc} \oplus \mathscr{D}'_c$ podemos escrever $\mathrm{D}S = \mathrm{D}\beta + \mathrm{D}f = v + f_1$ com $v \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ e $f_1 \in \mathscr{D}'_c(\mathbb{R})$. Então, pelo Lema 2.34, concluímos que $\mathrm{D}\beta = v \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$. Assim, β é uma função absolutamente contínua e como $Y \in \mathscr{D}'^{-1}(\mathbb{R})$ e $S =$

$\beta + f \in \mathscr{L}^1_{loc} \oplus \mathscr{D}'_\mu$ podemos usar a fórmula (2.7) ou (2.10) para calcular $Y_{\dot\alpha}(\beta + f)$ e $Y_{\dot\alpha}(\mathrm{D}\beta + \mathrm{D}f)$. Então, para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ temos

$$\begin{aligned}\langle T_{\dot\alpha} S, \xi\rangle &= \langle \mathrm{D}[Y\beta + (Y*\alpha)f] - Y(\mathrm{D}\beta) - (Y*\alpha)\mathrm{D}f, \xi\rangle \\ &= \langle \mathrm{D}(Y\beta) + \mathrm{D}[(Y*\alpha)f] - Y(\mathrm{D}\beta) - (Y*\alpha)\mathrm{D}f, \xi\rangle,\end{aligned}$$

pelo Lema 2.28, podemos aplicar a regra de Leibniz em $\mathrm{D}(Y\beta)$ e também em $\mathrm{D}[(Y*\alpha)f]$ (vale para fórmula (2.5)), então

$$\begin{aligned}\langle T_{\dot\alpha} S, \xi\rangle &= \langle \mathrm{D}(Y\beta) + \mathrm{D}[(Y*\alpha)f] - Y(\mathrm{D}\beta) - (Y*\alpha)\mathrm{D}f, \xi\rangle \\ &= \langle (\mathrm{D}Y)\beta + Y(\mathrm{D}\beta) + [\mathrm{D}(Y*\alpha)]f + (Y*\alpha)\mathrm{D}f - Y(\mathrm{D}\beta) - (Y*\alpha)\mathrm{D}f, \xi\rangle.\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que $T_{\dot\alpha} S = T\beta + (T*\alpha)f$, pois $\mathrm{D}Y = T$ e $[\mathrm{D}(Y*\alpha)]f = (\mathrm{D}Y*\alpha)f$. □

Usaremos a fórmula (2.13) para calcular o próximo exemplo.

Exemplo 2.37. Vamos calcular $\delta_{\dot\alpha} H$, $\delta \in \mathscr{D}'^0(\mathbb{R}) \cap \mathscr{D}'_\mu(\mathbb{R})$ e $H \in \mathscr{L}^1_{loc} \oplus \mathscr{D}'_c$ com $\mathrm{D}H = 0 + \delta \in \mathscr{L}^1_{loc} \oplus \mathscr{D}'_c$, então para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ temos que

$$\langle \delta_{\dot\alpha} H, \xi\rangle = \langle \mathrm{D}(H_{\dot\alpha} H) - H_{\dot\alpha}(\mathrm{D}H), \xi\rangle,$$

sendo $Y = H \in \mathscr{D}'^{-1}(\mathbb{R})$ e $\mathrm{D}H = \delta$. Precisamos, calcular $H_{\dot\alpha}(\mathrm{D}H) = H_{\dot\alpha}\delta$, usaremos a fórmula (2.5), então temos

$$H_{\dot\alpha}\delta = (H*\alpha)\delta = \left(\int_{\mathbb{R}} H(t)\alpha(-t)\mathrm{d}t\right)\delta = (1-q)\delta, \tag{2.14}$$

sendo $q = \displaystyle\int_0^{+\infty} \alpha(t)\mathrm{d}t$. Pelo Exemplo 2.31, temos que $H_{\dot\alpha} H = H$. Logo,

$$\langle \delta_{\dot\alpha} H, \xi\rangle = \langle \delta - (1-q)\delta, \xi\rangle = \langle q\delta, \xi\rangle,$$

para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, então $\delta_{\dot\alpha} H = q\delta$.

2.1.5 Potência e composição de distribuições

Vamos definir o conceito de α-potência que foram analisados em [30, 32].

Seja $\mathscr{M} \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ um conjunto das distribuições fechadas para α-produto, isto é, se $T_1, T_2 \in \mathscr{M}$, então $T_{1\dot\alpha} T_2$ está bem definido e $T_{1\dot\alpha} T_2 \in \mathscr{M}$. Para cada $T \in \mathscr{M}$ e $n \in \mathbb{N}$, a α-potência $T^n_{\dot\alpha}$ é definida pela relação de recorrência

$$T^n_{\dot\alpha} = (T^{n-1}_{\dot\alpha})_{\dot\alpha} T, \quad \text{para} \quad n \geq 1, \quad \text{com} \quad T^0_{\dot\alpha} = 1 \quad \text{para} \quad T \neq 0, \tag{2.15}$$

certamente, se $0 \in \mathscr{M}$, $0^n_{\dot\alpha} = 0$ para $n \geq 1$. Como os produtos de distribuições do Sarrico são consistentes com os produtos de distribuições por funções quando estas são colocadas no lado direito, temos que $\beta^n_{\dot\alpha} = \beta^n$, para toda $\beta \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}$. Logo, esta definição coincide com as potências usuais de funções $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$. Em geral, se $T \in \mathscr{D}'^{-1}(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}$, então $T^n_{\dot\alpha} = T^n$ também é satisfeito.

Em particular, se $\mathscr{M}$ é tal que $\tau_y T \in \mathscr{M}$ para todo $T \in \mathscr{M}$ e todo $y \in \mathbb{R}$, então também segue que $(\tau_y T)^n_{\dot{\alpha}} = \tau_y(T^n_{\dot{\alpha}})$. A prova pode ser feita por indução, para $n = 1$ é trivial. Agora, suponha que vale para $n = k$, ou seja, $(\tau_y T)^k_{\dot{\alpha}} = \tau_y(T^k_{\dot{\alpha}})$. Então, para $n = k+1$ temos que

$$(\tau_y T)^{k+1}_{\dot{\alpha}} = (\tau_y T_{\dot{\alpha}})^k_{\dot{\alpha}}(\tau_y T) = \tau_y(T^k_{\dot{\alpha}})_{\dot{\alpha}}(\tau_y T) = \tau_y(T^{k+1}_{\dot{\alpha}})$$

no qual usamos a Proposição 2.23. A partir de agora, suponha que α fixo e denote $T^n_{\dot{\alpha}}$ por T^n para simplificar a notação.

Considere o conjunto $\mathscr{M} = \{a + (b-a)H + m\delta : a, b, m \in \mathbb{C}\}$. Claramente, $\mathscr{M} \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Além disso, $\mathscr{M}$ é um conjunto fechado para o α-produto, pois o α-produto é bilinear sobre $\mathbb{C}$ e devido aos Exemplos 2.31, 2.37 e a

$$\delta_{\dot{\alpha}}\delta = (\delta * \alpha)\delta = \alpha(0)\delta. \tag{2.16}$$

Para este conjunto, as α-potências estão bem definidas e podem ser calculadas usando a seguinte proposição.

Proposição 2.38. *Dado $\alpha \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, sejam $a, b, m \in \mathbb{C}$, $p = \int_{-\infty}^{0} \alpha(t)\mathrm{d}t$, $q = \int_{0}^{+\infty} \alpha(t)\mathrm{d}t$ e $\lambda = \alpha(0)m + (b-a)q$. Então,*

$$[a + (b-a)H + m\delta]^n = a^n + (b^n - a^n)H + m[P_{n-1}(a+\lambda)]\delta, \tag{2.17}$$

sendo P_{n-1} é um polinômio definido pela relação de recorrência $P_0(t) = 1$ e para $n \geq 1$, $P_n(t) = tP_{n-1}(t) + pb^n + qa^n$.

A demonstração pode ser encontrada em [32].

Seja $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função inteira. Então, temos

$$\phi(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n + \cdots, \quad \forall s \in \mathbb{C},$$

sendo $a_n = \dfrac{\phi^{(n)}(0)}{n!}$ um sequência de números complexos.

Se $T \in \mathscr{M}$, definimos a composição $\phi \circ T$ por

$$\phi \circ T = a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + \cdots + a_n T^n + \cdots, \tag{2.18}$$

quando a série $\sum_{n=0}^{k} a_n T^n$ com $k \in \mathbb{N}$ converge em $\mathscr{D}'(\mathbb{C})$.

Esta definição é consistente com a composição usual $\phi \circ T$, se $T \in \mathscr{M}$ é uma função. Além disso, se $\mathscr{M}$ é tal que $\tau_a T \in \mathscr{M}$ para todo $T \in \mathscr{M}$ e todo $a \in \mathbb{R}$, temos

$$\tau_a(\phi \circ T) = \tau_a(a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + \cdots) = a_0 + a_1 \tau_a T + a_2(\tau_a T)^2 + \cdots = \phi \circ (\tau_a T),$$

se $\phi \circ T$ ou $\phi \circ (\tau_a T)$ são bem definidos.

Podemos encontrar outros resultados relacionados a composição de função inteira com distribuição em [32].

2.2 O conceito de α-solução

Nesta seção, apresentamos o conceito de α-solução e o relacionamos com o conceito de solução clássica.

Seja $\mathscr{F}([0,+\infty)) := \mathscr{C}^1([0,+\infty),\mathscr{D}'(\mathbb{R}))$, isto é, se $\tilde{u} \in \mathscr{F}([0,+\infty))$, então $\tilde{u} : [0,+\infty) \subset \mathbb{R} \to \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ é uma função continuamente diferenciável e $\tilde{u}(t) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ no sentido da topologia usual de $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Para todo $t \in [0,+\infty)$, a notação $[\tilde{u}(t)](x)$ é algumas vezes usada para explicitar que a distribuição $\tilde{u}(t)$ atua nas funções $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ que depende de x.

Seja $\Sigma([0,+\infty))$ o espaço das funções $u : \mathbb{R}\times[0,+\infty) \to \mathbb{C}$ tal que:

a. Para cada $t \in [0,+\infty)$, $u(\cdot,t) \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$;

b. $\tilde{u} : [0,\infty) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, definida por $[\tilde{u}(t)](x) = u(x,t) \in \mathscr{F}([0,+\infty))$.

Então, para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ e todo $t \in [0,+\infty)$, temos que

$$\langle \tilde{u}(t),\xi\rangle = \int_{\mathbb{R}} [\tilde{u}(t)](x)\xi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} u(x,t)\xi(x)\mathrm{d}x = \langle u,\xi\rangle . \tag{2.19}$$

O $\Sigma([0,+\infty))$ está associando $u(x,t)$ à distribuição $[\tilde{u}(t)](x)$.

A aplicação $i : \Sigma([0,+\infty)) \to \mathscr{F}([0,+\infty))$ definida por $i(u(x,t)) = [\tilde{u}(t)](x) = u(x,t)$, identifica qualquer função $u \in \Sigma([0,+\infty))$ com uma distribuição $\tilde{u} \in \mathscr{F}([0,+\infty))$. Além disso, i é uma injeção natural. De fato, se $i(u_1(x,t)) = i(u_2(x,t))$, ou seja, $[\tilde{u}_1(t)](x) = [\tilde{u}_2(t)](x)$, como $u_1,u_2 \in \Sigma([0,+\infty))$ temos que

$$[\tilde{u}_1(t)](\xi) = u_1(x,t) \quad \text{e} \quad [\tilde{u}_2(t)](\xi) = u_2(x,t)$$

para cada $t \in [0,+\infty)$ e $u_1(\cdot,t),u_2(\cdot,t) \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$, então $u_1 = u_2$ em quase todos os pontos $t \in [0,+\infty)$.

Como $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}\times[0,+\infty)) \subset \Sigma([0,+\infty))$, as seguintes inclusões são válidas

$$\mathscr{C}^1(\mathbb{R}\times[0,+\infty)) \subset \Sigma([0,+\infty)) \subset \mathscr{F}([0,+\infty)).$$

Assim, identificando $(\rho,u) \to (\tilde{\rho},\tilde{u})$, os sistemas (1) e (2) tornam-se

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\tilde{u}(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{k+1}\mathrm{D}[\tilde{u}(t)^k_{\dot{\alpha}}\tilde{u}(t)] = -\beta\tilde{u}(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{\rho}(t)}{\mathrm{d}t} + \mathrm{D}\left[\tilde{\rho}(t)_{\dot{\alpha}}\tilde{u}(t)^k\right] = 0, \end{cases} \tag{2.20}$$

e

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\tilde{u}(t)}{\mathrm{d}t} + \mathrm{D}[\tilde{u}(t)^k_{\dot{\alpha}}\tilde{u}(t)] = \beta\tilde{u}(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{\rho}(t)}{\mathrm{d}t} + (k+1)\mathrm{D}\left[\tilde{\rho}(t)_{\dot{\alpha}}\tilde{u}(t)^k\right] = 0, \end{cases} \tag{2.21}$$

sendo β uma constante positiva e $k \in \mathbb{N}$ um número ímpar.

O modelo de cromatografia de três componentes (5) também pode ser reformulado pela identificação $(u,v,w) \to (\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w})$ na forma

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\tilde{u}(t)}{\mathrm{d}t} + \mathrm{D}\left[\tilde{u}(t) + \left(\dfrac{1}{1+\tilde{u}(t)+\tilde{v}(t)-\tilde{w}(t)}\right)_{\dot{\alpha}} \tilde{u}(t)\right] = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{v}(t)}{\mathrm{d}t} + \mathrm{D}\left[\tilde{v}(t) + \left(\dfrac{1}{1+\tilde{u}(t)+\tilde{v}(t)-\tilde{w}(t)}\right)_{\dot{\alpha}} \tilde{v}(t)\right] = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{w}(t)}{\mathrm{d}t} + \mathrm{D}\left[\tilde{w}(t) + \left(\dfrac{1}{1+\tilde{u}(t)+\tilde{v}(t)-\tilde{w}(t)}\right)_{\dot{\alpha}} \tilde{w}(t)\right] = 0, \end{cases} \tag{2.22}$$

Definição 2.39. Dado $\alpha \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, o par $(\tilde{\rho},\tilde{u}) \in \mathscr{F}([0,+\infty)) \times \mathscr{F}([0,+\infty))$ e a terna $(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w}) \in \mathscr{F}([0,+\infty)) \times \mathscr{F}([0,+\infty)) \times \mathscr{F}([0,+\infty))$ são chamadas de α-soluções dos sistemas (2.20),(2.21) e (2.22) em $[0,+\infty)$, respectivamente, se e somente se as seguintes condições são satisfeitas:

(1) Se os α-produtos que aparecem em (2.20), (2.21) e (2.22) estão bem definidos;

(2) Se os sistemas (2.20), (2.21) e (2.22) são satisfeitos para todo $t \in [0,+\infty)$.

Além disso, $\frac{1}{1+\tilde{u}(t)+\tilde{v}(t)-\tilde{w}(t)} > 0$ em (2.22) é uma função $\mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ para cada $t \in [0,+\infty)$.

Por um lado, se (ρ,u) e (u,v,w) são soluções clássicas para os sistemas (1), (2) e (5) em $\mathbb{R} \times [0,+\infty)$, então o par $(\tilde{\rho},\tilde{u}) \in \mathscr{F}([0,+\infty)) \times \mathscr{F}([0,+\infty))$ e a terna $(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w}) \in \mathscr{F}([0,+\infty)) \times \mathscr{F}([0,+\infty)) \times \mathscr{F}([0,+\infty))$ são α-soluções para os sistemas (2.20), (2.21) e (2.22) em $[0,+\infty)$, para cada $\alpha \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ se

$$[\tilde{\rho}(t)](x) = \rho(x,t), \quad [\tilde{u}(t)](x) = u(x,t), \quad [\tilde{v}(t)](x) = v(x,t) \quad \text{e} \quad [\tilde{w}(t)](x) = w(x,t).$$

Por outro lado, se o par $(\tilde{\rho},\tilde{u}) \in \mathscr{F}([0,+\infty)) \times \mathscr{F}([0,+\infty))$ e a terna $(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w}) \in \mathscr{F}([0,+\infty)) \times \mathscr{F}([0,+\infty)) \times \mathscr{F}([0,+\infty))$ são α-soluções dos sistemas (2.20), (2.21) e (2.22) em $[0,+\infty)$, para $(\rho,u) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}\times[0,+\infty)) \times \mathscr{C}^1(\mathbb{R}\times[0,+\infty))$ e $(u,v,w) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}\times[0,+\infty)) \times \mathscr{C}^1(\mathbb{R}\times[0,+\infty)) \times \mathscr{C}^1(\mathbb{R}\times[0,+\infty))$ satisfazendo

$$[\tilde{\rho}(t)](x) = \rho(x,t), \quad [\tilde{u}(t)](x) = u(x,t), \quad [\tilde{v}(t)](x) = v(x,t) \quad \text{e} \quad [\tilde{w}(t)](x) = w(x,t),$$

então o par (ρ,u) e a terna (u,v,w) são soluções clássicas para os sistemas (1), (2) e (5) em $\mathbb{R} \times [0,+\infty)$. Os resultados acima podem ser concluídos a partir da consistência dos α-produtos com os produtos de distribuições por uma função e também observando que as funções ρ,u,v e w podem ser identificadas como funções continuamente diferenciáveis $\tilde{\rho},\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w} \in \mathscr{F}([0,+\infty))$ definidas por

$$[\tilde{\rho}(t)](x) = \rho(x,t), \quad [\tilde{u}(t)](x) = u(x,t), \quad [\tilde{v}(t)](x) = v(x,t) \quad \text{e} \quad [\tilde{w}(t)](x) = w(x,t).$$

Consequentemente, se $(\tilde{\rho},\tilde{u})$ e $(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w})$ são α-soluções, então identificam (ρ,u) e (u,v,w) como soluções distribucionais e estendem o conceito de solução clássica dos sistemas (1), (2) e (5). Assim, aproveitando esta situação, introduziremos a seguinte definição que amplia ainda mais o conceito de solução clássica.

Definição 2.40. Dado $\alpha \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, quaisquer α-soluções dos sistemas (2.20), (2.21) e (2.22) em $[0,+\infty)$ são chamadas de α-soluções dos sistemas (1), (2) e (5) em $[0,+\infty)$.

Portanto, o conceito de α-solução pode ser identificado com o conceito de solução fraca.

CAPÍTULO 3

A α-solução para o problema de Riemann

Considere o sistema (1) com $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty)$, sendo β uma constante positiva, $k \in \mathbb{N}$ um número ímpar e as incógnitas ρ, u submetidas as condições iniciais (3) com $\rho_{\pm}, u_{\pm} \in \mathbb{R}$ e $\rho\pm > 0$. Pelas identificações $(\rho,u) \to (\tilde{\rho},\tilde{u})$ podemos substituir o sistema (1) pelo (2.20) e as condições iniciais (3) por

$$\begin{cases} \tilde{\rho}\,(0) = \rho_- + (\rho_+ - \rho_-)\,H, \\ \tilde{u}\,(0) = u_- + (u_+ - u_-)\,H. \end{cases} \tag{3.1}$$

Neste capítulo, construiremos as α-soluções $(\tilde{\rho},\tilde{u})$ para o sistema (2.20) com as condições iniciais (3.1) na seguinte forma

$$\begin{cases} \tilde{\rho}\,(t) \,=\, a\,(t) + b\,(t)\,\tau_{\gamma(t)}H + w\,(t)\,\tau_{\gamma(t)}\delta, \\ \tilde{u}\,(t) \,=\, f\,(t) + c\,(t)\,\tau_{\gamma(t)}H, \end{cases} \tag{3.2}$$

em que todas as funções $a,b,w,f,c,\gamma\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ são funções $\mathscr{C}^1([0,+\infty))$.

Suponha que $(\rho_+ - \rho_-)^2 + (u_+ - u_-)^2 \neq 0$, então das equações (3.1) e (3.2) obtemos que condições inicias das funções $\mathscr{C}^1([0,+\infty))$ mencionadas acima são dadas por

$$a\,(0) = \rho_-, \quad b\,(0) = \rho_+ - \rho_-, \quad f\,(0) = u_-, \quad c\,(0) = u_+ - u_-, \quad w\,(0) = 0 \quad \text{e} \quad \gamma(0) = 0, \tag{3.3}$$

pois, temos

$$\tilde{\rho}\,(0) = a\,(0) + b\,(0)\,\tau_{\gamma(0)}H + w\,(0)\,\tau_{\gamma(0)}\delta = \rho_- + (\rho_+ - \rho_-)\,H,$$

o que implica que $a\,(0) = \rho_-$, $b\,(0) = \rho_+ - \rho_-$, $\gamma(0) = 0$ e $w\,(0) = 0$. Como

$$\tilde{u}\,(0) = f\,(0) + c\,(0)\,\tau_{\gamma(0)}H = u_- + (u_+ - u_-)\,H,$$

concluímos que $f\,(0) = u_-$ e $c\,(0) = u_+ - u_-$.

A variável de estado ρ no sistema (1) representa a densidade, logo devemos considerar $\rho \geq 0$ pelo ponto de vista físico. Então, seja $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ com $\xi(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ por (2.19), temos

$$\langle \tilde{\rho}(t), \xi \rangle = \int_K \rho(x,t)\xi(x)\mathrm{d}x \geq 0,$$

para cada compacto $K \subset \mathbb{R}$ e

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\rho}(t), \xi \rangle &= \left\langle a(t) + b(t)\, \tau_{\gamma(t)} H + w(t)\, \tau_{\gamma(t)} \delta, \xi \right\rangle \\ &= a(t) \int_{\mathbb{R}} \xi(x) \mathrm{d}x + b(t) \int_{\gamma(t)}^{+\infty} \xi(x) \mathrm{d}x + w(t) \xi(\gamma(t)).\end{aligned}$$

Se $\operatorname{supp}(\xi) \subset (-\infty, \gamma(t))$, temos

$$\langle \tilde{\rho}(t), \xi \rangle = a(t) \int_{\operatorname{supp}(\xi)} \xi(x) \mathrm{d}x \geq 0,$$

como $\int_{\operatorname{supp}(\xi)} \xi(x) \mathrm{d}x \geq 0$ concluímos que $a(t) \geq 0$, para todo t. Mas, se $\operatorname{supp}(\xi) \subset (\gamma(t), +\infty)$, temos

$$\langle \tilde{\rho}(t), \xi \rangle = (a(t) + b(t)) \int_{\operatorname{supp}(\xi)} \xi(x) \mathrm{d}x \geq 0,$$

então $a(t) + b(t) \geq 0$, para todo t.

Agora, se $\operatorname{supp}(\xi) \subset (\gamma(t) - \varepsilon, \gamma(t) + \varepsilon)$, para $\varepsilon > 0$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}$, temos

$$\langle \tilde{\rho}(t), \xi \rangle = a(t) \int_{\gamma(t)-\varepsilon}^{\gamma(t)} \xi(x) \mathrm{d}x + b(t) \int_{\gamma(t)}^{\gamma(t)+\varepsilon} \xi(x) \mathrm{d}x + w(t) \xi(\gamma(t)),$$

tomando $\varepsilon \to 0$ obtemos que $\lim_{\varepsilon \to 0} \langle \tilde{\rho}(t), \xi \rangle = w(t) \xi(\gamma(t)) \geq 0$, então $w(t) \geq 0$, para cada t. Portanto, as condições $a(t) \geq 0$, $a(t) + b(t) \geq 0$ e $w(t) \geq 0$ devem ser satisfeitas para todo $t \in [0, +\infty)$. Está α-solução $(\tilde{\rho}, \tilde{u})$ pertence ao subespaço fechado $\tilde{W} = \tilde{P} \times \tilde{U} \in \mathscr{F} \times \mathscr{F}$ definido por

$$\begin{aligned}\tilde{P} &= \left\{ a(t) + b(t)\, \tau_{\gamma(t)} H + w(t)\, \tau_{\gamma(t)} \delta : \; a, b, w \text{ e } \gamma \in \mathscr{C}^1([0, +\infty)) \right\}, \\ \tilde{U} &= \left\{ f(t) + c(t)\, \tau_{\gamma(t)} H : \; f, c \text{ e } \gamma \in \mathscr{C}^1([0, +\infty)) \right\}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

O seguinte teorema descreve as α-soluções para o sistema (2.20) e (3.1).

Teorema 3.1. *Sejam $u_+ \leq u_-$ e $\alpha \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, $\alpha \geq 0$ com $\int_{\mathbb{R}} \alpha(t) \mathrm{d}t = 1$. Então, se $u_+ < u_-$ e*

$$q = \frac{\sigma - u_-^k}{u_+^k - u_-^k}. \tag{3.5}$$

O problema (2.20) e (3.1) tem uma única α-solução $(\tilde{\rho}, \tilde{u}) \in \tilde{W}$ dada por

$$\begin{cases} \tilde{\rho}(t) = \rho_- + (\rho_+ - \rho_-)\, \tau_{\gamma(t)} H + \dfrac{w_0}{\beta k}(1 - e^{-\beta k t}) \tau_{\gamma(t)} \delta, \\ \tilde{u}(t) = \left[u_- + (u_+ - u_-)\, \tau_{\gamma(t)} H \right] e^{-\beta t}, \end{cases} \tag{3.6}$$

sendo β uma constante positiva, $k \in \mathbb{N}$ um número ímpar, com

$$\gamma(t) = \frac{\sigma}{\beta k}(1 - e^{-\beta k t}), \;\; \sigma = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} u_+^{k-j} u_-^j \tag{3.7}$$

e

$$w_0 = \sigma(\rho_+ - \rho_+) - (\rho_+ u_+^k - \rho_- u_-^k). \tag{3.8}$$

Se $u_+ = u_-$, a descontinuidade $\gamma(t) = \dfrac{u_-^k}{\beta k}(1 - e^{-\beta k t})$ para todo α.

Demonstração. Suponha que $(\tilde{\rho},\tilde{u}) \in \tilde{W}$, então da forma $\tilde{u}$ de (3.2) temos que

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{u}(t)}{\mathrm{d}t} = f'(t) + c'(t)\tau_{\gamma(t)}H - c(t)\gamma'(t)\tau_{\gamma(t)}\delta, \tag{3.9}$$

para cada t. De fato, sejam $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ com $t \in [0,+\infty)$ fixo e $h \in \mathbb{R}$ tal que $t+h \in [0,+\infty)$, então

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\tilde{u}(t+h)-\tilde{u}(t)}{h},\xi \right\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right)\xi(x)\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{c(t+h)\tau_{\gamma(t+h)}H(x) - c(t)\tau_{\gamma(t)}H(x)}{h}\right)\xi(x)\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{3.10}$$

somando e subtraindo $(c(t)\tau_{\gamma(t+h)}H(x))$ na segunda integral da equação (3.10), obtemos

$$\begin{aligned}&\left(\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right)\int_{\mathbb{R}}\xi(x)\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}}\left(\frac{c(t+h)-c(t)}{h}\right)\tau_{\gamma(t+h)}H(x)\xi(x)\mathrm{d}x \\ &+\frac{c(t)}{h}\left[\int_{\mathbb{R}}\tau_{\gamma(t+h)}H(x)\xi(x)\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}}\tau_{\gamma(t)}H(x)\xi(x)\mathrm{d}x\right].\end{aligned} \tag{3.11}$$

Agora, fazendo a mudança de variável $y = x - \gamma(t+h)$ na segunda integral de (3.11) temos

$$\begin{aligned}&\left(\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right)\int_{\mathbb{R}}\xi(x)\mathrm{d}x + \left(\frac{c(t+h)-c(t)}{h}\right)\int_{\mathbb{R}}H(y)\xi(y+\gamma(t+h))\mathrm{d}y \\ &+c(t)\left[\int_{\mathbb{R}}H(x)\left(\frac{\xi(x+\gamma(t+h))-\xi(x+\gamma(t))}{h}\right)\mathrm{d}z\right],\end{aligned} \tag{3.12}$$

tomando $h \to 0$ em (3.12), pelo Teorema da Convergência Dominada e as propriedades de limite temos que

$$\begin{aligned}&f'(t)\int_{\mathbb{R}}\xi(x)\mathrm{d}x + c'(t)\int_{\mathbb{R}}H(y)\xi(y+\gamma(t))\mathrm{d}y + c(t)\left[\int_{\mathbb{R}}H(x)\xi'(x+\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}z\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}}(f'(t)+c'(t)H(x-\gamma(t)))\xi(x)\mathrm{d}x - c(t)\gamma'(t)\int_{\mathbb{R}}\delta(x-\gamma(t))\xi(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Assim, concluímos que para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}\tilde{u}(t)}{\mathrm{d}t},\xi \right\rangle = \left\langle f'(t) + c'(t)\tau_{\gamma(t)}H - c(t)\gamma'(t)\tau_{\gamma(t)}\delta, \xi \right\rangle.$$

Por outro lado, para todo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, temos

$$\left\langle \tilde{u}(t)^k_{\dot{\alpha}}\tilde{u}(t),\xi \right\rangle = \left\langle \tilde{u}(t)^{k+1},\xi \right\rangle = \left\langle f(t)^{k+1} + [(f(t)+c(t))^{k+1} - f(t)^{k+1}]\tau_{\gamma(t)}H,\xi \right\rangle$$

em que aplicamos (2.15) e a Proposição 2.38, com $a = f(t)$ e $b = f(t)+c(t)$.

Assim,

$$\tilde{u}(t)^{k+1} = f(t)^{k+1} + [(f(t)+c(t))^{k+1} - f(t)^{k+1}]\tau_{\gamma(t)}H. \tag{3.13}$$

Então, no sentido distribucional temos que

$$\mathrm{D}[\tilde{u}(t)^{k+1}] = [(f(t)+c(t))^{k+1} - f(t)^{k+1}]\tau_{\gamma(t)}\delta. \tag{3.14}$$

Associando (3.9) e (3.14), obtemos da primeira equação de (2.20) que

$$\begin{aligned} & f'(t)+\beta f(t)+\{c'(t)+\beta c(t)\}\,\tau_{\gamma(t)}H \\ & +\left\{\frac{(f(t)+c(t))^{k+1}-f(t)^{k+1}}{k+1}-c(t)\gamma'(t)\right\}\tau_{\gamma(t)}\delta=0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Considere $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ com $\xi(x)\neq 0$, para todo $x\in\mathbb{R}$. Se $\operatorname{supp}(\xi)\subset(-\infty,\gamma(t))$ por (3.15) temos

$$\left(f'(t)+\beta f(t)\right)\int_{\operatorname{supp}(\xi)}\xi(x)\mathrm{d}x=0$$

e concluímos que $f'(t)+\beta f(t)=0$, para cada $t\in[0,+\infty)$ em (3.15). Se $\operatorname{supp}(\xi)\subset(\gamma(t),+\infty)$ por (3.15) temos

$$\left(f'(t)+\beta f(t)+c'(t)+\beta c(t)\right)\int_{\operatorname{supp}(\xi)}\xi(x)\mathrm{d}x=0,$$

o que implica que $f'(t)+\beta f(t)+c'(t)+\beta c(t)=0$, então $c'(t)+\beta c(t)=0$ para cada $t\in[0,+\infty)$ em (3.15). Desse modo, a equação (3.15) torna-se

$$\left\{\frac{(f(t)+c(t))^{k+1}-f(t)^{k+1}}{k+1}-c(t)\gamma'(t)\right\}\tau_{\gamma(t)}\delta=0. \tag{3.16}$$

Assim, se $\xi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$ é uma função constante em $\gamma(t)$, temos que

$$\left\{\frac{(f(t)+c(t))^{k+1}-f(t)^{k+1}}{k+1}-c(t)\gamma'(t)\right\}\xi(\gamma(t))=0,$$

o que implica que $\frac{1}{k+1}[(f(t)+c(t))^{k+1}-f(t)^{k+1}]-c(t)\gamma'(t)=0$, então temos

$$\begin{cases} f'(t)+\beta f(t)=0, \\ c'(t)+\beta c(t)=0, \\ \frac{1}{k+1}[(f(t)+c(t))^{k+1}-f(t)^{k+1}]-c(t)\gamma'(t)=0, \end{cases} \tag{3.17}$$

para todo $t\in[0,+\infty)$. Como temos as seguintes condições iniciais $f(0)=u_-$ e $c(0)=u_+-u_-$ de (3.3), podemos concluir que $f(t)=u_-e^{-\beta t}$ e $c(t)=(u_+-u_-)e^{-\beta t}$ para todo t. Com isso, simplificamos a terceira equação de (3.17) por

$$\left(\frac{u_+^{k+1}-u_-^{k+1}}{k+1}\right)e^{-\beta kt}-(u_+-u_-)\gamma'(t)=0. \tag{3.18}$$

Agora, faremos um cálculo similar ao anterior nas equações em (3.2), isto é,

$$\tilde{u}(t)^k=f(t)^k+[(f(t)+c(t))^k-f(t)^k]\tau_{\gamma(t)}H$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(t)_{\dot\alpha}\tilde{u}(t)^k = {} & \left(a(t)+b(t)\,\tau_{\gamma(t)}H+w(t)\,\tau_{\gamma(t)}\delta\right)_{\dot\alpha}\left(f(t)^k+[(f(t)+c(t))^k-f(t)^k]\tau_{\gamma(t)}H\right) \\ = {} & a(t)f^k(t)+a(t)[(f(t)+c(t))^k-f^k(t)]\tau_{\gamma(t)}H+b(t)f^k(t)\tau_{\gamma(t)}H \\ & +b(t)[(f(t)+c(t))^k-f^k(t)]\left(\tau_{\gamma(t)}H\right)_{\dot\alpha}\tau_{\gamma(t)}H+w(t)f^k(t)\tau_{\gamma(t)}\delta \\ & +w(t)[(f(t)+c(t))^k-f^k(t)]\left(\tau_{\gamma(t)}\delta\right)_{\dot\alpha}\tau_{\gamma(t)}H \end{aligned}$$

em que usamos as fórmulas (2.7) e (2.10) para obter

$$1\dot{_\alpha}1 = 1.1 + (1*\alpha)0 = 1.1 = 1, \tag{3.19}$$

$$1\dot{_\alpha}\tau_{\gamma(t)}H = (1*\alpha)\tau_{\gamma(t)}H = \left(\int_{\mathbb{R}} \alpha(t-y)\mathrm{d}t\right)\tau_{\gamma(t)}H = \tau_{\gamma(t)}H = \tau_{\gamma(t)}H\dot{_\alpha}1, \tag{3.20}$$

e

$$1\dot{_\alpha}\tau_{\gamma(t)}\delta = (1*\alpha)\tau_{\gamma(t)}\delta = \left(\int_{\mathbb{R}} \alpha(t-y)\mathrm{d}t\right)\tau_{\gamma(t)}\delta = \tau_{\gamma(t)}\delta = \tau_{\gamma(t)}\delta\dot{_\alpha}1. \tag{3.21}$$

Consequentemente, usando a Proposição 2.23 nos Exemplos 2.31 e 2.37 obtemos

$$\tilde{\rho}(t)\dot{_\alpha}\tilde{u}(t)^k = a(t)f^k(t) + M(t)\tau_{\gamma(t)}H + N(t)\tau_{\gamma(t)}\delta, \tag{3.22}$$

com

$$M(t) = (a(t)+b(t))(f(t)+c(t))^k - a(t)f^k(t) \tag{3.23}$$

e

$$N(t) = w(t)\left(q(f(t)+c(t))^k) + (1-q)f^k(t)\right). \tag{3.24}$$

Segue da forma $\tilde{\rho}$ de (3.2) que

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\rho}(t)}{\mathrm{d}t} = a'(t) + b'(t)\tau_{\gamma(t)}H - b(t)\gamma'(t)\tau_{\gamma(t)}\delta + w'(t)\tau_{\gamma(t)}\delta - w(t)\gamma'(t)\tau_{\gamma'(t)}(\mathrm{D}\delta) \tag{3.25}$$

e

$$\mathrm{D}\left[\tilde{\rho}(t)\dot{_\alpha}\tilde{u}(t)^k\right] = M(t)\tau_{\gamma(t)}\delta + N(t)\tau_{\gamma(t)}(\mathrm{D}\delta). \tag{3.26}$$

Somando (3.25) e (3.26), obtemos que a segunda equação de (2.20) pode ser escrita por

$$\begin{aligned} a'(t) + b'(t)\tau_{\gamma(t)}H + \{M(t)+w'(t)-b(t)\gamma'(t)\}\,\tau_{\gamma(t)}\delta \\ + \{N(t)-w(t)\gamma'(t)\}\,\tau_{\gamma(t)}(\mathrm{D}\delta) = 0. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Considerando $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ e fazendo mesmo análise que foi feito para obter (3.17), concluímos que

$$\begin{cases} a'(t) = 0, \\ b'(t) = 0, \\ M(t) + w'(t) - b(t)\gamma'(t) = 0, \\ N(t) - w(t)\gamma'(t) = 0. \end{cases} \tag{3.28}$$

Pelas condições iniciais em (3.3) podemos concluir que $a(t) = \rho_-$ e $b(t) = \rho_+ - \rho_-$, para todo $t \in [0, +\infty]$. Assim, podemos escrever as equações $M(t)$ e $N(t)$ em (3.23) e (3.24), respectivamente, por

$$M(t) = \left(\rho_+ u_+^k - \rho_- u_-^k\right)e^{-\beta kt} \quad \text{e} \quad N(t) = w(t)\left(u_-^k + q(u_+^k - u_-^k)\right)e^{-\beta kt}. \tag{3.29}$$

Assim, substituindo as funções $b(t)$ e (3.29) na terceira e quarta equação de (3.28) obtemos

$$\begin{cases} (\rho_+ u_+^k - \rho_- u_-^k)e^{-\beta kt} - (\rho_+ - \rho_-)\gamma'(t) + w'(t) = 0, \\ w(t)\left\{\left(u_-^k + q(u_+^k - u_-^k)\right)e^{-\beta kt} - \gamma'(t)\right\} = 0, \end{cases} \tag{3.30}$$

por (3.18) e (3.30) temos

$$\begin{cases} (\rho_+ u_+^k - \rho_- u_-^k)e^{-\beta kt} - (\rho_+ - \rho_-)\gamma'(t) + w'(t) = 0, \\ w(t)\left\{\left(u_-^k + q(u_+^k - u_-^k)\right)e^{-\beta kt} - \gamma'(t)\right\} = 0, \\ \dfrac{(u_+^{k+1} - u_-^{k+1})}{k+1}e^{-\beta kt} - (u_+ - u_-)\gamma'(t) = 0. \end{cases} \tag{3.31}$$

Assim, falta determinar as funções $w(t), \gamma(t) \in \mathscr{C}^1([0,+\infty))$ e a constante indeterminada $q \in [0,1]$ do problema de valor inicial das equações em (3.31) com as condições iniciais $w(0) = 0$ e $\gamma(0) = 0$ em (3.3).

Agora, multiplique a primeira equação de (3.31) por $(u_+ - u_-)$ e a terceira equação de (3.31) por $(\rho_+ - \rho_-)$, então

$$\begin{aligned} (u_+ - u_-)\left(\rho_+ u_+^k - \rho_- u_-^k\right)e^{-\beta kt} - (u_+ - u_-)(\rho_+ - \rho_-)\gamma'(t) \\ + (u_+ - u_-)\,w'(t) = 0 \end{aligned} \tag{3.32}$$

e

$$\frac{(\rho_+ - \rho_-)(u_+^{k+1} - u_-^{k+1})}{k+1}e^{-\beta kt} - (\rho_+ - \rho_-)(u_+ - u_-)\gamma'(t) = 0\ . \tag{3.33}$$

Subtraindo (3.33) e (3.32) temos

$$\left\{\frac{(\rho_+ - \rho_-)(u_+^{k+1} - u_-^{k+1})}{k+1} - (u_+ - u_-)\left(\rho_+ u_+^k - \rho_- u_-^k\right)\right\}e^{-\beta kt} - (u_+ - u_-)\,w'(t) = 0, \tag{3.34}$$

o que equivale

$$\left\{(\rho_+ - \rho_-)\,\sigma\,(u_+ - u_-) - (u_+ - u_-)\left(\rho_+ u_+^k - \rho_- u_-^k\right)\right\}e^{-\beta kt} - (u_+ - u_-)\,w'(t) = 0$$

com $\sigma = \dfrac{1}{k+1}\displaystyle\sum_{j=0}^{k} u_+^{k-j}u_-^j$. Então, obtemos

$$(u_+ - u_-)\left\{\left[(\rho_+ - \rho_-)\,\sigma - \left(\rho_+ u_+^k - \rho_- u_-^k\right)\right]e^{-\beta kt} - w'(t)\right\} = 0. \tag{3.35}$$

Deste modo, a questão deve ser dividida em dois casos $u_+ = u_-$ ou $u_+ \neq u_-$.

1. Primeiro, considere o caso $u_+ = u_-$, então $c(t) = 0$ para todo $t \in [0,+\infty)$. Daí, as equações de (3.31) são transformadas em

$$\begin{cases} (\rho_+ - \rho_-)u_-^k e^{-\beta kt} - (\rho_+ - \rho_-)\gamma'(t) + w'(t) = 0, \\ w(t)\left\{u_-^k e^{-\beta kt} - \gamma'(t)\right\} = 0. \end{cases} \tag{3.36}$$

Supomos que $(\rho_+ - \rho_-)^2 + (u_+ - u_-)^2 \neq 0$, então $\rho_+ \neq \rho_-$ e pela primeira equação de (3.36) temos que

$$w'(t) = (\rho_+ - \rho_-)\left(\gamma'(t) - u_-^k e^{-\beta kt}\right),$$

para todo t. Em virtude da segunda equação de (3.36) temos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} w(t)w'(t) &= w(t)(\rho_+ - \rho_-)\left(\gamma'(t) - u_-^k e^{-\beta kt}\right) \\ &= (\rho_- - \rho_+)w(t)\left(u_-^k e^{-\beta kt} - \gamma'(t)\right) = 0, \end{aligned}$$

para cada $t \geq 0$. Com isso, $\left(w^2(t)\right)' = 2w(t)w'(t) = 0$ para todo $t \geq 0$, então $w^2(t)$ é uma constante, o que implica que $w(t)$ também é uma constante. Precisamente, pela condição inicial $w(0) = 0$ em (3.3), obtemos que $w(t) = 0$ para todo $t \geq 0$ e também vale que $w'(t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Assim, da segunda equação de (3.36) temos

$$(\rho_+ - \rho_-)\left(\gamma'(t) - u_-^k e^{-\beta kt}\right) = 0,$$

o que implica que $\gamma'(t) = u_-^k e^{-\beta kt}$, pois $\rho_+ \neq \rho_-$. Então, pela condição inicial $\gamma(0) = 0$ em (3.3) temos que $\gamma(t) = \dfrac{u_-^k}{\beta k}(1 - e^{-\beta kt})$.

Para este caso $u_+ = u_-$ podemos ver de (3.31) que a constante indeterminada q deve ser escolhida arbitrariamente, pois $w(t) = 0$ para todo $t \geq 0$.

2. Considere o caso $u_+ \neq u_-$, então temos de (3.35) que

$$\left[(\rho_+ - \rho_-)\sigma - \left(\rho_+ u_+^k - \rho_- u_-^k\right)\right] e^{-\beta kt} - w'(t) = 0.$$

Daí, segue que

$$w'(t) = \left[(\rho_+ - \rho_-)\sigma - \left(\rho_+ u_+^k - \rho_- u_-^k\right)\right] e^{-\beta kt}. \tag{3.37}$$

Agora, vamos dividir o caso em dois subcasos $\rho_+ = \rho_-$ e $\rho_+ \neq \rho_-$.

II.1) Primeiro, analisaremos o subcaso $\rho_+ = \rho_-$, então segue de (3.37) que

$$w'(t) = \rho_-(u_-^k - u_+^k)e^{-\beta kt}. \tag{3.38}$$

Logo, se $u_+ < u_-$ temos que $u_-^k - u_+^k > 0$ com $k \in \mathbb{N}$ ímpar, então $w'(t) \geq 0$ para todo $t \in [0, +\infty)$, ou seja, $w(t)$ é crescente e $w(t) > 0$ para todo $t > 0$. Agora, se $u_- < u_+$, então $w'(t) < 0$ para todo $t \geq 0$, isto é, $w(t)$ é decrescente e $w(t) < 0$ para todo $t > 0$, o que não satifaz o requisito $w(t) \geq 0$. Portanto, devemos considerar $u_+ < u_-$ para existir α-solução. Da equação (3.18) temos que

$$\gamma'(t) = \frac{(u_+^{k+1} - u_-^{k+1})}{k+1(u_+ - u_-)}e^{-\beta kt} = \sigma e^{-\beta kt}, \tag{3.39}$$

pelas condições iniciais em (3.3) podemos concluir que

$$\gamma(t) = \frac{\sigma}{\beta k}(1 - e^{-\beta kt}) \quad \text{e} \quad w(t) = \frac{\rho_-(u_-^k - u_+^k)}{\beta k}(1 - e^{-\beta kt}). \tag{3.40}$$

Falta encontrar q, como $w(t) > 0$ para todo $t > 0$, temos da segunda equação de (3.31) que

$$\gamma'(t) = \left[u_-^k + (u_+^k - u_-^k)q\right] e^{-\beta kt}, \tag{3.41}$$

então por (3.39) e (3.41) temos que

$$q = \frac{\sigma - u_-^k}{u_+^k - u_-^k} \in [0,1].$$

Descobrimos que esta α-solução é um caso especial da α-solução (3.6) quando $\rho_+ = \rho_-$.

II.2) Caso contrário, se $\rho_+ \neq \rho_-$ da primeira equação de (3.31) temos que

$$\gamma'(t) = \frac{(\rho_+ u_+^k - \rho_- u_-^k)e^{-\beta kt} + w'(t)}{\rho_+ - \rho_-}. \tag{3.42}$$

Daí, substituindo (3.42) na terceira equação de (3.31) obtemos

$$w'(t) = \frac{(u_+^{k+1} - u_-^{k+1})(\rho_+ - \rho_-)}{k+1(u_+ - u_-)} e^{-\beta kt} - (\rho_+ u_+^k - \rho_- u_-^k)e^{-\beta kt}$$

que pode ser reescrito como

$$w'(t) = w_0 e^{-\beta kt}, \tag{3.43}$$

sendo $w_0 = \sigma(\rho_+ - \rho_-) - (\rho_+ u_+^k - \rho_- u_-^k)$. Se $u_+ < u_-$, então

$$u_+^k < \sigma = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} u_+^{k-j} u_-^j < u_-^k,$$

com $k \in \mathbb{N}$ um número ímpar, o que implica que

$$w_0 = \sigma(\rho_+ - \rho_-) - (\rho_+ u_+^k - \rho_- u_-^k) > \rho_-(u_-^k - u_+^k) > 0.$$

Logo, $w(t)$ é crescente e $w(t) > 0$ para todo $t > 0$. Caso contrário, se $u_- < u_+$ temos que $u_-^k < \sigma < u_+^k$, com $k \in \mathbb{N}$ um número ímpar e

$$w_0 = \sigma(\rho_+ - \rho_-) - (\rho_+ u_+^k - \rho_- u_-^k) < \rho_-(u_-^k - u_+^k) < 0.$$

Assim, $w(t)$ é decrescente e $w(t) < 0$ para todo $t > 0$, mas não pode ocorrer este caso. Portanto, para existir α-solução neste caso também devemos considerar $u_+ < u_-$.

Agora, iremos descobrir a constante indeterminada q, como $w(t) > 0$ para todo $t > 0$ da segunda equação de (3.31) temos que

$$\left\{(u_+^k - u_-^k)q + u_-^k - \sigma\right\} e^{-\beta kt} = 0,$$

para todo t. Assim, obtemos

$$q = \frac{\sigma - u_-^k}{u_+^k - u_-^k} \in [0,1]. \tag{3.44}$$

Com as condições iniciais $w(0) = 0$ e $\gamma(0) = 0$ em mente, podemos obter de (3.42) e (3.43) que

$$w(t) = \frac{w_0}{\beta k}(1 - e^{-\beta k t})$$

e

$$\gamma(t) = \frac{\sigma}{\beta k}(1 - e^{-\beta k t}).$$

Portanto, podemos obter uma única α-solução dada por (3.6) para o problema (2.20) e (3.1) quando $u_- \leq u_+$. □

Então, se β é uma constante positiva e $k \in \mathbb{N}$ é um número ímpar com $u_+ \leq u_-$ pode-se concluir da Definição 2.40 que a única α-solução do problema de Riemann (1) e (3) é dada por

$$\begin{cases} \rho\,(x,t) \,=\, \rho_- + (\rho_+ - \rho_-)H(x - \gamma(t)) + \dfrac{w_0}{\beta k}(1 - e^{-\beta k t})\delta(x - \gamma(t)), \\ u\,(x,t) \,=\, [u_- + (u_+ - u_-)H(x - \gamma(t))]\,e^{-\beta t}, \end{cases} \tag{3.45}$$

com

$$\gamma(t) = \frac{\sigma}{\beta k}(1 - e^{-\beta k t}).$$

Em particular, se $u_+ = u_-$ temos $w(t) = 0$, para todo $t \in [0, \infty)$. Tendo uma descontinuidade $\gamma(t) = \frac{u_-^k}{\beta k}(1 - e^{-\beta k t})$ conectando os dois estados $\left(\rho_\pm, u_- e^{-\beta t}\right)$ do problema de Riemann (1) e (3). Caso contrário, se $u_+ < u_-$ temos uma onda delta choque na forma (3.45) para o problema de Riemann (1) e (3). A α-solução (3.45) é única independente da escolha da função suave α para o problema de Riemann (1) e (3). Além disso, a α-solução (3.45) é idêntica a solução descontínua contendo a descontinuidade $\gamma(t) = \frac{u_-^k}{\beta k}(1 - e^{-\beta k t})$ quando $u_+ = u_-$ e a onda delta choque quando $u_+ < u_-$ em [15]. O problema de Riemann para o sistema (1) com $k = 1$ foi resolvido em [14] e também é idêntica a α-solução (3.45). Observe que quando $\beta \to 0^+$ a α-solução (3.45) converge para

$$\begin{cases} \rho\,(x,t) \,=\, \rho_- + (\rho_+ - \rho_-)H(x - \gamma(t)) + w_0 t\,\delta(x - \gamma(t)), \\ u\,(x,t) \,=\, u_- + (u_+ - u_-)H(x - \gamma(t)), \end{cases} \tag{3.46}$$

com

$$\gamma(t) = \sigma t.$$

Esta α-solução é uma solução de onda delta choque para o sistema homogêneo associado a (1). O problema de Riemann para o sistema homogêneo associado a (1) com $k = 1$ foi resolvido em [22].

Se denotamos $\sigma(t) = \gamma'(t)$, sendo a velocidade de propagação da onda delta choque. Então, as equações em (3.31) implicam em

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t} = \sigma(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t} = \sigma(t)\,[\rho] - \left[\rho u^k\right], \\ 0 = \sigma(t)\,[u] - \dfrac{1}{k+1}\left[u^{k+1}\right] \end{cases} \tag{3.47}$$

que é chamado de condição generalizada de Rankine-Hugoniot da onda delta choque para os sistemas hiperbólicos de leis de conservação com um amortecimento linear em [15]. Em (3.47), $w(t)$ representa a força da onda delta choque e $[\rho] = \rho_+ - \rho_-$ denota o salto de ρ através da descontinuidade $x(t) = \gamma(t)$.

Observação 3.2. Se $\rho_+ = \rho_-$, então da primeira equação de (3.36) temos que $w'(t) = 0$ para todo t, mas $w(0) = 0$ em (3.3). Logo, $w(t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Deste modo, a solução é dada por $(\tilde{\rho}(t), \tilde{u}(t)) = \left(\rho_-, u_- e^{-\beta t}\right)$ e a curva de descontinuidade $x = \gamma(t)$ não existe. Portanto, não precisaremos considerar este subcaso $\rho_+ = \rho_-$ e $u_+ = u_-$, por isso que supomos $(\rho_+ - \rho_-)^2 + (u_+ - u_-)^2 \neq 0$.

Observação 3.3. Se o sistema (2.20) é reformulado pela forma

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\tilde{u}(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{k+1}\mathrm{D}[\tilde{u}(t)\dot{_\alpha}\tilde{u}(t)^k] = -\beta \tilde{u}(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{\rho}(t)}{\mathrm{d}t} + \mathrm{D}\left[\tilde{u}(t)^k_{\dot{\alpha}}\tilde{\rho}(t)\right] = 0, \end{cases} \tag{3.48}$$

invés de (2.20), então a única diferença está em que o α-produto $\tau_{\gamma(t)}\delta\dot{_\alpha}\tau_{\gamma(t)}H$ é substituído por $\tau_{\gamma(t)}H\dot{_\alpha}\tau_{\gamma(t)}\delta$ nos cálculos. Então, precisamos trocar q por $1-q$ nos cálculos, pois geralmente os α-produtos não são comutativos como pode ser visto no Exemplo 2.37. Portanto, a única α-solução de (3.48) também é dada por (3.6), mas

$$1 - q = \frac{\sigma - u_-^k}{u_+^k - u_-^k} \quad \text{e} \quad q = \frac{u_+^k - \sigma}{u_+^k - u_-^k}.$$

CAPÍTULO 4

A α-solução para o problema de Riemann 2

Considere o sistema (2) com $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty)$, sendo β uma constante positiva, $k \in \mathbb{N}$ um número ímpar e as incógnitas ρ, u submetidas as condições iniciais (3) com $\rho_{\pm}, u_{\pm} \in \mathbb{R}$ e $\rho\pm > 0$. Tendo em mente as identificões $(\rho,u) \to (\tilde{\rho},\tilde{u})$ podemos substituir o sistema (2) pelo (2.21) e as condições iniciais (3) por (3.1).

Neste capítulo, também construiremos as α-soluções $(\tilde{\rho},\tilde{u})$ para o sistema (2.21) com as condições iniciais (3.1) na forma (3.2).

Suponha que $(\rho_+ - \rho_-)^2 + (u_+ - u_-)^2 \neq 0$ e pelas equações (3.1) e (3.2) temos que condições inicias das funções $\mathscr{C}^1([0,+\infty))$ mencionadas acima são dadas por (3.3).

Devemos considerar a variável de estado ρ no sistema (2), $\rho \geq 0$ pelo ponto de vista físico. Então, as condições $a(t) \geq 0$, $a(t) + b(t) \geq 0$ e $w(t) \geq 0$ devem ser satisfeitas para todo $t \in [0,+\infty)$. A α-solução $(\tilde{\rho},\tilde{u})$ pertence ao subespaço fechado $\tilde{W} = \tilde{P} \times \tilde{U} \in \mathscr{F} \times \mathscr{F}$ definido em (3.4).

O seguinte teorema descreve o resultado principal deste capítulo.

Teorema 4.1. *Sejam $u_+ \leq u_-$ e $\alpha \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, $\alpha > 0$ com $\int_{\mathbb{R}} \alpha(t)\mathrm{d}t = 1$. Então, se $u_+ < u_-$ e*

$$q = \frac{\sigma - (k+1)u_-^k}{(k+1)(u_+^k - u_-^k)}. \tag{4.1}$$

O problema (2.21) *e* (3.1) *tem uma única α-solução $(\tilde{\rho},\tilde{u}) \in \tilde{W}$ dada por*

$$\begin{cases} \tilde{\rho}(t) = \rho_- + (\rho_+ - \rho_-)\,\tau_{\gamma(t)}H + \dfrac{w_0}{\beta k}(e^{\beta k t} - 1)\tau_{\gamma(t)}\delta, \\ \tilde{u}(t) = \left[u_- + (u_+ - u_-)\,\tau_{\gamma(t)}H\right] e^{\beta t}, \end{cases} \tag{4.2}$$

com

$$\gamma(t) = \frac{\sigma}{\beta k}(e^{\beta k t} - 1),\ \ \sigma = \sum_{j=0}^{k} u_+^{k-j} u_-^j \tag{4.3}$$

e

$$w_0 = \sigma(\rho_+ - \rho_+) - (k+1)(\rho_+ u_+^k - \rho_- u_-^k) \tag{4.4}$$

sendo β uma constante positiva, $k \in \mathbb{N}$ um número ímpar.

Se $u_+ = u_-$, a descontinuidade $\gamma(t) = \dfrac{(k+1)u_-^k}{\beta k}(e^{\beta k t} - 1)$, para todo α.

Demonstração. Tome $(\tilde{\rho}, \tilde{u}) \in \tilde{W}$. Pela forma de $\tilde{u}$ em (3.2) obtemos que

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{u}(t)}{\mathrm{d}t} = f'(t) + c'(t)\tau_{\gamma(t)}H - c(t)\gamma'(t)\tau_{\gamma(t)}\delta, \tag{4.5}$$

para cada t.

Por outro lado, usando (2.15) e a Proposição 2.38, com $a = f(t)$ e $b = f(t) + c(t)$ obtemos

$$\tilde{u}(t)^{k+1} = f(t)^{k+1} + [(f(t)+c(t))^{k+1} - f(t)^{k+1}]\tau_{\gamma(t)}H. \tag{4.6}$$

Então,

$$\mathrm{D}[\tilde{u}(t)^{k+1}] = [(f(t)+c(t))^{k+1} - f(t)^{k+1}]\tau_{\gamma(t)}\delta \tag{4.7}$$

no sentido distribucional.

Considerando $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ e fazendo mesmos cálculos que foram feito para obter (3.17), temos que

$$\begin{cases} f'(t) - \beta f(t) = 0, \\ c'(t) - \beta c(t) = 0, \\ \left[(f(t)+c(t))^{k+1} - f(t)^{k+1}\right] - c(t)\gamma'(t) = 0, \end{cases} \tag{4.8}$$

para todo $t \in [0, +\infty)$. Pelas seguintes condições iniciais $f(0) = u_-$ e $c(0) = u_+ - u_-$ em (3.3) obtemos que $f(t) = u_- e^{\beta t}$ e $c(t) = (u_+ - u_-)e^{\beta t}$, para todo t. Com isso, simplificamos a terceira equação de (4.8) por

$$\left(u_+^{k+1} - u_-^{k+1}\right)e^{\beta k t} - (u_+ - u_-)\gamma'(t) = 0 \tag{4.9}$$

Agora, faremos um cálculo similar ao anterior nas equações em (3.2), isto é,

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(t)\,\dot{\alpha}\,\tilde{u}(t)^k &= \left(a(t) + b(t)\,\tau_{\gamma(t)}H + w(t)\,\tau_{\gamma(t)}\delta\right)_{\dot{\alpha}}\left(f(t)^k + [(f(t)+c(t))^k - f(t)^k]\tau_{\gamma(t)}H\right) \\ &= a(t)f^k(t) + a(t)[(f(t)+c(t))^k - f^k(t)]\tau_{\gamma(t)}H + b(t)f^k(t)\tau_{\gamma(t)}H \\ &\quad + b(t)[(f(t)+c(t))^k - f^k(t)]\left(\tau_{\gamma(t)}H\right)_{\dot{\alpha}}\tau_{\gamma(t)}H + w(t)f^k(t)\tau_{\gamma(t)}\delta \\ &\quad + w(t)[(f(t)+c(t))^k - f^k(t)]\left(\tau_{\gamma(t)}\delta\right)_{\dot{\alpha}}\tau_{\gamma(t)}H \end{aligned}$$

em que utilizamos (3.19), (3.20) e (3.21).

Desta forma, usando a Proposição 2.23 nos Exemplos 2.31 e 2.37, temos

$$\tilde{\rho}(t)\,\dot{\alpha}\,\tilde{u}(t)^k = a(t)f^k(t) + M(t)\tau_{\gamma(t)}H + N(t)\tau_{\gamma(t)}\delta, \tag{4.10}$$

com

$$M(t) = (a(t)+b(t))(f(t)+c(t))^k - a(t)f^k(t) \tag{4.11}$$

e

$$N(t) = w(t)\left(q(f(t)+c(t))^k) + (1-q)f^k(t)\right). \tag{4.12}$$

Segue da forma $\tilde{\rho}$ de (3.2) que

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\rho}(t)}{\mathrm{d}t} = a'(t) + b'(t)\tau_{\gamma(t)}H - b(t)\gamma'(t)\tau_{\gamma(t)}\delta + w'(t)\tau_{\gamma(t)}\delta - w(t)\gamma'(t)\tau_{\gamma'(t)}(\mathrm{D}\delta) \tag{4.13}$$

e

$$\mathrm{D}\left[\tilde{\rho}(t)\dot{\alpha}\tilde{u}(t)^k\right] = M(t)\tau_{\gamma(t)}\delta + N(t)\tau_{\gamma(t)}(\mathrm{D}\delta). \tag{4.14}$$

Daí, concluímos que a segunda equação de (2.20) pode ser escrita por

$$\begin{aligned} &a'(t) + b'(t)\tau_{\gamma(t)}H + \{(k+1)M(t) + w'(t) - b(t)\gamma'(t)\}\,\tau_{\gamma(t)}\delta \\ &\quad + \{(k+1)N(t) - w(t)\gamma'(t)\}\,\tau_{\gamma(t)}(\mathrm{D}\delta) = 0. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Considerando $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ e fazendo mesmos cálculos que foram feito para obter (4.8), temos que

$$\begin{cases} a'(t) = 0, \\ b'(t) = 0, \\ (k+1)M(t) + w'(t) - b(t)\gamma'(t) = 0, \\ (k+1)N(t) - w(t)\gamma'(t) = 0. \end{cases} \tag{4.16}$$

Pelas condições iniciais em (3.3) podemos concluir que $a(t) = \rho_-$ e $b(t) = \rho_+ - \rho_-$, para todo $t \in [0, +\infty]$. Assim, podemos escrever as equações $M(t)$ e $N(t)$ em (4.11) e (4.12), respectivamente, por

$$M(t) = \left(\rho_+ u_+^k - \rho_- u_-^k\right)e^{\beta kt} \quad \text{e} \quad N(t) = w(t)\left(u_-^k + q(u_+^k - u_-^k)\right)e^{\beta kt}. \tag{4.17}$$

Substituindo as funções $b(t)$ e (4.17) na terceira e quarta equação de (4.16), obtemos que

$$\begin{cases} (k+1)(\rho_+ u_+^k - \rho_- u_-^k)e^{\beta kt} - (\rho_+ - \rho_-)\gamma'(t) + w'(t) = 0, \\ w(t)\left\{(k+1)\left(u_-^k + q(u_+^k - u_-^k)\right)e^{\beta kt} - \gamma'(t)\right\} = 0. \end{cases} \tag{4.18}$$

Assim, por (4.9) e (4.18) temos

$$\begin{cases} (k+1)(\rho_+ u_+^k - \rho_- u_-^k)e^{\beta kt} - (\rho_+ - \rho_-)\gamma'(t) + w'(t) = 0, \\ w(t)\left\{(k+1)\left(u_-^k + q(u_+^k - u_-^k)\right)e^{\beta kt} - \gamma'(t)\right\} = 0, \\ (u_+^{k+1} - u_-^{k+1})e^{\beta kt} - (u_+ - u_-)\gamma'(t) = 0. \end{cases} \tag{4.19}$$

Agora, falta determinar as funções $w(t), \gamma(t) \in \mathscr{C}^1([0, +\infty))$ e a constante indeterminada $q \in [0, 1]$ do problema de valor inicial das equações em (4.19) com as condições iniciais $w(0) = 0$ e $\gamma(0) = 0$ dadas por (3.3).

Calculando a diferença entre a primeira equação de (4.19) multiplicada por $(u_+ - u_-)$ e a terceira equação de (4.19) multiplicada por $(\rho_+ - \rho_-)$, obtemos

$$\left\{(\rho_+ - \rho_-)(u_+^{k+1} - u_-^{k+1}) - (k+1)(u_+ - u_-)\left(\rho_+ u_+^k - \rho_- u_-^k\right)\right\}e^{\beta kt} - (u_+ - u_-)\,w'(t) = 0, \tag{4.20}$$

o que equivale

$$\left\{(\rho_+ - \rho_-)\,\sigma\,(u_+ - u_-) - (u_+ - u_-)(k+1)\left(\rho_+ u_+^k - \rho_- u_-^k\right)\right\} e^{\beta kt} - (u_+ - u_-)\,w'(t) = 0$$

com $\sigma = \sum_{j=0}^{k} u_+^{k-j} u_-^j$. Então, obtemos

$$(u_+ - u_-)\left\{\left[(\rho_+ - \rho_-)\,\sigma - (k+1)\left(\rho_+ u_+^k - \rho_- u_-^k\right)\right] e^{\beta kt} - w'(t)\right\} = 0. \tag{4.21}$$

Desta forma, devemos dividir a questão em dois casos $u_+ = u_-$ ou $u_+ \neq u_-$.

1. Primeiro, considere o caso $u_+ = u_-$, então $c(t) = 0$ para todo $t \in [0, +\infty)$. Logo, as equações de (4.19) são transformadas em

$$\begin{cases} (k+1)(\rho_+ - \rho_-)u_-^k e^{\beta kt} - (\rho_+ - \rho_-)\gamma'(t) + w'(t) = 0, \\ w(t)\left\{(k+1)u_-^k e^{\beta kt} - \gamma'(t)\right\} = 0. \end{cases} \tag{4.22}$$

Supomos que $(\rho_+ - \rho_-)^2 + (u_+ - u_-)^2 \neq 0$, então $\rho_+ \neq \rho_-$, pela primeira equação de (4.22) temos que

$$w'(t) = (\rho_+ - \rho_-)\left(\gamma'(t) - (k+1)u_-^k e^{\beta kt}\right),$$

para todo t. Em virtude da segunda equação de (4.22) temos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} w(t)w'(t) &= w(t)\,(\rho_+ - \rho_-)\left(\gamma'(t) - (k+1)u_-^k e^{\beta kt}\right) \\ &= (\rho_- - \rho_+)\,w(t)\left((k+1)u_-^k e^{\beta kt} - \gamma'(t)\right) = 0, \end{aligned}$$

para cada $t \geq 0$. Com isso, $\left(w^2(t)\right)' = 2w(t)w'(t) = 0$ para todo $t \geq 0$, então $w^2(t)$ é uma constante o que implica que $w(t)$ também é uma constante. Precisamente, pela condição inicial $w(0) = 0$ em (3.3), obtemos que $w(t) = 0$ para todo $t \geq 0$ e também vale que $w'(t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Assim, da primeira equação de (4.22) temos que

$$(\rho_+ - \rho_-)\left(\gamma'(t) - (k+1)u_-^k e^{\beta kt}\right) = 0,$$

o que implica que $\gamma'(t) = (k+1)u_-^k e^{\beta kt}$, pois $\rho_+ \neq \rho_-$. Além disso, pela condição inicial $\gamma(0) = 0$ em (3.3) temos que $\gamma(t) = \dfrac{(k+1)u_-^k}{\beta k}(e^{\beta kt} - 1)$.

Para este caso $u_+ = u_-$, a constante indeterminada q pode ser escolhida arbitrariamente, pois $w(t) = 0$ para todo $t \geq 0$.

2. Considere o caso $u_+ \neq u_-$, então temos de (4.21) que

$$\left[(\rho_+ - \rho_-)\,\sigma - (k+1)\left(\rho_+ u_+^k - \rho_- u_-^k\right)\right] e^{\beta kt} - w'(t) = 0.$$

Daí, segue que

$$w'(t) = \left[(\rho_+ - \rho_-)\,\sigma - (k+1)\left(\rho_+ u_+^k - \rho_- u_-^k\right)\right] e^{\beta kt}. \tag{4.23}$$

Agora, vamos dividir o caso em dois subcasos $\rho_+ = \rho_-$ e $\rho_+ \neq \rho_-$.

II.1) Primeiro, analisaremos o subcaso $\rho_+ = \rho_-$, então segue de (4.23) que

$$w'(t) = (k+1)\rho_-(u_-^k - u_+^k)e^{\beta kt}. \tag{4.24}$$

Logo, se $u_+ < u_-$ temos que $u_-^k - u_+^k > 0$ com $k \in \mathbb{N}$ ímpar, então $w'(t) \geq 0$ para todo $t \in [0, +\infty)$, assim $w(t)$ é crescente e $w(t) > 0$ para todo $t > 0$. Agora, se $u_- < u_+$, então $w'(t) < 0$ para todo $t \geq 0$, isto é, $w(t)$ é decrescente e $w(t) < 0$ para todo $t > 0$, o que não satifaz o requisito $w(t) \geq 0$. Portanto, devemos considerar $u_+ < u_-$ para existir α-solução. Da equação (4.9) temos que

$$\gamma'(t) = \frac{(u_+^{k+1} - u_-^{k+1})}{k+1(u_+ - u_-)}e^{\beta kt} = \sigma e^{\beta kt}, \tag{4.25}$$

pelas condições iniciais em (3.3) concluímos que

$$\gamma(t) = \frac{\sigma}{\beta k}(e^{\beta kt} - 1) \quad \text{e} \quad w(t) = \frac{(k+1)\rho_-(u_-^k - u_+^k)}{\beta k}(e^{\beta kt} - 1). \tag{4.26}$$

Falta determinar q, como $w(t) > 0$ para todo $t > 0$, temos da segunda equação de (4.19) que

$$\gamma'(t) = (k+1)\left[u_-^k + (u_+^k - u_-^k)q\right]e^{\beta kt}, \tag{4.27}$$

então por (4.25) e (4.27) temos que

$$q = \frac{\sigma - (k+1)u_-^k}{(k+1)(u_+^k - u_-^k)} \in [0,1].$$

Esta α-solução é um caso especial da α-solução (4.2) quando $\rho_+ = \rho_-$.

II.2) Caso contrário, se $\rho_+ \neq \rho_-$ da primeira equação de (4.19) temos que

$$\gamma'(t) = \frac{(k+1)(\rho_+ u_+^k - \rho_- u_-^k)e^{\beta kt} + w'(t)}{\rho_+ - \rho_-}. \tag{4.28}$$

Daí, substituindo (4.28) na terceira equação de (4.19) obtemos

$$w'(t) = \frac{(u_+^{k+1} - u_-^{k+1})(\rho_+ - \rho_-)}{(u_+ - u_-)}e^{\beta kt} - (k+1)(\rho_+ u_+^k - \rho_- u_-^k)e^{\beta kt}$$

que pode ser reescrito como

$$w'(t) = w_0 e^{\beta kt}, \tag{4.29}$$

sendo $w_0 = \sigma(\rho_+ - \rho_-) - (k+1)(\rho_+ u_+^k - \rho_- u_-^k)$. Se $u_+ < u_-$, então

$$(k+1)u_+^k < \sigma = \sum_{j=0}^{k} u_+^{k-j} u_-^j < (k+1)u_-^k$$

com $k \in \mathbb{N}$ um número ímpar, o que implica que

$$w_0 = \sigma(\rho_+ - \rho_-) - (k+1)(\rho_+ u_+^k - \rho_- u_-^k) > (k+1)\rho_-(u_-^k - u_+^k) > 0.$$

Portanto, $w(t)$ é crescente e $w(t) > 0$ para todo $t > 0$. Caso contrário, se $u_- < u_+$, então $(k+1)u_-^k < \sigma < (k+1)u_+^k$ com $k \in \mathbb{N}$ um número ímpar e

$$w_0 = \sigma(\rho_+ - \rho_-) - (k+1)(\rho_+ u_+^k - \rho_- u_-^k) < (k+1)\rho_-(u_-^k - u_+^k) < 0,$$

então $w(t)$ é decrescente e $w(t) < 0$ para todo $t > 0$, mas não pode ocorrer este caso. Portanto, para existir α-solução neste caso também devemos considerar $u_+ < u_-$.

Agora, iremos encontrar a constante indeterminada q, como $w(t) > 0$ para todo $t > 0$ da segunda equação de (4.19) temos que

$$\left\{(k+1)((u_+^k - u_-^k)q + u_-^k) - \sigma\right\} e^{\beta k t} = 0,$$

para todo t. Logo, obtemos

$$q = \frac{\sigma - (k+1)u_-^k}{(k+1)(u_+^k - u_-^k)} \in [0,1]. \tag{4.30}$$

Com as condições iniciais $w(0) = 0$ e $\gamma(0) = 0$ em mente, podemos obter de (4.29) e (4.28) que

$$w(t) = \frac{w_0}{\beta k}(e^{\beta k t} - 1)$$

e

$$\gamma(t) = \frac{\sigma}{\beta k}(e^{\beta k t} - 1).$$

Portanto, podemos obter uma única α-solução dada por (4.2) para o problema (2.21) e (3.1) quando $u_- \leq u_+$.

□

Então, se β é uma constante positiva e $k \in \mathbb{N}$ é um número ímpar com $u_+ \leq u_-$ pode-se concluir da Definição 2.40 que a única α-solução do problema de Riemann (2) e (3) é da forma

$$\begin{cases} \rho\,(x,t) \,=\, \rho_- + (\rho_+ - \rho_-)H(x - \gamma(t)) + \dfrac{w_0}{\beta k}(e^{\beta k t} - 1)\delta(x - \gamma(t)), \\ u\,(x,t) \,=\, [u_- + (u_+ - u_-)H(x - \gamma(t))]\, e^{\beta t}, \end{cases} \tag{4.31}$$

com

$$\gamma(t) = \frac{\sigma}{\beta k}(e^{\beta k t} - 1).$$

Em particular, se $u_+ = u_-$ temos $w(t) = 0$, para todo $t \in [0,\infty)$. Tendo uma descontinuidade $\gamma(t) = \frac{(k+1)u_-^k}{\beta k}(e^{\beta k t} - 1)$ para o problema de Riemann (2) e (3) conectando os dois estados $\left(\rho_\pm, u_- e^{\beta t}\right)$. Caso contrário, se $u_+ < u_-$ temos que uma onda delta choque na forma (3.45) deve ser construída para o problema de Riemann (2) e (3). A α-solução (4.31) é única independente da escolha da função suave α para o problema de Riemann (2) e (3). Observe que quando $\beta \to 0^+$ a α-solução (4.31) converge para

$$\begin{cases} \rho\,(x,t) \,=\, \rho_- + (\rho_+ - \rho_-)H(x - \gamma(t)) + w_0 t\,\delta(x - \gamma(t)), \\ u\,(x,t) \,=\, u_- + (u_+ - u_-)H(x - \gamma(t), \end{cases} \tag{4.32}$$

com

$$\gamma(t) = \sigma t.$$

Esta α-solução é uma solução de onda delta choque para o sistema homogêneo associado a (2). Se denotamos $\sigma(t) = \gamma'(t)$, sendo a velocidade de propagação da onda de delta choque. Então, as equações em (4.19) implicam em

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t} = \sigma(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t} = \sigma(t)\,[\rho] - (k+1)\left[\rho u^k\right], \\ 0 = \sigma(t)\,[u] - \left[u^{k+1}\right], \end{cases} \tag{4.33}$$

que é chamado de condição generalizada de Rankine-Hugoniot da onda delta choque para os sistemas hiperbólicos de leis de conservação com um amortecimento linear. Em (4.33), $w(t)$ representa a força da onda delta choque e $[\rho] = \rho_+ - \rho_-$ denota o salto de ρ através da descontinuidade $x(t) = \gamma(t)$.

Observação 4.2. Se $\rho_+ = \rho_-$, então da primeira equação de (4.22) temos $w'(t) = 0$ para todo t, mas $w(0) = 0$ em (3.3), logo $w(t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Daí, a solução é dada por $(\tilde{\rho}(t), \tilde{u}(t)) = \left(\rho_-, u_- e^{\beta t}\right)$ e a curva de descontinuidade $x = \gamma(t)$ não existe. Portanto, não precisaremos considerar este subcaso $\rho_+ = \rho_-$ e $u_+ = u_-$, por isso supomos $(\rho_+ - \rho_-)^2 + (u_+ - u_-)^2 \neq 0$.

Observação 4.3. Se o sistema (2.21) é reformulado pela forma

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\tilde{u}(t)}{\mathrm{d}t} + \mathrm{D}[\tilde{u}(t)\,\dot{\alpha}\,\tilde{u}(t)^k] = \beta\tilde{u}(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{\rho}(t)}{\mathrm{d}t} + (k+1)\mathrm{D}\left[\tilde{u}(t)^k_{\dot{\alpha}}\tilde{\rho}(t)\right] = 0, \end{cases} \tag{4.34}$$

invés de (2.21), então a única diferença está em que o α-produto $\tau_{\gamma(t)}\delta\,\dot{\alpha}\,\tau_{\gamma(t)}H$ é substituído por $\tau_{\gamma(t)}H\,\dot{\alpha}\,\tau_{\gamma(t)}\delta$ nos cálculos. Então precisamos trocar q por $1-q$ nos cálculos, pois geralmente os α-produtos não são comutativos como pode ser visto no Exemplo 2.37. De fato, a única α-solução de (4.34) também é dada por (4.2), mas

$$1 - q = \frac{\sigma - (k+1)u_-^k}{(k+1)(u_+^k - u_-^k)} \quad \text{e} \quad q = \frac{(k+1)u_+^k - \sigma}{(k+1)(u_+^k - u_-^k)}.$$

CAPÍTULO 5

A α-solução para o problema de Riemann do sistema de cromatografia

Neste capítulo, construiremos as α-soluções para o problema de Riemann (5) e (6) . Para isso, precisamos considerar o problema de Riemann (5) e (6) no espaço $\mathscr{F}([0,+\infty))$ tendo em mente as identificações $(u,v,w) \to (\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w})$. Portanto, podemos substituir o sistema (5) pelo sistema (2.22) e também escrever as condições iniciais (6) por

$$\begin{cases} \tilde{u}(0) = u_- + (u_+ - u_-)H, \\ \tilde{v}(0) = v_- + (v_+ - v_-)H, \\ \tilde{w}(0) = w_- + (w_+ - w_-)H. \end{cases} \tag{5.1}$$

O intuito deste capítulo é encontrar as α-soluções $(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w})$ para o sistema (2.22) com as condições iniciais (5.1) na seguinte forma

$$\begin{cases} \tilde{u}(t) = a(t) + b(t)\,\tau_{\gamma(t)}H + \beta_1(t)\,\tau_{\gamma(t)}\delta, \\ \tilde{v}(t) = h(t) + l(t)\,\tau_{\gamma(t)}H + \beta_2(t)\,\tau_{\gamma(t)}\delta, \\ \tilde{w}(t) = f(t) + k(t)\,\tau_{\gamma(t)}H + \beta_3(t)\,\tau_{\gamma(t)}\delta, \end{cases} \tag{5.2}$$

com $\beta_1(t)+\beta_2(t)=\beta_3(t)$ e $a,b,f,h,k,l,\beta_1,\beta_2,\beta_3 : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ são funções $\mathscr{C}^1([0,+\infty))$.

As α-soluções $(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w})$ dadas por (5.2) pertencem a um subespaço fechado $\tilde{W} \in \mathscr{F}\times\mathscr{F}\times\mathscr{F}$.

As variáveis de estado u,v e w são funções não negativas para todo $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,+\infty)$. Então, escolhendo $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ apropriado como nos capítulos anteriores, temos que $a(t)>0$, $a(t)+b(t)>0$, $h(t)>0$, $h(t)+l(t)>0$, $f(t)>0$, $f(t)+k(t)>0$, $\beta_1(t)>0$, $\beta_2(t)>0$ e $\beta_3(t)>0$ para todo $t \in [0,+\infty)$.

Teorema 5.1. *Sejam* $u_+ - u_- + v_+ - v_- \neq w_+ - w_-$ *e* $-1 < u_- + v_- - w_- \leq 0 \leq u_+ + v_+ - w_+$. *Então, dado* $\alpha \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, $\alpha \geq 0$ *com* $\int_{\mathbb{R}} \alpha(t)\mathrm{d}t = 1$ *e*

$$q = \frac{w_- - u_- - v_-}{u_+ - u_- + v_+ - v_- + w_- - w_+}. \tag{5.3}$$

O problema (2.22) e (5.1) tem uma α-solução $(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w}) \in \tilde{W}$ se e somente se as três condições a seguir forem satisfeitas:

(a) $u_-v_+ + u_+w_- > u_-w_+ + u_+v_-$;

(b) $v_+w_- + v_-u_+ > v_+u_- + v_-w_+$;

(c) $w_-u_+ + w_-v_+ > w_+u_- + w_+v_-$.

Em qualquer caso, a única α-solução em $\tilde{W}$ é dada por

$$\begin{cases} \tilde{u}(t) = u_- + (u_+ - u_-)\,\tau_{\gamma(t)}H + \left\{ \dfrac{u_-v_+ + u_+w_- - u_-w_+ - u_+v_-}{(1+u_+ + v_+ - w_+)(1+u_- + v_- - w_-)} \right\} t\,\tau_{\gamma(t)}\delta, \\ \tilde{v}(t) = v_- + (v_+ - v_-)\,\tau_{\gamma(t)}H + \left\{ \dfrac{v_+w_- + v_-u_+ - v_+u_- - v_-w_+}{(1+u_+ + v_+ - w_+)(1+u_- + v_- - w_-)} \right\} t\,\tau_{\gamma(t)}\delta, \\ \tilde{w}(t) = w_- + (w_+ - w_-)\,\tau_{\gamma(t)}H + \left\{ \dfrac{w_-u_+ + w_-v_+ - w_+u_- - w_+v_-}{(1+u_+ + v_+ - w_+)(1+u_- + v_- - w_-)} \right\} t\,\tau_{\gamma(t)}\delta, \end{cases} \tag{5.4}$$

com

$$\gamma(t) = \left\{ 1 + \frac{1}{(1+u_+ + v_+ - w_+)(1+u_- + v_- - w_-)} \right\} t \tag{5.5}$$

Demonstração. Sejam $(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w}) \in \tilde{W}$ uma α-solução de (2.22). Consequentemente, de (5.2) temos que

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{u}(t)}{\mathrm{d}t} = a'(t) + b'(t)\tau_{\gamma(t)}H - b(t)\gamma'(t)\tau_{\gamma(t)}\delta + \beta_1'(t)\tau_{\gamma(t)}\delta - \beta_1(t)\gamma'(t)\tau_{\gamma'(t)}(\mathrm{D}\delta). \tag{5.6}$$

Pela Definição 2.39 e (5.2) podemos concluir que

$$1 + \tilde{u}(t) + \tilde{v}(t) - \tilde{w}(t) = 1 + a(t) + h(t) - f(t) + (b(t) + l(t) - k(t))\,\tau_{\gamma(t)}H > 0. \tag{5.7}$$

Se $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em relação a ρ assim como $\tilde{\rho} : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ é uma aplicação da forma $\tilde{\rho}(t) = m(t) + n(t)\tau_{\gamma(t)}H$, então

$$\tilde{\rho}(t) = \begin{cases} m(t), & \text{se } x < \gamma(t), \\ m(t) + n(t), & \text{se } x > \gamma(t), \end{cases}$$

para cada t. Como a definição (2.18) é consistente com a composição de função, temos

$$\phi \circ \tilde{\rho}(t) = \begin{cases} \phi(m(t)), & \text{se } x < \gamma(t), \\ \phi(m(t) + n(t)), & \text{se } x > \gamma(t), \end{cases}$$

isto é,

$$\phi \circ \tilde{\rho}(t) = \phi(m(t)) + (\phi(m(t) + n(t)) - \phi(m(t)))\tau_{\gamma(t)}H. \tag{5.8}$$

Logo, por (5.8) obtemos que

$$\frac{1}{1 + \tilde{u}(t) + \tilde{v}(t) - \tilde{w}(t)} = \frac{1}{m(t)} + \left(\frac{1}{m(t) + n(t)} - \frac{1}{m(t)} \right) \tau_{\gamma(t)}H, \tag{5.9}$$

sendo

$$m(t) = 1 + a(t) + h(t) - f(t) \quad \text{e} \quad n(t) = b(t) + l(t) - k(t).$$

Tendo em vista (2.14), Exemplo 2.31, (3.19), (3.20) e (3.21), pode-se obter de (5.2) e (5.9) que

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{1+\tilde{u}(t)+\tilde{v}(t)-\tilde{w}(t)}\right)_{\dot{\alpha}} \tilde{u}(t) &= \frac{a(t)}{m(t)} + \left(\frac{a(t)+b(t)}{m(t)+n(t)} - \frac{a(t)}{m(t)}\right) \tau_{\gamma(t)} H \\ &\quad + \left(\frac{q\beta_1(t)}{m(t)} + \frac{(1-q)\beta_1(t)}{m(t)+n(t)}\right) \tau_{\gamma(t)} \delta.\end{aligned}$$

Então, temos que

$$\begin{aligned}\mathrm{D}\left[\tilde{u}(t) + \left(\frac{1}{1+\tilde{u}(t)+\tilde{v}(t)-\tilde{w}(t)}\right)_{\dot{\alpha}} \tilde{u}(t)\right] &= \left(b(t) + \frac{a(t)+b(t)}{m(t)+n(t)} - \frac{a(t)}{m(t)}\right) \tau_{\gamma(t)} \delta \\ &\quad + \left(\beta_1(t) + \frac{q\beta_1(t)}{m(t)} + \frac{(1-q)\beta_1(t)}{m(t)+n(t)}\right) \tau_{\gamma(t)} (\mathrm{D}\delta).\end{aligned} \tag{5.10}$$

Ao somar (5.6) e (5.10), podemos obter a partir da primeira equação em (2.22) que

$$\begin{aligned}& a'(t) + b'(t)\tau_{\gamma(t)} H + \left(b(t) + \frac{a(t)+b(t)}{m(t)+n(t)} - \frac{a(t)}{m(t)} - b(t)\gamma'(t) + \beta_1'(t)\right) \tau_{\gamma(t)} \delta \\ &\quad + \left(\beta_1(t) + \frac{q\beta_1(t)}{m(t)} + \frac{(1-q)\beta_1(t)}{m(t)+n(t)} - \beta_1(t)\gamma'(t)\right) \tau_{\gamma(t)} (\mathrm{D}\delta) = 0.\end{aligned} \tag{5.11}$$

Analogamente, também podemos obter a partir da segunda equação em (2.22) que

$$\begin{aligned}& h'(t) + l'(t)\tau_{\gamma(t)} H + \left(l(t) + \frac{h(t)+l(t)}{m(t)+n(t)} - \frac{h(t)}{m(t)} - l(t)\gamma'(t) + \beta_2'(t)\right) \tau_{\gamma(t)} \delta \\ &\quad + \left(\beta_2(t) + \frac{q\beta_2(t)}{m(t)} + \frac{(1-q)\beta_2(t)}{m(t)+n(t)} - \beta_2(t)\gamma'(t)\right) \tau_{\gamma(t)} (\mathrm{D}\delta) = 0\end{aligned} \tag{5.12}$$

e da terceira equação em (2.22) que

$$\begin{aligned}& f'(t) + k'(t)\tau_{\gamma(t)} H + \left(k(t) + \frac{f(t)+k(t)}{m(t)+n(t)} - \frac{f(t)}{m(t)} - l(t)\gamma'(t) + \beta_3'(t)\right) \tau_{\gamma(t)} \delta \\ &\quad + \left(\beta_3(t) + \frac{q\beta_3(t)}{m(t)} + \frac{(1-q)\beta_3(t)}{m(t)+n(t)} - \beta_3(t)\gamma'(t)\right) \tau_{\gamma(t)} (\mathrm{D}\delta) = 0.\end{aligned} \tag{5.13}$$

Considere $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ apropriado, podemos concluir que $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$ na forma (5.2) é uma α-solução para o problema de Riemann (2.22) e (5.1) se e somente se as doze equações seguintes são válidas:

$$\begin{cases} a'(t)=0, \quad b'(t)=0, \quad f'(t)=0, \quad h'(t)=0, \quad k'(t)=0, \quad l'(t)=0, \\ b(t)+\dfrac{a(t)+b(t)}{m(t)+n(t)}-\dfrac{a(t)}{m(t)}-b(t)\gamma'(t)+\beta_1'(t)=0, \\ l(t)+\dfrac{h(t)+l(t)}{m(t)+n(t)}-\dfrac{h(t)}{m(t)}-l(t)\gamma'(t)+\beta_2'(t)=0, \\ k(t)+\dfrac{f(t)+k(t)}{m(t)+n(t)}-\dfrac{f(t)}{m(t)}-k(t)\gamma'(t)+\beta_3'(t)=0, \\ \beta_1(t)+\dfrac{q\beta_1(t)}{m(t)}+\dfrac{(1-q)\beta_1(t)}{m(t)+n(t)}-\beta_1(t)\gamma'(t)=0, \\ \beta_2(t)+\dfrac{q\beta_2(t)}{m(t)}+\dfrac{(1-q)\beta_2(t)}{m(t)+n(t)}-\beta_2(t)\gamma'(t)=0, \\ \beta_3(t)+\dfrac{q\beta_3(t)}{m(t)}+\dfrac{(1-q)\beta_3(t)}{m(t)+n(t)}-\beta_3(t)\gamma'(t)=0. \end{cases} \tag{5.14}$$

Além disso, podemos concluir de (5.1) e (5.2) que a condição inicial para o sistema (5.14) são dadas por

$$a(0)=u_-, \quad b(0)=u_+-u_-, \quad f(0)=w_-, \quad h(0)=v_-, \quad k(0)=w_+-w_-, \quad l(0)=v_+-v_- \tag{5.15}$$

e

$$\gamma(0)=0, \quad \beta_1(0)=0, \quad \beta_2(0)=0, \quad \beta_3(0)=0. \tag{5.16}$$

Então, por (5.14) e (5.15), temos que

$$a(t)=u_-, \quad b(t)=u_+-u_-, \quad f(t)=w_-, \quad h(t)=v_-, \quad k(t)=w_+-w_- \ \text{ e } \ l(t)=v_+-v_-, \tag{5.17}$$

para cada $t\in[0,+\infty)$. Logo, por (5.7), temos

$$1+u_-+v_--w_->0 \quad \text{e} \quad 1+u_++v_+-w_+>0.$$

Deste modo, o sistema (5.14) é simplificado por

$$\begin{cases} u_+-u_-+\dfrac{u_+}{1+u_++v_+-w_+}-\dfrac{u_-}{1+u_-+v_--w_-}-(u_+-u_-)\gamma'(t)+\beta_1'(t)=0, \\ v_+-v_-+\dfrac{v_+}{1+u_++v_+-w_+}-\dfrac{v_-}{1+u_-+v_--w_-}-(v_+-v_-)\gamma'(t)+\beta_2'(t)=0, \\ w_+-w_-+\dfrac{w_+}{1+u_++v_+-w_+}-\dfrac{w_-}{1+u_-+v_--w_-}-(w_+-w_-)\gamma'(t)+\beta_3'(t)=0, \\ \beta_1(t)\left\{1+\dfrac{q}{1+u_-+v_--w_-}+\dfrac{(1-q)}{1+u_++v_+-w_+}-\gamma'(t)\right\}=0, \\ \beta_2(t)\left\{1+\dfrac{q}{1+u_-+v_--w_-}+\dfrac{(1-q)}{1+u_++v_+-w_+}-\gamma'(t)\right\}=0, \\ \beta_3(t)\left\{1+\dfrac{q}{1+u_-+v_--w_-}+\dfrac{(1-q)}{1+u_++v_+-w_+}-\gamma'(t)\right\}=0. \end{cases} \tag{5.18}$$

Das três primeiras equações em (5.18), temos

$$(u_+ - u_- + v_+ - v_- - w_+ + w_-)\left(1 + \frac{1}{(1+u_+ + v_+ - w_+)(1+u_- + v_- - w_-)} - \gamma'(t)\right) = 0. \quad (5.19)$$

Assim, pela hipótese $u_+ - u_- + v_+ - v_- \neq w_+ - w_-$, segue que

$$\gamma'(t) = 1 + \frac{1}{(1+u_+ + v_+ - w_+)(1+u_- + v_- - w_-)}, \quad (5.20)$$

$$\beta_1'(t) = \frac{u_- v_+ + u_+ w_- - u_- w_+ - u_+ v_-}{(1+u_+ + v_+ - w_+)(1+u_- + v_- - w_-)}, \quad (5.21)$$

$$\beta_2'(t) = \frac{v_+ w_- + v_- u_+ - v_+ u_- - v_- w_+}{(1+u_+ + v_+ - w_+)(1+u_- + v_- - w_-)} \quad (5.22)$$

e

$$\beta_3'(t) = \frac{w_- u_+ + w_- v_+ - w_+ u_- - w_+ v_-}{(1+u_+ + v_+ - w_+)(1+u_- + v_- - w_-)}, \quad (5.23)$$

com a condição inicial (5.16) em mente, temos

$$\gamma(t) = \left\{1 + \frac{1}{(1+u_+ + v_+ - w_+)(1+u_- + v_- - w_-)}\right\} t, \quad (5.24)$$

$$\beta_1(t) = \left\{\frac{u_- v_+ + u_+ w_- - u_- w_+ - u_+ v_-}{(1+u_+ + v_+ - w_+)(1+u_- + v_- - w_-)}\right\} t, \quad (5.25)$$

$$\beta_2(t) = \left\{\frac{v_+ w_- + v_- u_+ - v_+ u_- - v_- w_+}{(1+u_+ + v_+ - w_+)(1+u_- + v_- - w_-)}\right\} t \quad (5.26)$$

e

$$\beta_3(t) = \left\{\frac{w_- u_+ + w_- v_+ - w_+ u_- - w_+ v_-}{(1+u_+ + v_+ - w_+)(1+u_- + v_- - w_-)}\right\} t, \quad (5.27)$$

Quando

$$u_- v_+ + u_+ w_- = u_- w_+ + u_+ v_-,$$
$$v_+ w_- + v_- u_+ = v_+ u_- + v_- w_+$$

e $w_- u_+ + w_- v_+ = w_+ u_- + w_+ v_-$, temos que $\beta_1(t) = 0$, $\beta_2(t) = 0$ e $\beta_3(t) = 0$. Logo, a equação em (5.18) é satisfeita automaticamente. Portanto, neste caso q e a função $\alpha \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ pode ser escolhida arbitrariamente.

Se

$$u_- v_+ + u_+ w_- \neq u_- w_+ + u_+ v_-,$$
$$v_+ w_- + v_- u_+ \neq v_+ u_- + v_- w_+$$

e $w_- u_+ + w_- v_+ \neq w_+ u_- + w_+ v_-$, pelas equações em (5.18) obtemos que

$$q = \frac{w_- - u_- - v_-}{u_+ - u_- + v_+ - v_- + w_- - w_+}. \quad (5.28)$$

Nesta situação, como $\beta_i(t) > 0$ para $i = 1,2,3$ e $\beta_1(t) + \beta_2(t) = \beta_3(t)$, devemos requerir que

$$u_- v_+ + u_+ w_- > u_- w_+ + u_+ v_-,$$
$$v_+ w_- + v_- u_+ > v_+ u_- + v_- w_+$$

e $w_-u_+ + w_-v_+ > w_+u_- + w_+v_-$. Para manter $q \in [0,1]$ com $u_\pm$, $v_\pm$ e $w_\pm$ não-negativo, a inequação $-1 < u_- + v_- - w_- \leq 0 \leq u_+ + v_+ - w_+$ deve ser exigida, o que corresponde à condição de entropia supercompressiva da onda delta choque.

Assim, a solução (5.4) junto com (5.5) é claramente a única solução, o que prova o teorema. □

Portanto, podemos concluir a partir da Definição 2.40 que única α-solução para o problema de Riemann (5) e (6) tem a forma

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_- + (u_+ - u_-)H(x-\gamma(t)) + \beta_1(t)\delta(x-\gamma(t)), \\ v(x,t) &= v_- + (v_+ - v_-)H(x-\gamma(t)) + \beta_2(t)\delta(x-\gamma(t)), \\ w(x,t) &= w_- + (w_+ - w_-)H(x-\gamma(t)) + \beta_3(t)\delta(x-\gamma(t)), \end{aligned} \tag{5.29}$$

quando $\beta_1(t) + \beta_2(t) = \beta_3(t)$, $\gamma(t)$ e $\beta_i(t)$ para $i = 1,2,3$ são dados por (5.24), (5.25), (5.26) e (5.27), respectivamente. Assim, a solução é independente de α. Em particular, se

$$\begin{aligned} u_-v_+ + u_+w_- &= u_-w_+ + u_+v_-, \\ v_+w_- + v_-u_+ &= v_+u_- + v_-w_+, \\ w_-u_+ + w_-v_+ &= w_+u_- + w_+v_- \end{aligned}$$

e $u_- + v_- - w_- \geq 0 \geq u_+ + v_+ - w_+ > -1$, então a α-solução é uma onda de choque viajante que não existe apenas para qualquer α, mas também é independente de α. Caso contrário, se

$$\begin{aligned} u_-v_+ + u_+w_- &> u_-w_+ + u_+v_-, \\ v_+w_- + v_-u_+ &> v_+u_- + v_-w_+, \\ w_-u_+ + w_-v_+ &> w_+u_- + w_+v_- \end{aligned}$$

e $-1 < u_- + v_- - w_- \leq 0 \leq u_+ + v_+ - w_+$, então a α-solução é uma onda delta choque na forma (5.29). Pode-se concluir que α-solução determinada por (5.29) é única independente da escolha do α para o problema de Riemann (5) e (6).

Observação 5.2. Se denotarmos $\sigma(t) = \gamma'(t)$ sendo velocidade de propagação da onda delta choque, então as três primeiras equações em (5.18) podem ser escritas como

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t} = \sigma(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}\beta_1(t)}{\mathrm{d}t} = \sigma(t)\,[u] - \left[u + \dfrac{u}{1+u+v-w}\right], \\ \dfrac{\mathrm{d}\beta_2(t)}{\mathrm{d}t} = \sigma(t)\,[v] - \left[v + \dfrac{v}{1+u+v-w}\right], \\ \dfrac{\mathrm{d}\beta_3(t)}{\mathrm{d}t} = \sigma(t)\,[w] - \left[w + \dfrac{w}{1+u+v-w}\right], \end{cases} \tag{5.30}$$

o que é chamada de condição generalizada de Rankine-Hugoniot da onda delta choque do modelo de cromatografia de três componentes (5) em [55].

Observação 5.3. Se o modelo de cromatografia de três componentes (5) é transformado na forma

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\tilde{u}(t)}{\mathrm{d}t} + \mathrm{D}\left[\tilde{u}(t) + \tilde{u}(t)\dot{\alpha}\left(\dfrac{1}{1+\tilde{u}(t)+\tilde{v}(t)-\tilde{w}(t)}\right)\right] = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{v}(t)}{\mathrm{d}t} + \mathrm{D}\left[\tilde{v}(t) + \tilde{v}(t)\dot{\alpha}\left(\dfrac{1}{1+\tilde{u}(t)+\tilde{v}(t)-\tilde{w}(t)}\right)\right] = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{w}(t)}{\mathrm{d}t} + \mathrm{D}\left[\tilde{w}(t) + \tilde{w}(t)\dot{\alpha}\left(\dfrac{1}{1+\tilde{u}(t)+\tilde{v}(t)-\tilde{w}(t)}\right)\right] = 0, \end{cases} \tag{5.31}$$

ao invés da forma (2.22), então a diferença é que nos cálculos o α-produto $\tau_{\gamma(t)}H\dot{\alpha}\tau_{\gamma(t)}\delta$ é substituido por $\tau_{\gamma(t)}\delta\dot{\alpha}\tau_{\gamma(t)}H$. Então, precisamos colocar $1-q$ no lugar de q nos cálculos, pois α-produtos não são geralmente comutativos, veja o Exemplo 2.37. Assim, a única α-solução de (5.31) também pode ser dada por (5.4), mas com

$$1-q = \frac{w_- - u_- - v_-}{u_+ - u_- + v_+ - v_- + w_- - w_+} \quad \text{e} \quad q = \frac{w_+ - u_+ - v_+}{u_- - u_+ + v_- - v_+ + w_+ - w_-}.$$

Considere o modelo não linear de cromatografia de n-componentes

$$(u_i)_t + \left(u_i + \frac{u_i}{1+u_1+\cdots+u_{n-1}-u_n}\right)_x = 0, \text{ para } i = 1,\cdots,n, \tag{5.32}$$

com as condição inicial dada por

$$u_i(x,0) = u_i^{\pm}, \ (\pm x > 0 \text{ e } i = 1,\cdots,n). \tag{5.33}$$

Se introduzirmos a seguinte mudança de variável $s = \sum_{i=1}^{n-1} u_i$ e $r = s - u_n$. Então, o sistema (5.32) se desacopla no sistema (1) com os dados iniciais (8). As soluções de Riemann não são modificadas porque as substituições de variáveis são lineares nas quantidades conservadas. É fácil ver que a soma das $n-1$ forças da função delta de Dirac de u_i para $i = 1,\ldots,n-1$ é igual a força da função delta de Dirac de u_n devido ao fato da função delta de Dirac não estar incluída na variável de estado $r = s - u_n$ para nenhuma condição inicial (8).

Assim, podemos dar um passo adiante investigando o problema de Riemann (5.32) e (5.33) usando o conceito de α-solução introduzido por Sarrico [35, 36]. Explicitamente, as α-soluções devem pertencer ao espaço $\tilde{W}$ que consiste em n distribuições definidas por

$$u_i(x,t) = a_i(t) + b_i(t)H(x-\gamma(t)) + \beta_i(t)\delta(x-\gamma(t)), \ (\text{para } i = 1,2,\cdots,n) \tag{5.34}$$

com $\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i(t) = \beta_n(t)$ e sendo $a_i, b_i, \gamma, \beta_i : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ funções $\mathscr{C}^1([0,+\infty))$, para $i = 1,2,\cdots,n$.

Considerando $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ apropriado, podemos concluir que u_i na forma (5.34) é uma α-solução para o problema de Riemann (5.32) e (5.33) se e somente se as seguintes equações forem válidas:

$$\begin{cases} a_i'(t) = 0, \quad b_i'(t) = 0, \\ b_i(t) + \dfrac{a_i(t)+b_i(t)}{m(t)+n(t)} - \dfrac{a_i(t)}{m(t)} - b_i(t)\gamma'(t) + \beta_i'(t) = 0, \\ \beta_i(t) + \dfrac{q\beta_i(t)}{m(t)} + \dfrac{(1-q)\beta_i(t)}{m(t)+n(t)} - \beta_i(t)\gamma'(t) = 0, \end{cases} \tag{5.35}$$

para $n = 1, 2, \cdots, n$ e com

$$m(t) = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t) - a_n(t) \quad \text{e} \quad n(t) = \sum_{i=1}^{n-1} b_i(t) - b_n(t).$$

Além disso, podemos concluir de (5.33) e (5.34) que as condições iniciais para o sistema (5.35) são dadas por

$$a_i(0) = u_i^-, \quad b_i(0) = u_i^+ - u_i^-, \tag{5.36}$$

$$\gamma(0) = 0 \quad \text{e} \quad \beta_i(0) = 0, \tag{5.37}$$

para $i = 1, 2, \cdots, n$.

Então, por (5.35) e (5.33) temos que

$$a_i(t) = u_i^- \quad \text{e} \quad b_i(t) = u_i^+ - u_i^-, \tag{5.38}$$

para cada $t \in [0, +\infty)$ e $i = 1, 2, \cdots, n$. Deste modo, o sistema (5.35) é simplificado por

$$\begin{cases} u_i^+ - u_i^- + \dfrac{u_i^+}{m^+} - \dfrac{u_i^-}{m^-} - (u_i^+ - u_i^-)\gamma'(t) + \beta_i'(t) = 0, \\ \beta_i(t)\left\{1 + \dfrac{q}{m^-} + \dfrac{(1-q)}{m^+} - \gamma'(t)\right\} = 0, \end{cases} \tag{5.39}$$

para $i = 1, 2, \cdots, n$ e sendo $m^\pm = m^\pm(t)$.

Das n primeiras equações em (5.39), temos

$$(\sum_{i=1}^{n-1}(u_i^+ - u_i^-) - u_n^+ + u_n^-)\left(1 + \frac{1}{m^+ m^-} - \gamma'(t)\right) = 0. \tag{5.40}$$

Assim, se considerarmos $\sum_{i=1}^{n-1}(u_i^+ - u_i^-) \neq u_n^- - u_n^+$ obtemos que

$$\gamma'(t) = 1 + \frac{1}{m^+ m^-} \tag{5.41}$$

e

$$\beta_i'(t) = \frac{u_i^+(m^- - 1) - u_i^-(m^+ - 1)}{m^+ m^-}, \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{5.42}$$

com a condição inicial (5.37) em mente, temos

$$\gamma(t) = \left\{1 + \frac{1}{m^+ m^-}\right\} t \tag{5.43}$$

e

$$\beta_i(t) = \left\{\frac{u_i^+(m^- - 1) - u_i^-(m^+ - 1)}{m^+ m^-}\right\} t, \tag{5.44}$$

para $i = 1, 2, \cdots, n$.

Quando

$$u_i^+\left(m^- - 1\right) = u_i^-\left(m^+ - 1\right),$$

para $i = 1, 2, \cdots, n$. Então, temos que $\beta_i(t) = 0$ para $i = 1, 2, \cdots, n$. Logo, a equação em (5.39) é satisfeita automaticamente. Portanto, neste caso q e a função $\alpha \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ pode ser escolhida arbitrariamente.

Se

$$u_i^+(m^- - 1) \neq u_i^-(m^+ - 1),$$

para $i = 1, 2, \cdots, n$, pelas equações em (5.39), temos que

$$q = \frac{1 - m^-}{m^+ - m^-}. \tag{5.45}$$

Nesta situação, como $\beta_i(t) > 0$ para $i = 1, 2, \cdots, n$ e $\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i(t) = \beta_n(t)$, devemos requerir que

$$u_i^+(m^- - 1) > u_i^-(m^+ - 1),$$

para $i = 1, 2, \cdots, n$. Equivalente,

$$u_i^+ \left(\sum_{i=1}^{n-1} u_i^- - u_n^- \right) > u_i^- \left(\sum_{i=1}^{n-1} u_i^+ - u_n^+ \right),$$

para $i = 1, 2, \cdots, n$. Para manter $q \in [0, 1]$ com $u_i^\pm$ não-negativo, a inequação $-1 < \sum_{i=1}^{n-1} u_i^- - u_n^- \leq 0 \leq \sum_{i=1}^{n-1} u_i^+ - u_n^+$ deve ser exigida.

Referências Bibliográficas

[1] E. Abreu, R. De la Cruz, W. Lambert, *Riemann problem and delta-shock solutions for a Keyfitz-Kranzer system with a forcing term*, J. Math. Anal. Appl. **502**, (2021) 125267, (30 pages).

[2] L. Ambrosio, G. Crippa, A. Figalli, L. A. Spinolo, *Some new well-posedness results for continuity and transport equation and applications to the chromatography system*, SIAM J. Anal. **41**, (2009), 1890–1920.

[3] Y. Brenier, *Solutions with concentration to the Riemann problem for one-dimensional Chaplygin gas dynamics*, J. Math. Fluid Mech. **7**, (2005), S326–S331.

[4] J. M. Burgers, *A mathematical model illustrating the theory of turbulence*, Adv. Appl. Mech. **1**, (1948), 171–179.

[5] G. Q. Chen and H. Liu, *Formation of δ-shocks and vacuum states in the vanishing pressure limit of solutions to the Euler equations for isentropic fluids*, SIAM J. Math. Anal. **34**, (2003), 925–938.

[6] H. Cheng, H. Yang, *Delta shock waves in chromatography equations*, J. Math. Anal. Appl. **380**, (2011), 475–485.

[7] J. F. Colombeau, *New Generalized Functions and Multiplication of Distributions*, Amsterdam, North-Holland, (1984).

[8] M. Colombeau, *A method of projection of delta waves in a Godunov scheme and application to pressureless fluid dynamics*, SIAM J. Numer. Anal. **48**, (2010), 1900–1919.

[9] C. M. Dafermos, *Solutions of the Riemann problem for a class of hyperbolic systems of conservation laws by the viscosity method*, Arch. Ration. Mech. Anal. **52** (1975), (9 pages).

[10] V. G. Danilov, V. Bojkovic and D. Mitrovic, *Linearization of the Riemann problem for a triangular system of conservation laws and delta shock wave formation process*, Math. Meth. Appl. Sci **33(7)**, (2010), 904–921.

[11] V. G. Danilov and D. Mitrovic, *Delta shock wave formation in the case of triangular hyperbolic system of conservation laws*, J. Differ. Eq. **245(12)**, (2008), 3704–3734.

[12] V. G. Danilov and V. M. Shelkovich, *Delta-shock wave type solution of hyperbolic systems of conservation laws*, Q. Appl. Math. **63**, (2005), 401–427.

[13] R. De la Cruz and M. Santos, *Delta shock waves for a system of Keyfitz-Kranzer type*, ZAMM, Z. Angew Math. Mech. **99(3)**, e201700251, (2018), (21 pages).

[14] R. De la Cruz, *Riemann problem for a* 2×2 *hyperbolic system with linear damping*, Acta Appl. Math. **170**, (2020), 631–647.

[15] R. De la Cruz and J. Juajibioy *Vanishing viscosity limit for Riemann solutions to a* 2×2 *hyperbolic system with linear damping*, Asymptot. Anal. **1**, (2021), (pages 22).

[16] G. Ercole, *Delta-shock waves as self-similar viscosity limits*, Q. Appl. Math, (2000), LVIII, 177–199.

[17] G. B. Folland *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, 2 ed., New York: John Wiley and Sons, (1999), p.386.

[18] L. Guo, L. Pan, G. Yin, *The perturbed Riemann problem and delta contact discontinuity in chromatography equations*, Nonlinear Anal. TMA **106**, (2014), 110–123.

[19] E. Hopf, *The partial differential equation* $u_t+uu_x=\mu u_{xx}$, Commun. Pure Appl. Math. **3**, (1950), 201–230.

[20] E. L. Isaacson and B. Temple, *Analysis of a singular hyperbolic system of conservation laws*, J. Differential Equations **65**, (1986), 250–268.

[21] I. Jegdic, *Numerical solutions in chromatography using large time step and overlapping grids methods*, Comp. Appl. Math. **39**, (2020), 235, (14 pages).

[22] K. T. Joseph, *A Riemann problem whose viscosity solution contain* δ*-measures*, Asymptot. Anal. **7**, (1993), 105–120.

[23] S. Keita, Y. Bourgault, *Eulerian droplet model: delta-shock waves and soluntions of the Riemann problem*, J. Math. Anal. Appl. **472(1)**, (2019), 1001–1027.

[24] H. König, *Neue begürndung der "distributionen"' von L. Schwartz*, Math. Nachr. **9(3)**, (1953), 129–148.

[25] D. J. Korchinski, *Solution of a Riemann problem for a* 2×2 *system of conservation laws possessing no classical weak solution*, Ph.D. Thesis, Adelphi University 1977.

[26] P. LeFloch, *An existence and uniqueness result for two nonstrictly hyperbolic systems*. In: B. L. Keyfitz, M. Shearer (eds.) Nonlinear Evolution Equations That Change Type. The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications, vol. 27, p p. 126–138. Springer, New York (1990).

[27] S. Lojasiewicz, *An Introduction to the Theory of Real Functions*, John Wiley & Sons Ltd., 1988.

[28] M. Mazzotti, A. Tarafder, J. Cornel, F. Gritti, G. Guiochon, *Experimental evidence of a delta-shock in nonlinear chromatography*, J. Chromatogr. A **1217**, (2010), 2002–2012.

[29] S. M. A. Mohamed, M. Nedeljkov, *Simplified chromatography model and inverse of split delta shocks*, Appl. Math. Lett. **92**, (2019), 49–53.

[30] A. Paiva, *New* δ*-shock waves in the p-system a distributional product approach*, Math. and Mech. of Sol. **25(3)**, (2020), 619–629.

[31] L. Pan, X. Han, T. Li, L. Guo, *The generalized Riemann problem and instability of delta shock to the chromatography equations*, Commun. Math. Sci. **16**, (2018), 705–734.

[32] C. O. R. Sarrico and A. Paiva, *The multiplication of distributions in the study of a Riemann problem is fluid dynamics*, J. Nonlinear Math. Phys. **24**, (2017), 328–345.

[33] C. O. R. Sarrico, *About a family of distributional products important in the applications*, Portugal. Math. **45**, (1988), 295–316.

[34] C. O. R. Sarrico, *Distributional products with invariance for the action of unimodular groups*, Riv. Mat. Univ. **4**, (1995), 79–99.

[35] C. O. R. Sarrico, *Distributional products and global solutions for nonconservative inviscid Burgers equation*, J. Math. Anal. **281**, (2003), 641–656.

[36] C. O. R. Sarrico, *New solutions for the one-dimensional nonconservative inviscid Burgers equation*, J. Math. Anal. Appl. **317**, (2006), 496–509.

[37] C. O. R. Sarrico, *The multiplication of distributions and the Tsodyks model of synapses dynamics*, Int. J. Math. Anal. **6(21)**, (2012), 999–1014.

[38] C. O. R. Sarrico, *A distributional product approach to δ-shock wave solutions for a generalized pressureless gas dynamics system*, Int. J. of Math. **25**, (2014), 145007 (12 pages).

[39] C. O. R. Sarrico, *The Brio system with initial conditions involving Dirac masses: a result afforded by a distributional product*, Chinese Annals of Math. **35**, (2014), 941–954.

[40] C. O. R. Sarrico, *Multiplication of distributions and a nonlinear model in elastodynamics*, Pacific Journal of Math. **249**, (2018), 195–212.

[41] C. O. R. Sarrico, *Delta shock waves in conservation laws with impulsive moving source*, J. Nonlinear Math. Phy. **26(2)**, (2019), (14 pages).

[42] C. O. R. Sarrico, *Traveling waves for the Brio sytem*, J. of Nonlinear Sci. **31**, (2021), 69 (18 pages).

[43] C. O. R. Sarrico and A. Paiva, *Delta shock waves in the shallow water system*, J. Dyn. Differ. Eq. **30**, (2017), 1187–1198.

[44] L. Schwartz, *Theorie des Distributions*, Hermann, Paris, 1966.

[45] S. F. Shandarin and Y. B. Zeldovich, *Large-scale structure of the universe: Turbulence, intermittency, structures in a self-gravitating medium*, Rev. Modern Phys. **61**, (1989), 185–220.

[46] W. Sheng and T. Zhang, *The Riemann problem for the transportation equations in gas dynamics*, Mem. Amer. Math. Soc. **137(654)**, (1999), AMS:Providence.

[47] C. Shen and M. Sun, *A distributional product approach to the delta shock wave solution for the one-dimensional zero-pressure gas dynamics system*, Int. T. Non-Lin. Mech. **105**, (2018), 105–112.

[48] M. Sun, *Delta shock waves for the chromatography equations as self-similar viscosity limits*, Q. Appl. Math. **69**, (2011), 425–443.

[49] M. Sun, *The multiplication of distributions in the study of delta shock wave for the nonlinear chromatography system*, Appl. Math. Lett. **96**, (2019), 61–68.

[50] D. Tan and T. Zhang, *Two dimensional Riemann problem for a hyperbolic system of nonlinear conservation laws*, J. Diff. Eq. **111(2)**, (1994), 203–254.

[51] D. Tan, T. Zhang and Y. Zheng, *Delta-shock waves as limits of vanishing viscosity for hyperbolic systems of conservation laws*, J. Differ. Eq. **112**, (1994), (32 pages).

[52] B. Temple, *Global solution of the Cauchy problem for a class of* 2×2 *nonstrictly hyperbolic conservation laws*, Adv. Appl. Math. **3**, (1982), 335–375.

[53] B. Temple, *Systems of conservation laws with invariant submanifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **280**, (1983), 781–795.

[54] B. Temple, *Systems of conservation laws with coinciding shock and rarefaction curves*, Contemp. Math. **17**, (1983), 143–151.

[55] Z. Wei, M. Sun, *Exact delta shock wave solution to the Riemann problem for the three-component chromatography model*, Computational and Appl. Math. **41(133)**, (2022), (22 pages).

[56] H. Yang, *Riemann problems for a class of coupled hyperbolic systems of conservation laws*, J. Differ. Equ. **159**, (1999), 447–484.

[57] Y. B. Zeldovich and A. D Myshkis, *Elements of Mathematical Physics: Medium Consisting of Noninteracting Particles* (in Russian). Moscow: Nauka, (1973).