

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCar
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA - CCET
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA - DEMec**

LUIGI REIS BARBIERI

**Controle proporcional de um Modelo IS-LM com atuação no
ajuste do Mercado de Moeda**



São Carlos - SP
2021

LUIGI REIS BARBIERI

**Controle proporcional de um Modelo IS-LM com atuação no
ajuste do Mercado de Moeda**

Trabalho de conclusão de curso
apresentado ao curso de graduação em
Engenharia Mecânica da Universidade
Federal de São Carlos, para obtenção do
título de bacharel em Engenharia
Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Sidney Bruce Shiki

São Carlos - SP

2021



FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

COORDENAÇÃO DO CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA - CCEMec/CCET

Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905

Telefone: (16) 33519703 - <http://www.ufscar.br>

DP-TCC-FA nº 1/2021/CCEMec/CCET

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

LUIGI REIS BARBIERI

CONTROLE PROPORCIONAL DE UM MODELO IS-LM COM ATUAÇÃO NO AJUSTE DO MERCADO DE MOEDA

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos

São Carlos, 13 de janeiro de 2021

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	Sidney Bruce Shiki
Membro da Banca 1	Luis Antonio Oliveira Araujo
Membro da Banca 2	Gustavo Franco Barbosa



Documento assinado eletronicamente por **Sidney Bruce Shiki, Docente**, em 13/01/2021, às 14:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Luis Antonio Oliveira Araujo, Docente**, em 14/01/2021, às 15:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Gustavo Franco Barbosa, Docente**, em 15/01/2021, às 09:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufscar.br/autenticacao>, informando o código verificador **0313137** e o código CRC **CD0473E7**.



Referência: Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo nº 23112.000399/2021-08

SEI nº 0313137

Modelo de Documento: Grad: Defesa TCC: Folha Aprovação, versão de 02/Agosto/2019

Dedico este trabalho aos meus companheiros da
República Arapuca.

Agradecimentos

Agradeço principalmente ao meu Professor Orientador Sidney Bruce Shiki, por estar comigo durante o longo desenvolvimento deste trabalho de conclusão de curso. Agradeço por se propor a encarar o desafio que representa aplicar conceitos de engenharia em outras matérias do saber, e também por ter a paciência de me orientar durante todo o percurso.

Agradeço principalmente a minha namorada que me deu o apoio mental e emocional necessário para a conclusão deste trabalho, e também a meus amigos, companheiros de república e família que tiveram um papel importante nesse quesito.

*"Worries does not empty tomorrow of its
sorrow. It empties today of its strength. "*
Corrie Ten Boom

Resumo

Neste trabalho buscou-se aumentar a intuição em relação ao papel que o ajuste da taxa de juros tem na estabilização do PIB, fazendo uso de técnicas de Engenharia. Propõe-se a análise macroeconômica através de um modelo dinâmico, com posterior uso de uma malha de controle para redução do tempo de estabilização do sistema. Aplica-se diferentes fontes de instabilidade no sistema para avaliar o funcionamento do controle. Também utiliza-se dados reais da macroeconomia brasileira retirados do IpeaDATA para o período de 2010 a 2019, para testar a malha de controle.

Palavras-chave: IS-LM. Macroeconomia. Sistema de Controle. Sistema Dinâmico.

Abstract

In this paper, the proposed study seeks to augment intuition regarding the role of the adjustment of interest rate in the GDP stabilization, by making use of engineering techniques. It is proposed a macroeconomic analysis by means of a dynamic model, with following use of a control mesh in order to reduce the stabilization time of the system. Different sources of instability are applied to the system in order to evaluate the efficiency of the control mesh. Finally, it is used real data from Brazilian macroeconomy taken from IpeaDATA from the period of 2010 to 2019 to also test the control system.

Keywords: IS-LM. Macroeconomy. Control system. Dynamic system.

Lista de Figuras

Figura 1: Diagrama de blocos da equação da Renda Disponível.....	10
Figura 2: Diagrama de blocos da equação de Consumo das Famílias	11
Figura 3: Diagrama de Blocos da equação do Investimento Privado	12
Figura 4: Fluxo circular simplificado de uma economia fechada.....	13
Figura 5: Diagrama de blocos da equação do Mercado de Moeda	14
Figura 6: Equilíbrio do Modelo IS-LM	15
Figura 7: Diagrama de Bloco do Mercado de Bens com ajuste dinâmico.....	16
Figura 8: Diagrama de Blocos do Mercado de Moeda com ajuste dinâmico	17
Figura 9: Diagrama de Blocos do Modelo IS-LM com ajuste dinâmico.....	17
Figura 10: Modelo IS-LM com a malha de controle aplicada	19
Figura 11: Comportamento de m_0 na Simulação 1.....	23
Figura 12: Simulação 1 – Teste do modelo com entrada degrau na Oferta de Moeda	24
Figura 13: Simulação 2 – Trajetória de Y para diferentes valores de β	24
Figura 14: Simulação 2 – Trajetória de r para diferentes valores de β	25
Figura 15: Simulação 3 – Valores de β para diferentes valores de p	26
Figura 16: Simulação 3 – Trajetoria de Y para diferentes valores de p	27
Figura 17: Trajetória de r para diferentes valores de p	27
Figura 18: Simulação 4 – Valores de β para cada p utilizado.	28
Figura 19: Simulação 4 – Trajetória de Y para β constante e controlado	28

Figura 20: Simulação 4 – Trajetória de r para β constante e controlado	29
Figura 21: Simulação 4 – Trajetória de Y para β constante e controlado (focado).....	29
Figura 22: Comportamento de m_0 na Simulação 5.....	31
Figura 23: Simulação 5 – Valores de β para cada p utilizado	31
Figura 24: Simulação 5 – Trajetória de Y para β constante e controlado	32
Figura 25: Simulação 5 – Trajetória de r para β constante e controlado.....	32
Figura 26: Simulação 5 – Trajetória de Y para β constante e controlado (focado).....	33
Figura 27: Comportamento de m_0 na Simulação 6.....	34
Figura 28: Simulação 6 – Valores de β para cada p utilizado	35
Figura 29: Simulação 6 – Trajetória de Y para β constante e controlado	35
Figura 30: Simulação 6 – Trajetória de r para β constante e controlado.....	36
Figura 31: Ajuste da Equação de Consumo para os dados reais.....	38
Figura 32: Ajuste da Equação de Investimento Privado para os dados reais.....	38
Figura 33: Ajuste do Mercado de Moeda para os dados reais	39
Figura 34: Ajuste do Mercado de Moeda para os dados reais (outro ângulo)	40
Figura 35: Simulação de Y para β constante e controlado, comparado com os dados reais	40
Figura 36: Simulação de r para β constante e controlado, comparado com os dados reais	41

Lista de Tabelas

Tabela 1: Relação entre famílias e firmas	9
Tabela 2: Exemplo do cálculo do PIB	9
Tabela 3: Valores utilizados Na Simulação 1	22
Tabela 4: Tempos de estabilização da Simulação 4	30
Tabela 5: Tempos de destabilização para a Simulação 5	34
Tabela 6: Tempos de destabilização para a Simulação 6	37

Lista de Siglas

IS-LM	Investment/Saving – Liquidity/Money
PIB	Produto Interno Bruto
Selic	Sistema Especial de Liquidação e Custódia no Brasil

Lista de Símbolos

$D(t)$	Demanda agregada [R\$]
$Y(t)$	Renda total [R\$]
G	Gasto governamental [R\$]
t_1	Imposto de renda [-]
$Y_d(t)$	Renda total disponível [R\$]
a	Demanda autônoma [R\$]
b	Propensão marginal ao consumo [-]
$C(t)$	Consumo das famílias [R\$]
I	Investimento Privado [R\$]
r	Taxa de juros [%]
h	Elasticidade do investimento a taxa de juros [R\$]
I_0	Investimento autônomo [R\$]
$m_d(t)$	Demanda por moeda [R\$]
k	Elasticidade da moeda a renda [-]
u	Elasticidade da moeda a taxa de juros [R\$]
$\dot{Y}(t)$	Derivada temporal da renda total [R\$/ano]
α	Coefficiente de ajuste do mercado de bens [-]
$\dot{r}(t)$	Derivada temporal da taxa de juros [1/ano]
β	Coefficiente de ajuste o mercado de moeda [1/R\$.ano]
m_0	Oferta de moeda [R\$]
K_p	Ganho proporcional [1/R\$]

Sumário

1. Introdução	1
2. Revisão bibliográfica	3
3. Fundamentação teórica	8
4. Metodologia	20
5. Resultados e discussão	22
6. Considerações finais	42
Referências.....	44
Apêndice A – Dados macroeconômicos do Brasil para o período de 2010 a 2019.....	47
Anexo A – Script do Matlab utilizado para a simulação	48
Anexo B – Modelos utilizados no SIMULINK	58

1. Introdução

No mundo real, a política monetária é uma ferramenta que afeta as decisões de consumo de famílias e firmas. O Banco Central, independentemente do governo, determina a política monetária de um país, causando efeitos em diversos aspectos da economia, como no grau de investimento privado, demanda por moeda e bens, nível de renda, entre outros (BEGG, VERNASCA, *et al.*, 2014). Nesse contexto, é importante criar uma intuição robusta sobre o funcionamento de tais políticas, para possibilitar aplicá-las com maior efetividade. Para criar tal intuição, entender o comportamento e as trajetórias temporais dos parâmetros relevantes é essencial.

Entretanto também é importante reconhecer que o mundo real é complexo demais. E para ser capaz de descrevê-lo de maneira inteligível, tem-se de decidir quais características considerar e quais ignorar (FELÍCIO, 2010). Então, primeiramente faz-se uso do conceito de sistema, que é uma forma de descrever um conjunto de interações entre componentes, cujas fronteiras são definidas arbitrariamente pelo analista de acordo com a hipótese a ser testada. As margens escolhidas determinam quais interações entre componentes serão estudadas e quais serão consideradas como externas à análise. Esta etapa fundamental na seleção do sistema irá determinar sua complexidade, suas condições de validade e seu grau de detalhamento. Emprega-se um sistema dinâmico, portanto, afim de testar uma hipótese relacionada a variação de grandezas em função do tempo.

Entretanto, um sistema dinâmico observado ao longo do tempo, porém sem atuação, está fadado a se comportar independente da intenção e da vontade humana. Dito isso, o ser humano emprega o conceito de sistemas de controle desde 300 a.C., quando na Grécia contavam com boias para atingir o nível pretendido de fluidos de forma automática. Um sistema de controle é uma interconexão entre componentes formando uma configuração de sistema que produzirá uma resposta desejada (DORF e BISHOP, 2001). Portanto, assim como James Watt utilizou essa prática para regular a quantidade de vapor admitida no cilindro de uma máquina mantendo-a sempre trabalhando na velocidade desejada (OGATA, 1982), este trabalho procurou utilizar essa mesma prática para regular o ajuste da taxa de juros de um país, buscando estabilizar o seu PIB sempre no menor período de tempo.

Assim como a máquina a vapor de Watt, a economia precisa ser modelada como um sistema, para que a malha de controle possa ser aplicada, e adicionalmente precisa ser

modelada como um sistema dinâmico, para que se possa controlar o comportamento de grandezas ao longo do tempo. Felizmente, o estudo econômico, que por muito tempo foi dominado pela estatística comparativa, tem voltado seu foco à análise dinâmica, devido as necessidades atuais de maior previsibilidade para sistemas cada vez mais complexos (SHONE, 2002). Então, delimita-se os componentes da análise, definindo os agentes econômicos relevantes a nível macroeconômico (famílias, investidores privados, governo) e também as interações entre os componentes baseadas nas transmissões monetárias, além de optar-se por restringir o escopo do estudo a nível nacional, considerando qualquer interação entre nações, externas à análise. Assim, ao levar em consideração a variação temporal das interações entre os componentes, obtém-se um sistema dinâmico.

Dentro deste sistema escolhido para análise, a taxa de juros é o parâmetro utilizado para a definição da política monetária, que por sua vez tem como objetivo estabilizar a produção do país em sua capacidade máxima (BEGG, VERNASCA, *et al.*, 2014). Entretanto os modelos convencionais prevêm o ajuste da taxa de juros de forma pré-definida, desse modo, este trabalho busca aproveitar esta oportunidade para aplicar uma malha de controle realimentada que incorpore outros parâmetros do modelo na decisão do ajuste da taxa de juros, buscando assim uma maior eficiência no tempo de estabilização do PIB.

Mesmo sem a possibilidade de criar-se um atuador que automaticamente regule a taxa de juros para obter sempre o resultado esperado, assim como é feito em outros sistemas de engenharia, ainda é possível utilizar o conceito do sistema de controle para realizar uma análise do sistema dinâmico e assim buscar um melhor conhecimento do mundo real. Assim se fortalece a intuição dos agentes econômicos em relação aos frutos de suas interações e propicia-se a compreensão das melhores práticas a serem tomadas afim de incrementar o bem-estar geral de uma nação.

2. Revisão bibliográfica

Para a execução deste estudo, realizou-se primeiramente a busca pela bibliografia relevante para o entendimento das pesquisas focadas no Modelo IS-LM e posteriormente buscou-se pesquisas voltadas para controles dinâmicos de outros modelos macroeconômicos.

Apresenta-se a revisão bibliográfica feita a respeito do Modelo IS-LM na subseção 3.1 e posteriormente apresenta-se a revisão bibliográfica a respeito de demais malhas de controles aplicadas em outros modelos macroeconômicos na subseção 3.2, e finalmente na subseção 3.3 conclui-se sobre a revisão bibliográfica realizada.

2.1. Modelo IS-LM

Keynes (1996) desenvolveu em seu livro, a base para o modelo que se utiliza neste trabalho. Ele propôs o que chamou de *Teoria Geral do Emprego, do Juro e da Moeda*, onde argumenta que a teoria macroeconômica existente e amplamente difundida até então se aplicava apenas a um caso especial, e não ao caso geral. Assim, Keynes faz uso de fundamentos empregados na análise de mercados individuais para conceber uma análise agregada dos mercados, ou seja, para estabelecer paralelos entre a poupança e o investimento com o nível da renda e da demanda, inserir o papel da moeda no modelo, ressaltando a influência da taxa de juros nos dois primeiros e evidenciar a importância do governo em sustentar choques de demanda.

Em seguida Hicks (1937) propôs uma primeira abordagem do modelo IS-LM com base no trabalho de Keynes. Inspirado na comparação entre a Teoria Geral e a teoria clássica, ele justificou o desequilíbrio causado pelo excesso de demanda e oferta através de um equilíbrio geral de mercados formados por um sistema de equações simultâneas. Possibilita então, criar um sistema que compreendesse três mercados: moeda, capital e bens, e que estes dependessem das mesmas variáveis, viabilizando sua representação em um mesmo plano cartesiano e facilitando a análise do equilíbrio, sendo este a intersecção das curvas.

Embora tenha-se estabelecido o conhecimento de que o modelo de Hicks (1937), possui inconsistências lógicas e mesmo após ter sido criticado por diversos autores proeminentes, este continua sendo um dos mais utilizados em livros na graduação para o ensino de macroeconomia tanto para análises empíricas quanto teóricas devido à sensibilidade com que retrata investigações macro e monetárias (MCCALLUM e NELSON,

1997). Entretanto, as pesquisas relacionadas ao modelo IS-LM focaram durante anos na explicação dos ciclos econômicos através de choques aleatórios ao sistema e posteriormente fazendo uso de equações não lineares como em Goodwin (1951), Smith (1980), Schinasi (1981) e Schinasi (1981).

Apenas Varian (1993) começa de fato com as simulações computacionais de modelos financeiros e econômicos, e em Shone (2002) temos a simulação dinâmica computacional do modelo IS-LM proposto. Neste último é construída uma base matemática necessária para seu entendimento, assim como também concebe as hipóteses que permitem definir as condições de validade do sistema. Verifica-se o foco na análise da trajetória das variáveis relevantes permitindo assim um entendimento do ajuste dos mercados através dos parâmetros definidos. Estes que são considerados constantes em seu livro, e a depender do valor definido inicialmente, tem-se um determinado comportamento dinâmico do sistema e conseqüentemente uma determinada velocidade de estabilização para diferentes choques.

Yuan (2009) aplicou a mesma simulação do modelo IS-LM para a realidade do Brasil e dos EUA entre o período de 1990 e 2008. Em seu trabalho realizou o ajuste das equações do sistema para os dados econômicos publicados por órgãos oficiais da época. Nele verificou empiricamente que as equações utilizadas na formação dos Mercados de Bens e Moeda possuem alto grau de representatividade da situação dos dois países para os dois períodos estudados. Porém também avaliou que por mais que a base teórica e o formato de trajetória de ajuste fossem consistentes, devido as simplificações feitas, os valores de equilíbrio do sistema se distanciavam da realidade.

Mais recentemente, as pesquisas relacionadas ao modelo IS-LM, têm focado no impacto do atraso temporal nas expectativas dos agentes econômicos como em Lujun e Yaqiong (2008), Hidayati, Apriliani e Usadha (2019), Matsumoto e Szidarovsky (2013), Sportelli, Binetti e Cesare (2014) e Riad, Hattaf e Yousfi (2018).

Visto que o modelo IS-LM apresenta bases teóricas consistentes, e que representa com fidelidade questões macroeconômicas relevantes, como por exemplo o formato da trajetória de ajuste dos mercados, é desejável expandir a intuição em relação ao comportamento deste, buscando maior entendimento para casos onde o parâmetro de ajuste do mercado de moeda não é constante. Isso oportuniza a aproximação da análise teórica às

questões relacionadas a prática e busca-se aumentar a efetividade de diferentes políticas monetárias.

Segundo Hall e Lieberman (2003) um modelo não tem como objetivo ser idêntico a realidade, mas sim representar o mundo real por meio de uma abstração. Ou seja, seu intuito é extrair algo do mundo real que nos ajude a entender como ele funciona. E para isso, este trabalho busca complementar os trabalhos de Shone (2002) e Yuan (2009) propondo um ajuste monetário proporcional ao ajuste do mercado de bens, lançando uso de técnicas de controle para avaliar como essa prática pode auxiliar na escolha de políticas monetárias.

2.2. Controle de outros modelos macroeconômicos

De acordo com a revisão bibliográfica feita, as pesquisas relacionadas a sistemas de controles aplicados em modelos macroeconômicos têm características semelhantes entre si e divergem do intuito deste trabalho.

Nos trabalhos revisados, utiliza-se principalmente modelos macroeconômicos com equações não-lineares, com comportamento caótico e compostos por Equações Diferenciais Parciais. Chen (2006) por exemplo, investiga o comportamento caótico de um sistema financeiro não-linear através de métodos matemáticos e sugere o controle do sistema através do método de *feedback* de *Pyragas*. Um sistema apresenta comportamento caótico quando as trajetórias assumidas pelas variáveis são altamente sensíveis a pequenas variações das condições iniciais e como muitos modelos financeiros e macroeconômicos apresentam essas características, um melhor entendimento deste comportamento mostra-se relevante. Uyaaroglul, Temel e Kirlioglu (2012) de forma semelhante procuram um melhor entendimento do comportamento de um sistema financeiro caótico definido por equações não lineares, e usam o controle de *feedback* para atingir a estabilidade do mesmo.

Chian, Rempel e Rogers, (2005) procuram explicar através da teoria de atratores e de comportamentos de multiestabilidade os ciclos econômicos observados nos sistemas macroeconômicos, que por muito tempo foram tratados como exernos ao modelo. Ding, Yang e Yao (2009) também tentam caracterizar o tipo de comportamento caótico de um sistema macroeconômico complexo, e posteriormente utilizam o controle retroativo para estabilizar este sistema caótico.

Finalmente Ma e Chen (2001) e Emiroglu, Uyaroglu e Koklukaya (2012) investigam o impacto dos parâmetros de um sistema financeiro não-linear no seu comportamento caótico. Posteriormente com o intuito de controlar o sistema, Emiroglu, Uyaroglu e Koklukaya (2012) projetam um controlador passivo que transforma o comportamento caótico do sistema em comportamento estável.

2.3. Posicionamento do trabalho frente a literatura

Percebe-se que no tema deste trabalho, que é utilizar ferramentas matemáticas, mais especificamente ferramentas de engenharia, para adquirir conhecimento sobre modelos outras áreas de atuação, mais especificamente da economia, há duas linhas de pesquisa divergentes, e que abrem espaço para o estudo realizado por este trabalho.

De um lado, têm-se as pesquisas relacionadas ao Modelo IS-LM, que é um modelo macroeconômico simples, amplamente difundido e que por sua fácil compreensão é uma ferramenta poderosa para fornecer intuição a agentes econômicos. Estas estão focadas em dois temas principais, que são a explicação dos ciclos econômicos através deste modelo, e a busca por considerações de ajuste dos mercados que forneçam resultados mais próximos dos reais para as simulações deste modelo.

Porém não há pesquisas relacionadas ao Modelo IS-LM que foquem em fortalecer o entendimento matemático desse sistema mais simples, para aumentar a intuição que pode ser carregada para sistemas mais complexos.

De outro lado, têm-se as pesquisas relacionadas a sistemas financeiros complexos, não-lineares, que apresentam comportamento caótico, e que dificilmente produzem conclusões que sejam aplicáveis. Estas pesquisas focam-se no entendimento da matemática por trás de tais sistemas caóticos, e busca-se controlar essa caoticidade utilizando sistemas de controle para consolidar o conhecimento adquirido.

Porém não há pesquisas que traduzam este entendimento matemático avançado de sistemas financeiros complexos para intuição e conhecimento que possa ser utilizado no dia a dia na prática pelos agentes econômicos.

Frente a isto, este trabalho busca estabelecer-se em um terreno intermediário, pois propõe aumentar o entendimento matemático de um modelo simples para que esse

conhecimento possa prontamente servir de baliza para as atitudes tomadas por agentes economicos diversos.

3. Fundamentação teórica

A macroeconomia é o estudo da economia como um sistema. Para a análise macroeconômica, o foco é a interrelação entre os grandes problemas que afetam a economia – como crescimento econômico, inflação, desemprego, flutuações e crises (BEGG, VERNASCA, *et al.*, 2014). Dentro das possíveis modelagens existentes para sistemas econômicos, neste trabalho utilizou-se a do tipo *Investment/Saving-Liquidity/Money* (IS-LM). Isto se deve ao fato do mesmo ser focado na análise do sistema dinâmico, optando-se assim pelo sistema mais simples que minimamente compreendesse as variáveis relevantes para o estudo.

Na seção 2.1 explica-se o modelo matemático IS-LM: primeiramente desenvolve-se o raciocínio para a formação das equações que definem os dois mercados relevantes (de Bens e de Moeda), e em seguida faz-se as considerações de ajuste dinâmico dos mesmos. Na seção 2.2 explica-se como uma malha de controle pode ser aplicada no modelo em questão.

3.1. Modelo matemático IS-LM

A economia é um conjunto de milhões de unidades econômicas individuais: governos, firmas e famílias nacionais e estrangeiras. O agregado de suas decisões individuais determina o total de gasto, de receita e de produção do sistema.

Para esse modelo considera-se algumas hipóteses simplificadoras, afim de delimitar a abrangência do estudo, e padronizar o comportamento esperado dos agentes individuais. As hipóteses adotadas são as seguintes:

- O país a ser estudado é uma economia fechada, ou seja, não realiza comércio exterior;
- Os agentes econômicos sempre tomam decisões racionais, ou seja, os indivíduos levam em conta todas as informações disponíveis para tomar a decisão que mais lhes interesse;
- Como as variações do gasto governamental em economias reais são muito pequenas quando comparados com os montantes totais, considera-se os gastos governamentais constantes no tempo.

Em uma economia fechada, as famílias são as donas dos fatores de produção como terras, ferramentas, máquinas, e demais insumos convenientes as firmas. As famílias também,

em troca de salários, alugam seu tempo de trabalho para as firmas. E as famílias são efetivamente as donas das firmas e de seus lucros. Isso é resumido na Tabela 1 abaixo.

Tabela 1: Relação entre famílias e firmas

Famílias	Firmas
Fornece insumos para as firmas	Usa os insumos para produzir
Recebe renda das firmas	Consome insumos das famílias
Compra produtos das firmas	Vende produtos para as famílias

Fonte: Begg, Vernasca, et al. (2014)

A partir das relações observadas entre as firmas e famílias de um país, determina-se três maneiras equivalentes de medir o Produto Interno Bruto (PIB) de uma nação: o valor de todos os bens e serviços produzidos, o valor total de renda pelos insumos ofertados $Y(t)$ [R\$] e o valor total consumido de bens e serviços $D(t)$ [R\$]. Na Tabela 2 exemplifica-se as três modalidades de calculo para o PIB.

Tabela 2: Exemplo do cálculo do PIB

Produto	Vendedor	Comprador	Valor da transação	Valor agregado	Consumo de produtos finais	Renda das famílias
Aço	Produtor de aço	Fabricante de máquinas	R\$1000	R\$1000	-	R\$1000
Aço	Produtor de aço	Fabricante de carro	R\$3000	R\$3000	-	R\$3000
Máquina	Fabricante de máquinas	Fabricante de carros	R\$2000	R\$1000	R\$2000	R\$1000
Carro	Fabricante de carros	Famílias	R\$5000	R\$2000	R\$5000	R\$2000
Valor total de transação			R\$11000			
PIB				R\$7000	R\$7000	R\$7000

Fonte: Begg, Vernasca, et al. (2014)

A principal variável a ser analisada no sistema econômico proposto, e, conseqüentemente, o foco do sistema de controle é o PIB. Como pode observar-se na tabela acima, ele representa a renda total de uma nação, que se dividida pelo número de habitantes, indica a renda média de um agente econômico, e, portanto, reflete diretamente a sua qualidade de vida. Também se verifica que ele representa a quantidade de bens e serviços produzidos por uma nação, ou seja, retrata o nível de acúmulo de capital, e conseqüentemente é um indicador de produtividade e conforto. Por isso a busca pelo incremento desse indicador é relevante tanto por um ponto de vista político, como social (BLANCHARD e JOHNSON, 2013).

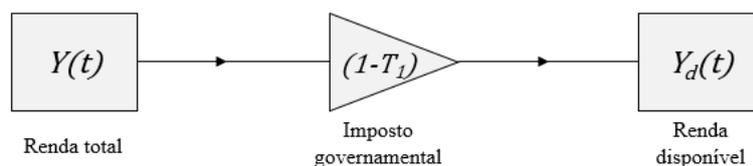
Mas as famílias e as firmas não são os únicos setores da economia, e assim introduz-se o conceito de governo. O governo é um componente do sistema que gera receita através dos impostos aplicados nas famílias e firmas, direcionando esse dinheiro recolhido para o consumo G [R\$] de bens e serviços que são relevantes e devem estar disponíveis a toda a população, como segurança pública, saúde, ensino, etc (BEGG, VERNASCA, *et al.*, 2014).

Assim, apresenta-se o conceito de renda disponível $Y_d(t)$ [R\$] que é o montante remanescente da renda das famílias $Y(t)$ após o imposto governamental T_1 [-] ser aplicado como mostra a Equação 1:

$$Y_d(t) = (1 - T_1)Y(t) \tag{1}$$

O imposto governamental T_1 é sempre uma porcentagem da renda das famílias e dessa maneira pode assumir valores entre 0 e 1. Expõe-se essa relação através de um esquema de Diagrama de Blocos na Figura 1:

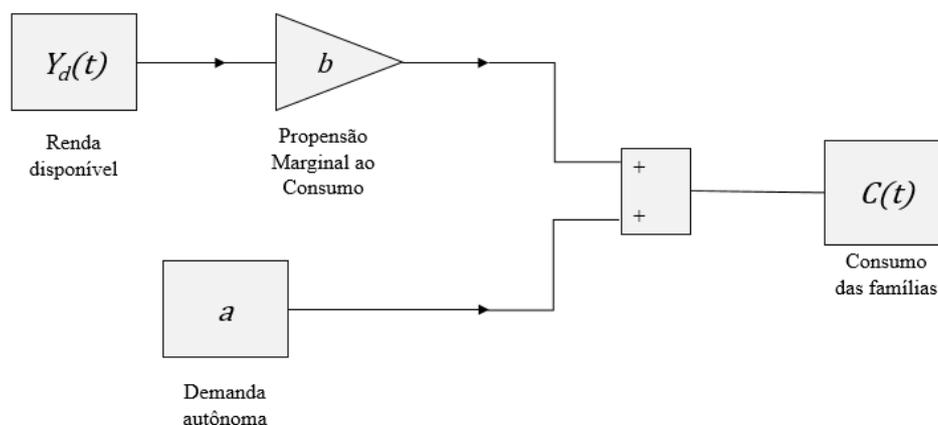
Figura 1: Diagrama de blocos da equação da Renda Disponível



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Em seguida, procura-se estabelecer uma relação entre a renda disponível e o consumo das famílias através da Função de Consumo $C(t)$. Esta é determinada parcialmente pela Demanda Autônoma a [R\$] que representa o consumo que seria realizado pelas famílias mesmo que não possuíssem renda, ou seja, pode ser entendido como o consumo mínimo necessário para a sobrevivência. E parcialmente determinada pela Propensão Marginal ao Consumo b [-], que reflete a parcela da renda disponível que será convertida em consumo, em contraste com a parcela que será poupada. Essa relação é representada esquematicamente na Figura 2: *Diagrama de blocos da equação de Consumo das Famílias*:

Figura 2: Diagrama de blocos da equação de Consumo das Famílias



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Assim, obtem-se a seguinte equação:

$$C(t) = a + bY_d(t) \quad (2)$$

Sendo que a Propensão Marginal ao Consumo assume valores entre 0 e 1, por representar uma porcentagem da Renda Disponível.

O último componente relevante para a análise do Mercado de Bens é o Investimento Privado $I(t)$ [R\$]. Este é proveniente do dinheiro poupado pelas famílias, que posteriormente é investido como forma de buscar renda adicional. Na Tabela 2 acima, percebe-se que a renda total das famílias é de R\$7000, porém apenas R\$5000 são gastos na compra do carro. Os demais R\$2000 são aplicados em ações do fabricante de carros, que por sua vez, com o dinheiro do investimento, compram máquinas para possibilitar o beneficiamento da matéria prima, vendem o produto manufaturado, e distribuem o dividendo aos investidores (última coluna da tabela).

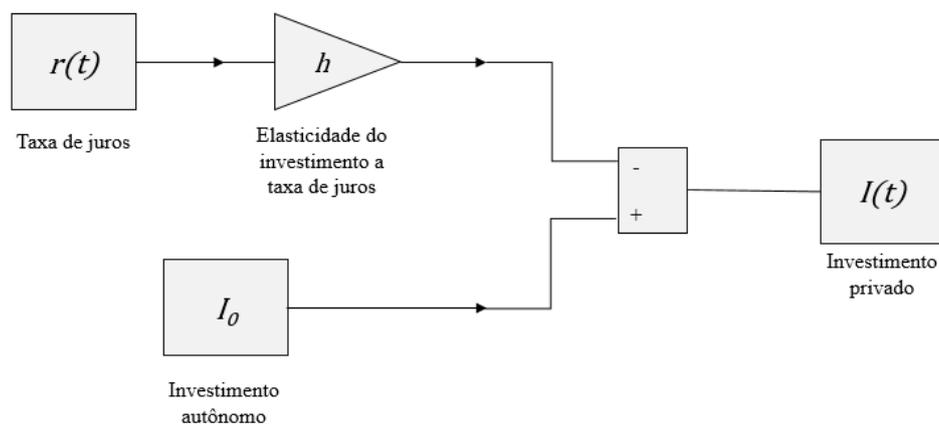
Aqui também é necessário introduzir o conceito de taxa de juros r [-]. Essa taxa é a porcentagem que diz qual será o valor a ser pago por um agente econômico que pega dinheiro emprestado, para o agente econômico que empresta. A taxa de juros (chamada de Sistema Especial de Liquidação e Custódia no Brasil, ou taxa Selic) representa os juros básicos de uma nação, e, portanto, influenciam todos os juros praticados no país. Ela equivale a taxa média registrada nas operações feitas pelo Banco Central para a negociação de seus títulos públicos (BLANCHARD e JOHNSON, 2013). Considerando agentes econômicos racionais, é possível relacionar a taxa de juros com o montante de Investimento Privado, pois quanto maior o retorno esperado por um investimento seguro em um título público, menor o valor que se deseja investir em empresas privadas cujo risco é maior.

Assim cria-se um ganho denominado Elasticidade do investimento a taxa de juros h [R\$], que tem a função de modelar o relacionamento inversamente proporcional das variações da taxa de juros com variações da quantia de Investimento Privado. Além disso, estipula-se um investimento autônomo I_0 [R\$] que é a quantia a ser investida independente da taxa de juros, ou seja, o investimento que seria feito pelas famílias e firmas mesmo se a taxa de juros fosse zero. Assim obtém-se a Equação 3:

$$I(t) = I_0 - hr(t) \tag{3}$$

Representa-se a Equação 3 através de um esquema de Diagramas de Blocos na Figura 3:

Figura 3: Diagrama de Blocos da equação do Investimento Privado

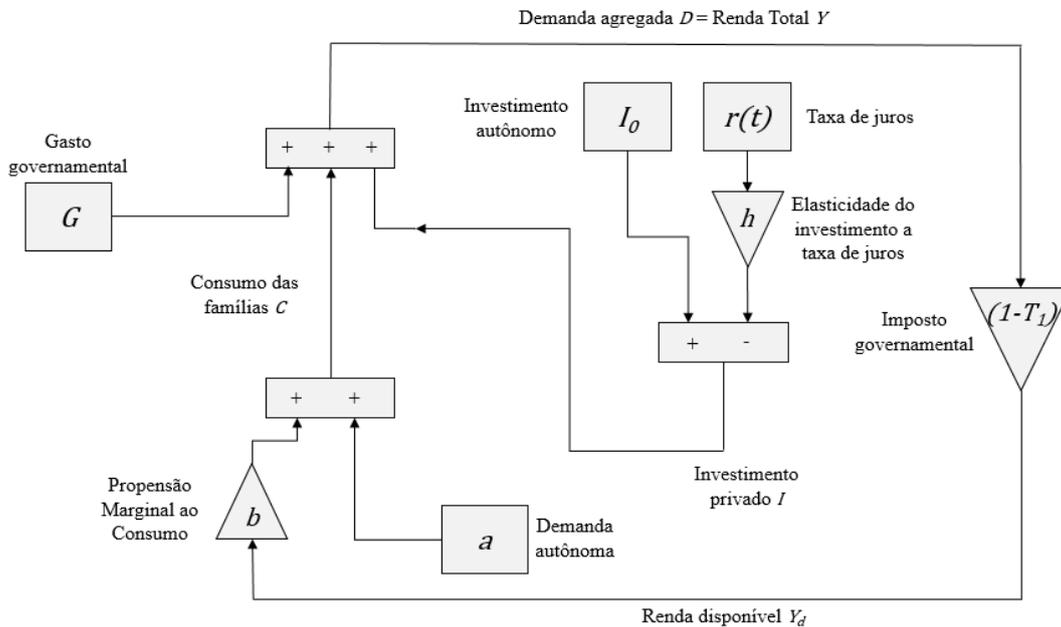


Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Com isso têm-se todos os componentes necessários para formar o Mercado de Bens em uma economia fechada. Como considerou-se o Gasto Governamental constante, este

mercado funciona como um fluxo circular apresentado através do Diagrama de Blocos da Figura 4:

Figura 4: Fluxo circular simplificado de uma economia fechada



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Então tem-se para o mercado de bens a seguinte equação:

$$D(t) = C(t) + I(t) + G \quad (4)$$

Em seguida apresenta-se o Mercado de Moeda. A característica crucial de uma moeda é ser aceita como um meio de trocas (BEGG, VERNASCA, *et al.*, 2014). Alguns dos motivos para que ela seja aceita são: transações tornam-se mais fáceis e mais baratas e possibilita-se o armazenamento de valor por tempo indefinido (não é perecível). Assim agentes econômicos individuais demandam por moeda $m^d(t)$ [R\$] devido ao seu poder de compra de bens. Portanto para determinar a demanda por moeda de uma nação é necessário traçar um paralelo com o Mercado de Bens. Isso é feito através do ganho k [-] que representa a elasticidade da moeda a renda e modela essa relação. Quanto maior a renda de uma população, maior sua demanda por bens, portanto tem-se que a renda é diretamente proporcional a demanda por moeda.

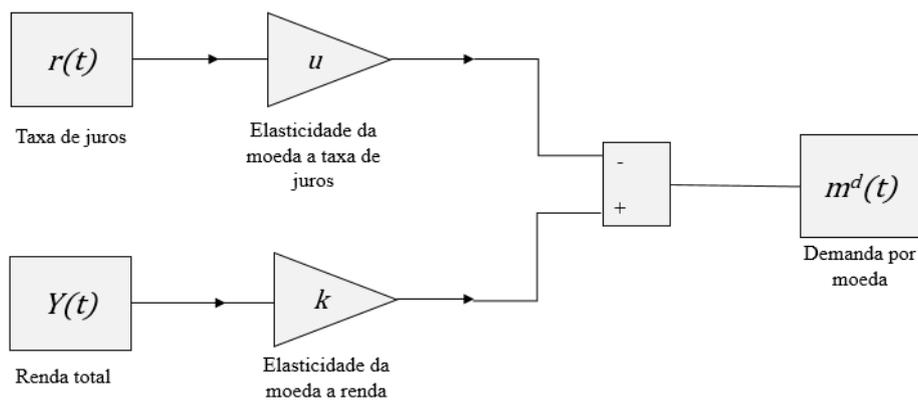
A taxa de juros também apresenta influência na demanda por moeda. Quanto menor a taxa de juros de uma nação, menor o retorno obtido em investimentos seguros como títulos públicos e conseqüentemente maior a procura por investimentos privados mais arriscados e

de maior retorno. O inverso também é válido. Uma nação com maior investimento privado, demanda maior quantidade de moeda para poder comprar maquinários, terras, e infraestrutura em geral (BLANCHARD e JOHNSON, 2013). Uma nação com um investimento privado reduzido devido ao aumento da taxa de juros terá mais dinheiro investido na forma de títulos públicos, necessitando assim de menos moeda em circulação. Isso significa que a taxa de juros apresenta um comportamento inversamente proporcional a demanda por moeda. Isso é modelado através da elasticidade da moeda a taxa de juros u [R\$], que é um ganho que relaciona os dois valores. Obtem-se a Equação 5 do Mercado de Moeda:

$$m^d(t) = kY(t) - ur(t) \quad (5)$$

Representa-se esquematicamente através de Diagramas de Blocos o Mercado de Moeda na Figura 5.

Figura 5: Diagrama de blocos da equação do Mercado de Moeda



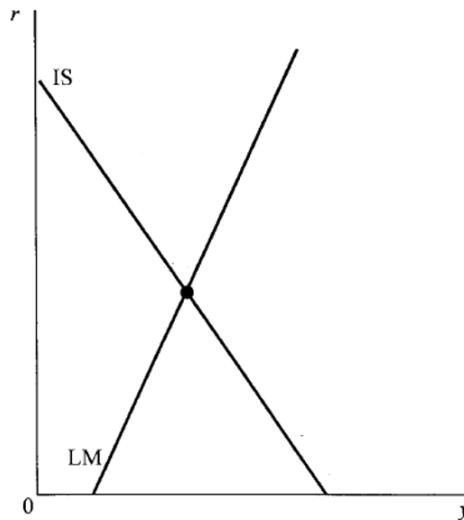
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Com isso, tem-se os dois sistemas de equações que representam o Mercado de Bens e o Mercado de Moeda, os quais constituem o modelo IS-LM. Com o Sistema de Equações 6 linear e estático, é possível então determinar o equilíbrio do modelo, visto que há apenas um ponto onde tem-se o cruzamento das duas funções (Figura 6).

$$\begin{cases} D(t) = I_0 + a + G - hr(t) + (1 - T_1)bY_d(t) \\ m^d(t) = kY(t) - ur(t) \end{cases} \quad (6)$$

Entretando, para tornar o sistema dinâmico, é necessário fazer algumas considerações sobre como acontece o ajuste dos dois mercados ao longo do tempo.

Figura 6: Equilíbrio do Modelo IS-LM



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

No caso do Mercado de Bens, assume-se que a renda se ajusta de acordo com o excesso de demanda. Embora os parâmetros renda total e demanda agregada representem uma mesma característica do sistema, assim como observado na Figura 4, os dois valores serão iguais apenas no equilíbrio. Isso acontece devido às diferenças temporais existentes entre o momento que os bens são demandados e o momento que a renda é efetivamente recebida. Portanto para um mesmo período t , renda e demanda agregada serão iguais apenas quando o sistema se encontra em equilíbrio. Para modelar essa relação, utiliza-se o ganho de ajuste do mercado de bens α [-], que pondera o quão rápido o mercado de bens se adequa ao desequilíbrio. Assim obtém-se a primeira equação diferencial do modelo e o seu primeiro ajuste dinâmico:

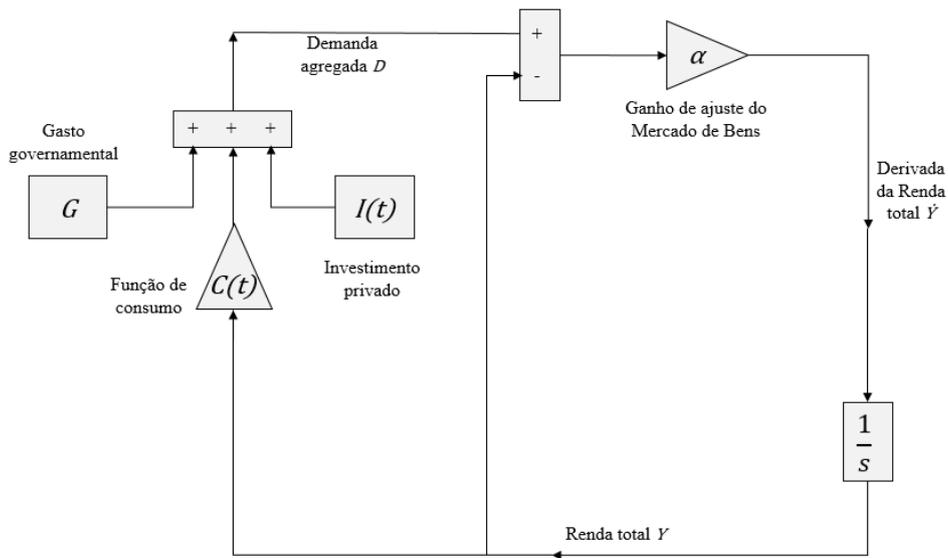
$$\dot{Y}(t) = \alpha(D(t) - Y(t)) \quad (7)$$

Substituindo as Equações 1, 2 e 3 na Equação 7 obtém-se:

$$\dot{Y}(t) = \alpha[b(1 - t_1) - 1]Y(t) - \alpha hr(t) + \alpha a + \alpha G \quad (8)$$

O Mercado de Bens com seu ajuste dinâmico definido acima é representado através do Diagrama de Blocos da Figura 7.

Figura 7: Diagrama de Bloco do Mercado de Bens com ajuste dinâmico



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Já para o Mercado de Moeda, assume-se que o ajuste acontece na taxa de juros de acordo com o excesso de demanda. Para isso, considera-se uma oferta inicial de moeda m_0 [R\$], e um ganho de ajuste do mercado de moeda β [1/R\$.ano] que pondera o quão rápido a taxa de juros de adequa ao desequilíbrio. Assim obtem-se a segunda equação diferencial do modelo:

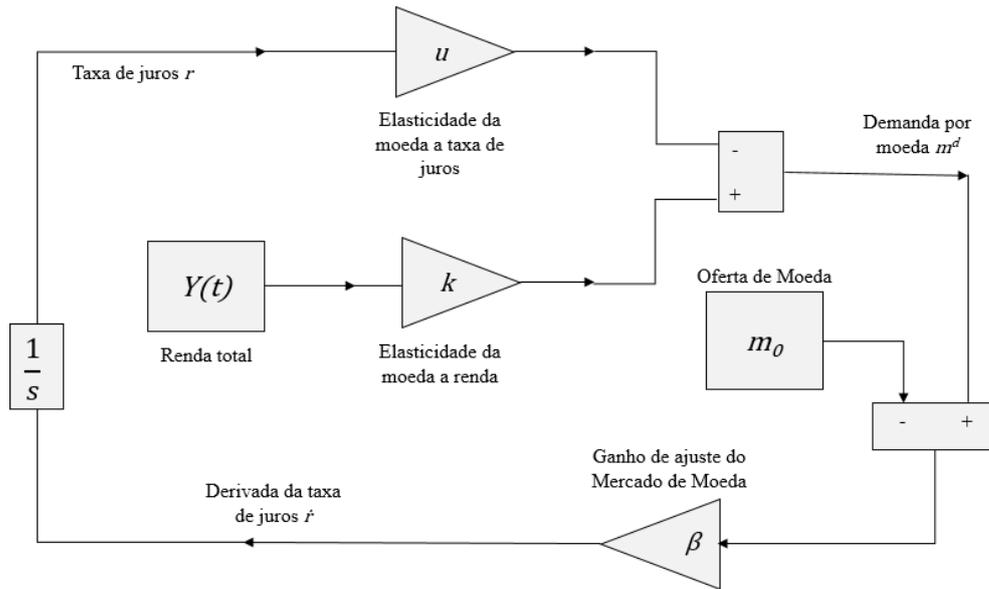
$$\dot{r}(t) = \beta(m^d(t) - m_0) \quad (9)$$

Substituindo a Equação 5 na Equação 8 obtem-se:

$$\dot{r}(t) = \beta kY(t) - \beta ur(t) - \beta m_0 \quad (10)$$

O Mercado de Moeda com seu ajuste dinâmico definido acima é representado pelo Diagrama de Blocos da Figura 8.

Figura 8: Diagrama de Blocos do Mercado de Moeda com ajuste dinâmico



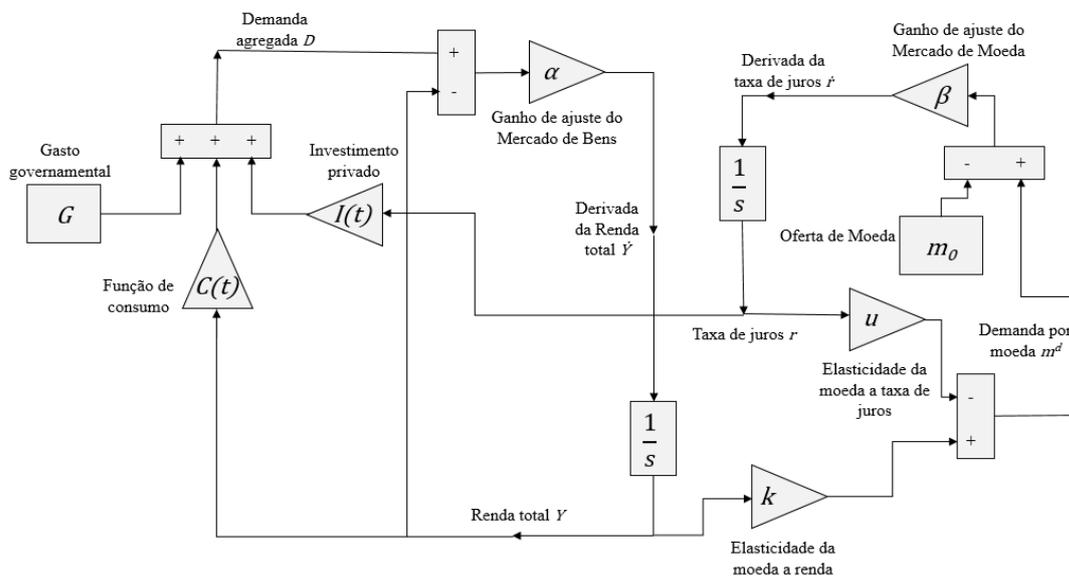
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Finalmente o modelo IS-LM completo com seus ajustes dinâmicos definidos tem a forma da Equação 11:

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = \alpha[b(1 - t_1) - 1]Y(t) - \alpha hr(t) + \alpha a + \alpha G \\ \dot{r}(t) = \beta kY(t) - \beta ur(t) - \beta m_0 \end{cases} \quad (11)$$

Esta é um sistema de equações diferenciais ordinárias, que pode ser representado pelo Diagrama de Blocos da Figura 9.

Figura 9: Diagrama de Blocos do Modelo IS-LM com ajuste dinâmico



3.2. Sistema de controle

Com o ajuste dinâmico dos dois mercados definidos, é possível não só observar o equilíbrio do sistema como também sua trajetória. Esse é o foco da análise em questão, pois pode-se perceber que os parâmetros relevantes para o determinar o equilíbrio, são todos estabelecidos de acordo com características intrínsecas do sistema, que levam longos períodos de tempo para redefinir-se e, portanto, não oferecem margem de controle para os agentes econômicos.

Já o parâmetro do ganho de ajuste do mercado de moeda, reflete a velocidade com que o Banco Central se adequa a desvios do equilíbrio deste mercado. Portanto é um parâmetro cujo controle está sob total domínio de um único agente econômico (Banco Central) e conseqüentemente sua gestão pode ser adaptada conforme a conveniência.

Na literatura este parâmetro é sempre definido como uma constante de valor entre 0 e 1, sendo 0 o ajuste mais lento e 1 o ajuste mais rápido (SHONE, 2002). Assim, este trabalho propõe que o ganho de ajuste do mercado de moeda seja tratado como o atuador da malha de controle do sistema.

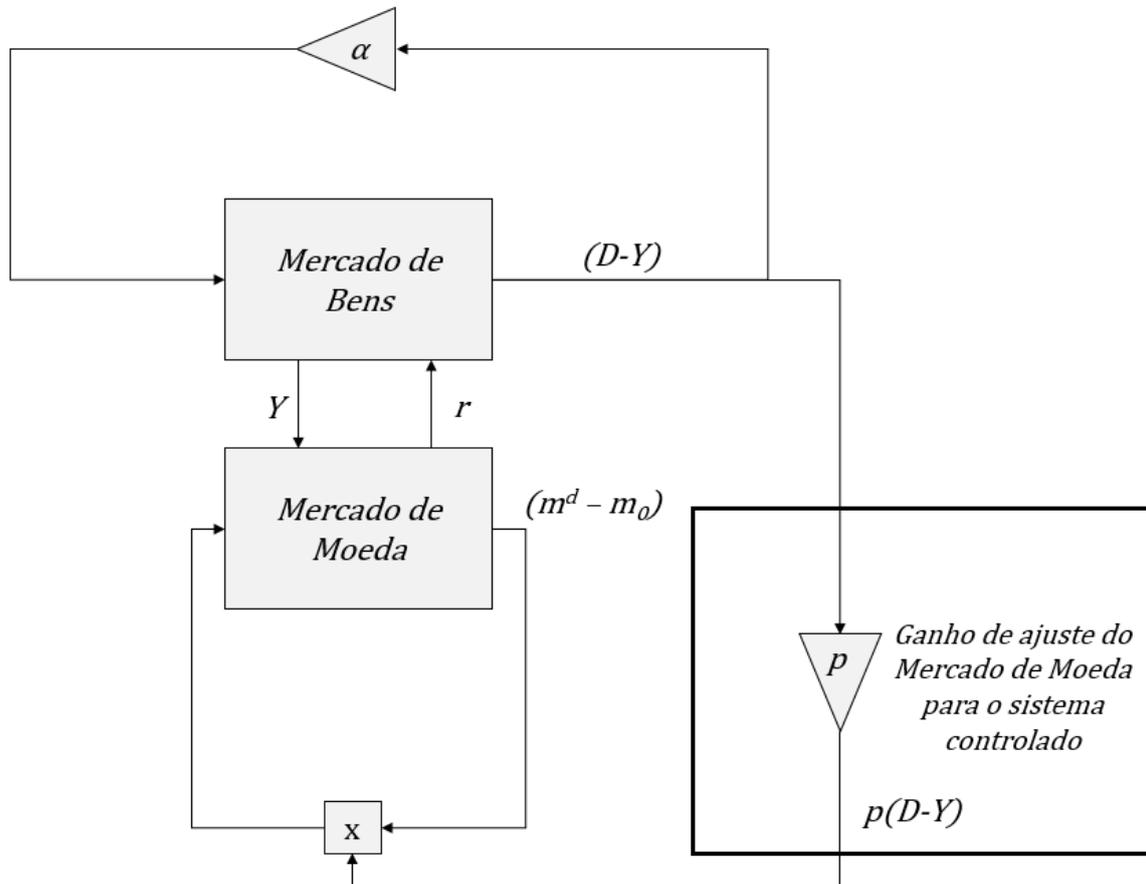
Opta-se por transformá-lo em um ganho proporcional aplicado a diferença entre a Demanda Agregada e a Renda Total, porque assim tem-se a velocidade de ajuste do Mercado de Moeda adequando-se ao nível de desequilíbrio do PIB, e espera-se que assim a trajetória para o equilíbrio seja mais rápida.

O valor de β constante é substituído pela expressão apresentada na Equação 12, onde K_p [1/R\$] é o ganho que ajusta as unidades da diferença entre Demanda Agregada e Renda Total para a unidade da taxa de juros.

$$\beta = K_p(D - Y) \tag{12}$$

O esquema do Modelo IS-LM com a malha de controle aplicada pode ser observado na Figura 10.

Figura 10: Modelo IS-LM com a malha de controle aplicada



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Também o ganho proporcional representa uma lógica inteligível em termos práticos, sendo de fácil entendimento aos agentes econômicos envolvidos, e facilitando assim sua implementação real e também a construção da intuição desejada.

4. Metodologia

Primeiramente para realização do estudo, definiu-se qual o modelo econômico seria utilizado na análise. Essa definição foi feita escolhendo-se o modelo de mais fácil compreensão, ou seja, o que necessita o menor conhecimento prévio sobre teorias econômicas, mas com abrangência dos principais parâmetros relevantes para investigação: Renda Total, Demanda Agregada, Taxa de juros e Demanda por Moeda. Em seguida elegeu-se as considerações feitas para conferir caráter dinâmico ao sistema escolhido. Deu-se preferência às considerações presentes na bibliografia consultada.

Posteriormente implementou-se o modelo dinâmico proposto em um software de simulação computacional (SIMULINK) e com ajuda de um *script* em MATLAB para definição de parâmetros, foram feitos testes de simulações com os valores fictícios replicados da bibliografia, afim de verificar se o sistema foi devidamente implementado.

Depois de garantir o funcionamento do modelo, é realizado um breve estudo a respeito do impacto da variação do valor de ajuste do mercado de moeda na dinâmica do sistema.

Obtendo estes resultados, adaptou-se o modelo (SIMULINK) de modo a incluir a malha de controle proporcional no sistema. Verificou-se o resultado dos tempos para a estabilização com diferentes valores de ganho proporcional e comparou-se com os valores obtidos para o sistema sem o controle aplicado.

Em seguida, simulou-se o sistema com diferentes fontes de instabilidade, como entradas, rampa e senoidal, afim de observar os efeitos e as vantagens do sistema controlado em relação ao sistema com parâmetro de ajuste fixo para cada um dos casos. Isso foi feito observando o comportamento dinâmico, mais especificamente o tempo de ajuste e a existência de *overshooting*.

Por último para complementar as simulações feitas com valores fictícios, utiliza-se os valores retirados do site do IpeaDATA para os parâmetros: Consumo das Famílias, Gasto Governamental, Investimento Privado, Demanda por Moeda, Oferta de Moeda, Taxa de Juros e Renda das Famílias, para o período de 2010 a 2019, e com eles realiza-se um ajuste linear nas equações apresentadas na Fundamentação Teórica para obter os demais parâmetros. É feito o teste R^2 para verificar a qualidade dos ajustes realizados.

Com as equações do modelo ajustadas para os dados reais, foi simulado o Modelo IS-LM sem entradas externas, para observar o tempo levado para atingir o equilíbrio, e assim comparar efetividade da malha de controle e do ganho constante em uma situação próxima a realidade.

5. Resultados e discussão

Para uma melhor compreensão do estudo realizado, divide-se os resultados e discussões em 3 subseções. Na subseção 5.1 realiza-se um estudo inicial do Modelo IS-LM, na subseção 5.2 apresenta-se o estudo do modelo com a malha de controle aplicada, e finalmente, na subseção 5.3 expõe-se uma aplicação com dados reais.

5.1. Estudo inicial do Modelo IS-LM

Primeiramente procura-se validar o modelo computacional, afim de garantir que suas simulações condizem com a fundamentação teórica utilizada. Para isso, utiliza-se valores fictícios encontrados na bibliografia para definir os parâmetros do sistema na Simulação 1. Estes se encontram na Tabela 3.

Tabela 3: Valores utilizados Na Simulação 1

Parâmetro	Valor	Unidade
a	50	Bilhões de R\$
b	$0,75$	-
h	$-1,525$	Bilhões de R\$
k	$0,25$	-
m_0	8	Bilhões de R\$
u	-0.5	Bilhões de R\$
T_1	0.25	-
α	0.1	-
β	0.8	1/ (Bilhões de R\$).Ano
r_0	15	%
Y_0	62	Bilhões de R\$

Fonte: Shone (2002).

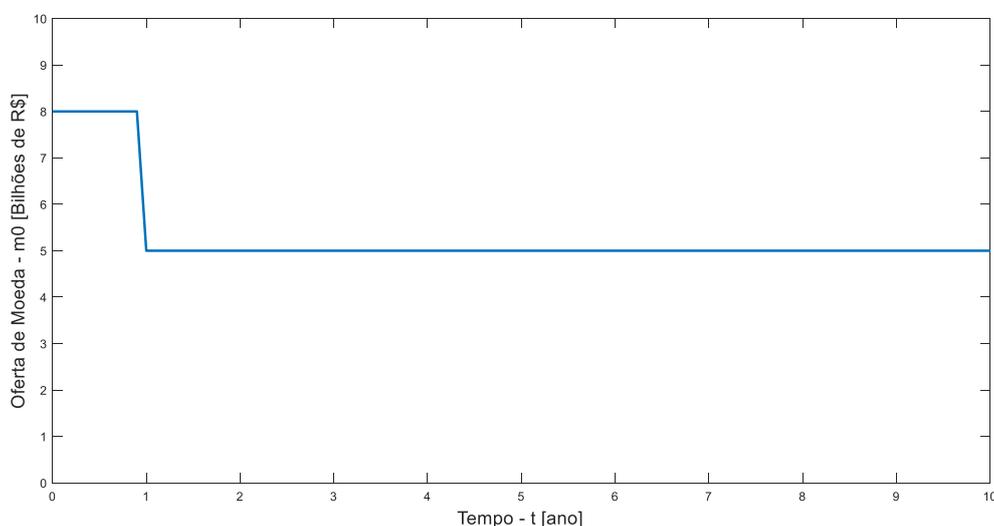
A verificação da representatividade do modelo, é feita simulando uma queda na Oferta de Moeda para $m_0 = 5$. Esta é introduzida no modelo na forma de uma entrada degrau com início no tempo $t = 1$. Os valores de m_0 no período de simulação podem ser vistos na Figura 11.

Espera-se que após a perturbação sofrida pelo sistema, este se estabilize nos seus valores de equilíbrio (Y^* , r^*), que segundo Shone (2002) são dados por:

$$Y^* = \frac{a + \left(\frac{h}{u}\right)m_0}{1 - b(1 - T_1) + \left(\frac{kh}{u}\right)} \quad (13)$$

$$r^* = \frac{-\left(\frac{m_0}{u}\right)(1 - b(1 - T_1)) + \left(\frac{k}{u}\right)a}{1 - b(1 - T_1) + \left(\frac{kh}{u}\right)} \quad (14)$$

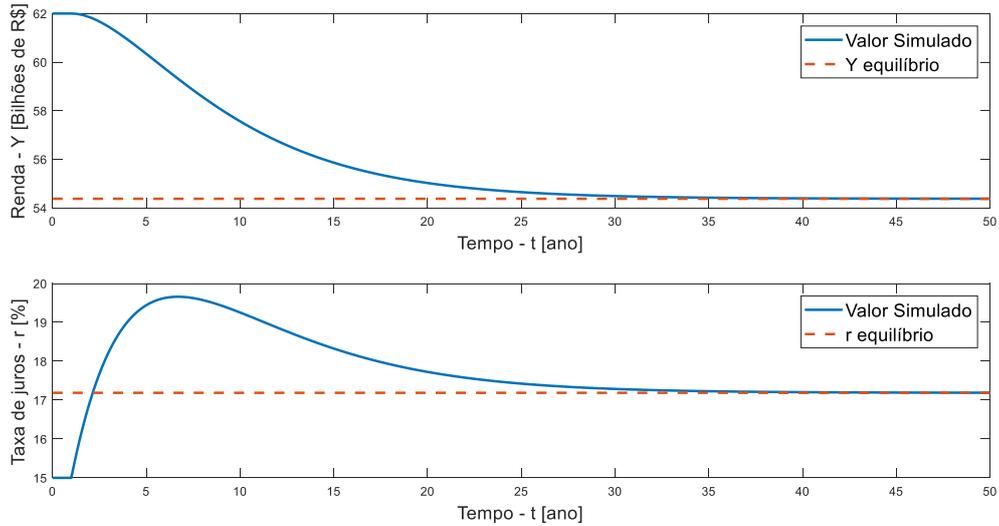
Figura 11: Comportamento de m_0 na Simulação 1.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Para os valores utilizados da Tabela 3 temos que $Y^* = 54,375$ Bilhoes de R\$ e $r^* = 17,1875\%$ são os valores de equilíbrio após a queda da Oferta de Moeda. Para atingir tais valores, percebe-se que após o súbito desequilíbrio do Mercado de Moeda, a taxa de juros aumenta acompanhando o sinal da diferença entre Demanda por Moeda e Oferta de Moeda. Com o aumento da taxa de juros, o Investimento Privado cai rapidamente, e consequentemente a Demanda Agregada. Isso ocorre até o momento em que a Demanda por Moeda fica menor que a Oferta por Moeda, e então a taxa de juros começa a diminuir, reduzindo a de queda do Investimento Privado até o momento em que as curvas atingem o equilíbrio. O resultado da simulação do sistema pode ser observado na Figura 12.

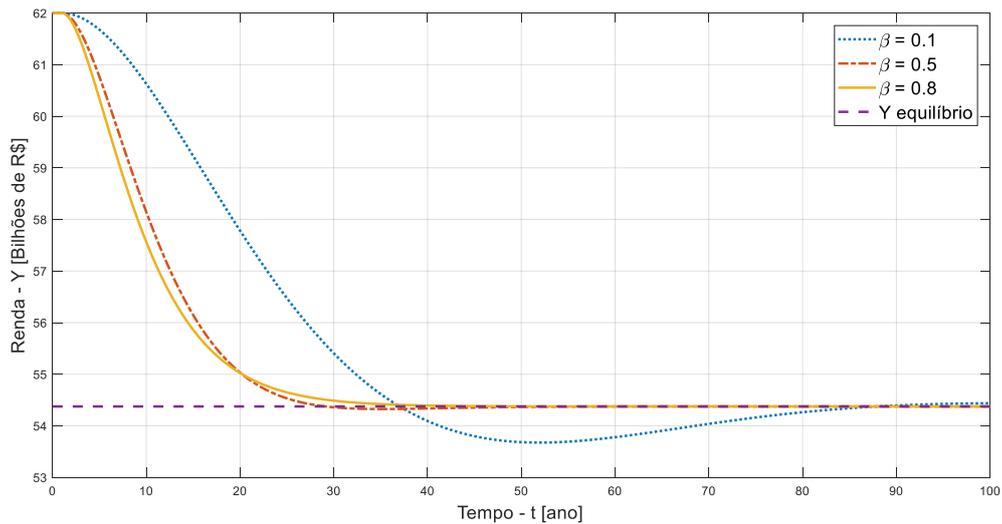
Figura 12: Simulação 1 – Teste do modelo com entrada degrau na Oferta de Moeda



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

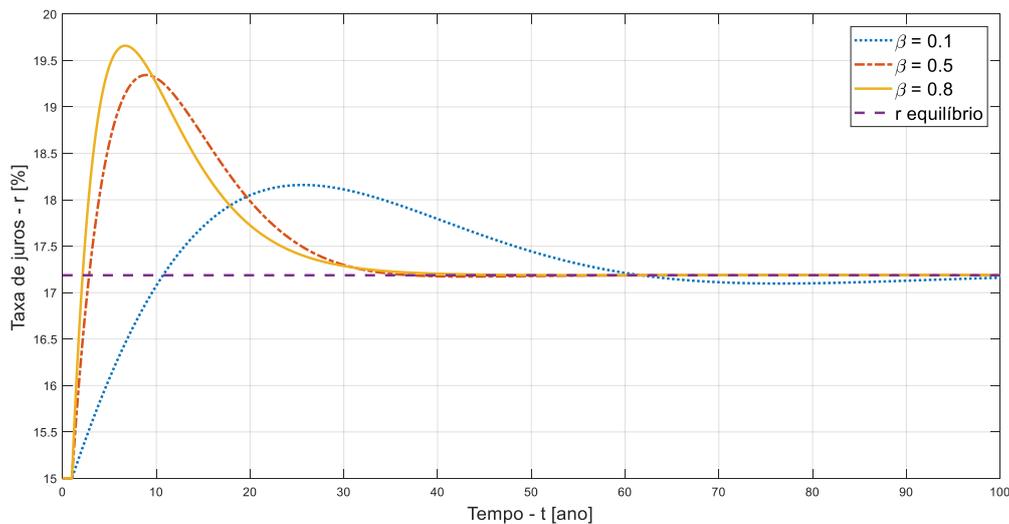
Garantida a representatividade do modelo computacional, em seguida realiza-se um estudo a respeito do impacto do Ganho de ajuste do Mercado de Moeda na trajetória dinâmica do modelo. Isto é feito variando o valor do parâmetro β entre 0 e 1 que é a faixa proposta por Shone (2002). Os valores escolhidos para β na Simulação 2 são 0,1; 0,5 e 0,8. Os resultados da Simulação 2 podem ser observados nas Figuras 13 e 14.

Figura 13: Simulação 2 – Trajetória de Y para diferentes valores de β



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Figura 14: Simulação 2 – Trajetória de r para diferentes valores de β



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Observa-se que o resultado apresentado na Figura 13 indica que maiores valores de β , atingem mais rápido o equilíbrio do sistema. Este comportamento é esperado, pois de acordo com o indicado na Figura 14, quanto maior o valor de β , mais rápido o valor da Taxa de Juros $r(t)$ se adequa ao desequilíbrio do sistema, atingindo níveis mais altos em um espaço de tempo mais curto. Valores maiores da Taxa de Juros implicam em um Investimento Privado $I(t)$ menor de acordo com a Equação 3, fazendo assim com que a diferença entre a Demanda Agregada e a Renda Total diminua mais rapidamente.

A estabilização da Renda Total em períodos mais breves de tempo, representa um benefício em termos de estabilidade econômica e conseqüentemente na formação de expectativas. Já as variações mais bruscas da taxa de juro representam um problema para investidores que querem avaliar o retorno de seus investimentos quando comparado com a taxa de juros base do país. Portanto é interessante buscar uma trajetória que não comprometa demasiadamente nenhum dos dois públicos.

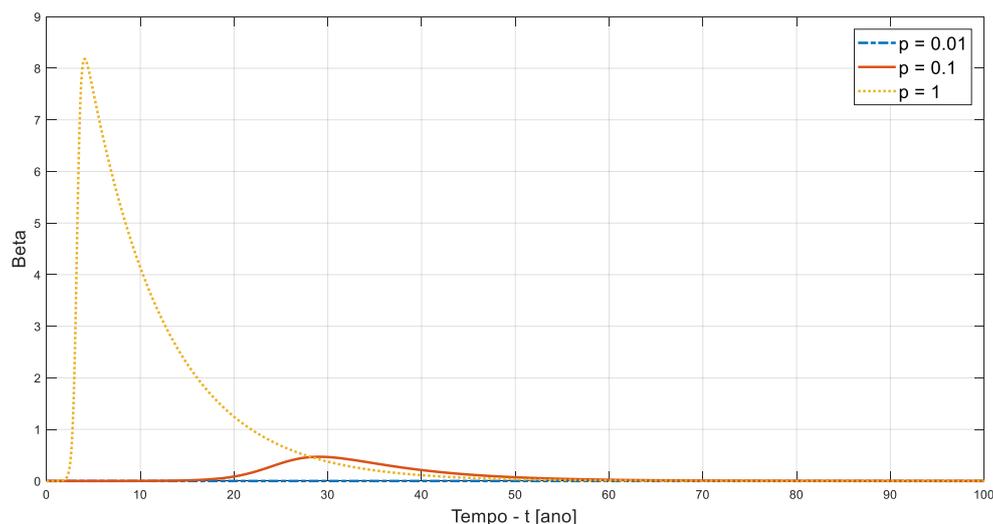
Verifica-se também que para valores de β de 0,1 até aproximadamente $\beta = 0,5$, a Renda Total apresenta *overshoot*, e que para valores maiores até $\beta = 0,8$, o sistema chega ao seu equilíbrio sem apresentar oscilações.

5.2. Modelo IS-LM com a malha de controle aplicada

Em seguida, aplica-se a malha de controle apresentada na Figura 10, no modelo IS-LM, afim de testar a eficiência do ajuste dinâmico do parâmetro β na estabilização sistema, em contraste com os casos anteriores onde β era uma constante. Para isso acrescenta-se uma saturação no valor do novo Ganho de Ajuste do Mercado de Moeda, afim de estabelecer um valor mínimo para esta variável e evitar casos onde a diferença $(D - Y)$ inicial é zero, e, portanto, o ajuste do sistema não ocorre.

Para o teste da malha de controle, simula-se o modelo para três ordens de grandeza diferentes para o ganho p . Estes valores são $p = 0,1$; $p = 1$; $p = 0,01$. Para os demais parâmetros do modelo, mantém-se os valores utilizados da Tabela 3. Os resultados dessa simulação e os valores assumidos por β encontram-se nas Figuras 15, 16 e 17.

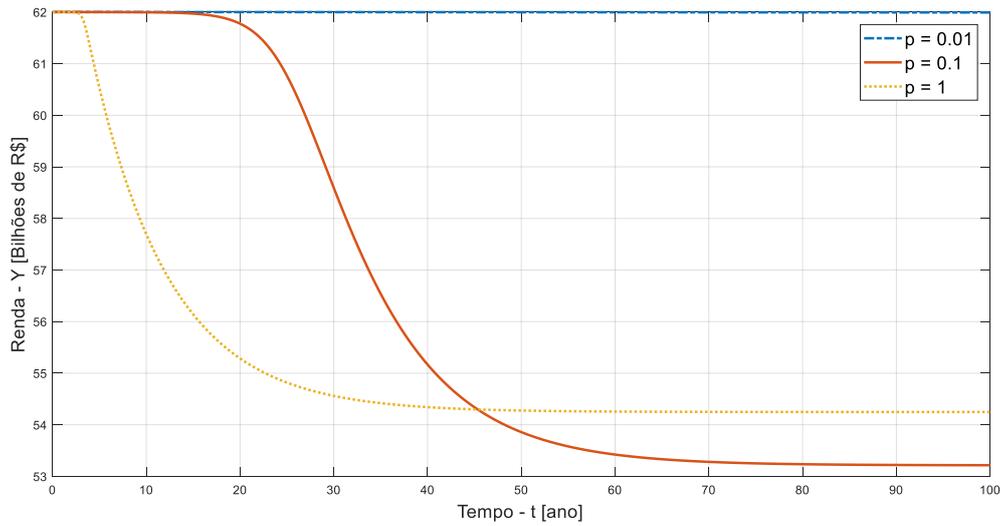
Figura 15: Simulação 3 – Valores de β para diferentes valores de p .



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

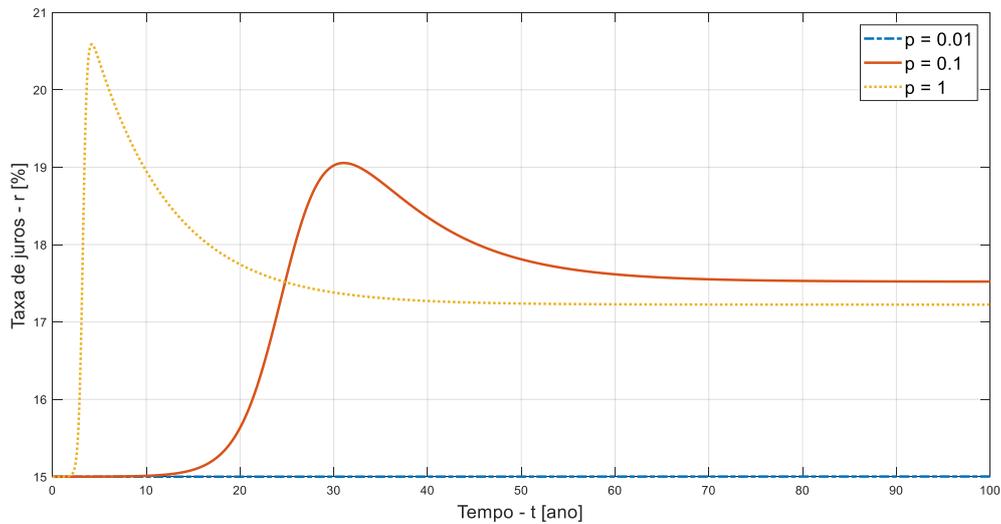
Verifica-se a partir da Figura 15, que maiores valores de p , incorrem em maiores variações do valor de β , assim como esperado. Para $p = 1$, observa-se que o valor de β ultrapassa a faixa proposta pela literatura, porém teoricamente não há uma limitação para a mesma que implique na necessidade desse valor estar entre 0 e 1. Para $p = 0,01$, o valor de β fica esbalizado em zero, indicando que esta ordem de grandeza não será útil nas análises posteriores.

Figura 16: Simulação 3 – Trajetória de Y para diferentes valores de p



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Figura 17: Trajetória de r para diferentes valores de p



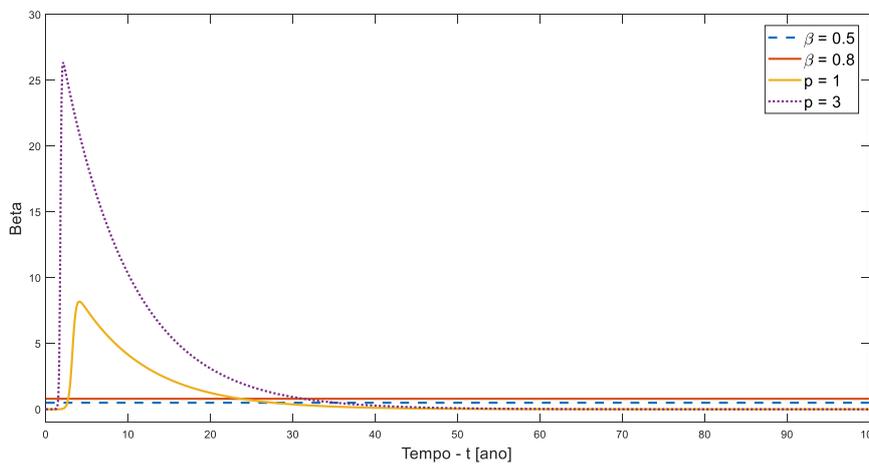
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

De acordo com a Figura 16, nota-se que para valores de p da ordem de grandeza 10^{-2} e 10^{-1} o sistema converge para equilíbrios diferentes do sistema sem controle. Também verificou-se que para valores da ordem de grandeza 10^1 ou mais, a simulação computacional falha devido a um problema com a derivada da Taxa de Juros, e, portanto, a faixa de valores escolhida para o teste de p no restante das simulações é da ordem de grandeza de 10^0 . Também é possível observar que para a ordem de grandeza escolhida, o valor de Y atinge o

valor de equilíbrio rapidamente, porém ocorre uma pequena diferença entre o valor de equilíbrio da curva controlada e da curva β com constante. Isso provavelmente ocorre devido ao valor de β ir diminuindo de acordo com o desequilíbrio entre Renda Total e Demanda agregada. Eventualmente esta diferença se torna muito pequena, impedindo que o sistema se ajuste até seu equilíbrio sem controle.

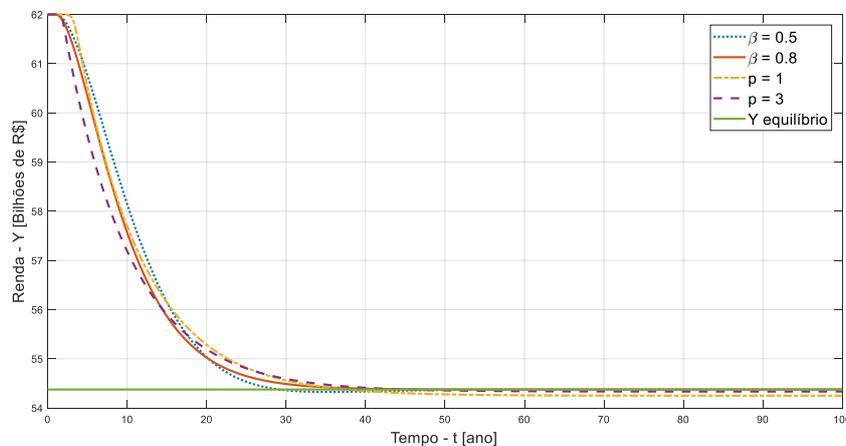
Em seguida, foi feita a comparação da trajetória do sistema para o caso onde utiliza-se um Ganho de Ajuste do Mercado de Moedas constante, e o caso onde a malha de controle é aplicada. Mantém-se o distúrbio utilizado previamente e os mesmos valores para os demais parâmetros. Os valores assumidos por β na simulação com a malha de controle estão na Figura 18. O resultado da comparação pode ser visto nas Figuras 19 e 20.

Figura 18: Simulação 4 – Valores de β para cada p utilizado.



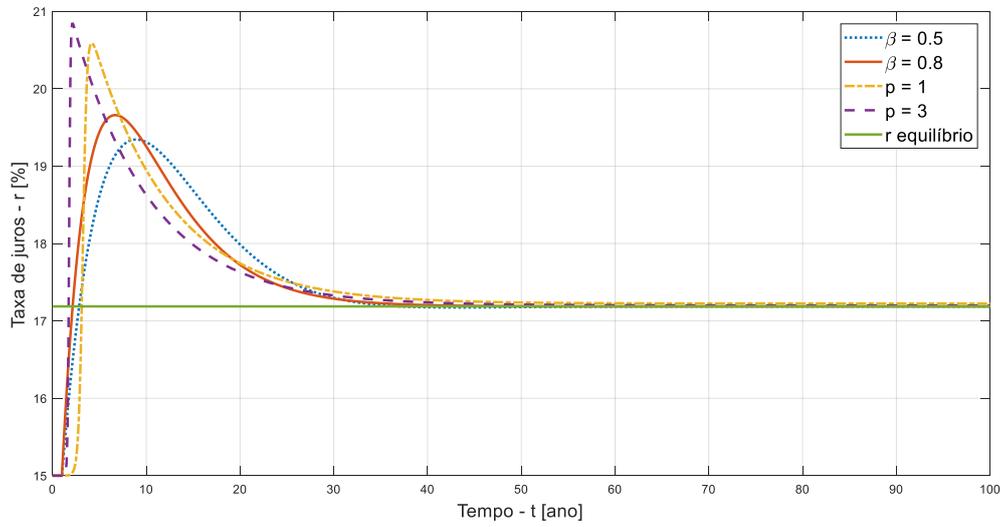
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Figura 19: Simulação 4 – Trajetória de Y para β constante e controlado



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

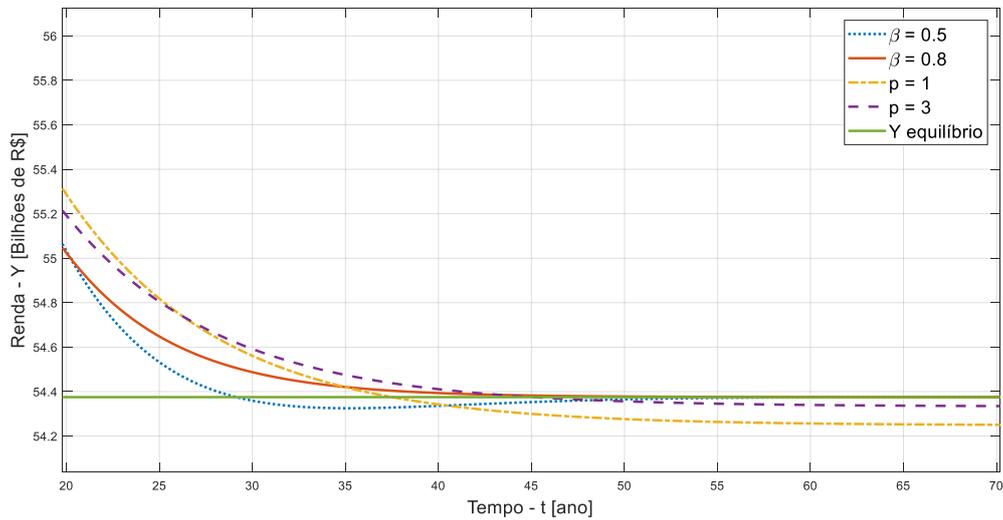
Figura 20: Simulação 4 – Trajetória de r para β constante e controlado



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Para uma melhor visualização da Figura 19, e para observar com maior clareza o exato momento onde as trajetórias das simulações atingem o valor Y de equilíbrio, faz-se um recorte do momento aproximado na Figura 21.

Figura 21: Simulação 4 – Trajetória de Y para β constante e controlado (focado)



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Na Figura 19, nota-se que a trajetória para ambos os casos, β constante e controlado, possuem o mesmo formato e valores muito próximos, não havendo vantagens claras de um

método sobre outro. Porém ao olhar mais atentamente na Figura 21, percebe-se que há uma grande diferença no momento exato onde cada curva atinge o valor de equilíbrio. A curva com $\beta = 0,5$ atinge a amplitude de equilíbrio aproximadamente 17 anos antes da próxima a atingir o mesmo valor, entretando esta apresenta um *overshoot* que só se estabiliza depois de 20 anos. As curvas com $\beta = 0,8$, se estabiliza em seguida depois de 45 anos. As curvas com β controlado se estabilizam por último e levam o mesmo tempo para tal, aproximadamente 65 anos. Porém seus equilíbrios são diferentes do valor de equilíbrio atingido pelas curvas não controladas. A motivação é semelhante ao caso da Figura 16. Isso pode ser observado na Tabela 4:

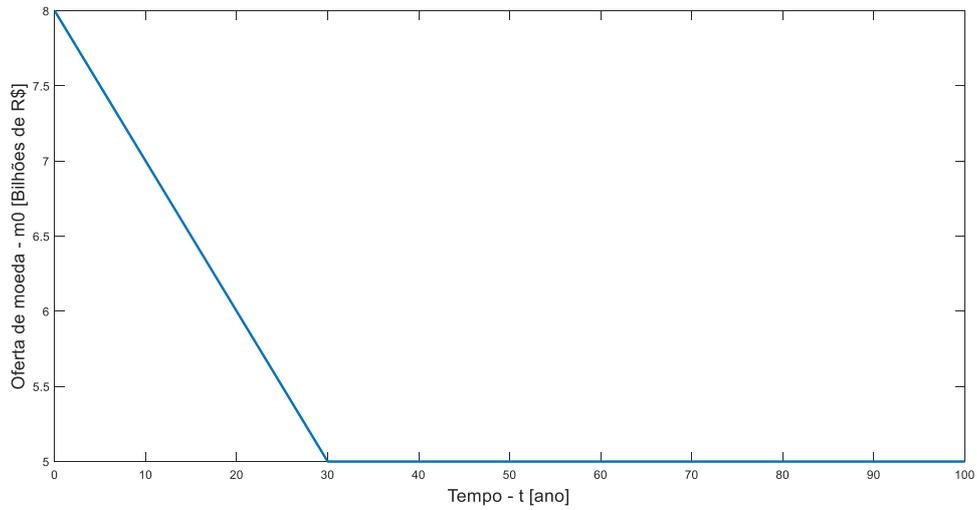
Tabela 4: Tempos de estabilização da Simulação 4

Parâmetro utilizado	Tempo para atingir o valor de equilíbrio	Tempo para estabilização
$\beta = 0.5$	28 anos	48 anos
$\beta = 0.8$	45 anos	45 anos
$p = 1$	65 anos	65 anos
$p = 3$	65 anos	65 anos

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Realiza-se então esta mesma comparação para a Oferta de Moeda atingindo o valor de 5 Bilhoes de R\$, porém com uma entrada do tipo rampa, assim como mostrado na Figura 22.

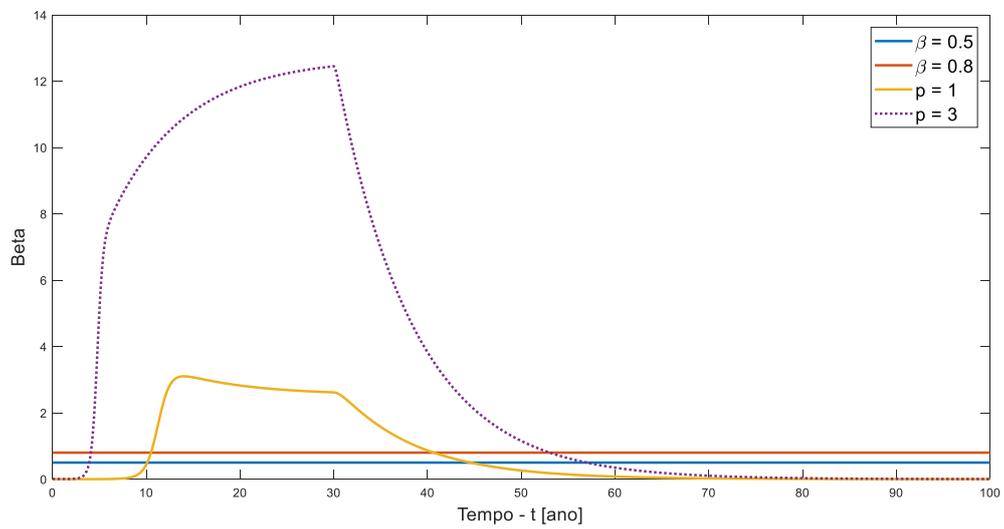
Figura 22: Comportamento de m_0 na Simulação 5.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

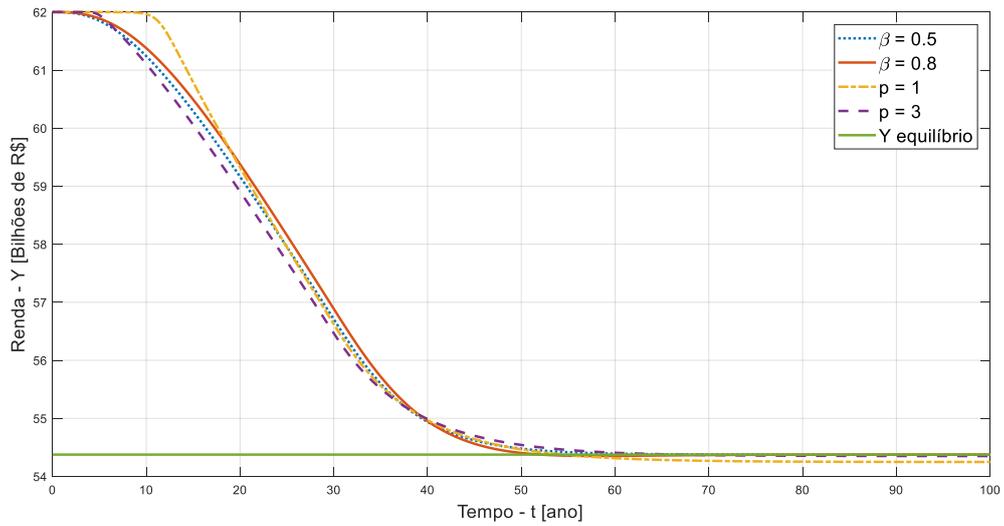
Os valores assumidos por β com a malha de controle e o resultado do modelo simulado para este constante e controlado podem ser observados respectivamente nas Figuras 23, 24 e 25:

Figura 23: Simulação 5 – Valores de β para cada p utilizado



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

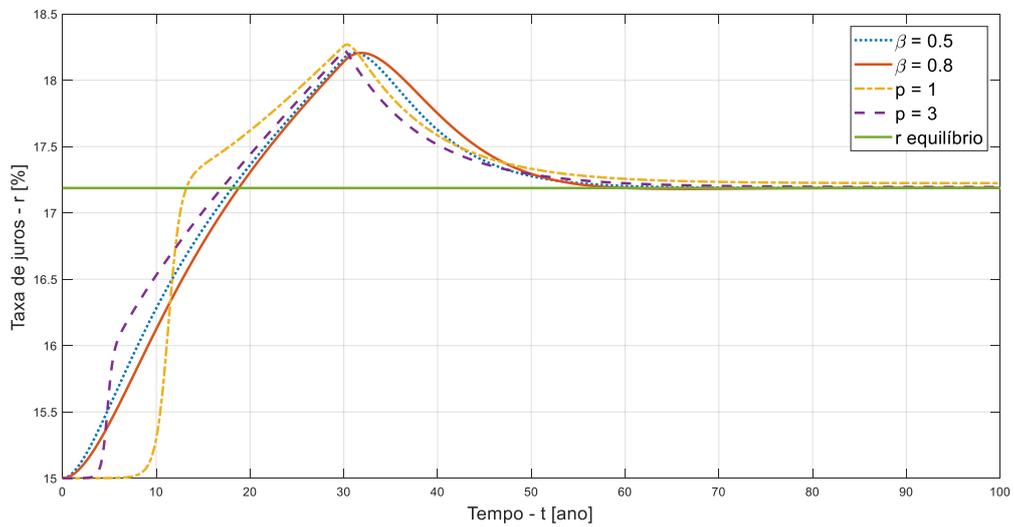
Figura 24: Simulação 5 – Trajetória de Y para β constante e controlado



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

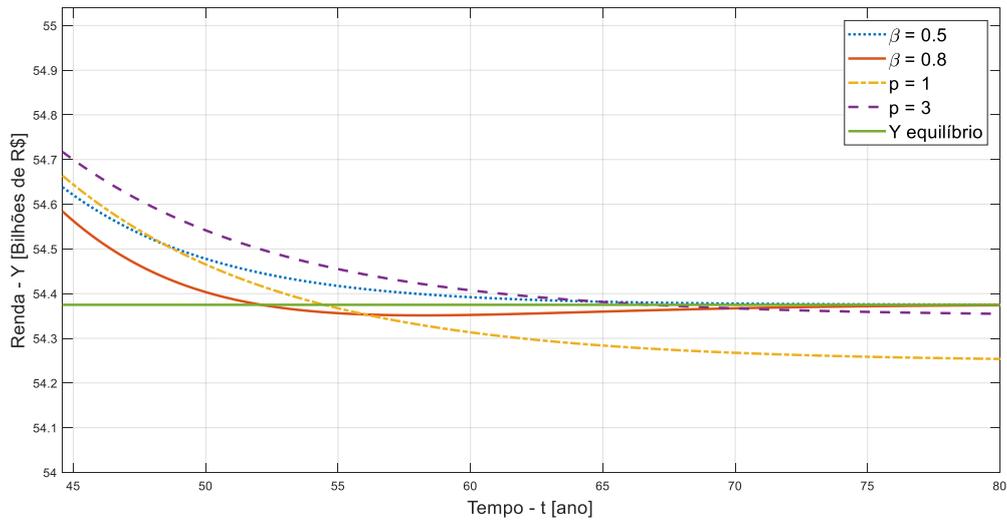
Para uma melhor visualização da Figura 24, e para observar com maior clareza o exato momento onde as trajetórias das simulações atingem o valor Y de equilíbrio, faz-se um recorte do momento aproximado na Figura 26.

Figura 25: Simulação 5 – Trajetória de r para β constante e controlado



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 26: Simulação 5 – Trajetória de Y para β constante e controlado (focado)



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Na Figura 24, nota-se que a trajetória para ambos os casos, β constante e controlado, possuem o mesmo formato e valores muito próximos, salvo para $p = 1$, que apresenta uma reação inicial mais lenta. Porém ao olhar mais atentamente na Figura 26, percebe-se que há diferenças no momento exato onde cada curva atinge o valor de equilíbrio. A curva com $\beta = 0,8$ atinge o equilíbrio aproximadamente 2 anos antes da próxima a atingir o mesmo valor, entretando apresenta um *overshoot* que só se estabiliza depois de 20 anos. A curva com β controlado com $p = 1$, é a próxima a atingir o equilíbrio, porém se estabiliza em um equilíbrio diferente das curvas dos sistemas não controlados. A motivação é semelhante ao caso da Figura 16. As curvas com $\beta = 0,8$, e com β controlado com $p = 3$, se estabilizam por último e levam o mesmo tempo para tal, porém a curva controlada apresenta um equilíbrio distinto das curvas não controladas. Isso pode ser observado na Tabela 5.

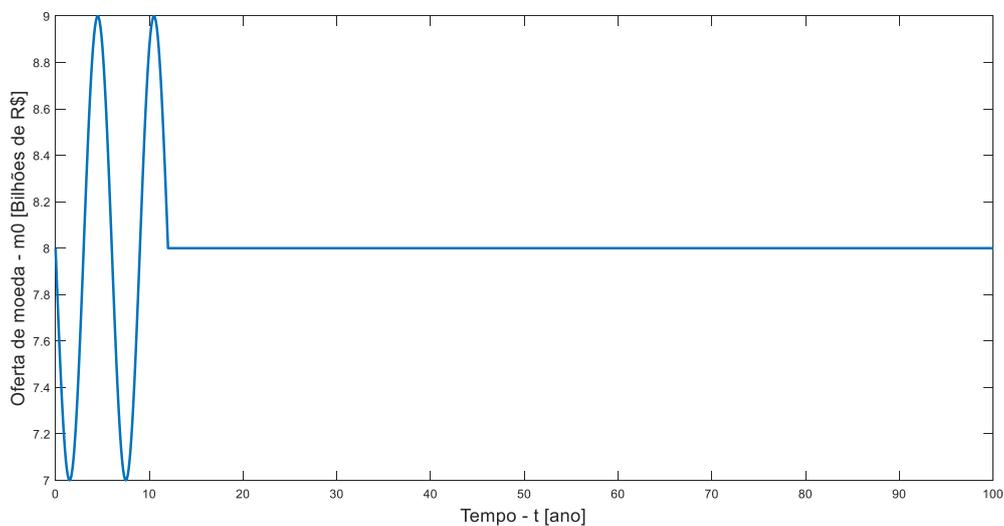
Tabela 5: Tempos de destabilização para a Simulação 5

Parâmetro utilizado	Tempo para atingir o valor de equilíbrio	Tempo para estabilização
$\beta = 0.5$	73 anos	73 anos
$\beta = 0.8$	53 anos	73 anos
$p = 1$	54 anos	75 anos
$p = 3$	70 anos	73 anos

Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Por último, repete-se esta mesma comparação para a Oferta de Moeda oscilando em seu valor inicial com uma amplitude de oscilação de 1 Bilhão de R\$, faz-se uso de uma entrada senoidal, assim como mostrado na Figura 27.

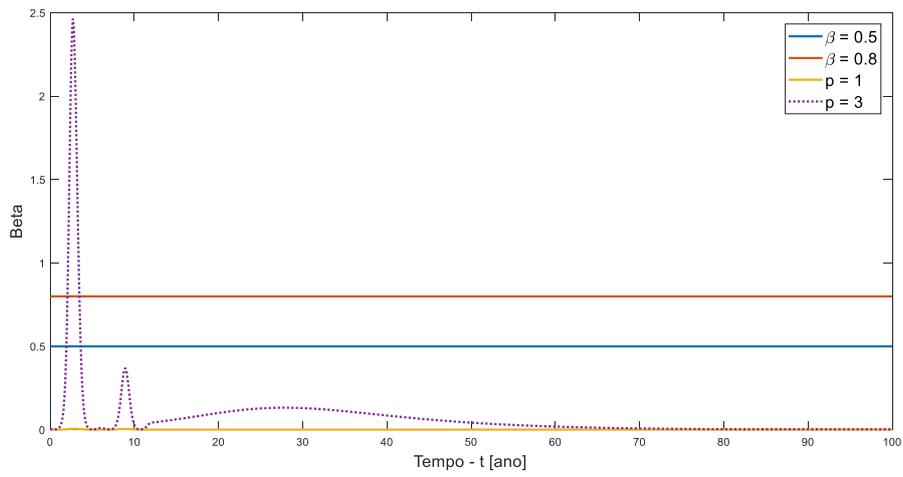
Figura 27: Comportamento de m_0 na Simulação 6.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

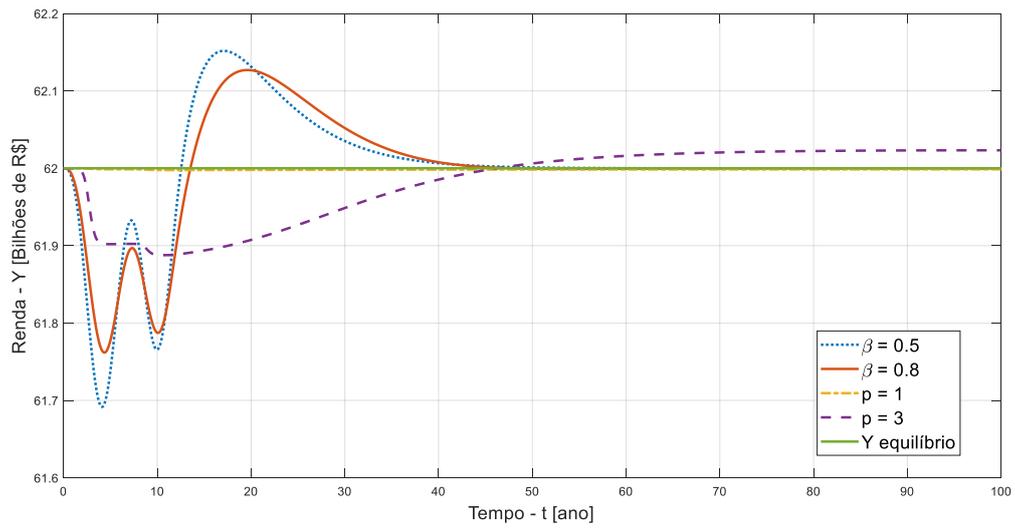
Os valores assumidos por β no sistema controlado e o resultado do modelo simulando este constante e controlado pode ser observado nas Figuras 28, 29 e 30:

Figura 28: Simulação 6 – Valores de β para cada p utilizado



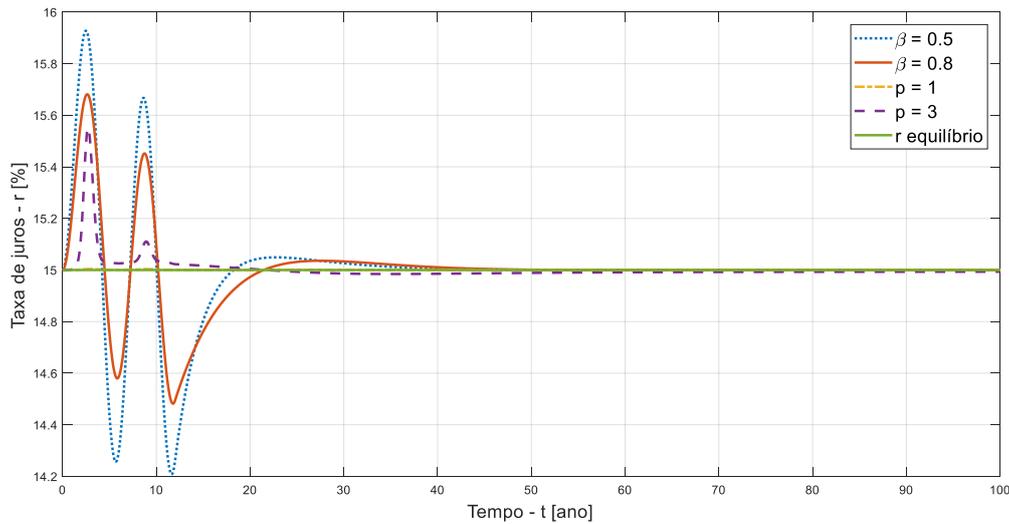
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 29: Simulação 6 – Trajetória de Y para β constante e controlado



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 30: Simulação 6 – Trajetória de r para β constante e controlado



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Com a perturbação do sistema sendo feita por uma entrada do tipo senoidal, nota-se um resultado diferente das simulações anteriores. Para a entrada senoidal, como pode-se observar na Figura 29, há uma grande diferença na trajetória das curvas para os casos de β controlado e constante. Nas curvas com o β constante, percebe-se que as trajetórias apresentam o mesmo formato da entrada, com a mesma quantidade de picos e vales, e posteriormente ocorre um *overshoot* no momento de estabilização.

Já para as curvas com β controlado, temos uma situação diferente. No caso de $p = 1$, temos que o controle evita o desequilíbrio do sistema. Isso se deve aos baixos valores alcançados por β , como pode-se observar na Figura 28, que evitam que a taxa de juros se ajuste de forma brusca em um caso onde há apenas uma oscilação ao redor do equilíbrio, e, portanto, se altera só o necessário para que a oscilação da Oferta por Moeda não afete a Renda Total. No caso de $p = 3$, como β atinge valores maiores, percebe-se uma variação maior na Renda Total, sua oscilação também é suavizada e apresenta um vale menor que os casos sem controle, porém a estabilização acontece em um equilíbrio diferente dos demais casos. Isso pode ser observado na Tabela 6.

Tabela 6: Tempos de destabilização para a Simulação 6

Parâmetro utilizado	Tempo para atingir o valor de equilíbrio	Tempo para estabilização
$\beta = 0.5$	12 anos	43 anos
$\beta = 0.8$	12 anos	43 anos
$p = 1$	Não há desestabilização	Não há desestabilização
$p = 3$	43 anos	60 anos

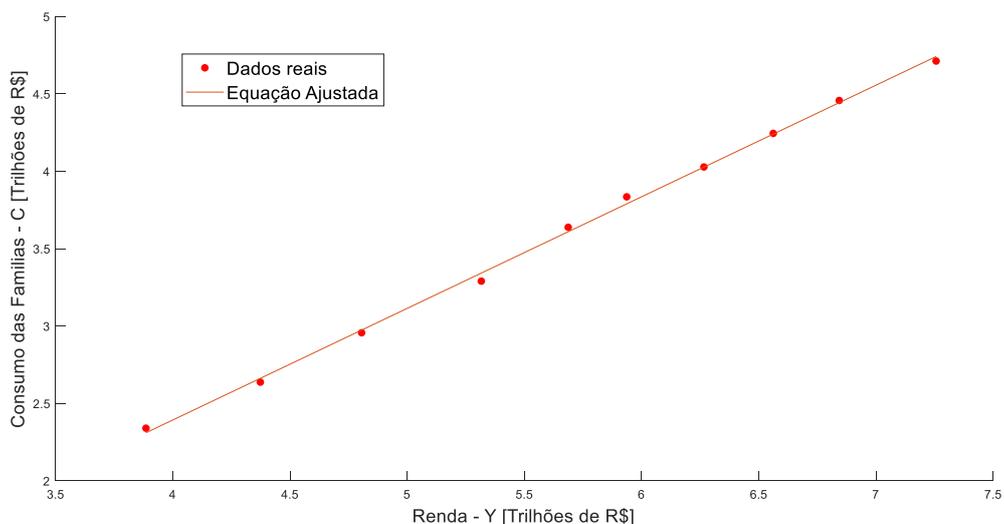
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

5.3. Aplicação com dados reais

Para complementar as simulações feitas com os dados fictícios retirados da bibliografia, também utilizou-se dados reais para comparar o resultado do modelo IS-LM com β constante e controlado. Os parâmetros Consumo das Famílias, Gasto Governamental, Investimento Privado, Demanda por Moeda, Oferta de Moeda, Taxa de Juros e Renda das Famílias foram retirados do IpeaDATA (Apendice A) para o período entre 2010 e 2019, e com eles ajustou-se os demais parâmetros necessários para a simulação.

Em seguida apresenta-se os resultados dos ajustes para cada equação nas Figuras 31, 32 e 33:

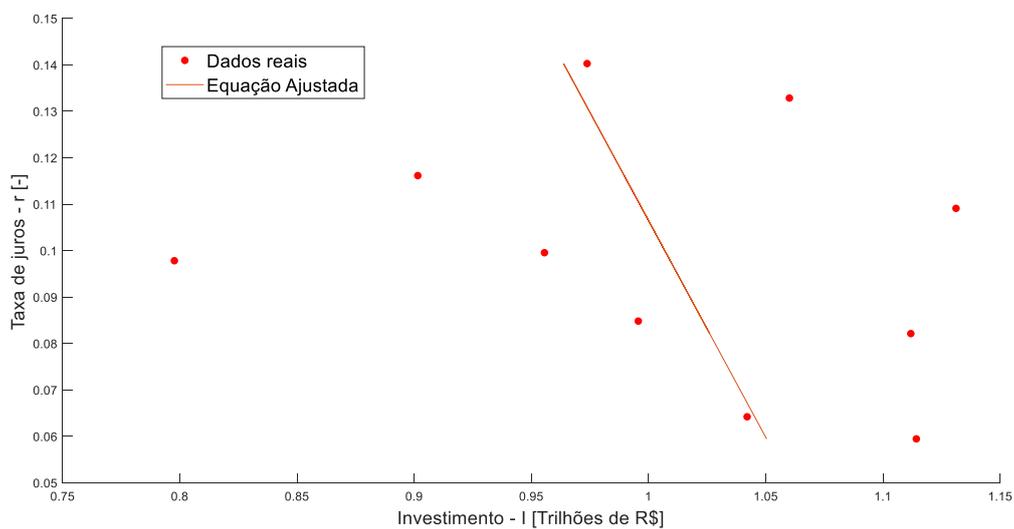
Figura 31: Ajuste da Equação de Consumo para os dados reais



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

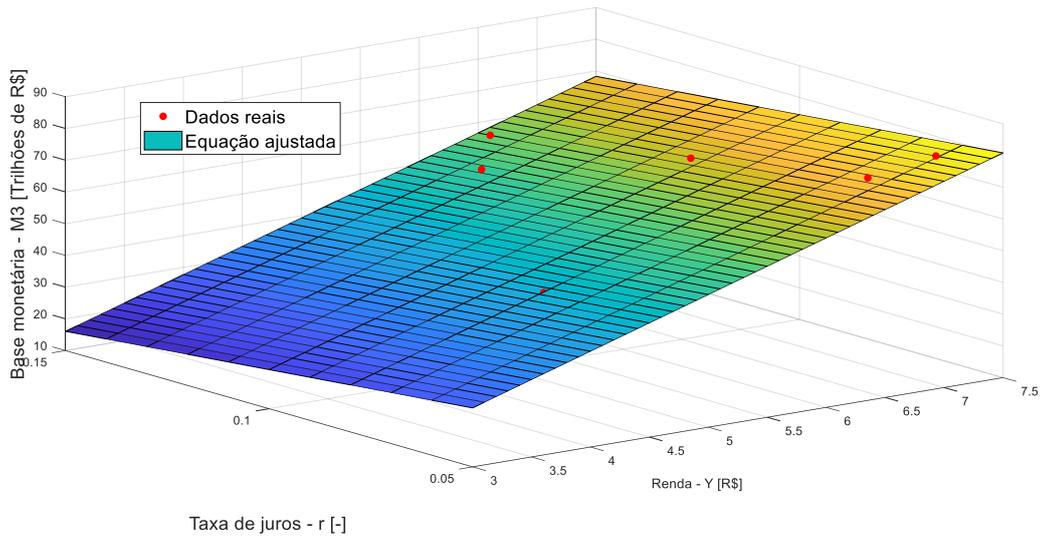
Para testar a validade do ajuste, utiliza-se o coeficiente de determinação, ou r-quadrado. Essa estatística indica quantitativamente a proximidade entre valores de um modelo ajustado e valores de uma variável independente cujo modelo procura prever. Para a Equação de Consumo, temos que $R_c^2 = 0,9985$.

Figura 32: Ajuste da Equação de Investimento Privado para os dados reais



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Figura 33: Ajuste do Mercado de Moeda para os dados reais

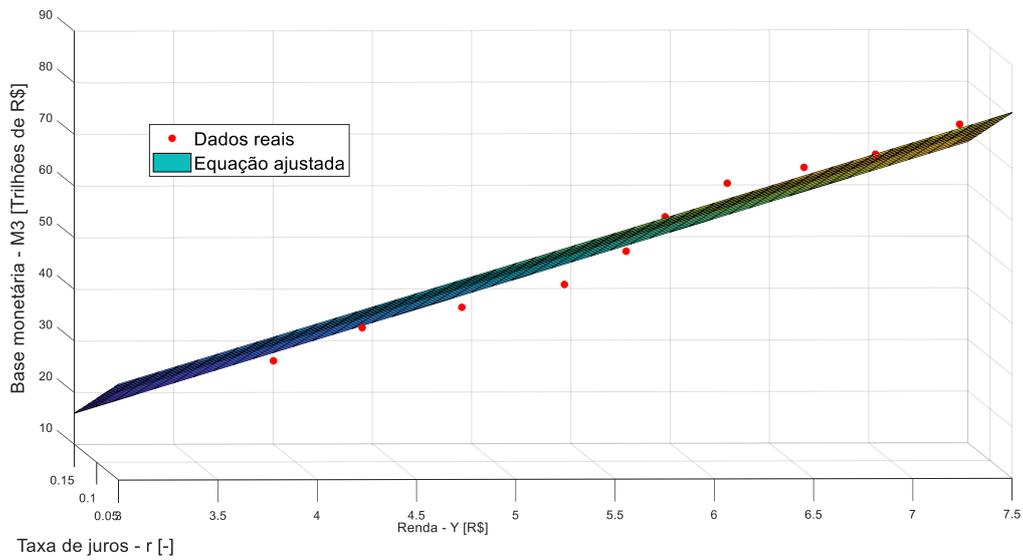


Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Para a Equação de Investimento Privado apresentada na Figura 32 temos que $R_I^2 = 0,0742$, e para o Mercado de Moeda apresentado nas Figuras 33 e 34 temos $R_m^2 = 0,9466$.

O coeficiente R^2 quantifica a proximidade da equação ajustada e dos dados observados de forma que $R^2 = 0$ indica que não há proximidade e $R^2 = 1$ indica que os dados coincidem perfeitamente. Assim, verifica-se que a Equação de Consumo, e o Mercado de Moeda expostos na Fundamentação Teórica apresentam uma boa representatividade dos dados reais. Já a Equação de Investimento Privado, apresenta um resultado ruim para o indicador R^2 , isso aponta a influencia de fatores externos a análise neste parâmetro resultado em um ajuste pouco representativo dos dados reais. Os valores dos Ganhos de ajuste dinâmico dos Mercados não podem ser ajustados a partir de dados reais, devido a limitação da modelagem escolhida.

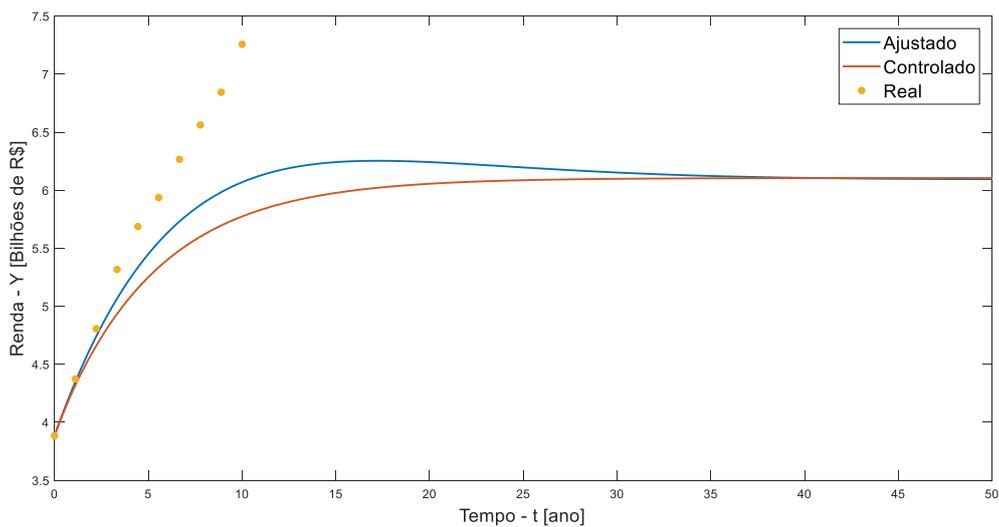
Figura 34: Ajuste do Mercado de Moeda para os dados reais (outro ângulo)



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

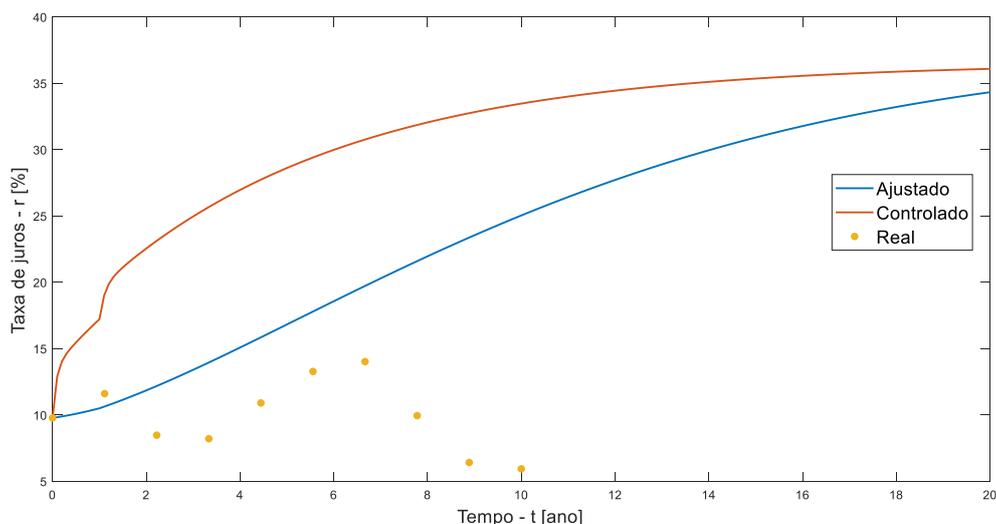
Assim para poder realizar a comparação do modelo IS-LM ajustado por parâmetros reais, com um β constante e um controlado, considera-se os ganhos de ajuste dos mercados os mesmos encontrados na bibliografia $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.8$. E para o ganho do modelo controlado considera-se $p = 0.1$. Nas Figuras 35 e 36, tem-se o resultado dos dois métodos, comparados com os dados retirados diretamente do IpeADATA.

Figura 35: Simulação de Y para β constante e controlado, comparado com os dados reais



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Figura 36: Simulação de r para β constante e controlado, comparado com os dados reais



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Observando a Figura 35, percebemos que nos primeiros períodos há uma grande coincidência entre as simulações e os dados reais, e com o passar do tempo as trajetórias das curvas vão se distanciando. Isso é esperado, pois os dados reais sofrem diversas influências externas ao modelo, que com o agregado dos anos, termina por somar uma diferença grande da simulação, que considera apenas os parâmetros internos ao modelo.

Já para a Figura 36, não há indícios de coincidência entre as simulações e os dados reais. Isso aponta as limitações do modelo para representar a realidade econômica de forma exata.

Comparando os resultados obtidos com β constante e controlado, percebemos que neste caso onde não há uma fonte de instabilidade e apenas o sistema inicia sua trajetória fora de seu equilíbrio, o modelo controlado atinge mais rapidamente o equilíbrio e sem o *overshoot* apresentado pelo modelo com β constante.

6. Considerações finais

Tendo realizado comparações entre o Modelo IS-LM simulado com o Ganho de ajuste do Mercado de Moeda constante e com uma malha de controle aplicada neste ganho, percebe-se diferentes resultados para diferentes entradas.

Para as entradas do tipo rampa e degrau e para a amplitude das perturbações simuladas, percebeu-se uma diferença no comportamento da Renda Total no caso controlado e no caso com β constante. Notou-se que para as curvas com malha de controle, o parâmetro β se adequou a intensidade do desequilíbrio do Mercado de Bens, e, portanto, apresentou uma resposta mais rápida nos momentos onde esse desequilíbrio é maior, porém mostrou uma lentidão para atingir o equilíbrio em momentos onde o desequilíbrio é pequeno. Neste caso, para valores constantes de β , o ajuste ocorreu na mesma velocidade que para β controlado, entretanto os níveis de estabilização foram diferentes. Consequentemente para estas entradas o estudo sugere uma maior eficiência de β constante.

Para a entrada do tipo senoidal com a amplitude estudada, as simulações tiveram um resultado diferente. Enquanto as curvas com β constante apresentaram um comportamento oscilatório seguindo o formato do sinal de entrada, as curvas com β controlado, estabilizaram as oscilações, e para um dos valores de p o sistema permaneceu em equilíbrio mesmo com a oscilação da Oferta de Moeda. Esse resultado foi obtido devido a pequena variação de β , que não implicou em uma resposta acentuada da taxa de juros, e assim esta variou apenas o suficiente para minimizar as oscilações da Renda Total. Neste caso o estudo sugere uma grande vantagem da aplicação da malha de controle.

Conclui-se que a variação do β pode ser benéfica a depender da natureza da perturbação causada no sistema. Cria-se a intuição de que para alterações dos valores de equilíbrio, valores constantes de β apresentam uma melhor resposta da taxa de juros para estabilizar a Renda Total. Também cria-se a intuição que para flutuações ao redor de um único equilíbrio, um valor de β que se adeque as estas flutuações apresenta uma melhor resposta da taxa de juros, mantendo o sistema em seu equilíbrio durante todo o período de estudo.

Para fortalecer essa intuição construída, uma análise mais profunda sobre diferentes amplitudes e frequências de entradas, seria importante. Isso para procurar ter mais evidências destes comportamentos e assim compreender se este é um desempenho padrão para curvas

controladas e sem controle, ou se há outros fatores que podem vir a influenciar estes resultados.

Para a simulação feita com parâmetros ajustados, percebe-se que o Modelo IS-LM ainda que simplista possui um grau de coincidência alto com os dados reais observados, principalmente no início do período de simulação. A malha de controle também exibe uma vantagem em relação ao sistema sem esta, pois sua estabilização não apresenta *overshoot*.

Outras considerações de ajuste dinâmico do Modelo IS-LM poderiam proporcionar uma maior coincidência entre a simulação e os dados observados. Neste caso, a aplicação de uma malha de controle neste modelo com uma consideração de ajuste diferente, poderia fornecer informações importantes sobre a validade das observações feitas neste estudo.

Conclui-se que a aplicação de uma malha de controle para determinar o Ganho de ajuste do Mercado de Moeda apresenta vantagens em casos onde há oscilações da Renda Total ao redor do equilíbrio. Sugere-se a realização desta mesma análise para diferentes amplitudes de entrada em outros parâmetros do sistema, afim de verificar qual o impacto da entrada no resultado da curva controlada.

Assim percebe-se as vantagens do uso de modelos matemáticos para representar sistemas reais. Sem a necessidade de empregar recursos na construção de experimentos muitas vezes impossíveis de serem realizados no caso da economia, e também sem a necessidade de ter um modelo que represente com perfeita acurácia a realidade, o Modelo IS-LM em questão permitiu uma análise de grande relevância prática para todos os agentes econômicos compreendidos na mesma. E, não obstante, o uso de uma técnica de engenharia na forma da malha de controle, aplicada em outras áreas do saber, se mostra produtivo mesmo sem a possibilidade de uma atuação direta no sistema, pois sua utilização possibilitou o desenvolvimento de uma intuição anteriormente inexistente. Isso sugere que há mais áreas do saber aptas a receber uma análise semelhante, e mesmo que o conhecimento criado não possa ser diretamente aplicado na prática, o aprofundamento teórico possivelmente permitirá o incremento da intuição sobre o assunto.

Referências

- BEGG, D. et al. **Economics**. New York: McGraw-Hill Education, 2014.
- BLANCHARD, O.; JOHNSON, D. R. **Macroeconomics**. 6^a. ed. Harlow: Pearson, 2013.
- CHEN, W.-C. Dynamics and control of a financial system with time-delayed feedbacks. **ScienceDirect**, Yuanpei, 9 Outubro 2006. 10.
- CHIAN, A. C. L.; REMPEL, E. L.; ROGERS, C. Complex economic dynamics: Chaotic saddle, crisis and intermittency. **ScienceDirect**, São José dos Campos, 24 Agosto 2005. 25.
- DING, J.; YANG, W.; YAO, H. A New Modified Hyperchaotic Finance System and its Control. **International Journal of Nonlinear Science**, Zhenjiang, 9 Abril 2009. 8.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de Controle Moderno**. Rio de Janeiro: LTC, 2001.
- EMIROGLU, S.; UYAROGLU, Y.; KOKLUKAYA, E. Control of a chaotic finance system with passive control. **International Symposium on Sustainable Development**, Sarajevo, 01 Junho 2012. 6.
- FELÍCIO, L. C. **Modelagem da Dinâmica de Sistemas e Estudo da Resposta**. São Carlos: RiMa, 2010.
- GOODWIN, R. M. The nonlinear accelerator and the persistence of business cycles. **Econometrica: Journal of the Econometric Society**, Harvard, Janeiro 1951. 1-17.
- HALL, R. E.; LIEBERMAN, M. **Macroeconomia: princípios e aplicações**. São Paulo: Thomson, 2003.
- HICKS, J. Mr Keynes and the "Classics": A Suggested Interpretation. **Econometrica: Journal of the Economic Society**, Cambridge, Abril 1937. 147-159.

HIDAYATI, A. N.; APRILIANI, E.; USADHA, R. Optimal Control of Dynamic IS-LM Business Cycle Model With Two Time Delay. **Journal of Physics**, Sukolilo-Surabaya, 2019.

KEYNES, J. M. **A teoria geral do emprego, do juro e da moeda**. São Paulo: Nova Cultural Ltda., 1996.

LUJUN, Z.; YAQIONG, L. A generalized dynamic IS-LM model with delayed time in investment process. **Applied Mathematics and Computation**, Changsha, 2008. 774-781.

MA, J.-H.; CHEN, Y.-S. Study or the Bifurcation Topological Structure and the Global Complicated Character of a Kind of Nonlinear Finance System. **Applied Mathematics and Mechanics**, Shangai, Dezembro 2001. 8.

MATSUMOTO, A.; SZIDAROVSKY, F. Dynamic in Delay IS-LM Model with Tax Collections. **Institute of Economic Research**, Tokyo, Setembro 2013.

MCCALLUM, B. T.; NELSON, E. An optimizing IS-LM specification for monetary policy and business cycles analysis. **National Bureau of Economic Research**, Cambridge, Janeiro 1997.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1982.

RIAD, D.; HATTAF, K.; YOUSFI, N. Mathematical analysis of a delayed IS-LM model with general investment function. **The Journal of Analysis**, 19 Dezembro 2018.

SCHINASI, G. J. A Nonlinear Dynamic Model of Short Run Fluctuations. **Review of Economic Studies**, 1981. 649-456.

SCHINASI, G. J. Fluctuations in a Dynamic Intermediate-Run IS-LM Model: Applications of the Poincaré-Bendixon Theorem. **Journal of Economic Theory**, Washington, 20 Julho 1981. 369-375.

SHONE, R. **Economic Dynamics: Phase Diagrams and their Economic Application**. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

SMITH, G. A dynamic IS-LM simulation model. **Applied Economics**, Texas, 1980. 313-327.

SPORTELLI, M.; BINETTI, M. T.; CESARE, L. A dynamic IS-LM model with two time delays in the public sector. **Applied Mathematics and Computation**, 2014. 728-739.

UYAROGLUL, Y.; TEMEL, R.; KIRLIOGLU, H. Feedback control of chaos in a hyperchaotic finance system. **International Symposium on Sustainable Development**, Sarajevo, 01 Junho 2012.

VARIAN, H. R. **Economic and Financial Modeling with Mathematica**. Nova York: TELOS, 1993.

YUAN, E. Z. **Análise dos Modelos IS-LM linear e não linear para o Brasil e EUA**. IBMEC São Paulo. São Paulo. 2009.

Apêndice A – Dados macroeconômicos do Brasil para o período de 2010 a 2019

Renda Total Y [mil R\$]	Taxa de Investimento [%]	Investimento Privado I [mil R\$]	Gasto Governamental G [mil R\$]	Consumo das Famílias [mil R\$]	Selic [%]	Demanda por moeda m^d [mil R\$]	Base monetária [mil R\$]	Oferta de Moeda m_o [mil R\$]
3885847	20,52883	797718,9	738966	2340167	9,782	29724204	2014184	27710020
4373658	20,61347	901562,7	817038	2637814	11,61	34830021	2235472	32594550
4805913	20,71676	995629,5	892180	2956834	8,482	40917112	2445842	38471270
5316455	20,9144	1111905	1007275	3290422	8,213	45489609	2580286	42909323
5687309	19,88986	1131198	1106874	3638404	10,91	50039468	2765257	47274211
5936678	17,85682	1060102	1185776	3835193	13,28	55055135	2847473	52207662
6266226	15,54064	973811,6	1277645	4028136	14,02	61015624	2938908	58076717
6562226	14,56233	955613,3	1327758	4245099	9,955	66871712	3120092	63751620
6843399	15,22751	1042079	1383685	4457579	6,421	71837036	3315399	68521637
7256855	15,35458	1114260	1471891	4712375	5,945	77927991	3430331	74497660

Fonte: IpeaDATA (2020)

Anexo A – Script do Matlab utilizado para a simulação

```
clc
clear all
close all

a = 50;      % Consumo autônomo
b = 0.75;    % Propensão Marginal ao Consumo
h = -1.525;  % Elasticidade do investimento a taxa de juros
k = 0.25;    % Elasticidade da moeda a renda
m0 = 8;      % Demanda autônoma por moeda
u = -0.5;    % Elasticidade da moeda a taxa de juros
t1 = 0.25;   % Imposto de renda

alfa = 0.1;  % Ganho de ajuste do Mercado de Bens
beta = 0.8;  % Ganho de ajuste do Mercado de Moeda

r0 = 15;     % Taxa de juros inicial
Y0 = 62;     % Renda total inicial

%% Simulação 1 - alfa = 0.1; beta = 0.8
sim('Modelo_basicol')

Y1 = Y.Data;
r1 = r.Data;
tout1 = tout;
m0out1 = m0out.Data;
betaplot1 = betaplot.Data;

%% Grafico Simulação 1
Yaux = linspace(54.375,54.375,1001);
raux = linspace(17.1875,17.1875,1001);

figure
plot(tout1,m0out1,'LineWidth',2)
xlabel('Tempo - t [ano'],'FontSize',15)
ylabel('Oferta de Moeda - m0 [Bilhões de R$]','FontSize',15)
ylim([0 10])
xlim([0 10])

figure
hold on

subplot(2,1,1)
plot(tout1,Y1,'DisplayName','Valor Simulado','LineWidth',2)
hold on
plot(tout1,Yaux,'--','DisplayName','Y equilíbrio','LineWidth',2)
legend
lgd = legend;
lgd.FontSize = 15;
xlabel('Tempo - t [ano'],'FontSize',15)
ylabel('Renda - Y [Bilhões de R$]','FontSize',15)
xlim([0 50])

subplot(2,1,2)
plot(tout1,r1,'DisplayName','Valor Simulado','LineWidth',2)
hold on
plot(tout1,raux,'--','DisplayName','r equilíbrio','LineWidth',2)
legend
lgd = legend;
lgd.FontSize = 15;
xlabel('Tempo - t [ano'],'FontSize',15)
ylabel('Taxa de juros - r [%]','FontSize',15)
xlim([0 50])
```

```

%% Simulação 2 - alfa = 0.1; beta = 0.1
beta = 0.1;

sim('Modelo_basico1')

Y2 = Y.Data;
r2 = r.Data;
tout2 = tout;

%% Simulação 3 - alfa = 0.1; beta = 0.5
beta = 0.5;

sim('Modelo_basico1')

Y3 = Y.Data;
r3 = r.Data;
tout3 = tout;
betaplot3 = betaplot.Data;

%% Gráficos do Modelo variando alfa

figure
plot(tout2,Y2,':','DisplayName','\beta = 0.1','LineWidth',2)
hold on
plot(tout3,Y3,'-.','DisplayName','\beta = 0.5','LineWidth',2)
hold on
plot(tout1,Y1,'DisplayName','\beta = 0.8','LineWidth',2)
hold on
plot(tout1,Yaux,'--','DisplayName','Y equilíbrio','LineWidth',2)
grid on
legend
lgd = legend;
lgd.FontSize = 15;
xlabel('Tempo - t [ano]','FontSize',15)
ylabel('Renda - Y [Bilhões de R$]','FontSize',15)

figure
plot(tout2,r2,':','DisplayName','\beta = 0.1','LineWidth',2)
hold on
plot(tout3,r3,'-.','DisplayName','\beta = 0.5','LineWidth',2)
hold on
plot(tout1,r1,'DisplayName','\beta = 0.8','LineWidth',2)
hold on
plot(tout1,raux,'--','DisplayName','r equilíbrio','LineWidth',2)
grid on
legend
lgd = legend;
lgd.FontSize = 15;
xlabel('Tempo - t [ano]','FontSize',15)
ylabel('Taxa de juros - r [%]','FontSize',15)

%% Simulação 4 - alfa = 0.1; p = 0.1
p = 0.1;

sim('Modelo_proporcional1')

Y4 = Y.Data;
r4 = r.Data;
tout4 = tout;
betaplot4 = betaplot.Data;

%% Simulação 5 - alfa = 0.1; p = 1
p = 1;

sim('Modelo_proporcional1')

```

```

Y5 = Y.Data;
r5 = r.Data;
tout5 = tout;
betaplot5 = betaplot.Data;

%% Simulação 6 - alfa = 0.1; p = 10
p = 0.01;

sim('Modelo_proporcional1')

Y6 = Y.Data;
r6 = r.Data;
tout6 = tout;
betaplot6 = betaplot.Data;

%% Graficos do Modelo variando beta

figure
plot(tout6,betaplot6,'-.','DisplayName','p = 0.01','LineWidth',2)
hold on
plot(tout4,betaplot4,'DisplayName','p = 0.1','LineWidth',2)
hold on
plot(tout5,betaplot5,':','DisplayName','p = 1','LineWidth',2)
grid on
legend
lgd = legend;
lgd.FontSize = 15;
xlabel('Tempo - t [ano]','FontSize',15)
ylabel('Beta','FontSize',15)

figure
plot(tout6,Y6,'-.','DisplayName','p = 0.01','LineWidth',2)
hold on
plot(tout4,Y4,'DisplayName','p = 0.1','LineWidth',2)
hold on
plot(tout5,Y5,':','DisplayName','p = 1','LineWidth',2)
grid on
legend
lgd = legend;
lgd.FontSize = 15;
xlabel('Tempo - t [ano]','FontSize',15)
ylabel('Renda - Y [Bilhões de R$]','FontSize',15)

figure
plot(tout6,r6,'-.','DisplayName','p = 0.01','LineWidth',2)
hold on
plot(tout4,r4,'DisplayName','p = 0.1','LineWidth',2)
hold on
plot(tout5,r5,':','DisplayName','p = 1','LineWidth',2)
grid on
legend
lgd = legend;
lgd.FontSize = 15;
xlabel('Tempo - t [ano]','FontSize',15)
ylabel('Taxa de juros - r [%]','FontSize',15)

%% Simulação 7 - alfa = 0.1; p = 3
p = 3;

sim('Modelo_proporcional1')

Y7 = Y.Data;
r7 = r.Data;
tout7 = tout;
betaplot7 = betaplot.Data;

%% Graficos do Modelo proporcional

```

```

figure
plot(tout3,betaplot3,'--','DisplayName','\beta = 0.5','LineWidth',2)
hold on
plot(tout1,betaplot1,'Displayname','\beta = 0.8','LineWidth',2)
hold on
plot(tout5,betaplot5,'Displayname','p = 1','LineWidth',2)
hold on
plot(tout7,betaplot7,':','Displayname','p = 3','LineWidth',2)
legend
lgd = legend;
lgd.FontSize = 15;
xlabel('Tempo - t [ano]','FontSize',15)
ylabel('Beta','FontSize',15)
ylim([-1 30])

```

```

figure
plot(tout3,Y3,':','Displayname','\beta = 0.5','LineWidth',2)
hold on
plot(tout1,Y1,'Displayname','\beta = 0.8','LineWidth',2)
hold on
plot(tout5,Y5,'-.','Displayname','p = 1','LineWidth',2)
hold on
plot(tout7,Y7,'--','Displayname','p = 3','LineWidth',2)
hold on
plot(tout1,Yaux,'Displayname','Y equilibrio','LineWidth',2)
grid on
legend
lgd = legend;
lgd.FontSize = 15;
xlabel('Tempo - t [ano]','FontSize',15)
ylabel('Renda - Y [Bilhões de R$]','FontSize',15)

```

```

figure
plot(tout3,r3,':','Displayname','\beta = 0.5','LineWidth',2)
hold on
plot(tout1,r1,'Displayname','\beta = 0.8','LineWidth',2)
hold on
plot(tout5,r5,'-.','Displayname','p = 1','LineWidth',2)
hold on
plot(tout7,r7,'--','Displayname','p = 3','LineWidth',2)
hold on
plot(tout1,raux,'Displayname','r equilibrio','LineWidth',2)
grid on
legend
lgd = legend;
lgd.FontSize = 15;
xlabel('Tempo - t [ano]','FontSize',15)
ylabel('Taxa de juros - r [%]','FontSize',15)

```

```

%% Simulação 8 - alfa = 0.1; beta = 0.5
beta = 0.5;

```

```

sim('model_basico2')

```

```

Y8 = Y.Data;
r8 = r.Data;
m0out8 = m0out.Data;
tout8 = tout;

```

```

%% Simulação 9 - alfa = 0.1; beta = 0.8
beta = 0.8;

```

```

sim('model_basico2')

```

```

Y9 = Y.Data;
r9 = r.Data;
tout9 = tout;

```

```

%% Simulação 10 - alfa = 0.1; p = 1
p = 1;

sim('Modelo_proporcional2')

Y10 = Y.Data;
r10 = r.Data;
betaplot10 = betaplot.Data;
tout10 = tout;

%% Simulação 11 - alfa = 0.1; p = 3
p = 5;

sim('Modelo_proporcional2')

Y11 = Y.Data;
r11 = r.Data;
betaplot11 = betaplot.Data;
tout11 = tout;

%% Graficos da entrada Rampa

figure
plot(tout8,m0out8,'LineWidth',2)
legend
lgd = legend;
lgd.FontSize = 15;
xlabel('Tempo - t [ano]','FontSize',15)
ylabel('Oferta de moeda - m0 [Bilhões de R$]','FontSize',15)

figure
plot(tout3,betaplot3,'DisplayName','\beta = 0.5','LineWidth',2)
hold on
plot(tout1,betaplot1,'DisplayName','\beta = 0.8','LineWidth',2)
hold on
plot(tout10,betaplot10,'DisplayName','p = 1','LineWidth',2)
hold on
plot(tout11,betaplot11,':','DisplayName','p = 3','LineWidth',2)
legend
lgd = legend;
lgd.FontSize = 15;
xlabel('Tempo - t [ano]','FontSize',15)
ylabel('Beta','FontSize',15)

figure
plot(tout9,Y9,':','DisplayName','\beta = 0.5','LineWidth',2)
hold on
plot(tout8,Y8,'DisplayName','\beta = 0.8','LineWidth',2)
hold on
plot(tout10,Y10,'-','DisplayName','p = 1','LineWidth',2)
hold on
plot(tout11,Y11,'--','DisplayName','p = 3','LineWidth',2)
hold on
plot(tout1,Yaux,'DisplayName','Y equilibrio','LineWidth',2)
grid on
legend
lgd = legend;
lgd.FontSize = 15;
xlabel('Tempo - t [ano]','FontSize',15)
ylabel('Renda - Y [Bilhões de R$]','FontSize',15)

figure
plot(tout9,r9,':','DisplayName','\beta = 0.5','LineWidth',2)
hold on
plot(tout8,r8,'DisplayName','\beta = 0.8','LineWidth',2)
hold on
plot(tout10,r10,'-','DisplayName','p = 1','LineWidth',2)
hold on

```

```

plot(tout11,r11,'--','DisplayName','p = 3','LineWidth',2)
hold on
plot(tout1,raux,'DisplayName','r equilibrio','LineWidth',2)
grid on
legend
lgd = legend;
lgd.FontSize = 15;
xlabel('Tempo - t [ano]','FontSize',15)
ylabel('Taxa de juros - r [%]','FontSize',15)

%% Simulação 12 - alfa = 0.1; beta = 0.5
beta = 0.5;

sim('Modelo_basico3')

Y12 = Y.Data;
r12 = r.Data;
m0out12 = m0out.Data;
tout12 = tout;

%% Simulação 13 - alfa = 0.1; beta = 0.8
beta = 0.8;

sim('Modelo_basico3')

Y13 = Y.Data;
r13 = r.Data;
m0out13 = m0out.Data;
tout13 = tout;

%% Simulação 14 - alfa = 0.1; p = 1
p = 1;

sim('Modelo_proporcional3')

Y14 = Y.Data;
r14 = r.Data;
betaplot14 = betaplot.Data;
tout14 = tout;
m0out14 = m0out.Data;

%% Simulação 15 - alfa = 0.1; p = 5
p = 3;

sim('Modelo_proporcional3')

Y15 = Y.Data;
r15 = r.Data;
betaplot15 = betaplot.Data;
tout15 = tout;

%% Graficos da entrada Senoidal
Yaux = linspace(62,62,1001);
raux = linspace(15,15,1001);

figure
plot(tout12,m0out14,'LineWidth',2)
legend
lgd = legend;
lgd.FontSize = 15;
xlabel('Tempo - t [ano]','FontSize',15)
ylabel('Oferta de moeda - m0 [Bilhões de R$]','FontSize',15)

figure
plot(tout3,betaplot3,'DisplayName','\beta = 0.5','LineWidth',2)
hold on
plot(tout1,betaplot1,'DisplayName','\beta = 0.8','LineWidth',2)
hold on

```

```

plot(tout14,betaplot14,'DisplayName','p = 1','LineWidth',2)
hold on
plot(tout15,betaplot15,':','DisplayName','p = 3','LineWidth',2)
legend
lgd = legend;
lgd.FontSize = 15;
xlabel('Tempo - t [ano]','FontSize',15)
ylabel('Beta','FontSize',15)

figure
plot(tout13,Y13,':','DisplayName','\beta = 0.5','LineWidth',2)
hold on
plot(tout12,Y12,'DisplayName','\beta = 0.8','LineWidth',2)
hold on
plot(tout14,Y14,'-.','DisplayName','p = 1','LineWidth',2)
hold on
plot(tout15,Y15,'--','DisplayName','p = 3','LineWidth',2)
hold on
plot(tout1,Yaux,'DisplayName','Y equilibrio','LineWidth',2)
grid on
legend
lgd = legend;
lgd.FontSize = 15;
xlabel('Tempo - t [ano]','FontSize',15)
ylabel('Renda - Y [Bilhões de R$]','FontSize',15)

figure
plot(tout13,r13,':','DisplayName','\beta = 0.5','LineWidth',2)
hold on
plot(tout12,r12,'DisplayName','\beta = 0.8','LineWidth',2)
hold on
plot(tout14,r14,'-.','DisplayName','p = 1','LineWidth',2)
hold on
plot(tout15,r15,'--','DisplayName','p = 3','LineWidth',2)
hold on
plot(tout1,raux,'DisplayName','r equilibrio','LineWidth',2)
grid on
legend
lgd = legend;
lgd.FontSize = 15;
xlabel('Tempo - t [ano]','FontSize',15)
ylabel('Taxa de juros - r [%]','FontSize',15)

clc
clear all

%% Obtendo dados
load ('PIB2.txt')

for i = 1:10
    Y(i) = PIB2(i,1)/10^6;           % Renda das familias [R$]
    tI(i) = PIB2(i,2);             % Taxa de investimento [%]
    I(i) = PIB2(i,3)/10^6;         % Investimento [R$]
    G(i) = PIB2(i,4)/10^6;         % Gasto governamental [R$]
    C(i) = PIB2(i,5)/10^6;         % Consumo das familias [R$]
    Selic(i) = PIB2(i,6)/100;      % Taxa de juros [-]
    M3(i) = PIB2(i,7)/10^6;        % Demanda monetária [R$]
    M3M0(i) = PIB2(i,9)/10^6;     % Oferta monetária [R$]
    YD(i) = PIB2(i,10)/10^6;
end

Yhelp = Y;
Selichelp = Selic;

%% Equação de Consumo das famílias
for i=1:10
    A1(i,1) = 1;
    A1(i,2) = Y(i);

```

```

end

coefC = inv(A1'*A1)*A1'*C';    % Calculo dos coeficientes
Ccalc = A1*coefC;              % Consumo calculado a partir dos coeficientes

Cresid = C' - Ccalc;
CSSresid = sum(Cresid.^2);
CSStotal = (length(C)-1)*var(C);
Crsq = 1 - (CSSresid/CSStotal);

figure
scatter(Y,C,'r','filled','DisplayName','Dados reais')
hold on
plot(Y,Ccalc,'DisplayName','Equação Ajustada')
legend
lgd = legend;
lgd.FontSize = 15;
xlabel('Renda - Y [Trilhões de R$]','FontSize',15)
ylabel('Consumo das Famílias - C [Trilhões de R$]','FontSize',15)

%% Equação de Investimento
for i=1:10                      % Matriz de auxiliar e coeficientes
    A2(i,1) = 1;
    A2(i,2) = Selic(i);
end

coefI = inv(A2'*A2)*A2'*I';    % Calculo dos coeficientes
Icalc = A2*coefI;              % Investimento calculado a partir dos coeficientes

Iresid = I' - Icalc;
ISSresid = sum(Iresid.^2);
ISStotal = (length(I)-1)*var(I);
Irsq = 1 - (ISSresid/ISStotal);

figure
scatter(I,Selic,'r','filled','DisplayName','Dados reais')
hold on
plot(Icalc,Selic,'DisplayName','Equação Ajustada')
legend
lgd = legend;
lgd.FontSize = 15;
xlabel('Investimento - I [Trilhões de R$]','FontSize',15)
ylabel('Taxa de juros - r [-]','FontSize',15)

%% Equação do Mercado de moeda
for i=1:10                      % Matriz de auxiliar e coeficientes
    A3(i,1) = Y(i);
    A3(i,2) = Selic(i);
end

coefM3 = inv(A3'*A3)*A3'*M3';  % Calculo dos coeficientes
M3calc = A3*coefM3;            % Demanda por moeda calculado a partir dos
coeficientes

Yplot = 3:0.1:7.5;
Selicplot = 0.05:0.01:0.15;
[Yplot,Selicplot]=meshgrid(Yplot,Selicplot);

M3plot = coefM3(1)*Yplot + coefM3(2)*Selicplot;

M3resid = M3' - M3calc;
M3SSresid = sum(M3resid.^2);
M3SStotal = (length(M3)-1)*var(M3);
M3rsq = 1 - (M3SSresid/M3SStotal);

figure
scatter3(Y,Selic,M3,'r','filled','DisplayName','Dados reais')

```

```

hold on
surf(Yplot,Selicplot,M3plot,'DisplayName','Equação ajustada')
legend
lgd = legend;
lgd.FontSize = 15;
xlabel('Renda - Y [R$]')
ylabel('Taxa de juros - r [-]', 'FontSize',15)
zlabel('Base monetária - M3 [Trilhões de R$]', 'FontSize',15)

%% Equação dinâmica da Taxa de Juros
for i=1:9 % Matriz de auxiliar e coeficientes
    A4(i,1) = Selic(i+1)- Selic(i);
    M3M0a(i) = M3M0(i+1);
end

coefBeta = inv(M3M0a*M3M0a')*M3M0a*A4;
Scalc = coefBeta*M3M0a;

%% Equação dinâmica da Renda
for i=1:9 % Matriz de auxiliar e coeficientes
    A5(i,1) = Y(i+1)- Y(i);
    YDa(i) = YD(i);
end

coefAlfa = inv(YDa*YDa')*YDa*A5;
YDplot = -0.05:0.01:0.2;
Ypcalc = YDplot*coefAlfa;

%% Parametros calculados a partir dos ajustes

a = coefC(1)+ coefI(1)+G(10); % autonomous spending
t1 = 0.06; % tax rate
b = coefC(2)/(1-t1); % spending rate
h = coefI(2); % investment elasticity to interest rate
k = coefM3(1); % money elasticity to spending
m0 = M3M0(1); % autonomous money demand
u = coefM3(2); % money elasticity to interest rate

alfa = 0.5; % goods market ajustment rate
beta = 0.001; % money market ajustment rate

r0 = Selic(1); % initial interest rate
Y0 = Y(1); % initial spending

Yeq = (abs(a)+(abs(h)/abs(u))*abs(m0))/(1-b*(1-t1)+(abs(k)*abs(h)/abs(u)));
req = (-abs(m0)/abs(u))*(1-b*(1-t1)+(abs(k)/abs(u)*abs(a)))/(1-b*(1-t1)+(abs(k)*abs(h)/abs(u)));

J(1,1) = alfa*(b*(1-t1)-1);
J(1,2) = alfa*h;
J(2,1) = beta*k;
J(2,2) = beta*u;

%% Simulação 1
sim('Modelo_basico1')

Y1 = Y.Data;
r1 = r.Data;
r1 = r1*100;

%% Simulação 1
p= 0.1;
sim('Modelo_proporcional1')

Y2 = Y.Data;
r2 = r.Data;
r2 = r2*100;

```

```

%% Gráficos

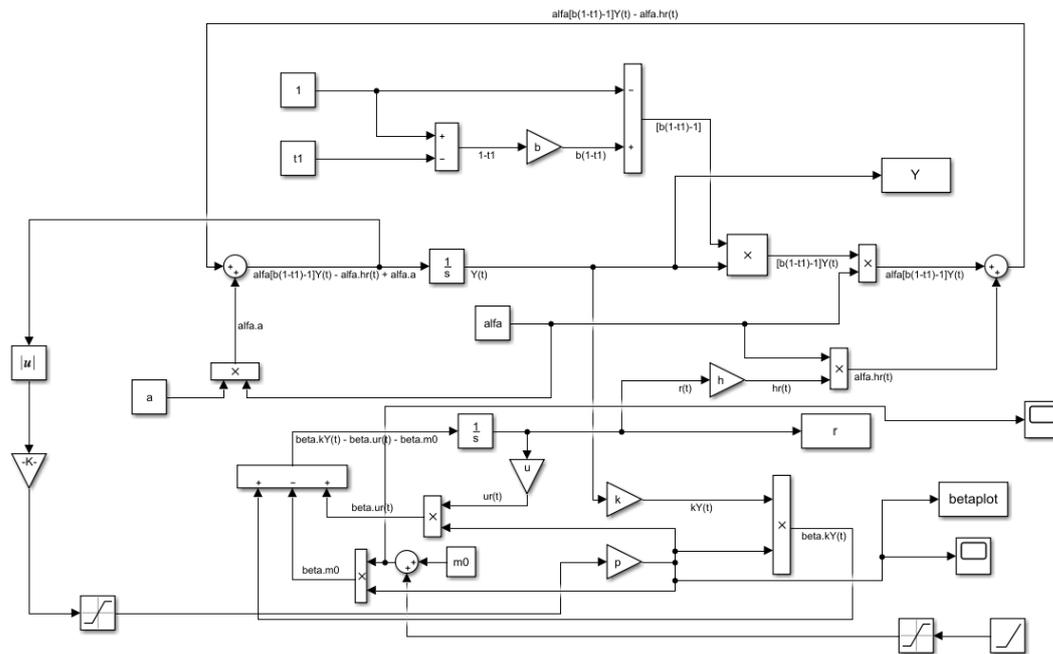
treall = linspace(0,10,10);
Selichelp = Selichelp*100;

figure
plot(tout,Y1,'LineWidth',1.5,'DisplayName','Ajustado')
hold on
plot(tout,Y2,'LineWidth',1.5,'DisplayName','Controlado')
hold on
scatter(treall,Yhelp,'filled','DisplayName','Real')
legend
lgd = legend;
lgd.FontSize = 15;
xlabel('Tempo - t [ano]','FontSize',15)
ylabel('Renda - Y [Bilhões de R$]','FontSize',15)
xlim([0 50])

figure
plot(tout,r1,'LineWidth',1.5,'DisplayName','Ajustado')
hold on
plot(tout,r2,'LineWidth',1.5,'DisplayName','Controlado')
hold on
scatter(treall,Selichelp,'filled','DisplayName','Real')
legend
lgd = legend;
lgd.FontSize = 15;
xlabel('Tempo - t [ano]','FontSize',15)
ylabel('Taxa de juros - r [%]','FontSize',15)
xlim([0 20])

```


Modelo para β controlado e entrada do tipo rampa:



Modelo para β controlado e entrada do tipo senoidal:

