UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

MARCELO BONFANTE AMADEU

SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM DUAS VARIÁVEIS, NUM CONTEXTO GEOMÉTRICO, COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA

SÃO CARLOS – SP
2023

MARCELO BONFANTE AMADEU

SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DO 1^{o} GRAU COM DUAS VARIÁVEIS, NUM CONTEXTO GEOMÉTRICO, COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio

SÃO CARLOS – SP
2023

Amadeu, Marcelo Bonfante

Soluções de equações do 1º grau com duas variáveis, num contexto geométrico, com o auxílio do software Geogebra. / Marcelo Bonfante Amadeu -- 2023.
91f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos
Orientador (a): João Carlos Vieira Sampaio
Banca Examinadora: João Carlos Vieira Sampaio, José Luciano Santinho Lima, Wladimir Seixas
Bibliografia

1. Álgebra e equações. 2. Ensino de matemática. 3. Software Geogebra. I. Amadeu, Marcelo Bonfante. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Ronildo Santos Prado - CRB/8 7325

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Marcelo Bonfante Amadeu, realizada em 14/12/2023.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio (UFSCar)

Prof. Dr. José Luciano Santinho Lima (IFSP)

Prof. Dr. Wladimir Seixas (UFSCar)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas.

À minha esposa Flávia e a meus pais, José e Maria.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me guiado e dado toda a sabedoria necessária que necessitei para chegar até aqui.

Ao meu querido orientador Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio, pela atenção, paciência e competência em todas as etapas de orientação desse trabalho.

A meu pai, José Cílio Amadeu, que sempre me incentivou e sonhou que um dia iria me ver chegar até aqui.

A todos os meus amigos de curso: Alessandra, Conrado, Márcio, Naraiany, Silmara e Tânia.

Ao Prof. Dr. Ivo Machado da Costa pelas belíssimas aulas da disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear ministradas e que jamais sairão da minha memória.

Especialmente à minha esposa Flávia, pela paciência e por estar ao meu lado em todos os momentos dessa jornada.

"Seja quem você for, seja qual for a posição social que você tenha na vida, a mais alta ou a mais baixa, tenha sempre como meta muita força, muita determinação e sempre faça tudo com muito amor e com muita fé em Deus, que um dia você chega lá. De alguma maneira você chega lá."

Ayrton Senna.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo realizar o estudo das equações do 1º grau com duas variáveis, utilizando não somente o contexto algébrico como também o entendimento das mesmas no contexto geométrico, sendo essa proposta desenvolvida por estudantes do 8º ano do ensino fundamental, os quais realizaram sete atividades, sendo: Equações do 1º grau com duas variáveis; Pares ordenados e sua localização no plano cartesiano; Resultados de uma equação de 1º grau com duas variáveis no plano cartesiano; Soluções de uma equação de 1º grau com duas variáveis; Sistemas de duas equações lineares com duas incógnitas; Problemas com sistemas de equações do 1º grau e Análise das diferentes resoluções gráficas de um sistema. O objetivo é fazer com que os estudantes possam entender a relação das expressões algébricas apresentadas interpretando os resultados obtidos das mesmas geometricamente, a fim de que possam melhorar o processo de aprendizagem, superem suas dificuldades, estejam preparados e possam atingir um melhor aproveitamento em situações futuras que envolvam o assunto abordado. Cabe ressaltar a utilização do software GeoGebra pelos estudantes durante a realização da maioria das atividades propostas. Em alguns momentos, são apresentadas expressões algébricas do 2º grau com a intenção de que os mesmos, ao confrontarem com as expressões algébricas do 1º grau, possam perceber, ao utilizarem o software GeoGebra, quais os resultados gráficos gerados por cada uma delas, percebendo suas diferenças.

Palavras-chave: Álgebra. Equações. Software. Aprendizagem. Atividades.

ABSTRACT

This work aims to carry out the study of the 1st degree equations with two variables, by using not only the algebraic context but also the understanding of the same in the geometric context, being this proposal developed by students of the 8th year of fundamental school, who will carry out seven activities, namely: 1st degree equations with two variables; Ordered pairs and their location in the Cartesian plane; Results of a 1st degree equation with two variables in the Cartesian plane; Solutions of a 1st degree equation with two variables; Systems of two linear equations with two unknowns; Problems with systems of 1st degree equations and Analysis of the different graphic resolutions of a system. The objective is to make the students understand the relationship of the algebraic expressions presented by interpreting the results obtained from them geometrically, so that they can improve the learning process, overcome their difficulties, be prepared and can achieve a better use in future situations involving the topic at hand. It is worth highlighting the use of the GeoGebra software by the students during most of the proposed activities. At times, 2nd degree algebraic expressions are presented with the intention that, when confronted with 1st degree algebraic expressions, they can perceive, when using the GeoGebra software, which graphic results are generated by each one of them, noticing their differences.

Keywords: Algebra. Equations. Software. Learning. Activities.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O estudo das equações do 1º grau com duas variáveis tem início no Ensino Fundamental Anos Finais, geralmente no 7º ano e é aprofundado e complementado nas demais séries, sendo um conteúdo que historicamente é visto pelos estudantes como um pouco complicado e com certas dificuldades de compreensão.

As referências Rocha, Ramos e Brasil (2019) e Araujo e Sant'Ana (2011) foram utilizadas no texto a seguir e serviram de inspiração para alguns comentários realizados nos mesmos.

Com relação às dificuldades de compreensão pelos estudantes, as causas que podem servir como explicação são: a disciplina de matemática nas instituições de ensino como um ensino mecanizado e sem aplicação prática, o que vai contra o real propósito do ensino que é de proporcionar situações concretas de como essa disciplina pode ser utilizada no cotidiano. Sendo assim, a Base Nacional Curricular Comum (BNCC) cita como uma das competências:

> [...] utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados. (BRASIL, 2018)

Dessa forma, a inserção e utilização de novas tecnologias aplicadas à Educação tem sido um fator preponderante no âmbito educacional, pois oportuniza aos docentes ampliarem os métodos de ensino e, aos estudantes, ampliarem as diferentes formas de aprendizagem.

Conforme afirma Silva, Cortez e Oliveira (2013), o ensino se torna mais dinâmico quando o uso de computadores no processo de ensino-aprendizagem atinge professores e estudantes. Além disso, é essencial que a escola tenha um plano pedagógico de ensino específico para a disciplina e que nesse plano esteja contemplado o uso do computador como uma ferramenta útil e viável e não como um impasse ao processo de aprendizagem.

A utilização de novas tecnologias, como o computador, tornou-se ferramenta essencial e facilitadora aos processos de ensino e aprendizagem. Tederke, Fortes e Silveira (2016) afirmam que, desde pequenas, a facilidade com que as crianças manuseiam as tecnologias é impressionante. Dessa forma, os planos pedagógicos de ensino podem incluir essas tecnologias no ambiente escolar, através de jogos educacionais utilizando softwares, atingindo áreas do conhecimento de uma forma geral.

Não podemos esquecer da falta de habilidade e, em certos casos, um pouco de resistência por parte dos docentes em utilizarem tecnologias que facilitem a compreensão e o aprendizado dos estudantes.

Outro fato a ser destacado é que apesar de toda essa tecnologia já fazer parte do dia a dia de professores e estudantes, Frade (2005) afirma que existem muitos docentes com dificuldade na utilização de tecnologias digitais, ou seja, o uso do computador e da internet ainda é uma grande barreira. Sendo assim, no que diz respeito ao conhecimento e ao domínio de habilidades para utilização das novas tecnologias nas instituições de ensino, é notável a dificuldade de utilização entre discentes e docentes.

Outro ponto que dificulta essa utilização é a não utilização por parte dos docentes de novas tecnologias em sala de aula por acreditarem que o seu uso tornará o ensino tecnicista e superficial enquanto outros acreditam que o professor será substituído pela tecnologia.

Nunan (1999) afirma que o uso de novas tecnologias como instrumentos pedagógicos auxiliares facilita uma *"aprendizagem independente e colaborativa e está em harmonia com a visão construtivista do conhecimento"* própria das *"abordagens de aprendizagem centradas no aluno".*

Segundo Coscarelli e Ribeiro (2005)

> *"todo processo de educação deve fazer sentido para educador e educandos, permitindo que eles possam transcender a fragmentação do conhecimento para alcançar uma visão inter e transdisciplinar"; "um projeto de educação tecnológica deve ter como foco a interdisciplinaridade, a formação integral do homem, a mediação entre ciência e tecnologia, cultura e conhecimento e entre homem e sociedade"; "um projeto de educação tecnológica precisa ter intencionalidade e respaldo teórico"; "a educação, inclusive a tecnológica, deve estimular o raciocínio humano, sobretudo, cabe à educação resgatar o homem da sua pequenez, ampliando os horizontes, buscando outras opções, tornando as pessoas mais sensíveis e comunicativas."*

Então, o que pode ser feito e de que maneira deve ser feito a fim de que estudantes e professores possam utilizar-se das novas tecnologias e construam um aprendizado de qualidade na aprendizagem matemática? O emprego do software Geogebra facilita ou favorece a visualização dos estudantes na resolução de equações do 1° grau de forma geométrica?

Para responder a essa pergunta, a proposta a ser apresentada aqui tem a finalidade de apresentar aos estudantes tais conceitos e permitir aos mesmos o estabelecimento da conexão entre os resultados obtidos no papel e a interpretação geométrica desses utilizando o software livre GeoGebra[1], despertando o interesse dos mesmos pelo assunto e permitindo aprenderem de forma objetiva e interativa, utilizando assim recursos tecnológicos para a construção da aprendizagem e não apenas aulas expositivas, o que permite a ampliação dos horizontes, permitindo a construção de conceitos e a investigação das possíveis soluções e caminhos a serem seguidos de forma clara e objetiva.

A metodologia a ser utilizada nessa proposta terá como referencial teórico a Engenharia Didática. Segundo Almoloud e Coutinho (1981), *"a Engenharia Didática, vista como metodologia de pesquisa, caracteriza-se, em primeiro lugar, por um esquema experimental baseado em "realizações didáticas"em sala de aula, isto é, na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino."*

A presente proposta foi realizada utilizando-se sete folhas de atividades, cada uma contendo uma abordagem diferente com conteúdos diversificados, as quais formam a sequência didática aplicada aos estudantes. Esse material foi adaptado e elaborado com base no Currículo em Ação de matemática da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, sendo o mesmo complementado e adaptado pelo autor para os fins dessa proposta, de acordo com a referência (SEDUC-SP, 2022).

[1] <https://www.geogebra.org/classic>

A seguir temos uma descrição breve dos capítulos desta dissertação.

Este Capítulo 1 traz o ponto de vista de alguns autores sobre os processos de ensino e aprendizagem, com as possíveis dificuldades enfrentadas pelos estudantes e suas possíveis causas, além de falar sobre a importância da utilização de novas tecnologias na sala de aula.

O Capítulo 2 traz um pouco da história das equações do 1^o grau.

O Capítulo 3 cita alguns conceitos relacionados à geometria analítica tais como coordenadas cartesianas no plano, posições de um ponto em relação ao sistema e equação da reta.

O Capítulo 4 apresenta o conceito de álgebra elementar, falando sobre as equações do 1^o grau com duas variáveis e apresentando, através de exemplos, os métodos de resolução dos sistemas de equações do 1^o grau com duas incógnitas.

O Capítulo 5 faz uma breve descrição do software GeoGebra, explica a utilização de suas principais ferramentas e fala de sua importância como instrumento de aprendizagem no Ensino Fundamental Anos Finais.

O Capítulo 6 fala sobre a metodologia adotada para a aplicação deste trabalho, no caso, a Engenharia Didática.

O Capítulo 7 apresenta e faz uma descrição das atividades elaboradas para o desenvolvimento deste trabalho, no caso, a sequência didática.

O Capítulo 8 apresenta as atividades desenvolvidas pelos estudantes do 8^o ano do Ensino Fundamental da escola estadual Dr. João Gabriel Ribeiro do município de São José do Rio Pardo, estado de São Paulo e faz uma análise das respostas dadas pelos mesmos durante a aplicação da sequência didática. Aqui também é feita uma breve descrição da turma e da escola.

No Capítulo 9 são colocadas as conclusões sobre a aplicação da proposta, sendo feita uma reflexão sobre a metodologia utilizada e sobre as aplicações realizadas. Além disso, traz um pouco sobre a devolutiva das atividades aos estudantes.

2 UM POUCO DA HISTÓRIA DAS EQUAÇÕES DO 1º GRAU

Atualmente, no 7º ano do Ensino Fundamental Anos Finais, é feita a introdução do conceito de equação como uma igualdade onde existe pelo menos uma letra representando um valor desconhecido. Assim, a linguagem algébrica aparece quando temos um problema a resolver e conseguimos interpretá-lo e representá-lo através de uma linguagem com símbolos. Dessa forma, a linguagem algébrica é uma forma de expressar relações matemáticas utilizando símbolos, letras e operadores, o que permite a representação de equações, expressões e fórmulas matemáticas num contexto amplo, sendo também utilizada em inúmeras situações do cotidiano.

A origem primeira da palavra *equação* vem do árabe *adala* que significa *ser igual a*. Por serem desconhecidos, esses valores são representados por letras.

A partir do século XI, na Europa, a álgebra, através do matemático árabe Al-Khwarizmi, figura 2.1, começa a ser apresentada com o estudo sobre equações com uma ou mais incógnitas.

Figura 2.1 – Estátua de Al-Khwarizmi em Khiva, no Uzbequistão.

Fonte: Wikimedia Commons.

Segundo Boyer (1974), Al-Khwarizmi (738-850) escreveu um livro que tem como título Aljabr Wa'l Muqabalah, sendo o significado da palavra Aljabr presumido como sendo algo como "restauração" ou "completação" e parece referir-se à transposição de termos subtraídos para o outro lado da equação e a palavra Muqabalah, ao que se diz, refere-se à "redução" ou "equilíbrio", isto é, ao cancelamento de termos semelhantes em lados opostos da equação. Desse título veio o termo álgebra, pois foi por esse livro que mais tarde a Europa aprendeu o ramo da matemática que tem esse nome. Al-Khwarizmi resolveu equações de uma maneira semelhante à que utilizamos atualmente; o que diferenciava é que até mesmo os números eram representados por palavras.

Diofante, um matemático grego, figura 2.2, também merece destaque nessa abordagem sobre equações. Ainda segundo Boyer (1974), é chamado, às vezes, de o "pai da álgebra", embora esse título pertença mais a Al-Khwarizmi. É verdade que em dois aspectos a obra de Al-Khwarizmi representa um retrocesso em relação à de Diofante, pois é de nível bem mais elementar do que o que se encontra nos problemas de Diofante além do que já foi citado anteriormente onde até mesmo os números eram representados por palavras. Diofante tem uma parte do seu trabalho voltada à resolução de 130 problemas, os quais abordam sobre equações do primeiro e do segundo grau. Escreveu três trabalhos, sendo: Aritmética (equações determinadas em uma incógnita), Sobre Números Poligonais (equações indeterminadas do segundo grau) e Porismas (equações indeterminadas do segundo grau).

Figura 2.2 – Diofante, o impulsionador da álgebra

Fonte: Wikipedia

René Descartes (1596-1650), figura 2.3, filósofo e matemático francês, propôs, na primeira metade do século XVII, a representação de quantidades desconhecidas de uma equação utilizando as letras do alfabeto x e y.

Figura 2.3 – Rene Descartes

Fonte: MacTutor History of Mathematics

3 ALGUNS CONCEITOS SOBRE GEOMETRIA ANALÍTICA

A Geometria Analítica relaciona a geometria à álgebra, ou seja, permite que sejam resolvidos problemas geométricos com a utilização de métodos e símbolos algébricos, permitindo a interpretação e contextualização de problemas do cotidiano. A seguir, serão apresentados alguns conceitos importantes.

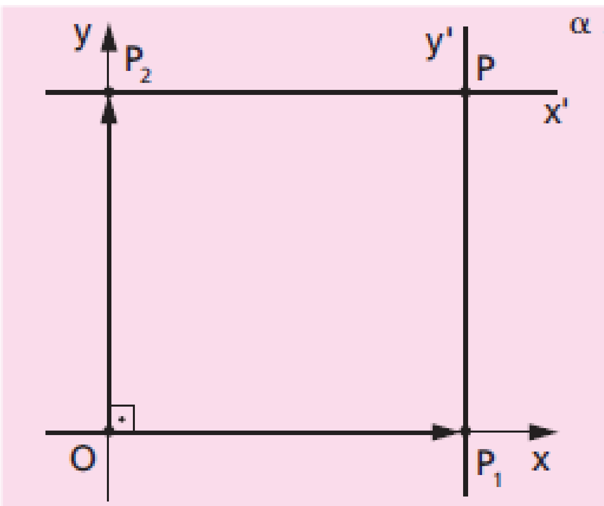
Os conteúdos matemáticos detalhados neste capítulo foram extraídos de (IEZZI, 2013).

3.1 COORDENADAS CARTESIANAS NO PLANO

3.1.1 Definição

Consideremos dois eixos x e y perpendiculares em O, os quais determinam o plano α.
Dado um ponto P qualquer, $P \in a$, conduzamos por ele duas retas: $x'//x$ e $y'//y$.
Denominemos P_1 a interseção de x com y' e P_2 a interseção de y com x'.
A figura 3.1 a seguir representa a situação descrita anteriormente:

Figura 3.1 – Coordenadas Cartesianas no Plano



Fonte: Iezzi (2013).

Nessas condições definimos:
a) abscissa de P é o número real $x_P = \overline{OP_1}$.
b) ordenada de P é o número real $y_P = \overline{OP_2}$.
c) coordenadas de P são os números reais x_P e y_P, geralmente indicados na forma de um par ordenado (x_P, y_P), em que x_P é o primeiro termo.
d) eixo das abscissas é o eixo x (ou Ox).

e) eixo das ordenadas é o eixo y (ou Oy).

f) sistema de eixos cartesiano ortogonal (ou ortonormal ou retangular) é o sistema xOy.

g) origem do sistema é o ponto O.

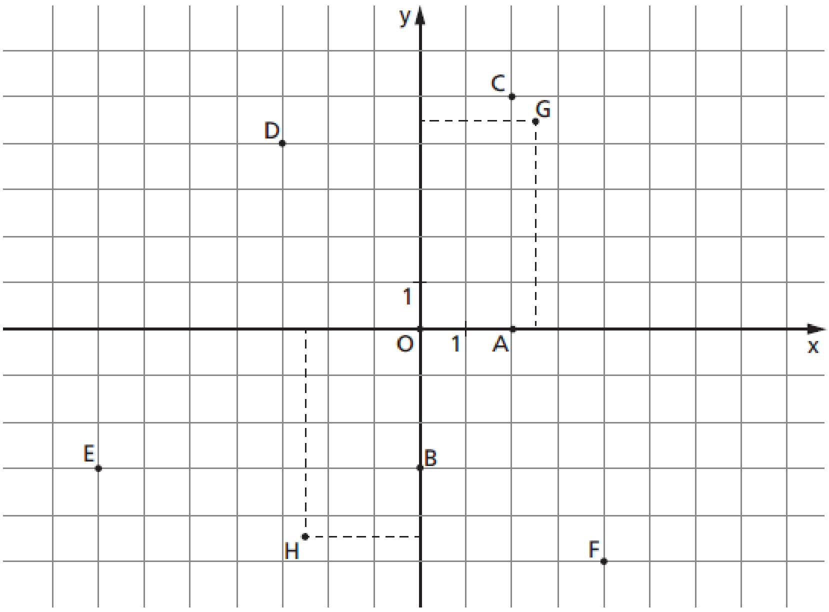
h) plano cartesiano é o plano α.

3.1.2 Aplicação

Vamos localizar os pontos $A(2,0)$, $B(0,-3)$, $C(2,5)$, $D(-3,4)$, $E(-7,-3)$, $H\left(\dfrac{-5}{2}, \dfrac{-9}{2}\right)$ no plano cartesiano, lembrando que, no par ordenado, o primeiro número representa a abscissa e o segundo, a ordenada do ponto.

A figura 3.2 a seguir ilustra a situação descrita anteriormente.

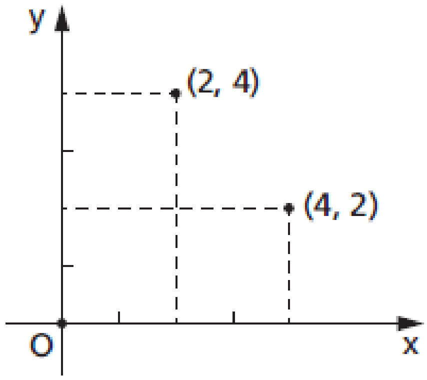
Figura 3.2 – Localizando os pontos



Fonte: Iezzi (2013).

Observação importante: Notemos que os pares ordenados $(4,2)$ e $(2,4)$, figura 3.3, não são iguais. Eles se diferenciam pela ordem de seus termos e, portanto, não representam o mesmo ponto do plano cartesiano

Figura 3.3 – Representação dos pontos



Fonte: Iezzi (2013).

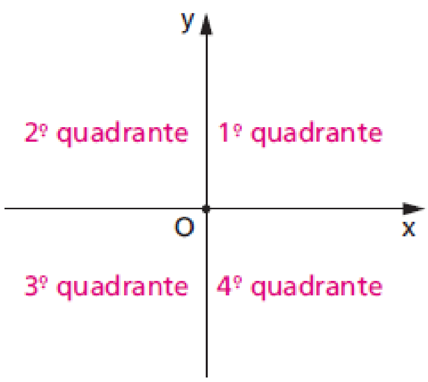
De maneira mais geral, se a e b são números reais distintos, então:

$(a, b) \neq (b, a)$.

3.2 POSIÇÕES DE UM PONTO EM RELAÇÃO AO SISTEMA

Os eixos x e y dividem o plano cartesiano em quatro regiões angulares chamadas quadrantes, que recebem os nomes indicados na figura 3.4.

Figura 3.4 – Posições de um ponto em relação ao sistema



Fonte: Iezzi (2013).

É evidente que:

P $\in$ 1º quadrante $\Leftrightarrow x_P \geq 0$ e $y_P \geq 0$.
P $\in$ 2º quadrante $\Leftrightarrow x_P \leq 0$ e $y_P \geq 0$.
P $\in$ 3º quadrante $\Leftrightarrow x_P \leq 0$ e $y_P \leq 0$.
P $\in$ 4º quadrante $\Leftrightarrow x_P \geq 0$ e $y_P \leq 0$.

3.3 EQUAÇÃO DA RETA

3.3.1 Equação Geral

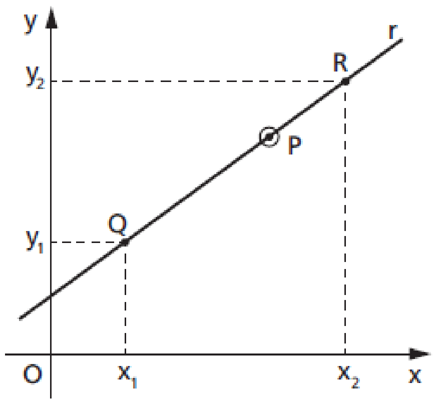
Teorema: “A toda reta r do plano cartesiano está associada ao menos uma equação da forma $ax + by + c = 0$ em que a, b, c são números reais, a $\neq 0$ ou $b \neq 0$, e (x, y) representa um ponto genérico de r.”

Demonstração

Sejam Q(x_1, y_1) e R(x_2, y_2) dois pontos distintos do plano cartesiano. Isto significa que x_1, y_1, x_2 e y_2 são números reais (constantes) conhecidos.

Seja r a reta definida pelos pontos Q e R. Se $P(x, y)$ é um ponto que percorre r, então x e y são variáveis. Como podemos observar na figura 3.5, P, Q, R são colineares.

Figura 3.5 – Representação



Fonte: Iezzi (2013).

Então, necessariamente teremos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo esse determinante pela regra de Laplace, temos:

$$x \cdot \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(y_1 - y_2) \cdot x + (x_2 - x_1) \cdot y + (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0$$

Fazendo $y_1 - y_2$ = a, $x_2 - x_1$ = b e $x_1 y_2 - x_2 y_1$ = c, decorre que todo ponto $P \in r$ deve verificar a equação $ax + by + c = 0$, chamada equação geral de r.

3.3.2 Interseção de duas retas

Todo ponto de interseção de duas retas tem de satisfazer as equações de ambas as retas. Portanto, obtemos o ponto comum $P(x_0, y_0)$ a duas retas concorrentes resolvendo o sistema formado pelas suas equações:

$$(S) \begin{cases} r: a_1 x & + & b_1 y & + & c_1 & = & 0 \\ s: a_2 x & + & b_2 y & + & c_2 & = & 0 \end{cases}$$

3.3.2.1 Aplicação

Obter a interseção das retas $r: x - y + 1 = 0$ e $s: 2x + y - 2 = 0$.

Vamos resolver o sistema pelo método da adição. Assim:

$$(S) \begin{cases} r: x & - & y & + & 1 & = & 0 & \quad (1) \\ s: 2x & + & y & - & 2 & = & 0 & \quad (2) \end{cases}$$

Somando (1) com (2), teremos

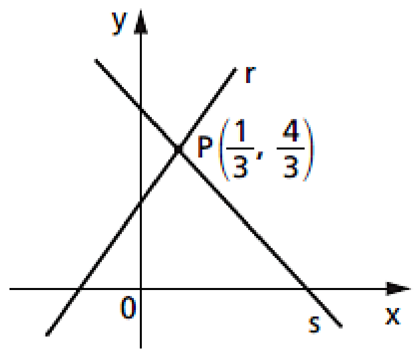
$3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$.

Agora, vamos voltar em (1), substituir o valor de x por $\frac{1}{3}$ e encontrar o valor de y. Assim, teremos:

(1) $\frac{1}{3} - y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3}$.

Logo, a interseção de r com s é $P\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$, como mostra a figura 3.6 dada a seguir.

Figura 3.6 – Ponto de interseção



Fonte: Iezzi (2013).

3.3.3 Posições relativas de duas retas

Dadas duas retas r e s cujas equações são

$$(\Sigma)\begin{cases} r : a_1x + b_1y = c_1 & (1) \\ s : a_2x + b_2y = c_2 & (2) \end{cases}$$

Elas podem ocupar apenas três posições relativas no plano cartesiano. Essas posições são definidas com base no número de pontos comuns às retas, isto é:

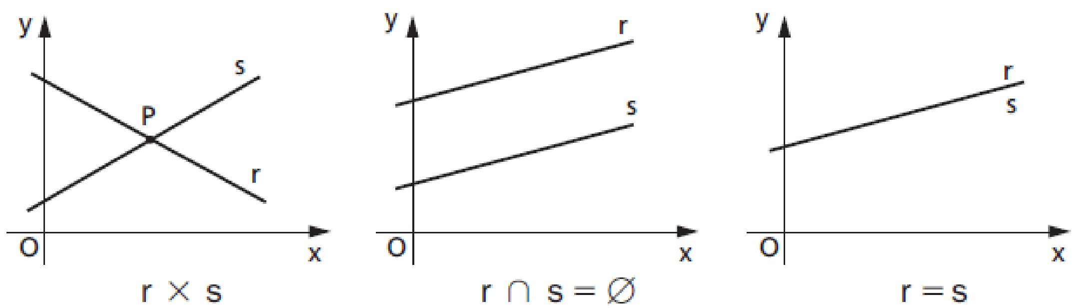
r e *s* são concorrentes $\Leftrightarrow$ *r* e *s* tem um único ponto comum.

r e *s* são paralelas e distintas $\Leftrightarrow$ *r* e *s* possuem nenhum ponto comum.

r e *s* são coincidentes $\Leftrightarrow$ tem uma infinidade de pontos comuns.

A figura 3.7 ilustra cada um desses casos.

Figura 3.7 – Posições relativas



Fonte: Iezzi (2013).

Com o símbolo $r \times s$ indicaremos que r e s são concorrentes; com $r \cap s = \varnothing$ indicaremos que r e s são paralelas e distintas; com r = s indicaremos que r e s são coincidentes (ou paralelas coincidentes).

Notemos que $r /\!/ s$ significa $r \cap s = \varnothing$ ou $r = s$.

4 UM POUCO DE ÁLGEBRA ELEMENTAR

A álgebra elementar é a forma mais básica da álgebra na qual, além das operações aritméticas e números, também utiliza-se o que chamamos de variáveis, que podem ser representadas por letras ou símbolos, como por exemplo a e b ou x e y, sendo que seu uso permite fazer generalizações na matemática, representando números que não são conhecidos dentro do contexto de um problema, além de permitir explorar as relações matemáticas entre quantidades.

A Base Nacional Curricular Comum (BRASIL, 2018) diz que:

> [...] os alunos devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas. É necessário, portanto, que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação. As técnicas de resolução de equações e inequações, inclusive no plano cartesiano, devem ser desenvolvidas como uma maneira de representar e resolver determinados tipos de problema, e não como objetos de estudo em si mesmos. (BRASIL, 2018)

Por isso, dentro da álgebra elementar, é importante também falar em expressões, que podem ser formadas por números, variáveis e operações aritméticas. Alguns exemplos podem ser: $a + 9$, $x^2 + 3x + 1$ e $5x + 4y$.

Quando temos uma igualdade entre duas expressões, temos uma equação. Um exemplo pode ser $x + 5 = 16$.

É importante destacar também a diferença entre incógnita e variável. A incógnita é um resultado fixo e não pode assumir outros valores. Por exemplo, na equação citada anteriormente, $x + 5 = 16$, o valor de x sempre será 11, ou seja, sempre será um valor fixo. Já a variável pode assumir infinitos valores. Por exemplo, em $y = x + 1$, o valor de y dependerá do valor de x. Assim, se $x = 5$ então $y = 6$. Já se atribuirmos a x o valor 8, y mudará seu valor e terá como resultado 9. Ou seja, quando mudamos o valor de x, y também muda, ocorrendo uma variação nos valores.

4.1 EQUAÇÕES DO 1$^{\text{O}}$ GRAU COM DUAS VARIÁVEIS

O estudo das equações do 1º grau com duas variáveis é parte da álgebra elementar e envolve a análise e resolução das mesmas. Esse tipo de equação é representado pela forma geral $ax + by + c = 0$, em que a e b são os coeficientes das variáveis x e y, respectivamente, e c é um valor constante. O objetivo é encontrar os valores de x e y que satisfaçam simultaneamente a igualdade entre os membros.

Por exemplo, em $ax + by + c = 0$, se atribuirmos a c o valor -20 e atribuirmos a a e b os valores 2 e 4, respectivamente, teremos $2x + 4y = 20$. Dessa forma, os valores de x e y que satisfazem simultaneamente a igualdade entre os membros são $x = 2$ e $y = 4$, ou $x = 6$ e $y = 2$, ou ainda $x = 0$ e $y = 5$, além de outras infinitas soluções.

4.2 SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO 1^{O} GRAU COM DUAS INCÓGNITAS

Parte dos conteúdos matemáticos detalhados nesta seção foram extraídos de (IEZZI; HAZZAN, 2013).

Existem várias maneiras de resolver problemas sobre sistemas de equações do 1^{o} grau com duas incógnitas . Vamos citar algumas:

a) Graficamente: uma maneira visual de representar e resolver equações do 1^{o} grau com duas incógnitas é por meio de um gráfico cartesiano. Plotam-se os pontos que satisfazem a igualdade e, em seguida, traça-se uma reta que passa por esses pontos. Se temos um sistema de equações com duas incógnitas, a solução do mesmo ocorre no ponto de interseção das retas correspondentes.

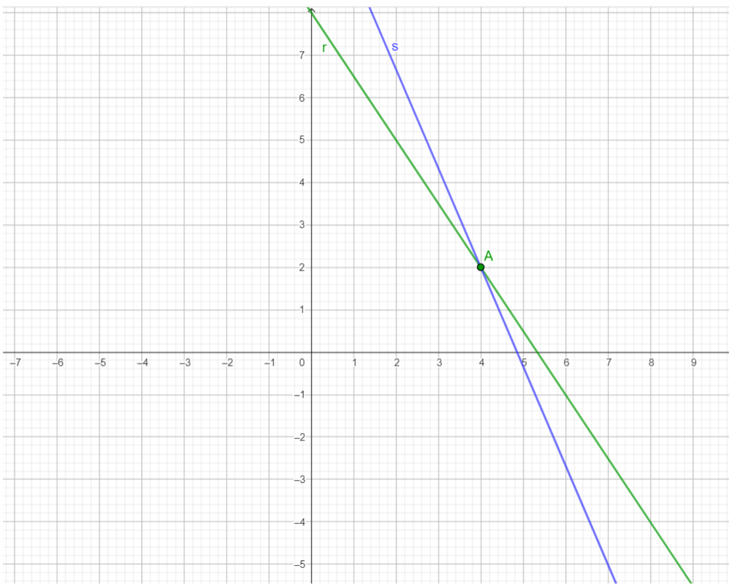
Exemplo

No sistema de equações do 1^{o} grau dado a seguir, encontre a solução gráfica para o mesmo.

$$(R)\begin{cases} r: 3x & + & 2y & = & 16 \\ s: 7x & + & 3y & = & 34 \end{cases}$$

Utilizando o software Geogebra, a solução gráfica é apresentada na figura 4.1 dada a seguir:

Figura 4.1 – Solução gráfica



Fonte: Elaborada pelo autor

O ponto A(4,2) é o ponto de interseção das retas r e s, ou seja, é a solução de (R).

b) Método da substituição: essa técnica envolve isolar uma das incógnitas em uma das equações e substituí-la na outra equação. Dessa forma, é possível obter uma nova equação com apenas uma incógnita, onde a solução é encontrada resolvendo a mesma e, em seguida, substituindo o valor encontrado em uma das equações originais para determinar o valor da outra incógnita.

Exemplo

No sistema de equações do 1º grau dado a seguir, encontre a solução utilizando o método da substituição.

$$(S)\begin{cases} x + 2y = 3 & (1) \\ 2x + y = 1 & (2) \end{cases} \tag{4.1}$$

Para começar, isola-se x na equação (1). Assim:

$$x + 2y = 3 \Rightarrow x = 3 - 2y \qquad (3)$$

Agora substitui-se na equação (2) o valor de x obtido em (3). Logo:

$2x+y = 1 \Rightarrow 2(3-2y)+y = 1 \Rightarrow 6-4y+y = 1 \Rightarrow 6-3y = 1 \Rightarrow 6-1 = 3y \Rightarrow 5 = 3y \Rightarrow$
$\Rightarrow y = \frac{5}{3}$ (4)

Agora que obteve-se o valor de y, basta voltar na equação (1), substituir y pelo valor obtido em (4) e calcular x. Assim:

$$x + 2y = 3 \Rightarrow x + 2(\frac{5}{3}) = 3 \Rightarrow x = 3 - \frac{10}{3} \Rightarrow x = \frac{9}{3} - \frac{10}{3} \Rightarrow x = \frac{-1}{3}$$

Logo, a solução do sistema (S) será $S\left(\frac{-1}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

c) Método da adição: essa técnica envolve manipular as equações para que os coeficientes de uma das incógnitas se tornem iguais, mas com sinais opostos. Isso permite que os termos correspondentes se anulem quando são somados. Ao eliminar uma incógnita, obtém-se uma nova equação com apenas uma incógnita, a qual pode ser resolvida para encontrar o valor correspondente. Em seguida, substitui-se esse valor em uma das equações originais para determinar o valor da outra incógnita.

Exemplo

No sistema de equações do 1º grau dado a seguir, encontre a solução utilizando o método da adição. Esse sistema é o mesmo do exemplo do método da substituição dado anteriormente.

$$(T)\begin{cases} x + 2y = 3 & (1) \\ 2x + y = 1 & (2) \end{cases}$$

Pode-se escolher qual das incógnitas será eliminada. Escolhendo eliminar a incógnita y, basta multiplicar a equação (2) por -2, obtendo a equação (3). Dessa forma, teremos:

$$(T)\begin{cases} x + 2y = 3 & (1) \\ -4x - 2y = -2 & (3) \end{cases}$$

Somando-se as equações (1) e (3), elimina-se a incógnita y e obtém-se a equação (4), apenas com a incógnita x:

$-3x = 1 \qquad (4)$

Agora, calcula-se x e chega-se ao resultado

$x = \dfrac{-1}{3}. \qquad (5)$

Com o valor de x obtido em (5), volta-se à equação (1), substitui-se esse valor na incógnita x e calcula-se o valor da incógnita y. Assim:

$$x + 2y = 3 \Rightarrow \frac{-1}{3} + 2y = 3 \Rightarrow 2y = 3 + \frac{1}{3} \Rightarrow 2y = \frac{9}{3} + \frac{1}{3} \Rightarrow 2y = \frac{10}{3} \Rightarrow y = \frac{10}{6} \Rightarrow y = \frac{5}{3}.$$

Logo, a solução do sistema (T) será $S\left(\dfrac{-1}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$.

5 O SOFTWARE GEOGEBRA COMO INSTRUMENTO DE APRENDIZAGEM NO ENSINO FUNDAMENTAL

O GeoGebra é uma ferramenta importante a ser utilizada no Ensino Fundamental Anos Finais e Ensino Médio como forma de despertar o interesse dos estudantes pela aprendizagem da matemática, além do fato de ser um software livre que permite trabalhar de forma dinâmica em todos os níveis da educação básica abordando diversos conteúdos, principalmente aqueles relacionados ao estudo de funções e da geometria. Ele foi desenvolvido por Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburg.

A seguir vamos apresentar algumas funcionalidades.

5.1 BARRA DE FERRAMENTAS

A Barra de ferramentas, Figura 5.1, localizada abaixo dos menus, é utilizada para inserir elementos sem a utilização da caixa de entrada. As opções estão organizadas em grupos de semelhantes, e para acessar as demais, basta clicar no ícone de expansão, no canto inferior direito de cada botão.

Figura 5.1 – Tipos de ferramentas.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para utilizar uma ferramenta, basta selecioná-la e, em seguida, selecionar ou criar os objetos necessários para a criação ou modificação do objeto envolvido. Após sua utilização, ela continua selecionada até que uma outra seja escolhida. As ferramentas padrão do GeoGebra são divididas em grupos, exibidos ao selecionar o botão do canto inferior direito de cada botão. Os grupos variam de acordo com cada Janela. Assim, temos:

5.1.1 Grupo 1

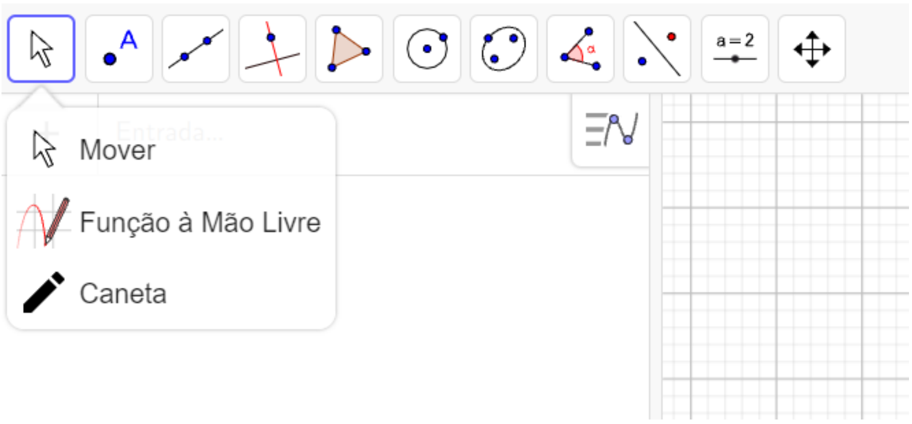
Aqui temos as ferramentas do Grupo 1, sendo elas: Mover, Função à Mão Livre e Caneta, descritas a seguir e mostradas na Figura 5.2.

– **Mover:** move um objeto ao longo da janela de visualização. Para isso, basta selecionar o objeto e arrasta-lo até a posição desejada.

– **Função à mão livre:** permite a criação de uma função ou objeto desenhando-o na janela de visualização.

– **Caneta:** escreva ou desenhe; troque a cor usando a barra de estilo.

Figura 5.2 – Grupo 1.



Fonte: Elaborado pelo autor.

5.1.2 Grupo 2

Aqui temos as ferramentas do Grupo 2, sendo elas: Ponto, Ponto em Objeto, Vincular/Desvincular Ponto, Interseção de Dois Objetos, Ponto Médio ou Centro, Número Complexo, Otimização e Raízes, descritas a seguir e mostradas na Figura 5.3.

– **Ponto:** cria um ponto na janela de visualização. Para isso, basta selecionar a posição desejada na janela. Existem três tipos de pontos no GeoGebra: um livre, de cor azul por padrão, que pode ser movimentado ao longo de toda janela, um móvel com restrição, de cor azul claro por padrão, que ocorre quando um ponto é inserido em algum objeto, como uma reta ou circunferência. Esse ponto pode ser movimentado, sem sair do objeto em que foi inserido. E, por último, há o ponto fixo, de cor preta por padrão, que ocorre quando sua posição é uma interseção entre objetos, como um ponto de tangência. A opção Ponto permite criar todos os tipos de pontos, todavia, móveis com restrição não ocorrem se foram criados dentro da região delimitada por um objeto. Por exemplo, considerando um círculo, se um ponto for inserido dentro de sua circunferência, ele só poderá se movimentar ao longo dela, mas, se for inserido dentro do círculo, será um ponto livre.

– **Ponto em Objeto:** faz justamente o que a opção ponto não faz quando se trata de uma região dentro do perímetro que a determina, permitindo sempre que o ponto se vincule ao objeto que está na posição onde será inserido.

– **Vincular/Desvincular Ponto:** vincula um ponto livre a um objeto próximo, ou desvincula um ponto móvel com restrição ou fixo. Para isso basta selecionar o ponto e, caso queira vincular, o objeto em questão.

– **Interseção de Dois Objetos:** cria um ponto fixo que pertence aos dois objetos ao mesmo tempo. Nos casos em que a interseção é um conjunto que contém mais de um ponto, apenas um ponto será criado. Para utilizar essa ferramenta, basta selecioná-la e, em seguida, selecionar os dois objetos que serão utilizados.

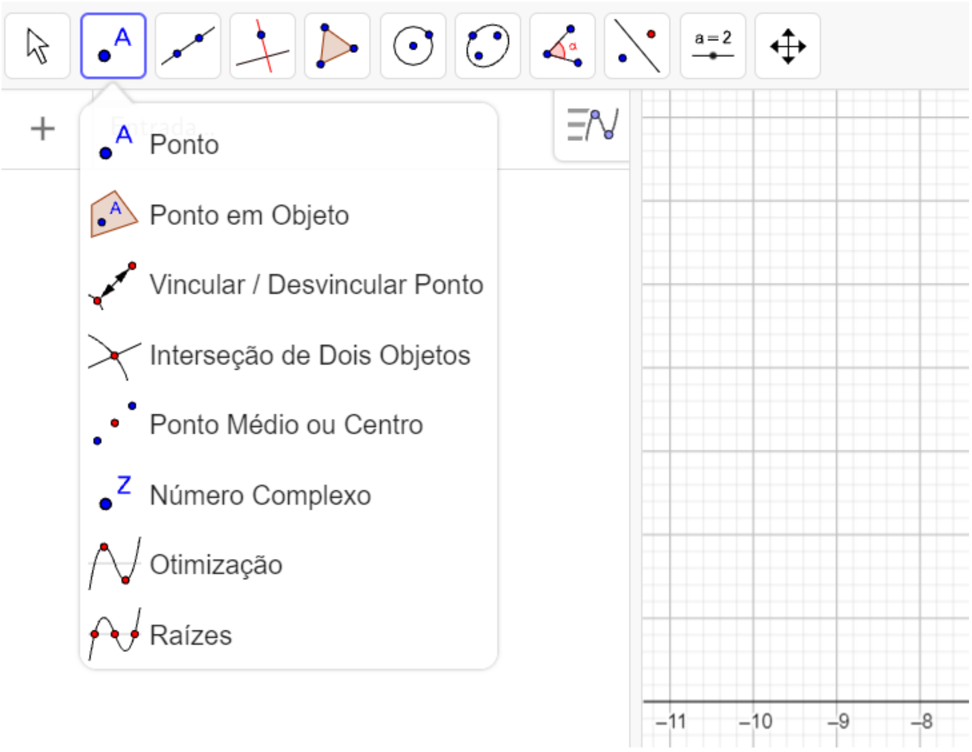
– **Ponto Médio ou Centro:** basta selecionar os dois pontos que darão origem ao novo objeto, cuja característica principal será ter a mesma distância entre os dois pontos escolhidos.

– **Número Complexo:** cria um ponto com coordenadas $(x; y)$; mas que representa o ponto z, cuja expressão é: $z = x + yi$, sendo i^2 igual a -1. Para utilizá-la, basta selecionar as coordenadas do ponto desejado na Janela de Visualização.

– **Otimização:** exibe todos os extremos locais de uma junção já determinada, bastando selecionar a ferramenta e depois a função que deseja utilizar para conhecer seus extremos locais.

– **Raízes:** funciona seguindo a mesma lógica da ferramenta Otimização, porém exibe as raízes da função escolhida.

Figura 5.3 – Grupo 2.



Fonte: Elaborado pelo autor.

5.1.3 Grupo 3

Aqui temos as ferramentas do Grupo 3, sendo elas: Reta, Segmento, Segmento com Comprimento Fixo, Semirreta, Caminho Poligonal, Vetor e Vetor a Partir de um Ponto, descritas a seguir e mostradas na Figura 5.4.

– **Reta:** depende de dois pontos. Basta criar ou selecionar os dois pontos por onde a reta passará.

– **Segmento:** utiliza o mesmo processo da opção Reta, selecionar os dois pontos que determinarão o segmento.

– **Segmento com Comprimento Fixo:** comprimento. A partir disso, será criado um segundo ponto, móvel com restrição, para determinar o segmento. É permitido movimentar o primeiro ponto, para mover o segmento, e rotacionar o segundo em torno no primeiro, uma vez que estará sempre fixo em relação à distância entre eles.

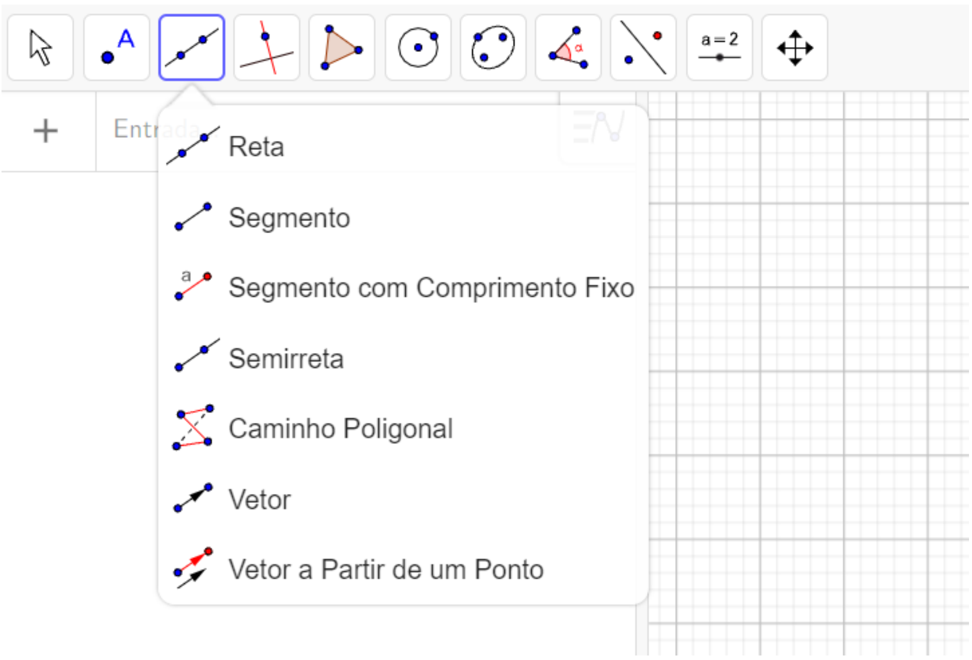
– **Semirreta:** poderá ser criada a partir de dois pontos já estabelecidos ou não. O primeiro indicará a origem da semirreta, enquanto o segundo funcionará como final do vetor direção da mesma.

– **Caminho Poligonal:** é o percurso ao longo dos lados de um polígono que liga um ponto tomado como inicial, até o último ponto que, sendo ligado ao primeiro, gera o polígono em questão. Para gerar tal caminho é necessário selecionar ou criar os vértices do polígono, que, a partir do segundo, vão ligando-se automaticamente ao anterior. A ferramente difere de um perímetro por desconsiderar sempre um dos lados do polígono.

– **Vetor:** é um segmento de reta orientado com inúmeras propriedades. Para cria-lo, basta selecionar ou criar o ponto de origem e, em seguida, sua outra extremidade.

– **Vetor a Partir de um Ponto:** gera um novo vetor com as mesmas propriedades de um já criado, mas com a origem em outro ponto. Isso é feito ao selecionar o vetor que deseja-se copiar e o ponto que será utilizado como origem do novo vetor.

Figura 5.4 – Grupo 3.



Fonte: Elaborado pelo autor.

5.1.4 Grupo 4

Aqui temos as ferramentas do Grupo 4, sendo elas: Reta Perpendicular, Reta Paralela, Mediatriz, Bissetriz, Reta Tangente, Reta Polar ou Diametral, Reta de Regressão Linear e Lugar Geométrico, descritas a seguir e mostradas na Figura 5.5.

- **Reta Perpendicular:** ao selecionar ou criar um ponto e, em seguida, escolher uma reta ou vetor já criado, a ferramenta gera uma nova reta perpendicular à escolhida, e que passa pelo ponto desejado.

- **Reta Paralela:** da mesma forma que funciona a Reta Perpendicular, essa ferramenta gera uma reta paralela à desejada, passando pelo ponto escolhido ou criado.

- **Mediatriz:** cria uma reta perpendicular ao segmento que liga dois pontos escolhidos, passando pelo seu ponto médio.

- **Bissetriz:** esse tipo de reta é o lugar geométrico de pontos com uma característica em comum. Sejam duas retas *a* e *b*, não coincidentes (ocupando lugares diferentes no espaço). Ao conjunto de pontos que possuem uma distância igual a ambas as retas damos o nome de Bissetriz. Para utilizar essa ferramenta basta selecionar as duas retas iniciais, ou três pontos, sendo o primeiro pertencente à primeira reta, o terceiro à segunda, e o segundo ponto como interseção delas. Para casos em que as retas são paralelas, não será possível escolher três pontos.

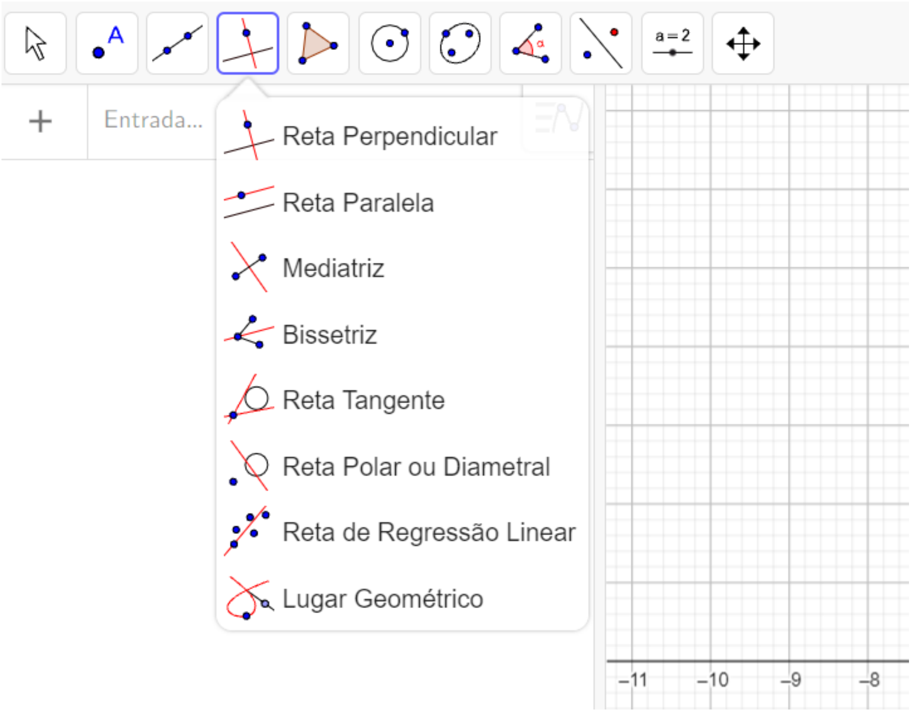
- **Reta Tangente:** define uma reta tangente a uma função, cônica ou círculo desejado. Ela depende de um ponto escolhido. Quando esse ponto pertence ao objeto desejado, a reta gerada será tangente à curva naquele ponto. Quando isso não ocorrer, será gerada, dependendo da possibilidade, uma reta tangente à curva que passe por aquele ponto, ou por um ponto contido na curva cuja coordenada x seja igual a do ponto selecionado. Quando existir mais de uma possibilidade de reta, a ferramenta gerará todas elas.

- **Reta Polar ou Diametral:** utilizada ao selecionar um cônica, ou círculo, e um ponto qualquer.

- **Reta de Regressão Linear:** determina a reta que mais se adequada a uma sequência de pontos. Ela determina uma reta segundo o método dos mínimos quadrados, considerando que aqueles pontos possuem uma margem de erro em relação ao ideal. Para utilizá-la, basta selecionar a sequência de pontos que gerará a reta desejada.

- **Lugar Geométrico:** cria um lugar geométrico a partir de dois pontos, havendo relação de dependência entre eles, ou a partir de um ponto e um controle deslizante.

Figura 5.5 – Grupo 4.



Fonte: Elaborado pelo autor.

5.1.5 Grupo 5

Aqui temos as ferramentas do Grupo 5, sendo elas: Polígono, Polígono Regular, Polígono Rígido e Polígono Semideformável, descritas a seguir e mostradas na Figura 5.6.

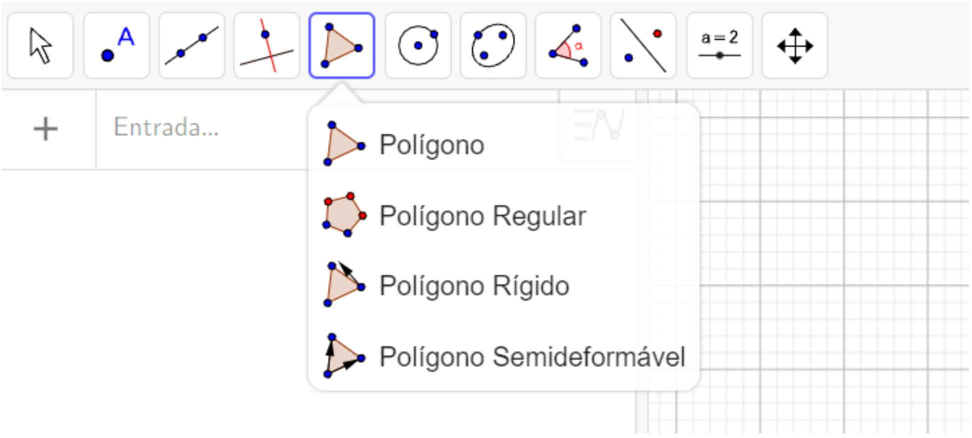
– **Polígono:** para criar um novo polígono é necessário selecionar ou criar os vértices do mesmo, sendo que cada vértice será ligado ao anterior através de um segmento de reta, tornando necessário selecionar o vértice inicial para fechar a região do polígono.

– **Polígono Regular:** para criar um polígono regular (todas as arestas de mesmo comprimento), basta determinar os dois primeiros vértices e, em seguida, a quantidade total dos mesmos na figura. Os vértices gerados a partir dessa etapa serão fixos em relação aos outros, enquanto que os dois iniciais serão livres e, quando movimentados, a distância entre eles determinará o tamanho das arestas do polígono e rotacioná-los um em torno do outro também rotacionará toda a figura.

– **Polígono Rígido:** pode ser utilizada de duas formas: selecionando os vértices da nova figura ou um polígono já criado. O resultado da ferramenta será um polígono que não poderá ser modificado, tendo apenas um ponto livre e outro que poderá ser rotacionado em torno do primeiro.

– **Polígono Semideformável:** segue o mesmo padrão das outras, mas gera um polígono onde mover o primeiro ponto significa mover todo o polígono, enquanto os outros são livres para deformá-lo.

Figura 5.6 – Grupo 5.



Fonte: Elaborado pelo autor.

5.1.6 Grupo 6

Aqui temos as ferramentas do Grupo 6, sendo elas: Círculo dados Centro e Um de seus Pontos, Círculo: Centro e Raio, Compasso, Círculo definido por Três Pontos, Semicírculo, Arco Circular, Arco Circuncircular, Setor Circular e Setor Circuncircular, descritas a seguir e mostradas na Figura 5.7.

– **Círculo dados Centro e Um de seus Pontos:** para utilizar essa ferramenta basta selecionar primeiro ponto referente ao centro do círculo e, em seguida, um dos pontos que fará parte da figura (para determinar o raio).

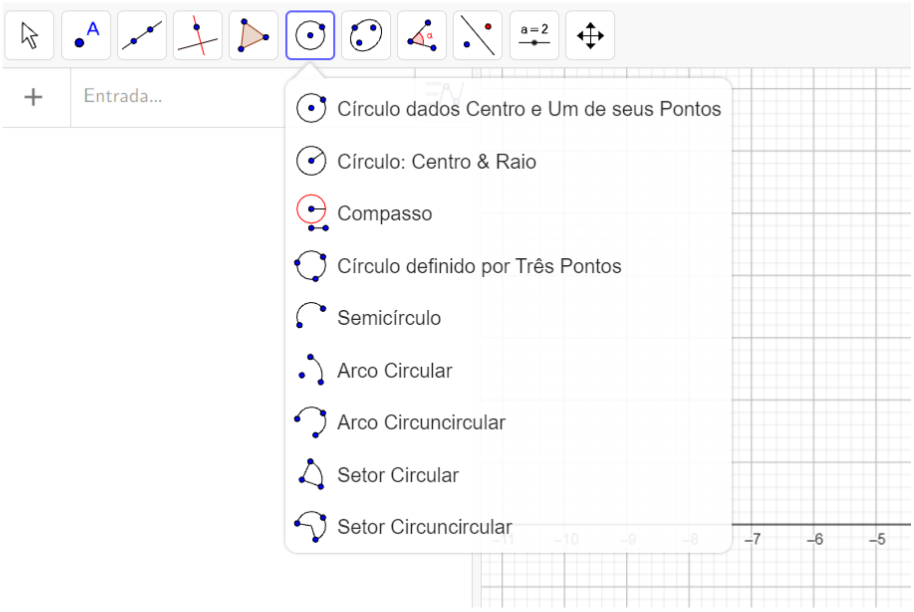
– **Círculo: Centro e Raio:** para utilizar essa ferramenta é necessário selecionar o ponto referente ao centro do círculo e, em seguida, determinar um valor para o seu raio.

– **Compasso:** utiliza a distância entre dois pontos para que a mesma seja o raio de um novo círculo a ser determinado. Para utilizá-la basta selecionar os dois pontos e, em seguida, o ponto que será o centro do novo círculo.

– **Círculo definido por Três Pontos:** para utilizar essa ferramenta só é necessário selecionar os três pontos que determinarão o novo círculo. Caso eles sejam colineares (contidos na mesma reta), será criada uma reta, representando parte de um círculo de dimensões infinitas.

- **Semicírculo:** cria um semicírculo, a metade de um círculo cujo diâmetro é a distância entre os dois pontos selecionados. A partir da seleção do primeiro ponto, a figura vai seguir uma orientação horária, e será desenhada até o segundo ponto.
- **Arco Circular:** utiliza três pontos para criar um arco. O primeiro ponto determinará o centro do arco que será criado. O segundo dará início ao mesmo, enquanto que o terceiro representará o final, e o arco será criado indo do primeiro ponto ao segundo no sentido anti-horário.
- **Arco Circuncircular:** utiliza três pontos para criar um arco. O primeiro ponto determinará o início do arco que será criado. O segundo será um ponto contido no arco, enquanto que o terceiro representará o final, e o arco será criado indo do primeiro ponto ao terceiro no sentido horário.
- **Setor Circular:** utiliza três pontos para criar um setor circular. O primeiro ponto determinará o centro do setor que será criado. O segundo dará início ao mesmo, enquanto que o terceiro representará a direção do segmento que vai do centro até o ponto final, e o setor será criado indo do segundo ponto ao segmento gerado pelo terceiro no sentido anti-horário.
- **Setor Circuncircular:** utiliza três pontos para criar um setor circuncircular. Os primeiros dois pontos estarão contidos no círculo que dá origem ao setor desejado, sendo o primeiro ponto o início do objeto. O último ponto determinará o final do setor, e a figura será construída indo do primeiro ao terceiro ponto no sentido horário.

Figura 5.7 – Grupo 6.



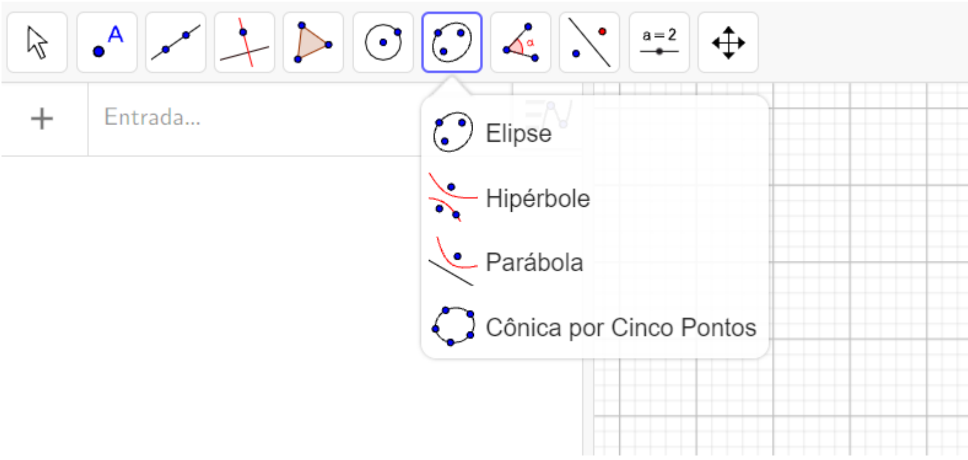
Fonte: Elaborado pelo autor.

5.1.7 Grupo 7

Aqui temos as ferramentas do Grupo 7, sendo elas: Elipse, Hipérbole, Parábola e Cônica por Cinco Pontos, descritas a seguir e mostradas na Figura 5.8.

- **Elipse:** gera uma elipse a partir de três pontos, sendo os dois primeiros seus focos, e o terceiro um ponto contido na mesma.
- **Hipérbole:** gera uma hipérbole a partir de três pontos, sendo os dois primeiros seus focos, e o terceiro um ponto contido na mesma.
- **Parábola:** gera uma parábola a partir da seleção de seu foco e, em seguida, da reta diretriz.
- **Cônica por Cinco Pontos:** como uma cônica pode ser deduzida a partir de cinco pontos contidos nela, essa ferramenta utiliza-se desse conceito para gerar uma cônica, basta selecionar os cinco pontos desejados.

Figura 5.8 – Grupo 7.



Fonte: Elaborado pelo autor.

5.1.8 Grupo 8

Aqui temos as ferramentas do Grupo 8, sendo elas: Ângulo, Ângulo com Amplitude Fixa, Distância, Comprimento ou Perímetro, Área, Inclinação, Lista, Relação e Inspetor de Funções, descritas a seguir e mostradas na Figura 5.9.

– **Ângulo:** determina o ângulo entre dois segmentos. Para utilizá-la basta selecionar os segmentos, ou o primeiro ponto, pertencente ao primeiro segmento, o segundo, interseção entre os segmentos e onde estará situado o ângulo e, por último, o terceiro, determinando o segundo segmento. O ângulo gerado será construído seguindo do primeiro ponto ao terceiro no sentido anti-horário.

– **Ângulo com Amplitude Fixa:** determina um ângulo a partir de um segmento e de sua amplitude. Para isso, basta selecionar os dois pontos que formam o primeiro segmento, e a amplitude desejada. Há a possibilidade de escolher se o ângulo será gerado no sentido horário ou anti-horário. A ferramenta gerará o segmento necessário para formar o ângulo com as características que foram definidas.

– **Distância, Comprimento ou Perímetro:** exibe uma caixa de texto com informação sobre um ou mais objetos, como distância entre eles, comprimento de um segmento, ou perímetro de uma figura. Para isso, basta selecionar os elementos que determinam a informação desejada.

– **Área:** exibe uma caixa de texto com informação sobre a área de um objeto. Para isso, basta selecionar o objeto cuja área será exibida.

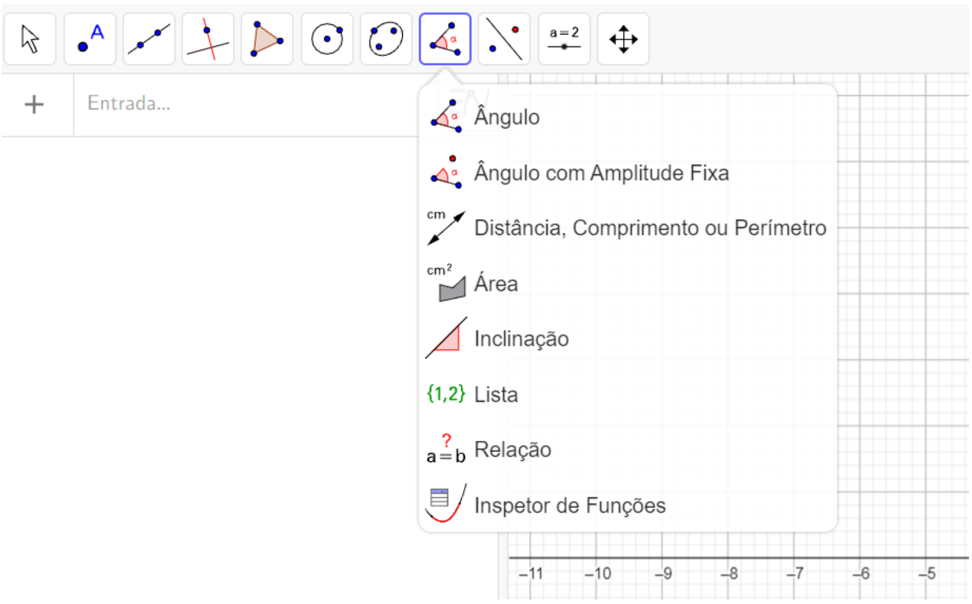
- **Inclinação:** apresenta o coeficiente de inclinação de uma reta, semirreta ou segmento. Para isso, basta selecionar o objeto cujo coeficiente deseja-se descobrir.

- **Lista:** funciona em conjunto com a Planilha, sendo explicada na seção Planilha.

- **Relação:** informa as relações entre dois objetos, basta selecioná-los.

- **Inspetor de Funções:** informa as propriedades de determinada função. Para isso basta selecionar a função desejada.

Figura 5.9 – Grupo 8.



Fonte: Elaborado pelo autor.

5.1.9 Grupo 9

Aqui temos as ferramentas do Grupo 9, sendo elas: Reflexão em Relação a uma Reta, Reflexão em Relação a um Ponto, Inversão, Rotação em Torno de um Ponto, Translação por um Vetor e Homotetia, descritas a seguir e mostradas na Figura 5.10.

- **Reflexão em Relação a uma Reta:** reflete um objeto em relação a uma reta. Para isso, basta selecionar o objeto e a reta desejados.

- **Reflexão em Relação a um Ponto:** reflete um objeto em relação a um ponto. Para isso, basta selecionar o objeto e ponto desejados.

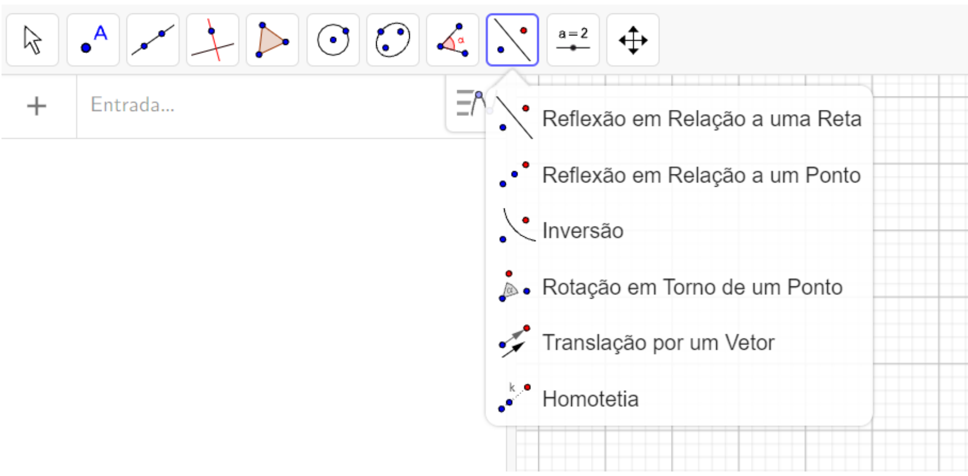
- **Inversão:** inverte um objeto em relação a um círculo. Para isso, basta selecionar primeiro o objeto e, em seguida, o círculo desejado.

- **Rotação em Torno de um Ponto:** permite que um novo objeto seja criado a partir da rotação de um primeiro, rotacionando-o em torno de um ponto. Para utilizar essa ferramenta basta selecionar primeiro o objeto que será rotacionado, o ponto central da rotação e, em seguida, o ângulo desejado e o seu sentido, seja ele horário ou anti-horário.

- **Translação por um Vetor:** cria um novo objeto a partir da movimentação de um objeto inicial do mesmo tipo pelo "caminho"descrito por um vetor. Para utilizar essa ferramenta basta selecionar primeiro o objeto que será movimentado e, em seguida, o vetor que descreverá esse caminho.

- **Homotetia:** multiplica por um fator constante a distância de um ponto qualquer do espaço a um ponto fixo, deslocando-o sobre a reta definida por estes dois pontos. Para utilizar essa ferramenta basta selecionar o objeto desejado, o ponto de homotetia e, em seguida, o fator multiplicativo.

Figura 5.10 – Grupo 9.



Fonte: Elaborado pelo autor.

5.1.10 Grupo 10

Aqui temos as ferramentas do Grupo 10, sendo elas: Controle Deslizante, Texto, Inserir Imagem, Botão, Caixa para Exibir/Esconder Objetos e Campo de Entrada, descritas a seguir e mostradas na Figura 5.11.

– **Controle Deslizante:** permite, ao clicar na Janela de Visualização, a criação de um botão rolante, usado para determinar o valor do objeto em si. Ele pode ser configurado para que tenha um valor mínimo, máximo, uma velocidade de variação e a forma como o mesmo varia. Essa ferramenta é útil para criar parâmetros para serem utilizados juntos a outras ferramentas.

– **Texto:** permite a criação de um texto para ser exibido na Janela de Visualização, a partir da posição selecionada.

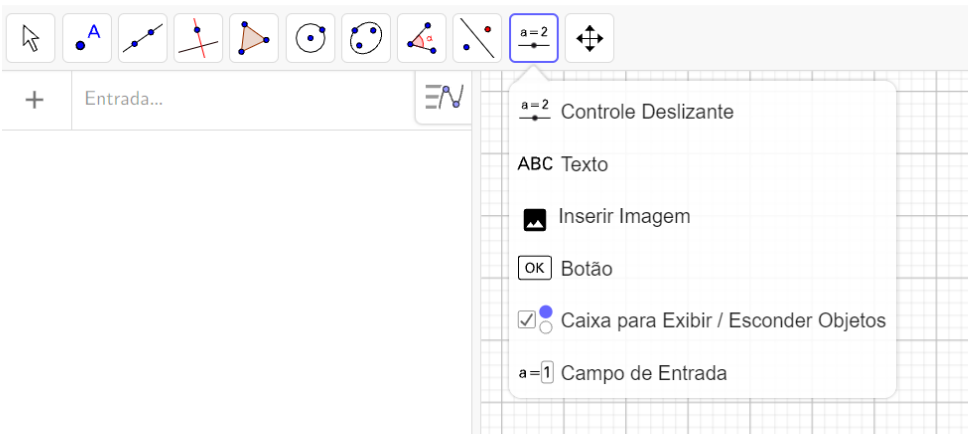
– **Inserir Imagem:** permite a adição de uma imagem à Janela de Visualização, que possuir á, em seus cantos inferiores, pontos móveis, que serão necessários para a aplicação de configurações na exibição da mesma.

– **Botão:** cria um botão que, ao ser selecionado, executará o código na linguagem GeoGebra definido para o mesmo.

– **Caixa para Exibir/Esconder Objetos:** cria um ambiente onde é possível selecionar quais objetos serão exibidos ou não na Janela de Visualização. Basta selecionar a ferramente e, em seguida, selecionar quais objetos estarão nesse ambiente.

– **Campo de Entrada:** funciona de forma semelhante ao Controle Deslizante. Ela cria um campo vinculado a uma variável, onde é possível que você insira um novo valor para a mesma, basta selecionar uma legenda para o mesmo e decidir a qual variável o campo vai estar vinculado.

Figura 5.11 – Grupo 10.



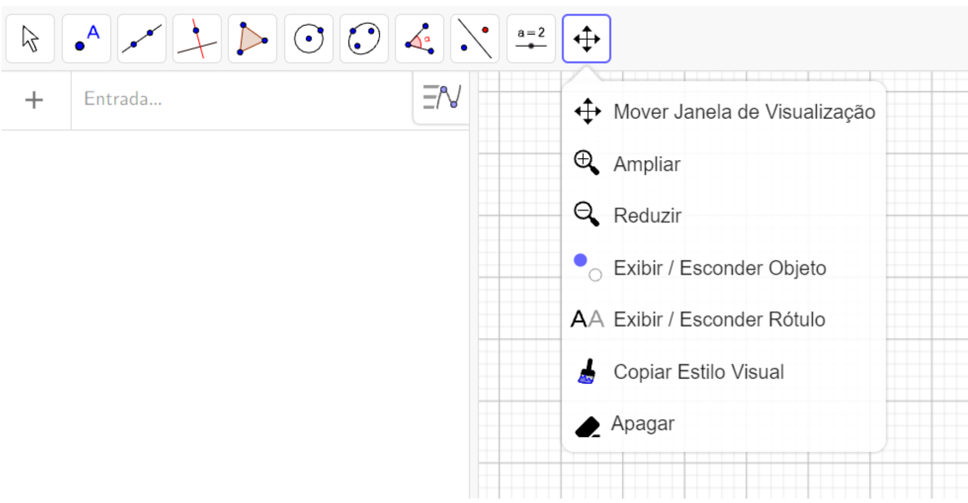
Fonte: Elaborado pelo autor.

5.1.11 Grupo 11

Aqui temos as ferramentas do Grupo 11, sendo elas: Mover Janela de Visualização, Ampliar, Reduzir, Exibir/Esconder Objeto, Exibir/Esconder Rótulo, Copiar Estilo Visual e Apagar, descritas a seguir e mostradas na Figura 5.12.

- **Mover Janela de Visualização:** serve para movimentar o conteúdo exibido na janela de visualização, permitindo percorrer a visualização do ambiente.
- **Ampliar:** amplia a Janela de Visualização com foco no local selecionado.
- **Reduzir:** reduz a Janela de Visualização com foco no local selecionado.
- **Exibir/Esconder Objeto:** permite exibir e ocultar um ou mais objetos temporariamente. Para isso, basta selecionar a ferramenta, os objetos que serão ocultados e, por final, uma nova ferramenta. Para exibir novamente, basta selecionar mais uma vez a ferramenta.
- **Exibir/Esconder Rótulo:** permite exibir e ocultar o rótulo de objetos, a identificação dos mesmos na Janela de Visualização. Para isso, basta selecionar o objeto cujo rótulo será exibido ou ocultado.
- **Copiar Estilo Visual:** permite que o estilo de um determinado objeto seja copiado para outros objetos. Para isso, é preciso selecionar o objeto cujo estilo será copiado, e, em seguida, aqueles que receberão a nova configuração.
- **Apagar:** apaga os objetos que forem selecionados após a ativação da ferramenta.

Figura 5.12 – Grupo 11.

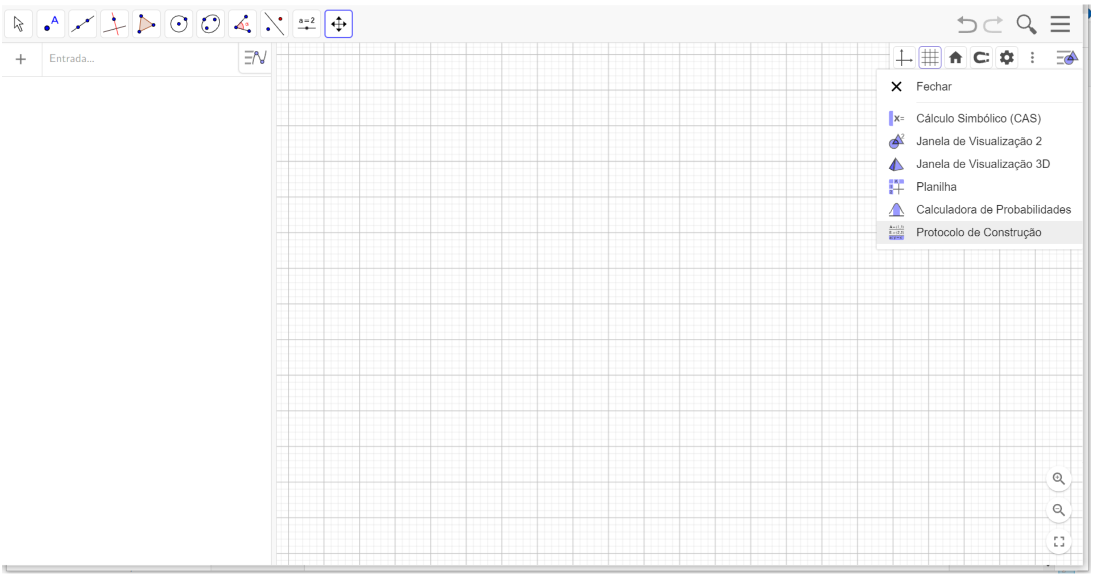


Fonte: Elaborado pelo autor.

5.2 JANELA DE ÁLGEBRA

A “Janela de Álgebra”, Figura 5.13 é o local onde ficam todas as informações algébricas correspondentes aos objetos geométricos apresentados na “Janela de Visualização” do GeoGebra. Sendo assim, qualquer objeto presente na “Janela de Álgebra” pode ser editado. Quando isso acontece, na “Janela de Visualização”, de forma automática, o objeto geométrico correspondente ao algébrico que foi editado corresponderá às modificações realizadas.

Figura 5.13 – Janela de álgebra (à esquerda) e janela de visualização (quadriculada à direita).

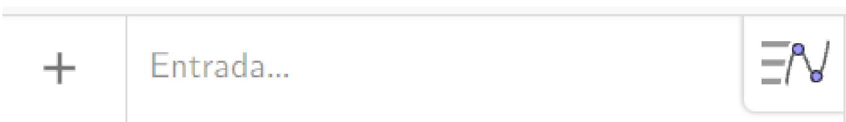


Fonte: Elaborado pelo autor.

5.3 CAMPO DE ENTRADA

No “Campo de Entrada” da janela de álgebra, Figura 5.14 é possível trabalhar nesse software utilizando comandos escritos e o que é mais interessante é que praticamente todas as ferramentas da Barra de Ferramentas podem ser acessadas usando comandos escritos.

Figura 5.14 – Campo de Entrada da janela de álgebra.



Fonte: Elaborado pelo autor.

6 A ENGENHARIA DIDÁTICA COMO METODOLOGIA

O referencial teórico utilizado para a realização deste trabalho é a Engenharia Didática, que é um termo que foi criado na França pela educadora Michèle Artigue no início dos anos 80, sendo uma metodologia de pesquisa e teoria educacional em que o trabalho do pesquisador é comparado ao de um engenheiro, sendo utilizadas sequências didáticas, onde a relação entre a teoria e a prática levará à construção de um produto didático.

Ao realizar um trabalho didático com os estudantes no cotidiano, surgem muitas situações que podem dificultar o mesmo e influenciar no processo de ensino-aprendizagem. É nesse contexto que o trabalho do professor será comparado ao de um engenheiro, e é aí que entra a Engenharia Didática, pois o professor irá realizar a construção, a observação, a experimentação e, ao final, fará uma análise do trabalho desenvolvido para realizar ou não a validação do mesmo, fazendo as adequações e correções, se necessário.

A Engenharia Didática consiste na elaboração de uma sequência de situações de aprendizagem. No caso do trabalho em questão, essa sequência de situações de aprendizagem é a sequência didática sobre o conteúdo trabalhado com os estudantes, sua experimentação em sala de aula e, posteriormente, a análise dos resultados obtidos e validação. Segundo Carneiro:

> "Nessa linha, prática de ensino é articulada com prática de investigação. A teoria da Engenharia Didática pode ser vista como referencial para o desenvolvimento de produtos para o ensino, gerados na junção do conhecimento prático com o conhecimento teórico" (CARNEIRO, 2005, p. 90).

O que justifica a utilização dessa metodologia se dá por "ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado objeto matemático" (ALMOLOUD, 2007, p. 171). A metodologia da Engenharia Didática consiste em: *análises prévias; concepção e análise a priori; experimentação e análise a posteriori e validação.*

Segundo Artigue (1996, p. 198) as *análises prévias* correspondem à parte relacionada à compreensão e as principais dificuldades que impedem o aprendizado dos estudantes, correspondente aos conteúdos pertencentes ao plano de ensino e ao campo de sujeição no qual se estabelecerá a realização didática e os objetivos da pesquisa. Existem três dimensões nesta etapa de estudo sendo: dimensão epistemológica, que se refere às características do saber; dimensão didática, que se refere às características do funcionamento do sistema de ensino e, finalmente, a dimensão cognitiva, que se refere às características do público ao qual o ensino é direcionado. Assim, as análises prévias permitem a formulação de hipóteses cognitivas e didáticas e será a base para a construção da Engenharia Didática.

No caso desse estudo, destaca-se a dificuldade dos estudantes em realizarem uma interpretação das equações dadas numa perspectiva geométrica.

Na fase de *concepção e análise a priori*, conforme cita Artigue (1996, p. 202) *"é que o investigador decide o modo de agir sobre uma determinada quantidade de variáveis do sistema não fixadas, as quais são chamadas de variáveis de comando, que tal investigador supõe serem* *variáveis pertinentes para o problema estudado".* Essas variáveis podem ser classificadas em dois tipos: as Macrodidáticas, que se referem à organização global da engenharia e as Microdidáticas, que se referem à organização local da engenharia, ou seja, organização de uma fase ou de uma situação de aprendizagem.

A *análise a priori* possui duas partes, sendo uma de descrição e a outra de previsão. É aqui que deve-se descrever e justificar as escolhas realizadas para a elaboração da sequência didática e prever os possíveis resultados e estratégias de resolução a serem apresentados pelos estudantes. É exatamente nesta etapa que a sequência didática é elaborada.

No caso desse estudo, o foco foi o desenvolvimento e aperfeiçoamento de uma sequência didática de atividades que colocassem os estudantes em contato não apenas com o conteúdo teórico, mas que permitisse aos mesmos fazer as manipulações utilizando uma ferramenta de tecnologia, com o objetivo de permitir uma melhor compreensão e análise em tempo real daquilo que era escrito e resolvido nas folhas de atividades.

A fase de *experimentação*, de acordo com Artigue (1996, p. 208-209), inicialmente é constituída pelo período de aplicação e experimentação das atividades planejadas na fase anterior, onde os dados sobre a investigação são coletados. Em seguida, será realizada a análise dos resultados que serão obtidos no desenvolvimento das atividades em sala de aula.

No caso desse estudo, é o momento em que os estudantes realizam o desenvolvimento das atividades da sequência didática e o professor coleta os dados com base nos resultados obtidos.

A quarta fase, *análise a posteriori e validação*, considera todas as informações obtidas na investigação anterior por meio das produções dos estudantes. É aqui que podem ser confrontados os dados obtidos durante o desenvolvimento das atividades realizadas pelos estudantes através das observações realizadas pelo professor com o resultado final (produto) entregue ao professor pelos mesmos ao final da aplicação.

No caso desse estudo, permitirá confrontar hipóteses levantadas com resultados obtidos através do material produzido, o que servirá para detectar os pontos que foram considerados positivos e aperfeiçoar aqueles que não atingiram o resultado esperado.

É *"no confronto das duas análises, a priori e a posteriori, que se funda essencialmente a validação das hipóteses envolvidas na investigação"* (ARTIGUE, 1996, p. 208).

Assim, de acordo com Ana Paula Jahn: *"a Engenharia Didática se diferencia de outros métodos pelo tipo de validação. Em geral, outras metodologias realizam uma validação externa (comparação entre grupos experimentais e grupos de controle ou focais, sistemas de pré-testes e pós-testes).A engenharia didática possui validação interna que se apoia na confrontação entre a análise a priori (baseada em estudos preliminares e certo número de hipóteses) e análise a posteriori (baseada em dados da realização efetiva)."* (JAHN, 2020).

Assim, a Engenharia Didática é uma metodologia de pesquisa e teoria educacional bastante importante e que, quando bem desenvolvida e estruturada, permite a obtenção de um resultado final que propicia o desenvolvimento de uma aprendizagem significativa, propiciando aos estudantes a aplicação dos conceitos estudados no cotidiano e norteando os professores rumo ao aprimoramento de suas aulas e atividades.

7 CONHECENDO A PROPOSTA

Os objetivos gerais da realização da primeira parte da sequência didática (atividades de 1 a 4) que serão apresentadas a seguir passaram por princípios básicos como os de retomar a relação de interdependência, o plano cartesiano e par ordenado, reconhecer que dois pontos determinam uma reta no plano, até chegar naqueles em que os estudantes apresentam maior dificuldade, resolução e interpretação gráfica de equações do 1º grau com duas incógnitas, sendo utilizado para tal a exploração da representação gráfica de uma equação linear com duas incógnitas e reconhecendo que essa representação é um recurso muito importante para a discussão e a análise da resolução de um sistema de equações.

Para isso, o uso de softwares de geometria dinâmica, no nosso caso de estudo o GeoGebra, foi utilizado como recurso imprescindível para que os estudantes se apropriassem e pudessem conectar os resultados obtidos no papel com as construções realizadas utilizando essa tecnologia, o que poderia facilitar o entendimento do conteúdo de uma maneira atrativa e eficiente.

A seguir, serão apresentadas as atividades da sequência didática.

7.1 ATIVIDADE 1 - EQUAÇÕES E OUTRAS VARIÁVEIS

O objetivo da atividade 1, Figura 7.1 é a representação de expressões algébricas como forma de reconhecer as possíveis soluções de uma equação do 1º grau com duas variáveis. Aqui os estudantes tentarão explorar e encontrar estratégias diferentes e, ao final, poderão trocar as mesmas como forma de enriquecer o conhecimento através das diferentes soluções e assim proporcionando uma construção do conhecimento de forma mais eficiente.

Figura 7.1 – Atividade 1.

1. A secretária de uma escola recebeu dos professores as planilhas com as notas e as médias dos estudantes, para digitação no sistema. Porém, a folha foi danificada e alguns números ficaram ilegíveis.

   Organizem-se em grupos para encontrar os números que faltam para completar a planilha. Depois, expliquem como encontraram a solução para cada caso.

Número de alunos 8ª A	Nota
2	2,0
15	7,5
1	9,5
2	4,5
2	10,0
4	5,0
6	6,0
3	9,0
7	8,0
Média	[illegible]

Número de alunos 8ª B	Nota
4	5,0
2	1,0
7	6,5
4	[illegible]
13	7,0
3	3,3
6	9,0
1	10
Média	6,63

Número de alunos 8ª C	Nota
5	3,5
10	8,0
[illegible]	6,0
1	0,5
4	7,0
12	9,0
Média	7,2

2. O 8º ano D é uma turma com 37 estudantes. Qual poderia ser o número de meninos? Organize todas as possibilidades em uma tabela. Depois, escreva uma expressão algébrica que traduza esse problema e explique o procedimento para resolvê-lo.

Fonte: Arquivo do autor.

7.2 ATIVIDADE 2 - PARES ORDENADOS E SUA LOCALIZAÇÃO NO PLANO CARTESIANO

O objetivo da atividade 2, Figura 7.2, é associar pontos e equações lineares do 1º grau com duas variáveis no plano cartesiano, sendo o foco principal a retomada e exploração do plano cartesiano, onde a compreensão da localização dos pontos pelos estudantes os auxiliará na construção dos valores obtidos e na representação geométrica da equação linear.

Figura 7.2 – Atividade 2.

1. Construa, em uma folha de papel quadriculado, o plano cartesiano e localize os seguintes pares ordenados:
   A(-1,2) , B(0,3) , C(2,-1) , D(3,0) , E(4,5) , F(0,0) e G(5,4).

2. Analise os pontos que foram marcados no plano cartesiano. Em seguida, analise os pontos A e C. A localização desses dois pontos é a mesma? Justifique.

3. Agora, utilizando o software Geogebra, localize os pontos dados na questão **1** e compare com a sua construção realizada no papel quadriculado. Descreva o que você observou.

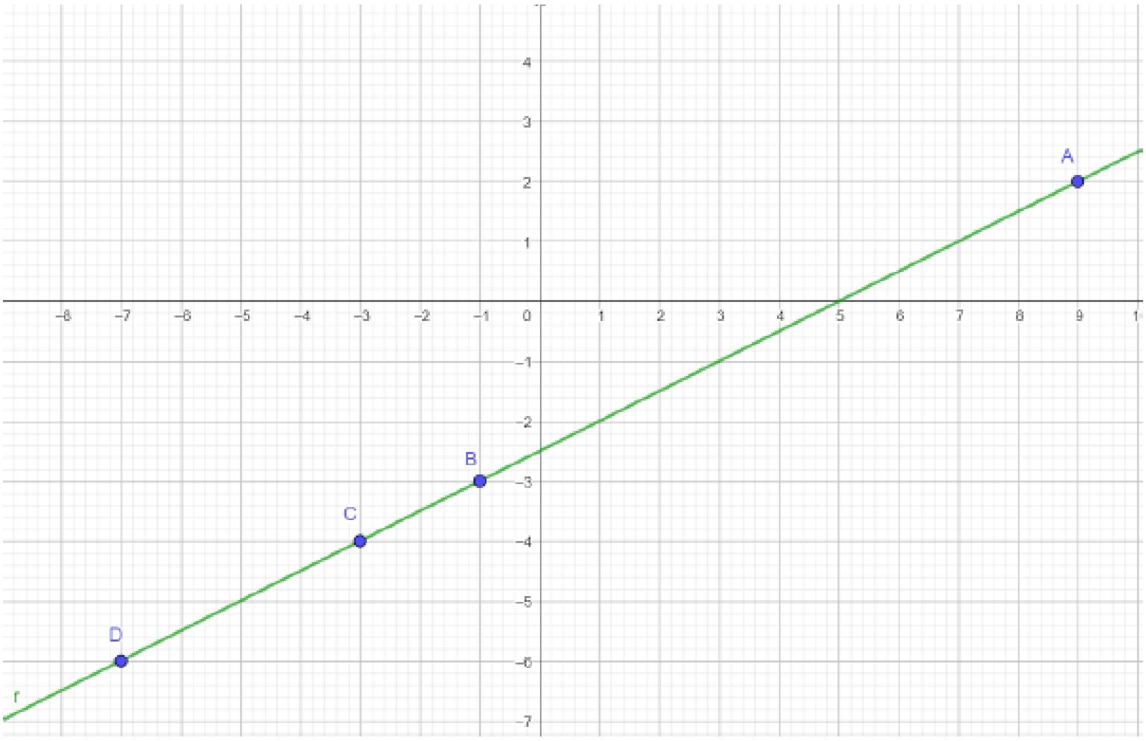
Fonte: Arquivo do autor.

7.3 ATIVIDADE 3 - RESULTADOS DE UMA EQUAÇÃO DE 1^{O} GRAU COM DUAS VARIÁVEIS

O objetivo da atividade 3, Figura 7.3, é localizar no plano cartesiano pontos pertencentes a uma reta dada, construir o gráfico de uma equação do 1^{o} grau com duas variáveis utilizando papel quadriculado e explorar, através do software GeoGebra, a construção dos gráficos de expressões algébricas dadas.

Figura 7.3 – Atividade 3.

1. Observe o plano cartesiano abaixo onde estão destacados alguns pontos pertencentes à reta que representa uma equação com duas variáveis. Analise e registre na tabela dada quais são esses pontos.



Ponto	A	B	C	D
Par ordenado				

2. Para cada expressão algébrica dada a seguir, encontre 4 pontos diferentes do gráfico atribuindo valores para a variável x. Em seguida, faça o esboço do gráfico, unindo os pontos encontrados. Qual expressão gerou uma reta?

   a) $y = 2x - 3$
   b) $y = x^2$

3. Utilize o software Geogebra, construa o gráfico das expressões algébricas dadas a seguir e descreva o que você observou.

   a) $y = -3x - 1$
   b) $y = x^2 - 1$

Fonte: Arquivo do autor.

7.4 ATIVIDADE 4 - SOLUÇÕES DE UMA EQUAÇÃO DO 1º GRAU COM DUAS VARIÁVEIS

O objetivo da atividade 4, Figura 7.4, é analisar as possíveis soluções de uma equação do 1º grau com duas variáveis a partir dos pares ordenados e de expressões algébricas utilizando o software GeoGebra; aqui, os estudantes poderão reconhecer quais deles atendem a uma regra que pode ser escrita por uma expressão algébrica, apresentando formas para encontrar as possíveis soluções de uma equação linear.

Figura 7.4 – Atividade 4.

1. Analise a tabela a seguir e identifique os pares ordenados que atendam a regra "o valor de y é o dobro do valor de x". Em seguida, utilizando o software Geogebra, represente-os num plano cartesiano.

(0,0)	(1,2)	(-2,-4)
(1,-2)	(0,1)	(-1,2)
(2,4)	(-2,4)	(2,-4)
(-3,6)	(3,-6)	(-3,-6)
(4,-8)	(4,8)	(-4,8)
(5,-10)	(-5,-10)	(-5,10)
(3,5)	(3,2)	(5,-2)

2. Encontre uma expressão algébrica que descreva esta regra: "o valor de y é o dobro do valor de x".

Fonte: Arquivo do autor.

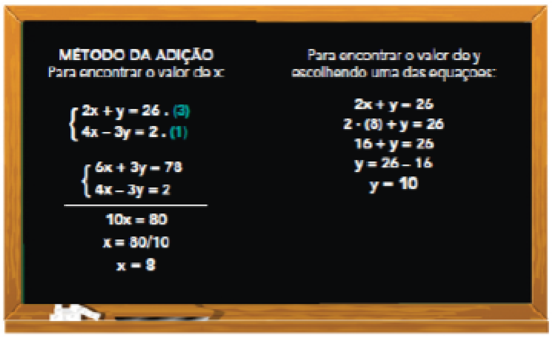
Os objetivos gerais da realização da segunda parte da sequência didática (atividades de 5 a 7) que serão apresentadas a seguir passarão pelo estudo das principais características do sistema de coordenadas, explorando o princípio de equivalência. Além disso, propiciará também, através do uso do software GeoGebra ou não, a construção dos gráficos das equações de um sistema, permitindo a análise das soluções.

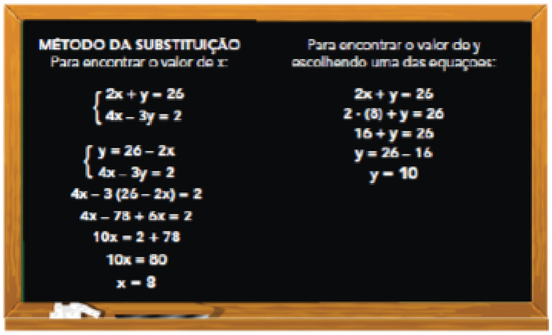
7.5 ATIVIDADE 5 - SISTEMAS DE DUAS EQUAÇÕES COM DUAS INCÓGNITAS

O objetivo da atividade 5, Figura 7.5, é mostrar aos estudantes que os sistemas de equações lineares podem ser resolvidos a partir de algumas estratégias: método da adição, método da substituição ou, ainda, geometricamente (nesse caso com a utilização do software GeoGebra).

Figura 7.5 – Atividade 5.

1. Para resolver sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas, o professor do 8º ano explicou que existem três maneiras de serem resolvidos: utilizando o método da substituição, o método da adição ou, ainda, é possível resolver geometricamente. O professor registrou as duas formas de resolução e distribuiu uma malha quadriculada com o procedimento geométrico, conforme as imagens a seguir:





Imagine agora que você tem a missão de explicar para seu colega como resolver esse sistema pelos três métodos. Como você explicaria? Registre os procedimentos.

2. Após observar a resolução do exemplo acima, resolva os próximos sistemas escolhendo um dos dois métodos apresentados: substituição ou adição.

a) $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x + y = 39 \\ x - y = 3 \end{cases}$

3. Utilizando o software Geogebra, para cada sistema de equações dado na questão 2, faça a resolução geométrica, comparando com a resolução algébrica. Descreva o que você observou.

Fonte: Arquivo do autor.

7.6 ATIVIDADE 6 - PROBLEMAS COM SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU

O objetivo da atividade 6, Figura 7.6, é resolver e elaborar situações-problema que envolvam sistemas de equação do 1º grau, utilizando, para isso, a leitura, a interpretação e a resolução dos problemas aplicando os métodos de resolução de sistemas com duas equações do 1º grau, organizando os dados da situação-problema e escrevendo as equações que atendam ao que foi solicitado. Aqui o software GeoGebra também será utilizado para a resolução geométrica do sistema de equações.

Figura 7.6 – Atividade 6.

1. Duas amigas foram a uma floricultura comprar vasos de flores. Mariana comprou 4 vasos de rosas e 6 vasos de violetas, e gastou um total de R$ 104,00. Sua amiga Ana também realizou a compra de 5 vasos de rosas e 3 vasos de violetas, gastando um total de R$ 89,50. Sabendo que x representa o custo de um vaso de rosas e y é o custo de um vaso de violetas, encontre uma equação envolvendo x e y que descreva o gasto de Mariana e outra que descreva o gasto de Ana.

2. Calcule os valores unitários dos vasos de rosas e de violeta dessa floricultura, utilizando o sistema de equações de 1º grau com duas incógnitas obtido no problema 1. Para isso, escolha um dos métodos de resolução: substituição ou adição.

3. Utilizando o software Geogebra, faça a resolução geométrica do sistema de equações obtido no problema 1, comparando com a resolução algébrica que você fez no problema 2. Descreva o que você observou.

Fonte: Arquivo do autor.

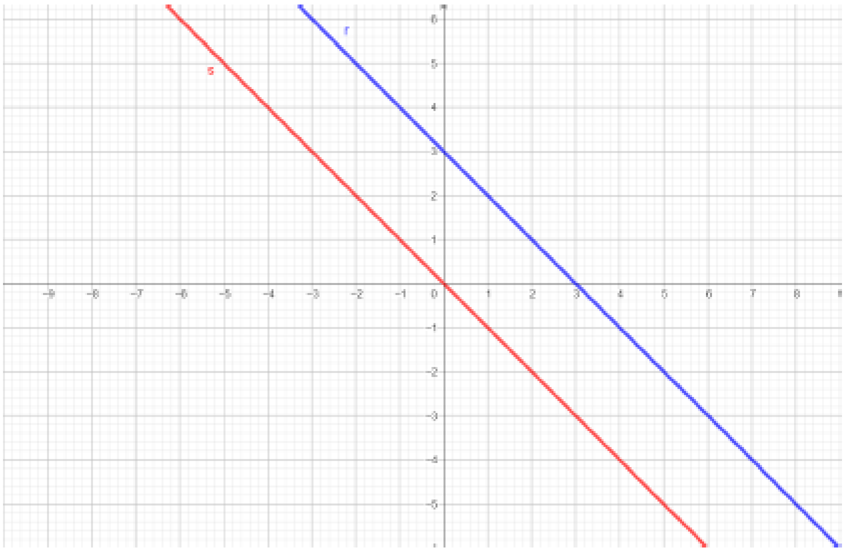
7.7 ATIVIDADE 7 - ANÁLISE DAS DIFERENTES RESOLUÇÕES GRÁFICAS DE UM SISTEMA

O objetivo da atividade 7, Figura 7.7, é identificar se o sistema é possível e determinado, possível e indeterminado ou impossível a partir da resolução geométrica.

Figura 7.7 – Atividade 7.

1. Analise o sistema abaixo, em que x e y são números reais, a partir do gráfico dado a seguir:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

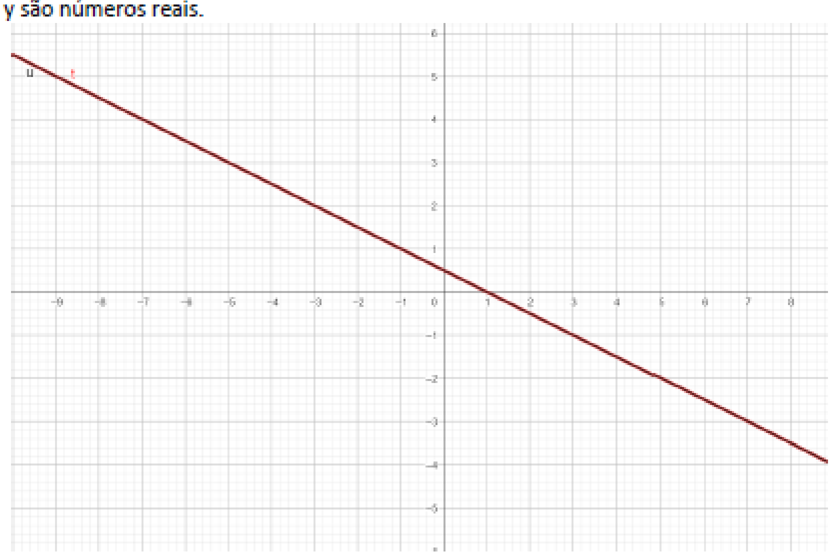


a) Que equação representa a linha reta azul? Justifique.
b) Que equação representa a linha reta vermelha? Justifique.
c) Qual será a solução desse sistema? Justifique.

2. Analise agora a representação gráfica do sistema a seguir:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 6y = 3 \end{cases}$$

Nele, x e y são números reais.



a) Qual é a solução desse sistema?
b) Como você explicaria o fato de duas equações e uma mesma reta para a representação gráfica de ambas as equações?

Fonte: Arquivo do autor.

8 APLICANDO AS ATIVIDADES E ANALISANDO OS RESULTADOS

8.1 INTRODUÇÃO

A finalidade desse capítulo é fazer uma breve descrição da turma e da escola na qual esse trabalho foi desenvolvido. Logo após, será apresentada uma análise dos resultados obtidos pela turma.

8.2 CONHECENDO A ESCOLA E A TURMA

A EE Dr. João Gabriel Ribeiro, figura 8.1, localizada no município de São José do Rio Pardo, estado de São Paulo, é uma instituição pública de ensino com 54 anos de existência, sendo a primeira aula ministrada na mesma em 3 de março de 1969, sendo na época conhecida como "Grupo Escolar da Vila Pereira". Hoje, a instituição oferece aulas da 1ª até a 5ª séries do Ensino Fundamental Anos Iniciais e do 6º ao 9º anos do Ensino Fundamental Anos Finais, atingindo mais de 700 estudantes. Atualmente a unidade escolar passou por uma reforma, o que propiciou uma estrutura ainda melhor aos estudantes e funcionários.

Figura 8.1 – Escola Dr. João Gabriel Ribeiro

Fonte: Arquivo do autor.

A turma em que o presente trabalho foi desenvolvido foi o 8º ano do ensino fundamental. Porém, nesse mesmo ano, o autor também ministrava aulas em turmas do 6º e 7º anos, os quais não fizeram parte dessas atividades. O 8º ano era uma turma que tinha uma quantidade reduzida de alunos.

8.3 VISÃO GERAL SOBRE AS APLICAÇÕES

No total, participaram integralmente das atividades 14 estudantes. Essas atividades foram desenvolvidas no laboratório de informática da escola, que também servia como sala de aula para as demais disciplinas, devido à reforma da escola naquele momento.

Sobre os conteúdos abordados na sequência didática, os estudantes já tinham um conhecimento prévio por já terem realizado um estudo recente sobre o mesmo. Sendo assim, o objetivo foi estudar o assunto novamente, mas agora com o auxílio e utilização do software GeoGebra.

Para isso, os estudantes formaram 7 duplas, as quais permaneceram fixas até o fim das aplicações, sendo que a interferência do professor foi mínima, apenas para explicar os objetivos e auxiliar na utilização do software GeoGebra, quando necessário. Cada integrante da dupla recebeu uma cópia de cada uma das sete atividades da sequência didática, sendo as mesmas distribuídas pouco a pouco, uma a uma e realizadas na sequência, de 1 a 7, em datas diferentes. As aplicações ocorreram entre os meses de outubro e novembro do ano de 2022.

8.4 ANÁLISE DAS RESPOSTAS POR ATIVIDADE

Atividade 1

Na atividade 1, exercício 1, das 7 duplas, 2 duplas erraram a questão, pois ao realizarem o cálculo referente à tabela do 8C, não se atentaram para o fato de que a incógnita x deveria ter sido colocada na posição da quantidade de alunos, o que não ocorreu e ocasionou o erro. Por outro lado, 5 duplas acertaram a questão. A resolução de uma dessas duplas é apresentada nas figuras 8.2, 8.3 e 8.4 dadas a seguir.

Figura 8.2 – Cálculo da média aritmética do 8A

$$\underbrace{2.2}_{4}+\underbrace{15.7,5}_{112,5}+\underbrace{1.9,5}_{9,5}+\underbrace{2.4,5}_{9}+\underbrace{2.10}_{20}+\underbrace{4.5}_{20}+\underbrace{6.6}_{36}+\underbrace{3.9}_{27}+\underbrace{7.8}_{56}$$

$$4 + 112,5 + 9,5 + 9 + 20 + 20 + 36 + 27 + 56$$

$$X = \frac{294}{42} = 7$$

Fonte: Arquivo do autor.

Figura 8.3 – Cálculo da nota dos 4 alunos do 8B

$$\frac{232,4 + 4x}{40} = \frac{6,63}{1}$$

$$232,4 + 4x = 265,2$$

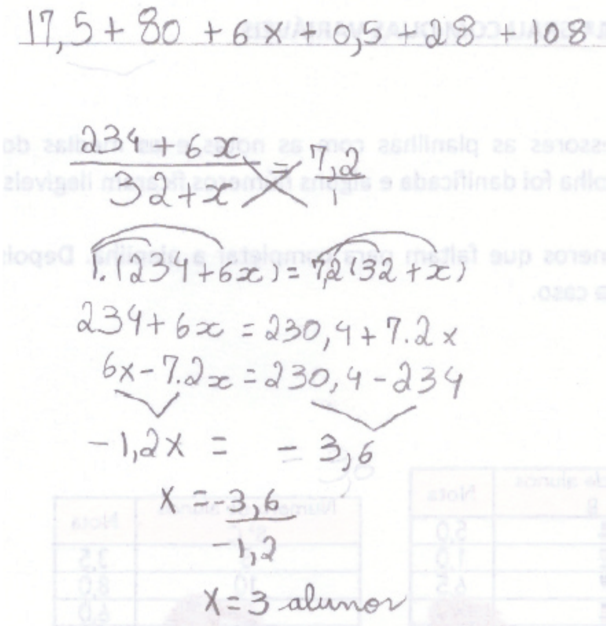
$$4x = 265,2 - 232,4$$

$$4x = 32,8$$

$$x = \frac{32,8}{4} = 8,2$$

Fonte: Arquivo do autor.

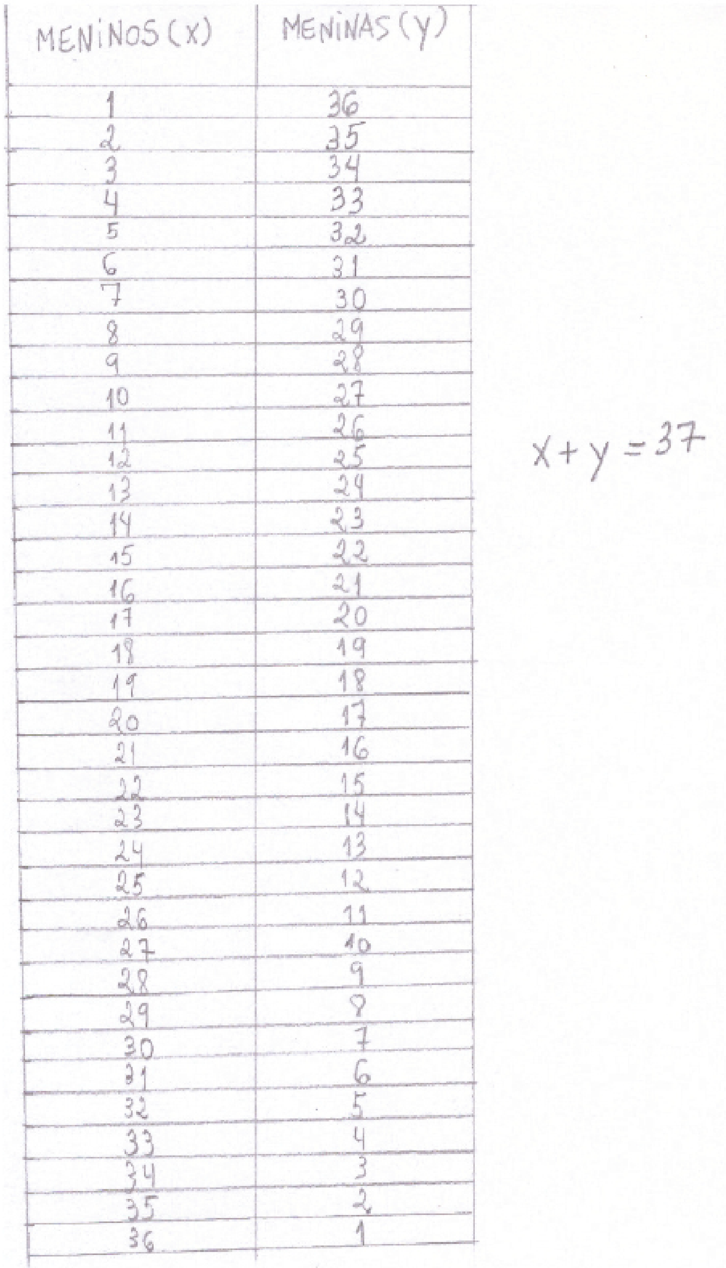
Figura 8.4 – Cálculo da quantidade de alunos do 8C que tiraram nota 6



Fonte: Arquivo do autor.

Já no exercício 2, todas as duplas conseguiram construir a tabela. Porém, uma das 7 duplas não percebeu, ao montar a tabela, que o número de meninos poderia ser inclusive o 0 e também o 37, como mostra a figura 8.5 a seguir. Essa dupla também poderia ter escrito a expressão final como $x = 37 - y$.

Figura 8.5 – Construção da tabela e apresentação da expressão algébrica



MENINOS (x)	MENINAS (y)
1	36
2	35
3	34
4	33
5	32
6	31
7	30
8	29
9	28
10	27
11	26
12	25
13	24
14	23
15	22
16	21
17	20
18	19
19	18
20	17
21	16
22	15
23	14
24	13
25	12
26	11
27	10
28	9
29	8
30	7
31	6
32	5
33	4
34	3
35	2
36	1

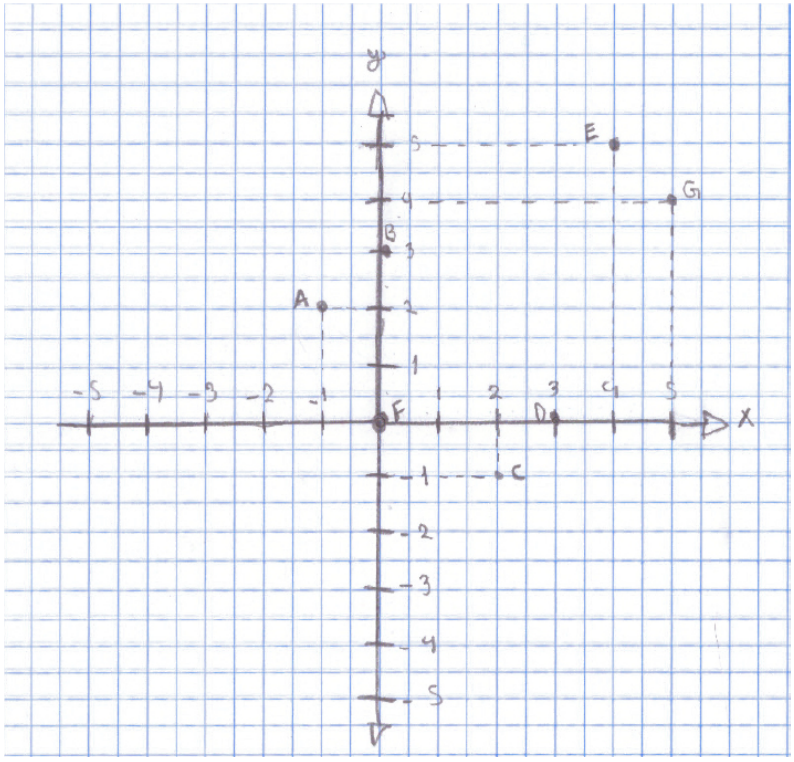
$x + y = 37$

Fonte: Arquivo do autor.

Atividade 2

Na atividade 2, exercício 1, todas as 7 duplas acertaram a questão e conseguiram localizar corretamente os pares ordenados. A figura 8.6 apresenta a solução de uma delas.

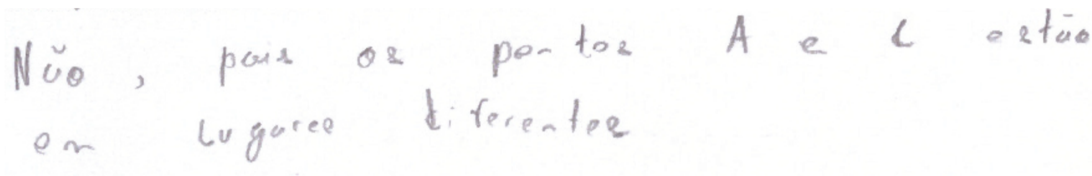
Figura 8.6 – Localização dos pontos no plano cartesiano



Fonte: Arquivo do autor.

No exercício 2, todas as 7 duplas responderam corretamente à questão, porém não utilizaram as expressões "abscissa" e "ordenada", apenas dizendo que a localização não foi a mesma pelo fato de estarem em lugares diferentes do plano cartesiano, como mostra a figura 8.7 a seguir.

Figura 8.7 – Análise dos pontos A e C


Não, pois os pon- tos A e C estão em lugares diferentes

Fonte: Arquivo do autor.

No exercício 3, os estudantes tiveram o primeiro contato com o software GeoGebra na sequência didática. 1 das 7 duplas disse preferir o papel quadriculado, por achar mais fácil enquanto que as 6 duplas restantes disseram ser mais fácil o entendimento através do uso da tecnologia, como mostra a figura 8.8 a seguir.

Figura 8.8 – Papel quadriculado x GeoGebra

Continuo igual afigura do papel e do computador.
Achei mais facil no computador.

Fonte: Arquivo do autor.

Atividade 3

Na atividade 3, exercício 1, todas as 7 duplas acertaram a questão e conseguiram completar corretamente a tabela dada, como mostra a figura 8.9 a seguir.

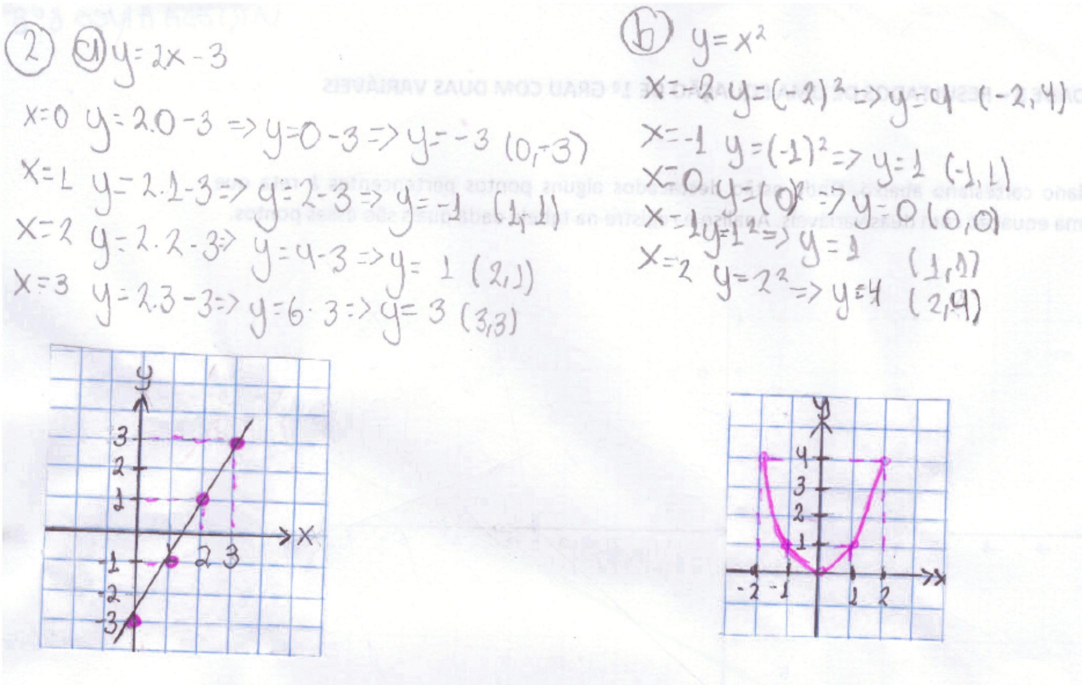
Figura 8.9 – Preenchimento da tabela

Ponto	A	B	C	D
Par ordenado	(9,2)	(-1,-3)	(-3,-4)	(-7,-6)

Fonte: Arquivo do autor.

No exercício 2, 6 das 7 duplas responderam corretamente à questão encontrando os pontos pedidos, esboçando os gráficos e concluindo o questionamento feito. A seguir, a figura 8.10 apresenta a solução de uma dessas duplas. Já a dupla que errou teve dificuldade no momento de substituir os pontos na expressões algébricas dadas.

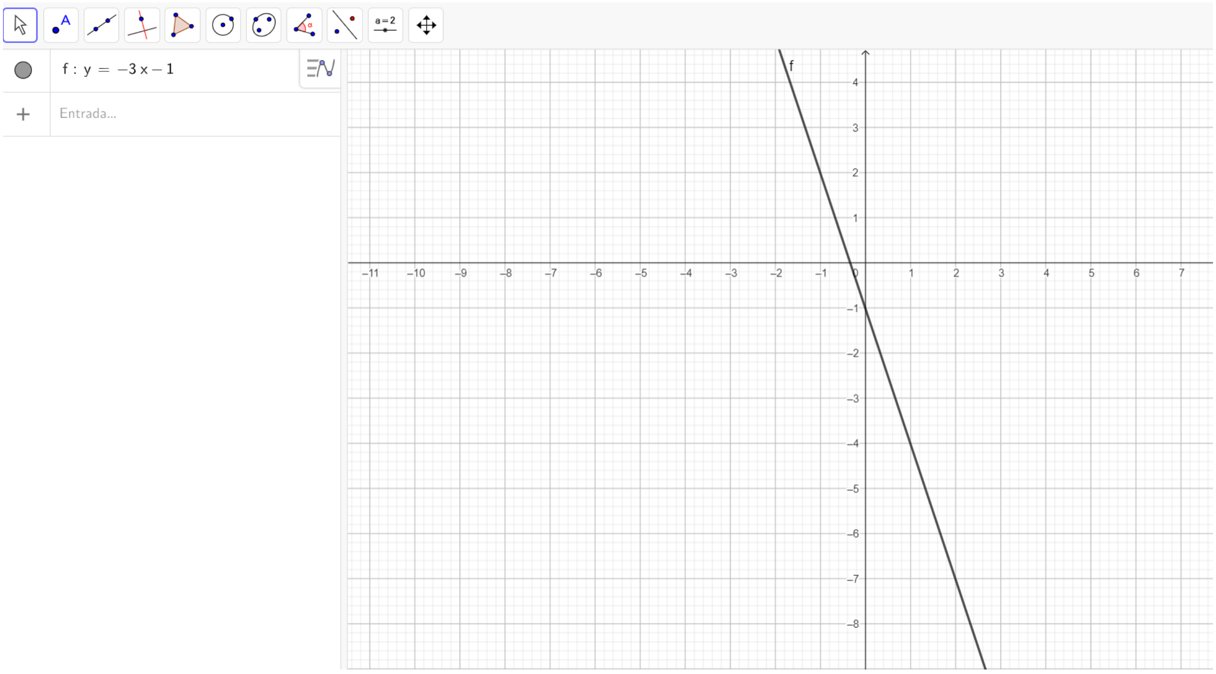
Figura 8.10 – Encontrando os pontos e esboçando os gráficos



Fonte: Arquivo do autor.

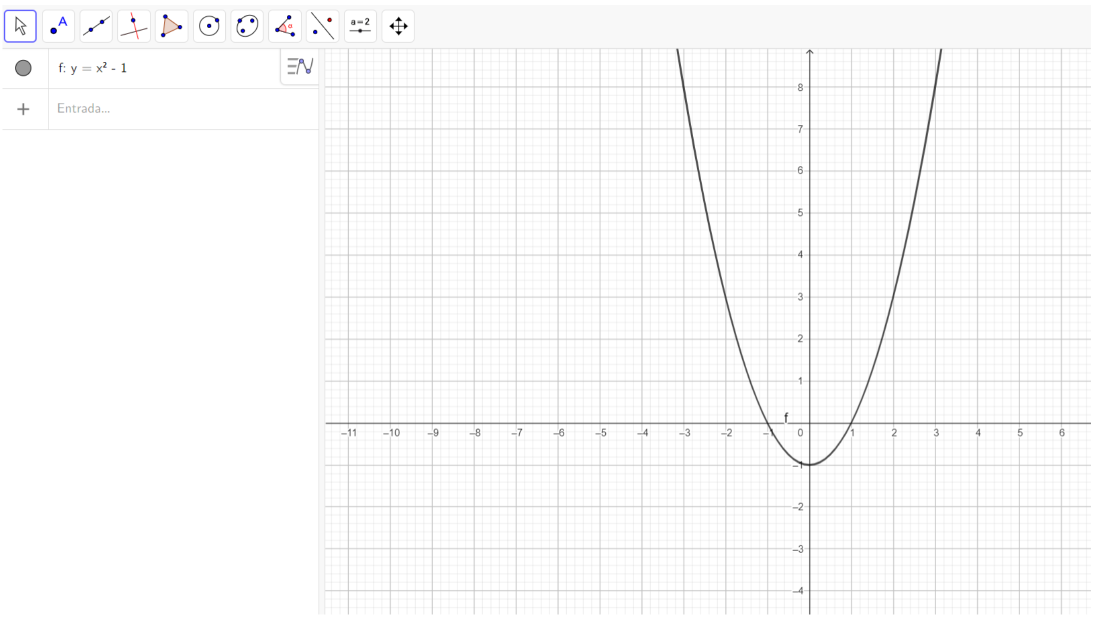
No exercício 3, os estudantes tiveram, mais uma vez, contato com o software GeoGebra na sequência didática. Todos as duplas utilizaram o software e construíram os gráficos com sucesso, explicando que no caso da letra a) a expressão fez o gráfico gerar uma reta, figura 8.11, enquanto que na letra b), a expressão fez o gráfico gerar uma “curva”, figura 8.12, sendo ambas apresentadas como exemplo e desenvolvidas por uma dessas duplas.

Figura 8.11 – Expressão $y = -3x - 1$



Fonte: Arquivo do autor.

Figura 8.12 – Expressão $y = x^2 - 1$



Fonte: Arquivo do autor.

Atividade 4

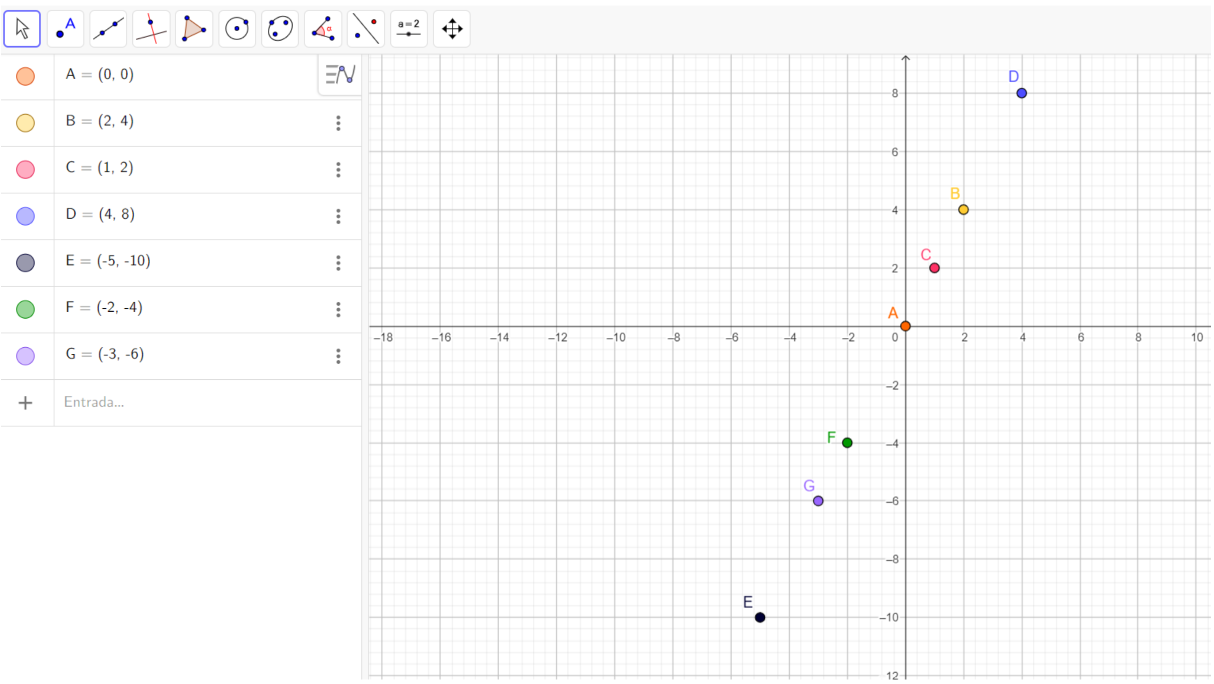
Na atividade 4, exercício 1, todas as duplas de estudantes conseguiram cumprir a tarefa, marcando na tabela (figura 8.13) os pares ordenados que atendiam a regra solicitada no enunciado e localizando no GeoGebra, os mesmos . Uma das duplas utilizou as ferramentas presente no software para deixar a solução um pouco mais atraente, utilizando cores diversas para cada par ordenado, como mostra a figura 8.14.

Figura 8.13 – Tabela identificando os pares ordenados solicitados

(0,0)	(1,2)	(-2,-4)
(1,-2)	(0,1)	(-1,2)
(2,4)	(-2,4)	(2,-4)
(-3,6)	(3,-6)	(-3,-6)
(4,-8)	(4,8)	(-4,8)
(5,-10)	(-5,-10)	(-5,10)
(3,5)	(3,2)	(5,-2)

Fonte: Arquivo do autor.

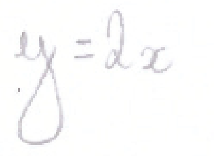
Figura 8.14 – Representação dos pares ordenados no plano cartesiano



Fonte: Arquivo do autor.

No exercício 2, todas as duplas apresentaram a solução correta, como mostra a figura 8.15, solução dada por uma delas.

Figura 8.15 – O valor de y é o dobro do valor de x

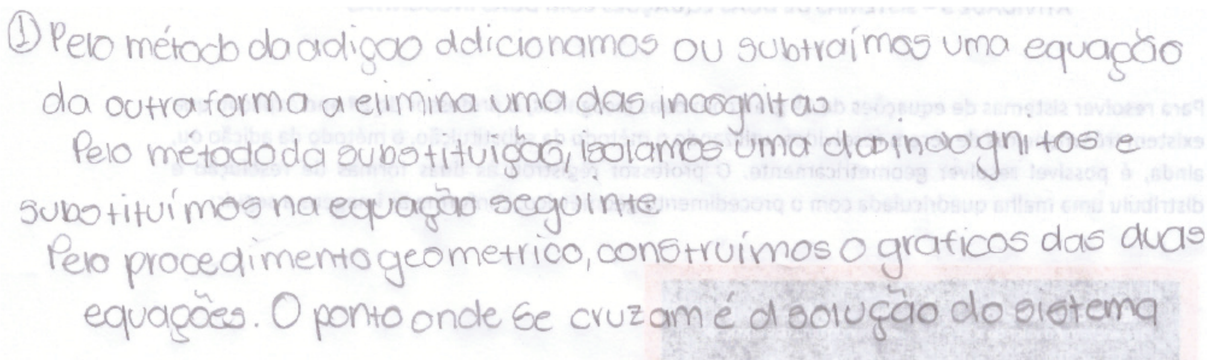

$y = 2x$

Fonte: Arquivo do autor.

Atividade 5

Na atividade 5, exercício 1, 6 duplas conseguiram explicar de forma coerente, como mostra a figura 8.16, extraída da solução de uma delas.

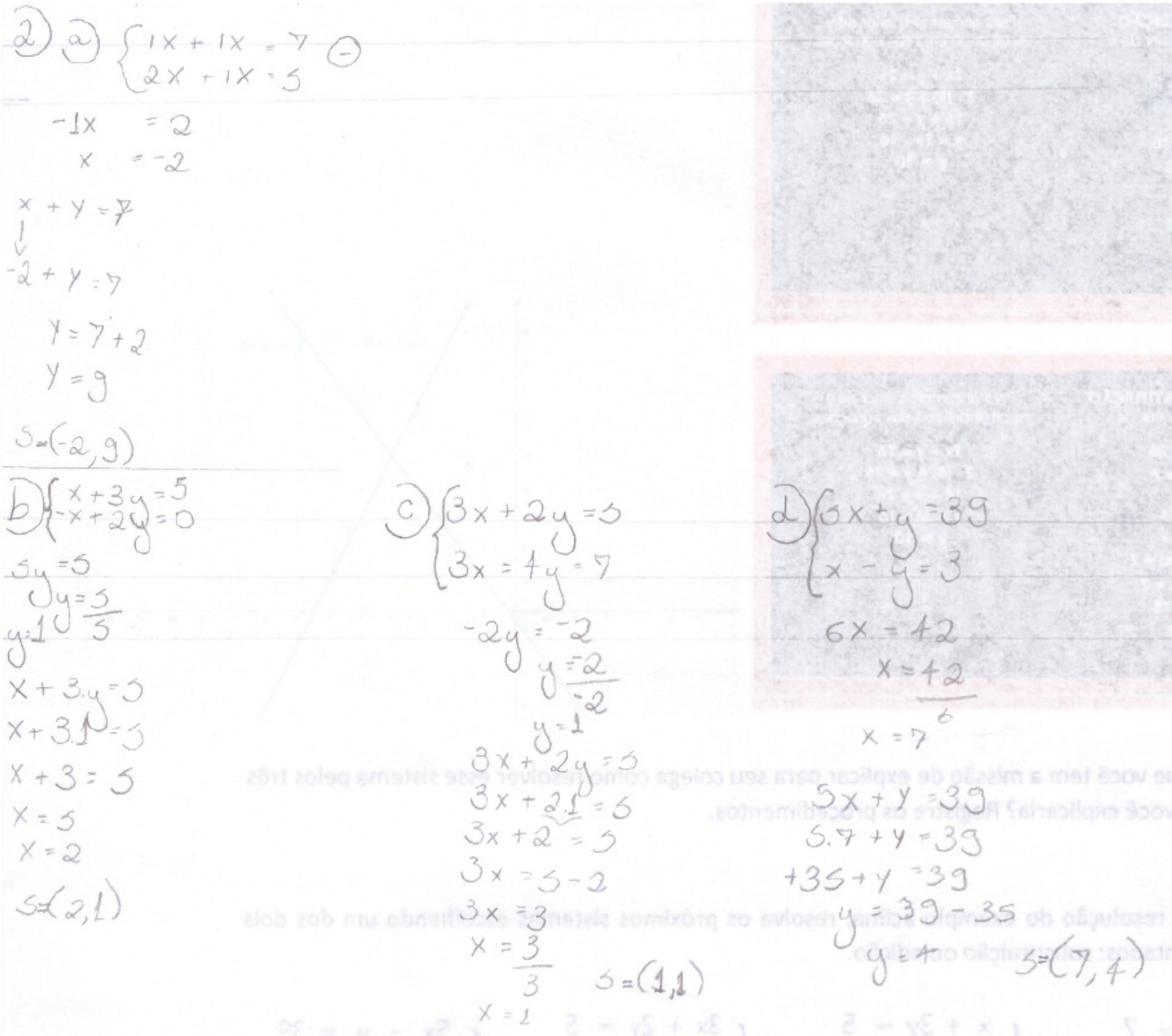
Figura 8.16 – Explicando cada uma das maneiras de resolver um sistema


① Pelo método da adição adicionamos ou subtraímos uma equação da outra forma a elimina uma das incognitas
Pelo método da substituição, isolamos uma da incognitos e substituímos na equação seguinte
Pelo procedimento geometrico, construímos o graficos das duas equações. O ponto onde se cruzam é a solução do sistema

Fonte: Arquivo do autor.

No exercício 2, 4 duplas conseguiram resolver os quatro sistemas dados de forma correta e escolheram utilizar o método da adição por ser, segundo elas, mais simples. A figura 8.17 apresenta uma dessas soluções.

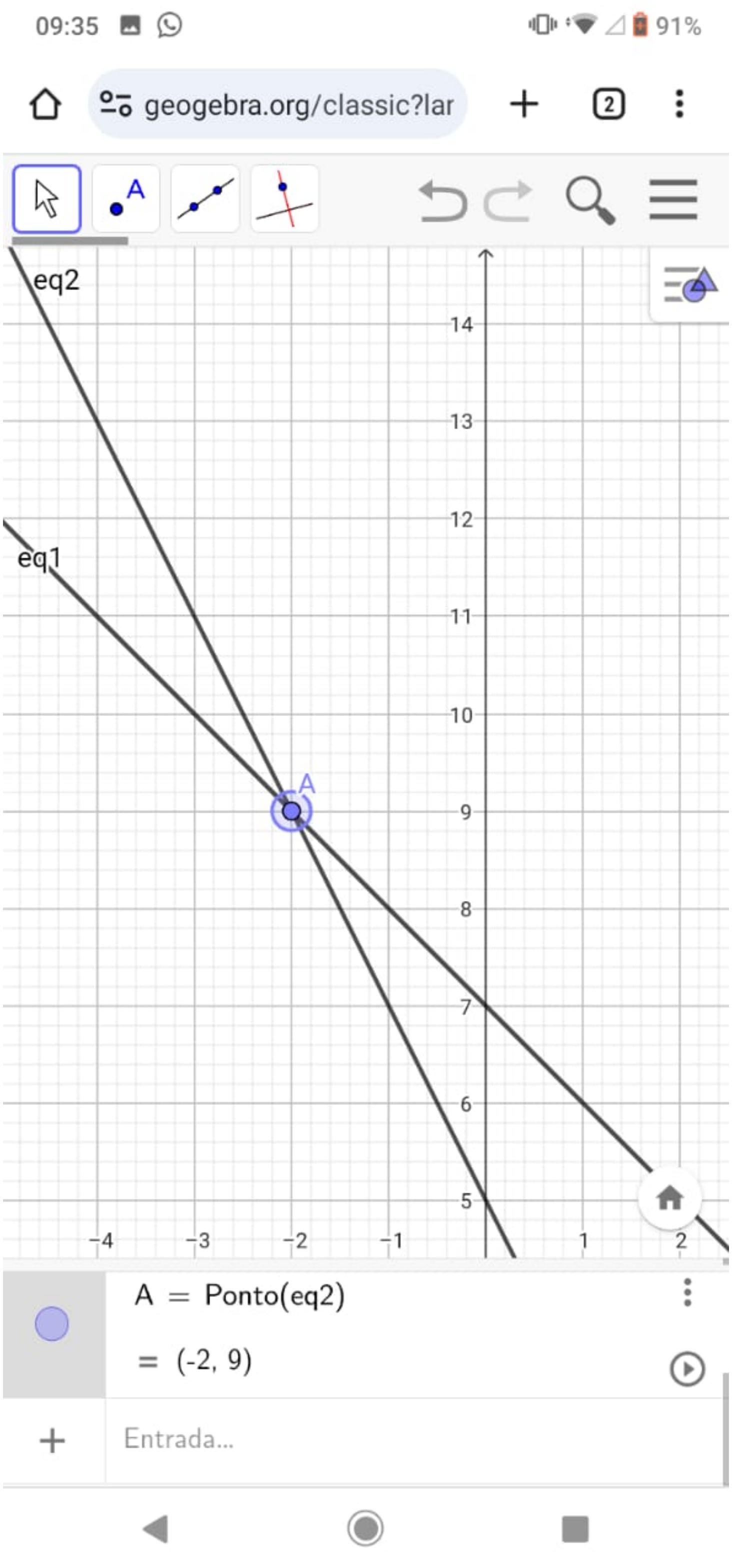
Figura 8.17 – Resolvendo os sistemas



Fonte: Arquivo do autor.

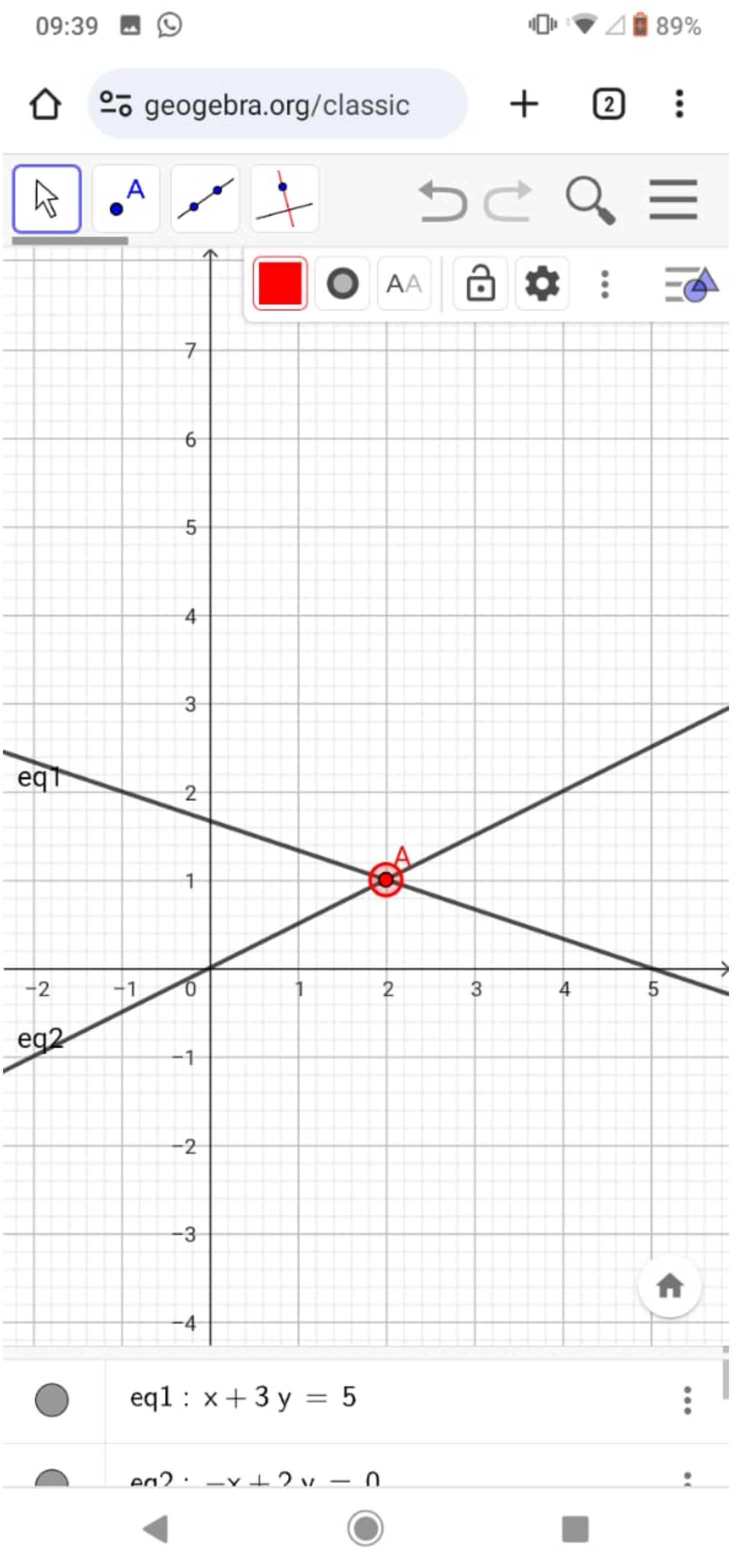
No exercício 3, os estudantes utilizaram o software GeoGebra, mas dessa vez utilizando o celular. Todas as duplas conseguiram cumprir o objetivo, que era realizar a resolução geométrica. Algumas dessas soluções são apresentadas a seguir nas figuras 8.18, 8.19, 8.20 e 8.21.

Figura 8.18 – Solução geométrica da letra a)



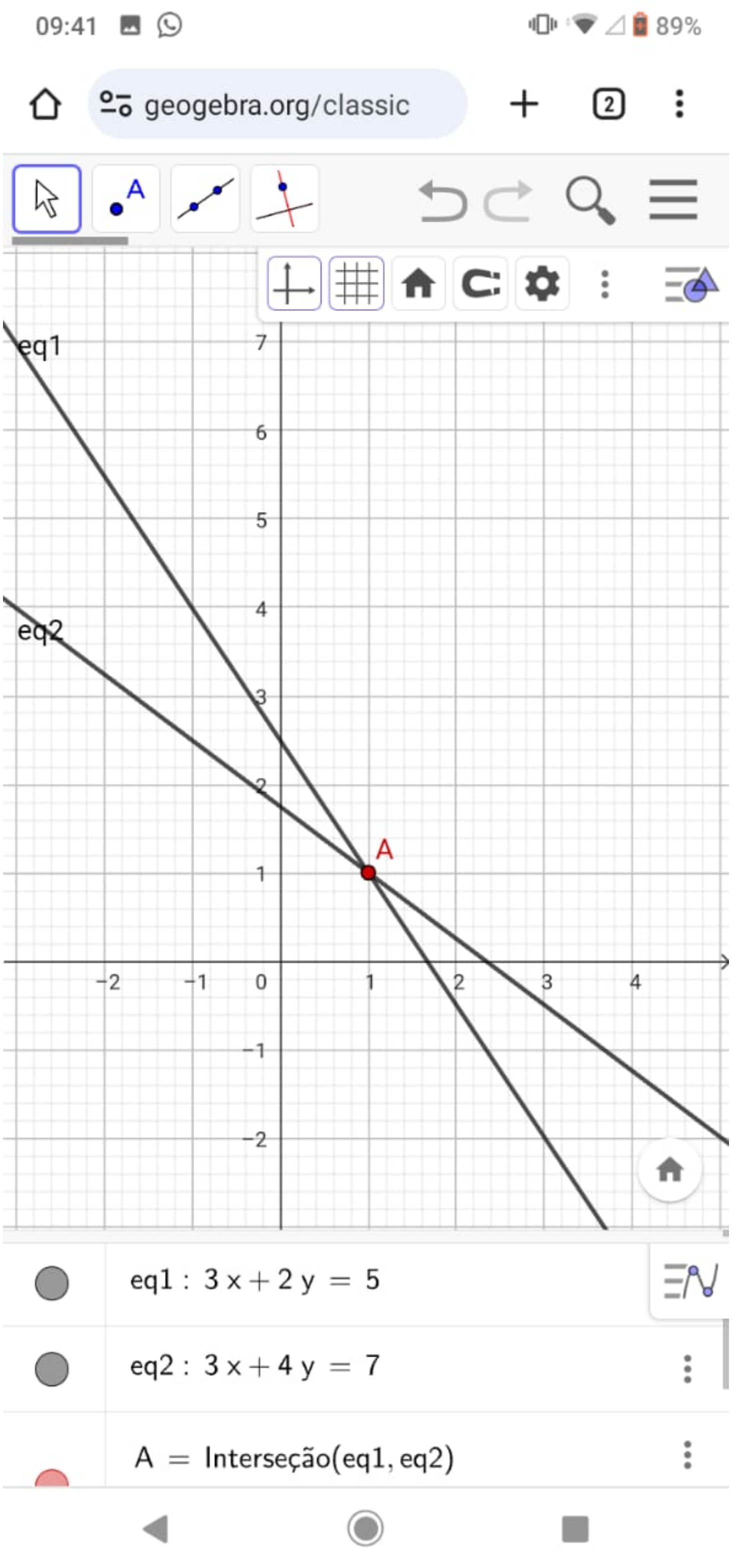
Fonte: Arquivo do autor.

Figura 8.19 – Solução geométrica da letra b)



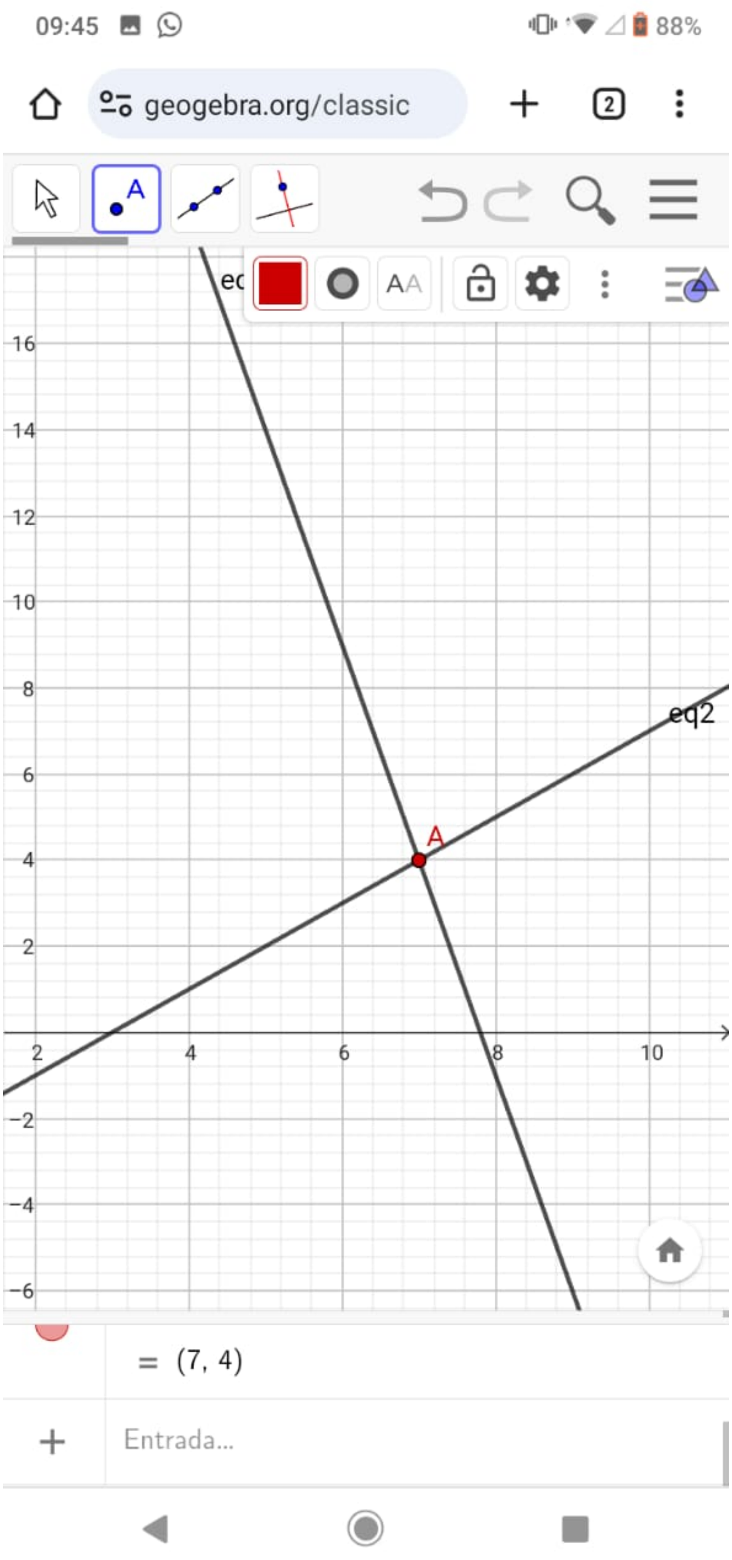
Fonte: Arquivo do autor.

Figura 8.20 – Solução geométrica da letra c)



Fonte: Arquivo do autor.

Figura 8.21 – Solução geométrica da letra d)

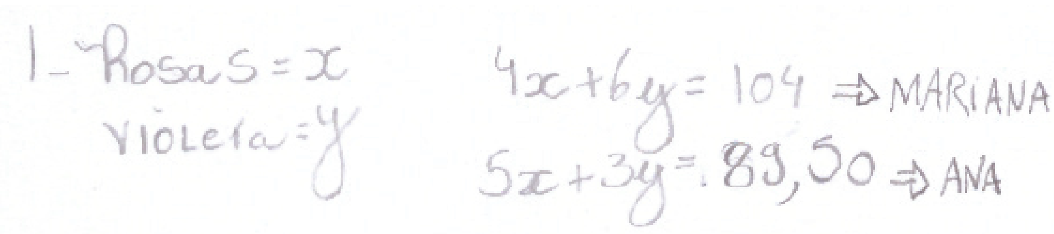


Fonte: Arquivo do autor.

Atividade 6

Na atividade 6, exercício 1, apenas uma dupla não conseguiu interpretar o problema de forma adequada enquanto as demais duplas atingiram o objetivo, interpretando corretamente os dados e construindo as equações esperadas. A figura 8.22 mostra uma dessas soluções.

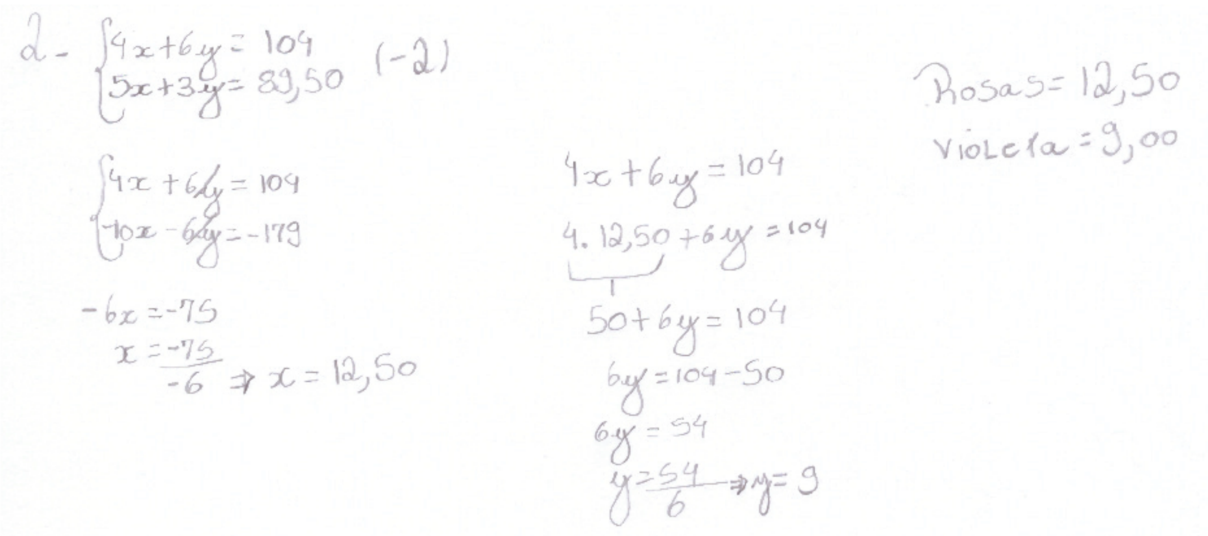
Figura 8.22 – Equações esperadas para representar os gastos de Mariana e Ana



Fonte: Arquivo do autor.

Já no exercício 2, outra vez apenas 1 dupla não conseguiu resolver a atividade de forma adequada enquanto 6 duplas resolveram o sistema de equações de forma correta. A figura 8.23 mostra uma dessas soluções.

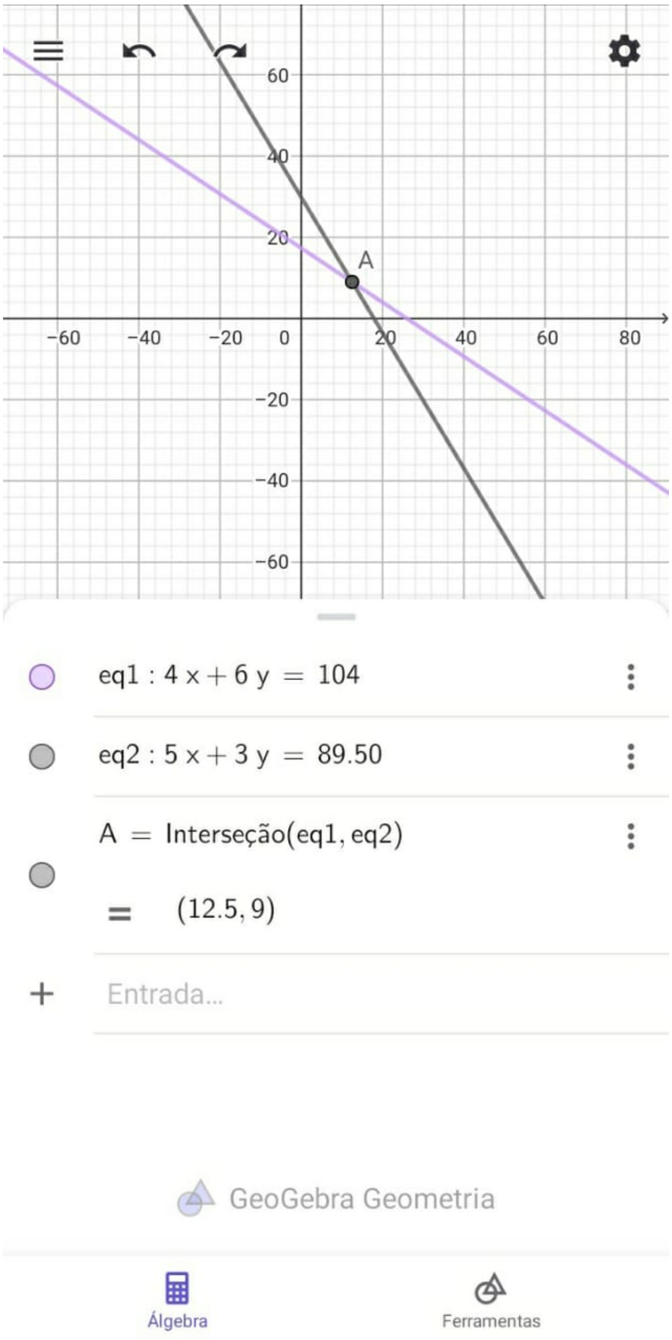
Figura 8.23 – Solução correta do sistema de equações



Fonte: Arquivo do autor.

No exercício 3, todos os estudantes conseguiram representar a solução geométrica utilizando o software GeoGebra. Uma dessas soluções é apresentada na figura 8.24 dada a seguir.

Figura 8.24 – Resolução geométrica do sistema de equações

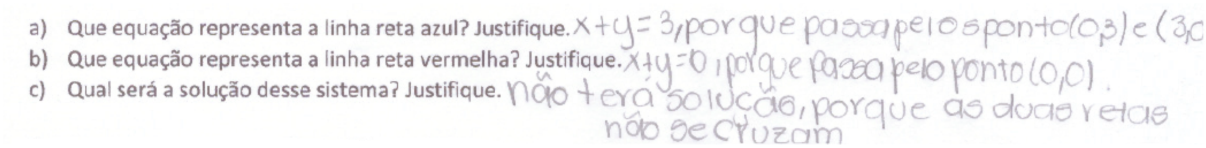


Fonte: Arquivo do autor.

Atividade 7

Na atividade 7, exercício 1, os estudantes tiveram um desempenho suficiente para o que foi pedido. Em uma das soluções apresentadas, figura 8.25, a justificativa para a letras a) e b) poderiam ter sido mais bem elaboradas, bastando observar que quaisquer dois números *x* e *y* em que a soma dê 3 também serviriam como resposta para a letra a) assim como quaisquer dois números *x* e *y* em que a soma dê 0 também serviriam como resposta para a letra b). Já para a letra c), considerei a resposta bem satisfatória, embora eles pudessem também ter dito que quando duas retas são paralelas, temos que não existe solução para esse sistema.

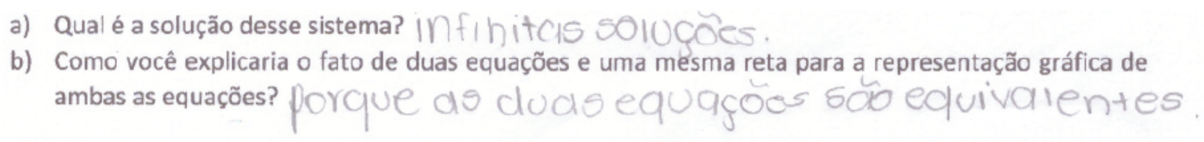
Figura 8.25 – Respostas apresentadas por uma das duplas


a) Que equação representa a linha reta azul? Justifique. x+y=3, porque passa pelos ponto(0,3) e (3,0
b) Que equação representa a linha reta vermelha? Justifique. x+y=0, porque passa pelo ponto (0,0).
c) Qual será a solução desse sistema? Justifique. não terá solução, porque as duas retas não se cruzam

Fonte: Arquivo do autor.

No exercício 2, também considerei o desempenho dos estudantes satisfatório. A figura 8.26 dada a seguir apresenta uma dessas soluções.

Figura 8.26 – Respostas apresentadas por uma das duplas


a) Qual é a solução desse sistema? infinitas soluções.
b) Como você explicaria o fato de duas equações e uma mesma reta para a representação gráfica de ambas as equações? porque as duas equações são equivalentes.

Fonte: Arquivo do autor.

Sendo assim, a aplicação das atividades foi realizada com sucesso, com a participação e engajamento de todos os estudantes, melhorando significativamente a percepção das possíveis soluções ao utilizarem o GeoGebra como ferramenta de apoio no desenvolvimento das atividades.

9 CONCLUSÃO

Chegamos aqui à conclusão do trabalho. Este capítulo trará uma análise sobre o trabalho desenvolvido (sequência didática), os resultados finais obtidos e a devolutiva feita com os estudantes.

9.1 REFLETINDO SOBRE A METODOLOGIA DO TRABALHO DESENVOLVIDO

Primeiramente gostaria de falar a respeito do método de trabalho adotado, a sequência didática. Trabalhar com essa metodologia trouxe muitas contribuições aos estudantes, pois:

– permitiu aos mesmos participarem de um ambiente de aprendizagem seguro e que ocorre de maneira organizada, o que faz com que os mesmos possam estar mais focados, diminuindo a ansiedade e melhorando o processo de construção da aprendizagem;

– propiciou a melhoria na capacidade de tomar decisões, permitindo ao estudante desenvolver sua autonomia de forma mais eficiente, sem o professor precisar ficar interferindo no desenvolvimento das atividades;

– oportunizou o trabalho em equipe e,dessa forma, os alunos podem trocar conhecimentos e experiências entre si, o que ajudou no entendimento e desenvolvimento das atividades e promoveu a socialização;

– o professor não ficou o tempo todo na lousa, com aulas expositivas e cansativas; pelo contrário, os estudantes foram os protagonistas no desenvolvimento das atividades, sendo o professor algo como um orientador e estimulador da aprendizagem;

– o professor conseguiu identificar com mais precisão onde estavam os principais pontos de dificuldades dos alunos e assim conseguiu direcionar melhor os conteúdos para sanar as essas dificuldades de forma eficiente e produtiva.

Sendo assim, por se tratar de uma estrutura de aulas mais dinâmicas e interativas, os estudantes acabaram se interessando mais e ficando mais motivados; já para o professor, proporcionou uma melhor visão daquilo que o mesmo precisava focar mais para chegar ao seu objetivo final, que são o ensino e a aprendizagem de excelência a serem oferecidos aos estudantes.

9.2 ANÁLISE E REFLEXÃO SOBRE AS APLICAÇÕES REALIZADAS

A análise dos resultados das atividades aplicadas aos estudantes mostrou que os objetivos esperados foram atingidos, mostrando-se, dessa forma, positiva.

Com relação à participação dos estudantes nas atividades pode-se dizer que ocorreu de forma plena, sendo que os mesmos ficaram o tempo todo engajados e persistentes na busca pelas soluções.

O objetivo principal desse trabalho foi o uso da tecnologia através do software GeoGebra para um melhor entendimento dos problemas dados. Sendo assim, verificou-se que esse uso permitiu aos estudantes conseguirem entender com mais facilidade o assunto abordado e, além disso, reconhecerem a importância dessa ferramenta como instrumento de promoção da aprendizagem. É claro que seu manuseio correto não foi atingido de imediato, mas aos poucos eles foram se familiarizando com o mesmo e explorando as funcionalidades utilizadas durante as atividades. Hoje, a utilização do GeoGebra já faz parte do cotidiano dos estudantes.

Já com relação às atividades, observou-se uma maior dificuldade na realização do exercício 2 da Atividade 5, que se tratava de resolver um sistema de duas equações com duas variáveis. Porém, observo também de forma positiva os que erraram a atividade pois tiveram a oportunidade de discutir, refletir e pensar sobre o assunto juntos e isso promoveu socialização e aprendizado. E o mais interessante é que ao utilizarem o GeoGebra como ferramenta para chegarem à solução geométrica no exercício seguinte de cada um dos sistemas do exercício em questão, os próprios estudantes perceberam que haviam errado o exercício apenas observando a solução geométrica, retomando dessa forma o exercício, buscando as soluções e fazendo as devidas correções em parceria com os colegas, sendo a interferência do professor a menor possível.

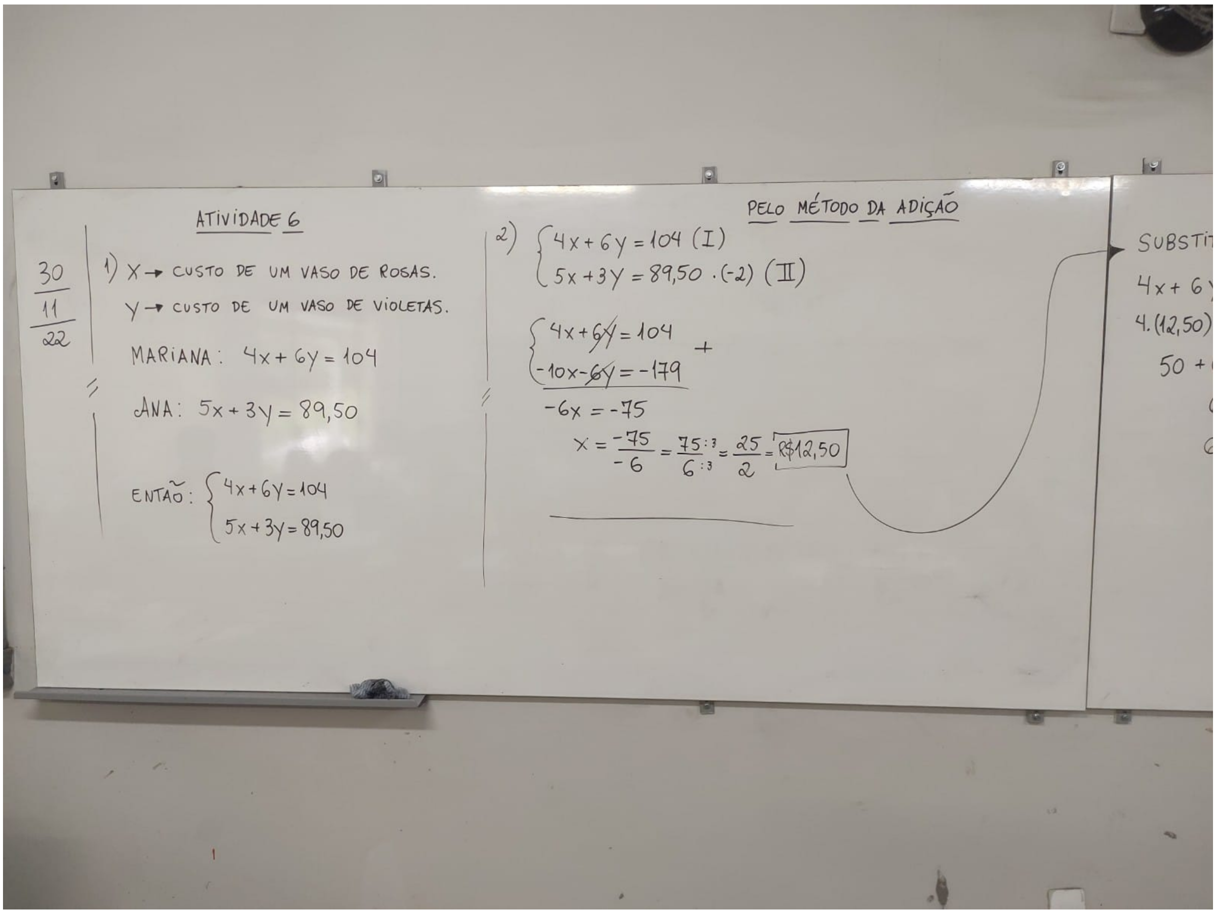
Também foi positivo o fato de que o material produzido ofereceu uma sequência de atividades que, aos poucos, introduziu conceitos básicos como reconhecer possíveis soluções de uma equação do 1º grau com duas variáveis, construção de tabela de possibilidades, par ordenado e localização no plano cartesiano, até chegar em conceitos um pouco mais elaborados como construção de gráficos de expressões algébricas dadas, interpretação de situações-problema e sua representação através de expressões algébricas, sistemas de duas equações com duas variáveis e seus diferentes tipos de resolução e análises gráficas desses sistemas utilizando o software GeoGebra.

Através dessas atividades os estudantes puderam conectar a álgebra com a geometria, exercitando a linguagem simbólica e construindo o aprendizado de maneira significativa e contextualizada.

9.3 DEVOLUTIVA REALIZADA COM OS ESTUDANTES

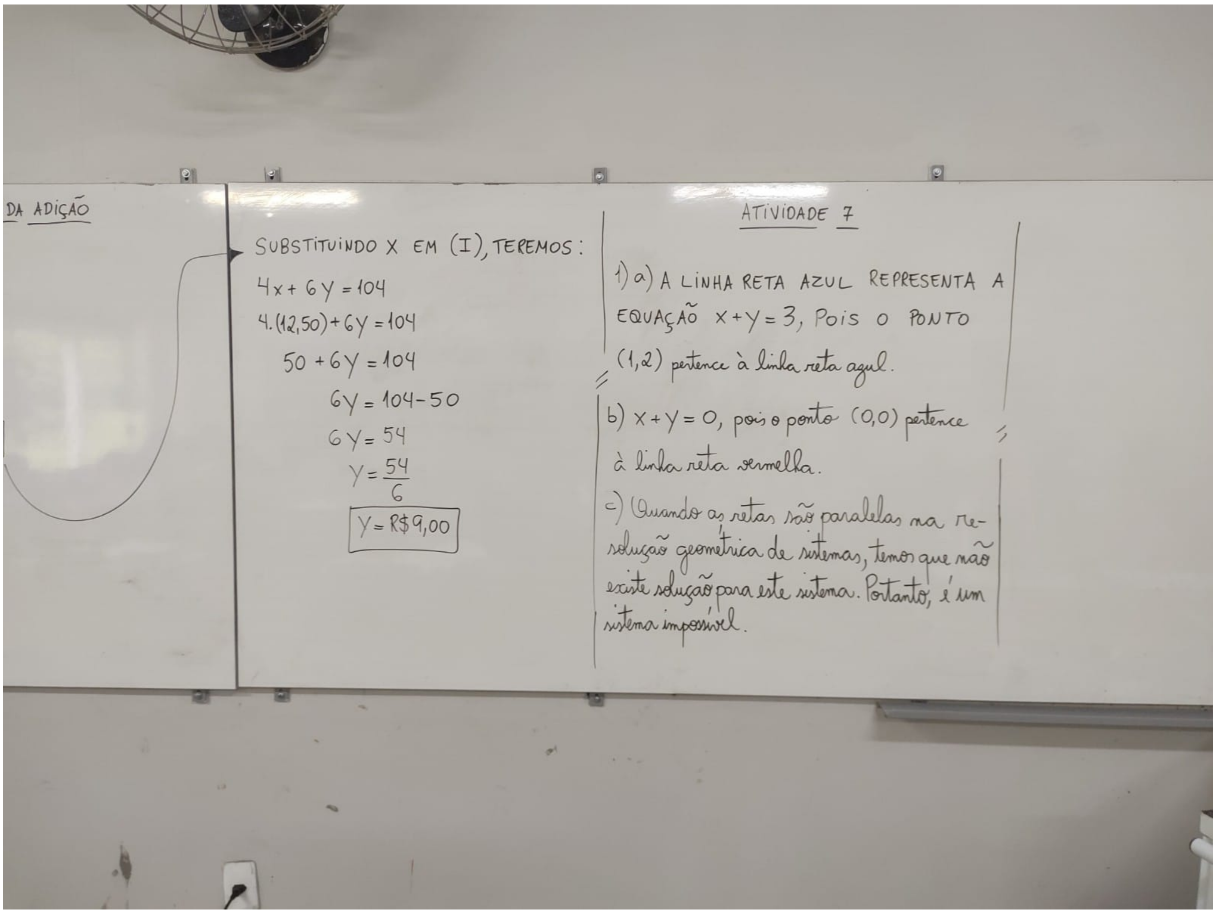
Depois de aplicadas todas as atividades e as mesmas entregues pelos estudantes, o professor realizou uma discussão com os mesmos a respeito de cada uma, utilizando a lousa para as explicações dos cálculos e os computadores para a realização das atividades que exigiam o software GeoGebra como instrumento de aprendizagem, como exemplificam as figuras 9.1 e 9.2 dadas a seguir.

Figura 9.1 – Momento da discussão das soluções com os estudantes.



Fonte: Arquivo do autor.

Figura 9.2 – Momento da discussão das soluções com os estudantes.



Fonte: Arquivo do autor.

O trabalho desenvolvido foi motivado devido ao fato de a maioria dos estudantes apresentarem dificuldade na resolução de equações e sistemas de equações do 1º grau com duas variáveis. Sendo assim, a ideia foi de que a utilização da tecnologia conseguisse auxiliar no processo de ensino e aprendizagem, o que de fato ocorreu, como mostraram as análises sobre as atividades realizadas.

REFERÊNCIAS

ALMOLOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: UFPR, 2007. Citado na página 45.

ALMOLOUD, S. A.; COUTINHO, C. de Queiroz e S. Engenharia didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no gt-19. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 3, n. 1, p. 62–77, 1981. Acesso em 21 de maio de 2017. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2008v3n1p62>. Citado na página 13.

ARAUJO, A. L. de O. S.; SANT'ANA, R. M. T. Algumas reflexões sobre a inserção das novas tecnologias nas práticas docentes. In: **Pesquisas em Discurso Pedagógico**. [S.l.: s.n.], 2011. Citado na página 12.

ARTIGUE, M. Engenharia didáctica. In: JEAN BRUN. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 46.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, Ed., 1974. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular. Competências Específicas de Matemática para o Ensino Fundamental**. Brasília: Ministério da Educação (MEC). Brasil, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 25.

CARNEIRO, V. C. G. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. **ZETETIKÉ**, v. 13, n. 23, 2005. Unicamp. Citado na página 45.

COSCARELLI, C. V.; RIBEIRO, A. E. (Ed.). **Letramento digital: aspectos sociais e possibilidades pedagógicas**. Belo Horizonte: Ceale, Autêntica, 2005. Citado na página 13.

FRADE, I. C. A. da S. **Métodos e didáticas de alfabetização: história, características e modos de fazer de professores**. Belo Horizonte: CENTRO DE ALFABETIZAÇÃO, LEITURA E ESCRITA. Ceale/FAE/UFMG, 2005. 72 p. Citado na página 12.

IEZZI, G. **Fundamentos da Matemática Elementar. Volume 7: Geometria Analítica**. São Paulo: Atual Editora, 2013. Citado na página 18.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos da Matemática Elementar. Volume 4: Sequências, Matrizes, Determinantes e Sistemas**. São Paulo: Atual Editora, 2013. Citado na página 26.

JAHN, A. P. **Engenharia didática como Metodologia de Pesquisa. Projetos em Ensino de Matemática**. [S.l.]: IME-USP, 2020. Citado na página 46.

NUNAN, D. A foot in the world of ideas: Graduate study through the internet. **Language Learning & Technology**, v. 3, n. 1, p. 52–74, julho 1999. Citado na página 13.

IV CONGRESSO SOBRE TECNOLOGIAS NA EDUCAçãO. **A Utilização de Softwares no Ensino de Matemática para Ensino Fundamental e Médio**. Citado na página 12.

SEDUC-SP. **Currículo em Ação**. São Paulo: Secretaria da Educação, 2022. Citado na página 13.

SILVA, M. F.; CORTEZ, R. D. C. C.; OLIVEIRA, V. B. de. Software educativo como auxílio na aprendizagem da matemática: uma experiência utilizando as quatro operações com alunos do 4º ano do ensino fundamental i. **Educação, Cultura e Comunicação**, v. 4, n. 7, 2013. Citado na página 12.

TEDERKE, A. da R.; FORTES, P. R.; SILVEIRA, S. R. Estudo de caso envolvendo a aplicação de um software educacional de geometria espacial. UFSM, 2016. Acesso em 21 de maio de 2017. Disponível em: <https://www.ufsm.br/app/uploads/sites/333/2018/11/AdrianaTederke.pdf>. Citado na página 12.

APÊNDICE A – FOLHAS DE ATIVIDADES

Figura A .1 – Atividade 1

ATIVIDADE 1 – EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM DUAS VARIÁVEIS

1. A secretária de uma escola recebeu dos professores as planilhas com as notas e as médias dos estudantes, para digitação no sistema. Porém, a folha foi danificada e alguns números ficaram ilegíveis.

   Organizem-se em grupos para encontrar os números que faltam para completar a planilha. Depois, expliquem como encontraram a solução para cada caso.

Número de alunos 8ª A	Nota
2	2,0
15	7,5
1	9,5
2	4,5
2	10,0
4	5,0
6	6,0
3	9,0
7	8,0
Média	[illegible]

Número de alunos 8ª B	Nota
4	5,0
2	1,0
7	6,5
4	[illegible]
13	7,0
3	3,3
6	9,0
1	10
Média	6,63

Número de alunos 8ª C	Nota
5	3,5
10	8,0
[illegible]	6,0
1	0,5
4	7,0
12	9,0
Média	7,2

2. O 8º ano D é uma turma com 37 estudantes. Qual poderia ser o número de meninos? Organize todas as possibilidades em uma tabela. Depois, escreva uma expressão algébrica que traduza esse problema e explique o procedimento para resolvê-lo.

Figura A .2 – Atividade 2

ATIVIDADE 2 – PARES ORDENADOS E SUA LOCALIZAÇÃO NO PLANO CARTESIANO

1. Construa, em uma folha de papel quadriculado, o plano cartesiano e localize os seguintes pares ordenados:
   A(-1,2) , B(0,3) , C(2,-1) , D(3,0) , E(4,5) , F(0,0) e G(5,4).

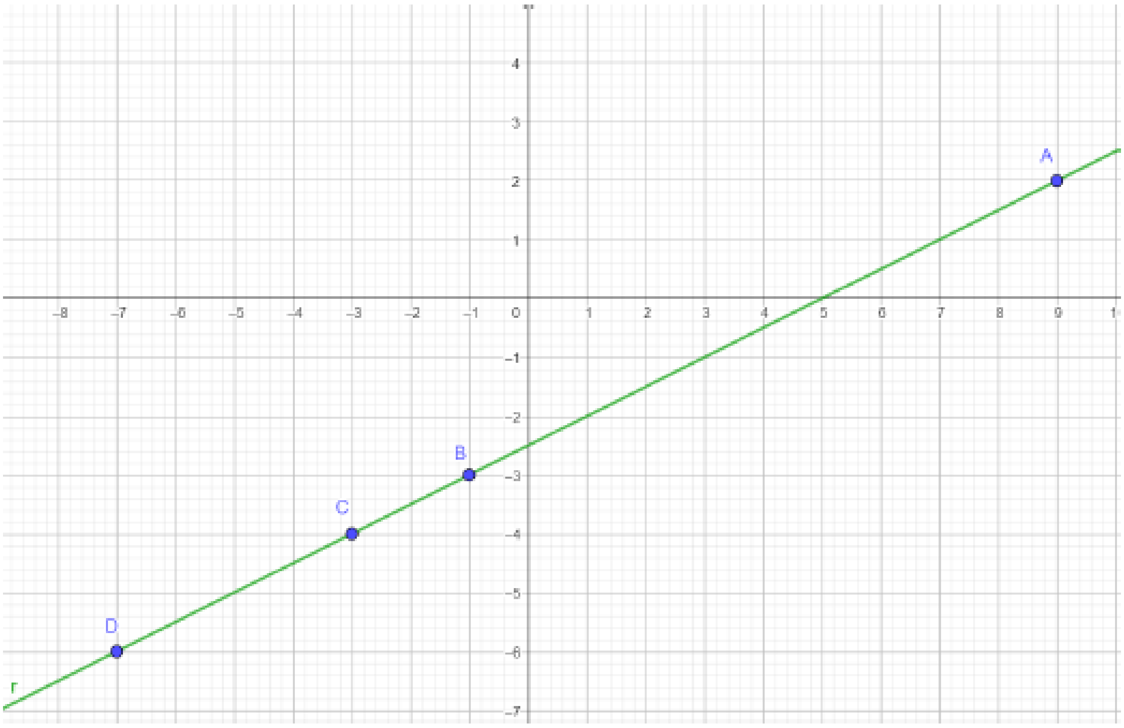
2. Analise os pontos que foram marcados no plano cartesiano. Em seguida, analise os pontos A e C. A localização desses dois pontos é a mesma? Justifique.

3. Agora, utilizando o software Geogebra, localize os pontos dados na questão 1 e compare com a sua construção realizada no papel quadriculado. Descreva o que você observou.

Figura A .3 – Atividade 3

ATIVIDADE 3 – RESULTADOS DE UMA EQUAÇÃO DE 1º GRAU COM DUAS VARIÁVEIS

1. Observe o plano cartesiano abaixo onde estão destacados alguns pontos pertencentes à reta que representa uma equação com duas variáveis. Analise e registre na tabela dada quais são esses pontos.



Ponto	A	B	C	D
Par ordenado				

2. Para cada expressão algébrica dada a seguir, encontre 4 pontos diferentes do gráfico atribuindo valores para a variável x. Em seguida, faça o esboço do gráfico, unindo os pontos encontrados. Qual expressão gerou uma reta?

   a) $y = 2x - 3$
   b) $y = x^2$

3. Utilize o software Geogebra, construa o gráfico das expressões algébricas dadas a seguir e descreva o que você observou.

   a) $y = -3x - 1$
   b) $y = x^2 - 1$

Figura A .4 – Atividade 4

ATIVIDADE 4 – SOLUÇÕES DE UMA EQUAÇÃO DE 1º GRAU COM DUAS VARIÁVEIS

1. Analise a tabela a seguir e identifique os pares ordenados que atendam a regra "o valor de y é o dobro do valor de x". Em seguida, utilizando o software Geogebra, represente-os num plano cartesiano.

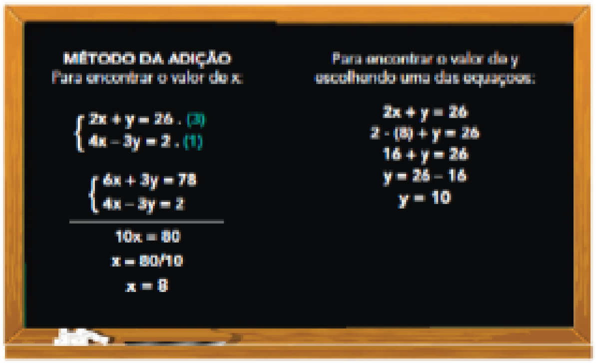
(0,0)	(1,2)	(-2,-4)
(1,-2)	(0,1)	(-1,2)
(2,4)	(-2,4)	(2,-4)
(-3,6)	(3,-6)	(-3,-6)
(4,-8)	(4,8)	(-4,8)
(5,-10)	(-5,-10)	(-5,10)
(3,5)	(3,2)	(5,-2)

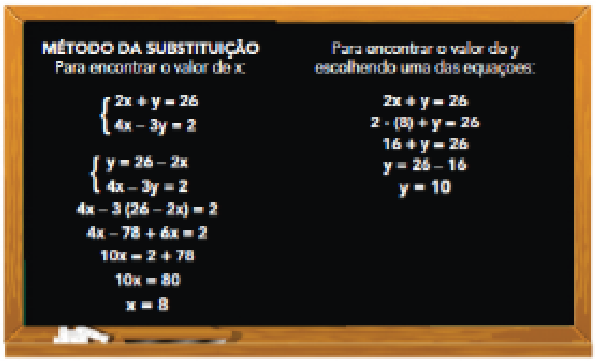
2. Encontre uma expressão algébrica que descreva esta regra: "o valor de y é o dobro do valor de x".

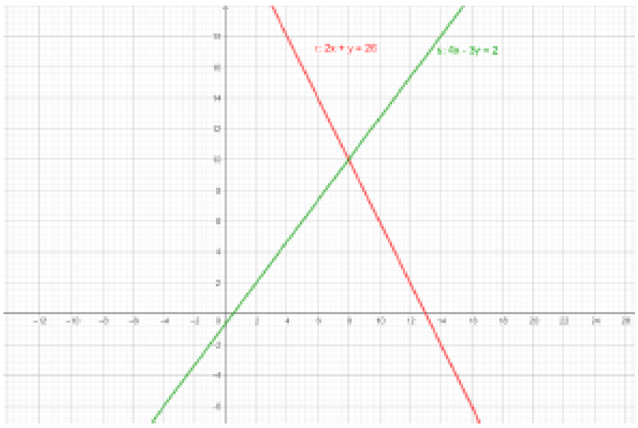
Figura A .5 – Atividade 5

ATIVIDADE 5 – SISTEMAS DE DUAS EQUAÇÕES COM DUAS INCÓGNITAS

1. Para resolver sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas, o professor do 8º ano explicou que existem três maneiras de serem resolvidos: utilizando o método da substituição, o método da adição ou, ainda, é possível resolver geometricamente. O professor registrou as duas formas de resolução e distribuiu uma malha quadriculada com o procedimento geométrico, conforme as imagens a seguir:







Imagine agora que você tem a missão de explicar para seu colega como resolver esse sistema pelos três métodos. Como você explicaria? Registre os procedimentos.

2. Após observar a resolução do exemplo acima, resolva os próximos sistemas escolhendo um dos dois métodos apresentados: substituição ou adição.

a) $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x + y = 39 \\ x - y = 3 \end{cases}$

3. Utilizando o software Geogebra, para cada sistema de equações dado na questão 2, faça a resolução geométrica, comparando com a resolução algébrica. Descreva o que você observou.

Figura A .6 – Atividade 6

ATIVIDADE 6 – PROBLEMAS COM SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU

1. Duas amigas foram a uma floricultura comprar vasos de flores. Mariana comprou 4 vasos de rosas e 6 vasos de violetas, e gastou um total de R$ 104,00. Sua amiga Ana também realizou a compra de 5 vasos de rosas e 3 vasos de violetas, gastando um total de R$ 89,50. Sabendo que x representa o custo de um vaso de rosas e y é o custo de um vaso de violetas, encontre uma equação envolvendo x e y que descreva o gasto de Mariana e outra que descreva o gasto de Ana.

2. Calcule os valores unitários dos vasos de rosas e de violeta dessa floricultura, utilizando o sistema de equações de 1º grau com duas incógnitas obtido no problema 1. Para isso, escolha um dos métodos de resolução: substituição ou adição.

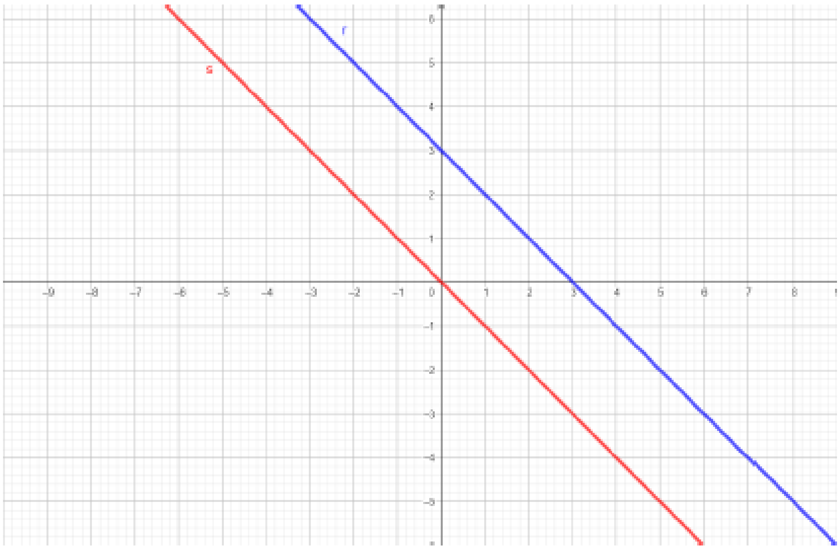
3. Utilizando o software Geogebra, faça a resolução geométrica do sistema de equações obtido no problema 1, comparando com a resolução algébrica que você fez no problema 2. Descreva o que você observou.

Figura A .7 – Atividade 7

ATIVIDADE 7 – ANÁLISE DAS DIFERENTES RESOLUÇÕES GRÁFICAS DE UM SISTEMA

1. Analise o sistema abaixo, em que x e y são números reais, a partir do gráfico dado a seguir:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

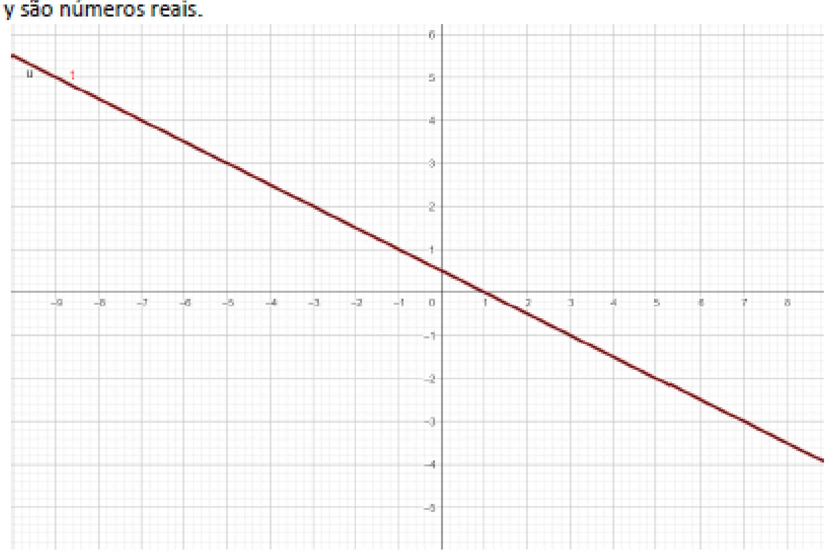


a) Que equação representa a linha reta azul? Justifique.
b) Que equação representa a linha reta vermelha? Justifique.
c) Qual será a solução desse sistema? Justifique.

2. Analise agora a representação gráfica do sistema a seguir:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 6y = 3 \end{cases}$$

Nele, x e y são números reais.



a) Qual é a solução desse sistema?
b) Como você explicaria o fato de duas equações e uma mesma reta para a representação gráfica de ambas as equações?

Exceto quando indicado o contrário, a licença deste item é descrito como
Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Brazil