

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CAMPUS SÃO CARLOS

Lucas Ribeiro da Silva Santos

FORMALISMO DE *INPUT-OUTPUT* APLICADO EM
CAVIDADES ÓPTICAS E GERAÇÃO DE FÓTONS
INDIVIDUAIS

SÃO CARLOS
2024

LUCAS RIBEIRO DA SILVA SANTOS

FORMALISMO DE *INPUT-OUTPUT* APLICADO EM
CAVIDADES ÓPTICAS E GERAÇÃO DE FÓTONS
INDIVIDUAIS

**Trabalho de Conclusão de Curso sub-
metido à Universidade Federal de São
Carlos, como requisito necessário para
obtenção do grau de Bacharel em Fí-
sica**

São Carlos, fevereiro de 2024

BANCA EXAMINADORA

Esta Monografia foi julgada adequada para a obtenção do título de Bacharel em Física, sendo aprovada em sua forma final no dia 9 de fevereiro de 2024 perante a seguinte banca examinadora:

Orientador: Prof. Dr. Celso Jorge Villas-Bôas (Universidade Federal de São Carlos - UFSCar)

Prof. Dr. Emanuel Fernandes de Lima (Universidade Federal de São Carlos - UFSCar)

Prof. Dr. Raul Celestrino Teixeira (Universidade Federal de São Carlos - UFSCar)

Agradecimentos

Esta seção de agradecimentos reflete àqueles que contribuíram para a realização desse marco pessoal, a minha formação. Em razão disso, a lista não será pequena:

Agradeço ao meu Deus, Aquele que me ouviu quando pedi conhecimento, calma, força e determinação. Também a Igreja Presbiteriana Central de São Carlos, pelo discipulado, oportunidade de serviço, cuidado comigo e uma família nesta cidade.

Ao meu pai, José Juvenal, pois ele foi uma das causas desse marco, ele quem me fez chegar até aqui. A minha mãe, Elizabete Ribeiro e familiares, em especial, Lya, Renaldo e Gabriel.

Agradeço a Aliança Bíblica Universitária do Brasil pela formação e coparticipação na missão universitária, vocês tiveram papel essencial no meu amadurecimento durante esse período de graduação. Também enfatizo alguns amigos abeuenses: Jow, Bianca Zabotto, Cesinha, Joãozinho, JC e Julinha. Que estudantes continuem alcançando mais estudantes.

As políticas públicas implementadas pelo Departamento de Assistência Estudantil, proporcionando que eu pudesse usufruir da universidade. Aos amigos da Moradia: Acácio, Augusto, Daniel, Fábio, Kaleb, Levir e Matheus.

Aos Profs. Drs. Isác Almeida e Reinaldo Borges, meus exemplos quanto a pesquisa e ensino de física durante o Ensino Médio.

A todo o grupo Atletismo UFSCar, pelos treinos que colocaram minha cabeça no lugar e o companherismo durante as diversas competições.

Contraditoriamente, ao Esporte Clube Corinthians Paulista, os títulos não vieram, mas a emoção e paixão trouxeram vida as minhas semanas.

Ao Prof. Dr. Celso Jorge Villas-Bôas que me acolheu no Grupo de Óptica Quântica e Informação Quântica. Agradeço pelas oportunidades e que eu possa contribuir ainda mais. Ao Me. Luiz Solak por toda paciência em sanar minhas dúvidas neste trabalho e a amizade criada até aqui.

Agradeço pela oportunidade de realizar uma Iniciação Científica pela FAPESP - processo 2022/05551-4 - que me inseriu na Óptica Quântica. Também ao recurso adquirido pelas bolsas de tutoria e monitoria do PAAEG e CCET.

Concretizei esse marco, pois *"Tenho tudo, eu tenho a Cristo"* (Marco Telles).

Soli Deo gloria

Resumo

Nesta monografia será apresentada a investigação de um possível emissor do estado de fóton único. Este tipo de fonte é essencial na atualidade para o processamento de informação, em especial para o desenvolvimento da metrologia, comunicação e computação quântica. Conseqüentemente, é desenvolvido um estudo em um sistema quântico aberto no contexto de Eletrodinâmica Quântica de Cavidades, através do modelo de interação radiação-matéria de *Jaynes-Cummings* (J-C). Partindo da utilização de uma ferramenta da óptica quântica, o formalismo de *Input-Output*, investigamos as propriedades do campo de saída de uma cavidade óptica. É considerado um campo de entrada coerente contínuo ou um pulso gaussiano, onde ambos interagem com o átomo aprisionado, segundo o modelo de J-C. Em diferentes cenários, observa-se consistentemente a projeção do campo de saída da cavidade em um estado que contém exatamente 1 fóton. Analisamos o nosso sistema diante de situações realistas, como perdas no átomo. Investigamos então como os parâmetros do nosso sistema, como a forma do pulso (intensidade e duração) e intensidade do acoplamento átomo-campo, influenciam a produção de fótons únicos e como é possível melhorar a probabilidade de geração de tais estados.

Palavras-chave: Formalismo *Input-Output*, *Jaynes-Cummings*, Fótons individuais.

Abstract

This monograph will present the investigation of a possible emitter of the single photon state. This type of source is currently essential for information processing, especially for the development of quantum sensing, quantum communication and quantum computing. Consequently, a study is developed on an open quantum system in the context of Quantum Cavity Electrodynamics, through the *Jaynes-Cummings* (J-C) radiation-matter interaction model. Using a quantum optics tool, the *Input-Output* formalism, we investigate the properties of the output field of an optical cavity. A continuous coherent input field or a Gaussian pulse is considered, where both interact with the trapped atom, according to the J-C model. In different scenarios, the projection of the cavity exit field into a state containing exactly 1 photon is consistently observed. We analyze our system in realistic situations, such as taking into account losses in the atom. We then investigated how the parameters of our system, such as the shape of the pulse (intensity and duration) and the intensity of the atom-field coupling, influence the production of single photons and how it is possible to improve the probability of generating such states.

Keywords: Input-Output formalism. Jaynes-Cummings. Single photons.

Lista de ilustrações

- Figura 1 – Ilustração pictórica para observação do modelo de Jaynes-Cummings contendo um campo de bombeio que interage com a amostra atômica confinada no interior da cavidade óptica linear. Em (b) temos o diagrama dos níveis de energia do átomo, sendo $|g\rangle$ o estado fundamental e $|e\rangle$ o estado excitado. O modo do campo quantizado da cavidade tem frequência ω , que aqui é assumida em ressonância com a transição atômica entre os níveis relevantes para o nosso problema, e a frequência de Rabi (acoplamento átomo-campo) é g . Fonte: elaborada pelo autor. 5
- Figura 2 – Espectro de energia do modelo de Jaynes-Cummings. Da esquerda para direita são representados os autoestados do sistema desacoplado (átomo e cavidade) e do sistema acoplado átomo-cavidade com os estados vestidos $|n, \pm\rangle$ para n fótons na cavidade. O espaçamento entre as autoenergias dos estados vestidos é dada por duas vezes a frequência de Rabi, isto é, $\Omega_n = 2g\sqrt{n}$ no caso ressonante $\Delta = \omega_0 - \omega = 0$. Fonte: ilustração adaptada de [1]. 8
- Figura 3 – Dinâmica do sistema átomo-campo, com interação descrita pelo modelo de Jaynes-Cummings, considerando as taxas de dissipação: decaimento da cavidade, emissão espontânea do átomo e defasagem atômica. A probabilidade de ocupação ao longo do tempo normalizado κt na cavidade é obtida pela média $\langle a^\dagger a \rangle$. Já $\langle \sigma_+ \sigma_- \rangle$ fornece a média da ocupação no estado excitado do átomo. Fonte: elaborada pelo autor. 11
- Figura 4 – Representação da probabilidade de contagem dos fótons pelo tempo em um detector quando o campo apresenta (a) agrupamento (*bunching*), (b) aleatoriedade (campo coerente) ou (c) antiagrupamento (*antibunching*). Fonte: ilustração adaptada de [2]. 13
- Figura 5 – Incidência de um campo de bombeio de *input* em uma cavidade óptica de um lado que impede a transmissão do campo de *output* (a) pela esquerda ou (b) pela direita após a interação com o átomo aprisionado. Em (c) temos uma cavidade que permite a transmissão pelos dois lados. Fonte: elaborada pelo autor. 14
- Figura 6 – Representação esquemática dos operadores do campo intracavidade a , campo de entrada a_{in} e campo de saída a_{out} para uma cavidade óptica de um único lado. Fonte: ilustração adaptada de [3]. 17

- Figura 7 – Espectro de energia simplificado do modelo de J-C para interações de 2 fótons ($N = 2$). Os autoestados desacoplados $|g, 0\rangle$ e $|g, 1\rangle$ correspondem ao estado de vácuo e fóton único, respectivamente. Para os estados excitados do átomo somente são apresentados os autoestados acoplados $|2, \pm\rangle = 1/\sqrt{2}(|g, 2\rangle \pm |e, 0\rangle)$. Fonte: ilustração adaptada de [4]. 21
- Figura 8 – (a) Sistema com uma única cavidade usada para gerar fótons individuais com campo de bombeio coerente e átomo de dois níveis aprisionado. (b) Diagrama representativo da transição atômica do estado fundamental $|g\rangle$ para o estado excitado $|e\rangle$ através da frequência de transição atômica ω_0 . A dessintonia do campo de prova corresponde a $\Delta_p = \omega - \omega_p$, onde $\omega = \omega_0/2$ representa a frequência do modo do campo da cavidade e ω_p a frequência do campo de bombeio. Fonte: elaborada pelo autor. 24
- Figura 9 – Dinâmica do sistema J-C de 2 fótons desacoplado ($g = 0$) com força do campo de entrada $\varepsilon_0 = \sqrt{1.0}\kappa$. Em (a) temos as projeções dos estados de Fock, (b) apresenta o número médio de fótons e (c) a estatística do campo através da função de correlação de segunda ordem. Parâmetros do sistema: $\Delta_p = 0$, $\gamma = \gamma_\phi = 0.01\kappa$ e $N = 20$ (dimensão do espaço de Fock). Fonte: elaborada pelo autor. 25
- Figura 10 – Dinâmica do sistema J-C de 2 fótons com constante de acoplamento átomo-campo $g = 10.0\kappa$ e força do campo de entrada $\varepsilon_0 = \sqrt{8.0}\kappa$. Em (a) temos as projeções dos estados de Fock, (b) apresenta o número médio de fótons e (c) a estatística do campo através da função de correlação de segunda ordem em função do tempo normalizado κt . Parâmetros do sistema: $\Delta_p = 0$, $\gamma = \gamma_\phi = 0.01\kappa$ e $N = 20$ (dimensão do espaço de Fock). Fonte: elaborada pelo autor. 26
- Figura 11 – (a) Projeções dos estados de Fock de 1 a 8 fótons, (b) número médio de fótons e (c) função de correlação de segunda ordem normalizada pela variação da força de acoplamento átomo-campo normalizada g/κ com força do campo de entrada $\varepsilon_0 = \sqrt{8.0}\kappa$. Parâmetros para simulação do estado estacionário do sistema: $\Delta_p = 0$, $\gamma = \gamma_\phi = 0.01\kappa$ e $N = 20$ (dimensão do espaço de Fock). 27
- Figura 12 – Projeções dos autoestados do sistema pela variação da força de acoplamento átomo-campo normalizada g/κ . Os autoestados desacoplados são o vácuo $|g, 0\rangle$ e o fóton único $|g, 1\rangle$. Já os autoestados acoplados são $|\pm, n\rangle = 1/\sqrt{2}(|g, n\rangle \pm |e, n - N\rangle)$ para $n \geq N$. Parâmetros do sistema: $\Delta_p = 0$, $\gamma = \gamma_\phi = 0.01\kappa$, $\varepsilon_0 = \sqrt{1.0}\kappa$ e $N = 20$ (dimensão do espaço de Fock). Fonte: elaborada pelo autor. 28

- Figura 13 – Dinâmica do sistema J-C de 2 fótons analisando a projeção da componente de 1 fóton $\langle P_1 \rangle$, a média do número de fótons $\langle n \rangle$ e do número de ocupação no estado excitado $\langle \sigma_+ \sigma_- \rangle$ em função do tempo normalizado κt . A força do campo de bombeio e a constante de acoplamento átomo-campo são, respectivamente, (a) $\varepsilon_0 = \sqrt{1.0}\kappa$ e $g = 5.0\kappa$; (b) $\varepsilon_0 = \sqrt{8.0}\kappa$ e $g = 10.0\kappa$. Parâmetros para simulação utilizando o método numérico *Monte Carlo* para 1 trajetória: $\Delta_p = 0$, $\gamma = \gamma_\phi = 0.01\kappa$ e $N = 20$ (dimensão do espaço de Fock). Fonte: elaborada pelo autor. 30
- Figura 14 – Dinâmica do sistema J-C de 2 fótons analisando a projeção da componente de 1 fóton $\langle P_1 \rangle$, a média do número de fótons $\langle n \rangle$ e do número de ocupação no estado excitado $\langle \sigma_+ \sigma_- \rangle$ em função do tempo normalizado $\kappa(t - t_0)$. Também é apresentada a função de correlação normalizada de segunda ordem $g^{(2)}(0)$ no intervalo de maior estabilidade em função de $\kappa(t - t_0)$. A amplitude do pulso do campo e a constante de acoplamento átomo-campo são, respectivamente, (a, b) $\varepsilon_m = \sqrt{1.0}\kappa$; (c, d) $\varepsilon_m = \sqrt{8.0}\kappa$ e $g = 10.0\kappa$. Parâmetros para simulação: $\Delta_p = 0$, $\gamma = \gamma_\phi = 0.01\kappa$, $\eta = 20/\kappa$, $t_0 = 60/\kappa$ e $N = 20$ (dimensão do espaço de Fock). Fonte: elaborada pelo autor. 31
- Figura 15 – Dinâmica do sistema J-C de 2 fótons analisando a média do número de fótons $\langle n \rangle$ e do número de ocupação no estado excitado $\langle \sigma_+ \sigma_- \rangle$ em função do tempo normalizado $\kappa(t - t_0)$. A amplitude do pulso do campo e a constante de acoplamento átomo-campo são, respectivamente, (a) $\varepsilon_m = \sqrt{1.0}\kappa$; (b) $\varepsilon_m = \sqrt{8.0}\kappa$ e $g = 10.0\kappa$. Parâmetros para simulação utilizando o método numérico *Monte Carlo* para 1 trajetória: $\Delta_p = 0$, $\gamma = \gamma_\phi = 0.01\kappa$, $\eta = 20/\kappa$, $t_0 = 60/\kappa$ e $N = 20$ (dimensão do espaço de Fock). Fonte: elaborada pelo autor. 33
- Figura 16 – Dinâmica do sistema comparando projeções obtidas pelo modelo J-C usual (curvas tracejadas, 1p) e de interações bifonônicas (curvas sólidas, 2p). Em (a) temos as projeções dos estados de Fock, (b) as médias do número de fótons $\langle n \rangle$ e do número de ocupação no estado excitado $\langle \sigma_+ \sigma_- \rangle$ em função do tempo normalizado κt . Já (c) apresenta a função de correlação de segunda ordem em função de κt . A força do campo de bombeio e constante de acoplamento átomo-campo são, respectivamente, $\varepsilon_0 = \sqrt{8.0}\kappa$ e $g = 10.0\kappa$. Parâmetros para simulação: $\Delta_{p(2p)} = 0$, $\Delta_{p(1p)} = g$, $\gamma = \gamma_\phi = 0.01\kappa$, $N = 20$ (dimensão do espaço de Fock). Fonte: elaborada pelo autor. 35

Figura 17 – Dinâmica do sistema comparando projeções obtidas pelo modelo J-C (a) usual ($1p$) e (b) de interações bifonônicas ($2p$). São apresentadas as projeções da componente de 1 ($\langle P_1 \rangle$) e 2 ($\langle P_2 \rangle$) fótons, a média do número de fótons $\langle n \rangle$ e do número de ocupação no estado excitado $\langle \sigma_+ \sigma_- \rangle$ em função do tempo normalizado κt . A força do campo de bombeio e a constante de acoplamento átomo-campo são, respectivamente, $\varepsilon_0 = \sqrt{0.5}\kappa$ e $g = 10.0\kappa$. Parâmetros para simulação utilizando o método numérico *Monte Carlo* para 1 trajetória: $\Delta_{p(2p)} = 0$, $\Delta_{p(1p)} = g$, $\gamma = \gamma_\phi = 0.01\kappa$ e $N = 20$ (dimensão do espaço de Fock). Fonte: elaborada pelo autor. 36

Figura 18 – Dinâmica do sistema comparando projeções obtidas pelo modelo J-C usual (curvas tracejadas, $1p$) e de interações bifonônicas (curvas sólidas, $2p$). Em (a) temos as projeções dos estados de Fock e a média do número de ocupação no estado excitado $\langle \sigma_+ \sigma_- \rangle$ em função do tempo normalizado $\kappa(t - t_0)$. Já (b) apresenta a função de correlação de segunda ordem pela variação de $\kappa(t - t_0)$. A amplitude do pulso e constante de acoplamento átomo-campo são, respectivamente, $\varepsilon_m = \sqrt{8.0}\kappa$ e $g = 10.0\kappa$. Parâmetros para simulação: $\Delta_{p(2p)} = 0$, $\Delta_{p(1p)} = g\kappa$, $\gamma = \gamma_\phi = 0.01\kappa$, $\eta = 20/\kappa$, $t_0 = 60/\kappa$, $N = 20$ (dimensão do espaço de Fock). Fonte: elaborada pelo autor. 37

Lista de tabelas

Tabela 1 – Projeções $\langle P_i \rangle$ de i fótons na cavidade, média do número de fótons $\langle n \rangle$ e do número de ocupação no estado excitado $\langle \sigma_+ \sigma_- \rangle$ para dois valores da amplitude ε_m do pulso de entrada. Valores obtidos integrando numericamente o sistema pelo tempo. Fonte: elaborada pelo autor. . . 32

Lista de abreviaturas e siglas

Lista de Siglas

EQC – Eletrodinâmica Quântica em Cavidades

RWA – *Rotating Wave Approximation*

J-C – *Jaynes-Cummings*

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	3
1	Campo quantizado em uma cavidade	3
2	Modelo de Jaynes-Cummings	4
2.1	Derivação da interação átomo-campo	4
2.2	Espectro de energia de Jaynes-Cummings	7
2.3	Hamiltoniano J-C com campo de bombeio	7
3	Sistema quântico aberto	9
3.1	Reservatórios do sistema	9
3.2	Equação Mestra	9
4	Estatística de fótons: função de correlação	12
5	Formalismo de Input-Output para cavidades ópticas	13
5.1	Modos da cavidade	14
5.2	Equações quânticas de Langevin e operador de Input	15
5.3	Operador de Output e relação Input-Output	17
5.4	Comutação dos operadores	18
3	GERADOR DE FÓTONS INDIVIDUAIS	20
1	Sistema gerador de fótons individuais	20
2	Aplicação do formalismo <i>Input-Output</i> no sistema	22
3	Campo de entrada coerente	23
3.1	Dinâmica do sistema	24
3.2	Estado estacionário e variação do acoplamento átomo-campo	27
3.3	Emissão para o campo contínuo	29
4	Campo de entrada gaussiano	30
4.1	Dinâmica do sistema de campo pulsado	30
4.2	Emissão para o campo pulsado	33
5	Comparação do modelo J-C para 1 e dois fótons	34
4	CONCLUSÕES	38
	REFERÊNCIAS	39

	APÊNDICES	42
1	Estado coerente	43
2	Relações matemáticas	43
3	Método de <i>Monte Carlo</i>	43

1 Introdução

A lei de Planck, formulada em 1900, descreve a densidade espectral da radiação eletromagnética emitida por um corpo negro [5] e continua a desempenhar um papel significativo no desenvolvimento tecnológico contemporâneo. A descoberta dessa lei a partir da quantização da luz representou um dos fundamentos essenciais para o surgimento da mecânica quântica no início do século XX e da compreensão da interação radiação-matéria. Consequentemente, os sistemas quânticos são amplamente empregados na atualidade para o processamento de informações. A busca iniciada na década de 1970 pelo controle desses sistemas, especialmente no que diz respeito à manipulação de estados quânticos individuais, resultou em avanços notáveis. Podemos citar o prêmio Nobel de 2012 que contemplou os avanços experimentais no aprisionamento de fótons em uma cavidade supercondutora, laureado para Serge Haroche [6] e David Wineland [7].

De acordo com Deutsch, em 1982, houve uma proposta para a criação de uma máquina capaz de simular eficientemente qualquer sistema físico arbitrário, baseando-se nas leis da física e seguindo os princípios da mecânica quântica. Essa concepção levou à construção do Computador Quântico (CQ), cujo objetivo principal era simular sistemas quânticos praticamente insolúveis utilizando menos informações do que um Computador Clássico (CC), devido à possível eficiência exponencial do CQ em relação ao CC. No entanto, a implementação prática dessa ideia mostrou-se desafiadora, como sugerido por Feynman em 1982 na concepção de um Computador Quântico [8]. Somente em 1994, Peter Shor conseguiu demonstrar a eficácia do CQ ao resolver dois problemas significativos: a determinação dos fatores primos de um número inteiro e o logaritmo discreto [9].

Em vista disso, a manipulação da informação ocorre por meio de diferentes plataformas que lançam mão das interações radiação-matéria, por meio de átomos, moléculas, íons e fótons. Uma teoria essencial para compreender a interação dos átomos com a luz em sistemas quânticos abertos é a Eletrodinâmica Quântica de Cavidades (EQC). Os processos dissipativos desempenham um papel crucial, possibilitando o controle da intensidade do acoplamento átomo-campo, uma vez que um espaço confinado, como uma cavidade óptica, proporciona o domínio de diversas magnitudes do sistema. Algumas dessas taxas de dissipação incluem a transmissão de fótons da cavidade e a emissão incoerente de um qubit [10]. Dessa forma, o processamento da informação quântica ocorre por meio da manipulação dos estados atômicos e do campo. As aplicações primordiais desse fenômeno incluem o avanço na criação de sensores mais precisos [11], bem como o desenvolvimento em comunicação [12] e CQ [13].

Diversos métodos são empregados para calcular a dinâmica dentro de uma cavi-

dade, destacando-se a utilização de abordagens estocásticas e das equações de Langevin [14]. Em particular, o formalismo denominado *Input-Output* propõe prever os estados quânticos da luz que serão transmitidos pela cavidade após a interação entre átomo-fóton ou fóton-fóton [15].

Embora tais fontes já tenham sido implementadas [16, 17], a análise da interação radiação-matéria será conduzida por meio do modelo de Jaynes-Cummings (J-C) [18]. A aplicação do modelo de J-C considera um fenômeno conhecido como *photon blockade*, o qual impede a ocupação de estados superiores a 1 fóton [19, 20]. O sistema em questão, objeto de estudo, baseia-se na generalização para N -fótons, conforme apresentado em [4], e aplica-se a interações de 2 fótons. Essa modificação foi explorada pelo Grupo de Eletrodinâmica Quântica em Cavidades - UFSCar e resultou em um sistema mais robusto às dissipações atômicas.

Nesse contexto, o capítulo 2 tem como objetivo inicial apresentar uma dedução concisa dos autoestados e autoenergias do modelo Jaynes-Cummings (J-C). A partir desse ponto, será detalhada a dinâmica por meio da equação mestra, considerando um sistema composto por um átomo de dois níveis confinado e interagindo com um campo de bombeio coerente. A função de correlação também será abordada para compreender de forma estatística a característica do campo de saída da cavidade. Por fim, será derivada a relação fundamental do formalismo *Input-Output*, através da definição dos operadores do campo de entrada e saída.

Por fim, o capítulo 3 investiga as características do gerador de fótons únicos resultantes de interações bifotônicas. Inicialmente, é estabelecida a relação de proporcionalidade entre as grandezas calculadas para o campo de saída em comparação com o campo intra-cavidade, utilizando o formalismo *Input-Output*. Nesse contexto, serão apresentados os cálculos das projeções dos autoestados, número de fótons na cavidade, média do número de fótons, média de ocupação do estado excitado do átomo e função de correlação de segunda ordem. Além disso, as emissões do sistema são analisadas para 1 trajetória pelo método *Monte Carlo*, sendo comparadas com o modelo J-C usual.

2 Fundamentação Teórica

1 Campo quantizado em uma cavidade

No modelo de interação radiação-matéria que será abordado, um conceito importante a ser utilizado é a quantização do campo eletromagnético no interior de uma cavidade óptica perfeitamente condutora. Uma cavidade linear funciona como um ressonador, ou seja, por meio dela podemos gerar ou selecionar frequências específicas, as quais são padrões espaciais de vibração chamados de modos do campo.

Pela configuração de dois espelhos paralelos refletivos o campo eletromagnético é confinado nessa região, já que ocorrem múltiplas reflexões das ondas estacionárias formadas através das interferências construtivas e destrutivas. Os parâmetros dos espelhos como o raio de curvatura e a distância entre eles são determinantes para a escolha da força de acoplamento átomo-campo que será definida posteriormente [1].

Por meio dessa configuração será possível isolar os modos do campo que são ressonantes a transição de uma amostra atômica aprisionada na cavidade. Essa amostra é neutra e se move com velocidades não-relativísticas em relação a cavidade permitindo desprezar efeitos quânticos do movimento [21]. Vamos então adotar a condição de contorno onde as componentes paralela do campo elétrico \mathbf{E} e normal do campo magnético \mathbf{B} são nulas, inibindo a presença de correntes superficiais:

$$\mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{B}_{\perp} = 0. \quad (2.1)$$

Este campo eletromagnético ocupa uma região de volume V dentro da cavidade com hamiltoniano definido na forma

$$\mathcal{H}_{\text{campo}} = \frac{1}{2} \int \epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0} dV, \quad (2.2)$$

sendo ϵ_0 a constante de permissividade e μ_0 a constante de permeabilidade no vácuo [22]. Considerando então as equações de Maxwell no vácuo (livre de cargas) e as condições do calibre de Coulomb ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$), será possível escrever os campos elétrico e magnético em função do campo potencial vetor \mathbf{A} . A quantização do operador $\mathcal{H}_{\text{campo}}$ descrita detalhadamente em [21] é realizada aplicando o método de separação de variáveis que permitirá expandi-lo em relação aos modos normais (l) do campo para uma dada polarização: mente condutora

$$\mathcal{H}_{\text{campo}} = \frac{1}{2} \sum_l p_l^2 + \omega_l^2 q_l^2 = \sum_l \mathcal{H}_l, \quad (2.3)$$

onde q e p são as variáveis canonicamente conjugadas de posição e momento linear, respectivamente. Vemos na expressão a semelhança com o hamiltoniano de um oscilador

harmônico de massa unitária. Assim, vamos realizar a seguinte transformação

$$q_l, p_l \rightarrow Q_l, P_l \quad (2.4)$$

que respeita a relação de comutação $[Q_l, P_l] = i\hbar$ e permite definir os operadores

$$a_l = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_l}} (\omega_l Q_l + iP_l) \quad \text{e} \quad a_l^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_l}} (\omega_l Q_l - iP_l) \quad (2.5)$$

conhecidos por operadores de abaixamento e levantamento de um quantum de energia $\hbar\omega$ nos estados do oscilador, satisfazendo a relação de comutação

$$[a_l, a_l^{\dagger'}] = \delta_{ll'}. \quad (2.6)$$

Assim, isolando os operadores Q_l e P_l em (2.5), podemos escrevê-los como

$$Q_l = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_l}} (a_l^\dagger + a_l) \quad \text{e} \quad P_l = i\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_l}} (a_l^\dagger - a_l). \quad (2.7)$$

Com isso, podemos escrever o hamiltoniano do l -ésimo modo do campo na forma

$$\mathcal{H}_l = \hbar\omega_l \left(a_l^\dagger a_l + \frac{1}{2} \right), \quad (2.8)$$

onde usualmente o termo $\hbar\omega_l/2$ que corresponde a energia de flutuação do vácuo é omitido por não alterar as equações de movimento. As autoenergias desse hamiltoniano são

$$E_n = \hbar\omega_l \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (2.9)$$

para o número de excitações $n = 0, 1, 2, \dots$ dos chamados autoestados de Fock $|\psi_n\rangle$ [23].

A partir disso, vimos que uma cavidade linear é capaz de selecionar os modos do campo eletromagnético, o qual pode ser quantizado através de sua descrição pelos operadores posição e momento da Mecânica Quântica. Cada modo l terão uma hamiltoniana com autoenergia bem definida pelo número n de excitações do espaço de Fock.

2 Modelo de Jaynes-Cummings

2.1 Derivação da interação átomo-campo

O modelo fundamental para compreensão da interação entre a radiação com a matéria (amostra atômica) se dá utilizando o modelo de Jaynes-Cummings (J-C) [18]. Consideraremos um sistema de um átomo de dois níveis de energia, aprisionado em uma cavidade óptica. Considerando um acoplamento ressonante de um único modo do campo eletromagnético de frequência ω é possível realizar a transição atômica entre os estados fundamental $|g\rangle$ e excitado $|e\rangle$ pela frequência de Rabi no vácuo g , conforme ilustra a

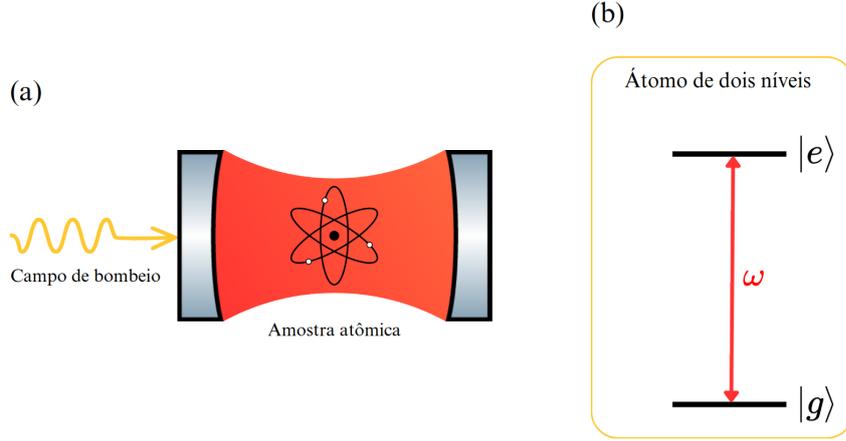


Figura 1 – Ilustração pictórica para observação do modelo de Jaynes-Cummings contendo um campo de bombeio que interage com a amostra atômica confinada no interior da cavidade óptica linear. Em (b) temos o diagrama dos níveis de energia do átomo, sendo $|g\rangle$ o estado fundamental e $|e\rangle$ o estado excitado. O modo do campo quantizado da cavidade tem frequência ω , que aqui é assumida em ressonância com a transição atômica entre os níveis relevantes para o nosso problema, e a frequência de Rabi (acoplamento átomo-campo) é g . Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 1. Um átomo real possui uma estrutura complexa de níveis de energia e a cavidade apresenta infinitos modos, mas por meio da condição de ressonância (ou quase-ressonância) tal modelo se torna suficiente para descrever a dinâmica desse sistema [24].

Assim, para escrevermos o hamiltoniano total do sistema sem dissipação, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{\text{int}}$, vamos primeiro definir a energia livre do átomo em repouso e do campo quantizado da cavidade a partir da Equação (2.8) como

$$\mathcal{H}_0 = \omega_g \sigma_{gg} + \omega_e \sigma_{ee} + \omega a^\dagger a, \quad (2.10)$$

sendo considerado $\hbar = 1$, ω_n como as frequências correspondentes aos estados atômicos e $\sigma_{mn} = |n\rangle\langle n|$ o operador da população atômica, ou seja, se o elétron está no estado fundamental ou excitado ($\sigma_{gg} + \sigma_{ee} = \mathbb{1}$). Já a^\dagger e a são os operadores de criação e aniquilação dos fótons, respectivamente.

Para construir o Hamiltoniano de interação será considerada a aproximação de dipolo, válida quando o comprimento de onda do campo de bombeio ($\lambda \approx 10^{-7}m$) é muito maior que o raio atômico ($r_0 \approx 10^{-10}m$), ou seja, $\lambda \gg r_0$, permitindo que a amplitude do campo seja constante em toda extensão atômica [1]:

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = -q_e \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}, \quad (2.11)$$

onde q_e representa a carga do elétron e \mathbf{r} o vetor posição do elétron. O operador \mathbf{E} simboliza o campo elétrico quantizado que pode ser escrito sob a aproximação de dipolo como

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 (a + a^\dagger), \quad (2.12)$$

sendo o vetor \mathbf{E}_0 na direção de polarização do versor $\hat{\mathbf{k}}$ definido na forma

$$\mathbf{E}_0 = \sqrt{\frac{\omega}{2\epsilon_0 V}} \hat{\mathbf{k}}. \quad (2.13)$$

Aplicando a propriedade da completeza ao vetor posição ficamos com

$$q_e \mathbf{r} = \sum_{n,m} q_e |n\rangle \langle n| \mathbf{r} |m\rangle \langle m| = \sum_{n,m} \mathbf{d}_{nm} \sigma_{nm}, \quad (2.14)$$

ou seja, $\mathbf{d}_{nm} = q_e \langle n| \mathbf{r} |m\rangle$ o elemento da matriz de dipolo para a transição $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ e σ_{nm} indica os operadores de levantamento e abaixamento atômico ($n \neq m$) [22].

Juntando os resultados das Equações (2.14) e (2.12) para substituir em (2.11) ficaremos com

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{int}} &= -(\mathbf{d}_{ge} \sigma_{ge} + \mathbf{d}_{eg} \sigma_{eg}) \mathbf{E}_0 (a + a^\dagger) \\ &= -\sqrt{\frac{\omega}{2\epsilon_0 V}} \hat{\mathbf{k}} (\mathbf{d}_{ge} a \sigma_{ge} + \mathbf{d}_{eg} a \sigma_{eg} + \mathbf{d}_{ge} a^\dagger \sigma_{ge} + \mathbf{d}_{eg} a^\dagger \sigma_{eg}), \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde podemos aplicar a aproximação de onda girante (RWA – *Rotating Wave Approximation*) devido ao modo da cavidade e as frequências de transição atômica serem muito maiores que a constante de acoplamento átomo-campo ($\omega \gg g$).

Experimentalmente esta condição é satisfeita uma vez que, em experimentos com cavidades ópticas, o acoplamento típico g é da ordem de 10^7 Hz ou 10^8 Hz e frequência ω é da ordem de 10^{15} Hz [21]. Os termos chamados contragirantes $g (a^\dagger \sigma_{eg} + a \sigma_{ge})$ não conservam o número de quanta do sistema. Vemos que o primeiro termo indica a criação de um fóton e simultânea excitação do átomo, já no segundo termo há uma aniquilação do fóton e decaimento do átomo, ou seja, temos uma violação do número de excitações do sistema [1]. Tais termos são relevantes somente no regime de acoplamento muito forte, isto é, quando $g \sim \omega$ [21], regime não abordado nesse trabalho.

Desse modo, iremos desprezar esses termos no regime de acoplamento fraco e a quase ressonância entre o átomo e o campo, $|\Delta| \ll \omega$ para ($\Delta = \omega_i - \omega$). Neste limite é permitido então escrever

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = g (a \sigma_{eg} + a^\dagger \sigma_{ge}), \quad (2.16)$$

para $g = -\sqrt{\frac{\omega}{2\epsilon_0 V}} \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{d}_{ge}$ como a representação da força de acoplamento átomo-campo. Esta definição nos mostra que experimentalmente o aumento de acoplamento do sistema será realizado pela diminuição do volume da cavidade, ou seja, a distância entre os espelhos e o raio de curvatura. Somando as Equações (2.10) e (2.16) será possível escrever o chamado Hamiltoniano de Jaynes-Cummings que descreve a interação coerente entre um qubit (2 estados possíveis) e um único modo quantizado:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \omega_g \sigma_{gg} + \omega_e \sigma_{ee} + \omega a^\dagger a + g (a \sigma_+ + a^\dagger \sigma_-) \\ &= \frac{1}{2} \omega_0 \sigma_z + g (a \sigma_+ + a^\dagger \sigma_-) + \omega a^\dagger a, \end{aligned} \quad (2.17)$$

sendo aplicado uma mudança no referencial de energia do átomo, considerando $\omega_0 = \omega_e - \omega_g$ como a frequência relativa ao átomo e $\sigma_z = \sigma_{ee} - \sigma_{gg}$ o operador de inversão de população [25]. Além disso, houve a mudança de notação $\sigma_{eg} = \sigma_+$ e $\sigma_{ge} = \sigma_-$ nos operadores de levantamento e abaixamento da população atômica, respectivamente. Esses operadores são construídos através dos operadores de Pauli $\sigma_{x,y,z}$ por [26]

$$\sigma_{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm i\sigma_y). \quad (2.18)$$

2.2 Espectro de energia de Jaynes-Cummings

Uma característica desse modelo é a possível obtenção analítica das autoenergias e autoestados do hamiltoniano da Equação (2.17). Conforme ilustrado na Figura 2 que representa o espectro de energia, o sistema acoplado átomo-cavidade tem por estado fundamental do vácuo $|g, 0\rangle$. Já os chamados estados vestidos (acoplados) são construídos por dupletos dos estados nus (desacoplados) $|g, n\rangle$ e $|e, n-1\rangle$ para o átomo excitado, onde há n excitações do sistema. A diagonalização de \mathcal{H} permite determinar os autoestados na base $\{|g, n\rangle, |e, n-1\rangle\}$ dos chamados estados vestidos como

$$|n, +\rangle = \cos \theta_n |e, n-1\rangle - \sin \theta_n |g, n\rangle \quad (2.19)$$

$$|n, -\rangle = \sin \theta_n |e, n-1\rangle + \cos \theta_n |g, n\rangle, \quad (2.20)$$

onde é necessária a aplicação de uma rotação no espaço de Hilbert através dos ângulos de mistura

$$\sin \theta_n = \frac{\Omega_n - \Delta}{\sqrt{(\Omega_n - \Delta)^2 + 4g^2n}}; \quad (2.21)$$

$$\cos \theta_n = \frac{2g\sqrt{n}}{\sqrt{(\Omega_n - \Delta)^2 + 4g^2n}}, \quad (2.22)$$

sendo considerada a dessintonia $\Delta = \omega_0 - \omega$ e a frequência de Rabi do vácuo $\Omega_n = \sqrt{\Delta^2 + 4g^2n}$.

Escrevemos as autoenergias na forma [21]

$$E_0 = -\frac{\omega_0}{2}, \quad (2.23)$$

$$E_{n,+} = n\omega - \frac{\omega_0}{2} - \frac{1}{2}(\Omega_n - \Delta), \quad (2.24)$$

$$E_{n,-} = n\omega - \frac{\omega_0}{2} + \frac{1}{2}(\Omega_n - \Delta). \quad (2.25)$$

2.3 Hamiltoniano J-C com campo de bombeio

O estudo da interação de um campo incidente na cavidade, chamado de campo de prova ou bombeio, com átomos únicos confinados trouxe grandes avanços na espectroscopia de precisão e computação quântica. Considerando um campo coerente de frequência

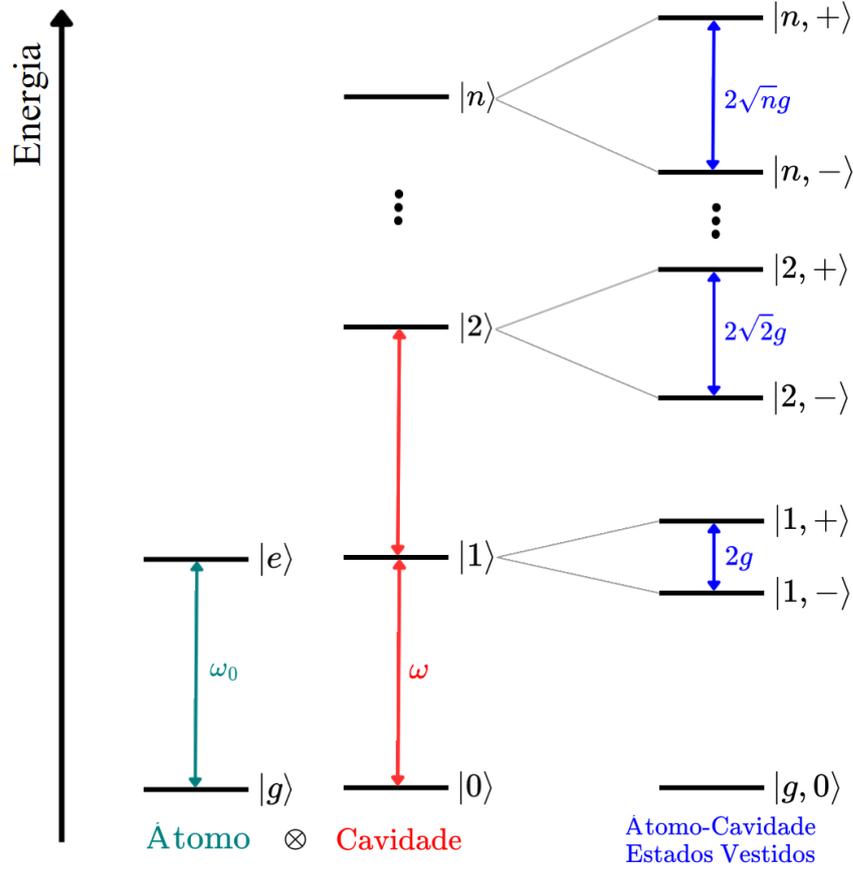


Figura 2 – Espectro de energia do modelo de Jaynes-Cummings. Da esquerda para direita são representados os autoestados do sistema desacoplado (átomo e cavidade) e do sistema acoplado átomo-cavidade com os estados vestidos $|n, \pm\rangle$ para n fótons na cavidade. O espaçamento entre as autoenergias dos estados vestidos é dada por duas vezes a frequência de Rabi, isto é, $\Omega_n = 2g\sqrt{n}$ no caso ressonante $\Delta = \omega_0 - \omega = 0$. Fonte: ilustração adaptada de [1].

ω_P e força do campo ε proporcional a amplitude, o qual em geral é ressonante ou está próximo da ressonância com a transição atômica, terá a principal função no sistema induzir a dinâmica e repor a energia dissipada. Seu hamiltoniano escrito no modo da cavidade apresenta uma dependência temporal na forma

$$\mathcal{H}_P = \varepsilon (ae^{i\omega_P t} + a^\dagger e^{-i\omega_P t}) , \quad (2.26)$$

sendo necessário realizarmos uma transformação unitária através do operador

$$\mathcal{T} = \exp \left[-\omega_P t \left(a^\dagger a + \frac{\sigma_z}{2} \right) \right] , \quad (2.27)$$

o qual permite escrever o hamiltoniano total da Equação (2.17) pelo referencial girante do campo de bombeio. Desse modo, podemos representar nosso sistema com um campo de bombeio coerente na forma

$$\mathcal{H} = \Delta_P (a^\dagger a + \sigma_z) + g (a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-) + \varepsilon (a + a^\dagger) , \quad (2.28)$$

onde $\Delta_P = \omega_0 - \omega_P$ ($\omega_0 \approx \omega$) [24]. O Apêndice 1 apresenta uma breve explicação acerca da definição do estado coerente para o campo.

Com isso, vimos um modelo de interação radiação-matéria amplamente conhecido na Óptica Quântica. Podemos descrever essa interação utilizando a aproximação de dipolo e a *RWA*. Os autoestados do sistema possuem forma analítica que permite visualizar o sistema desacoplado e o acoplamento átomo-cavidade descrito pelos estados vestidos. Considerando um campo de bombeio, a hamiltoniana total é escrita através do referencial girante para obter uma expressão sem uma dependência temporal explícita.

3 Sistema quântico aberto

3.1 Reservatórios do sistema

Até agora não consideramos perdas de energia do nosso sistema, ou seja, é um sistema quântico fechado. Para levarmos em conta dissipações de qualquer sistema físico aberto, será necessário considerar as taxas de dissipação dos operadores de colapso presentes na chamada Equação Mestra, os quais serão definidos conforme o reservatório que o sistema se encontra. De forma breve trataremos de três tipos de reservatórios pelo modelo do banho de osciladores, ou seja, haverá um número infinito de osciladores harmônicos que implicará na separação do hamiltoniano da evolução livre do sistema e da interação sistema-reservatório [27].

Os osciladores harmônicos do reservatório térmico são considerados como estados em equilíbrio com a temperatura T . Para o reservatório comprimido (*squeezed*) os osciladores estarão em um estado puro, chamado de vácuo comprimido, o qual é descrito por dois observáveis que não comutam. Por último, o reservatório de campo eletromagnético no espaço livre permite que a interação da radiação com um átomo promova uma emissão espontânea de um nível atômico excitado. Esse reservatório é de interesse para este trabalho já que permite a transmissão de fótons pela cavidade quando acoplado ao vácuo eletromagnético ao sistema. Desse modo, a escolha do reservatório altera a estatística da dinâmica do sistema através da matrix densidade, pois gera o decaimento dos modos do campo pelas paredes da cavidade [28].

Posto isso, a Equação Mestra é a ferramenta que utilizaremos para simular a dinâmica do sistema. Levaremos em conta três taxas de dissipação: decaimento da intensidade do campo intra-cavidade, emissão espontânea do átomo e defasagem atômica. Também consideraremos o reservatório de campo eletromagnético pelo modelo do banho de osciladores.

3.2 Equação Mestra

A fim de descrever a forma de uma equação mestra, inicialmente vamos considerar um sistema físico fechado com sua dinâmica descrita pela equação de Schrödinger, a qual

pode ser representada na forma

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = H |\psi\rangle , \quad (2.29)$$

sendo $|\psi\rangle$ o estado da função de onda e H a representação matricial do hamiltoniano. Se então levarmos em conta que o acoplamento átomo-campo interage com o meio, teremos um sistema aberto com processos decoerentes de relaxação do átomo e da cavidade. Esses processos apresentam transações estocásticas entre os níveis energéticos que podem ser descritas pela matriz densidade

$$\rho = \sum_n p_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n| , \quad (2.30)$$

onde p_n é a probabilidade do sistema estar no estado quântico $|\psi_n\rangle$. Por meio desse operador podemos obter a evolução temporal do valor médio de um operador arbitrário O na forma

$$\langle \dot{O} \rangle = \text{Tr}\{O\dot{\rho}\} . \quad (2.31)$$

Vamos então analisar como a distribuição de probabilidades varia com o tempo pela equação de von Neumann

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -\frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}, \rho] , \quad (2.32)$$

mas já que estamos interessados na dinâmica do sistema, iremos reduzir essa equação de movimento para a Equação Mestra na forma de Lindblad escrita por

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -\frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}(t), \rho(t)] + \sum_n \frac{1}{2} [2C_n\rho(t)C_n^\dagger - \rho(t)C_n^\dagger C_n - C_n^\dagger C_n\rho(t)] , \quad (2.33)$$

onde $C_n = \sqrt{\gamma_n}A_n$ representa o operador de colapso do operador A_n com taxa γ_n para o acoplamento entre o meio e o sistema [29,30]. Uma dedução completa da construção dessa Equação Mestra relacionando a energia livre do sistema com o reservatório considerado pode ser encontrada em [28].

Escrevendo então a equação mestra do modelo J-C de dois níveis, segundo a Equação (2.33), ficaremos com

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -\frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}, \rho] + \frac{\kappa}{2} (2a\rho a^\dagger - \rho a^\dagger a - a^\dagger a\rho) + \frac{\Gamma_{ge}}{2} (2\sigma_{ge}\rho\sigma_{ge}^\dagger - \rho\sigma_{ge}^\dagger\sigma_{ge} - \sigma_{ge}^\dagger\sigma_{ge}\rho) \\ &\quad + \frac{\gamma_e}{2} (2\sigma_{ee}\rho\sigma_{ee}^\dagger - \rho\sigma_{ee}^\dagger\sigma_{ee} - \sigma_{ee}^\dagger\sigma_{ee}\rho) \\ &= -\frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}, \rho] + \frac{\kappa}{2} (2a\rho a^\dagger - \rho a^\dagger a - a^\dagger a\rho) + \frac{\Gamma_{ge}}{2} (2\sigma_{ge}\rho\sigma_{eg} - \rho\sigma_{ee} - \sigma_{ee}\rho) \\ &\quad + \frac{\gamma_e}{2} (2\sigma_{ee}\rho\sigma_{ee}^\dagger - \rho\sigma_{ee} - \sigma_{ee}\rho) , \end{aligned} \quad (2.34)$$

sendo considerado κ como a taxa de decaimento da intensidade do campo intra-cavidade, Γ_{ge} a taxa de emissão espontânea do átomo e γ_e a taxa de defasagem atômica. Assim,

vemos que o primeiro termo da expressão acima descreve a evolução coerente do sistema átomo-campo com bombeio e os demais termos indicam os processos de relaxação da cavidade e do átomo [1].

Conforme ilustra a Figura 3, há uma troca coerente da energia do sistema entre o campo da cavidade e o nível excitado do átomo. Obtemos esse resultado simulando numericamente a Equação Mestra (2.34) através da biblioteca QuTip-Python (assim como todas as outras simulações que serão apresentadas) [31], utilizando [32] como base para a construção do algoritmo. Como será explorado no próximo capítulo, a probabilidade de ocupação ao longo do tempo na cavidade é calculada pelo número médio de fótons através da média $\langle a^\dagger a \rangle$. Já a média $\langle \sigma_+ \sigma_- \rangle$ representa o número médio da ocupação no estado excitado do átomo. A diminuição das amplitudes de oscilação ocorrem justamente pela consideração de um sistema quântico aberto, ou seja, as taxas dos operadores de colapso corroboram para uma dissipação da energia para fora da cavidade.

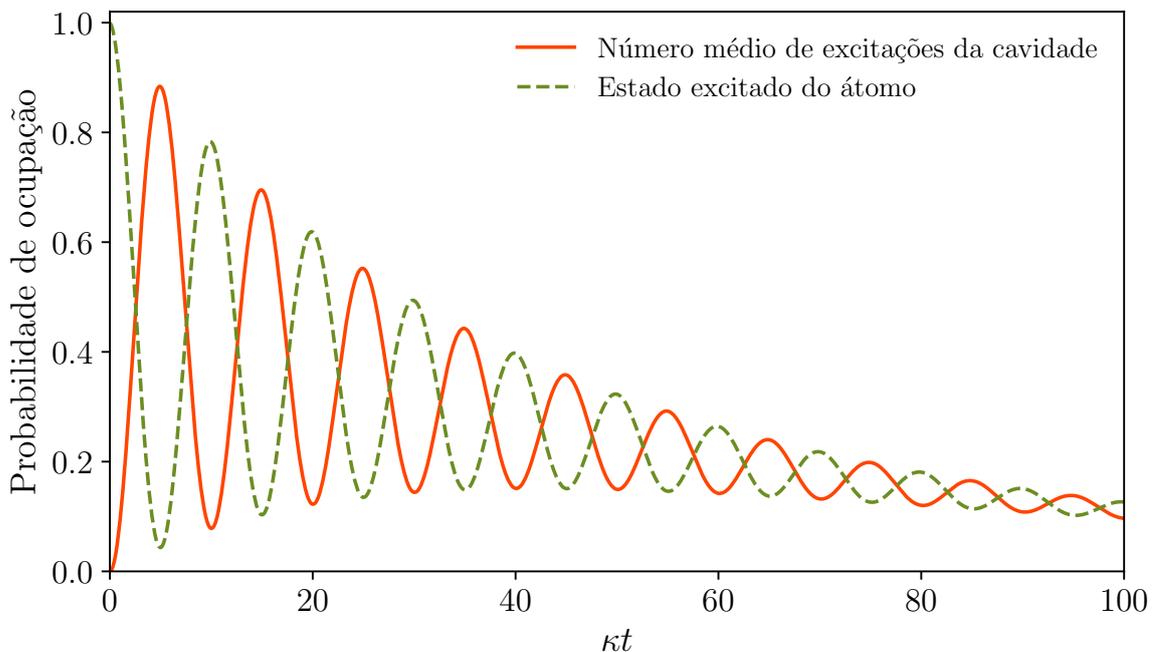


Figura 3 – Dinâmica do sistema átomo-campo, com interação descrita pelo modelo de Jaynes-Cummings, considerando as taxas de dissipação: decaimento da cavidade, emissão espontânea do átomo e defasagem atômica. A probabilidade de ocupação ao longo do tempo normalizado κt na cavidade é obtida pela média $\langle a^\dagger a \rangle$. Já $\langle \sigma_+ \sigma_- \rangle$ fornece a média da ocupação no estado excitado do átomo. Fonte: elaborada pelo autor.

4 Estatística de fótons: função de correlação

Uma das informações cruciais do nosso sistema é a possibilidade de obter a estatística do campo na região de interesse. Isso se dá na medida que as propriedades estatísticas associadas a chamada função de correlação podem determinar quando o campo apresenta estados não clássicos. Podemos então obter essas propriedades através da intensidade $I(t)$ do feixe de luz incidente, mais especificamente pela absorção dos fótons por um detector que realizará a contagem [24]. Assim, o número médio de fótons do campo é calculado pela média de sua intensidade, permitindo escrevê-la em função da média dos operadores de campo [2]:

$$n(t) = \langle I(t) \rangle = \langle a^\dagger(t)a(t) \rangle, \quad (2.35)$$

sendo a variância dessa média, $\langle \Delta n^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$, a representação das flutuações do número de fótons, ou seja, o ruído do campo.

A teoria de coerência quântica nos afirma que os estados quânticos e clássicos da luz não são distinguíveis através da função de correlação de primeira ordem. Já pela segunda ordem é permitido calcular a coerência das flutuações na intensidade do campo elétrico. Assim, para um modo estacionário do campo, detectamos no tempo t um fóton e após um *delay* $t+\tau$, outro fóton foi detectado de forma a correlacionarmos essas contagens com a intensidade do campo incidente pela função de correlação normalizada de segunda ordem [33]

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle I(t)I(t+\tau) \rangle}{\langle I(t) \rangle^2} = \frac{\langle a^\dagger(t)a^\dagger(t+\tau)a(t)a(t+\tau) \rangle}{\langle a^\dagger(t)a(t) \rangle^2}. \quad (2.36)$$

Caso o *delay* $\tau \rightarrow 0$, teremos

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle a^\dagger(t)a^\dagger(t)a(t)a(t) \rangle}{\langle a^\dagger(t)a(t) \rangle^2}. \quad (2.37)$$

Assim, por meio dessas quantidades é definido o intervalo da função para um campo clássico como $1 \leq g^{(2)}(0) \leq \infty$ e para um campo quântico como $0 \leq g^{(2)}(0) \leq \infty$, pois a desigualdade indica quase-probabilidades negativas. Para a igualdade $g^{(2)}(0) = 1$, afirmamos que se trata de um campo coerente, já para $g^{(2)}(0) = 0$ temos o campo como sendo apenas um único fóton (*single photon*), ou seja, um estado puramente quântico [33]. Desse modo, a estatística dos fótons fica condicionada aos seguintes intervalos:

$$g^{(2)}(0) > 1 \Leftrightarrow \langle \Delta n^2 \rangle > \langle n \rangle \rightarrow \text{Estatística super-Poissoniana}; \quad (2.38)$$

$$g^{(2)}(0) = 1 \Leftrightarrow \langle \Delta n^2 \rangle = \langle n \rangle \rightarrow \text{Estatística Poissoniana}; \quad (2.39)$$

$$g^{(2)}(0) < 1 \Leftrightarrow \langle \Delta n^2 \rangle < \langle n \rangle \rightarrow \text{Estatística sub-Poissoniana}. \quad (2.40)$$

Conforme ilustrado na Figura 4, os fótons que serão medidos em um detector podem apresentar diferentes padrões previstos pela teoria quântica de coerência. O fenômeno

de agrupamento (*bunching*) em (a) é identificado pelo intervalo $g^{(2)}(\tau) < g^{(2)}(0)$, onde haverá maior probabilidade de os fótons chegarem em intervalos de tempo curtos. Temos a possibilidade para um campo coerente (b) de não haver correlação entre os fótons, devido a aleatoriedade na detecção. Por fim, em (c) há o antiagrupamento (*antibunching*), ou seja, o intervalo $g^{(2)}(\tau) > g^{(2)}(0)$ indica a maior probabilidade da contagem de cada fóton ocorrer em intervalos de tempo maiores. Assim, um campo tem um carácter quântico respeitando as condições do antiagrupamento e da estatística sub-Poissoniana. No entanto, para o intervalo $g^{(2)}(\tau) \leq g^{(2)}(0)$ não é permitido afirmar a natureza da radiação, já que é possível se tratar de um agrupamento e detecção randômica [24].

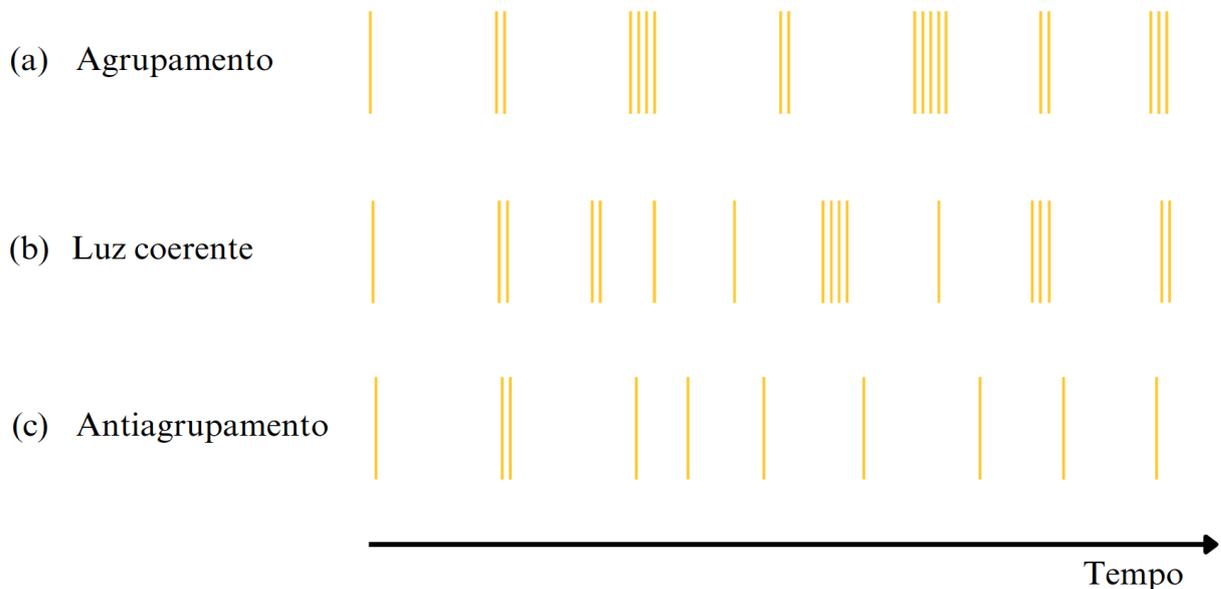


Figura 4 – Representação da probabilidade de contagem dos fótons pelo tempo em um detector quando o campo apresenta (a) agrupamento (*bunching*), (b) aleatoriedade (campo coerente) ou (c) antiagrupamento (*antibunching*). Fonte: ilustração adaptada de [2].

Em vista disso, o número médio de fótons pode ser calculado conhecendo os operadores que definem o campo intra-cavidade, a e a^\dagger . Com estes mesmos operadores podemos calcular a coerência das flutuações do campo através da função de correlação de segunda ordem. Em especial para este trabalho, $g^{(2)}(0) = 1$ garante o campo coerente (estatística Poissoniana) e $g^{(2)}(0) = 0$ afirma o estado de fóton único para o campo (estatística sub-Poissoniana).

5 Formalismo de Input-Output para cavidades ópticas

Este formalismo tem sua relevância ao possibilitar a descrição do campo externo de saída (*output*) do sistema após interações ocorrendo dentro da cavidade. Como em geral o campo externo de entrada (*input*) é conhecido, bem como o operadores internos

do sistema, será possível prever o resultado do campo de saída em conformidade com os dados experimentais. Pode-se compreender a utilização desse recurso analisando o sistema da Figura 5. Conhecendo o campo de bombeio que incidirá em uma cavidade óptica com um átomo aprisionado é possível determinar o campo que será detectado fora da cavidade após a interação.

Nas Figuras 5 (a) e (b) temos cavidades de um único lado, ou seja, não permitem a transmissão do campo pela esquerda ou pela direita, respectivamente. Em (c) é representada a cavidade de dois lados com campo de saída sendo transmitido pelos dois lados da cavidade [3, 34]. Assim, pode-se prever o resultado da saída do sistema, bem como considerá-lo para se compreender a dinâmica de interação dentro da cavidade.

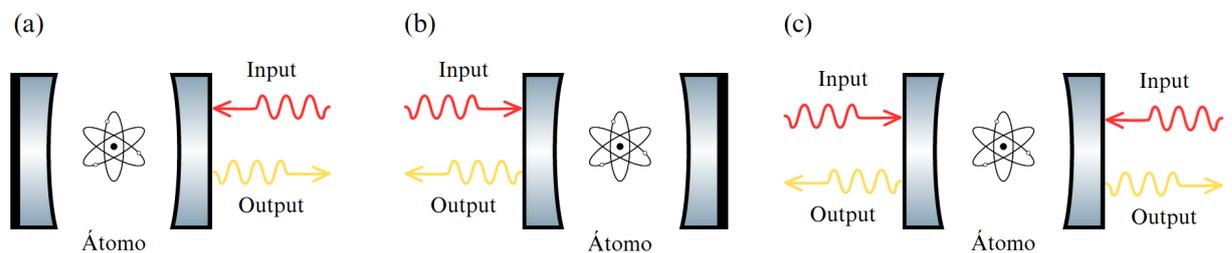


Figura 5 – Incidência de um campo de bombeio de *input* em uma cavidade óptica de um lado que impede a transmissão do campo de *output* (a) pela esquerda ou (b) pela direita após a interação com o átomo aprisionado. Em (c) temos uma cavidade que permite a transmissão pelos dois lados. Fonte: elaborada pelo autor.

5.1 Modos da cavidade

Portanto, para a análise de um sistema de interesse deve-se considerar a implementação de algum reservatório, em geral, descrito por um banho de osciladores a definir a forma de interação do campo de bombeio com o ensemble atômico. O sistema de interesse dessa monografia utiliza um reservatório bosônico (de campo eletromagnético) para que seja possível a definição dos campos de entrada e saída sem qualquer excitação, como descrito na seção 3.1. A partir disso, a tarefa consiste em investigar como a dinâmica no interior da cavidade pode afetar a estatística do campo de saída [35]. Analisando então os modos da cavidade, ao considerarmos um único modo interagindo com o campo externo, é permitido a aplicação da *RWA* [36] para excluir os termos de rotação das equações de movimento, uma vez que a frequência dos modos externos é bem maior que a frequência de interação do sistema. Assim, o operador hamiltoniano total é representado na forma:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{sys}} + \mathcal{H}_{\text{bath}} + \mathcal{H}_{\text{int}}, \quad (2.41)$$

cujas energias livres representam o modo do campo na cavidade (\mathcal{H}_{sys}), os modos do campo externo ($\mathcal{H}_{\text{bath}}$) e a interação (\mathcal{H}_{int}), a qual podemos relacionar a Equação (2.16) fazendo a mudança de notação $g \rightarrow \kappa(\omega)$ para a constante de acoplamento e considerando

a integração sobre todos os modos acoplados. Os operadores de aniquilação a e σ_{ge} atuam dentro da cavidade e no campo externo, respectivamente, com mudança de notação para $\sigma_{ge} \rightarrow b(\omega)$. Escrevemos essa energia como

$$H_{\text{int}} = i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \kappa(\omega) [b(\omega)a^\dagger - ab^\dagger(\omega)] d\omega. \quad (2.42)$$

Da mesma forma que temos a comutação da Equação (2.6), o operador do campo externo admite a relação de comutação

$$[b(\omega), b^\dagger(\omega')] = \delta(\omega - \omega'). \quad (2.43)$$

Definimos a hamiltoniana dos modos do campo externo correspondente ao reservatório como [3]

$$\mathcal{H}_{\text{bath}} = \hbar \int_{-\infty}^{\infty} \omega b^\dagger(\omega)b(\omega)d\omega. \quad (2.44)$$

5.2 Equações quânticas de Langevin e operador de Input

Definimos abaixo para um operador arbitrário c do sistema a forma de representar sua equação de movimento na representação de Heisenberg:

$$\frac{dc}{dt} = \dot{c} = -\frac{i}{\hbar}[c, H]. \quad (2.45)$$

Aplicando então para o operador $b(\omega)$:

$$\begin{aligned} \dot{b}(\omega) &= -\frac{i}{\hbar}[b(\omega), \mathcal{H}_{\text{bath}}] - \frac{i}{\hbar}[b(\omega), \mathcal{H}_{\text{int}}] \\ &= -\frac{i}{\hbar}\hbar\omega b(\omega) - \frac{i}{\hbar}i\hbar\kappa(\omega)a(t) \\ &= -i\omega b(\omega) + \kappa(\omega)a(t). \end{aligned} \quad (2.46)$$

A solução geral para essa equação de movimento é obtida escrevendo a derivada do operador $b(\omega)$ em relação ao referencial girante na forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[b(\omega) \exp(i\omega t)] &= \frac{d}{dt}[b(\omega)] \exp(i\omega t) + b(\omega) \frac{d}{dt}[\exp(i\omega t)] \\ &= \dot{b}(\omega) \exp(i\omega t) + i\omega b(\omega) \exp(i\omega t). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Substituindo então a Equação (2.46), simplificamos a expressão acima para

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[b(\omega) \exp(i\omega t)] &= [-i\omega b(\omega) + \kappa(\omega)a(t)] \exp(i\omega t) + i\omega b(\omega) \exp(i\omega t) \\ &= \kappa(\omega)a(t) \exp(i\omega t). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Integrando dos dois lados em relação ao tempo t' , considerando os tempos arbitrários t e t' como os limites de integração, sendo que $b'(\omega) = b(\omega)|_{t=t'}$:

$$\begin{aligned} \int_{t'}^t \frac{d}{dt'} [b(\omega) \exp(i\omega t')] dt' &= \int_{t'}^t \kappa(\omega) a(t') \exp(i\omega t') dt' \\ b(\omega) \exp(i\omega t) - b'(\omega) \exp(i\omega t') &= \int_{t'}^t \kappa(\omega) a(t') \exp(i\omega t') dt' \\ b(\omega) - b'(\omega) \exp[-i\omega(t-t')] &= \int_{t'}^t \kappa(\omega) a(t') \exp[-i\omega(t-t')] dt'. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Sendo assim, a solução da equação de movimento pode ser escrita por

$$b(\omega) = b'(\omega) \exp[-i\omega(t-t')] + \kappa(\omega) \int_{t'}^t a(t') \exp[-i\omega(t-t')] dt', \quad (2.50)$$

sendo dependente da condição inicial aplicada nos tempos arbitrários. Para o campo de entrada iremos tomar a condição para o tempo $t_0 < t$, onde $b(\omega) = b_0(\omega)$ em $t = t_0$:

$$b(\omega) = \exp[-i\omega(t-t_0)] b_0(\omega) + \kappa(\omega) \int_{t_0}^t \exp[-i\omega(t-t')] a(t') dt'. \quad (2.51)$$

Agora para o campo de saída temos a condição $t_1 > t$ e $b(\omega) = b_1(\omega)$ em $t = t_1$:

$$b(\omega) = \exp[-i\omega(t-t_1)] b_1(\omega) - \kappa(\omega) \int_t^{t_1} \exp[-i\omega(t-t')] a(t') dt'. \quad (2.52)$$

Novamente utilizando a representação de Heisenberg, vamos escrever a equação de movimento do operador do sistema intracavidade (dentro da cavidade) [35]:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{i}{\hbar} [a, \mathcal{H}_{\text{sys}}] - \frac{i}{\hbar} [a, \mathcal{H}_{\text{int}}] \\ &= -\frac{i}{\hbar} [a, \mathcal{H}_{\text{sys}}] - \int_{-\infty}^{\infty} \kappa(\omega) b(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Substituindo então a solução da Equação (2.51) correspondente ao campo de entrada, teremos

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{i}{\hbar} [a, \mathcal{H}_{\text{sys}}] - \int_{-\infty}^{\infty} \kappa(\omega) \exp[-i\omega(t-t_0)] b_0(\omega) d\omega \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} \kappa^2(\omega) d\omega \int_{t_0}^t \exp[-i\omega(t-t')] a(t') dt', \end{aligned} \quad (2.54)$$

onde admitiremos a aproximação de Markov para definir a constante de acoplamento como $\kappa^2(\omega) = \frac{\gamma}{2\pi}$, sendo γ a taxa de dissipação da cavidade. Por conveniência, vamos

definir o operador do campo de entrada como negativo por ser propagar para a esquerda, conforme ilustra a Figura 6 [3]:

$$a_{\text{in}} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i\omega(t - t_0)] b_0(\omega) d\omega, \quad (2.55)$$

o qual atua como um ruído quântico que representará as flutuações do operador intracavidade a presente quando há amortecimento.

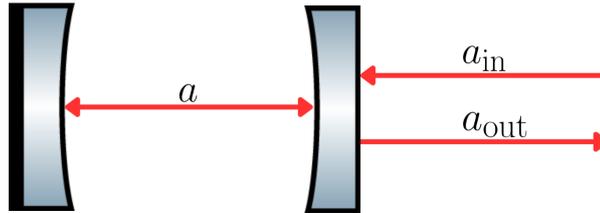


Figura 6 – Representação esquemática dos operadores do campo intracavidade a , campo de entrada a_{in} e campo de saída a_{out} para uma cavidade óptica de um único lado. Fonte: ilustração adaptada de [3].

Um resultado importante que utilizá as Equações (5) e (6) do Apêndice 2 e a Equação (2.43) é o cálculo do comutador do operador do campo de entrada:

$$\begin{aligned} [a_{\text{in}}(t), a_{\text{in}}^\dagger(t')] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \exp[-i\omega(t - t')] \exp[i\omega'(t'' - t')] [b_0(\omega), b_0^\dagger(\omega')] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i\omega(t - t')] d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\omega'(t'' - t')] \delta(\omega - \omega') d\omega' \\ &= \delta(t - t') \end{aligned} \quad (2.56)$$

Assim, com o resultado do comutador acima aplicado a Equação (2.54) de movimento em conjunto com a utilização das relações matemáticas (5) e (6) contidas no Apêndice 2, iremos obter a chamada equação quântica de Langevin:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{i}{\hbar} [a(t), \mathcal{H}_{\text{sys}}] - \left(-\sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \sqrt{2\pi} a_{\text{in}}(t) \right) - 2\pi \frac{\gamma}{2\pi} \int_{t_0}^t a(t') \delta(t - t') dt' \\ &= -\frac{i}{\hbar} [a(t), \mathcal{H}_{\text{sys}}] + \sqrt{\gamma} a_{\text{in}}(t) - \frac{\gamma}{2} a(t). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Por fim, a Equação (2.57) apresenta um amortecimento no terceiro termo. Já no segundo termo há a presença do campo de entrada por meio do operador que indica a influência do modo externo $b(\omega)$ no tempo passado t_0 [35].

5.3 Operador de Output e relação Input-Output

Analisamos inicialmente a solução referente ao intervalo de tempo do campo de entrada. Agora, vamos substituir a solução (2.52) do campo de saída na equação de

movimento original (2.53) e por um procedimento similar, obter a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \dot{a} = & -\frac{i}{\hbar}[a, \mathcal{H}_{\text{sys}}] - \int_{-\infty}^{\infty} \kappa(\omega) \exp[-i\omega(t - t_1)] b_1(\omega) d\omega \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \kappa(\omega)^2 d\omega \int_t^{t_1} \exp[-i\omega(t - t')] a(t') dt'. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Podemos então definir o operador do campo de saída com propagação para a direita, segundo a convenção ilustrada na Figura 6:

$$a_{\text{out}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i\omega(t - t_1)] b_1(\omega) d\omega, \quad (2.59)$$

o qual terá a mesma relação de comutação do campo de entrada na forma

$$[a_{\text{out}}(t), a_{\text{out}}^\dagger(t')] = \delta(t - t'). \quad (2.60)$$

Repetindo o procedimento para obter a equação quântica de Langevin, vamos substituir na Equação (2.58) de movimento a relação de comutação acima e o operador do campo de saída, simplificando por meio das relações (5) e (6):

$$\begin{aligned} \dot{a} = & -\frac{i}{\hbar}[a(t), \mathcal{H}_{\text{sys}}] - \left(+\sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \sqrt{2\pi} a_{\text{out}}(t) \right) + 2\pi \frac{\gamma}{2\pi} \int_t^{t_1} a(t') \delta(t - t') dt' \\ \dot{a} = & -\frac{i}{\hbar}[a(t), \mathcal{H}_{\text{sys}}] - \sqrt{\gamma} a_{\text{out}}(t) + \frac{\gamma}{2} a(t). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Vemos que o operador de campo de saída representa o acoplamento do sistema com os modos externos posteriores. Podemos agora subtrair a Equação (2.61) de (2.57) para obter de forma simples a condição de contorno que define a teoria de Input-Output devido ao fato de estabelecer um vínculo entre o operador interno da cavidade e os operadores associados aos campos externos de entrada e saída [35]:

$$a_{\text{in}}(t) + a_{\text{out}}(t) = \sqrt{\gamma} a(t). \quad (2.62)$$

5.4 Comutação dos operadores

Novamente consirando um operador arbitrário $c(t)$ dependente do tempo, o formalismo de Input-Output garante as seguintes relações de comutação a depender do intervalo de tempo analisado

- Para $t' > t$: $[c(t), \sqrt{\gamma} a_{\text{in}}(t')] = 0$;
- Para $t' < t$: $[c(t), \sqrt{\gamma} a_{\text{in}}(t')] = \gamma [c(t), a(t)]$ e $[c(t), \sqrt{\gamma} a_{\text{out}}(t')] = 0$.

Combinando as relações acima e para efeito da análise do sistema de interesse, teremos $t' = t$ e as relações de comutação gerais

$$[c(t), \sqrt{\gamma}a_{\text{in}}(t')] = -\gamma [c(t), a(t')] ; \quad (2.63)$$

$$[c(t), \sqrt{\gamma}a_{\text{out}}(t')] = \gamma [c(t), a(t')] . \quad (2.64)$$

Estes comutadores expressam a causalidade do sistema. Podemos então resumir a estratégia para utilização do formalismo de Input-Output através da especificação do operador $a_{\text{in}}(t)$ e futura aplicação na equação quântica de Langevin, a fim de determinar a influência do campo de entrada no operador arbitrário do sistema $c(t)$. Desse modo, utilizamos a relação de Input-Output (2.62) para determinar o operador do campo de saída [35].

Com isso, foi demonstrado como o formalismo de *Input-Output* prevê a saída do sistema através da descrição dos operadores de campo externo $a_{\text{in}}(t)$ e $a_{\text{out}}(t)$. Tais operadores foram obtidos pela aplicação das condições iniciais do sistema nas equações de Langevin, culminando na condição de contorno que vincula o operador interno $a(t)$ aos operadores externos. Há também as relações de comutatividade, as quais serão úteis na próxima seção ao permitir obter o comutador de qualquer operador de campo com os operadores externos.

3 Gerador de Fótons Individuais

Vamos a partir de agora analisar um sistema de cavidade óptica contendo apenas um átomo aprisionado e que tem por objetivo gerar o estado de fóton único como campo de saída. Esse filtro é uma aplicação para o modelo J-C de 2 fótons presente no trabalho desenvolvido em [4], onde é discutido a construção de filtros considerando o modelo de interação radiação-matéria não-linear J-C de multi-fótons.

1 Sistema gerador de fótons individuais

Geradores de fótons únicos são diferentes de lasers (fonte de luz coerente ou fontes de luz térmica). Sua característica é gerar estados de um único fóton, ou seja, uma única excitação. Devido a dissipações na natureza, buscamos processos que resultem na maior eficiência possível para obtenção desse estado. Estes geradores permitem a manipulação da luz não-clássica e são cruciais para o processamento de informação quântica, internet quântica, metrologia quântica e comunicação segura [37].

Para investigarmos a geração de fótons individuais usaremos uma interação átomo-campo não-linear como considerada em [4]. Tal sistema consiste de um átomo de dois níveis que interage com um campo em uma cavidade, mas com trocas de N fótons. Além disso, também consideramos que o sistema está em contato com um reservatório, de modo que também levaremos em conta os decaimentos atômico e do modo da cavidade, conforme explorado na seção 3.1 do capítulo 2. De forma semelhante ao resultado da Equação (2.17), o modelo de J-C de N -fótons admite o hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\omega_0\sigma_z + g(\sigma_+a^N + a^{\dagger N}\sigma_-) + \omega a^\dagger a, \quad (3.1)$$

sendo $\sigma_z = \sigma_+\sigma_- - \sigma_-\sigma_+$ e considerada a condição de ressonância ($\omega_0 = N\omega$). Conforme já ilustrado no espectro de energia da Figura 2, os autoestados de mais baixa energia são desacoplados e escritos em relação ao estado fundamental do átomo até a excitação $N - 1$ na forma

$$|\Psi_{g,n}\rangle = |g, n\rangle, \quad \text{para } 0 \leq n < N, \quad (3.2)$$

com autoenergias

$$E_{g,n} = \left[n - \frac{N}{2} \right] \omega. \quad (3.3)$$

Já o estados vestidos (acoplados) são escritos por

$$|\pm, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g, n\rangle \pm |e, n - N\rangle), \quad \text{para } n \geq N, \quad (3.4)$$

com autoenergias

$$E_{\pm,n} = \left[n - \frac{N}{2} \right] \omega \pm g \sqrt{\frac{n!}{(n-N)!}}. \quad (3.5)$$

A transição entre os autoestados $|g, n\rangle \rightarrow |\pm, n\rangle$ é induzida pelo campo não-linear de N -fótons no modo da cavidade. Já para transições lineares de fótons únicos teremos $|\pm, n\rangle \rightarrow |g, n\rangle$. A Figura 7 apresenta o espectro de energia dos autoestados do sistema considerando interações de 2 fótons ($N = 2$).

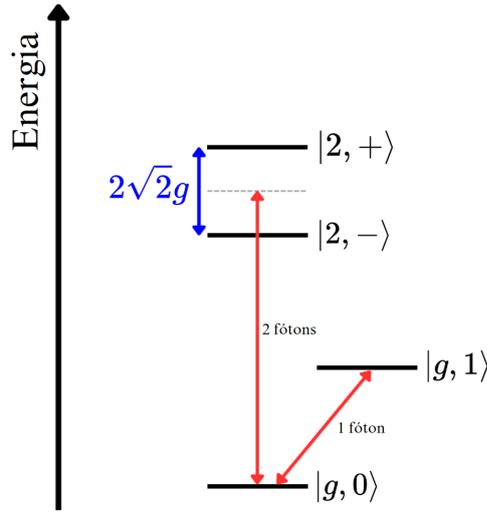


Figura 7 – Espectro de energia simplificado do modelo de J-C para interações de 2 fótons ($N = 2$). Os autoestados desacoplados $|g, 0\rangle$ e $|g, 1\rangle$ correspondem ao estado de vácuo e fóton único, respectivamente. Para os estados excitados do átomo somente são apresentados os autoestados acoplados $|2, \pm\rangle = 1/\sqrt{2}(|g, 2\rangle \pm |e, 0\rangle)$. Fonte: ilustração adaptada de [4].

Considerando então um campo eletromagnético não-linear de força $\varepsilon(t)$, frequência ω_p , fase χ e não-linearidade M , escrevemos seu hamiltoniano a semelhança da Equação (2.26):

$$\mathcal{H}_P = \varepsilon(t) [a^M e^{i(M\omega_p t - \chi)} + a^{\dagger M} e^{-i(M\omega_p t - \chi)}], \quad (3.6)$$

o qual no referencial de onda girante terá a seguinte representação no hamiltoniano total

$$\mathcal{H} = \Delta_p \left(a^\dagger a + N \frac{\sigma_z}{2} \right) + g (a^N \sigma_+ + a^{N\dagger} \sigma_-) + \varepsilon(t) (a^M + a^{M\dagger}) e^{-i\chi}, \quad (3.7)$$

onde $\Delta_p = \omega - \omega_p$. Vemos portanto que o processo não-linear das interações é decorrente nos operadores a^N (a^M) e $a^{\dagger N}$ ($a^{\dagger M}$), pois a interação de dois fótons será introduzida ao considerar $N = 2$ e $M = 1$. Construímos então a Equação Mestre abaixo, conforme definido em (2.33), para a dinâmica do sistema na condição de temperatura nula, $T = 0K$, e com $g \ll \omega, \omega_0$, cuja forma se escreve como

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[\mathcal{H}, \rho] + \gamma(2\sigma_- \rho \sigma_+ - \sigma_+ \sigma_- \rho - \rho \sigma_+ \sigma_-) \quad (3.8)$$

$$+ \kappa(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a \rho - \rho a^\dagger a) + \gamma_\phi(\sigma_z \rho \sigma_z - \rho), \quad (3.9)$$

sendo γ e γ_ϕ a representação das taxas de decaimento de polarização atômica e de defasagem, respectivamente. A constante κ é a taxa de decaimento da amplitude do campo da cavidade [4, 38].

Vemos assim que o modelo J-C de N -fótons apresenta expressões semelhantes ao J-C usual, permitindo escrever seus autoestados desacoplados e os estados vestidos em relação ao número de N fótons adotados no sistema.

2 Aplicação do formalismo *Input-Output* no sistema

Podemos partir da relação fundamental do formalismo *Input-Output* considerando como a taxa de dissipação da amplitude do campo intra-cavidade $\gamma = 2\kappa$. Assim, escrevendo-a novamente junto ao conjugado hermitiano da expressão:

$$a_{\text{in}}(t) + a_{\text{out}}(t) = \sqrt{2\kappa}a(t), \quad (3.10)$$

$$a_{\text{in}}^\dagger(t) + a_{\text{out}}^\dagger(t) = \sqrt{2\kappa}a^\dagger(t). \quad (3.11)$$

Segundo a Equação (2.35) podemos escrever o número médio de fótons do campo de saída substituindo pelos operadores das Equações (3.10) e (3.11):

$$\begin{aligned} n_{\text{out}}(t) &= \langle a_{\text{out}}^\dagger(t)a_{\text{out}}(t) \rangle \\ &= \langle [\sqrt{2\kappa}a^\dagger(t) - a_{\text{in}}^\dagger(t)] [\sqrt{2\kappa}a(t) - a_{\text{in}}(t)] \rangle \\ &= 2\kappa \langle a^\dagger a \rangle - \sqrt{2\kappa} \langle a^\dagger a_{\text{in}} \rangle - \sqrt{2\kappa} \langle a_{\text{in}}^\dagger a \rangle + \sqrt{2\kappa} \langle a_{\text{in}}^\dagger a_{\text{in}} \rangle. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Para o estado coerente definido no Apêndice 1, podemos gerá-lo através da atuação do operador de deslocamento no estado de vácuo. Assim, é permitido assumir que o estado campo de entrada é o vácuo, ocasionando que $a_{\text{in}}|0\rangle = \langle 0|a_{\text{in}}^\dagger = 0$ e resultando no número médio de fótons fora da cavidade é proporcional a essa quantidade dentro da cavidade:

$$\begin{aligned} n_{\text{out}}(t) &= 2\kappa \langle 0|a^\dagger a|0\rangle - \sqrt{2\kappa} \langle 0|a^\dagger a_{\text{in}}|0\rangle - \sqrt{2\kappa} \langle 0|a_{\text{in}}^\dagger a|0\rangle + \sqrt{2\kappa} \langle 0|a_{\text{in}}^\dagger a_{\text{in}}|0\rangle \\ &= 2\kappa \langle 0|a^\dagger a|0\rangle \\ &= 2\kappa \langle a^\dagger a \rangle \\ &= 2\kappa n(t). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Vamos agora realizar uma análise estatística do campo de saída. Podemos obtê-la calculando a função de correlação normalizada de segunda ordem como definida na Equação (2.37). Escrevendo-a novamente substituindo os operadores das Equações (3.10)

e (3.11):

$$\begin{aligned}
\langle a_{\text{out}}^\dagger(t)a_{\text{out}}^\dagger(t)a_{\text{out}}(t)a_{\text{out}}(t) \rangle &= \left\langle \left[\sqrt{2\kappa}a^\dagger(t) - a_{\text{in}}^\dagger(t) \right]^2 \left[\sqrt{2\kappa}a(t) - a_{\text{in}}(t) \right]^2 \right\rangle \\
&= \left\langle \left[2\kappa a^\dagger a^\dagger - 2\sqrt{2\kappa}a^\dagger a_{\text{in}}^\dagger + a_{\text{in}}^\dagger a_{\text{in}}^\dagger \right] \left[2\kappa aa - 2\sqrt{2\kappa}aa_{\text{in}} + a_{\text{in}}a_{\text{in}} \right] \right\rangle \\
&= \left\langle 4\kappa^2 a^\dagger a^\dagger aa - 4\kappa\sqrt{2\kappa}a^\dagger a^\dagger aa_{\text{in}} + 2\kappa a^\dagger a^\dagger a_{\text{in}}a_{\text{in}} \right\rangle \\
&\quad + \left\langle 8\kappa a^\dagger a_{\text{in}}^\dagger aa_{\text{in}} - 4\sqrt{2\kappa^3}a^\dagger a_{\text{in}}^\dagger aa - 2\sqrt{2\kappa}a^\dagger a_{\text{in}}^\dagger a_{\text{in}}a_{\text{in}} \right\rangle \\
&\quad + \left\langle 2\kappa a_{\text{in}}^\dagger a_{\text{in}}^\dagger aa - 2\sqrt{2\kappa}a_{\text{in}}^\dagger a_{\text{in}}^\dagger aa_{\text{in}} + a_{\text{in}}^\dagger a_{\text{in}}^\dagger a_{\text{in}}a_{\text{in}} \right\rangle, \quad (3.14)
\end{aligned}$$

sendo consideradas as comutações $[a, a_{\text{in}}] = [a^\dagger, a_{\text{in}}^\dagger] = 0$ como permitido pela Equação (2.63). Novamente assumindo que o estado do campo de entrada é o vácuo, simplificamos a expressão da seguinte forma:

$$\langle a_{\text{out}}^\dagger(t)a_{\text{out}}^\dagger(t)a_{\text{out}}(t)a_{\text{out}}(t) \rangle = 4\kappa^2 \langle a^\dagger a^\dagger aa \rangle. \quad (3.15)$$

Desse modo, seguindo a definição da Equação (2.37) escrevemos a função de correlação normalizada de segunda ordem utilizando os resultados das Equações (3.13) e (3.15) na forma

$$\begin{aligned}
g_{\text{out}}^{(2)}(0) &= \frac{\langle a_{\text{out}}^\dagger(t)a_{\text{out}}^\dagger(t)a_{\text{out}}(t)a_{\text{out}}(t) \rangle}{\langle a_{\text{out}}^\dagger(t)a_{\text{out}}(t) \rangle^2} \\
&= \frac{4\kappa^2 \langle a^\dagger a^\dagger aa \rangle}{(2\kappa \langle a^\dagger a \rangle)^2} \\
&= \frac{\langle a^\dagger a^\dagger aa \rangle}{\langle a^\dagger a \rangle}, \quad (3.16)
\end{aligned}$$

ou seja, o campo de saída partilha da mesma estatística do campo intracavidade quando o modo externo do campo de entrada está no vácuo. Sendo assim,

$$g_{\text{out}}^{(2)}(0) = g^{(2)}(0). \quad (3.17)$$

Portanto, a aplicação da condição de contorno do formalismo de *Input-Output* e a consideração de que o campo de entrada é o vácuo permitiu obter que os resultados do campo de saída são proporcionais ao campo intracavidade. Desse modo, não será necessário o cálculo da solução das equações de Langevin através desse formalismo, proporcionando uma maneira mais simples de obter os resultados das simulações que serão apresentadas em seguida.

3 Campo de entrada coerente

Assim como descrito na seção 2.3, iremos considerar como campo de entrada um bombeio contínuo ($\varepsilon(t) = \varepsilon_0$) e coerente. Analisando como essa propriedade do campo assegura alguns resultados que desejamos para o funcionamento do filtro.

3.1 Dinâmica do sistema

A partir dessas propriedades do sistema que está ilustrado na Figura 8 podemos inicialmente verificar que o campo de entrada é ou não coerente, considerando que não haja acoplamento entre o átomo e o campo (vácuo na cavidade, $g = 0$) para assim verificar o comportamento das projeções ($\langle \rho(t) | n \rangle \langle n | \rho(t) \rangle = \langle P_n \rangle$) das componentes do estado do número de fótons, conforme a Equação (4). A intensidade do campo entrada, $I \propto |\alpha|^2$, definida pela força do campo ε_0 será visível pelo número médio de fótons quando o sistema atinge o estado estacionário após evoluirmos no tempo a Equação Mestra (3.9). Assim, para $\varepsilon_0 = \sqrt{8.0\kappa}$ temos em média 8 fótons populando o campo coerente externo. Este resultado está garantido como a informação que sai da cavidade segundo a relação de proporcionalidade obtida em (3.13), como também a estatística do campo intracavidade fornecerá o resultado desejado segundo (3.17).

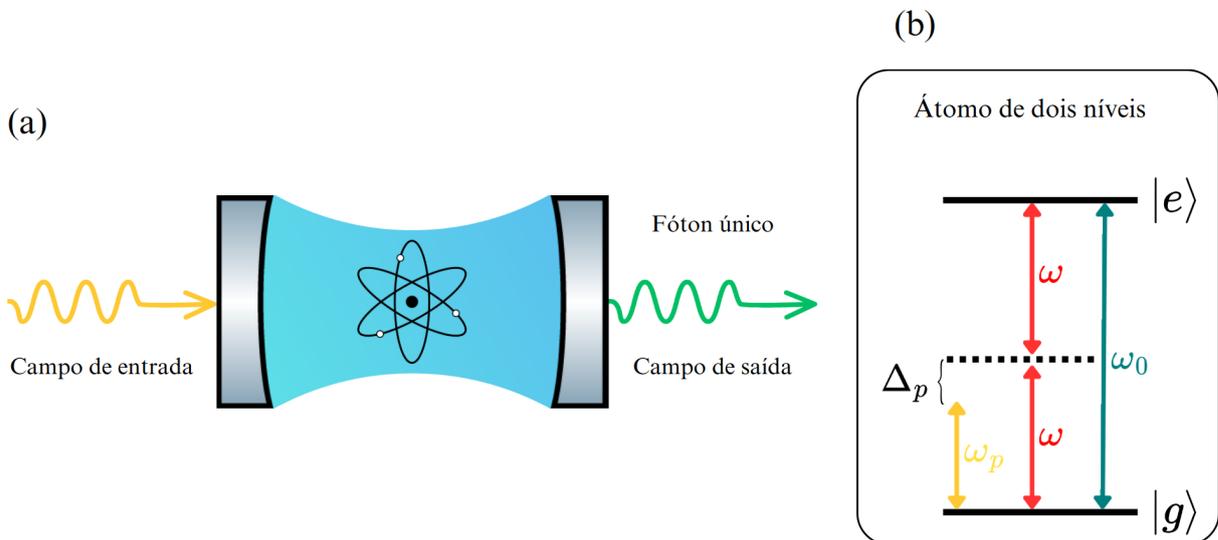


Figura 8 – (a) Sistema com uma única cavidade usada para gerar fótons individuais com campo de bombeio coerente e átomo de dois níveis aprisionado. (b) Diagrama representativo da transição atômica do estado fundamental $|g\rangle$ para o estado excitado $|e\rangle$ através da frequência de transição atômica ω_0 . A dessintonia do campo de prova corresponde a $\Delta_p = \omega - \omega_p$, onde $\omega = \omega_0/2$ representa a frequência do modo do campo da cavidade e ω_p a frequência do campo de bombeio. Fonte: elaborada pelo autor.

Considerando um campo de força $\varepsilon_0 = \sqrt{8.0\kappa}$, a Figura 9 (a) revela uma maior distribuição das probabilidades nos instantes iniciais do sistema quando o campo popula os primeiros níveis do estado de Fock. Posteriormente a dinâmica apresenta um comportamento assintótico, ou seja, o estado estacionário é atingido. Em (b) o sistema tende a projeção respectiva ao módulo da força do campo, ou seja, a projeção de 8 fótons $\langle P_8 \rangle$ corresponde ao número médio de fótons no estado estacionário. Há certa probabilidade para as outras projeções e principalmente para $\langle P_0 \rangle$, o estado de vácuo do sistema. Além disso, (c) mostra pela estatística que o campo se mantém coerente, já que $g^{(2)}(0) = 1$ em

todo intervalo de tempo.

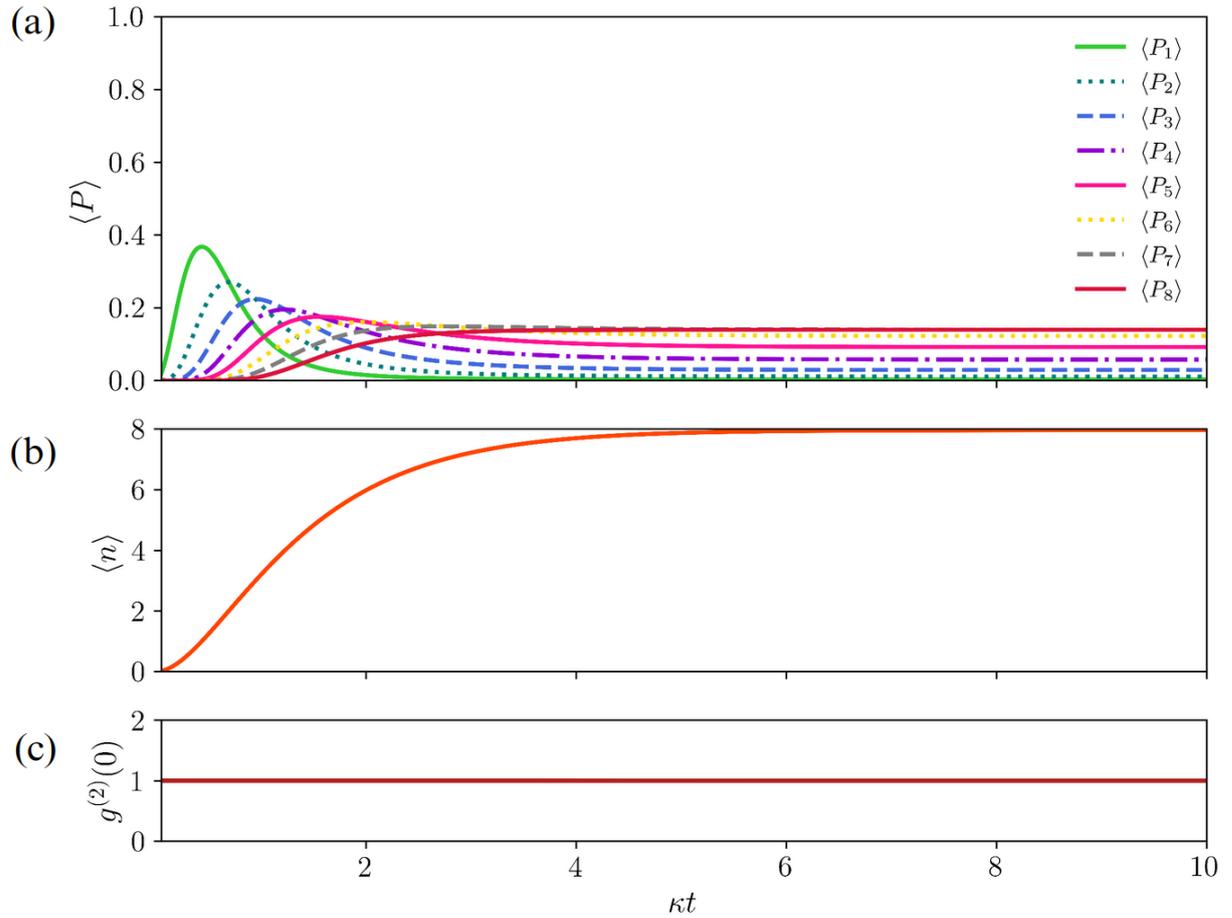


Figura 9 – Dinâmica do sistema J-C de 2 fótons desacoplado ($g = 0$) com força do campo de entrada $\varepsilon_0 = \sqrt{1.0}\kappa$. Em (a) temos as projeções dos estados de Fock, (b) apresenta o número médio de fótons e (c) a estatística do campo através da função de correlação de segunda ordem. Parâmetros do sistema: $\Delta_p = 0$, $\gamma = \gamma_\phi = 0.01\kappa$ e $N = 20$ (dimensão do espaço de Fock). Fonte: elaborada pelo autor.

Vamos então calcular novamente a dinâmica do sistema, considerando um acoplamento fixo. A Figura 10 representa a simulação da dinâmica do sistema para um campo $\varepsilon_0 = \sqrt{8.0}\kappa$ e a constante de acoplamento para $g = 10.0\kappa$. Vemos em (a) que a única projeção predominante ao longo do tempo é a de 1 fóton. Confirmamos esse resultado em (b) quando fica evidente pelo comportamento da curva que o número médio de fótons é a projeção de fóton único, $\langle P_1 \rangle = \langle n \rangle$. A oscilação inicial ocorre devido as chamadas rotações no espaço de Fock, ou seja, nesse intervalo de tempo temos trocas de estados entre o átomo e o campo até que o estado estacionário seja atingido. Este comportamento também é visível para a estatística do campo em (c), onde logo após as oscilações $g^{(2)}(0) \rightarrow 0$.

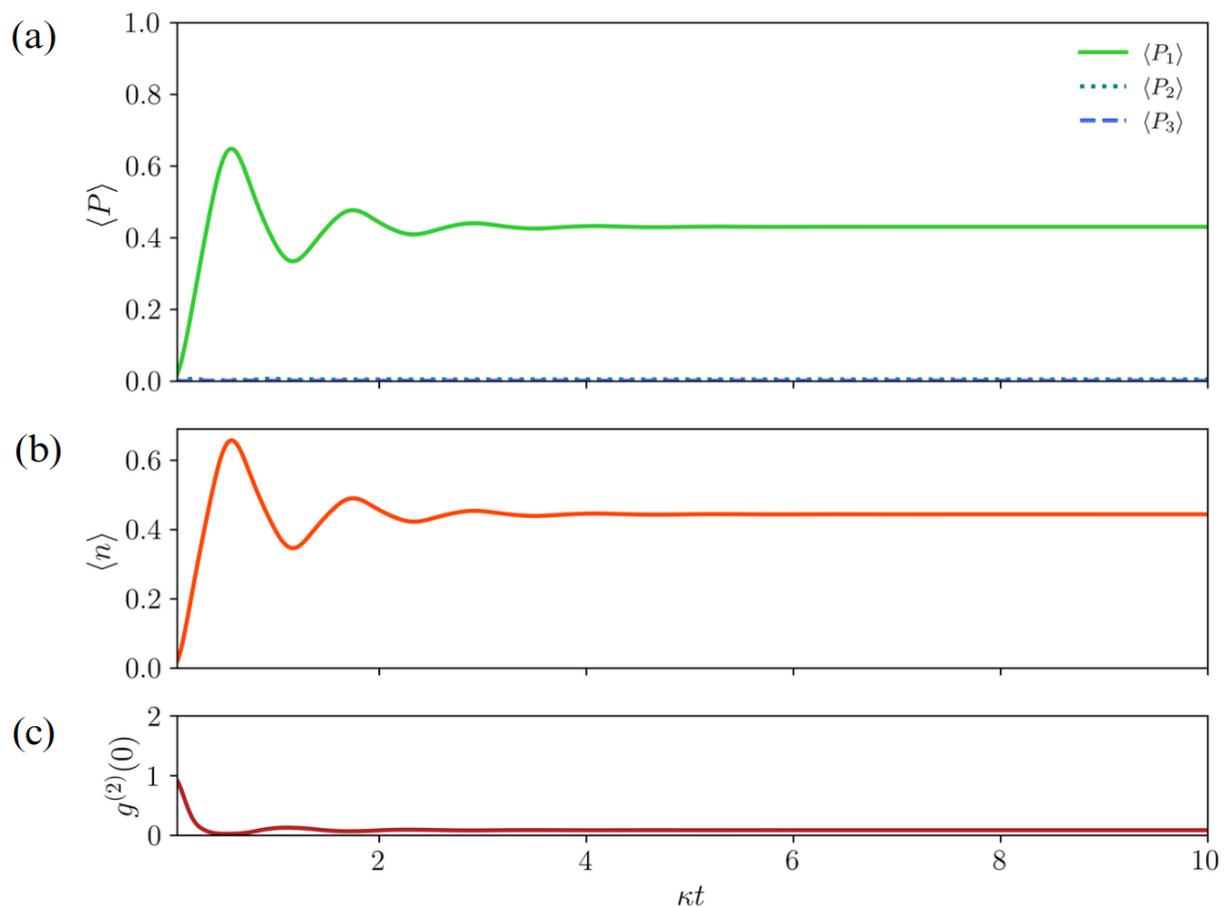


Figura 10 – Dinâmica do sistema J-C de 2 fótons com constante de acoplamento átomo-campo $g = 10.0\kappa$ e força do campo de entrada $\varepsilon_0 = \sqrt{8.0}\kappa$. Em (a) temos as projeções dos estados de Fock, (b) apresenta o número médio de fótons e (c) a estatística do campo através da função de correlação de segunda ordem em função do tempo normalizado κt . Parâmetros do sistema: $\Delta_p = 0$, $\gamma = \gamma_\phi = 0.01\kappa$ e $N = 20$ (dimensão do espaço de Fock). Fonte: elaborada pelo autor.

3.2 Estado estacionário e variação do acoplamento átomo-campo

Vamos agora analisar através da Figura 11 as projeções ($\langle \rho_{ss} | n \rangle \langle n | \rho_{ss} \rangle = \langle P_n \rangle$) dos estados de fótons ao atingirem o estado estacionário no tempo, sendo considerado a variação da constante de acoplamento átomo-campo g e uma amplitude do campo $\varepsilon_0 = \sqrt{8.0\kappa}$.

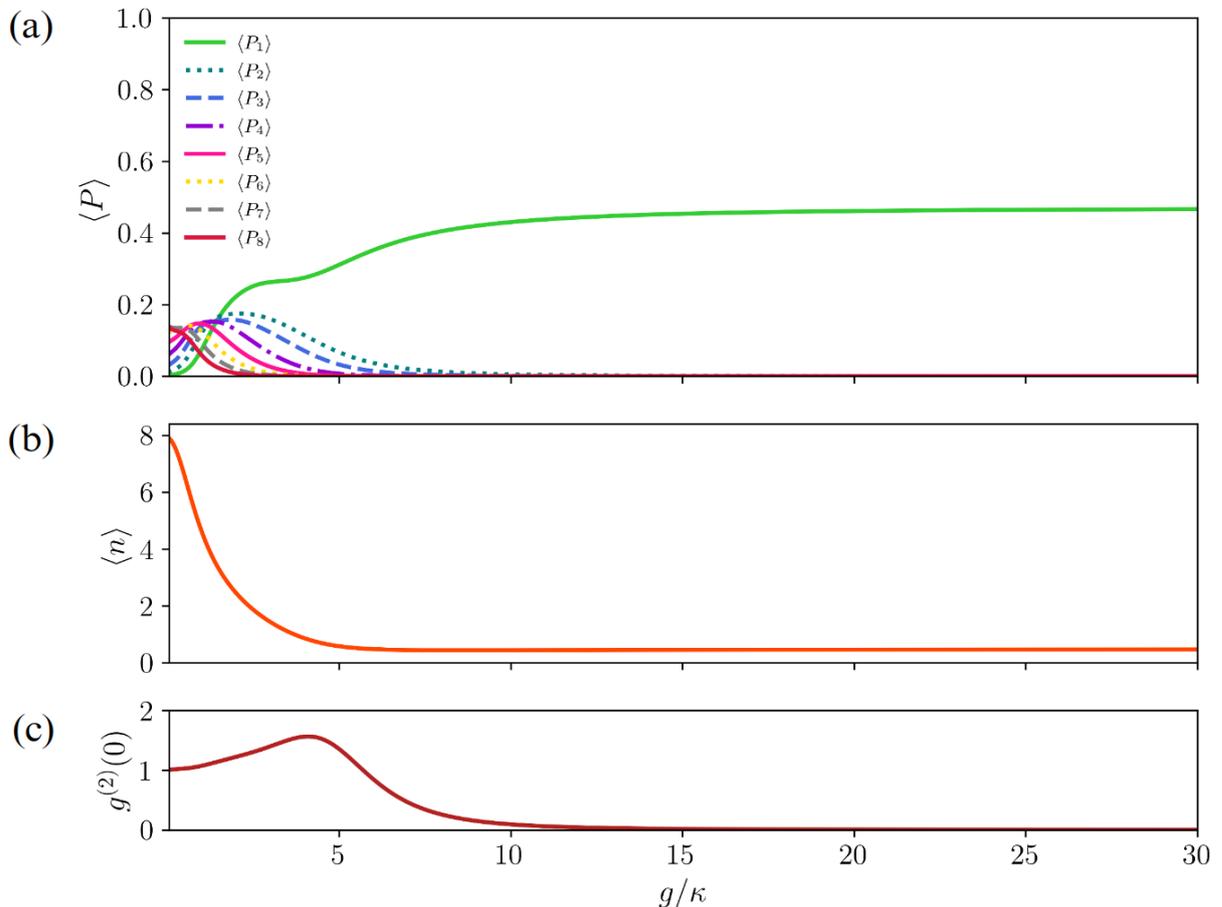


Figura 11 – (a) Projeções dos estados de Fock de 1 a 8 fótons, (b) número médio de fótons e (c) função de correlação de segunda ordem normalizada pela variação da força de acoplamento átomo-campo normalizada g/κ com força do campo de entrada $\varepsilon_0 = \sqrt{8.0\kappa}$. Parâmetros para simulação do estado estacionário do sistema: $\Delta_p = 0$, $\gamma = \gamma_\phi = 0.01\kappa$ e $N = 20$ (dimensão do espaço de Fock).

Verificamos que no regime de acoplamento inicial há certa probabilidade de obter os estados de 2 ou mais fótons, mas ao aumentar o acoplamento temos somente a componente de 1 fóton $\langle P_1 \rangle$ com mais de 40% de probabilidade. Há também cerca de 60% de chances de medir o estado de vácuo no sistema, ou seja, não ocorrer transmissão. A partir disso, (a) não mais tem como projeção de maior probabilidade o módulo de ε_0 , ao contrário, como desejado as projeções de dois ou mais fótons tendem a zero, restando apenas a projeção de 1 fóton. Este resultado é confirmado quando $\langle n \rangle \rightarrow 1$. Em (c) temos a presença de um campo coerente, $g^{(2)}(0) \approx 1$, em $g < 10.0\kappa$, mas ultrapassando esse intervalo é garantida a detecção do estado de fóton único pelo resultado $g^{(2)}(0) \approx 0$ da estatística do campo.

Agora podemos analisar a eficiência do gerador segundo o regime da força de acoplamento entre o átomo e o campo, projetando os autoestados de interesse no estado estacionário. Inicialmente, a Figura 12 apresenta as projeções dos primeiros autoestados do sistema pela variação do acoplamento átomo-campo, admitindo uma força do campo de bombeio $\varepsilon_0 = \sqrt{1.0}\kappa$. Os autoestados desacoplados foram definidos pela Equação (3.2), sendo os estados $|g, 0\rangle$ o vácuo e $|g, 1\rangle$ o fóton único, conforme apresentado no diagrama de níveis da Figura 7. Já os estados acoplados obtidos pela Equação (3.4) são

$$|+, 2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2, g\rangle + |0, e\rangle); \quad (3.18)$$

$$|-, 2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2, g\rangle - |0, e\rangle); \quad (3.19)$$

$$|+, 3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|3, g\rangle + |1, e\rangle); \quad (3.20)$$

$$|-, 3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|3, g\rangle - |1, e\rangle). \quad (3.21)$$

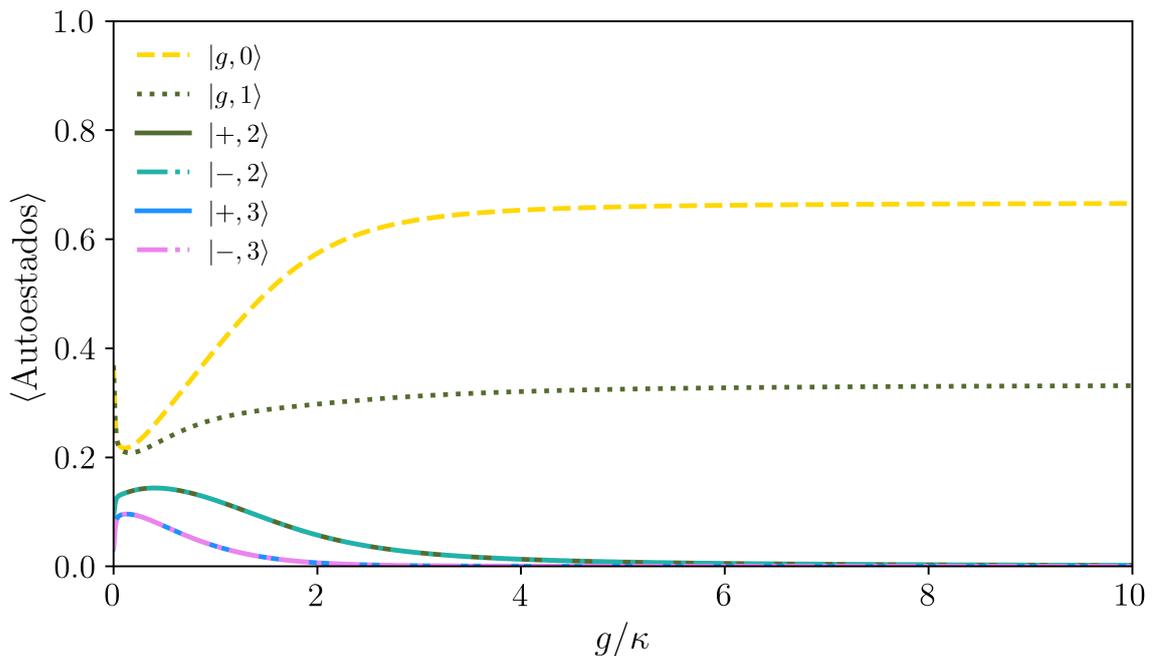


Figura 12 – Projeções dos autoestados do sistema pela variação da força de acoplamento átomo-campo normalizada g/κ . Os autoestados desacoplados são o vácuo $|g, 0\rangle$ e o fóton único $|g, 1\rangle$. Já os autoestados acoplados são $|\pm, n\rangle = 1/\sqrt{2}(|g, n\rangle \pm |e, n - N\rangle)$ para $n \geq N$. Parâmetros do sistema: $\Delta_p = 0$, $\gamma = \gamma_\phi = 0.01\kappa$, $\varepsilon_0 = \sqrt{1.0}\kappa$ e $N = 20$ (dimensão do espaço de Fock). Fonte: elaborada pelo autor.

Vemos que para o regime de acoplamento $g < 4.0\kappa$ o sistema ocupa os estados excitados do átomo. Esses estados $n = 2, 3$ são degenerados e a quebra da degenerescência ocorrerá ao aumentar o acoplamento, ocasionando que as curvas tendam a zero. Assim,

a partir de $g = 5.0\kappa$ as probabilidades de ocupação se concentram no estado de vácuo e de fóton único. Ao aumentar a força do campo ε_0 o sistema necessitará de um regime de maior acoplamento para que a população atinja o estado estacionário.

3.3 Emissão para o campo contínuo

Um último resultado para este campo de entrada é a verificação das emissões de fótons da cavidade através do cálculo da projeção de fóton único, número médio de fótons e número de ocupação no estado excitado. Para isso, iremos simular o sistema através do método numérico *Monte Carlo* apresentado no Apêndice 3, considerando uma única trajetória do sistema.

A dinâmica de evolução temporal calculada via *Monte Carlo* está apresentada na Figura 13. Considerando o campo $\varepsilon_0 = \sqrt{1.0}\kappa$ em (a) é perceptível que $\langle P_1 \rangle = \langle n \rangle$ para o acoplamento fixo $g = 5.0\kappa$, devido ao sistema ter a componente de 1 fóton com maior probabilidade. Essas emissões ocorrem nos intervalos de tempo onde há uma queda abrupta das curvas. Logo em seguida o estado de 1 fóton começa a ser populado novamente devido ao campo estar continuamente bombeando fótons para a cavidade. Há também a média $\langle \sigma_+ \sigma_- \rangle$ que representa o número médio de ocupação no estado excitado, ou seja, para o resultado apresentado vemos que a população não acessa o estado excitado do átomo, pois a maior probabilidade é de fóton único. Já em (b) temos o campo $\varepsilon_0 = \sqrt{8.0}\kappa$ com acoplamento fixo $g = 10.0\kappa$. A razão de aumentarmos o acoplamento se dá pela discussão da Figura 11, onde é necessário um regime mais forte de acoplamento para que a projeção $\langle P_1 \rangle$ se estabilize. Como desejado, vemos novamente que o número médio de fótons é igual a componente de fóton único ao longo de toda a dinâmica, mas com uma frequência de emissões maior em um intervalo de tempo maior (emissões mais suaves). Além disso, a média de excitação do estado excitado é próxima de zero.

Desse modo, verificou-se que para o campo coerente com força constante ε_0 a dinâmica apresenta um comportamento assintótico. Ao considerar o acoplamento átomo-campo temos como resultado a projeção de 1 fóton como o número médio de fótons calculado dentro da cavidade no estado estacionário, além da estatística do campo afirmar o estado de fóton único. Ainda, há um regime de acoplamento onde obtemos a máxima eficiência do gerador se relacionando com a quebra da degenerescência dos estados excitados do átomo. Por fim, a dinâmica via *Monte Carlo* com 1 trajetória mostra que o sistema realiza inúmeras emissões de fótons únicos com maior frequência conforme se aumenta ε_0 , mas a média de ocupação no estado excitado permanece desprezível.

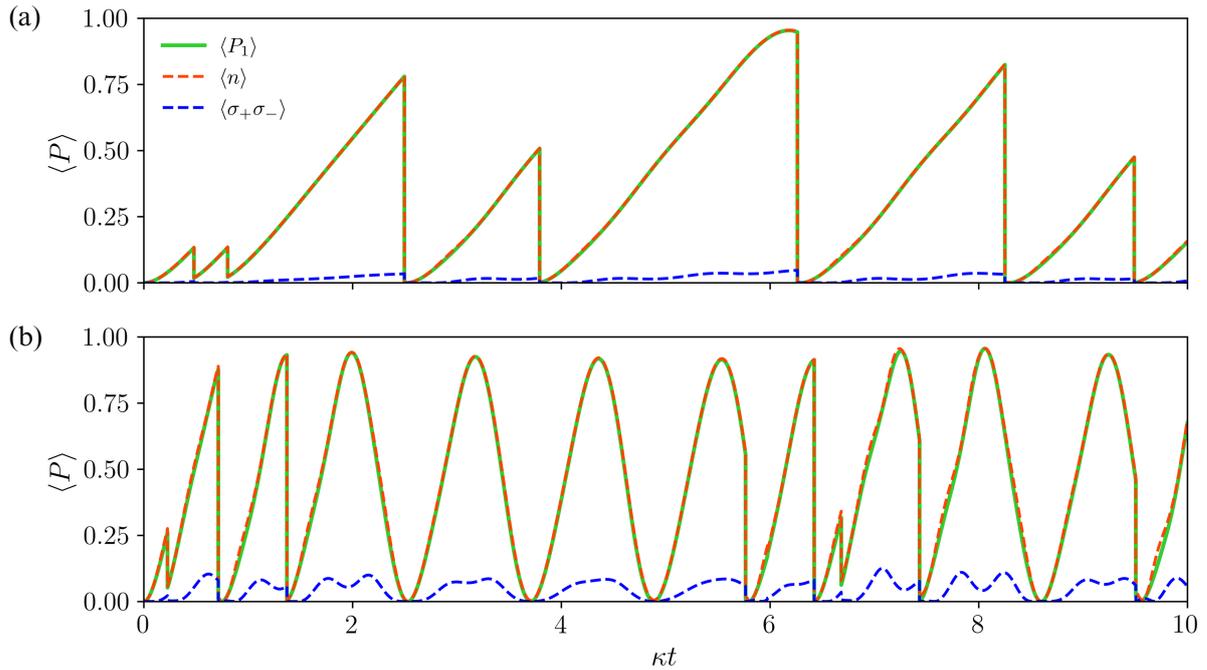


Figura 13 – Dinâmica do sistema J-C de 2 fótons analisando a projeção da componente de 1 fóton $\langle P_1 \rangle$, a média do número de fótons $\langle n \rangle$ e do número de ocupação no estado excitado $\langle \sigma_+ \sigma_- \rangle$ em função do tempo normalizado κt . A força do campo de bombeio e a constante de acoplamento átomo-campo são, respectivamente, (a) $\varepsilon_0 = \sqrt{1.0}\kappa$ e $g = 5.0\kappa$; (b) $\varepsilon_0 = \sqrt{8.0}\kappa$ e $g = 10.0\kappa$. Parâmetros para simulação utilizando o método numérico *Monte Carlo* para 1 trajetória: $\Delta_p = 0$, $\gamma = \gamma_\phi = 0.01\kappa$ e $N = 20$ (dimensão do espaço de Fock). Fonte: elaborada pelo autor.

4 Campo de entrada gaussiano

Podemos agora considerar como campo de entrada um pulso gaussiano dependente do tempo definido por

$$\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{\eta}\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{(t-t_0)^2}{2\eta^2}\right], \quad (3.22)$$

sendo ε_m a amplitude máxima (altura) do pulso e η sua duração (largura) em relação ao centro do pico em t_0 [39].

4.1 Dinâmica do sistema de campo pulsado

Podemos então analisar a variação da projeção de 1 fóton pelo tempo, comparando com o número médio de fótons e verificando se a estatística do campo confirma a existência do fóton único na cavidade. Desse modo, a partir da Figura 14 (a) iremos considerar um pulso de baixa intensidade com amplitude $\varepsilon_m = \sqrt{1.0}\kappa$, o qual tem por resultado um valor pequeno para a probabilidade de ocupação. Mesmo assim é possível verificar que o número médio de fótons corresponde a projeção de 1 fóton, além de que o sistema não acessa os estados excitados do átomo. Confirmamos o carácter de fóton único do campo

na cavidade em (b) quando $g^{(2)}(0) \approx 0$ no intervalo de tempo de maior estabilidade. Fora desse intervalo a função de correlação oscila devido a $\langle P_1 \rangle \rightarrow 0$. Para um campo mais intenso, $\varepsilon_m = \sqrt{8.0}\kappa$, que admitirá um número maior de fótons entrando na cavidade, teremos em (c) $\langle P_1 \rangle \approx \langle n \rangle$ dentro da cavidade. Há um aumento do valor máximo do número de ocupação para as projeções e como desejado $\langle \sigma_+ \sigma_- \rangle \approx 0$, além de (d) garantir o fóton único, pois $g^{(2)}(0) \approx 0$.

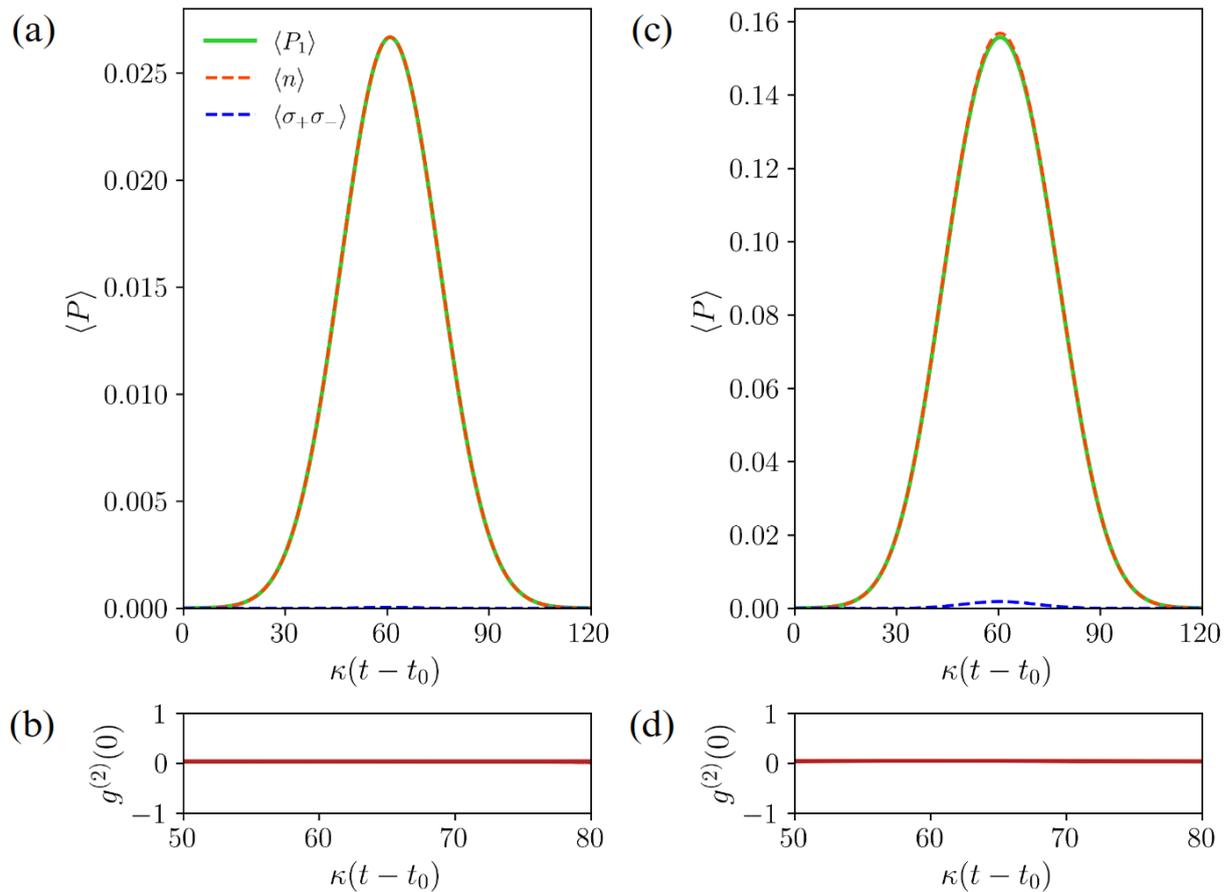


Figura 14 – Dinâmica do sistema J-C de 2 fótons analisando a projeção da componente de 1 fóton $\langle P_1 \rangle$, a média do número de fótons $\langle n \rangle$ e do número de ocupação no estado excitado $\langle \sigma_+ \sigma_- \rangle$ em função do tempo normalizado $\kappa(t - t_0)$. Também é apresentada a função de correlação normalizada de segunda ordem $g^{(2)}(0)$ no intervalo de maior estabilidade em função de $\kappa(t - t_0)$. A amplitude do pulso do campo e a constante de acoplamento átomo-campo são, respectivamente, (a, b) $\varepsilon_m = \sqrt{1.0}\kappa$; (c, d) $\varepsilon_m = \sqrt{8.0}\kappa$ e $g = 10.0\kappa$. Parâmetros para simulação: $\Delta_p = 0$, $\gamma = \gamma_\phi = 0.01\kappa$, $\eta = 20/\kappa$, $t_0 = 60/\kappa$ e $N = 20$ (dimensão do espaço de Fock). Fonte: elaborada pelo autor.

Devido a essa dependência temporal do campo, podemos também integrar as projeções na forma

$$\langle P_i \rangle = \int_0^t \langle \rho(t) | P_i | \rho(t) \rangle dt, \quad (3.23)$$

onde será possível acessar o número médio de fótons no sistema durante toda a dinâmica e comparar numericamente a proximidade dos valores avaliados qualitativamente na Figura 14. A Tabela 1 apresenta os valores obtidos utilizando a função *numpy.trapz* [40]. Como esperado, os valores numéricos também indicam um aumento das projeções para um campo mais intenso, no entanto, continua-se a obter $\langle P_1 \rangle \approx \langle n \rangle$ para as duas amplitudes do pulso, devido aos valores médios $\langle \sigma_+ \sigma_- \rangle = \langle P_2 \rangle = \langle P_3 \rangle \approx 0$. A análise da razão de obtermos $\langle P_1 \rangle > 1.0$ para o campo de maior intensidade será feita na próxima seção.

	$\varepsilon_m = \sqrt{1.0}\kappa$	$\varepsilon_m = \sqrt{8.0}\kappa$
$\langle P_1 \rangle$	0.961	6.133
$\langle P_2 \rangle$	$2.948 \cdot 10^{-4}$	$1.474 \cdot 10^{-2}$
$\langle P_3 \rangle$	$6.357 \cdot 10^{-7}$	$2.484 \cdot 10^{-4}$
$\langle n \rangle$	0.962	6.163
$\langle \sigma_+ \sigma_- \rangle$	$9.780 \cdot 10^{-4}$	$4.892 \cdot 10^{-2}$

Tabela 1 – Projeções $\langle P_i \rangle$ de i fótons na cavidade, média do número de fótons $\langle n \rangle$ e do número de ocupação no estado excitado $\langle \sigma_+ \sigma_- \rangle$ para dois valores da amplitude ε_m do pulso de entrada. Valores obtidos integrando numericamente o sistema pelo tempo. Fonte: elaborada pelo autor.

4.2 Emissão para o campo pulsado

A Figura 15 agora apresenta a emissão do fóton para fora da cavidade. Essas emissões são visíveis pelo decaimento abrupto em ambas as curvas e podem apresentar um número de emissões diferentes a cada realização aleatória do sistema, pois se trata de uma simulação calculada em 1 trajetória pelo método numérico *Monte Carlo*. Para o pulso (a) de amplitude $\varepsilon_m = \sqrt{1.0}\kappa$ a Tabela 1 apresenta $\langle P_1 \rangle \approx 1.0$, indicando a presença de 1 único fóton mesmo com 2 emissões na cavidade. Quando em (b) a amplitude do campo é $\varepsilon_m = \sqrt{8.0}\kappa$ teremos múltiplas emissões e ainda $\langle P_1 \rangle \approx 6.0$. Esse resultado significa que em média temos mais que 1 fóton durante o tempo, no entanto, nunca é populado um estado maior de 1 fóton na cavidade. Essa não população em estados superiores é vista e quantificada como $\langle \sigma_+ \sigma_- \rangle \approx 0$. Desse modo, nosso sistema gera o estado de fóton único que é emitido e logo em seguida gerado outro estado.

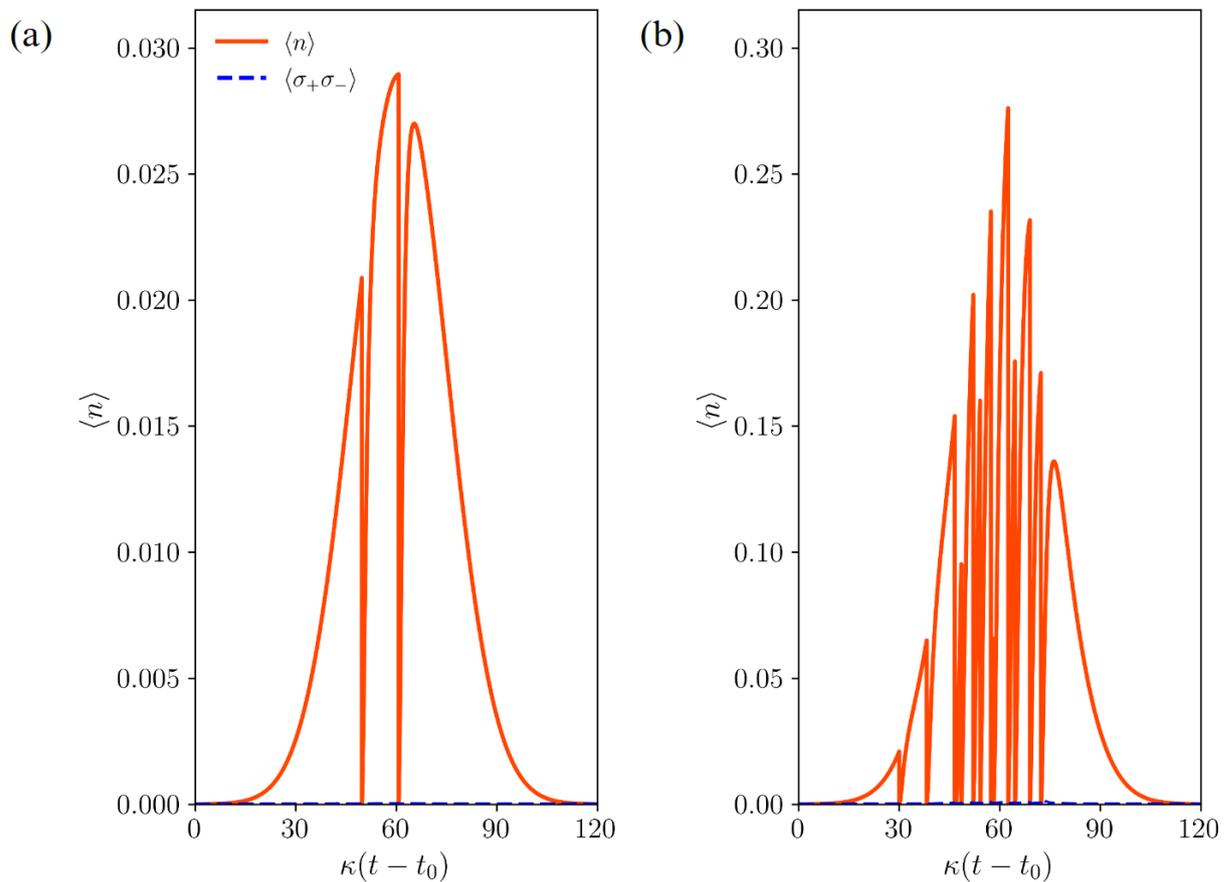


Figura 15 – Dinâmica do sistema J-C de 2 fótons analisando a média do número de fótons $\langle n \rangle$ e do número de ocupação no estado excitado $\langle \sigma_+ \sigma_- \rangle$ em função do tempo normalizado $\kappa(t - t_0)$. A amplitude do pulso do campo e a constante de acoplamento átomo-campo são, respectivamente, (a) $\varepsilon_m = \sqrt{1.0}\kappa$; (b) $\varepsilon_m = \sqrt{8.0}\kappa$ e $g = 10.0\kappa$. Parâmetros para simulação utilizando o método numérico *Monte Carlo* para 1 trajetória: $\Delta_p = 0$, $\gamma = \gamma_\phi = 0.01\kappa$, $\eta = 20/\kappa$, $t_0 = 60/\kappa$ e $N = 20$ (dimensão do espaço de Fock). Fonte: elaborada pelo autor.

Sendo agora o campo de entrada um pulso dependente do tempo, definindo sua intensidade segundo a amplitude ε_m , confirmamos o mesmo comportamento para o campo contínuo, ou seja, a projeção de maior intensidade corresponde a 1 fóton. A média de ocupação dos estados excitados é desprezível e a estatística do campo confirma que se trata de um fóton único. Integrando as projeções ao longo do tempo é possível confirmar numericamente os resultados apresentados na dinâmica, além de mostrar que em média o gerador emite mais que 1 fóton ao longo do intervalo de tempo estipulado, mas os estados superiores a 1 fóton não são populados na cavidade.

5 Comparação do modelo J-C para 1 e dois fótons

Um dos modelos mais conhecidos para a construção de tecnologias quânticas via geradores de fótons únicos é o modelo J-C usual, ou seja, para o hamiltoniano da Equação (3.7) é definido $N = M = 1$. Chamamos de *photon blockade* o processo de interação natural do átomo com o campo resultando no estado de fóton único para saída da cavidade [20]. Neste caso, estados superiores a de 1 fóton são impedidos de serem populados devido a constante de acoplamento g ser maior que o valor de largura respectiva a frequência de transição para ocupação dos estados superiores [35]. Algumas das condições necessárias para produzir esse efeito é estimular o sistema quase ressonantemente com a frequência de Rabi do vácuo, $\omega - \omega_p \approx g$, além de considerar um regime de acoplamento átomo-campo forte ($g > \kappa, \gamma$) [1].

Vamos então comparar esse modelo contendo um átomo aprisionado na cavidade [19] com o das interações bifotônicas explorado neste trabalho. Primeiramente vamos analisar o caso do campo corente de força $\varepsilon_0 = \sqrt{8.0}\kappa$ segundo a Figura (16). É nítido em (a) que a projeção $\langle P_1 \rangle_{2p}$ apresenta maior probabilidade que $\langle P_1 \rangle_{1p}$, a qual divide sua distribuição de ocupação com projeções de 2 e 3 fótons que são irrelevantes para as interações bifotônicas. Além disso, (b) mostra que $\langle n \rangle_{2p} < \langle n \rangle_{1p}$ devido a média contabilizar os estados superiores a 1 fóton. A principal diferença entre os dois modelos se dá ao analisar que o *photon blockade* permite que o estado excitado seja ocupado. Por último, vemos que a estatística do campo $g^{(2)}(0)_{1p}$ admite um campo coerente ao atingir o estado estacionário, mas não afirma o estado de fóton único como $g^{(2)}(0)_{2p} \approx 0$.

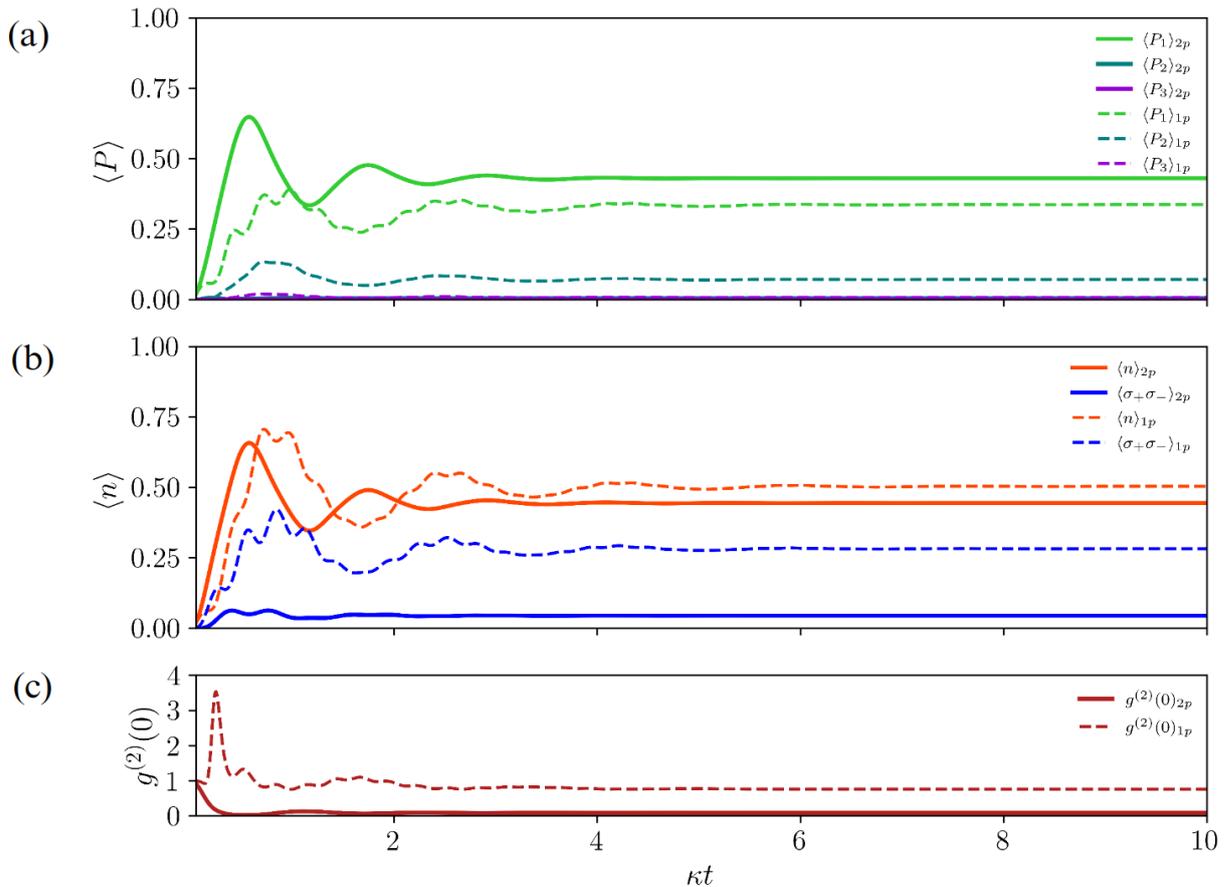


Figura 16 – Dinâmica do sistema comparando projeções obtidas pelo modelo J-C usual (curvas tracejadas, $1p$) e de interações bifonônicas (curvas sólidas, $2p$). Em (a) temos as projeções dos estados de Fock, (b) as médias do número de fótons $\langle n \rangle$ e do número de ocupação no estado excitado $\langle \sigma_+ \sigma_- \rangle$ em função do tempo normalizado κt . Já (c) apresenta a função de correlação de segunda ordem em função de κt . A força do campo de bombeio e constante de acoplamento átomo-campo são, respectivamente, $\varepsilon_0 = \sqrt{8.0}\kappa$ e $g = 10.0\kappa$. Parâmetros para simulação: $\Delta_{p(2p)} = 0$, $\Delta_{p(1p)} = g$, $\gamma = \gamma_\phi = 0.01\kappa$, $N = 20$ (dimensão do espaço de Fock). Fonte: elaborada pelo autor.

Podemos também comparar as emissões em ambos os modelos pela Figura 17 considerando um campo de baixa intensidade $\varepsilon_0 = \sqrt{0.5}\kappa$. No J-C de 2 fótons apresentado em (a) temos $\langle \sigma_+ \sigma_- \rangle_{2p} \approx 0$, ou seja, podemos afirmar que o sistema é robusto quanto a perdas no átomo já que aproximadamente não temos essa excitação. No entanto, em (b) o J-C usual mostra uma considerável fonte de erro do sistema devido a sensibilidade por permitir excitar o átomo, já que $\langle \sigma_+ \sigma_- \rangle_{1p} \approx \langle n \rangle_{1p}$.

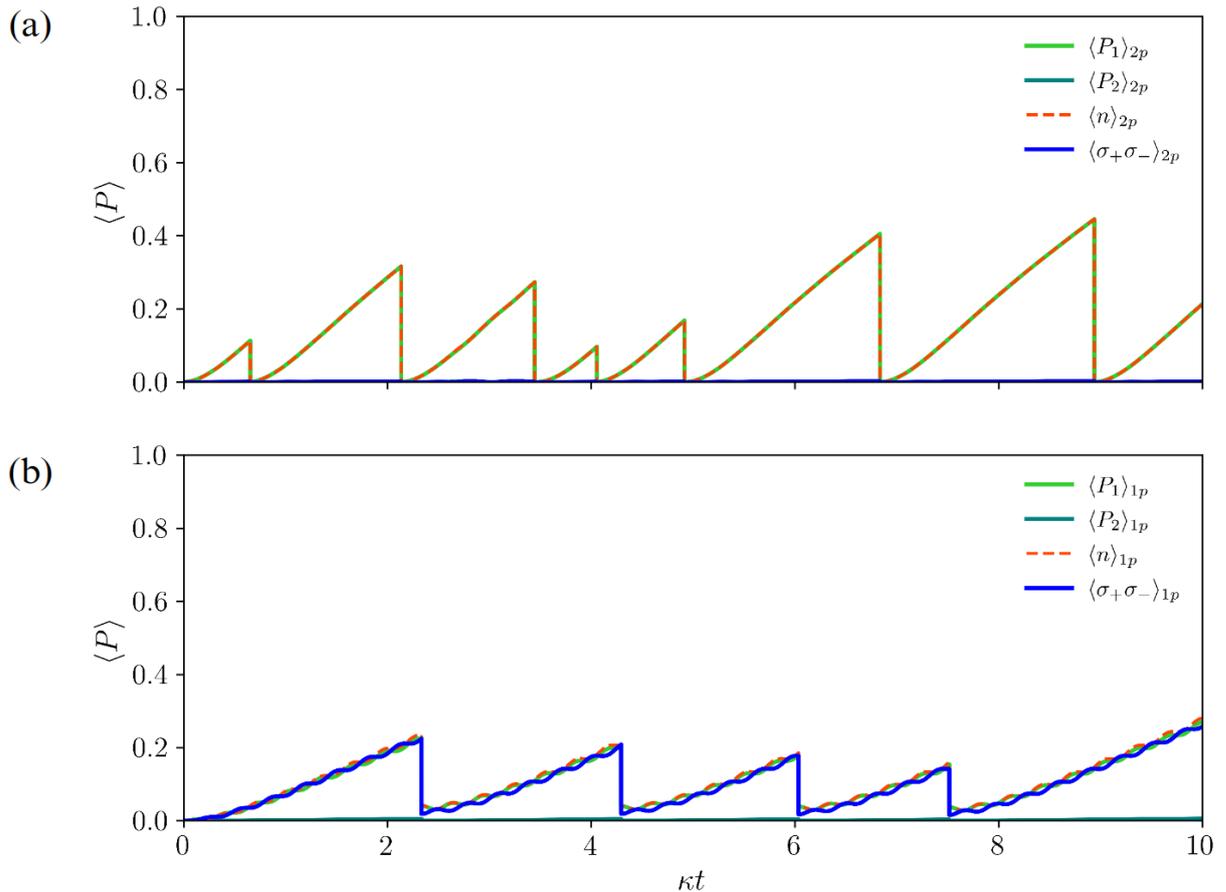


Figura 17 – Dinâmica do sistema comparando projeções obtidas pelo modelo J-C (a) usual ($1p$) e (b) de interações bifonônicas ($2p$). São apresentadas as projeções da componente de 1 ($\langle P_1 \rangle$) e 2 ($\langle P_2 \rangle$) fótons, a média do número de fótons $\langle n \rangle$ e do número de ocupação no estado excitado $\langle \sigma_+ \sigma_- \rangle$ em função do tempo normalizado κt . A força do campo de bombeio e a constante de acoplamento átomo-campo são, respectivamente, $\varepsilon_0 = \sqrt{0.5}\kappa$ e $g = 10.0\kappa$. Parâmetros para simulação utilizando o método numérico *Monte Carlo* para 1 trajetória: $\Delta_{p(2p)} = 0$, $\Delta_{p(1p)} = g$, $\gamma = \gamma_\phi = 0.01\kappa$ e $N = 20$ (dimensão do espaço de Fock). Fonte: elaborada pelo autor.

Considerando agora o pulso de entrada gaussiano com amplitude $\varepsilon_m = \sqrt{8.0}\kappa$, vemos que ao longo do tempo (a) $\langle P_1 \rangle_{2p} > \langle P_1 \rangle_{1p}$, ou seja, a interação bifotônica apresenta uma maior eficiência para a produção do estado de fóton único, mas ambos os processos resultam nas projeções superiores do estado número de fótons próximas de zero. Enquanto que $\langle \sigma_+ \sigma_- \rangle_{2p} \approx 0$, vemos $\langle \sigma_+ \sigma_- \rangle_{1p} \approx \langle P_1 \rangle_{1p}$. Essa diferença crucial entre os modelos mostra como o *photon blockade* necessita excitar o átomo para que não hajam ocupações nos estados de fótons superiores a 1. Com isso, logo após uma emissão do fóton há uma excitação no átomo, o qual apresenta dissipações atômicas (decaimento espontâneo) que contribuem para uma maior fonte de erro. Essa proibição para a ocupação nos estados da cavidade não é presente nas interações bifotônicas, já que esse sistema não depende da ocupação no átomo, contribuindo então para a melhor eficiência na produção de fótons únicos em comparação ao modelo J-C usual.

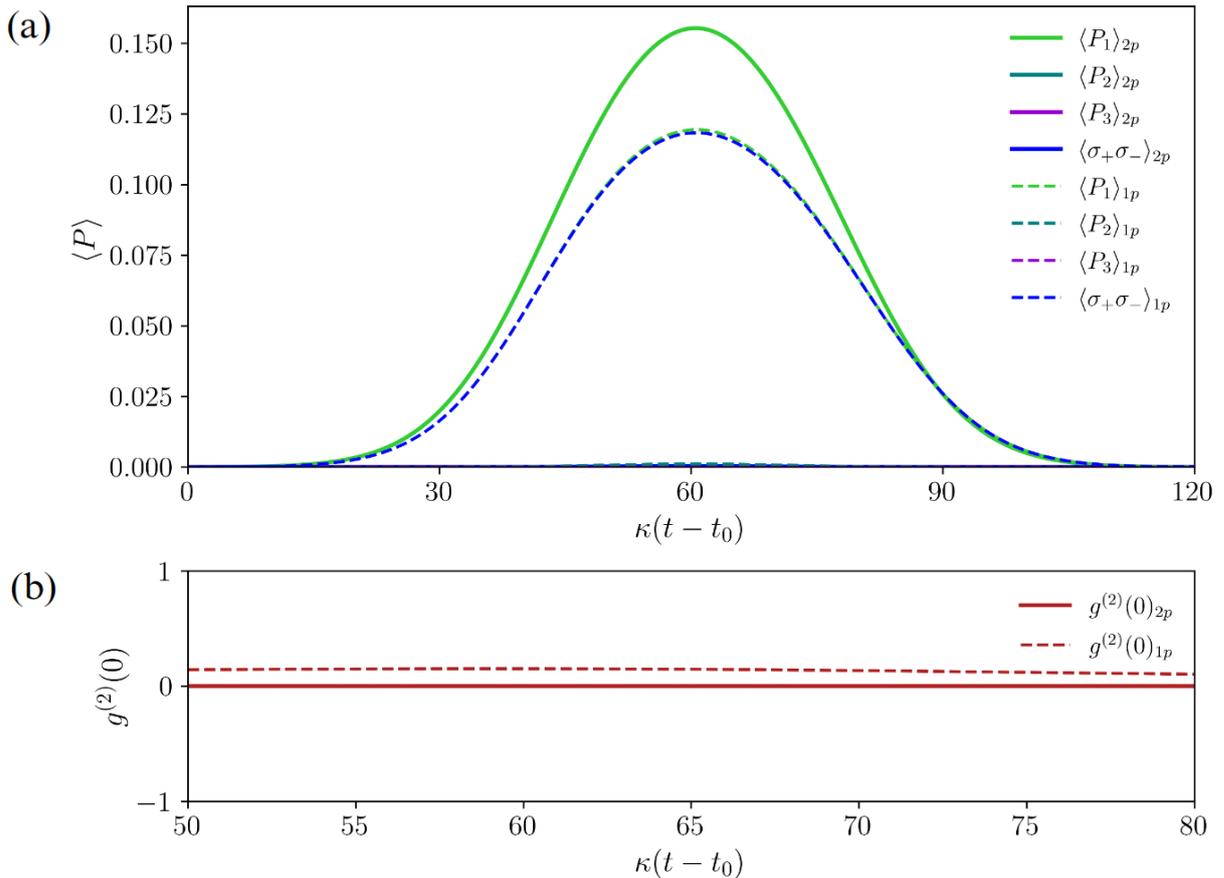


Figura 18 – Dinâmica do sistema comparando projeções obtidas pelo modelo J-C usual (curvas tracejadas, $1p$) e de interações bifonônicas (curvas sólidas, $2p$). Em (a) temos as projeções dos estados de Fock e a média do número de ocupação no estado excitado $\langle \sigma_+ \sigma_- \rangle$ em função do tempo normalizado $\kappa(t - t_0)$. Já (b) apresenta a função de correlação de segunda ordem pela variação de $\kappa(t - t_0)$. A amplitude do pulso e constante de acoplamento átomo-campo são, respectivamente, $\varepsilon_m = \sqrt{8.0}\kappa$ e $g = 10.0\kappa$. Parâmetros para simulação: $\Delta_{p(2p)} = 0$, $\Delta_{p(1p)} = g\kappa$, $\gamma = \gamma_\phi = 0.01\kappa$, $\eta = 20/\kappa$, $t_0 = 60/\kappa$, $N = 20$ (dimensão do espaço de Fock). Fonte: elaborada pelo autor.

Portanto, diferentemente do *photon blockade*, o modelo J-C de 2 fótons não impede que estados superiores a de 1 fóton sejam populados. No entanto, a não excitação no átomo do J-C de 2 fótons permite um sistema mais robusto a perdas do átomo. A consequência disso é a produção do estado de fóton único com maior probabilidade e a garantia desse estado pela estatística do campo.

4 Conclusões

A partir da investigação do modelo J-C foi possível obter uma clara compreensão acerca da dinâmica do sistema e sua relação com os parâmetros analisados, como a constante de acoplamento átomo-campo e a intensidade do campo de entrada. Tais parâmetros são essenciais na construção da teoria da EQC e contribuíram de forma frutífera para a aplicação em sistemas da óptica quântica que visam a manipulação dos estados da luz conhecendo a forma de interação radiação-matéria.

Diante dos resultados apresentados nesse trabalho, destaca-se que a aplicação do formalismo de *Input-Output* possibilitou de forma simples a compreensão das relações de proporcionalidade entre o campo de saída e intra-cavidade. Ao explorar a dinâmica do sistema considerando um reservatório de campo eletromagnético, evidenciou-se a projeção consistente de 1 fóton como número médio de fótons, mesmo com variações nos regimes paramétricos. No entanto, há uma influência significativa do acoplamento átomo-campo na eficiência do gerador. Por último, as emissões de fótons únicos são frequentes, especialmente à medida que a intensidade do campo de bombeio aumenta. Contudo, a média de ocupação nos estados excitados permaneceu insignificante, indicando que ao longo do tempo somente é ocupado o estado de fóton único.

A análise do modelo J-C de 2 fótons, em comparação com o *photon blockade*, evidenciou sua capacidade de fornecer um sistema mais robusto quanto a perdas no átomo. A consequência imediata é a produção dos estados de fótons únicos com maior probabilidade. Este resultado, confirmado pela estatística do campo, oferece insights valiosos para aplicações em dispositivos quânticos, onde a estabilidade e a eficiência na geração de fótons individuais são cruciais.

Referências

- 1 SOUZA, J. A. *Controle das propriedades estatísticas do campo e biestabilidade óptica em eletrodinâmica quântica de cavidades*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de São Carlos, 2013. Citado 7 vezes nas páginas 7, 3, 5, 6, 8, 11 e 34.
- 2 SCULLY, M. O.; ZUBAIRY, M. S. *Quantum optics*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 1999. Citado 3 vezes nas páginas 7, 12 e 13.
- 3 WALLS, D. F.; MILBURN, G. J. *Quantum optics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007. Citado 5 vezes nas páginas 7, 14, 15, 17 e 43.
- 4 VILLAS-BOAS, C. J.; ROSSATTO, D. Z. Multiphoton jaynes-cummings model: Arbitrary rotations in fock space and quantum filters. *Physical Review Letters*, APS, v. 122, n. 12, p. 123604, 2019. Citado 5 vezes nas páginas 8, 2, 20, 21 e 22.
- 5 KLEIN, M. J. Max planck and the beginnings of the quantum theory. *Archive for History of Exact Sciences*, Springer, v. 1, p. 459–479, 1961. Citado na página 1.
- 6 HAROCHE, S. Nobel lecture: Controlling photons in a box and exploring the quantum to classical boundary. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 85, n. 3, p. 1083, 2013. Citado na página 1.
- 7 WINELAND, D. J. Nobel lecture: Superposition, entanglement, and raising schrödingers cat. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 85, n. 3, p. 1103, 2013. Citado na página 1.
- 8 FEYNMAN, R. P. et al. Simulating physics with computers. *Int. j. Theor. phys*, v. 21, n. 6/7, 2018. Citado na página 1.
- 9 NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. *Quantum computation and quantum information*. [S.l.]: Cambridge university press, 2010. Citado na página 1.
- 10 RAIMOND, J. M. Basics of cavity quantum electrodynamics. In: _____. *Quantum Optics of Confined Systems*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1996. p. 1–46. ISBN 978-94-009-1657-9. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-94-009-1657-9_1>. Citado na página 1.
- 11 SCHNABEL, R. et al. Quantum metrology for gravitational wave astronomy. *Nature communications*, Nature Publishing Group UK London, v. 1, n. 1, p. 121, 2010. Citado na página 1.
- 12 KIMBLE, H. J. The quantum internet. *Nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 453, n. 7198, p. 1023–1030, 2008. Citado na página 1.
- 13 O'BRIEN, J. L.; FURUSAWA, A.; VUČKOVIĆ, J. Photonic quantum technologies. *Nature Photonics*, Nature Publishing Group UK London, v. 3, n. 12, p. 687–695, 2009. Citado na página 1.

-
- 14 KNÖLL, L.; VOGEL, W.; WELSCH, D.-G. Resonators in quantum optics: A first-principles approach. *Physical Review A*, APS, v. 43, n. 1, p. 543, 1991. Citado na página 2.
- 15 KIILERICH, A. H.; MØLMER, K. Input-output theory with quantum pulses. *Physical review letters*, APS, v. 123, n. 12, p. 123604, 2019. Citado na página 2.
- 16 LINDKVIST, J.; JOHANSSON, G. Scattering of coherent pulses on a two-level systemsingle-photon generation. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 16, n. 5, p. 055018, 2014. Citado na página 2.
- 17 PENG, Z. et al. Tuneable on-demand single-photon source in the microwave range. *Nature communications*, Nature Publishing Group UK London, v. 7, n. 1, p. 12588, 2016. Citado na página 2.
- 18 JAYNES, E. T.; CUMMINGS, F. W. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proceedings of the IEEE*, IEEE, v. 51, n. 1, p. 89–109, 1963. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 4.
- 19 BIRNBAUM, K. M. et al. Photon blockade in an optical cavity with one trapped atom. *Nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 436, n. 7047, p. 87–90, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 34.
- 20 ZOU, F. et al. Multiphoton blockade in the two-photon jaynes-cummings model. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 102, p. 053710, Nov 2020. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.102.053710>>. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 34.
- 21 OLIVEIRA, T. W. *ESTUDO DO MODELO DE RABI NO CONTEXTO DE SISTEMAS QUÂNTICOS ABERTOS*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de São Carlos, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 3, 6 e 7.
- 22 LOUISELL, W. H. Quantum statistical properties of radiation. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1973. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 6.
- 23 OLIVEIRA, M. H. *Resposta óptica de sistemas atômicos no espaço livre ou aprisionados dentro de cavidades ópticas no regime de armadilhamento coerente de populações*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de São Carlos, 2018. Citado na página 4.
- 24 ROSSATTO, D. Z. *Correlações quânticas e transição quântico-clássica em cavidades ópticas*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de São Carlos, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 5, 8, 12 e 13.
- 25 OLIVEIRA, M. H. *Electromagnetically induced transparency under effects of light-mediated interactions, entanglement generation, and Fock states detection*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de São Carlos, 2022. Citado na página 7.
- 26 SAKURAI, J. J.; COMMINS, E. D. *Modern quantum mechanics, revised edition*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 1995. Citado na página 7.
- 27 SOLAK, L. O. R. *EXCITAÇÃO PARAMÉTRICA EM MODOS ACOPLADOS: CASOS FECHADO E ABERTO*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Ponta Grossa, 2021. Citado na página 9.

-
- 28 PURI, R. R. et al. *Mathematical methods of quantum optics*. [S.l.]: Springer, 2001. v. 79. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 10.
- 29 CARMICHAEL, H. *An open systems approach to quantum optics: lectures presented at the Université Libre de Bruxelles, October 28 to November 4, 1991*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2009. v. 18. Citado na página 10.
- 30 BREUER, H.-P.; PETRUCCIONE, F. *The theory of open quantum systems*. [S.l.]: Oxford University Press, USA, 2002. Citado na página 10.
- 31 JOHANSSON, J. R.; NATION, P. D.; NORI, F. Qutip: An open-source python framework for the dynamics of open quantum systems. *Computer Physics Communications*, Elsevier, v. 183, n. 8, p. 1760–1772, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 44.
- 32 JOHANSSON, J. R. Vacuum rabi oscillations in the jaynes-cummings model. Disponível em: <<https://nbviewer.org/urls/qutip.org/qutip-tutorials/tutorials-v4/lectures/Lecture-1-Jaynes-Cumming-model.ipynb>>. Citado na página 11.
- 33 LOUDON, R. *The quantum theory of light*. [S.l.]: OUP Oxford, 2000. Citado na página 12.
- 34 AIELLO, A. Input-output relations in optical cavities: A simple point of view. *Physical Review A*, APS, v. 62, n. 6, p. 063813, 2000. Citado na página 14.
- 35 STECK, D. A. Quantum and atom optics. 2007. Citado 6 vezes nas páginas 14, 16, 17, 18, 19 e 34.
- 36 FUJII, K. Introduction to the rotating wave approximation (rwa): Two coherent oscillations. *Journal of Modern Physics*, Scientific Research Publishing, v. 8, n. 12, p. 2042–2058, 2017. Citado na página 14.
- 37 CANEVA, T. et al. Quantum dynamics of propagating photons with strong interactions: a generalized input–output formalism. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 17, n. 11, p. 113001, 2015. Citado na página 20.
- 38 SINGH, S. Field statistics in some generalized jaynes-cummings models. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 25, p. 3206–3216, Jun 1982. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.25.3206>>. Citado na página 22.
- 39 BORGES, H. S. et al. Heralded entangling quantum gate via cavity-assisted photon scattering. *Physical Review A*, APS, v. 97, n. 1, p. 013828, 2018. Citado na página 30.
- 40 NUMPY. numpy.trapz. Disponível em: <<https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.trapz.html>>. Citado na página 32.
- 41 PLENIO, M. B.; KNIGHT, P. L. The quantum-jump approach to dissipative dynamics in quantum optics. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 70, n. 1, p. 101, 1998. Citado na página 44.
- 42 MØLMER, K.; CASTIN, Y.; DALIBARD, J. Monte carlo wave-function method in quantum optics. *J. Opt. Soc. Am. B*, Optica Publishing Group, v. 10, n. 3, p. 524–538, Mar 1993. Disponível em: <<https://opg.optica.org/josab/abstract.cfm?URI=josab-10-3-524>>. Citado na página 44.

Apêndices

1 Estado coerente

O campo da seção 2.3 que é tratado como coerente é definido pelo estado coerente, o qual é uma composição de estados com número de fótons distintos. Isso permite que a sua fase seja mais precisa que o estado de número, respeitando o princípio da incerteza. Podemos defini-lo utilizando o operador de deslocamento unitário

$$D(\alpha) = \exp\{\alpha a^\dagger - \alpha^* a\}, \quad (1)$$

sendo α um número complexo arbitrário que é autovalor do estado coerente. Atuando o operador $D(\alpha)$ no estado de vácuo será gerado o estado coerente $|\alpha\rangle$:

$$|\alpha\rangle = D(\alpha) |0\rangle. \quad (2)$$

Também é possível expressá-lo em termos dos estados de número atuando uma completeza na forma

$$|\alpha\rangle = \sum |n\rangle\langle n| = e^{-|\alpha|^2/2} \sum \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} |n\rangle \quad (3)$$

e assim, facilmente se obtém a probabilidade de distribuição de n fótons nesse estado por [3]

$$P_n = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{n!}. \quad (4)$$

2 Relações matemáticas

Ao longo das deduções para as relações do formalismo de *Input-Output* da seção 5.2 será necessário utilizar duas relações matemáticas para a resolução de algumas integrais. São elas

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i\omega(t-t')] d\omega = 2\pi\delta(t-t'); \quad (5)$$

$$\int_{t_0}^t f(t')\delta(t-t')dt' = \int_t^{t_1} f(t')\delta(t-t')dt' = \frac{1}{2}f(t), \quad (6)$$

sendo considerada uma função qualquer dependente do tempo $f(t)$ definida no intervalo de integração $t_0 < t < t_1$.

3 Método de *Monte Carlo*

Este tipo de método numérica permite que realizemos simulações individuais da dinâmica de um sistema. Ele se torna mais eficiente em sistemas com dimensão do espaço

de Fock $N \gg 1$. São necessárias em média 250 à 500 trajetórias em simulações típicas (a escala de erro é dada por $1/n$, sendo n o número de trajetórias). A principal vantagem está em guardar na memória apenas o vetor de estado (*array*) em vez de uma matriz densidade de alta dimensão. Basicamente seu mecanismo conta com um *quantum-jump approach* [41] para a evolução de uma função de onda. Essa evolução é realizada pela Equação (2.29) com um hamiltoniano efetivo não-hermitiano na forma

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = H_{\text{sys}} - \frac{i\hbar}{2} C_n^\dagger C_n. \quad (7)$$

Abaixo temos o algoritmo utilizado pelo QuTip [31], considerando o estado inicial $|\psi(0)\rangle$ para uma única trajetória do sistema [42]:

1. Tomar o parâmetro r entre $[0, 1]$ como representante da probabilidade do salto quântico ocorrer;
2. Substituir (7) em (2.29) e integrar para o tempo t , o qual a norma resulta no ponto do salto: $\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = r$;
3. O salto resultante projeta o sistema em t em um dos estados renormalizados. Assim, os operadores de colapso são escolhidos tal que a probabilidade fica:

$$\sum_{i=1}^n P_n(t) \geq r; \quad (8)$$

4. Aplicando o estado renormalizado em t como estado inicial, consideramos um novo r e repetimos os procedimentos acima.