UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA INTERINSTITUCIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA UFSCar-USP

Victor Eduardo Lachos Olivares

Uma Abordagem Estatística para a Análise dos Resultados das Eleições Presidenciais

Tese apresentada ao Departamento de Estatística – Des/UFSCar e ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre ou Doutor em Estatística - Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística UFSCar-USP.

Orientador: Prof. Dr. **Jorge Luis Bazán Guzmán**

São Carlos

Fevereiro de 2024

FEDERAL UNIVERSITY OF SÃO CARLOS
INSTITUTION OF EXACT SCIENCES AND TECHNOLOGY
INTERINSTITUTIONAL GRADUATE PROGRAM IN STATISTICS UFSCar-USP

Victor Eduardo Lachos Olivares

An statistical approach for analysis of presidential elections results

Thesis presented to the Department of Statistics – Des/UFSCar and to the Institute of Mathematical and Computer Sciences – ICMC-USP, as part of the requirements for obtaining the title of Master's or Doctorate in Statistics - Interinstitutional Graduate Program in Statistics UFSCar-USP.

Advisor: Prof. Dr. **Jorge Luis Bazán Guzmán**

São Carlos

February of 2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Victor Eduardo Lachos Olivares, realizada em 15/01/2024.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Jorge Luis Bazán Guzmán (USP)

Prof. Dr. Marcos Oliveira Prates (UFMG)

Prof. Dr. Luis Hilmar Valdivieso Serrano (PUC-Perú)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística.

Este trabalho é dedicado à minha família, que me apoiou durante toda a jornada rumo aos meus objetivos. Um agradecimento especial ao meu irmão, que sempre esteve atento e inquebrantável na confiança que depositou em mim; à minha mãe, por ser meu guia e me educar desde a infância; e ao meu pai, que me incentivou a seguir esse caminho.

AGRADECIMENTOS

Gostaria, em primeiro lugar, de expressar minha gratidão a Deus porque através de sua vontade e amor infinito, alcancei este objetivo significativo.

Além disso, quero estender meu agradecimento à minha família: minha mãe, Rosalina Emma; meu irmão, Carlos Alberto; e meu pai, Victor Hugo. Vocês são as pessoas que Deus colocou em minha vida para me apoiar e impulsionar a ser a melhor versão de mim mesmo.

Quero também agradecer ao meu tio, Alberto Lachos, e à minha tia, Ana Matute, pelo apoio e pelo exemplo inspirador como pessoas, que me motivam a continuar me aprimorando a cada dia, tanto pessoal quanto profissionalmente.

Ao meu orientador, Jorge Luis Bazán Guzmán, minha extensa gratidão por ser a pessoa essencial e inspiradora ao longo deste processo. Suas orientações e ensinamentos valiosos não apenas me guiaram no desenvolvimento deste projeto, mas também moldaram significativamente minha compreensão e apreciação pela área estadistica. Além disso, sua paciência, disponibilidade e compromisso em orientar-me durante os desafios deste caminho acadêmico são verdadeiramente inestimáveis, dado que o conhecimento que adquiri nestes últimos anos foi extraordinário e imensamente essencial.

Finalmente, quero agradecer à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES/MEC/Governo do Brasil pelo apoio financeiro concedido durante meu curso de Pós-Graduação em Estatística (PIPGEs).

“O mais sábio é aquele
que sabe que não sabe nada.”
(Sócrates)

RESUMO

LACHOS OLIVARES, V. E. **Uma Abordagem Estatística para a Análise dos Resultados das Eleições Presidenciais**. 2023. 86 p. Dissertação (Mestrado em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

Os dados multipartidários possuem características que os tornam dados composicionais tais como uma soma constante de componentes e um espaço limitado conhecido como simplex. Assim, o propósito do trabalho é desenvolver uma metodologia para analisar os dados multipartidários de eleições eleitorais considerando sua natureza restrita. Nesse contexto, a metodologia proposta consiste em 8 etapas: inicialmente, coletamos os dados multipartidarios e os transformamos em dados composicionais. Em seguida, aplicamos a transformação de razões logarítmicas , removendo as restrições inerentes de dados composicionais.

Posteriormente, empregamos a análise de componentes principais (ACP) para reduzir a dimensionalidade e identificar os principais componentes que retêm a maior parte da variação dos dados. Essas componentes são analisados com base em duas métricas importantes: cargas e escores. Dado que os escores possuem diferente variabilidade nas componentes, eles são transformados entre valores zero e um.

Subsequentemente, propomos o modelo de regressão Beta considerando os escores como variável resposta, e os indicadores de desenvolvimento humano como as variáveis explicativas. A metodologia é aplicada nos dados multipartidários das eleições do primeiro turno no Peru em 2021 e no Brasil em 2022, permitindo-nos identificar os principais componentes e que covariáveis (saúde, educação e renda) estão relacionadas diretamente aos votos em diferentes regiões e estados.

Finalmente, considerando que os dados das eleições presidenciais do Peru em 2021 apresentam duas variáveis resposta, propomos um modelo de regressão bivariado via cópulas e analisar a estrutura dependência entre essas variáveis.

Palavras-chave: Análise de componentes principais, Transformação de razão logarítmica, Dados composicionais, Escores, Cargas, Modelo de regressão Beta, Cópulas..

ABSTRACT

LACHOS OLIVARES, V. E. **An statistical approach for analysis of presidential elections results**. 2023. 86 p. Dissertação (Mestrado em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

Multiparty data has characteristics that make it compositional data such as a constant sum of components and a limited space known as simplex. Thus, the purpose of the work is to develop a methodology to analyze multi-party data from electoral elections considering their restricted nature. In this context, the proposed methodology consists of 8 steps: initially, we collect multi-party data and transform it into compositional data. Then, we apply the log-ratio transformation , removing the inherent constraints of compositional data.

Next, we employ principal component analysis (PCA) to reduce dimensionality and identify the principal components that retain most of the variation in the data. These components are analyzed based on two important metrics: loadings and scores. Given that the scores have different variability in the components, they are transformed between values of zero and one.

Subsequently, we propose the Beta regression model considering the scores as the response variable, and the human development indicators as the explanatory variables. The methodology is applied to multiparty data from the first round elections in Peru in 2021 and Brazil in 2022, allowing us to identify the main components and which covariates (health, education and income) are directly related to votes in different regions and states.

Finally, considering that data from presidential elections of Peru 2021 with two response variables, we propose a bivariate regression model via copulas and analyze the dependence structure between these variables.

Keywords: Principal Component Analysis, Log-ratio transformation, Compositional Data, Scores, Loadings, Beta Regression Model, Copulas..

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE CÓDIGOS-FONTE

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

Os dados eleitorais referem-se às informações associadas a um processo eleitoral, no qual os eleitores escolhem representantes para uma circunscrição específica, como estados, regiões ou distritos. Esse processo eleitoral é fundamental para os princípios da democracia, revelando as preferências dos eleitores em relação a partidos políticos e a confiabilidade desses dados é crucial para garantir a legitimidade do governo, assegurar a integridade do processo eletivo, e promover o desenvolvimento e a estabilidade socioeconômica.

Quando analisamos os dados eleitorais, no entanto, é possível identificar um problema, uma vez que esses dados são composicionais. Dados composicionais significam que podem ser representados por proporções, frações ou porcentagens, fornecendo informações relativas em vez de absolutas. Alguns exemplos adicionais de dados composicionais (BAZAN; SULMONT; CALDERÓN, 2012) incluem a distribuição de gastos familiares, a composição do portfólio de investimentos, o uso diário do tempo em diversas atividades e a distribuição de vendas em diferentes regiões. Esses dados não são exclusivos de uma única área e surgem em ciências políticas, geoquímica, genética, ecologia, entre outras disciplinas. Além disso, os dados composicionais possuem características de não-negatividade e uma soma constante, tornando as variáveis envolvidas dependentes entre si, e conforme citado por Mosimann (1962), há uma correlação espúria gerada por variáveis que representam partes de um todo, assim também esses dados apresentam restrições no espaço dimensional.

Por outro lado, os dados eleitorais são considerados dados multivariados, e para melhorar a interpretação da distribuição dos votos, devemos aplicar a ferramenta estadistica de analise de componentes principais, visando reducir a dimensionalidade. No entanto, as características inerentes e as restrições associadas aos dados composicionais dificultam a aplicação efetiva desse método para redução de dimensionalidade nos dados eleitorais.

Consequentemente, Aitchison (1982) estabeleceu os fundamentos teóricos e metodológicos para a análise estatística de dados composicionais, propondo uma transformação de razão

logarítmica centrada nos dados. Posteriormente, aplicou-se a análise de componentes principais para identificar os principais componentes que explicam a maior parte da variação nos dados eleitorais.

Com as circunscrições agora representadas em um novo espaço dimensional de componentes, observamos uma nova disposição espacial. O indicador, denominado escore, obtido através da análise de componentes principais, oferece uma interpretação dessa nova disposição em que as circunscrições são então organizadas de maneira que possibilita a identificação de variáveis latentes por meio dos escores. Por tanto, é necessário identificar as variáveis explicativas associadas às circunscrições que explicam por que elas ocupam determinadas posições, assim como essas variáveis explicativas podem explicar as variáveis latentes associadas aos componentes principais.

Dentre as pesquisas que exploraram os dados eleitorais usando análise de dados composicionais, destacam-se os trabalhos Rodrigues e Lima (2009) e Bazan, Sulmont e Calderón (2012). No primeiro caso, foi apresentada uma análise das eleições da União Europeia usando análise de componentes principais, enquanto o segundo considerou dados das eleições peruanas de 2011.

Dessa forma, nesta dissertação propomos uma metodologia para analisar os resultados das eleições presidenciais no Peru em 2021 e nas eleições brasileiras em 2022. A proposta é modelar as principais componentes, considerando variáveis ligadas às respectivas circunscrições. Isso será feito aplicando modelos de regressão e agregando variáveis explicativas relacionadas ao comportamento político da sociedade em questão. Além disso, é importante notar que pode haver mais de uma componente relacionada às variáveis, razão pela qual propomos o uso de modelos de regressão bivariada via cópulas para identificar a provável dependência entre as componentes na presença de variáveis explicativas.

A dissertação está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2, apresentamos os conceitos preliminares necessários para compreender a metodologia, incluindo a definição dos dados composicionais, a transformação de razões logaritmicas em dados composicionais e a análise de componentes principais, onde obtemos duas métricas importantes: as cargas e os escores. Devido à variabilidade dos escores, exploramos a necessidade de uma transformação para que eles estejam dentro do intervalo entre zero e um. Além disso, propomos o modelo de Regressão Beta, considerando os escores como variável resposta. No Capítulo 3, aplicamos a metodologia para analisar os votos das eleições peruanas de 2021. No Capítulo 4, aplicamos a metodologia para analisar os votos das eleições Brasileiras de 2022. No Capítulo 5 desenvolvemos um modelo bivariado aplicando cópulas nas eleições peruanas de 2021. Por último, no Capítulo 6, resumimos os resultados mais importantes obtidos na análise das eleições peruanas e brasileiras usando o pacote GAMLSS e SemiParBIVProbit para o modelo univariado e bivariado respectivamente.

CAPÍTULO

2

PRELIMINARES

2.1 Dados composicionais em dados com múltiplos partidos

Identificamos as características de dados eleitorais multipartidários considerando V_{ij}, que denota a proporção de votos na circunscrição eleitoral onde a denotação para região, província, estado ou distrito é i e para os partidos é j.

Dados com votos multipartidários apresentam duas características principais, que são:

O intervalo de valores para V_{ij}, onde:

$$V_{ij} \in [0,1],\ i = 1,...,n\ e\ j = 1,...,p$$

E a soma das proporções de votos para todos os partidos em cada circunscrição é igual a 1, para i variando de 1 a n:

$$\sum_{j=1}^{p} V_{ij} = 1,\ i = 1,\ldots,n.$$

As variáveis que satisfazem as duas características mencionadas geralmente estão em uma região denominada simplex. O simplex é definido da seguinte maneira:

$$\mathbf{V_i} = (V_{i1},...V_{ij}) : \sum_{j=1}^{p} V_{ij} \leq 1, i = 1,...,n$$

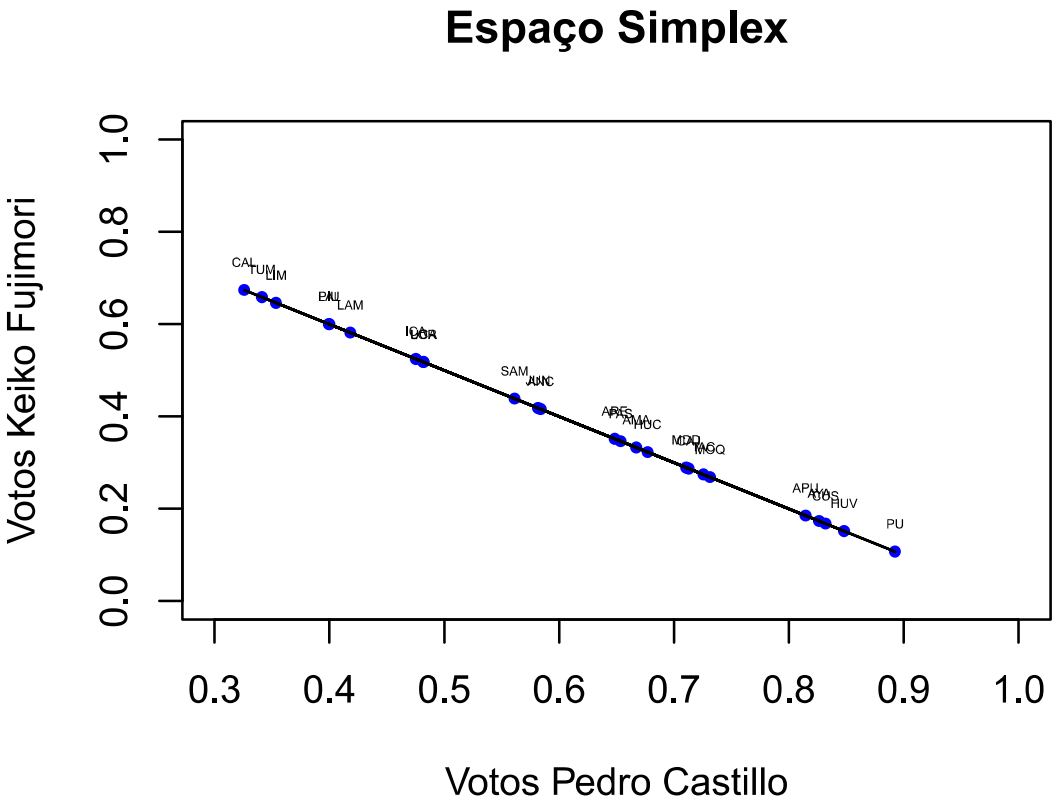
Aqui, $\mathbf{V_i}$ representa um vector para uma região específica i, e j denota os partidos políticos, onde p indica a dimensão do vetor.

Para uma melhor visualização do espaço simplex, a continuação apresentamos os votos eleitorais

do segundo turno das eleições presidenciais de 2021 no Peru, que envolveram dois candidatos: Keiko Fujimori V_{iF} e Pedro Castillo V_{iC}. Aqui, i denota as diferentes 24 regiões e a única provincia constitucional do Peru, e conforme representado na Figura 1 utilizamos a padronização proposta por ISO3166 (1998) para cada região. Podemos representar facilmente ambas as variáveis como $V_{iC} + V_{iF} = 1$, o que nos permite entender as proporções de votos dos candidatos em relação ao espaço simplex.

De acordo com a segunda restrição, todas as proporções de votos das circunscrições estão localizadas em uma linha com limites nos eixo X e Y, abaixo ou igual a 1, devido à primeira restrição.

Figura 1 – O simplex de duas partidos políticos nas eleições presidenciais no segundo turno



Amazonas(AMA), Ancash(ANC), Apurímac(APU), Arequipa(ARE), Ayacucho(AYA), Cajamarca(CAJ), Cusco(CUS), Callao(CAL), Huancavelica(HUV), Huánuco(HUC), Ica(ICA), Junín(JUN), La Libertad(LAL), Lambayeque(LAM), Lima(LIM), Loreto(LOR), Madre de Dios(MDD), Moquegua(MOQ), Pasco(PAS), Piura(PIU), Puno(PUN), San Martín(SAM), Tacna(TAC), Tumbes(TUM), Ucayali(UCA).

Fonte: Elaborada pelo autor.

A mesma lógica é aplicada a eleições com mais de dois partidos $(p > 2)$. No entanto, o gráfico torna-se mais complexo. Para ilustrar, consideramos uma eleição com três partidos políticos, onde V_{iF} representa os votos para a candidata Keiko Fujimori, V_{iC} representa os votos para o candidato Pedro Castillo e V_{iO} representa os votos acumulados para outros candidatos. Nesse caso, obtemos um tetraedro no espaço tridimensional, representando as proporções de

votos para os diferentes candidatos nas circunscrições eleitorais.

2.2 Transformação de razão logarítmica centrada dos dados composicionais

Uma metodologia adequada para a análise de dados composicionais em eleições multipartidárias deve levar em consideração alguns princípios e características do espaço simplex. A ideia central é que dados composicionais e votos dos partidos políticos fornecem apenas informações sobre a magnitude relativa das partes, não justificando interpretações que envolvam magnitudes absolutas. Assim, assumimos que o valor constante da soma das partes é irrelevante.

Ao reconhecer a importância das proporções em dados composicionais, surge a pergunta sobre que tipo de proporções estamos considerando. Nesse contexto, o fundamento dessa metodologia foi proposto por Aitchison (1982), consistindo em uma transformação dos dados composicionais, originalmente no simplex $\mathbf{V_i}$, em um vetor que envolve proporções entre as partes e é definido em um espaço real. Quando essa transformação é bijectiva, estabelece uma correspondência direta entre a composição no simplex e uma representação real em forma de vetor. Isso significa que qualquer problema relacionado a dados composicionais pode ser expresso em vetores transformados, permitindo-nos resolver essas questões utilizando técnicas multivariadas em espaços reais.

Consideremos, por exemplo, n circunscrições eleitorais com proporções de votos V_{ij}, onde $i = 1, ..., n$ e $j = 1, ..., p$. Inicialmente, assumimos que essas proporções são composicionais. No caso em que não são composicionais, podemos aplicar a transformação sugerida por Egozcue *et al.* (2003). No entanto, neste trabalho, adotamos a proposta de Aitchison (1982), conhecida como transformação de razão logarítmica centrada (clr) em R^p, e definida como:

$$clr(\mathbf{V_i^*}) = \left[\log\left(\frac{V_{i1}}{g_i}\right), \ldots, \log\left(\frac{V_{ip}}{g_i}\right)\right]^\top,$$

onde g_i é a média geométrica das proporções na i-ésima circunscrição eleitoral, ou seja,

$$g_i = [\prod_{j=1}^{p} V_{ij}]^{\frac{1}{p}} \quad \Rightarrow \quad \log(g_i) = \frac{\sum_{j=1}^{p} \log V_{ij}}{p},$$

outra forma equivalente de representar a equação é:

$$clr(\mathbf{V_i^*}) = [\log(V_{i1}) - \log(g_i), \ldots, \log(V_{ip}) - \log(g_i)]^\top$$

Além disso, observamos que os valores transformados das proporções de votos são denotados como $V_{ij}^* = \log(\frac{V_{ij}}{g_i})$ e temos uma propriedade fundamental $\sum_{j=1}^{p} V_{ij}^* = 0$ para $i = 1, \ldots, n$. O fato de aplicarmos logaritmos nas proporções se trata de uma conveniência matemática. O logaritmo

de quocientes é mais manejável e permite algumas propriedades simples. Para ilustrar, não há um relacionamento direto entre as variâncias $Var(\frac{V_{im}}{V_{in}})$ e $Var(\frac{V_{in}}{V_{im}})$. No entanto, $Var(\log(\frac{V_{im}}{V_{in}})) = Var(\log(\frac{V_{in}}{V_{im}}))$ porque o logaritmo transforma as razões em diferenças que são linearmente relacionadas, simplificando os cálculos e não afetando a variância, pois:

$$Var(\log(\frac{V_{im}}{V_{in}})) = Var(-\log(\frac{V_{in}}{V_{im}})) = Var(\log(\frac{V_{in}}{V_{im}})).$$

Existem muitas outras propostas de transformações, como a razão logarítmica aditiva (alr) e a razão logarítmica isométrica (ilr), que apresentam características desejáveis. No entanto, a transformação alr está vinculada à assimetria e, em sua definição, é uma transformação não isométrica para o simplex. Por outro lado, a transformação ilr aumenta em sua complexidade, o que dificulta a interpretação das coordenadas (EGOZCUE *et al.*, 2003). Em contraste, a transformação clr está vinculada ao contexto não paramétrico e é possível especificar a distância de Aitchison em termos de distância euclidiana com os vetores transformados clr,

Além disso, a transformação clr é simétrica e isométrica, mas a imagem $\mathbf{V_i}$ permanece restrita ao subespaço R^p e a matriz de covariância dos dados transformados clr é singular. Após a aplicação de clr em p variáveis, a soma das p variáveis é zero para cada circunscrição i. Se alguns dos dados originais forem zero, a transformação clr não pode ser realizada da mesma maneira. No entanto, podemos aplicar um método de substituição onde todos os elementos zero são substituídos por $0+\varepsilon$, onde ε é um pequeno valor, a fim de não afetar os resultados na análise.

2.3 Análise de componentes principais dos dados

A análise de componentes principais, proposta por Pearson (1901), consiste na redução da dimensionalidade de um conjunto de dados para obter maior interpretabilidade e uma melhor visualização geométrica dos dados no espaço. Consequentemente, as principais componentes são obtidas por meio da matriz de variância-covariância, e explicam a maioria da variância dos dados. Como exemplo, consideramos o vetor aleatório denotado como $\mathbf{V}^* = (V_1^*, V_2^*, ..., V_p^*)^\top$, onde p representa o número de variáveis, com matriz de variância- covariância Σ (JOHNSON; WICHERN *et al.*, 2002) denotado como:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & \cdots & \sigma_{1p}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1}^2 & \cdots & \sigma_{pp}^2 \end{pmatrix}$$

em que seus autovalores e autovetores são $\boldsymbol{\lambda}_j = (\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ e $\mathbf{e_j} = (\mathbf{e_1}, \cdots, \mathbf{e_p})$ respectivamente. Então, consideramos as seguintes combinações lineares:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \mathbf{a}_1\mathbf{V}^* = a_{11}V_1^* + a_{12}V_2^* + \ldots a_{1p}V_p^* \\
X_2 &= \mathbf{a}_2\mathbf{V}^* = a_{21}V_1^* + a_{22}V_2^* + \ldots a_{2p}V_p^* \\
&\vdots \\
X_p &= \mathbf{a}_p\mathbf{V}^* = a_{p1}V_1^* + a_{p2}V_2^* + \ldots a_{pp}V_p^*
\end{aligned}
$$

em que,

$$
\begin{aligned}
var(X_j) = \mathbf{a}_j^\top \mathbf{\Sigma}\mathbf{a}_j = \lambda_j, \qquad & j = 1, \ldots, p \\
cov(X_j, X_k) = \mathbf{a}_j^\top \mathbf{\Sigma}\mathbf{a}_k = 0, \qquad & j \neq k
\end{aligned}
$$

As principais componentes são as combinações lineares não correlacionadas $Y_1, \ldots, Y_p$ que maximizam a variância. Seguidamente, as primeiras componentes explicam a maior quantidade de variância nos dados, enquanto as outras componentes subsequentes explicam uma quantidade menor dessa variância dos dados. Isso ocorre devido à falta de correlação entre as componentes e à sua ortogonalidade. Posteriormente, observamos que a primeira componente apresenta a combinação linear com a variância máxima, ou seja, $var(Y_1) = \mathbf{a}_1^\top \mathbf{\Sigma}\mathbf{a}_1$, onde a_1 é o vetor de pesos associado à primeira componente e $\mathbf{\Sigma}$ é a matriz de covariância dos dados. Da mesma forma, a segunda componente apresenta a combinação linear com a máxima variância residual, isto é, $var(Y_2) = \mathbf{a}_2^\top \mathbf{\Sigma}\mathbf{a}_2$, e assim sucessivamente para as demais componentes.

Assim, seja uma matriz de variância- covariância $\mathbf{\Sigma}$ em que $\mathbf{a}_j = \mathbf{e}_j$ de um vetor aleatório $\mathbf{V}^* = (V_1^*, V_2^*, ..., V_p^*)^\top$. Assim, a i-ésima componente principal é dada por,

$$
X_j = \mathbf{e_j}^\top \mathbf{V_j^*} = e_{j1}V_1^* + e_{j2}V_2^* + ... + e_{jp}V_p^*, \qquad j = 1, \ldots, p
$$

onde, X_j caracteriza a j-ésima componente principal, representando um novo espaço dimensional de componentes. Portanto, temos que,

$$
\begin{aligned}
var(X_j) = \mathbf{e}_j^\top \mathbf{\Sigma}\mathbf{e}_j = \lambda_j, \qquad & j = 1, \ldots, p \\
cov(X_j, X_k) = \mathbf{e}_j^\top \mathbf{\Sigma}\mathbf{e}_k = 0, \qquad & j \neq k
\end{aligned}
$$

em que a primeira igualdade indica que a variância de cada componente X_j é o autovalor λ_j, respectivamente. Na segunda igualdade, a covariância entre duas componentes diferentes distintas é zero, indicando que as componentes não estão correlacionadas.

Como Rodrigues e Lima (2009) observou, entre os abordagens possíveis para a Análise de Componentes Principais (ACP) em relação aos dados eleitorais consideramos: a frequência

dos dados eleitorais(número de votos), dados eleitorais transformados em proporções, e dados proporcionais transfomados em razões logaritmicas.
O primeiro é conhecido como análise de componentes principais direita e podemos perceber que a soma dos votos é diferente para cada província ou região. Além disso, se colocarmos os votos no espaço multidimensional e aplicarmos PCA, a análise mostra certa curvatura a qual é incompatível com a hipótese de linearidade de análise de principais componentes e leva a resultados insatisfatórios (RODRIGUES; LIMA, 2009). No segundo caso, a Análise de Componentes Principais nas proporções é aplicada em dados onde os votos eleitorais são substituídos por uma distribuição relativa(proporções) do total por cada região, onde os diagramas dispersos correspondentes aos pares devem ser $(\mathbf{e}_i'\mathbf{x}_r, \mathbf{e}_j'\mathbf{x}_r) : r = 1, \ldots, n$, e $\mathbf{x}_r$ é o vetor com os votos eleitorais na região r (RODRIGUES; LIMA, 2009). Além disso, a matriz de variância-covariância associada aos votos proporcionais é $\Gamma = [cov(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)]$ com autovalores positivos $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_p > 0$ e autovetores correspondentes $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p$. Se os pontos no gráfico disperso apresentam uma estrutura elíptica homogênea, a Análise de Componentes Principais para proporções é uma solução adequada. No entanto, se observamos padrões curvos, o método produz resultados inadequados. Por último, a Análise de Componentes Principais das transformações de razões logarítmicas centradas (clr) dos dados indica uma alternativa melhor na análise de dados, pois corrige a restrição de soma constante e reduz a dependência entre as variáveis.

2.4 Transformação dos escores

Ao aplicar a Análise de Componentes Principais (ACP), obtemos duas medidas essenciais: cargas e escores. As cargas indicam as relações das variáveis com as componentes, enquanto os escores representam as posições das observações no novo espaço dimensional das componentes.

No entanto, os escores x_{ij} em que $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, p$, têm variabilidades diferentes em cada componente, o que dificulta a interpretação. Para abordar essa questão, sugere-se realizar uma transformação monotônica nos escores, a fim de padronizá-los em uma escala comum de $(0, 1)$ para cada componente. Essa transformação é efetuada utilizando a seguinte fórmula:

$$z_{ij} = \frac{x_{ij} - min(\mathbf{X}_j)}{max(\mathbf{X}_j) - min(\mathbf{X}_j)}$$

Nesta equação, z_{ij} representa os escores transformados para cada componente j, e $\mathbf{X}_j = (x_{1j}, \ldots, x_{nj})^T$ é o vetor n-dimensional de escores não transformados da componente j. A fórmula leva em consideração o máximo e mínimo dos escores em cada $\mathbf{X}_j$, e assegura que os escores transformados sejam comparáveis de forma consistente em todas as componentes, tornando a análise mais acessível e fácil de compreender.

2.5 Modelo de Regressão Beta

A distribuição Beta é conhecida por sua flexibilidade e utilidade ao modelar frações, porcentagens, proporções ou variáveis com valores entre 0 e 1. Uma variável aleatória Z tem distribuição Beta se sua função de densidade é dada por:

$$f(z|\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} z^{\alpha-1}(1-z)^{(\beta-1)}$$

em que, $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ são os parâmetros de forma, e Γ denota a função Gamma, isto é, $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$. A média e a variância de Z são, respectivamente,

$$E(z) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

$$var(z) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

Além disso, distribuição uniforme é um caso particular quando $\alpha = \beta = 1$. Em modelos de regressão, é conveniente utilizar uma parametrização diferente, onde é comum definir a média que compreenda o parâmetro de precisão ou dispersão. Assim, em modelos de regressão, a distribuição beta é reparametrizada, ou seja, $\mu = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ e $\phi = \alpha+\beta$, em que μ_i e ϕ são a média e o parâmetro de precisão respectivamente. Nesse contexto, a função de densidade pode ser escrita como:

$$f(z|\mu,\phi) = \frac{\Gamma(\phi)}{\Gamma(\mu\phi)\Gamma((1-\mu)\phi)} z^{\mu\phi-1}(1-z)^{(1-\mu)\phi-1} \tag{2.1}$$

em que, $\mu \in (0,1)$ e $\phi > 0$. Portanto,

$$E(z) = \mu$$

,

$$var(z) = \frac{\mu(1-\mu)}{(1+\phi)}.$$

Sejam $Z_1,\ldots,Z_n$ variáveis aleatórias independentes, cada uma seguindo uma distribuição Beta mostrado na Equação 2.1 com média μ_i e parâmetro de precisão ϕ. O modelo de regressão (FERRARI; CRIBARI-NETO, 2004) é construído considerando o componente aleatório:

$$Z_i \sim Beta(\mu_i,\phi)$$

e com a média μ_i descrita pelo componente sistemático:

$$g(\mu_i) = \boldsymbol{U}_i^\top \boldsymbol{\beta}$$

Aqui, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_k)^\top$ representa o vetor de parâmetros desconhecidos ($\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^k$), e $\boldsymbol{U}_i = (u_{i1}, \ldots, u_{ik})$ são observações em k covariáveis ($k < n$) que assumem valores fixos e conhecidos. Finalmente, $g(.)$ é uma função de ligação estritamente monótona e duas vezes diferenciável, mapeando valores de $(0,1)$. Algumas funções de link úteis são: logito $\log(\frac{\mu}{1-\mu})$, probito $\phi^{-1}(\mu)$, complemento log-log $\log\{-\log(1-\mu)\}$, log-log $-\log\{-\log(\mu)\}$ e cauchy $tan\{\pi(\mu - 0.5)\}$.

2.5.1 Estimação dos parâmetros

Identificados que parâmetros estão presentes na distribução, o processo de estimação dos parâmetros é mediante o metodo de maxima verossimilhança, proposto por Fisher (1922) que consiste em estimar os parâmetros que assumem a distribuição beta, considerando os n dados observados. A função de verossimilhança e definido como:

$$L(\boldsymbol{\beta}, \phi; z_i) = \prod_{i=1}^{n} f(z_i; \boldsymbol{\beta}, \phi)$$

Para facilitar a estimação, aplicamos o logaritmo, também conhecido como a função de log-verossimilhança, baseado em n observações independentes.

$$l(\boldsymbol{\beta}, \phi; z_i) = \log\left(\prod_{i=1}^{n} f(z_i; \boldsymbol{\beta}, \phi)\right) = \sum_{i=1}^{n} l_i(\mu_i, \phi; z_i)$$

em que,

$$l_i(\mu_i, \phi; z_i) = \log\Gamma(\phi) - \log\Gamma(\mu_i\phi) - \log\Gamma((1-\mu_i)\phi) + (\mu_i\phi - 1)\log z_i + ((1-\mu_i)\phi - 1)\log(1-z_i).$$

A função escore do modelo é obtida derivando a log-verossimilhança em relação aos parâmetros desconhecidos,dada como $(\mathscr{U}_{\boldsymbol{\beta}}(\beta, \phi), \mathscr{U}_{\phi}(\beta, \phi))^\top$ em que $\mathscr{U}_{\boldsymbol{\beta}}(\beta, \phi)$ é a função escore para o parâmetro $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_q)$ relacionado com a média μ e $\mathscr{U}_{\phi}(\beta, \phi)$ é a função escore para o parâmetro de precisão ϕ.

As componentes do vetor escore de $\boldsymbol{\beta}$ são dadas por,

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}, \phi)}{\partial \beta_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial l_i(\mu_i, \phi)}{\partial \mu_i} \frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_k} \quad k = 1, \ldots, q \tag{2.2}$$

com,

$$\frac{\partial l_i(\mu_i, \phi)}{\partial \mu_i} = \phi_i \left[\log\left(\frac{z_i}{1-z_i}\right) - \psi(\mu_i\phi) - \psi((1-\mu_i)\phi_i)\right] \tag{2.3}$$

em que, $\psi(.)$ é a função digamma, isto é $\psi(x) = \frac{\partial \log\Gamma(x)}{\partial x}$, e $g'(\mu_i) = \frac{\eta_i}{\mu_i}$. Portanto, a Equação 2.2 é reduzida a:

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}, \phi)}{\partial \beta_k} = \sum_{i=1}^{n} \phi(z_i^* - \mu_i^*) \frac{1}{g'(\mu_i)} \frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_k}$$

em que, $z_i^* = \log\left(\frac{z_i}{1-z_i}\right)$ **e** $\mu_i^* = \psi(\mu_i\phi) - \psi((1-\mu_i)\phi)$. Portanto, a função escore para $\boldsymbol{\beta}$ em forma matricial é dada por:

$$\mathscr{U}_{\boldsymbol{\beta}}(\beta,\phi) = \phi \boldsymbol{U}^\top \mathbf{T}(z^* - \mu^*) \tag{2.4}$$

em que $\boldsymbol{U}$ é matriz de covariáveis de ordem $n \times q$ cuja i-ésima linha é $\mathbf{u}_i^\top$, $\mathbf{T} = diag\left(\frac{1}{g'(\mu_1)}, \ldots, \frac{1}{g'(\mu_n)}\right)$, $\boldsymbol{z}^* = (z_1^*, \ldots, z_n^*)^\top$ e $\boldsymbol{\mu}^* = (\mu_1^*, \ldots, \mu_n^*)^\top$. Além disso, a função escore do parâmetro de precisão ϕ é dada por:

$$\mathscr{U}_{\phi}(\beta,\phi) = \sum_{i=1}^{n} \{\mu_i(z_i^* - \mu_i^*) + \log(1-z_i) - \psi((1-z_i)\phi) + \psi(\phi)\}. \tag{2.5}$$

A próxima etapa é obter a matriz de informação de Fisher. A notação é obtida da seguinte forma. Seja, $\boldsymbol{W} = diag\{w_i, \ldots, w_n\}$, em que,

$$w_i = \phi\left\{\psi'(\mu_i\phi) + \psi'((1-\mu_i)\phi)\right\}\left\{\frac{1}{g'(\mu_n)}\right\}^2,$$

$\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_n)^\top$, em que $c_i = \phi\left\{\psi'(\mu_i\phi)\mu_i - \psi'((1-\mu_i)\phi)(1-\mu_i)\right\}$, onde $\psi'(.)$ é a função trigamma. Além disso, seja $\boldsymbol{D} = diag\{d_i =, \ldots, d_n\}$ em que $d_i = \psi'(\mu_i\phi)\mu_i^2 + \psi'((1-\mu_i)\phi)(1-\mu_i)^2 - \psi'(\phi)$. Consequentemente, a matriz de Fisher é dada por (BAYER, 2011),

$$\boldsymbol{K} = K(\beta,\phi) = \begin{pmatrix} K_{\beta\beta} & K_{\beta\phi} \\ K_{\phi\beta} & K_{\phi\phi} \end{pmatrix}$$

em que $K(\beta,\beta) = \phi \boldsymbol{U}^\top \boldsymbol{W}\boldsymbol{U}$, $K(\beta,\phi) = (K(\phi,\beta))^\top = \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{T}\boldsymbol{c}$, e $K(\phi,\phi) = tr(D)$.

A estimação dos parâmetros, β_k e ϕ, na log-verosimilhança da distribuçaõ beta, é realizada quando Equação 2.4 e Equação 2.5 :

$$\mathscr{U}_{\boldsymbol{\beta}}(\beta,\phi) = 0$$
$$\mathscr{U}_{\phi}(\beta,\phi) = 0$$

Esse processo requer um método iterativo, como os algoritmos de Newton-Raphson ou escore de Fisher, para estimar esses parâmetros. A seguir, descrevemos cada um desses processos:

Processo iterativo de Newton Raphson

Seja $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \phi)$, o vetor de parâmetros, com função escore $\mathscr{U}(\boldsymbol{\alpha}) = (\mathscr{U}_{\boldsymbol{\beta}}(\beta,\phi)^\top, \mathscr{U}_{\phi}(\beta,\phi))^\top$ e dimensão $(k+1) \times 1$. O processo consiste em associar aos parâmetros um valor inicial,

$$\mathscr{U}(\boldsymbol{\alpha}) \cong \mathscr{U}(\boldsymbol{\alpha}^{(0)}) + \mathscr{U}'(\boldsymbol{\alpha}^{(0)})(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}^{(0)})$$

em que $\mathscr{U}'(\boldsymbol{\alpha})$ denota a primeira derivada de $\mathscr{U}(\boldsymbol{\alpha})$ em relação a $\boldsymbol{\alpha}^\top$. Considerando $\mathscr{U}(\boldsymbol{\alpha}) = 0$ e o processo iterativo, temos que,

$$\boldsymbol{\alpha}^{(m+1)} = \boldsymbol{\alpha}^{(m)} - \mathscr{U}'(\boldsymbol{\alpha}^{(m)})\mathscr{U}(\boldsymbol{\alpha}^{(m)}) \quad m = 1, 2, \ldots \tag{2.6}$$

Processo iterativo de escore de Fisher

Pela lei dos grandes numeros, $\mathscr{U}'(\boldsymbol{\alpha}^{(m)})$ converge na matriz de Fisher quando $n \to \infty$. Assim, substituindo na Equação 2.6, temos que,

$$\boldsymbol{\alpha}^{(m+1)} = \boldsymbol{\alpha}^{(m)} - K'(\boldsymbol{\alpha}^{(m)})\mathscr{U}(\boldsymbol{\alpha}^{(m)}) \quad m = 1, 2, \ldots \tag{2.7}$$

2.5.2 Teste de hipótese

Quando realizamos uma análise de regressão, buscamos as variáveis independentes que possuem maior significância e influência no modelo. Isso nos permite comparar diferentes modelos e identificar quais variáveis são relevantes para a variável dependente. Nesse contexto, existem diferentes tipos de testes, tais como o teste de razão de verossimilhança, o teste de escore e o teste de Wald (OLIVEIRA, 2004) , dentro da perspectiva do modelo de regressão Beta.

De acordo com certas condições de regularidade, para tamanhos de amostrais grandes, a distribuição conjunta de $\hat{\beta}$ e $\hat{\phi}$ (SEN; SINGER, 1993) é aproximadamente uma distribuição normal q-multivariada, dada por:

$$\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix} \sim N_q \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \phi \end{pmatrix} \quad , \boldsymbol{K}^{-1} \right)$$

Teste de razão de verosimilhança

O teste pode avaliar se o modelo apresenta uma melhora significativa no ajuste. Consideremos a seguinte hipótese:

$$H_0 : \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^{(0)}$$
$$H_1 : \boldsymbol{\beta} \neq \boldsymbol{\beta}^{(0)}$$

em que, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_q)^\top$ e $\boldsymbol{\beta}^{(0)} = (\beta_1^{(0)}, \ldots, \beta_q^{(0)})^\top$. A estatística de razão de verossimilhança é dada por:

$$w = 2\{l(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\phi}) - l(\tilde{\boldsymbol{\beta}}, \tilde{\phi}))\}$$

em que, $l(\boldsymbol{\beta}, \phi)$ é o logaritmo natural da função de verosimilhança e $(\tilde{\boldsymbol{\beta}}, \tilde{\phi})$ é o estimador de máxima verossimilhança restrito pela imposição da hipótese nula. Sob condiciones de regularidade e sob H_0, $w \xrightarrow{D} \chi^2_m$.

Teste escore

O teste escore é formulado da seguinte maneira:

$$H_0 : \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^{(0)}$$
$$H_1 : \boldsymbol{\beta} \neq \boldsymbol{\beta}^{(0)}$$

Considerando $U_{1\beta}$ como um vetor q dimensional compreendendo q elementos da função escore de $\boldsymbol{\beta}$ e $\boldsymbol{K}_{11}^{\beta\beta}$ como uma matriz $q \times q$ formada pelas q primeiras linhas e q primeiras colunas da matriz $\boldsymbol{K}^{-1}$. A estatística é expressada como:

$$w = \tilde{\boldsymbol{U}}_{1\beta}^{\top} \tilde{\boldsymbol{K}}_{11}^{\beta\beta} \tilde{\boldsymbol{U}}_{1\beta}$$

em que a tilde indica que as quantidades são avaliadas no estimador de maxima verossimilhança restrito. Sob condiciones de regularidade e sob H_0,$w \xrightarrow{D} \chi_m^2$.

Teste de Wald

O teste de Wald realiza inferência assintótica para os parâmetros do vetor $\boldsymbol{\beta}$. Consideremos:

$$H_0 : \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^{(0)}$$
$$H_1 : \boldsymbol{\beta} \neq \boldsymbol{\beta}^{(0)}$$

A estatística de teste é definida como:

$$w = (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}^{(0)})^{\top} (\hat{\boldsymbol{K}}_{11}^{\beta\beta})^{-1} (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}^{(0)})$$

em que $\hat{\boldsymbol{K}}_{11}^{\beta\beta}$ é uma matriz $q \times q$ formada pelas q primeiras linhas e q primeiras colunas da matriz $\boldsymbol{K}^{-1}$, e $\hat{\boldsymbol{K}}_{11}^{\beta\beta} = \boldsymbol{K}_{11}^{\beta\beta}$ considerado no estimador de máxima verossimilhança irrestrito, e $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ é o estimador de máxima verossimilhança de $\boldsymbol{\beta}$. Sob condições gerais de regularidade e sob H_0, $w \xrightarrow{D} \chi_m^2$.

2.5.3 Medidas de diagnóstico

Após ajustar o modelo, é crucial realizar o diagnóstico do modelo proposto para verificar a qualidade do ajuste, identificando possíveis desvios na parte aleatória (z_i) e no componente sistemático η_i. Uma medida global da variação pode ser estimada pelo pseudo $R^2(R_p^2)$, definido como o quadrado do coeficiente de correlação amostral entre $\hat{\eta}$ e $g(z)$. Note que $0 \leq R_p^2 \leq 1$, e um valor mais próximo de 1 indica um melhor ajuste. Outra medida é a discrepância do ajuste, proposta por Nelder e Wedderburn (1972) que é duas vezes a diferença entre o modelo saturado e o modelo postulado. Assim,

$$D(z;\mu,\phi) = \sum_{i=1}^{n} 2(l_i(\tilde{\mu}_i,\phi) - l_i(\mu_i,\phi)),$$

em que $\tilde{\mu}_i$ é um valor de μ_i que resolve $\frac{\partial l_i}{\partial \mu_i} = 0$, isto é, $\phi(z_i^* - \mu_i^*)$. Quando ϕ é grande, $\mu_i^* \approx \log\{\frac{\mu_i}{1-\mu_i}\}$, e então segue que $\tilde{\mu}_i \approx z_i$. Para ϕ conhecido, podemos definir uma medida de discrepância como $D(z;\bar{\mu},\phi)$, em que $\bar{\boldsymbol{\mu}}$ é o estimador de máxima verossimilhança de $\boldsymbol{\mu}$ sob o modelo pesquisado. Quando ϕ é desconhecido, uma aproximação para essa quantidade é $D(z;\hat{\mu},\hat{\phi})$, denominada comumente de desvio do modelo sob pesquisa. Note que, $D(z;\hat{\mu},\hat{\phi}) = \sum_{i=1}^{n}(r_i^d)^2$

$$r_i^d = \text{sinal}(z_i - \hat{\mu}_i)\{2(l_i(\tilde{\mu}_i,\hat{\phi}) - l_i(\hat{\mu}_i,\hat{\phi}))\}$$

O leverage generalizado, proposto por Wei *et al.* (1998) é um componente para determinar as observações influentes. Ele é definido como:

$$GL(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{z}}}{\partial \tilde{\boldsymbol{z}}^\top},$$

em que, $\boldsymbol{\theta}$ é um s-vetor tal que $E(z) = \mu(\theta)$ e $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ é um estimador de $\boldsymbol{\theta}$ com $\tilde{\boldsymbol{z}} = \mu(\tilde{\boldsymbol{\theta}})$. O elemento (i,u) de $GL(\tilde{\theta})$ tal que o leverage generalizado do estimador $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ em (i,u) é a taxa de variação em i-ésimo valor predito em relação ao u-ésimo valor resposta. Além disso, os autores notaram que o leverage generalizado $GL(\tilde{\boldsymbol{\theta}})$ é invariante sob reparametrizações e observações com grande GL_{iu} são pontos leverage. Seja $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ o estimador de máxima verossimilhança de $\boldsymbol{\theta}$, assumindo que existe e é unico, e a função de log-verossimilhança de segunda ordem com respeito a $\boldsymbol{\theta}$ e $\boldsymbol{z}$. O leverage generalizado é dado por (WEI *et al.*, 1998):

$$GL(\boldsymbol{\theta}) = D_\theta \left(\frac{\partial^2 l}{\partial \boldsymbol{\theta}\partial \boldsymbol{\theta}^\top}\right)^{-1} \frac{\partial^2 l}{\partial \boldsymbol{\theta}\partial \boldsymbol{z}^\top}$$

avaliando em $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, em que $D_\theta = \frac{\partial \mu}{\partial \theta^\top}$.
Além disso, considerando um ϕ conhecido, temos o leverage generalizado de β (FERRARI; CRIBARI-NETO, 2004) dado por,

$$GL(\boldsymbol{\beta}) = D_\beta \left(\frac{\partial^2 l}{\partial \boldsymbol{\theta}\partial \boldsymbol{\beta}}\right)^{-1} \frac{\partial^2 l}{\partial \boldsymbol{\beta}\partial \boldsymbol{z}^\top}$$

Resíduos quantílicos normalizados

O resíduo quantílico normalizado (DUNN; SMYTH, 1996), é definido como:

$$r_{q,i} = \Phi^{-1}\{F(z_i);\hat{\mu}_i,\hat{\phi}\}$$

em que ϕ é a função de distribuição acumulada da normal padrão, e $F(z_i)$ é a função de distribuição acumulada da distribuição Beta. Se F é distribuída continuamente, $F(z_i)$ é uniformemete distribuida no intervalo unitário.

2.6 Proposta de metodologia

Os dados multipartidários apresentam diversos desafios para análise e interpretação dos votos. Devido às características de dados composicionais, é necessário realizar transformações, como a transformação de razão logaritmica centrada para eliminar as restrições de soma constante e transferir os dados de um espaço simplex a um espaço Euclidiano.

Nesse contexto, em esta dissertação propomos uma metodologia que consiste no desenvolvimento de métodos estatísticos para facilitar a interpretação desses dados multipartidários.

A metodologia apresenta as seguintes oito etapas:

1. Coleta de dados de votos multipartidiarios.
2. Transformação dos votos em proporções.
3. Aplicação de transformação em razões logaritmicas das proporções de votos.
4. Aplicação da análise de componentes principais (ACP) para dados composicionais transformados.
5. Identificação de escores de votos usando ACP.
6. Transformação de escores de votos ao intervalo unitario.
7. Identificação de covariáveis ou variáveis explicativas.
8. Aplicação de um modelo de regressão com resposta limitada para os escores transformados.

Na etapa 1, a abordagem consiste em coletar informações dos dados de uma região, estado ou país, nos quais os votos podem variar em quantidade. Na etapa 2, é recomendável transformar esses votos em proporções no intervalo $(0, 1)$. Essas proporções indicam uma soma constante de 1 para cada circunscrição, respeitando as restrições dos dados composicionais.

Na etapa 3, aplicamos a transformação de razão logarítmica centrada para eliminar as restrições da soma constante e do espaço simplex restrito. Contudo, os dados apresentam uma estrutura multidimensional que pode complicar a análise. Na etapa 4, para lidar com a multidimensionalidade, utilizamos a Análise de Componentes Principais (ACP) como uma ferramenta para a redução de dimensões. A ACP permite visualizar os dados em um espaço euclidiano, onde as cargas e os escores descrevem as relações entre as variáveis e componentes.

Na etapa 5, identificamos os escores, que refletem a direção dos votos para diferentes partidos políticos, tornando-se uma variável que indica o comportamento das circunscrições em relação à preferência por um partido político. Na etapa 6, dado que os escores apresentam variabilidades diferentes em cada componente, dificultando a interpretabilidade, uma abordagem comum é a normalização, transformando os escores para valores no intervalo $(0, 1)$.

Portanto, esses escores normalizados tornam-se o foco do estudo e representam a variável resposta. Na etapa 7, são necessárias variáveis explicativas para o modelo relacionado aos dados, descrevendo a população e auxiliando na escolha por um partido político. Na etapa 8, aplicamos um modelo de regressão com resposta limitada, onde a variável resposta escore está no intervalo $(0, 1)$.

Uma ferramenta útil para visualizar a metodologia com suas respectivas etapas no processo e as interações com as etapas anteriores são os diagramas. Na Figura 2, mostramos o diagrama correspondente que propõe as etapas a serem seguidas para analisar e interpretar os dados multipartidários.

A metodologia utiliza a análise de componentes principais como método de redução de dimensões, embora outros métodos, como a análise de fatores, possam ser aplicados. As variáveis explicativas podem variar conforme a região, estado ou circunscrição, identificando quais variáveis exercem maior influência nos votos. Por fim, ao aplicar um modelo de regressão com resposta limitada, diversas funções de ligação podem ser utilizadas, tais como logito, probito, log-log e complementar log-log.

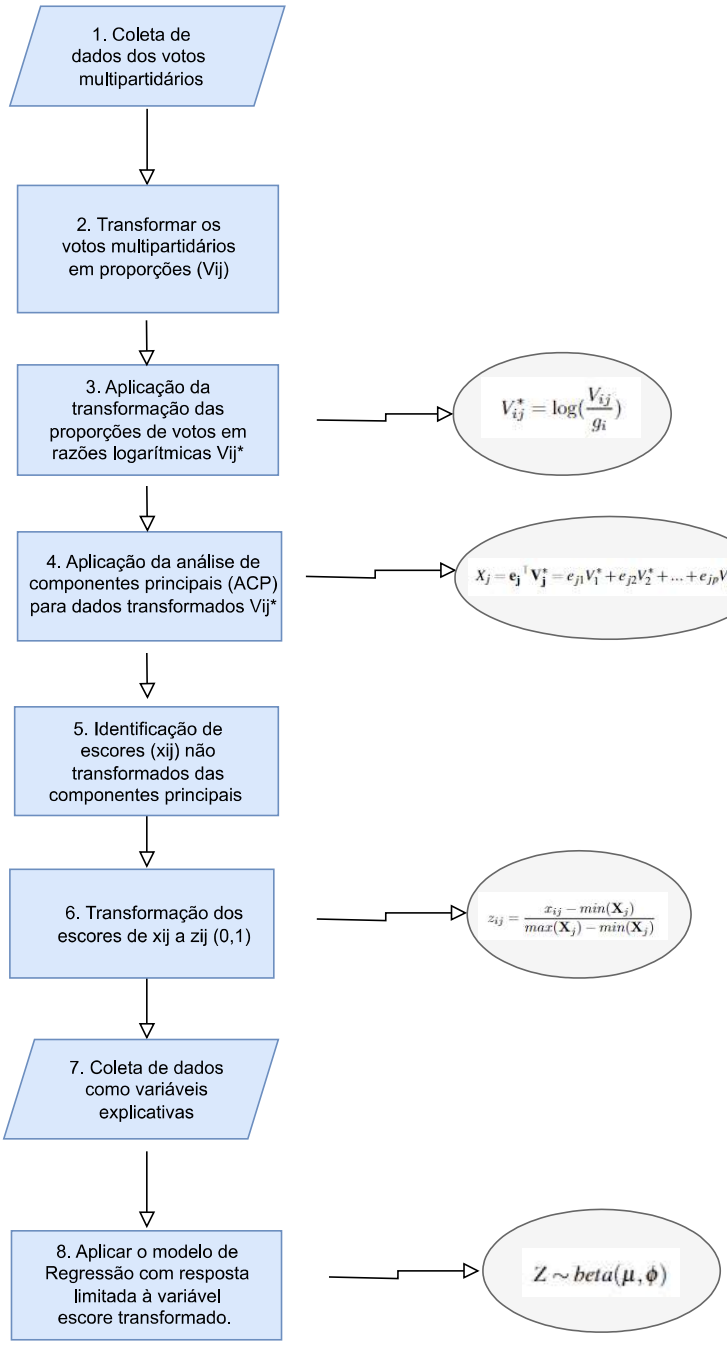


Figura 2 – diagrama geral da metodologia

2.7 Revisão de cópulas

O termo "cópulas"foi inicialmente introduzido por Sklar (1959), estabelecendo os fundamentos dessas funções e foram criadas com duas finalidades: procurar uma medida de dependência e fornecer um ponto de partida na construção de distribuições bivariadas. Cópulas são essenciais para relacionar a distribuição multivariada de variáveis com suas distribuições marginais dessas variáveis (NELSEN, 2006), assim como vários estudos foram desenvolvidos com o objetivo de obter distribuições multivariadas mais complexas, onde as distribuições univariadas diferem, e busca-se uma relação entre elas mediante uma estrutura de dependência.

De acordo com Joe (2014), sob o mesmo ponto de vista, as cópulas são distribuições multivariadas com marginais univariadas seguindo uma distribuição $U(0,1)$. Portanto, se C é uma cópula, então C é uma distribuição de um vetor de variáveis aleatórias $U(0,1)$.

Simultaneamente, várias famílias de cópulas emergiram para a construção de distribuições multivariadas em diferentes aplicações, sendo as mais notáveis as cópulas elípticas, derivadas das distribuições multivariadas normal e t-student, como a Cópula Gaussiana e Cópula t-Student; e as cópulas arquimedianas, provenientes de uma função geradora que inclui comumente Cópulas de Gumbel, Clayton e Frank.

Dentre os estudos e aplicações de cópulas em diversas áreas, destacam-se os trabalhos mais desenvolvidos em finanças e economia. Por exemplo, Embrechts, Lindskog e McNeil (2001) abordaram modelos de dependência com cópulas na Gestão Integrada de Riscos, enquanto Bouyé *et al.* (2000) exploraram aplicações em problemas financeiros, como pontuação de crédito, modelagem de retorno de ativos e medida de risco. Além disso, Denuit, Purcaru e Keilegom (2006) utilizaram cópulas para modelar riscos múltiplos em seguros. Contudo, as cópulas também encontraram aplicação em outras áreas, como o modelo multivariado de demanda sísmica de concreto proposto por Goda e Tesfamariam (2015), a aplicação de cópulas gaussianas em Ecologia e Biologia Evolutiva Prates *et al.* (2015) para a construção de processos Markov Gamma ou Beta, o uso de cópulas arquimedianas em dados de sobrevivência com observações censuradas por Biondo e Suzuki (2016), a exploração da relação entre renda e democracia através de cópulas por Paleologou (2023) e modelos multivariados utilizando cópulas em marketing, conforme desenvolvido por Danaher e Smith (2011).

Em resumo, as cópulas apresentam uma ampla gama de aplicações, oferecendo diversas vantagens, como a obtenção de distribuições multivariadas e a modelagem da estrutura de dependência. Para ilustrar, consideremos a construção de uma distribuição bivariada. Inicialmente contemplamos distribuições marginais acumuladas que são transformadas em distribuições uniformes padrão $[0,1]$. Consequentemente, obtemos uma distribuição bivariada e um parâmetro de dependência, dado que as variáveis possuem as mesmas distribuições marginais uniformes.

Teorema de Sklar

O teorema proposto por Sklar (1959) estabelece que, para uma função de distribuição multivariada acumulada $H(x_1,\ldots,x_d) = P(X_1 \leq x_1,\ldots,X_d \leq x_d)$ de um vetor aleatório $X_1,\ldots,X_d$, com marginais $F_{X_i}(x_i) = P(X_i \leq x_i)$, existe uma função copula d-dimensional C tal que:

$$H(x_1,\ldots,x_d) = C(F_{X_1}(x_1),\ldots,F_{X_d}(x_d))$$

Se as marginais $F_{X_i}(x_i)$ para $i = 1,\ldots,d$ são contínuas, então C é única; caso contrário, C é unicamente determinada no conjunto $\text{ran}F_{X_1} \times \text{ran}F_{X_2} \times \cdots \times \text{ran}F_{X_d}$.

Outra forma de expressar o teorema é considerando H uma distribuição multivariada

d-dimensional com marginais contínuas $F_{X_1}(x_1),\ldots,X_d(x_d)$. A copula C é determinada para todo $u_i \in (0,1)$ como:

$$C(u) = H(F_{X_1}^{-1}(u_1),...,F_{X_d}^{-1}(u_d))$$

onde, $F_{X_1}^{-1},\ldots,F_{X_d}^{-1}$ são as inversas de $F_{X_1},...,F_{X_d}$.

Portanto, o teorema permite obter a distribuição multivariada considerando as distribuições marginais por meio de copulas. Além disso, possibilita modelar a copula adequada para as variáveis e estimar a força de dependência entre elas por meio de estruturas de dependência.

Propriedades das cópulas

As cópulas apresentam propriedades fundamentais que destacam sua importância:

i) $C(\mathbf{u}) = u_i$, quando todas as coordenadas, exceto u_i, são iguais a 1. Isso é representado por: $C(1,1,\ldots,u_i,\ldots,1,1) = u_i,\ \forall i = 1,\ldots,d,\ u_i \in [0,1]$

ii) Seja $\mathbf{u} = [u_1,\ldots,u_d],$ onde $u_i = F_{X_i}(x_i)$. Se $u_i = 0$ para $i \leq n$ (pelo menos uma das coordenadas u é igual a 0), então
$$C(u_1,\ldots,u_d) = 0.$$

iii) Dado que $C(u_1,\ldots,u_d)$ é limitada, temos $0 \leq C(u_1,\ldots,u_d) \leq 1$. A propriedade representa o limite da distribução conjunta acumulada no rango $[0,1]$.

iv) Como $C(u_1,\ldots,u_d)$ é d-crescente, o volume do intervalo d-dimensional é não negativo, $\forall(a_1,\ldots,a_n)(b_1,\ldots,b_d) \in [0,1]^d$, onde $a_i \leq b_i$

$$\Sigma_{i_1=1}^{2}\ldots\Sigma_{i_d=1}^{2}(-1)^{i_1+\cdots+i_d}C(x_{1i_1},x_{2i_2},\ldots,x_{di_d}) \geq 0 \tag{2.8}$$

Com $x_{j1} = a_j$ e $x_{j2} = b_j$, $j = 1,\ldots,d$

v) Sejam as variáveis aleatórias $X_1,\ldots,X_d$, com funções de distribuição marginal $F_{X_1}(x_1),\ldots,X_d(x_d)$ e a função de distribuição acumulada conjunta $H(x_1,\ldots,x_d)$. Defina $u_i = F_{X_i}(x_i)$ para $i = 1,\ldots,d$. As variáveis $X_1,\ldots,X_d$ são independentes se e somente se $H(x_1,\ldots,x_d) = \prod_{i=1}^{d} F_{X_i}(x_i)$ (ANJOS *et al.*, 2004). Portanto, a cópula $C(u_1,\ldots,u_d)$ é denominada cópula produto ou independente, sendo definida como:

$$C(u_1,\ldots,u_d) = \prod_{i=1}^{d} u_i$$

Para ilustrar a equação (2.8), consideremos o caso em que $d = 2$, onde $(a_1,a_2),(b_1,b_2) \in [0,1]^2$ e $a_1 \leq a_2$, $b_1 \leq b_2$. Então, temos que:

$$\Sigma_{i_1=1}^{2}\Sigma_{i_2=1}^{2}(-1)^{i_1+i_2}C(x_{1i_1},x_{2i_2}) > 0.$$

Portanto,

$$C(a_1,a_2)-C(a_1,b_2)-C(b_1,a_2)+C(b_1,b_2)\geq 0$$

Da mesma forma, quando $d=3$, obtemos o seguinte:

$$C(a_2,b_2,c_2)-C(a_2,b_2,c_1)-C(a_1,b_2,c_2)+C(a_2,b_1,c_1)+C(a_1,b_2,c_1)+$$
$$C(a_1,b_1,c_2)-C(a_1,b_1,c_1)\geq 0;\ (a_1,a_2),(b_1,b_2),(c_1,c_2)\in[0,1]^3$$

Limite de Fréchet-Hoeffding

De maneira geral, considere que para cada $C(u_1,\ldots,u_d)$ e $(u_1,\ldots,u_d)$ em $[0,1]^d$, o limite é definido por:

$$W(u_1,\ldots,u_d)\leq C(u_1,\ldots,u_d)\leq M(u_1,\ldots,u_d);\ i\geq 2$$

onde $W(u_1,\ldots,u_d)=max\{1-d+\Sigma_{i=1}^{d}u_i,0\}$ é uma cópula quando $i=2$ e o limite inferior Fréchet-Hoeffding , e $M(u_1,\ldots,u_d)=min(u_1,\ldots,u_d)$ é uma cópula e o limite superior de Fréchet-Hoeffding.

Para ilustrar, considere uma cópula C para $u_1,u_2\in I$, seguidamente temos (NELSEN, 2006) que,

$$W(u_1,u_2)=max(u_1+u_2-1,0)\leq C(u_1,u_2)\leq M(u_1,u_2)=min(u_1,u_2),$$

consequentemente, pelo Teorema de Sklar, se x e y são variáveis aleatórias com distribuição conjunta H e marginais F e G respectivamente, então,

$$max(F(x)+G(y)-1,0)\leq H(x,y)\leq min(F(x),G(y))$$

em que W e M são copulas, e os limites são funções de distribuição conjunta, denomidas limites de Fréchet-Hoeffding para a função de distribuição conjunta H com marginais W e M.

Classes de cópulas

a. Cópulas elípticas

As cópulas elípticas formam uma classe significativa derivada das distribuições elípticas, como a distribuição multivariada normal e t-Student. Algumas das características fundamentais incluem a flexibilidade na dependência positiva e negativa, bem como a dependência nas caudas. No caso das cópulas normais, temos caudas leves, enquanto nas cópulas t-Student, as caudas são pesadas. Essa flexibilidade faz com que as cópulas elípticas sejam aplicáveis em uma variedade de contextos, incluindo finanças, seguros e gestão de riscos. Para obter mais detalhes sobre essas aplicações, consulte Cherubini, Luciano e Vecchiato (2004).

Cópula Gaussiana

A cópula Gaussiana consiste na combinação conjunta de distribuições marginais univariadas normais. Entre suas características mais relevantes, destacam-se a simetria no espaço e o fator de correlação associado à distribuição multivariada. Além disso, ela apresenta uma baixa dependência nas caudas.

Essa cópula foi implementada em diversas áreas, como finanças, gestão de riscos e riscos de crédito. No entanto, mostrou limitações na estimativa de dependências complexas. Um exemplo disso é mencionado em Watts (2016), que descreve a crise econômica global de 2008, na qual cópulas gaussianas foram utilizadas para modelar risco financeiro. No entanto, o modelo subestimou o risco de cauda e as dependências entre variáveis essenciais.

De acordo com Cherubini, Luciano e Vecchiato (2004), a cópula Gaussiana multivariada é denotada da seguinte maneira:

$$C_\Sigma(u) = \phi_\Sigma(\phi^{-1}(u_1), ..., \phi^{-1}(u_d))$$

em que ϕ^{-1} representa a inversa da distribução normal estandar ϕ, e ϕ_Σ denota a distribução normal estandar multivariada com matriz de correlação simetrica e positiva definida Σ. A densidade da copula Gaussiana (CZADO, 2019)é dada como:

$$c(\mathbf{u};\Sigma) = |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top(\mathbf{I_d} - \Sigma^{-1})\mathbf{x}\right\}$$

em que $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)^\top \in \mathbb{R}^i$, e $x_i = \phi^{-1}(u_i)$ para $i = 1, \ldots, d$.

Cópula T-Student

A cópula t-Student consiste na combinação conjunta de distribuições marginais univariadas t-Student. Além de ser considerada uma distribuição elíptica, ela é simétrica e sua caracterização envolve a utilização de uma matriz de correlação e os graus de liberdade. Essa cópula é frequentemente aplicada em áreas como riscos financeiros, seguros e estudos ambientais. De acordo com Cherubini, Luciano e Vecchiato (2004), a cópula t-Student é denotada da seguinte maneira:

$$C_\Sigma(u) = t_{\Sigma,\upsilon}(t^{-1}_{\Sigma,\upsilon}(u_1), ..., t^{-1}_{\Sigma,\upsilon}(u_d))$$

Aqui, t^{-1} representa a inversa da distribuição t-Student, Σ é uma matriz parâmetro de escala em $[-1,1]^{d\times d}$, e υ denota os graus de liberdade. Se $d = 2$, A densidade da cópula t-Student bivariada é dada por:

$$c(\mu_1, \mu_2; \upsilon, \Sigma) = \frac{t(t_\upsilon^{-1}(\mu_1), t_\upsilon^{-1}(\mu_2); \upsilon, \Sigma)}{t_\upsilon(t_\upsilon^{-1}(\mu_1)) t_\upsilon(t_\upsilon^{-1}(\mu_2))}$$

Tabela 1 – Cópulas bivariadas Elipticas

Cópula	$C(u,v;\theta,\zeta)$	θ	Transformação	Kendall'sτ
Normal	$\phi_2(\phi^{-1}(u),\phi^{-1}(v);\theta)$	$\theta \in [-1,1]$	$tanh^{-1}(\theta)$	$\frac{2}{\pi}(arcsin(\theta))$
T-Student	$t_{2,\zeta}(t_\zeta^{-1}(u),t_\zeta^{-1}(v);\theta,\zeta)$	$\theta \in [-1,1], \zeta \in (2,\infty)$	$tanh^{-1}(\theta), \log(\zeta-2-\varepsilon)$	$\frac{2}{\pi}arcsin(\theta)$

b. Cópula Arquimedianas

A família de cópulas arquimedianas desempenha um papel fundamental em várias aplicações devido à facilidade com que podem ser construídas, oferecendo uma ampla gama de famílias e propriedades viáveis (NELSEN, 2006). A obtenção dessas cópulas é realizada por meio de uma função geradora φ (gerador aditivo) em que seja $\varphi^{[-1]}$ uma função pseudo-inversa de φ com $\text{Dom}\varphi^{[-1]} = [0,\infty]$ e $\text{Ran}\varphi^{[-1]} = \mathbf{I}$, dada por,

$$\varphi^{[-1]} = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0, & \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases}$$

As funções da forma $C_\varphi = \varphi^{[-1]}(\varphi(u)+\varphi(v))$ para u,v em $[0,1]$, são denominadas copulas Arquimedianas e φ é chamada função geradora. No caso em que $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$ e $C_\varphi = \varphi^{-1}(\varphi(u)+\varphi(v))$, dizemos que é uma cópula Arquimediana estrita.

Para ilustrar, consideremos a função $\varphi(t) = -\log t$ para t em $[0,1]$. Dado que $\varphi(0) = \infty$, φ é estrita. Portanto, $\varphi^{[-1]}(t) = \varphi^{-1}(t) = exp(-t)$ e a C gerada é,

$$C(u,v) = \exp(-[(-\ln u)+(-\ln v)]) = uv = \prod(uv).$$

Consequentemente, $\prod(uv)$ é uma cópula arquimediana estrita.

A cópula arquimediana C com a função geradora φ (NELSEN, 2006) apresenta as seguintes características:

• C possui simetria, portanto $c(u_1,u_2) = c(u_2,u_1)$ para todo u_1,u_2 em $\mathbf{I}$,

• C é associativa, ou seja, $C(C(u_1,u_2),u_3) = C(u_1,C(u_2,u_3))$ para todo u_1,u_2,u_3 em $\mathbf{I}$.

Isso implica que podemos obter a mesma distribuição conjunta associando diferentes pares de variáveis,

• Se $a > 0$ é uma constante, então $a\varphi$ é um gerador de C.

Na seguinte Tabela 2 mostramos os diferentes tipos de cópula bivariadas classificados como arquimedianas, em que $D_1(\theta) = \frac{1}{\theta}\int_0^\theta \frac{t}{\exp t-1}$ é a função Debye e $D_2(\theta) = \int_0^\theta t\log(t)(1-t)^{\frac{2(1-\theta)}{\theta}}$.

Dependência

A distribuição conjunta revela a interação entre as variáveis, no entanto, não oferece informações específicas sobre a natureza da relação entre elas, seja positiva ou negativa. Por

Tabela 2 – Principais famílias de cópulas arquimidianas

Cópula	$C(u,v;\theta)$	θ	Transformação	Kendall'sτ
Clayton	$(u^{-\theta}+v^{-\theta}-1)^{-\frac{1}{\theta}}$	$\theta \in (0,\infty)$	$\log(\theta-\varepsilon)$	$\frac{\theta}{\theta+2}$
Frank	$-\theta^{-1}\log\{1+(e^{-\theta u}-1)\frac{e^{-\theta v}-1}{e^{-\theta}-1}\}$	$\theta \in \mathbb{R}-\{0\}$	–	$1-\frac{4}{\theta}(1-D_1(\theta))$
Gumbel	$\exp[-\{(-log\mu)^{\theta}+(-log\upsilon)^{\theta}\}^{\frac{1}{\theta}}]$	$\theta \in [1,\infty)$	$\log(\theta-1)$	$1-\frac{1}{\theta}$
Ali-Mikhail-Haq	$\frac{uv}{1-\theta(1-u)(1-v)}$	$\theta \in [-1,1]$	$tanh^{-1}(\theta)$	$-\frac{2}{3\theta^2}\theta+(1-\theta)^2\log(1-\theta)+1$
Joe	$1-\{(1-u)^{\theta}+(1-v)^{\theta}-(1-u)^{\theta}(1-v)^{\theta}\}^{\frac{1}{\theta}}$	$\theta \in (1,\infty)$	$\log(\theta-1-\varepsilon)$	$1+\frac{4}{\theta^2}D_2(\theta)$

consiguente, foram estudadas diferentes medidas de dependência na literatura, como medidas de quantificação, incluindo o coeficiente de correlação linear, que avalia o grau de correlação linear; o coeficiente de Kendall(τ) e o coeficiente de Spearman que medem o grau de concordância (ANJOS *et al.*, 2004) com valores variando entre -1 e 1. Um valor de -1 indica uma dependência perfeitamente negativa, enquanto um valor de 1 indica uma dependência perfeitamente positiva. Valores entre esses extremos indicam diferentes formas de associação entre as variáveis.

Correlação de Pearson

A correlação mede se os conjuntos de variáveis estão linearmente relacionados e é definida como a razão entre a covariância e os desvios padrões. A fórmula para o coeficiente de correlação (r) é a seguinte:

$$r = \frac{\sum (X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{\sqrt{\sum (X_i-\bar{X})^2 \sum (Y_i-\bar{Y})^2}}$$

Aqui, X_i e Y_i representam as variáveis, onde $i = 1,\ldots,n$, e $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ denotam as médias de cada variável, respectivamente. Os valores de r variam entre -1 e 1, onde valores próximos de -1 indicam uma correlação negativa, valores próximos de 1 indicam uma correlação positiva, e o valor 0 indica que as variáveis são independentes.

Concordância

O termo significa que um par de variáveis é considerado concordante quando uma grande quantidade de valores de uma variável está associada a uma grande quantidade de valores da outra variável, e pequenos valores de uma variável estão relacionados a pequenos valores da outra variável. Portanto, ao considerarmos duas observações, (x_i,y_i) e (x_j,y_j), de um vetor de variáveis contínuas (X,Y), dizemos que as observações são concordantes se $x_i < x_j$ e $y_i < y_j$ ou se $x_i > x_j$ e $y_i > y_j$. Da mesma forma, as observações são discordantes se $x_i < x_j$ e $y_i > y_j$, ou se $x_i > x_j$ e $y_i < y_j$. Uma forma alternativa é: (x_i,y_i) e (x_j,y_j) são considerados concordantes se $(x_i-x_j)(y_i-y_j) > 0$ e discordantes se $(x_i-x_j)(y_i-y_j) < 0$.

Coeficiente de Kendall

Seja (X,Y) um vetor aleatório com cópula C. O coeficiente de Kendall τ para X e Y, em termos de cópula, é definido como:

$$\tau(X,Y) = 4\int_0^1 \int_0^1 C(u,v)dC(u,v) - 1$$

Além disso, a integral pode ser interpretada como o valor esperado da função $C(U,V)$ de variáveis aleatórias uniformes $(0,1)$, U e V, com função de distribuição conjunta C:

$$\tau_C = 4E(C(U,V)) - 1$$

Coeficiente de Spearman

Seja um vetor (X,Y) um vetor aleatório com cópula associada C. O coeficiente de Spearman é denotado da seguinte forma (NELSEN, 2006):

$$\rho_{X,Y} = 3Q(C,\pi) = 12\int_0^1 \int_0^1 uvdC(u,v) - 3 = 12\int_0^1 \int_0^1 C(u,v)dudv - 3$$

, onde o coeficiente 3 é uma constante de normalização, considerando que $Q(C,\pi) \in [-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$.

Criterios de Seleção de modelos

Criterio de informação Akaike (AIC)

Baseado no conceito de informação de entropia, escolhemos o modelo com um valor de AIC menor. O critério mitiga o risco de sobreajuste (overfitting) introduzindo um termo de penalidade $2d$ que aumenta com o número de parâmetros, permitindo descartar modelos desnecessários. O critério AIC é dado pela fórmula (AKAIKE, 1974):

$$AIC = -2\log(\hat{L}) + 2d$$

onde $\hat{L}$ é o valor de maximização da função de verossimilhança e $2d$ é a penalidade pelo número de parâmetros.

Criterio de informação Bayesiana (BIC)

O BIC (SCHWARZ, 1978) está relacionado ao critério AIC no qual o modelo com o menor valor é considerado o melhor. Este critério, é fundamentado na função de verossimilhança. A fórmula do critério BIC é a seguinte:

$$BIC = k\log(n) - 2\log(\hat{L})$$

em que $\hat{L}$ representa o valor de maximização da função de verossimilhança do modelo. n é o número de observações e k é o número de parâmetros a serem estimados.

CAPÍTULO

3

UMA ABORDAGEM ESTATÍSTICA PARA A ANÁLISE DAS ELEIÇÕES PRESIDENCIAIS DO PERU 2021

3.1 Introdução

Os dados utilizados nesta aplicação consistem nos resultados (número de votos) do primeriro turno das eleições presidenciais peruanas de 2021 para as 24 regiões e a província constitucional do país, Callao. As eleições peruanas estavam marcadas para 11 de abril de 2021 e determinaram a escolha do presidente, do vice-presidente e a composição do parlamento, que conta com 130 membros. Em caso de nenhum candidato obter mais da metade dos votos no primeiro turno, ocorre um segundo turno entre os dois primeiros candidatos com o maior número de votos.

O processo eleitoral contou com a participação de dezoito organizações eleitorais, a maior quantidade desde as eleições peruanas de 2006. Alguns dos candidatos notáveis foram Pedro Castillo do Peru Libre, Keiko Fujimori do Fuerza Popular, Rafael López Aliaga do Renovacion Popular, Hernando de Soto do Avanza país, Yonhy Lescano do Accion Popular, entre outros.

Os partidos políticos participantes possuem diferentes orientações ideológicas. Peru Libre e Accion Popular adotam uma postura socialista com um espectro político progressista, Fuerza Popular possui uma abordagem neoliberal com espectro conservador, Renovacion Popular adota uma postura liberal também com espectro conservador, e Avanza país é um partido neoliberal com espectro conservador.

Os resultados do primeiro turno de acordo com a ONPE (2021) foram os seguintes: Perú libre (PL) com $18,92\%$ dos votos, Fuerza Popular (FP) com $13,4\%$, Renovación Popular(RP) $(11,75\%)$, Avanza pais(AVP) $(11,62\%)$, Accion Popular(ACCP) $(9,071\%)$, Juntos por el Perú

$(7,86\%)$, Alianza por el progreso $(6,021\%)$, Victoria Nacional $(5,65\%)$ e outros $(15,68\%)$. Esses resultados evidenciam, mais uma vez, a alta popularidade do partido Fuerza Popular, que conseguiu avançar para o segundo turno com uma expressiva porcentagem de votos. No entanto, questões políticas como corrupção e acusações de violação dos direitos humanos relacionadas ao governo de Alberto Fujimori, pai da candidata Keiko Fujimori, geraram uma atitude antifujimorista em diversas regiões do Peru. No segundo turno, realizado em 19 de julho de 2021, Pedro Castillo, do partido PL foi escolhido como presidente, com aproximadamente $50,12\%$ dos votos.

Os dados do primeiro turno das eleições, apresentados na Tabela 3, incluem os primeiros cinco partidos denotados como PL, FP, RP, AVP,AP, além de uma categoria adicional OUTROS, que engloba outras organizações com pouca porcentagem de votos.

Tabela 3 – Dados das eleições peruanas de 2021

	Região	Código	PL	FP	RP	AVP	ACCP	OUTROS	Votos Válidos
1	Amazonas	AMA	34.464	17.815	8.274	4.433	12.703	54.510	132.199
2	Áncash	ANC	110.620	67.394	42.312	34.562	38.911	177.986	471.785
3	Apurímac	APU	88.812	10.879	7.768	6.531	15.649	36.547	166.186
4	Arequipa	ARE	256.224	40.216	71.053	148.793	88.708	190.717	795.711
5	Ayacucho	AYA	130.224	17.751	11.490	8.995	20.315	61.775	250.550
6	Cajamarca	CAJ	232.418	54.962	31.129	25.156	38.677	135.120	517.462
7	Callao	CAL	33.750	79.699	78.066	78.920	34.965	219.867	525.267
8	Cusco	CUS	232.178	27.132	29.618	40.423	60.659	218.023	608.033
9	Huancavelica	HUV	79.895	8.449	5.060	4.591	16.727	32.665	147.387
10	Huánuco	HUC	110.978	32.827	33.787	15.822	22.565	79.244	295.223
11	Ica	ICA	56.627	62.102	46.116	39.949	39.475	161.545	405.814
12	Junín	JUN	131.438	80.057	52.599	54.124	66.214	189.666	574.098
13	La Libertad	LAL	90.324	131.866	95.973	84.566	47.322	334.797	784.848
14	Lambayeque	LAM	73.279	121.263	86.126	50.087	51.467	184.346	566.568
15	Lima	LIM	416.743	754.216	870.416	871.000	362.881	2.035.250	5.310.506
16	Loreto	LOR	15.662	52.344	16.449	18.846	34.998	175.809	314.108
17	Madre De Dios	MDD	23.945	7.278	4.041	3.996	6.601	18.713	64.574
18	Moquegua	MOQ	33.665	4.617	6.832	10.183	15.412	27.217	97.926
19	Pasco	PAS	34.187	12.607	8.009	5.102	11.871	28.220	99.996
20	Piura	PIU	71.028	173.933	68.356	63.866	51.250	272.512	700.945
21	Puno	PUN	292.218	17.514	15.918	21.665	175.712	92.494	615.521
22	San MartÍn	SAM	67.000	46.699	26.561	21.825	31.498	119.887	313.470
23	Tacna	TAC	64.521	9.363	17.842	21.000	28.696	52.847	194.269
24	Tumbes	TUM	7.613	36.403	8.799	7.123	7.046	31.257	98.241
25	Ucayali	UCA	26.339	40.510	14.981	11.124	14.359	81.057	188.370

PL: Peru Libre, FP: Fuerza Popular, RP: Renovacion Popular, AVP: Avanza país, AP: Accion Popular e OUTROS

Os dados revelam que a região de Lima (capital do Peru) apresenta a maior quantidade de votos válidos, totalizando 5.310.506 votos, indicando sua significativa influência nas eleições e seu papel crucial na escolha dos governantes. Por outro lado, a região de Madre De Dios registra a menor quantidade de votos válidos, com 64.574,sugerindo uma menor influência nessa região.

Ao analisar os partidos que receberam o maior número de votos, observamos que em regiões como Arequipa, Lima, Puno e Cuzco, localizadas no centro do país, o partido Peru Libre recebeu uma quantidade expressiva de votos. Enquanto isso, em regiões como Lima, La

Libertad, Piura e Lambayeque, localizadas na costa do país, o partido Fuerza Popular recebeu a maior quantidade de votos. Esses resultados indicam padrões regionais distintos nas preferências eleitorais, evidenciando a diversidade de influências e comportamentos de voto em diferentes partes do país.

3.2 Metodologia

Dado que buscamos interpretar os votos das regiões do Peru, aplicamos a metodologia proposta nas eleições presidenciais do ano de 2021 considerando as seguintes etapas.

1. Coleta de dados das eleições presidenciais de Peru do ano de 2021.
2. Transformação dos votos do Peru em proporções.
3. Aplicação da transformação em razões logarítmicas das proporções de votos do Peru.
4. Aplicação da análise de componentes principais (ACP) para dados composicionais transformados do Peru.
5. Identificação de escores das regiões de Peru por meio da ACP.
6. Transformação dos escores para o intervalo unitário.
7. Coleta de indicadores de desenvolvimento humano (IDH) do Peru.
8. Aplicação de um modelo de regressão Beta à variável escore transformada.

Na etapa 1, realizamos a coleta de dados dos votos no Peru, evidenciando variabilidades distintas no numero de votos por região. Na etapa 2, procedemos à transformação dos dados em proporções V_{ij}, em que as somas proporcionais dos votos por região totalizam 1. Dada a natureza composicional dos dados proporcionais de votos no Peru, na etapa 3 aplicamos a transformação de razões logarítmicas para obter V_{ij}^{*} e remover as restrições de soma constante e espaço restrito simplex.

Em seguida, Na etapa 4, conduzimos a análise de componentes principais para extrair as principais componentes explicativas da variância nos dados. Consequentemente, obtemos as cargas dos partidos eleitorais em cada componente e os escores de cada região nas componentes. Na etapa 5, extraímos os escores x_{ij} em que i indica as regiões de Peru e j a componente associada. Na etapa 6, considerando que os escores apresentam variabilidades distintas nas componentes, realizamos a transformação para z_{ij}, cujos valores variam entre $(0,1)$. O escore transformado é, então, considerado a variável resposta, e o objetivo é interpretar esses valores para entender por que as regiões apresentam esse valor de escore em cada componente, com base em um conjunto de covariáveis que explicam o comportamento político da população.

Dessa forma, na etapa 7 incorporamos os indicadores de desenvolvimento humano do Peru como variáveis explicativas, classificadas em saúde, educação e renda, que são fundamentais para compreender como influenciam no comportamento político. Na etapa 8, aplicamos o modelo de regressão Beta, dada a capacidade para lidar com valores no intervalo $(0, 1)$, considerando os escores como variáveis de resposta e os indicadores de desenvolvimento humano do Peru como covariáveis. A Figura 3 apresenta o diagrama com detalhes sobre o processo.

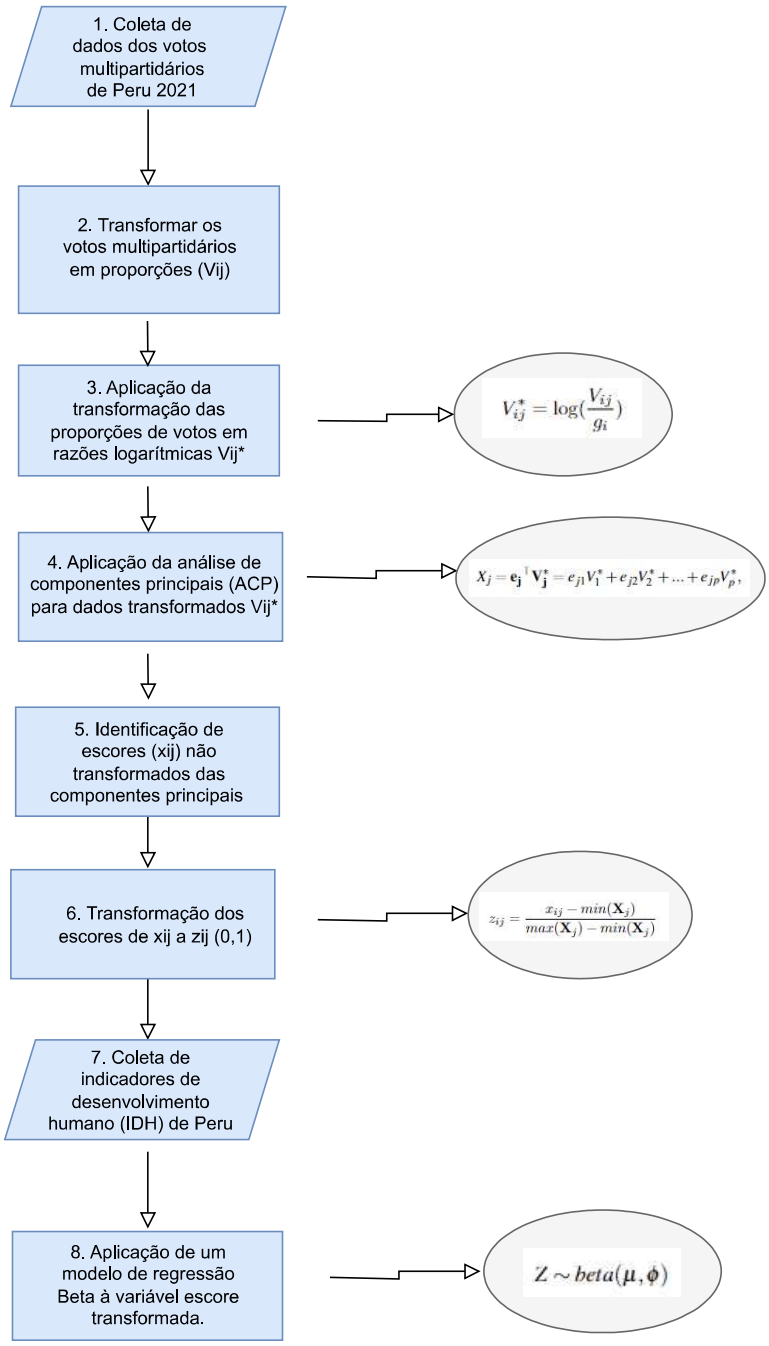


Figura 3 – Diagrama da metodologia aplicada nas eleições peruanas de 2021

Os códigos da metodologia proposta foram desenvolvidos no software R e estão disponíveis na Código-fonte 1. Além disso, podem ser acessado pelo seguinte link: Bounded regression

model Peru 2021.

3.3 Resultados

3.3.1 Matrices de correlação das eleições Peruanas de 2021

Considerando as três bases de dados obtidas das eleições presidenciais do Peru em 2021, analisamos as correlações das variáveis (organizações políticas participantes) em cada uma delas. Na Tabela 4, são apresentadas as correlações de acordo com o número de votos, onde todas as correlações possuem valores positivos, significando que um aumento em qualquer dos partidos, gera um aumento no outro partido, e como sabemos isso não acontece nos dados multipartidarios. Alem disso, é importante notar que a correlação é espúria, uma vez que as variáveis são dependentes. Na Tabela 5, são exibidas as correlações das proporções de votos ou dados composicionais. Neste caso, observamos uma tendencia diferente, com correlações positivas e negativas. Por exemplo, os partidos PL e FP mostram uma correlação negativa de -0,75, e o partido RP e PL mostram uma correlação negativa de -0,70. Apesar disso, as variáveis continuam sendo dependentes e apresentam a restrição de soma constante um, o que pode levar a resultados inapropriados. Finalmente, na Tabela 6, apresentamos a matriz de correlação considerando a transformação de razão logarítmica das votações proporcionais. Nesse caso, os dados estão no espaço Euclidiano, e a restrição de soma constante de um foi removida. Como resultado, as correlações dos dados com a transformação clr nos conduzem a resultados mais apropriados, possibilitando uma análise adequada do que está ocorrendo com os dados. Consequentemente, a correlação de PL e FP com valor -0,72, ou RP e PL com valor -0,73, tem mais significancia no analise dos dados.

Tabela 4 – Matriz de correlação considerando o número de votos no Peru

	PL	FP	RP	AVP	ACCP	OUTROS
PL	1,000	0,595	0,646	0,679	0,837	0,659
FP	0,595	1,000	0,984	0,970	0,868	0,987
RP	0,646	0,984	1,000	0,994	0,893	0,994
AVP	0,679	0,970	0,994	1,000	0,904	0,989
ACCP	0,837	0,868	0,893	0,904	1,000	0,899
OUTROS	0,659	0,987	0,994	0,989	0,899	1,000

3.3.2 Identificando as principais componentes das eleições Peruanas

As principais componentes são aquelas que contêm a maior parte da variância dos dados e explicam as características das eleições peruanas. O objetivo deste estudo é identificá-las. Inicialmente, utilizamos o pacote R para análise composicional conforme proposto por Boogaart e Tolosana-Delgado (2008). Os resultados revelaram duas métricas essenciais: cargas e escores, além da variância acumulada por componente. Normalmente, as duas primeiras componentes

Tabela 5 – Matriz de correlação considerando as proporções de votos no Peru

	PL	FP	RP	AVP	ACCP	OUTROS
PL	1,000	-0,749	-0,699	-0,510	0,400	-0,816
FP	-0,749	1,000	0,438	0,062	-0,506	0,519
RP	-0,699	0,438	1,000	0,698	-0,480	0,380
AVP	-0,510	0,062	0,698	1,000	-0,194	0,208
ACCP	0,400	-0,506	-0,480	-0,194	1,000	-0,494
OUTROS	-0,816	0,519	0,380	0,208	-0,494	1,000

Tabela 6 – Matriz de correlação considerando as transformações clr dos votos no Peru

	PL	FP	RP	AVP	ACCP	OUTROS
PL	1,000	-0,716	-0,734	-0,568	0,592	-0,600
FP	-0,716	1,000	0,476	-0,064	-0,673	0,560
RP	-0,734	0,476	1,000	0,624	-0,792	0,163
AVP	-0,568	-0,064	0,624	1,000	-0,330	0,012
ACCP	0,592	-0,673	-0,792	-0,330	1,000	-0,366
OUTROS	-0,600	0,560	0,163	0,012	-0,366	1,000

mostram a maior parte dessa variância, e uma ferramenta útil para visualizar os dados nessas componentes é o biplot (GABRIEL, 1971). O biplot permite observar as cargas das variáveis e os escores das observações nas componentes, onde as cargas das variáveis indicam a força da relação entre as componentes e as variáveis, podendo ser positivas ou negativas, enquanto os escores representam as posições das observações nos fatores.

Análise de principais componentes (ACP) dos dados

A Tabela 7 mostra as componentes para os dados reais, onde podemos observar cargas positivas e negativas, enquanto espaços nulos indicam cargas próximas de zero. A variância acumulada para a primeira componente é de 88,8%. No entanto, a interpretação não é precisa devido à interdependência das variáveis.

Tabela 7 – Cargas da análise de componentes principais dos dados

Partidos	Comp.1	Comp.2	Comp.3	Comp.4	Comp.5	Comp.6
PL	0,332	0,839	0,411	0,122		
FP	0,418	-0,312		0,728	0,391	-0,206
RP	0,425	-0,232	0,140	-0,247	0,220	0,798
AVP	0,427	-0,168	0,186	-0,617	0,236	-0,565
ACCP	0,413	0,270	-0,868			
OUTROS	0,426	-0,210	0,142	0,105	-0,861	
Desvio padrão	2,309	0,754	0,255	0,160	0,075	0,055
Var. Proporção	0,888	0,095	0,010	0,004	0,000	0,001
Var. cumulativa	0,888	0,983	0,994	0,998	0,999	1,000

O biplot na Figura 4 mostra as cargas e os escores dos dados reais nas duas principais componentes, considerando, ademais, que os nomes das regiões são identificados pelas siglas

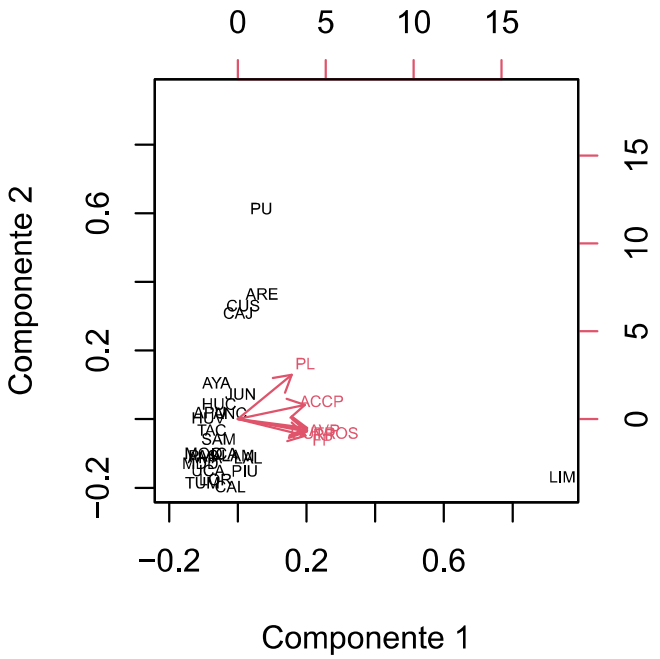


Figura 4 – Biplot da ACP dos dados (98,3% da variância obtida pelas duas primeiras componentes)

codigo estabelecidas por ISO3166 (1998). As flechas representam as cargas, e suas direções estão associadas à contribuição dos partidos na primeira e segunda componente. No entanto, a interpretação não é intuitiva devido às cargas de algumas variáveis se dirigirem em direções semelhantes e às regiões se sobreporem umas às outras.

Análise de componentes principais (ACP) das proporções dos dados

A Tabela 8 segue a mesma abordagem utilizada na análise das componentes dos dados reais. Neste caso, os dados são proporcionais ou composicionais. As cargas podem ser positivas, negativas ou próximas de zero, indicadas por espaços vazios na tabela.

Tabela 8 – Cargas da análise de componentes principais das proporções dos dados

Partidos	Comp.1	Comp.2	Comp.3	Comp.4	Comp.5	Comp.6
PL	0,506		0,412			0,756
FP	-0,401	-0,419		-0,656	-0,309	0,366
RP	-0,436	0,400	0,189	-0,250	0,723	0,172
AVP	-0,302	0,720		0,109	-0,582	0,195
ACCP	0,358	0,231	-0,825	-0,256	0,164	0,214
OUTROS	-0,417	-0,301	-0,332	0,653	0,126	0,426
Desvio padrão	1,859	1,087	0,819	0,707	0,437	0,000
Var. Proporção	0,576	0,197	0,112	0,083	0,032	0,000
Var. cumulativa	0,576	0,773	0,885	0,968	1,000	1,000

O biplot na Figura 5 mostra os dois primeiros componentes de dados proporcionais. A

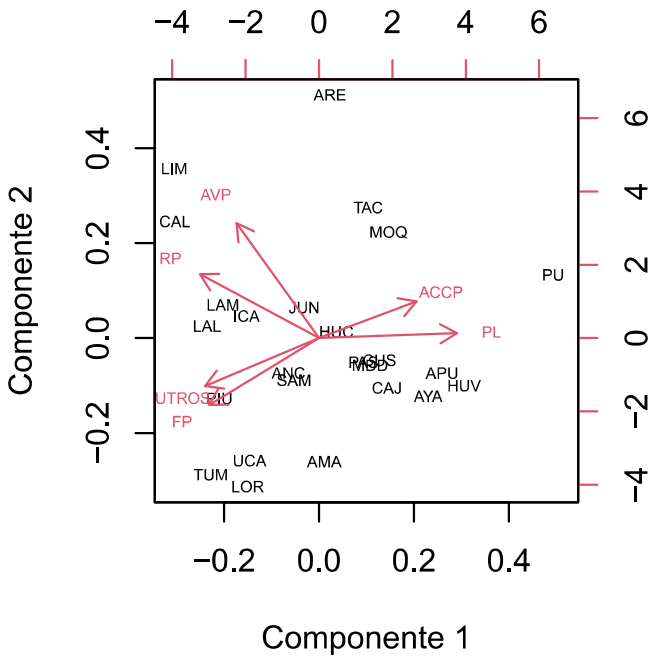


Figura 5 – Biplot da ACP das proporções dos dados(77,3% da variância obtida pelas duas primeiras componentes)

proporção acumulada da variância é 77,3%, valor menor do que a variância acumulada das duas primeiras componentes na análise direta dos dados. Além disso, os partidos políticos foram divididos em três grupos com base em suas posições no biplot: PL e ACCP estão no lado direito, RP e AVP estão no lado superior esquerdo, enquanto FP e OUTROS estão no lado inferior esquerdo.

Análise de componentes principais da transformação clr dos dados

A Tabela 9 mostra as componentes para os dados transformados. Denotamos a primeira e segunda componente principal com x_1 e x_2, respectivamente. As cargas exibem valores negativos, positivos ou próximos de zero, indicadas por espaços vazios. Além disso, observamos que as duas primeiras componentes principais explicam $81,1\%$ do total da variância, enquanto as três primeiras explicam $92,8\%$. Os partidos políticos como PL e ACCP estão positivamente correlacionados com x_1, enquanto FP e OUTROS estão positivamente correlacionados com x_2, e RP e AVP estão negativamente correlacionados com x_2.

O biplot da Figura 6 exibe as duas primeiras componentes da transformação clr dos dados. É possível observar que as cargas dos partidos FP e OUTROS apontam em direção oposta às de RP e AVP no eixo "y". FP e OUTROS(Partido Nacionalista ou Partido Democratico Somos Peru) representam partidos considerados tradicionais, dado que participaram em diferentes eleições no Peru ao longo de muitos anos. Portanto, propomos que a segunda componente principal x_2 esteja associada à preferência por partidos tradicionais, onde a parte inferior do eixo está relacionada a

Tabela 9 – Cargas da análise de componentes principais da transformação clr dos dados

Partidos	Comp.1(x_1)	Comp.2(x_2)	Comp.3	Comp.4	Comp.5	Comp.6
PL	0,495		-0,325	-0,458		0,658
FP	-0,412	0,445	-0,272	0,479	-0,330	0,469
RP	-0,456	-0,338	-0,276		0,723	0,282
AVP	-0,277	-0,657	0,412		-0,456	0,336
ACCP	0,454		0,480	0,573	0,351	0,335
OUTROS	-0,308	0,507	0,587	-0,48	0,178	0,205
Desvio padrão	1,872	1,166	0,840	0,558	0,347	0,000
Var. Proporção	0,584	0,226	0,117	0,051	0,020	0,000
Var. cumulativa	0,583	0,810	0,928	0,979	1,000	1,000

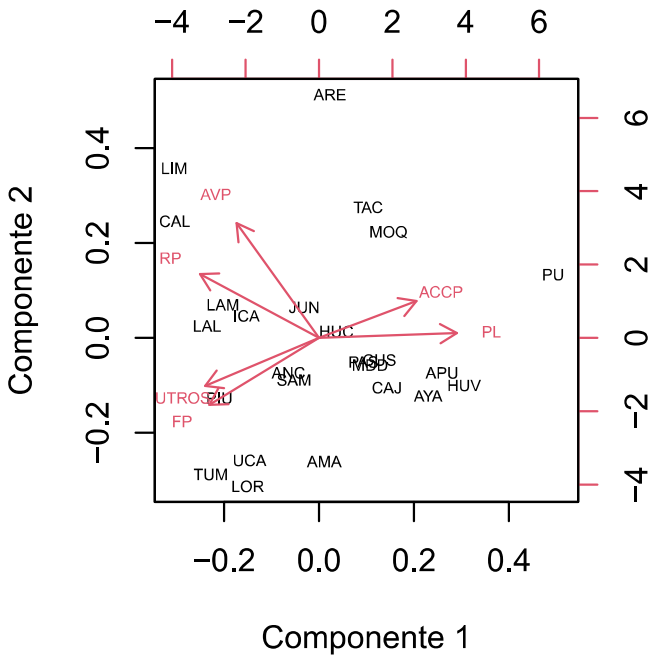


Figura 6 – Biplot da ACP da transformação clr dos dados (81.06% da variância obtida pelas duas primeiras componentes)

partidos menos tradicionais e a parte superior do eixo está associada a partidos tradicionais. Por outro lado, considerando o eixo "x"no biplot, observamos que o partido PL está localizado no lado direito, enquanto RP está no lado esquerdo. Durante o processo eleitoral, esses dois partidos foram opostos em vários aspectos, como economia, visão social, política, entre outros. Portanto, PL representa a política progressista, enquanto RP representa a política conservadora na política peruana. Nesse contexto, propomos que a primeira componente principal x_1 esteja associada à preferência por partidos progressistas.

Por exemplo, é possível observar que as regiões de Piura, Loreto e Ucayali demonstram preferência por partidos tradicionais e conservadores. Por outro lado, a região de Puno opta

por partidos políticos progressistas, enquanto Lima escolheu partidos não tradicionais e conservadores. As regiões de Arequipa e Tacna mostram uma tendência por partidos políticos não tradicionais.

3.3.3 Explicando as componentes principais x_1 e x_2

Em síntese, temos duas componentes principais: a componente x_1 representa a preferência por partidos progressistas, sendo que seu eixo x indica se a região tem baixa preferência (lado esquerdo) ou alta preferência (lado direito). Por outro lado, a componente x_2 representa a preferência por partidos tradicionais, com seu eixo y indicando se uma região tem baixa preferência (lado inferior) ou alta preferência (lado superior). Além disso, para avaliar a preferência da região, é necessário focar nos escores dado que implica as posições das regiões e consequentemente um aumento ou disminução dos escores indica a intensidade de preferência.

3.3.4 Transformando os escores das componentes principais x_1 e x_2

A Figura 6 exibe a posição ou escore x_{ij} para as regiões de Peru, onde i e j indicam região e as componentes principais, respectivamente. As coordenadas dos escores em cada componente variam em escalas diferentes e devido à variabilidade, realizamos uma transformação monotônica nos dois escores. finalmente, obtemos valores normalizados entre 0 e 1 por meio da seguinte transformação:

$$z_{ij} = \frac{x_{ij} - min(\mathbf{x}_j)}{max(\mathbf{x}_j) - min(\mathbf{x}_j)}$$

em que, $0 \leq z_{ij} \leq 1$ denota os escores transformados, e $\mathbf{x}_j = (x_{1j}, \ldots, x_{nj})^T$ é o vetor de escores não transformados para as componentes $j = 1,2$ e regiões $i = 1, ..., 25$. A Tabela 10 mostra os valores dos escores transformados para componentes x_1 e x_2 no Peru.

Os valores dos escores não transformados exibem uma variação distinta para cada componente. Em x_1, Lima apresenta o menor valor, com $-3,66$, enquanto Puno exibe o maior valor, atingindo $4,91$. Por outro lado, em x_2, Tacna apresenta um valor de $-2,35$, enquanto Amazonas mostra um valor de $2,12$. Como resultado, os dois componentes têm variabilidades distintas nos escores, e a transformação pode facilitar a interpretabilidade. Seguidamente, a Figura 7 mostra as densidades dos escores transformados de cada componente principal, com valores variando entre 0 e 1.

3.3.5 Proposta do modelo de regressão Beta

Uma vez que os escores transformados variam de 0 a 1, propomos um modelo de regressão no qual tratamos o escore como uma variável resposta limitada dado que tem valores entre 0 e 1. A Tabela 11 apresenta os principais indicadores de desenvolvimento humano do Peru,

Tabela 10 – Escores transformados das componentes x_1 e x_2

Região	x_1	x_2	z_1	z_2
Amazonas	0,287	2,116	0,460	1,000
Áncash	-0,759	0,305	0,338	0,594
Apurímac	2,885	0,805	0,763	0,706
Arequipa	1,215	-2,314	0,569	0,007
Ayacucho	2,177	0,201	0,681	0,571
Cajamarca	1,819	0,561	0,639	0,651
Callao	-3,008	-1,081	0,076	0,284
Cusco	2,050	-0,676	0,666	0,374
Huancavelica	3,612	1,427	0,848	0,846
Huánuco	0,062	-0,565	0,434	0,399
Ica	-1,534	0,118	0,248	0,552
Junín	-0,291	-0,369	0,393	0,443
La Libertad	-2,337	-0,233	0,154	0,474
Lambayeque	-2,199	0,031	0,170	0,533
Lima	-3,660	-2,269	0,000	0,017
Loreto	-2,184	2,014	0,172	0,977
Madre De Dios	0,946	0,134	0,537	0,556
Moquegua	1,729	-1,292	0,629	0,236
Pasco	0,860	0,339	0,527	0,602
Piura	-2,644	0,608	0,118	0,662
Puno	4,913	0,115	1,000	0,552
San MartÍn	-0,452	0,453	0,374	0,627
Tacna	2,314	-2,347	0,697	0,000
Tumbes	-3,202	0,526	0,053	0,644
Ucayali	-1,287	1,394	0,277	0,838

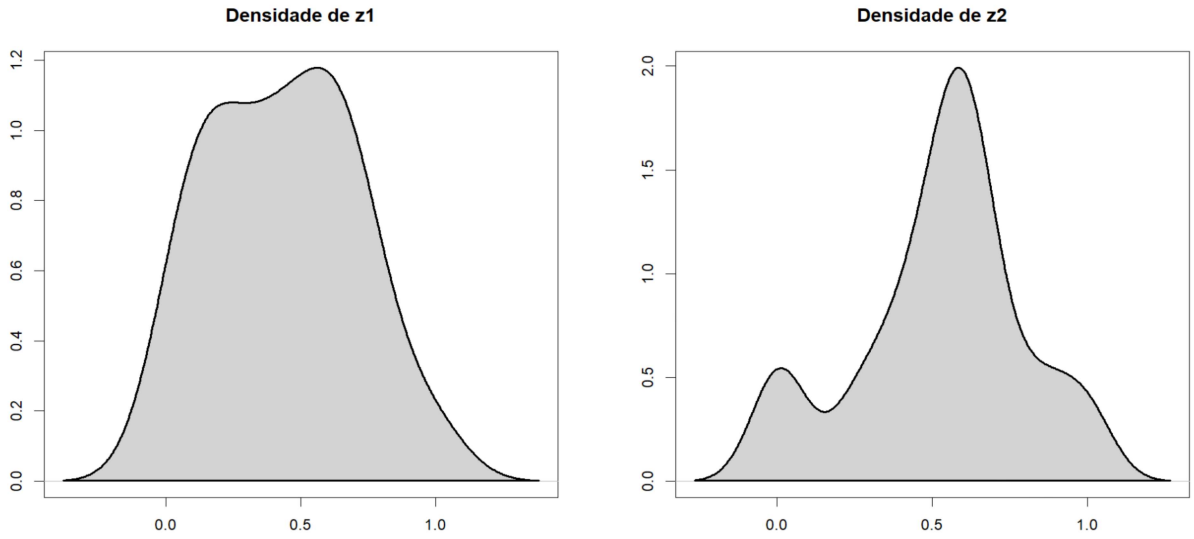


Figura 7 – Densidades dos escores transformados z_1 e z_2

classificados em Saúde, Educação e Renda, que descrevem e interpretam os escores. A coleção dos dados foi realizada pelo IPE (Instituto Peruano de Economia) e pelo INEI(Instituto Nacional de Estadistica e Informatica). Para mais detalhes, consulte as informações disponíveis em INEI (2019). A variável educação considera três tipos de indicadores para uma pessoa: educação completa na escola, média de anos em educação e sucesso educacional. Por fim, propomos um modelo de regressão Beta para cada variável resposta, utilizando o pacote GAMLSS (STASINOPOULOS *et al.*, 2017) a fim de explicar os escores como uma função dos indicadores de desenvolvimento humano em cada região peruana.

Tabela 11 – Indicadores de desenvolvimento humano do Peru

	Região	Saúde	Educação 1	Educação 2	Educação 3	Renda
1	Amazonas	0,733	0,455	0,329	0,387	0,196
2	Áncash	0,832	0,632	0,438	0,526	0,314
3	Apurímac	0,746	0,655	0,346	0,476	0,257
4	Arequipa	0,877	0,759	0,580	0,664	0,456
5	Ayacucho	0,803	0,629	0,361	0,476	0,212
6	Cajamarca	0,805	0,512	0,315	0,402	0,238
7	Callao	0,885	0,731	0,575	0,648	0,457
8	Cusco	0,790	0,718	0,459	0,574	0,296
9	Huancavelica	0,820	0,586	0,298	0,418	0,165
10	Huánuco	0,792	0,578	0,369	0,462	0,255
11	Ica	0,864	0,735	0,580	0,653	0,383
12	Junín	0,799	0,673	0,481	0,569	0,293
13	La Libertad	0,865	0,608	0,459	0,528	0,361
14	Lambayeque	0,876	0,693	0,472	0,572	0,305
15	Lima	0,878	0,755	0,612	0,680	0,593
16	Loreto	0,825	0,440	0,475	0,457	0,302
17	Madre De Dios	0,825	0,640	0,494	0,562	0,498
18	Moquegua	0,852	0,739	0,566	0,647	0,520
19	Pasco	0,802	0,678	0,457	0,557	0,245
20	Piura	0,868	0,624	0,431	0,519	0,300
21	Puno	0,819	0,738	0,420	0,557	0,221
22	San MartÍn	0,767	0,527	0,384	0,450	0,327
23	Tacna	0,831	0,728	0,559	0,638	0,388
24	Tumbes	0,794	0,681	0,502	0,585	0,369
25	Ucayali	0,761	0,495	0,464	0,479	0,310

Explicando o escore transformado da componente x_1 (preferência por partidos progressistas)

O escore transformado para a componente x_1 é representado como z_{i1}, e varia entre zero e um. Sejam $z_{11},\ldots,z_{251}$ variáveis aleatórias independentes, onde cada $z_{i1}, \quad i = 1,\ldots,25$, segue uma distribuição Beta com média μ_{i1} e parâmetro de precisão desconhecido ϕ_1. O modelo é

obtido considerando a função de ligação logito, e a média μ_{i1} é representada da seguinte forma:

$$g(\mu_{i1}) = log\left(\frac{\mu_{i1}}{1-\mu_{i1}}\right) = \boldsymbol{U}_i^\top \boldsymbol{\beta}_1 = \beta_1 + \beta_2 \text{Saúde}_i + \beta_3\ \text{Educação1}_i + \beta_4 \text{Educação2}_i +$$

$$\beta_5 \text{Educação3}_i + \beta_6 \text{Renda}_i$$

em que $\boldsymbol{U}_i = (1, u_{i1}, \ldots, u_{i5})$ representa as observações das covariáveis, e $\boldsymbol{\beta}_1 = (\beta_1, \ldots, \beta_6)^\top$ é um vetor de parâmetros de regressão desconhecidos ($\boldsymbol{\beta}_1 \in \mathbb{R}^6$).

As covariáveis incluem indicadores de desenvolvimento humano, saúde, educação e renda. No entanto, ao estimarmos a correlação entre as covariáveis Educação 2 e Educação 3, encontramos um valor de 0,93, indicando uma alta correlação entre essas covariáveis. Consequentemente, excluímos a covariável Educação 3 do modelo porque o número médio de anos de estudo é considerado mais importante do que o sucesso educacional.

Para avaliar a significância das variáveis no modelo, examinamos os p-valores. A Tabela 12 apresenta os resultados do modelo de regressão utilizando o pacote GAMLSS. Notavelmente, a variável Educação 1 é estatisticamente significativa, com um p-valor de 0,011. Além disso, seu coeficiente revela um impacto positivo na variável resposta, com um valor de 9,56.

Tabela 12 – Estimativas dos parametros do modelo de regressão Beta para o escore transformado da componente x_1

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)	
Intercept.	3,769	4,430	0,851	0,405	
Saúde	-6,946	6,492	-1,070	0,298	
Educação1	9,567	3,413	2,803	0,011	*
Educação2	-4,866	5,793	-0,840	0,411	
Renda	-6,883	3,965	-1,736	0,098	
logito($\hat{\phi}_1$)	-0,089	0,196	-0,457	0,653	

Nível de significância: $p \leq 0{,}001$ '***'; $0{,}001 < p \leq 0.01$ '**'; $0{,}01 < p \leq 0.05$ '*'

Em seguida, elaboramos outro modelo excluindo a variável Educação 2 devido ao seu p-valor mais elevado, indicando falta de significância. Os resultados em Tabela 13 destacam que Educação 1 e Renda são as únicas variáveis significativas, com p-valores de 0,007 e 0,000, respectivamente. Analisando os coeficientes, observamos que Educação 1 possui um impacto positivo de 8,09, enquanto Renda exerce um impacto negativo de -9,63 na variável resposta.

Finalmente, elaboramos outro modelo de regressão considerando exclusivamente essas duas variáveis significativas (Educação 1 e Renda). Os resultados na Tabela 14 mostram o p-valor de 0,011 e 0,000 respectivamente, e os coeficientes indicam que cada unidade adicional na variável Educação 1 (pessoa com escola completa) está associado com um aumento de 6,77 na preferência por partidos progressistas, e cada unidade adicional em Renda está associado a uma diminuição de 10,79 na preferência por partidos progressistas.

Tabela 13 – Estimativas dos parametros do modelo de regressão Beta para o escore transformado da componente x_1 sem a variável Educação 2

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)	
Intercept.	3,758	4,386	0,857	0,401	
Saúde	-7,373	6,385	-1,155	0,261	
Educação1	8,090	2,714	2,981	0,007	**
Renda	-9,638	2,423	-3,979	0,000	***
logito($\hat{\phi}_1$)	-0,061	0,195	-0,316	0,755	

Nível de significância: $p \leq 0{,}001$ '***'; $0{,}001 < p \leq 0.01$ '**'; $0{,}01 < p \leq 0.05$ '*'

Tabela 14 – Estimativas dos parametros do modelo de regressão Beta para o escore transformado da componente x_1 sem as variaveis Educação 2 e Saúde

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)	
Intercept.	-1,073	1,401	-0,766	0,452	
Educação1	6,770	2,455	2,757	0,011	**
Renda	-10,785	2,272	-4,747	0,000	***
logito($\hat{\phi}_1$)	-0,022	0,196	-0,117	0,908	

Nível de significância: $p \leq 0{,}001$ '***'; $0{,}001 < p \leq 0.01$ '**'; $0{,}01 < p \leq 0.05$ '*'

Explicando o escore transformado da componente x_2 (preferência por partidos tradicionais)

O escore transformado para a componente x_2 é representado como z_{i2}, e varia entre zero e um.. Sejam $z_{12}, \ldots, z_{252}$ variáveis aleatórias independentes, onde cada $z_{i2}, \quad i = 1, \ldots, 25$, segue uma distribuição Beta com média μ_{i2} e parâmetro de precisão desconhecido ϕ_2. O modelo é obtido considerando a função de ligação logito, e a média μ_{i2} é representada como:

$$g(\mu_{i2}) = log\left(\frac{\mu_{i2}}{1-\mu_{i2}}\right) = \boldsymbol{U}_i^{\top}\boldsymbol{\beta}_2 = \beta_1 + \beta_2 \text{Saúde}_i + \beta_3\ \text{Educação1}_i + \beta_4 \text{Educação2}_i +$$

$$\beta_5 \text{Educação3}_i + \beta_6 \text{Renda}_i$$

em que $\boldsymbol{U}_i = (1, u_{i1}, \ldots, u_{i5})$ representa as observações das covariáveis, e $\boldsymbol{\beta}_2 = (\beta_1, \ldots, \beta_6)^{\top}$ é um vetor de parâmetros de regressão desconhecidos ($\boldsymbol{\beta}_2 \in \mathbb{R}^6$).

A Tabela 15 apresenta os resultados do modelo de regressão utilizando o pacote GAMLSS, destacando que a variável Education 1 é a única significativa. Notavelmente, o p-valor associado a Educação 1 é próximo de zero com um valor de 0.002. Além disso, o coeficiente do parâmetro indica um impacto negativo de -9,36 na variavel resposta.

Seguidamente, elaboramos outro modelo excluindo a variável Saúde devido ao seu p-valor mais elevado, e indicando que não é significativa no modelo. A Tabela 16 mostra os resultados, onde Educação 1 é novamente a única significativa com um p-valor de 0,001.

Por último, observamos que os dois primeiros modelos têm como única variável significativa Educação 1, então desenvolvemos outro modelo de regressão considerando apenas essa variável significativa. Como os ecores transformados da componente x_2 indicam uma preferência

Tabela 15 – Estimativas dos parâmetros do modelo de regressão Beta para o escore transformado da componente x_2

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)	
Intercept.	8,559	4,117	2,079	0,051	.
Saúde	-0,405	6,003	-0,067	0,946	
Educação1	-9,363	2,704	-3,463	0,002	**
Educação2	-2,964	4,901	-0,605	0,552	
Renda	-2,743	3,777	-0,726	0,476	
logito($\hat{\phi}_2$)	-0,229	0,195	-1,174	0,255	

Nível de significância: $p \leq 0{,}001$ '***'; $0{,}001 < p \leq 0.01$ '**'; $0{,}01 < p \leq 0.05$ '*'

Tabela 16 – Estimativas dos parâmetros do modelo de regressão Beta para o escore transformado da componente x_2 sem a variável Saúde

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)	
Intercept.	8.299	1.464	5.669	0,000	***
Educação1	-9,411	2,608	-3,609	0,001	**
Educação2	-3,024	4,825	-0,627	0,537	
Renda	-2,781	3,735	-0,745	0,465	
logito($\hat{\phi}_2$)	-0,229	0,195	-1,174	0,254	

Nível de significância: $p \leq 0{,}001$ '***'; $0{,}001 < p \leq 0.01$ '**'; $0{,}01 < p \leq 0.05$ '*'

por partidos tradicionais, os resultados na Tabela 17 mostram que cada unidade adicional na variável Educação 1 está associado a uma diminuição de 12,7 ao escolher um partido político tradicional.

Tabela 17 – Estimativas dos parâmetros do modelo de regressão Beta para o escore transformado da componente x_2 considerando unicamente covariáveis significativas

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)	
Intercept.	8,096	1,500	5,398	0,000	***
Educação1	-12,703	2,294	-5,538	0,000	***
logito($\hat{\phi}_2$)	-0,095	0,197	-0,483	0,634	

Nível de significância: $p \leq 0{,}001$ '***'; $0{,}001 < p \leq 0.01$ '**'; $0{,}01 < p \leq 0.05$ '*'

3.3.6 Diagnóstico dos resíduos

Conforme os resíduos quantílicos normalizados proposto por Dunn e Smyth (1996), Para obter os resultados da análise residual, utilizamos o pacote GAMLSS mediante o comando "plot". Em seguida, é mostrado quatro gráficos: Valores ajustados vs. Resíduos, Índice vs. Resíduos, Densidade e QQplot dos resíduos do escore transformado 1 e 2, para verificar a homocedasticidade e identificar pontos influentes.

Na Figura 8, os gráficos de Valores ajustados vs. Resíduos (a) e Índice vs. Resíduos (b) sugerem homocedasticidade, uma vez que os resíduos estão dispersos ao redor de zero e não exibem padrões discerníveis, indicando a presença de linearidade. Além disso, o QQplot

mostra que os resíduos variam entre -3 e 3, não revelando pontos influentes, pois estão dentro do intervalo de confiança.

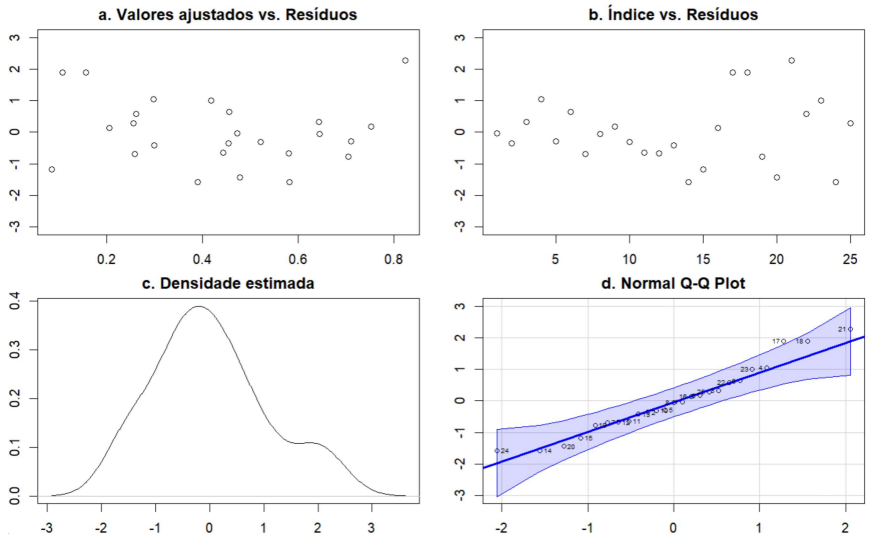


Figura 8 – Diagnóstico de resíduos para z_1 no Peru

Na Figura 9, Valores ajustados vs. Resíduos (a) e Índice vs. Resíduos (b) indicam que não há um padrão observável e atendem à homocedasticidade, onde os pontos residuais estão dispersos homogeneamente. No entanto, o Q-Q Normal em (d) mostra a região de Tacna como um ponto influente nos resíduos, pois está fora do intervalo de confiança.

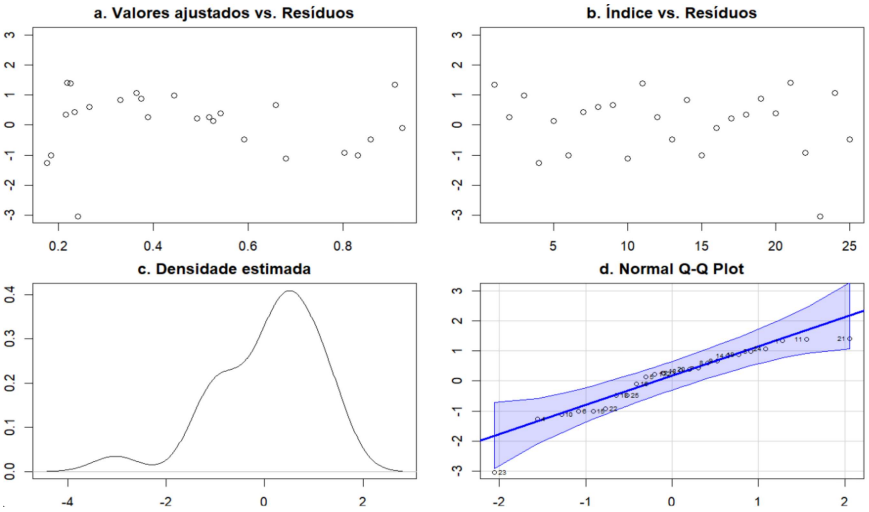


Figura 9 – Diagnóstico de resíduos para z_2 no Peru

3.4 Discussão final

Em síntese, aplicamos a metodologia proposta aos dados coletados das eleições no Peru, conforme descrito na etapa 1. Esses dados foram transformados em proporções na etapa 2 e, devido às características composicionais e suas restrições inerentes, foram posteriormente

convertidos em razões logarítmicas na etapa 3. Na etapa 4, identificamos duas componentes principais que retêm a maioria da variância dos dados. A componente principal x_1 indica a preferência por partidos progressistas, enquanto a componente principal x_2 indica a preferência por partidos tradicionais. O espaço de componentes também revelou as cargas das variáveis em três direções distintas onde as cargas de ACCP e PL mostraram uma correlação positiva com x_1, indicando associação com a preferência por partidos progressistas, enquanto FP mostrou uma correlação negativa, sugerindo o oposto. Da mesma forma, FP mostrou uma correlação positiva com x_2, enquanto RP e AVP mostraram uma correlação negativa, indicando associação com a preferência por partidos tradicionais.

Na etapa 5, obtivemos os escores das regiões, apresentando variabilidade distinta em cada componente. Portanto, na etapa 6, normalizamos os dados para o intervalo unitário.

Dando continuidade à análise, na etapa 7, coletamos dados que descrevem o comportamento da sociedade peruana associado à eleição de um candidato de governo. Na etapa 8, empregamos o pacote GAMLSS para obter as estimativas do modelo de regressão Beta nas eleições presidenciais peruanas de 2021. Os resultados indicam que, para a componente x_1, a variável Educação 1 possui um coeficiente positivo, sugerindo que regiões com maior taxa de conclusão escolar tendem a preferir partidos progressistas. Por outro lado, a variável Renda exibe um coeficiente negativo, indicando que regiões com renda mais alta têm menor propensão a preferir partidos progressistas. Na componente x_2, a variável Educação 1 foi a única significativa, apresentando um coeficiente negativo. Isso sugere que regiões com maior nível de conclusão escolar tendem a não escolher partidos tradicionais, possivelmente devido ao desempenho insatisfatório desses partidos no governo ou a escândalos de corrupção envolvendo seus líderes.

Finalmente, conduzimos um diagnóstico dos resíduos normalizados para avaliar se o modelo de regressão Beta proposto se ajusta adequadamente aos dados. Os gráficos para o escore 1 e escore 2 transformados revelaram resíduos sem padrões aparentes, distribuídos homogeneamente. Além disso, o QQplot indicou que os resíduos se aproximam de uma distribuição normal, mantendo-se dentro dos limites com 95% de confiança.

CAPÍTULO

4

UMA ABORDAGEM ESTATÍSTICA PARA A ANÁLISE DAS ELEIÇÕES PRESIDENCIAIS DO BRASIL 2022

4.1 Introdução

As eleições brasileiras ocorrem a cada quatro anos em 27 Unidades da Federação, sendo 26 estados e o Distrito Federal. São escolhidos o presidente, governadores, senadores, deputados federais e estaduais. Quando nenhum dos candidatos atinge 50% mais um por cento dos votos, realiza-se um segundo turno entre os dois primeiros candidatos que obtiveram a maioria dos votos.

O primeiro turno das eleições Brasileiras de 2022 ocorreram em 2 de outubro, onde os partidos que obtiveram a maioria de votos foram: Partido dos trabalhadores (PT) com $48,43\%$, Partido Liberal(PL) com $43,2\%$, Partido democratico trabalhista(PDT) com $3,04\%$, Movimento Democratico Brasileiro(MDB) com 4.16%, União com $0,51\%$ e Novo com $0,47\%$. Assim, observamos que os candidatos do Partido dos Trabalhadores e do Partido Liberal conquistaram a maioria dos votos. Em seguida, os dois candidatos participaram do segundo turno em 30 de outubro de 2022, onde o Partido Trabalhista obteve 50,9% dos votos e o Partido Liberal, 49,1%. Por fim, o Tribunal Superior Eleitoral foi o órgão responsável por reconhecer o candidato com a maior quantidade de votos da população.

Para uma análise apropriada, consideramos os partidos participantes designados da seguinte maneira: PT, PL, MDB, PDT e os outros partidos, como UNIÃO e NOVO, foram agrupados sob a variável "OUTROS"devido à sua baixa porcentagem de votos. Os dados referentes aos votos no primeiro turno das eleições brasileiras estão apresentados na Tabela 18, obtida do TSE (2022).

Tabela 18 – Dados das eleições de Brasil 2022

	UF	Territorialidade	PT	PL	MDB	PDT	OUTROS	Total
1	AC	Acre	129.022	275.582	20.122	12.314	18.863	455.903
2	AL	Alagoas	974.156	621.515	67.411	43.542	99.347	1.805.971
3	AP	Amapá	197.382	187.621	27.497	14.670	15.672	442.842
4	AM	Amazonas	1.019.684	880.198	87.060	44.527	82.302	2.113.771
5	BA	Bahia	5.873.081	2.047.599	197.305	217.224	539.632	8.874.841
6	CE	Ceará	3.578.355	1.377.827	66.214	369.222	236.992	5.628.610
7	DF	Distrito Federal	649.534	910.397	105.377	74.308	80.284	1.819.900
8	ES	Espírito Santo	897.348	1.160.030	85.325	56.221	116.965	2.315.889
9	GO	Goiás	1.454.723	1.920.203	170.742	90.695	176.234	3.812.597
10	MA	Maranhão	2.603.454	983.861	78.254	96.095	158.771	3.920.435
11	MT	Mato Grosso	633.748	1.102.866	55.989	29.437	70.140	1.892.180
12	MS	Mato Grosso do Sul	588.323	794.206	79.719	29.314	63.587	1.555.149
13	MG	Minas Gerais	5.802.571	5.239.264	500.658	310.324	802.411	12.655.228
14	PA	Pará	2.443.730	1.884.673	204.075	116.057	140.776	4.789.311
15	PB	Paraíba	1.554.868	717.416	57.154	76.225	151.816	2.557.479
16	PR	Paraná	2.363.492	3.628.612	309.685	180.599	346.155	6.828.543
17	PE	Pernambuco	3.558.322	1.630.938	96.570	130.015	322.526	5.738.371
18	PI	Piauí	1.518.008	406.897	42.179	59.321	89.240	2.115.645
19	RJ	Rio de Janeiro	3.847.143	4.831.246	365.969	301.489	563.616	9.909.463
20	RN	Rio Grande do Norte	1.264.179	622.731	38.633	71.740	93.321	2.090.604
21	RS	Rio Grande do Sul	2.806.672	3.245.023	317.957	190.945	329.419	6.890.016
22	RO	Rondônia	261.749	581.306	31.217	19.353	33.202	926.827
23	RR	Roraima	68.760	207.587	12.956	6.709	9.392	305.404
24	SC	Santa Catarina	1.279.216	2.694.406	191.310	88.672	233.870	4.487.474
25	SP	São Paulo	10.490.032	12.239.989	1.625.596	898.540	1.935.557	27.189.714
26	SE	Sergipe	828.716	378.610	42.073	40.247	75.078	1.364.724
27	TO	Tocantins	434.303	379.194	25.209	18.141	34.602	891.449

PT: Partido dos Trabalhadores, PL: Partido Liberal, MDB:Movimento Democrático Brasileiro, PDT:Partido Democrático Trabalhista, e OUTROS

Em seguida, podemos observar que as regiões com o maior número de votos são: São Paulo (27.189.714), Minas Gerais (12.655.228) e Rio de Janeiro (9.909.463). Já as regiões com o menor número de votos são: Roraima (305.404), Amapá (442.842) e Acre (455.903).

4.2 Metodologia

Dado que buscamos interpretar os votos dos estados do Brasil, aplicamos a metodologia proposta nas eleições presidenciais do ano de 2022 considerando as seguintes etapas.

1. Coleta de dados das eleições presidenciais de Brasil do ano de 2022.
2. Transformação dos votos do Brasil em proporções.
3. Aplicação da transformação em razões logarítmicas das proporções de votos do Brasil.
4. Aplicação da análise de componentes principais (ACP) para dados composicionais transformados do Brasil.
5. Identificação de escores das regiões de Brasil por meio da ACP.

6. Transformação dos escores para o intervalo unitário.

7. Coleta de indicadores de desenvolvimento humano (IDH) do Brasil.

8. Aplicação de um modelo de regressão Beta à variável escore transformada.

Na etapa 1, realizamos a coleta de dados dos votos no Brasil, evidenciando variabilidades distintas por estado. Na etapa 2, realizamos a transformação dos dados dos votos em proporções V_{ij}. Dada a natureza composicional dos dados, na etapa 3, aplicamos a transformação de razões logarítmicas V_{ij}^{*} para eliminar as restrições.

Em seguida, na etapa 4, realizamos a análise de componentes principais para obter as componentes que contêm a maior informação dos dados. Na etapa 5, obtivemos os escores x_{ij} dos estados do Brasil. Na etapa 6, os escores foram transformados em z_{ij} com valores entre zero e um. Considerando a interpretação das componentes principais por meio dos escores, na etapa 7, incorporamos os indicadores de desenvolvimento humano do Brasil, classificados em longevidade, educação e renda. Finalmente, na etapa 8, aplicamos o modelo de regressão Beta, considerando os escores como variável resposta e os indicadores de desenvolvimento humano do Brasil como covariáveis. A Figura 10 apresenta o diagrama com detalhes sobre o processo.

Os códigos da metodologia proposta foram desenvolvidos no software R e estão disponíveis na Código-fonte 2. Além disso, podem ser acessado pelo seguinte link: Bounded regression model Brasil 2022.

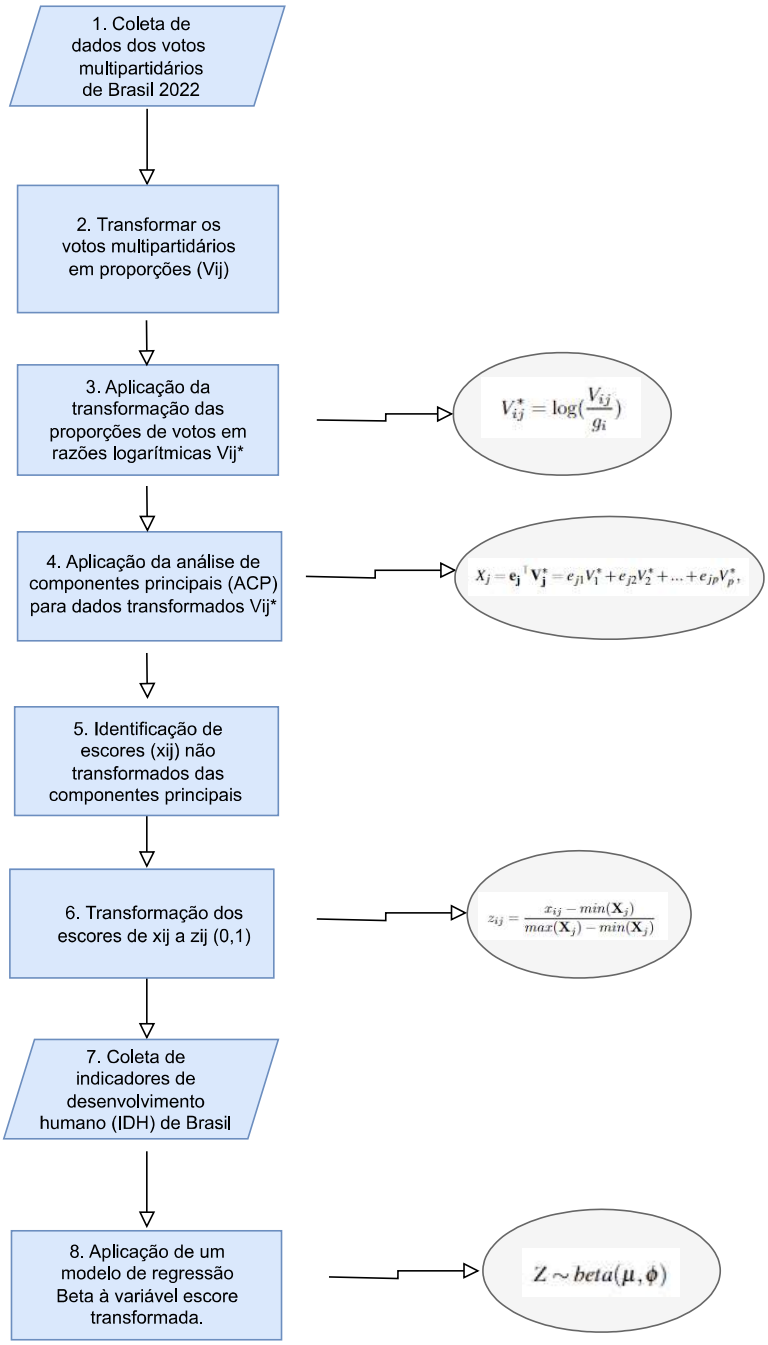


Figura 10 – Diagrama da metodologia nas eleições Brasileiras 2022

4.3 Resultados

4.3.1 Matriz de correlação das eleições Brasileiras de 2022

A Tabela 19 apresenta a correlação dos dados transformados clr. Como foi discutido anteriormente, os valores são appropriados para análise e não há correlação espúria porque as variaveis são independentes e a restrição de suma constante foi eliminada pela transformação.Além disso, os valores indicam correlações negativas e positivas entre as variáveis. Para exemplificar, os partidos políticos PT e PL exibem uma correlação negativa significativa de -0,83, assim como

os partidos PT e MDB, que apresentam uma correlação de 0,79.

Tabela 19 – Matriz de correlação considerando as transformações clr dos votos nas eleições no Brasil em 2022

	PT	PL	MDB	PDT	OUTROS
PT	1,000	-0,828	-0,792	0,427	0,402
PL	-0,828	1,000	0,636	-0,589	-0,501
MDB	-0,792	0,636	1,000	-0,651	-0,539
PDT	0,427	-0,589	-0,651	1,000	0,039
OUTROS	0,402	-0,501	-0,539	0,039	1,000

4.3.2 Identificando as principais componentes das eleições Brasileiras

De maneira semelhante ao trabalho realizado com os dados das eleições peruanas de 2021, identificamos as principais componentes da análise de componentes principais (ACP) associadas às eleições brasileiras de 2022. Para conduzir essa análise, utilizamos o pacote R para análise composicional proposto por Boogaart e Tolosana-Delgado (2008). Os resultados revelaram duas métricas essenciais: cargas e escores, além da variância acumulada em cada componente. Em seguida, aplicamos o biplot (GABRIEL, 1971) para visualizar as cargas dos partidos politicos brasileiros e os escores dos estados de Brasil nas principais componentes.

Análise de componentes principais da transformação clr dos dados

A Tabela 20 exibe as cargas e a variância acumulada nas componentes para os dados de Brasil com transformação clr. As duas primeiras componentes explicam 84%, conforme estimado pelo pacote compositions do R. As cargas observadas são negativas, positivas e próximas de zero, indicadas por espaços vazios. Denotamos a primeira componente com x_1 e a segunda componente com x_2.

Tabela 20 – Cargas da análise de componentes principais da transformação *clr* dos dados de Brasil

Parties	Comp.1 (x_1)	Comp.2 (x_2)	Comp.3	Comp.4	Comp.5
PT	0,494		0,601	-0,346	-0,523
PL	-0,499		-0,364	-0,626	-0,475
MDB	-0,505		0,316	0,613	-0,518
PDT	0,378	-0,657	-0,462	0,254	-0,383
OUTROS	0,329	0,752	-0,439	0,219	-0,292
Desvio padrão	1,800	0,980	0,680	0,578	0,000
Var. proporção	0,648	0,192	0,092	0,066	0,000
Var. cumulativa	0,648	0,840	0,933	1,000	1,000

O biplot mostra os escores dos estados Brasileiros nas duas primeiras componentes, onde vizualisamos o PT e o PL, que obtiveram a maior quantidade de votos (representando

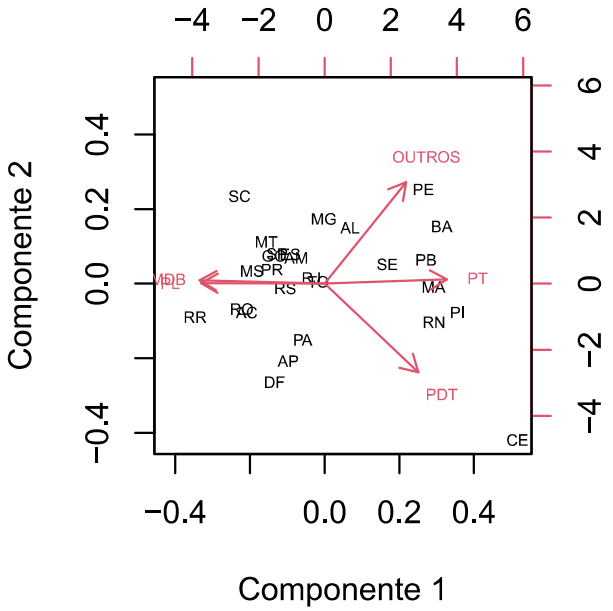


Figura 11 – Biplot da ACP para dados transformados(84% da variância obtida pelas duas primeiras componentes

conjuntamente 91,63% dos votos), e mostram direções opostas, enquanto os partidos PDT e MDB, com um total de votos acumulado de 7,2%, seguem o mesmo padrão.

Por exemplo, o biplot indica que os estados como Pernambuco, Bahia, Paraíba, Sergipe, Maranhão, Rio grande do Norte, Piauí mostraram uma preferência de votos pelo PT, enquanto Santa Catarina, Roraima, Rondônia, Acre, Mato Grosso do Sul, Mato Grosso, Paraná, São Paulo mostraram preferência de votos pelo PL.

É importante enfatizar que a componente 2 está associada a partidos que não tiveram muita relevância nas eleições, dado o baixo número de votos obtidos. Portanto, nossa análise será focada exclusivamente componente principal 1, representado por x_1.

4.3.3 *Explicando a componente principal* x_1

As variáveis PT e PDT apresentam uma correlação positiva com a componente principal x_1, enquanto as variáveis PL e MDB têm uma correlação negativa com a componente x_1. Isso significa que a componente representa a preferência por partidos progressistas, sendo que uma baixa preferência é representada por estados no lado esquerdo e uma alta preferência por estados no lado direito.

Por outro lado, a componente principal x_2 não é considerada nesta análise, uma vez que está associada a partidos políticos com poucos votos.

4.3.4 Transformando os escores da componente principal x_1

A Figura 11 exibe a posição ou escore x_{i1}, em que i indica os estados do Brasil para a componente x_1. Como os valores tem diferente variabilidade nas componentes e queremos facilitar a interpretação, realizamos uma transformação monotônica nos escores. Finalmente, obtemos valores normalizados entre 0 e 1 por meio da seguinte transformação:

$$z_{i1} = \frac{x_{i1} - min(\mathbf{x}_1)}{max(\mathbf{x}_1) - min(\mathbf{x}_1)}$$

Aqui, $0 \leq z_{i1} \leq 1$ representa os escores transformados exclusivamente da componente principal x_1. O vetor $\mathbf{x}_1 = (x1j, \ldots, x_{nj})^T$ representa os escores não transformados de x_1, e os estados são denotados por $i = 1, ..., 27$. A Tabela 21 mostra os valores dos escores transformados para a componente x_1 no Brasil.

Tabela 21 – Escores transformados da componente x_1

UF	x_1	z_1
AC	-1,951	0,160
AL	0,638	0,481
AP	-0,913	0,289
AM	-0,711	0,314
BA	2,932	0,765
CE	4,833	1,000
DF	-1,256	0,246
ES	-0,864	0,295
GO	-1,267	0,245
MA	2,729	0,740
MT	-1,460	0,221
MS	-1,823	0,176
MG	-0,023	0,399
PA	-0,551	0,334
PB	2,541	0,716
PR	-1,321	0,238
PE	2,474	0,708
PI	3,330	0,814
RJ	-0,335	0,360
RN	2,743	0,741
RS	-0,988	0,280
RO	-2,077	0,145
RR	-3,247	0,000
SC	-2,133	0,138
SP	-1,194	0,254
SE	1,572	0,596
TO	-0,160	0,382

Seguidamente, a Figura 12 mostra o histograma dos escores transformados da primeira componente principal, com valores variando entre 0 e 1.

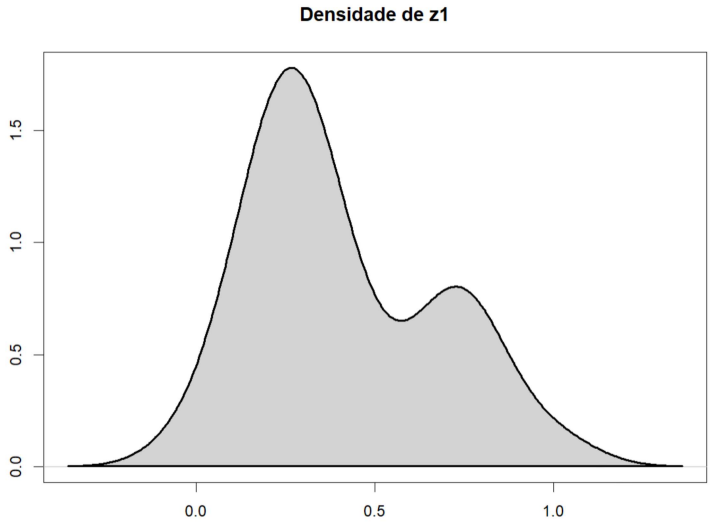


Figura 12 – Histograma do escore transformado z_1

4.3.5 Proposta do modelo de regressão Beta

Posteriormente, considerando os escores transformados entre 0 e 1, sugerimos um modelo de regressão de resposta limitada. Os dados foram coletados pela AtlasBR (2022). Eles estão detalhados na Tabela 22, que inclui os principais indicadores de desenvolvimento humano relacionados ao Brasil, sendo classificados em Renda, Educação e Longevidade, juntamente com as respectivas unidades federativas.

Explicando o escore 1 da componente x_1 (preferência por partidos progressistas)

O escore transformado para a componente x_1 dos dados de Brasil é representada como z_{i1}, variando entre zero e um. Sejam $z_{11},\ldots,z_{271}$ variáveis aleatorias independentes, onde cada $z_{i1}, \quad i=1,\ldots,27$ segue uma distribução Beta com media μ_{i1} e parâmetro de precisão desconhecido ϕ_1. O modelo é obtido considerando a função de ligação logito, e a média μ_{i1} é representada da seguinte forma:

$$g(\mu_{i1}) = log\frac{\mu_{i1}}{1-\mu_{i1}} = \boldsymbol{U}_i^{\top}\boldsymbol{\beta}_1 = \beta_1 + \beta_2 \text{Saúde}_i + \beta_3 \text{ Educação}_i + \beta_4 \text{ Longevidade}_i$$

em que $\boldsymbol{U}_i = (1, u_{i1}, u_{i2}, u_{i3})$ representa as observações das covariáveis, e $\boldsymbol{\beta}_1 = (\beta_1,\ldots,\beta_4)^{\top}$ é um vetor de parâmetros de regressão desconhecidos ($\boldsymbol{\beta}_1 \in \mathbb{R}^4$).

A Tabela 23 exibe os resultados da regressão utilizando o pacote GAMLSS. Nota-se que as variáveis Renda e Educação são estatisticamente significativas, pois seus p-valores estão próximos de zero com 0,000 e 0,002 respectivamente, enquanto a variável Longevidade apresenta um p-valor superior a 0,05. Além disso, os coeficientes dos parâmetros revelam um impacto positivo de 19,68 de Educação e um impacto negativo de -27,39 de Renda na variável resposta.

Em seguida, na Tabela 24, desenvolvemos outro modelo de regressão considerando

Tabela 22 – Indicadores de desenvolvimento humano do Brasil

	UF	Territorialidade	Renda	Educação	Longevidade
1	AC	Acre	0,655	0,692	0,788
2	AL	Alagoas	0,630	0,679	0,748
3	AP	Amapá	0,648	0,647	0,778
4	AM	Amazonas	0,641	0,720	0,744
5	BA	Bahia	0,648	0,659	0,772
6	CE	Ceará	0,658	0,766	0,784
7	DF	Distrito Federal	0,821	0,817	0,803
8	ES	Espírito Santo	0,715	0,742	0,864
9	GO	Goiás	0,715	0,742	0,721
10	MA	Maranhão	0,603	0,716	0,715
11	MT	Mato Grosso	0,720	0,758	0,730
12	MS	Mato Grosso do Sul	0,733	0,741	0,751
13	MG	Minas Gerais	0,718	0,762	0,846
14	PA	Pará	0,645	0,686	0,744
15	PB	Paraíba	0,653	0,669	0,779
16	PR	Paraná	0,744	0,780	0,785
17	PE	Pernambuco	0,647	0,721	0,797
18	PI	Piauí	0,649	0,698	0,726
19	RJ	Rio de Janeiro	0,759	0,758	0,769
20	RN	Rio Grande do Norte	0,69	0,68	0,82
21	RS	Rio Grande do Sul	0,767	0,750	0,797
22	RO	Rondônia	0,677	0,694	0,731
23	RR	Roraima	0,680	0,673	0,745
24	SC	Santa Catarina	0,759	0,790	0,827
25	SP	São Paulo	0,771	0,839	0,810
26	SE	Sergipe	0,662	0,684	0,764
27	TO	Tocantins	0,684	0,732	0,779

Tabela 23 – Estimativas dos parametros do modelo de regressão Beta para o escore transformado da componente x_1 no Brasil

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)	
Intercept.	-3,761	4,366	-0,861	0,398	
Renda	-27,391	6,627	-4,133	0,000	***
Educação	19,676	5,770	3,410	0,002	**
Longevidade	10,437	5,974	1,747	0,094	.
logito($\hat{\phi}_1$)	0,023	0,189	0,125	0,902	

Nível de significância: $p \leq 0{,}001$ '***'; $0{,}001 < p \leq 0.01$ '**'; $0{,}01 < p \leq 0.05$ '*'

exclusivamente com essas duas variáveis significativas. Observa-se que, dado que a componente principal x_1 indica a preferência por partidos progressistas, e cada unidade adicional na variável Renda está associado a uma diminuição de 24,35 na preferência por partidos progressistas, enquanto cada unidade adicional em Educação está associado a um aumento de 20,85 na preferência pelos partidos progressistas.

Tabela 24 – Estimativas dos parametros do modelo de regressão Beta sem a variável Longevidade

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)	
Intercept.	1,370	3,239	0,423	0,676	
Renda	-24,352	6,630	-3,673	0,001	***
Educação	20,853	6,149	3,391	0,002	**
logito($\hat{\phi}_1$)	0,101	0,189	0,534	0,598	

Nível de significância: $p \leq 0{,}001$ '***'; $0{,}001 < p \leq 0.01$ '**'; $0{,}01 < p \leq 0.05$ '*'

4.3.6 Diagnóstico dos resíduos

Na Figura 13, os gráficos de Valores ajustados vs. Residuos (a) e Indice vs. Residuos (b) indicam homocedasticidade, uma vez que os resíduos não apresentam nenhum padrão discernível em sua dispersão, além disso valores estão distribuídos entre -3 e 2. O gráfico Q-Q Normal (d) revela que todos os resíduos quantílicos estão dentro de limites com 95% de confiança, embora a densidade mostre uma leve deformação no lado esquerdo devido à baixa probabilidade de ocorrência de resíduos quantílicos entre -4 e -2.

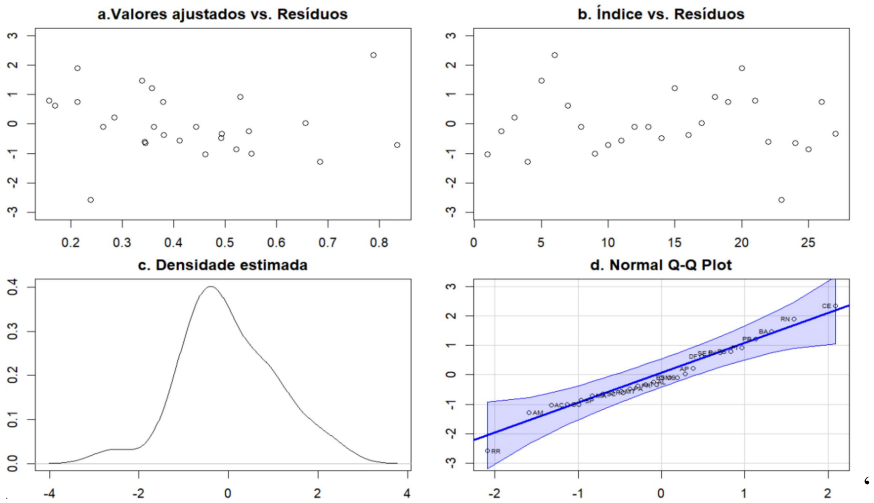


Figura 13 – Diagnóstico de resíduos para z_1 no Brasil

4.4 Discussão final

Em síntese, aplicamos a metodologia proposta aos dados coletados das eleições no Brasil, conforme descrito na etapa 1. Esses dados foram transformados em proporções na etapa 2 e, devido às características composicionais e suas restrições inerentes, foram posteriormente convertidos em razões logarítmicas na etapa 3. Na etapa 4, identificamos duas componentes principais que retêm a maioria da variância dos dados. No entanto, observou-se que a maioria dos votos concentrou-se nos partidos PT e PL. Assim, com base no biplot, a decisão foi focar a análise apenas na componente principal x_1, considerada crucial para indicar a preferência por partidos progressistas. Posteriormente, ao observar o espaço dimensional das componentes, notamos que as variáveis PT e PDT apresentaram correlação positiva com x_1, enquanto PL

e MDB mostraram correlação negativa. Essas associações indicam padrões interessantes nas preferências políticas dos estados brasileiros, considerando a ideologia política.

Na etapa 5, obtivemos os escores das regiões, apresentando variabilidade distinta em cada componente. Portanto, na etapa 6, normalizamos os dados para o intervalo unitário.

Para dar continuidade à análise, na etapa 7, coletamos dados de indicadores que descrevem o comportamento da sociedade Brasileira associado à eleição de um candidato de governo. Na etapa 8, empregamos o pacote GAMLSS para obter os valores das estimativas no modelo de regressão Beta, aplicado aos dados das eleições brasileiras de 2022. Os resultados revelam que apenas a variável Educação 1 demonstra significância estatística, exibindo uma estimativa positiva. Isso sugere que estados brasileiros com níveis mais elevados de educação têm uma inclinação para preferir partidos progressistas.

Seguidamente, a ao realizar o diagnóstico dos resíduos, observamos se o modelo de regressão Beta proposto ajustou-se adequadamente aos dados brasileiros. Os gráficos mostraram que resíduos não tem um padrão e eles estão dispersos de forma homogênea. Além disso, o QQplot, indicou indicou que os resíduos normais quantílicos estão dentro dos limites com 95% de confiança.

Finalmente, a análise também sugere que o comportamento político da população do Brasil e do Peru em relação à preferência por partidos progressistas é semelhante, uma vez que a componente x_1 analisa a preferência por partidos progressistas. Um grupo de circunscrições demonstra uma tendência à preferência por partidos progressistas, enquanto outro grupo mostra preferência por partidos conservadores. Além disso, é viável ajustar as etapas e incorporar indicadores adicionais como covariáveis para os diferentes estados do Brasil, levando em consideração os diversos fatores que influenciam a decisão dos votos, e podemos explorar outros modelos de regressão com resposta limitada, a fim de identificar qual se adequa melhor aos dados disponíveis.

CAPÍTULO

5

MODELO DE REGRESSÃO BIVARIADO VIA CÓPULAS: ELEIÇÕES DE PERU

5.1 Introdução

Nesta seção, formulamos um modelo de regressão bivariada utilizando cópulas para analisar as eleições presidenciais do Peru em 2021. Conforme descrito nos modelos univariados, após realizar a análise de componentes principais, obtivemos duas variáveis: a preferência pelos partidos progressistas Z_1 e a preferência pelos partidos tradicionais Z_2, assim como as variáveis explicativas associadas incluem Educação, Saúde e Renda.

Além de examinar os efeitos das variáveis explicativas e a independência das variáveis resposta, buscamos desenvolver uma distribuição bivariada juntamente com sua estrutura de dependência que possa explicar ambas as variáveis.

Assim, modelar simultaneamente duas variáveis resposta através de cópulas oferece uma abordagem computacionalmente viável para obter um modelo multivariado no contexto de regressão, permitindo a utilização de diferentes estruturas de dependência para determinar qual se ajusta melhor aos dados.

É importante ressaltar que o modelo apresenta duas variáveis resposta com distribuições marginais Beta, pertencentes à família exponencial. Consequentemente, precisamos estimar as médias e os parâmetros de precisão associados às distribuições para, posteriormente, obter o parâmetro de dependência. O ambiente R oferece diversas ferramentas para modelar esse tipo de distribuição com resposta limitada.

Diversas classes de cópulas podem ser utilizadas, como as elípticas e arquimedianas, conforme mostrado nas Tabela 1 e Tabela 2, que apresentam diferentes estruturas de dependencia, bem como valores de concordancia τ. Simultaneamente é possível modelar uma dependência negativa ou positiva por meio de graus de rotação.

5.2 Metodologia

As cópulas são modelos convenientes, computacionalmente flexíveis e eficientes, implementadas no pacote GAMLSS (Generalized Additive Models for Location, Scale, and Shape) e utilizadas na função copulaReg() no pacote R SemiParBIVProbit. Além disso, os parâmetros são determinados em duas etapas, primeiro para as distribuições marginais e depois para a função cópula.

Seja a função de distribuição acumulada de duas variáveis aleatórias contínuas Z_1 e Z_2, obtidas da análise de componentes principais e com valores entre $(0,1)$. Consideremos também as covariáveis Saúde, Educação 1, Educação 2, Educação 3 e Renda obtidas de ONPE (2021). Seguidamente, o modelo é denotado de forma geral como uma função de distribuição acumulada:

$$F(z_1,z_2|\nu) = C(F_{Z_1}(z_1|\mu_1,\phi_1), F_{Z_2}(z_2|\mu_2,\phi_2);\zeta,\theta)$$

em que Z_1 e Z_2 são variáveis resposta das eleições de Peru (preferência pelo partido progressista e preferência pelo partido tradicional), $F_{Z_1}(z_1|\mu_1,\phi_1)$ e $F_{Z_2}(z_2|\mu_2,\phi_2)$ são as distribuições marginais das variáveis Z_1 e Z_2, ν é o vetor de parâmetros associados às distribuições marginais das variáveis resposta $\mu_1,\phi_1,\mu_2,\phi_2$ conjuntamente com os parâmetros associados à cópula ζ,θ. C é definida como uma função cópula com coeficiente de dependência θ, ζ representa o número de graus de liberdade da cópula t-Student (unicamente aparece em C e ν quando a copula é empregada), e os parâmetros em ν estão conectados com as covariáveis através de preditores aditivos. Cópulas permitem duas associações de parâmetros em que ζ pode representar um coeficiente de dependência adicional.

Os parâmetros do modelo estão relacionados às covariáveis e coeficientes de regressão através de preditores aditivos η's, também conhecidos como funções de ligação, que garantem a manutenção das restrições dos espaços paramétricos. As equações das variáveis resposta são escritas como:

$$\eta_{1i} = \boldsymbol{U}_i^\top \boldsymbol{\beta}_1 = \beta_{01} + \beta_{11}\ \text{Educação1}_i + \beta_{21}\text{Renda}_i$$

$$\eta_{2i} = \boldsymbol{U}_i^\top \boldsymbol{\beta}_2 = \beta_{02}, + \beta_{12}\ \text{Educação1}_i$$

em que $\boldsymbol{\beta}_1 = (\beta_{01},\beta_{11},\beta_{21})$ e $\boldsymbol{\beta}_2 = (\beta_{02},\beta_{12})$ representam as estimativas dos parâmetros associados às variáveis resposta, e cada uma mostra as covariáveis que tiveram mais influência no modelo univariado.

A estimação dos parâmetros para o modelo de cópula com marginais contínuas beta é realizada através da função de log-verossimilhança, que pode ser escrita como:

$$l(\delta) = \sum_{i=1}^{n} \log c(F_{Z_1}(z_{1i}|\mu_{1i},\phi_1), F_{Z_2}(z_{2i}|\mu_{2i},\phi_2);\theta) + \sum_{i=1}^{n} [\log f_{Z_1}(z_{1i}|\mu_{1i},\phi_1) + \log f_{Z_2}(z_{2i}|\mu_{2i},\phi_2)]$$

em que c é a densidade da cópula (os parâmetros foram suprimidos por simplicidade), dado por $\frac{\partial^2 C(F_{Z_1}(z_{1i}),F_{Z_2}(z_{2i}))}{\partial F_{Z_1}(z_{1i})\partial F_{Z_2}(z_{2i})}$. Os parâmetros de distribuição são definidos como: $\mu_{1i} = g_{\mu_1}^{-1}(\eta_{1i}), \mu_{2i} = g_{\mu_2}^{-1}(\eta_{2i}), \phi_1 = g_{\phi_1}^{-1}(\eta_{1i}), \phi_2 = g_{\phi_2}^{-1}(\eta_{2i}), \theta = g_{\theta}^{-1}(\eta_{\theta})$, em que as funções g representam as funções de ligação. Além disso, o parâmetro δ está associado aos parâmetros $\boldsymbol{\beta}_{\mu_1}^{\top}, \boldsymbol{\beta}_{\mu_2}^{\top}, \beta_{\phi_1}, \beta_{\phi_2}, \beta_{\theta}$, os quais, por sua vez, estão relacionados aos parâmetros $\eta_{\mu_1 i}, \eta_{\mu_2 i}, \eta_{\phi_1}, \eta_{\phi_2},$ e η_{θ}. Seguidamente, dada a flexibilidade das estruturas dos preditores, o algoritmo de optimização é atráves da log-verossimilhança penalizada $l_p(\delta)$ (MARRA; RADICE, 2017).

Estimamos os parâmetros das distribuições marginais e a cópula, considerando equações associadas as medias, duas aos parâmetros de precisão e uma equação para o parâmetro de dependência. Para elaborar cada equação, consideramos os indicadores de desenvolvimento humano de Peru (Saúde, Educação 1, Educação 2, Educação 3 e Renda) (ONPE, 2021) que tiveram maior influência em cada variável resposta do modelo univariado.

Para obter as estimativas, utilizamos a função copulaReg() do pacote R SemiParBIVProbit para modelar as seguintes cópulas elipticas e arquimedianas: copula Gaussiana "N", Frank "F", Ali-Mikhail-Haq "AMH", Farlie-Gumbel-Morgenstern "FGM", e outras cópulas com rotações para capturar diferentes tipos de dependência como, Gumbel com grau de rotação 90 "G90", Joe com grau de rotação 90 "J90", em que as rotações podem apresentar diferentes graus seja "0", "90", "180"e "270"e permitem modelar dependências positivas ou negativas nas caudas.

Os códigos da metodologia proposta foram desenvolvidos no software R e estão disponíveis na Código-fonte 3. Além disso, podem ser acessado pelo seguinte link: Bivariate regression via copulas.

5.3 Resultados

Consequentemente, foram desenvolvidos seis tipos de cópulas, cada um com sua estrutura de dependência correspondente. Na Tabela 25, empregamos os critérios AIC e BIC para a seleção do modelo que melhor descreve os dados, em que o melhor apresenta o menor valor em tais criterios. Dessa forma, a cópula Joe com rotação de 90° indica o menor valor de AIC com -38.57 e o menor valor de BIC com -28.82.

Tabela 25 – Critério de seleção de modelos

Cópula	AIC	BIC
Normal	-37,375	-27,624
Frank	-38,476	-28,725
Ali-Mikhail-Haq	-37,455	-27,704
Farlie-Gumbel-Morgenstern	-37,944	-28,193
90° Gumbel	-38,300	-28,549
90° Joe	-38,568	-28,817

Posteriormente, apresentam-se os resultados das estimativas para a cópula Joe 90°. Na Tabela 26, é possível observar que as variáveis Educação 1 e Renda demonstram significância, exibindo p-valores de 0,003 e 0,000, respectivamente. Além disso, os coeficientes associados revelam valores próximos aos estimados no modelo univariado, onde Educação 1 exerce um impacto positivo, enquanto Renda impacta negativamente na preferência pelos partidos progressistas.

Tabela 26 – Estimativas dos parâmetros para preferência pelos partidos progressistas

Cópula 90° Joe	Estimate	Std. Error	z value	Pr(>|z|)	
Intercept.	-1,163	1,494	-0,778	0,436	
Educação 1	7,497	2,577	2,910	0,003	**
Renda	-12,026	2,212	-5,436	0,000	***
logito($\hat{\phi}_1$)	-1,076	0,261	-4,112	0,000	***

Nível de significância: $p \leq 0{,}001$ '***'; $0{,}001 < p \leq 0.01$ '**'; $0{,}01 < p \leq 0.05$ '*'

Na Tabela 27, destaca-se a significância da variável Educação 1, cujo p-valor é praticamente zero. O coeficiente estimado demonstra proximidade com o valor obtido no modelo univariado, indicando que Educação 1 exerce um impacto negativo na preferência pelos partidos tradicionais.

Tabela 27 – Estimativas dos parâmetros para preferência pelos partidos tradicionais

Cópula 90° Joe	Estimate	Std. Error	z value	Pr(>|z|)	
Intercept.	8,493	1,365	6,220	0,000	***
Educação 1	-13,343	2,103	-6,343	0,000	***
logito($\hat{\phi}_2$)	-1,203	0,269	-4,459	0,000	***

Nível de significância: $p \leq 0{,}001$ '***'; $0{,}001 < p \leq 0.01$ '**'; $0{,}01 < p \leq 0.05$ '*'

Na Tabela 28, são apresentadas as estimativas para o parâmetro de dependência da cópula Joe com uma rotação de 90°. Conforme evidenciado na Tabela 2, a cópula Joe exibe um parâmetro de dependência com valores positivos no intervalo $(1, \infty)$. Entretanto, ao ser rotacionada em 90°, esses valores extrapolam esse intervalo. A estimativa obtida, portanto, é -0,559, sugerindo uma dependência negativa moderada. Isso indica que valores elevados na preferência pelos partidos progressistas estão associados a menores preferências pelos partidos tradicionais, e vice-versa.

Adicionalmente, o valor de τ é calculado por meio de uma transformação, conforme mostrado na Tabela 2, também exibindo um valor negativo de -0,243.

Tabela 28 – Estimativa de θ

Cópula 90° Joe	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)	τ
Intercept.	-0,559	0,756	-0,739	0,460	-0.243

5.4 Discussão final

Em resumo, após a aplicação do método de redução de dimensões nos dados eleitorais do Peru, observamos uma distribuição particular das regiões. Duas componentes emergiram, explicando a preferência pelos partidos progressistas e pelos partidos tradicionais, respectivamente. Posteriormente, incorporamos variáveis explicativas dos indicadores de desenvolvimento humano e dada a presença dessas variáveis em cada componente, aplicamos um modelo de regressão bivariada via cópulas para identificar a dependência entre as componentes.

As cópulas representam uma ferramenta estatística versátil, proporcionando flexibilidade computacional. Neste contexto, possibilitam a construção de uma distribuição bivariada para duas variáveis dependentes limitadas. Diversos pacotes em R foram empregados para realizar a análise e adaptar as respostas limitadas no modelo. Além disso, diferentes tipos de cópulas, como cópulas elípticas e arquimedianas, foram explorados, permitindo a identificação da cópula que melhor se ajusta aos dados.

Com base nos critérios AIC e BIC, concluímos que a cópula arquimediana denominada Joe, com rotação de 90°, apresenta o melhor ajuste aos dados. Como resultado, as estimativas para os parâmetros associados a cada variável explicativa são consistentes com os modelos univariados previamente apresentados, sendo também estatisticamente significativos. Além disso, obtivemos uma estimativa para o parâmetro de dependência, que possui um valor de -0,559, indicando uma dependência negativa entre a preferência pelos partidos progressistas e a preferência pelos partidos tradicionais na presença das variáveis explicativas.

CAPÍTULO

6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A metodologia proposta abrange oito etapas e foi aplicada nas eleições presidenciais do Peru em 2021, utilizando dados apresentados pela ONPE (2021), e nas eleições do Brasil em 2022, com informações fornecidas pelo Tribunal Superior Eleitoral TSE (2022).

Inicialmente, os dados foram transformados em dados composicionais, caracterizados por valores proporcionais e uma soma constante. No entanto, esses dados possuem restrições adicionais, pois estão em um espaço limitado conhecido como Simplex. Essas restrições tornam a análise estatística mais desafiadora, requerendo métodos de transformação adequados. Nesse cenário, aplicamos o método proposto por Aitchison (1982), que envolve uma transformação de razões logarítmicas para eliminar a dependência das variáveis, superando as restrições mencionadas. Devido à dimensionalidade dos dados, optamos por realizar uma análise de componentes principais para reduzir as dimensões, embora outras técnicas de redução de dimensionalidade, como a análise de fatores (AF), também podem ser consideradas. Após a obtenção dos escores, notamos uma variabilidade diferente em cada componente. Como resultado, realizamos uma transformação para valores no intervalo unitário.

Posteriormente, foram coletadas variáveis explicativas relacionadas a fatores sociais na decisão de votos. No entanto, é viável ajustar esta etapa incorporando variáveis explicativas adicionais, como indicadores socioeconômicos, políticos ou ambientais, dependendo da circunscrição estudada.

Em seguida, implementamos um modelo de regressão Beta Ferrari e Cribari-Neto (2004). No entanto, vale ressaltar a possibilidade de explorar outros modelos de regressão com resposta limitada, onde a variável resposta segue uma distribuição Simplex (BARNDORFF-NIELSEN; JØRGENSEN, 1991), Kumaraswamy (KUMARASWAMY, 1980) e Johnson (JOHNSON, 1949), visando identificar o que melhor se adequa aos dados disponíveis.

Da mesma forma, no diagnóstico de resíduos, utilizamos a análise de resíduos quantílicos normalizados (DUNN; SMYTH, 1996). No entanto, é possível empregar outras técnicas

adicionais de diagnóstico para analisar, identificar pontos influentes e detectar eventuais desvios do modelo, como leverage generalizado (WEI *et al.*, 1998) e discrepancia de ajuste (FERRARI; CRIBARI-NETO, 2004).

Além disso, desenvolvemos um modelo de regressão bivariada adotando a abordagem das cópulas (NELSEN, 2006) para os dados das eleições no Peru em 2021. O modelo considera a correlação entre as variáveis de resposta (preferência por partidos progressistas e tradicionais) na presença de variáveis explicativas. Embora a correlação entre as variáveis de resposta não é significativa, o modelo evidencia uma relação entre elas. Assim também, as variáveis foram obtidas por meio da análise de componentes principais, e consequentemente elas são linearmente independentes e ortogonais no espaço. No entanto, essa independência linear e ortogonal não implica independência total, uma vez que as regiões analisadas estão próximas umas das outras e compartilham as mesmas variáveis explicativas.

Portanto, em futuros trabalhos, é possível desenvolver abordagens alternativas para analisar a correlação entre as regiões (PRATES *et al.*, 2022) a partir de uma perspectiva espaço-temporal, utilização de campos aleatórios de Markov (PRATES *et al.*, 2015) para lidar com estruturas de dependência e a incorporação de efeitos aleatórios (PRATES *et al.*, 2013).

Adicionalmente, essa metodologia pode ser aplicada em diversas circunscrições, como distritos, regiões ou estados, permitindo a compreensão do comportamento político em diferentes sociedades. Isso possibilita analisar quais covariáveis determinam a decisão da população ao escolher votar em um candidato presidencial. A análise pode ser conduzida tanto sob uma abordagem clássica quanto sob uma abordagem bayesiana.

REFERÊNCIAS

AITCHISON, J. The statistical analysis of compositional data. **Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)**, Wiley Online Library, v. 44, n. 2, p. 139–160, 1982. Citado nas páginas 14, 18 e 71.

AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. **IEEE transactions on automatic control**, Ieee, v. 19, n. 6, p. 716–723, 1974. Citado na página 37.

ANJOS, U. U. d.; FERREIRA, F. H.; KOLEV, N.; MENDES, B. V. d. M. Modelando dependências via cópulas. 2004. Citado nas páginas 32 e 36.

ATLASBR. **Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil**. 2022. Disponível em: <http://www.atlasbrasil.org.br/ranking>. Acesso em: 20 Jun 2022. Citado na página 62.

BARNDORFF-NIELSEN, O. E.; JØRGENSEN, B. Some parametric models on the simplex. **Journal of multivariate analysis**, Elsevier, v. 39, n. 1, p. 106–116, 1991. Citado na página 71.

BAYER, F. M. Modelagem e inferência em regressão beta. Universidade Federal de Pernambuco, 2011. Citado na página 24.

BAZAN, J. L.; SULMONT, D.; CALDERÓN, A. Las organizaciones políticas en las elecciones presidenciales peruanas de 2011 usando análisis de componentes principales. **Revista de Estudos Sociais**, v. 14, n. 27, p. 10–27, 2012. Citado nas páginas 14 e 15.

BIONDO, T. R.; SUZUKI, A. K. Modelos de sobrevivencia bivariados derivados da copula arquimediana de clay-ton: Uma abordagem bayesiana. **Matemática e Estatística em Foco**, v. 4, n. 2, p. 87–102, 2016. Citado na página 31.

BOOGAART, K. G. Van den; TOLOSANA-DELGADO, R. "compositions": a unified r package to analyze compositional data. **Computers & Geosciences**, Elsevier, v. 34, n. 4, p. 320–338, 2008. Citado nas páginas 42 e 59.

BOUYÉ, E.; DURRLEMAN, V.; NIKEGHBALI, A.; RIBOULET, G.; RONCALLI, T. Copulas for finance-a reading guide and some applications. **Available at SSRN 1032533**, 2000. Citado na página 31.

CHERUBINI, U.; LUCIANO, E.; VECCHIATO, W. **Copula methods in finance**. West Sussex, England: John Wiley & Sons, 2004. Citado nas páginas 33 e 34.

CZADO, C. Analyzing dependent data with vine copulas. **Lecture Notes in Statistics, Springer**, Springer, v. 222, 2019. Citado na página 34.

DANAHER, P. J.; SMITH, M. S. Modeling multivariate distributions using copulas: Applications in marketing. **Marketing science**, INFORMS, v. 30, n. 1, p. 4–21, 2011. Citado na página 31.

DENUIT, M.; PURCARU, O.; KEILEGOM, I. V. Bivariate archimedean copula models for censored data in non-life insurance. 2006. Citado na página 31.

DUNN, P. K.; SMYTH, G. K. Randomized quantile residuals. **Journal of Computational and graphical statistics**, Taylor & Francis, v. 5, n. 3, p. 236–244, 1996. Citado nas páginas 27, 52 e 71.

EGOZCUE, J. J.; PAWLOWSKY-GLAHN, V.; MATEU-FIGUERAS, G.; BARCELO-VIDAL, C. Isometric logratio transformations for compositional data analysis. **Mathematical geology**, Springer, v. 35, n. 3, p. 279–300, 2003. Citado nas páginas 18 e 19.

EMBRECHTS, P.; LINDSKOG, F.; MCNEIL, A. Modelling dependence with copulas. **Rapport technique, Département de mathématiques, Institut Fédéral de Technologie de Zurich, Zurich**, v. 14, p. 1–50, 2001. Citado na página 31.

FERRARI, S.; CRIBARI-NETO, F. Beta regression for modelling rates and proportions. **Journal of applied statistics**, Taylor & Francis, v. 31, n. 7, p. 799–815, 2004. Citado nas páginas 22, 27, 71 e 72.

FISHER, R. A. On the mathematical foundations of theoretical statistics. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character**, The Royal Society, v. 222, p. 309–368, 1922. Citado na página 23.

GABRIEL, K. R. The biplot graphic display of matrices with application to principal component analysis. **Biometrika**, Oxford University Press, v. 58, n. 3, p. 453–467, 1971. Citado nas páginas 43 e 59.

GODA, K.; TESFAMARIAM, S. **Multi-variate seismic demand modelling using copulas: Application to non-ductile reinforced concrete frame in Victoria, Canada**. Amsterdam, Netherlands: Elsevier, 2015. 39–51 p. Citado na página 31.

INEI. **ÍNDICE DE DESARROLLO HUMANO – IDH**. 2019. Disponível em: <https://www.ipe.org.pe/portal/indice-de-desarrollo-humano-idh/comment-page-9/>. Acesso em: 20 Jun 2022. Citado na página 49.

ISO3166. **ISO 3166-2 codes**. 1998. Disponível em: <https://www.iso.org/obp/ui/#iso:code:3166:PE>. Acesso em: 24 Nov 2020. Citado nas páginas 17 e 44.

JOE, H. **Dependence modeling with copulas**. FL, USA: CRC press, 2014. Citado na página 31.

JOHNSON, N. L. Systems of frequency curves generated by methods of translation. **Biometrika**, JSTOR, v. 36, n. 1/2, p. 149–176, 1949. Citado na página 71.

JOHNSON, R. A.; WICHERN, D. W. *et al.* Applied multivariate statistical analysis. Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 2002. Citado na página 19.

KUMARASWAMY, P. A generalized probability density function for double-bounded random processes. **Journal of hydrology**, Elsevier, v. 46, n. 1-2, p. 79–88, 1980. Citado na página 71.

MARRA, G.; RADICE, R. Bivariate copula additive models for location, scale and shape. **Computational Statistics & Data Analysis**, Elsevier, v. 112, p. 99–113, 2017. Citado na página 68.

MOSIMANN, J. E. On the compound multinomial distribution, the multivariate β-distribution, and correlations among proportions. **Biometrika**, JSTOR, v. 49, n. 1/2, p. 65–82, 1962. Citado na página 14.

NELDER, J. A.; WEDDERBURN, R. W. Generalized linear models. **Journal of the Royal Statistical Society Series A: Statistics in Society**, Oxford University Press, v. 135, n. 3, p. 370–384, 1972. Citado na página 26.

NELSEN, R. B. **An introduction to copulas**. New York, USA: Springer, 2006. Citado nas páginas 30, 33, 35, 37 e 72.

OLIVEIRA, M. S. de. **Um Modelo de Regressão Beta: teoria e aplicações**. Tese (Doutorado) — Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 12/04/2004., 2004. Citado na página 25.

ONPE. **PRESENTACIÓN DE RESULTADOS Elecciones Generales y Parlamento Andino 2021**. 2021. Disponível em: <https://resultadoshistorico.onpe.gob.pe/EG2021/EleccionesPresidenciales/RePres/T>. Acesso em: 20 Jun 2022. Citado nas páginas 38, 67, 68 e 71.

PALEOLOGOU, S.-M. Income and democracy: a bivariate copula approach. **Journal of Applied Statistics**, Taylor & Francis, v. 50, n. 7, p. 1635–1649, 2023. Citado na página 31.

PEARSON, K. On lines and planes of closest fit to system of points in space. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, v. 2, p. 559–572, 1901. Citado na página 19.

PRATES, M. O.; AZEVEDO, D. R.; MACNAB, Y. C.; WILLIG, M. R. Non-separable spatio-temporal models via transformed multivariate gaussian markov random fields. **Journal of the Royal Statistical Society Series C: Applied Statistics**, Oxford University Press, v. 71, n. 5, p. 1116–1136, 2022. Citado na página 72.

PRATES, M. O.; DEY, D. K.; WILLIG, M. R.; YAN, J. Transformed gaussian markov random fields and spatial modeling of species abundance. **Spatial Statistics**, Elsevier, v. 14, p. 382–399, 2015. Citado nas páginas 31 e 72.

PRATES, M. O.; JR, R. H. A.; DEY, D. K.; YAN, J. Assessing intervention efficacy on high-risk drinkers using generalized linear mixed models with a new class of link functions. **Biometrical Journal**, Wiley Online Library, v. 55, n. 6, p. 912–924, 2013. Citado na página 72.

RODRIGUES, P. C.; LIMA, A. T. Analysis of an european union election using principal component analysis. **Statistical Papers**, Springer, v. 50, p. 895–904, 2009. Citado nas páginas 15, 20 e 21.

SCHWARZ, G. Estimating the dimension of a model. **The annals of statistics**, JSTOR, p. 461–464, 1978. Citado na página 37.

SEN, P. K.; SINGER, J. M. **Large Sample Methods in Statistics: An Introduction with Applications**. [S.l.]: Chapman & Hall, 1993. Citado na página 25.

SKLAR, A. Fonctions de répartition à plusieurs dimensions et leurs marges. **Publications de l'Institut Statistique de l'Université de Paris**, v. 8, p. 229–239, 1959. Citado nas páginas 30 e 31.

STASINOPOULOS, M. D.; RIGBY, R. A.; HELLER, G. Z.; VOUDOURIS, V.; BASTIANI, F. D. **Flexible regression and smoothing: using GAMLSS in R**. Florida, United States: CRC Press, 2017. Citado na página 49.

TSE. **Eleição Geral Ordinária**. 2022. Disponível em: <https://www.tse.jus.br/comunicacao/noticias/2022/Outubro/100-das-secoes-totalizadas-confira-como-ficou-o-quadro-eleitoral-apos-o-1o-turno>. Acesso em: 20 Jun 2022. Citado nas páginas 55 e 71.

WATTS, S. The gaussian copula and the financial crisis: A recipe for disaster or cooking the books? **University of Oxford**, v. 8, 2016. Citado na página 34.

WEI, B.-C.; SHI, J.-Q.; FUNG, W.-K.; HU, Y.-Q. Testing for varying dispersion in exponential family nonlinear models. **Annals of the Institute of Statistical Mathematics**, Springer, v. 50, p. 277–294, 1998. Citado nas páginas 27 e 72.

APÊNDICE

A

CÓDIGOS R

Código-fonte 1 – Código do modelo em R das eleições peruanas

```
library(compositions)
library(Hmisc, pos=4)
library(foreign, pos=4)
library(corrplot)
library(ggplot2)
library(readxl)

#1.Dados eleições 1er turno

setwd(dirname(rstudioapi::getActiveDocumentContext()$path))
Electionsdata2021 <- read_excel("elections2021_1round.xlsx")
names(Electionsdata2021)
head(Electionsdata2021)

#2.Dados eleições 2do turno
setwd(dirname(rstudioapi::getActiveDocumentContext()$path))
Elections2021_2round <- read_excel("Elections2021_2round.xlsx")
Elections2021_2round

#3. Transformações
### Transformação em proporções

Matriz_2round = as.matrix(Elections2021_2round [,c(3,4,5)])
```

```
Matriz_2round_prop =matrix(numeric(25),nrow = 25,ncol =2)
for(i in 1:2){
  Matriz_2round_prop[,i] = Matriz_2round[,i]/Matriz_2round[,3]
}
colnames(Matriz_2round_prop) = c("Party1","Party2")

data2_2021_prop = as.data.frame(Matriz_2round_prop)
data2_2021_prop

parties=c("PL","FP","RP","AVP","ACCP","OTHERS","VALID VOTES")
matriz_votes_2021 = as.matrix(Electionsdata2021[,parties])


matriz_prop_2021 =matrix(numeric(25),nrow = 25,ncol = 6)
matriz_prop_2021

for(i in 1:6){
  matriz_prop_2021[,i] = (matriz_votes_2021[,i]/matriz_votes_2021[,7])*100
}
matriz_prop_2021


### Transformação clr
parties1=c("PL","FP","RP","AVP","ACCP","OTHERS")
matriz_tr_2021 = matrix(numeric(25),nrow = 25,ncol = 6)
colnames(matriz_tr_2021)= parties1
matriz_tr_2021=clr(matriz_prop_2021)
matriz_tr_2021

# 4.Análise de componentes principais dos dados transformados

TransformedCPA<- princomp(matriz_tr_2021,cor =TRUE)
TransformedCPA$loadings
summary(TransformedCPA)
TransformedCPA$scores


biplot(TransformedCPA,xlab='First Component',
       ylab='Second Component',main ="Log contrast PCA scale1")
```

```
# 5. Normalização dos escores

#getAnywhere(biplot.princomp)
lam =((TransformedCPA$sdev))*sqrt(TransformedCPA$n.obs)
lam
#scale != 0 >> lam^scale
#scale = 1 so, we say lam = lam, then
lam = lam
score1 = TransformedCPA$scores[,1]/ lam[1]
score2 =TransformedCPA$scores[,2] / lam[2]
score1 #hist(score1, main = "Histogram Score 1",xlim=c(-0.6,0.6))
score2 #hist(score2, main = "Histogram Score 2",xlim=c(-0.6,0.6))


### escore 1
score1_t1 <- (score1 - min(score1))/(max(score1) - min(score1))
score1_t1[15]= score1_t1[15]+0.0001
score1_t1[21] =score1_t1[21] -0.0001
score1_t1 #hist(score1_t1, main = "Histograma de z1",ylim = c(0, 6),xlim = c(0, 1.0

### escore 2
score2_t1 <- (score2 - min(score2))/(max(score2) - min(score2))
score2_t1[23]= score2_t1[23]+0.0001
score2_t1[1] =score2_t1[1] -0.0001
score2_t1 #hist(score2_t1, main = "Histograma de z2",ylim = c(0, 6),xlim = c(0, 1.0


par(mfrow=c(1,2))
par(mar=c(2,2,2,2))



# 6. Dados para implementar o modelo

#indicators
setwd(dirname(rstudioapi::getActiveDocumentContext()$path))
indicators <- as.data.frame(read_excel("indicators.xlsx"))
indicators
```

```
indicators = indicators[,c(-1,-2)]
Data_indicators = cbind(indicators,score1_t1,score2_t1 )
Data_indicators
summary(Data_indicators)



# 7. GAMLSS

#packageVersion("gamlss")

###Escore1
#########################################################################
library(gamlss)
gamlss_score1_t1_m1<- gamlss(score1_t1~HealthINEI+educationINEI1+educationINEI2+Inc
summary(gamlss_score1_t1_m1)


gamlss_score1_t1_m2<- gamlss(score1_t1~HealthINEI+educationINEI1+IncomeINEI,family=
summary(gamlss_score1_t1_m2)

#library(xtable)
#xtable(gamlss_score1_t1_m2)
gamlss_score1_t1_m3<- gamlss(score1_t1~educationINEI1+IncomeINEI,family=BE,data=Dat
summary(gamlss_score1_t1_m3)

###Escore2
#########################################################################
gamlss_score2_t1_m1<- gamlss(score2_t1  ~ HealthINEI+educationINEI1+educationINEI2+
summary(gamlss_score2_t1_m1)

gamlss_score2_t1_m2<- gamlss(score2_t1  ~ educationINEI1+educationINEI2+IncomeINEI,
summary(gamlss_score2_t1_m2)

gamlss_score2_t1_m3<- gamlss(score2_t1  ~ educationINEI1,family=BE,data=Data_indica
summary(gamlss_score2_t1_m3)
fitted(gamlss_score2_t1_m3)
```

```
# 8. Diagnóstico

par(mfrow=c(2,2))
plot(fitted(gamlss_score1_t1_m3),resid(gamlss_score1_t1_m3),xlab="Fitted values",yl
plot(1:nrow(Data_indicators),resid(gamlss_score1_t1_m3),xlab="Index",ylab="Residual
plot(density(resid(gamlss_score1_t1_m3)),main="c. Density Estimate")#### graph 3
library(car)
qqPlot(resid(gamlss_score1_t1_m3), ylab = "Normalized quantile residuals", main ="d


par(mfrow=c(2,2))
plot(fitted(gamlss_score2_t1_m2),residuals(gamlss_score2_t1_m2),xlab="Fitted values
plot(1:nrow(Data_indicators),resid(gamlss_score2_t1_m2),xlab="Index",ylab="Residual
plot(density(resid(gamlss_score2_t1_m2)),main="c. Density Estimate")#### graph 3
qqPlot(resid(gamlss_score2_t1_m2), ylab = "Normalized quantile residuals", main ="d
```

Código-fonte 2 – Código do modelo em R das eleições brasileiras

```
library(compositions)
library(Hmisc, pos=4)
library(foreign, pos=4)
library(corrplot)
library(ggplot2)
library(readxl)

#1.Dados eleições 1er turno no Brasil


setwd(dirname(rstudioapi::getActiveDocumentContext()$path))
ElectionsdataBrazil <- read_excel("votes2022Brazil.xlsx")
#View(ElectionsdataBrazil)
ElectionsdataBrazil
UF=ElectionsdataBrazil[,1]
State=ElectionsdataBrazil[,2]
#sum(ElectionsdataBrazil[,6])/sum(ElectionsdataBrazil[,10])
#View(ElectionsdataBrazil)
```

```
ElectionsdataBrazil <-ElectionsdataBrazil[,c(-1,-2)]
dim(ElectionsdataBrazil)
Others=as.matrix(ElectionsdataBrazil[,8]) -
 (as.matrix(ElectionsdataBrazil[,1]) +as.matrix(ElectionsdataBrazil[,2]) +
  as.matrix(ElectionsdataBrazil[,3]) +as.matrix(ElectionsdataBrazil[,4]) )

databrazil<- cbind(as.matrix(ElectionsdataBrazil[,c(1,2,3,4)]),Others
,ElectionsdataBrazil[,8])
colnames(databrazil)= c("PT","PL","MDB","PDT","OTHERS","TOTAL")
databrazil
#matriz_prop_br =matrix(numeric(27),nrow = 27,ncol = 7)
#matriz_prop_br
col_prop1<-(databrazil[,1]/databrazil[,6])*100
col_prop2<-(databrazil[,2]/databrazil[,6])*100
col_prop3<-(databrazil[,3]/databrazil[,6])*100
col_prop4<-(databrazil[,4]/databrazil[,6])*100
col_prop5<-(databrazil[,5]/databrazil[,6])*100

dados1<-cbind(UF,State,databrazil)

#2. Transformações
### Transformação em proporções
matriz_prop_br<-cbind(col_prop1,col_prop2,col_prop3,col_prop4,col_prop5)
matriz_prop_br
colnames(matriz_prop_br)= c("PT","PL","MDB","PDT","OTHERS")
matriz_prop_br

matriz_tr_br=clr(matriz_prop_br)
matriz_tr_br

rownames(matriz_tr_br)<-c("AC","AL","AP","AM","BA","CE","DF","ES",
"GO","MA","MT","MS","MG","PA","PB","PR","PE","PI",
"RJ","RN","RS","RO","RR","SC","SP","SE","TO")

### Transformação clr
TransformedCPA_br<- princomp(matriz_tr_br,cor =TRUE)
summary(TransformedCPA_br)
cargas=TransformedCPA_br$loadings
TransformedCPA_br$scores
```

```
par(mfrow = c(1,2))
biplot(TransformedCPA_br,xlab='First Component',
ylab='Second Component',main ="Biplot of the Brazilian
elections 2022",cex = 0.5)

# 4. Normalização dos escores


lam =((TransformedCPA_br$sdev))*sqrt(TransformedCPA_br$n.obs)
lam
#scale != 0 >> lam^scale
lam = lam
score1_br = TransformedCPA_br$scores[,1]/ lam[1]
score2_br =TransformedCPA_br$scores[,2] / lam[2]
score1_br
score2_br
#####standardizing scores
score1_t1 <- (score1_br - min(score1_br))/(max(score1_br) - min(score1_br))
score1_t1
score1_t1[23]= score1_t1[23]+0.0001
score1_t1[6] =score1_t1[6] -0.0001
score1_t1#hist(score1_t1, main = "Histograma de z1",
ylim = c(0, 8), xlim = c(0, 1.0),breaks = 10,
xlab = "", ylab = "")


score2_t1 <- (score2_br - min(score2_br))/(max(score2_br) - min(score2_br))
score2_t1
score2_t1[6]= score2_t1[6]+0.0001
score2_t1[17] =score2_t1[17] -0.0001
score2_t1#hist(score2_t1, main = "Histograma de z2"
,ylim = c(0, 6),xlim = c(0, 1.0),breaks = 10)


#5. Dados para implementar o modelo
```

```
setwd(dirname(rstudioapi::getActiveDocumentContext()$path))
indicators <- as.data.frame(read_excel("IDHbrasil.xlsx"))
UF = indicators[,1]
str(indicators)
summary(indicators)
indicators<- indicators[,c(3,4,5)]
indicators<-cbind(as.numeric(indicators[,1]),as.numeric(indicators[,2]),
as.numeric(indicators[,3]))

colnames(indicators)= c("renda","educação","longevidade")
renda = cbind(indicators[,1])
educação = cbind(indicators[,2])
longevidade = cbind(indicators[,3])


Data_indicators =as.data.frame(cbind(indicators,score1_t1,score2_t1 ))
summary(Data_indicators)

# 6. GAMLSS
library(gamlss)
###Escore1
#########################################################################
score1_m1<- gamlss(score1_t1 ~ renda+educação+
longevidade, family= BE,data=Data_indicators )
summary(score1_m1)

score1_m2<- gamlss(score1_t1~ renda+educação,family=BE,data=Data_indicators )
summary(score1_m2)

# 7. Diagnóstico
par(mfrow=c(2,2))
plot(fitted(score1_m2),residuals(score1_m2),xlab="Fitted values",ylab="Residuals",
main="a. Fitted values vs Residuals",
ylim = c(-3,3))#### graph 1
plot(1:nrow(Data_indicators),resid(score1_m2),xlab="Index",
ylab="Residuals",main="b. Index vs Residuals",ylim = c(-3,3))#### graph 2
plot(density(resid(score1_m2)),main="c. Density Estimate")#### graph 3
qqPlot(resid(score1_m2), ylab = "Normalized quantile residuals"
```

```
, main ="d. Normal Q-Q Plot",
ylim =c(-3,3),id=list(method="y", n=25, cex=0.5), )#### graph 4
```

Código-fonte 3 – Código do modelo em R das eleições Peruanas utilizando cópulas

```
#####Copulas#####
library(SemiParBIVProbit)
library(copula)
library(VineCopula)

library(gamlss)
library(compositions)
library(Hmisc, pos=4)
library(foreign, pos=4)
library(corrplot)
library(ggplot2)
library(readxl)
library(psych)

newdata<- read.csv("newdata.csv")
head(newdata)
attach(newdata)#Pacotes

# MODELO 1 VIA COPULAS PARA MODELAR AS MEDIAS E OBTENER VARIANCIAS, THETA E TAU
eq.mu.1 <- z1 ~ education1+income
eq.mu.2 <- z2 ~ education1
eq.sigma2.1 <- ~1
eq.sigma2.2 <- ~1
eq.theta <- ~ 1
fl <- list(eq.mu.1, eq.mu.2, eq.sigma2.1, eq.sigma2.2, eq.theta)
#Gaussian
system.time(outN <- copulaReg(fl,
margins = c("BE", "BE"),
data = newdata, gamlssfit = TRUE))
summary(outN)

system.time(outF <- copulaReg(fl,
margins = c("BE", "BE"), BivD = "F",data = newdata, gamlssfit = TRUE))
```

```
summary(outF)#sample size small


system.time(outAMH <- copulaReg(fl,
margins = c("BE", "BE"), BivD = "AMH",data = newdata, gamlssfit = TRUE))
summary(outAMH)

system.time(outFGM <- copulaReg(fl,
margins = c("BE", "BE"), BivD = "FGM",data = newdata, gamlssfit = TRUE))
summary(outFGM)

system.time(outG90 <- copulaReg(fl,
margins = c("BE", "BE"), BivD = "G90",data = newdata, gamlssfit = TRUE))
summary(outG90)

system.time(outJ90 <- copulaReg(fl,
margins = c("BE", "BE"), BivD = "J90",data = newdata, gamlssfit = TRUE))
summary(outJ90)


#####summary AIC/BIC
aic =AIC(outN,outF,outAMH,outFGM,outG90,outJ90)
bic = BIC(outN,outF,outAMH,outFGM,outG90,outJ90)
```