Universidade Federal de São Carlos
Campus Sorocaba
Departamento de Física, Química e Matemática
Licenciatura em Matemática

Gustavo Cavani Teles da Silva

Uma abordagem fuzzy para o desempenho escolar no processo ensino-aprendizagem

Sorocaba-SP
2023

Universidade Federal de São Carlos
Campus Sorocaba
Departamento de Física, Química e Matemática
Licenciatura em Matemática

Gustavo Cavani Teles da Silva

Uma abordagem fuzzy para o desempenho escolar no processo ensino-aprendizagem

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Física, Química e Matemática da Universidade Federal de São Carlos – Campus Sorocaba, para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Magda da Silva Peixoto.

Sorocaba-SP
2023

Silva, Gustavo Cavani Teles da

Uma abordagem fuzzy para o desempenho escolar no processo ensino-aprendizagem / Gustavo Cavani Teles da Silva -- 2023.
51f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba
Orientador (a): Magda da Silva Peixoto
Banca Examinadora: Magda da Silva Peixoto, Paulo César Oliveira, Sadao Massago
Bibliografia

1. Avaliação. 2. Conjunto Fuzzy. 3. Relações Fuzzy. I. Silva, Gustavo Cavani Teles da. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Maria Aparecida de Lourdes Mariano - CRB/8 6979

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DE SOROCABA - CCML-So/CCTS

Rod. João Leme dos Santos km 110 - SP-264, s/n - Bairro Itinga, Sorocaba/SP, CEP 18052-780
Telefone: (15) 32298874 - http://www.ufscar.br

DP-TCC-FA nº 4/2023/CCML-So/CCTS

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

GUSTAVO CAVANI TELES DA SILVA

UMA ABORDAGEM FUZZY PARA O DESEMPENHO ESCOLAR NO PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus Sorocaba

Sorocaba, 31 de março de 2023

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	**Nome Completo**
Orientadora	Profa. Magda da Silva Peixoto
Membro da Banca 1	Prof. Dr. Paulo César Oliveira
Membro da Banca 2	Prof. Dr. Sadao Massago

Documento assinado eletronicamente por **Sadao Massago**, **Docente**, em 05/04/2023, às 13:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Magda da Silva Peixoto**, **Docente**, em 05/04/2023, às 15:11, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Paulo Cesar Oliveira**, **Docente**, em 05/04/2023, às 19:57, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Referência: Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo nº 23112.016176/2021-54

SEI nº 0975913

Modelo de Documento: Grad: Defesa TCC: Folha Aprovação, versão de 02/Agosto/2019

Dedico este trabalho aos meus queridos pais, Luiz e Edlene, e aos meus irmãos, Renan e Gabriel. Sem vocês, nada disso teria sentido.

Agradecimentos

Aos meus pais, Luiz Teles e Edlene Cavani, por todo apoio, cuidado, amor e por sempre acreditarem em mim. Aos meus irmãos, Gabriel Cavani e Renan Cavani, por toda força, paciência e contribuição em toda a minha trajetória acadêmica. À minha cunhada Tamires Domingues pelas doces palavras de incentivo. À minha cachorra, Mel, e aos meus gatos, Gato e Gata, por todo apoio emocional, abraços apertados e mordidas. Amo vocês mais do que tudo.

À orientadora Prof.ª Dr.ª Magda da Silva Peixoto por todo ensinamento, paciência e compreensão, nas quais foram substanciais para a finalização deste trabalho.

Aos professores da graduação pelos ensinamentos. Em especial, aos professores Dr. Paulo César Oliveira, Dr. Renato Fernandes Cantão e Dr. Antônio Luís Venezuela, por todo suporte, sempre com empenho e muita compreensão.

Aos meus queridos amigos matemáticos, Letícia Rocumba, Thiago Rita, Adriano Ortiz, Felipe Kobata, Gustavo Bobato (in memorian) e Nicolas Roberto, que estiveram presentes durante a minha formação, fornecendo todo apoio e incentivo que eu precisava. E aos demais colegas que a universidade me proporcionou conhecer.

Aos meus estimados amigos não-matemáticos, Ana Carolina Vaz, Matheus Carvalho, Leandra Borges, Márcio Júnior, Daniel Gomes, Gabriela Antulini, Leonardo Liniker, Gabriel Aguiar, Julia Coutinho e Bruno Tomio, por toda força, incentivo e por terem sido compreensivos com os momentos de ausência.

Aos meus caros amigos passageiros de ônibus, João Deliberali, Anna Giulia Gaudenci, Paola Vieira, Nathan Penha, Otávio Bonini, Isadora Costa, Karol Cardozo, Gabriela Mota e aos demais, pelo suporte, conversas e risadas.

À minha amiga fuzzy, Camila Lunetta, por toda colaboração e parceria com meus estudos. Este trabalho se tornou mais proveitoso com a sua cooperação.

Aos professores que compuseram a banca examinadora.

À Universidade Federal de São Carlos, a instituição que possibilitou a concretização de um sonho.

Agradeço de alma e coração a todos amigos, familiares, colegas e professores que contribuíram na minha formação e na realização deste trabalho. Obrigado por fazerem tanto por mim, com todo amor do mundo.

"E eu... o que faço com esses números?"
Humberto Gessinger

Resumo

Avaliar o processo de ensino-aprendizagem e mensurar o desempenho discente pode ser uma tarefa complexa e subjetiva. Dessa forma, a Teoria dos Conjuntos Fuzzy é uma ferramenta destacável para este processo. Nessa perspectiva, este trabalho tem como objetivo o estudo dos conceitos básicos da Teoria de Conjuntos Fuzzy e uma aplicação deste estudo propondo um modelo matemático para auxiliar o docente na tarefa de avaliação das aprendizagens discentes, por meio de equações relacionais fuzzy.

Palavra-Chave: avaliação; conjuntos fuzzy; relações fuzzy.

Abstract

Assessing the teaching-learning process and measuring student development can be a complex and subjective task. Therefore, Fuzzy Set Theory is a distinctive tool for this process. From this perspective, this work aims to study basic concepts of Fuzzy Set Theory and an application of this study by proposing a mathematical model to assist teachers in the task of evaluating students' learning via fuzzy relational equations.

Keywords: assessment; fuzzy sets; fuzzy relations.

Sumário

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

Pode-se dizer que a avaliação do processo de ensino-aprendizagem busca conhecer o nível de desempenho discente, considerando o processo educativo e tomando decisões que possibilitem atingir os resultados esperados.

Medir o conhecimento adquirido em uma determinada disciplina, por exemplo, é uma tarefa complexa e subjetiva e, para isso, adequado o modelo de avaliação, por levar em conta o acompanhamento processual do aluno, em uma relação espaço-tempo ocorrida em um contexto escolar (FORNER; TREVISOL, 2012). O planejamento de quais e quantos instrumentos serão considerados no processo avaliativo depende de cada instituição, do docente e do público-alvo.

Geralmente, ao final da disciplina, o aluno recebe um conceito ou nota, por meio de algum cálculo matemático, que representa o seu desempenho. Porém, esse valor obtido pode não deixar claro o conhecimento que o aluno realmente adquiriu.

É fato que um dos maiores desafios para um professor é o processo de avaliar. Durante um determinado período ele deverá atribuir notas às atividades feitas pelos alunos. Essa tarefa é importante no desenvolvimento da vida escolar dos estudantes. Ela pode servir de motivação ou desistência, e ainda expressar o quanto um aluno aprendeu o conteúdo proposto durante determinado período.

Pensando no exposto acima, este trabalho de pesquisa traz uma ferramenta alternativa, com o uso da Teoria do Conjuntos Fuzzy, para auxiliar o professor na complexa tarefa de avaliação das aprendizagens discentes, buscando considerar aspectos subjetivos inerentes ao processo de avaliação. A principal vantagem do modelo a ser proposto é a possibilidade de classificar o desempenho dos discentes, considerando o uso de diferentes critérios (variáveis de entrada) para a composição da nota final (variável de saída), a partir de termos linguísticos como, por exemplo, Insuficiente, Regular e Bom, usando informações qualitativas e quantitativas, que são tratadas como conjuntos fuzzy.

Uma grande contribuição dessa ferramenta é que o professor poderá escolher quais e quantas formas de avaliação irá adotar para compor o conceito final do aluno, pois será composta por relações fuzzy (BARROS; BASSANEZI, 2010).

Um conjunto fuzzy permite representar conceitos vagos em linguagem natural e a sua representação não depende apenas do conceito, mas também, do contexto em que está inserido. A modelagem matemática fuzzy tem se mostrado mais adequado para tratar problemas que envolvem informações vagas, subjetivas e/ou imprecisas.

A ideia capital para este Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) teve origem na apresentação da professora orientadora (PO) sobre o seu projeto de pesquisa intitulado "Uma abordagem fuzzy para o desempenho escolar no processo ensino-aprendizagem", cujo objetivo é propor um modelo matemático alternativo com o uso da Teoria do Conjuntos Fuzzy, para auxiliar o professor na complexa tarefa de avaliação das aprendizagens discentes, buscando considerar aspectos subjetivos inerentes ao processo de avaliação. Como parte do desenvolvimento da pesquisa, a PO estava em busca de um aluno da Licenciatura em Matemática para desenvolver uma iniciação científica sobre equações relacionais fuzzy aplicada em avaliação, visto ser um tema subjetivo e pouco discuto no âmbito fuzzy.

Naquele momento, a PO estava paralelamente orientando uma aluna do mestrado profissional PPGECE (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas), cujo problema de pesquisa foi delimitado em avaliação escolar, com base na utilização de sistemas baseados em regras fuzzy. Com isso, houve a possibilidade de uma parceria de estudos sobre a temática fuzzy com a orientanda do PPGECE.

Uma das etapas de desenvolvimento da pesquisa da PO envolveu a oferta de uma atividade de extensão intitulada "Uma Introdução a Teoria dos Conjuntos Fuzzy". Nessa proposta seria abordado conceitos básicos dessa teoria, como conjuntos fuzzy, funções de pertinência, relações fuzzy, sistema baseados em regras fuzzy e aplicações.

Posteriormente ao estudo teórico, se iniciou o desenvolvimento do modelo matemático. Buscou-se na literatura modelos semelhantes para utilizar como base do trabalho, porém, não foi encontrado nenhum estudo que utilizava equações relacionais fuzzy para propor um modelo no contexto de avaliação.

Após um ano, houve a finalização do modelo, o desenvolvimento do relatório final da iniciação científica, a apresentação deste estudo no Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional - CNMAC na forma de pôster em 2022, e por fim, a escrita do TCC, acrescentando um código em linguagem Python em que aplica o modelo proposto com novos dados.

Diante isso, este trabalho tem como objetivo compreender os conceitos básicos da Teoria de Conjuntos Fuzzy e, posteriormente, propor um modelo matemático alternativo para auxiliar o professor na tarefa de avaliação das aprendizagens discentes, buscando considerar aspectos subjetivos inerentes ao processo de avaliação.

O Capítulo 2 abordará os conceitos básicos da Teoria de Conjuntos Fuzzy, como a definição de um Conjunto Fuzzy, operações com Conjuntos Fuzzy, operações t-norma e t-conorma, níveis de um Conjunto Fuzzy e o Principio de Extensão. Em seguida, no Capítulo 3, será abordado os principais conceitos de Equações Relacionais Fuzzy, definindo Relações Fuzzy, as suas formas de representação e a composição entre Relações

Fuzzy Binárias. Além disto, será apresentado um modelo adaptado de diagnóstico médico. Posteriormente, o Capítulo 4 apresentará um modelo matemático para quantificar o desempenho escolar, juntamente com os seus resultados e conclusões. E por fim, no Capítulo 5 será desenvolvida as considerações finais.

Capítulo 2

A Teoria de Conjuntos Fuzzy

A Teoria dos Conjuntos Fuzzy foi desenvolvida para representar o conhecimento incerto e impreciso. Ela fornece um meio aproximado, mas eficaz, de descrever o comportamento de um sistema que é muito complexo, mal definido, com poucos dados.

As relações fuzzy são uma generalização das relações clássicas. Uma relação clássica descreve a inter-relação entre dois ou mais objetos, e seu conceito é formalizado a partir da Teoria de Conjuntos. Segundo Bassanezi e Barros (2010), a escolha do tipo de relação depende muito do fenômeno a ser estudado. Porém, a Teoria dos Conjuntos Fuzzy tem mostrado maior robustez no sentido que esta inclui a Teoria Clássica de Conjuntos.

O marco inicial da Teoria dos Conjuntos Fuzzy foi o artigo publicado em 1965, pelo matemático Lotfi Asker Zadeh, professor no Departamento de Engenharia Elétrica e Ciências da Computação da Universidade da Califórnia, em Berkeley (ZADEH, 1965). Sua principal intenção era dar um tratamento matemático a certos termos linguísticos subjetivos. Esse seria o primeiro passo no sentido de se programar e armazenar conceitos vagos em computadores, tornando possível a produção de cálculos com informações imprecisas. A ideia de Zadeh foi flexibilizar a pertinência de elementos aos conjuntos, criando a noção de grau de pertinência. Um elemento poderia pertencer parcialmente a um dado conjunto. Para modelar matematicamente o tal "conjunto", Zadeh propôs o conceito de conjunto fuzzy a partir de uma função de pertinência que indica o quanto um elemento faz parte do conjunto fuzzy.

Em situações como "*aquela pessoa é muito alta?*" ou "*está com pouca dor?*", respostas como "*sim*" ou "*não*" nem sempre representam o que se deseja expressar. De certa maneira, "*alta*" e "*dor*" podem representar subjetividade, pois é difícil definir, com precisão, o que é exatamente ser *alta* ou ter *dor*. Quando trabalhamos com conjuntos fuzzy, tal imprecisão é associada com uma função, que chamamos de função de pertinência e, deste modo, conseguimos definir o quanto é ser *"muito alta"* ou estar *"com pouca dor"*.

Um conjunto clássico, chamado em inglês de *crisp*, fica bem definido no sentido que sabemos identificar se um elemento pertence ao conjunto ou não. Por exemplo, o número 7 é primo e o número 4 não. Isso caracteriza um conjunto clássico (crisp). Agora, seja B o conjunto das pessoas baixas definido como $B = \{x \in U \mid x \leq 1,60 \text{ metros de altura}\}$, ou seja, uma pessoa é considerada baixa se tiver $1,60$ metros de altura ou menos. Então, de acordo com o conjunto B, uma pessoa com $1,61$ metros de altura não estaria em B, mas ela poderia ser considerada baixa? Não. E foi a partir de incertezas como essa que surge o conceito de conjuntos fuzzy e função de pertinência (BELLUCCI, 2009).

Dessa forma, neste capítulo serão definidos os conceitos básicos de Conjuntos Clássicos e Conjuntos Fuzzy. As principais referências adotadas para este capítulo foram: (BARROS; BASSANEZI, 2010), (NICOLETTI; CAMARGO, 2011), (PISSINI, 2019), (BELLUCCI, 2009), (MARINS, 2016) e (SILVA, 2020).

2.1 Conceitos Básicos da Teoria Clássica de Conjuntos

Em Matemática alguns termos são reconhecidos sem uma definição formal, deste modo, são considerados noções primitivas. Na Teoria Clássica de Conjuntos, os termos conjunto e elemento integram esse conceito.

Conjuntos podem ser caracterizados como uma coleção de objetos distinguíveis que compartilham alguns aspectos comuns, aspectos estes que os qualificam a pertencer ao conjunto. Os objetos que formam o conjunto são chamados de elementos do conjunto (NICOLETTI; CAMARGO, 2011).

Usualmente, um conjunto é representado por letras maiúsculas e seus elementos por letras minúsculas. A letra U designa a existência de um conjunto ao qual contém todos os elementos de determinado assunto. Esse conjunto U é denominado como conjunto universo.

Outra noção primitiva é a noção de pertinência. Representa-se que determinado objeto x é elemento de um conjunto A, simbolizando: $x \in A$. Para indicar que x não é elemento de um conjunto A, simboliza-se: $x \notin A$.

Uma forma de indicar a pertinência de um elemento x em um conjunto A é através de uma função característica $\chi_A(x)$, cuja definição é:

Definição 2.1. Seja U um conjunto e A um subconjunto de U. A função característica de A é dada por:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}.$$

Ou seja, para cada $x \in U$, se x pertence ao conjunto A, então $\chi_A(x) = 1$, caso contrário, se x não pertence a A, então $\chi_A(x) = 0$. Logo, percebe-se que a função característica classifica quais elementos do conjunto U pertencem ou não ao conjunto A.

Para Nicoletti e Camargo (2011), a representação de conjuntos por meio de sua função característica é bastante importante, pois pode ser generalizada para conjuntos fuzzy.

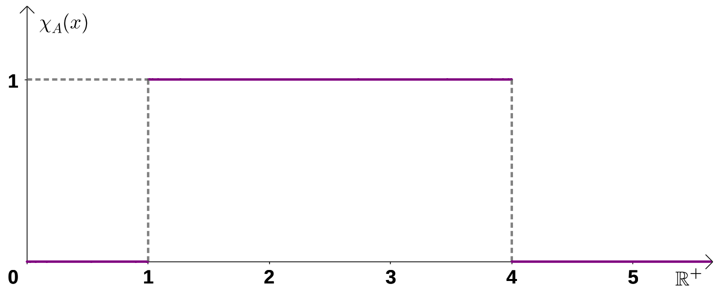
Além disso, as autoras ressaltam que os valores 0 e 1 da definição de uma função característica não têm significado numérico, são apenas símbolos convenientes que possibilitam distinguir os elementos de um conjunto universo que pertencem a um subconjunto (do conjunto universo) daqueles que não pertencem.

Exemplo 2.2. (Adaptado de (NICOLETTI; CAMARGO, 2011)). Considere o conjunto dos números reais não negativos $\mathbb{R}_+$ e seja A o conjunto dos números reais x tais que $x \in [1, 4]$. A função característica do conjunto A é dada por:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 1 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Em que é representada graficamente pela Figura 2.1.

Figura 2.1: Representação gráfica da função característica do conjunto dos reais não negativos ao intervalo $[1, 4]$.



Fonte: (NICOLETTI; CAMARGO, 2011), adaptado pelo autor.

Em seguida serão revisados conceitos básicos da Teoria Clássica dos Conjuntos, como definições e teoremas, pois são base para estudos da Teoria dos Conjuntos Fuzzy.

Definição 2.3. Dois conjuntos A e B são iguais, notado por $A = B$, se e somente se eles tiverem os mesmos elementos. Simbolicamente,

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Definição 2.4. O conjunto vazio não tem elementos. É notado por $\emptyset$ ou $\{\}$.

Definição 2.5. Uma família (coleção) de conjuntos é um conjunto cujos elementos são conjuntos. As famílias de conjuntos são notadas com letras maiúsculas em itálico.

Definição 2.6. Se A e B são conjuntos, então A está contido em B, denotado por $A \subseteq B$, se, e somente se, cada elemento de A for elemento de B. Se $A \subseteq B$, então A é um subconjunto de B, e se $A \subseteq B$ e existir um elemento x tal que $x \in B$ e $x \notin A$, então A é um subconjunto próprio de B, notado por $A \subset B$. Se $A \subseteq B$ não se verifica, escreve-se $A \nsubseteq B$. Percebe-se que quando B inclui A ($B \supseteq A$) é equivalente a A está contido em B ($A \subseteq B$). Todo conjunto é subconjunto de si próprio e todo conjunto é subconjunto do conjunto universo.

Teorema 2.7. *Para qualquer conjunto A, $\emptyset \subseteq A$.*

Teorema 2.8. *Os conjunto A e B são iguais, se e somente se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.*

Definição 2.9. A família de todos os subconjuntos de um conjunto A é chamada de conjunto potência de A e notada por $P(A)$ ou 2^A.

Teorema 2.10. *Se um conjunto finito A tem n elementos, então $P(A)$ tem 2^n elementos, ou seja, $|P(A)| = 2^{|A|} = 2^n$.*

Definição 2.11. Seja U o conjunto universo e, A e B subconjuntos de U. A união dos conjuntos A e B é o conjunto definido por:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ } ou \text{ } x \in B\}.$$

em que *ou* tem o significado inclusivo, ou seja, uma das seguintes situações deve ser satisfeita: $x \in A$ e $x \notin B$, $x \notin A$ e $x \in B$, $x \in A$ e $x \in B$.

Definição 2.12. Seja U o conjunto universo e, A e B subconjuntos de U. A intersecção dos conjuntos A e B é o conjunto definido por:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ } e \text{ } x \in B\}.$$

Definição 2.13. Seja U o conjunto universo e, A e B subconjuntos de U. Os conjuntos A e B são chamados de disjuntos se:

$$A \cap B = \emptyset.$$

Definição 2.14. O complemento relativo de um conjunto A em relação a um conjunto X, notado por $X - A$ (também chamado de conjunto diferença) é o conjunto que contém todos os elementos de X que não são elementos de A:

$$X - A = \{x \mid x \in X \text{ } e \text{ } x \notin A\}.$$

O complemento absoluto de um conjunto A (também chamado de complementar de um conjunto A), notado por A', é o conjunto $U - A$. Desta forma, tem-se: $X - A = X \cap A'$.

Teorema 2.15. *Seja A um conjunto e seja U o conjunto universo, então $A \cup A' = U$ e $A \cap A' = \emptyset$.*

Proposição 2.16. *Seja U o conjunto universo e, A e B subconjuntos de U. Então são válidas as afirmações:*

(i) $A \subseteq B$, *se e somente se* $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$;

(ii) $\chi_{A\cup B}(x) = \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}$

$$= \begin{cases} 1, & se\ x \in A\ ou\ x \in B \\ 0, & se\ x \notin A\ ou\ x \notin B \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & se\ x \in A \cup B \\ 0, & se\ x \notin A \cup B \end{cases}.$$

(iii) $\chi_{A\cap B}(x) = \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}$

$$= \begin{cases} 1, & se\ x \in A\ e\ x \in B \\ 0, & se\ x \notin A\ ou\ x \notin B \end{cases}$$

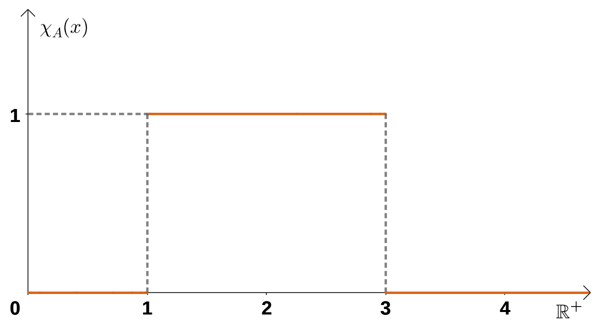
$$= \begin{cases} 1, & se\ x \in A \cap B \\ 0, & se\ x \notin A \cap B \end{cases}.$$

(iv) Se A' é o complemento de um conjunto A, então $\chi_{A'}(x) = 1 - \chi_A(x)$.

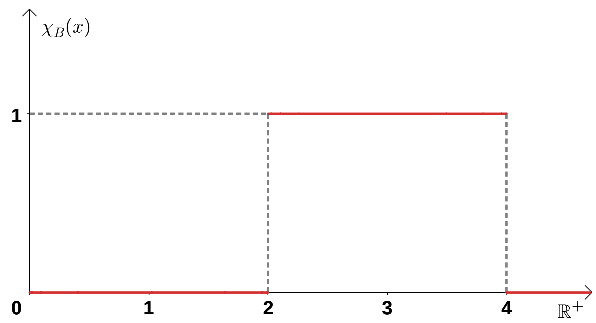
Exemplo 2.17. Considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 1 \leq x \leq 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 2 \leq x \leq 4\}$, cujas funções características estão representadas nas Figuras 2.2a e 2.2b.

Figura 2.2: Representação gráfica da função característica dos conjuntos A e B.

(a) $A = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 1 \leq x \leq 3\}$.



(b) $B = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 2 \leq x \leq 4\}$.

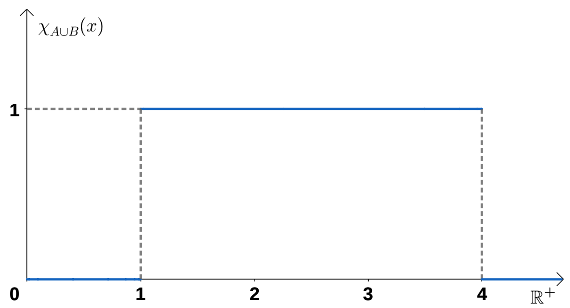


Fonte: (NICOLETTI; CAMARGO, 2011), adaptado pelo autor.

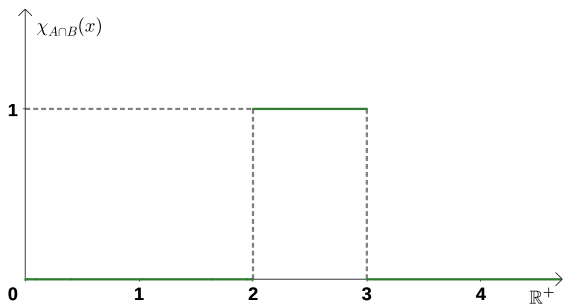
As Figuras 2.3a e 2.3b apresentam a representação gráfica da função característica do conjunto união $A \cup B = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 1 \leq x \leq 4\}$ e da função característica do conjunto intersecção $A \cap B = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 2 \leq x \leq 3\}$.

Figura 2.3: Representação gráfica da função característica dos conjuntos $A \cup B$ e $A \cap B$.

(a) $A \cup B = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 1 \leq x \leq 4\}$.



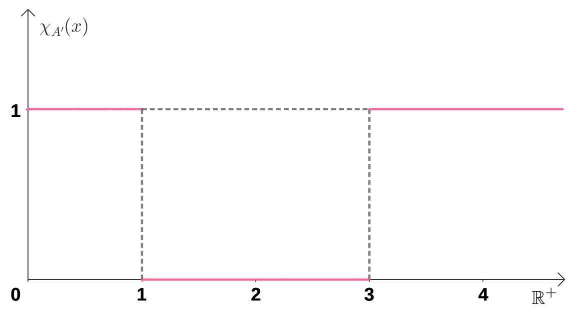
(b) $A \cap B = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 2 \leq x \leq 3\}$.



Fonte: (NICOLETTI; CAMARGO, 2011), adaptado pelo autor.

A representação gráfica da função característica do conjunto complementar de A (A') está mostrada na Figura 2.4.

Figura 2.4: Representação gráfica da função característica do conjunto complementar de A (A').



Fonte: (NICOLETTI; CAMARGO, 2011), adaptado pelo autor.

Definição 2.18. Seja $A = \{A_{s_1}, A_{s_2}, A_{s_3}, \ldots\}$ uma família de conjuntos, em que $A_{s_i} = A_{s_j}$, se $s_i = s_j$. Os elementos do conjunto A podem então ser identificados pelos elementos do conjuntos $I = \{s_1, s_2, s_3, \ldots\}$. Logo, escreve-se:

$$A = \{A_i \mid i \in I\}.$$

Os elementos de I são chamados de índices, o conjunto I, de conjunto conjunto índice, e A, de conjunto indexado.

Definição 2.19. Seja I um conjunto índice. As operações de união e intersecção podem ser generalizadas como:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{a \mid a \in A_i,\ \textit{para pelo menos um } i \in I\}.$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{a \mid a \in A_i,\ \textit{para todo } i \in I\}.$$

Definição 2.20. Uma partição $\mathcal{P}(A)$ de um conjunto A, $\mathcal{P}(A) = \{A_i \mid i \in I\}$, é uma família de subconjuntos distintos e não vazios de A tal que $\bigcup_{i \in I} A_i = A$ e $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i, j \in I$ $(i \neq j)$. Os conjuntos A_i são chamados de blocos de partição.

Definição 2.21. A diferença simétrica dos conjuntos A e B, notado por $A + B$ é um conjunto definido por:

$$A + B = (A - B) \cup (B - A).$$

Teorema 2.22. *Sejam, A, B e C subconjuntos do universo U, então as seguintes igualdades, se verificam:*

- *$A'' = A$;*
- *$A \cap B = B \cap A$;*
- *$A \cup B = B \cup A$;*
- *$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;*

- *$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;*
- *$A \cup A = A$;*
- *$A \cap A = A$;*
- *$A \cup (A \cap B) = A$;*
- *$A \cap (A \cup B) = A$;*
- *$A \cup U = U$;*
- *$A \cap \emptyset = \emptyset$;*
- *$A \cap A' = \emptyset$;*
- *$A \cup A' = U$;*
- *$(A \cap B)' = A' \cup B'$ e $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (leis de Morgan).*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em Pissini (2019).

2.2 Conjuntos Fuzzy

Como visto anteriormente, a função característica de um conjunto clássico atribui valor 1 ou 0 a cada elemento do conjunto universo, podendo assim determinar se um elemento pertence ou não ao conjunto definido.

Para um conjunto fuzzy é definida uma função de pertinência que atribui valor entre 0 e 1 para cada elemento do conjunto universo, estabelecendo um grau de pertinência do elemento ao conjunto definido.

O grau de pertinência de um elemento do conjunto universo a um conjunto fuzzy expressa o grau de compatibilidade do elemento com o conceito representado pelo conjunto fuzzy.

Definição 2.23. Seja U um conjunto clássico; um subconjunto fuzzy F de U é caracterizado por uma função

$$\varphi_F : U \longrightarrow [0,1],$$

pré fixada, chamada de função de pertinência do subconjunto fuzzy F.

O valor $\varphi_F \in [0,1]$ indica o grau de pertinência do elemento x de U está no conjunto fuzzy F, ou seja, os valores $\varphi_F(x) = 1$ e $\varphi_F(x) = 0$ indicam, respectivamente, a pertinência plena e não pertinência do elemento x a F.

Pode-se obter a definição de subconjunto fuzzy ampliando-se o contra domínio da função característica, que é o conjunto $\{0,1\}$, para o intervalo $[0,1]$. Dessa forma, entende-se que um conjunto clássico é um caso particular de um dado conjunto fuzzy, cuja função de pertinência φ_F é sua função característica χ_F.

Um subconjunto fuzzy F é composto por elementos x de um conjunto clássico U, providos de um valor de pertinência a F, dado por $\varphi_F(x)$. Assim, pode-se dizer que um subconjunto fuzzy F de U é dado por:

$$F = \{(x, \varphi_F(x)) \mid x \in U\}.$$

O subconjunto clássico de U definido por

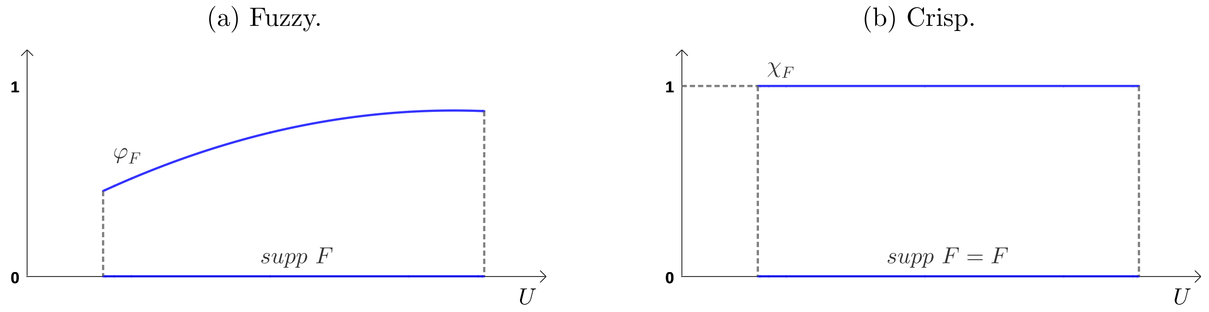
$$\text{supp } F = \{x \in U : \varphi_F(x) > 0\}$$

é denominado suporte de F e tem fundamental participação na inter-relação entre as teorias de conjuntos clássica e fuzzy (BARROS; BASSANEZI, 2010).

O conceito de suporte de um subconjunto fuzzy F definido em U é importante e interpretado como sendo o conjunto formado pelos elementos de U cujos elementos têm grau de pertinência não-nulos em F.

É possível notar com a Figura 2.5 que o suporte de um subconjunto crisp coincide com o próprio conjunto, diferentemente do subconjunto fuzzy.

Figura 2.5: Ilustração de Subconjuntos Fuzzy e Crisp.



Fonte: (BARROS; BASSANEZI, 2010), adaptado pelo autor.

As funções de pertinência mais comuns são as triangulares, trapezoidais e as em forma de sino, que serão definidos a seguir:

Definição 2.24. Qualquer função de pertinência triangular pode ser caracterizada por três parâmetros: a, u e b, como mostra a expressão geral:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq a \\ \frac{x-a}{u-a}, & \text{se } a < x \leq u \\ \frac{x-b}{u-b}, & \text{se } u < x \leq b \\ 0, & \text{se } x > b \end{cases} .$$

O gráfico da função de pertinência triangular tem o formato de um triângulo, que tem como base o intervalo $[a, b]$ e como único vértice fora desta base, o ponto $(u, 1)$. Pode-se notar que a função de pertinência triangular não é necessariamente simétrica, pois $b - u$ pode ser diferente de $u - a$, com $\varphi_A = 1$. Caso $u - a = b - u = \delta$, então temos uma função de pertinência simétrica em relação a u, simplificando a:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x-u|}{\delta}, & \text{se } u - \delta \leq x \leq u + \delta \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Exemplo 2.25. (Adaptado de (BARROS; BASSANEZI, 2010)). Seja F o conjunto fuzzy dos números reais não negativos próximos de 3, cuja a função de pertinência φ_F é dada por:

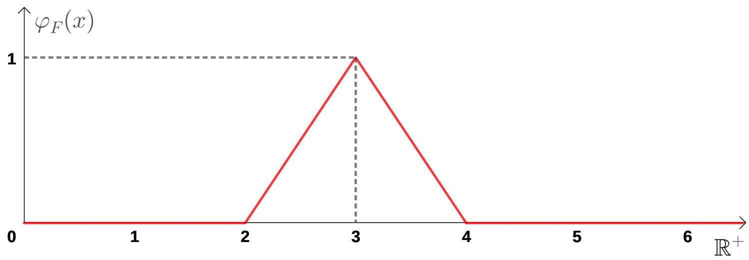
$$\varphi_F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 2 \\ \frac{x-2}{3-2}, & \text{se } 2 < x \leq 3 \\ \frac{x-4}{3-4}, & \text{se } 3 < x \leq 4 \\ 0, & \text{se } x > 4 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 2 \\ x-2, & \text{se } 2 < x \leq 3 \\ 4-x, & \text{se } 3 < x \leq 4 \\ 0, & \text{se } x > 4 \end{cases}. \tag{2.1}$$

Como $u - a = b - u = 1$, temos uma função de pertinência triangular simétrica, desta forma, podemos reescrever (2.1) como:

$$\varphi_F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x-3|}{1}, & \text{se } 3-1 \leq x \leq 3+1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} = \begin{cases} 1 - |x-3|, & \text{se } 2 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

O gráfico de $\varphi_F(x)$ é dado na Figura 2.6.

Figura 2.6: Função de pertinência triangular.



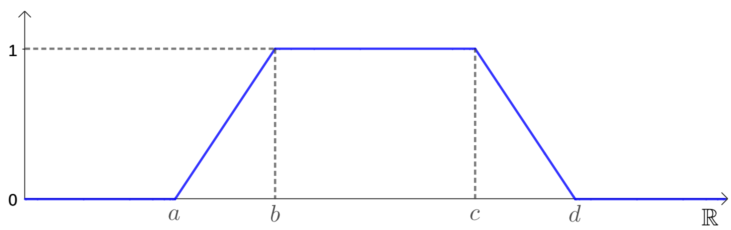
Fonte: (BARROS; BASSANEZI, 2010), adaptado pelo autor.

Definição 2.26. As funções de pertinência que apresentam o contorno trapezoidal podem ser caracterizadas por quatro parâmetros: a, b, c e d, como mostra a expressão geral:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{se } a \leq x < b \\ 1, & \text{se } b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c}, & \text{se } c < x \leq d \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

e dada pela Figura 2.7.

Figura 2.7: Função de pertinência trapezoidal.



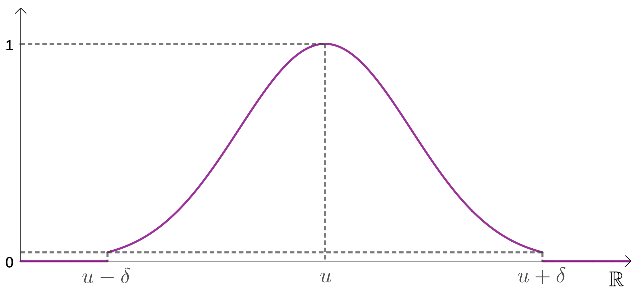
Fonte: (BARROS; BASSANEZI, 2010), adaptado pelo autor.

Definição 2.27. As funções de pertinência com o formato de sino podem ser expressas por três parâmetros dados: u, a e δ, como mostra a expressão geral:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left(\frac{x-u}{a}\right)^2\right), & \text{se } u-\delta \leq x \leq u+\delta \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

e representada na Figura 2.8.

Figura 2.8: Função de pertinência em forma de sino.



Fonte: (BARROS; BASSANEZI, 2010), adaptado pelo autor.

2.3 Operações com Conjuntos Fuzzy

Nessa seção serão estudadas as operações típicas de conjuntos como união, intersecção e complementação.

Sejam A e B subconjuntos fuzzy de U, com funções de pertinência indicadas por φ_A e φ_B, respectivamente. É possível dizer que A é subconjunto fuzzy de B, notado por $A \subset B$, se $\varphi_A(x) \leq \varphi_B(x)$ para todo elemento $x \in U$.

Por definição, a função de pertinência do conjunto vazio ($\emptyset$) é dada por $\varphi_\emptyset(x) = 0$, como também, a função de pertinência do conjunto universo (U) é dada por $\varphi_U(x) = 1$, para todo elemento $x \in U$.

Definição 2.28. (União). A união entre A e B é o subconjunto fuzzy de U cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{A\cup B}(x) = \max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\},\ x \in U.$$

Definição 2.29. (Intersecção). A intersecção entre A e B é o subconjunto fuzzy de U cuja função de pertinência é dada por

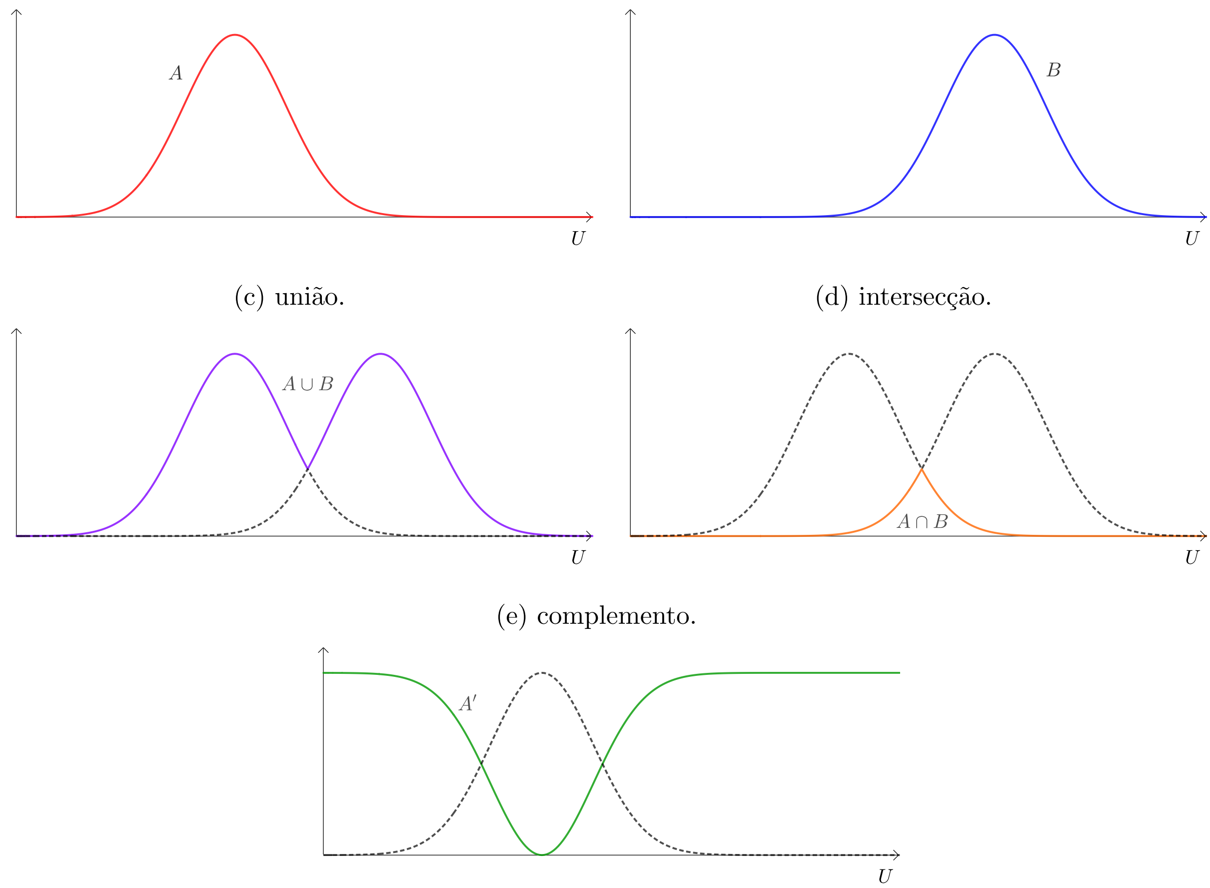
$$\varphi_{A\cap B}(x) = \min\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\},\ x \in U.$$

Definição 2.30. (Complementar de subconjuntos fuzzy). O complementar de A é o subconjunto fuzzy A' de U cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{A'}(x) = 1 - \varphi_A(x),\ x \in U.$$

As operações com conjuntos estão representadas na Figura 2.9.

Figura 2.9: Operações com subconjuntos fuzzy.



(a) subconjunto fuzzy A. (b) subconjunto fuzzy B. (c) união. (d) intersecção. (e) complemento.

Fonte: (BARROS; BASSANEZI, 2010), adaptado pelo autor.

Definição 2.31. Os subconjuntos fuzzy A e B de U são iguais se suas funções de pertinência coincidem, isto é, se $\varphi_A(x) = \varphi_B(x)$ para todo $x \in U$.

Proposição 2.32. *As operações entre subconjuntos fuzzy satisfazem as seguintes propriedades:*

- $A \cup B = B \cup A$;
- $A \cap B = B \cap A$;
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
- $A \cup A = A$;
- $A \cap A = A$;
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
- $A \cap \emptyset = \emptyset$ *e* $A \cup \emptyset = A$;
- $A \cap U = U$ *e* $A \cup U = A$;
- $(A \cap B)' = A' \cup B'$ *e* $(A \cup B)' = A' \cap B'$ *(leis de Morgan).*

A demonstração desta proposição pode ser encontrada em Pissini (2019).

2.4 Operações t-norma e t-conorma

As normas e conormas triangulares são generalizações dos operadores união e intersecção. Serão definidas a seguir.

Definição 2.33. (t-norma). O operador $\triangle : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$, $\triangle(x,y) = x \triangle y$, é uma *t-norma*, se satisfizer as seguintes condições:

t_1) *elemento neutro*: $\triangle(1,x) = 1 \triangle x = x$;

t_2) *comutativa*: $\triangle(x,y) = x \triangle y = y \triangle x = \triangle(y,x)$;

t_3) *associativa*: $x \triangle (y \triangle z) = (x \triangle y) \triangle z$;

t_4) *monotonicidade*: se $x \leq u$ e $y \leq v$, então $x \triangle y \leq u \triangle v$.

A operação *t-norma* estende o operador $\wedge$ que modela o conectivo “e”.

Exemplo 2.34. Consideremos o operador

$$\triangle(x,y) = x \cdot y.$$

$\triangle$ é um exemplo para t-norma.

Demonstração.

i) $\triangle(1,x) = 1 \cdot x = x$;

Logo, satisfaz a condição de elemento neutro.

ii) $\triangle(x,y) = x \cdot y = y \cdot x = \triangle(y,x)$;

Logo, é comutativa.

iii) $x \triangle (y \triangle z) = x \triangle (y.z) = x \cdot y \cdot z = (x \cdot y) \cdot z = (x \triangle y) \cdot z = (x \triangle y) \triangle z$;

Logo, pela associatividade, $x \triangle (y \triangle z) = (x \triangle y) \triangle z$.

iv) Sejam u e v, tais que $x \leq u$ e $y \leq v$, assim:

$$x \triangle y = x \cdot y \leq u \cdot y \leq u \cdot v = u \triangle v.$$

Logo, se $x \leq u$ e $y \leq v$ então $x \triangle y \leq u \triangle v$.

Por (i), (ii), (iii) e (iv), conclui-se que o operador $\triangle(x,y) = x \cdot y$ é um exemplo para t-norma. ■

Definição 2.35. (t-conorma). O operador $\bigtriangledown : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$, $\bigtriangledown(x,y) = x \bigtriangledown y$, é uma *t-conorma*, se satisfizer as seguintes condições:

c_1) *elemento neutro*: $\bigtriangledown(0,x) = 0 \bigtriangledown x = x$;

c_2) *comutativa*: $\bigtriangledown(x,y) = x \bigtriangledown y = y \bigtriangledown x = \bigtriangledown(y,x)$;

c_3) *associativa*: $x \bigtriangledown (y \bigtriangledown z) = (x \bigtriangledown y) \bigtriangledown z$;

c_4) *monotonicidade*: se $x \leq u$ e $y \leq v$, então $x \bigtriangledown y \leq u \bigtriangledown v$.

A operação *t-conorma* estende o operador $\vee$ que modela o conectivo "ou".

Exemplo 2.36. Consideremos o operador

$$\bigtriangledown(x,y) = \max\{x,y\} = x \vee y.$$

$\bigtriangledown$ é um exemplo para t-conorma.

Demonstração.

i) $\bigtriangledown(0,x) = 0 \vee x = \max\{0,x\} = x$, pois $x \in [0,1]$.

Logo, satisfaz a condição de elemento neutro.

ii) $\bigtriangledown(x,y) = x \vee y = \max\{x,y\} = \max\{y,x\} = y \vee x = \bigtriangledown(y,x)$.

Logo, é comutativa.

iii) $x \bigtriangledown (y \bigtriangledown z) = x \vee (y \vee z) = \max\{x, \max\{y,z\}\}$.

Por outro lado, tem-se:

$(x \bigtriangledown y) \bigtriangledown z = (x \vee y) \vee z = \max\{\max\{x,y\}, z\}$.

Para isso, é necessário analisar os seguintes casos:

1) $x \leq y \leq z$;

$x \bigtriangledown (y \bigtriangledown z) = x \vee (y \vee z) = \max\{x, \max\{y,z\}\} = \max\{x,z\} = z$.

$(x \bigtriangledown y) \bigtriangledown z = (x \vee y) \vee z = \max\{\max\{x,y\}, z\} = \max\{y,z\} = z$.

2) $x \leq z \leq y$;

$x \bigtriangledown (y \bigtriangledown z) = x \vee (y \vee z) = \max\{x, \max\{y,z\}\} = \max\{x,y\} = y$.

$(x \bigtriangledown y) \bigtriangledown z = (x \vee y) \vee z = \max\{\max\{x,y\}, z\} = \max\{y,z\} = y$.

3) $y \leq x \leq z$;

$x \bigtriangledown (y \bigtriangledown z) = x \vee (y \vee z) = \max\{x, \max\{y,z\}\} = \max\{x,z\} = z$.

$(x \bigtriangledown y) \bigtriangledown z = (x \vee y) \vee z = \max\{\max\{x,y\}, z\} = \max\{x,z\} = z$.

4) $y \leq z \leq x$;

$x \bigtriangledown (y \bigtriangledown z) = x \vee (y \vee z) = \max\{x, \max\{y,z\}\} = \max\{x,z\} = x$.

$(x \bigtriangledown y) \bigtriangledown z = (x \vee y) \vee z = \max\{\max\{x,y\}, z\} = \max\{x,z\} = x$.

5) $z \leq x \leq y$;

$x \bigtriangledown (y \bigtriangledown z) = x \vee (y \vee z) = \max\{x, \max\{y, z\}\} = \max\{x, y\} = y.$

$(x \bigtriangledown y) \bigtriangledown z = (x \vee y) \vee z = \max\{\max\{x, y\}, z\} = \max\{y, z\} = y.$

6) $z \leq y \leq x$.

$x \bigtriangledown (y \bigtriangledown z) = x \vee (y \vee z) = \max\{x, \max\{y, z\}\} = \max\{x, y\} = x.$

$(x \bigtriangledown y) \bigtriangledown z = (x \vee y) \vee z = \max\{\max\{x, y\}, z\} = \max\{x, z\} = x.$

Logo, pela associatividade, $x \bigtriangledown (y \bigtriangledown z) = (x \bigtriangledown y) \bigtriangledown z$.

iv) Para o caso "se $x \leq u$ e $y \leq v$, então $x \bigtriangledown y \leq u \bigtriangledown v$", analisa-se as seguintes possibilidades:

1) $x \leq y$ e $u \leq v$;

$\bigtriangledown(x, y) = x \bigtriangledown y = x \vee y = \max\{x, y\} = y.$

$\bigtriangledown(u, v) = u \bigtriangledown v = u \vee v = \max\{u, v\} = v.$

2) $x \leq y$ e $v \leq u$;

$\bigtriangledown(x, y) = x \bigtriangledown y = x \vee y = \max\{x, y\} = y.$

$\bigtriangledown(u, v) = u \bigtriangledown v = u \vee v = \max\{u, v\} = u.$

3) $y \leq x$ e $u \leq v$;

$\bigtriangledown(x, y) = x \bigtriangledown y = x \vee y = \max\{x, y\} = x.$

$\bigtriangledown(u, v) = u \bigtriangledown v = u \vee v = \max\{u, v\} = v.$

4) $y \leq x$ e $v \leq u$;

$\bigtriangledown(x, y) = x \bigtriangledown y = x \vee y = \max\{x, y\} = x.$

$\bigtriangledown(u, v) = u \bigtriangledown v = u \vee v = \max\{u, v\} = u.$

Como, por hipótese, $x \leq u$ e $y \leq v$, tem-se que $x \bigtriangledown y \leq u \bigtriangledown v$ para cada caso.

Logo, se $x \leq u$ e $y \leq v$ então $x \bigtriangledown y \leq u \bigtriangledown v$.

Por (i), (ii), (iii) e (iv), conclui-se que o operador $\bigtriangledown(x, y) = \max\{x, y\} = x \vee y$ é um exemplo para t-conorma. ■

2.5 Níveis de um Conjunto Fuzzy

Um elemento x do conjunto universo U está em uma classe se seu grau de pertinência é maior ou igual a determinado valor limiar ou nível $\alpha \in [0, 1]$ que define aquela classe. Este conjunto clássico é um α-nível de A, denotado por $[A]^\alpha$.

O conceito de α-nível é uma maneira de identificar subconjuntos do conjunto universo por meio da restrição de seus graus de pertinência (NICOLETTI; CAMARGO, 2011).

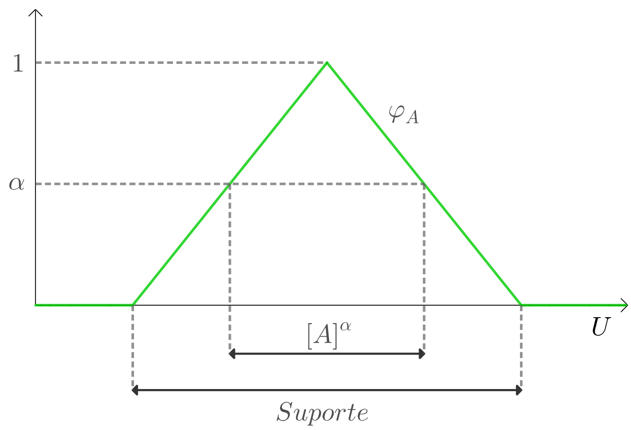
Definição 2.37. (α-nível). Seja A um subconjunto definido em um conjunto universo U e qualquer valor $\alpha \in]0,1]$. O α-nível de A é o subconjunto clássico de U definido por:

$$[A]^\alpha = \{x \in U : \varphi_A(x) \geq \alpha\} \text{ para } 0 < \alpha \leq 1.$$

Definição 2.38. Seja A um subconjunto definido em um conjunto universo U, o α-nível zero é definido como fecho do suporte de A, ou seja, $[A]^0 = \overline{\text{supp}}(A)$.

Exemplo 2.39. O gráfico da Figura 2.10 representa o α-nível e o suporte de um conjunto fuzzy A expresso por uma função de pertinência φ_A.

Figura 2.10: Representação gráfica do α-nível e do suporte de um conjunto fuzzy A expresso por uma função de pertinência φ_A.



Fonte: (PISSINI, 2019), adaptado pelo autor.

Teorema 2.40. *Sejam A e B subconjuntos fuzzy do conjunto universo U. Uma condição necessária e suficiente para que $A = B$ é que $[A]^\alpha = [B]^\alpha$, para todo $\alpha \in [0,1]$.*

Demonstração. Tendo $A = B \Rightarrow [A]^\alpha = [B]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0,1]$. Suponhamos que $[A]^\alpha = [B]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0,1]$. Se $A \neq B$ então existe $x \in U$ tal que $\varphi_A(x) \neq \varphi_B(x)$. Logo, temos que $\varphi_A(x) < \varphi_B(x)$ ou $\varphi_A(x) > \varphi_B(x)$. Supondo $\varphi_A(x) > \varphi_B(x)$, podemos concluir que $x \in [A]^{\varphi_A(x)}$ e $x \notin [B]^{\varphi_B(x)}$ e, portanto, $[A]^{\varphi_A(x)} \neq [B]^{\varphi_B(x)}$, o que contradiz a hipótese $[A]^\alpha = [B]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0,1]$. De maneira análoga chegamos a uma contradição se admitirmos que $\varphi_A(x) < \varphi_B(x)$.

■

De acordo com Barros e Bassanezi (2010), uma consequência deste teorema é a relação existente entre a função de pertinência de um subconjunto fuzzy e as funções características de seus α-níveis.

Corolário 2.41. *A função de pertinência φ_A de um conjunto fuzzy A pode ser expressa em termos de funções características de seus α-níveis, isto é,*

$$\varphi_A(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \min[\alpha, \chi_{[A]^\alpha}(x)], \text{ onde } \chi_{[A]^\alpha}(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in [A]^\alpha \\ 0, & se\ x \notin [A]^\alpha \end{cases}.$$

Definição 2.42. Um subconjunto fuzzy é dito normal se todos seus α-níveis forem não vazios, ou seja, se $[A]^1 \neq \emptyset$.

Vale ressaltar que o suporte do subconjunto fuzzy A é o conjunto clássico

$$\text{supp } A = \{x \in U : \varphi_A(x) > 0\},$$

podendo descrever A com equação:

$$A = \varphi_A(x_1)/x_1 + \varphi_A(x_2)/x_2 + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_A(x_i)/x_i,$$

quando o subconjunto fuzzy A tem suporte enumerável, e

$$A = \varphi_A(x_1)/x_1 + \varphi_A(x_2)/x_2 + \ldots + \varphi_A(x_n)/x_n = \sum_{i=1}^{n} \varphi_A(x_i)/x_i,$$

se A tem suporte finito, ou seja, supp $A = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$.

É importante evidenciar que a notação $\varphi_A(x_i)/x_i$ não indica uma divisão, é apenas uma forma de visualizar o elemento x_i a seu respectivo grau de pertinência $\varphi_A(x_i)$. Além disso, o símbolo "+" na notação não indica uma adição, também que o $\sum$ não significa um somatório. Isto é apenas uma forma de associar os elementos de U que estão em A com seus respectivos graus.

Exemplo 2.43. (BARROS; BASSANEZI, 2010). Seja A o subconjunto fuzzy dos reais representado por

$$A = \sum_{i=1}^{n} \varphi_A(x_i)/x_i = 0,1/1 + 0,2/2 + 0,25/3 + 0,7/5 + 0,9/8 + 1/10.$$

Então

$$A' = \sum_{i=1}^{n} [1 - \varphi_A(x_i)]/x_i = 0,9/1 + 0,8/2 + 0,75/3 + 0,3/5 + 0,1/8 + 0/10.$$

Para este exemplo, temos, por exemplo, que o 0,15-nível de A e de seu complementar A' são, respectivamente,

$$[A]^{0,15} = \{2, 3, 5, 8, 10\} \text{ e } [A']^{0,15} = \{1, 2, 3, 5\}.$$

2.6 O Princípio de Extensão

O método de extensão proposto por Zadeh, também conhecido como *Princípio de Extensão*, é uma das ideias básicas que promove a extensão de conceitos matemáticos não-fuzzy em fuzzy. Nesta perspectiva, uma função $f : X \longrightarrow Z$ tem como objetivo indicar como dever ser a imagem de um subconjunto fuzzy A de X por meio de f (BARROS; BASSANEZI, 2010).

Definição 2.44. Sejam f uma função tal que $f : X \longrightarrow Z$ e A um subconjunto fuzzy de X. A *extensão de Zadeh* de f é a função $\hat{f}$ que, aplicada a A, fornece o subconjunto fuzzy $\hat{f}(A)$ de Z, cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{\hat{f}(A)}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{f^{-1}(z)} \varphi_A(x) & \text{se } f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases},$$

em que $f^{-1}(z) = \{x; f(x) = z\}$ é denominado de *pré-imagem* de z.

De acordo com Jafelice, Barros e Bassanezi (2012), o princípio de extensão pode ser descrito da seguinte forma:

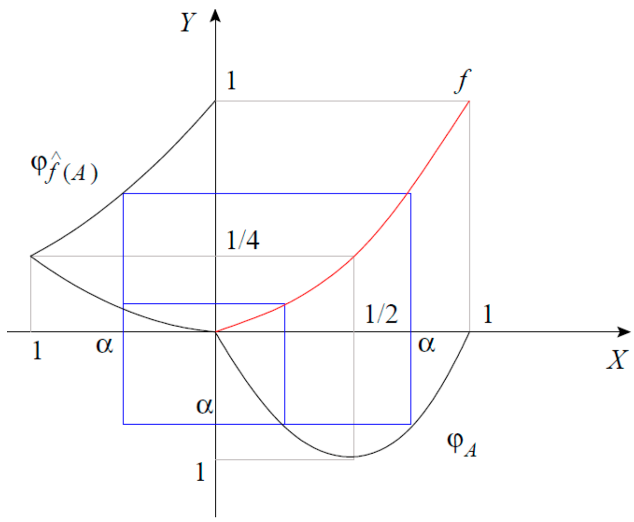
- O grau de pertinência de um valor do contradomínio é definido diretamente pelo grau de pertinência de sua pré-imagem.
- Quando um valor do contradomínio é mapeado por vários do domínio, o seu grau de pertinência é obtido pelo sup dos graus de pertinência dos valores de entrada.

Exemplo 2.45. (BARROS; BASSANEZI, 2010). Considere o subconjunto fuzzy A de números reais cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 4(x - x^2) & \text{se } x \in [0,1] \\ 0 & \text{se } x \notin [0,1] \end{cases}.$$

Considerando a função real $f(x) = x^2$ para $x \geq 0$. Temos que o princípio de extensão de f aplicada a A, é o subconjunto fuzzy $f(A)$, representado pela Figura 2.11.

Figura 2.11: Subconjunto $f(A)$ do Exemplo 2.45.



Fonte: (BARROS; BASSANEZI, 2010).

Exemplo 2.46. (SILVA, 2020). Seja $A = 0,3/1 + 0,4/2 + 0,5/3 + 0,7/4 + 0,9/5$ um subconjunto fuzzy e a função $f(x) = x^2 + 1$. O Princípio de Extensão de f aplicado em A, é o subconjunto fuzzy $f(A)$, logo:

- para $x = 1$, temos que $f(1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2$, logo $0,3/2$.
- para $x = 2$, temos que $f(2) = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$, logo $0,4/5$.
- para $x = 3$, temos que $f(3) = 3^2 + 1 = 9 + 1 = 10$, logo $0,5/10$.
- para $x = 4$, temos que $f(4) = 4^2 + 1 = 16 + 1 = 17$, logo $0,7/17$.
- para $x = 5$, temos que $f(5) = 5^2 + 1 = 25 + 1 = 26$, logo $0,9/26$.

Portanto,

$$f(A) = 0,3/2 + 0,4/5 + 0,5/10 + 0,7/17 + 0,9/26.$$

Capítulo 3

Equações Relacionais Fuzzy

Neste capítulo serão definidos os principais conceitos de Relações Fuzzy e Equações Relacionais Fuzzy. As principais referências adotadas para este capítulo foram de (BARROS; BASSANEZI, 2010), (NICOLETTI; CAMARGO, 2011), (PISSINI, 2019), (BELLUCCI, 2009) e (MARINS, 2016).

3.1 Relações Fuzzy

O conceito de relação fuzzy generaliza o conceito de relação crisp por meio da atribuição de um valor do intervalo $[0,1]$ às associações entre elementos que fazem parte da relação.

Definição 3.1. Uma relação fuzzy $\mathcal{R}$ sobre $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$ é qualquer subconjunto fuzzy de $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$. Assim, uma relação fuzzy $\mathcal{R}$ é definida por uma função de pertinência $\varphi_{\mathcal{R}} : U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n \longrightarrow [0,1]$.

Se o produto cartesiano for formado por apenas dois conjuntos U_1 e U_2, a relação é chamada de fuzzy binária sobre $U_1 \times U_2$.

Definição 3.2. O produto cartesiano fuzzy dos subconjuntos fuzzy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de $U_1, U_2, \ldots, U_n$, respectivamente, é a relação fuzzy $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi_{A_1}(x_1) \wedge \varphi_{A_2}(x_2) \wedge \ldots \wedge \varphi_{A_n}(x_n),$$

onde $\wedge$ representa o mínimo.

Exemplo 3.3. (BARROS; BASSANEZI, 2010). Suponha que o conjunto universo U seja composto pelos pacientes de uma clínica, identificados pelos números 1, 2, 3, 4 e 5. Sejam A e B os subconjuntos fuzzy que representam os pacientes com febre e mialgia, respectivamente. Considere a Tabela 3.1 que relaciona os diagnósticos de cinco pacientes com os sintomas.

Tabela 3.1: Relação entre os diagnósticos de cinco pacientes com dois sintomas, febre e mialgia.

Paciente	F: Febre	M: Mialgia
1	0,7	0,6
2	1,0	1,0
3	0,4	0,2
4	0,5	0,5
5	1,0	0,2

Fonte: (BARROS; BASSANEZI, 2010).

Para diagnosticar um paciente, o médico parte de certas avaliações de sintomas (ou sinais) que são característicos de cada doença. Várias doenças podem apresentar sintomas como febre e mialgia com intensidades e medições diversas. Por exemplo, para gripe, o paciente apresente sintomas de "febre" e de "mialgia" com intensidades que, quando representadas por subconjuntos fuzzy, devem ter universos distintos. O universo indicador de febre pode ser dado pelas temperaturas possíveis de um indivíduo, enquanto que a mialgia pode ser avaliada pelo número de regiões doloridas. Para indicar o quanto um indivíduo tem gripe tomamos um grau de pertinência ao conjunto do sintoma febre e ao conjunto mialgia. O paciente 1 da Tabela 3.1, por exemplo, tem uma temperatura x cuja pertinência ao conjunto febre F é $\varphi_F(x) = 0,7$ e tem valor y de mialgia que faz com que $\varphi_M(y) = 0,6$. O diagnóstico do paciente 1 para a doença gripe é dado então por:

$$\text{Paciente 1} : \varphi_{\text{gripe}}(x, y) = \varphi_F(x) \wedge \varphi_M(y) = 0,7 \wedge 0,6 = 0,6.$$

Isto significa que o paciente 1 está no subconjunto fuzzy dos febris com mialgia, tendo grau de pertinência $0,6$; que coincide com o grau de diagnóstico para gripe. A partir daí, esse número pode dar suporte para o especialista tomar decisão quanto ao tratamento a ser adotado.

3.2 Formas de Representação e Propriedades das Relações Binárias

Nesta seção serão destacadas algumas formas de representação e algumas propriedades das relações binárias e fuzzy binárias.

Sejam $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ e $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ e a relação fuzzy $\mathcal{R}$ definida em $X \times Y$, com a função de pertinência dada por $\varphi_{\mathcal{R}}(x_i, y_j) = r_{ij}$, para $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$. As representações de $\mathcal{R}$ podem ser na forma de tabela ou de matriz.

$$\begin{array}{c|cccc} \mathcal{R} & y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \hline x_1 & r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ x_2 & r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m & r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mn} \end{array} \quad \text{ou} \quad \mathcal{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mn} \end{bmatrix}.$$

Definição 3.4. Seja $\mathcal{R}$ uma relação fuzzy binária definida em $X \times Y$. A relação fuzzy binária inversa, $\mathcal{R}^{-1}$, definida em $Y \times X$, tem função de pertinência $\varphi_{\mathcal{R}^{-1}} : Y \times X \longrightarrow [0,1]$ dada por $\varphi_{\mathcal{R}^{-1}}(y,x) = \varphi_{\mathcal{R}}(x,y)$.

Nota-se que a matriz de $\mathcal{R}^{-1}$ coincide com a transposta de $\mathcal{R}$, já que $\varphi_{\mathcal{R}^{-1}}(y,x) = \varphi_{\mathcal{R}}(x,y)$, e por esse motivo, muitos textos de lógica fuzzy utilizam o termo relação transposta no lugar de inversa (PEDRYCZ; GOMIDE, 1998).

3.3 Composição entre Relações Fuzzy Binárias

Definição 3.5. Considere $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ duas relações fuzzy binárias em $U \times V$ e $V \times W$, respectivamente. A composição $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ é uma relação fuzzy binária em $U \times W$ cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{\mathcal{R}\circ\mathcal{S}}(x,z) = \mathop{\triangledown}_{y \in V} [\triangle(\varphi_{\mathcal{R}}(x,y), \varphi_{\mathcal{S}}(y,z))],$$

onde $\triangledown$ representa uma t-conorma e $\triangle$ representa uma t-norma.

Quando os conjuntos U, V e W são finitos, então a forma matricial da relação $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ pode ser obtida como uma multiplicação de matrizes, substituindo-se o produto por uma t-norma e a soma por uma t-conorma.

Supõe-se que $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $W = \{w_1, w_2, \dots, w_p\}$ e que:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \quad \text{e} \quad \mathcal{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{np} \end{bmatrix}_{n\times p}.$$

Pela Definição 3.5, a relação fuzzy binária tem a forma matricial:

$$\mathcal{T} = \mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1p} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \dots & t_{mp} \end{bmatrix}_{m\times p},$$

onde

$$t_{ij} = \underset{1\leq k\leq n}{\triangledown} [\triangle(\varphi_R(u_i, v_k), \varphi_S(v_k, v_j)] = \underset{1\leq k\leq n}{\triangledown} [\triangle(r_{ik}, s_{kj})]. \tag{3.1}$$

A composição mais tradicional em Lógica Fuzzy é a composição [max − min], que é obtida como uma multiplicação de matrizes, substituindo-se o produto pelo mínimo e a soma pelo máximo.

Caso a relação binária da Equação 3.1 utilizasse a composição [max − min], teríamos

$$t_{ij} = \max_{1\leq k\leq n} [\min(\varphi_R(u_i, v_k), \varphi_S(v_k, v_j)] = \max_{1\leq k\leq n} [\min(r_{ik}, s_{kj})]. \tag{3.2}$$

A seguir, será apresentada a Regra de Composição de Inferência, no qual será utilizada posteriormente em Equações Relacionais Fuzzy.

Definição 3.6. (Regra de composição de inferência). Sejam U e V dois conjuntos, $\mathcal{F}(U)$ e $\mathcal{F}(V)$ as classes dos subconjuntos fuzzy de U e V respectivamente, e $\mathcal{R}$ uma relação binária sobre $U \times V$.

(i) A relação $\mathcal{R}$ define um funcional de $\mathcal{F}(U)$ em $\mathcal{F}(V)$ que, a cada elemento $A \in \mathcal{F}(U)$, faz corresponder o elemento $B \in \mathcal{F}(V)$ cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_B(y) = \varphi_{\mathcal{R}(A)}(y) = \max_{x\in U}[\min(\varphi_{\mathcal{R}}(x, y), \varphi_A(x))]. \tag{3.3}$$

Essa composição é conhecida como regra de composição de inferência.

(ii) A relação $\mathcal{R}$ também define um funcional de $\mathcal{F}(V)$ em $\mathcal{F}(U)$ da seguinte forma: a cada $B \in \mathcal{F}(V)$, faz corresponder o elemento $A \in \mathcal{F}(U)$ cuja função de pertinência é

$$\varphi_A(x) = \varphi_{\mathcal{R}^{-1}(B)}(x) = \max_{y\in V}[\min(\varphi_{\mathcal{R}^{-1}}(y, x), \varphi_B(y))]. \tag{3.4}$$

A é denominado imagem inversa de B por $\mathcal{R}$.

Pode-se notar que a fórmula (3.3) pode ser reescrita como

$$\varphi_B(y) = \varphi_{\mathcal{R}(A)}(y) = \max_{x\in U}[\min(\varphi_A(x), \varphi_{\mathcal{R}}(x, y))].$$

Assim, de acordo com a Definição 3.5,

$$B = \mathcal{R}(A) = A \circ \mathcal{R}.$$

De modo análogo, a fórmula (3.4) pode ser reescrita como

$$\varphi_A(x) = \varphi_{\mathcal{R}^{-1}(B)}(x) = \max_{y\in V}[\min(\varphi_B(y), \varphi_{\mathcal{R}^{-1}}(y, x))].$$

Assim,

$$A = \mathcal{R}^{-1}(B) = B \circ \mathcal{R}^{-1}.$$

Definição 3.7. Seja $\mathcal{R}$ uma relação fuzzy binária sobre U, cuja função de pertinência é $\varphi_{\mathcal{R}}$. Então, para quaisquer x e y e z de U, a relação fuzzy $\mathcal{R}$ é

(i) *reflexiva* se $\varphi_{\mathcal{R}}(x,x) = 1$;

(ii) *simétrica* se $\varphi_{\mathcal{R}}(x,y) = \varphi_{\mathcal{R}}(y,x)$;

(iii) *transitiva* se $\varphi_{\mathcal{R}}(x,z) \geq \varphi_{\mathcal{R}}(x,y) \wedge \varphi_{\mathcal{R}}(y,z)$, onde $\wedge =$ mínimo;

(iv) *antissimétrica* se $\varphi_{\mathcal{R}}(x,y) > 0$ e $\varphi_{\mathcal{R}}(y,x) > 0$, implica que $x = y$.

A relação reflexiva é aquela em que todo indivíduo tem relação máxima consigo próprio; a simétrica é caracterizada pela reciprocidade, com mesma intensidade, entre seus indivíduos; a transitiva indica que a relação entre dois indivíduos quaisquer não deve ser, simultaneamente, inferior à relação de cada um destes dois com os demais e a relação antissimétrica é aquela que não admite qualquer reciprocidade entre indivíduos distintos (BARROS; BASSANEZI, 2010).

3.4 Equações Relacionais Fuzzy

Considerando os conjuntos universos finitos:

$$U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\},\ V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \text{ e } W = \{w_1, w_2, \ldots, w_p\}.$$

As equações relacionais tratam de achar a forma matricial de uma relação fuzzy binária, a partir de duas outras conhecidas. As equações relacionais fuzzy de interesse aqui têm a forma

$$\mathcal{R} * \mathcal{X} = \mathcal{T} \quad \text{ou} \quad \mathcal{X} * \mathcal{R} = \mathcal{T}, \tag{3.5}$$

onde $\mathcal{R}$ e $\mathcal{T}$ são as formas matriciais das relações fuzzy binárias dadas, "$*$" uma composição entre relações fuzzy e $\mathcal{X}$ a forma matricial de uma relação fuzzy incógnita a ser encontrada.

Assim, por exemplo, resolver a equação

$$\mathcal{R} * \mathcal{X} = \mathcal{T}$$

significa encontrar a forma matricial de uma relação fuzzy binária $\mathcal{X}$, em $V \times W$ supondo conhecidas as formas matriciais $\mathcal{R}$ e $\mathcal{T}$ em $U \times V$ e $U \times W$, respectivamente.

Considerando que a operação "$*$" seja a composição [max-prod], a equação será dada por

$$\mathcal{R} \bullet \mathcal{X} = \mathcal{T}. \tag{3.6}$$

Supondo que os universos envolvidos sejam finitos, de modo que as relações fuzzy tenham representações matriciais

$$\mathcal{R} = [r_{ij}], \quad \mathcal{X} = [x_{jk}] \quad \text{e} \quad \mathcal{T} = [t_{ik}],$$

onde $r_{ij} = \varphi_{\mathcal{R}}(u_i, v_j)$, $x_{jk} = \varphi_{\mathcal{X}}(v_j, w_k)$ e $t_{ik} = \varphi_{\mathcal{T}}(u_i, w_k)$.

Como a composição em questão é a [max-prod], resolver (3.6) significa encontrar $x_{jk} \in [0,1]$ tais que

$$\max_{1 \leq j \leq n} [\text{prod}(r_{ij}, x_{jk})] = t_{ik}, \tag{3.7}$$

para cada $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq k \leq p$.

3.4.1 Um modelo de diagnóstico médico

Nesta subseção será apresentado um modelo de diagnóstico adaptado de Barros e Bassanezi (2010) e de Jafelice, Barros e Bassanezi (2012), no qual indica o potencial de aplicações das equações relacionais.

De acordo com os autores, para um diagnóstico médico, a ideia básica é relacionar os sintomas ou sinais de pacientes com possíveis doenças, de acordo com os conhecimentos médicos de um especialista. Esta aplicação pode ser resumida no sistema de entradas e saídas:

Entrada (Sintomas)	$\longrightarrow$	*Base de Conhecimento*	$\longrightarrow$	*Saída* (Diagnóstico)

Fonte: (BARROS; BASSANEZI, 2010).

Considerando os seguintes conjuntos universais: U = conjunto dos pacientes; V = conjunto dos sintomas; e W = conjunto das doenças.

Especificamente nesse caso, trata-se de doenças infantis das quais tem-se conhecimento que quatro pacientes P_1, P_2, P_3 e P_4, com sintomas s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10} e s_{11}, apresentam os diagnósticos d_1, d_2, d_3 e d_4, onde:

s_1 = febre;	s_5 = gânglio;	s_9 = fotofobia;
s_2 = cefaleia;	s_6 = coriza;	s_{10} = tosse seca;
s_3 = garganta inflamada;	s_7 = conjuntivite;	s_{11} = vômito.
s_4 = exantema;	s_8 = língua de morango;	

d_1 = escarlatina;	d_2 = rubéola;	d_3 = sarampo;	d_4 = gripe.

Esses dados irão compor a base de conhecimentos que será expressa por meio de relações fuzzy. A Tabela 3.2 representa a relação fuzzy $\mathcal{D}$ onde seus valores indicam o grau com que cada sintoma está relacionado com cada doença. Esses valores são obtidas através de informações de especialistas. As linhas são os sintomas considerados e as colunas as doenças.

Tabela 3.2: Relação fuzzy sintomas $\times$ doenças ($\mathcal{D}$).

$s \backslash d$	d_1	d_2	d_3	d_4
s_1	0,2	0,1	0,1	0,1
s_2	0,2	0,1	0,3	0,2
s_3	0,2	0,1	0,1	0,1
s_4	0,3	0,1	0,1	0,1
s_5	0,3	1,0	0,1	0,1
s_6	0,2	0,1	0,1	0,1
s_7	0,4	0,1	1,0	0,3
s_8	1,0	0,3	0,4	0,2
s_9	0,4	0,1	1,0	0,3
s_{10}	0,2	0,1	0,3	1,0
s_{11}	0,2	0,1	0,1	0,1

Fonte: (BARROS; BASSANEZI, 2010).

Cada elemento da relação $\mathcal{D}$ indica o grau de envolvimento de cada sintoma com as diversas doenças consideradas. Por exemplo, o valor $d_{74} = 0,3$ indica que, numa escala entre zero e um, o sintoma s_7 (conjuntivite) está relacionado com a doença d_4 (gripe) com grau $0,3$.

Tabela 3.3: Relação fuzzy pacientes $\times$ sintomas elaborados pelo especialista ($\mathcal{S}$).

$P \backslash s$	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}
P_1	0,8	0,4	0,5	0,8	0,2	0,1	0,1	0,9	0,1	0,1	0,4
P_2	0,3	0,1	0,4	0,8	0,9	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,3
P_3	0,8	0,3	0,5	0,8	0,1	0,2	0,9	0,1	0,6	0,3	0,6
P_4	0,8	0,7	0,7	0,2	0,1	0,9	0,1	0,1	0,1	0,9	0,4

Fonte: (BARROS; BASSANEZI, 2010).

A Tabela 3.3 indica o grau com que cada sintoma se manifestou nos pacientes, dados pelo médico especialista. A partir da relação fuzzy $\mathcal{D}$ é possível obter o diagnóstico médico de cada paciente, ou seja, o grau da doença para cada paciente, por meio da fórmula (3.2).

Como o modelo matemático adotado para diagnosticar foi $\mathcal{S} \circ \mathcal{D}$, utilizando a composição $[\max - \min]$, então para obter o diagnóstico do primeiro paciente, pela fórmula (3.2), em que $\mathcal{P}_1$ é a matriz com os sintomas, basta calcularmos $\mathcal{P}_1 \circ \mathcal{D}$:

$$\mathcal{P}_1 \circ \mathcal{D} = \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,4 \\ 0,5 \\ 0,8 \\ 0,2 \\ 0,1 \\ 0,1 \\ 0,9 \\ 0,1 \\ 0,1 \\ 0,4 \end{bmatrix}^{\top} \circ \begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,3 & 1,0 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,4 & 0,1 & 1,0 & 0,3 \\ 1,0 & 0,3 & 0,4 & 0,2 \\ 0,4 & 0,1 & 1,0 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,3 & 1,0 \\ 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,3 & 0,4 & 0,2 \end{bmatrix}.$$

onde $v^{\top}$ indica o vetor v na forma de matriz linha.

A matriz resultante é formada pelos graus de cada uma das doenças apresentadas pelo primeiro paciente, pois a matriz $\mathcal{P}_1$ é uma relação em $U \times V$ (paciente $\times$ sintomas), $\mathcal{D}$ é uma relação em $V \times W$ (sintomas $\times$ doenças) e, portanto, a composição resulta em uma relação em $U \times W$ (pacientes $\times$ doenças).

Da mesma maneira obtém-se os diagnósticos para os demais pacientes, resultando a Tabela 3.4.

Tabela 3.4: Relação fuzzy pacientes $\times$ doença ($\mathcal{T}$).

P \ d	d_1	d_2	d_3	d_4
P_1	0,9	0,3	0,4	0,2
P_2	0,3	0,9	0,1	0,1
P_3	0,4	0,1	0,9	0,3
P_4	0,2	0,1	0,3	0,9

Fonte: (BARROS; BASSANEZI, 2010).

Os resultados significativos obtidos neste exemplo mostram a potencialidade do uso de equações relacionais fuzzy na modelagem matemática, principalmente em situações em que as variáveis são relativamente subjetivas. O modelo proposto no capítulo a seguir também utiliza os conceitos de relações fuzzy.

Capítulo 4

Um Modelo Matemático

De acordo com Bassanezi (1999), um modelo matemático é um conjunto consistente de equações ou estruturas matemáticas, elaborado para corresponder a algum fenômeno - este pode ser físico, biológico, social, psicológico, conceitual ou até mesmo um outro modelo matemático. A aceitação de um modelo, por sua vez, depende essencialmente dos fatores que condicionam o modelador, ou seja, dos objetivos e recursos disponíveis do sujeito que se propõe a construir/elaborar o modelo.

Forner e Trevisol (2012) discorrem que acompanhamento de cada aluno durante o processo, respeitando sua subjetividade, contextualizando a aprendizagem e reconhecendo a diversidade dos aprendizes, é fundamental para uma avaliação escolar adequada.

Deste modo, compreende-se que mensurar o conhecimento adquirido pode ser uma tarefa complexa e subjetiva e, para isso, exige um modelo de avaliação adequado, por levar em conta o acompanhamento processual do aluno, em uma relação espaço-tempo ocorrida em um contexto escolar.

O planejamento de quais e quantos instrumentos serão considerados no processo avaliativo depende de cada instituição e do docente. Geralmente, ao final da disciplina, o aluno recebe uma menção ou nota, por meio de algum cálculo matemático, que representa o seu desempenho. No entanto, esse valor obtido pode não deixar explícito o conhecimento que o aluno realmente adquiriu, gerando incertezas e imprecisões, podendo resultar prejuízos no processo de ensino-aprendizagem do aluno.

4.1 Um modelo matemático para quantificar o desempenho escolar

A partir dessas perspectivas, a ideia é relacionar diferentes instrumentos de avaliação (provas, atividades, participação em aula, etc.) com determinadas menções (insuficiente, regular e bom), de acordo com os conhecimentos de uma professora especialista. Estes dados irão compor a base de conhecimento que serão expressos por meio de relações fuzzy. Assim, utilizando equações relacionais fuzzy para propor um modelo de avaliação, será possível obter o desempenho do discente com seus respectivos graus para cada menção.

Esta aplicação pode ser resumida no sistema de entradas e saídas:

Entrada (Instrumentos de avaliação)	$\longrightarrow$	*Base de Conhecimento*	$\longrightarrow$	*Saída* (Menções)

Considere os seguintes conjuntos universais: U = conjunto dos alunos; V = conjunto dos instrumentos de avaliação; e W = conjunto das menções.

Tem-se conhecimento que cinco alunos A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5, com os instrumentos de avaliação p_1, p_2, p_3 e p_4, apresentam as menções m_1, m_2 e m_3, onde:

p_1 = participação; p_2 = prova semanal; p_3 = atividades; p_4 = prova bimestral.

m_1 = insuficiente; m_2 = regular; m_3 = bom.

Esses dados irão compor a base de conhecimentos que será expressa por meio de equações relacionais fuzzy. Com o auxílio de uma professora especialista, foi solicitado que estabelecesse o grau da relação $\mathcal{R}$, Tabela 4.1, onde as colunas representam as menções consideradas, as linhas são os instrumentos de avaliação, e os valores da matriz são os graus, no intervalo $[0, 1]$, com que os instrumentos de avaliação se relacionam com as menções. Por exemplo, o valor $r_{32} = 0,2$, indica numa escala entre 0 e 1, o instrumento de avaliação p_3, prova semanal, está relacionado com a menção m_2, bom, com grau de pertinência $0,2$.

Tabela 4.1: Relação fuzzy instrumentos de avaliação $\times$ menções ($\mathcal{R}$).

p \ m	m_1	m_2	m_3
p_1	0,0	0,0	0,0
p_2	0,0	0,1	0,1
p_3	0,0	0,2	0,1
p_4	0,0	0,1	0,2

Fonte: Autoria própria.

É possível notar que a primeira linha está com elementos nulos, pois o instrumento de avaliação p_1, participação, será considerado o instrumento com menor importância para determinação do desempenho do aluno. O mesmo ocorre para a primeira coluna, neste caso, pelo motivo de que a menção m_1, insuficiente, será descartada no cálculo de equações relacionais fuzzy.

Além disso, a especialista forneceu as notas em cada instrumento de avaliação de cinco alunos, no intervalo de $[0, 10]$, representada pela Tabela 4.2.

Tabela 4.2: Notas dos alunos em cada instrumento de avaliação.

$A \backslash p$	p_1	p_2	p_3	p_4
A_1	10	8	8	9
A_2	8	10	9	2
A_3	6	6	7	7
A_4	5	5	10	5
A_5	1	2	4	5

Fonte: Autoria própria.

Em sua rotina escolar, a professora utilizou os seguintes pesos: 0,1 para participação; 0,2 para prova semanal; 0,3 para atividades; e 0,4 para prova bimestral. Com esses pesos é calculada a nota final de cada aluno. É importante destacar que para um aluno ser aprovado na disciplina é necessário que obter uma nota igual ou superior a 6, caso o contrário, ele será reprovado, resultando em um desempenho insuficiente. A nota final (NF) de cada aluno é representada pela Tabela 4.3.

Tabela 4.3: Nota final de cada aluno.

A	NF
A_1	8,6
A_2	6,3
A_3	6,7
A_4	6,5
A_5	3,7

Fonte: Autoria própria.

Dividindo por 10 os dados da Tabela 4.2, obtém-se a Tabela 4.4 que apresenta a relação fuzzy $\mathcal{S}$, composta por valores no intervalo $[0, 1]$ na qual indica os graus de desempenho do aluno relativo aos instrumentos de avaliação.

Tabela 4.4: Relação fuzzy alunos $\times$ instrumentos de avaliação ($\mathcal{S}$).

$A \backslash p$	p_1	p_2	p_3	p_4
A_1	1,0	0,8	0,8	0,9
A_2	0,8	1,0	0,9	0,2
A_3	0,6	0,6	0,7	0,7
A_4	0,5	0,5	1,0	0,5
A_5	0,1	0,2	0,4	0,5

Fonte: Autoria própria.

Assim, o propósito é obter uma relação $\mathcal{T}$, na forma matricial da tabela alunos $\times$ menções $(U \times W)$, da forma

$$\mathcal{S} \bullet \mathcal{R} = \mathcal{T}$$

sendo $\mathcal{S}$ a forma matricial da tabela alunos $\times$ instrumentos de avaliação $(U \times V)$, $\mathcal{R}$ a forma matricial da tabela instrumentos de avaliação $\times$ menções $(V \times W)$, "$\bullet$" uma composição [max-prod] entre relações fuzzy.

A partir da relação fuzzy $\mathcal{T}$ será possível obter o desempenho do discente com seus respectivos graus para cada menção, ou seja,

$$t_{ik} = \max_{1 \le j \le 4} [\text{prod}(s_{ij}, r_{jk})]$$

com $1 \le i \le 5$ e $1 \le k \le 3$. Assim, obtendo a forma matricial da relação $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{T} = \mathcal{S} \bullet \mathcal{R} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} \\ t_{51} & t_{52} & t_{53} \end{bmatrix}_{5\times 3} . \tag{4.1}$$

Reescrevendo as Tabelas 4.4 e 4.1 na forma matricial e expressando a composição [max-prod] entre elas, temos:

$$\mathcal{S} \bullet \mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1,0 & 1,6 & 2,4 & 3,6 \\ 0,8 & 2,0 & 2,7 & 0,8 \\ 0,6 & 1,2 & 2,1 & 2,8 \\ 0,5 & 1,0 & 3,0 & 2,0 \\ 0,1 & 0,4 & 1,2 & 2,0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,1 & 0,1 \\ 0,0 & 0,2 & 0,1 \\ 0,0 & 0,1 & 0,2 \end{bmatrix}.$$

4.2 Resultados e conclusões

O desempenho do aluno A_1 pode ser facilmente obtido através dos cálculos de t_{ik}, com $i = 1$ e $k = 1,\ 2,\ 3$ da matriz $\mathcal{T}$. Logo, o aluno A_1 pode desempenhar uma das menções m_i, com $i = 1,\ 2,\ 3$, com os respectivos graus de pertinência:

- t_{11}:

$$\begin{aligned} t_{11} &= \max[\text{prod}\{1,0;\ 0,0\}; \text{prod}\{1,6;\ 0,0\}; \text{prod}\{2,4;\ 0,0\}; \text{prod}\{3,6;\ 0,0\}] \\ &= \max[0,00;\ 0,00;\ 0,00;\ 0,00] \\ &= 0,00. \end{aligned}$$

- t_{12}:

$$\begin{aligned} t_{12} &= \max[\text{prod}\{1,0;\ 0,0\}; \text{prod}\{1,6;\ 0,1\}; \text{prod}\{2,4;\ 0,2\}; \text{prod}\{3,6;\ 0,1\}] \\ &= \max[0,00;\ 0,16;\ 0,48;\ 0,36] \\ &= 0,48. \end{aligned}$$

- t_{13}:

$$\begin{aligned} t_{13} &= \max[\text{prod}\{1,0;\ 0,0\}; \text{prod}\{1,6;\ 0,1\}; \text{prod}\{2,4;\ 0,1\}; \text{prod}\{3,6;\ 0,2\}] \\ &= \max[0,00;\ 0,16;\ 0,24;\ 0,72] \\ &= 0,72. \end{aligned}$$

De mesmo modo, o aluno A_2 pode desempenhar uma das menções m_i, com $i = 1,\ 2,\ 3$, com os respectivos graus de pertinência:

- t_{21}:

$$\begin{aligned} t_{21} &= \max[\text{prod}\{0,8;\ 0,0\}; \text{prod}\{2,0;\ 0,0\}; \text{prod}\{2,7;\ 0,0\}; \text{prod}\{0,8;\ 0,0\}] \\ &= \max[0,00;\ 0,00;\ 0,00;\ 0,00] \\ &= 0,00. \end{aligned}$$

- t_{22}:

$$\begin{aligned} t_{22} &= \max[\text{prod}\{0,8;\ 0,0\}; \text{prod}\{2,0;\ 0,1\}; \text{prod}\{2,7;\ 0,2\}; \text{prod}\{0,8;\ 0,1\}] \\ &= \max[0,00;\ 0,20;\ 0,54;\ 0,08] \\ &= 0,54. \end{aligned}$$

- t_{23}:

$$\begin{aligned} t_{23} &= \max[\text{prod}\{0,8;\ 0,0\}; \text{prod}\{2,0;\ 0,1\}; \text{prod}\{2,7;\ 0,1\}; \text{prod}\{0,8;\ 0,2\}] \\ &= \max[0,00;\ 0,20;\ 0,27;\ 0,16] \\ &= 0,27. \end{aligned}$$

O aluno A_3 pode desempenhar uma das menções m_i, com $i = 1,\ 2,\ 3$, com os respectivos graus de pertinência:

- t_{31}:

$$\begin{aligned} t_{31} &= \max[\text{prod}\{0,6;\ 0,0\}; \text{prod}\{1,2;\ 0,0\}; \text{prod}\{2,1;\ 0,0\}; \text{prod}\{2,8;\ 0,0\}] \\ &= \max[0,00;\ 0,00;\ 0,00;\ 0,00] \\ &= 0,00. \end{aligned}$$

- t_{32}:

$$\begin{aligned} t_{32} &= \max[\text{prod}\{0,6;\ 0,0\}; \text{prod}\{1,2;\ 0,1\}; \text{prod}\{2,1;\ 0,2\}; \text{prod}\{2,8;\ 0,1\}] \\ &= \max[0,00;\ 0,12;\ 0,42;\ 0,28] \\ &= 0,42. \end{aligned}$$

- t_{33}:

$$\begin{aligned} t_{33} &= \max[\text{prod}\{0,6;\ 0,0\}; \text{prod}\{1,2;\ 0,1\}; \text{prod}\{2,1;\ 0,1\}; \text{prod}\{2,8;\ 0,2\}] \\ &= \max[0,00;\ 0,12;\ 0,21;\ 0,56] \\ &= 0,56. \end{aligned}$$

O aluno A_4 pode desempenhar uma das menções m_i, com $i = 1,\ 2,\ 3$, com os respectivos graus de pertinência:

- t_{41}:

$$\begin{aligned} t_{41} &= \max[\text{prod}\{0,5;\ 0,0\}; \text{prod}\{1,0;\ 0,0\}; \text{prod}\{3,0;\ 0,0\}; \text{prod}\{2,0;\ 0,0\}] \\ &= \max[0,00;\ 0,00;\ 0,00;\ 0,00] \\ &= 0,00. \end{aligned}$$

- t_{42}:

$$\begin{aligned} t_{42} &= \max[\text{prod}\{0,5;\ 0,0\}; \text{prod}\{1,0;\ 0,1\}; \text{prod}\{3,0;\ 0,2\}; \text{prod}\{2,0;\ 0,1\}] \\ &= \max[0,00;\ 0,10;\ 0,60;\ 0,20] \\ &= 0,60. \end{aligned}$$

- t_{43}:

$$\begin{aligned} t_{43} &= \max[\text{prod}\{0,5;\ 0,0\}; \text{prod}\{1,0;\ 0,1\}; \text{prod}\{3,0;\ 0,1\}; \text{prod}\{2,0;\ 0,2\}] \\ &= \max[0,00;\ 0,10;\ 0,30;\ 0,40] \\ &= 0,40. \end{aligned}$$

Baseando-se na Tabela 4.3, como o aluno A_5 tem a média ponderada abaixo de 6, nota mínima para aprovação do aluno, consideremos que este é um aluno com desempenho insuficiente, assim determinaremos que:

- t_{51}:

$$t_{51} = 1,00.$$

- t_{52}:

$$t_{52} = 0,00.$$

- t_{53}:

$$t_{53} = 0,00.$$

Deste modo, obtém-se os possíveis desempenhos de todos os alunos.

Com os dados obtidos é possível reescrever (4.1) na forma matricial e tabular (Tabela 4.5).

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} 0,00 & 0,48 & 0,72 \\ 0,00 & 0,54 & 0,27 \\ 0,00 & 0,42 & 0,56 \\ 0,00 & 0,60 & 0,40 \\ 1,00 & 0,00 & 0,00 \end{bmatrix}.$$

Tabela 4.5: Relação fuzzy alunos × menções ($\mathcal{T}$).

A \ m	m_1	m_2	m_3
A_1	0,00	0,48	0,72
A_2	0,00	0,54	0,27
A_3	0,00	0,42	0,56
A_4	0,00	0,60	0,40
A_5	1,00	0,00	0,00

Fonte: Autoria própria.

Logo, foi possível encontrar a relação fuzzy $\mathcal{T}$ (alunos × menções), retratado na Tabela 4.5, onde as linhas representam os alunos, as colunas representam as menções, e os valores da matriz são os graus de pertinência com que as menções se relacionam com cada aluno.

Sendo assim, nota-se que a possibilidade do aluno A_1 ter um desempenho regular (m_2) e bom (m_3) é de $0,48$ e $0,72$, respectivamente. Os alunos A_2 e A_4 podem ter um desempenho regular, pois o grau para m_2 é maior do que as outras menções, sendo $0,54$ e $0,60$, respectivamente. Para o aluno A_3 é possível que tenha um desempenho bom, com grau de pertinência de $0,56$. Como o aluno A_5 não atingiu a nota mínima de aprovação, recebeu grau de pertinência $1,00$ para a menção insuficiente (m_1).

Ao analisar os dados dos alunos A_2, A_3 e A_4 na Tabela 4.3, nota-se que as notas finais são bastante próximas, porém, ao fazer a mesma comparação na Tabela 4.5, nota-se que os graus de pertinência dos três alunos citados diferem um com o outro. Isso ocorre pois quando a especialista define sua base de conhecimento (Tabela 4.1), determina-se quais instrumentos de avaliação são mais importantes no seu processo de avaliação.

Além do modelo matemático proposto, foi desenvolvido um programa computacional para simulação, via linguagem Python. O programa realiza a leitura dos dados inseridos em uma planilha eletrônica (os nomes dos alunos com as suas respectivas notas; os pesos de cada instrumentos de avaliação; e a base de conhecimento), e em seguida, processa estes dados, retornando o grau de pertinência de cada aluno para cada menção estabelecida. O código deste programa, juntamente com a simulação do exemplo anterior, está expresso no Apêndice A.

Capítulo 5

Considerações Finais

Um dos objetivos deste trabalho foi estudar os conceitos básicos da Teoria de Conjuntos Fuzzy e, posteriormente, propor um modelo matemático para um problema sobre a avaliação de discentes.

Mensurar o conhecimento adquirido pelo aluno pode ser complexo e subjetivo, podendo resultar em incertezas no momento de definir as variáveis. Diante destas incertezas, utiliza-se essa teoria que tem se mostrado mais adequada no tratamento de variáveis incertas e subjetivas do que a Matemática clássica.

Deste modo, este trabalho iniciou-se com o estudo dos conceitos básicos da Teoria dos Conjuntos Clássica associando-os com a Teoria dos Conjuntos Fuzzy. Posteriormente, estudou-se conceitos de Relação Fuzzy e Equação Relacional Fuzzy.

Assim, propõe-se uma aplicação por meio de um modelo matemático para auxiliar no processo de avaliar, podendo assim determinar o desempenho do aluno através do grau em três menções diferentes: insuficiente, regular ou bom. O intuito foi relacionar as notas do discente com os instrumentos de avaliação, com o auxílio de uma especialista, e utilizar equações relacionais fuzzy para propor o modelo de desempenho dos alunos.

Com a contribuição da professora especialista, foram selecionados quatro instrumentos de avaliação a serem considerados: participação, prova semanal, atividades e prova bimestral. Em seguida, também com o auxílio da especialista, foi construído uma tabela composta por cinco alunos e pelos respectivos instrumentos de avaliação, ou seja, para cada instrumento de avaliação foi atribuído um grau de pertinência e assim, elaborou-se uma tabela alunos $\times$ instrumentos de avaliação, na qual os valores foram convertidos para pertencer ao intervalo $[0, 1]$.

A especialista também auxiliou com a construção de uma tabela que indica a relação entre os instrumentos de avaliação com as menções. A tabela foi convertida para os valores pertencentes ao intervalo $[0, 1]$, obtendo-se uma tabela instrumentos de avaliação $\times$ menções.

Estes dados compuseram a base de conhecimentos que foram expressos por meio de equações relacionais fuzzy.

As equações relacionais fuzzy tratam de achar a forma matricial de uma relação binária, a partir de duas outras conhecidas. Assim, o propósito foi obter uma relação $\mathcal{T}$, na forma matricial da tabela alunos $\times$ menções, da forma $\mathcal{S} \bullet \mathcal{R} = \mathcal{T}$, sendo $\mathcal{S}$ a forma matricial da tabela alunos $\times$ instrumentos de avaliação; $\mathcal{R}$ a forma matricial da tabela instrumentos de avaliação $\times$ menções; e "$\bullet$" uma composição [max-prod] entre relações fuzzy. A partir da relação $\mathcal{T}$ foi possível obter o desempenho de cada aluno com os respectivos graus de pertinência das menções.

Além disso, foi desenvolvido um modelo de simulação via linguagem Python. O código importa a tabela de notas, base de conhecimento e peso de cada instrumento de avaliação, estabelecida pelo professor em uma planilha eletrônica. O algoritmo processará estes dados, retornando o grau de pertinência para cada menção, podendo assim avaliar o desempenho do aluno (Apêndice A).

Dessa maneira, este modelo pretende ser uma ferramenta para auxiliar o professor na tarefa de avaliação das aprendizagens discentes. Com a sua principal vantagem sendo a praticidade, pois é somente necessário o especialista definir a base de conhecimento, relacionando os instrumentos de avaliação com as menções, e inserir as notas dos alunos.

Vale ressaltar que, a princípio, presumia-se que o modelo utilizando equações relacionais fuzzy "seria o mais simples", por não ser necessário amplo conhecimento sobre fuzzy para elaborar a base de conhecimento. Porém, ao longo da pesquisa identificaram-se problemas que impediam a finalização do modelo. Isto ocorreu, por não ser simples definir os graus de pertinência para a relação instrumentos de avaliação $\times$ menções de modo que abranja diferentes cenários da realidade. Assim, houve a necessidade de alterar a sua concepção inicial, deixando-o mais simples, isolando a menção "Insuficiente" para casos específicos de reprovação, e focando o modelo para as menções "Regular" e "Bom".

Logo, percebe-se que este estudo foi imensamente positivo para minha vida acadêmica e profissional, pois pude me aprofundar em conteúdos que vão além da grade curricular do curso de graduação e pude apresentar um trabalho autoral em um congresso nacional. Também, compreende-se na possibilidade de continuidade deste estudo, podendo utilizar outras ferramentas, como por exemplo, sistema baseados em regras fuzzy, e assim, aperfeiçoar o modelo matemático. Posteriormente, pretende-se aprofundar os estudos em equações relacionais fuzzy e em sistemas baseados em regras fuzzy.

Referências Bibliográficas

[1] BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática.* IMECC-UNICAMP, Campinas/SP. 2010.

[2] BASSANEZI, R.C. *Modelagem matemática uma disciplina emergente nos programas de formação de professores.* Biomatemática IX. 1999.

[3] BELUCCI, D. P. *Sistemas Baseados em Regras Fuzzy e Aplicações.* Dissertação de Mestrado. UFABC - Santo André, 2009.

[4] FORNER, D. S. G.; TREVISOL, M. T. C. *Significados e funções da avaliação da aprendizagem escolar*, Roteiro, 37, n. 2, 243-264, 2012.

[5] JAFELICE, R. S. M.; BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. *Teoria dos Conjuntos Fuzzy com Aplicações.* Notas em Matemática Aplicada. São Carlos/SP: SBMAC. 2012.

[6] MARINS, L. R. *Diagnóstico médico por meio de relações fuzzy:* dengue, chikungunya ou zica. Dissertação de Mestrado. CCET-UFSCar, 2016.

[7] NICOLETTI, M. C.; CAMARGO, H. A. *Fundamentos da Teoria de Conjuntos Fuzzy.* Série Apontamentos. São Carlos: EdUFSCar, 2011.

[8] PEDRYCZ, W.; GOMIDE, F. *An introduction to fuzzy sets:* analysis and design. The Mit, Press, 1998.

[9] PEIXOTO, M. S. *Sistemas Dinâmicos e Controladores Fuzzy:* Um estudo da dispersão da morte súbita dos citros em São Paulo. Tese de Doutorado. IMECC-UNICAMP, Campinas/SP, 2005.

[10] PISSINI, M. M. *Um estudo fuzzy para propor um modelo matemático como auxílio ao diagnóstico médico das faringotonsilites.* Dissertação de Mestrado. UFSCar - Sorocaba, 2019.

[11] SILVA, A. L. *Um estudo sobre sistemas baseados em regras fuzzy.* Dissertação de Mestrado. UFSCar - Sorocaba, 2020.

[12] ZADEH, L. A. *Fuzzy sets. Information and Control*, 8:338-353, 1965.

Apêndice A

Implementação do Modelo em Python

```
# IMPORTAÇÃO BIBLIOTECAS
from pulp import*
import pandas as pd
import numpy as np

# DADOS DO EXCEL
dados_alunos_notas = pd.read_excel("dados.xlsx", \
sheet_name='Alunos_Notas', index_col = 0)
dados_notas_pesos  = pd.read_excel("dados.xlsx", \
sheet_name='Notas_Pesos', index_col = 0)
dados_mencoes      = pd.read_excel("dados.xlsx", \
sheet_name='GP', index_col = 0)

alunos  = list(dados_alunos_notas.index)
notas   = list(dados_notas_pesos.index)
mencoes = list(dados_mencoes.columns)

# OBTENDO AS MÉDIAS
dicmedias = {} # Dicionário que conterá as médias dos alunos
for a in alunos: # Percorre os alunos
    media = 0
    for n in notas:
        media += dados_alunos_notas[n][a]*dados_notas_pesos['Peso'][n]
    media = round(media,1)
    dicmedias.update({a: media})
dicmedias
```

```
# MATRIZ NOTAS (EXCLUI INSUFICIENTE)
Notas = []
for a in alunos:
    if dicmedias[a] >= 6:
        lista_nota = []
        for n in notas:
            lista_nota.append(dados_alunos_notas[n][a] \
            * dados_notas_pesos['Peso'][n])
        Notas.append(lista_nota)
Notas = np.array(Notas)
Notas

# GRAU DE PERTINÊNCIA
GP = np.delete(np.asarray(pd.read_excel("dados.xlsx", \
sheet_name='GP')), 0, 1)

n = len(notas) # quatidade de notas
p = len(GP[0]) # quatidade de menções
m = len(Notas) # quatidade de médias acima de 6

A = np.zeros((m,p))

for i in range(0,m):
    for j in range(0,p):
        aux = []
        for k in range(0,n):
            aux.append(Notas[i,k]*GP[k,j])
        A[i,j] = max(aux)

Ai = A                # Com GP Insuficiente
A  = np.delete(A,0,1) # Exclui a primeira coluna
Ai

n = len(notas) # quatidade de notas
p = len(GP[0]) # quatidade de menções
m = len(Notas) # quatidade de médias acima de 6

A = np.zeros((m,p))
```

```python
for i in range(0,m):
    for j in range(0,p):
        aux = []
        for k in range(0,n):
            aux.append(Notas[i,k]*GP[k,j])
        A[i,j] = max(aux)

Ai = A                   # Com GP Insuficiente
A  = np.delete(A,0,1) # Exclui a primeira coluna
Ai
```

```
Grau de Pertinência Alunos
Aluno(a): A1
 I: 0.0 R: 0.48 B: 0.72

Aluno(a): A2
 I: 0.0 R: 0.54 B: 0.27

Aluno(a): A3
 I: 0.0 R: 0.42 B: 0.56

Aluno(a): A4
 I: 0.0 R: 0.6 B: 0.4

Aluno(a): A5 tem média 3.7 < 6, com menção Insuficiente
```