

Universidade Federal do São Carlos

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia

Curso de Bacharelado em Engenharia Física

Pedro Silveira Barbieri

ESTUDO DA VARIAÇÃO DA ENTROPIA DE SHANNON NO JOGO DE  
XADREZ A PARTIR DOS CONCEITOS DE TEORIA DA INFORMAÇÃO.

São Carlos-SP

2024

Pedro Silveira Barbieri

ESTUDO DA VARIAÇÃO DA ENTROPIA DE SHANNON NO JOGO DE  
XADREZ A PARTIR DOS CONCEITOS DE TEORIA DA INFORMAÇÃO.

Trabalho Final de Curso apresentado ao  
Departamento de Física da  
Universidade Federal de São Carlos  
como requisito parcial para graduação  
em Engenharia Física.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Sergio da  
Silva Jr (Universidade Federal do São  
Carlos).

São Carlos-SP

2024

Pedro Silveira, Barbieri

Estudo da variação da Entropia de Shannon no jogo de xadrez a partir dos conceitos de Teoria da Informação. / Barbieri Pedro Silveira -- 2024.  
83f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos

Orientador (a): Paulo Sergio da Silva Junior

Banca Examinadora: Paulo Sergio da Silva Junior, Fabio Luis Zabotto, Denis Pereira de Lima

Bibliografia

1. Entropia de Shannon. 2. Teoria da informação. 3. Xadrez. I. Pedro Silveira, Barbieri. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Ronildo Santos Prado - CRB/8 7325

ESTUDO DA VARIAÇÃO DA ENTROPIA DE SHANNON NO JOGO DE  
XADREZ A PARTIR DOS CONCEITOS DE TEORIA DA INFORMAÇÃO.

Pedro Silveira Barbieri

Trabalho de Final de Curso apresentado  
ao Departamento de Física da  
Universidade Federal de São Carlos  
como requisito parcial para graduação  
em Engenharia Física.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Sergio da  
Silva Jr (Universidade Federal de São  
Carlos).

São Carlos, 15 de fevereiro de 2024.

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Paulo Sergio da Silva Jr - Orientador  
Universidade Federal de São Carlos

---

Prof. Dr. Fabio Luis Zabotto  
Universidade Federal de São Carlos

---

Prof. Dr. Denis Pereira de Lima  
Universidade Federal de São Carlos

São Carlos-SP

2024

## RESUMO

A Teoria da Informação é um ramo da ciência que quantifica a informação e seus processos de comunicação, tendo em seu núcleo a reformulação do conceito fundamental de entropia. A entropia de Shannon reflete a medida de incerteza em um sistema de comunicação no decorrer da transmissão da informação.

Para o escopo deste trabalho, investigou-se a aplicabilidade da Entropia de Shannon ao longo de inúmeras partidas do jogo de xadrez a partir da utilização de motores de computadores modernos, em específico o programa Stockfish, e análises de códigos computacionais.

O Stockfish é o motor computacional de xadrez mais difundido na atualidade por se tratar de um programa com código aberto que possibilita o uso de seus recursos por uma diferente gama de usuários, sejam eles jogadores profissionais, amadores e pesquisadores no ramo da computação. O programa avalia posições no tabuleiro a partir de cálculos probabilísticos que maximizam o resultado final. Desta forma, computou-se a variação entrópica em gráficos de dispersão, regressão linear e curvas de ajuste a partir de códigos computacionais. Permitindo uma discussão pertinente sobre a transmissão de informação e uma análise comparativa com os gráficos retirados da literatura e obtidos empiricamente, fomentando, deste modo, uma argumentação oportuna sobre a imprevisibilidade no contexto do jogo das sessenta e quatro casas.

Palavras-Chave: Entropia, Xadrez, Teoria da Informação, Motor de Xadrez

## **ABSTRACT**

Information Theory is a branch of science that quantifies information and its communication processes, and has at its core the reformulation of the fundamental concept of entropy. Shannon's entropy reflects the measure of uncertainty in a communication system during the transmission of information.

For the scope of this work, we investigated the applicability of Shannon's Entropy over the course of numerous games of the game of chess using modern computer engines, specifically the Stockfish program, and computer code analysis.

Stockfish is the most widespread computer chess engine today because it is an open-source program that allows its resources to be used by a wide range of users, be they professional players, amateurs or computer researchers. The program evaluates positions on the board based on probabilistic calculations that maximize the final result. In this way, entropic variation was computed in scatter plots, linear regression and fitting curves using computer codes. This allowed for a pertinent discussion about the transmission of information and a comparative analysis with the graphs taken from the literature and obtained empirically, thus fostering a timely argument about unpredictability in the context of the game of sixty-four squares.

**Keywords:** Entropy, Chess, Information Theory, Chess Engine

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Sistema de Comunicação no ponto de vista da Teoria Matemática da Comunicação. ....	14
Figura 2 - Entropia de uma Variável Aleatória com Dois Possíveis Valores. ...	18
Figura 3 - Movimentos possíveis do rei sem restrição de movimento. ....	26
Figura 4 - Movimentos possíveis da Dama sem restrição de movimento. ....	27
Figura 5 - Movimentos possíveis da Torre sem restrição de movimento. ....	27
Figura 6 - Movimentos possíveis do Bispo sem restrição de movimento. ....	28
Figura 7 - Movimentos possíveis do Cavalo sem restrição de movimento. ....	29
Figura 8 - Movimentos e capturas possíveis dos peões (seta verde) e movimentos ilegais (seta vermelha). ....	30
Figura 9 - Notação Algébrica referente a demarcação das casas de um tabuleiro de xadrez convencional. ....	31
Figura 10 - Exemplo de uma partida de xadrez armazenada em formato PGN. ....	31
Figura 11 - Valores relativos das peças de xadrez. ....	33
Figura 12 - Valores relativos das peças de xadrez a partir de algoritmos avançados de Machine Learning. ....	33
Figura 13 - Avaliação do lance das brancas de uma posição arbitrária através do Engine Stockfish 16. ....	34
Figura 14 - Armazenamento dos lances de uma partida de xadrez no formato PGN com as respectivas avaliações do Stockfish após cada lance. ....	35
Figura 15 - Arquitetura de uma rede neural NNUE. ....	37
Figura 16 - Avaliação Clássica do Stockfish dada a utilização de conceitos humanos. ....	39
Figura 17 - Análise do movimento do Rei no canto do tabuleiro. ....	41
Figura 18 - Análise do movimento do rei na borda do tabuleiro. ....	42
Figura 19 - Análise do movimento do rei em qualquer bloco do tabuleiro. ....	43
Figura 20 - Andar randômico em um grafo de três arestas. ....	44
Figura 21 - Percentagem de ganho através da avaliação de centipawns do Stockfish NNUE. ....	46
Figura 22 - Posição arbitrária e respectivas avaliações do Stockfish 16 NNUE. ....	46

Figura 23 - Exemplos de partidas da Copa do Mundo de Xadrez de 2021. ....	47
Figura 24 - PGN da oitava partida do campeonato mundial de xadrez de 2021 da FIDE. ....	48
Figura 25 - Código em python 3 para separação de partidas em vitórias, derrotas e empates para as brancas. ....	51
Figura 26 – Curva de ajuste da variação da Entropia de Shannon ao longo das partidas de xadrez da Copa do Mundo de 2021.....	57
Figura 27 – Curva de ajuste da variação da Entropia de Shannon (em bits) pelo número de jogadas ao longo das partidas de xadrez da Copa do Mundo de 2021, com vitória das brancas e na perspectiva das brancas. ....	58
Figura 28 - Avaliação do Stockfish 16 de uma posição arbitrária.....	59
Figura 29 – Curva de ajuste da variação da Entropia de Shannon (em bits) pelo número de jogadas ao longo das partidas de xadrez da Copa do Mundo de 2021, com vitória das brancas e na perspectiva das pretas.....	60
Figura 30 - Análise de dispersão da Entropia de Shannon (em bits) pelo número de jogadas ao longo das partidas de xadrez da Copa do Mundo de 2021, com vitória das brancas e na perspectiva das brancas.....	61
Figura 31 - Análise de dispersão da Entropia de Shannon (em bits) pelo número de jogadas ao longo das partidas de xadrez da Copa do Mundo de 2023, com vitória das brancas e na perspectiva das brancas.....	62
Figura 32 - Análise de regressão linear da Entropia de Shannon (em bits) pelo número de jogadas ao longo das partidas de xadrez da Copa do Mundo de 2021, com vitória das brancas e na perspectiva das brancas. ....	63
Figura 33 - Análise de regressão linear da Entropia de Shannon (em bits) pelo número de jogadas ao longo das partidas de xadrez da Copa do Mundo de 2023, com vitória das brancas e na perspectiva das brancas. ....	64
Figura 34 - Análise de dispersão da Entropia de Shannon (em bits) pelo número de jogadas ao longo das partidas de xadrez da Copa do Mundo de 2021, com vitória das brancas e na perspectiva das pretas. ....	65
Figura 35 - Análise de dispersão da Entropia de Shannon (em bits) pelo número de jogadas ao longo das partidas de xadrez da Copa do Mundo de 2023, com vitória das brancas e na perspectiva das pretas. ....	66



Figura 36 - Análise de regressão linear da Entropia de Shannon (em bits) pelo número de jogadas ao longo das partidas de xadrez da Copa do Mundo de 2021, com vitória das brancas e na perspectiva das pretas.....	67
Figura 37 - Análise de regressão linear da Entropia de Shannon (em bits) pelo número de jogadas ao longo das partidas de xadrez da Copa do Mundo de 2023, com vitória das brancas e na perspectiva das pretas.....	68
Figura 38 - Análise de dispersão da Entropia de Shannon (bits) pelo número de jogadas referente à partida número oito do campeonato mundial de xadrez de 2021, com vitória das brancas e na perspectiva das brancas. ....	69
Figura 39 - Análise de dispersão da Entropia de Shannon (bits) pelo número de jogadas referente à partida número oito do campeonato mundial de xadrez de 2021, com vitória das brancas e na perspectiva das pretas.....	70
Figura 40 - Análise de dispersão da Entropia de Shannon (bits) pelo número de jogadas referente à partida entre os motores de computador <i>Stockfish</i> e <i>LeelaChess0</i> pelo Campeonato Mundial de <i>Engines</i> de Xadrez em 2023, com empate e na perspectiva das brancas.....	71
Figura 41 - Análise de dispersão da Entropia Conjunta (em bits) pelo número de jogadas ao longo das partidas de xadrez da Copa do Mundo de 2021, com vitória das brancas.....	72
Figura 42 - Análise de dispersão da Entropia Conjunta (em bits) pelo número de jogadas ao longo das partidas de xadrez da Copa do Mundo de 2023, com vitória das brancas.....	73
Figura 43 - Código em python 3 para enumeração dos lances presentes nos PGN's.....	79
Figura 44 - Código em python 3 para leitura de PGN's.....	80
Figura 45 - Código em python3 para determinação de análise gráfica e a respectiva curva de ajuste da entropia de shannon(bits) por lance executado. Parte 1.....	81
Figura 46 - Código em python3 para determinação de análise gráfica e a respectiva curva de ajuste da entropia de shannon(bits) por lance executado. Parte 2.....	82
Figura 47 - Código em python3 para determinação de análise gráfica e a respectiva curva de ajuste da entropia de shannon(bits) por lance executado. Parte 3.....	83

Figura 48 - Código em python3 para determinação de análise gráfica e a respectiva curva de ajuste da entropia de shannon(bits) por lance executado. Parte 4.....	84
Figura 49 - Código em python3 para determinação de análise gráfica e a respectiva curva de ajuste da entropia de shannon(bits) por lance executado. Parte 5.....	85

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Dados referentes à oitava partida do campeonato mundial de xadrez de 2021. CP – Avaliação em Centipawns, % - Distribuição de Probabilidades, B – Perspectiva das Brancas, P – Perspectiva das Pretas.....	52
Tabela 2 - Dados referentes a partida entre os motores de computador Stockfish e LeelaChess0 pelo campeonato mundial de motores de computador de xadrez em 2023 com resultado final de empate. ....	54

## LISTA DE SIGLAS

TMC	Teoria Matemática da Comunicação.
NNUE	Efficiently Updatable Neural-Network.
PGN	Portable Game Notation.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>OBJETIVOS .....</b>	<b>12</b>
<b>3</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....</b>	<b>13</b>
3.1	A EVOLUÇÃO DA TEORIA DA INFORMAÇÃO E O CONCEITO MODERNO DE ENTROPIA	13
3.2	INFORMAÇÃO .....	15
3.3	ENTROPIA .....	16
<b>3.3.1</b>	<b>Exemplos .....</b>	<b>17</b>
<b>3.3.2</b>	<b>Entropia Conjunta e Entropia Condicional.....</b>	<b>19</b>
3.4	INFORMAÇÃO MÚTUA E DIVERGÊNCIA DE KULLBACK-LEIBLER .....	21
<b>3.4.1</b>	<b>Informação Mútua e Capacidade de Canal.....</b>	<b>22</b>
3.5	VARIÁVEIS CONTÍNUAS ALEATÓRIAS .....	23
<b>3.5.1</b>	<b>Densidade de Máxima Entropia .....</b>	<b>24</b>
3.6	ENTROPIA CRUZADA .....	25
3.7	CONCEITOS BÁSICOS DO JOGO DE XADREZ.....	26
<b>3.7.1</b>	<b>O movimento das Peças.....</b>	<b>26</b>
<b>3.7.2</b>	<b>A Notação Algébrica .....</b>	<b>30</b>
3.8	MOTORES COMPUTACIONAIS NA ANÁLISE DE POSIÇÕES NO XADREZ .....	32
<b>3.8.1</b>	<b>O uso de Redes Neurais em Motores de Xadrez.....</b>	<b>36</b>
<b>4</b>	<b>METODOLOGIA .....</b>	<b>41</b>
<b>5</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES.....</b>	<b>57</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO.....</b>	<b>74</b>
<b>7</b>	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>76</b>
<b>8</b>	<b>ANEXOS.....</b>	<b>79</b>
8.1	CÓDIGO DE VERIFICAÇÃO EXPERIMENTAL .....	79

## 1 INTRODUÇÃO

Claude Elwood Shannon nasceu em 30 de abril de 1916, na cidade de Petoskey, estado de Michigan, nos Estados Unidos. Desde sua juventude, evidenciou notável aptidão para matemática e engenharia elétrica. Realizou seus estudos na Universidade de Michigan, onde conquistou seu diploma de bacharel em engenharia elétrica em 1936. Shannon prosseguiu com sua formação na Universidade de Massachusetts, colaborando com o renomado matemático e engenheiro elétrico Vannevar Bush. No início da década de 1940, enquanto estava empregado nos Laboratórios Bell, Shannon publicou um trabalho inovador em parceria com Warren Weaver, intitulado "A Mathematical Theory of Communication" ("Uma Teoria Matemática da Comunicação"). Publicado em 1948, este artigo é amplamente reconhecido como o marco inicial da Teoria Matemática da Comunicação.

Antes de formular uma teoria abrangente, aplicou suas ideias principais em uma pesquisa sobre criptografia nos Laboratórios Bell. Devido às exigências estratégicas das forças armadas dos Estados Unidos durante a Segunda Guerra Mundial, a criptografia emergiu como um tema essencial que requeria compreensão e domínio. O sucesso dos serviços de inteligência dos EUA e do Reino Unido em decifrar as comunicações militares alemãs foi crucial para a vitória dos Aliados. (DE CARVALHO PINEDA,2006)

A teoria de Shannon forneceu uma poderosa ferramenta analítica na compreensão e quantificação no processo de transmissão de dados. Em seu núcleo, o conceito da Entropia de Shannon se destaca, no qual é capaz de quantificar a incerteza transmitida através de um sistema de comunicação. Em adição, o conceito de bit como a menor unidade de informação também foi elucidado, ditando-se os rumos da computação moderna. (NASCIMENTO,2019)

Shannon estudou os preceitos da eficiência no processo de transmissão da informação, estipulando conceitos essenciais em sua teoria como a redundância comunicativa e como alterando-se a eficiência de uma codificação arbitrária é possível maximizar a taxa de transmissão de dados. Sua teoria revolucionou diversas áreas na atualidade, dentre elas a ciência da computação, telecomunicações, criptografia, aprendizado de máquina, inteligência artificial, entre outras.

O conceito de entropia é essencial em diversas áreas científicas, sendo originária da termodinâmica antes de ser formulado na Teoria da Informação. Os conceitos de ambas as áreas são distintos, tanto em sua definição como aplicabilidade. No entanto, ambos representam o nível de desordem ou incerteza de um sistema.

A entropia termodinâmica clássica está diretamente relacionada ao grau de liberdade molecular de um sistema, em outras palavras, refere-se à quantidade de energia não disponível para realização de trabalho em um dado sistema. A segunda lei da termodinâmica estipula que, dado um sistema isolado termicamente, a variação da entropia será sempre maior ou igual a zero, ou seja, possui uma tendência intrínseca à desordem. Na formulação da mecânica estatística, define-se os conceitos de macroestados e microestados associados à distribuição de energia térmica. Elevando-se a entropia, aumenta-se a desordem do sistema e, conseqüentemente, reduz-se a disponibilidade de energia útil.

Por outro lado, a entropia de Shannon quantifica a incerteza associada à transmissão de informação em um sistema de comunicação. Ela mede a quantidade de informação média necessária para descrever ou representar um conjunto de dados. Quanto mais imprevisíveis ou aleatórios forem os dados, maior será a entropia de Shannon. A entropia de uma fonte é afetada pela distribuição de probabilidade associada à uma mensagem, e não a natureza de seu conteúdo. Em termos práticos, a entropia de Shannon é usada para quantificar a eficiência da compressão de dados e a capacidade de transmissão de informações em sistemas de comunicação.

Embora haja analogias notáveis entre os princípios de entropia da Mecânica Estatística e da Teoria da Informação, incluindo a correspondência formal entre a entropia de Shannon e uma representação análoga de entropia de Gibbs, a equiparação desses conceitos permanece como um tópico controverso e ainda não completamente elucidado. No entanto, é evidente a impactante presença da Teoria da Informação em várias esferas de pesquisa, pelo menos como uma nova abordagem para lidar com as questões já existentes. Essa influência tem sido proclamada e celebrada por seus formuladores, a maioria dos quais está envolvida no avanço das tecnologias digitais. (DE CARVALHO PINEDA,2006)

Para o escopo deste trabalho, enfatizou-se o emprego de princípios da Teoria da Informação no contexto do jogo de Xadrez a partir da utilização da Entropia de Shannon. Em termos específicos, uma análise concreta perante a relação entre a percentagem de ganho a partir de uma posição no tabuleiro arbitrária, efetuada por um dos melhores motores de xadrez (denominados *Engines*) da atualidade, *Stockfish*, e as respectivas distribuições de probabilidade inerentes a flutuação entrópica dos lances.

Motores computacionais são alvos de diferentes áreas de estudo. No entanto as áreas mais exploradas são a implementação de redes neurais e algoritmos de aprendizagem de máquina. Existem inúmeros motores computacionais com sua funcionalidade voltada para o xadrez (comumente denominados *Engines*), porém, o *Stockfish* é o *engine* mais difundido atualmente por se tratar de um programa com código aberto que possibilita o uso de seus recursos por uma diferente gama de usuários, sejam eles jogadores profissionais, amadores e pesquisadores no ramo da computação.

No xadrez, cada posição no tabuleiro representa um estado do sistema, e as jogadas possíveis são eventos que podem ocorrer a partir desse estado. A entropia de Shannon pode ser usada para avaliar a incerteza associada a uma posição específica, refletindo a variedade de escolhas disponíveis para os jogadores. Em termos simples, posições com maior entropia indicam uma gama mais ampla de opções e estratégias possíveis.



## 2 OBJETIVOS

Este trabalho teve por objetivo investigar os conceitos de Entropia formulado por Claude Shannon no desenvolvimento da Teoria da Informação, bem como sua aplicabilidade para determinar o comportamento da variação da entropia ao longo de inúmeras partidas do jogo de xadrez.

Através de códigos computacionais estipulados pela literatura e o uso de motores computacionais (*Stockfish*) que determinam a avaliação de cada lance no jogo de xadrez em termos de probabilidade de ganho, determinou-se a variação da Entropia de Shannon ao longo de partidas de xadrez jogadas na Copa do Mundo de Xadrez de 2021 e 2023 e, deste modo, computou-se as análises gráficas referentes à cada período para análise comparativa.

Em adição, através de dados retirados do website de xadrez lichess.org, computou-se a entropia de Shannon de duas partidas específicas para determinar se o comportamento das curvas de dispersão foi compatível com as análises gráficas extraídas dos códigos computacionais e da literatura.

### 3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

#### 3.1 A EVOLUÇÃO DA TEORIA DA INFORMAÇÃO E O CONCEITO MODERNO DE ENTROPIA

A Teoria Matemática da Comunicação, mais reconhecida como a Teoria da Comunicação de Shannon, surgiu sob a autoria de Claude Shannon no final da década de 1940. Seu objetivo principal foi fornecer uma estrutura matemática para quantificar a informação e os processos de comunicação.

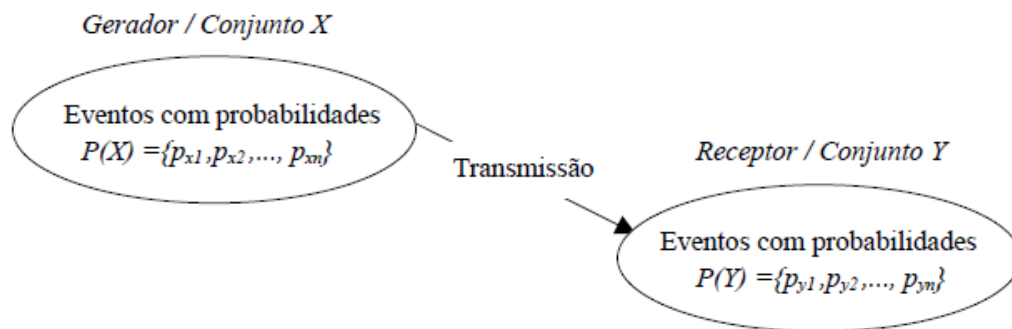
Um sistema de comunicação é constituído por um gerador de informação, um meio de transmissão e um receptor. O gerador de informação é identificado como um conjunto  $X$  de  $n$  eventos, cada um dos quais pode ser associado a valores de probabilidade  $P(X)$ . De maneira análoga, a recepção é caracterizada por um conjunto também composto por  $n$  eventos, aos quais estão vinculados valores de probabilidades  $P(Y)$ . Nesse contexto,  $P(X) = \{p_{x1}, p_{x2}, \dots, p_{xn}\}$  representa o conjunto de probabilidades associadas aos elementos do conjunto  $X$ , que representa a informação original, ao passo que  $P(Y) = \{p_{y1}, p_{y2}, \dots, p_{yn}\}$  indica o conjunto de probabilidades relacionadas ao conjunto  $Y$  de informação recebida. (FIRKOWSKI,2002)

No decorrer da transmissão, deve-se levar em consideração à deterioração de dados. Este corrompimento geralmente é expresso por dois fatores denominados Equivocação e Informação Útil, que estão diretamente relacionados à redução da incerteza e o aumento da eficácia comunicativa.

A informação útil, como é determinado pelo nome, indica o trecho da mensagem em que a informação é realmente efetiva. Ou seja, fornece uma redução maior no nível de incerteza para o receptor (diminuição da Entropia de Shannon).

A equivocação exerce o efeito oposto à informação útil, refere-se ao trecho da mensagem em que a informação é previsível. De certo modo a equivocação não auxilia de modo significativo na redução da incerteza do sistema. Em termos de eficiência na transmissão é favorável reduzir a equivocação e maximizar a informação útil.

Figura 1 - Sistema de Comunicação no ponto de vista da Teoria Matemática da Comunicação.



Fonte: Imagem adaptada de KINCHIN,1957. (FIRKOWSKI,2002)

Segundo os princípios da Teoria Matemática da Comunicação (TMC), para cada elemento de um conjunto de eventos atribui-se uma probabilidade  $p(x)$  correlativa. Por se tratar de dados probabilísticos, as distribuições encontram-se restritas no intervalo  $[0,1]$ , sendo que a soma total de seus elementos deve contabilizar o valor de 1. As distribuições de probabilidade devem ser estabelecidas com base em características específicas do conjunto. Por exemplo, tomando-se um dado equiprovável, pode-se dizer que o conjunto possui  $n = 6$  elementos, com uma distribuição de probabilidade  $p(x_i) = 1/n$ , ou seja, a probabilidade de que qualquer número seja escolhido é a idêntica referente à cada elemento.

A estipulação das probabilidades relacionadas aos elementos do conjunto  $X$  pode ser realizada por meio da aplicação de uma função que conecte os dados com base em critérios ou propriedades específicas. Por exemplo, pode-se atribuir a um conjunto de  $n$  pontos a probabilidade uniforme de  $1/n$  para cada elemento do conjunto. Contudo, caso seja identificada alguma propriedade que distinga os pontos no conjunto, valores de probabilidades distintos podem ser designados. (FIRKOWSKI,2002)

### 3.2 INFORMAÇÃO

Apesar de a palavra "informação" ser amplamente utilizada nos dias de hoje, seu significado possui certa abstração, tornando desafiadora a tarefa de defini-la. A informação, no contexto da TMC, não é interpretada no sentido comum do termo, mas sim como uma medida quantitativa da redução da incerteza. Desta forma, Claude Shannon definiu a quantidade de informação de uma mensagem com base na probabilidade associada a ela.

Para se compreender o cerne dessa definição, imagine a anúncio de duas informações: o primeiro afirma "Seu chefe, o Sr. João, acaba de descobrir que ganhou uma casa em um sorteio", e o segundo declara "Sua filha, Clara, descobriu que a panela é aquecida com fogo". É razoável esperar que a primeira notícia seja altamente surpreendente, enquanto a segunda, provavelmente, não nos causará tanto espanto.

Isso nos leva à inferência de que a primeira anúncio "transmitiu mais informação" do que o segunda. Em termos matemáticos, ao considerarmos um evento  $A$  com uma probabilidade  $P(A)$  de ocorrer, a informação associada à observação desse evento,  $I(P(A))$ , pode ser representada como (REZA, 1994):

$$I(P(A)) = \log_2 \left( \frac{1}{P(A)} \right) = -\log_2(P(A)) \quad (3.2.1)$$

É crucial destacar que essa magnitude, devido à utilização do logaritmo na base dois, é expressa em bits (ou "*shannons*"), medida formulada por Claude Shannon que representa a menor unidade de informação em sistemas binários. Uma alternativa seria empregar o logaritmo natural, resultando em uma medida em nats. Vale ressaltar que a medida bits, estipulada por Claude Shannon, no contexto da Teoria da Informação, não está restrita somente à valores discretos (0 ou 1), podendo assumir valores contínuos. Embora a denominação seja a mesma, no contexto da unidade binária, a medida bits possui aplicabilidade distinta.

Analisando-se uma moeda perfeitamente equilibrada, pode-se dizer que a informação vinculada à observação do resultado de um lançamento é de 1 bit, pois representa a quantidade de informação necessária para reduzir pela metade a incerteza associada a uma escolha entre duas alternativas equiprováveis (No

caso, cara e coroa). No entanto, ao observarmos o resultado do lançamento de um dado justo, no qual assume-se seis possíveis variáveis, a informação associada é de 2,585 bits. Se lidarmos com  $N$  eventos igualmente prováveis, a informação relacionada à observação de qualquer um deles é expressa por  $\log_2(N)$ .

### 3.3 ENTROPIA

Considerando-se uma variável aleatória discreta com uma função de massa de probabilidade representada por  $p(x) = P[X = x]$ . A entropia relacionada a essa variável é expressa pela seguinte fórmula: (SHANNON,1948)

$$H(X) = - \sum_x p(x) \log_2[p(x)] \quad (3.3.1)$$

Observe que a entropia é, em essência, a média das informações associadas às observações da variável aleatória. Podemos também afirmar que a entropia representa uma medida da incerteza média relacionada à variável (COVER & THOMAS, 1991). É relevante observar que a unidade de medida da entropia é a mesma da medida de informação utilizada, logo podemos expressar igualmente que:

$$H(x) = -E\{\log_2[P(x)]\} \quad (3.3.2)$$

Tomando-se  $E\{.\}$  como o operador de média estatística em relação à função de massa de probabilidade  $p(x)$ .

As diversas situações de entropia são determinadas pelo padrão dos valores de probabilidade dentro do conjunto de eventos. A entropia  $H(x)$  de um conjunto de eventos possui as seguintes características: (FIRKOWSKI,2002)

- A) Em um conjunto de  $n$  eventos, onde  $n - 1$  eventos têm probabilidade nula e apenas um evento tem probabilidade igual a 1, expresso como  $P(x) = \{0, 0, \dots, 0, 1\}$ , a entropia  $H(x)$  é igual a 0. Isso significa que, para esse conjunto, não há incerteza sobre qual evento ocorreu;

- B) Em um conjunto de  $n$  eventos em que todos possuem a mesma probabilidade  $p(X_i)$ , a entropia atingirá seu valor máximo, representado por  $H(X) \Rightarrow \max$ ; e
- C) Em um conjunto de  $n$  eventos em que as probabilidades  $p(X_i)$  variam, a entropia terá um valor diferente de zero, mas ainda menor que o valor máximo,  $0 < H(X) < \max$ .

A análise da eficiência de um sistema de comunicação requer a formulação de um conceito de similaridade aplicado aos dados. A similaridade é um valor situado no intervalo  $[0,1]$  (por se tratar de distribuições de probabilidades), referente à medida de proximidade entre dois conjuntos de dados. À medida que a possibilidade de confusão entre os dois elementos aumenta, o grau de similaridade também aumenta. Para cada elemento em um dado conjunto, corresponde à um elemento em um conjunto distinto no qual possui um grau de similaridade máximo. Elementos de um mesmo conjunto são semelhantes, e atingem o valor máximo de similaridade igual a 1.

A seguir encontram-se alguns exemplos que auxiliarão na compreensão de alguns conceitos estipulados.

### 3.3.1 Exemplos

Analisando-se uma variável aleatória que pode tomar dois valores, designados como  $X = a$  e  $X = b$ . Se estabelecermos que a probabilidade de  $X$  ser igual a  $a$  é  $p$ , conseqüentemente, a probabilidade de  $X$  ser igual a  $b$  será  $1 - p$ . Diante desse cenário, a equação que descreve a entropia de  $X$  será:

$$H(x) = -p \log_2(p) - (1 - p) \log_2(1 - p) \quad (3.3.1.1)$$

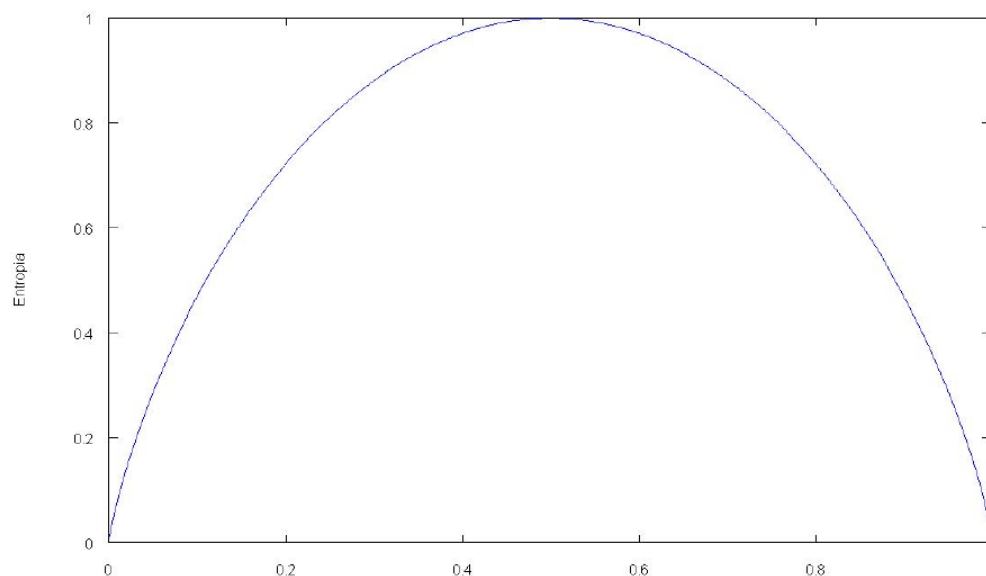
Assumindo-se, inicialmente, que os dois valores têm a mesma probabilidade, ou seja,  $p = 0.5$ . Sob essas condições, a entropia de  $X$ , denotada por  $H(X)$ , será de 1 bit. Em outras palavras, a informação média associada à observação será de 1 bit.

Em decorrência, suponha-se que o valor "a" tenha uma probabilidade de ocorrência maior, por exemplo,  $p = 0.7$ . Sob essas circunstâncias, a entropia de  $X$ , representada por  $H(X)$ , será de 0,8813 *bits*, indicando uma menor informação média associada. Intuitivamente, por que isso acontece? Em certa medida, a explicação reside no fato de que, quando um dos valores tem uma probabilidade mais alta do que o outro, temos uma "expectativa mais precisa" em relação ao resultado da observação de  $X$ , ou seja, uma menor incerteza. Portanto, é natural esperar uma redução na entropia em comparação com o caso de equiprobabilidade ( $p = 0.5$ ). Seguindo essa linha de raciocínio, é razoável supor que uma probabilidade ainda maior, como  $p = 0.9$ , resultaria em uma entropia ainda menor. Isso de fato se confirma, uma vez que  $H(X)$  seria de 0,469 bits nesse cenário. (BOCCATO; ATTUX,2020)

Ao empregar um limite, é viável demonstrar que, à medida que  $p$  se aproxima de um (e  $1 - p$  se aproxima de zero) ou à medida que  $p$  se aproxima de zero (e  $1 - p$  se aproxima de um), a entropia se tornará nula, visto que não existirá nenhuma incerteza. (WILEY,2006)

Na figura a seguir, exhibe-se a entropia para todas as possíveis probabilidades ( $p$ ). O gráfico reflete a discussão anterior: a entropia atinge o máximo no caso de equiprobabilidade (onde não favorecemos nenhum valor em particular) e se aproxima de zero nos extremos (onde não há incerteza).

Figura 2 - Entropia de uma Variável Aleatória com Dois Possíveis Valores.



Fonte: Adaptada de Reza,1994.

Com este exemplo, é possível destacar duas propriedades essenciais relacionadas à entropia, mesmo quando lidamos com uma variável aleatória que adota vários valores: a entropia atinge o valor máximo no caso de equiprobabilidade e se anula quando a probabilidade associada a um valor específico é igual a um (ou seja, no cenário determinístico).

Outro exemplo, evidenciado por (COVER & THOMAS, 1991), traz à tona a conversa sobre árvores de decisão. Suponha que uma variável aleatória esteja associada às seguintes probabilidades:  $P(X = a) = 0,5$ ,  $P(X = b) = 0,25$ ,  $P(X = c) = 0,125$  e  $P(X = d) = 0,125$ . Podemos calcular facilmente a entropia dessa variável, que resulta em  $H(X) = 1,75$ .

Agora, considere que tenhamos o interesse em conduzir um procedimento de decisão em formato de árvore para determinar o valor dessa variável. A primeira pergunta lógica seria: "X é igual a a?", uma vez que esse valor possui a maior probabilidade. Em seguida, pela mesma razão, formularíamos a pergunta: "X é igual a b?". Por fim, poderíamos indagar se "X é igual a c?" ou se "X é igual a d?", finalizando assim o processo. Assim, há uma probabilidade de 50% de resolver o problema com uma única pergunta, 25% de resolver com duas perguntas e 25% de chance de resolver com três perguntas. Em outros termos, o número médio de perguntas seria calculado como  $0,5 \times 1 + 0,25 \times 2 + 0,25 \times 3$ , resultando em 1,75. (BOCCATO; ATTUX, 2020)

A correspondência entre o número médio de perguntas e o valor da entropia não é coincidência. De fato, é possível demonstrar que o menor número médio de perguntas necessário para determinar o valor de uma variável aleatória estará situado entre  $[H(X), H(X) + 1]$  (COVER & THOMAS, 1991).

### 3.3.2 Entropia Conjunta e Entropia Condicional

A entropia conjunta mensura a incerteza relativa a dois ou mais eventos randômicos que ocorrem concomitantemente. Tomando-se duas variáveis aleatórias, a entropia conjunta avalia a incerteza média associada aos valores das variáveis.



A entropia conjunta de duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  é dada por (COVER & THOMAS, 1991):

$$H(X, Y) = - \sum_x \sum_y p(x, y) \log_2 [p(x, y)] = -E\{\log_2 [p(x, y)]\} \quad (3.3.2.1)$$

A entropia condicional quantifica a média de informação necessária para descrever um evento, dado a prévia ocorrência de outro evento. De outro modo, a entropia condicional mensura a incerteza remanescente de uma dada variável  $Y$  dado a existência de uma variável  $X$ . (Teoria [...], [201-?])

A entropia condicional  $H(Y|X)$ , por sua vez, é dada por:

$$H(Y|X) = - \sum_x \sum_y p(x, y) \log_2 [p(y|x)] \quad (3.3.2.2)$$

Um resultado bastante intrigante é que é possível expressar a entropia conjunta em termos da entropia condicional da seguinte maneira:

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y) \quad (3.3.2.3)$$

Uma desigualdade importante é a mostrada a seguir (REZA, 1994):

$$H(X) \geq H(X|Y) \quad (3.3.2.4)$$

A igualdade é válida apenas quando  $X$  e  $Y$  são estatisticamente independentes. A interpretação é clara: a incerteza relacionada a uma variável aleatória é maior ou igual à incerteza associada a essa variável, considerando que se tenha conhecimento de uma segunda variável aleatória, uma vez que essa segunda variável pode fornecer alguma informação sobre a primeira. No cenário menos favorável, a segunda variável aleatória não será relevante, resultando, portanto, na igualdade. (BOCCATO; ATTUX, 2020)

### 3.4 INFORMAÇÃO MÚTUA E DIVERGÊNCIA DE KULLBACK-LEIBLER

Uma medida fundamental é a informação mútua entre duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ . Essa medida, em essência, representa a diminuição no grau de incerteza relacionada a uma variável devido à informação fornecida pela outra variável. Em termos mais simples, a informação mútua de um par de variáveis  $X$  e  $Y$  é expressa por: (WILEY,2006)

$$I(X, Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) \quad (3.4.1)$$

Em conformidade com o que foi discutido na seção anterior, temos que  $I(X, Y) \geq 0$ , com igualdade ocorrendo somente quando  $X$  e  $Y$  são estatisticamente independentes. Isso faz sentido intuitivamente: se  $X$  for independente de  $Y$ , não ocorrerá redução na incerteza, uma vez que nenhuma informação relevante é fornecida! Destaca-se que a informação mútua se revela, assim, uma ferramenta robusta para mensurar a independência estatística. (BOCCATO; ATTUX,2020)

É possível demonstrar que a informação mútua também pode ser expressa do seguinte modo:

$$I(X, Y) = - \sum_x \sum_y p(x, y) \log_2 \left[ \frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} \right] \quad (3.4.2)$$

Essa definição pode ser interpretada de maneira fascinante, contudo, para compreendê-la é necessário introduzir uma medida denominada divergência de Kullback-Leibler. A divergência de Kullback-Leibler entre duas funções de massa de probabilidade de uma variável,  $p_1(x)$  e  $p_2(x)$ , é expressa por:

$$D(p_1||p_2) = \sum_x p_1(x) \log_2 \left[ \frac{p_1(x)}{p_2(x)} \right] \quad (3.4.3)$$

Duas características bastante significativas incluem:  $D(p_1||p_2) \geq 0$  e  $D(p_1||p_2) = 0$  se e somente se  $p_1(x) = p_2(x)$ . No entanto, não podemos afirmar que isso constitui uma métrica de distância, uma vez que as condições da desigualdade triangular e da propriedade de simetria não são atendidas.

Ao analisarmos a expressão fornecida para a informação mútua, observamos que ela pode ser interpretada como a divergência de Kullback-Leibler no contexto de duas variáveis aleatórias,  $X$  e  $Y$ . Essa divergência ocorre entre a distribuição conjunta  $p(x,y)$  e o produto das distribuições marginais de probabilidade,  $p(x)$  e  $p(y)$ . Quando as variáveis são independentes, a igualdade  $p(x,y) = p(x)p(y)$  é válida. Portanto, a informação mútua essencialmente mensura o grau de dependência estatística entre as variáveis, avaliando a discrepância entre a distribuição conjunta de probabilidade e o produto das distribuições marginais. (WILEY,2006)

### 3.4.1 Informação Mútua e Capacidade de Canal

A importância da informação mútua na teoria da codificação é destacada devido à sua capacidade de avaliar limites para a transmissão eficiente de mensagens ao analisar a relação entre a entrada e a saída de um canal de comunicação. Esse aspecto é crucial para a teoria contemporânea de transmissão de dados. Ao associarmos a variável aleatória  $X$  à mensagem transmitida e a variável aleatória  $Y$  à mensagem recebida após atravessar o canal de comunicação, podemos definir a quantidade  $I(X,Y)$  expressa na equação 3.4.1. Essa grandeza, como discutido anteriormente, revela aspectos fundamentais do desempenho do canal. Por exemplo, considerando um canal tão destrutivo a ponto de tornar as mensagens recebidas independentes do que foi enviado, a informação mútua será nula, indicando a ausência de um fluxo efetivo de informação do transmissor para o receptor. Em contrapartida, se  $Y$  for fortemente dependente de  $X$ , podemos inferir a possibilidade de estabelecer algum grau de comunicação satisfatória. (BOCCATO; ATTUX,2020)

No trabalho pioneiro de Shannon em 1948, foi introduzida uma medida essencial para a comunicação, a capacidade do canal, formulada em relação à informação mútua. Na configuração de transmissão que se delineou, pode-se afirmar que a capacidade do canal, representada por  $C$ , é estabelecida por: (SHANNON,1948)

$$C = \max_{p(x)} I(X,Y) \quad (3.4.1.1)$$

De forma mais clara, a capacidade do canal, em um cenário ideal, expõe a informação mútua entre a mensagem transmitida e a mensagem recebida. Em outras palavras, ela aponta para a máxima dependência desejada (ou seja, o fluxo de informação "ideal") entre o transmissor e o receptor. Essa condição é atingida manipulando as probabilidades de envio, representadas por  $p(x)$ . Isso é fundamental: ao ajustar as probabilidades de envio de símbolos, é possível controlar a informação mútua, sugerindo de maneira intuitiva que uma codificação eficaz pode simplificar a transmissão de dados. (BOCCATO; ATTUX,2020)

Em resumo, Shannon provou que é possível atingir todas as taxas de transmissão inferiores à capacidade do canal ( $C$ ) através de um processo de codificação apropriado, permitindo operar nessas taxas com uma probabilidade de erro tão baixa quanto desejada. O resultado de Shannon é uma afirmação de existência, garantindo que existe um processo de codificação para assegurar uma transmissão eficiente, embora não forneça detalhes específicos sobre esse processo. Na teoria de codificação, ao propor e aplicar um código a uma classe específica de tarefas, é comum avaliar o quão próximo ele está do limite de Shannon. (BOCCATO; ATTUX,2020)

É crucial observar que o teorema implica que a capacidade do canal atua como um "limite de velocidade" para a comunicação segura. Exceder esse limite resultaria em uma transmissão além da capacidade de fluxo de informação do meio, resultando em erros inevitáveis. Metáforas como o fluxo de tráfego em uma avenida congestionada ou o movimento de um fluido em um gargalo são aplicáveis. No entanto, o teorema vai além, afirmando que, se não tentarmos ultrapassar esse limite, é teoricamente possível realizar uma comunicação confiável, contanto que a informação seja codificada de maneira apropriada. A pesquisa avançada nas diversas áreas de transmissão de dados se concentra em estratégias eficientes para essa tarefa. (BOCCATO; ATTUX,2020)

### 3.5 VARIÁVEIS CONTÍNUAS ALEATÓRIAS

Os princípios fundamentais discutidos permanecem essencialmente válidos ao lidar com variáveis aleatórias que têm valores no domínio real.

Na situação contínua, a entropia diferencial de uma variável aleatória é definida como: (WILEY,2006)

$$H(X) = - \int_x p(x) \ln[p(x)] dx \quad (3.5.1)$$

Diferentemente do que ocorria nas situações discretas, a entropia diferencial pode apresentar valores negativos. No entanto, a propriedade a seguir ainda permanece válida: (BOCCATO; ATTUX,2020)

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y) \quad (3.5.2)$$

e a definição de informação mútua entre duas variáveis aleatórias é análoga: (WILEY,2006)

$$I(X, Y) = \iint_{x,y} p(x, y) \ln\left[\frac{p(x, y)}{p(x)p(y)}\right] dx dy \quad (3.5.3)$$

A entropia diferencial assume valores negativos quando a distribuição de probabilidade,  $p(y)$ , de uma variável  $y$  for razoavelmente próxima da distribuição de probabilidade,  $p(x)$ , de uma variável  $x$ . Deste modo, valores negativos de entropia diferencial indicam que  $p(y)$  está supervalorizando a incerteza associada à  $p(x)$ .

A essência da informação mútua permanece como uma divergência de Kullback-Leibler, mesmo quando aplicada a variáveis contínuas. Ela é formulada de maneira análoga, preservando as propriedades fundamentais, e é representada por  $I(X, Y) = D(p(x, y) || p(x)p(y))$ . (BOCCATO; ATTUX,2020)

### 3.5.1 Densidade de Máxima Entropia

Considerando a definição de entropia diferencial, surge a indagação: qual seria a densidade de probabilidade que resulta na entropia máxima? Por si só, essa pergunta pode parecer sem sentido, dado que a entropia diferencial é

ilimitada. No entanto, sob determinadas restrições, essa questão torna-se bastante intrigante. (BOCCATO; ATTUX,2020)

É possível determinar as densidades que apresentam máxima entropia, principalmente quando sujeitas a um conjunto de restrições associadas aos momentos. Por exemplo, podemos procurar a densidade de máxima entropia com o primeiro momento igual a  $m_1$ , o segundo momento igual a  $m_2$  e o terceiro momento igual a  $m_3$ . Nessas condições, as restrições conferem significado ao problema, evitando soluções triviais ou divergentes. (BOCCATO; ATTUX,2020)

Quando são aplicadas restrições aos primeiro e segundo momentos, é demonstrável (COVER & THOMAS, 1991) que a densidade com máxima entropia se alinha com a distribuição gaussiana. Em contraste, ao introduzirmos uma restrição de outra natureza, como a condição de que a densidade tenha valores não nulos apenas em uma faixa específica de  $x_1$  a  $x_2$ , a densidade de máxima entropia transforma-se na distribuição uniforme.

### 3.6 ENTROPIA CRUZADA

Suponha-se que  $P(.)$  e  $Q(.)$  sejam duas funções de massa de probabilidade, ou que  $p(.)$  e  $q(.)$  sejam duas densidades de probabilidade. A entropia cruzada é: (WILEY,2006)

$$H_c(P, Q) = E_p\{-\text{Log}Q\} \quad (3.6.1)$$

Ou,

$$H_c(p, q) = E_p\{-\text{Log}q\} \quad (3.6.2)$$

Deste modo, vale a seguinte relação:

$$H_c(P, Q) = H(P) + D(P||Q) \quad (3.6.3)$$

Ou,

$$H_c(p, q) = H(p) + D(p||q) \quad (3.6.4)$$

Uma característica crucial é que a minimização da entropia cruzada em relação a  $Q$  é equivalente à minimização da divergência  $D(\cdot)$ , uma vez que o termo  $H(P)$  permanece inalterado (GOODFELLOW ET AL., 2016).

### 3.7 CONCEITOS BÁSICOS DO JOGO DE XADREZ

#### 3.7.1 O movimento das Peças

Para a determinação do avanço do conceito de entropia de Shannon aplicada ao xadrez é necessário a exposição de alguns conceitos básicos do jogo, visto que, a variação entrópica ao longo de uma partida está diretamente relacionado com o grau de mobilidade das peças.

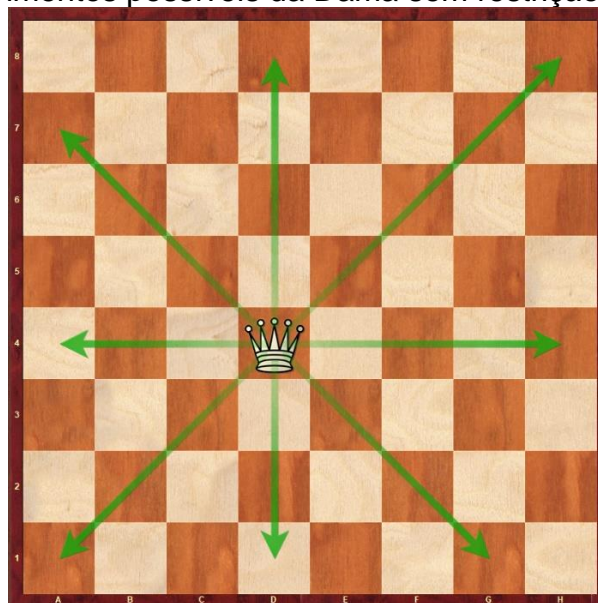
Figura 3 - Movimentos possíveis do rei sem restrição de movimento.



Fonte: Autor.

O Rei possui a habilidade de mover-se em linhas retas e diagonais, porém, somente uma casa em qualquer direção.

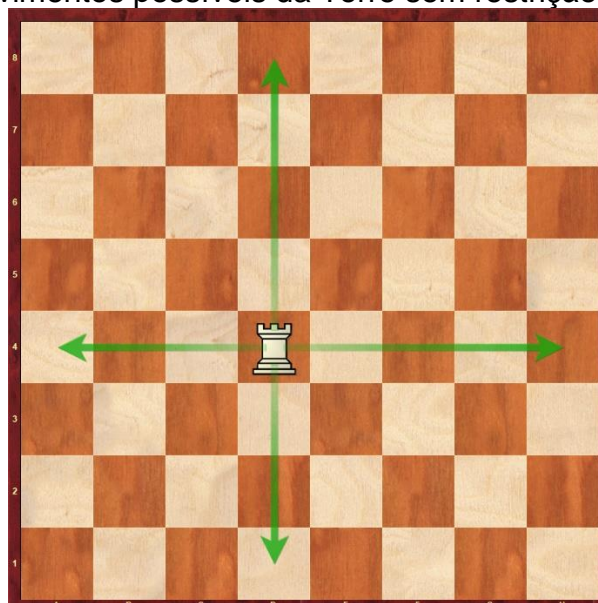
Figura 4 - Movimentos possíveis da Dama sem restrição de movimento.



Fonte: Autor.

A Dama, por outro lado, move-se tanto em linhas retas (verticais e horizontais) e diagonais, sem restrição quanto ao número de casas (desde que não haja outras peças no caminho).

Figura 5 - Movimentos possíveis da Torre sem restrição de movimento.

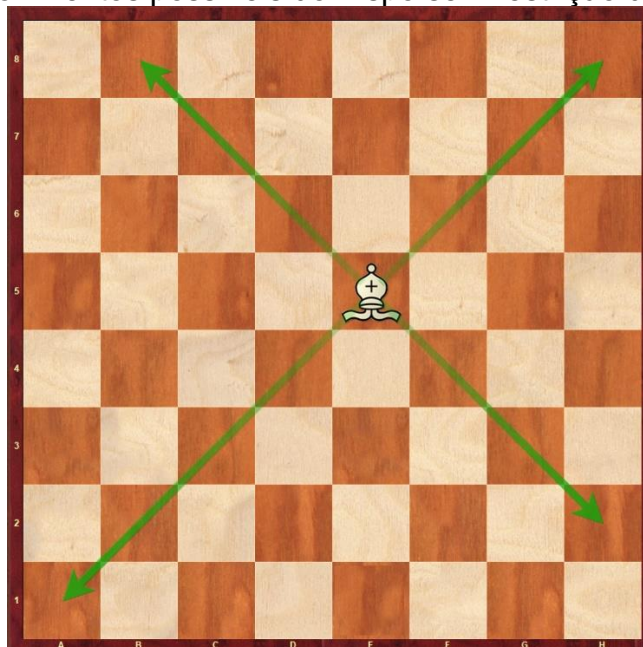


Fonte: Autor.



A Torre se movimenta ao longo de linhas horizontais e verticais, sem restrição quanto ao número de casas (desde que não haja outras peças no caminho).

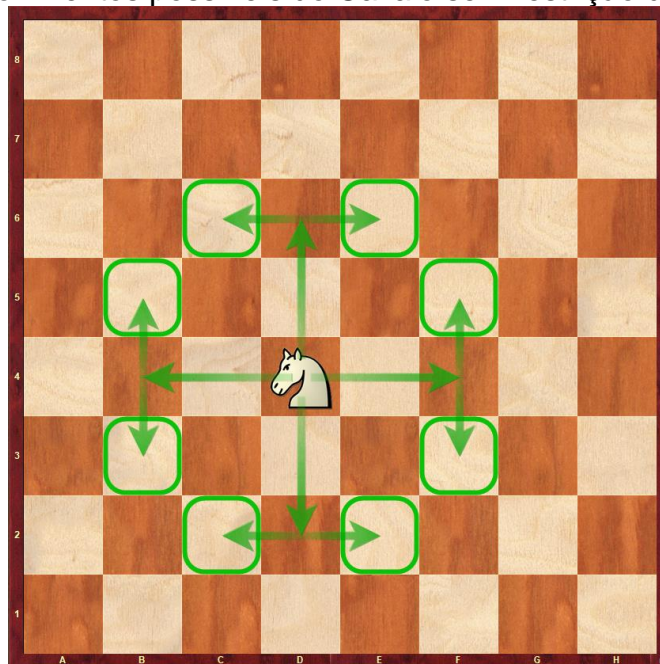
Figura 6 - Movimentos possíveis do Bispo sem restrição de movimento.



Fonte: Autor.

O Bispo move-se ao longo das diagonais, sem restrição quanto ao número de casas (desde que não haja outras peças no caminho).

Figura 7 - Movimentos possíveis do Cavalo sem restrição de movimento.



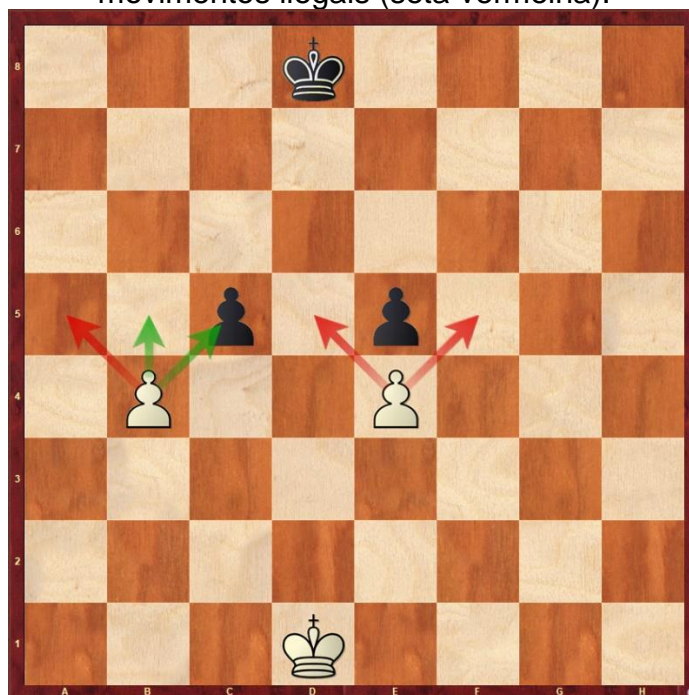
Fonte: Autor.

O cavalo faz o movimento em forma de “L”, de outro modo, movimentando-se três casas de um lado e duas de outro. Como pode-se observar na Figura 7 a peça somente pode se mover para as casas destacadas. O cavalo é a única peça no jogo que possui a capacidade de “saltar” sobre outras peças, tanto suas, quanto do adversário (desde que o destino final não seja ocupado por uma peça da própria cor).

As peças capturam da mesma forma como se movem. A peça do adversário só é capturada posicionando-se na casa da peça capturada.

O peão é a única exceção do jogo em que se move de uma forma e se captura de outro modo; movendo-se somente em linha reta para frente e exercendo a captura na diagonal, como exemplificado na Figura 8.

Figura 8 - Movimentos e capturas possíveis dos peões (seta verde) e movimentos ilegais (seta vermelha).



Fonte: Autor.

### 3.7.2 A Notação Algébrica

Nesse sistema, as colunas do tabuleiro são numeradas de 1 a 8 (das brancas às pretas). Por sua vez, as linhas são nomeadas de “a” a “h”. Na combinação entre as letras e números, cada casa receberá uma nomenclatura para auxiliar na demarcação das jogadas.

A formulação algébrica é essencial para o armazenamento de milhares de partidas no banco de dados. Cada partida é processada no formato de *Portable Game Notation (PGN)*, no qual armazena-se informações referentes aos lances das partidas, os nomes dos jogadores, resultados, entre outros.

Figura 9 - Notação Algébrica referente a demarcação das casas de um tabuleiro de xadrez convencional.

8	a8	b8	c8	d8	e8	f8	g8	h8
7	a7	b7	c7	d7	e7	f7	g7	h7
6	a6	b6	c6	d6	e6	f6	g6	h6
5	a5	b5	c5	d5	e5	f5	g5	h5
4	a4	b4	c4	d4	e4	f4	g4	h4
3	a3	b3	c3	d3	e3	f3	g3	h3
2	a2	b2	c2	d2	e2	f2	g2	h2
1	a1	b1	c1	d1	e1	f1	g1	h1
	a	b	c	d	e	f	g	h

Fonte: Domínio Público.

Figura 10 - Exemplo de uma partida de xadrez armazenada em formato PGN.

```
[Event "Smyslov - Botvinnik World Championship Rematch"]
[Site "Moscow URS"]
[Date "1958.04.01"]
[EventDate "?"]
[Round "11"]
[Result "1-0"]
[White "Vasily Smyslov"]
[Black "Mikhail Botvinnik"]
[ECO "D98"]
[WhiteElo "?"]
[BlackElo "?"]
[PlyCount "47"]

1.d4 Nf6 2.c4 g6 3.Nc3 d5 4.Nf3 Bg7 5.Qb3 dxc4 6.Qxc4 O-O 7.e4
Bg4 8.Be3 Nfd7 9.Rd1 Nb6 10.Qb3 Nc6 11.d5 Ne5 12.Be2 Nxf3+
13.gxf3 Bh5 14.h4 Qd7 15.a4 a5 16.Nb5 Nc8 17.Bd4 Nd6 18.Bxg7
Kxg7 19.Nd4 Kg8 20.Rg1 Qh3 21.Qe3 c5 22.dxc6 bxc6 23.Qg5 c5
24.Nc6 1-0
```

Fonte: Retirado de lichess.org.

### 3.8 MOTORES COMPUTACIONAIS NA ANÁLISE DE POSIÇÕES NO XADREZ

Motores computacionais são alvos de diferentes áreas de estudo na atualidade. No entanto as áreas mais exploradas são a implementação de redes neurais e algoritmos de aprendizagem de máquina. Existem inúmeros motores de computador com sua funcionalidade voltada para o xadrez (comumente denominados Engines), porém, o *Stockfish* é o *Engine* mais difundido atualmente por se tratar de um programa com código aberto que possibilita o uso de seus recursos por uma diferente gama de usuários, sejam eles jogadores profissionais, amadores e pesquisadores no ramo da computação.

O xadrez em sua essência é um jogo determinístico, o que significa que para uma dada entrada no sistema, todas as saídas serão idênticas. Por exemplo, se uma dama captura um cavalo o único resultado possível é a ação da dama tomar a peça do oponente. No entanto, analisando-se o jogo de xadrez no ramo computacional pode-se dizer que não seja totalmente determinístico. Deste modo, os motores de computador utilizam avaliações probabilísticas para determinar a maior probabilidade de ganho ou menor probabilidade de perda em uma dada posição arbitrária. O *Stockfish*, assim como qualquer outro motor de computador moderno, baseia-se nos três resultados possíveis que podem ocorrer no jogo de xadrez, empate, vitória das brancas ou vitória das pretas. Deste modo, o *Stockfish* utiliza um sistema de avaliação decimal para determinar qual das cores está melhor na posição; ou seja, valores negativos indicam vantagem para as pretas, valores positivos indicam vantagem para as brancas e valores entre  $-0.3$  e  $+0.3$  indicam igualdade técnica no tabuleiro.

A qualidade relativa de uma posição no tabuleiro é calculada através da unidade de medida *centipawn*, que basicamente refere-se à centésima parte de um peão. Por exemplo, uma avaliação de  $+2.0$  indica grande vantagem das brancas e a taxa de conversão em vitória tende a aumentar à medida que esse valor cresça. O equilíbrio de Nash misto apresenta um conceito análogo, segundo HAMZA, 2022, não há uma estratégia pura no xadrez, como uma jogada "forçada", mas há abordagens que são estatisticamente mais eficazes, apresentando-se como uma combinação de probabilidades decimais.

Para uma compreensão mais profunda em relação ao método de avaliação de motores computacionais é necessário determinar o valor relativo

das peças no jogo de xadrez. Assim como o sistema internacional utiliza o metro como unidade de medida de comprimento, utiliza-se o valor do peão para quantificar os valores relacionais das peças.

Figura 11 - Valores relativos das peças de xadrez.

$$(\text{♔}, \text{♚}, \text{♖}, \text{♗}, \text{♘}, \text{♙}) = (\infty, 9, 5, 3, 3, 1)$$

Fonte: On the Value of Chess Squares (Gupta et al., 2023).

Estudos recentes através de métodos avançados de *machine learning* demonstraram novos valores relacionais: (Gupta et al., 2023)

Figura 12 - Valores relativos das peças de xadrez a partir de algoritmos avançados de Machine Learning.

$$(\text{♔}, \text{♚}, \text{♖}, \text{♗}, \text{♘}, \text{♙}) = (\infty, 9.82, 4.93, 3.28, 3.16, 1)$$

Fonte: On the Value of Chess Squares (Gupta et al., 2023).

No entanto, observa-se que a unidade fixa, independentemente do método relacional, sempre corresponde ao valor do peão igual a um.

*Centipawn* é a unidade de medida que correlaciona o valor relativo do peão em termos de vantagem de material em uma determinada posição. Como dito anteriormente, um *centipawn* corresponde à 1/100 do valor de um peão. A divisão por cem possibilita demarcar de modo mais preciso pequenas vantagens no tabuleiro, sejam eles o equilíbrio estático, equilíbrio dinâmico, equilíbrio estratégico, entre outros.

A avaliação sempre ocorre na orientação das brancas, se em uma dada posição o *Engine* demarca uma vantagem de +1.5 seria o equivalente à 150 centipawns, ou seja, uma desvantagem de um peão e meio para as pretas. No entanto, não necessariamente as pretas perderam material, considerações estratégicas e táticas também afetam a avaliação final.

Abaixo, na Figura 13, encontra-se uma imagem exemplificada de uma posição no qual o *engine*, *Stockfish 16*, executa a avaliação de cinco jogadas

para as brancas; sendo que cada lance possui uma variação de *centipawn* distinta.

Pode-se observar que a jogada roque (0 – 0) remete à uma vantagem de +0.7, enquanto que, um lance inferior como peão em a3 leva a igualdade. Como descrito anteriormente, uma avaliação de +0.7 equivale a 70 *centipawns*.

Figura 13 - Avaliação do lance das brancas de uma posição arbitrária através do Engine Stockfish 16.



Fonte: Retirado de Lichess.org.

Para o escopo deste trabalho, vale ressaltar que é possível o armazenamento de lances com a sua respectiva avaliação do *engine* no formato de *PGN*. Deste modo, seremos capazes de calcular a probabilidade de ganho em cada posição e subsequentemente determinar a variação da entropia de Shannon ao longo de uma partida.

Figura 14 - Armazenamento dos lances de uma partida de xadrez no formato PGN com as respectivas avaliações do Stockfish após cada lance.

```
[Event "Saint Louis Rapid 2019"]
[Site "Saint Louis USA"]
[Date "2019.08.11"]
[Round "4.1"]
[White "Caruana, F."]
[Black "Carlsen, M."]
[Result "1-0"]
[WhiteElo "2818"]
[BlackElo "2882"]
[Variant "Standard"]
[TimeControl "--"]
[ECO "B30"]
[Opening "Sicilian Defense: Nyezhmetdinov-Rossolimo Attack"]
[Termination "Normal"]
[Annotator "lichess.org"]

1. e4 { [%eval 0.24] } 1... c5 { [%eval 0.2] } 2. Nf3 { [%eval 0.21] }
2... Nc6 { [%eval 0.08] } 3. Bb5 { [%eval 0.13] } { B30 Sicilian Defense:
Nyezhmetdinov-Rossolimo Attack } 3... e6 { [%eval 0.48] } 4. Bxc6 {
[%eval 0.26] } 4... bxc6 { [%eval 0.25] } 5. d3 { [%eval 0.04] } 5... Ne7
{ [%eval 0.02] } 6. b3 { [%eval 0.0] } 6... Ng6 { [%eval 0.35] } 7. h4 {
[%eval 0.19] } 7... h5 { [%eval 0.47] } 8. e5 { [%eval 0.13] } 8... f6 {
[%eval 0.17] } 9. Nbd2 { [%eval 0.37] } 9... d6 { [%eval 0.51] } 10. exd6
{ [%eval 0.65] } 10... e5 { [%eval 0.58] } 11. Bb2 { [%eval 0.17] } 11...
Bg4 { [%eval 0.49] } 12. Qe2 { [%eval 0.36] } 12... Qxd6 { [%eval 0.51] }
13. g3 { [%eval 0.1] } 13... Be7 { [%eval 0.58] } 14. O-O-O?! { (0.58 → -
0.09) Inaccuracy. Qe4 was best. } { [%eval -0.09] } (14. Qe4 Nf8) 14...
Nf8?! { (-0.09 → 0.87) Inaccuracy. Qd5 was best. } { [%eval 0.87] }
(14... Qd5 15. Qe3) 15. Rde1 { [%eval 0.7] } 15... Ne6?! { (0.70 → 1.35)
Inaccuracy. Qd5 was best. } { [%eval 1.35] } (15... Qd5 16. Qe3) 16. Qe4
{ [%eval 1.4] } 16... Qd5 { [%eval 1.74] } 17. Nxe5 { [%eval 1.73] }
17... Qxe4 { [%eval 2.03] } 18. dxe4 { [%eval 1.94] } 18... fxe5 { [%eval
2.0] } 19. f3 { [%eval 1.84] } 19... Nd4 { [%eval 1.79] } 20. fxe4 {
[%eval 2.06] } 20... hxe4 { [%eval 2.08] } 21. Nc4 { [%eval 1.94] } 21...
O-O { [%eval 1.94] } 22. Kb1 { [%eval 1.51] } 22... Rf2 { [%eval 1.74] }
23. Nxe5 { [%eval 1.76] } 23... Nxc2 { [%eval 1.71] } 24. Nxe4 { [%eval
1.62] } 24... Rg2 { [%eval 2.0] } 25. Reg1 { [%eval 1.53] } 25... Re2 {
[%eval 1.5] } 26. h5 { [%eval 1.14] } 26... c4? { (1.14 → 2.40) Mistake.
Rxe4 was best. } { [%eval 2.4] } (26... Rxe4 27. Kxc2) 27. h6 { [%eval
2.25] } 27... c3?? { (2.25 → 5.09) Blunder. Na3+ was best. } { [%eval
5.09] } (27... Na3+ 28. Bxa3 Bxa3 29. h7+ Kh8 30. Ne5 g6 31. Nxe6+ Kg7
32. h8=Q+ Rxh8 33. Nxe6 c3 34. Rc1) 28. h7+ { [%eval 4.93] } 28... Kf7 {
[%eval 4.71] } 29. Rf1+ { [%eval 3.81] } 29... Bf6? { (3.81 → 7.05)
Mistake. Ke6 was best. } { [%eval 7.05] } (29... Ke6 30. Rf2 Na3+ 31.
Bxa3 c2+ 32. Kb2 c1=R+ 33. Kxc1 Bxa3+ 34. Kd1 Rxf2 35. Nxf2 Rh8 36. Nd3)
30. Bc1 { [%eval 6.96] } 30... Nb4 { [%eval 7.22] } 31. e5 { [%eval 7.22] }
31... Rxa2 { [%eval 7.0] } 32. Ne3 { [%eval 6.64] } 32... Rh8 { [%eval
8.43] } 33. exf6 { [%eval 8.33] } 33... g5 { [%eval 8.23] } 34. Rd1 {
[%eval 7.75] } 34... a5 { [%eval 10.53] } 35. Rd4 { [%eval 9.49] } 35...
c2+ { [%eval 9.21] } 36. Nxc2 { [%eval 8.88] } 36... Rxc2 { [%eval 8.32] }
37. Rxb4 { [%eval 8.77] } 37... Rxc1+ { [%eval 8.76] } 38. Kxc1 {
[%eval 8.31] } 38... axb4 { [%eval 7.9] } 39. Rh6 { [%eval 7.45] } {
Black resigns.} 1-0
```

Fonte: Retirado de Lichess.org.

Como pode-se observar, a medida “%eval” após cada lance corresponde a avaliação da posição em relação ao que o computador considera o melhor lance; ou, o que determina a maior probabilidade de ganho em uma dada posição arbitrária



### 3.8.1 O uso de Redes Neurais em Motores de Xadrez

Aplicar algoritmos de conhecimento humano à motores de computadores de xadrez é uma prática que remete aos primórdios dos anos noventa, na derrota do então campeão mundial Gary Kasparov contra o motor de computador desenvolvido pela IBM, Deep Blue. As avaliações clássicas no xadrez computacional baseiam-se em funções heurísticas, incorporando o conhecimento humano de conceitos pré-estabelecidos no xadrez à um método de avaliação estática. No entanto, a inserção manual de conhecimento em algoritmos computacionais limita, de certa forma, sua funcionalidade. Em uma árvore de decisões, por exemplo, as limitações podem acarretar, erroneamente, em uma avaliação que apresenta vantagem decisiva para um dos lados sendo que o oposto é verdadeiro. Segundo HAMZA,2022, A função de avaliação estática tira partido da natureza determinística do jogo, mas é necessário percorrer novos caminhos para lidar com o elemento de aleatoriedade.

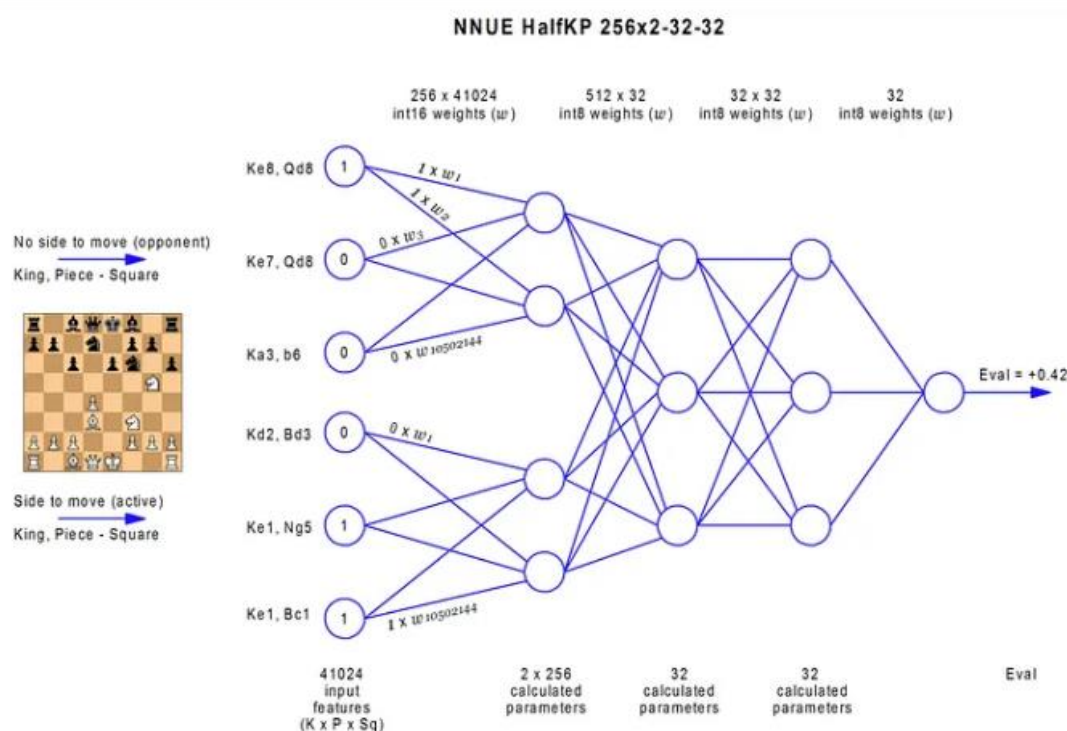
Na era que precedeu o uso de redes neurais, os motores de computador baseavam-se somente em um conjunto de regras previamente estipuladas para determinar a avaliação em uma dada posição arbitrária, conceitos como casas fracas, equilíbrio dinâmico, equilíbrio estático, vantagem de material, de espaço, entre outros, eram incorporados em forma de algoritmos computacionais no auxílio da avaliação do *engine*. Contudo, com o avanço da computação na era moderna, em 2018 foram feitas as primeiras implementações de redes neurais em motores de computador, especificamente no programa desenvolvido pelo Google denominado *Alphazero*. A superioridade da máquina com o auxílio de redes neurais foi provada quando o atual melhor motor computacional de xadrez da época, *Stockfish*, foi derrotado de maneira convincente por seu sucessor com um total de cinquenta e duas vitórias para o motor computacional desenvolvido pelo Google e onze vitórias para o *Stockfish* (AlphaZero-Stockfish [...], 2019). Por conseguinte, a avaliação de *engines* somente em preceitos clássicos de conhecimento humano foi-se sucumbindo à implementação de redes neurais.

A função de avaliação neural é baseada na arquitetura *NNUE* de Yu Nasu (Efficiently Updatable Neural-Network-based Evaluation Functions for Computer Shogi, Yu Nasu, 2018). A maioria dos motores de computadores modernos utilizam esse método de avaliação, seja pela sua eficiência e devido ao fato de

que para sua implementação só é necessário o uso de uma unidade central de processamento, sendo que não requer unidade de processamento gráfico. (CHAMPION,2021)

A rede neural *NNUE* consiste basicamente de 4 camadas, sendo três delas interligadas e uma quarta camada como uma extensão de saída que fornece a avaliação da posição. Em sua fase de otimização (auto treinamento) o Stockfish NNUE incorpora dados de uma enorme gama de avaliações referentes às posições calculadas em versões obsoletas do *Stockfish* e utiliza essas informações como forma de auto aprimoramento em seu método de avaliação. Desta forma, o *stockfish nnue* avaliando milhares de posições por segundo e é mais eficiente que as versões de avaliação clássica do stockfish analisando milhões de posições por segundo; uma vez que o conhecimento prévio de sua fase de otimização é armazenado.

Figura 15 - Arquitetura de uma rede neural NNUE.



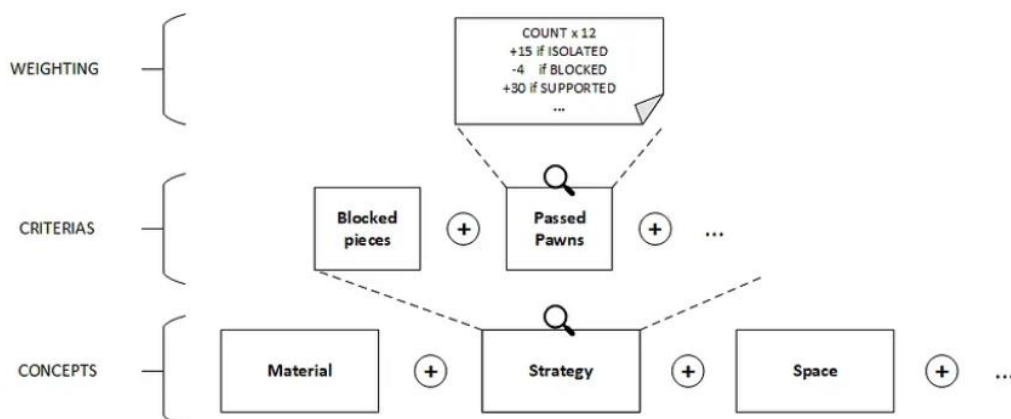
Fonte: Roman Zhokov, Stockfish NN Release (NNUE), Talkchess. (CHAMPION,2021)

A figura 15 representa as três camadas ocultas da rede neural *NNUE* e a camada de saída, no qual é gerada a avaliação. Os bits de entrada na primeira camada são divididos em duas metades, no qual a primeira metade consiste na localização do rei e das peças do jogador que possui a vez em uma determinada posição. Na segunda metade, considera-se a localização das peças do adversário em relação à posição avaliada. As camadas subsequentes, de duas metades de 256 nodos e de 32 nodos, são responsáveis pela junção dos bits de entradas referente à localização das peças de ambos jogadores e, conseqüentemente, a determinação da avaliação final do motor computacional em *centipawn*. (KLEIN,2022)

De certa forma, o *Stockfish NNUE* não pode ser considerado uma tecnologia completamente inovadora pois utiliza parâmetros e avaliações de versões anteriores de si. Computadores modernos usam métodos iterativos para exercerem cálculos complexos; por exemplo, tomando-se um valor multiplicativo entre dois números arbitrários  $x$  e  $y$  no qual  $x * y = z$ , se quiséssemos obter o valor de  $x * (y + 1)$  não é necessário utilizar o método multiplicativo desde o início, ou seja, deve-se exercer a equação algébrica da seguinte maneira em que  $x * (y + 1) = x * y + x = z + x$ ; deste modo, pode-se utilizar o valor previamente estipulado de  $z$  para reduzir o tempo de cálculo computacional da equação. De forma análoga, o *Stockfish NNUE* utiliza o mesmo princípio para aumentar a eficiência e confiabilidade de suas avaliações através do conhecimento prévio de posições que possuem padrões muito similares. (NARAYANAN,2021)

Vale ressaltar que o *Stockfish NNUE*, além do uso das redes neurais também utiliza métodos de avaliações clássicas. A junção de algoritmos heurísticos e técnicas de aprendizagem de máquina implementados de maneira ponderada podem ocasionar maior eficiência no método de avaliação final.

Figura 16 - Avaliação Clássica do Stockfish dada a utilização de conceitos humanos.



Fonte: Publicado em Towards Data Science. (CHAMPION,2021)

O *Stockfish* utiliza um método de cálculo a partir do algoritmo *Minimax* que consiste em uma técnica de escolha de ações utilizada em jogos com dois participantes que se alternam. O algoritmo tende a selecionar as jogadas com maior probabilidade de ganho, sempre assumindo que a cor oposta também reproduza os melhores lances. O conceito principal do método *Minimax* consiste em simular todos os potenciais lances em um jogo até um determinado nível de profundidade e atribuir um valor referente à cada posição analisada. Esse valor é calculado levando em consideração a avaliação de cada posição específica, evidenciando quão vantajosa é a posição naquele dado momento. O método, então, seleciona o movimento que maximize ou minimize esses valores, dependendo se é o turno do jogador que possuiu uma avaliação positiva ou negativa.

O algoritmo minimax representa cada lance como um estado inicial, na medida em que o lance é escolhido o estado se reformula novamente. Dessa maneira, cria-se um diagrama de árvore para visualizar todas as possíveis jogadas e respostas até uma determinada profundidade. Cada folha da árvore recebe um número, geralmente calculado por meio de uma função de avaliação que representa a utilidade do estado para um dos lados específicos (cores pretas ou brancas). Esses números são propagados para cima na árvore, alternadamente maximizando e minimizando os valores conforme se move para cima. O lado que busca maximizar escolhe a jogada que leva ao nó com o

número mais alto, enquanto que o lado que busca minimizar escolhe a jogada que leva ao nó com o número mais baixo.

Para otimizar ainda mais as escolhas referentes à árvore de decisão, o *Stockfish* utiliza, juntamente com o algoritmo *minimax*, um mecanismo denominado prunagem alfa-beta para diminuir a quantidade de ramos da árvore de busca que necessitam de avaliação. A prunagem alfa-beta descarta ramos desnecessários, economizando tempo de processamento e permitindo que o algoritmo explore camadas mais profundas no mesmo período de tempo.

Os valores alfa e beta representam, respectivamente, a melhor jogada para o lado que tende a maximizar a probabilidade de ganho e o melhor lance para o lado que tende a minimizar a probabilidade de perda. Durante a busca na árvore de decisões, se o valor de um nó ultrapassar ou igualar os valores de alfa (para o lado em vantagem) e beta (para o lado em desvantagem), a exploração a partir de nós subsequentes cessa, pois, a escolha final de avaliação não será afetada. Ou seja, para valores maiores que alfa e beta, interrompe-se o cálculo de variantes desnecessárias. Isto ocorre pois o algoritmo entende que já foram selecionadas jogadas melhores que a anterior, evitando, deste modo, excesso de cálculo computacional.

A prunagem alfa-beta otimiza significativamente o algoritmo *Minimax*, reduzindo-se o número de nós avaliados o que acarreta diretamente na escolha da avaliação final dos lances. No entanto, é importante ressaltar que a ordem que em os ramos são analisados também é um fator importante no cenário computacional e influenciam diretamente na otimização dos motores de computador.

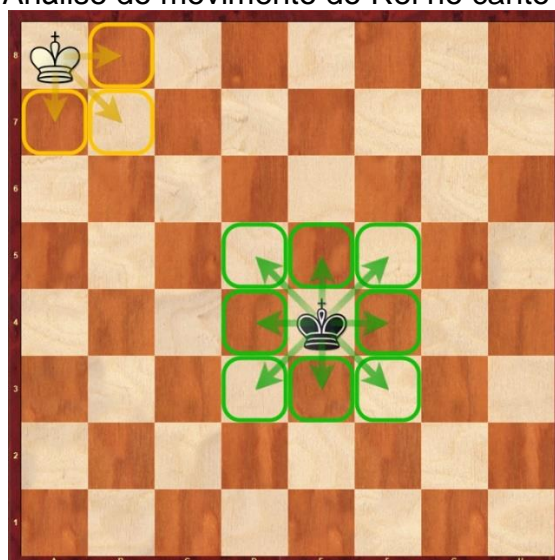
Deste modo, os *engines* modernos que utilizam a aplicação de redes neurais em seus métodos de avaliação são extremamente precisos. Efetuando-se uma comparação com a Teoria da Informação, o *Stockfish NNUE 16* (que será utilizado no escopo deste trabalho) representa um transmissor de informação ideal, pois sempre efetua os lances com maior probabilidade de vitória; no entanto, o receptor (jogador humano) não possui a mesma eficiência. A perda de precisão em comparação com os lances da *engine* gera uma flutuação na variação entrópica da partida.

## 4 METODOLOGIA

Primeiramente, para determinar a complexidade do cálculo da variação da entropia, fez-se necessário a utilização do exemplo abaixo, em que foi computado a taxa entrópica do andar de um rei no tabuleiro de xadrez ao longo de uma rota randômica (AHMED,2016). Deste modo, foi possível determinar que se fossemos calcular todas as possíveis variações de movimento ao longo de uma partida de xadrez para determinação da variação da entropia, seria algo inalcançável, pois demandaria uma infinidade de cálculos não realista. Portanto, a utilização da Entropia de Shannon no processo garantiu uma abordagem muito mais simples e eficiente nas análises expostas.

Efetuando-se as análises dos possíveis movimentos do rei que se encontra no canto do tabuleiro têm-se:

Figura 17 - Análise do movimento do Rei no canto do tabuleiro.



Fonte: Autor.

- Número de possíveis movimentos do rei em cada canto do tabuleiro = 3
- Número de arestas emanando de cada nó =  $E_1$
- Número total de cantos: 4
- Número total de jogadas possíveis em todos os cantos do tabuleiro:  $4 \times 3 = 12$

Analisando-se as bordas, excluindo-se os cantos, têm-se:

Figura 18 - Análise do movimento do rei na borda do tabuleiro.



Fonte: Autor.

- Número de possíveis movimentos do rei em cada borda do tabuleiro = 5
- Número de arestas emanando de cada nó =  $E_2$
- Número total de bordas =  $6 \times 4 = 24$  (pois no total deve-se contabilizar os quatro lados)
- Número total de jogadas possíveis em todas as bordas do tabuleiro:  $5 \times 24 = 120$

Analisando-se as possíveis jogadas em qualquer bloco, excluindo-se bordas e cantos, têm-se:

Figura 19 - Análise do movimento do rei em qualquer bloco do tabuleiro.



Fonte: Autor.

- Número de possíveis movimentos do rei em cada bloco do tabuleiro (excluindo cantos e bordas) = 8
- Número de arestas emanando de cada nó =  $E_3$
- Número total de blocos =  $8 \times 8 = 64$
- Número total de blocos excluindo cantos e bordas = 36
- Número total de jogadas possíveis em todos os blocos do tabuleiro (excluindo cantos e bordas) =  $36 \times 8 = 288$

A equação 4.1 representa a taxa entrópica de um processo estocástico. Aparentemente, a taxa de entropia, que é a entropia de transição média, depende apenas da entropia da distribuição estacionária e do número total de arestas. (WILEY,2006)

$$H(x) = \log_2 2E - H\left(\frac{E_1}{2E}, \frac{E_2}{2E}, \dots, \frac{E_m}{2E}\right) \quad (4.1)$$

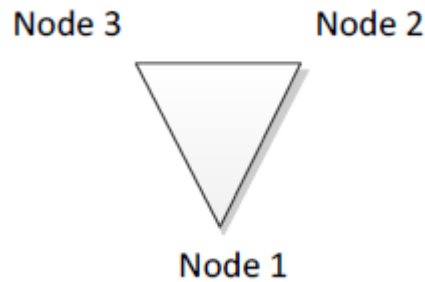
A grandeza  $E$  corresponde ao número total de possíveis arestas no grafo é corresponde à um valor diferente do número total de lances possíveis em um tabuleiro de xadrez.

Um grafo corresponde à um conjunto de vértices (ou nodos), interconectados dois a dois por arestas (ou arcos). (PROLO; GOMES, 2015)

Para um caso de maior simplicidade, considerou-se uma rota randômica ao longo do grafo triangular abaixo:



Figura 20 - Andar randômico em um grafo de três arestas.



Fonte: Elements of Information Theory. (WILEY,2006)

O número total de arestas no grafo representado pela Figura 20 é três, por outro lado, o número total de possíveis jogadas, ou rotas percorridas, corresponde a seis.

Em um tabuleiro de xadrez, o número total de movimentos possíveis inclui os movimentos para a frente e os movimentos na direção contrária (da mesma forma, inclui os movimentos possíveis para os nós da direita e para os nós da esquerda). Por conseguinte, o número total de arestas possíveis é metade do número de jogadas possíveis. No entanto,  $2E = 420$ .

$$H(x) = \log_2 2E - H\left(\frac{E_1}{2E}, \frac{E_2}{2E}, \frac{E_3}{2E}\right) \quad (4.2)$$

$$H(x) = \log_2 420 - H\left(\frac{3}{420}, \frac{5}{420}, \frac{8}{420}\right) \quad (4.3)$$

$$H(x) = \log_2 420 - \left(-4x \frac{3}{420} x \log_2 \frac{3}{420} - 24x \frac{5}{420} x \log_2 \frac{5}{420} - 36x \frac{8}{420} x \log_2 \frac{8}{420}\right) \quad (4.4)$$

No qual 4,24 e 36 são os números totais de caixas tendo 3,5 e 8 possíveis lances respectivamente.

Deste modo,

$$H(x) = 2.7658 \quad (4.5)$$

Como pode-se observar, uma simples computação referente ao cálculo da taxa de entropia do andar de um rei, aleatoriamente, ao longo de um grafo de três nós, gera uma análise considerável de variáveis a serem consideradas. Estipular todas as possibilidades de movimento a cada jogada de uma partida de xadrez com média de 40 lances seria completamente inviável. Deste modo, foi tomado uma posição mais efetiva e otimizada para determinar a variação da Entropia de Shannon ao longo da partida.

Como exposto anteriormente na fundamentação teórica, os motores computacionais de xadrez, comumente denominados *Engines*, avaliam as posições a partir dos lances que inferem a maior porcentagem de ganho em dada situação; através do uso de *centipawns*.

O site *lichess.org*, que corresponde a segunda maior plataforma de xadrez online no mundo, e possui um código *opensource*, utiliza uma equação baseada em dados estatísticos reais para determinar a porcentagem de ganho em uma dada posição de modo mais inteligível.

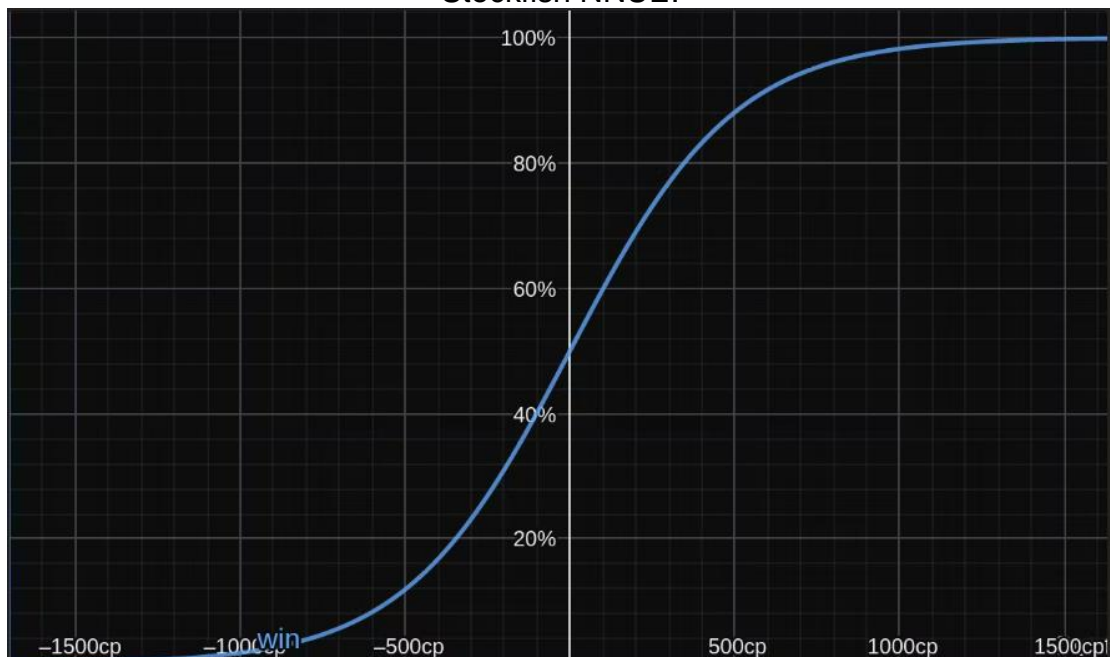
A expressão matemática baseia-se na avaliação de *centipawns* do *Stockfish NNUE* em uma dada posição arbitrária, e retorna a probabilidade de ganho à partir desta posição específica em termos de porcentagem. Dada a expressão a seguir:

$$win\% = 50 + 50\left(\frac{2}{1 + e^{(-0.00368208x CP)}} - 1\right) \quad (4.6)$$

Sendo *win%* porcentagem de ganho a partir de uma posição arbitrária e, *CP*, a avaliação do *Stockfish NNUE* na posição referente em *centipawns*.

A Figura 21 exemplifica esse processo.

Figura 21 - Percentagem de ganho através da avaliação de centipawns do Stockfish NNUE.



Fonte: Lichess Accuracy Metric. [S.I.]

Como forma de exemplificação, observe a Figura 22:

Figura 22 - Posição arbitrária e respectivas avaliações do Stockfish 16 NNUE.



Fonte: Retirado de lichess.org.

O lance Torre em  $c7$ , no qual foi jogado por Magnus Carlsen no próximo lance das brancas, confere uma vantagem de +2.1, que corresponde a um valor de 210 *centipawns*. Deste modo calculou-se a percentagem de vitória para as brancas a partir desta posição através da equação (3.6):

$$win\% = 50 + 50\left(\frac{2}{1 + e^{(-0.00368208 \times 210)}} - 1\right) \quad (4.7)$$

$$win\% = 68.42207\% \quad (4.8)$$

Utilizou-se os arquivos *PGN's* com as avaliações do *Stockfish NNUE* embutidas para a determinação da percentagem de ganho durante cada jogada. As partidas analisadas foram referentes à Copa do Mundo de Xadrez de 2021 e 2023 para medidas de comparação.

No total foram analisadas 592 e 587 partidas para cada evento, respectivamente, correspondentes em 2021 à um total de 295 empates, 197 vitórias para as brancas e 100 vitórias para as pretas. No ano de 2023 obteve-se 220 vitórias para as brancas, 270 empates e 97 vitórias para as pretas.

Figura 23 - Exemplos de partidas da Copa do Mundo de Xadrez de 2021.

Game	Result	Moves	Year	Event/Locale	Opening
1. S Sjugirov vs E Prudente	 1-0	27	2021	FIDE World Cup	A15 English
2. C Chipanga vs B Adhiban	 0-1	33	2021	FIDE World Cup	C03 French, Tarrasch
3. Sevian vs S Sumant	 1-0	33	2021	FIDE World Cup	C70 Ruy Lopez
4. A Kassis vs Kuzubov	 0-1	28	2021	FIDE World Cup	A07 King's Indian Attack
5. J Cori vs A Karimov	1-0	41	2021	FIDE World Cup	D02 Queen's Pawn Game

Fonte: Retirado de chessgames.com.

A figura 24 é referente ao *PGN* da oitava partida do Campeonato Mundial. As avaliações do *Stockfish 16 NNUE* estão inclusas.

Figura 24 - PGN da oitava partida do campeonato mundial de xadrez de 2021 da FIDE.

```
[Event "FIDE World Championship 2021"]
[Site "Dubai UAE"]
[Date "2021.12.05"]
[Round "8.1"]
[White "Carlsen, Magnus"]
[Black "Nepomniachtchi, Ian"]
[Result "1-0"]
[WhiteElo "2855"]
[BlackElo "2782"]
[Variant "Standard"]
[TimeControl "--"]
[ECO "C43"]
[Opening "Russian Game: Modern Attack, Center Variation"]
[Termination "Normal"]
[Annotator "lichess.org"]

1. e4 { [eval 0.2] } 1... e5 { [eval 0.12] } 2. Nf3 { [eval 0.37] }
2... Nf6 { [eval 0.13] } 3. d4 { [eval 0.35] } 3... Nxe4 { [eval 0.34]
} 4. Bd3 { [eval 0.32] } { C43 Russian Game: Modern Attack, Center
Variation } 4... d5 { [eval 0.25] } 5. Nxe5 { [eval 0.44] } 5... Nd7 {
[eval 0.28] } 6. Nxd7 { [eval 0.25] } 6... Bxd7 { [eval 0.28] } 7. Nd2
{ [eval 0.21] } 7... Nxd2 { [eval 0.1] } 8. Bxd2 { [eval 0.27] } 8...
Bd6 { [eval 0.66] } 9. O-O { [eval 0.56] } 9... h5 { [eval 0.25] } 10.
Qe1+ { [eval 0.17] } 10... Kf8 { [eval 0.5] } 11. Bb4 { [eval 0.6] }
11... Qe7 { [eval 0.46] } 12. Bxd6 { [eval 0.51] } 12... Qxd6 { [eval
0.49] } 13. Qd2 { [eval 0.36] } 13... Re8 { [eval 0.35] } 14. Rael {
[eval 0.35] } 14... Rh6 { [eval 0.77] } 15. Qg5 { [eval 0.88] } 15...
c6 { [eval 0.75] } 16. Rxe8+ { [eval 0.7] } 16... Bxe8 { [eval 0.9] }
17. Re1 { [eval 0.75] } 17... Qf6 { [eval 0.72] } 18. Qe3 { [eval
0.66] } 18... Bd7 { [eval 0.52] } 19. h3 { [eval 0.58] } 19... h4 {
[eval 0.62] } 20. c4 { [eval 0.55] } 20... dxc4 { [eval 0.27] } 21.
Bxc4 { [eval 0.37] } 21... b5?! { (0.37 - 1.39) Inaccuracy. Kg8 was
best. } { [eval 1.39] } (21... Kg8 22. Qe7 Be6 23. Qe8+ Kh7 24. Bxe6
fxe6 25. Qb8 Rg6 26. Qe5 Qf3 27. Qe4 Qxe4 28. Rxe4) 22. Qa3+ { [eval
1.48] } 22... Kg8 { [eval 1.64] } 23. Qxa7 { [eval 1.61] } 23... Qd8 {
[eval 1.9] } 24. Bb3 { [eval 2.31] } 24... Rd6?! { (2.31 - 3.59)
Inaccuracy. Rh5 was best. } { [eval 3.59] } (24... Rh5 25. Qa3) 25. Re4
{ [eval 3.61] } 25... Be6 { [eval 3.86] } 26. Bxe6 { [eval 3.96] }
26... Rxe6 { [eval 3.77] } 27. Rxe6 { [eval 4.02] } 27... fxe6 { [eval
4.04] } 28. Qc5 { [eval 3.87] } 28... Qa5 { [eval 4.09] } 29. Qxc6 {
[eval 4.14] } 29... Qe1+ { [eval 4.38] } 30. Kh2 { [eval 4.1] } 30...
Qxf2 { [eval 4.17] } 31. Qxe6+ { [eval 4.18] } 31... Kh7 { [eval 4.19]
} 32. Qe4+ { [eval 4.09] } 32... Kg8 { [eval 4.48] } 33. b3 { [eval
4.5] } 33... Qxa2 { [eval 5.58] } 34. Qe8+ { [eval 5.71] } 34... Kh7 {
[eval 5.85] } 35. Qxb5 { [eval 5.28] } 35... Qf2 { [eval 6.73] } 36.
Qe5?! { (6.73 - 4.66) Inaccuracy. Qh5+ was best. } { [eval 4.66] } (36.
Qh5+ Kg8 37. Qd5+ Kh7 38. Qe4+ Kg8 39. b4 Qg3+ 40. Kh1 Kf7 41. b5 Qb3 42.
Qb7+ Kg8) 36... Qb2 { [eval 4.91] } 37. Qe4+ { [eval 4.88] } 37... Kg8
{ [eval 4.88] } 38. Qd3 { [eval 4.75] } 38... Qf2 { [eval 4.81] } 39.
Qc3 { [eval 4.83] } 39... Qf4+ { [eval 4.77] } 40. Kgl { [eval 5.09] }
40... Kh7 { [eval 5.23] } 41. Qd3+ { [eval 4.52] } 41... g6 { [eval
5.11] } 42. Qd1 { [eval 5.4] } 42... Qe3+ { [eval 5.57] } 43. Kh1 {
[eval 5.62] } 43... g5 { [eval 8.45] } 44. d5 { [eval 5.78] } 44... g4
{ [eval 9.62] } 45. hxg4?! { (9.62 - 5.73) Inaccuracy. d6 was best. } {
[eval 5.73] } (45. d6 gxh3 46. Qh5+ Kg7 47. Qg4+ Kf7 48. Qf3+ Qxf3 49.
gxf3 Ke6 50. Kh2 Kxd6 51. Kxh3 Kc5) 45... h3 { [eval 6.23] } 46. Qf3 {
[eval 6.29] } { Black resigns. } 1-0
```

Fonte: Retirado de lichess.org.

Uma partida de xadrez, em relação à ótica da avaliação dos motores computacionais, pode ser avaliada em duas perspectivas, sob a orientação das brancas ou a orientação das pretas. A orientação é determinada pela escolha do lance avaliado (das brancas ou das pretas) em uma dada jogada.

Uma jogada constitui a resposta de ambos jogadores, logo, se estivermos analisando a partida na orientação das brancas, deve-se tomar a avaliação referente ao lance do adversário. Por exemplo:

No lance 21 as brancas efetuaram o lance Bispo captura em *c4* (21. *Bxc4* em notação algébrica) com uma avaliação de +0.37 e as pretas efetuaram a resposta peão em *b5* com uma avaliação de +1.39. Ou seja, se tomássemos a avaliação no lance 1 como +0.37 para o cálculo da probabilidade de ganho,

estariamos omitindo informação; deste modo, a maneira correta é fazer a análise do lance 1 sobre o valor de +1.39 (correspondente à 139 *centipawns*) referente ao lance das pretas.

Deste modo, a partir da Percentagem de Ganhos, Equação (4.6), teríamos:

$$win\% = 50 + 50 \left( \frac{2}{1 + e^{(-0.00368208x 139)}} - 1 \right) = 62,52\% \quad (4.9)$$

No qual corresponde a uma percentagem de vitória de 62,52% para as brancas a partir do lance 21, ou uma percentagem de vitória de  $(100\% - 62,52\%) = 37.48\%$  para as pretas a partir do mesmo lance.

Por conseguinte, após a determinação das distribuições de probabilidades em cada lance de todas as partidas analisadas, efetuou-se a análise da variação da entropia de Shannon.

Como a análise da variação da entropia é feita em cima de cada lance isolado (assumindo somente um valor), e, para que seja feita a computação gráfica, a Equação (3.3.1) nesse caso específico se reduz à:

$$H(x) = -p(x)\log_2 p(x) \quad (4.10)$$

Logo, sobre a mesma ponderação referente ao lance 21, para a análise sobre a perspectiva das brancas, utilizou-se a avaliação das pretas, e, conseqüentemente, a percentagem de ganho das pretas. Ou seja:

$$H(x = 21) = -p(x = 21)\log_2 p(x = 21) \quad (4.11)$$

$$H(x = 21) = -0.3748\log_2 0.3748 \quad (4.12)$$

$$H(x = 21) = 0.53 \text{ bits} \quad (4.13)$$

Ou seja, a variação da entropia de Shannon para a partida em análise no lance 21 é de 0.53 bits

Se quiséssemos obter a variação da entropia sobre a perspectiva das pretas, o processo seria o mesmo, porém com a distribuição de probabilidade de ganho das brancas.

Desta forma, para a determinação da análise gráfica da variação entrópica utilizou-se códigos formulados em *python 3* que possibilitaram estipular a curva de melhor ajuste, gráficos de dispersão e regressão linear a partir da entropia de Shannon. Ademais, utilizou-se códigos para a leitura e separação de dados com a avaliação do *Stockfish* embutida no algoritmo e seus respectivos lances. (MCGUINNESS et al.,2022)

Os códigos possuem uma complexidade computacional alta, a explicação de seu caráter foge do escopo desse trabalho. Os códigos foram retirados de um programa que promove o pensamento científico e acadêmico denominado *supercomputingchallenge* no estado do Novo México nos Estados Unidos. Devido ao fato de as linhas de código serem relativamente longas, foram-se introduzidas em forma de anexo posteriormente.

A Figura 25 denota um exemplo de código utilizado para separar os pgn's em vitória das brancas, vitória das pretas e empates.

Figura 25 - Código em python 3 para separação de partidas em vitórias, derrotas e empates para as brancas.

```

1  #!/usr/bin/env python3
2  import sys, os
3  import re
4  from datetime import datetime
5
6  iterableFiles = (1, len(sys.argv))
7
8  def main():
9      whiteFile = open("White-Winning-Games.txt", 'w')
10     blackFile = open("Black-Winning-Games.txt", 'w')
11     drawFile = open("Draw-Games.txt", 'w')
12     blackSearch = re.compile(r"0-1")
13     whiteSearch = re.compile(r"1-1")
14     drawSearch = re.compile(r"1/2-1/2")
15     for i in iterableFiles:
16         with open(sys.argv[i], 'r') as pgn:
17             content = pgn.read()
18             whiteMatches = len(blackSearch.findall(content))
19             blackMatches = len(whiteSearch.findall(content))
20             drawMatches = len(drawSearch.findall(content))
21             if whiteMatches == 1:
22                 whiteFile.write(f"{sys.argv[i]}\n")
23             if blackMatches == 1:
24                 blackFile.write(f"{sys.argv[i]}\n")
25             if drawMatches == 1:
26                 drawFile.write(f"{sys.argv[i]}\n")
27     whiteFile.close()
28     blackFile.close()
29     drawFile.close()
30
31
32 main()

```

Fonte: Code - Supercomputing Challenge. (MCGUINNESS et al.,2022)

Além da análise gráfica referentes as curvas de ajuste, gráficos de dispersão e regressão linear gerados pelo código computacional, foram utilizados métodos manuais através de tabelas aferidas no programa Excel para determinar a variação da entropia de Shannon em 2 partidas específicas.

Primeiramente, a partida escolhida para análise foi jogada na oitava rodada do campeonato mundial de xadrez de 2021 entre Magnus Carlsen e Ian Nepomniachtchi em que as brancas foram vitoriosas. Deste modo, através do uso do *Stockfish 16* determinou-se as avaliações em *centipawns* referentes à cada lance e a partir da equação 4.6 determinou-se a distribuição de probabilidade de ganho referente aos lances das brancas e das pretas. Deste modo, utilizou-se a equação 3.3.1.1 para computar a entropia de Shannon ao longo dos lances (levando em consideração a distribuição de probabilidade que representa a maior porcentagem de ganho na dada posição avaliada), ambos nas perspectivas das brancas e das pretas, e deste modo, determinar se os resultados foram coerentes com as análises gráficas geradas pelo código retirado da literatura em python 3.

A segunda partida analisada foi jogada no campeonato mundial de Engines de xadrez no ano de 2023 entre o programa *Stockfish 16 nnue* e seu



concorrente *LeelaChess0*; de modo a determinar se a variação significativa da entropia de Shannon ao longo de uma partida de xadrez realmente decorre da imprecisão e erros de lances humanos.

Tabela 1 - Dados referentes à oitava partida do campeonato mundial de xadrez de 2021. CP – Avaliação em Centipawns, % - Distribuição de Probabilidades, B – Perspectiva das Brancas, P – Perspectiva das Pretas.

<b>Lances</b>	<b>CP B</b>	<b>CP P</b>	<b>% B</b>	<b>% P</b>	<b>Entropia B (Bits)</b>	<b>Entropia P (Bits)</b>
1	10	20	0.509204	0.518402	0.999755554	0.999023
2	10	40	0.509204	0.536754	0.999755554	0.996099
3	30	40	0.527588	0.536754	0.99780282	0.996099
4	30	30	0.527588	0.527588	0.99780282	0.997803
5	30	40	0.527588	0.536754	0.99780282	0.996099
6	30	30	0.527588	0.527588	0.99780282	0.997803
7	10	20	0.509204	0.518402	0.999755554	0.999023
8	70	30	0.564082	0.527588	0.988118484	0.997803
9	30	60	0.527588	0.555008	0.99780282	0.991251
10	50	20	0.545896	0.518402	0.993913527	0.999023
11	50	60	0.545896	0.555008	0.993913527	0.991251
12	50	50	0.545896	0.545896	0.993913527	0.993914
13	40	40	0.536754	0.536754	0.996098734	0.996099
14	80	40	0.573114	0.536754	0.98452025	0.996099
15	80	90	0.573114	0.582097	0.98452025	0.980464
16	90	70	0.582097	0.564082	0.980464371	0.988118

17	70	80	0.564082	0.573114	0.988118484	0.98452
18	50	70	0.545896	0.564082	0.993913527	0.988118
19	60	60	0.564082	0.564082	0.988118484	0.988118
20	30	60	0.527588	0.564082	0.99780282	0.988118
21	140	40	0.626093	0.536754	0.953624821	0.996099
22	160	150	0.643166	0.634672	0.940023749	0.947017
23	190	160	0.668098	0.643166	0.916857846	0.940024
24	360	230	0.790103	0.699912	0.741285813	0.881398
25	390	360	0.807836	0.790103	0.705976494	0.741286
26	380	400	0.802055	0.813487	0.717799007	0.69412
27	400	400	0.813487	0.813487	0.694119665	0.69412
28	410	390	0.81901	0.807836	0.682238013	0.705976
29	440	410	0.834811	0.81901	0.646580019	0.682238
30	420	410	0.824404	0.81901	0.670347337	0.682238
31	420	420	0.824404	0.824404	0.670347337	0.670347
32	450	410	0.839826	0.81901	0.634725655	0.682238
33	560	450	0.887151	0.839826	0.508450042	0.634726
34	590	570	0.897746	0.890785	0.476100153	0.497544
35	670	530	0.921795	0.87561	0.3958226	0.541849
36	490	470	0.858662	0.849486	0.587732216	0.611125

37	490	490	0.858662	0.858662	0.587732216	0.587732
38	480	480	0.854134	0.854134	0.599397538	0.599398
39	480	480	0.854134	0.854134	0.599397538	0.599398
40	520	510	0.871544	0.867365	0.553188503	0.564621
41	510	450	0.867365	0.839826	0.564620651	0.634726
42	560	540	0.887151	0.879566	0.508450042	0.530607
43	850	560	0.958104	0.887151	0.250918748	0.50845
44	960	580	0.971662	0.894316	0.185987278	0.486759
45	620	570	0.90745	0.890785	0.444924593	0.497544
46	630	960	0.910496	0.971662	0.434812063	0.185987

Fonte: Autor com dados retirados de lichess.org

Tabela 2 - Dados referentes a partida entre os motores de computador Stockfish e LeelaChess0 pelo campeonato mundial de motores de computador de xadrez em 2023 com resultado final de empate.

<b>Lances</b>	<b>Avaliação Stockfish (Centipawn)</b>	<b>Distribuição de Probabilidade de Ganho</b>	<b>Entropia de Shannon (Bits)</b>
1	20	0.518402	0.999023
2	20	0.518402	0.999023
3	20	0.518402	0.999023
4	30	0.527588	0.997803
5	40	0.536754	0.996099
6	30	0.527588	0.997803
7	30	0.527588	0.997803
8	20	0.518402	0.999023
9	30	0.527588	0.997803

10	30	0.527588	0.997803
11	20	0.518402	0.999023
12	20	0.518402	0.999023
13	10	0.509204	0.999756
14	20	0.518402	0.999023
15	30	0.527588	0.997803
16	10	0.509204	0.999756
17	20	0.518402	0.999023
18	10	0.509204	0.999756
19	10	0.509204	0.999756
20	10	0.509204	0.999756
21	10	0.509204	0.999756
22	20	0.518402	0.999023
23	30	0.527588	0.997803
24	10	0.509204	0.999756
25	10	0.509204	0.999756
26	0	0.500000	1.000000
27	0	0.500000	1.000000
28	10	0.509204	0.999756
29	10	0.509204	0.999756
30	10	0.509204	0.999756
31	20	0.518402	0.999023
32	0	0.500000	1.000000
33	10	0.509204	0.999756

Fonte: Autor com dados retirados de lichess.org

Vale ressaltar que o algoritmo utilizado de MCGUINNESS et al,2022 difere das análises efetuadas referente aos dados das tabelas 1 e 2. O programa utiliza o *Stockfish* embutido em seu código e efetua as avaliações através de diversos valores de distribuições de probabilidades e suas consequentes somas. Os dados tabelados assumem somente duas variáveis e, por conseguinte, estão limitados à uma máxima entropia de 1 bit (em que os valores de distribuição são

equiprováveis). No entanto, apesar dessas limitações os valores esperados foram concordantes.

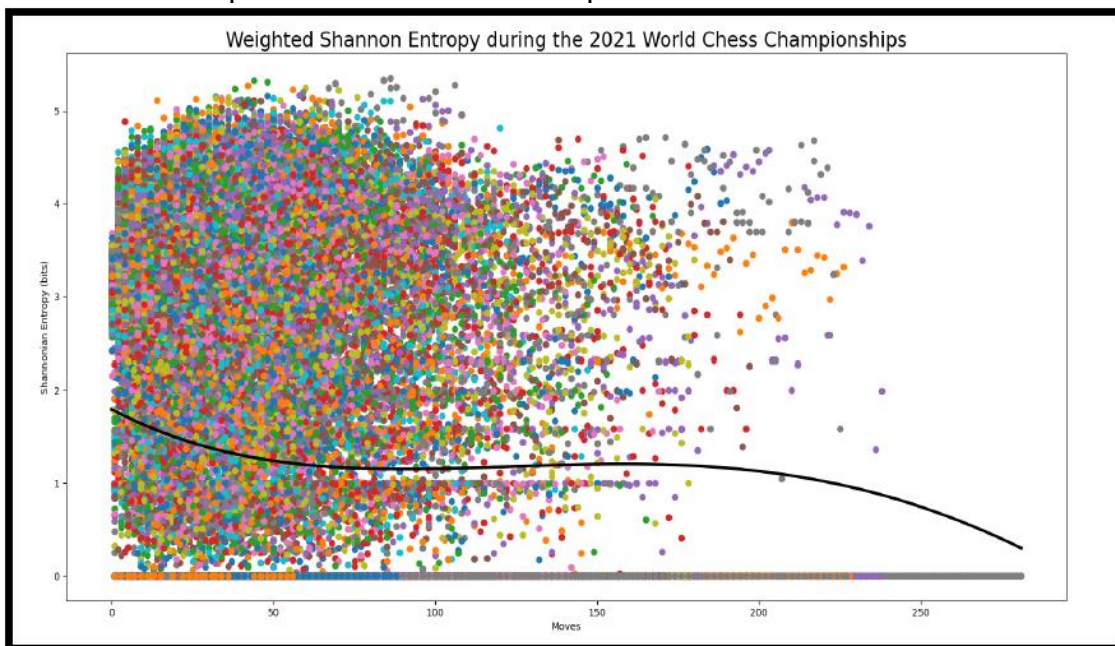
## 5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A Entropia de Shannon Quantifica a quantidade de informação contida em qualquer distribuição de probabilidade. No xadrez, especificamente, mede o número de bits para o estado da posição de um jogador individual e as suas jogadas.

Deve-se compreender o uso dos motores de xadrez como uma fonte que transmite informação através de um canal, para um receptor, com uma certa distribuição de probabilidade para cada informação específica transmitida. No caso, a informação transmitida seriam as avaliações dos lances; e o receptor, o jogador de xadrez.

Como as análises foram feitas com base nos lances que proporcionam a maior probabilidade de ganho em uma dada posição, o receptor (jogador) devido a sua natureza humana é incapaz de reproduzir todos os lances do transmissor (*Engine*) com perfeição. Sendo justamente a análise da incerteza do lance humano em relação ao lance da máquina que gera a variação da entropia calculada nas análises gráficas expostas.

Figura 26 – Curva de ajuste da variação da Entropia de Shannon ao longo das partidas de xadrez da Copa do Mundo de 2021.

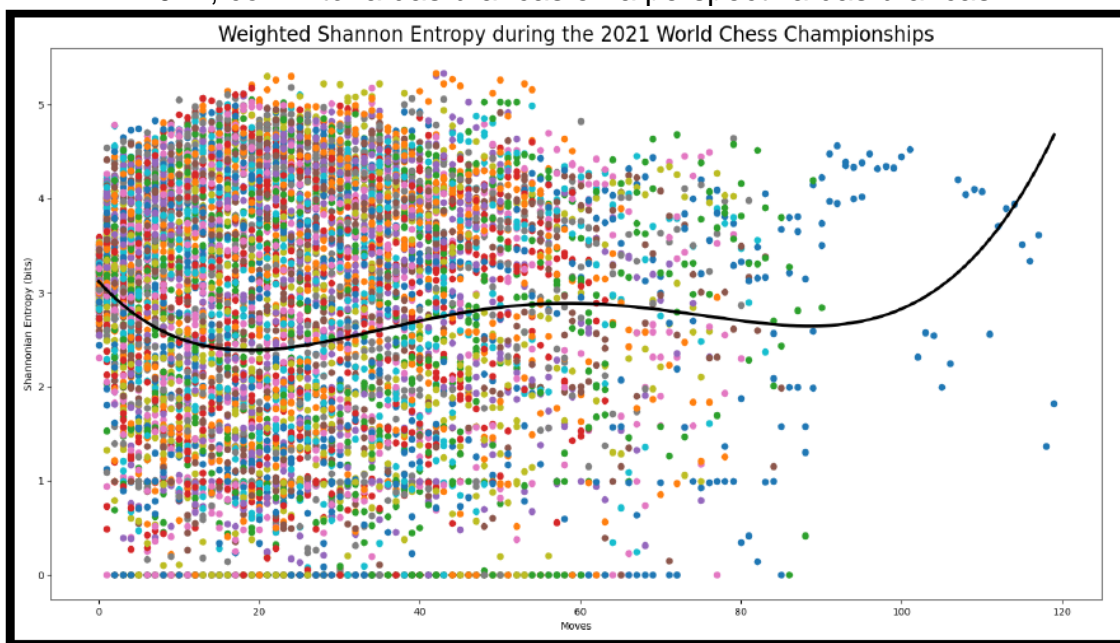


Fonte: Entropy in Chess – SuperComputing Challenge. (MCGUINNESS et al.,2022)

A figura 26 representa o comportamento da entropia de Shannon ao longo das partidas de xadrez do Campeonato Mundial de 2021.

De um modo geral, observou-se que a entropia flutuou ao longo da progressão das partidas devido ao caráter humano dos jogadores, e, de certa forma, o fato de que lances imprecisos e erros ocorrem frequentemente, afetando a variação da análise do *stockfish* em termos de centipawns e, conseqüentemente, as distribuições de probabilidades associadas. No entanto, em sua totalidade, a entropia apresentou um certo declínio pois o nível de incerteza do sistema como um todo decai, e o aumento da previsibilidade afeta no declínio da entropia.

Figura 27 – Curva de ajuste da variação da Entropia de Shannon (em bits) pelo número de jogadas ao longo das partidas de xadrez da Copa do Mundo de 2021, com vitória das brancas e na perspectiva das brancas.



Fonte: Entropy in Chess – SuperComputing Challenge. (MCGUINNESS et al.,2022)

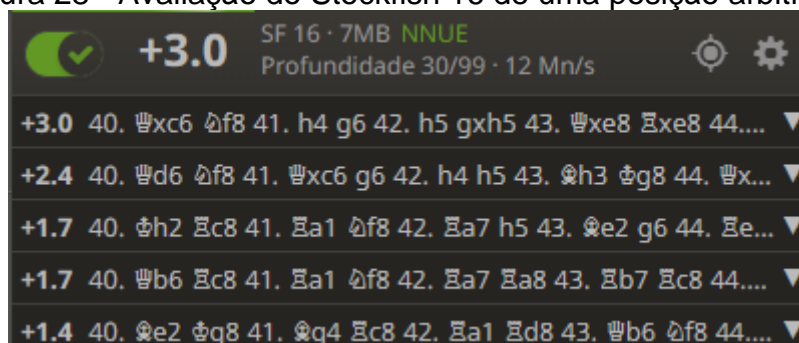
A Figura 27 representa o comportamento da entropia de Shannon somente em partidas com vitória das brancas, sendo a análise efetuada sobre a perspectiva das brancas.

Vale ressaltar que se tivéssemos utilizado a entropia conjunta, ao invés da entropia de Shannon, a perspectiva do tabuleiro não afetaria o resultado, pois nesse caso as distribuições são condicionais a ambos jogadores.

No entanto, observa-se que para o jogador vitorioso a entropia tende a aumentar durante a partida. Como mencionado anteriormente, como a análise foi efetuada em cima da orientação das brancas, deve-se tomar como base a distribuição de probabilidade do lance das pretas (pois a avaliação da posição das brancas em um lance específico é determinada pelo lance de seu oponente); deste modo, observa-se um aumento no nível de incerteza do sistema pois a probabilidade de ganho das pretas ao longo da partida decaiu devido a vitória de seu oponente. Este fenômeno exemplifica o comportamento do gráfico, ou seja, o aumento da entropia ao longo das partidas específicas.

Outra análise interessante, seria se analisássemos essa ascensão da entropia através de preceitos da termodinâmica clássica.

Figura 28 - Avaliação do Stockfish 16 de uma posição arbitrária.



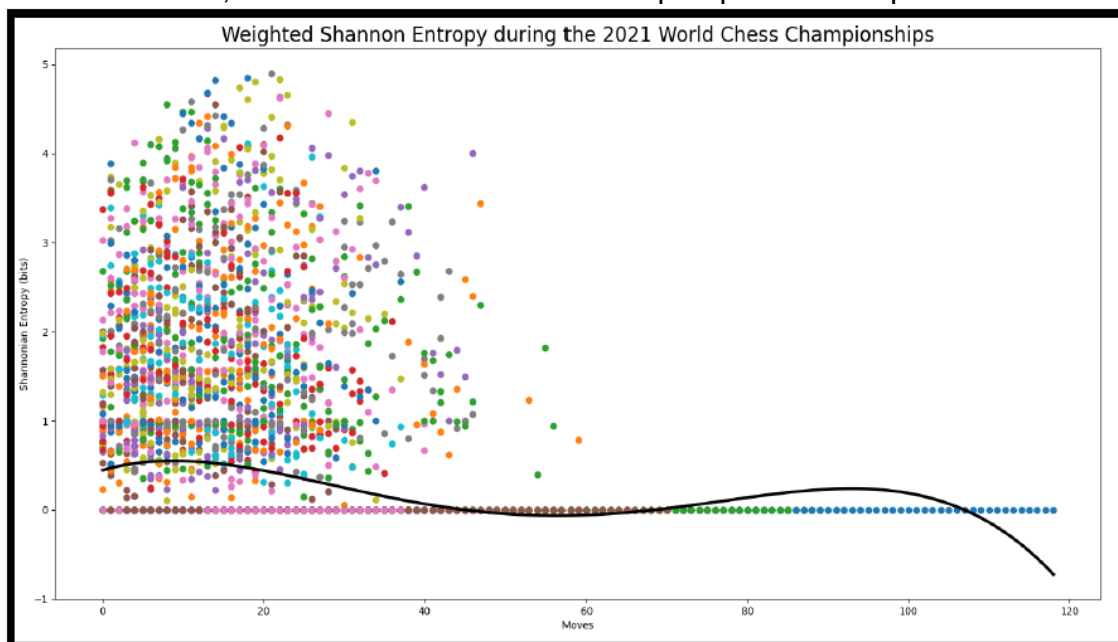
Fonte: Retirado de lichess.org.

Como pode-se observar na avaliação da Figura 28, as brancas possuem inúmeros lances que conservam a vantagem decisiva. Deste modo, pode-se inferir que ao longo da partida, se as brancas estiverem em uma posição superior, o número de lances que conservam a vantagem tende a aumentar; ou seja, pode-se exercer uma comparação quantitativa com o aumento do número de “microestados”.

Vale ressaltar que a entropia de Shannon e a Entropia Termodinâmica clássica, embora quantifiquem parâmetros semelhantes, possuem aplicações completamente diferentes. A análise acima foi efetuada em um ponto específico, ou no caso, um lance específico, e não no sistema como um todo.



Figura 29 – Curva de ajuste da variação da Entropia de Shannon (em bits) pelo número de jogadas ao longo das partidas de xadrez da Copa do Mundo de 2021, com vitória das brancas e na perspectiva das pretas.



Fonte: Entropy in Chess – SuperComputing Challenge. (MCGUINNESS et al.,2022)

A figura representa o comportamento da entropia de Shannon somente em partidas com vitória das brancas, sendo a análise efetuada sobre a perspectiva das pretas. Ou seja, tomando-se como referência a avaliação do lance das brancas em uma dada jogada.

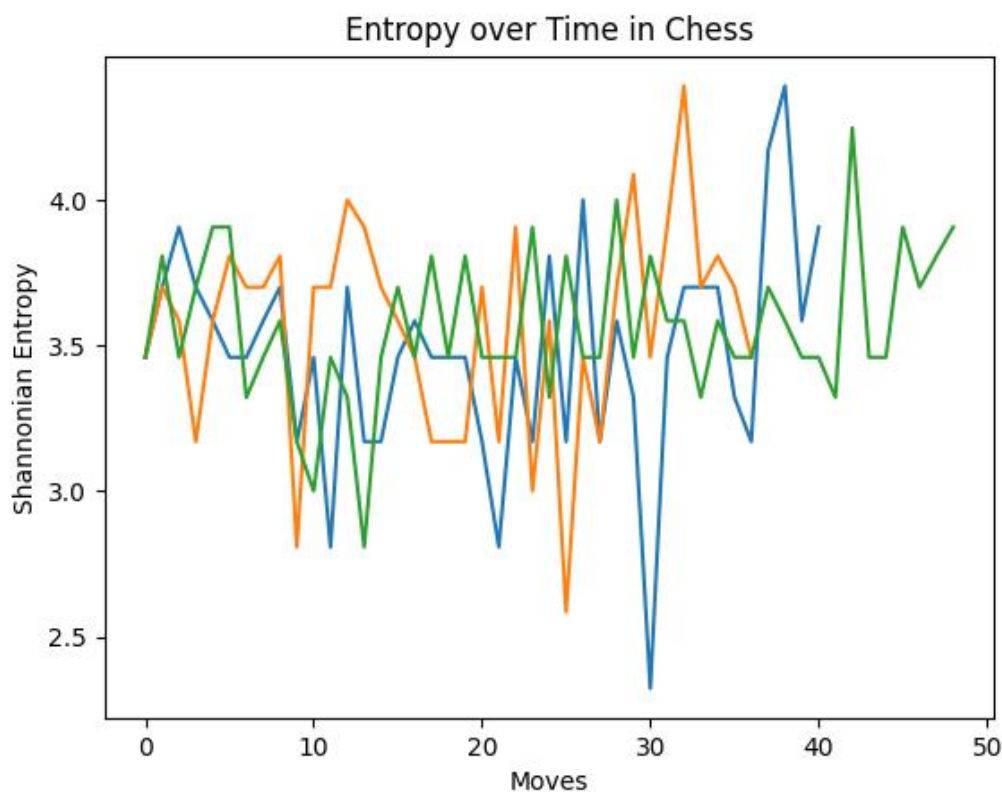
De modo análogo, como a análise foi efetuada em cima da orientação das pretas, deve-se tomar como base a distribuição de probabilidade do lance das brancas. Desta forma, observa-se um declínio da entropia na medida em que a partida se estende, pois o nível de incerteza do sistema decai ao longo da partida. Ou seja, a distribuição de probabilidade em relação a percentagem de ganho aumentou ao longo das partidas. Desta forma, o aumento da previsibilidade (o fato de as brancas estarem cada vez mais próximas da vitória no decorrer da partida) faz com que a entropia decaia.

Como as análises gráficas retiradas da literatura foram referentes à Copa do Mundo de Xadrez de 2021, fez-se necessário uma análise comparativa dos dados em relação ao mesmo evento ocorrido no ano de 2023. Desta forma, utilizando-se os códigos referentes à MCGUINNESS et al.,2022, foi possível

verificar a veracidade das informações expostas e estipular maior confiabilidade nos dados referentes à variação da Entropia de Shannon.

As análises foram feitas através de geração de gráficos de dispersão e suas respectivas regressões lineares em partidas em que ocorram vitórias das brancas, sendo efetuado as análises sobre a perspectiva das brancas e das pretas

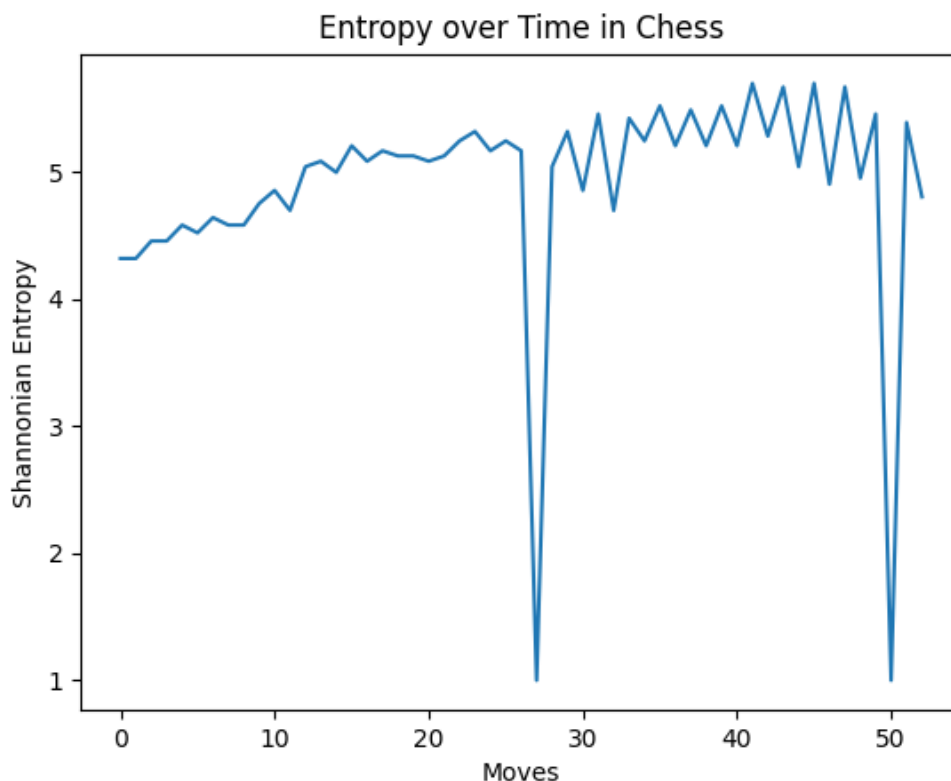
Figura 30 - Análise de dispersão da Entropia de Shannon (em bits) pelo número de jogadas ao longo das partidas de xadrez da Copa do Mundo de 2021, com vitória das brancas e na perspectiva das brancas.



Fonte: Entropy in Chess – SuperComputing Challenge. (MCGUINNESS et al.,2022)

A figura 30 representa os gráficos de dispersão sobrepostos da entropia de Shannon ao longo das partidas da Copa do Mundo de Xadrez de 2021, com vitória das brancas e na perspectiva das brancas. De modo análogo as considerações efetuadas em relação à curva de ajuste da figura 27, observou-se um aumento da entropia na medida em que a partida foi se aproximando de um desfecho devido ao aumento da incerteza do sistema em decorrência da redução de probabilidade de ganho do estado das pretas no tabuleiro de xadrez.

Figura 31 - Análise de dispersão da Entropia de Shannon (em bits) pelo número de jogadas ao longo das partidas de xadrez da Copa do Mundo de 2023, com vitória das brancas e na perspectiva das brancas.



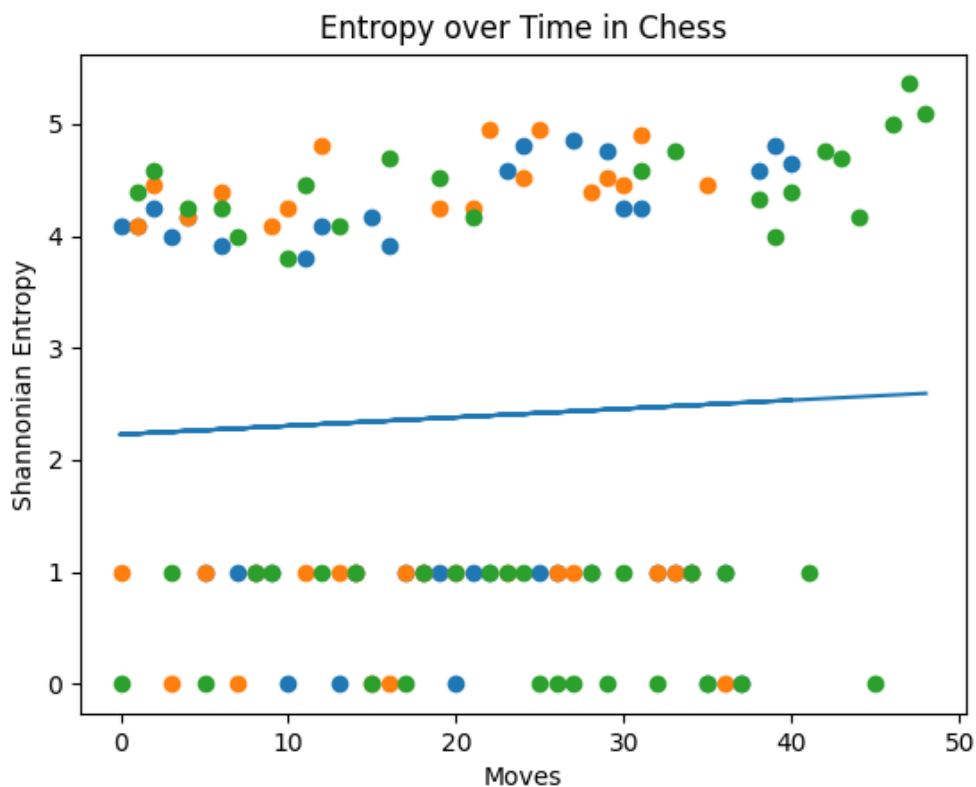
Fonte: Autor – Com Base nos códigos computacionais de MCGUINNESS et al.,2022.

Em relação a figura 31, observou-se o mesmo comportamento exemplificado na figura 30, com dois pontos de anomalia em que a entropia decaiu significativamente ao valor de 1 bit, de modo que possa ser devido às flutuações na avaliação do *Stockfish* em decorrência de erros e imprecisões nas jogadas humanas, ou alguma anomalia no código computacional.

Vale ressaltar que ao executar o código para as análises de dispersão referente as partidas da copa do mundo de 2023, observou-se que foi gerado somente uma curva de dispersão com escalas distintas, e não várias curvas sobrepostas semelhante à figura 30. Por conseguinte, o código executado na literatura não especificou a versão utilizada do *Stockfish*, enquanto que para o escopo deste trabalho foi utilizada a versão dezesseis. Deste modo, esta distinção pode estar relacionada à incompatibilidade das diferentes versões dos motores de computador ou até mesmo nas versões das bibliotecas utilizadas

para a geração da análise gráfica. No entanto, tais distinções não afetaram o resultado final.

Figura 32 - Análise de regressão linear da Entropia de Shannon (em bits) pelo número de jogadas ao longo das partidas de xadrez da Copa do Mundo de 2021, com vitória das brancas e na perspectiva das brancas.

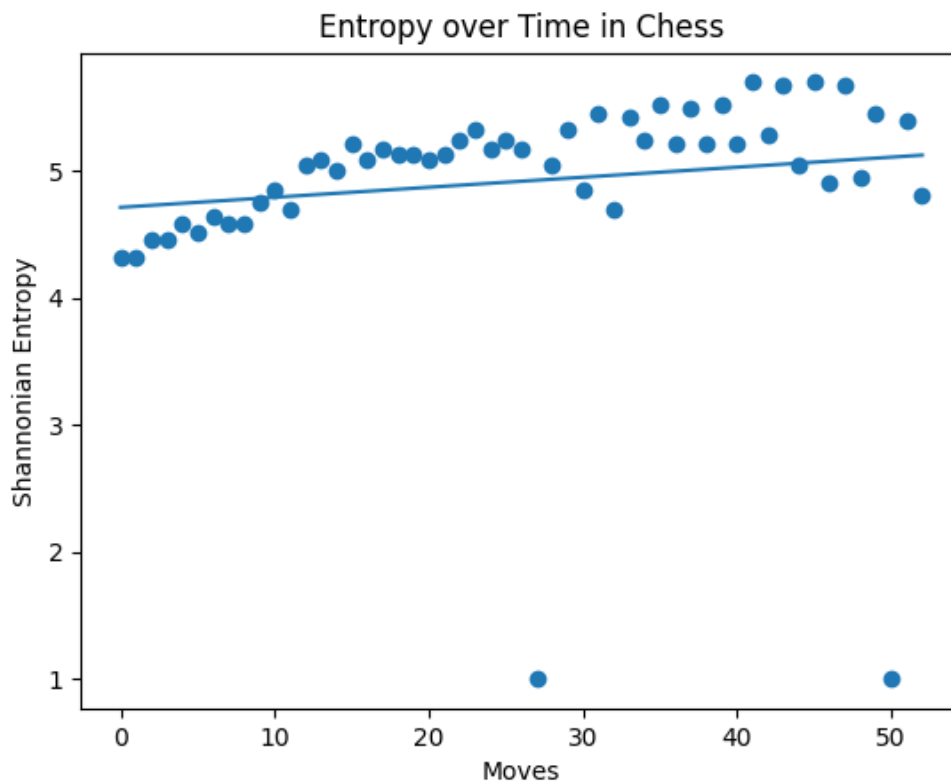


Fonte: Entropy in Chess – SuperComputing Challenge. (MCGUINNESS et al.,2022)

A figura 32 representa o gráfico da regressão linear da Entropia de Shannon pelo número de jogadas ao longo das partidas de xadrez da Copa do Mundo de 2021 referentes ao gráfico de dispersão da figura 30.

A regressão linear estima o comportamento da curva de dispersão a partir de uma dada variável. No caso, observou-se uma reta ascendente, estando de acordo com a expectativa, pois na análise da entropia de Shannon sob a perspectiva das brancas verificou-se que o mesmo cresce no decorrer da partida.

Figura 33 - Análise de regressão linear da Entropia de Shannon (em bits) pelo número de jogadas ao longo das partidas de xadrez da Copa do Mundo de 2023, com vitória das brancas e na perspectiva das brancas.



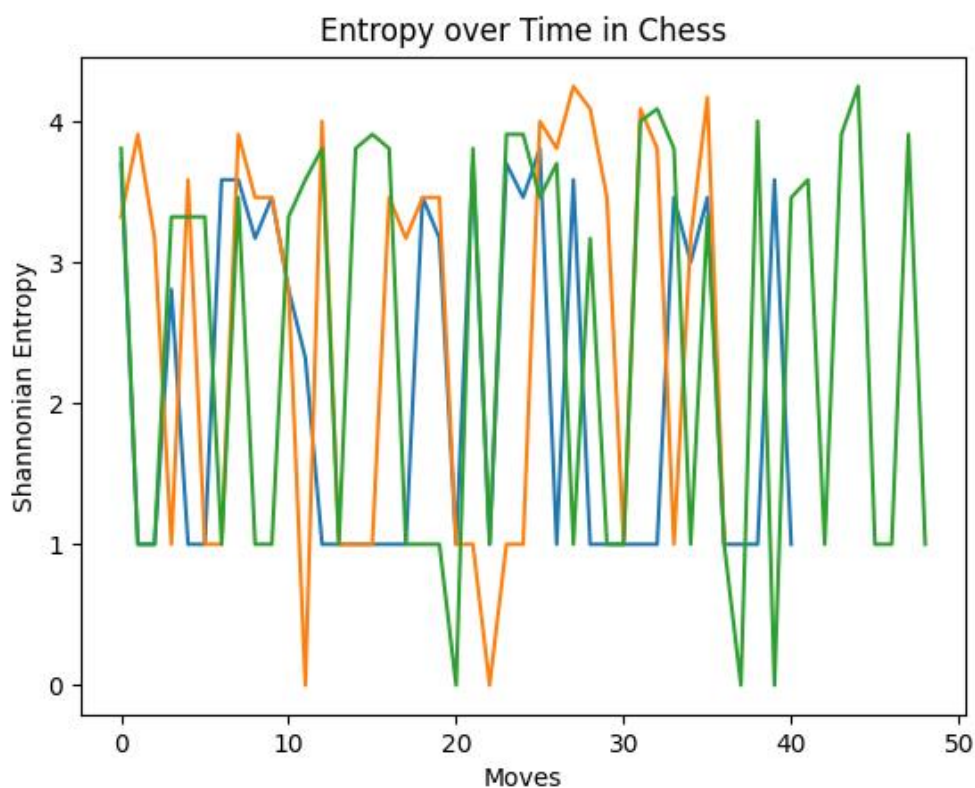
Fonte: Autor – Com Base nos códigos computacionais de MCGUINNESS et al.,2022.

A figura 33 representa o gráfico da regressão linear da Entropia de Shannon pelo número de jogadas ao longo das partidas de xadrez da Copa do Mundo de 2021 referentes ao gráfico de dispersão da figura 31.

De modo análogo, observou-se uma reta ascendente, estando de acordo com os resultados esperados.

Abaixo, foram feitas as análises em partidas com vitórias das brancas, porém na perspectiva das pretas. Como dito anteriormente, no caso da entropia de Shannon, a perspectiva do jogador altera o comportamento da entropia, pois o cálculo é efetuado em relação à um estado e não o sistema como um todo.

Figura 34 - Análise de dispersão da Entropia de Shannon (em bits) pelo número de jogadas ao longo das partidas de xadrez da Copa do Mundo de 2021, com vitória das brancas e na perspectiva das pretas.



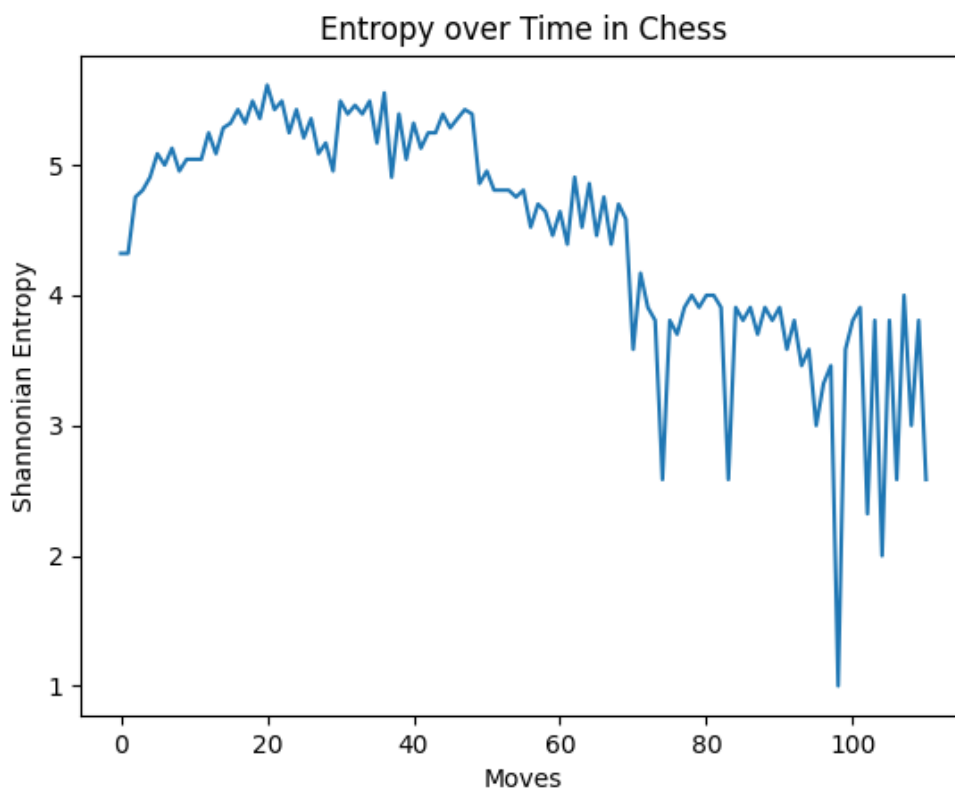
Fonte: Entropy in Chess – SuperComputing Challenge. (MCGUINNESS et al.,2022)

A figura 34 refere-se a análise de dispersão da Entropia de Shannon pelo número de jogadas ao longo das partidas de xadrez da Copa do Mundo de 2021, com vitória da brancas e na perspectiva das pretas.

Em analogia aos resultados expostos na figura 29, observou-se uma leve tendência ao decaimento da entropia no estágio final das partidas, pois, como dito anteriormente, o aumento da previsibilidade (o fato das brancas estarem mais perto da vitória ao longo dos lances) reduz o valor da entropia.

O gráfico apresenta uma variação acentuada, com picos e vales alongados, o que difere um pouco das análises expostas na figura 30. Como os códigos executados para a análise da perspectiva das brancas e das pretas são distintos, a acentuada variação pode ter sido afetada por alterações no algoritmo; embora os resultados esperados foram, de certo modo, consistentes.

Figura 35 - Análise de dispersão da Entropia de Shannon (em bits) pelo número de jogadas ao longo das partidas de xadrez da Copa do Mundo de 2023, com vitória das brancas e na perspectiva das pretas.



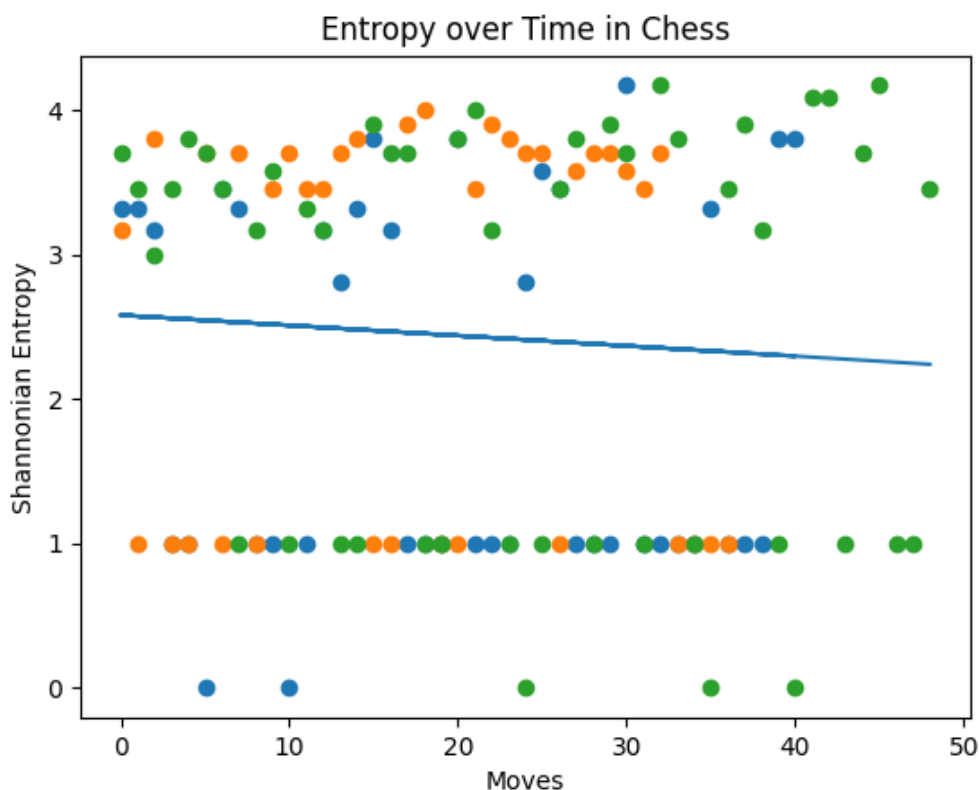
Fonte: Autor – Com Base nos códigos computacionais de MCGUINNESS et al.,2022.

A figura 35 refere-se à dispersão da Entropia de Shannon pelo número de jogadas ao longo das partidas de xadrez da Copa do Mundo de 2023, com vitória das brancas e na perspectiva das pretas.

Neste caso, observou-se claramente o decaimento da entropia no decorrer dos lances, comportamento que se encontrou em acordo com a curva de ajuste exposta na figura 29.

O decaimento mais acentuado, em relação ao ano de 2021, pode ter ocorrido devido ao aumento da escala no eixo das abcissas ou devido ao fato de que no ano de 2023 na Copa do Mundo de Xadrez, obteve-se um número mais elevado de vitória das brancas em relação ao ano de 2021, afetando, deste modo, o seu comportamento.

Figura 36 - Análise de regressão linear da Entropia de Shannon (em bits) pelo número de jogadas ao longo das partidas de xadrez da Copa do Mundo de 2021, com vitória das brancas e na perspectiva das pretas.



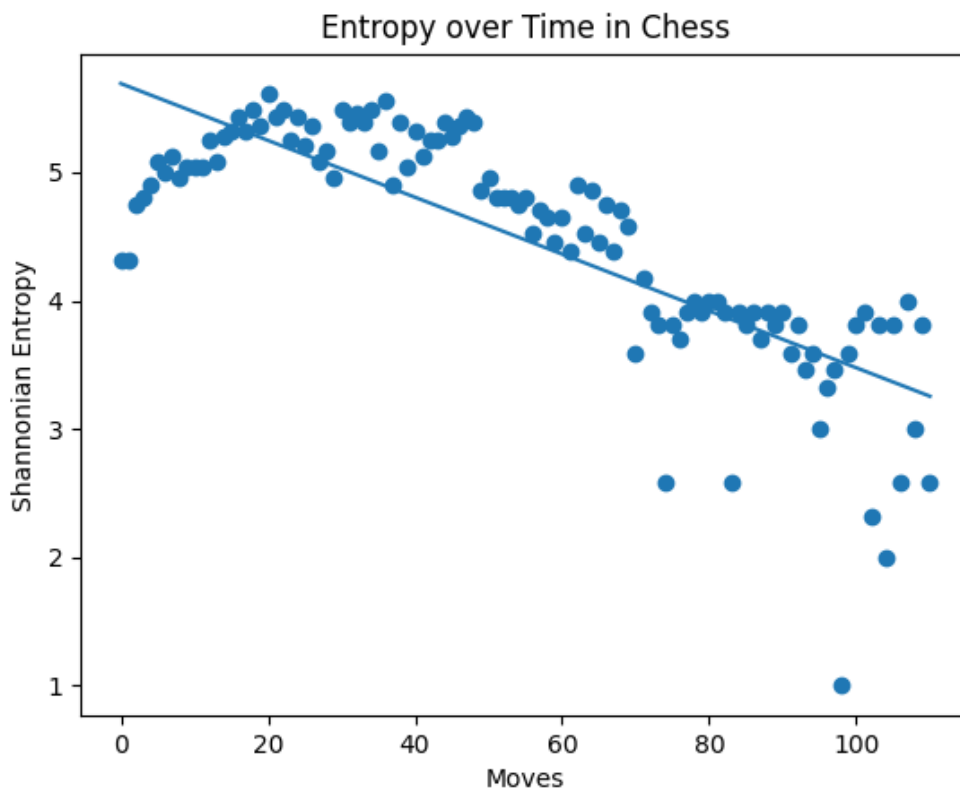
Fonte: Entropy in Chess – SuperComputing Challenge. (MCGUINNESS et al.,2022)

A regressão linear exposta na figura 36 exemplifica o comportamento da figura 34. Devido aos picos e vales alongados nas curvas de dispersão, o coeficiente angular da reta foi menor que as análises anteriores, porém ainda possuiu um valor negativo, condizente com as expectativas.

A figura 37 abaixo referente à regressão linear do ano de 2023, por outro lado, apresentou um declínio mais acentuado, indicando o decaimento da entropia de Shannon no decorrer das partidas com vitória das brancas sobre a perspectiva das pretas.



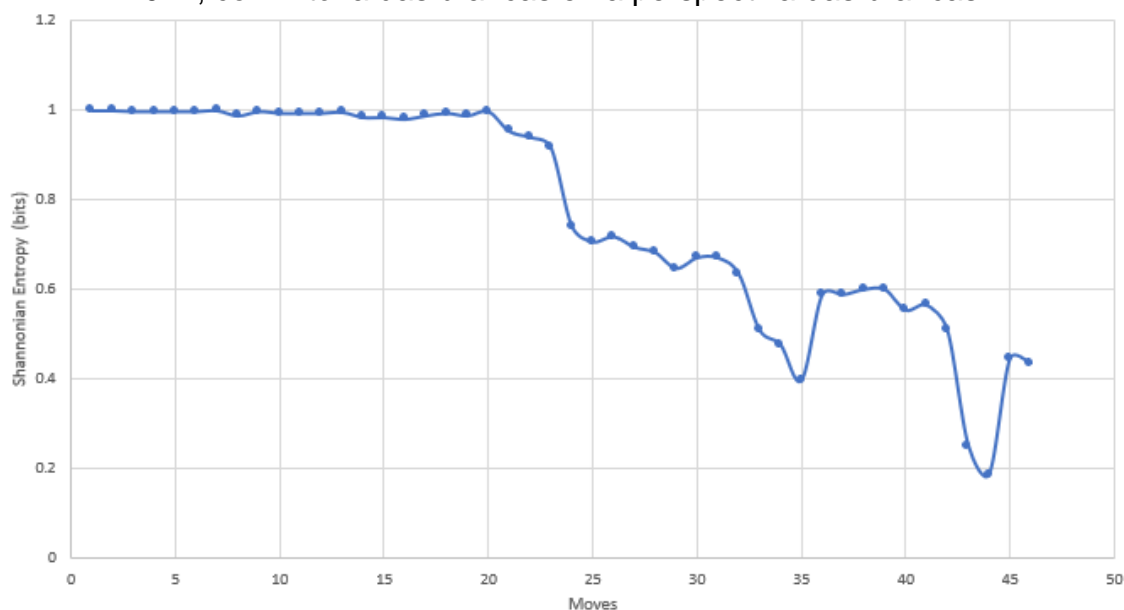
Figura 37 - Análise de regressão linear da Entropia de Shannon (em bits) pelo número de jogadas ao longo das partidas de xadrez da Copa do Mundo de 2023, com vitória das brancas e na perspectiva das pretas.



Fonte: Autor – Com Base nos códigos computacionais de MCGUINNESS et al.,2022.

O escopo deste trabalho decorre através de códigos computacionais em python3. Para averiguar a veracidade das informações fez-se necessário a implementação de um método experimental de maneira simplória, em que foram analisadas uma partida da oitava rodada do campeonato mundial de xadrez de 2021 com a vitória das brancas e outra partida no campeonato mundial de xadrez de motores de computador de 2023 que resultou em empate. Deste modo, observou-se o comportamento das curvas de dispersão e se os resultados estão de acordo com as análises de códigos computacionais.

Figura 38 - Análise de dispersão da Entropia de Shannon (bits) pelo número de jogadas referente à partida número oito do campeonato mundial de xadrez de 2021, com vitória das brancas e na perspectiva das brancas.



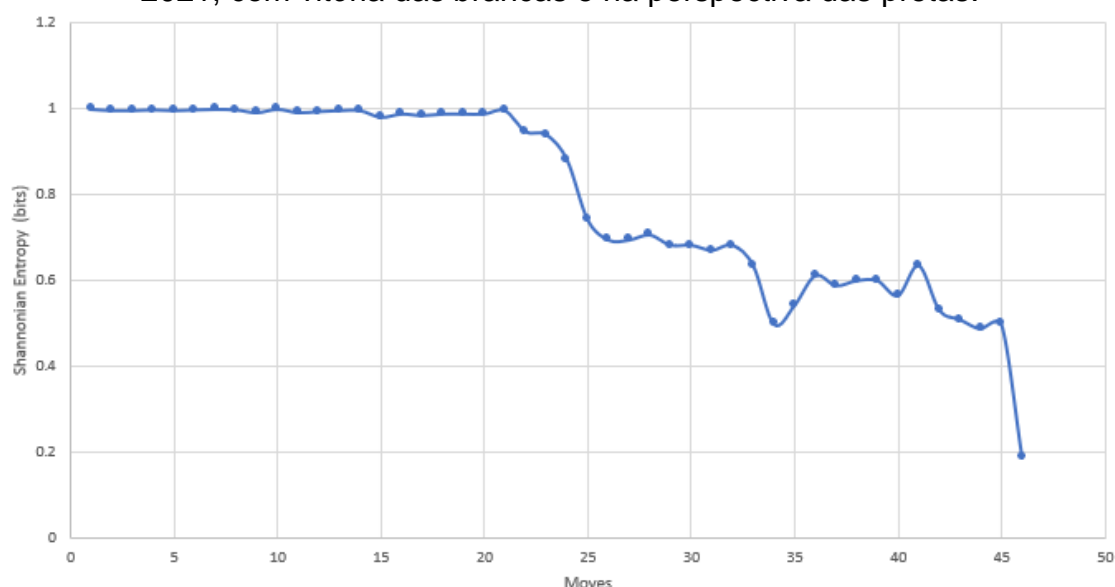
Fonte: Autor. Com base em dados retirados de lichess.org e computados através do programa Excel.

A figura 38 exemplifica a análise de dispersão da Entropia de Shannon (bits) pelo número de jogadas referente à partida número oito do campeonato mundial de xadrez de 2021, com vitória das brancas e na perspectiva das brancas. Os dados referentes à análise gráfica foram retirados da tabela 1 e computados com o auxílio do programa Excel.

Vale ressaltar que a análise efetuada neste exemplo difere do restante das análises executadas com código computacional. Como o gráfico corresponde somente à uma partida, a equação 3.3.1 da entropia de Shannon assume somente dois valores de avaliação da posição, enquanto que o algoritmo utiliza diversos valores de distribuições de probabilidades e suas consequentes somas pois computa ao mesmo tempo lances de diversas partidas. Deste modo, pode-se observar claramente na figura 38 que a entropia máxima que se pode atingir é de 1 bit, pois no começo da partida a probabilidade de ganho das pretas ou das brancas é de 50%, e segundo BOCCATO; ATTUX,2020 a entropia atinge o valor máximo no caso de equiprobabilidade e se anula quando a probabilidade associada a um valor específico é igual a um (ou seja, no cenário determinístico). No entanto, observou-se que mesmo tendo um resultado contrastante em relação à curva de ajuste na figura 27, que apresenta um aumento considerável

na entropia ao longo da partida, observou-se que nos últimos lances a entropia teve um leve aumento, o que seria de se esperar tomando-se a perspectiva das brancas.

Figura 39 - Análise de dispersão da Entropia de Shannon (bits) pelo número de jogadas referente à partida número oito do campeonato mundial de xadrez de 2021, com vitória das brancas e na perspectiva das pretas.

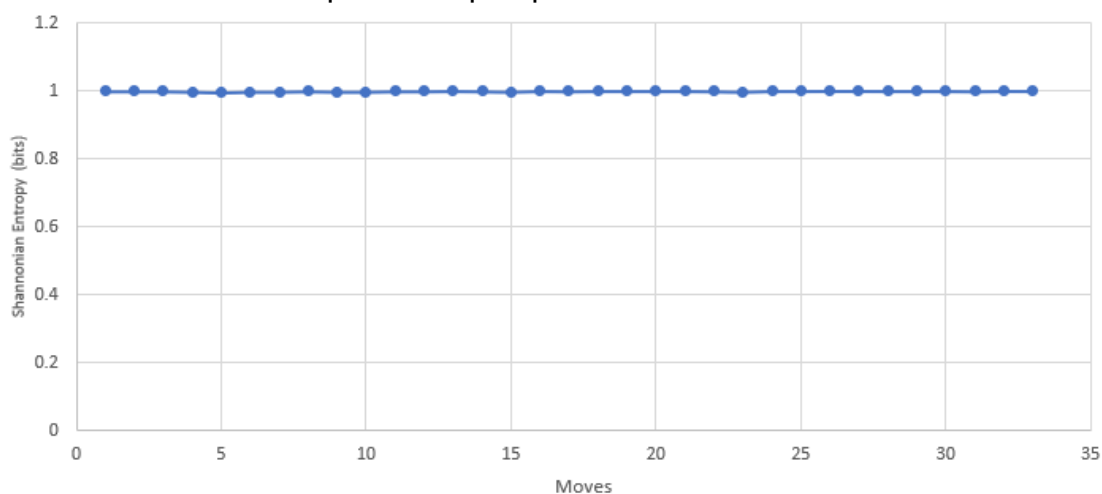


Fonte: Autor. Com base em dados retirados de lichess.org e computados através do programa Excel.

A figura 39, referente à análise de dispersão da Entropia de Shannon pelo número de jogadas referente à partida número oito do campeonato mundial de xadrez de 2021, com vitória das brancas e na perspectiva das pretas leva as mesmas considerações estipuladas para figura 38. No entanto, observou-se que nos lances finais, ao invés sofrer um leve aumento, decaiu de maneira significativa, corroborando a hipótese de que a perspectiva do jogador altera a variação da entropia de Shannon.

Por último, a partir dos dados referentes à tabela 2, computou-se a dispersão gráfica de uma partida entre os dois melhores motores de computador da atualidade, *Stockfish* e *LeelaChess0*, jogada no campeonato mundial de xadrez de motores de computador, sendo o resultado final da partida empate.

Figura 40 - Análise de dispersão da Entropia de Shannon (bits) pelo número de jogadas referente à partida entre os motores de computador *Stockfish* e *LeelaChess0* pelo Campeonato Mundial de *Engines* de Xadrez em 2023, com empate e na perspectiva das brancas.



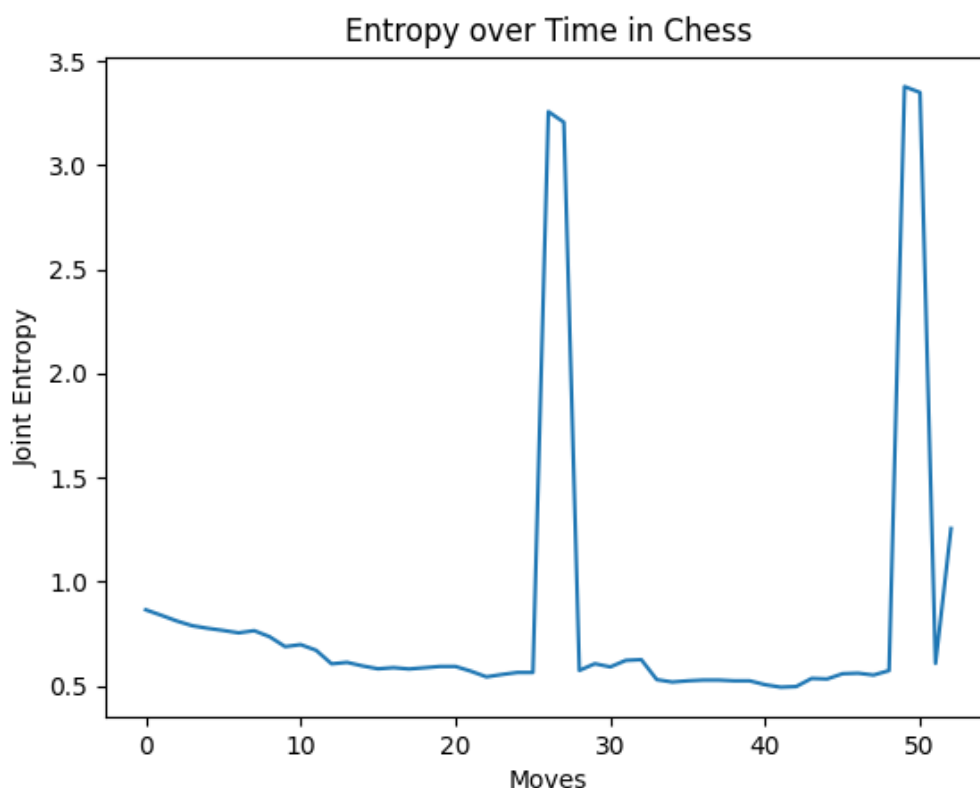
Fonte: Autor. Com base em dados retirados de lichess.org e computados através do programa Excel.

Como pode-se observar na figura 40, a variação da entropia de Shannon ao longo dos lances manteve-se praticamente constante em 1 bits. Tal informação corrobora o fato de que a variação entrópica é determinada por erros e imprecisões humanas. Como a partida jogada entre dois motores de computador não apresentou erros e imprecisões, foi-se de esperar que a entropia se mantivesse no seu valor máximo, pois as distribuições de probabilidade são equiprováveis nesse caso.

Para fins de completitude, também foi computado através dos códigos computacionais expostos no anexo os gráficos da entropia conjunta em partidas em que ocorreram vitória das brancas, no ano de 2021 e 2023.

Deste modo foi possível avaliar as posições como um sistema e não como um estado específico igual ocorre com a Entropia de Shannon.

Figura 41 - Análise de dispersão da Entropia Conjunta (em bits) pelo número de jogadas ao longo das partidas de xadrez da Copa do Mundo de 2021, com vitória das brancas.

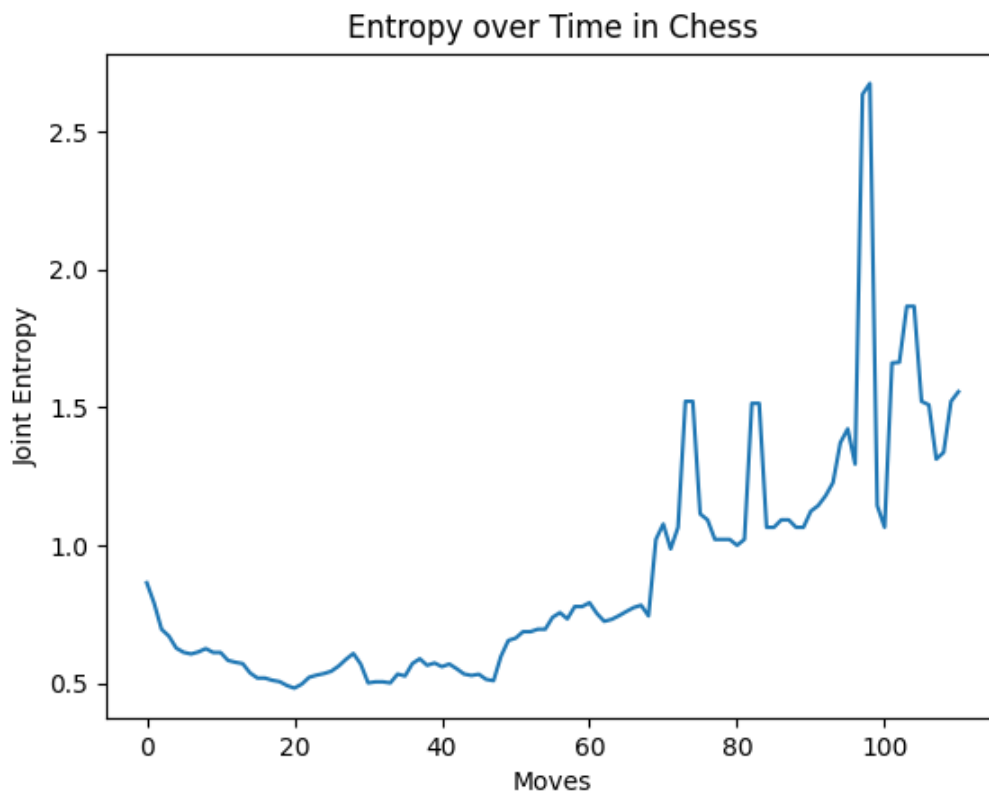


Fonte: Autor – Com Base nos códigos computacionais de MCGUINNESS et al.,2022.

A entropia conjunta, presente na teoria da informação e probabilidade, avalia a incerteza relacionada a um conjunto de variáveis aleatórias. Essencialmente, corresponde à média da quantidade de informação necessária para caracterizar o estado simultâneo dessas variáveis. No entanto, não faz sentido a distinção entre a perspectiva das brancas e a perspectiva das pretas.

Na figura 41 observou-se um aumento acentuado na variação entrópica conjunta, especialmente em dois picos distintos. Como a análise é efetuada sobre o sistema como um todo, é de se esperar que a entropia conjunta aumentou ao longo da partida, pois o estado simultâneo das diferentes variáveis carrega menos informações e conseqüentemente o aumento da incerteza, pois os estados (distribuição de probabilidade do lance das brancas e pretas) são mais ambíguos.

Figura 42 - Análise de dispersão da Entropia Conjunta (em bits) pelo número de jogadas ao longo das partidas de xadrez da Copa do Mundo de 2023, com vitória das brancas.



Fonte: Autor – Com Base nos códigos computacionais de MCGUINNESS et al.,2022.

Em relação ao ano de 2023, a Entropia Conjunta analisada na Copa do Mundo de Xadrez possui um comportamento similar ao evento do ano de 2021. No entanto, a figura 42 possui pontos de dispersão mais definidos e é possível verificar de maneira mais clara a elevação da entropia conjunta ao longo dos lances das partidas em que ocorreram vitória das brancas. Essa maior clareza decorre do fato que no evento de 2023 o número de vitórias em que as brancas saíram vitoriosas foi maior que o ano de 2021.

## 6 CONCLUSÃO

A finalidade da Ciência consiste em compreender a Natureza, alcançada por meio da observação e da coleta de informações, possibilitando a formulação e teste de previsões. A entropia de Shannon é um conceito fundamental na teoria da informação e destaca a essência da informação, quantificando a incerteza e revelando padrões subjacentes em conjuntos de dados, proporciona uma visão única sobre a natureza da aleatoriedade e da ordem, estimulando reflexões profundas sobre a essência da informação e como ela é processada e transmitida. A compreensão da entropia de Shannon é essencial não apenas para cientistas da computação e engenheiros de comunicação, mas também para aqueles que exploram as fronteiras da inteligência artificial, teoria da complexidade e ciência cognitiva. (DE CARVALHO PINEDA,2006)

Este trabalho utilizou o uso de motores de computador, em específico, o programa *Stockfish*, para determinar as percentagens de ganho inerentes a cada lance jogado nas partidas da Copa do Mundo de Xadrez de 2021 e 2023 e, desta forma, através da equação da entropia de Shannon, efetuar o cálculo da variação entrópica nas partidas a partir dos códigos computacionais, proporcionando análises gráficas de curvas de ajuste, dispersão e regressão linear. As análises gráficas geradas possibilitaram o método comparativo dos eventos de anos distintos.

Ao analisar a distribuição das peças no tabuleiro, a entropia proporcionou uma medida quantitativa da incerteza associada à posição das peças e às possíveis jogadas. À medida que o jogo progrediu, de um modo geral, a entropia tendeu a diminuir, refletindo a redução das opções disponíveis à medida que a partida se encaminha para um desfecho; em outras palavras, a incerteza relacionada à distribuição de probabilidade decaiu.

No entanto, observou-se a partir dos dados experimentais que a perspectiva do tabuleiro em que foram feitas as análises alteram o comportamento da entropia de Shannon. Ou seja, em uma partida em que ocorreu a vitória das brancas, sob a perspectiva das brancas, a entropia aumentou ao longo da partida; por outro lado, tomando-se a perspectiva das pretas, observou-se que a entropia decaiu no decorrer dos lances. Esse comportamento ocorreu, pois, sob a perspectiva das brancas, deve-se tomar

como base a distribuição de probabilidade do lance das pretas (pois a avaliação da posição das brancas em um lance específico é determinada pelo lance de seu oponente), e vice versa.

Os gráficos gerados referentes ao evento da Copa do Mundo de 2021 e 2023 foram, no geral, concordantes com os resultados esperados, porém observou-se que os gráficos referentes ao período de 2023 possuíam curvas de dispersão e regressão linear mais bem definidas em relação à 2021.

Em adição, pode-se verificar que a variação entrópica de Shannon em partidas de xadrez, no contexto da Teoria de Informação e o uso de motores de computador, é decorrente basicamente por erros e imprecisões humanas; a Figura 40 exemplifica essa afirmação.

Na sequência, para fins de completude também foram efetuadas análises gráficas referentes à entropia conjunta, de modo que foi possível verificar que a perspectiva do tabuleiro não altera o seu resultado final.

A Entropia de Shannon continua a ser um conceito inovador desde os primórdios de sua descoberta, não apenas contribuindo como uma potente ferramenta analítica na compreensão e complexidade estratégica no jogo de xadrez, mas também apresentando aplicações práticas e teóricas no ramo da ciência da computação e na implementação de algoritmos de inteligência artificial. Abordando-se o jogo de xadrez cientificamente, pode-se adquirir uma compreensão mais profunda das dinâmicas informacionais no jogo, influenciar diretamente à escolha de jogadas e no desenvolvimento pessoal de jogadores.



## 7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ALPHAZERO-STOCKFISH Match (2018). [S. l.], 2019. Disponível em: <https://www.chessgames.com/perl/chess.pl?tid=94247&pid=125070>. Acesso em: 1 jan. 2024.

[2] AHMED, Ammar. **Elements of Information Theory**: Chapter 4. [S. l.], 2016. Disponível em: [https://isip.piconepress.com/courses/temple/ece\\_8526/resources/questions/chapter\\_02/questions\\_ch04\\_02.pdf](https://isip.piconepress.com/courses/temple/ece_8526/resources/questions/chapter_02/questions_ch04_02.pdf). Acesso em: 13 dez. 2023.

[3] BOCCATO, Levy; ATTUX, Romis. **Fundamentos da Teoria da Informação**. [S. l.]: UNICAMP, 2020. Disponível em: [https://www.dca.fee.unicamp.br/~lbocato/topico\\_2.2\\_teorias\\_informacao.pdf](https://www.dca.fee.unicamp.br/~lbocato/topico_2.2_teorias_informacao.pdf). Acesso em: 2 nov. 2023.

[4] CHAMPION, Antoine. **Dissecting Stockfish Part 2: In-Depth Look at a chess engine**: When neural networks meet hardcoded knowledge. [S. l.], 2021. Disponível em: <https://towardsdatascience.com/dissecting-stockfish-part-2-in-depth-look-at-a-chess-engine-2643cdc35c9a>. Acesso em: 4 dez. 2023.

[5] C. E. SHANNON, “A Mathematical Theory of Communication”, Bell System Technical Journal, No. 27, pp. 379-423, 623-656, 1948.

[6] DE CARVALHO PINEDA, José Otávio. **E ENTROPIA SEGUNDO CLAUDE SHANNON: O DESENVOLVIMENTO DO CONCEITO FUNDAMENTAL DA TEORIA DA TEORIA DA INFORMAÇÃO**. 2006. Dissertação (Mestrado em História da Ciência) - Pontifícia Universidade Católica, [S. l.], 2006. Disponível em: <https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/13330/1/PINEDA,%20J%20O%20C%20-%20A%20Entropia%20segundo%20Claude%20Shannon.pdf>. Acesso em: 5 nov. 2023.

[7] FIRKOWSKI, Henrique. **Teoria Matemática da Comunicação de Shannon**. [S. l.], 2002. Disponível em: <https://docs.ufpr.br/~firk/pessoal/Tese/capitulos/12Cap4.pdf>. Acesso em: 14 nov. 2023.

[8] F. M. REZA, “An Introduction to Information Theory”, Dover, 1994.

[9] GUPTA, Aditya; MAHARAJ, Shiva; POLSON, Nicholas; SOKOLOV, Vadim. **On the Value of Chess Squares**. [S. l.], 2023. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/2307.05330.pdf>. Acesso em: 8 dez. 2023.

- [10] HAMZAH, Mohammad. **Game Theory**: How Stockfish Mastered Chess. [S. l.], 2022. Disponível em: <https://blogs.cornell.edu/info2040/2022/09/30/game-theory-how-stockfish-mastered-chess/>. Acesso em: 6 nov. 2023.
- [11] KLEIN, Dominik. **Neural Networks for Chess**: The Magic of deep and reinforcement learning revealed. [S. l.], 11 jun. 2022. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/2209.01506.pdf>. Acesso em: 2 jan. 2024.
- [12] LICHESS Accuracy metric. [S. l.], 2020. Disponível em: <https://lichess.org/page/accuracy>. Acesso em: 18 dez. 2023.
- [13] MCGUINNESS, Aengus; MARTINEZ BRITO, Armando; NAPPI, Roman; BARRAL, William. **Entropy in chess**. New Mexico: Supercomputing Challenge, 5 abr. 2022. Disponível em: <https://supercomputingchallenge.org/21-22/finalreports/45/team45-final-report.pdf>. Acesso em: 12 dez. 2023.
- [14] MCGUINNESS, Aengus; MARTINEZ BRITO, Armando; NAPPI, Roman; BARRAL, William. **Code**. New Mexico: Supercomputing Challenge, 5 abr. 2022. Disponível em: <https://supercomputingchallenge.org/21-22/finalreports/45/code.pdf>. Acesso em: 12 dez. 2023.
- [15] MCGUINNESS, Aengus; NAP, Roman. **Entropy in Chess**. [S. l.], 2022. Disponível em: <https://github.com/AengusMcGuinness/Entropy-In-Chess>. Acesso em: 15 jan. 2024.
- [16] NASCIMENTO, E J. **Introdução à Teoria da Informação**. [S. l.]: Universidade Federal do Vale do São Francisco, 2019. Disponível em: [http://www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento/topicos2/com\\_digital\\_2019\\_slide\\_06.pdf](http://www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento/topicos2/com_digital_2019_slide_06.pdf). Acesso em: 2 jan. 2024.
- [17] NARAYANAN, Saumik. **A Brief Guide to Stockfish NNUE**. [S. l.], 2021. Disponível em: <https://saumikn.com/blog/a-brief-guide-to-stockfish-nnue/>. Acesso em: 3 dez. 2023.
- [18] PROLO, Carlos A.; GOMES, Rafael Besserra. **Conceitos Básicos sobre grafos**. [S. l.], 2015. Disponível em: <https://www.dimap.ufrn.br/~prolo/Disciplinas/13I/DIM0111.0-AEDII/materiais/grafos/01%20Conceitos%20basicos%20sobre%20grafos.pdf>. Acesso em: 2 jan. 2024.
- [19] T. M. COVER & J. A. THOMAS, “Elements of Information Theory”, Wiley, 2006.

[20] TEORIA da Informação. [S. l.]: PUC-Rio, [201-?]. Disponível em: [https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/12170/12170\\_3.PDF](https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/12170/12170_3.PDF). Acesso em: 3 jan. 2024.

## 8 ANEXOS

### 8.1 CÓDIGO DE VERIFICAÇÃO EXPERIMENTAL

As Figuras expostas a seguir representam os códigos, em linguagem python3, utilizados para determinação das análises gráficas, separação de dados e curvas de ajuste referentes ao comportamento da entropia de Shannon ao longo de partidas de xadrez disputadas no campeonato mundial de 2021.[10]

Figura 43 - Código em python 3 para enumeração dos lances presentes nos PGN's.

```

1  #!/usr/bin/env python3
2  import sys, os
3  import numpy as np
4  import chess.pgn
5  import math
6  import matplotlib.pyplot as plt
7  import pandas as pd
8  from datetime import datetime
9
10 numFiles = len(sys.argv)
11 iterableFiles = range(1, numFiles)
12 baseName = [sys.argv[i][0:-4] for i in iterableFiles]
13 print(baseName)
14
15 def main():
16     data = {}
17     for i in iterableFiles:
18         with open(sys.argv[i]) as pgn:
19             game = chess.pgn.read_game(pgn)
20             board = game.board()
21             for moveNum, move in enumerate(game.mainline_moves()):
22                 legalMoves = list(board.legal_moves)
23                 numLegalMoves = len(list(board.legal_moves))
24                 stateSVG = open(f"{baseName[i-1]}-move{moveNum}gameState.svg", 'w')
25                 stateSVG.write(chess.svg.board(board, size = 350))
26                 stateSVG.close()
27                 board.push(move)
28
29 main()

```

Fonte: Code - Supercomputing Challenge. (MCGUINNESS et al.,2022)

Figura 44 - Código em python 3 para leitura de PGN's.

```
1 import os, sys
2
3 def main():
4     baseName = sys.argv[1][0:-4]
5     count = 0
6     numFiles = 0
7     gameWriter = []
8     with open(sys.argv[1], 'r') as masterFile:
9         lines = masterFile.readlines()
10        for index, line in enumerate(lines):
11            gameWriter.append(line)
12            if line == "\n":
13                count += 1
14            if count == 2:
15                numFiles += 1
16                newGameFile = open(f"{baseName}-game{numFiles}.pgn", 'w')
17                print(f"{baseName}-game{numFiles}.pgn")
18                for line in gameWriter:
19                    newGameFile.writelines(line)
20                newGameFile.close()
21                gameWriter.clear()
22                count = 0
23 main()
24
```

Fonte: Code - Supercomputing Challenge. (MCGUINNESS et al.,2022)

Figura 45 - Código em python3 para determinação de análise gráfica e a respectiva curva de ajuste da entropia de shannon(bits) por lance executado. Parte 1.

```

#!/usr/bin/env python3
import asyncio
1 import sys, os
2 import numpy as np
3 import chess.pgn
4 import chess.engine
5 import math
6 import itertools
7 import matplotlib.pyplot as plt
8 import pandas as pd
9 from datetime import datetime
10 #Up There are the dependencies excluding re, sys, and os the rest are standard
11 #Here is where the pgn files are from https://theweekinchess.com/a-year-of-pgn-game-files
12
13 numFiles = len(sys.argv)
14 iterableFiles = range(1, numFiles)
15 baseName = [sys.argv[i][0:-4] for i in iterableFiles]
16 log2 = lambda a: math.log(a, 2)
17
18 def main():
19     #This is the time which is the name of each file so they are unqie each time
20     runtime = datetime.now()
21     dt_string = runtime.strftime("%d-%H-%M-%S")
22     #the data we graph is in a dictionary
23     data = {}
24     #These go in the dictionary as a list of lists
25     totalMoves = []
26     totalShannonEntropies = []
27     totalConditionalEntropies = []
28     totalJointEntropy = []
29     #open our data file which we write our statistics to
30     dataFile = open(f"run-data-{dt_string}.out", 'w')
31     #This iterates over all of the pgn files
32     engine = chess.engine.SimpleEngine.popen_uci("/usr/games/stockfish")
33     for i in iterableFiles:
34         with open(sys.argv[i]) as pgn:
35             #reads in the pgn and makes a chess board
36             game = chess.pgn.read_game(pgn)
37             board = game.board()
38             dataFile.write(f"Game {i} and File Name {baseName[i-1]}\n")
39             for moveNum, move in enumerate(game.mainline_moves()):
40                 if moveNum % 2 != 0:
41                     #This only does the calculations if it is the white players move
42                     moveTo = (str(move))[2::]
43                     if len(moveTo) == 3:
44                         moveTo = moveTo[:-1]
45                         piece = board.piece_at(chess.parse_square(moveTo))
46
47                     weights = []
48                     if ((numBetterMoves := len(list(board.legal_moves))) > 0):
49                         info = engine.analyse(board, chess.engine.Limit(time=0.1, depth=10), multipv=numBetterMoves)

```

Fonte: Code - Supercomputing Challenge. (MCGUINNESS et al.,2022)

Figura 46 - Código em python3 para determinação de análise gráfica e a respectiva curva de ajuste da entropia de shannon(bits) por lance executado.  
Parte 2.

```

51     for j in info:
52         score = (j['score'])
53         num = str(score.black())
54         if num[0] == "#":
55             num = int(num[1:])
56         else:
57             num = int(num)
58         if (num > 0):
59             weights.append(num)
60     denom = sum(weights)
61     probabilities = [(val/denom) for val in weights]
62 else:
63     probabilities=[0]
64
65     # print("Weights ", weights)
66     # print("Probabilities", probabilities)
67     # print("Board Push")
68     board.push(move)
69     #round two
70
71     weights = []
72     if ((newNumBetterMoves := len(list(board.legal_moves))) > 0):
73         info = engine.analyse(board, chess.engine.Limit(time=0.1, depth=10), multipv=newNumBetterMoves)
74         for k in info:
75             score = (k['score'])
76             num = str(score.black())
77             if num[0] == "#":
78                 num = int(num[1:])
79             else:
80                 num = int(num)
81             if (num > 0):
82                 weights.append(num)
83         denom = sum(weights)
84         newProbabilities = list([(val/denom) for val in weights])
85     else:
86         newProbabilities=[0]
87     # this calculate the probabilities of the new moves
88     # print("Weights ", weights)
89     # print("Probabilities", newProbabilities)
90     # print("Board Push")
91     blackMove = moveNum//2
92     entropy = shannonEntropy(probabilities)
93     conEntropy = conditionalEntropy(probabilities, newProbabilities)
94

```

Fonte: Code - Supercomputing Challenge. (MCGUINNESS et al.,2022)

Figura 47 - Código em python3 para determinação de análise gráfica e a respectiva curva de ajuste da entropia de shannon(bits) por lance executado.

### Parte 3.

```

94     conEntropy = conditionalEntropy(probabilities, newProbabilities)
95     jEntropy = jointEntropy(probabilities, newProbabilities)
96     dataFile.write(f"Player: {blackMove} Move: {move} Piece: {piece} Number of Better Moves: {numBetterMoves} Entropy: {entropy} Conditio
97     totalMoves.append(blackMove)
98     totalShannonEntropies.append(shannonEntropy(probabilities))
99     totalConditionalEntropies.append(conEntropy)
100    totalJointEntropy.append(jEntropy)
101    else:
102        board.push(move)
103        #updates the data with the data filename:[stats, stats, stats]
104        data.update({baseName[i-1]: [totalMoves, totalShannonEntropies, totalConditionalEntropies, totalJointEntropy]})
105        #data.update({baseName[0]: [totalMoves, totalShannonEntropies]})
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196
197
198
199
200
201
202
203
204
205
206
207
208
209
210
211
212
213
214
215
216
217
218
219
220
221
222
223
224
225
226
227
228
229
230
231
232
233
234
235
236
237
238
239
240
241
242
243
244
245
246
247
248
249
250
251
252
253
254
255
256
257
258
259
260
261
262
263
264
265
266
267
268
269
270
271
272
273
274
275
276
277
278
279
280
281
282
283
284
285
286
287
288
289
290
291
292
293
294
295
296
297
298
299
300
301
302
303
304
305
306
307
308
309
310
311
312
313
314
315
316
317
318
319
320
321
322
323
324
325
326
327
328
329
330
331
332
333
334
335
336
337
338
339
340
341
342
343
344
345
346
347
348
349
350
351
352
353
354
355
356
357
358
359
360
361
362
363
364
365
366
367
368
369
370
371
372
373
374
375
376
377
378
379
380
381
382
383
384
385
386
387
388
389
390
391
392
393
394
395
396
397
398
399
400
401
402
403
404
405
406
407
408
409
410
411
412
413
414
415
416
417
418
419
420
421
422
423
424
425
426
427
428
429
430
431
432
433
434
435
436
437
438
439
440
441
442
443
444
445
446
447
448
449
450
451
452
453
454
455
456
457
458
459
460
461
462
463
464
465
466
467
468
469
470
471
472
473
474
475
476
477
478
479
480
481
482
483
484
485
486
487
488
489
490
491
492
493
494
495
496
497
498
499
500
501
502
503
504
505
506
507
508
509
510
511
512
513
514
515
516
517
518
519
520
521
522
523
524
525
526
527
528
529
530
531
532
533
534
535
536
537
538
539
540
541
542
543
544
545
546
547
548
549
550
551
552
553
554
555
556
557
558
559
560
561
562
563
564
565
566
567
568
569
570
571
572
573
574
575
576
577
578
579
580
581
582
583
584
585
586
587
588
589
590
591
592
593
594
595
596
597
598
599
600
601
602
603
604
605
606
607
608
609
610
611
612
613
614
615
616
617
618
619
620
621
622
623
624
625
626
627
628
629
630
631
632
633
634
635
636
637
638
639
640
641
642
643
644
645
646
647
648
649
650
651
652
653
654
655
656
657
658
659
660
661
662
663
664
665
666
667
668
669
670
671
672
673
674
675
676
677
678
679
680
681
682
683
684
685
686
687
688
689
690
691
692
693
694
695
696
697
698
699
700
701
702
703
704
705
706
707
708
709
710
711
712
713
714
715
716
717
718
719
720
721
722
723
724
725
726
727
728
729
730
731
732
733
734
735
736
737
738
739
740
741
742
743
744
745
746
747
748
749
750
751
752
753
754
755
756
757
758
759
760
761
762
763
764
765
766
767
768
769
770
771
772
773
774
775
776
777
778
779
780
781
782
783
784
785
786
787
788
789
790
791
792
793
794
795
796
797
798
799
800
801
802
803
804
805
806
807
808
809
810
811
812
813
814
815
816
817
818
819
820
821
822
823
824
825
826
827
828
829
830
831
832
833
834
835
836
837
838
839
840
841
842
843
844
845
846
847
848
849
850
851
852
853
854
855
856
857
858
859
860
861
862
863
864
865
866
867
868
869
870
871
872
873
874
875
876
877
878
879
880
881
882
883
884
885
886
887
888
889
890
891
892
893
894
895
896
897
898
899
900
901
902
903
904
905
906
907
908
909
910
911
912
913
914
915
916
917
918
919
920
921
922
923
924
925
926
927
928
929
930
931
932
933
934
935
936
937
938
939
940
941
942
943
944
945
946
947
948
949
950
951
952
953
954
955
956
957
958
959
960
961
962
963
964
965
966
967
968
969
970
971
972
973
974
975
976
977
978
979
980
981
982
983
984
985
986
987
988
989
990
991
992
993
994
995
996
997
998
999
1000

```

Fonte: Code - Supercomputing Challenge. (MCGUINNESS et al.,2022)



Figura 48 - Código em python3 para determinação de análise gráfica e a respectiva curva de ajuste da entropia de shannon(bits) por lance executado.  
Parte 4.

```

144 plt.savefig("figure-conditional-(dt_string).png")
145 plt.show()
146
147 def plotBestFitConditionalEntropy(data, dt_string):
148     bestFitXs = []
149     bestFitYs = []
150     plt.figure()
151     for i in list(data.keys()):
152         plt.scatter(data[i][0], data[i][2])
153         bestFitXs.append(data[i][0])
154         bestFitYs.append(data[i][2])
155     bestFitXs = np.array(list(itertools.chain(*bestFitXs)))
156     bestFitYs = np.array(list(itertools.chain(*bestFitYs)))
157     model = np.poly1d(np.polyfit(bestFitXs, bestFitYs, 4))
158     print(model)
159     nModel = np.polyder(model)
160     print(nModel)
161     plt.plot(np.sort(bestFitXs), nModel(np.sort(bestFitXs)), linewidth=3.0, color="black", linestyle="dashdot", label="Derivative")
162     plt.plot(np.sort(bestFitXs), model(np.sort(bestFitXs)), linewidth=3.0, color="black", label="Line of best fit")
163     plt.legend(handlelength=3)
164     plt.xlabel('Moves')
165     plt.ylabel('Conditional Entropy (bits)')
166     plt.title('Conditional Entropy During the 2021 World Chess Championships', fontsize = 20)
167     plt.savefig("figure-conditional-best-(dt_string).png")
168     plt.show()
169
170 def plotBestFitShannonEntropy(data, dt_string):
171     bestFitXs = []
172     bestFitYs = []
173     plt.figure()
174     for i in list(data.keys()):
175         plt.scatter(data[i][0], data[i][1])
176         bestFitXs.append(data[i][0])
177         bestFitYs.append(data[i][1])
178     bestFitXs = np.array(list(itertools.chain(*bestFitXs)))
179     bestFitYs = np.array(list(itertools.chain(*bestFitYs)))
180     model = np.poly1d(np.polyfit(bestFitXs, bestFitYs, 4))
181     print(model)
182     nModel = np.polyder(model)
183     print(nModel)
184     plt.plot(np.sort(bestFitXs), nModel(np.sort(bestFitXs)), linewidth=3.0, color="black", linestyle="dashdot", label="Derivative")
185     plt.plot(np.sort(bestFitXs), model(np.sort(bestFitXs)), linewidth=3.0, color="black", label="Line of best fit")
186     plt.legend(handlelength=3)
187     plt.xlabel('Moves')
188     plt.ylabel('Shannonian Entropy (bits)')
189     plt.title('Shannon Entropy During the 2021 World Chess Championships', fontsize = 20)
190     plt.savefig("figure-shannon-best-(dt_string).png")
191     plt.show()
192
193 def plotShannonEntropy(data, dt_string):
194     plt.figure()
195     for i in list(data.keys()):
196

```

Fonte: Code - Supercomputing Challenge. (MCGUINNESS et al.,2022)

Figura 49 - Código em python3 para determinação de análise gráfica e a respectiva curva de ajuste da entropia de shannon(bits) por lance executado.  
Parte 5.

```

196 for i in list(data.keys()):
197     plt.plot(data[i][0], data[i][1])
198     plt.xlabel('Moves')
199     plt.ylabel('Shannonian Entropy')
200     plt.title('Entropy over Time in Chess')
201     plt.savefig(f"figure-shannon-{dt_string}.png")
202     plt.show()
203
204
205 def plotBestJointEntropy(data, dt_string):
206     bestFitXs = []
207     bestFitYs = []
208     plt.figure()
209     for i in list(data.keys()):
210         plt.scatter(data[i][0], data[i][3])
211         bestFitXs.append(data[i][0])
212         bestFitYs.append(data[i][3])
213
214     bestFitXs = np.array(list(itertools.chain(*bestFitXs)))
215     bestFitYs = np.array(list(itertools.chain(*bestFitYs)))
216     model = np.poly1d(np.polyfit(bestFitXs, bestFitYs, 4))
217     print(model)
218     nModel = np.polyder(model)
219     print(nModel)
220     plt.plot(np.sort(bestFitXs), nModel(np.sort(bestFitXs)), linewidth=3.0, color="black", linestyle="dashdot", label="Derivative")
221     plt.plot(np.sort(bestFitXs), model(np.sort(bestFitXs)), linewidth=3.0, color="black", label="Line of best fit")
222     plt.legend(handlelength=3)
223     plt.xlabel('Moves')
224     plt.ylabel('Joint Entropy (bits)')
225     plt.title('Joint Entropy During the 2021 World Chess Championships', fontsize = 20)
226     plt.savefig(f"figure-joint-best-{dt_string}.png")
227     plt.show()
228
229 def plotJointEntropy(data, dt_string):
230     plt.figure()
231     for i in list(data.keys()):
232         plt.plot(data[i][0], data[i][3])
233         plt.xlabel('Moves')
234         plt.ylabel('Joint Entropy')
235         plt.title('Entropy over Time in Chess')
236         plt.savefig(f"figure-joint-{dt_string}.png")
237     plt.show()
238
239
240 if __name__ == "__main__":
241     main()

```

Fonte: Code - Supercomputing Challenge. (MCGUINNESS et al.,2022)