UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS-PPGECE

Rodrigo Rodolfo Baltazar de Souza

AS CARACTERÍSTICAS E O NÍVEL DO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO EM TAREFAS INTRODUTÓRIAS ENVOLVENDO FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Sorocaba
2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS - PPGECE

Rodrigo Rodolfo Baltazar de Souza

AS CARACTERÍSTICAS E O NÍVEL DO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO EM TAREFAS INTRODUTÓRIAS ENVOLVENDO FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Dissertação apresentada no PPGECE para obtenção do título de Mestre Profissional em Ensino de Ciências Exatas.

Orientação: Prof. Dr. Paulo César Oliveira

Sorocaba

2024

Souza, Rodrigo Rodolfo Baltazar de

As características e o nível do desenvolvimento do pensamento algébrico em tarefas introdutórias envolvendo funções exponenciais / Rodrigo Rodolfo Baltazar de Souza -- 2024.
214f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba
Orientador (a): Paulo César Oliveira
Banca Examinadora: Reinaldo Feio Lima, Rogerio Fernando Pires
Bibliografia

1. Pensamento algébrico. 2. Função Exponencial. 3. Níveis de desenvolvimento. I. Souza, Rodrigo Rodolfo Baltazar de. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Maria Aparecida de Lourdes Mariano - CRB/8 6979

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Rodrigo Rodolfo Baltazar de Souza, realizada em 16/02/2024.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Paulo Cesar Oliveira (UFSCar)

Prof. Dr. Reinaldo Feio Lima (UFPA)

Prof. Dr. Rogerio Fernando Pires (UFU)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas.

Agradecimento

A minha esposa e filha por todo incentivo, paciência, compreensão pelos momentos de ausência, pelo suporte nas revisões ortográficas (Obrigado Amor!). Amo vocês!

A minha mãe e meu pai, pelas orações, pelo apoio, e aos meus irmãos pelo incentivo. Também amo vocês!

Ao Prof. Dr. Paulo César Oliveira, meu orientador, pelo apoio, ensinamentos, por todo incentivo, e pelas orientações que foram momentos de aprendizagem, além da dedicação e companheirismo. Foi uma honra tê-lo novamente me orientando em mais uma pesquisa.

Aos professores que compuseram a banca examinadora, Prof. Dr. Rogério Fernando Pires e Prof. Dr. Reinaldo Feio Lima, meu muitíssimo obrigado por todas as contribuições e sugestões.

Aos professores da UFSCar – Campus Sorocaba do programa PPGECE, com os quais tive a oportunidade de conviver, aprender e construir conhecimentos para toda vida.

Aos meus amigos de sala, por todo companheirismo e troca de experiências que foi de grande importância para meu progresso.

E a todos meus amigos e familiares que me incentivaram e me apoiaram nessa caminhada.

RESUMO

Esta pesquisa surgiu ao buscarmos compreender em que nível de desenvolvimento do Pensamento Algébrico (PA) que alunos do 1º ano do Ensino Médio que optaram por um itinerário formativo em que a matemática não está presente possuem ao iniciarem os estudos de Funções Exponenciais. Para isso optamos por utilizar o modelo proposto por Almeida (2016), que descreve as cinco características do PA e como a partir deles podemos determinar o nível de desenvolvimento do PA. Utilizamos como forma de complementar a análise das atividades, a teoria do Registros de Representação Semiótica propostas por Duval (2009). Para situar nossa pesquisa realizamos uma busca de pesquisas presentes no Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes (BTD-CAPES), que abordassem Pensamento Algébrico e Registros de Representação Semiótica, Pensamento algébrico e funções exponencias, Registros de Representação Semiótica e funções exponencias, e por fim que apresentassem os três temas. Os objetivos deste trabalho são identificar características e o nível de desenvolvimento do Pensamento Algébrico presentes em tarefas dos alunos da 1ª série do Ensino médio ao iniciarem os estudos referentes a Função exponencial. Nossa pesquisa tem caráter qualitativo, sendo assim, buscamos descrever a turma participante da pesquisa e como foram aplicadas as atividades com o objetivo de responder à questão “Quais são os níveis de desenvolvimento e as características do Pensamento Algébrico presentes na resolução de tarefas envolvendo função exponencial para alunos da 1ª série do ensino médio?”. Para responder à questão de pesquisa, optamos por utilizar uma Sequência Didática baseada na Engenharia Didática como metodologia de pesquisa, sendo realizada assim as análises, a experimentação e a validação dos resultados. Ao final de nossa pesquisa observamos que as características do PA “Estabelecer relações” e “Modelar” apresentaram maior frequência durante a aplicação das duas propostas de sequência de atividades e que a maioria dos alunos estavam nível 1 de desenvolvimento do pensamento algébrico ao iniciar os estudos referentes a Função exponencial, além de observar como a mobilização de vários registros de representação contribuem para um melhor desenvolvimento do PA.

Palavras-chave: Pensamento algébrico. Função Exponencial. Registros de Representação Semiótica. Educação. Níveis de desenvolvimento.

ABSTRACT

This research arose when we sought to understand what level of development of Algebraic Thinking (AT) that students in the 10^{th} – grade, High School, who opted for a training itinerary in which mathematics is not present have when they begin studying Exponential Functions. To do this, we chose to use the model proposed by Almeida (2016), which describes the five characteristics of AT and how, based on them, we can determine the level of development of AT. As a way of complementing the analysis of activities, we used the theory of Semiotic Representation Records proposed by Duval (2009). To situate our research, we carried out a search for research present in the Brazilian Digital Library of Theses and Dissertations (BDTD) and in the Capes Catalog of Theses and Dissertations (BTD-CAPES), which addressed Algebraic Thinking and Records of Semiotic Representation, Algebraic Thinking and exponential functions, Semiotic Representation Register and exponential functions, and finally presenting the three themes. The objectives of this work are to identify characteristics and the level of development of Algebraic Thinking present in tasks of 10^{th} – grade, High School students, when starting studies related to the Exponential Function. Our research is qualitative in nature, therefore, we seek to describe the group participating in the research and how the activities were applied with the aim of answering the question "What are the levels of development and characteristics of Algebraic Thinking present in solving tasks involving exponential function for 10^{th} – grade high school students?" To answer the research question, we chose to use a Didactic Sequence based on Didactic Engineering as a research methodology, thus carrying out analysis, experimentation and validation of the results. As a result of our research, we observed that the AT characteristics "Establishing relationships" and "Modeling" were more frequent during the application of the two activity sequence proposals and that the majority of students were at level 1 of development of algebraic thinking when starting studies related to the Exponential Function, in addition to observing how the mobilization of various representation records contributes to better development of the AT.

Keywords: Algebraic thinking. Exponential function. Semiotic Representation Register. Education. Level of development.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS

AVA	Ambiente Virtual de Aprendizagem
BDB	Programa da Biblioteca Digital Brasileira
BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
BTD-CAPES	Catálogo Teses e Dissertações da Capes
CER	Capacidade de estabelecer relações
CM	Capacidade de modelar
CG	Capacidade de generalizar
COD	Capacidade de operar com o desconhecido como se fosse conhecido
CCS	Capacidade de construir significado para a linguagem e para os objetos algébricos
FINEP	Financiadora de Estudos e Pesquisas
FUA	Fundação Ubaldino do Amaral
IBICT	Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia
OA	Objetos de Aprendizagem
PA	Pensamento Algébrico
PAEE	Público-alvo da Educação Especial
PCN	Parâmetro Curricular Nacional
PG	Progressões Geométricas
PPGECE	Pós-graduação em Ensino de Ciências Exatas
PUC-SP	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
SAAM	Sala de Apoio à Aprendizagem de Matemática
TEA	Transtornos do espectro autista
TGD	Transtornos globais do desenvolvimento
TIC	Tecnologias de Informação e Comunicação
TRRS	Teoria dos Registros de Representação Semiótica
UEFS	Universidade Estadual de Feira de Santana
UEL	Universidade Estadual de Londrina
UFBA	Universidade Federal da Bahia
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFSM	Universidade Federal de Santa Maria

UNESPAR	Universidade Estadual do Paraná
UNIFEI	Universidade Federal de Itajubá

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Os primeiros estudos que realizamos relativos aos conceitos do Pensamento Algébrico (PA), ocorreram no início do ano de 2022, no curso de verão do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Exatas (PPGECE) da Universidade Federal de São Carlos – Campus Sorocaba. O curso, intitulado “Resolução de Problemas”, ministrado pelo professor doutor Rogério Fernando Pires, nos apresentou a brochura “Álgebra no ensino básico”, de 2009, de autoria João Pedro da Ponte, Neusa Branco e Ana Matos, que aborda as perspectivas desses autores sobre o pensamento algébrico.

Ponte, Branco e Matos (2009) apresentam uma perspectiva para análise de atividades que envolvem o pensamento algébrico, sendo elas divididas em três vertentes: representar, raciocinar e resolver problemas e modelar situações. Para a vertente representar, Ponte, Branco e Matos (2009) apresentam três formas de observação do desenvolvimento do Pensamento Algébrico, sendo que a primeira é por meio da leitura, compreensão, escrita e operação com símbolos usando as convenções algébricas usuais; a segunda é a mobilização de diferentes tipos de representação de um mesmo objeto matemático; e por fim, a terceira, consiste em evidenciar o sentido do símbolo, compreender os diferentes sentidos do mesmo símbolo em diferentes contextos.

A vertente raciocinar, segundo Ponte, Branco e Matos (2009), está diretamente ligada à forma como o indivíduo relaciona as propriedades Matemáticas para o desenvolvimento da tarefa; como esse indivíduo generaliza as relações dos objetos matemáticos que constituem a tarefa; e por fim como desenvolve a dedução necessária para realização da tarefa.

Por fim, no que tange a resolver problemas e modelar situações, deve-se observar o uso, segundo Ponte, Branco e Matos (2009, p.11), “de expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (de equações e de inequações), funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação)”.

Durante o curso “Fundamentos Metodológicos da Educação em Ciências e Matemática”, também do PPGECE da UFSCar (Campus Sorocaba), ministrado pelo Professor Dr° Paulo César Oliveira, comecei a me aprofundar sobre os conceitos acerca do Pensamento Algébrico. Neste curso, entrei em contato com artigos que abordam os conceitos de Pensamento Algébrico em diferentes contextos, passando pelos anos iniciais do ensino fundamental, anos finais do ensino fundamental, ensino médio, formação de professores, e por fim pela construção de característica para análise do Pensamento Algébrico (Almeida (2016) e Almeida e Câmara (2017)).

A partir dessas leituras, comecei a desenvolver uma concepção própria sobre Pensamento Algébrico (PA), acreditando que o conceito vai muito além da representação por meio de incógnitas e variáveis, ou seja, o registro algébrico. Mesmo que esse tipo de representação seja a primeira forma de compreensão ou expressão do PA, não é correto limitar apenas a essa forma. O Pensamento Algébrico está interligado à maneira como se desenvolve no indivíduo, que pode expressá-lo, por exemplo, por meio de um registro numérico ou figural, apresentando características do pensamento algébrico.

Um exemplo é um aluno que na situação "João tem 32 balas e quer dividi-las entre ele e três amigos de maneira que todos tenham a mesma quantidade de balas, quantas balas João e seus amigos irão receber?", elabora algumas formas de resolução dessa atividade: 1) linguagem algébrica: o aluno desenvolve a expressão $4x = 32 \Leftrightarrow x = 32/4 \Leftrightarrow x = 8$; 2); linguagem figural: o aluno pode desenhar 4 indivíduos e distribuir uma bala cada um deles, obtendo também 8 balas para cada um; 3) linguagem numérica: o aluno divide 32 por 4, obtendo 8 balas para cada um. Nessas três representações o aluno obtém um valor desconhecido, utilizando de diferentes representações.

Almeida e Câmara (2017) consideram que o tipo de registro em relação ao Pensamento Algébrico depende do nível de experiência dos alunos. É importante diferenciar o termo nível de experiência do nível escolar, pois um aluno não precisa estar no 8º ano do ensino fundamental, no qual geralmente é iniciada a introdução da utilização de variáveis e incógnitas, para poder se utilizar dessas representações no desenvolvimento do Pensamento Algébrico, ou seja, o nível de experiência do aluno está ligado aos seus conceitos relativos à Matemática, independentemente do nível escolar.

Pensando nos diferentes registros para representar o Pensamento Algébrico, pude observar uma ligação entre os estudos propostos por Almeida e Câmara (2017) e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica proposta por Raymond Duval, pois em ambos os trabalhos é explorada a importância do símbolo e do significado que um objeto matemático pode apresentar.

Ainda sobre Registros de Representação Semiótica, o artigo “O traçado de curvas de funções exponenciais com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica” de Oliveira, Souza e Lourenço (2022), foi um importante motivador para escolha da função exponencial como objeto matemático de estudo. O artigo apresenta uma proposta de metodológica para o processo de ensino-aprendizagem de função exponencial, utilizando como base os trabalhos desenvolvidos por Raymond Duval para o procedimento de interpretação global do esboço de curvas de funções exponencias.

Na pesquisa desenvolvida por Oliveira, Souza e Lourenço (2022) são apresentadas diferentes construções gráficas para funções do tipo exponencias, os autores propõem em seu trabalho a importância para compreensão de função dos diferentes tipos de representações que esse objeto matemático pode ter. Oliveira, Souza e Lourenço (2022) concluem que:

> Assim, a coordenação e articulação das representações algébrica e gráfica das funções exponenciais, portanto, são pontos fundamentais a serem explorados no Ensino Médio para que haja uma compreensão mais completa do conceito de função, porém se faz necessário, igualmente, explorar com o devido cuidado as outras representações desse conceito, para que o aluno tenha uma visão macroscópica do tópico estudado, sempre coordenando as representações, pois representações distintas apresentam informações diferentes do mesmo objeto matemático representado, de modo que uma ou outra representação favoreça o tratamento do objeto matemático. (OLIVEIRA, SOUZA e LOURENÇO, 2022, p. 109).

Sendo assim, a intenção desta dissertação é elucidar se ao compreender a forma gráfica ou outros tipos de representações de funções do tipo exponencial, o aluno poderá desenvolver atividades que necessitam da articulação com o Pensamento Algébrico de forma mais significativa, ou seja, se a mobilização de diferentes tipos de registros de representação contribui de forma significativa para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico.

A partir da compreensão que uma função exponencial é toda função de reais em reais, cuja lei de formação tenha a forma base $f(x) = a^x$, com $a > 1$ e $a \neq 1$, Oliveira et al (2022) realizam o estudo dos gráficos de funções exponenciais buscando compreender as características das funções exponencias, no qual admitem como forma geral $f(x) = c.a^{x+t} + k$, sendo que o parâmetro ‘a’ está diretamente relacionado com a taxa de crescimento ou decrescimento da função, porém sem alterar o ponto de interseção entre o gráfico e o eixo das ordenadas, o parâmetro ‘c’ também se relaciona com o índice de crescimento alterando o ponto de interseção entre o gráfico e o eixo das ordenadas, o parâmetro ‘t’ é responsável pelo deslocamento horizontal e o parâmetro ‘k’ pelo deslocamento vertical.

Buscando compreender o nível de desenvolvimento do Pensamento Algébrico e que característica do PA são mobilizadas por alunos do 1º ano do Ensino Médio ao iniciarem os estudos Funções exponenciais, além de observar as conversões e tratamentos dos registros de representação que surgem nesse processo, surgiu o interesse de realizar a pesquisa desenvolvida nesta dissertação.

Como forma de compreender a importância de nossa pesquisa realizamos uma busca por trabalhos presentes no Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e no Catálogo Teses e Dissertações da Capes (BTD-CAPES), que abordassem Pensamento Algébrico e Registros de Representação Semiótica, Pensamento algébrico e funções exponencias, Registros de Representação Semiótica e funções exponencias, e por fim que apresentassem os três temas.

Ao pesquisar a combinação de Pensamento Algébrico e Funções Exponenciais, encontrou-se uma única dissertação, de autoria de Aline Kempa Bonotto, datada de 2015, com o título “Ensino e aprendizagem da função exponencial por meio de atividades investigativas e do uso de objeto de aprendizagem”. O objetivo do trabalho foi "analisar uma proposta de ensino de Funções Exponenciais mediada pela utilização de Tecnologias de Informação e Comunicação e Objeto de Aprendizagem, a fim de favorecer o desenvolvimento de habilidades investigativas no aprendiz" (BONOTTO, 2015, p. 37). Tais habilidades, segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), podem ser apresentadas em quatro etapas: Exploração e formulação de questões; Conjecturas; Testes e reformulações; e, por fim, Justificação e avaliação.

Nesse sentido nosso trabalho difere de Bonotto (2015), pois buscamos analisar os elementos do Pensamento Algébrico apresentados pelos alunos no desenvolvimento de tarefas com foco em Funções Exponencias, analisando também como os alunos mobilizam os diferentes registros de representação relativos a esse objeto matemático, logo tem-se uma oportunidade de se ampliar os estudos relativos a esse objeto matemático e o Pensamento Algébrico.

Os objetivos desse trabalho são identificar características do Pensamento Algébrico presentes na resolução de tarefas envolvendo Função exponencial para alunos da 1ª série do ensino médio e identificar o nível de desenvolvimento do pensamento algébrico que os alunos se encontram ao iniciar os estudos referentes a Função exponenciais.

Pensando na contribuição da atividade no processo de ensino e aprendizagem dos alunos participantes desta pesquisa, as atividades propostas tiveram como finalidade complementar o material didático utilizado pelos alunos.

O material utilizado pelos alunos é do Sistema Ético, produzido pela editora Somos Educação, o autor da área de Matemática indicado no material é Odimar Navas Ferrite. O autor aborda o objeto matemático Função exponencial no Capítulo 1 do Caderno 3, concomitante à Equação e Inequação exponencial, cada capítulo desse material é divido em dois tópicos. Nesse capítulo em questão, o primeiro tópico aborda somente Equação exponencial e o segundo tópico aborda Função exponencial juntamente com Inequação exponencial.

Ao abordar Função exponencial o material apresenta a forma algébrica de uma Função exponencial sendo $f(x) = a^x$, definindo seu domínio nos Reais e imagem nos Reais maiores que zero, em seguida são apresentados exemplos de Funções exponenciais (Figura 1). O autor do material deixa explicito, como observação, que funções na forma $f(x) = b.a^{\alpha.x}$, com $b \neq 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$, são denominadas funções de caráter exponencial ou tipo exponencial, cabe destacar que apesar de não citar diretamente na parte teórica, o autor propõe atividades de função do tipo exponencial de forma $f(x) = b.a^{\alpha.x} + c$, com $c \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Figura 1: Exemplos de funções exponencial presentes no material didático

a. $f(x)\ 3^x$

b. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

c. $f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^x$

Fonte: FERRITE, 2021, p. 8

O material a seguir apresenta quatro propriedades de funções exponenciais, sendo elas:

- Propriedade 1. Se $f(x) = a^x$, temos que se $x = 0$, então $f(x) = f(0) = a^0 = 1$, ou seja, o ponto (0; 1) pertence a função.
- Propriedade 2. A função $f(x) = a^x$ é crescente se, e somente se $a > 1$.
- Propriedade 3. A função $f(x) = a^x$ é decrescente se, e somente se $0 < a < 1$.
- Propriedade 4. A função $f(x) = a^x$, como $a > 0$ e $a \neq 0$ é injetora.

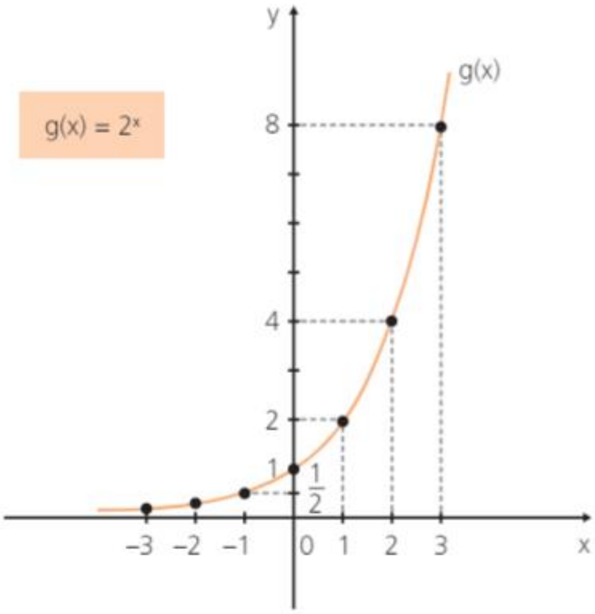
Destacamos que o material aborda inicialmente função crescente e decrescente sem citar diretamente a forma gráfica, porém após discutir as quatros propriedades, são apresentados dois exemplos de construção da forma gráfica de Funções exponencias, sendo eles $g(x) = 2^x$ e $h(x) = (1/2)^x$, dessa forma, foram construídas tabelas de valores para as duas funções (Figura 2) e em seguida os gráficos dessas mesmas funções (Figura 3 e Figura 4), exemplificando assim, funções do tipo crescente e decrescente.

Figura 2: Tabela de valores para construção das funções exponenciais

x	g(x)	h(x)
-3	$\frac{1}{8}$	8
-2	$\frac{1}{4}$	4
-1	$\frac{1}{2}$	2
0	1	1
1	2	$\frac{1}{2}$
2	4	$\frac{1}{4}$
3	8	$\frac{1}{8}$

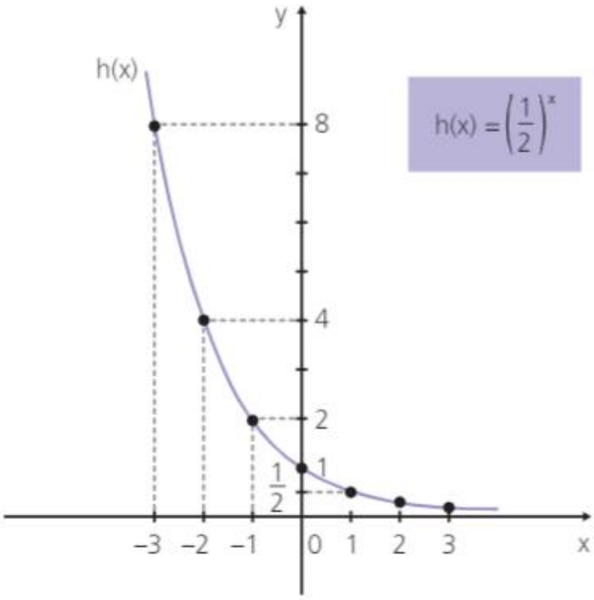
Fonte: FERRITE, 2021, p. 9.

Figura 3: Gráfico da função $g(x) = 2^x$



Fonte: FERRITE, 2021, p. 9.

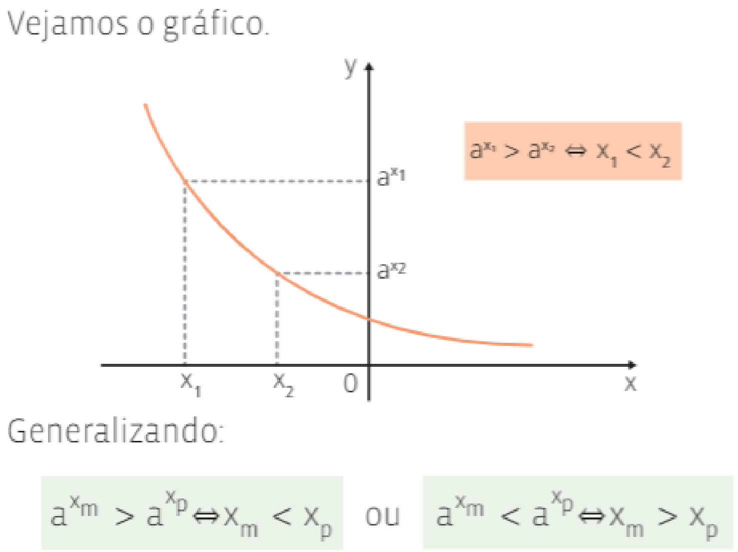
Figura 4: Gráfico da função $h(x) = (1/2)^x$



Fonte: FERRITE, 2021, p. 9.

Ao final desse tópico, a Inequação exponencial é apresentada como aplicação de Função exponencial e o fato de a função ser crescente ou decrescente é utilizado para determinar a solução da inequação proposta (Figura 5 e Figura 6).

Figura 5: Gráfico e análise para resolução da inequação exponencial para 0 < a < 1



Fonte: FERRITE, 2021, p. 11.

Figura 6: Gráfico e análise para resolução da inequação exponencial para a > 1

Fonte: FERRITE, 2021, p. 11.

Analisando a apresentação do conteúdo realizada por Ferrite (2021), observamos que o material apresenta os diferentes tipos de registros de representação para função exponencial, entretanto não vemos uma coordenação entre esses registros que favoreçam aos alunos compreenderem as conversões realizadas, e que possam assim realizá-las de forma independente, pois, como aponta Duval (2012, p. 270), a utilização de diferentes tipos de registros demonstra-se uma “condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam também ser reconhecidos em cada uma de suas representações”.

Em relação ao Pensamento algébrico, observamos que o material inicia a construção do objeto matemático função exponencial por meio da apresentação de sua representação algébrica, entretanto entendemos que a representação algébrica não resume o Pensamento algébrico, sendo essa forma de registro uma das maneiras de se expressar o PA, logo esperamos complementar a abordagem desse objeto matemático compreendendo o nível de desenvolvimento do Pensamento algébrico, para que assim possamos desenvolver significativamente o PA desses alunos no estudo de Funções exponenciais.

A proposta desta dissertação buscou complementar a abordagem do material. Para isso, aplicamos uma sequência de atividades na qual os alunos inicialmente construíram as tabelas e/ou gráficos para então determinar a forma algébrica da função que descreve as situações propostas, sendo assim, uma abordagem diferente da proposta inicial do material didático, que apresentava primeiro a forma algébrica para, em seguida, apresentar a forma gráfica.

Em seu trabalho Almeida (2016) apresenta as cinco características do Pensamento Algébrico para determinar os níveis do desenvolvimento do Pensamento Algébrico, que apesar de ser desenvolvido para problemas de partilha, podem ser adaptadas para outros tipos atividades. Almeida (2016) se utiliza das mesmas nomenclaturas que a pesquisa elaborada por Godino et al. (2014), e a utilizou como base para seu trabalho. Dessa forma, Almeida (2016, p. 108), define em seu modelo os níveis como sendo: nível 0 (ausência do pensamento algébrico), nível 1 (pensamento algébrico incipiente), nível 2 (pensamento algébrico intermediário) e nível 3 (pensamento algébrico consolidado).

O nível 0 é composto por alunos que “não conseguem chegar na resposta correta de um problema desse tipo, deixando-o sem resposta, ou adotando alguma estratégia que leva a resposta errada” (ALMEIDA, 2019, p. 133). Nesse caso não significa que o aluno não mobiliza nenhuma das características do pensamento algébrico, como por exemplo as de generalização de sequência, entretanto não consegue desenvolver os elementos encontrados que possibilitem a resolução dessa atividade.

No nível 1 os alunos entendem a incógnita como um elemento vazio a preenchido por valores particulares e conhecidos. Ao avaliar alunos que utilizaram a estratégia de atribuir valores aos elementos desconhecidos, Almeida (2016) observou que “os alunos que adotam essa estratégia revelam mobilizar as seguintes características do pensar algebricamente: capacidade de estabelecer relações; capacidade de modelar, e capacidade de construir significado para a linguagem e o objeto algébrico” (ALMEIDA, 2016, p.138).

Os alunos que estão presentes no nível 1 se diferenciam dos alunos presentes no nível 2, pois “nesse último o modelo matemático se aproxima mais do modelo esperado para o problema” (ALMEIDA, 2016, p.140), ou seja, os alunos novamente irão mobilizar quatro das cinco características do Pensamento Algébrico, todavia nesse nível determinaram um modelo matemático próximo ao desejado para atividade.

Os alunos que se encontram no nível 3 “conseguem, de forma consolidada, mobilizar todas as cinco características dessa forma de pensar” (ALMEIDA, 2016, p. 145), ou seja, além das quatro características utilizadas no nível 2, os alunos presentes neste nível conseguem mobilizar a característica “operar como o desconhecido como se fosse conhecido, de forma analítica” (ALMEIDA, 2016, p. 145).

No sentido de compreender as características do Pensamento algébrico apresentadas pelos alunos e em que níveis do desenvolvimento algébrico os alunos se encontram, ao realizarem atividades envolvendo Função exponencial, optou-se, neste trabalho, em buscar responder a seguinte questão: “**Quais são os níveis de desenvolvimento e as características do Pensamento Algébrico presentes na resolução de tarefas envolvendo função exponencial para alunos da 1ª série do ensino médio?**”.

Com o objetivo de responder à questão de pesquisa e utilizando um padrão para validar os dados coletados, e consequentemente evitar conclusões enviesadas, buscou-se uma Sequência Didática baseada na Engenharia Didática como metodologia de pesquisa. A Engenharia Didática teve como primeiros percursores do seu desenvolvimento Yves Chevallard, Guy Brousseau e Régine Douady na década de 1980 e depois foi sintetizada pela educadora atemática francesa Michele Artigue, em meados dos anos de 1990. Pode ser encontrado em língua portuguesa em um artigo presente na obra organizada por Jean Brun, “Didáctica das Matemáticas”, de 1996.

Segundo Almouloud e Coutinho (2008) a Engenharia Didática se caracteriza como metodologia de pesquisa, pois:

> [...] em primeiro lugar, por um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e modo de validação que lhe são associados: a comparação entre análise a priori e análise *a posteriori*[1]. Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste. (ALMOULOUD e COUTINHO, 2008, p. 66)

No capítulo 2 está presente a Fundamentação teórica do trabalho desenvolvido, na qual realizou-se uma revisão bibliográfica dos trabalhos que abordavam Pensamento algébrico e Registros de Representação Semiótica, Pensamento algébrico e Função exponencial, e por fim, Função exponencial e Registros de Representação Semiótica. Neste mesmo capítulo são apresentados os estudos que fundamentam a análise das atividades a serem desenvolvidas, sendo elas o modelo proposto por Almeida (2016) das características e níveis do desenvolvimento do Pensamento algébrico e a teoria dos Registros de Representação Semiótica desenvolvido por Duval (2009).

A metodologia da pesquisa foi abordada no Capítulo 3, a pesquisa em questão tem caráter qualitativo, sendo que são apresentadas as características dos alunos participantes da pesquisa, o ano escolar, familiaridade com a Matemática e o tipo de itinerário escolhido. Em relação ao colégio no qual a pesquisa foi realizada, são apresentadas a estrutura, construção histórica, tipo de material didático e como a disciplina de Matemática é estruturada. Ao final desse capítulo são apresentadas as estruturas das tarefas propostas com o objetivo de apresentar um panorama inicial para as resoluções que viriam a ser realizadas pelos alunos e são apresentados os itens e as suas respectivas respostas esperadas.

No Capítulo 4 foi realizada a análise das questões dos alunos, no qual serão apresentadas as análises, a experimentação e a validação dos resultados. As análises serão realizadas utilizando-se como referência o modelo proposto por Almeida (2016)

[1] No capítulo 3, no qual se abordará a Metodologia será detalhada as especificidades de uma análise *a priori* e de uma análise a posteriori

para as características e o nível de desenvolvimento do Pensamento Algébrico, sendo o suporte para as análises a teoria dos Registros de Representação Semiótica proposta por Duval (2009).

E por fim, no Capítulo 5, são apresentadas as considerações finais da pesquisa desenvolvida nesta dissertação, na qual é apresentada a resposta para questão de pesquisa e sugestões para futuras pesquisas sobre Pensamento algébrico e Função exponencial.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A seguir serão apresentadas duas sessões que irão abordar a proposta de análise das características do Pensamento Algébrico proposta por Almeida (2016) e Almeida e Câmara (2017), e a Teoria dos Registro de Representação Semiótica proposta por Duval (2009) para análise das conversões das representações semióticas entre registros e os tratamentos de cada representação de uma função exponencial.

2.1. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo tem como objetivo apresentar os trabalhos que foram utilizados para estruturar a pesquisa realizada, além de servir de base para situar a importância da pesquisa no campo da Educação Matemática. Inicialmente serão apresentados os trabalhos levantados por meio da pesquisa na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes (BTD-CAPES).

A BDTD foi concebida e é mantida pelo Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia (IBICT) no âmbito do Programa da Biblioteca Digital Brasileira (BDB), com apoio da Financiadora de Estudos e Pesquisas (FINEP), e foi oficialmente disponibilizada ao público no final de 2002. Com as reformulações que ocorreram nos últimos anos, a BDTD tem se consolidado com uma das maiores iniciativas globais para a disseminação e aumento da visibilidade de teses e dissertações.

A criação do Catálogo de Teses e Dissertações (BTD-CAPES) por meio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) teve como objetivo melhorar e facilitar o acesso a informações consolidadas e que refletissem as atividades do sistema nacional de pós-graduação brasileiro, e assim colocar à disposição da comunidade acadêmica e do público em geral o Painel de Informações Quantitativas do Catálogo de Teses e Dissertações (BTD-CAPES), através do qual é possível consultar informações quantitativas sobre teses e dissertações defendidas no Brasil, a partir de 2013.

Para a análise dos trabalhos pesquisados utilizamos a revisão sistemática, pois essa revisão tem como objetivo promover a análise e a síntese da literatura existente em determinada área ou tópico (GOUCH, 2007). Outros autores que também abordam a revisão sistemática são Rob Briner e David Denyer, que afirmam que o termo “sistemática” demonstra um modelo de pesquisa e que não é necessariamente um padrão a se seguir, nem que seja rígido em sua elaboração, e que expresse de forma comunicativa quais procedimentos foram utilizados na pesquisa.

Como forma de sistematizar o termo revisão sistemática, Briner e Denyer (2012) esclarecem que esse tipo de pesquisa envolve cinco passos, sendo eles: “1) Planejar a revisão; 2) Localizar os estudos, 2) Avaliar as contribuições dos trabalhos; 4) Analisar e sintetizar as informações; 5) Relatar os resultados. (BRINER e DENYER, 2012, p.115)”. Importante destacar que os mesmos autores salientam que além de seguir esses cinco passos descritos, uma revisão sistemática deve se basear nos seguintes princípios: sistematização; transparência; replicabilidade e atualização e síntese.

Para coleta de trabalhos nos bancos de teses e dissertações BDTD e BTD–Capes, foram utilizadas as combinações “Pensamento algébrico” AND “Registros de representações semiótica”, “Pensamento algébrico” AND “Função exponencial”, “Registros de representações semiótica” AND “Função exponencial”, e por fim “Pensamento algébrico” AND “Registros de Representação Semiótica” AND “Função exponencial”, o uso do conectivo AND se deu em ambos os bancos com o objetivo de buscar trabalhos que abordassem concomitantemente os temas de cada combinação. Nesse caso os trabalhos analisados estão compreendidos entre os anos de 2003 e 2022, o período descrito está diretamente relacionado ao início dos trabalhos de acervo promovidos pelo BDTD, destacando que o último levantamento foi realizado pelo autor desta pesquisa em agosto de 2022.

Pode-se observar 08 pesquisas (BDTD) e 05 pesquisas (BTD-CAPES) sobre Pensamento Algébrico e Registros de Representação Semiótica, totalizando 10 trabalhos, desconsiderando-se os trabalhos em duplicata. Após uma análise prévia, a dissertação desenvolvida por Cristiano Marinho da Silva, em 2018, foi retirada da análise, pois não apresentava elementos substâncias sobre Registros de Representação Semiótica, já que a única menção a Raymond Duval estava relacionada um parágrafo que citava uma entrevista realizada com esse pesquisador para a Revista Paranaense de Educação Matemática, na qual, ao ser questionado sobre os progressos no ensino e aprendizagem de Matemática, Duval aponta que apesar terem ocorrido mudanças significativas, os progressos observados por ele foram pequenos. Sendo assim, restaram para análise 08 dissertações de mestrado e 01 tese de doutorado.

Observamos também 01 pesquisa (BDTD) e 01 pesquisa (BTD-CAPES) sobre Pensamento Algébrico e função exponencial, sendo que em ambas as plataformas foi apresentada a mesma dissertação. Ao realizar a pesquisa sobre Registros de Representação Semiótica e Funções exponenciais foi possível obter 02 pesquisas (BTD-CAPES) e 03 pesquisas (BDTD), totalizando 04 dissertações ao se retirar as repetições, entretanto não foram encontrados trabalhos que envolvam ao mesmo tempo Função exponencial, Registros de Representação Semiótica e Pensamento Algébrico.

A partir da coleta dos trabalhos a análise ocorreu por meio da Localização dos trabalhos (Universidade, ano de publicação e região do Brasil); avaliou-se as possíveis contribuições dos trabalhos coletados; analisou-se e sintetizou-se os trabalhos coletados (Fundamentação teórica, objetivo, metodologia e resultados); por fim analisou-se a relação dos trabalhos coletados com o trabalho desenvolvido nesta dissertação.

As sessões seguintes apresentarão as análises dos trabalhos coletados, sendo estes divididos em trabalhos sobre “Pensamento algébrico e Registros de representações semiótica”, “Pensamento algébrico e Função exponencial”, e “Registros de representações semiótica e Função exponencial”.

2.1.1. Pensamento algébrico e Registros de Representação Semiótica

Com o objetivo de observar a gama de trabalhos desenvolvidos dentro da temática proposta nesta dissertação, realizou-se uma pesquisa combinada sobre os temas Pensamento Algébrico e Registros de Representação Semiótica, na qual encontramos 09 trabalhos desenvolvidos sobre essas temáticas no Banco Digital de Teses e Dissertações (BDTD) e no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes (Capes).

Desses 09 trabalhos, 08 deles são dissertações de mestrado e somente um é uma tese de doutorado. As datas de publicação das nove dissertações de mestrados encontram-se no intervalo de 2003 a 2019, sendo 2003 a data de publicação do trabalho mais antigo encontrado e 2019 a data de publicação do trabalho mais recente encontrado. Três destas dissertações foram produzidas no âmbito do programa de mestrado da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), duas foram desenvolvidas no programa de mestrado da Universidade Estadual de Londrina (UEL), duas foram desenvolvidas no programa de pós-graduação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), e uma foi desenvolvida no programa de pós-graduação da Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI).

A tese de doutorado foi desenvolvida no programa de pós-graduação em conjunto de duas universidades, a Universidade Federal da Bahia (UFBA) e a Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS). Pudemos, assim, observar que quatro trabalhos foram desenvolvidos na região Sudeste, quatro na região Sul e dois na região Nordeste. Após realizar esse levantamento das dissertações de mestrado e a tese de doutorado, elaboramos o Quadro 1 apresentando o Autor, Título e Instituição de ensino.

Quadro 1: Trabalhos analisados sobre pensamento Algébrico e Registros de Representação Semiótica

Autor(a)	Título	Instituição
Modanez (2003)	Das Sequências de Padrões Geométricos à Introdução ao Pensamento Algébrico	PUC -SP
Ferreira (2009)	Os alunos do 1º ano do ensino médio e os padrões: Observação, Realização e Compreensão	PUC -SP
Salgueiro (2011)	Como Estudantes do Ensino Médio Lidam com Registro de Representação Semiótica de Funções	UEL
Felix (2014)	Estudo dos Registro de Representação mediados por um objeto de Aprendizagem	UEL
Bortoletti (2014)	Introdução às expressões algébricas na escola básica: variáveis e células de planilhas eletrônicas	UFRGS
Cruz (2016)	Pensamento Algébrico e os Significados do Sinal de Igualdade: O Uso da Oralidade e da Narrativa nas Aulas de Matemática	PUC -SP
Francisco (2018)	Desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos com transtornos do espectro autista (TEA): um estudo à luz da teoria dos registros de representação semiótica	UNIFEI
Sobrinho 2019	Uma análise sobre conceitos algébricos em produções acadêmicas: questões para formação de professores e para pesquisa	UFRGS
Campos (2019)	Uma sequência didática para o desenvolvimento do pensamento algébrico no 6º ano do ensino fundamental	UFBA e UEFS

Fonte: Elaboração própria.

Ao analisar as dissertações, optamos por seguir a análise dos trabalhos em ordem cronológica. Dessa forma, o primeiro trabalho desenvolvido e analisado por nós foi o produzido na PUC-SP no ano de 2003, sendo este a dissertação de mestrado intitulada "Das Sequências de Padrões Geométricos à Introdução ao Pensamento Algébrico", de autoria de Leila Modanez. Em seu trabalho, Modanez (2003) tem como objetivo "verificar se a introdução ao pensamento algébrico, por meio de sequências de padrões geométricos, favorece a superação das principais dificuldades apresentadas pelos alunos que iniciam em Álgebra" (MODANEZ, 2003, p. 30).

Na busca por responder à questão "Uma sequência de ensino por meio de padrões geométricos pode proporcionar ao aluno a introdução ao pensamento algébrico?", Modanez (2003) apresenta três hipóteses para uma sequência de ensino em que a introdução ao pensamento algébrico possa ser atingida:

> 1. engajar o aluno em atividades que inter-relacionem diferentes aspectos da álgebra como resolução de problemas, e não só para encontrar o valor numérico de uma expressão algébrica ou atividades meramente mecânicas.
> 2. propor situações em que o aluno possa investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas, identificando suas estruturas, para que possa descrevê-los simbolicamente.
> 3. procure situações que levem o aluno a construir noções algébricas pela observação de regularidades, e não somente manipulações mecânicas de expressões algébricas. (MODANEZ, 2003, p. 32)

Neste caso, Modanez (2003) entende que a "letra" deve surgir primeiramente como variável, a fim de fazer desenvolver o raciocínio do aluno para resolver cada problema proposto, podendo futuramente essa letra, após o trabalho desenvolvido, ser entendida, em um outro contexto, como uma incógnita.

Modanez (2003) utiliza como fundamentação teórica os estudos desenvolvidos pelo matemático francês Raymond Duval (1993) sobre a Teoria de Registros de Representação Semiótica, que se pauta nas conversões entre registros de representação, seja do registro geométrico para o registro algébrico, como também do registro em língua natural para o registro geométrico, e deste para o registro algébrico, entre outros tipos de conversões.

Outra teoria utilizada por Modanez (2003) é a Mudança de quadros de autoria da Matemática francesa Régine Douady (1987). Douady (1987) entende essa teoria como um meio de obter formulações diferentes para um problema, permitindo ter uma nova visão das dificuldades encontradas e disponibilizar a ferramenta e as técnicas que não transparecem na primeira formulação.

Observamos que Modanez (2003) utilizou a mudança de quadros como fundamentação para o estudo do pensamento algébrico, pois a mesma admite que as imagens mentais têm um papel importante no funcionamento, como ferramenta, dos objetos do quadro, considerando que dois quadros podem conter os mesmos objetos e serem diferentes pelas imagens mentais e pela problemática desenvolvida.

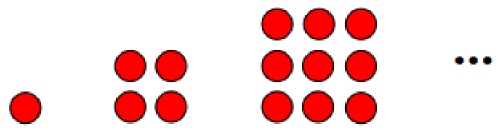
Para elaboração da sequência de atividades, Modanez (2003) elaborou uma sequência didática que pudesse integrar diferente registros de representação (registro figural, registro em língua natural, registro numérico e registro algébrico) que contemplasse também o tratamento dentro de um mesmo registro. Neste caso, optamos por reformular a proposta pedagógica apresentada por Souza e Diniz (1994), pois ela também propunha a introdução ao pensamento algébrico por meio de atividades e sequências de padrões geométricos. Nessa reformulação, reduziu-se o número de atividades, eliminando aquelas que pareciam repetir outras já existentes.

A sequência didática proposta foi aplicada a alunos da 6ª série do Ensino Fundamental (atual 7º ano) de uma escola periférica da cidade de São Paulo. Essas atividades foram realizadas em duplas, com o objetivo, conforme Modanez (2003), de desenvolver as habilidades de expressão oral e escrita, convívio em grupo, troca de informações, discussão sobre os procedimentos e estratégias para a resolução das atividades, levantamento de conjecturas e hipóteses, compartilhando comentários e conclusões comuns.

Ao todo, foram aplicadas 08 atividades, sendo que todas apresentavam uma sequência de padrões geométricos. A partir da análise desses padrões, os alunos deveriam encontrar o número de elementos de um determinado termo e elaborar uma regra para calcular os números de elementos para uma sequência qualquer. Por exemplo, na atividade 3 (Figura 7) proposta por Modanez (2003), há uma sequência de bolinhas vermelhas posicionadas de tal forma a lembrar um quadrado. Após solicitar que os alunos desenhem algumas das sequências, Modanez (2003) pede que os alunos determinem a quantidade de bolinhas de uma figura específica. Ao final, solicita que o aluno represente uma regra para determinar o número de bolinhas de uma figura qualquer da sequência.

Figura 7: Atividade 3: Sequência de bolinhas

Observe a seqüência de figuras abaixo:



a) Desenhe a 4ª figura da seqüência.

b) Desenhe a 6ª figura da seqüência. Quantas bolinhas ela tem?

c) Construa uma tabela relacionando a posição de cada figura com o seu numero de bolinhas

d) A 10ª figura tem quantas bolinhas?

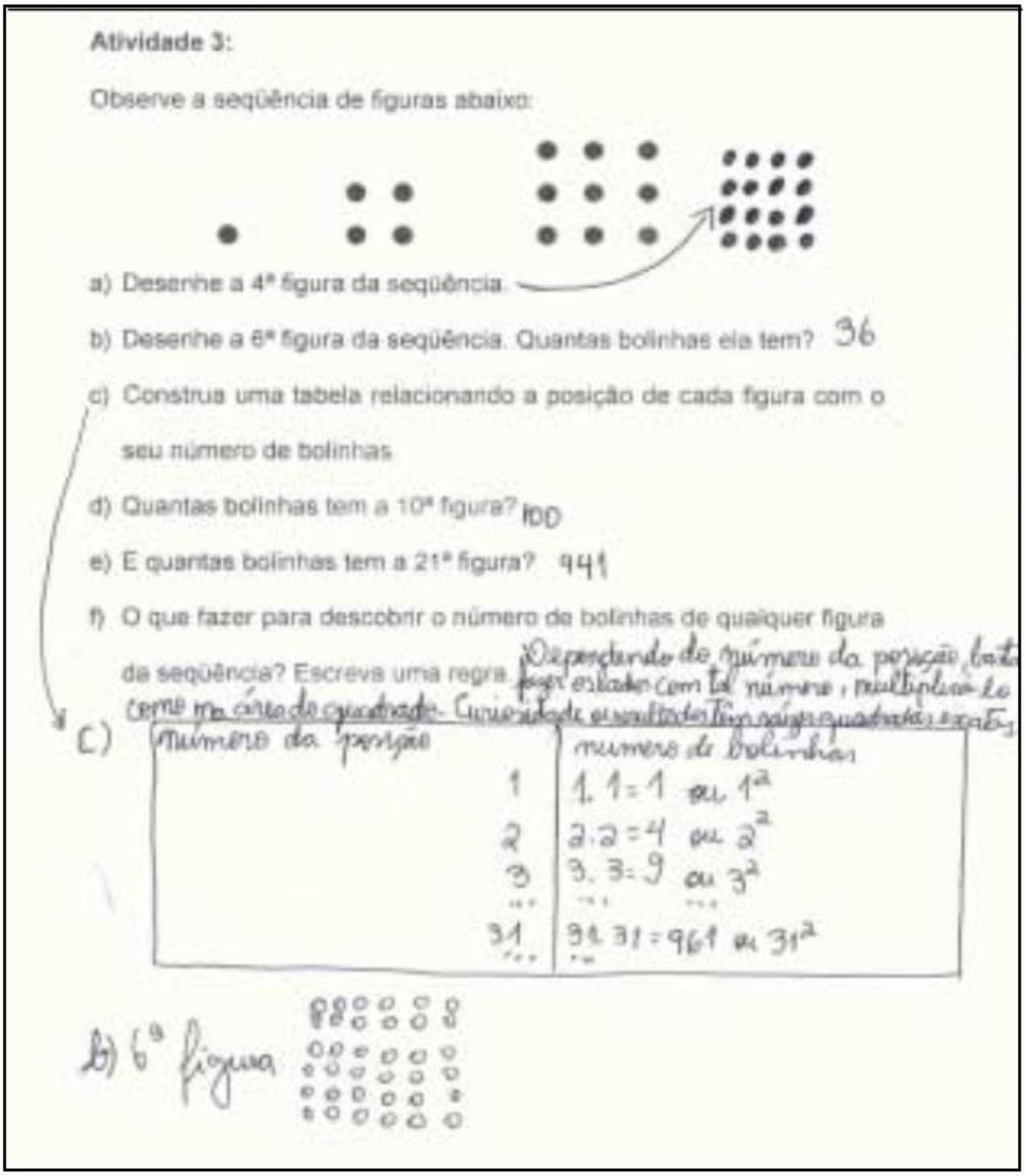
e) E a 21ª figura, tem quantas bolinhas?

f) O que fazer para descobrir o número de bolinhas de qualquer figura da seqüência? Escreva uma regra.

Fonte: MODANEZ, 2003, p. 59

Na atividade 3 (Figura 7) Modanez (2003) esperava que os alunos determinassem que a expressão que representa o número de bolinhas vermelhas para uma figura qualquer da sequência fosse **p²**, ou seja, a posição da figura elevada ao quadrado. Modanez (2003) apresenta em seu trabalho o protocolo da atividade de um dos alunos (Figura 8), no qual podemos observar certa construção do pensamento algébrico desse aluno, com destaques par aos itens c e f.

Figura 8: Protocolo de um aluno referente a atividade 3


Atividade 3:

Observe a seqüência de figuras abaixo:

a) Desenhe a 4ª figura da seqüência.

b) Desenhe a 6ª figura da seqüência. Quantas bolinhas ela tem? 36

c) Construa uma tabela relacionando a posição de cada figura com o seu número de bolinhas

d) Quantas bolinhas tem a 10ª figura? 100

e) E quantas bolinhas tem a 21ª figura? 441

f) O que fazer para descobrir o número de bolinhas de qualquer figura da seqüência? Escreva uma regra. Dependendo do número da posição, basta fazer os lados com tal número, multiplicá-lo como na área do quadrado. Curiosidade: os resultados têm raízes quadradas exatas

c)

número da posição	número de bolinhas
1	1.1=1 ou 1^2
2	2.2=4 ou 2^2
3	3.3=9 ou 3^2
...	...
31	31.31=961 ou 31^2
...	...

b) 6ª figura

Fonte: MODANEZ, 2003, p. 63

No item c, observa-se que o aluno associa o número da figura primeiramente à multiplicação da posição da figura por ela mesma, em seguida apresenta a mesma também como uma potência de expoente 2, na qual a base é a posição da figura. Quanto ao item f, o aluno descreve o raciocínio utilizado para determinar a quantidade de bolinhas vermelhas da figura, mencionando: "Dependendo do número da posição, basta fazer os lados com tal número, multiplicá-lo como na área do quadrado". Observamos que, nessa descrição, o aluno consegue até associar a forma escrita com a área do quadrado, todavia não apresenta uma expressão algébrica para essa atividade. Para esse fato, Modanez (2003) faz a seguinte pontuação:

> O fato do aluno ainda não ter usado símbolos para expressar a resposta encontrada não significa que ele não esteja construindo o pensamento algébrico, pois ao registrar o número da posição vezes ele mesmo, podemos perceber uma evolução no nível de abstração, em que o aluno começa a se desprender do aritmético e aos poucos vai passando para o algébrico. (MODANEZ, 2003, p. 64)

Nesse aspecto, a pesquisa aqui desenvolvida assemelha-se à de Modanez (2003), especialmente em atividades que visam que o aluno obtenha uma expressão para uma determinada sequência numérica. No caso desta dissertação, o foco estará nas Funções exponenciais.

Modanez (2003), a partir da análise da sequência de atividades e dos resultados coletados, tem a percepção de que a metodologia aplicada contribuiu de maneira significativa para o desenvolvimento do pensamento algébrico desses alunos. A partir das análises dos resultados, a autora também concluiu ser preciso dar atenção a um outro problema: a necessidade de melhor capacitar o professor para trabalhar com a introdução ao pensamento algébrico, utilizando sequência de padrões geométricos, a fim de garantir um bom aprendizado por parte dos alunos.

Ao analisar o trabalho realizado por Modanez (2003), percebemos que a conversão que os alunos realizaram da linguagem figural para a linguagem numérica, ou linguagem algébrica, foi concretizada de forma satisfatória. Destacamos que a discussão sobre capacitação e formação continuada do professor de Matemática é contínua, sobre a qual Fiorentini e Lorenzato (2012, p. 5) apontam que "apenas o conhecimento da Matemática e a experiência de magistério não garantem competência a qualquer profissional que nela trabalhe".

O segundo trabalho analisado é a dissertação de mestrado intitulada “Os alunos do 1º ano do ensino médio e os padrões: Observação, Realização e Compreensão” de autoria de Cristiane Regina de Moura Ferreira, defendida no âmbito do Programa de Mestrado em Educação Matemática da PUC-SP no ano de 2009.

O grupo de análise de Ferreira (2009) foi composto por alunos concluintes do 1º ano do Ensino Médio (EM) e professores de Matemática que lecionam para esse ano escolar. No seu trabalho, Ferreira (2009) busca responder a duas questões de pesquisa: "Como o professor do 1º ano do EM considera e aborda as atividades que envolvem a observação de regularidades e generalização de padrões em suas aulas?" e "Como o aluno que terminou o 1º ano do EM, em 2008, observa, realiza e compreende atividades de observação de regularidades e de generalização de padrões?".

Ferreira (2009) apresenta em sua fundamentação teórica uma pequena síntese sobre a Álgebra na Matemática Escolar, abordando autores como Blanton et al (2007) e Kilpatrick et al (2001) para discutir a chamada "Álgebra Precoce", na qual destaca como aspecto fundamental o desenvolvimento profundo do entendimento conceitual das operações e suas conexões. No campo do Pensamento Algébrico, a autora utiliza o entendimento de Ponte (2005), que reconhece que, no período analisado, a Álgebra era vista de maneira redutora, sendo tratada no ensino básico como regras de transformação de expressões e processos de resolução de equações.

Para o estudo dos padrões matemáticos, Ferreira (2009) busca realizar um reexame da educação Matemática, como proposto por Stenn (1990), que elaborou uma análise de diversos artigos da educação Matemática que envolvessem a observação e a generalização de padrões e destaca, como embasamento, os autores Vale e Pimentel (2005); Vale et al (2005); Resende (2007); Zaskis e Liljedahl (2002), Orton e Orton (1999). Esses pesquisadores sugerem, em suas pesquisas, que devemos incentivar os alunos a explorar padrões a partir da sua observação e generalização, oportunizando o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Como forma de complemento aos estudos de padrões, Ferreira (2009) utiliza os estudos de Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (2003) para embasar os conceitos sobre o acesso ao objeto, ou seja, a possibilidade de mobilização do tratamento matemático por meio da sua representação, e na coordenação (conversão) de um objeto matemático entre suas diferentes representações.

Sendo assim, Ferreira (2009) entende que as atividades que envolvem a observação e generalização de padrões pode propiciar a mobilização de diferentes representações de um mesmo objeto, podendo assim auxiliar os alunos a desenvolverem diferentes estratégias de resolução para uma sequência de atividades.

Ferreira (2009) classifica sua pesquisa como qualitativa, utilizando algumas ideias da metodologia de pesquisa denominada Engenharia Didática. Segundo Machado (2008), essa metodologia é composta por quatro etapas: análises preliminares, a concepção e análise a *priori* da situação, a experimentação e análise a *posteriori*.

A pesquisa foi realizada com alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola estadual de São Paulo, localizada em uma cidade do Vale do Paraíba, na qual a autora lecionava. As atividades aplicadas aos alunos foram divididas em duas sessões. A primeira sessão teve como objetivo verificar o desempenho dos alunos nas questões envolvendo conceitos relativos à Progressão Aritmética. Para isso, Ferreira (2009) elaborou e aplicou três atividades que contemplam os conceitos relacionados à progressão aritmética. Ao analisar as atividades realizadas pelos alunos, a autora observou a necessidade de uma revisão das atividades previstas para a segunda sessão, sendo assim, além de retomar conceitos de Progressão Aritmética, Ferreira (2009) acrescentou conceitos de Progressão Geométrica, que foram aplicados em duas atividades elaboradas por ela.

Ferreira (2009) aponta que os alunos apresentaram certa facilidade com as atividades da primeira sessão de atividades, nas quais conseguiam determinar o próximo termo das sequências propostas, entretanto para as atividades da segunda sessão, que abordavam Progressões Geométricas, os alunos demonstraram dificuldade em determinar o termo seguinte das sequências propostas.

Ao fim da análise dessas sequências de atividades, Ferreira (2009) sugeriu a utilização de regularidade e da generalização de padrões de maneira transversal, ou seja, articulando atividades a serem propostas com outras áreas do conhecimento, como, por exemplo, os diferentes tipos de padrões que ocorrem na natureza. Nesse sentido, Ferreira (2009) propôs o emprego do tema "Observação de regularidades e a generalização de padrões" de maneira cuidadosa, "explorando ideias importantes, fazendo com que elas sejam lançadas em todas as combinações possíveis" (FERREIRA, 2009, p. 143).

Ao analisar as conclusões apresentadas por Ferreira (2009), podemos observar que os alunos demonstraram maior facilidade quando as sequências geradas foram oriundas de somatórios. Sobre essa atividade, os alunos realizaram o tratamento dentro do registro numérico de forma mais significativa. Entretanto, quando as sequências foram produzidas, por meio de produtos entre os termos, os alunos apresentaram dificuldades em determinar as sequências. Portanto, acreditamos que a introdução cuidadosa desses conceitos, como apontado por Ferreira (2009), esteja atrelada ao fato de os alunos não terem buscado reproduzir os mecanismos de sequências em Progressões Aritméticas para sequências em Progressões Geométricas.

Destacamos, do relatado por Ferreira (2009) que, nesse caso, os alunos podem confundir objetos matemáticos distintos. Apesar de apresentarem registros que possam ser similares, a forma de determinar uma sequência aritmética pode apresentar certa divergência ao determinar uma sequência geométrica.

A dissertação analisada a seguir é de autoria de Nilton Cesar Garcia Salgueiro e tem o título "Como Estudantes do Ensino Médio Lidam com Registro de Representação Semiótica de Funções". Ela foi defendida no Programa de Mestrado em Ensino de Ciência e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina no ano de 2011.

Salgueiro (2011) apresentou três perspectivas teóricas em sua pesquisa, sendo elas, Pensamento Algébrico, Registros de Representação Semiótica e Teoria da Análise de Erros. Para o estudo de Pensamento Algébrico, Salgueiro (2011), se baseou nos textos de Kieran (1992), Usiskin (1995) e Lins e Gimenez (1997); para o estudo de Registro de Representações Semiótica foram utilizados principalmente textos de Raymond Duval; e para a Teoria da Análise de Erros foram utilizados os textos de autoria de Helena Noronha Cury.

Como aporte teórico para o pensamento algébrico, Salgueiro (2011), apresenta como principais norteadores do seu trabalho os textos produzidos por Kieran (1992), Usiskin (1995) e Lins e Gimenes (1997). Salgueiro (2011) apresenta as três abordagens de Kieran (1992) sobre o desenvolvimento da notação algébrica, sendo elas a *retórica*, etapa na qual há ausência total de símbolos e a resolução de problemas particulares; a *lacônica*, etapa na qual passou-se a utilizar símbolos para representar quantidades desconhecidas; e por fim a *simbólica*, etapa na qual passou-se a utilizar letras para a representar quantidades conhecidas e incógnitas.

Como complemento ao estudo do Pensamento Algébrico, Salgueiro (2011) abordou as quatro concepções que Usiskin (1995) apresenta em seu trabalho, sendo elas, a aritmética generalizada; estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas; estudo de relações entre grandezas; e estudo das estruturas. O uso de tais concepções de Usiskin (1995) está relacionado ao foco em funções da pesquisa de Salgueiro (2011).

Na concepção aritmética generalizada, assim como na abordagem de função, é essencial estabelecer, em sua escrita, uma generalização a partir dos elementos apresentados. Isso implica determinar uma possível lei de formação ou um processo que possibilite a determinação dos demais elementos dessa função.

Quando Usiskin (1995) aborda a concepção de estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas, entende-se que a partir dos processos inicialmente encontrados para expressar uma função, o indivíduo busca simplificá-lo, por exemplo, agrupando os termos semelhantes da expressão algébrica.

Na concepção estudo de relações entre grandezas está o entendimento de que a expressão obtida não apresentará incógnitas, isto é, a expressão terá variáveis, nessa concepção fica mais claro a associação realizada por Salgueiro (2011) com o estudo de funções, é nesse momento que irão existir as noções de variável dependente e variável independente.

Por fim, a concepção de estudo das estruturas está relacionada ao estudo de estruturas como grupos, anéis, corpos e espaços vetoriais. Nesse aspecto, a variável dependerá das propriedades dessas estruturas, por exemplo, para a definição do domínio de uma função.

Salgueiro (2011) apresentou algumas reflexões elaboradas por Lins e Gimenez (1997), primeiramente apresentou o entendimento desses autores sobre o Pensamento Algébrico, que aponta um não consenso sobre o que seja pensar algebricamente, contudo há um certo consenso a respeito de quais são os objetos algébricos, nesse caso equações, cálculo literal, funções, entre outros. Sobre o estudo desses conteúdos Lins e Gimenez (1997) apontam que os conteúdos eram abordados apenas quando se entendia que os alunos estavam “prontos” para este tipo de estudo.

Para contrapor essa forma de pensar o estudo de Álgebra, e a partir de reflexões sobre o tema, Lins e Gimenez (1997), apresentam três características fundamentais desse pensamento:

> [...] produzir significados em relação a números e operações aritméticas; considerar números e operações apenas segundo suas propriedades, e não “modelando” números em outros objetos, por exemplo, objetos “físicos” ou geométricos; operar sobre números não conhecidos, como se fossem conhecidos (LINS, GIMENEZ, 1997, p.150).

Para o estudo de Registros de Representação Semiótica, Salgueiro (2011) divide o assunto em duas sessões. Na primeira é apresentada uma visão geral da Semiótica e da Teoria de Registro de Representação Semiótica proposta por Duval (2009). Nessa primeira sessão a construção da Semiótica tem como foco apresentar a teoria de Registros de Representação Semiótica, na qual os principais pontos destacados por Salgueiro (2011) estão relacionados às concepções de tratamento (modificações que ocorrem dentro de um mesmo registro) e conversão (mudança de um registro para outro de um mesmo objeto matemático). De acordo com o argumento de Duval (2009), só existe compreensão conceitual Matemática quando o aluno mobiliza a conversão e coordenação de dois ou mais registros do objeto matemático de estudo.

Nesse sentido, Salgueiro (2011) buscou na construção e escolha das tarefas da sequência didática proposta em sua pesquisa, apresentar situações que coordenassem tanto o tratamento dentro de um mesmo registro como também a coordenação entre diferentes registros realizados pelos alunos.

Salgueiro (2011) retoma novamente à Teoria dos Registro de Representação Semiótica ao abordá-la no contexto de funções, no qual apresenta os possíveis registros nos quais uma função pode aparecer, sendo eles: Representação algébrica, Representação por meio da relação entre dois conjuntos, Representação na Língua Natural, Representação Tabular e Representação gráfica.

Outro aporte teórico utilizado por Salgueiro (2011) em sua pesquisa é a Teoria da Análise de erros com base do livro “Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos”, de 2007, de autoria da educadora matemática Helena Noronha Cury. A teoria da análise de erros é um campo de estudos da Educação Matemática que tem influências das teorias do campo da Pedagogia e da Psicologia, e que se modificou e se adaptou através do tempo, se adequando às teorias vigentes de cada período.

Segundo Cury (2007) ao aproximar a noção de obstáculo à ideia de erro, tem que se considerar que o obstáculo é um conhecimento. Sendo assim, o aluno construirá este conhecimento relacionando-o com outros em diferentes situações, tentando modificá-los de acordo com as novas situações que lhe são apresentadas. Este fato acarreta uma resistência em abandonar este obstáculo e, por esse motivo, torna-se tão difícil superá-lo:

> [...] pois para isso o aluno em conjunto com o professor, terá que trabalhar este conhecimento da mesma maneira que o faz quando se constrói um novo conhecimento, tendo aquele falso saber, que funcionava na situação anterior, como plano de fundo desta nova construção. (CURY, 2007, p. 34-35).

Salgueiro (2011), buscou utilizar a pesquisa de Cury (2007), com o objetivo de investigar os erros produzidos pelos alunos pesquisados para que fosse possível, dentro da própria sequência didática, minimizá-los.

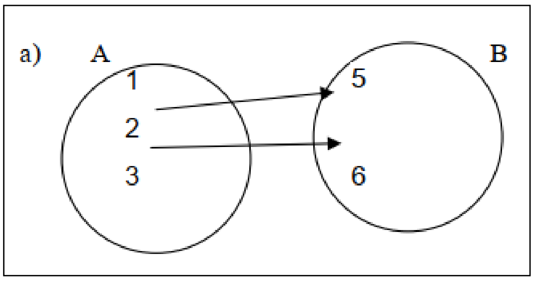
A questão que norteia o trabalho de Salgueiro (2011) é “Como estudantes do Ensino Médio lidam com o conceito de função ao se depararem com uma sequência didática que trabalha diferentes registros de representação semiótica desse objeto matemática?” que culmina no objetivo dessa pesquisa.

Inicialmente, Salgueiro (2011) aplicou um pré-teste para 53 alunos que já haviam estudado o conteúdo relações e de funções, sendo esses alunos estudantes da 1ª série e 2ª série do Ensino Médio. Houve a necessidade de se aplicar em duas turmas diferentes devido a mudanças de turmas dentro do colégio, sendo assim, Salgueiro (2011) teve que reaplicar o pré-teste. O pré-teste continha 05 questões, uma em cada folha, com o objetivo de que uma questão não tivesse relação com a resposta da questão anterior.

A primeira questão do pré-teste consistia em os alunos assinalarem quais palavras eles compreendiam que estavam associadas com funções, havia opções de **a** a **r**, entre as opções estavam palavras como Domínio, Correspondência, Relação, entre outros que podiam ser associados ao estudo de funções.

Na atividade 2, partindo os estudos realizados com funções, principalmente utilizando da ideia de que uma função é a correspondência entre dois conjuntos, foram apresentados diagramas (Figura 9) nos quais os alunos deveriam determinar quais das correspondências poderiam ser consideradas como funções.

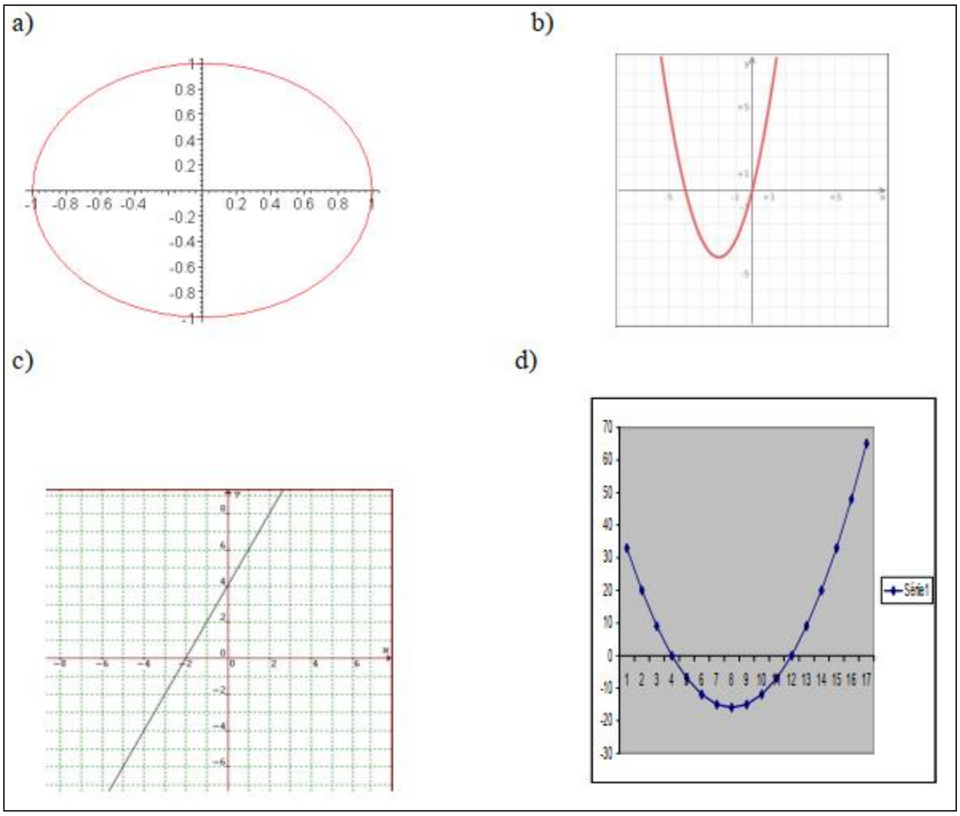
Figura 9: Exemplo de diagrama proposta na atividade 2 do pré-teste



Fonte: SALGUEIRO, 2011, p.127

Na atividade 3, Salgueiro (2011) pretendia que os alunos determinassem quais dos gráficos (Figura 10) apresentados não poderiam ser considerados funções. Os gráficos apresentados focavam-se em curvas e retas, observa-se que nem no enunciado e nem nos itens é apresentado o domínio da função, podendo a falta dessa informação acarretar um obstáculo para determinar se o gráfico é ou não a representação de uma função.

Figura 10: Exemplos dos gráficos apresentados na atividade 3 do pré-teste



Fonte: SALGUEIRO, 2011, p. 128

Como o objetivo de observar se os alunos conseguiam identificar se uma expressão é ou não função a partir de seu domínio e imagem, Salgueiro (2011), propõe a atividade 4 com esse intuito, no qual são apresentados quatro itens (Figura 11) para que os alunos verifiquem se são funções ou não.

Figura 11: Os quatros itens propostos na atividade 4 do pré-teste

a) f: $\Re \rightarrow \Re$ tal que f(x) = $\frac{1}{x}$

b) f: $\Re \rightarrow \Re$, tal que f(x) = 2x - 3

c) f: $\Re \rightarrow \Re$, tal que f(x) = $\sqrt{\frac{x+2}{3}}$

d)f: $\Re \rightarrow \Re$,tal que f(x)= $x^2 + 3x - 4$

Fonte: SALGUEIRO, 2011, P. 129

A atividade 5 foi a última atividade aplicada por Salgueiro (2011) no pré-teste, nesta atividade os alunos deveriam justificar suas respostas das atividades 3 e 4, explicando a razão para que as funções assinaladas não representassem funções.

Observamos que a construção propostas por Salgueiro (2011) percorre diferentes tipos de representação de uma função (diagrama, gráfico e algébrico), todavia os itens entre uma atividade e outra não apresentavam relação direta, logo, pelo pré-teste, não seria possível determinar se os alunos compreendiam diferentes representações de uma função.

A partir da análise do pré-teste Salgueiro (2011) constata que:

> [...] os alunos, após o estudo de relações e funções, compreendiam a noção de função no registro na relação entre dois conjuntos (questão 2), visualizavam a relação entre funções e registros gráficos (questão 1), mas não conseguiam converter estas duas diferentes maneiras de representar este conteúdo. (SALGUEIRO, 2011, P. 55)

A partir das respostas obtidas neste pré-teste, Salgueiro (2011) deu início a elaboração da sequência didática. A sequência didática elaborada continha 13 tarefas que foram aplicadas para 29 alunos da 2ª série do Ensino Médio, do total de alunos, apenas 18 alunos realizaram todas as atividades propostas. Com exceção das tarefas 11, 12 e 13, as demais abordavam funções do tipo afim, com o objetivo de que os alunos observassem os diferentes registros que uma função afim pode ter.

Após a análise das tarefas propostas, Salgueiro (2011), respondendo ao objetivo inicial de investigar como estudantes do Ensino Médio lidam com o conceito de função ao se depararem com uma sequência didática que trabalha diferentes registros de representação semiótica desse objeto matemático, concluiu que é possível propiciar aos alunos condições para compreender conversões e consequentemente as ligações entre os diferentes registros de representação semiótica do objeto matemático.

As condições apresentadas por Salgueiro (2011), estão relacionadas entre outros elementos a aplicação de atividades para os alunos que sejam diferentes das propostas pelo material didático, pois as mesmas podem ser "analisadas e adaptadas a realidade do grupo estudado" (SALGUEIRO, 2011, p. 116).

Outro ponto destacado por Salgueiro (2011) é a necessidade da retomada dos conceitos, pois foram observados casos em que os alunos responderam corretamente a uma questão no pré-teste e quando realizada uma pergunta similar na sequência de atividades o aluno acabava por errar a resposta.

Por fim, Salgueiro (2011) pode, a partir das análises realizadas, apresentar uma classificação de alguns erros presentes nas atividades desenvolvidas pelos alunos, sendo elas: Erro por falta de conhecimento do uso com decimais; Erro por falta de entendimento do conceito de função como relação entre conjuntos; Erro na formulação da tarefa; Erro na conversão entre os registros de representação semiótica; Erro no uso da linguagem algébrica; Erro na determinação do domínio; Erro na representação de funções no inteiros (SALGUEIRO, 2011, p. 117).

A próxima dissertação a ser analisada é a intitulada "Estudo dos Registro de Representação mediados por um objeto de Aprendizagem" de autoria de Ângela Cristina Morete Felix, defendida em 2014 pela Universidade Estadual de Londrina. A autora utilizou a Teoria dos Registros de Representação Semiótica proposta por Duval (2009), com foco principalmente no tratamento das tarefas propostas com o auxílio dos Objetos de Aprendizagem (OA) utilizados, dentro do Registro algébrico.

Nesse contexto, os Objetos de Aprendizagem (OA) são um dos vários materiais didáticos digitais que passaram a ser utilizados no âmbito educacional nas últimas décadas como forma de suporte ao ensino, ou seja," é uma tecnologia que pode ser usada e reutilizada para auxiliar os processos de ensino e aprendizagem" (FELIX, 2014, p. 48).

Felix (2014) apresenta um panorama da inserção da Tecnologia na Educação no Brasil, apresentando maior foco para o estado do Paraná, onde o estudo foi realizado. A dissertação também busca estabelecer a relação entre as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) e a Educação, bem como a relação entre Tecnologia, Professor, Educação Matemática e os Objetos de Aprendizagem (OA) no ensino de Matemática.

A questão de pesquisa que norteia o trabalho de Felix (2014) é "Que registro de representação semióticas estudantes da Sala de Apoio à Aprendizagem de Matemática (SAAM) evidenciam em resoluções de tarefas após a intervenção de recursos tecnológicos, em especial, Objetos de Aprendizagem?", tal questão de pesquisa gerou três objetivos para pesquisa sendo eles:

> - [...] Investigar possíveis contribuições da utilização dos recursos tecnológicos na forma de Objetos de Aprendizagem para identificar os dois tipos de representação semiótica, os tratamentos e as conversões, em tarefas

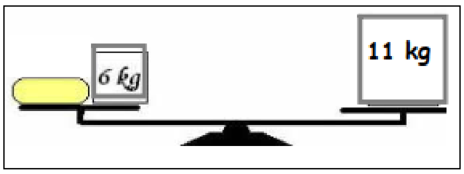
> realizadas por estudantes da sala de apoio à Aprendizagem de Matemática. [...]
> - Analisar possíveis contribuições do uso de OA na compreensão do objeto a matemática: Equação do 1º grau;
> - Averiguar se os registros de representação semiótica, os tratamentos e as conversões, são identificados nas tarefas propostas após a utilização do OA. (FELIX, 2014, p.66)

Os sujeitos desta pesquisa foram alunos de 8º e 9º anos do ensino fundamental da escola em que Felix (2014) lecionava, no estado do Paraná, vinculado ao programa de Sala de Apoio à Aprendizagem de Matemática (SAAM). O Objeto de Aprendizagem selecionado por Felix (2014) foi a Balança Interativa, pois esse objeto pode ser utilizado para o estudo de equações do 1º grau, foco de estudo da pesquisa. A Balança Interativa usa a metáfora de uma balança de dois pratos, possibilitando aos estudantes estabelecerem relações com o objeto de estudo. A autora destaca que o OA escolhido favoreceu o trabalho com várias representações, bem como propiciou a aprendizagem de conceitos algébricos.

A pesquisa analisada apresentou caráter qualitativo, para a coleta de dados foram realizados cinco encontros, sendo o primeiro encontro para explicar o funcionamento da Balança Interativa, e três encontros para os estudantes manipularem e resolverem todos os níveis da AO. No último encontro foi proposta uma tarefa com cinco questões, todas com foco em equações do 1º grau.

Na questão 1 Felix (2014) apresenta uma balança que está em equilíbrio (Figura 12), na qual um dos pratos contém um queijo e um outro objeto pesando 6 kg e o outro prato apresenta um objeto de 11 kg. Em seguida são propostos dois itens (a e b). No item a é solicitado ao aluno que determine, utilizando linguagem matemática, a equação que representa a situação descrita, nesse caso esperava-se que o aluno encontrasse a expressão $x + 6 = 11$. O item b solicitava ao aluno que determinasse o valor do peso do queijo presente em um dos pratos da balança, resolvendo a expressão do item a, esperava-se que o aluno obtivesse como 5kg o valor o peso queijo, no qual, se $x + 6 = 11$, então $x = 11 – 6$, logo $x = 5$.

Figura 12: Balança em equilíbrio apresenta na atividade 1



Fonte: FELIX, 2014, p. 83

Na segunda questão, Felix (2014), propõe: numa balança equilibrada há, em um dos pratos, dois pesos desconhecidos mais sete quilos e no outro prato há um peso de 27 kg, e solicita que o aluno determine os valores dos pesos desconhecidos, utilizando da representação algébrica dessa situação. Pode-se expressar essa situação como $2p + 7 = 27$ (representação algébrica), aplicando o princípio aditivo (subtraindo 7 de ambos os lados da igualdade) tem-se $2p = 20$, e aplicando o princípio multiplicativo (dividindo por 2 em ambos os lados da igualdade) tem-se $p = 10$, ou seja, dois pesos desconhecidos pesam 10 kg cada um. Observa-se que o enunciado dessa questão possibilita ao aluno utilizar outros procedimentos para resolução da questão 2, que não necessariamente se limitem a representação algébrica e que mesmo assim expressem o Pensamento algébrico, principalmente na característica de determinar um valor desconhecido.

A questão 3 apresenta como proposta uma situação em que um indivíduo economizou o dinheiro da sua mesada e desejava comprar um MP4 e um tênis que custava R$ 154,00, e sabendo que o valor dos dois itens juntos totalizava R$ 244,00, seguiam-se dois itens (a e b). No item a, era solicitado ao aluno que escrevesse a equação matemática que correspondesse a situação descrita, neste caso, sendo o valor do MP4 desconhecido (x), tem-se que $x + 154 = 244$. Para o item b era solicitado o valor pago pelo MP4, sendo assim, desenvolvendo a expressão do item a tem-se que, se $x + 154 = 244$, então pelo princípio aditivo (subtraindo 154 de ambos os lados da igualdade) tem-se $x = 90$, logo o valor do MP4 será igual a R$ 90,00.

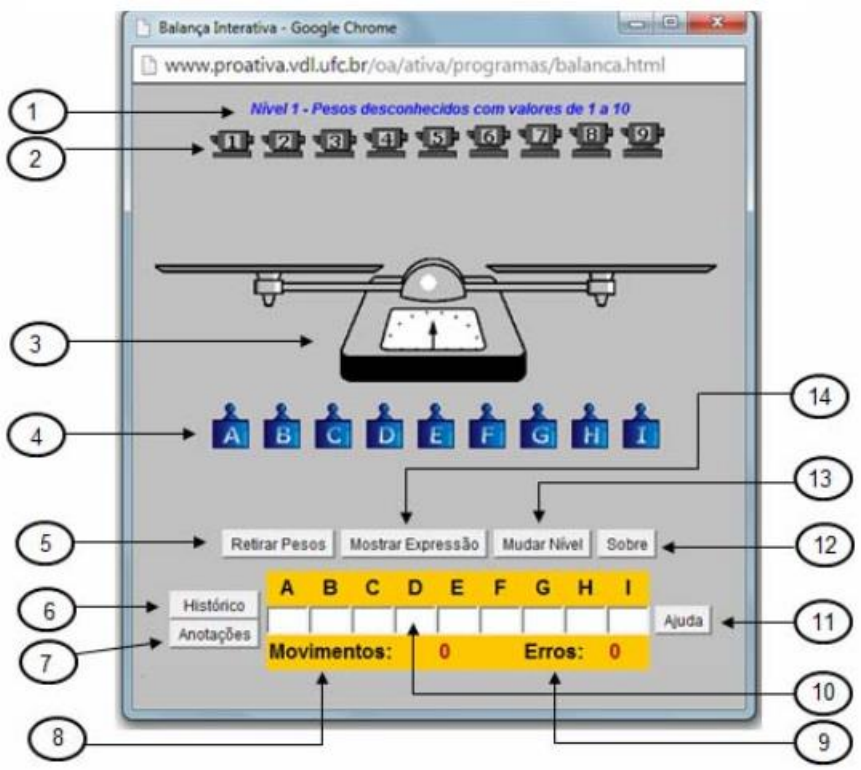
A proposta da questão 4 consiste em uma situação em que um indivíduo compra uma mesa e quatro cadeiras, sabendo que cada cadeira custou R$ 65,00 e que o total da compra foi de R$ 580,00, pede-se que seja determinado o valor da mesa. Sendo assim, uma possibilidade de resolução para essa atividade está na utilização do registro algébrico, no qual tem-se o valor da mesa desconhecido (m), logo $m + 4.65 = 580$, realizando a multiplicação $4 \,.\, 65 = 260$, tem-se que $m + 260 = 580$, aplicando-se o princípio aditivo (subtraindo 260 de ambos os lados da igual) tem-se $m = 320$, portanto o valor da mesa será igual a R$ 320,00.

Por fim, tem-se a questão 5, que consiste em uma situação envolvendo uma balança de dois pratos, sendo que em um dos pratos um menino colocou 2 canetas e 5 borrachas e no outro prato há 7 lápis. Sabendo que cada lápis tem massa igual a 5 gramas e cada borracha tem 3 gramas, pede-se para determina a massa, em gramas, de cada caneta. Para chegar na resolução desta questão, novamente, uma possibilidade é a utilização do registro algébrico, no qual temos o valor da caneta desconhecido (l), logo tem-se que $2l + 5.3 = 7.5$, resolvendo as multiplicações $5.3 = 15$ e $7.5 = 35$, tem-se que $2l + 15 = 35$, aplicando o princípio aditivo (subtraindo 15 de ambos os lados da igualdade), tem-se que $2l = 20$, e por fim, aplicando o princípio multiplicativo (dividindo por 2 de ambos os lados da igualdade) tem-se que $l = 10$, portanto a massa de cada caneta será igual a 10 gramas.

Todas as questões propostas por Felix (2014) apresentavam o mesmo objetivo, no qual consistia em "fazer com que o estudante intérprete a situação descrita e apresente uma representação para resolvê-la, além disso, o estudante deve apresentar uma resposta para sintetizar o seu raciocínio" (FELIX, 2014, p. 85).

Destaca-se também que todas as atividades propostas por Felix (2014) apresentavam como objeto matemático de estudo, equações polinomiais de 1º grau, para resolução destas atividades os alunos utilizaram o OA Balança Iterativa (Figura 13 e Figura 14), um aplicativo de navegador, elaborado pelo Grupo de Pesquisa e Produção de Ambientes Interativos e Objetos de Aprendizagem (PROATIVA) da Universidade Federal do Ceará, para o qual não há mais acesso, pois apesar de ser possível o acesso à página inicial do aplicativo não é possível acessar as funcionalidades do aplicativo, e ao tentar seguir as orientações para liberação do acesso é sugerido o *download* de uma extensão para *Windows XP*, sistema operacional que a Microsoft deixou de dar suporte desde 2014, não sendo possível acessar o aplicativo atualmente (última tentativa de acesso: 05/01/2024 as 12:44). Todavia Felix (2014) apresenta o OA descrevendo cada uma das ferramentas do aplicativo.

Figura 13: Tela do OA e suas funções - Nível 1 ao 5

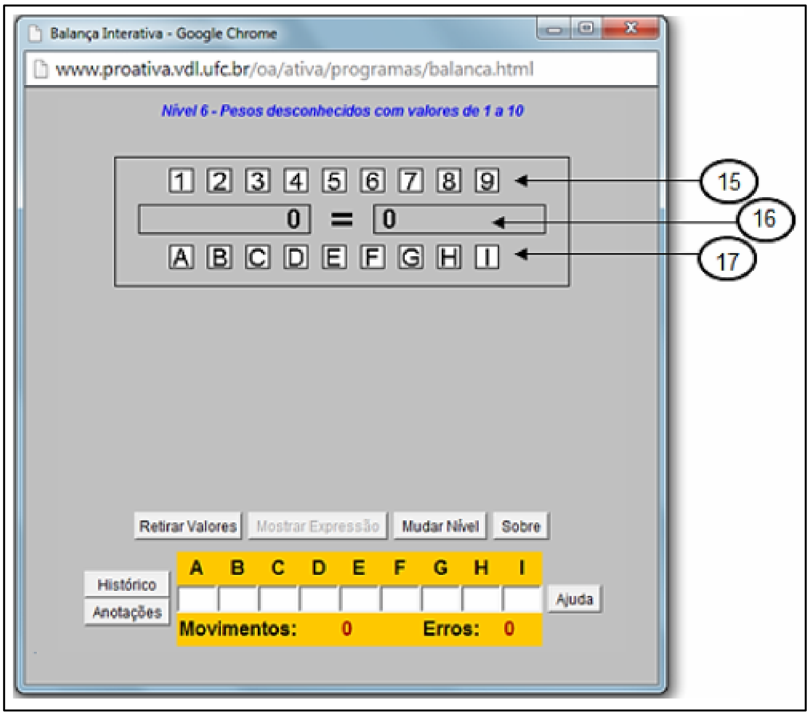


Fonte: FELIX, 2014, p. 79

Descrição das funcionalidades do OA Balança Interativa, segundo Felix (2014), dos níveis 1 ao 5:

> 1. Indica o nível que está sendo utilizado. O estudante pode escolher um dos dez níveis para iniciar o jogo.
> 2. Pesos numéricos ou pesos conhecidos – a quantidade de pesos diminui de acordo com o nível que será utilizado.
> 3. Balança virtual utilizada para a manipulação dos pesos (representação icônica).
> 4. Pesos com letras ou pesos desconhecidos – representam as incógnitas a serem descobertas. Os valores não se repetem no mesmo nível de utilização (letras A – I).
> 5. Retira todos os pesos que estão nos pratos da balança sem a contagem de movimentos.
> 6. Registro de todas as tentativas feitas pelo estudante.
> 7. Permite que sejam feitas pequenas anotações a respeito do jogo.
> 8. Registra o número de movimento efetuados pelo estudante em cada nível.
> 9. Registra o número de erros do estudante em cada nível.
> 10. Local onde são colocados os valores das incógnitas.
> 11. Notas de ajuda para orientar os estudantes acerca da utilização do OA.
> 12. Mostra os créditos da obra.
> 13. Permite que o estudante mude de nível em qualquer momento do jogo.
> 14. Mostra a expressão algébrica representada na balança virtual. (FELIX, 2014, p. 79 e 80)

Figura 14: Tela do OA e suas funções - Nível 6 ao 10



Fonte: FELIX, 2014, p. 80

Descrição das funcionalidades do OA Balança Interativa, segundo Felix (2014), dos níveis 1 ao 5:

> 15. Números (representação simbólica) substituem a figura dos pesos virtuais.
> 16. Tabuleiro ou área de comparação onde os números são colocados. Substitui a balança virtual.
> 17. Letras ou incógnitas (representação simbólica). Substituem a figura dos pesos virtuais. (FELIX, 2014, p. 82)

Felix (2014) ao analisar as atividades dos alunos observou que o registro numérico e os tratamentos deste tipo de registros foram os mais utilizados pelos alunos. Dos 63 registros analisados, 27% apresentavam erro, ou seja, o resultado “demonstra que os estudantes apresentam dificuldades em manipular as operações (adição, subtração, multiplicação e divisão)” (FELIX, 2014, p. 132).

Um último dado relevante da pesquisa de Feliz (2014) está em que:

> [...] em aproximadamente 93% dos registros escritos, os estudantes utilizaram-se de uma representação semiótica, seja numérica, algébrica ou figural e em 90% dos registros foi utilizado tratamentos numéricos e/ou algébricos. Contudo 43% dos registros não atenderam ao que foi solicitado pela questão, tanto no que diz respeito à conversão quanto aos tratamentos. (FELIX, 2014, p. 135)

Como resultado da pesquisa Felix (2014) concluiu que:

> [...] os resultados apresentados, pode-se concluir, que o uso das tecnologias, em especial, o uso do OA Balança Interativa, favoreceu aos estudantes manifestarem registro de representação semiótica. Isso foi evidenciado nos registros escritos desses estudantes. A conversão e o tratamento foram manifestados corretamente em 57% dos registros efetuados por esses estudantes para ordenar e resolver o problema proposto pela questão. (FELIX, 2014, p.141)

Felix (2014) também concluiu que apesar de o registro algébrico ser manifestado durante o decorrer das questões aplicadas, alguns alunos não conseguiram se expressar por meio desse registro. Segundo Felix (2014):

> Isso demonstra uma deficiência em relação ao pensamento algébrico desses estudantes, pois o conteúdo proposto, equação do 1º grau, já tinha sido estudado pelos mesmos. Também observou-se dificuldades nas operações aritméticas básicas. (FELIX, 2014, p. 141).

Felix (2014), pondera que mesmo os estudantes que não resolveram as questões corretamente tentaram expressar o seu pensamento, isso demonstra uma possível dificuldade na conversão do registro em língua natural para o registro algébrico.

A dissertação, em análise a seguir é de autoria de Anderson de Abreu Bortoletti intitulada “Introdução às expressões algébricas na escola básica: variáveis e células de planilhas eletrônicas”, produzida no âmbito do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) no ano de 2014.

Bertoletti (2014) baseia seu aporte teórico em três frentes de pesquisa em Educação Matemática, sendo elas o Pensamento Algébrico, Resolução de problemas e Registros de Representação Semiótica, tais conceitos teóricos nortearam a busca para responder as duas questões de pesquisa propostas por Bertoletti (2014):

> i) Como introduzir aos alunos a linguagem algébrica de forma que o uso de letras, representando quantidades numéricas, seja um assunto compreensível pelos estudantes e não se torne um alvo sem significado?
> ii) É possível utilizar a linguagem das planilhas eletrônicas, a partir de uma associação entre variáveis e células, para o estudo de expressões algébricas na escola básica? (BERTOLETTI, 2014, p. 13).

Ao apresentar os conceitos sobre Pensamento Algébrico, Bortoletti (2014) utiliza como referências os estudos realizados por Fiorentini, Miorim e Miguel (2003) e Usiskin (1995). Do trabalho sobre Fiorentini, Miorim e Miguel (2003) são destacados por Bertoletti (2014) os elementos que caracterizam o pensamento algébrico, sendo eles: “a percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contrastes com outros que variam, tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização” (BERTOLETTI, 2014, p.17).

Outro ponto destacado do trabalho de Fiorentini, Miorim e Miguel (2003), destacado por Bertoletti (2014), é o entendimento de que o Pensamento Algébrico não é expresso somente pela linguagem algébrica, mas que essa é umas das formas possíveis de expressá-lo, sendo que o Pensamento Algébrico pode ser representado por meio da linguagem natural, linguagem aritmética, linguagem geométrica ou por meio da criação de uma linguagem específica, ou seja, uma linguagem algébrica de origem apenas simbólica.

Ao falar sobre a introdução do estudo de Álgebra para estudantes e como o professor deve realizá-lo, Bertoletti (2014) aponta que o professor deve ter claro para si próprio os diferentes usos das letras que essa área da Matemática faz. Segundo Usiskin (1995), a Álgebra na escola básica está relacionada ao estudo do significado das letras e operações com elas, as quais são chamadas de variáveis: considera-se que se está estudando Álgebra quando os alunos têm o primeiro contato com variáveis.

Sobre a concepção do professor na sala de aula sobre o ensino de Álgebra, Usiskin (1995) apresenta quatro diferentes concepções: a Álgebra como aritmética generalizada (as variáveis simbolizam a generalização de modelos), a Álgebra como o estudo de procedimento para resolver certos tipos de problemas, a Álgebra como o estudo de relações entre grandezas (representação por meio de fórmulas ou expressões) e a Álgebra como o estudo de estruturas (estudo a nível superior como anéis, grupos, domínios de integridade, corpos e espaço vetoriais).

Para Resolução de Problemas, Bertoletti (2014) utiliza do trabalho de Polya (1978), que apresenta as quatro fases para resolução de um problema, sendo elas: compreensão do problema (escolha do problema pelo professor e a compreensão desse problema pelo aluno); estabelecimento de um plano (construção de uma estratégia a ser seguida); execução do plano (consiste em seguir os passos planejados); e retrospecto (retomada do problema inicial a fim de se verificar se a solução é válida ou se necessita de alterações).

A pesquisa também é embasada pela Teoria de Registros de Representação Semiótica, proposta por Duval (2010), com a qual ele discute os problemas de congruência e não congruência na resolução de atividades, dando destaque para o fato de que as atividades que se caracterizam pela não congruência são aquelas que apresentam maiores dificuldades de compreensão para os estudantes.

Bertoletti (2014) faz uma pesquisa qualitativa, optando pela metodologia do estudo de caso, que de acordo com a concepção do autor, pareceu a mais adequada, pois o autor acredita que investigar um fenômeno que ocorre em uma sala de aula requer a atenção do pesquisador em vários aspectos, em especial, ao contexto dos sujeitos envolvido e, também, a singularidade dos resultados obtidos.

A pesquisa foi realizada com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola municipal da cidade de Porto Alegre, RS, sendo que o número de alunos variou de 23 a 32 alunos durante o ano. Bertoletti (2014) buscou analisar a introdução de expressões algébricas para isso. Inicialmente foi aplicada aos alunos uma atividade de sondagem para verificar o nível de conhecimento de termos matemáticos a serem utilizados e a partir dessa atividade foram abordadas as demais atividades a serem aplicadas.

As demais atividades foram aplicadas a grupos de 3 ou 4 alunos e sofriam modificações quando fossem necessárias, com essa configuração Bertoletti (2014) acredita que possibilitou que houvesse trocas e discussões em pequenos grupos. Uma sequência didática foi realizada dentro da sala de aula e outra no laboratório de informática e foi dividida em dez partes.

A primeira parte foi a aplicação da atividade de sondagem; da segunda a sexta parte as atividades foram realizadas em sala de aula: os alunos recebiam folhas com as atividades que deveriam ser discutidas e entregues ao final de cada aula; da sétima até a nona parte da sequência didática, as atividades foram realizadas no laboratório, no qual os alunos realizaram atividades na planilha eletrônica gratuita Calc; e na décima parte foi realizado o fechamento da sequência didática, na qual os alunos realizaram atividades de forma individualizada.

Após a análise das atividades aplicadas Bertoletti (2014) pode responder às questões de pesquisa apresentadas anteriormente, e concluiu que:

> [...] é possível introduzir os estudantes ao uso de letras de forma que, em um processo crescente de apropriação e ampliação, eles atribuam significado à linguagem algébrica. Além disso, acreditamos que foi possível, através do desenvolvimento das atividades da sequência didática, compreender de forma introdutória o funcionamento das planilhas eletrônicas, através do estabelecimento de relações entre os papéis desempenhados pelas variáveis e pelas células e, com isso, realizar sua programação para resolução de problemas. Portanto, consideramos a sequência didática como sendo válida e uma boa forma de um professor trabalhar o assunto expressões algébricas no Ensino Fundamental. (BERTOLETTI, 2014, p. 126-127).

O próximo trabalho a ser analisado também é uma dissertação de mestrado de autoria de Patrícia de Souza Ferreira da Cruz intitulada “Pensamento Algébrico e os Significados do Sinal de Igualdade: O Uso da Oralidade e da Narrativa nas Aulas de Matemática” para obtenção, em 2016, do título de mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).

Para responder à questão de pesquisa “De que forma a comunicação na aula de matemática poderá contribuir para a construção do pensamento algébrico?” a autora se utiliza da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (2008), da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2003) e o Sentido e Significado de Vygotsky (2008).

A dissertação se utiliza da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, desenvolvida por Raymond Duval em suas diversas obras. Dentre os elementos propostos por Duval (2009), Cruz (2016) aponta a importância da língua natural:

> Geralmente, o registro da língua natural é visto, em Matemática, por exemplo, na resolução de um problema, como o seu enunciado. O aluno lê, interpreta e transforma esse enunciado. Ele faz a conversão da representação linguagem materna (ou língua natural, nos termos de Duval) para o registro algébrico. (CRUZ, 2016, p. 34).

Segundo Cruz (2016), seu trabalho é compatível com as características da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (2008), que propõe uma criação da relação entre o professor, aluno e o meio em que ocorre a aprendizagem.

Brousseau (2009) formula três Situações Didáticas: a primeira é Situação de Ação, na qual o aluno assume o protagonismo para resolução do problema, ou seja, toma a situação problema como sua, mobilizando seus conhecimentos para desenvolver a resolução; a segunda é a Situação de Formulação ou Situação de Comunicação, nesse caso o aluno busca, através de uma interação com o meio ou não, obter informações matemáticas pertinentes para resolução da situação proposta;

e por fim, a Situação de Validação, na qual o aluno busca provar ou demonstrar, por meio de discussões, a validade das suas afirmações, nesse caso a linguagem utilizada requer um formalismo matemático mais apropriado.

Cruz (2016) identifica e exemplifica como as etapas das Situações Didáticas são articuladas:

> Situação de ação: quando os alunos recebem as atividades, aceitam o desafio e começam a agir, por exemplo, a princípio eles tentam resolver a atividade, utilizando o sinal de igualdade com o sentido construído apoiado em suas experiências, para tentar fazer com que a igualdade fique verdadeira; situação de formulação: quando os alunos em duplas, transmitem mensagens, ou seja, formulam suas conjecturas e trocam suas hipóteses para tentar resolver a atividade da melhor maneira. [...]; situação de validação: quando as duplas são trocadas e cada aluno tenta argumentar, defendendo sua resolução, ou seja, expõe o significado produzido com sua antiga dupla e valida sua resolução ou aceita a resolução do colega, produzindo um novo significado. (CRUZ, 2016, p. 37).

Para a análise da sequência didática proposta em sua dissertação, Cruz (2016) se utiliza de elementos da Teoria das Situações Didáticas e procura confrontar o sentido que cada aluno traz sobre o sinal de igualdade, para isso complementa sua análise com o estudo sobre sentidos e significados de acordo com a visão de Vygotsky (2008).

Com relação aos estudos sobre sentido e significado, a partir da ótica de Vygotsky, Cruz (2016) elegeu a obra “Pensamento e Linguagem”, de Vygotsky (2008), na qual o autor aborda em alguns trechos a relação entre significado e sentido. Segundo Cruz (2016), Vygotsky diferencia duas funções da linguagem, sendo elas, intercâmbio social e pensamento generalizante.

A linguagem como intercâmbio social tem a função de comunicação, e de acordo com Vygotsky (2008) é a necessidade de comunicação que impulsiona, inicialmente, o desenvolvimento da linguagem.

A função da linguagem como pensamento generalizante, segundo Oliveira (2013, p.50), é a de tornar a linguagem um instrumento de pensamento, desta forma a linguagem organiza o real e fornece os conceitos que compõem a mediação entre o sujeito e o objeto de conhecimento.

Sobre o significado, Vygotsky (2008) destaca que “o significado de uma palavra representa um amálgama tão estreita do pensamento e da linguagem, que fica difícil dizer se se trata de um fenômeno da fala ou de um fenômeno do pensamento” (VYGOTSKY, 2008, p.150). Em relação ao “significado propriamente dito” e “sentido”, Oliveira (2013) aponta que:

> O significado propriamente dito refere-se ao sistema de relações objetivas que se formou no processo de desenvolvimento da palavra, consistindo no núcleo relativamente estável de compreensão da palavra, compartilhado por todas as pessoas que a utilizam. O sentido, por sua vez, refere-se ao significado da palavra para cada indivíduo, composto de relações que dizem respeito ao contexto de uso da palavra e as vivências afetivas do indivíduo. (OLIVEIRA, 2013, p.52).

A pesquisa realizada por Cruz (2016) foi realizada com alunos do 7º ano do ensino fundamental, sendo que a sequência das atividades desenvolvidas teve como objetivo, inicialmente, analisar qual significado os alunos atribuem ao sinal de igual. Entre os significados para o sinal de igual, Cruz (2016) destaca os descritos por Ponte; Branco e Matos (2009), que relacionam três significados para o sinal de “=”, sendo eles: como operador, relacional e equivalência. Ponte (2006) destaca que os vários significados que podem ser atribuídos ao sinal de igual apresentam-se como um obstáculo à aprendizagem de Álgebra e ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

A sequência de atividades aplicada por Cruz (2016, p.70-71) foi dividida em três partes. A primeira parte teve como objetivo identificar o significado do sinal de igualdade evidenciado pelos alunos, de acordo com o significado atribuído ao sinal de igualdade; a segunda teve como objetivo procurar indícios do desenvolvimento do pensamento algébrico; por fim a terceira parte consistiu na análise prévia das atividades realizadas como o objetivo de buscar prever possíveis atitudes ou dificuldades que os alunos pudessem enfrentar.

Como forma de promover a comunicação entre os participantes da pesquisa, Cruz (2016) optou por aplicar um instrumento piloto aos participantes que foram divididos em duplas para que assim fosse possível realizar qualquer alteração que os autores julgassem necessárias. Ao todo foram aplicadas para as duplas de alunos participantes desta pesquisa quatro atividades. Posteriormente as duplas foram trocas e as mesmas quatro atividades foram reaplicadas para análise e comunicação das novas duplas formadas.

Ao responder questão de sua pesquisa, Cruz (2016) concluiu que:

> Avalio que a realização desta pesquisa obteve resultados positivos. Com base na análise dos resultados foi possível constatar o desenvolvimento do pensamento relacional e do pensamento algébrico que foram facilitados pela comunicação entre os alunos e a negociação de significados. (CRUZ, 2016, p. 110).

A respeito das conclusões que Cruz (2016) realizou sobre sua pesquisa, observou-se que a comunicação e a troca de significados entre os alunos é uma importante ferramenta para o processo de ensino e aprendizagem, pois a interação entre os alunos se mostrou um eficaz facilitador da compreensão dos alunos do objeto matemático de estudo.

A seguir será analisada a dissertação de mestrado de autoria de Mateus Bibiano Francisco intitulada "Desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos com transtornos do espectro autista (TEA): um estudo à luz da teoria dos registros de representação semiótica" para obtenção do título de mestre em Educação em Ciências pela Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI) no ano de 2018.

Francisco (2018) apresentou dois questionamentos que nortearem sua pesquisa, sendo eles: "Como promover uma aprendizagem em Matemática para alunos diagnosticados com TEA, especialmente no campo da álgebra, permeada por uma linguagem própria e pela exigência de um nível considerável de abstração?" e "Como a Teoria dos Registros de Representação Semiótica poderia auxiliar nesse processo?". A partir desses questionamentos, Francisco (2018) aponta que a pesquisa: "busca compreender as potencialidades do trabalho com diferentes registros de representação semiótica para o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos com TEA" (FRANCISCO, 2018, p. 5).

Em sua pesquisa, Francisco (2018) utilizou como fundamentação teórica textos que abordam o TEA e Educação Matemática inclusiva, o ensino de Álgebra e o Pensamento Algébrico, e os textos sobre Registros de Representação Semióticas, de autoria de Raymond Duval.

Sobre TEA e Educação Matemática inclusiva, Francisco (2018) destaca, inicialmente, que segundo Conceição (2012), o Brasil, desde 1997, vem adotando uma política que estimula a inclusão de alunos do público-alvo da Educação Especial (PAEE) no ensino regular.

Um aspecto importante da educação inclusiva que Francisco (2018) aponta está no:

> [...] reconhecimento de que a educação inclusiva é um direito humano, que se passa a estimular a efetivação de práticas que possam proporcionar a consolidação da inclusão de estudantes com deficiências, transtornos globais do desenvolvimento (TGD) e altas habilidades/superdotação. (FRANCISCO, 2018, p.10).

Francisco (2018) destaca que seu trabalho tem como um dos objetivos traçados promover ações que visem incluir alunos do PAEE, com o intuito de contribuir com propostas que atendam às exigências de alunos com TEA (FRANCISCO, 2018, p. 10).

Ao abordar o Transtorno do Espectro Autista (TEA), Francisco (2018), destaca a Lei 12.764 do Código Civil, de 27 de dezembro de 2012, que entre outros pontos, foi responsável por:

> [...] instituir a política Nacional de Proteção de Direitos da Pessoa com Transtorno do Espectro Autista e estabelecer diretrizes para sua consecução. Estabelece-se, assim, uma caracterização para pessoas com TEA, reconhecendo-a como pessoa com deficiência para efeitos legais e definindo direitos [...]. (FRANCISCO, 2018, p.11).

Com a finalidade de aplicar ações no processo de ensino e aprendizagem de Matemática aos alunos com TEA, Francisco (2018) buscou apresentar em sua pesquisa cenários de pesquisas que visavam incluir alunos do PAEE em atividades que abordavam os conceitos da disciplina de Matemática.

Com o objetivo de apresentar também um panorama da Educação Matemática inclusiva, Francisco (2018) aponta que estudos sobre esse tema podem ser considerados bem recentes e incipientes em comparação à produção de pesquisas com outras temáticas.

Ainda, segundo Francisco (2018), a aplicação da inclusão de alunos que compõem o PAEE, principalmente motivada pelas leis vigentes no Brasil sobre o tema, ocorre de forma deficitária, muitas vezes com certa conotação excludente. A Matemática, nesse cenário, é estigmatizada como uma disciplina difícil e incompreensível, que “provoca altos índices de reprovação, contribuindo de maneira significativa para o fracasso escolas” (SILVA et al, 2013, p.1), sendo que esse tipo de visão não se aplica somente aos alunos PAEE, mas para todos os estudantes da educação básica.

Apesar do cenário descrito anteriormente, Francisco (2018) apresenta que tal campo de estudo se mostra uma excelente oportunidade para futuras pesquisas:

> [...] os campos de pesquisas que possam nortear abordagens inclusivas no ensino de Matemática, além de reforçar a necessidade de promover ações voltadas ao ensino de conteúdos específicos, tais como os vinculados à álgebra, uma área da matemática, como dito anteriormente, que se

> caracteriza por possuir uma linguagem própria e por exigir alto nível de abstração. (FRANCISCO, 2018, p. 16).

Como forma de aprofundar os debates sobre as especificidades do ensino de álgebra, Francisco (2018), inicialmente aponta que “a Álgebra é detentora de uma linguagem própria e universal, apresentando formalismos que contribuem para uma postura de rejeição por parte dos alunos, reforçando assim seu carácter de exclusão” (FRANCISCO, 2018, p. 17).

Francisco (2018), utiliza os estudos sobre Álgebra com foco principal nos estudos de Ponte, Branco e Matos (2009) e as três vertentes fundamentais do pensamento algébrico, sendo elas o representar, raciocinar, e por fim, resolver problemas *e* modelar situações.

A partir das análises dos documentos oficiais Parâmetro Curricular Nacional (PCN) (BRASIL, 1998) e Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2016), Francisco (2018) aponta que o “ensino da álgebra precisa garantir que os alunos trabalhem com problemas, de forma que possam atribuir significados à linguagem algébrica e às ideias matemáticas que elas carregam” (FRANCISCO, 2018, p 19).

Dessa forma, Ponte, Branco e Matos (2009) apontam elementos que buscam concretizar o pensamento algébrico no currículo escolar:

> (a) Promover hábitos de pensamento e de representação em que se procure a generalização, sempre que possível;
> (b) Tratar os números e as operações algebricamente como objetos formais para o pensamento algébrico;
> (c) Promover o estudo de padrões e regularidades. (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 15).

Francisco (2018) destaca que a partir dos argumentos levantados, a aprendizagem de álgebra e desenvolvimento do pensamento algébrico podem ser beneficiados pela transição entre os diferentes meios de representar objetos matemáticos, nesse sentido Francisco (2018) busca se utilizar dos conceitos da teoria dos Registros de Representação Semiótica, desenvolvidos por Raymond Duval.

Ao realizar a conceitualização da teoria dos Registros de Representação Semiótica, Francisco (2018) apresenta a concepção de Duval (2009) sobre a mobilização de representações, com destaque, para os objetos matemáticos, sobre os quais “não há conhecimento que não possa ser mobilizado por um sujeito sem uma atividade de representação” (DUVAL, 2009, p. 29).

Ainda no âmbito do ensino de matemática, Duval (2012) considera que a utilização de vários registros pode constituir “uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam também ser reconhecidas em cada uma de suas representações” (DUVAL, 2012, p.270).

Francisco (2018) também apresenta em sua pesquisa a classificação dos diferentes tipos de representação apresentados por Duval (2009), sendo estas as oposições consciente/não-consciente e externo/interno.

A primeira oposição, consciente/não-consciente, segundo Duval (2009), consiste na conscientização, por parte do indivíduo, da mudança de como o objeto passa a ser observado ou entendido pelo sujeito.

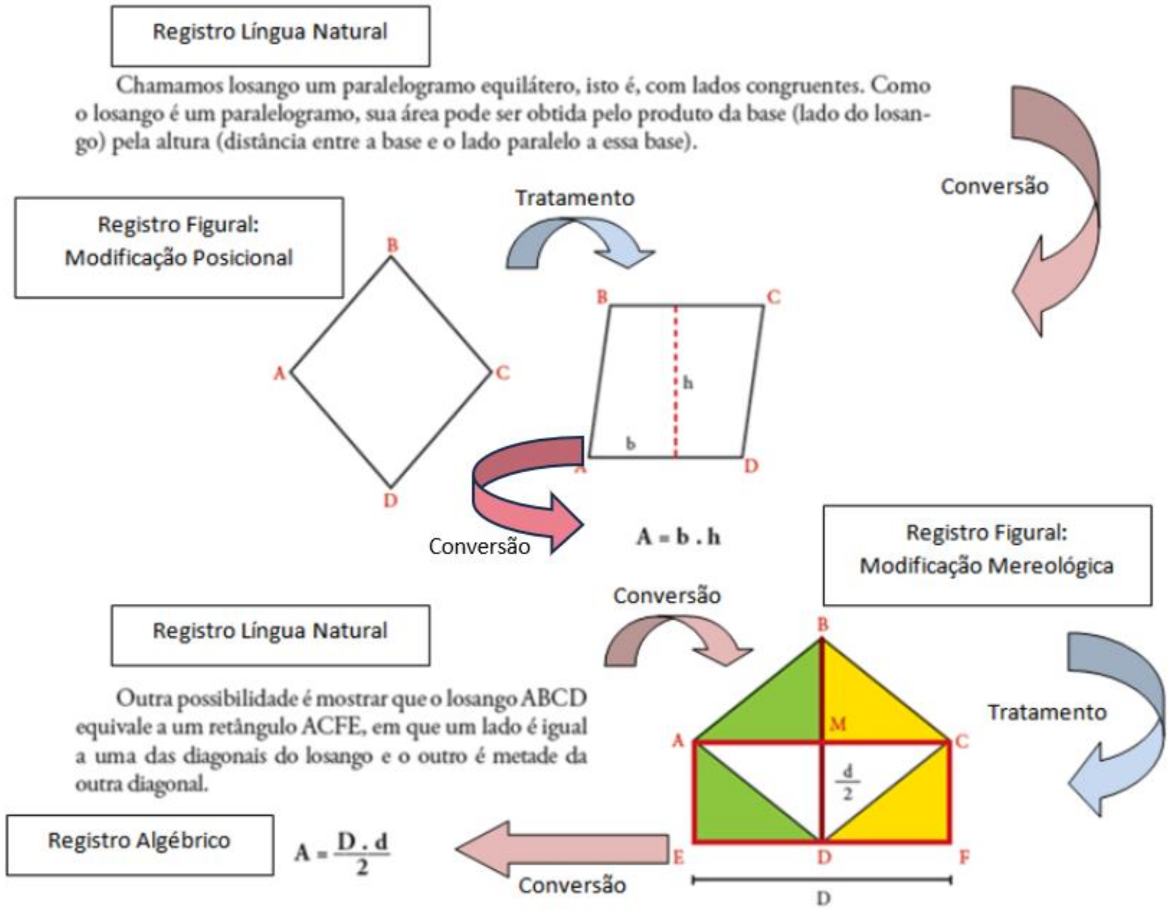
O par externo/interno “é a oposição entre aquilo que, de um indivíduo, de um organismo ou de um sistema, é diretamente visível e observável e aquilo que, ao contrário, não o é” (DUVAL, 2009, p.41). Em busca de sintetizar as representações internas e externas, Francisco (2018) aponta que:

> As representações externas se referem às representações que são produzidas por um sujeito ou por um sistema, essas são denominadas representações semióticas. Em contrapartida, as representações internas pertencem a um sujeito e não são comunicadas a outro por meio da produção de uma representação externa. Neste sentido, as representações externas atuam com a função de comunicação e atuando também como outras funções cognitivas, essas denominadas de função de objetivação e a função de tratamento. (FRANCISCO, 2018, p. 22)

Em seguida, Francisco (2018), apresenta as três atividades relacionadas à representação semiótica, sendo elas: formação, tratamento e conversão. A formação consiste na primeira representação de como o indivíduo visualiza um objeto. O tratamento são as transformações que ocorrem internamente a um registro, ou seja, são as modificações realizadas sem que ocorra uma mudança de registro. E por fim, a conversão é a mudança de um registro para outro, mas mantendo o objeto de referência.

Como forma de exemplificar o processo de conversão apresentado por Francisco (2018), optamos por trazer a pesquisa realizada por Souza e Oliveira (2019), que discute algumas construções presentes no Caderno do Aluno, utilizado na Rede Estadual de Ensino de São Paulo, que exemplifica o tratamento e as conversões associadas a um registro. Na Figura 15 são apresentadas duas propostas para o cálculo da área de um losango. Na primeira sugestão há uma conversão do Registro em Língua Natural para o Registro em Figural, neste registro ocorre uma modificação da posição da figura, ou seja, ocorre um tratamento do registro, pois sem mudar o registro acontece uma transformação, e por fim novamente ocorre uma conversão, agora do Registro Figural para o Registro algébrico, na qual os elementos base e altura do losango são utilizados para se determinar uma possível expressão para se determinar a área de um losango.

Figura 15: Área do losango: Registro de Representação e Modificação Figural



Fonte: SOUZA e OLIVEIRA, 2019, p. 31.

Francisco (2018) aponta que um “reconhecimento mais preciso dos tipos de representação semiótica na matemática permite um aprofundamento nos conceitos de tratamento e conversão” (FRANCISCO, 2018, p. 24). Sendo assim, Duval (2008), de forma a sintetizar os conceitos, promove uma classificação dessas representações, que podem ser analisadas no Quadro 2.

Quadro 2: Classificação dos tipos de representação semiótica

	Registros DISCURSIVOS	**Registros NÃO DISCURSIVOS**
Registros MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis	Língua Natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: • Argumentação a partir de observações, de crenças...; • Dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). • Apreensão operatória e não somente perceptiva; • Construção com instrumentos.
Registros MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos	Sistema de escritas: • Numérica (binária, decimal, fracionária...); • Algébricas; • Simbólicas (línguas formais). Cálculo	Figuras geométricas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). • Apreensão operatória e não somente perceptiva; • Construção com instrumentos.

Fonte: DUVAL, 2008, p. 14.

Outro ponto discutido por Francisco (2018) sobre o trabalho desenvolvido por Duval são os casos de congruência e não-congruência de representações. Neste caso, Duval (2009, p. 66) afirma que para determinar se duas representações são congruentes ou não, é preciso começar por segmentá-las em duas unidades significantes respectivas, de tal maneira que elas possam ser colocadas em correspondências. Realizada tal segmentação comparativa, será possível verificar se as unidades significantes são, entre os dois registros, unidades significantes simples (um elemento de um registro está relacionado a um único elemento de outro registro) ou combinações de unidades significantes (um elemento de um registro pode estar relacionado a dois ou mais elementos do outro registro). No caso de não-congruência, Duval (2009) aponta que:

> [...] não apenas o tempo de tratamento aumenta, mas a conversão pode se revelar impossível de efetuar, ou mesmo de compreender, se não houver uma aprendizagem prévia concernente às especificidades semióticas de formação e de tratamento de representação que são próprias a cada um dos registros em presença. (DUVAL, 2009, p. 66).

Dos seus estudos sobre congruência e não congruência dos registros de representação, Duval (2009, p.68-69) apresenta três critérios de congruência, sendo eles: a (i) correspondência “semântica” dos elementos significantes; (ii) univocidade semântica terminal; (iii) ordem dentro da organização das unidades compondo cada uma das duas representações.

No caso da correspondência semântica dos elementos significantes, cada unidade significante simples de um registro de representação estará associada a uma única unidade significante da outra representação.

Lourenço e Oliveira (2018, p. 87) apresentam um exemplo que satisfaz esse critério: “Duas vezes da idade de Lucas mais cinco resulta em 25. Qual é a idade de Lucas?” (representação em língua natural), neste caso podemos representá-lo por meio da expressão 2x + 5 = 25 (representação algébrica), na qual “Duas vezes” é representado por “2.”, “idade de Lucas” é substituído por “x”, “mais” é transformado em “+”, “cinco” é representado por “5”, “resulta” é convertido em “=”, e “25” mantém se “25”. No exemplo anterior podemos verificar que cada unidade significante de cada registro está associada a uma única unidade significante do outro registro.

O segundo critério, univocidade “semântica” terminal ocorre, segundo Duval (2009), quando a cada unidade significante elementar da representação de partida corresponde uma só unidade significante elementar no registro da representação de chegada, ou seja, deve ocorrer a conservação do significado dos elementos em ambos os registros. Como exemplo, expomos a situação “André e Mateus colecionam discos. Após ganhar 5 discos de André, Mateus passou a ter 45 discos. Quantos discos possuía Mateus inicialmente?”, nesse caso o termo “ganhar” trará a ideia de subtração e não de adição, pois a conversão do enunciado ficará x = 45 – 5, ou seja, não será conservada a unidade semântica terminal.

O último critério de congruência, ordem dentro da organização das unidades compondo cada uma das duas representações, consiste no conceito de que cada unidade significante de dois registros deve seguir a mesma ordem de um registro para outro. Retomando o exemplo proposto por Lourenço e Oliveira (2018, p. 87) “Duas vezes da idade de Lucas mais cinco resulta em 25. Qual é a idade de Lucas?” convertido para “2x + 5 = 25”, percebemos que os dois registros mantêm a ordem das unidades significantes de um registro para o outro.

As atividades produzidas para a pesquisa de Francisco (2018) foram desenvolvidas em duas turmas de 8º ano, que totalizavam 41 alunos participantes, realizadas durante as aulas de Matemática, todavia os sujeitos dessa pesquisa foram quatro alunos com TEA, sendo que a seleção desses alunos foi realizada a partir da análise de laudos clínicos apresentados pelas famílias.

As atividades desenvolvidas envolviam os conteúdos matemáticos: expressões algébricas, monômios, polinômios, produtos notáveis e fatoração algébrica, sendo que as atividades propostas possibilitaram as mobilizações de diferentes registros de representação. Francisco (2018), direcionou as atividades "de modo a avaliar as contribuições do trânsito entre os diferentes registros para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos em geral e, de modo específico, daqueles com TEA" (FRANCISCO, 2018, p.38). Ao responder à questão, Francisco (2018) concluiu que:

> As contribuições da TRRS[2] foram evidenciadas, de maneira geral, pelo excelente desempenho dos alunos nas aulas que visavam construir conceitos vinculados ao cálculo algébrico. Mas, de modo especial, diante dos quatros alunos analisados, pode-se perceber que, quando nos limitamos ao trabalho com um único registro, não se estabelece a real compreensão dos conceitos ligados à álgebra. Tais alunos, quando imersos em situações que permitiram a mobilização de mais do que um único registro, puderam construir os conceitos pretendidos nas atividades. Esses conceitos, se mal compreendidos, certamente iriam estabelecer barreiras para futuras aprendizagens no campo da álgebra, e o processo vivenciado mostrou que isso seria inevitável se os mesmos fossem tratados simplesmente de forma algébrica. (FRANCISCO, 2018, p.96).

Em relação ao pensamento algébrico Francisco (2018) observou que:

> [...] os alunos com TEA possuem a capacidade de generalização, mesmo quando não exprimem suas considerações por meio de uma fórmula. As ponderações efetuadas por eles foram regadas de coerência e objetividade. Duval, ao defender que a compreensão em matemática se faz pela mobilização de mais de um registro semiótico, se faz pertinente. Assim, as contribuições da TRRS possibilitaram um trabalho diferenciado, mas com benefícios pontuais aos alunos com TEA. (FRANCISCO, 2018, p.96).

Observamos que a pesquisa realizada por Francisco (2018) apresenta uma importância significativa para a área de ensino-aprendizagem de Matemática. Ao ampliar os estudos sobre o pensamento algébrico a alunos com TEA como sujeitos da pesquisa, evidência um grupo, que por muitas vezes como apresentado, acaba sendo marginalizado em sala de aula. Também destacamos que com sua pesquisa Francisco (2018) pode ser uma referência para professores que buscam compreender o processo de ensino e aprendizagem de alunos com TEA.

A seguir, apresentamos a análise da dissertação de autoria de Andressa Sanches Teixeira Sobrinho, intitulada "Uma análise sobre conceitos algébricos em produções acadêmicas: questões para formação de professores e para pesquisa",

---

[2] Teoria dos Registros de Representação Semiótica

defendida no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Sobrinho (2019) buscou em seu trabalho responder à pergunta “De que forma o conceito de função é abordado em produções acadêmicas que exploram uso de softwares e/ou buscam relações com as Ciências da Natureza?”. Ao mapear e analisar as produções que estudou, Sobrinho (2019), pretendeu atingir os seguintes objetivos específicos:

> 1) Verificar quais aspectos da teoria dos Registros de Representação Semiótica são explorados nas produções mapeadas ao tratar do conceito de função; 2) Identificar potencialidades e limites do uso de softwares no estudo do conceito de função; 3) Averiguar quais características do pensamento algébrico são enfatizadas nas produções; 4) Analisar se e como fenômenos das Ciências da Natureza são contextos para o ensino do conceito de função. (SOBRINHO, 2019, p.16)

Como metodologia, Sobrinho (2019), apresenta uma pesquisa qualitativa utilizando como método de análise dos dados da pesquisa as orientações da Metanálise, que, de acordo com Bicudo (2014), “trata-se de um movimento reflexivo sobre o que foi investigado, sobre como a pesquisa foi conduzida e, ainda, atentar-se para ver se ela responde a interrogação que a gerou” (BICUDO, 2014, p.13).

Sobrinho (2019), apresenta como complemento ao entendimento de Bicudo (2014) sobre a Metanálise, a concepção de Fiorentini e Lorenzato (2006), que a compreende como uma revisão de outras pesquisas, de forma sistemática, visando transcender os estudos já feitos sobre algum tema.

Para realização de sua dissertação, Sobrinho (2019), buscou trabalhos acadêmicos que problematizassem, simultaneamente, conceitos algébricos e o uso de tecnologias (*softwares*). Foram identificados trinta artigos que correspondiam as expectativas iniciais. Após análise inicial, restaram doze artigos que comtemplavam os critérios desejados pela autora, sendo assim, esses trabalhos foram analisados pelos seguintes critérios: “objetivos, participantes (destacando, níveis de ensino), conteúdos, *softwares*, transformações cognitivas (tratamento e conversão), concepções da álgebra e pensamento algébrico” (SOBRINNHO, 2019, p.19).

Em uma segunda etapa de levantamento de trabalhos, Sobrinho (2019) verificou a necessidade de buscar por pesquisas que tratassem de outros elementos importantes para seu trabalho, como o conceito algébrico e função, além de avaliar como essas pesquisas se relacionam com as disciplinas das Ciências da Natureza.

Ao final das análises, Sobrinho (2019) selecionou 28 pesquisas que contemplaram os critérios estabelecidos por ela, com especial destaque para o fato que todas as 28 pesquisas selecionadas tiveram como aporte teórico a Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

A fundamentação teórica do trabalho de Sobrinho (2019) está dividida em três campos, sendo eles, Pensamento Algébrico, Registro de Representação Semiótica e Uso de tecnologias.

Para o campo do Pensamento Algébrico, Sobrinho (2019) apresenta os trabalhos de Usiskin (1995), Ponte, Branco e Matos (2009) e Van de Walle (2009) como principais aportes teóricos. Ao se utilizar do trabalho de Usiskin (1995), Sobrinho (2019) busca apresentar as diferentes concepções de álgebra, sendo elas: Equação, Função, Estrutural e Aritmética Generalizada.

Sobrinho (2019) apresenta, também, em seu trabalho, as três vertentes propostas por Ponte, Branco e Matos (2009) fundamentadas pelas ideias do pesquisador James Kaput, sendo elas o representar, raciocinar e resolver problemas.

Como fundamentação para o uso de tecnologias, Sobrinho (2019) apresenta alguns autores, entre eles Mcconnell (1995), que defende que a adoção de tecnologias (*softwares*) no ensino da Matemática pode modificar a Álgebra, tornando-a mais dinâmica e ampliando a variedade de aplicações.

Os resultados apresentados por Sobrinho (2019):

> [...] sinalizam que a maioria das produções, desenvolvidas na Educação Básica tinham como objetivo minimizar as dificuldades em relação a Álgebra e apresentar possibilidades de ensinar conceitos algébricos, principalmente o conceito de função, com o uso de *softwares*. (SOBRINHO, 2019, p. 56)

Sobrinho (2019) concluiu que o uso de *softwares* contribuiu para o desenvolvimento do pensamento algébrico e para as visualizações de suas representações. Ao analisar os aspectos da teoria de Registro de Representação Semiótica, Sobrinho (2019) concluiu que “*softwares* também minimizam as dificuldades identificadas, principalmente, nas conversões entre os registros de representações semióticas” (SOBRINHO, 2019, p. 56).

Ao verificar as potencialidades e limites do uso de softwares Sobrinho (2019) verificou que as potencialidades estão relacionadas “as possibilidades de visualização pelo aluno das janelas representantes dos registros de representação algébrico, numéricos e gráficos” (SOBRINHO, 2019, p.57). E os limites para o uso de tecnologia está, por exemplo, em relação a:

> “[...] insuficiência de estrutura física e equipamentos disponíveis para aplicação das atividades; a ausência do domínio de alguns conceitos sobre funções, por parte dos estudantes; a insegurança por parte dos professores para dominar o *software*.” (SOBRINHO, 2019, p. 57)

Em relação às características do Pensamento Algébrico, Sobrinho (2019) concluiu que, nas produções analisadas, a capacidade de representar e utilizar diferentes sistemas de representação é a mais enfatizada, acrescentando que:

> [...] é fundamental para o entendimento do conceito de função o exercício das demais características do pensamento algébrico que incluem: a capacidade de relacionar propriedades do objeto e generalizar as relações válidas para certa classe de objetos, assim como modelar situações. (SOBRINHO, 2019, p. 58)

Por fim, Sobrinho (2019) finaliza sua dissertação com a seguinte conclusão:

> [...] pode-se perceber que o conceito de função é tratado, na maioria das vezes, como função numérica interna a Matemática. Recomenda-se que se amplie a abordagem deste conceito como ferramenta de modelagem de situações contextualizadas, conforme está proposto nos documentos curriculares e sublinha-se o potencial dos *softwares* para auxiliar no ensino do conceito de função. (SOBRINHO, 2019, p. 58)

Concluímos que o trabalho de Sobrinho (2019) apresenta uma compreensão sobre o pensamento algébrico no estudo de funções muito próxima ao entendimento que temos sobre o tema, e realizando a pesquisa desta dissertação, focando no objeto matemático função, apesar de não ser trabalhado em modelagem, consideramos que a pesquisa aqui realizada poderá contribuir, como o trabalho de Sobrinho (2019), com o estudo do Pensamento Algébrico com funções.

Por fim, analisamos a tese de doutorado de autoria de Márcia Azevedo Campos, publicada em 2019, com o título “Uma sequência didática para o desenvolvimento do pensamento algébrico no 6º ano do ensino fundamental” no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, da Universidade Estadual de Feira de Santana.

Em seu trabalho Campos (2019) busca responder a dois questionamentos:

> Que contribuições uma Sequência Didática – elaborada com atividades de resolução de problemas com números naturais envolvendo operações de natureza aditiva e multiplicativa e aplicada a alunos do 6º Ano do Ensino Fundamental – traz para o desenvolvimento do pensamento algébrico?"
> Que *condições* e *restrições* atuam sobre a implementação dessa sequência didática no 6º ano visando o desenvolvimento do pensamento algébrico, a partir dos estudos realizados? (CAMPOS, 2019, p. 25)

As questões apresentadas expressam os objetivos preliminares que são apresentados por Campos (2019), sendo eles:

> [...] investigar o desenvolvimento do pensamento algébrico. (CAMPOS, 2019, p. 23)
>
> [...] amenizar dificuldades de aprendizagem matemática e algébrica futura do aluno do 6º ano, ao proporcionar o desenvolvimento do pensamento algébrico o quanto antes, não necessariamente associado a conteúdos algébricos, como o uso de letras como variáveis ou incógnitas e suas manipulações, mas a partir de toda atividade matemática que envolva o pensar. (CAMPOS, 2019, p. 25)

Campos (2019) apresenta as seguintes hipóteses para o seu trabalho:

> [...] inferir que usar a resolução de problemas para a introdução de conceitos matemáticos, em especial os algébricos, através de situações que possam desenvolver o pensamento algébrico contribuirá para a aprendizagem matemática. (CAMPOS, 2019, p.26)
>
> [...] o aluno do 6º Ano, que teve pouco ou nenhum contato com a álgebra formal e sua linguagem pela adequação a orientação curricular que rege o ensino brasileiro, consegue significar os objetos matemáticos dos problemas, apropriar-se da linguagem e significar o desconhecido a partir das relações e conexões que estabelece. (CAMPOS, 2019, p. 28 e 29)
>
> [...] inserir o aluno no contexto de situações que são limiares entre a aritmética e a álgebra pode contribuir para a aprendizagem algébrica futura. (CAMPOS, 2019, p. 31)

As hipóteses apresentadas Campos (2019) traçam seu objetivo central:

> Investigar quais contribuições e as condições e restrições de implementação de uma Sequência Didática – elaborada para o ensino de operações com números naturais, no 6º ano do Ensino Fundamental e com atividades de resolução de problemas – para o desenvolvimento do pensamento algébrico. (CAMPOS, 2019, p. 32)

Além do objetivo central, Campos (2019), apresenta alguns objetivos mais específicos, sendo eles:

> - Analisar as condições e as restrições para o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir de problemas de operações com números naturais;
> - Investigar as estratégias mobilizadas pelos alunos a partir das produções orais e escritas ao resolver problemas com números naturais que revelem aspectos inerentes ao desenvolvimento do pensamento algébrico;
> - Analisar as produções (escrita e oral) dos alunos nas respostas dadas aos problemas propostos quanto ao desenvolvimento do pensamento algébrico e suas implicações para a aprendizagem matemática. (CAMPOS, 2019, p. 33)

No trabalho desenvolvido por Campos (2019) observa-se que o referencial teórico tem início com a discussão da Álgebra como objeto de estudo e a formação do pensamento algébrico. Na sequência, Campos (2019), realiza uma explanação sobre a Teoria Antropológica do Didático, sistematizada por Chevallard (1985) e ao final são apresentadas as orientações curriculares em vigor, normatizadas pelos PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais) e a implementação da BNCC (Base Nacional Curricular Comum).

Em relação ao pensamento algébrico, Campos (2019), apresenta a linguagem algébrica como forma semiótica de comunicação do pensamento, citando principalmente os trabalhos de Lins e Gimenes (1997), Radford (2009) e Ponte et. al. (2012), concluindo a partir desses estudo que:

> É uma das funções da escola orientar e fornecer estratégias aos alunos que os capacitem a transformarem informações em conhecimento. Ao professor cabe então propor uma variedade de situações, semanticamente ricas e compostas por diferentes relações. Nessas situações, os conceitos devem ser desenvolvidos com os alunos, na formação do conhecimento, como uma relação entre saberes que já trazem consigo, ou os que lhes são apresentados. Cabe também ao professor analisar as conexões possíveis e úteis e os fatores que interferem ou contribuem para essa aprendizagem. (CAMPOS, 2019, p. 44)

Em seguida Campos (2019) abordada a álgebra e suas concepções em pesquisa em Educação Matemática e cita com maior destaque o trabalho desenvolvido por Fiorentini, Miorim e Miguel (2003), com principal foco para as classificações que a pesquisa realiza sobre a Álgebra em Álgebra universal, Álgebra abstrata, Álgebra elementar, Álgebra computacional e Álgebra linear. Campos (2019) busca trabalhar elementos operacionais da aritmética, “mas que ao contrário da aritmética, utiliza símbolos em vez de números” (CAMPOS, 2019, p. 49), e situa seu trabalho na classificação Álgebra Elementar, proposta por Fiorentini, Miorim e Miguel (2003).

Ao observar o pensamento algébrico nas pesquisas em Educação Matemática, Campos (2019), retoma muitos dos autores já citados, todavia com a adição dos estudos de Duval (2003) sobre tratamento e conversão dos diferentes Registros de Representação Semiótica.

Campos (2019) apresenta o movimento *Early Algebra* que foi inspirador da pesquisa desenvolvida pela autora, e surge como proposta curricular que propõe introduzir conceitos de Álgebra desde os primeiros anos do ensino básico.

A inspiração de Campos (2019), no movimento *Early Algebra* está especificamente em entender que o surgimento desse movimento se deu com o objetivo de pensar o ensino da Matemática desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, promovendo, assim, o desenvolvimento de competências (saberes) e habilidades (saber fazer) como principal enfoque para formar a base do pensamento algébrico a partir da resolução de problemas no contexto aritmético.

Sobre os níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico, Campos (2019), destaca o trabalho de Almeida (2016), no qual o autor apresenta cinco características do pensar algebricamente, sendo elas: estabelecer relações (1); modelar (2); generalizar (3); operar com o desconhecido (4); e por fim, construir significado para os objetos (5).

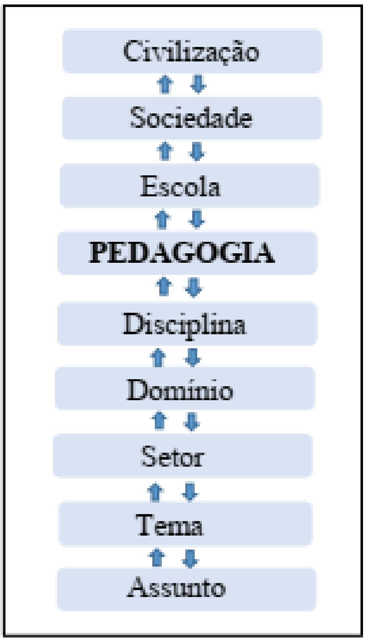
Almeida (2016), em seu trabalho, categorizou de 0 a 3 os níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico, medindo a porcentagem de alunos que atingem cada nível de desenvolvimento. O trabalho de Almeida (2016) estava relacionado a problemas de partilha em atividades para alunos dos anos finais do Ensino Fundamental. Campos (2019) utiliza dos resultados obtidos por Almeida (2016) como parâmetros para pesquisa desenvolvida por ela no 6º ano do ensino fundamental.

Para a Teoria do Antropológica do Didático (TAD), Campos (2019) utiliza a teoria proposta por Yves Chevallard, pois tal estudo propõe “uma didática específica para resolução de situações específicas que ocorrem no interior da Matemática escolar (e de outras disciplinas)” (CAMPOS, 2019, p. 66), tal concepção corrobora com o que propõe Campos (2019) nos estudos realizados em sua pesquisa, além de estar de acordo com as necessidades do objeto de estudo determinado saberes e conhecimentos.

A partir da construção dos estudos propostos por Chevallard (2002), Campos (2019) estabelece uma organização matemática do estudo para sua pesquisa, inicialmente apresentando níveis específicos para o estudo de diferentes áreas do conhecimento além da própria Matemática, sendo elas: a *disciplina*, que estabelece a área do conhecimento a ser estudada: o *domínio,* que é o conteúdo da área de conhecimento; o *setor,* que é o objeto matemático a ser estudado; o *tema,* que é o que objetivamente deve ser resolvido na atividade, e por fim, a *questão,* que é como esse conteúdo é apresentado para resolução.

Além desses cincos níveis já descritos, Campos (2019) apresenta mais quatro níveis, mais genéricos, para estudo de áreas do conhecimento, sendo eles: a civilização ou país no qual é realizado o estudo; a sociedade, que pode ser representada pelos órgãos estatais ou reguladores dos programas educacionais, a escola, que é representada pelos elementos educacionais que devem ser trabalhados; e por fim, a pedagogia, que é o nível educacional a ser estudado. A seguir apresentamos a escala dos níveis apresentados por Campos (2019):

Figura 16: Escala dos níveis de Codeterminação Didática



Fonte: Campos (2019, p. 82)

Ao final de sua fundamentação teórica Campos (2019), faz uma abordagem dos documentos oficiais vigentes para o Ensino Fundamental (PCN e BNCC), no qual a partir da análise desses documentos conclui a importância de incluir o “pensamento algébrico no currículo de matemática, pelo seu caráter potencializador da aprendizagem e de dar sentido aos objetos matemáticos, a partir das tarefas que são trabalhadas em sala de aula e do enfoque que é dado pelo professor" (CAMPOS, 2019, p. 92).

A pesquisa realizada por Campos (2019), tem caráter qualitativo, pois o método de análise de dados proposto "se dedica a análise do processo, com os participantes em seu ambiente natural e os dados descritos e analisados intuitivamente" (CAMPOS, 2019, p.100).

O universo de pesquisa da pesquisa de Campos (2019), foi uma escola da rede pública estadual da Bahia, cuja maioria dos alunos são oriundos de bairros do entorno da escola. A pesquisa desenvolvida por Campos (2019), teve como participantes:

> [...] além da pesquisadora, os alunos e a professora de Matemática de três turmas do 6º. Ano do turno matutino: Turma A, com 34 alunos; Turma B com 39 alunos; e Turma C com 38 alunos matriculados; com uma média de 30 alunos por aula durante as nossas sessões de experimentação. Todos esses alunos eram menores, pertenciam à faixa etária de 11 a 15 anos, e se dividiam quase igualitariamente entre os gêneros masculino e feminino. (CAMPOS, 2019, p. 103)

A Sequência Didática proposta por Campos (2019), consistia na aplicação de 13 problemas, divididos em 3 sessões, sendo que a 1ª sessão contava com 4 problemas (nomeados como 1A a 4A), a 2ª sessão contava com 5 problemas (nomeados 1B a 5B) e a 3ª sessão contava com 4 questões (nomeados 1C a 4C), sendo que as letras minúsculas indicavam a subdivisão de um determinado problema. Os problemas propostos por Campos (2019) envolveram os seguintes objetos matemáticos: Sequência, Função, Equação e Aritmético/Algébrico (Quadro 3).

Quadro 3: Os problemas das experimentações e o tipo de raciocínio requerido

Tipo de Problema/ Objeto matemático	Registro de Representação	Nível de dificuldade	Problema/item
SEQUÊNCIA	Linguagem Natural	Simples	**1Cb**
		Sofisticado	
	Linguagem Icônica	Simples	**1Ca; 4ª**
		Sofisticado	**3ª**
FUNÇÃO	Linguagem Natural	Simples	
		Sofisticado	**2Aa; 2Ab**
	Linguagem Icônica	Simples	**3Ca**
		Sofisticado	**3Cb**
EQUAÇÃO	Linguagem Natural	Simples	**1B**
		Sofisticado	
	Linguagem Icônica	Simples	**1Aa; 1Ab;**
		Sofisticado	
ARITMÉTICO/ ALGÉBRICO	Linguagem Natural	Simples	**2B; 2Ca; 3B**
		Sofisticado	**2Cb; 4B; 5B**
	Linguagem Icônica	Simples	
		Sofisticado	**4C**

Fonte: CAMPOS, 2019, p. 143

Campos (2019) elaborou em seu trabalhou uma sequência didática, utilizando como referência os princípios da Engenharia Didática, proposta por Michèle Artigue em seu trabalho intitulado “Engenharia Didática”, presente na obra organizada por Jean Brun, em 1996, “Didáctica das Matemáticas”, com o objetivo de “conhecer, interpretar e analisar as estratégias e o nível de pensamento algébrico que alunos mobilizaram ao se depararem com situações-problema intencionalmente elaboradas” (CAMPOS, 2019, p.93).

Segundo Artigue e Douady (1993), uma forma de conceituar a noção de Engenharia Didática, consiste em “construir um processo de aprendizagem de um dado conteúdo, apoiando-se em hipóteses teóricas, em fazer uma análise *a priori* de possíveis efeitos, em observar os efeitos produzidos e compará-los com as previsões” (ARTIGUE e DOUADY, 1993, p. 57). A partir do seu entendimento sobre Engenharia Didática, Campos (2019) adotou em seu estudo fases sequenciadas e interligadas da Engenharia Didática, sendo elas: “*análises*, *experimentação* e *validações* das ações didáticas” (CAMPOS, 2019, p. 95).

A fase análises foi dividida em duas, análise prévia e concepção e análise *a priori*, sendo que a primeira consistia em realizar “uma análise epistemológica *prévia* do objeto matemático pensamento algébrico, análise institucional do livro didático, análise dos documentos legais que normatizam o ensino de Matemática no 6º ano e uma análise didática de pesquisas correlatas (CAMPOS, 2019, p.95).

Em seguida, Campos (2019), realizou a segunda da parte da fase de análises (concepção e análise a *priori*), na qual buscou apresentar a “hipótese de estudo de observação dos comportamentos dos alunos frente a uma tarefa proposta foi explicitada, a sequência didática concebida e a fundamentação teórica testada quanto a validade para respondê-la” (CAMPOS, 2019, p. 96).

Campos (2019), optou por dividir a fase experimentação em três fases, sendo: a aplicação das atividades de resolução de problemas; em seguida, a observação *in loco* das produções dos alunos como o objetivo de identificar, como propõe Almeida (2016), os níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico; e por fim, a discussão das propostas e realização dos “ajustes necessários nos instrumentos a partir do que foi observado” (CAMPOS, 2019, p. 97).

A última fase, *validação,* foi dividida em dois momentos: análise *a posteriori* e validação. A análise *a posteriori* teve como objetivo comparar os resultados obtidos com a análise *a priori*, e buscou interpretar “teoricamente os fenômenos observados e produzidos com os instrumentos utilizados, e por fim, a validação teórica interna dos dados observados” (CAMPOS, 2019, p. 97). Em relação a segunda parte dessa fase, Campos (2019) buscou realizar a validação dos dados a partir das análises realizadas “inicialmente e durante todo o desenvolvimento da sequência didática” (CAMPOS, 2019, p.97).

Um exemplo da aplicação do método utilizado por Campos (2019) está presente no problema 3C (itens a e b) (Figura 17), ou seja, um problema presente na 3ª sessão e que apresenta duas divisões. Campos (2019), apresenta para a análise de todos os 13 problemas cinco possíveis estratégias esperadas para resolução, sendo eles:

> E1: A utilização de estimativa ou cálculo mental, através da tentativa e erro.
> E2: A busca das soluções utilizando cálculos explícitos, através da tentativa e erro.
> E3: O estabelecimento de relações entre os dados do problema para a busca das soluções.
> E4: A utilização do aspecto de observação de regularidades.
> E5: Uso de ostensivos para representar a situação problema.
> (CAMPOS, 2019, p. 137)

Figura 17: Problema 3C proposto por Campos (2019)

3) Um estacionamento cobra R$ 3,00 pela primeira hora. A partir da segunda hora, o valor é de R$ 2,00 por hora adicional.

a) Preencha a tabela abaixo com os valores pagos para cada tempo de permanência:

Tempo (Horas)	1	2	3	7
Preço (R$)	3,00			

b) Quanto pagará o proprietário de um carro que esteve estacionado durante 7 horas?

Fonte: CAMPOS, 2019, p. 139

Ao realizar a análise *a priori* e a condição para realização do problema, Campos (2019), observou que o aluno, ao buscar resolver o item a corretamente, poderá utilizar a mesma estratégia como facilitadora para resolução do item b. Destacamos que o problema aborda como objeto matemático a função polinomial do 1º grau, entretanto os assuntos expressão algébrica, equação e função não são trabalhados de maneira direta no 6º ano, isto é, as turmas participantes dessa pesquisa tiveram que se utilizar do registro numérico para resolução dos itens deste problema, utilizando de adições para obter os valores desconhecidos. Os alunos terão, no decorrer do problema a mobilização do Pensamento algébrico para resolução dos itens do problema sem que necessariamente ocorra o uso do registro algébrico, pois como aponta Campos (2019), "não é esperado que o aluno chegue a essa lei de relação funcional, pela própria restrição imposta pelo currículo do 6º. Ano, diante do contexto matemático que vive, ainda sem nenhum contato com equação" (CAMPOS, 2019, p. 140).

De maneira geral, após realizar a análise *a priori* dos 13 problemas propostos na sequência didática, sobre o Pensamento algébrico e as possíveis conversões entre registros, Campos (2019) assume:

> [...] o pensamento algébrico como aquele que se caracteriza pelas conexões e relações que são estabelecidas no processo de construção das possíveis soluções dos problemas. Assim, pensar algebricamente é lidar com o desconhecido como se fosse conhecido num contínuo processo de produção de significados para os símbolos e objetos da álgebra; é observar regularidades; fazer conversões de linguagem, como da linguagem natural para as linguagens oral, algébrica e figural e realizar cálculos; manipular

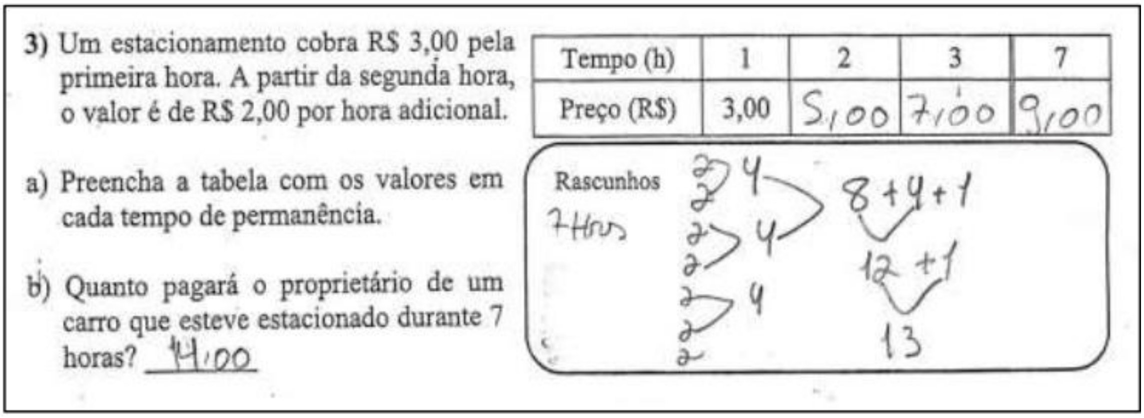
> ostensivos para evocar os não-ostensivos imprescindíveis à aprendizagem matemática. (CAMPOS, 2019, p. 144 e 145)

Em relação a fase de experimentação, a mesma estará relacionada à aplicação das atividades propostas, a observação dos problemas sendo realizados pelos alunos, e na análise dos resultados utilizando o referencial teórico da pesquisa. Todavia destaca-se que um elemento da experimentação presente durante a análise *a priori* dos problemas está na constatação que nos livros didáticos, utilizados pelas turmas da pesquisa de Campos (2019), não é observado a indução ao raciocínio funcional, no qual a "relação de dependência fica implícita nos problemas e é tratada como uma proporcionalidade apenas" (CAMPOS, 2019, p. 140).

Ao realizar a análise a *posteriori*, Campos (2019), observou que no desenvolvimento da resolução do problema 3C (Figura 18), os alunos apresentaram primeiramente as estratégias do campo aritmética (**E1** e **E2**), e de maneira discreta a proporcionalidade "como um apoio para o raciocínio funcional, de estabelecimento de relações (**E3**)" (CAMPOS, 2019, p. 169). A Figura 18 é um exemplo de tentativa de resolver o problema, no qual:

> [...] há um estabelecimento de relações e conexões com o dado valor da hora e a incógnita do problema valor pago pelas sete horas, apesar dos cálculos incorretos que levou à resposta incorreta do problema. Outro dado interessante que podemos observar é o quão definido é o raciocínio sequencial do aluno que preencheu a tabela com rapidez, acreditamos que não se deu conta que a sequência está interrompida e preencheu como se não estivesse. (CAMPOS, 2019, p. 169)

Figura 18: Resolução do problema 3C pelo aluno TB7



3) Um estacionamento cobra R$ 3,00 pela primeira hora. A partir da segunda hora, o valor é de R$ 2,00 por hora adicional.

Tempo (h)	1	2	3	7
Preço (R$)	3,00	5,00	7,00	9,00

a) Preencha a tabela com os valores em cada tempo de permanência.

b) Quanto pagará o proprietário de um carro que esteve estacionado durante 7 horas? 14,00

Rascunhos

7 Hrs

8 + 4 + 1

12 + 1

13

Fonte: CAMPOS, 2019, p. 169.

A partir desses resultados e outros observados durante a pesquisa, Campos (2019), compreende que "exercícios de sequência, pelo uso de operações que lhes são peculiares, são propícios ao desenvolvimento do pensamento algébrico de estabelecimento de relações e conexões" (CAMPOS, 2019, p. 169).

Após a finalização das análises, Campos (2019), observou que:

> Os resultados nos apontaram que o nível de dificuldade simples, como apresentado nos problemas com sequências (3A, 4A, 1C e 3C) representa um aporte significativo para os alunos no desenvolvimento das primeiras noções algébricas. É recorrente uso de sequências nos anos iniciais, no entanto, entendemos que a sua continuidade nos anos finais não diminuiria o nível conceitual dos alunos. Desse modo, permite-nos sugerir uma prática em sala de aula, com atividades que explorem sequências simples, dentro dos conteúdos previstos para cada ano, e assim no 6º. Ano, pode ser um caminho favorável ao desenvolvimento do pensamento algébrico. (CAMPOS, 2019, p. 182)

Ao responder sua questão de pesquisa, Campos (2019), conclui que:

> Sendo assim, as principais contribuições da sequência didática que elaboramos reside no diferencial de trabalhar com resolução de problemas em linguagem natural que privilegiam o desenvolvimento do pensamento algébrico pelas relações e conexões que exigem no seu processo de resolução. E privilegiar o desenvolvimento do pensamento algébrico, nos mostrou os estudos correlatos, que contribuem não só para a aprendizagem algébrica futura como para toda a matemática. (CAMPOS, 2019, p. 189)

Como sugestão para futuras pesquisas, Campos (2019), aponta que sejam observadas as práticas de ensino do professor durante as aulas, e aconteça uma avaliação de como essas práticas influenciam no desenvolvimento de estratégias similares as previstas em sua pesquisa. Outra sugestão para futuras pesquisas é o desenvolvimento de pesquisas similares no Ensino Médio, com o objetivo de "traçar um paralelo entre o quão esses alunos evoluem no pensamento algébrico na educação básica" (CAMPOS, 2019, p. 193).

É na última sugestão propostas por Campo (2019) que a pesquisa desenvolvida nesta dissertação se insere, pois ao desenvolvê-la na 1ª série do Ensino Médio, buscamos observar os níveis do desenvolvimento do Pensamento algébrico dos alunos ao resolverem tarefas que envolvam Funções Exponencias. Foi possível observar quais as características mais presentes nas construções dos alunos e o nível de desenvolvimento que apresentaram nessa etapa escolar, sendo assim, pudemos também compreender as dificuldades apresentadas pelos alunos para o início do estudo de Função Exponencial.

Como podemos observar dos 6 trabalhos analisados, cinco dissertações e a tese de doutorado são desenvolvidas nos anos finais do Ensino Fundamental, sendo que uma pesquisa foi realizada no 6º ano, três no 7º ano e duas no 8º ano, esse predomínio do 7º ano e 8º ano se relaciona ao fato de esses dois anos escolares estarem relacionados ao início do desenvolvimento da linguagem algébrica, como verificado por Modanez (2003) ao analisar alguns dos livros didáticos aprovados pelo PNLD no ano do desenvolvimento da sua pesquisa, além disso, desde 2017, o estudo da linguagem algébrica é proposto pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) a partir do 7º ano do Ensino Fundamental.

Entre os trabalhos analisados duas dissertações apresentam alunos da 1ª série do Ensino Médio como participantes da pesquisa, mesmo ano escolar no qual a pesquisa desenvolvida nesta dissertação realizou as atividades relativas a Função Exponencial com o objetivo de avaliar o nível de desenvolvimento do Pensamento algébrico desses alunos.

A dissertação de Ferreira (2009) aborda os objetos matemáticos Sequências, Progressões Aritméticas e Progressões Geométrica (PG) e a pesquisa de Salgueiro (2011) aborda Funções, em sua maioria Funções Afim. Ambas as pesquisas ratificaram a importância da pesquisa desenvolvida nesta dissertação, pois como apontado por Ferreira (2009) a maior parte dos alunos apresentou maior dificuldade no desenvolvimento do padrões relativos a PG, e ao avaliar o nível do desenvolvimento do Pensamento Algébrico para estudo de Função Exponencial, objeto matemático com familiaridade com o estudo de PG, compreendemos quais são as dificuldades e quais características do Pensamento Algébrico os alunos precisam desenvolver para resolução de atividades que venham a abordar este objeto matemático.

Há somente uma pesquisa documental, entre os trabalhos analisados, cuja autoria é de Sobrinho (2019), que apresenta levantamentos de artigos científicos e dissertações sobre funções, sendo que em apenas um dos artigos analisados por Sobrinho (2019) havia o tema Função Exponencial. O artigo analisado por Sobrinho (2019) é de autoria de Adriana Tiago dos Santos e Barbara Lutaif Bianchini, foi publicado no ano de 2012 com o título “Análise das estratégias utilizadas pelos estudantes no estudo de funções logarítmicas e exponencias”.

Destacamos que o artigo produzido por Santos e Bianchini (2012) é desenvolvido com alunos da 3ª série do Ensino Médio, com o objetivo de possibilitar que o aluno reconheça a função logarítmica como a função inversa da exponencial, para isso se utiliza do recurso digital GeoGebra. A pesquisa de Santos e Bianchini (2012) tem como referencial teórico a teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2003) e os Processos do Pensamento Matemático Avançado (DREYFUS, 1991).

Além do artigo produzido por Santos e Bianchini (2012), o levantamento realizado por Sobrinho (2019), apresenta a dissertação envolvendo o estudo de Funções exponencias com o aporte teórico dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2003), sendo esta a pesquisa de Souza (2010) que foi abordada na seção 2.1.3, que descreverá os trabalhos pesquisados que envolvem Função exponencial e a teoria dos Registros de representação Semiótica.

Nossa pesquisa buscou, a partir dos conceitos da teria dos Registros de Representação Semiótica, observar como os alunos mobilizam os diferentes registros de representação no desenvolvimento do Pensamento algébrico, observando se as mobilizações de vários registros contribuiriam de forma significativa para um melhor nível de desenvolvimento do PA, pois segundo Duval (2012):

> [...] as diversas representações semióticas de um objeto matemático são absolutamente necessárias. De fato, os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata, como são os objetos comumente ditos “reais” ou “físicos”. É preciso, portanto, dar representantes. E por outro lado, a possibilidade de efetuar tratamentos sobre os objetos matemáticos depende diretamente do sistema de representação semiótico utilizado. Basta considerar o caso do cálculo numérico para se convencer disso: os procedimentos, o seu custo, dependem do sistema de escrita escolhido. As representações semióticas desempenham um papel fundamental na atividade matemática. (DUVAL, 2012, p. 268)

Portanto ao desenvolvermos, em nossa pesquisa, essas tarefas que proporcionem aos alunos a mobilização dos vários registros de representação do objeto matemático Função exponencial, de forma individual ou em grupos, visamos à contribuição para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico. Buscamos com as atividades realizadas propiciar a mobilização não somente da forma algébrica, mas também a construção da representação dessa forma algébrica pelo aluno, por meio da conversão e tratamento de outros tipos de registros de representação de Função exponencial.

Nesse sentido, as tarefas propostas nesta pesquisa podem propiciar ao aluno a compreensão de que os objetos matemáticos não podem ser confundidos com sua representação semiótica, pois podem mobilizar seu conhecimento por meio de vários tipos de registros semióticos, para a resolução dos problemas.

2.1.2. Pensamento algébrico e Função exponencial

Na pesquisa bibliográfica realizada em nossa dissertação foram encontradas 01 pesquisa (BDTD) e 01 pesquisa (BTD-CAPES) sobre Pensamento Algébrico e função exponencial, sendo que em ambas as plataformas foi apresentada a mesma dissertação. A dissertação é de autoria de Aline Kempa Bonotto e intitulada “Ensino e aprendizagem da função exponencial por meio de atividades investigativas e do uso de objeto de aprendizagem”, defendida no âmbito do Curso de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática do Centro Universitário Franciscano de Santa Maria, no ano de 2015.

Bonotto (2015) inicia sua dissertação realizando a análise de quatro trabalhos que utilizaram a metodologia ou recursos semelhantes aos utilizados em seu trabalho. As dissertações de Rodrigues (2007), Pereira (2010), Cardono (2012) e Saraiva (2012) apresentam similaridade com o trabalho Bonotto (2015), pois três deles abordaram função (dois abordaram função exponencial como foco da pesquisa), dois abordaram Atividades Investigativas em Matemática e dois abordaram a utilização de recursos tecnológicos para o ensino de função exponencial.

Do trabalho de Bonotto (2015) deve-se destacar o entendimento apresentado sobre Objetos de Aprendizagem (OA), que considera um “OA qualquer recurso digital, reutilizável, que serve como apoio para as atividades que tenham por objetivo mediar os alunos na atribuição de significados aos conceitos matemáticos apresentados” (BONOTTO, 2015, p. 26).

Ainda sobre o uso de OA em sala de aula, Bonotto (2015) destaca que:

> O uso de Objetos de Aprendizagem pode possibilitar ao professor inovar estratégias de ensino, despertando o interesse, curiosidade e o raciocínio lógico dos alunos, pois ao trabalhar com esse tipo de recurso tecnológico, o papel do professor não é apenas de transmissor do conhecimento, mas de mediador. Sendo assim, o aluno não é apenas um receptor passivo de ideias, mas sim participante ativo na construção do seu conhecimento. (BONOTTO, 2015, p.28)

Para atividades investigativas, Bonotto (2015) utiliza como aporte teórico o trabalho de Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), no qual os autores elucidam que a Investigação Matemática é desenvolvida em quatro etapas, sendo que elas podem surgir todas ao mesmo tempo. Bonotto (2015) apresenta um resumo do seu entendimento dessas quatro etapas propostas por Ponte, Brocardo e Oliveira (2009):

> 1ª etapa – Exploração e formulação das questões: se reconhece uma situação problemática, explora-se essa situação e formula-se questões.
> 2ª etapa – Conjecturas: são organizados os dados, formulação de conjecturas e afirmações sobre elas.
> 3ª etapa – Testes e reformulações: são realizados testes para avaliar a validade das questões e é feita a reformulação detalhada das conjecturas.
> 4ª etapa – Justificação e avaliação: são justificadas as conjecturas e avaliado o raciocínio no desenvolvimento do processo de resolução. (Bonotto, 2015, p.30)

Na busca pela compreensão do desenvolvimento do Pensamento Algébrico na generalização de padrões, Bonotto (2015) utiliza autores como Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Vale e Pimentel (2005), Manson (2006), Ponte (2006), e por fim, Ponte, Brocardo e Oliveira (2009). Do trabalho de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) são destacados os elementos que caracterizam o pensamento algébrico, segundo esses autores “a percepção de regularidades, a percepção de aspectos invariantes em contraste de outros que variam as tentativas de expressar ou explicar a estrutura de uma situação problema e a presença do processo de generalização” (FIORENTINI ET AL., 1993, p. 87).

Dos trabalhos de Vale e Pimentel (2005) e Mason (1996), Bonotto (2015, p. 35) destaca que ambos os autores apontam o papel importante da investigação no “desenvolvimento do pensamento algébrico ao se trabalhar com situações problemas, que apresentam como foco padrões de sequência e a descoberta da lei de correspondência entre cada elemento e sua respectiva posição”.

Cabe salientar que dos trabalhos de Ponte (2006) e Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), Bonotto (2015) destaca que os autores apontam:

> [...] que a generalização é o elemento central do pensamento algébrico e salientam que as tarefas envolvendo generalizações para além de promoverem a capacidade de abstração, visam também desenvolver a capacidade de comunicação e o raciocínio matemático. (BONOTTO, 2015, p. 36)

Da construção da sua fundamentação teórica Bonotto (2015, p. 37) buscou em seu trabalho responder à questão: “O ensino de funções exponenciais, mediado pela utilização de recursos tecnológicos e de um objeto de aprendizagem favorece o desenvolvimento de habilidades investigativas no aprendiz?”.

O principal objetivo do trabalho de Bonotto (2015) é “analisar a proposta de ensino de Funções Exponenciais mediada pela utilização das tecnologias de informação e comunicação e de Objeto de Aprendizagem, a fim de favorecer o desenvolvimento de habilidade investigativas no aprendiz” (BONOTTO, 2015, p. 37).

Para auxiliar e dar suporte para o desenvolvimento da pesquisa Bonotto (2015) optou por traçar os seguintes objetivos secundários:

> 1) Verificar se os alunos conseguem por meio das atividades investigativas propostas construírem o conceito de função exponencial e identificar suas características e propriedades;
> 2) Analisar a potencialidade do Objeto de Aprendizagem e do Software Geogebra no estudo de função exponencial;
> 3) Analisar as contribuições da Perspectiva Metodológica de Investigações Matemáticas para o estudo da Função Exponencial. (BONOTTO, 2015, p. 37)

O trabalho desenvolvido por Bonotto (2015) foi realizado com 20 alunos do 2º ano do Ensino Médio do Instituto Federal de Educação no município de São Vicente do Sul, no qual Bonotto (2015) atuava como professora.

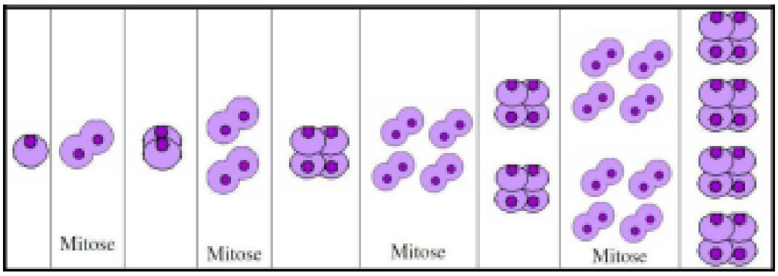
As atividades aplicadas por Bonotto (2015) em seu trabalho foram divididas em três blocos (BLOCO I, BLOCO II, BLOCO III), as atividades foram selecionadas buscando situações “problema envolvendo sequências numéricas representadas por meio de figuras geométricas e algumas situações contextualizadas” (BONOTTO, 2015, p. 38). Segundo Bonotto (2015), os blocos por ela propostos são descritos:

> O Bloco I teve por finalidade trabalhar a identificação de padrões através de uma sequência e chegar a uma generalização da Função Exponencial. As atividades deste primeiro bloco foram adaptadas segundo Souza (2013) e Paiva (2009).
> O Bloco II buscou analisar as características e propriedades da Função Exponencial através da sua representação gráfica explorada no Software Geogebra. As atividades desenvolvidas neste bloco foram elaboradas pela própria pesquisadora.
> O último, que é o Bloco III, é a atividade desenvolvida com o Objeto de Aprendizagem, onde são exploradas novamente as características e propriedades da referida função através da matemática financeira. (BONOTTO, 2015, p. 42 e 43)

A atividade 4 (Figura 19), presente no BLOCO I de atividades, foi adaptada para ser aplicada no trabalho desenvolvido por nós, cujo tempo de duração na aplicação realizada por Bonotto (2015) foi de 2 horas.

Figura 19. Atividade 4 propostas por Bonotto (2015)

A divisão celular denominada mitose consiste em uma célula filha duplicar o seu conteúdo e então se dividir em duas, chamadas de células filhas e cada célula filha, por sua vez, repete esse processo originando quatro células filhas. Considerando a formação do embrião sabemos que ela ocorre a partir da célula ovo ou zigoto que através de divisões celulares forma todo o organismo, conforme mostra a figura abaixo.



a) Construir uma tabela relacionando o número de células filhas até a 7ª divisão.
b) Estabeleça uma lei para calcular o número de células filhas para *n* divisões.
c) Represente graficamente os valores tabelados no item (a).

Fonte: Bonotto (2015, p. 56)

Bonotto (2015), após as análises das atividades propostas, apresentou a seguinte ponderação sobre o pensamento algébrico: “o desenvolvimento das atividades propostas mostrou-nos a potencialidade da investigação matemática para a construção de uma linguagem algébrica que representasse as situações-problema apresentadas” (BONOTTO, 2015, p.111).

Finalizando seu trabalho, Bonotto (2015) concluiu:

> Ao finalizar esta pesquisa, podemos inferir que respondemos de forma positiva à questão inicial de pesquisa. Sendo assim, observamos que o ensino de Funções Exponenciais mediado pela utilização de um Objeto de Aprendizagem favorece o desenvolvimento de habilidades investigativas no aprendiz, quando bem planejado e executado, proporciona resultados satisfatórios. (BONOTTO, 2015, p. 113)

O trabalho de Bonotto (2015) foi uma importante fonte de embasamento teórico para o desenvolvimento do nosso trabalho, já que as atividades analisadas por ela serviram de base para nossa investigação, ainda que as questões de pesquisa a serem respondidas sejam outras.

Na próxima seção abordamos os trabalhos pesquisados que envolvem função exponencial e a teoria dos Registros de representação Semiótica.

2.1.3. Função exponencial e Registros de Representação Semiótica

Pesquisando sobre Registros de Representação Semiótica e funções exponenciais foi possível obter 02 pesquisas (BTD-CAPES) e 03 pesquisas (BDTD), totalizando 04 dissertações ao se retirar as repetições. Após realizarmos o levantamento das dissertações de mestrado, elaboramos o Quadro 4 apresentando o Autor, Título e Instituição de ensino.

Quadro 4: Trabalhos analisados sobre Função exponencial e Registros de Representação Semiótica

Autor(a)	Título	Instituição
Souza (2010)	A função exponencial no caderno do Professor de 2008 da Secretaria do Estado de São Paulo, análise de atividades realizadas por alunos da 2ª série do Ensino Médio	PUC-SP
Mossi (2016)	Análise discursiva das representações semióticas mobilizadas por licenciados em matemática no ensino e na aprendizagem de funções	UFSM
Ginez (2020)	Fenômeno de congruência e não congruência sobre a função exponencial em materiais didáticos	UFSCar
Correia (2021)	Subsídios teóricos para construção de uma sequência didática para o ensino de função exponencial na educação básica, visando letramento estatístico	UESC

Fonte: Elaboração própria.

Mantendo a ordem de análise por meio do ano de publicação, a primeira dissertação analisada é a de autoria de Claudia Vicente de Souza intitulada “A função exponencial no caderno do Professor de 2008 da Secretaria do Estado de São Paulo, análise de atividades realizadas por alunos da 2ª série do Ensino Médio”, defendida para obtenção do título de Mestre Profissional em Ensino de Matemática, da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, no ano de 2010.

O trabalho de Souza (2010) utilizou como uma das referências a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2003). Em seu trabalho, Souza (2010) utilizou a teoria para análise das diferentes conversões entre representações de uma função e também para os elementos de congruência e não congruência de uma conversão.

Outro referencial utilizado por Souza (2010) foi a teoria do Modelo 3UV (três usos da variável) proposta por Sonia Ursini, Fortino Escareño, Delia Montes e Maria Trigueros no livro "*Enseñanza del Algebra Elemental: Una propuesta alternativa",* tal teoria aponta para as dificuldades associadas ao conceito de variável. O Modelo 3UV consiste em interpretar os aspectos da variável: termo desconhecido; número genérico; relação funcional.

O termo desconhecido consiste em "o aluno deverá ser capaz de reconhecer que em determinada situação está envolvida uma quantidade cujo valor não é conhecido, mas que é possível determiná-lo, levando em consideração os dados apresentados" (SOUZA, 2010, p. 69).

O número genérico consiste, segundo Souza (2010), em "desenvolver a capacidade do aluno para reconhecer padrões, utilizar os símbolos na representação de uma situação geral, uma regra ou um método que os descrevam" (SOUZA, 2010, p. 69).

Por fim, segundo Souza (2010), compreender a relação das variáveis como uma relação funcional, porém é necessário distinguir as situações, pois a mesma situação pode ser representada de forma verbal, em expressões analíticas, tabelas ou gráficos.

A pesquisa de Souza (2010) teve como objetivo:

> [...] analisar se as atividades apresentadas no Caderno do Professor contribuem ou não para a compreensão do aluno a respeito do objeto Função Exponencial, se os alunos conseguem realizar ou não as mudanças de registro de representação semiótica à luz da teoria de Duval (2003). Também analisamos se está neste Caderno uma abordagem das variáveis conforme o Modelo 3UV (Três Usos da Variável) de Ursini et al (2005). (SOUZA, 2010, p. 26)

Souza (2010) concluiu, com relação às conversões entre os diferentes registros de representação realizadas pelos alunos, que "nas atividades que eram solicitadas a construção dos gráficos das funções, todas as duplas partem do registro algébrico para o registro de tabela e em seguida para o registro gráfico" (SOUZA, 2010, p.162).

Em relação aos três usos da variável (Modelo 3UV), Souza (2010) concluiu que nas atividades aplicadas observou o uso da variável como uma relação funcional e a variável como valor desconhecido. Sintetizando sua conclusão, Souza (2010) apontou "que existem dificuldades quanto à realização das mudanças de registro de representação semiótica e limitações quanto à identificação das variáveis como uma relação funcional e termo desconhecido" (SOUZA, 2010, p. 163).

Percebemos que o trabalho de Souza (2010) não aborda, porém permeia o Pensamento algébrico, entretanto não há uma análise precisa desta teoria neste trabalho. O trabalho desenvolvido por esta pesquisa vem para complementar este tipo de estudo desenvolvido por Souza (2010), pois além de observar características da teoria dos Registros de Representação Semiótica, aprofundamos a investigação sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos.

O segundo trabalho relativo aos temas presentes nesta seção foi produzido por Shayene Vieira Mossi, intitulado "Análise discursiva das representações semióticas mobilizadas por licenciados em matemática no ensino e na aprendizagem de funções", apresentado no âmbito do Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), no ano de 2016.

Mossi (2016) apontou que a intenção de desenvolver uma pesquisa envolvendo o ensino de funções surgiu ao considerar necessário se pensar no conhecimento que permeia o ensino dessas funções. As experiências profissionais de Mossi (2016) propiciaram indagações acerca da formação dos professores e da necessidade de atualização constante desses profissionais.

Ao desenvolver sua pesquisa, Mossi (2016) apresenta a seguinte questão: "Se e como, a partir da proposição de uma sequência de atividades utilizando o contexto da criptografia, os licenciandos em Matemática mobilizam o objeto matemático função?" (MOSSI, 2016, p. 10).

O objetivo da pesquisa elaborada por Mossi (2016), oriunda da questão de pesquisa apresentada, é "investigar a expansão discursiva dos registros de representação semiótica mobilizada por licenciandos em Matemática, a partir de atividades envolvendo criptografia ao se caracterizar funções afim, quadrática e exponencial" (MOSSI, 2016, p.10).

Em seu trabalho, Mossi (2016), utilizou como referencial teórico a teoria dos Registros de Representação Semiótica proposta por Duval (2003). e trabalhos que abordassem criptografia no contexto de funções.

Para a teoria dos Registros de Representação Semiótica, novamente tem-se um trabalho que se utilizou das conversões entre registros e tratamentos dentro de um mesmo registro para realizar a análise das atividades propostas.

Dentre os trabalhos pesquisados por Mossi (2016) sobre criptografia no contexto de funções, destacam-se o entendimento de Tomarozzi (2001), que postula que “a palavra criptografia tem origem grega (krypto = escondido, grafo = grafia) e foi definida como a arte ou ciência de escrever mensagens em códigos, para que apenas pessoas com autorização possam decifrá-las” (MOSSI, 2016, p. 20).

Mossi (2016) utiliza da teoria dos Registros de Representação Semiótica para compreender quais registros são mobilizados no objeto matemático função. Mossi (2016) entende que ao se trabalhar com diversas formas de representação semiótica, como foi realizado em sua pesquisa, “pode proporcionar aos sujeitos habilidades na utilização desses registros e facilitar o desenvolvimento do raciocínio” (MOSSI, 2016, p.28).

Os sujeitos da pesquisa de Mossi (2016) foram licenciandos em Matemática do curso de Matemática do período matutino da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM) que estavam cursando a disciplina “Educação Matemática II”, no primeiro semestre de 2016. A sequência de atividades propostas aos sujeitos da pesquisa teve como objetivo trabalhar com o objeto matemático função, enfatizando as funções afim, quadrática e exponencial, todavia houve também a necessidade de serem abordados os conceitos de função inversa e a condição para uma função ser bijetora, pois a mesma é uma condição para que uma função seja invertível.

Ao final da análise da sua pesquisa, Mossi (2016), aponta que:

> [...] constatou-se que as licenciandas mobilizaram a expansão discursiva das representações semióticas para o objeto matemático função. Mais ainda, todas as duplas compreenderam a necessidade de a função ser inversível para que, assim, possa ser considerada cifradora. Quanto as caracterizações, a maioria das duplas constataram que a existência de uma progressão na imagem incide quando há uma progressão também no domínio das funções. (MOSSI, 2016, p. 75)

O trabalho de Mossi (2016) apresenta um importante questionamento sobre a formação de professores de Matemática e o entendimento desses profissionais com relação ao objeto matemático função. O trabalho que foi desenvolvido nesta dissertação não apresenta similaridades significativas com o trabalho de Mossi (2016), pois difere em relação ao público-alvo e dos objetivos estudados.

A terceira dissertação analisada que aborda as temáticas Registros de Representação e Função exponencial é a pesquisa desenvolvida por Patrícia Costa Ginez, intitulada “Fenômeno de congruência e não congruência sobre a função exponencial em materiais didáticos” produzida no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos, *campus* Sorocaba, no ano de 2020.

A pesquisa de Ginez (2020) teve como objetivo analisar como são mobilizados e coordenados os diferentes registros de representações semióticos em relação ao objeto matemático função exponencial no livro didático Matemática-Ciência e Aplicação de autoria de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida publicado no ano de 2016 e no material de apoio ao Currículo do Estado de São Paulo, o Caderno do Professor da 1ª série do Ensino Médio, volume 2.

Ginez (2020) buscou em seu trabalho realizar a análise de modo a observar como os “fenômenos de congruência e não congruência aparecem nas propostas desses materiais e quais contribuições o material traz para uma efetiva aprendizagem do aluno” (GINEZ, 2020, p. 16). Dados os contextos descritos acima, Ginez (2020) buscou responder em sua pesquisa à seguinte questão:

> “Como o conceito de função exponencial é apresentado nesses materiais didáticos sob a ótica da Teoria dos Registros de Representação Semiótica no que tange aos fenômenos de congruência e não congruência?” (GINEZ, 2020, p. 16)

Em sua pesquisa, Ginez (2020) iniciou a revisão bibliográfica realizando um breve resumo das possíveis abordagens da função exponencial, sendo elas, por meio de Tecnologias, Jogos, Modelagem Matemática e Interdisciplinaridade.

Em relação às Tecnologias, Ginez (2020) apresenta a abordagem proposta por Einhardt (2016). Ginez (2020) concluiu em seu trabalho que “acredita ser necessário que se utilizem das novas tecnologias como uma ferramenta no ambiente educacional, para uma mudança de prática que, como consequência, traz a atenção e interesse dos alunos por ser uma abordagem inovadora de forma contextualizada” (GINEZ, 2020, p. 23).

Sobre a utilização de jogos para o ensino de função exponencial, Ginez (2020) apresenta trabalhos que utilizam a Torre de Hanói como uma ferramenta para facilitar o ensino e aprendizagem da função exponencial.

Ao abordar como a Modelagem é utilizada para o desenvolvimento do objetivo matemático função exponencial em sala de aula, Ginez (2020) apresenta alguns autores que fazem esse tipo de abordagem em suas pesquisas, entre eles há os trabalhos desenvolvido por Lima (1999, 2006) que sugere:

> [...] a criação da modelagem, com direcionamento inicial feito pelo professor com um determinado tema e na sequência os alunos buscam uma resolução para a situação-problema com coletas de dados, analisando e formulando modelos, chegando aos resultados. Os alunos são estimulados a traçar as próprias estratégias para a resolução. (GINEZ, 2020, p.26)

A Interdisciplinaridade para o ensino de função exponencial é abordada por Ginez (2020) pela análise de diferentes trabalhos, dos quais se destaca o trabalho de Silva (2015) que apresenta “a aplicabilidade da Função Exponencial nas diferentes áreas e sobre as representações em gráficos que favorecem a observação de comportamentos, apresentando atividades com expressões algébricas e função exponencial” (GINEZ, 2020, p.27).

Ao apresentar pesquisas que analisaram o Caderno de Matemática na Secretaria do Estado de São Paulo, Ginez (2020) aponta dessas análises que no geral o material é de fácil compreensão aos docentes, entretanto não é possível concluir o mesmo para os alunos, pois o desenvolvimento do material em sala de aula dependeria de pré-requisitos que muitos alunos não apresentam no momento do desenvolvimento das tarefas propostas pelo material.

Fazendo a relação à compreensão docente sobre a implementação do material apresentada por Ginez (2020), inferimos que os professores demonstram que sabem das potencialidades do material, principalmente em relação ao fato que um aluno, dentro do sistema de ensino do Estado de São Paulo, terá um ensino continuado independente da escola que ele inicie ou finalize o seu ano escolar, todavia a pesquisa aponta a necessidade de o docente avaliar a viabilidade ou não da abordagem proposta pelo material.

Ginez (2020) aborda em seu trabalho, também, o Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) como suporte para o estudo de funções, segundo a proposta curricular do Estado de São Paulo, e destaca o trabalho de Di Piero (2011) que realizou o desenvolvimento de uma AVA "com situações de Aprendizagem do caderno do aluno para o *Moodle* em quatro tópicos com fóruns, lições, questionários, revisando conceito de funções já estudados e após utiliza o Geogebra para utilização de visualizadores para aprendizagem significativa" (GINEZ, 2020, p. 31).

Ginez (2020) apresenta que Di Piero (2011) concluiu que "foram muitas as dificuldades encontradas, como adaptação com a linguagem *moodle*, tempo de elaboração, dificuldade dos alunos no crescimento e decrescimento das funções, em especial função exponencial" (GINEZ, 2020, p 32).

Sobre a abordagem da Função Exponencial no Caderno do Professor, Ginez (2020) apresenta o trabalho de Souza (2010), já citado e analisado nesta dissertação, nesta mesma sessão.

Em sua pesquisa Ginez (2020), após realizar um panorama histórico e investigar como os livros didáticos abordam o conceito de função exponencial, apresenta a Teoria dos Registros de Representação Semióticas, proposta por Raymond Duval (2003), com foco nos fenômenos de congruência e não congruência, sobre o qual Ginez (2020) acredita "que uma análise de questões que envolvem alguns registros de representação e que tenham foco nos fenômenos de congruência e não congruência podem auxiliar na aprendizagem e compreensão de atividades Matemática" (GINEZ, 2020, p. 56).

A pesquisa de Ginez (2020) tem uma abordagem qualitativa, e após as análises do Caderno do Professor da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo e do livro didático, a autora conclui que:

> [...] foi possível perceber que os diferentes registros de representação são encontrados nos materiais didáticos e que fenômeno de congruência é encontrado nos dois materiais com um mesmo quantitativo. Contudo, o fenômeno de não congruência aparece em algumas abordagens no Caderno do Professor, e em uma delas acreditamos que a atividade deveria ser aplicada posteriormente as atividades simples, envolvendo tratamento e conversão congruente. Todavia, atividades que envolvem a conversão não congruente necessitam ser aplicadas com mais frequência, visto que são essenciais para o desenvolvimento de habilidades e competências que são adquiridas com atividades mais complexas envolvendo esse fenômeno. Já as demais atividades, concordamos com as situações, mas salientamos a importância de trabalhar as propriedades de potências que corroboram para a aprendizagem. (GINEZ, 2020, p. 102)

Importante destacar que o trabalho de Ginez (2020), apesar de se assemelhar ao objeto matemático de estudo e da busca em associar elementos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, difere da abordagem de pesquisa desta dissertação, principalmente na execução de “como” e “o que” foi avaliado.

Enquanto Ginez (2020) buscou avaliar elementos de congruência e não congruência em materiais didáticos, esta pesquisa se baseou no trabalho de Duval (2003) como plano de fundo, pois nosso principal objetivo foi observar o desenvolvimento do Pensamento Algébrico em alunos da 1ª série do Ensino Médio, na ótica proposta por Almeida (2016) em sua tese de doutorado.

A última dissertação analisada nesta seção foi a de Gleidson Santos Correia, intitulada “Subsídios teóricos para construção de uma sequência didática para o ensino de função exponencial na educação básica, visando letramento estatístico”, produzida no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciência e Matemática (PPGECM), da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), *campus* Ilhéus, no ano de 2021.

A pesquisa de Correia (2021) teve como objetivo geral “Avaliar os limites e as potencialidades de uma Sequência Didática, na perspectiva do Letramento Estatístico, para ensino e a aprendizagem da função exponencial no Ensino Médio envolvendo a covariação determinística e estatística” (CORREIA, 2021, p. 19). Para desenvolver esse objetivo, Correia (2021) apresentou a seguinte questão de pesquisa:

> De que maneira pode-se propor uma Sequência Didática, em que os estudantes gerem dados, envolvendo a covariação determinística e estatística, que possa contribuir para a apropriação da função exponencial numa perspectiva de Letramento Estatístico na Educação Básica? (CORREIA, 2021, p. 18)

Além do objetivo geral, Correia (2021) apresenta alguns objetivos específicos para sua pesquisa:

> • constituir um quadro teórico coerente e conciso que dê suporte ao ensino da função exponencial na Educação Básica, considerando aspectos da Matemática e da Estatística;
> • analisar a Base Nacional Comum Curricular a fim de compreender os principais aspectos a serem considerados no Ensino da Função exponencial no Ensino Médio;
> • investigar, por meio de uma revisão sistemática, o que as pesquisas em ensino de Matemática têm discutido sobre o ensino da função exponencial na

> Educação Básica e conhecer, caso existam, as relações que estabelecem com a BNCC;
> • elaborar uma Sequência Didática para o ensino da função exponencial pautada no quadro teórico constituído e a partir dos indicativos verificados nas análises da BNCC e das pesquisas já realizadas;
> • analisar a Sequência Didática elaborada, indicando limites e potencialidades desta para o ensino e aprendizagem nas salas de aula brasileiras. (CORREIA, 2021, p. 19)

A fundamentação teórica de Correia (2021) é composta pelo Letramento Estatístico, Ciclo Investigativo, Teoria dos Registros de Representação Semiótica e Teoria Antropológica do Didático.

Sobre o Letramento Estatístico, Correia (2021) justificou a necessidade de seu estudo, pois acredita que os conhecimentos em estatística sejam "cada vez mais necessário, à medida que a sociedade lida com novos fenômenos estocásticos, como o crescimento populacional, o aquecimento global, as endemias e pandemias, taxa de criminalidade, pragas etc." (CORREIA, 2021, p. 37).

Correia (2021) apresenta o modelo proposto no trabalho de Gal (2002) como a principal fundamentação sobre Letramento Estatístico de sua pesquisa, que se baseia em dois tipos de elementos: os cognitivos e os atitudinais, sendo ambos intrinsicamente relacionados um ao outro e que evoluem ao longo do desenvolvimento desse letramento. Nesse sentido, embora tais elementos sejam divididos em categorias diferentes, "devem ser compreendidos em um só conjunto, que será sempre evocado em um contexto" (CORREIA, 2021, p. 37). A seguir os elementos que compõem o Letramento Estatísticos apresentados no Quadro 5.

Quadro 5: Modelo de Letramento Estatístico

Elementos Cognitivos	**Elementos atitudinais**
Habilidade de letramento	Crenças e atitudes
Conhecimento estatístico	Postura Crítica
Conhecimento matemático	
Conhecimento de contexto	
Capacidade de formular questões críticas	

Fonte: Correia (2021, p. 37), adaptado de Gal (2002)

A partir da análise da pesquisa de Gal (2002), Correia (2021) entende que no

> "Letramento Estatístico é mais importante compreender os conceitos envolvidos em uma situação do que tornar em algoritmo uma ferramenta estatística, por exemplo. Entretanto mesmo para operar essas ferramentas digitais em uma atividade matemática e/ou estatística é necessário ter a instrumentalização da ferramenta digital, assim como ter certo nível de compreensão sobre o que se deseja executar matematicamente ou estatisticamente." (CORREIA, 2021, p. 38)

Sobre o Ciclo Investigativo, Correia (2021) apresenta a proposta de Wild e Pfannkuch (1999), sendo está uma adaptação do ciclo PPDAC proposto por MacKay e Oldford (1994), que postula que ao participar de um processo de investigação estatística, o sujeito envolve-se "em todo o processo desde a formulação do problema (P) que, em geral, emerge de um contexto real, planejamento (P), coleta de dados (D), análise dos dados (A), seguindo até as conclusões (C)" (CORREIA, 2021, p.43).

Correia (2021) faz em sua pesquisa uma ligação entre a proposta de Wild e Pfannkuch (1999) e os estudos sobre Letramento Estatístico propostos por Gal (2002), e observou a necessidade de:

> [...] utilizar as habilidades de letramento para comunicar as descobertas em sua língua materna e, além disso, utilizar as ferramentas estatísticas e matemáticas e suas diversas representações, como tabelas, gráficos, medidas de tendências central e de dispersão, para apresentar esses resultados da melhor maneira possível. (CORREIA, 2021, p. 45)

Ao compreender que a Estatística e a Matemática apresentam diferentes registros possíveis para representar um objeto matemático, sendo necessário que o estudante desenvolva habilidades para conseguir mobilizar esses diferentes registros, Correia (2021), a partir dos apontamentos apresentados, determina como fundamentação auxiliar, visando o processo de ensino e aprendizagem de estatística e matemática, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica proposta por Raymond Duval (2003).

Correia (2021) afirmou que o uso da Teoria dos Registros de Representação Semiótica no ensino de funções exponencias:

> [...] fornece um suporte teórico para a melhor compreensão e apropriação dos conceitos matemáticos e estatísticos mediados pelos registros de representação semióticos e, pensando no ensino da função exponencial, tanto como um modelo matemático como na perspectiva da estatística, é

> notório que tal teoria tem muito a contribuir com o processo de ensino e aprendizagem desta função. (CORREIA, 2021, p. 54)

Em relação ao uso de materiais concretos, Correia (2021) se utiliza da Teoria Antropológica do Didático, de Chevallard (1994), pois explorou em seu trabalho “o papel dos ostensivos, como os concretos manipuláveis, registros de representação e a própria ação dos estudantes na realização das tarefas, para compreensão do não ostensivo função exponencial” (CORREIA, 2021, p. 57).

Após finalizar a fundamentação teórica, Correia (2021) analisou a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), evidenciando como o objeto matemático função exponencial é abordado no material. Em seguida apresentou o levantamento de trabalhos realizados sobre o ensino de função exponencial e como essa temática tem sido abordada nessas pesquisas.

A Sequência Didática proposta por Correia (2021) é estruturada metodologicamente baseada no Ciclo Investigativo (PPDAC) proposta por Wild e Pfannkuch (1999), sendo ela estruturada em duas vertentes (contexto determinístico e contexto estatístico).

Ao final de seu trabalho Correia (2021) concluiu que a Sequência Didática proposta não aborda de forma completa os aspectos da função exponencial e tão pouco da Estatística, todavia contempla, dentro da perspectiva da BNCC e do Letramento Estatístico, os principais aspectos destes objetos matemáticos.

O levantamento das pesquisas apresentado por Correia (2021), se mostra um importante elemento para justificar a realização da pesquisa presente nesta dissertação. Outro ponto a destacar é a distinção do trabalho de Correia (2021) com o que se propõe nesta dissertação, pois nesta pesquisa observamos o nível de desenvolvimento do Pensamento Algébrico no processo de ensino e aprendizagem de funções exponenciais.

Ao realizar o levantamento desses trabalhos, que abordaram diferentes concepções de abordagem das funções exponenciais e da Teoria dos Registros de Representação Semiótica e Pensamento Algébrico, observamos a importância do desenvolvimento de nossa pesquisa, não somente na busca de responder à questão levantada por esta pesquisa, como também de dar continuidade e aprofundar o estudo de funções exponenciais.

Na seção a seguir será abordado o estudo do Pensamento Algébrico, com os resultados e discussões de artigos estudados durante o curso Fundamentos

Metodológicos da Educação em Ciências e Matemática, ministrado pelo Professor Dr° Paulo César Oliveira, em seguida também serão destacados os trabalhos de Almeida (2016) e Almeida e Câmara (2017, 2019) sobre o Pensamento Algébrico.

2.2. PENSAMENTO ALGÉBRICO

Durante os estudos sobre o Pensamento Algébrico, analisamos diversos textos envolvendo o tema, a maioria dos trabalhos foram pesquisados durante o período do curso Fundamentos Metodológicos da Educação em Ciências e Matemática, ministrado pelo Professor Dr° Paulo César Oliveira.

Em relação ao Pensamento Algébrico nos anos iniciais do Ensino Fundamental, Blanton e Kaput (2005, p.403) ao refletirem sobre o desenvolvimento do raciocínio algébrico dos alunos no Anos Iniciais, o definem como “um processo no qual os alunos generalizam ideias matemáticas de um conjunto particular de exemplos, estabelecem generalizações por meio do discurso de argumentação, e expressam-nas, cada vez mais, em caminhos formais e apropriados à sua idade”.

Canavarro (2007, p. 88) entende que “a Álgebra escolar tem estado associada à manipulação dos símbolos e à reprodução de regras operatórias, tantas vezes aplicadas mecanicamente e sem compreensão, parecendo os símbolos terem adquirido um estatuto de primazia *per si*”.

Ainda nessa perspectiva sobre o ensino de álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental, Ferreira et al. (2018), busca responder a questão “Qual é a compreensão de professores dos anos iniciais do significado do Pensamento Algébrico e em que medida eles reconhecem os elementos que o constituem?”, a partir desta questão de pesquisa os autores apresentaram o seguinte objetivo: “Investigar a compreensão de professores dos anos iniciais do significado do Pensamento Algébrico e em que medida eles reconhecem os elementos que o constituem”.

Para o desenvolvimento da pesquisa de Ferreira et al. (2018) foi utilizada uma abordagem qualitativa para a investigação devido ao cunho interpretativo no caminho metodológico para realização da pesquisa. Os dados desta pesquisa em análise foram coletados no primeiro encontro de um curso de extensão intitulado “Matemática nos anos iniciais e o desenvolvimento do pensamento algébrico”, a formação em questão foi oferecida na Universidade Federal do ABC, no *campus* de São Bernardo do Campo.

O objetivo deste curso foi propiciar o desenvolvimento do conhecimento dos professores no que concerne ao Pensamento Algébrico a partir de discussões relativas às características do trabalho com propriedades dos números e das operações, o sinal de igualdade como equivalência, sequência e padrões, enfatizando os elementos que o compõem.

Para coleta e aplicação dos dados pesquisados por Ferreira et al. (2018) foram utilizadas tarefas realizadas com os professores, gravações em áudio e vídeo de cada uma das sessões presenciais, além da divisão dos 15 professores em quatro grupos para realização das atividades. Os autores focam a análise nas respostas, nos comentários e nas reflexões em torno das seguintes questões:

> 1) Se vocês tivessem que explicar a algum professor o que é o Pensamento Algébrico, o que diriam?
> 2) Que tarefas vocês preparam e implementam com os seus alunos que considera o Pensamento Algébrico?
> 3) Quais aspectos matemáticos vocês consideram essenciais, quando se fala em Pensamento Algébrico? (FERREIRA et al., 2018, p.61).

Ao realizar a análise destas respostas, comentários e reflexões apresentadas pelos professores participantes do curso, Ferreira et al. (2018) as dividem em duas categorias, sendo a primeira: o papel do professor no desenvolvimento do Pensamento Algébrico dos alunos (conhecimento pedagógico do conteúdo); e a segunda: os elementos matemáticos constituintes do Pensamento Algébrico (conhecimento específico do conteúdo).

Dentro da análise, um dos aspectos que foi apresentado por mais de um grupo, foi o respeito e a valorização do raciocínio do aluno e a ênfase na compreensão do fazer matemático e na construção de significados, essa situação pode ser observada pelos relatos dos professores apresentados na pesquisa.

Um aspecto relativo ao papel do professor para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico, é o fato de os professores participantes da pesquisa sinalizarem uma forma de ensino que considere o cotidiano dos alunos, buscando a contextualização das atividades e, consequentemente, um maior significado para as tarefas matemáticas.

Como resposta para a questão de pesquisa, Ferreira et al. (2018) acreditam que os professores, durante o estudo realizado, sejam do ponto de vista do saber fazer ou dos conhecimentos pedagógicos, apresentam uma certa compreensão acerca de alguns elementos metodológicos que podem colaborar para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico.

De acordo com a percepção dos autores da pesquisa, os professores apesar de não apresentarem um conhecimento aprofundado sobre PA, demonstraram a preocupação com o processo de ensino e aprendizagem dos alunos, principalmente com a não desconstrução dos conceitos e compreensões que os alunos carregam com si sobre Matemática, e buscaram ajudar os alunos a construir, a partir de suas concepções sobre os temas, uma nova forma de compreender conceitos relativos à Álgebra.

Ainda em relação aos anos iniciais do Ensino Fundamental, Oliveira e Farias (2021) apontam que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) indica quais são as dimensões da Álgebra que serão abordadas durante todo o Ensino Fundamental. Dessa forma, nos anos iniciais, os alunos devem ter contato com "as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade" (BRASIL, 2017, p. 268).

O artigo de Oliveira e Farias (2021) teve por objetivo analisar as tarefas prescritas na seção Álgebra, da BNCC, para o desenvolvimento do pensamento algébrico do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental, do ponto de vista da dupla abordagem didática e ergonômica propostas por Robert e Rogalski (2002).

A perspectiva da dupla abordagem didática e ergonômica desenvolvida por Robert e Rogalski (2002) para abordar a análise das práticas de ensino em Matemática é a ferramenta central da fundamentação teórica do artigo de Oliveira e Farias (2021), pois é a partir dessa abordagem que os autores realizam a análise das tarefas prescritas na seção Álgebra da BNCC para o desenvolvimento do pensamento algébrico do 1º ao 5º ano do ensino fundamental. Com relação aos termos tarefa e atividade, Rogalski (2003), realiza uma diferenciação, neste caso descreve a tarefa como aquilo que deve ser feito, ou seja, é a proposta que é feita aos alunos; e a atividade é aquilo que necessariamente é desenvolvido na realização da tarefa, ou seja, não é só o que deve ser feito, mas sim os procedimentos que foram realizados.

Em resposta à sua questão de pesquisa, Oliveira e Farias (2021), percebem que a BNCC propõe uma trajetória rica e diversificada de tarefas mobilizando diferentes habilidades e competências que promoverão o desenvolvimento do pensamento algébrico. O documento organiza a trajetória de aprendizagem dos alunos por meio da solicitação de diferentes tarefas e de variáveis que são estruturadas em torno das habilidades que deverão ser adquiridas pelos alunos. Os autores colocam como próximas etapas de sua pesquisa a análise dos livros didáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental e a prática de ensino dos professores frente às atividades matemáticas desenvolvidas pelos alunos.

Sobre o ensino de Álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental, a Base Nacional Curricular Comum (BNCC) orienta aprofundar os conhecimentos desenvolvidos nos anos iniciais e ampliar esses conteúdos com a introdução de outras dimensões da Álgebra com a intenção que o aluno consiga desenvolver os seguintes aspectos relativos a Álgebra: “compreender os diferentes significados das variáveis numéricas, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sentença numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas” (BRASIL, 2017, p. 269).

Almeida e Câmara (2019) buscaram, em sua pesquisa, compreender o nível de desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos dos anos finais do Ensino Fundamental ao resolverem problemas de partilha. A pesquisa utilizou o modelo de Almeida (2016) para determinar o nível de desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes, que segundo Almeida e Câmara (2019), uma vez que ele foi elaborado tendo como base, para definição dos níveis de desenvolvimento, a estratégia adotada pelo aluno.

Segundo Almeida e Câmara (2019) um problema de partilha se caracteriza por ter uma quantidade total conhecida que é repartida em partes desiguais e desconhecidas. Merchand e Bernarz (1999) estudaram as variáveis ligadas às relações entre as informações e entre os dados colocados no problema, sendo essas variáveis números de relações, natureza das relações (aditivas ou multiplicativas) e encadeamento das relações (fonte, composição ou poço).

Almeida e Câmara (2019), esclarecem que o encadeamento tipo fonte estabelece que as relações são originadas em função e apenas uma grandeza no encadeamento tipo composição, as relações são estabelecidas seguindo uma sequência, e no encadeamento tipo poço as relações convergem para um dos personagens do problema.

No modelo proposto por Almeida (2016) e Almeida e Câmara (2017) são expostos quatro níveis do pensamento algébrico, sendo Nível 0 a ausência do pensamento algébrico; o Nível 1 com pensamento algébrico ainda incipiente, ou seja, o aluno não apresenta uma construção formal do pensamento algébrico; no Nível 2 o pensamento algébrico é intermediário, no qual o aluno apresenta certo domínio de formalismo, porém ainda não compreende totalmente os processos de generalização; e por fim o Nível 3, no qual o pensamento algébrico já está consolidado.

Almeida e Câmara (2019) concluem de sua pesquisa que a escolarização tem uma influência no desenvolvimento do pensamento algébrico dependendo do nível do pensamento algébrico analisado, pois para os níveis 0, 1 e 3 os autores observaram que a escolarização tem sim uma importante influência nos resultados encontrados, porém para o nível 2 do pensamento algébrico a escolarização dos alunos não foi um fator que tenha influenciado nos resultados.

Sendo assim, os autores apresentam duas questões para serem respondidas por futuras pesquisas: “Por que a escolarização não influencia no percentual de alunos no nível 2, diferentemente dos níveis 0, 1 e 3?” e “Qual a contribuição de sequência didáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico, relacionado aos problemas de partilha, de alunos dos anos finais do ensino fundamental?”. (ALMEIDA e CÂMARA, 2019, 187)

Os trabalhos de Almeida (2016) e Almeida e Câmara (2017), tiveram por objetivo construir uma caracterização de pensamento algébrico com base em perspectivas de diferentes autores, sendo eles Rômulo Lins, James Kaput e Luis Radford.

Os autores apresentam o entendimento de Rômulo Lins sobre Pensamento Algébrico, no qual segundo Lins (1994) o aluno está pensando algebricamente quando constrói significado para os objetos e a linguagem algébrica, Lins (1994) também aponta que podemos construir significado para uma equação em diferentes campos semânticos, como por exemplo, o campo da balança de dois pratos ou o campo de todo e partes. Lins (1994) apresenta a partir de uma situação algébrica expressa por $3x + 10 = 100$, podendo ser representada no campo da balança de dois pratos como “de um lado três pacotes iguais e um peso de 10 quilos, e do outro um peso de 100 quilos” (LINS, 1994, p. 7) e para o campo de todo e partes como “um todo de valor 100 é composto de três partes de valor desconhecido e uma parte de 10” (LINS, 1994, p. 7).

Neste caso podemos observar uma relação entre o que fora apresentado por Lins (1992) e a pesquisa desenvolvida por Duval (2009), pois ao propor a representação de uma equação, tanto na forma algébrica quanto na forma figural, por meio de uma balança de dois pratos, percebemos que nem todas as situações envolvendo equações podem ser representadas na forma de balança, pois para que o aluno consiga responder a essa equação ele tem que ter construído o significado de equação como igualdades numéricas, ou seja perceber que existe uma relação entre o primeiro e o segundo membro da equação.

A afirmação supracitada vai ao encontro ao que propõe Duval (2009) em sua pesquisa, pois o autor afirma que é importante que o indivíduo que está aprendendo não confunda as representações com o objeto matemático que elas representam.

O próximo autor abordado por Almeida e Câmara (2017) é James Kaput. De acordo com Kaput (1999), não é pelo fato de um aluno visualizar uma equação que ele a percebe como objeto algébrico, pois neste caso o pensamento algébrico é uma atividade exclusivamente humana, que surge das generalizações estabelecidas como resultado de conjecturas sobre dados e relações matemáticas e por meio de uma linguagem cada vez mais formal usada na argumentação.

Para Blanton e Kaput (2005) essas generalizações podem ocorrer por meio de diferentes linguagens como a natural, gestual, numérica ou simbólica, e o que determina a linguagem utilizada é o nível de experiência do aluno. Neste caso podemos perceber que a proposta de Kaput (1999, 2008) e Blanton e Kaput (2005), apresenta uma relação com a semiótica e com a pesquisa desenvolvida por Duval (2009), a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, pois um mesmo objeto matemático pode ser representado por diferentes tipos de registro de representação, seja por meio de registro em língua natural, registro figural, registro numérico ou registro algébrico, e a utilização desses registros também está relacionada ao desenvolvimento cognitivo do aluno, ou seja, como Blanton e Kaput (2005) sugerem, o nível de experiência do aluno.

Almeida e Câmara (2017) apresentam os três elementos inter-relacionados que Radford (2006) considera: o primeiro é de indeterminação, que é próprio para objetos algébricos básicos como incógnitas, variáveis e parâmetros; o segundo elemento proposto é que objetos desconhecidos são manipulados analiticamente; e por fim o terceiro elemento é o modo particular simbólico de designar objetos.

Ao analisar esses elementos propostos por Radford (2006) em uma Função exponencial, tem-se que sua representação algébrica, por exemplo, $f(x) = 3^x$ é a relação da indeterminação (primeiro elemento), pois não há um valor específico para a variável x, todavia dado um valor para função pode-se realizar modificações para determinar o valor da variável x (segundo elemento), e por fim a função exponencial de formar geral é expressa por $f(x) = a^x$ (com $a > 0$ e $a \neq 1$) (terceiro elemento).

A partir desses três elementos, Radford (2006, 2009), considera o simbolismo alfanumérico como o sistema semiótico da álgebra por excelência, entretanto, a partir de uma perspectiva semiótica, os sinais também podem ser algo muito diferente. Além da história da Matemática mostrar, por exemplo, que a álgebra pode ser feita recorrendo a outros sistemas semióticos, como, por exemplo fichas coloridas movidas em mesa de madeira ou desenhos geométricos. Neste ponto percebemos que para Radford (2006, 2009) assim como para Duval (2009) a semiótica é de suma importância para o desenvolvimento do conhecimento de um objeto matemático.

Diante das discussões sobre a forma que Rômulo Lins, James Kaput e Luiz Radford constroem suas percepções sobre o pensamento algébrico, Almeida e Câmara (2017) acreditam que o pensar algebricamente pode ser abordado por meio de cinco características, sendo elas: “estabelecer relações”, que se baseia na capacidade do indivíduo observar as diferentes relações entre os elementos que constituem uma tarefa matemática; “generalizar”, que é capacidade do indivíduo realizar a conversão e síntese das tarefas propostas para uma linguagem genuinamente algébrica; “modelar”, que é quando o indivíduo começa a construir um modelo matemático, não necessariamente algébrico, para representar o problema apresentado em linguagem natural; “operar com o desconhecido”, que é como o indivíduo desenvolve e opera com a linguagem algébrica; e “construir significado”, que é quando o indivíduo consegue estabelecer um significado para o objeto matemático e, desta forma, diferenciar suas representações.

Almeida e Câmara (2017) sustentam que no cerne dessas características está a capacidade de estabelecer relações, e, subjacente a ela, porém, não menos importantes, estão as outras. Neste caso os autores defendem que a primeira característica do pensamento algébrico desenvolvida e revelada por um sujeito é a capacidade de estabelecer relações, seguida pelas demais.

Analisando as características propostas por Almeida e Câmara (2017), por meio da ótica dos registros de representação semiótica, temos que a capacidade de estabelecer relações está relacionada diretamente com a atividade *formação*, proposta por Duval (2009), que consiste nas representações num registro de representação semiótico particular, ou seja, em estabelecer relações com elementos que podem trazer à tona uma representação mental.

A característica operar com o desconhecido está relacionada diretamente à atividade tratamento, que segundo Duval (2009), são as transformações que ocorrem em um mesmo registro semiótico, ou seja, nesse caso as operações e desenvolvimento no registro algébrico.

As características modelar, generalizar e construir significado, estão diretamente relacionados à atividade conversão, que segundo Duval (2009), consiste nas transformações entre diferentes registros. Nesse caso, modelar e generalizar estão relacionadas, e citamos como exemplo a conversão do registro em língua natural para o registro algébrico. Já para o construir um significado, Duval (2009) propõe que só existe compreensão em relação a um objeto matemático quando o indivíduo consegue realizar a conversão de pelos menos dois registros semióticos.

Ressaltamos que as características propostas por Almeida e Câmara (2017, p. 58), não ocorrem em uma determinada ordem, muito pelo contrário, os autores acreditam que elas surgem e se desenvolvem de forma concomitante, e que o desenvolvimento de uma dessas características leva, consequentemente, ao desenvolvimento das outras.

Observando nosso cotidiano escolar, percebemos que tanto em nossa prática quanto nas práticas desenvolvidas por alguns dos nossos colegas de trabalho, há uma preocupação no desenvolvimento do Pensamento Algébrico, para o qual buscamos apresentar diferentes representações e formas de desenvolver conceitos algébricos.

Exemplo disso é o processo de desenvolvimento de produtos notáveis, no qual além de abordar o tratamento do registro algébrico, buscamos utilizar da representação geométrica para obter tais produtos, realizando assim uma conversão do registro figural para o registro algébrico, e desta forma desenvolver o Pensamento Algébrico nesta situação. Neste caso, um importante aspecto do desenvolvimento do pensamento algébrico é a mobilização entre as diferentes representações de um objeto matemático.

Nesse sentido, o trabalho de Almeida e Câmara (2017) pode ser relacionado com os estudos referentes a Teoria dos Registros de Representação Semiótica proposta por Raymond Duval (2009), sendo assim essa teoria foi utilizada como aporte para Análise das tarefas que serão propostas para os alunos em torno dos conceitos de Função exponencial.

Na sessão a seguir serão apresentados estudos sobre a Teoria do Registros de Representação Semiótica proposta por Duval (2009, 2010 e 2011) buscando estabelecer as relações existentes com a proposta de análise do pensamento algébrico formulada por Almeida (2016) e Almeida e Câmara (2017).

2.3. REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

O termo Registros de Representação Semiótica é utilizado para designar os diferentes tipos de representação semiótica, tais como: língua natural, tabular, gráfica, figural e algébrica.

Segundo Duval (2009) para que um sistema semiótico possa ser um registro de representação, deve permitir as três atividades cognitivas fundamentais ligadas à semiose. A primeira atividade cognitiva está ligada à possibilidade de se confirmar o que está sendo apresentado. O autor denomina essa atividade cognitiva como *formação*, sendo assim, diz-se que uma representação é identificável, no caso da Matemática, o objeto matemático que a representa, segundo Duval (2009) os objetos matemáticos não devem ser jamais confundidos com a representação que se faz dele. Duval (2009) aponta que:

> [...] a formação de representações num registro semiótico particular, seja para "exprimir" uma representação mental, seja para "evocar" um objeto real. Essa formação implica sempre uma seleção no conjunto de caracteres e determinações que "queremos" representar. (DUVAL, 2009, p. 53).

A característica do Pensamento Algébrico relacionada à formação é a "capacidade de estabelecer relações", pois a forma como o aluno buscará construir as relações entre diferentes grandezas ou situações que são apresentadas é o ponto de partida para o aluno apresentar as demais características do Pensamento algébrico. Almeida (2016, p. 79) acredita "que a primeira característica do pensamento algébrico desenvolvida por um sujeito é a capacidade de estabelecer relações, seguida pelas demais".

A segunda é o tratamento de uma representação, que são as modificações da representação de um objeto que pertence ao mesmo registro inicial, assim sendo, o tratamento é uma mudança intrínseca do registro.

As operações e simplificações de expressões numéricas ou algébricas dentro de um registro algébrico são exemplos de tratamento. Um exemplo prático é o proposto por Oliveira e Souza (2020), que sugerem uma sequência de atividades envolvendo características de diferentes embalagens de leite condensado. Ao solicitarem em uma das tarefas que os alunos obtivessem, dado o volume da lata, uma expressão da altura em função do raio, esperavam a construção presente na Figura 20, na qual é possível observar o tratamento do registro algébrico, para o qual era esperado dos alunos que realizassem as substituições do volume e do número pi e, aplicando as operações e propriedades internas do registro algébrico (tratamento), obtivessem a expressão que relaciona a altura em função do raio, ou seja, apesar das modificações realizadas não há mudança de registro de representação do objeto matemático.

Figura 20: Tratamento do registro algébrico das atividades proposta por Oliveira e Souza (2020)

$$\boxed{V=\pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow 334=3{,}14 \cdot r^2 \cdot h \Leftrightarrow h=\frac{334}{3{,}14 \cdot r^2} \Rightarrow h=\frac{106{,}4}{r^2}}$$

Fonte: OLIVEIRA e SOUZA, 2020, p. 5.

Na Figura 20, é possível observar que ao realizar o tratamento do registro algébrico o indivíduo demonstra a “capacidade de operar com o desconhecido como se fosse conhecido”, como observado por Almeida (2016), pois o aluno, ao operar os valores desconhecidos r (raio) e h (altura) “segundo as leis da aritmética em relação a igualdade, em que são realizadas algumas operações na equação indicial com o objetivo de gerar equações equivalentes” (ALMEIDA, 2016, p. 83), irá obter a expressão que relaciona à altura (h) em função do raio (r).

A última atividade cognitiva apresentada por Duval (2009) é a conversão, que são as transformações externas dos registros, ou seja, as mudanças de um registro para outro conservando totalmente ou parte somente da representação inicial. Das características do Pensamento Algébrico, propostos por Almeida (2016) e Almeida e Câmara (2017), a conversão estará relacionada as capacidades de modelar e generalizar, pois ao buscar estratégias utilizando de diferentes registros (língua natural, figural, numérica, entre outras) para determinar as relações presentes em uma situação (capacidade de modelar) e apresentar uma representação algébrica para generalizar a situação proposta (capacidade de generalizar).

Um exemplo de conversão está na mudança dos conceitos presentes em um enunciado registrado em língua materna, do qual o indivíduo que pretende resolver a questão faz a sua transformação para um registro gráfico, figural, algébrico, entre outros, para assim dar continuidade no desenvolvimento do raciocínio. Tal mobilização pode ocorrer mais de uma vez, cabe destacar que segundo Duval (2011):

> A mobilização de um segundo registro é necessária para poder discernir e reconhecer as unidades de sentido que são pertinentes no conteúdo das representações produzidas no primeiro registro! Ela não é suficiente, pois é preciso que haja também uma coordenação de registros de forma que os registros funcionem em sinergia. [...] A conversão das representações é o primeiro limiar da compreensão em matemática. Ela é também o lugar em que se opera a tomada de consciência do funcionamento representacional próprio de cada registro. (DUVAL, 2011, p. 100).

Ao mobilizar as três atividades cognitivas proposta, por Duval (2009), formação, tratamento e conversão, o indivíduo terá a “capacidade de construir significado para a linguagem e para os objetos matemáticos”, com a qual o aluno, segundo Almeida (2016), terá o desenvolvimento completo do pensamento algébrico.

Duval (2009) afirma que ao se estudar os fenômenos relativos ao conhecimento se faz necessário recorrer à noção de representação. É a semiótica a natureza dessa representação e, de modo geral, é preciso considerar a tríade: signo que é relacionado a um objeto concreto, no caso particular da Matemática, o símbolo (signo) representa o objeto abstrato por meio da ação do sujeito do conhecimento (significante ou conceito).

Ainda segundo Duval (2009) não se pode ter compreensão em matemática, se não se distingui um objeto de sua representação, como dito anteriormente, enfatizamos a necessidade de não se confundir os objetos matemáticos com suas representações, pois diversas representações podem estar associadas ao mesmo objeto matemático.

O Pensamento algébrico dentro da teoria dos Registros de Representação Semióticas, de acordo com Duval (2015), envolve determinados processos cognitivos relacionados ao tratamento do registro algébrico e à generalização de padrões. Duval

(2015) propõe que a compreensão dessa forma de pensar matemática ocorre por meio de diferentes registros de representação semiótica, ou seja, diferentes formas de registrar e compreender conceitos matemáticos.

A teoria dos Registros de Representação Semiótica refere-se aos diferentes modos de expressão matemática, como registro em língua materna, registro numérico, registro algébrico, registro gráfico, registro tabular, entre outros. Duval (2012) argumenta que ao compreender um objeto matemático de forma profunda, ou seja, reconhece e diferencia esse objeto de sua representação, ocorre quando um indivíduo é capaz de realizar duas ou mais conversões entre os diferentes registros desse objeto, reconhecendo suas relações e transformações.

No contexto do Pensamento algébrico a teoria dos Registros de Representação Semiótica, estará associada a capacidade dos alunos de realizarem as conversões e tratamento entre os diferentes registros que podem representar um objeto algébrico, ou seja, um valor desconhecido, sendo ele por meio de registros simbólicos, gráficos e outras representações matemáticas. Sendo assim, espera-se que os alunos devam ser capazes de identificar padrões, generalizar resultados e resolver problemas utilizando esses registros de representação.

No capítulo a seguir são apresentados a Metodologia, a fundamentação teórica da metodologia, as características da escola, da turma e as atividades que foram aplicadas.

3. METODOLOGIA

3.1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E METODOLÓGICA

A pesquisa desenvolvida nesta dissertação terá como estrutura da metodologia a Engenharia Didática. Esta proposta de metodologia de pesquisa tem como sua idealizadora a pesquisadora francesa Michele Artigue, que compreende a Engenharia Didática como:

> [...] situações de aprendizagem adaptadas aos quadros teóricos desenvolvidos pela investigação e destinadas a desempenhar para os alunos o papel de gêneses artificiais de conceitos matemáticos em que os investigadores pretendem controlar as condições de aprendizagem e de apropriação. (ARTIGUE e DOUADY, 1993, p. 56)

Para a pesquisa proposta nesta dissertação optamos por utilizar a divisão, em três fases, da metodologia da Engenharia Didática proposta Almouloud e Coutinho (2008), sendo elas, análises prévias*;* construção e análise a *priori;* e por fim, experimentação, análise *a posteriori e* validação.

Segundo Almouloud e Coutinho (2008) a fase análises prévias, como esta é a primeira etapa da pesquisa, consiste na realização do embasamento teórico do trabalho a ser desenvolvido, que pode comportar os trabalhos analisados para o referencial teórico com o objetivo de dar suporte à pesquisa; às características dos indivíduos da pesquisa; à apresentação e argumentação sobre objetivos específicos da pesquisa, entre outros. Destacamos que, as fases descritas, segundo Artigue (1988) apud. Almouloud e Coutinho (2008):

> [...] é retomada e aprofundada ao longo do trabalho de pesquisa, em função das necessidades emergentes. Isso significa que a expressão “análises preliminares” não implica que após o início da fase seguinte não se possa retomá-las, visto que a temporalidade identificada pelo termo “preliminar” ou “prévia” é relativa, pois se refere apenas a um primeiro nível de organização. Na realidade, deve ser um trabalho concomitante com as demais fases da pesquisa. (ARTIGUE (1988) apud. ALMOULOUD e COUTINHO, 2008, p. 66 e 67)

Na pesquisa desta dissertação, essa primeira fase foi realizada na análise das dissertações que abordavam Pensamento algébrico, Registros de Representação Semiótica e Função exponencial; na pesquisa do referencial teórico; na análise prévia do colégio e da turma onde foi aplicada a sequência de atividades; e nas considerações sobre os objetivos específicos desta pesquisa.

Na fase construção e análise a *priori*, segundo Almouloud e Coutinho, é o momento de construção da sequência didática proposta e da análise das possíveis construções que podem ser desenvolvidas pelos alunos na aplicação da sequência de atividades, já que o "objetivo de uma análise a *priori* é determinar como as escolhas efetuadas (as variáveis que queremos assumir como pertinentes) permitem controlar os comportamentos dos alunos e explicar seu sentido" (ALMOULOUD e COUTINHO, 2008, p. 67), sendo assim, na análise a *priori* espera-se:

> - Descrever as escolhas das variáveis locais e as características da situação adidática desenvolvida.
> - Analisar a importância dessa situação para o aluno e, em particular, em função das possibilidades de ações e escolhas para construção de estratégias, tomadas de decisões, controle e validação que o aluno terá. As ações do aluno são vistas no funcionamento quase isolado do professor, que, sendo o mediador no processo, organiza a situação de aprendizagem de forma a tornar o aluno responsável por sua aprendizagem;
> - Prever comportamentos possíveis e tentar mostrar como a análise feita permite controlar seu sentido, assegurando que os comportamentos esperados, se e quando eles intervêm, resultam do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem. (ALMOULOUD e COUTINHO, 2008, p. 67)

Nesta fase da pesquisa foram construídas as sequências didáticas propostas, foi realizada uma análise prévia das atividades que foram aplicadas aos alunos, para as quais buscamos prever possíveis resoluções e dificuldades que os alunos poderiam apresentar.

Por fim, a fase experimentação, análise a *posteriori* e validação, consiste segundo Almouloud e Coutinho (2008), em:

> A fase da experimentação é clássica: é o momento de se colocar em funcionamento todo o dispositivo construído, corrigindo-o se necessário, quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificam essa necessidade, o que implica em um retorno à análise a *priori*, em um processo de complementação. Ela é seguida de uma fase de análise a *posteriori* que se apoia no conjunto de dados recolhidos durante a experimentação: observações realizadas sobre as sessões de ensino e as produções dos alunos em sala de aula ou fora dela. Esses dados são, às vezes, completados por dados obtidos pela utilização de metodologias externas: questionários, entrevistas individuais ou em pequenos grupos, realizadas em diversos momentos do ensino. (ALMOULOUD e COUTINHO, 2008, p. 67 e 68)

Nesta fase, realizamos a aplicação das atividades para os alunos. Foram realizados questionamentos durante a aplicação das atividades sobre as dificuldades que os alunos apresentaram durante seu desenvolvimento, nessa fase também foram realizadas as análises das construções realizadas pelos alunos, buscando validar ou não as previsões realizadas durante a análise a *priori* das atividades.

3.2. NATUREZA DA PESQUISA

A pesquisa foi realizada com alunos da 1ª série do Ensino Médio, e teve como propósito abordar funções exponencias, buscando identificar as características do Pensamento Algébrico e o nível de desenvolvimento do PA, além de observar as relações que os alunos estabelecem entre as diferentes representações de uma função exponencial. O trabalho realizado também visou a contribuição e a construção do conhecimento do aluno acerca dos conceitos que envolvem o Pensamento Algébrico.

A turma na qual a pesquisa foi realizada são de duas unidades de um mesmo colégio particular da cidade de Sorocaba, sendo as turmas A e B da unidade 1 e a turma C na unidade 2. As turmas eram compostas por 130 alunos no total, divididos em três turmas. Devida a nova formulação do Ensino Médio, as turmas são separadas em Exatas (turma A), Humanas (turma B) e Exatas e Humanas (turma C).

O foco da nossa análise foi a turma B, que contava com 33 alunos. A escolha pelas dificuldades que essa turma apresentou no 1º semestre do ano letivo, no qual observamos que alunos acreditavam que não apresentavam nenhum domínio sobre a disciplina de Matemática, o que pode ocasionar ao docente, no cotidiano da sala de aula, obstáculos didáticos no processo de ensino e aprendizagem de Matemática, sendo assim, buscamos compreender quais características e o nível do desenvolvimento do Pensamento Algébrico que esses alunos apresentaram, além de identificar os diferentes registros que utilizam e as relações que conseguiram estabelecer entre eles relativos à função exponencial, para assim contribuir para uma melhor desenvolvimento do Pensamento Algébrico dessa turma.

Como objetivo desse trabalho é identificar quais as características e níveis do desenvolvimento do PA que os alunos apresentam ao iniciar os estudos de função exponencial, nossa pesquisa apresenta caráter qualitativo e foi realizada por meio da análise das resoluções das tarefas realizadas pelos alunos, que foram aplicadas utilizando os princípios da Engenharia Didática e foram realizadas em três fases para análise das Sequências de Atividades propostas.

A primeira fase consistiu na análise prévia para elaboração e aplicação das atividades a serem propostas, na qual foram realizadas as pesquisas referentes aos referencias teóricos da pesquisa, uma revisão bibliográfica de dissertações que abordavam os elementos da pesquisa desenvolvida na dissertação, sendo elas, Pensamento algébrico, Registros de Representação Semiótica e Funções Exponenciais.

A segunda fase consistiu na construção e na análise a *priori* das atividades que foram aplicadas nesta pesquisa, neste momento são apresentadas as pesquisas que serviram de referência para construção das Sequências de Atividades propostas aos alunos.

E por fim, a terceira e última fase de experimentação, análise a *posteriori* e validação que consistiu na aplicação das sequências de atividades, da análise das resoluções apresentadas pelos alunos e da comparação dos resultados obtidos com as previsões realizadas na análise *a priori*.

A partir dessas comparações buscamos avaliar o nível de desenvolvimento do Pensamento algébrico, como proposto por Almeida (2016), dos alunos ao realizarem sequências de tarefas que abordavam Funções Exponenciais.

3.3. CONTEXTO DA PESQUISA

Nesta seção são apresentados alguns aspectos sobre a escola onde a nossa intervenção foi realizada, bem como a turma e os sujeitos da pesquisa. As informações caracterizam o universo da investigação, cuja descrição está dividida em duas subseções, a saber: perfil da escola e turma escolhida.’

As informações referentes à escola foram obtidas com base em informações presentes no site da escola, de uma entrevista com a gestora do colégio sobre os dados estatísticos, e do conhecimento análise do autor das instalações do prédio que leciona. As informações concernentes à turma foram produzidas com base no diário de classe e de perguntas aos alunos sobre a disciplina de matemática.

3.3.1. Perfil da escola

A pesquisa foi realizada em um colégio particular de Sorocaba, no qual um dos autores leciona a disciplina de Matemática desde 2017. O colégio foi fundado em 1999, no qual entre 1999 até 2016 tinha finalidade filantrópica, propondo cursos técnicos e Ensino Médio gratuitos, todavia a partir de 2016 o colégio iniciou uma mudança para modalidade de alunos pagantes, sendo que em 2018 houve a formatura da última turma de alunos 100% bolsistas, a partir de 2019 os alunos do colégio passaram a ser de maioria pagantes. E no ano de 2021 o colégio ampliou sua atuação na cidade de Sorocaba, ao inaugurar a Unidade 2.

O autor dessa dissertação foi aluno deste colégio entre os anos de 2007 e 2009, na época ao se formar no colégio o aluno além de concluir o Ensino Médio, recebia o certificado de técnico escriturário, pois além de oferecer as disciplinas previstas para o Ensino Médio, o colégio também oferecia durante esse ciclo escolar, aulas de Contabilidade, Informática, Noções de Direito, entre outras.

Atualmente o colégio apresenta uma estrutura totalmente diferentes da época que o autor estudava, apesar da parte de estrutura ser praticamente a mesma, ocorreram diversas mudanças de ambientes com a ampliação dos espaços escolares e de propostas didáticas, sendo que no período em que o autor estudou não apresentava material didático padrão para os professores, no qual cada um montava seu próprio material, porém atualmente o colégio utiliza o material didático do sistema apostilado “Ético”.

Atualmente o colégio conta com 22 salas de aula, sendo uma delas destinada a sala de robótica do Ensino Fundamental anos iniciais e outra para sala de Informática que conta com 26 computadores, ou seja, restando 20 salas que são ocupadas por 19 turmas no período da manhã (5 turmas de Fundamental anos iniciais, 8 turmas de Fundamental anos finais e 6 turmas de Ensino Médio) e 9 turmas no período da tarde (5 turmas de Fundamental anos iniciais e 4 turmas de Fundamental anos finais).

Todas as salas de aula apresentam projetor (Data Show) na sala e há um espaço para área de estudos com biblioteca para os alunos no colégio, atualmente somada as duas unidades o colégio contam com mais de 1500 alunos do maternal ao Ensino Fundamental, sendo que a maioria das turmas do Fundamental anos iniciais vão de A a E, do Fundamental anos finais vão de A a F e o Ensino Médio vão de A a

C. As turmas do Fundamental variam de 25 a 35 alunos e do Ensino Médio de 35 a 50 alunos.

A partir de 2022 com o início do Novo Ensino Médio, as turmas dessa modalidade de ensino passaram a ser divididas em duas Trilhas de Itinerários, a turma de “Exatas” com ênfase nas disciplinas de Matemática, Física, Química e Biologia e a turma de “Humanas” com ênfase nas disciplinas de Língua Portuguesa, Geografia e História.

As disciplinas no colégio são divididas em Itinerário Geral e Itinerário Formativo, as disciplinas de Itinerário Geral são comuns às duas trilhas, por exemplo, a disciplina de Matemática apresenta quatro aulas tanto na Trilha de Humanas quanto na Trilha de Exatas. As disciplinas do Itinerário Formativo são de aprofundamento das disciplinas da trilha de escolha do aluno e que não necessariamente estão relacionadas à disciplina do Itinerário Geral. Em Matemática, por exemplo, os alunos da trilha de Exatas passam a ter três aulas de Itinerário Formativo dessa disciplina, entretanto os conteúdos, na maioria, diferem do conteúdo abordado no Itinerário Geral, pois no material apostilado do Itinerário Formativo o foco na 1ª série do Ensino Médio está em Educação Financeira, abordando desde cálculos de Juros Simples e Compostos, passando pela história e funcionamento do mercado financeira e finalizando com as diferentes formas de créditos e financiamentos.

Como o autor leciona nas duas unidades há algumas características que diferenciam as duas unidades, na Unidade 1 a disciplina de Itinerário Geral de Matemática para 1ª série é dividida em duas turmas sendo elas as turmas de Trilha de Exatas e Trilha de Humanas, todavia na Unidade 2 há uma única turma de Itinerário Geral, na qual há divisão para as aulas de Itinerário Formativo.

O colégio avalia os alunos semestralmente, ou seja, a cada final de semestre é gerada uma nota relativa ao semestre. Para a composição da nota semestre, em 2022, foram propostas quatro avaliações chamadas “AVs” (AV1, AV2, AV3 e AV4), sendo a média dessas quatros avaliações a nota final do semestre.

As três primeiras avaliações de cada semestre consistiam em uma prova com questões dissertativas e/ou objetivas e uma quarta avaliação composta por listas de atividades, atividades da apostila, entre outros instrumentos de avaliação que cada professor deveria definir previamente no Planejamento Semestral. Para a disciplina de Matemática a AV4 era composta por listas de atividades e atividades da apostila que fossem solicitadas aos alunos realizarem para entrega.

O aluno é considerado aprovado no colégio se obtém média anual igual ou superior a 6,0, e a média anual é composta pela média simples das médias obtidas no primeiro e segundo semestre do ano letivo.

A seguir é descrita a turma escolhida para aplicação da Sequência de atividades, e serão apresentadas a Trilha de Aprofundamento, relação dos alunos da turma com a matemática e o rendimento desses alunos na disciplina de Matemática.

3.3.2. Turma escolhida

Para esta pesquisa optamos em focar os estudos na turma da Trilha de Humanas, pois como dito por muitos desses alunos, eles optaram pela Trilha de Humanas para terem menos conteúdos de Matemática, Física e Química, pois julgavam-se com dificuldades ou incapazes de compreender os conteúdos dessas disciplinas, ou seja, a escolha estava muito mais atrelada, para esses alunos, a uma não compreensão da disciplina do que a um objetivo para sua formação.

Neste contexto buscamos avaliar se o nível de desenvolvimento do Pensamento algébrico desses alunos se encontrava no nível 0 (ausência do pensamento algébrico) ou nível 1 (pensamento algébrico incipiente) de desenvolvimento como proposto por Almeida (2016), pois ao se apresentarem como alunos com dificuldades na disciplina, esperávamos que esses alunos não estivessem no nível 2 (pensamento algébrico intermediário) ou nível 3 (pensamento algébrico consolidado).

A turma apresentava, na época da aplicação, 33 alunos, entretanto havia uma certa constância de faltas de alguns alunos na turma, portanto nem sempre a turma estava com todos os alunos em sala. No dia de aplicação da Proposta 1 havia 25 alunos na turma, e no dia da aplicação da Proposta 2 havia 27 alunos na turma.

Na disciplina de Matemática a média dessa turma (1ª série B) nas três avaliações, AV1, AV2 e AV3, do 1º semestre foram, respectivamente, iguais a 4,7; 6,2 e 5,5. Devido ao baixo rendimento da turma na avaliação, foram propostas listas de atividades extras para a melhora do aprendizado e desempenho dos alunos, sendo que os alunos poderiam obter no máximo mais 2,0 pontos extras. Geralmente as questões abordadas nas listas extras eram compostas por conceitos considerados básicos dos objetos matemáticos abordados durante as provas.

No 1º semestre de 2022 foram abordados os seguintes conteúdos no primeiro caderno:

- AV1 - Raciocínio lógico-matemático, Conjuntos, Operações com conjuntos, Conjuntos numéricos, Potenciação, Radiciação, Múltiplos e divisores.
- AV2 - Equação e equação polinomial do 1º grau, Equação polinomial do 2º grau, Tipos de médias, Gráficos e diagramas, Relações entre grandezas, Par ordenado, Produto cartesiano e Relação binária, Domínio da função real e Gráfico da função real.
- AV3 - Função constante, Função polinomial do 1º grau, Função polinomial do 2º grau, Inequações do 1º grau e 2º grau, Módulo, equação modular, inequação modular e função modular, Função composta, função par e função ímpar, Funções injetora, sobrejetora, bijetora e inversa.

Observamos que a maioria dos objetos matemáticos abordados são relacionados ao campo da Álgebra, ou seja, os alunos demonstraram, durante as provas, dificuldades para realização de atividades que envolvessem conteúdos de Álgebra.

Destacamos também o baixo rendimento dos alunos nas avaliações AV1 e AV3 que contam com o estudo de Potenciação (AV1) e Funções (AV3), objetos matemáticos importantes para início do estudo de funções exponencias. Logo, analisar as características e o nível de desenvolvimento do Pensamento algébrico se mostrou importante para a compreensão das dificuldades dos alunos.

3.4. ESTRUTURA DAS TAREFAS PROPOSTAS

A seguir, serão apresentadas as análises prévias das Propostas 1 e 2 aplicadas aos alunos envolvendo função exponencial. Serão apresentadas a habilidade descrita, a descrição detalhada da tarefa e as possíveis dificuldades.

3.4.1. Proposta 1 – Divisão Celular

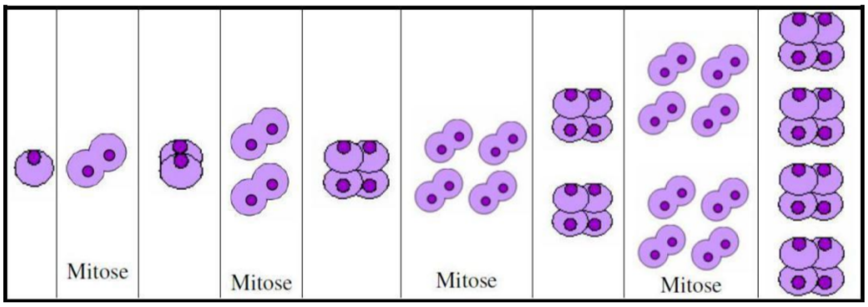
Como primeira proposta, buscamos atividades que apresentassem uma contextualização com conteúdo de outras áreas do conhecimento, sendo que nesse caso optamos por uma atividade que envolvesse Divisão Celular, um conteúdo relativo à área de Ciências da Natureza, mais especificamente à disciplina de Biologia.

Utilizamos uma sequência de atividades propostas por Bonotto (2015), que abordava a divisão celular de uma célula (Figura 21), na qual os itens mobilizam os registros tabular (item a), algébrico (item b) e gráfico (item c).

Figura 21: Atividade 4 proposta por Bonotto (2015)

***Atividade 4* - (Duração de 2 horas)**

A divisão celular denominada mitose consiste em uma célula filha duplicar o seu conteúdo e então se dividir em duas, chamadas de células filhas e cada célula filha, por sua vez, repete esse processo originando quatro células filhas. Considerando a formação do embrião sabemos que ela ocorre a partir da célula ovo ou zigoto que através de divisões celulares forma todo o organismo, conforme mostra a figura abaixo.



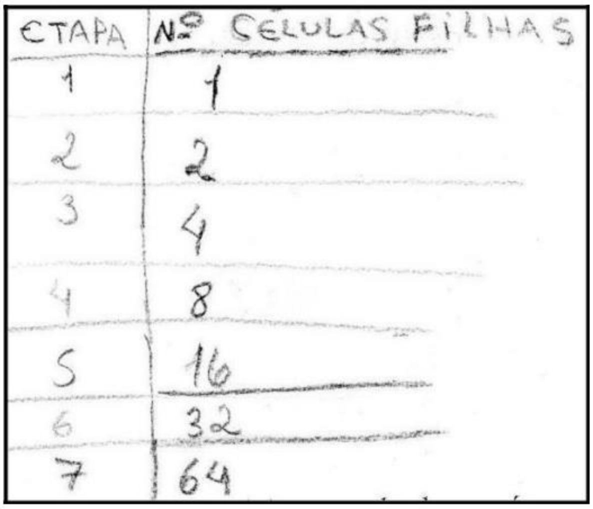
a) Construir uma tabela relacionando o número de células filhas até a 7ª divisão.
b) Estabeleça uma lei para calcular o número de células filhas para *n* divisões.
c) Represente graficamente os valores tabelados no item (a).

Fonte: BONOTTO, 2015, p. 56

Destacamos que os alunos participantes da pesquisa de Bonotto (2015) eram alunos da 2ª série do Ensino Médio, que já haviam estudado as Progressões Geométricas (PG), logo ao realizarem as tarefas propostas acabaram associando a resolução das suas atividades à PG.

Segundo Bonotto (2015), das duplas participantes da pesquisa somente uma delas não completou corretamente a tabela do item a, pois “ao construírem a tabela, na primeira etapa, a dupla apontou que teria uma única célula, quando o correto é que logo na primeira etapa uma célula duplica o seu conteúdo originando as células filhas" (BONOTTO, 2015, p. 56), este fato pode ser observado na Figura 22.

Figura 22: Resolução da atividade 4, letra (a) pela dupla D1



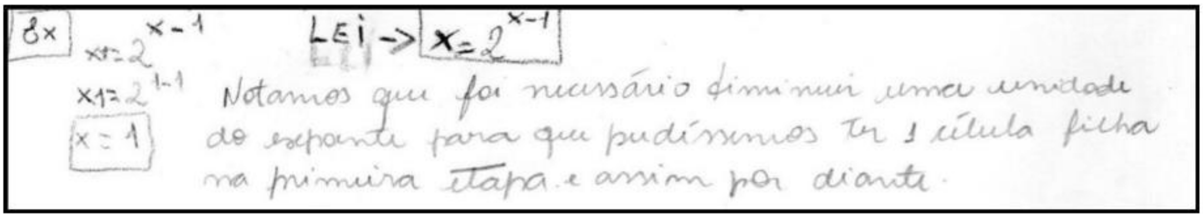
ETAPA	Nº CÉLULAS FILHAS
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16
6	32
7	64

Fonte: BONOTTO, 2015, p. 57

No item b é solicitado que os alunos determinem a lei de formação para n divisões da célula e segundo Bonotto (2015), houve necessidade da "intervenção da professora para questionamentos e indagações a fim de promover a reflexão dos alunos para resolver a situação problema" (BONOTTO, 2015, p. 57).

De acordo com Bonotto (2015), a maioria das duplas de alunos apresentou um mesmo registro algébrico ($f(x) = 2^x$) para a representar a solução dessa questão, e somente uma das duplas não apresentou a solução correta (Figura 23), sendo esta a mesma dupla que apresentou dificuldades ao completar a tabela.

Figura 23: Resolução da atividade 4, letra (b) pela dupla D1



Fonte: BONOTTO, 2015, p. 57

Com relação ao item c, que abordava a construção do gráfico que representava a situação proposta, Bonotto (2015) observou que a maioria dos alunos não realizou corretamente a representação gráfica, pois a maioria dos alunos conectou os pontos do gráfico, ou seja, segundo Bonotto (2015) pode-se “afirmar que os alunos seguem fazendo a representação gráfica mecanicamente, sem entender o contexto da situação envolvida.

Para a pesquisa desenvolvida nesta dissertação, optamos por analisar as características e o nível de desenvolvimento do Pensamento algébrico, como proposto por Almeida (2016), presentes nas construções dos alunos da 1ª série do Ensino Médio em atividades introdutórias.

Diferente de Bonotto (2015), que desenvolveu sua pesquisa com alunos da 2ª série do Ensino Médio que já haviam estudado funções exponenciais e que haviam estudado recentemente Progressões Geométricas, a pesquisa desenvolvida neste trabalho teve como sujeitos participantes alunos da 1ª série do Ensino Médio.

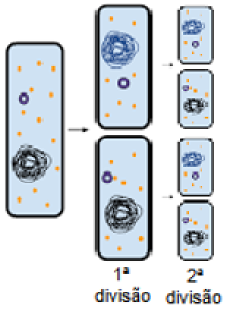
Outra diferença está na representação algébrica, pois buscamos analisar também a representação algébrica para o caso de uma função do tipo exponencial $f(x) = b.a^x$, neste caso ampliando o estudo apresentado por Bonotto (2015), no qual os alunos apresentavam uma representação do tipo f(x) = ax.

Sendo assim, buscando uma interligação entre os itens, além dos três itens propostos por Bonotto (2015), adicionamos os itens d, e e f (que buscavam abordar a representação algébrica $f(x) = b.a^x$), além do item g, que buscava relacionar as representações gráficas dos itens c e f, logo montou-se a sequência de atividades da Figura 24.

Figura 24: Sequência de Atividades Proposta 1 - Divisão celular

Proposta 1

A fissão binária bacteriana é o processo pelo qual as bactérias realizam a divisão celular, ou seja, uma bactéria divide-se em duas bactérias idênticas a de origem. Conceitualmente, a fissão binária é semelhante à mitose que acontece em organismos multicelulares (como plantas e animais), mas sua finalidade é diferente, pois para as bactérias à fissão binária é a maneira como elas se reproduzem.



a) Supondo que inicialmente há uma bactéria em um recipiente (cultura), preencha a tabela a seguir relacionando o número de bactérias até a 7ª divisão.

b) Estabeleça uma lei para calcular o número de bactérias para n divisões.

c) Represente graficamente os valores da tabela do item a.

d) Agora vamos supor que há 5 bactérias em um recipiente, construa uma tabela relacionando o número bactérias até a 5ª divisão.

e) Estabeleça uma lei para calcular o número de bactérias para n divisões da situação do item d.

f) Represente graficamente os valores da tabela do item d.

g) Comparando as duas leis de formações apresentadas itens a e d e os gráficos gerados por elas itens c e f, descreva o que você consegue observar de diferente e semelhante entre os dois.

Fonte: Produção própria.

A atividade impressa entregue aos alunos da Sequência de Atividades constava com a tabela para preenchimento (itens a e d), espaço para construções (todos os itens) e malha quadriculada (itens c e f).

Os dados apresentados por Bonotto (2015) foram uma importante referência para análise a *priori* e análise a *posteriori* que realizamos no decorrer da pesquisa desenvolvida nesta dissertação.

3.4.2. Proposta 2 – Torre de Hanói

Para a proposta dois buscamos uma sequência de atividades para se trabalhar em grupo com os alunos, além da utilização de um material manipulativo, neste contexto encontramos o artigo de autoria de Suzana Domingues da Silva e Valdete dos Santos Coqueiro, que abordava a Torre de Hanói.

Silva e Coqueiro (2016), apresentam uma proposta de sequência de atividades envolvendo a Torre de Hanói, na qual são propostas cinco atividades aplicadas para alunos do 1º ano do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR – c*ampus* de Campo Mourão, que teve como objetivo “instigar os alunos, após a manipulação da Torre de Hanói, a investigarem uma relação matemática que expressasse a quantidade mínima de movimentos, conforme a quantidade de discos” (SILVA e COQUEIRO, 2016, p. 5).

Para realização da pesquisa, Silva e Coqueiro (2016) propuseram aos participantes uma sequência de atividades contendo cinco tarefas, sendo seus enunciados descritos a seguir:

> Movimente o número de discos de uma haste para a outra conforme as regras do jogo e anote a quantidade de movimentos que você realizou na Tabela 2. (SILVA e COQUEIRO, 2016, p. 5)
> O objetivo do jogo Torre de Hanói é movimentar os discos de uma haste para a outra utilizando o menor número possível de movimentos. Jogue novamente e tente encontrar essa quantidade mínima. (SILVA e COQUEIRO, 2016, p. 6)
> Que estratégia você utilizou para obter o número mínimo de movimentos dos discos? (SILVA e COQUEIRO, 2016, p. 7)
> Sabendo a quantidade mínima de movimentos para o número de discos, um, dois três, quatro e cinco, encontre o número mínimo de movimentos para seis, sete e oito discos. Qual procedimento você utilizou para encontrar? Anote todo o procedimento utilizado e os resultados na Tabela abaixo. (SILVA e COQUEIRO, 2016, p. 8)
> Tente encontrar um modelo matemático que expresse a quantidade mínima de movimentos conforme a variação dos discos (sem recorrerem a quantidade anterior de discos). (SILVA e COQUEIRO, 2016, p. 9)

A primeira tarefa da sequência proposta por Silva e Coqueiro (2016) teve como objetivo deixar os alunos jogarem livremente para que assim se familiarizassem com o jogo. Silva e Coqueiro (2016) observaram que, para até dois discos, as quatro duplas e o trio participantes da pesquisa apresentaram o mesmo resultado, no qual somente uma dupla divergiu para três e quatro discos, além de o trio não ter finalizado para cinco discos, duas duplas divergiram da resolução correta.

Para segunda tarefa, Silva e Coqueiro (2016), buscavam, ao apresentarem os objetivos do jogo. “estimular os alunos a investigarem e explorarem o material, a fim de chegarem à quantidade mínima de movimentos, bem como estimular o raciocínio lógico na realização de suas jogadas” (SILVA e COQUEIRO, 2016, p. 6). Como resultado Silva e Coqueiro (2016), observaram que somente uma das duplas não apresentou a quantidade mínima correta para situação proposta.

Ao proporem a terceira tarefa, Silva e Coqueiro (2016), buscavam que os alunos apresentassem ou formulassem estratégias para resolução, sendo que duas duplas não conseguiram apresentar uma estratégia para as movimentações. Todavia, ao analisar as respostas do trio e duas duplas, Silva e Coqueiro (2016) observaram a seguinte estratégia elaborada:

> Se a pilha tiver quantidade ímpares de discos, o primeiro disco será transportado na haste em que se deseja colocar toda a pilha, ou seja, a que chamamos de pivô, já se a pilha de discos for par, eles deverão transportar o primeiro disco para a haste de suporte. (SILVA e COQUEIRO, 2016, p. 7)

A quarta tarefa tinha como objetivo encontrar uma lei de formação para estabelecer uma relação entre a quantidade mínima de movimentação em função da quantidade de discos em uma torre, neste momento, segundo Silva e Coqueiro (2016, p. 8), “a investigação não seria por meio do jogo, a investigação aconteceria por meio apenas da observação da regularidade dos valores da tabela”. Para resolução desta tarefa, Silva e Coqueiro (2016) observaram dois tipos de resolução dos alunos, na primeira os alunos observaram “que os valores cresciam em uma potência de base 2, ou seja, entre 1 e 3, aumenta 2, entre 3 e 7, aumenta 4 e assim por diante” (SILVA e COQUEIRO, 2016, p.8); e na segunda os alunos observaram “que a quantidade mínima de movimentos é o dobro da quantidade anterior de movimento mais 1” (SILVA e COQUEIRO, 2016, p.9).

E por fim, a quinta tarefa solicitava uma lei de formação que relacionasse a quantidade mínima de movimentos em função do número de discos da torre. Nesta tarefa, Silva e Coqueiro (2016) puderam observar dois tipos de expressões nas construções dos alunos. Três duplas encontraram a função exponencial $2^n - 1$ como modelo para descrever a situação apresentada, na qual n é o número de discos na torre. O trio e uma dupla apresentaram a expressão 2n + 1 como modelo para representar a situação descrita, na qual n era o número de movimentações anteriores.

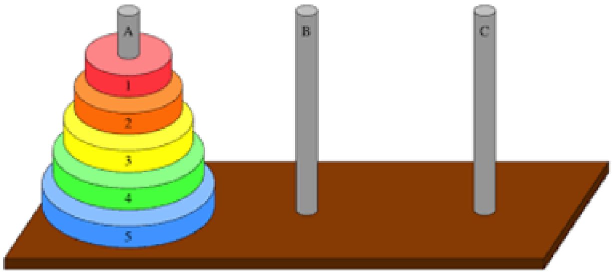
Nossa dissertação se diferencia do trabalho proposto por Silva e Coqueiro (2016), pois enquanto as autoras aplicaram as atividades para alunos da graduação de Matemática, ou seja, alunos que, em tese, não apresentam dificuldade em matemática, a pesquisa desta dissertação foi aplicada em uma sequência de atividades para uma turma de 1ª série do Ensino Médio, cuja escolha de itinerário formativo foi a Trilha de aprofundamentos em Humanas, que ocorreu devido ao entendimento desses alunos de que apresentavam dificuldades em Matemática, Sendo assim, os sujeitos desta pesquisa compõem um grupo com característica bem divergentes dos participantes da pesquisa realizada por Silva e Coqueiro (2016).

Dessa forma, com algumas alterações na sequência proposta por Silva e Coqueiro (2016), construímos a sequência de atividades presentes na Figura 25.

Figura 25: Sequência de Atividades Proposta 2 – Torre de Hanói

Proposta 2

A torre de Hanói, também conhecida por torre do bramanismo ou quebra-cabeças do fim do mundo, foi inventada e vendida como brinquedo, no ano de 1883, pelo matemático francês Edouard Lucas. O jogo consiste em passar todos os discos do primeiro para o último pino, usando os demais pinos como auxiliares, de maneira que um disco de raio maior nunca fique em cima de outro menor.



Atividade 1. Movimente o número de discos de uma haste para a outra conforme as regras do jogo e anote a quantidade de movimentos que você realizou na Tabela 1.

Atividade 2. O objetivo do jogo Torre de Hanói é movimentar os discos de uma haste para a outra utilizando o menor número possível de movimentos. Jogue novamente e tente encontrar essa quantidade mínima. Registre essa nova quantidade na Tabela 2.

Atividade 3. Que estratégia você utilizou para obter o número mínimo de movimentos dos discos?

Atividade 4. Sabendo a quantidade mínima de movimentos para o número de discos, um, dois três, quatro e cinco, encontre o número mínimo de movimentos para seis, sete e oito discos. Qual procedimento você utilizou para encontrar? Anote todo o procedimento utilizado e os resultados na Tabela abaixo.

Atividade 5. Tente encontrar um modelo matemático que expresse a quantidade mínima de movimentos conforme a variação dos discos (sem recorrerem a quantidade anterior de discos).

Fonte: Produção própria

Destacamos que a atividade impressa entregue aos alunos da Sequência de Atividades da proposta 2 contava com a tabela para preenchimento nas atividades 1, 2 e 4.

Os resultados apresentados por Silva e Coqueiro (2016) foram uma importante referência para análise a *priori* e análise a *posteriori* que foi realizada no decorrer da pesquisa desenvolvida nesta dissertação.

4. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo estão presentes as análises a *priori*, experimentação e análise a *posteriori* da sequência de atividades aplicada aos alunos. Serão descritas a análise a *priori* e as expectativas de respostas que os alunos podem apresentar ao desenvolverem a resolução das tarefas propostas.

A experimentação e análise *a posteriori* estão presentes na seção que aborda a análise *a posteriori*, pois ao analisar as atividades realizadas pelos alunos, serão descritas não somente as construções realizadas pelos alunos, mas também as perguntas realizadas por eles durante o desenvolvimento da atividade.

Para as análises que foram realizadas foram utilizadas as características (Análise a *priori*) e o nível de desenvolvimento (Análises a *priori* e *a posteriori*) do Pensamento algébrico proposto por Almeida (2016), além da observação das conversões e tratamentos dos registros apresentados pelos alunos, como proposto por Duval (2009).

As características do Pensamento algébrico, como proposta por Almeida (2016), que se esperava que os alunos apresentem no desenvolvimento da Proposta 1 são: Capacidade de estabelecer Relações; Capacidade de modelar; Capacidade de generalizar, Capacidade de Operar com o Desconhecido; e por fim, Capacidade de construir significado para a linguagem e os objetos algébricos.

A “capacidade de estabelecer relações” é o elemento central da proposta de Almeida (2016) para as características do Pensamento algébrico, sendo que ao se pensar algebricamente uma das cinco características a “capacidade de estabelecer relações” é geralmente a primeira a ser mobilizada, pois como afirma Almeida (2016):

> As outras características – a “capacidade de modelar”; a “capacidade de generalizar”; a “capacidade de operar com o desconhecido como se fosse conhecido” e a “capacidade de construir significado para a linguagem e os

> objetos algébricos" – surgem a partir do desenvolvimento da característica central. (ALMEIDA, 2016, p. 84)

A "capacidade de modelar" está relacionada, segundo Almeida (2016), ao individuo construir um modelo matemático que conecte as relações contidas no enunciado dos problemas, que podem ser caracterizadas quando os estudantes se utilizam de "abreviações, letras, números, desenhos e sinais de operações para representar o problema" (ALMEIDA, 2016, p. 113). Nesta característica, segundo Almeida e Câmara (2017), não há a necessidade de que o aluno já obtenha uma representação algébrica para o problema proposto, ou seja, a partir do uso dos registros em língua materna, numérico ou figural, já é possível evidenciar a capacidade do aluno de modelar.

Ao registro algébrico está associada a "capacidade de generalizar" que está interligada á "capacidade de modelar", nesta característica o aluno apresentará um termo desconhecido, representando uma quantidade a ser determinada, presente em uma expressão, ou seja, segundo Almeida e Câmara (2017), o aluno apresentará uma incógnita na elaboração do modelo matemático, portanto ao estabelecer um modelo algébrico o aluno mobilizará as capacidades de modelar e generalizar ao mesmo tempo.

A "capacidade operar com o desconhecido como se fosse conhecido" está relacionada, segundo Almeida (2016), às operações e propriedades relativas a expressões algébricas e equações. A realização, pelo aluno, de adição de termos semelhantes, multiplicação entre polinômio ou identificação de termos que não podem ser operados, são exemplos dessa característica do Pensamento algébrico.

E por fim, a "capacidade de construir significado para linguagem e para os objetos algébricos" está relacionada à compreensão do aluno do problema. Nesse caso, o aluno consegue compreender o tipo de objeto matemático presente no enunciado, compreende a representação algébrica deste objeto, além de representá-lo utilizando o registro algébrico de forma significativa.

Para realizarmos as análises a *priori* e *a posteriori* serão apresentadas as características do Pensamento algébrico como propostas por Almeida (2016) e Almeida e Câmara (2017), com as quais buscaremos identificar em quais tarefas da Sequência de Atividades espera-se que as características propostas por Almeida (2016) sejam apresentadas nas construções realizadas pelos alunos para resolução destas tarefas (análise a *priori*). E ao se realizar a análise a *posteriori* buscamos observar as características que efetivamente estavam presentes nas construções apresentadas pelos alunos.

4.1. ANÁLISES A PRIORI

Nesta seção foi realizada a análise a *priori* das sequências de atividades Proposta 1 (Divisão celular) e Proposta 2 (Torre de Hanói). Buscamos apresentar as possíveis resoluções que os alunos poderiam apresentar, dadas as dificuldades que os alunos alegavam ter em relação ao conteúdo estudado em matemática.

Para a análise das Propostas 1 e 2 utilizamos dos resultados apresentados, respectivamente, por Bonotto (2015) e Silva e Coqueiro (2016), para se estabelecer um parâmetro das possíveis resoluções que os alunos poderiam apresentar, seja em relação às respostas corretas ou nos possíveis erros e dificuldades que os alunos poderiam apresentar durante a resolução das tarefas propostas.

Buscamos, ao realizar a análise a *priori,* identificar em que tarefas os alunos poderiam apresentar as características do Pensamento algébrico propostos por Almeida (2016), sendo elas:

- **CER**: Capacidade de estabelecer relações;
- **CM**: Capacidade de modelar;
- **CG**: Capacidade de generalizar;
- **COD**: Capacidade de operar com o desconhecido como se fosse conhecido;
- **CCS**: Capacidade de construir significado para a linguagem e para os objetos algébricos.

Serão apresentados os registros que eram esperados que os alunos mobilizassem na resolução das atividades e como esses podem estar presentes nas resoluções apresentadas pelos alunos.

4.1.1. Proposta 1 – Divisão Celular

Ao aplicar esta tarefa, buscamos criar uma sequência de atividades, na qual os alunos realizassem diferentes representações da situação envolvendo a divisão celular de bactérias (Figura 26), além de possibilitar a análise das características do Pensamento algébrico no decorrer do desenvolvimento das atividades. Em relação aos Registros de Representação Semiótica, com os itens a e d buscou-se mobilizar o registro tabular; para os itens b buscou-se mobilizar o registro gráfico; para os itens c e f buscou-se mobilizar o registro algébrico; e por fim, com o item g buscou-se comparar os resultados presentes nos itens anteriores.

Figura 26: Enunciado da Proposta 1

Proposta 1

A fissão binária bacteriana é o processo pelo qual as bactérias realizam a divisão celular, ou seja, uma bactéria divide-se em duas bactérias idênticas a de origem. Conceitualmente, a fissão binária é semelhante à mitose que acontece em organismos multicelulares (como plantas e animais), mas sua finalidade é diferente, pois para as bactérias à fissão binária é a maneira como elas se reproduzem.

Fonte: Arquivo pessoal.

O item a (Figura 27) dessa proposta buscava compreender se os alunos conseguiam estabelecer a relação (**CER**) entre o número da divisão e a quantidade de bactérias quando o recipiente (cultura) apresentava uma bactéria inicialmente, nesse momento os alunos poderiam desenvolver na atividade a conversão do registro em língua natural para o registro tabular, utilizando ou não do registro numérico ou algébrico para determinar os demais valores da tabela.

Figura 27: Item a da Propostas 1

a) Supondo que inicialmente há uma bactéria em um recipiente (cultura), preencha a tabela a seguir relacionando o número de bactérias até a 7ª divisão.

Número da divisão	Quantidade de bactérias
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

Fonte: Arquivo pessoal.

Neste item esperávamos que os alunos relacionassem a ideia de que cada divisão das bactérias irá gerar sempre o dobro da quantidade de bactérias da divisão anterior, podendo observar a relação com as potências $2^1 = 2$ (primeira divisão); $2^2 = 4$ (segunda divisão), ... , $2^7 = 128$ (sétima divisão), podendo assim completar a tabela presente no item a (Figura 27) como sugerido na Figura 28.

Observamos que a habilidade da BNCC envolvida na atividade supracitada é a (EM13MAT403), que corresponde a “Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função” (BRASIL, 2018, p. 531). Os alunos poderiam apresentar como possíveis dificuldades para resolução da atividade a não compreensão de que na primeira bactéria não houve divisão, como observado por Bonotto (2015), outra possibilidade é a associação equivocada da quantidade de bactérias com múltiplos de 2 para se obter a quantidade de bactérias.

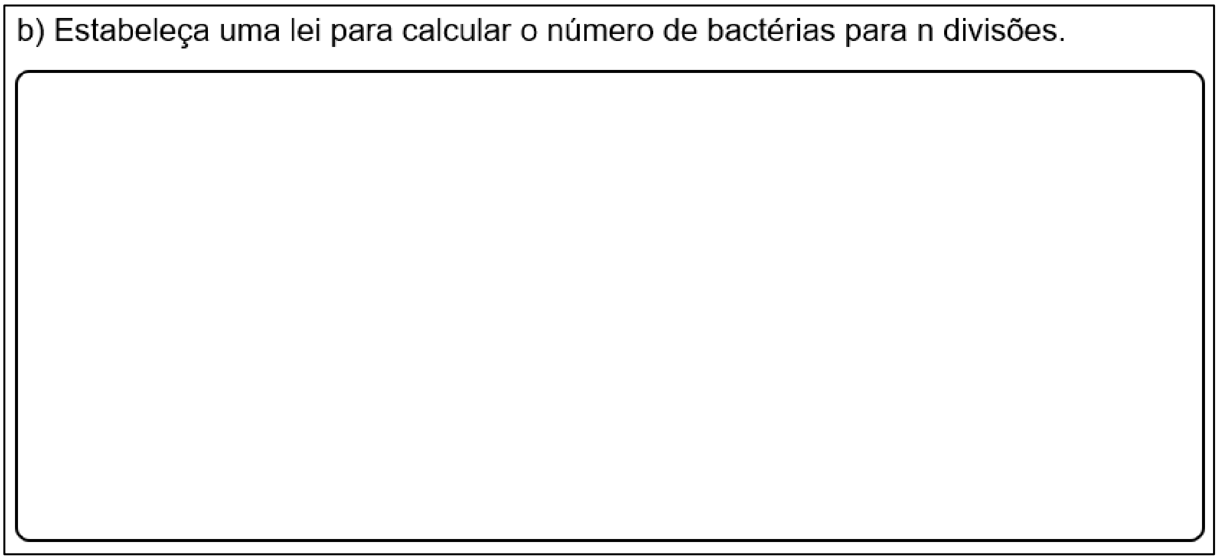
Figura 28: Preenchimento da tabela do item a da Proposta 1

Número da divisão	Quantidade de bactérias
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128

Fonte: Arquivo pessoal.

O item b (Figura 29) da Proposta 1 buscava compreender as estratégias que os alunos utilizariam (**CM**) para obter a lei de formação (**CG**) para calcular o número de bactérias para n divisões. Neste item os alunos poderiam também apresentar elementos, com os quais seria possível determinar se os alunos apresentavam domínio para operar com desconhecido, como se esse fosse conhecido, como exemplo, na associação da quantidade de bactérias com o número de divisões n, sendo que ao compreender que ambos os elementos não representam o mesmo objeto, não poderiam ser simplificados aplicando a adição ou subtração desses termos ou aplicando propriedades de potenciação (**COD**).

Figura 29: Item b da Proposta 1


b) Estabeleça uma lei para calcular o número de bactérias para n divisões.

Fonte: Arquivo pessoal.

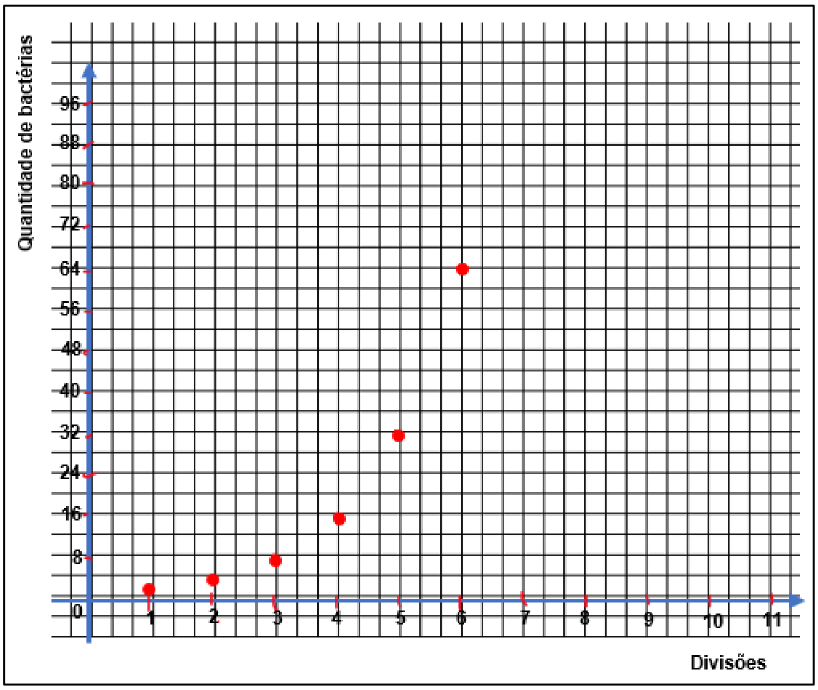
Neste item b (Figura 29), esperávamos que os alunos relacionassem que cada divisão das bactérias irá gerar sempre o dobro da quantidade de bactérias da divisão anterior, podendo observar a relação com as potências $2^1 = 2$ (primeira divisão); $2^2 = 4$ (segunda divisão), ... , $2^7 = 128$ (para a sétima divisão), ... , 2^n (enésima divisão), concluindo, assim, a lei de formação na forma de função exponencial $f(n) = 2^n$.

Ainda sobre o item b (Figura 29), constatamos que a habilidade da BNCC envolvida na resolução da tarefa é a (EM13MAT304), que corresponde a “Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros” (BRASIL, 2018, p. 528).

Uma possível dificuldade que os alunos poderiam ter na resolução da atividade citada acima, seria generalizar a quantidade de bactérias com o número, multiplicando o número da divisão pelo número 2, podendo concluir que a expressão que representasse a situação fosse $f(n) = 2.n$. Tal dificuldade pode ser esperada, pois no semestre anterior houve o início dos estudos de funções com esse grupo de alunos e nessa ocasião foram abordadas as funções Função afim e Função quadrada.

O Item c apresenta como enunciado “Represente graficamente os valores da tabela do item a”, apresentando logo abaixo dele uma malha quadriculada para que o aluno pudesse construir o gráfico, nesse caso optou-se em não construir os eixos das ordenadas e das abscissas, deixando tal construção a cargo dos alunos. Nesta atividade esperava-se que os alunos construíssem um gráfico para representa a função de Naturais para Reais, $f(n) = 2^n$ (Figura 30). Neste item esperávamos que os alunos conseguissem construir significados para o objeto matemático função exponencial (**CCS**) compreendendo a partir da situação proposta as características que podem contribuir para identificar uma função desse tipo.

Figura 30: Construção gráfica esperada para o item c da Proposta 1



Fonte: Arquivo pessoal.

A habilidade presente na BNCC, avaliada no item c, é a (EM13MAT404) que corresponde a “Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais” (BRASIL, 2018, p. 531).

As possíveis dificuldades que os alunos poderiam apresentar na resolução do item acima estão relacionadas a não conseguir construir o gráfico obedecendo a escala esperada, ou dependendo da sequência obtida na tabela do item a, o aluno acabe obtendo um gráfico que se assemelha a outro tipo de função, como por exemplo a função de naturais para reais $f(n) = 2.n$. Uma outra dificuldade que pode aparecer é o aluno não conseguir observar o domínio da função e ligar os pontos na forma gráfica.

Para o item d (Figura 31) esperávamos que os alunos mobilizassem as mesmas capacidades relativas ao item a (Figura 27), entretanto neste caso ao invés de uma bactéria haveria cinco bactérias no recipiente (cultural), ou seja, esperávamos que os alunos relacionassem que cada divisão das bactérias iria gerar sempre o dobro da quantidade de bactérias da divisão anterior, exatamente como o item a, entretanto com o número inicial de bactérias igual 5, logo esperava-se que os alunos observassem que a relação fosse descrita $5.2^1 = 10$ (primeira divisão); $5.2^2 =$ (segunda divisão), ... , $5.2^5 = 160$ (quinta divisão), sendo assim, completando a tabela apresentada na tabela presente no item d (Figura 32).

Figura 31: Item d da Proposta 1

d) Agora vamos supor que há 5 bactérias em um recipiente, construa uma tabela relacionando o número bactérias até a 5ª divisão.

Número da divisão	Quantidade de bactérias
1	
2	
3	
4	
5	

Fonte: Arquivo pessoal.

Figura 32: Preenchimento da tabela presente no item d da Propostas 1

Número da divisão	Quantidade de bactérias
1	10
2	20
3	40
4	80
5	160

Fonte: Arquivo pessoal.

A habilidade relacionada ao item d (Figura 31) é a mesma do item a (Figura 27), ou seja, a habilidade (EM13MAT403). Além da possibilidade de os alunos não compreenderem que par cinco bactérias não a divisão, outra possível dificuldade que os alunos podem apresentar ao resolver este item está na associação equivocada do número de divisões com múltiplos de 5 para se obter a quantidade de bactérias.

O item e (Figura 33) da Proposta 1 apresentava os mesmos objetivos e habilidade presentes no item b (Figura 29), todavia para o caso de cinco e não somente uma bactéria como presente no item b (Figura 29). Neste item esperava-se que o aluno relacionasse que cada divisão das bactérias iria gerar sempre o dobro da quantidade de bactérias da divisão anterior, similar ao proposto no item b, entretanto o número inicial de bactérias passaria a ser cinco, sendo assim, esperava-se que o aluno observe a partir do desenvolvimento do item d ($5.2^1 = 10$ (primeira divisão); $5.2^2 =$ (segunda divisão), ... , $5.2^5 = 160$ (quinta divisão)), pudesse então concluir que a lei de formação solicitada, seria uma função do tipo exponencial expressa por $f(n) = 5.2^n$.

Figura 33: Item e da Proposta 1

e) Estabeleça uma lei para calcular o número de bactérias para n divisões da situação do item d.

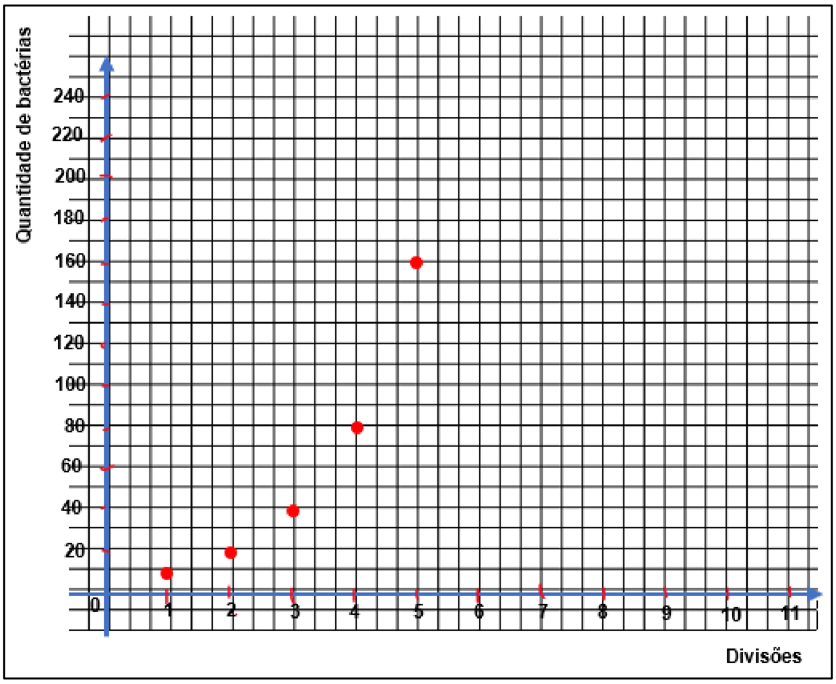
Fonte: Arquivo pessoal.

Ainda com relação ao item e (Figura 33), uma possível dificuldade que os alunos poderiam apresentar poderia ser a generalização a sequência utilizando o número 5 como multiplicado, podendo concluir que a situação sugerida poderia ser a expressa por f(n) = 5.n, ou seja, uma função afim.

O Item f apresenta como enunciado "Estabeleça uma lei para calcular o número de bactérias para n divisões da situação do item d", apresentando logo abaixo dele uma malha quadriculada para que o aluno pudesse construir o gráfico, nesse caso optou-se, novamente, em não construir os eixos das ordenadas e das abscissas, deixando tal construção a cargo dos alunos.

Nesta atividade esperava-se que os alunos construíssem um gráfico para representa a função de Naturais para Reais, $f(n) = 5.2^n$ (Figura 34). Neste item esperava-se que os alunos conseguissem construir significados para a para o objeto matemático função exponencial (Capacidade de construir significado para a linguagem e os objetos algébricos) compreendendo a partir da situação proposta que as características que podem contribuir para identificação de uma função desse tipo.

Figura 34: Construção gráfica esperada para o item f da Proposta 1



Fonte: Arquivo pessoal.

A habilidade avaliada no item f é mesma presente no item c, no caso a habilidade (EM13MAT404). As possíveis dificuldades que os alunos poderiam apresentar na resolução deste item estão relacionadas a não conseguir construir o gráfico obedecendo a escala esperada, ou dependendo da sequência obtida na tabela do item a o aluno acabe obtendo um gráfico que se assemelha a outro tipo de função, como por exemplo a função de naturais para reais f(n) = 5n. Uma outra dificuldade que pode aparecer é o aluno não conseguir observar o domínio da função e ligar os pontos na forma gráfica.

O item g apresenta o seguinte enunciado “Comparando as duas leis de formações apresentadas nos itens a e d e os gráficos gerados por elas (itens c e f), descreva o que você consegue observar de diferente e semelhante entre os dois”.

Ao comparar as duas leis de formação, esperava-se que os alunos observassem que ambas são funções exponenciais, ou que fossem um tipo de função que apresentasse variável no expoente, pois o estudo de funções exponenciais estava sendo iniciado com a aplicação das tarefas propostas na sequência de atividades aqui apresentada. Outro aspecto que os alunos poderiam observar é que as expressões apresentavam o mesmo valor para a base da potência. Em relação as características distintas, esperava-se que os alunos observassem que o fator de multiplicação da parte exponencial é diferente entre as duas expressões.

Ao comparar os gráficos de ambas as expressões esperasse que os alunos observassem que as características em comum, entre as duas representações estava que ambas são uma curva e como característica distinta teríamos que tais curvas apresentavam aberturas diferentes.

Neste item g a habilidade presente é a (EM13MAT404) “Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais” (BRASIL, 2018, p. 531). Uma possível dificuldade que os alunos poderiam apresentar estava em não conseguir observar que ambas as expressões representam funções exponenciais, ou seja, na construção da lei de formação ou dos gráficos os alunos poderiam chegar a representações que não permitissem estabelecer corretamente as características comuns e distintas das atividades propostas.

A seguir será apresentada a análise da proposta 2 aplicada aos alunos envolvendo função exponencial, no qual descreveremos a habilidade descrita, a descrição detalhada da tarefa e as possíveis dificuldades.

4.1.2. Proposta 2 – Torre de Hanói

Realizadas algumas adaptações da sequência proposta por Silva e Coqueiro (2016), buscou-se criar uma sequência de atividades, no qual os alunos realizassem diferentes representações da situação envolvendo a Torre de Hanói (Figura 35), além de possibilitar a análise das características do pensamento algébrico no decorrer do desenvolvimento das atividades realizadas pelos alunos.

Figura 35: Enunciado da Proposta 2

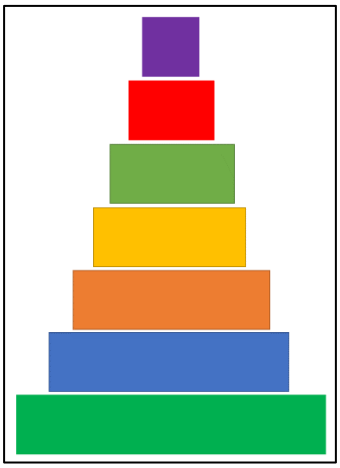
Proposta 2

A torre de Hanói, também conhecida por torre do bramanismo ou quebra-cabeças do fim do mundo, foi inventada e vendida como brinquedo, no ano de 1883, pelo matemático francês Edouard Lucas. O jogo consiste em passar todos os discos do primeiro para o último pino, usando os demais pinos como auxiliares, de maneira que um disco de raio maior nunca fique em cima de outro menor.

Fonte: Arquivo pessoal.

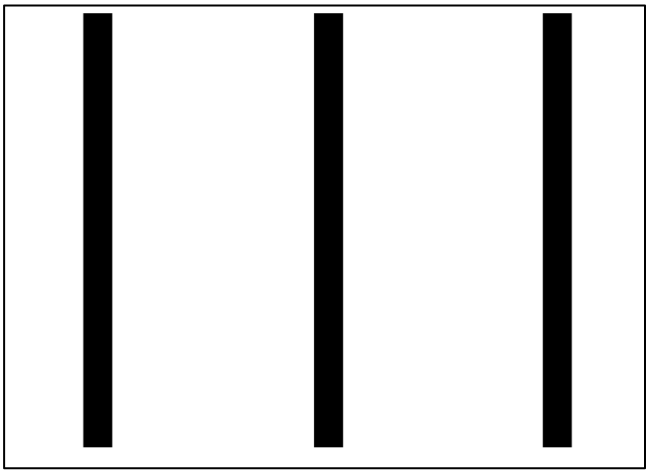
Para o desenvolvimento dessa proposta de atividades os alunos utilizaram as peças da Torre de Hanói de forma física (Figura 36 e Figura 37). Foram oferecidas aos alunos as peças e as três torres impressas em folha sulfite, optamos por utilizar material manipulativo como um motivador para resolução das atividades propostas.

Figura 36: Peças da Torre de Hanói utilizadas na Proposta 2



Fonte: Arquivo pessoal.

Figura 37: Hastes para movimentação das peças da Torre de Hanói



Fonte: Arquivo pessoal.

A **Atividade 1** (Figura 38) desta proposta teve como objetivo investigar e proporcionar aos alunos que iniciassem o processo de criação de estratégias (Capacidade de modelar) para o obter a quantidade necessária para mover as peças da primeira para última haste, completando a tabela presente na atividade com os resultados mais próximo possíveis dos presentes na Figura 39, todavia esperava-se que os alunos determinassem o número de movimentações de maneira empírica, ou seja, nessa primeira atividade não esperava-se que os alunos já encontrassem o número mínimo de movimentações.

Figura 38: Atividade 1 da Proposta 2

Atividade 1. Movimente o número de discos de uma haste para a outra conforme as regras do jogo e anote a quantidade de movimentos que você realizou na Tabela 1.

Tabela 1. Movimentos da Torre de Hanoi

Número de discos	Quantidade de movimentos
1	
2	
3	
4	
5	

Fonte: Arquivo pessoal.

Figura 39: Preenchimento da tabela presente da Atividade 1 da Proposta 2

Número de discos	Quantidade de movimentos
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31

Fonte: Arquivo pessoal.

Uma possível dificuldade que os alunos poderiam apresentar no desenvolvimento dessa atividade é a compreensão do que foi solicitado, ou seja, como proceder com a movimentação das peças. Outra possível dificuldade é o não desenvolvimento de uma estratégia que funcione para determinar o número de movimentações a serem realizadas. A seguir são apresentadas as habilidades mobilizadas na **Atividade 1** (Figura 38), segundo a BNCC:

> (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras). (BRASIL, 2018, p. 525)
>
> (EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros. (BRASIL, 2018, p. 528)
>
> (EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função. (BRASIL, 2018, p. 531)

A **Atividade 2** (Figura 40) desta proposta teve como objetivo que os alunos determinassem o mínimo de movimentações para deslocar a torre da primeira para última haste, obedecendo as regras do jogo. Nesta atividade há a continuidade do processo de criação de estratégias (Capacidade de modelar), todavia tem-se também o objetivo de se estabelecer uma relação entre a quantidade de peças e o número de movimentações necessárias (Capacidade de estabelecer relações).

Figura 40: Atividade 2 da Proposta 2

Atividade 2. O objetivo do jogo Torre de Hanói é movimentar os discos de uma haste para a outra utilizando o menor número possível de movimentos. Jogue novamente e tente encontrar essa quantidade mínima. Registre essa nova quantidade na Tabela 2.

Tabela 2. Movimentos da Torre de Hanoi (Atividade 2)

Número de discos	Quantidade de movimentos
1	
2	
3	
4	
5	

Fonte: Arquivo pessoal.

A resolução da **Atividade 2** é a mesma esperada que a resolução da **Atividade 1** (Figura 39), entretanto diferente da **Atividade 1**, a resolução não seria próxima da apresentada, os alunos deveriam estabelecer o valor mínimo exato para as movimentações. As habilidades mobilizadas e dificuldades que os alunos poderiam apresentar no desenvolvimento desta atividade são os mesmos da **Atividade 1** (Figura 38).

Na **Atividade 3** (Figura 41) esperava-se que os alunos descrevessem as estratégias realizadas para determinação do mínimo de movimentações necessárias para se deslocar as peças de cada uma das torres, podendo ou não apresentarem uma representação algébrica (Capacidade de operar com o desconhecido como se fosse conhecido) para determinação desse mínimo de movimentações (Capacidade de generalizar), ou seja, nesta atividade não esperava-se que os alunos já obtivessem uma representação algébrica, todavia nada impedia que isso pudesse já ocorrer, pois a representação algébrica poderia ser uma estratégia utilizada pelas alunos.

Figura 41: Atividade 3 da Proposta 2

Atividade 3. Que estratégia você utilizou para obter o número mínimo de movimentos dos discos?

Fonte: Arquivo pessoal.

Para resolução da **Atividade 3** (Figura 41), esperava-se que os alunos apresentassem como possíveis justificativas ou estratégias para a quantidade de movimentos os seguintes argumentos:

- Resolução 1. O aluno pode tentar estabelecer uma relação entre o número de movimentações da quantidade de peças n-1 anterior com a quantidade de peças n atual.
- Resolução 2. O aluno pode movimentar diversas vezes até conseguir o número mínimo de movimentações.
- Resolução 3. O aluno pode observar que a cada nova peça adicionada o número de movimentações necessárias será igual ao dobro do número de movimentações anteriores mais uma movimentação.
- Resolução 4. O aluno também pode observar que os valores obtidos podem ser reescritos como $2^n - 1$, sendo n o número de peças a serem movimentadas.

As habilidades mobilizadas e dificuldades que os alunos poderiam apresentar no desenvolvimento destas atividades são as mesmas das Atividades 1 e 2, além de a dificuldade em não estabelecer os valores mínimos exatos na **Atividade 2** acarretar dificuldades para execução da **Atividade 3**.

Na atividade 4 (Figura 42) esperava-se que os alunos utilizassem as estratégias descritas na **Atividade 3** (Figura 41) para validar se as mesmas estratégias valeriam para qualquer quantidade de peças (Capacidade de generalizar), ou seja, os alunos poderiam confirmar que a estratégia utilizada é funcional para se obter o mínimo de movimentações ou em caso da estratégia se mostrar falha, estabelecer novas estratégias para determinar esse mínimo de movimentos.

Figura 42: Atividade 4 da Proposta 2

Atividade 4. Sabendo a quantidade mínima de movimentos para o número de discos, um, dois três, quatro e cinco, encontre o número mínimo de movimentos para seis, sete e oito discos. Qual procedimento você utilizou para encontrar? Anote todo o procedimento utilizado e os resultados na Tabela abaixo.

Número de discos	Quantidade de movimentos
6	
7	
8	

Fonte: Arquivo pessoal.

Para resolução da Atividade 4 (Figura 42), esperava-se que os alunos apresentassem como possíveis justificativas ou estratégias para a quantidade de movimentos os seguintes argumentos:

- Resolução 1. O aluno pode observar que a cada nova peça adicionada o número de movimentações necessárias será igual ao dobro do número de movimentações anterior mais uma movimentação.

- Resolução 2. O aluno também pode observar que os valores obtidos podem ser reescritos como $2^n - 1$, sendo n o número de peças a serem movimentadas.

Novamente as habilidades mobilizadas e dificuldades que os alunos poderiam apresentar no desenvolvimento destas atividades são as mesmas das Atividades 1 a 3, além de a dificuldade em não estabelecer os valores mínimos exatos na **Atividade 2**, somada a uma estratégia falha na **Atividade 3**, poderiam acarretar dificuldades para a resolução da **Atividade 4**.

Por fim, a **Atividade 5** (Figura 43) pretendia que os alunos apresentassem a lei de formação (registro algébrico) que relacionasse uma quantidade qualquer de peças com o número de movimentações para se deslocar a torre da primeira para a última haste (Capacidade de Generalizar), logo os alunos deveriam observar que o número de movimentações variavam em função do número de peças, sendo está estratégia descrita por uma função exponencial expressa por $f(n) = 2^n - 1$, no f(n) é o número de movimentações e n o número de discos na torre.

Figura 43: Atividade 5 da Proposta 2

Atividade 5. Tente encontrar um modelo matemático que expresse a quantidade mínima de movimentos conforme a variação dos discos (sem recorrerem a quantidade anterior de discos).

Fonte: Arquivo pessoal.

Como observado nas atividades de 1 a 4, as habilidades mobilizadas e dificuldades que os alunos poderiam apresentar no desenvolvimento desta atividade são similares as já observadas nas atividades anteriormente citadas. Outra dificuldade que os alunos poderiam apresentar, é recorrer a representações algébricas mais familiares a eles, como Função afim e Função quadrada.

4.2. ANÁLISE A *POSTERIORI*

Nesta seção foi realizada a análise a *posteriori* das sequências de atividades Proposta 1 (Divisão Celular) e Proposta 2 (Torre de Hanói), nas quais buscamos analisar as resoluções realizadas pelos alunos, destacando as dificuldades apresentadas para o desenvolvimento das tarefas propostas.

Para a análise das Propostas 1 e 2 utilizamos os resultados apresentados, respectivamente, por Bonotto (2015) e Silva e Coqueiro (2016), para se estabelecer um parâmetro de comparação das resoluções que os alunos apresentaram com os resultados obtidos por essas autoras, ou seja, em relação as respostas corretas ou nos possíveis erros e dificuldades que os alunos demonstraram durante o desenvolvimento das tarefas propostas.

Buscamos, ao se realizar a análise a *posteriori*, identificar nas tarefas realizadas pelos alunos as características do Pensamento algébrico como proposto por Almeida (2016), sendo elas:

- **CER**: Capacidade de estabelecer relações;
- **CM**: Capacidade de modelar;
- **CG**: Capacidade de generalizar;
- **COD**: Capacidade de operar com o desconhecido como se fosse conhecido;
- **CCS**: Capacidade de construir significado para a linguagem e para os objetos algébricos.

A partir da observação e análise das características do Pensamento algébrico, buscamos estabelecer o nível do desenvolvimento do Pensamento algébrico dos alunos participantes desta pesquisa, a partir da classificação em níveis proposta por Almeida (2016). Sendo essas características descritas abaixo:

- **Nível 0 (N0)** - ausência do pensamento algébrico;
- **Nível 1 (N1)** - pensamento algébrico incipiente;
- **Nível 2 (N2)** - pensamento algébrico intermediário;
- **Nível 3 (N3)** - pensamento algébrico consolidado.

Importante destacar que o **N0** estabelece a ausência do pensamento algébrico, ou seja, o aluno pode até apresentar uma característica do pensamento algébrico, porém não apresenta elementos suficientes para afirmar que o mesmo apresenta o Pensamento algébrico.

O **N1** estabelecer um pensamento algébrico ainda incipiente, ou seja, o aluno não apresenta uma construção formal do pensamento algébrico, podendo apresentar duas ou três características do Pensamento algébrico, sendo uma delas a característica **CER**, pois segundo Almeira (2016) esta característica é a primeira a ser mobilizada pelo aluno no processo de Pensamento algébrico.

O **N2** representa o pensamento algébrico quando este é intermediário, sendo que o aluno apresenta certo domínio de formalismo, porém ainda não compreende totalmente os processos de generalização, ou seja, o aluno terá quatro das cincos características do Pensamento algébrico, entretanto suas construções relativas às características modelar, generalizar e operar com o desconhecido como se fosse conhecido não estão completamente desenvolvidas em seu processo de aplicação do Pensamento algébrico.

E por fim **N3**, no qual o pensamento algébrico já está consolidado, ou seja, o indivíduo apresenta as cinco características do Pensamento algébrico já desenvolvidas por completo e compreende todos os elementos operacionais e propriedades referentes ao objeto matemático de estudo.

Buscamos observar e analisar os registros de representação mobilizados pelos alunos na resolução das atividades, para, a partir desta análise das respostas apresentadas pelos alunos, compreender como os mesmos visualizam os elementos propostos na atividade.

4.1.1. Proposta 1 – Divisão Celular

A tarefas propostas nesta sequência foram aplicadas em duas horas-aula. Durante a aplicação das tarefas, os alunos puderam realizar perguntas caso tivessem dúvidas e essas dúvidas foram compartilhadas com toda turma. As atividades foram entregues aos alunos com os itens de a a c, finalizados estes três primeiros itens foram entregues os itens d a f, após a finalização desses três últimos itens, a sequência de atividades foi finalizada com a entrega do item g para os alunos.

Foi realizada uma introdução para aplicação da sequência de atividades de aproximadamente 10 minutos, na qual foi solicitado que os alunos não esquecessem qual era a numeração da atividade que estavam realizando, pois essa informação seria de importância para comparação dos resultados. Foi realizada, também, a leitura do enunciado do problema, e por fim, os alunos puderam apresentar dúvidas iniciais que poderiam ter sobre a divisão celular. Sendo assim, os alunos tiveram 30 minutos para responder os itens de a a c, 30 minutos para responder os itens de d a f, e por fim, 20 minutos para responder o item g.

A turma participante desta pesquisa contava com 33 alunos, porém no dia da aplicação da atividade estavam presentes 25 alunos. A atividade foi aplicada de maneira individual, ou seja, cada aluno realizou uma sequência de atividades, ou seja, para essa proposta foram produzidas ao todo 25 laudas de respostas.

Para preservar a identidade dos alunos, estes foram numerados de B01 a B25 conforme foi realizada a entrega das sequências de atividades, foi elaborada uma lista controle com a numeração da sequência e o aluno que a realizou, para futura comparação com os resultados obtidos da Proposta 2.

O **item a** desta proposta solicitava que os alunos completassem a tabela presente nesse item, seguindo as divisões que eram apresentadas no enunciado. Ao analisar as atividades apresentadas pelos alunos, observamos que 16 dos 25 alunos completaram corretamente a tabela presente na tarefa, portanto tem-se 16 alunos que apresentaram a característica do Pensamento algébrico **CER**, pois estabeleceram corretamente a relação existente entre a quantidade de bactérias em função do número de divisões realizadas (Figura 44).

Figura 44: Tabela preenchida pelo aluno B03

Número da divisão	Quantidade de bactérias
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128

Fonte: Arquivo pessoal.

Dos 9 alunos que completaram a tabela de forma incorreta, quatro alunos apresentaram a resposta com potência de base dois; três alunos iniciaram a primeira divisão com quatro bactérias (Figura 45) e um aluno apresentou a primeira divisão com uma bactéria (Figura 46), obtendo a sétima divisão, respectivamente, com 256 bactérias e 64 bactérias.

Figura 45: Tabela preenchida pelo aluno B19

Número da divisão	Quantidade de bactérias
1	4
2	8
3	16
4	32
5	64
6	128
7	256

Fonte: Arquivo Pessoal.

Figura 46: Tabela preenchida pelo aluno B10

Número da divisão	Quantidade de bactérias
1	2
2	4
3	8
4	12
5	16
6	32
7	64

Fonte: Arquivo pessoal.

Nesses casos, observamos que os alunos, ao realizarem a conversão dos registros em língua natural e figural para os registros tabular e numérico, acabaram confundido em que momento se iniciava a divisão celular, ou seja, compreenderam como o processo de divisão celular ocorria, porém não compreenderam quando ocorria a primeira divisão. Sendo assim, constatamos que esses quatros alunos apresentaram parcialmente a características do Pensamento algébrico **CER**.

Os demais cinco alunos que completaram a tabela de forma incorreta, associaram a divisão celular das bactérias com a sequência de múltiplos de dois, sendo o primeiro termo o número 2 (Figura 47). Neste caso os alunos, ao realizarem a conversão dos registros em língua materna e figural para os registros tabular e numérico, não conseguiram estabelecer corretamente a relação entre a quantidade de bactérias e o número de divisões. Sendo assim, esses alunos não apresentaram, nesse item. a característica do Pensamento Algébrico **CER**.

Figura 47: Tabela preenchida pelo aluno B11

Número da divisão	Quantidade de bactérias
1	2 bactérias
2	4 bactérias
3	6 bactérias
4	8 bactérias
5	10 bactérias
6	12 bactérias
7	14 bactérias

Fonte: Arquivo pessoal.

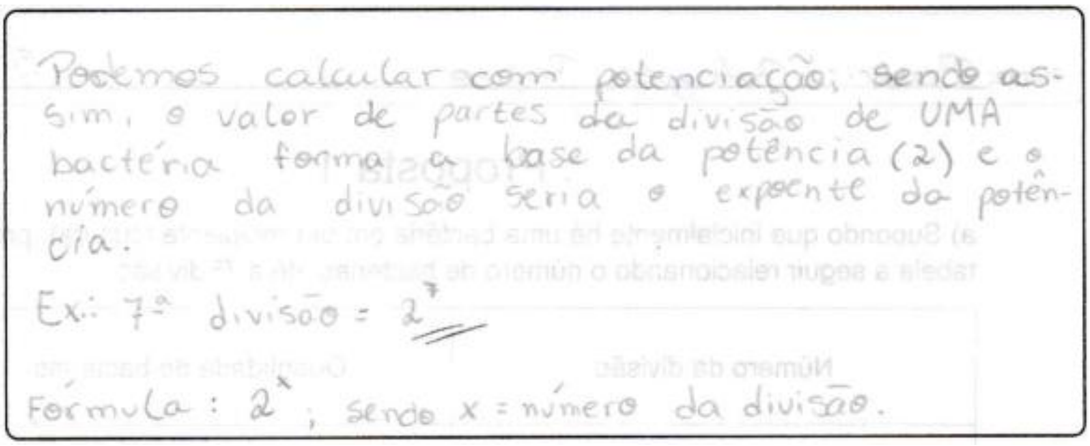
A partir dessa primeira tarefa podemos observar que a capacidade de estabelecer relações (**CER**), sendo assim, podemos observar que esse primeiro resultado vai ao encontro ao que fora proposto por Almeida (2016), no qual acredita que “a primeira característica do pensamento algébrico desenvolvida e revelada por um sujeito e capacidade de estabelecer relações, seguida pelas demais” (ALMEIDA, 2016, p. 79).

Observamos que os alunos que não conseguiram desenvolver a resolução do item a, tiveram dificuldade na conversão do registro em língua materna para o registro tabular, no qual os alunos que não mobilizaram a conversão entre dois ou mais registros de representação tiveram dificuldades em realizar a tarefa proposta, nesse caso Duval (2011) aponta que a “mobilização de um segundo registro é necessária para poder discernir e reconhecer as unidades de sentido que são pertinentes no conteúdo das representações produzidas no primeiro registro” (DUVAL, 2011, p. 100).

No **item b** da Proposta 1 foi solicitado aos alunos que determinassem uma lei de formação que descrevesse a situação proposta. Três alunos obtiveram uma expressão equivalente a função $f(x) = 2^x$, no qual x é o número de divisões e f(x) a quantidade de bactérias, ou seja, esses três alunos apresentaram as características **CM**, **CG, COD** e **CCS**, pois conseguiram, a partir de estratégias (**CM**), estabelecer uma expressão algébrica (**CG**) que representasse a situação descrita, além de compreenderem as propriedades do termo desconhecido sem realizar operações inexistentes no processo (**COD**), e por fim, dando significado para o elemento desconhecido (**CCS**).

Destacamos destas três soluções, a apresentada pelo aluno B03 (Figura 48). O aluno, a partir da análise dos dados presentes no registro tabular, inicia a construção da lei de formação solicitada por meio do registro em língua materna, na qual apresenta um exemplo para, em seguida, fazer a conversão para o registro algébrico, isto é, demonstrando que o aluno realmente compreende os elementos por ele descritos.

Figura 48: Resolução do item b da Proposta 1 do aluno B03


Podemos calcular com potenciação, sendo assim, o valor de partes da divisão de UMA bactéria forma a base da potência (2) e o número da divisão seria o expoente da potência.

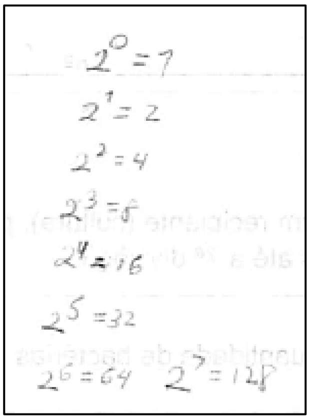
Ex.: 7ª divisão = 2^7

Formula: 2^x, sendo x = número da divisão.

Fonte: Arquivo pessoal.

Observamos que o aluno B05 (Figura 49) estabeleceu uma relação entre os valores obtidos com potenciação, entretanto não apresentou uma lei de formação sobre os dados apresentados, ou seja, esse fato indica que o aluno B05 apresenta a característica **CM**, entretanto não consegue criar um modelo algébrico válido para a situação modelada.

Figura 49: Estratégia utilizada pelo aluno B05 ao responder o item b



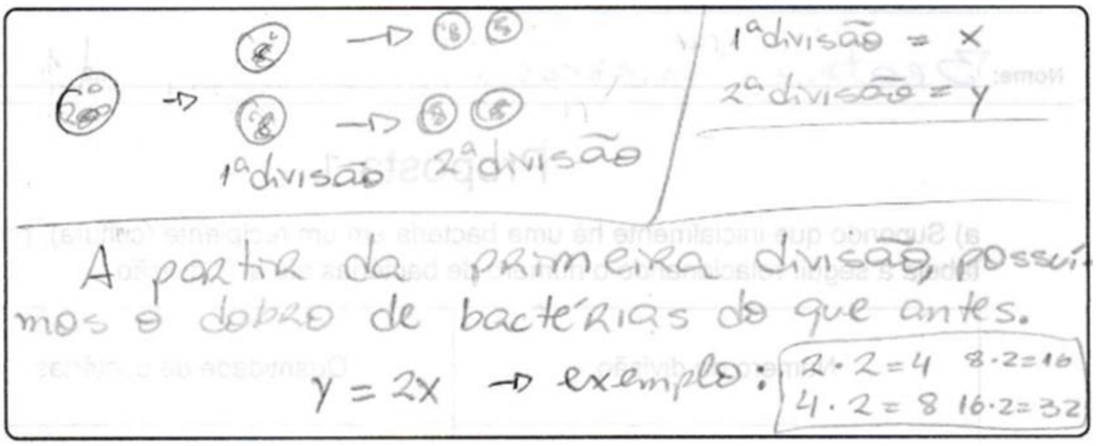
Fonte: arquivo pessoal

Ao todo, 21 alunos apresentaram uma expressão não condizente com a expressão esperada ($f(x) = 2^x$), sendo que, 17 alunos apresentaram uma expressão equivalente a função $f(x) = 2x$, ou seja, obtiveram uma função afim ao invés de apresentar uma função exponencial como esperado. Dos demais alunos, um apresentou uma relação somando as quantidades encontradas, outro aluno apresentou a expressão “$x.y^2$”, na qual x é o nº de divisões e y é o nº de bactérias, e por fim, dois alunos não responderam a esse item.

Dos 17 alunos que apresentaram uma expressão equivalente a função $f(x) = 2x$ para o **item b**, 14 alunos estabeleceram que o x (ou outra variável escolhida pelo aluno) era a quantidade de bactérias determinada pela divisão anterior; 12 desses alunos acertaram o **item a**; dois alunos, apesar de terem errado o **item a**, haviam estabelecido a relação como forma de potência de base 2; e por fim, três alunos haviam completado a tabela do **item a** como múltiplos de 2.

Um exemplo da construção dos 12 alunos que acertaram o **item a** pode ser observado na resolução do aluno B02 (Figura 50), no qual o aluno a partir do registro figural realiza as duas primeiras divisões das bactérias, pode-se observar um tratamento desse registro sendo realizado pelo aluno.

Figura 50: Resolução apresentada pelo aluno B02 para o item b



Fonte: Arquivo pessoal.

O aluno B02 realiza a conversão do registro figural para o registro em língua materna, em seguida realiza outra conversão, neste caso do registro em língua materna para o registro algébrico, e por fim, o aluno realiza a conversão do registro algébrico para o registro numérico.

Observamos que o aluno mobilizou mais de uma forma de registro para determinar a generalização. Apesar de não apresentar a expressão esperada ($f(x) = 2^x$), é possível observar que o aluno mobiliza parcialmente as características **CM** e **CG** e apresenta uma estratégia (**CM**) que é válida para situação, além disso, apresenta uma lei de formação no registro algébrico, entretanto a sua generalização (**CG**) não estabelece uma lei de formação que relacione a quantidade de bactérias em função ao número de divisões.

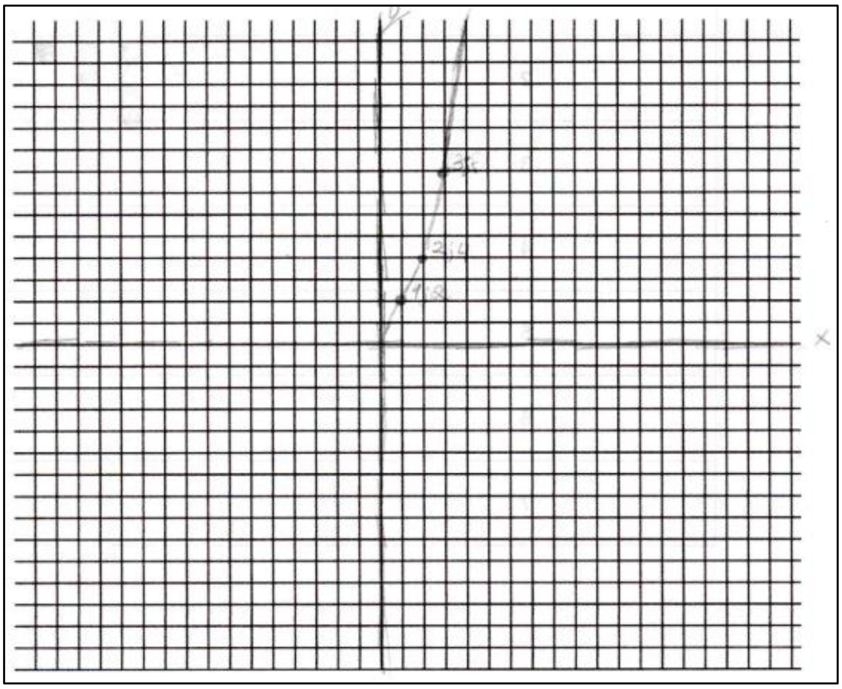
Os três alunos que não haviam respondido corretamente ao **item a**, completaram a tabela com múltiplos de 2. Apesar da resposta estar incorreta para o **item b**, a expressão determinada por esses alunos está relacionada aos valores que os mesmos apresentaram para o **item a**, ou seja, identificamos que os alunos conseguiram, a partir de um modelo (**CM**), estabelecer uma expressão (**CG**) que represente os dados estabelecidos por eles.

A partir da análise das respostas apresentadas pelos alunos podemos observar que parte dos alunos não conseguiram mobilizar as características **CM** e **CG**, sendo essas duas capacidades diretamente relacionada uma com a outra, pois como observado por Almeida (2016), “concomitante a esse processo de modelar, surge outra característica do pensar algebricamente, a capacidade de generalizar” (ALMEIDA, 2016, p. 82).

Nesse caso podemos observar que os alunos tiveram dificuldade de conseguir converter os registros numéricos ou em língua materna que desenvolveram ao modelar a situação propostas, para o registro algébrico com o objetivo de generalizar os dados por eles levantados, sendo assim como aponta por Duval (2012) “uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam também ser reconhecidas em cada uma de suas representações” (DUVAL, 2012, p.270).

O **item c** consistia na construção do gráfico referente a situação descrita nos **itens a e b**, para o qual somente um aluno apresentou um gráfico próximo ao esperado. Destacamos que somente o aluno **B05** apresentou uma curva para construção do gráfico (Figura 51), que estrutura o plano cartesiano no meio da malha quadriculada, ou seja, o aluno não relacionou que os dados apresentados só poderiam estar contidos no primeiro quadrante, todavia podemos observar que o aluno compreende a construção de um gráfico apesar de não relacionar que todas as divisões são números inteiros, ou seja, na representação gráfica os pontos não devem ligados. A partir disso é possível inferir que o aluno não coordena as variáveis visuais da representação gráfica e o domínio da função.

Figura 51: Gráfico construído pelo aluno B05 para o item c

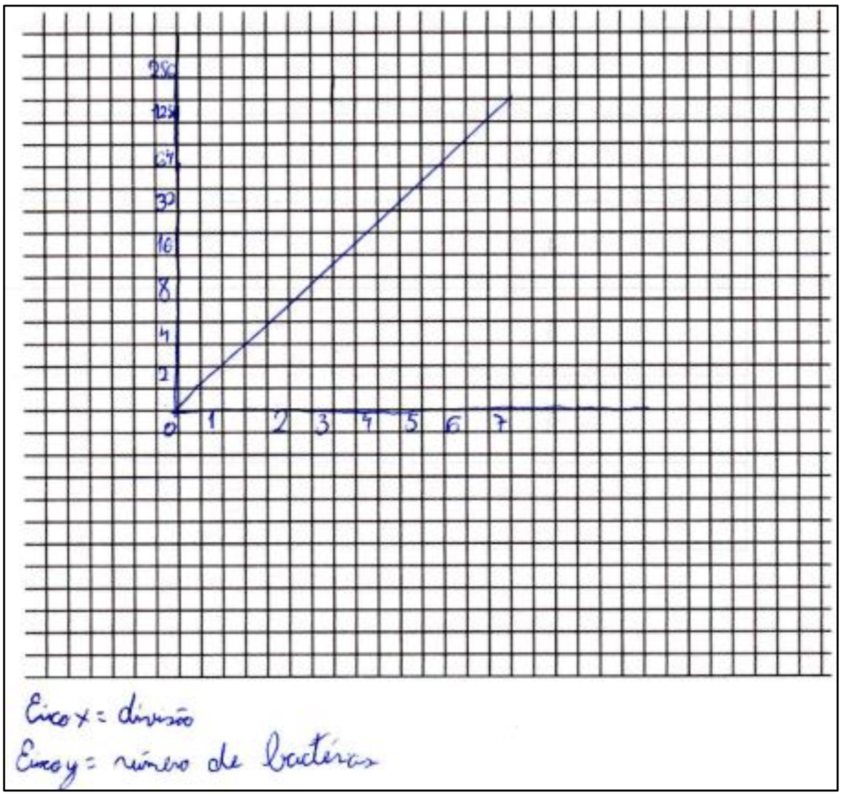


Fonte: Arquivo pessoal.

Optamos por dividir em três grupos os demais 24 alunos que erraram a representação gráfica, sendo eles os alunos que realizaram uma reta para o gráfico, os alunos que utilizaram gráfico de barras, e os alunos que representaram por meio do gráfico de pontos. Somente um dos 25 alunos não respondeu a atividade solicitada, destacamos que o aluno foi um dos três alunos que apresentou as respostas corretas para os itens a e b, esse aluno pouco se comunica em sala de aula, ou seja, em nenhum momento da atividade apresentou dúvidas para realização das atividades.

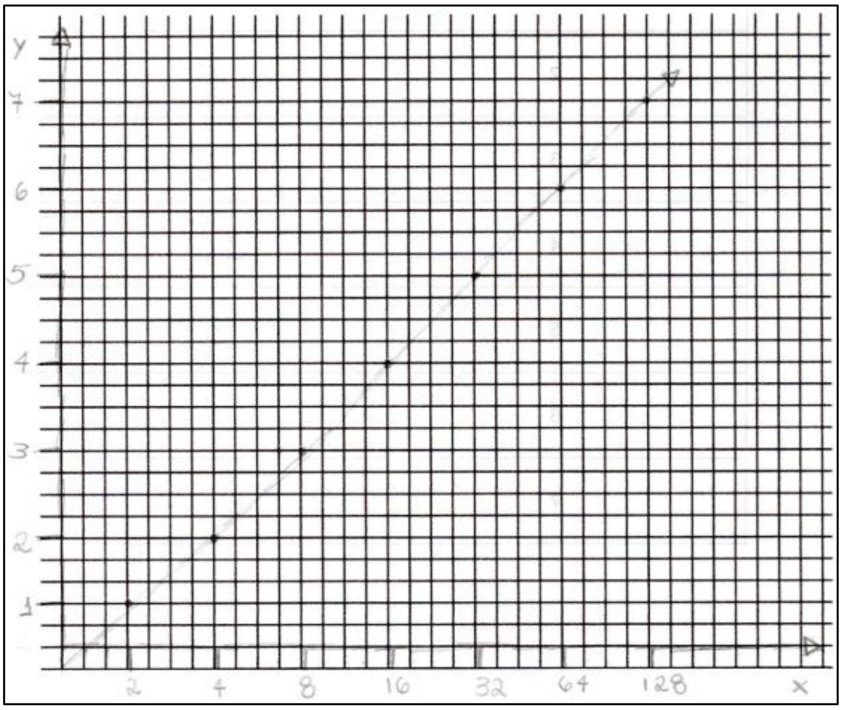
O grupo dos alunos que representaram a situação por meio de uma reta foi formado por 7 alunos que apresentaram uma representação gráfica não relacionada à situação descrita, pois ao converterem os dados obtidos na tabela (registro tabular) para o gráfico (registro gráfico) apresentaram valores nos eixos não proporcionais, sendo que, quatro alunos representaram a quantidade de bactérias na vertical (eixo das ordenadas) e o número de divisões na horizontal (eixo das abscissas) (Figura 52). Os outros três alunos representaram a quantidade de bactérias na horizontal (eixo das abscissas) e o número de divisões na vertical (eixo das ordenadas) (Figura 53).

Figura 52: Gráfico construído pelo aluno B06



Fonte: Arquivo pessoal.

Figura 53: Gráfico construído pelo aluno B03

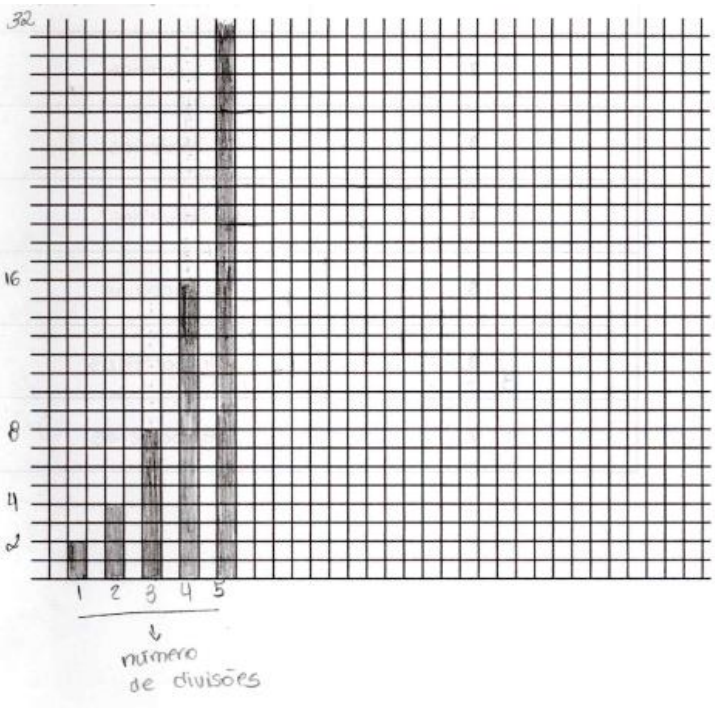


Fonte: Arquivo pessoal.

O grupo dos alunos que construíram um gráfico de barras para representar a situação proposta foi formado por 13 alunos, ou seja, mais da metade dos alunos participantes entendem como representação gráfica um gráfico estatístico. Os alunos, no momento da correção das atividades, foram questionados sobre o motivo de utilizarem a representação do gráfico de barras, ao que muitos não souberam responder e outros só disseram que esse é o tipo de gráfico que eles conheciam, todavia destacamos que os gráficos estatísticos e gráficos de funções foram abordados no semestre anterior ao da aplicação desta sequência de atividades (1º semestre de 2022).

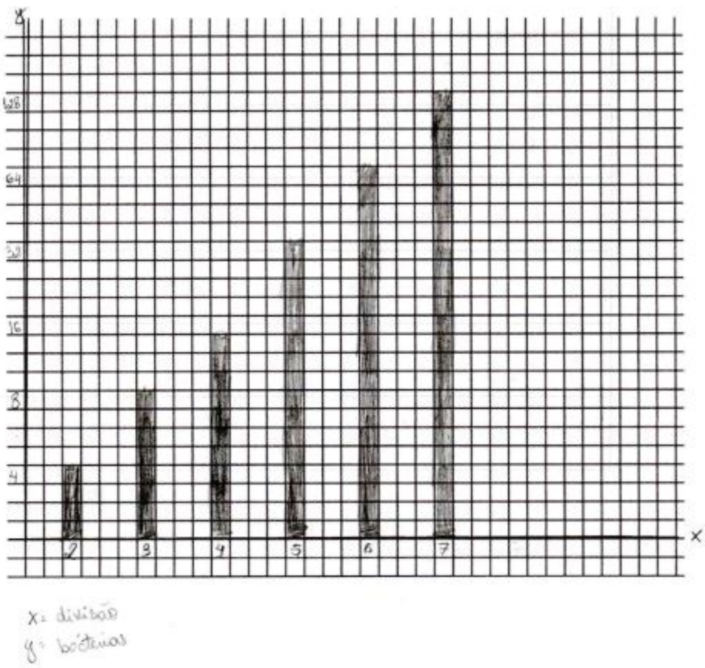
Nas construções desse grupo pudemos observar três tipos de ocorrências, a primeira ocorrência é composta por três alunos que construíram o gráfico de barras com os valores nos eixos verticais e horizontais proporcionais (Figura 54Figura 1), sendo que um dos eixos contava com valores de potências de base 2; a segunda ocorrência é composta por seis alunos que construíram o gráfico de barras com os valores nos eixos verticais e horizontais não proporcionais (Figura 55), sendo que um dos eixos contava com valores de potências de base 2; e por fim, a terceira ocorrência é composta por quatro alunos que construíram o gráfico de barras com os valores nos eixos verticais e horizontais proporcionais (Figura 56), sendo que um dos eixos contava com valores de múltiplos de 2.

Figura 54: Gráfico construído pelo aluno B13



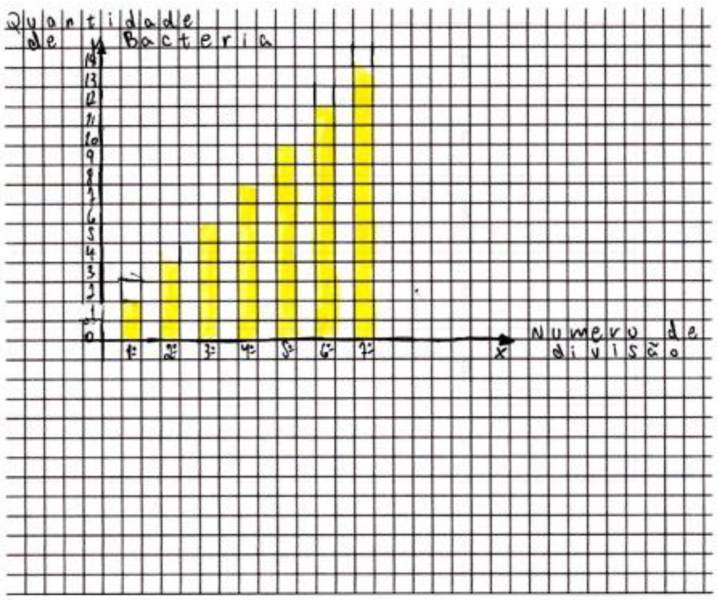
Fonte: Arquivo pessoal.

Figura 55: Gráfico construído pelo aluno B15



Fonte: Arquivo pessoal.

Figura 56: Gráfico construído pelo aluno B25



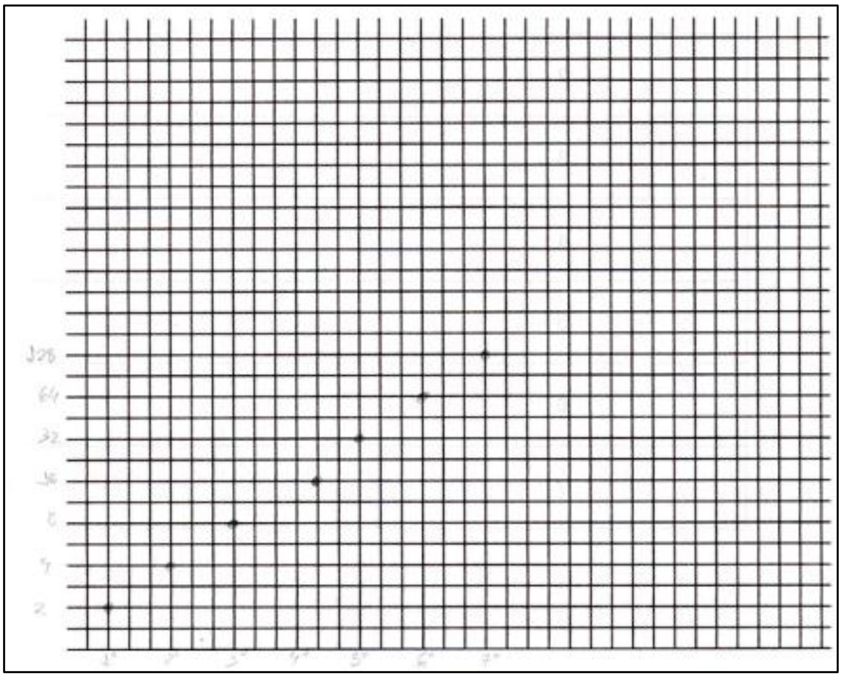
Fonte: Arquivo pessoal.

Evidentemente a produção realizada por esses 13 alunos chamou a atenção do pesquisador, pois esse tipo de construção não esteve presente no relato de Bonotto (2015), quando a pesquisadora aplicou atividade semelhante, sendo que a única diferença entre a aplicações é que Bonotto (2015) aplicou a atividade dividindo os alunos em duplas, e no caso da pesquisa produzida nesta dissertação a atividade foi realizada individualmente.

Entretanto, devido ao fim do ano letivo, pelo segundo semestre ser um período mais curto e por esses resultados obtidos não estarem nem mesmo na análise a *priori,* fica registrado que em pesquisas futuras buscaremos compreender os motivos que levaram os alunos a realizarem essa associação entre funções e gráficos estatísticos.

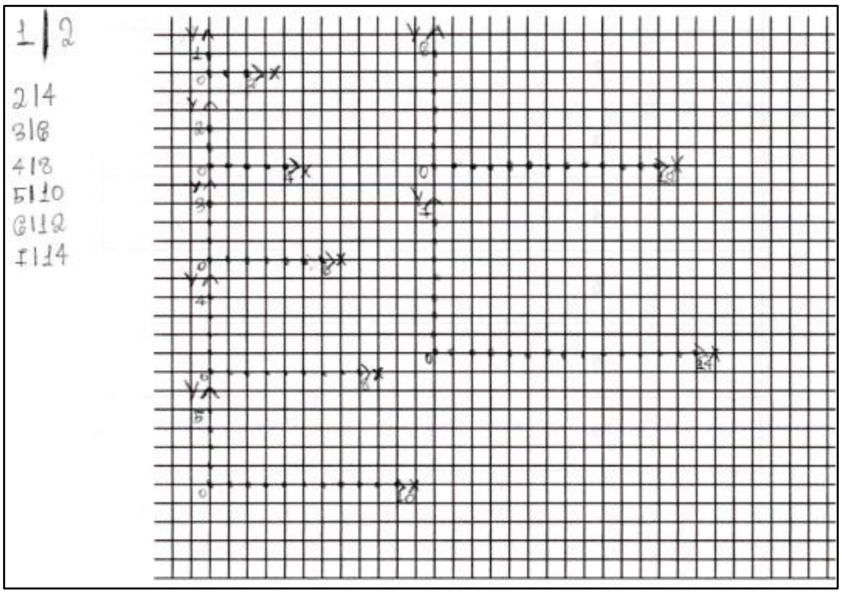
Por fim, segue a análise do último grupo dos alunos que realizaram a representação gráfica por meio do gráfico de pontos ou que se assemelha a um, neste caso dois alunos apresentaram a solução com gráfico de pontos, entretanto com os valores dos eixos não proporcionais (Figura 57) e um aluno construiu um plano cartesiano para cada par ordenado encontrado por ela no **item a** (Figura 58), entretanto o aluno marca pontos nos eixos ao invés de estabelecer um par ordenado.

Figura 57: Gráfico construído pelo aluno B18



Fonte: Arquivo pessoal.

Figura 58: Gráfico construído pelo aluno B11



Fonte: Arquivo pessoal.

Observadas as respostas apresentadas pelos 25 alunos participantes, para esses três itens (a, b e c), concluímos que somente dois alunos apresentam a característica **CCS** de forma parcial, pois os dois alunos não conseguiram reconhecer que o registro gráfico da função como uma progressão de pontos exponencial, ou seja, não identificaram o domínio da função, portanto há elementos da linguagem algébrica que foram compreendidos pelos alunos. A partir da análise realizada construímos o Quadro 6.

A partir dessa terceira tarefa podemos observar que a capacidade de construir significado (**CCS**) encontra-se em estágio inicial, pois os alunos ainda não conseguem realizar a conversão entre os diferentes registros que representam a função exponencial de foram significativas, ou seja, como já apresentado, segundo Duval (2009), só existe compreensão conceitual Matemática quando o aluno mobiliza a conversão e coordenação de dois ou mais registros do objeto matemático de estudo.

Quadro 6: Características do PA mobilizadas nos itens a, b e c

Características do PA	Alunos com a manisfestação da característica do PA
Sem caracteristicas do PA	B11; B13; B14; B24; B25
Estabelecer relações (CER)	B01; B02; B03; B04; B05; B06; B07; B08; B09; B10; B12; B15; B16; B17; B18; B19; B20; B21; B22; B23
Modelar (CM)	B02; B03; B04; B05; B06; B07; B08; B10; B12; B15; B16; B18; B20; B21; B22; B23
Generalizar (CG)	B03; B08; B15
Operar com o desconhecido como se fosse conhecido (COD)	B03; B15
Construir significado para a linguagem e os objetos algébricos (parcial) (CCS)	B03; B15

Fonte: Elaboração própria.

Analisando o Quadro 6 observamos que cinco alunos não apresentaram nenhuma das características do Pensamento algébrico, 20 alunos mobilizaram a característica CER, 16 alunos mobilizaram a característica CM, três alunos mobilizaram a característica CG, dois alunos mobilizaram a característica COD, e por fim, dois alunos mobilizaram parcialmente a característica CCS. Os dados apresentados no Quadro 6 serão importantes para determinação do nível de desenvolvimento algébrico dos alunos participantes desta pesquisa.

A partir da análise inicial dessas três primeiras tarefas, podemos observar que os alunos em sua grande maioria, seguindo a propostas de Almeida (2016), estão presentes no nível 1 do nível de desenvolvimento do pensamento algébrico, pois apresentam de duas ou três características do PA, ou seja, ainda apresentam um Pensamento Algébrico em estágio inicial.

O **item d** é similar ao **item a** em sua estrutura, entretanto ao invés de uma bactéria, havia cinco bactérias no recipiente (cultura), nesse caso os alunos também deveriam completar uma tabela com a quantidade de bactérias em função ao número de divisões.

Ao todo 21, dos 25 alunos que responderam a essa tarefa, acertaram os valores presentes na tabela, ou seja, 21 alunos apresentaram a característica do Pensamento algébrico **CER**, pois estabeleceram corretamente a relação existente entre a quantidade de bactérias em função do número de divisões realizadas (Figura 59).

Figura 59: Resposta para o item d do aluno B16

Número da divisão	Quantidade de bactérias
1	10
2	20
3	40
4	80
5	160

Fonte: Arquivo pessoal.

Dos quatro alunos que erraram o item d, dois alunos completaram a tabela com valores múltiplos de 10, com 10 sendo o valor inicial; um aluno completou a tabela com valores em potência de base 10, com 10 sendo o valor inicial; e por fim, um aluno completou corretamente até a quarta divisão, porém na quinta divisão ao invés de associar a quinta divisão com 160 bactérias, o aluno associou a quinta divisão das bactérias com 100 bactérias.

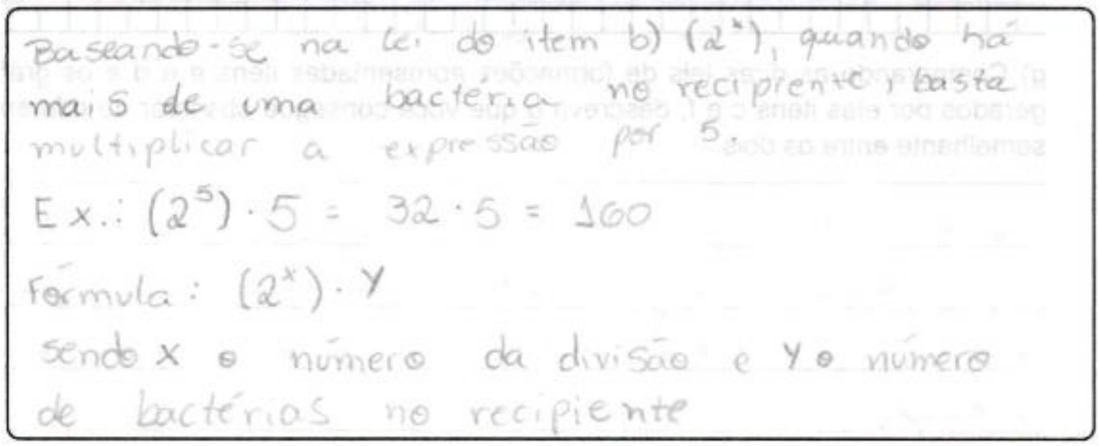
Três desses alunos apresentaram resposta incorreta também para o item a, logo observamos que esses alunos apresentaram dificuldade em compreender a relação entre a quantidade de bactérias em função do número de divisões, portanto esses alunos não mobilizaram a característica **CER**.

Ao analisarmos o item d, podemos observar resultado similar ao observado no item a, no qual a primeira característica do PA a ser mobilizar é a capacidade de estabelecer relações (**CER**), sendo assim, podemos observar que esse resultado, também, vai ao encontro ao que fora proposto por Almeida (2016), no qual acredita que "a primeira característica do pensamento algébrico desenvolvida e revelada por um sujeito e capacidade de estabelecer relações, seguida pelas demais" (ALMEIDA, 2016, p. 79).

Observamos que os alunos que não conseguiram desenvolver a resolução do item d, também tiveram dificuldade na conversão do registro em língua materna para o registro tabular, no qual os alunos que não mobilizaram a conversão entre dois ou mais registros de representação tiveram dificuldades em realizar a tarefa proposta, nesse caso Duval (2011) aponta que a "mobilização de um segundo registro é necessária para poder discernir e reconhecer as unidades de sentido que são pertinentes no conteúdo das representações produzidas no primeiro registro" (DUVAL, 2011, p. 100).

O **item e** teve como tarefa correlata o item b, no qual solicita no seu enunciado que o aluno determine uma lei de formação para situação proposta. Somente dois alunos apresentaram resposta correta para essa tarefa, sendo que um desses alunos apresentou uma generalização que contemplava o número de divisões e quantidade de bactérias iniciais no recipiente (Figura 60), logo podemos observar que esses alunos mobilizaram as característica CM, CG e COD, pois conseguiram, a partir de estratégias (**CM**), estabelecer uma expressão algébrica (**CG**) que representasse a situação descrita, dando significado para o elemento desconhecido (**COD**).

Figura 60: Resolução do item e do aluno B03



Baseando-se na lei do item b) (2^x), quando há mais de uma bactéria no recipiente, basta multiplicar a expressão por 5.

Ex.: $(2^5) \cdot 5 = 32 \cdot 5 = 160$

Formula: $(2^x) \cdot Y$

sendo x o número da divisão e Y o número de bactérias no recipiente

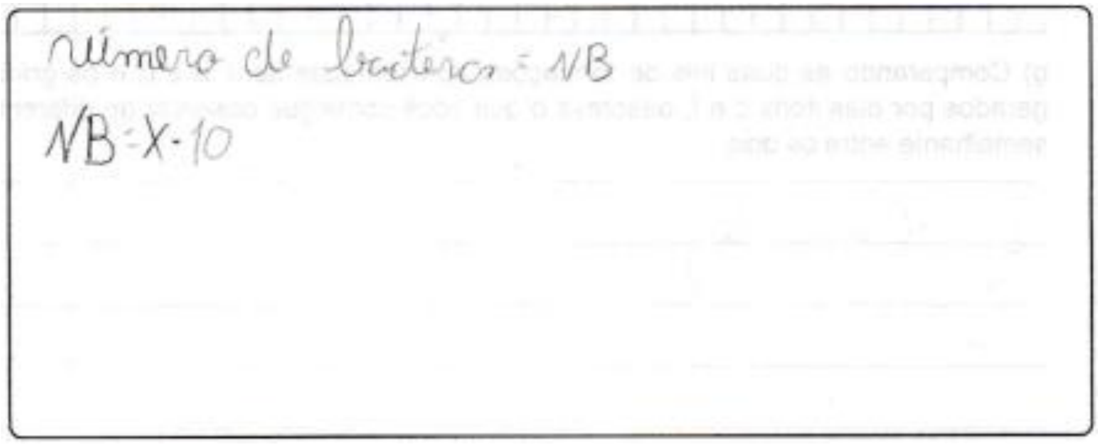
Fonte: Arquivo pessoal.

Observamos, na construção realizada pelo aluno B03, a utilização do resultado obtido no **item b**, ou seja, o aluno conseguiu estabelecer uma relação significativa entre os dois itens correlatos, além de ser possível observar uma excelente conversão entre os registros tabular, língua materna e registro algébrico, ou seja, como aponta Duval (2012), a utilização de vários registros pode constituir “uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam também ser reconhecidas em cada uma de suas representações” (DUVAL, 2012, p.270).

Dos 23 alunos que erraram o **item e**, 19 alunos buscaram responder ao item e quatro alunos deixaram a tarefa em branco, dessas 19 respostas erradas para essa tarefa, podemos dividi-las em três grupos, sendo eles, os alunos que generalizaram a lei de formação como f(x) = 10x ou expressão equivalente; os alunos que generalizaram a lei de formação como f(x) = 2x ou expressão equivalente; e por fim, os alunos que apresentaram diferentes leis de formação, que não eram representações algébricas dos tipos f(x) = 10x e f(x) = 2x, além de serem todas diferentes entre si.

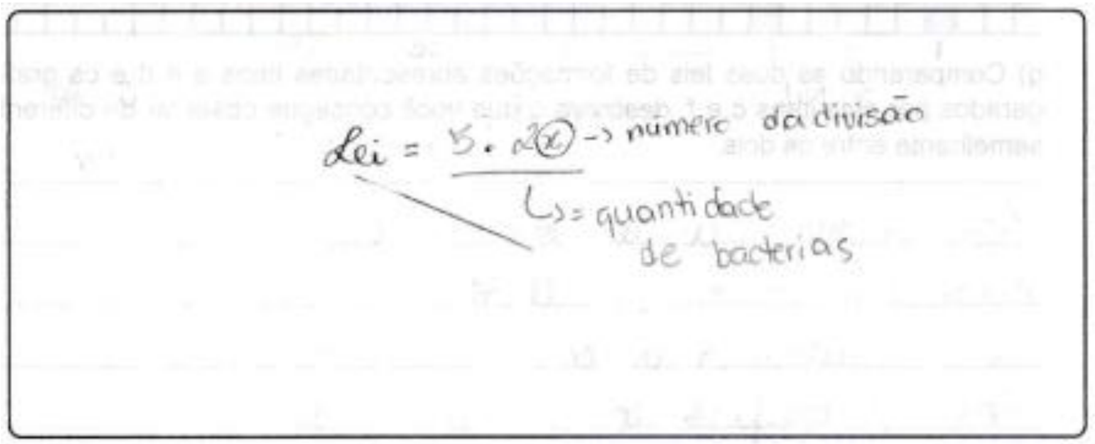
Quatro alunos estão presentes no grupo dos alunos que generalizaram a lei de formação como f(x) = 10x ou expressão equivalente, sendo que dois alunos representaram a lei de formação como sendo f(x) = 10x ou equivalente (Figura 61) e dois alunos representaram a lei de formação como sendo f(x) = 5.2x (Figura 62).

Figura 61: Resolução para o item e do aluno B06



Fonte: Arquivo pessoal.

Figura 62: Resolução para o item e do aluno B13



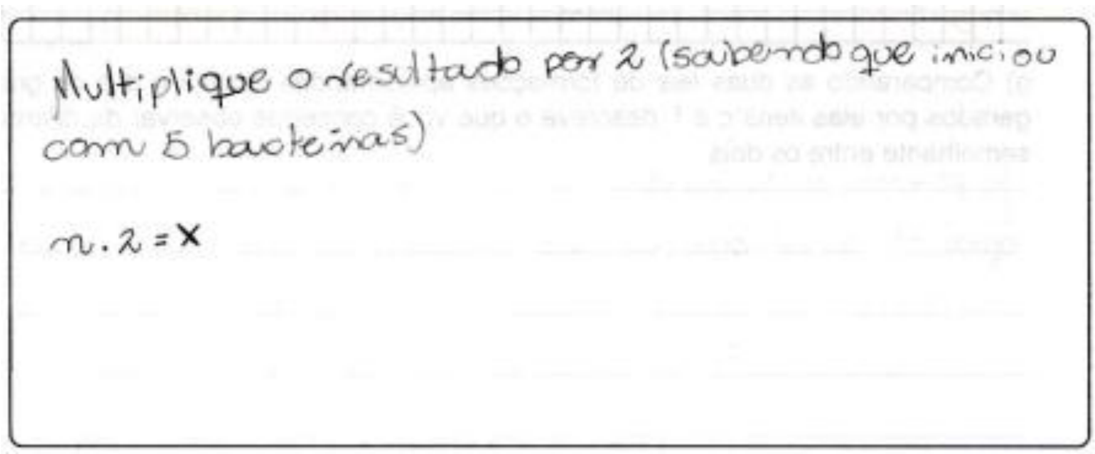
Fonte: Arquivo pessoal.

Destacamos que os dois alunos que utilizaram da função f(x) = 10x ou equivalente acertaram **o item d**, sendo assim podemos observar que nesse caso os alunos mobilizaram a característica **CM**, pois apresentam uma estratégia que é válida para a situação, entretanto a sua generalização (**CG**) não estabelece uma lei de formação que relacione a quantidade de bactérias em função ao número de divisões.

Os dois alunos que utilizaram a função f(x) = 5. 2x erraram o **item d**, portanto podemos observar que apesar de errarem a tarefa, esses dois alunos apresentaram uma relação que condiz com os dados apresentados por eles, além de aparentar realizarem uma conexão com a solução que eles apresentaram para o **item b**, ou seja, os alunos conseguiram realizar a conversão do registro tabular para o registro algébrico, apesar de obterem valores que não eram correspondentes para a situação proposta.

O grupo formado por alunos que apresentaram a lei de formação f(x) = 2x contém nove alunos, todos esses alunos completaram corretamente a tabela do item d e apresentam uma estratégia correta para obter a quantidade de bactérias em função do número de divisões, porém não conseguiram estabelecer uma lei de formação para essa situação, obtendo uma lei de formação que sempre vai depender do valor anterior obtido (Figura 63 e Figura 64), ou seja, os alunos mobilizaram a características **CM** e parcialmente a característica **CG**, pois apresentaram uma estratégia (**CM**) que é válida para situação e uma lei de formação no registro algébrico, entretanto a generalização (**CG**) não estabelece uma lei de formação que relacione a quantidade de bactérias em função ao número de divisões.

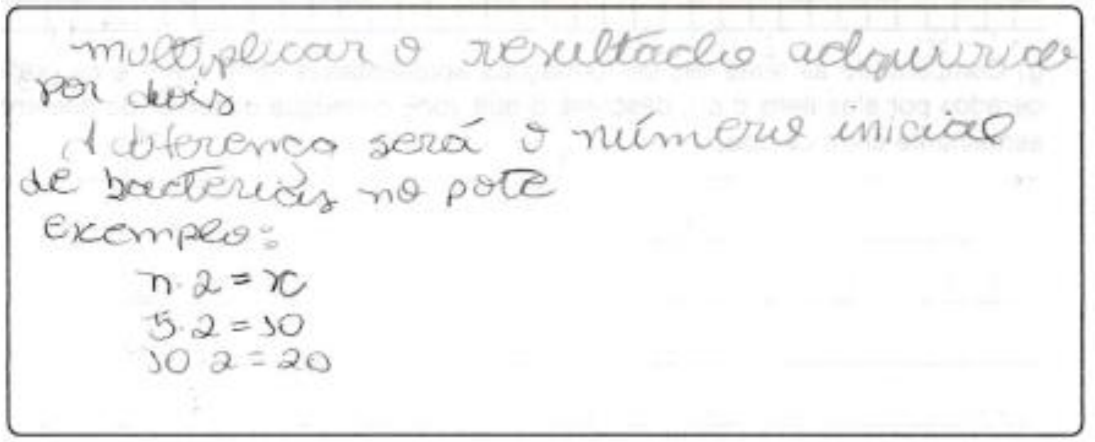
Figura 63: Resolução do item e do aluno B12


Multiplique o resultado por 2 (sabendo que iniciou com 5 bacterias)

n . 2 = x

Fonte: Arquivo pessoal.

Figura 64: Resolução do item e do aluno B16


multiplicar o resultado adquirido por dois
A diferença será o número inicial de bacterias no pote
Exemplo:
n · 2 = x
5 · 2 = 10
10 2 = 20

Fonte: Arquivo pessoal.

Por fim, o grupo dos alunos que apresentaram diferentes leis de formações contém seis alunos, sendo que cada aluno apresentou uma lei de formação que se diferencia dos demais colegas. Quatro alunos desse grupo acertaram o item d, porém apresentam lei de formação que não condizem com a tabela completada no item anterior, sendo que:

- O aluno B14 apresentou a expressão "número de bactérias = 2^n", ou seja, o aluno apresentou uma associação com potenciação, todavia não conseguiu estabelecer uma lei de formação válida para a situação;
- O aluno B19 apresentou uma estratégia descrita por "A + A = B; B + B = C; C + C = D, com A ≠ 0", observamos que o aluno não descreveu com detalhes sua resolução, todavia podemos concluir que o aluno buscou associar o resultado anterior para determinar o próximo resultado;
- O aluno B21 apresentou a expressão "n = 5x", podemos observar que o aluno realizou uma associação com múltiplos do número 5, porém não obteve uma função válida para a situação proposta;
- O aluno B25 apresentou a expressão "NB = n . 2^n", apesar de ser uma expressão próxima a esperada, o aluno não descreveu o significado dos valores desconhecidos, portanto não poderíamos concluir que a resposta estava correta.

Os outros dois alunos desse grupo erraram o item d, sendo que o aluno B05 apresentou as estratégias usadas por ele (utilizando do registro numérico) para obter os valores presentes na tabela; e o aluno B11 apresentou a expressão "n^2", observamos que os valores obtidos pelo aluno não condizem com o resultado apresentado no item d.

A partir dessa análise, podemos concluir que os alunos não mobilizaram as características **CM**, **CG** e **COD**, pois não demonstraram de forma significativa a mobilização dessas características.

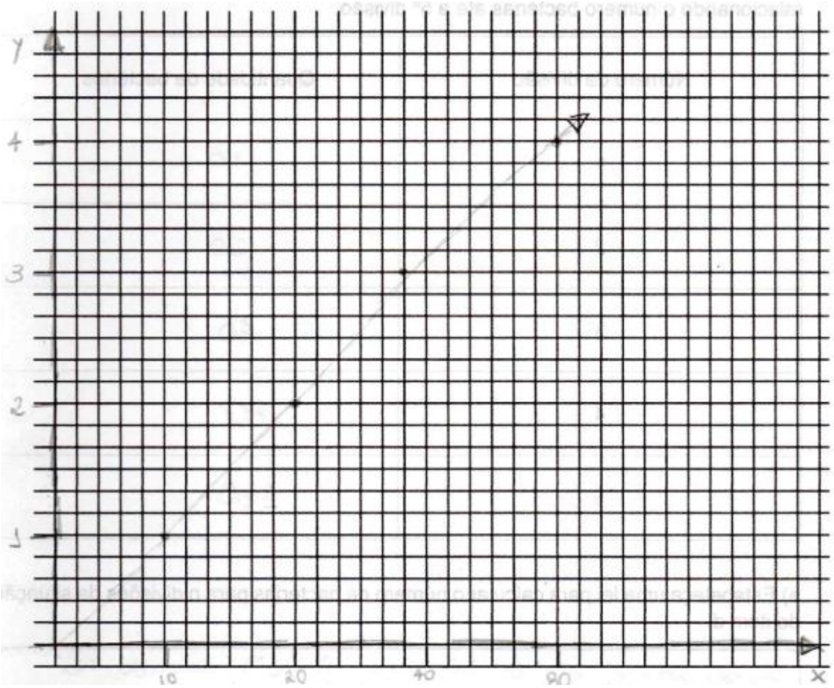
A partir da análise das respostas apresentadas pelos alunos podemos observar que parte dos alunos não conseguiram mobilizar as características **CM** e **CG**, sendo essas duas capacidades diretamente relacionada uma com a outra, pois como observado por Almeida (2016), “concomitante a esse processo de modelar, surge outra característica do pensar algebricamente, a capacidade de generalizar” (ALMEIDA, 2016, p. 82).

Nesse caso podemos observar que os alunos tiveram dificuldade de conseguir converter os registros numéricos ou em língua materna que desenvolveram ao modelar a situação propostas, para o registro algébrico com o objetivo de generalizar os dados por eles levantados, sendo assim como aponta por Duval (2012) “uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam também ser reconhecidas em cada uma de suas representações” (DUVAL, 2012, p.270).

O **item f** tem como tarefa correlata o item c, na qual os alunos deveriam construir o gráfico da situação propostas nos **itens d** e **e**. Ao analisarmos as respostas apresentadas pelos alunos e excluindo os alunos que não responderam essa tarefa, podemos dividi-los em três grupos, sendo eles: os alunos que construíram uma reta para representação gráfica; os alunos que construíram gráfico de barras para representação gráfica; e por fim, os alunos que realizaram outras construções para realizar as representações.

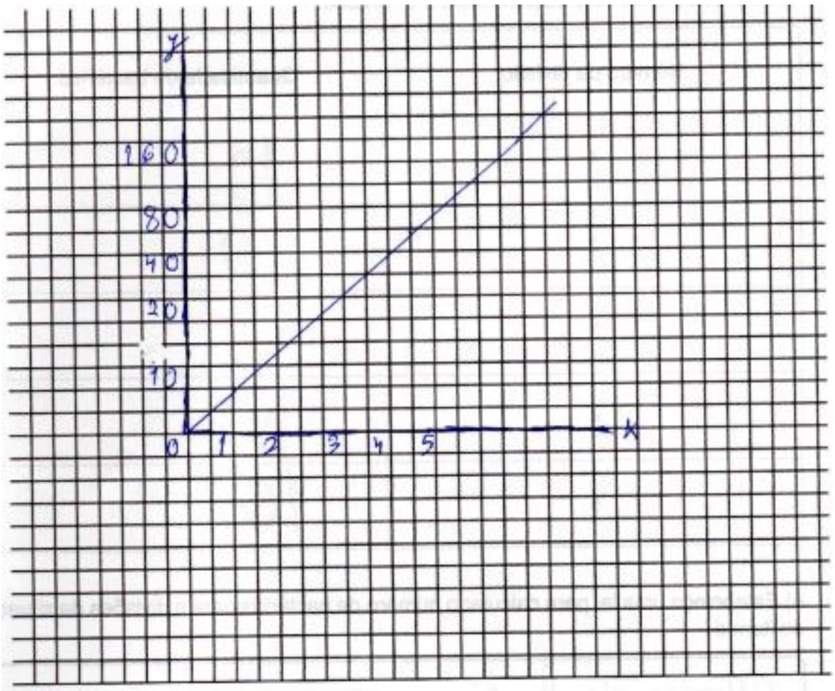
Os alunos do grupo que construíram uma reta para representação gráfica, apresentaram resultados similares ao que foram apresentados no **item c**, pois os sete alunos que realizaram esse tipo de representação no **item c** refizeram no **item f**, sendo que os alunos apresentaram uma representação gráfica não relacionada à situação descrita, pois ao converterem os dados obtidos na tabela (registro tabular) para o gráfico (registro gráfico) apresentaram valores nos eixos não proporcionais, sendo que, quatro alunos representaram a quantidade de bactérias na vertical (eixo das ordenadas) e o número de divisões na horizontal (eixo das abscissas) (Figura 65) e os outros três alunos representaram a quantidade de bactérias na horizontal (eixo das abscissas) e o número de divisões na vertical (eixo das ordenadas) (Figura 66).

Figura 65: Construção gráfico realizada pelo auno B03



Fonte: Arquivo pessoal.

Figura 66: Construção gráfica realizada pelo aluno B06

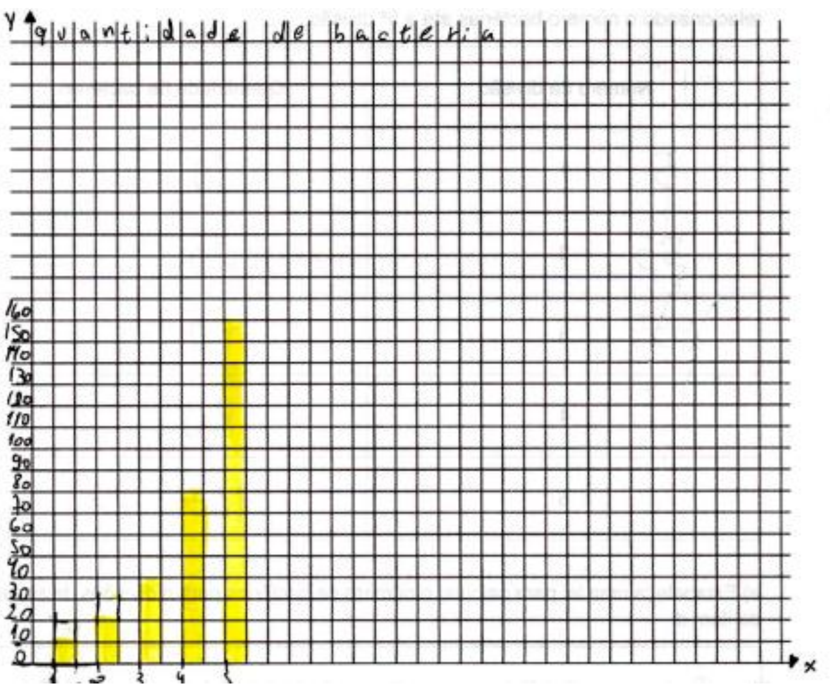


Fonte: Arquivo pessoal.

O grupo dos alunos que construíram um gráfico de barras para representar a situação proposta foi formado por 11 alunos que realizaram o mesmo tipo de representação no **item c**, ou seja, novamente vemos repetidos os resultados vistos no item c, sendo que, os dois alunos que não realizaram a representação por gráfico de barras, um não respondeu a esse item e outro realizou a construção de um gráfico de linhas. Quando realizada a correção deste item, após a aplicação da sequência de atividades e como os alunos já haviam sido questionados na correção do item c, optamos por somente confirmar se o raciocínio usado pelos alunos fora o mesmo usado para construção do item c, que foi respondido positivamente pelos alunos.

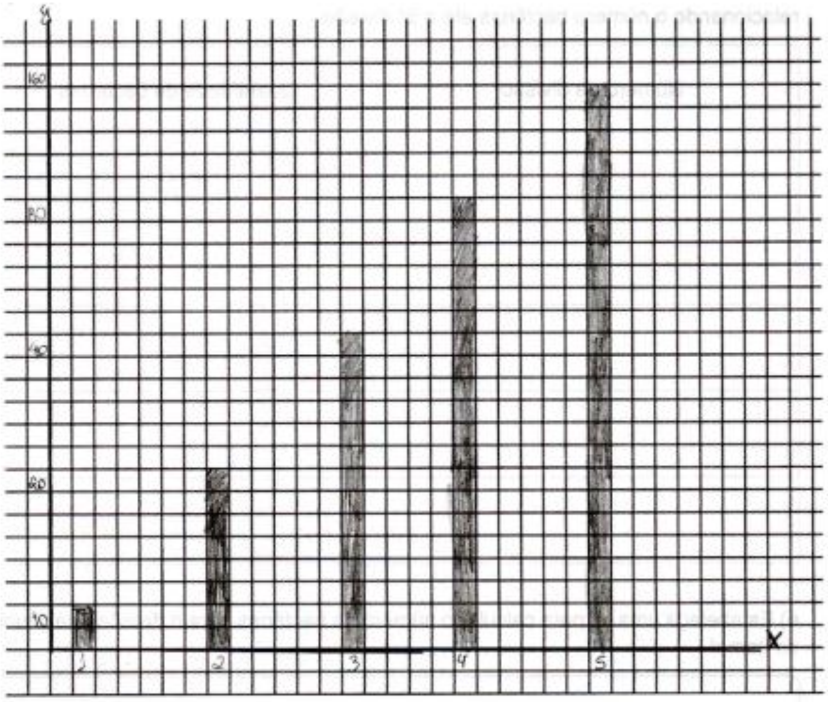
Nas construções desse grupo observamos três tipos de ocorrências, a primeira ocorrência é composta por três alunos que construíram o gráfico de barras com os valores nos eixos verticais e horizontais proporcionais (Figura 67Figura 54Figura 1), sendo que um dos eixos contava com valores de potências de base 2; a segunda ocorrência é composta por seis alunos que construíram o gráfico de barras com os valores nos eixos verticais e horizontais não proporcionais (Figura 68Figura 55), sendo que um dos eixos contava com valores de potências de base 2; e por fim, a terceira ocorrência é composta por quatro alunos que construíram o gráfico de barras com os valores nos eixos verticais e horizontais proporcionais (Figura 69), sendo que um dos eixos contava com valores de múltiplos de 2.

Figura 67: Construção gráfica realizada pelo aluno B25



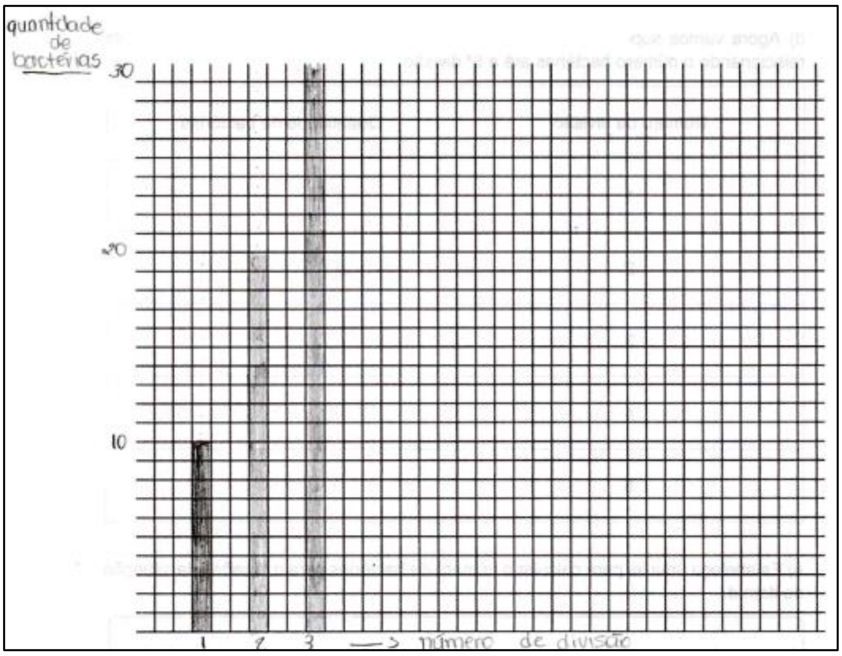
Fonte: Arquivo pessoal.

Figura 68: Construção gráfica realizada pelo aluno B15



Fonte: Arquivo pessoal.

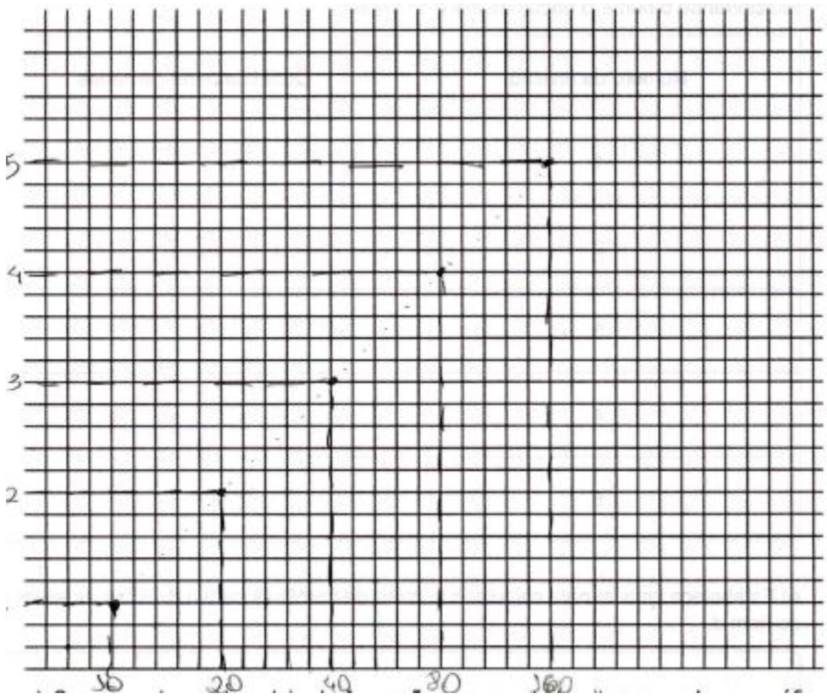
Figura 69: Construção gráfica realizada pelo aluno B13



Fonte: Arquivo pessoal.

E por fim, o último grupo formado pelos alunos que realizaram outras formas de representação é formado por quatro aluno. Observamos que dois alunos representaram a situação por meio do gráfico de pontos (Figura 70), entretanto os valores nos eixos das abscissas e ordenadas não são proporcionais, observamos também que esses dois alunos divergem na montagem dos eixos, invertendo as informações da quantidade de bactérias e divisões, pois um coloca a quantidade de bactérias na vertical e outra na horizontal, sendo que o mesmo ocorre para o número de divisões.

Figura 70: Construção gráfica realizada pelo aluno B16

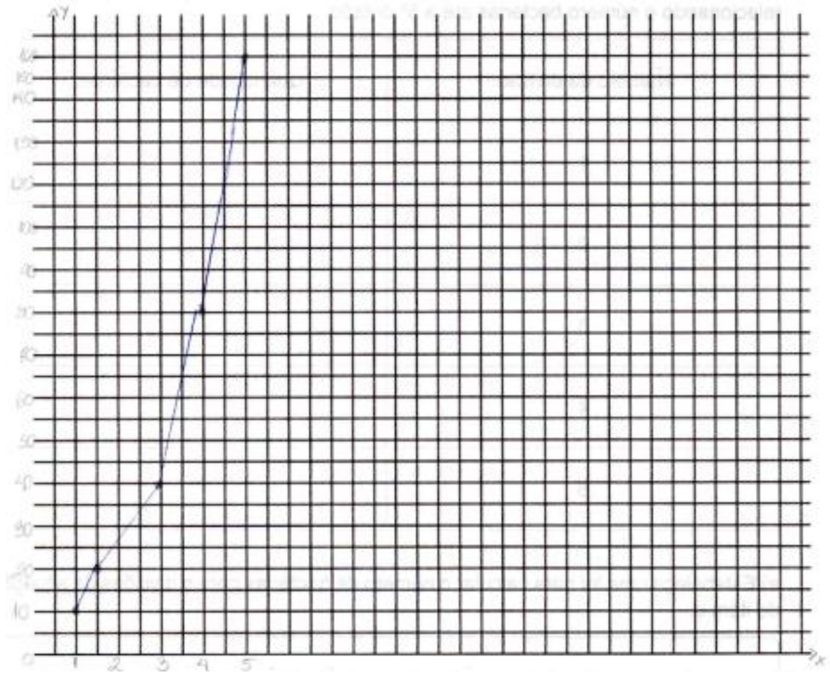


Fonte: Arquivo pessoal.

Apesar dos dois alunos terem errado a construção do gráfico em relação a disposição dos eixos, podemos observamos que os alunos compreendem o domínio dessa situação, pois apresentaram o mesmo tipo de representação também para o **item c**.

Os outros dois alunos apresentaram uma construção gráfica ligando os pontos do gráfico como segmentos de reta (Figura 71), sendo assim, é possível observar que os dois alunos têm compreensão significativa da conversão entre os registros tabular para o gráfico, pois nenhum dos dois havia acertado o item e, ou seja, não haviam obtido o registro algébrico correspondente para a tarefa proposta.

Figura 71: Construção gráfica realizada pelo aluno B16

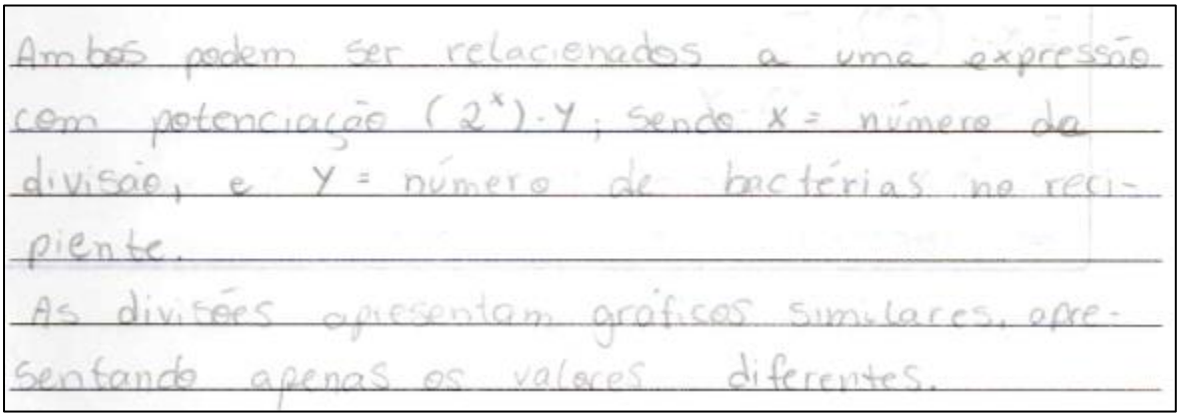


Fonte: Arquivo pessoal.

A partir do item f, como no item c, podemos observar que a capacidade de construir significado (**CCS**) encontra-se em estágio inicial, pois os alunos ainda não conseguem realizar a conversão entre os diferentes registros que representam a função exponencial de foram significativas, ou seja, como já apresentado, segundo Duval (2009), só existe compreensão conceitual Matemática quando o aluno mobiliza a conversão e coordenação de dois ou mais registros do objeto matemático de estudo.

Por fim, no item g, os alunos deveriam comparar os resultados encontrados buscando apresentar elementos, semelhanças e diferenças entre os resultados obtidos, observamos nas respostas dos alunos que a maioria deles não compreendeu as semelhanças entre os gráficos, pois os alunos apresentaram construções nas quais não é possível observar as reais semelhanças entre os registros gráficos presentes nos itens c e f. Dos dois alunos que acertaram a representação algébrica para os itens b e e, somente o aluno B03 apresentou uma justificativa para o item g (Figura 72), em contrapartida o aluno B08 deixou essa tarefa em branco.

Figura 72: Justificativa do item g do aluno B03


Ambos podem ser relacionados a uma expressão com potenciação $(2^x) \cdot y$, sendo x = número da divisão, e y = número de bactérias no recipiente.
As divisões apresentam gráficos similares, apresentando apenas os valores diferentes.

Fonte: Arquivo pessoal.

Observadas as respostas apresentadas pelos 25 alunos participantes para esses três itens (d, e e f), podemos concluir que somente um aluno apresentou a característica **CCS** de forma parcial, pois o aluno não conseguiu reconhecer que o registro gráfico da função como uma progressão de pontos exponencial, ou seja, não identificou o domínio da função, portanto há elementos da linguagem algébrica que não foram compreendidos pelo aluno. A partir da análise realizada construímos o quadro abaixo:

Quadro 7: Características do PA mobilizadas nos itens d, e e f

Características do PA	Alunos com a manisfestação da característica do PA
Sem caracteristicas do PA	B11; B13; B14; B24; B25
Estabelecer relações (CER)	B01; B02; B03; B04; B05; B06; B07; B08; B09; B10; B12; B15; B16; B17; B18; B19; B20; B21; B22; B23
Modelar (CM)	B02; B03; B04; B05; B06; B07; B08; B10; B12; B15; B16; B18; B20; B21; B22; B23
Generalizar (CG)	B03; B08; B15
Operar com o desconhecido como se fosse conhecido (COD)	B03; B15
Construir significado para a linguagem e os objetos algébricos (parcial) (CCS)	B03; B15

Fonte: Elaboração própria.

Analisando o Quadro 7 observamos que quatro alunos não apresentaram nenhuma das características do Pensamento algébrico, 21 alunos mobilizaram a característica **CER**, 17 alunos mobilizaram a característica **CM**, dois alunos mobilizaram a característica **CG**, um aluno mobilizou a característica **COD**, e por fim, um aluno mobilizou parcialmente a característica **CCS**.

Comparando os resultados obtidos nos Quadro 6 e Quadro 7, e atendo-nos ao nosso objetivo de verificar a presença das características do Pensamento algébrico nas resoluções elaboradas pelos alunos, foi considerado que se o aluno mobilizou uma característica em pelo menos uma das tarefas propostas na Sequência de atividades, logo ele tem essa capacidade, mesmo que não consiga realizá-la em toda situação proposta. Sendo assim, construímos um quadro que resume a mobilização das características do Pensamento algébrico na Proposta 1 (Quadro 8).

Quadro 8: Características do PA mobilizadas na Proposta 1

Características do PA	Alunos com a manisfestação da característica do PA
Sem caracteristicas do PA	B11; B13
Estabelecer relações (CER)	B01; B02; B03; B04; B05; B06; B07; B08; B09; B10; B12; B14; B15; B16; B17; B18; B19; B20; B21; B22; B23; B24; B25
Modelar (CM)	B01; B02; B03; B04; B05; B06; B07; B08; B10; B12; B14; B15; B16; B18; B19; B20; B21; B22; B23; B25
Generalizar (CG)	B03; B08; B15
Operar com o desconhecido como se fosse conhecido (COD)	B03; B15
Construir significado para a linguagem e os objetos algébricos (parcial) (CCS)	B03; B15

Fonte: Elaboração própria.

A partir da observação e análise das características do Pensamento algébrico realizadas e resumidas no Quadro 8, buscamos estabelecer o nível do desenvolvimento do Pensamento algébrico dos alunos participantes desta pesquisa ao realizarem a Proposta 1, a partir da classificação em níveis propostas por Almeida (2016). Sendo essas características descritas abaixo:

- **Nível 0 (N0)** - ausência do pensamento algébrico, ou seja, apresenta nenhuma ou mobiliza uma característica do PA;
- **Nível 1 (N1)** - pensamento algébrico incipiente, ou seja, são mobilizadas de duas a três características do PA;
- **Nível 2 (N2)** - pensamento algébrico intermediário, ou seja, são mobilizadas quatro características do PA;
- **Nível 3 (N3)** - pensamento algébrico consolidado, ou seja, mobiliza as cinco características do PA.

A partir das descrições dos níveis de desenvolvimento do Pensamento algébrico, construímos o Quadro 9, que apresenta os alunos em seus respectivos níveis do Pensamento algébrico.

Quadro 9: Níveis do desenvolvimento do PA apresentados pelos alunos

Nível de desenvolvimento do PA	Alunos do Nível
Nível 0	B09; B11; B13; B17; B24
Nível 1	B01; B02; B04; B05; B06; B07; B08; B10; B12; B14; B16; B18; B19; B20; B21; B22; B23; B25
Nível 2	Nenhum aluno
Nível 3	B03; B15

Fonte: Elaboração própria.

Analisando os resultados presentes no Quadro 9, observamos que cinco alunos apresentaram ausência do PA e somente dois desses cinco alunos não apresentaram a característica CER; 18 alunos apresentam pensamento algébrico incipiente, ou seja, mobilizaram de duas a três característica do PA; e por fim, dois alunos apresentaram pensamento algébrico consolidado. Destacamos que nenhum aluno apresentou pensamento algébrico intermediário, ou seja, os alunos dessa turma estão divididos nos níveis **N0**, **N1** e **N3**.

Observamos que 23 alunos apresentaram resultados nos níveis **N0** e **N1** e que somente dois alunos estão no nível **N3**. Os alunos estarem nos níveis **N0** e **N1** era uma situação já esperada por nós e descrita na análise a *priori*, pois os alunos optaram em cursar a Trilha de Humanas devido à dificuldade que apresentavam em Matemática.

Dos alunos presentes no **N0** (ausência de pensamento algébrico), dois não apresentaram nenhuma característica do pensamento algébrico e três apresentaram a característica **CER**, que segundo Almeida (2016) é algo esperado, pois essa característica é a primeira a ser mobilizada no desenvolvimento do Pensamento algébrico. Destacamos que ter a presença de uma das características do pensamento algébrico, segundo Almeida e Câmara (2017), não significa que houve evidência do processo do Pensamento algébrico, por isso os três alunos, apesar de apresentarem a característica **CER**, estão no **N0**.

Dos alunos presentes no N1 (pensamento algébrico incipiente), 17 alunos mobilizaram duas características, sendo elas, **CER** e **CM**, nesse caso foram alunos que conseguiram estabelecer uma relação entre a quantidade de bactérias e o número de divisões, além de apresentarem estratégias válidas para se obter os resultados apresentados, porém não conseguiram apresentar um modelo algébrico válido para a situação propostas. Um aluno apresentou três característica do pensamento algébrico (**CER**, **CM** e **CG**), porém não foi possível determinar se o aluno mobilizava significativamente as características **COD** e **CCS**.

Os alunos B03 e B15 são os alunos que apresentaram pensamento algébrico consolidado (**N3**). Observamos que no 1º semestre de 2022, o aluno B03 apresentou média semestral igual a 10,0 na disciplina de Matemática, todavia o aluno B15 apresenta rendimento médio igual a 7,0. Desta forma, a atividade foi importante para observamos não somente as dificuldades, mas o desenvolvimento global dos alunos na disciplina de Matemática, independente das notas alcançadas por eles.

Observamos também a dificuldade dos alunos em realizarem as conversões dos registros tabular e em língua materna para os registros algébrico e gráfico, principalmente na conversão do registro tabular para o algébrico, pois somente três alunos apresentaram a característica **CG**, ou seja, conseguiram apresentar um registro algébrico que estabelecesse a quantidade de bactérias em função do número de divisões. Os alunos demonstraram dificuldade na construção do registro gráfico, principalmente relacionada à construção do plano cartesiano e na disposição dos dados de forma proporcional para os dados obtidos por eles.

A seguir será apresentada a análise a *posteriori* da Proposta 2 (Torre de Hanói), na qual observamos que ao realizarem uma atividade em grupo, os alunos apresentam uma melhora no desenvolvimento do PA, principalmente com relação à mobilização das características do PA.

4.1.2. Proposta 2 – Torre de Hanói

As tarefas propostas nessa sequência foram aplicadas em duas horas-aula e os alunos foram divididos em nove duplas e três trios, sendo que cada dupla ou trio pode realizar perguntas sobre as dúvidas da atividade e estas dúvidas foram compartilhadas com toda turma. Primeiramente foram entregues as peças do jogo Torre de Hanói, para em seguida serem aplicadas cada uma das cinco tarefas, sendo que uma tarefa só era entregue depois de todos os alunos finalizarem a tarefa imediatamente anterior, ou seja, a **Atividade 2**, só foi entregue aos alunos, após todos os alunos finalizarem a **Atividade 1**, e assim por diante.

As anotações realizadas na aplicação da Proposta 1, pelo professor, funcionaram como guia para a aplicação da Proposta 2, para a qual o professor solicitou aos alunos que somente identificassem a atividade com o nome, pois com essa informação o professor atribuiu códigos para as duplas e trios seguindo a numeração da Proposta 1, por exemplo, se uma dupla na qual ambos os alunos realizaram na Proposta 1 as sequências 03 e 20, como dupla, receberiam o código DB0320. O registro realizado dessa forma foi importante para comparação dos resultados entre as duas propostas.

A turma participante desta pesquisa contava com 33 alunos, porém no dia da aplicação da atividade estavam presentes 27 alunos, sendo que 22 desses alunos também realizaram a Proposta 1. Os cinco alunos que não realizaram a Proposta 1 receberam as numerações B26 a B30. Para realização das atividades, os alunos tiveram entre 15 e 20 minutos para realizar cada uma das tarefas propostas.

A aplicação da **Atividade 1** durou aproximadamente 20 minutos. A atividade tinha como objetivo que os alunos tirassem dúvidas sobre a movimentação das peças ou outras dúvidas do enunciado proposto, para o qual os alunos deveriam determinar a quantidade de movimentos que eles conseguiam realizar para torres contendo de 1 a 5 discos.

Ao propor a **Atividade 1** não esperávamos que os alunos já obtivessem os valores mínimos esperados para as movimentações dos discos, já que essa tarefa, como também propuseram Silva e Coqueiro (2016), tinha como objetivo a familiarização dos alunos com a dinâmica do jogo.

No decorrer dessa atividade, as dúvidas mais comuns dos alunos foram em relação a como efetuar a movimentação das peças e se havia uma quantidade menor de movimentações do que aquelas realizadas por eles. Quando esse questionamento era realizado pelos alunos, sugeríamos aos alunos que tentassem resolver para todos os discos, para assim responder se os alunos haviam conseguido ou não a quantidade mínima.

Ao analisarmos as respostas apresentadas pelos alunos, observamos que somente um dos grupos apresentou o valor mínimo correto de movimentos para a quantidade de discos de 1 a 5, podemos ver no Quadro 10 um resumo do desempenho dos alunos nessa atividade.

Quadro 10: Desempenho dos alunos na Atividade 1

Quantidade de discos	Obtiveram a quantidade mínima
1	DB2613; DB0115; DB0307; DB0410; DB0527; DB2812; DB0917; DB2123; TB021629; TB081130
2	DB2613; DB0115; DB0307; DB0410; DB0527; DB2812; DB0917; DB2123; DB1825; TB021629; TB061922; TB081130
3	DB2613; DB0307; DB0410; DB0527; DB2812; DB0917; DB2123; DB1825; TB021629; TB061922
4	DB2613; DB0410; DB0527; DB0917; DB2123; TB061922
5	DB2613

Fonte: Elaboração própria.

Observamos que dois grupos erraram a quantidade mínima de movimentos para quando havia um disco para se movimentar, sendo que um dos grupos anotou 0 (zero) movimentação e o outro anotou duas movimentações, ou seja, os alunos, mesmo após tirarem as dúvidas, não conseguiram compreender que para um disco havia a necessidade de somente uma movimentação.

Na **Atividade 2** os alunos deveriam determinar a quantidade mínima de movimentos para as torres com 1 a 5 discos, neste caso observamos uma melhora no número de alunos que conseguiam determinar a quantidade mínima de movimentações, pois cinco grupos conseguiram determinar essa quantia mínima e todos os grupos apresentaram uma melhora na quantidade mínima que obtiveram em relação a **Atividade 1.** A seguir, apresentamos um resumo do desempenho dos alunos no Quadro 11.

Quadro 11: Desempenho dos alunos na Atividade 1

Quantidade de discos	Obtiveram a quantidade mínima
1	DB2613; DB0115; DB0307; DB0410; DB0527; DB2812; DB0917; DB2123; TB021922; TB061922; TB081130
2	DB2613; DB0115; DB0307; DB0410; DB0527; DB2812; DB0917; DB2123; DB1825; TB021629; TB061922; TB081130
3	DB2613; DB0115; DB0307; DB0410; DB0527; DB2812; DB0917; DB2123; DB1825; TB021629; TB061922; TB081130
4	DB2613; DB0307; DB0410; DB0527; DB0917; DB2123; TB061922; TB081130
5	DB2613; DB0527; DB0917; DB2123; TB081130

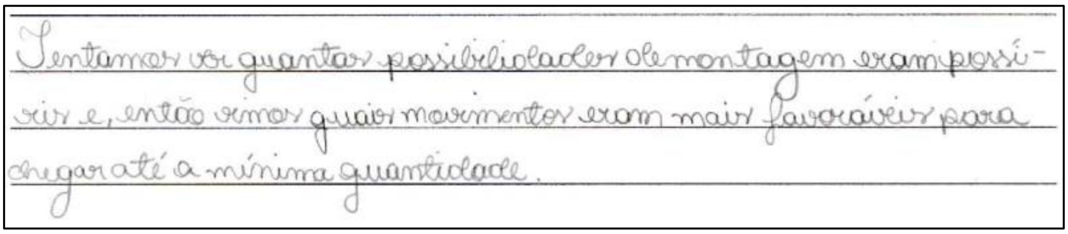
Fonte: Elaboração própria.

Observamos que com exceção do grupo DB1825 que insistiu na resposta apresentada na **Atividade 1,** cuja resolução foi: para um disco não havia movimentos; todos os demais grupos acertaram a quantidade mínima de movimentações de 1 a 3 discos. Destacamos também que dois grupos chegaram muito próximos da quantidade mínima de movimentações para cinco discos, pois apresentaram 32 movimentos ao invés de 31 movimentos mínimos como esperado.

Ao propormos a **Atividade 3** esperávamos que os alunos apresentassem as estratégias utilizadas por eles para obter a quantidade mínima de movimentos, sendo que os alunos puderam utilizar os dados já colhidos nas **Atividades 1 e 2**, entretanto solicitamos aos alunos que não alterassem os registros já realizados nessas atividades.

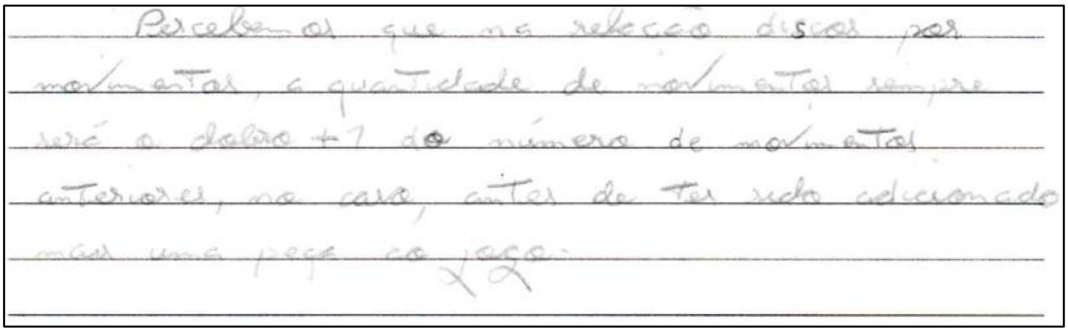
Nesse momento, observamos que nem todos os grupos haviam utilizado uma estratégia para os movimentos, e muitos obtiveram a quantidade mínima de forma empírica (9 grupos), ou seja, o grupo realizou inúmeras tentativas até conseguir obter a quantidade mínima (Figura 73), mas sem observar uma regra existente. Entretanto, houve três grupos que já apresentavam uma relação entre a quantidade de movimentos e o número de discos (Figura 74).

Figura 73: Estratégias descrita pelo grupo TB081130


Tentamos ver quantas possibilidades de montagem eram possí-
veis e, então vimos quais movimentos eram mais favoráveis para
chegar até a mínima quantidade.

Fonte: Arquivo pessoal.

Figura 74: Estratégias descrita pelo grupo DB0527


Percebemos que na relação discos por
movimentos, a quantidade de movimentos sempre
será o dobro +1 do número de movimentos
anteriores, no caso, antes de ter sido adicionado
mais uma peça ao jogo.

Fonte: Arquivo pessoal.

Para melhor compreensão do registro dos alunos do grupo DB0527 segue a transcrição da resposta: “Percebemos que na relação discos por movimentos a quantidade de movimentos sempre será o dobro + 1 do número de movimentos anteriores, no caso, antes de ter sido adicionada mais uma peça ao jogo”. Observamos este tipo de construção em três grupos analisados, ou seja, esses grupos já na **Atividade 3**, apresentaram as características **CER** e **CM**, pois estabeleceram uma relação entre a quantidade de movimentos e o número de discos, além de demonstrarem uma estratégia válida para resolver a tarefa.

Outro aspecto que observamos foi uma dificuldade dos alunos em transcrever as estratégias usadas por eles para o registro em língua materna, ou seja, inicialmente alguns grupos de alunos não buscaram estabelecer uma relação entre a quantidade de movimentos e o número de discos presentes nas tabelas construídas por eles, ou seja, não buscaram realizar uma interpretação dos dados obtidos, portanto, não buscaram realizar a conversão do registro tabular para o registro em língua materna.

Para responder a **Atividade 4,** foram apresentadas aos alunos as quantidades mínimas de movimentos de 1 a 5 discos, pois essa tarefa solicitava que os alunos determinassem a quantidade mínima de movimentos para torres de 6 a 8 discos e descrevessem o procedimento realizado por eles. Os alunos do grupo TB081130 tiveram que ir embora antes do fim da aula, portanto esse foi o único grupo que não realizou a **Atividade 4**, todos os demais grupos realizaram essa atividade.

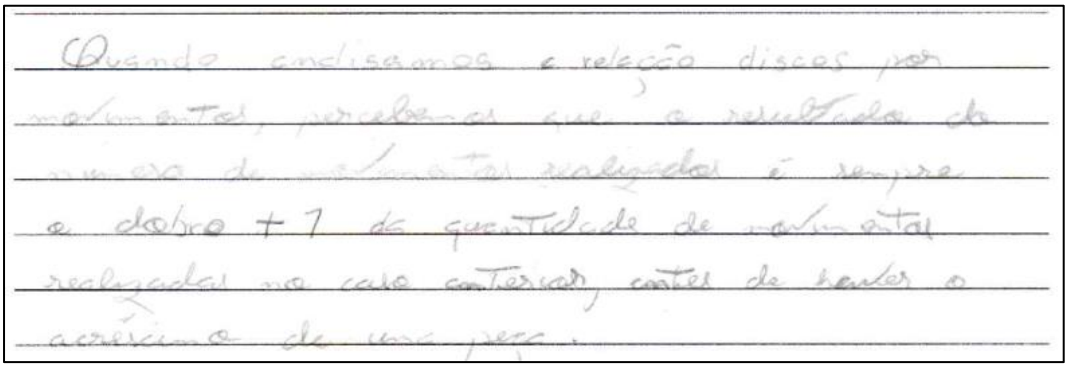
Todos os alunos que realizaram essa atividade acertaram a quantidade mínima de movimentos para torres de 6 a 8 discos, sendo que observamos três tipos de registros de representações nos desenvolvimentos realizados pelos alunos para essa atividade, sendo elas, o registro em língua materna, o registro numérico e o registro algébrico.

Dos 11 grupos que responderam essa atividade, 10 deles apresentaram procedimentos válidos para se obter a quantidade mínima de movimentos, sendo assim, esses grupos demonstraram a característica **CER** e **CM**, pois ao apresentarem a relação entre os dados apresentados conseguiram criar estratégias que permitiram determinar as demais quantidades de movimentos ao se acrescentar discos na torre. O único grupo que divergiu dos demais, os alunos afirmaram que “Foram movendo de fileira em fileira”, ou seja, segundo esses alunos todas as movimentações foram realizadas, o que pelo tempo disponível era impossível devido a quantidade de movimentações.

Os 10 grupos que apresentaram estratégias válidas foram divididos, em dois grupos, segundo o número de representações que realizaram ao descrever os procedimentos realizados.

O primeiro grupo é formado pelos alunos que utilizaram somente um registro para descrever os procedimentos realizados por eles, sendo que, 3 dos 10 grupos que participaram da pesquisa apresentam somente o registro em língua materna para descrever os procedimentos realizados, como pode ser visto na construção dos alunos do grupo DB0527 (Figura 75).

Figura 75: Procedimentos relatados pelos alunos do grupo DB0527


Quando analisamos a relação discos por movimentos, percebemos que o resultado do número de movimentos realizados é sempre o dobro + 1 da quantidade de movimentos realizadas no caso anterior, antes de haver o acréscimo de uma peça.

Fonte: Arquivo pessoal.

A seguir transcrevemos os procedimentos descritos pelos alunos DB0527 para melhor compreensão: “Quando analisamos a relação discos por movimentos, percebemos que os resultados do número de movimentos realizados é sempre o dobro + 1 da quantidade de movimentos realizadas no caso anterior, antes de haver o acréscimo de uma peça”. Observamos que a partir desses procedimentos os alunos conseguem converter o registro em língua materna para o registro tabular de forma significativa, pois os valores apresentados para a quantidade de movimentações estão corretos para torres com 6 a 8 discos (Figura 76).

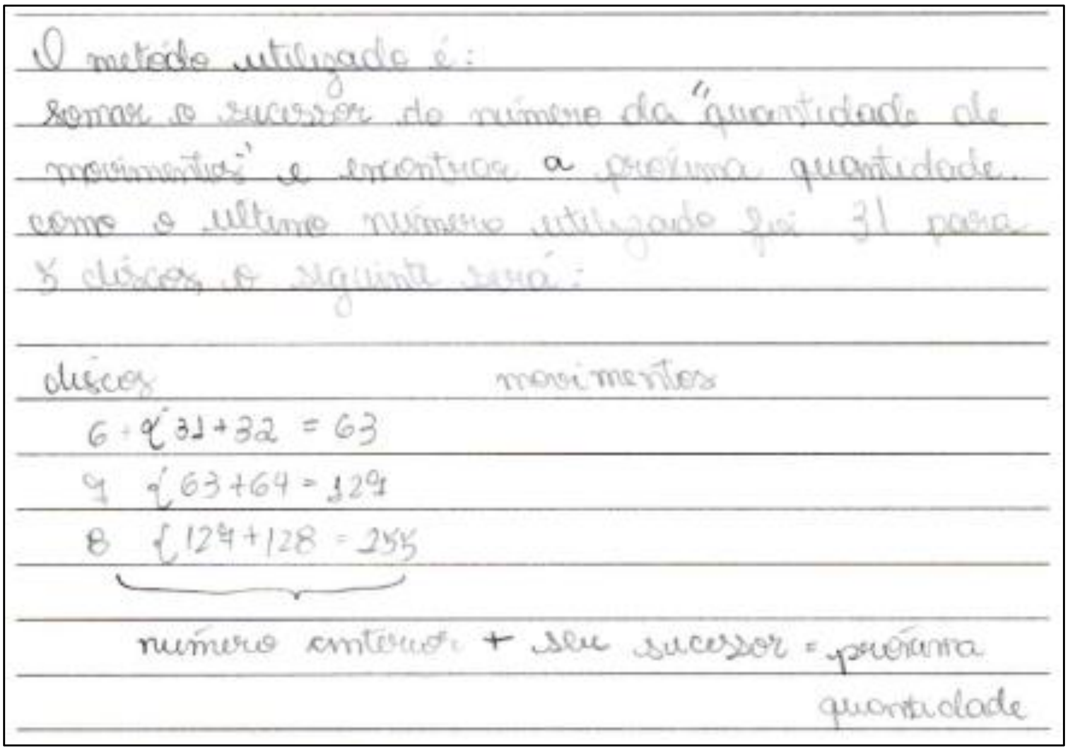
Figura 76: Resolução da tabela apresentada pelo grupo DB1825

Número de discos	Quantidade de movimentos
6	63
7	127
8	255

Fonte: Arquivo pessoal.

O segundo grupo é formado por alunos que apresentaram dois registros para descrever os procedimentos realizados por eles para determinar a quantidade de movimentações mínimas, sendo que 7 dos 10 grupos que realizaram essa atividade apresentaram dois registros, sendo que quatro alunos apresentaram os registros em língua materna e registro numérico (Figura 77) e três grupos apresentaram os registros em língua materna e algébrico (Figura 78).

Figura 77: Procedimentos relatados pelos alunos do grupo DB2613

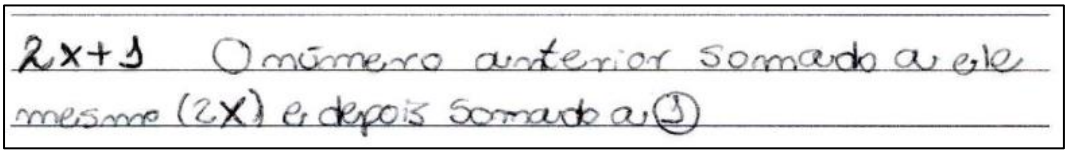

O método utilizado é:
somar o sucessor do número da "quantidade de movimentos" e encontrar a próxima quantidade.
como o último número utilizado foi 31 para 5 discos, o seguinte será:

discos movimentos
6 { 31 + 32 = 63
7 { 63 + 64 = 127
8 { 127 + 128 = 255

número anterior + seu sucessor = próxima quantidade

Fonte: Arquivo pessoal.

Figura 78: Procedimentos relatados pelos alunos do grupo DB2812


2x+1 O número anterior somado a ele mesmo (2X) e depois somado a 1

Fonte: Arquivo pessoal.

Para facilitar as discussões sobre os procedimentos apresentados pelo grupo DB2613, optamos por transcrevê-los no quadro abaixo:

Quadro 12: Transcrição da atividade do grupo DB2613

O método utilizado é: somar o sucessor do número da "quantidade de movimentos" e encontrar a próxima quantidade como o último número utilizado foi 31 para 5 discos o seguinte será: Discos Movimentos 6 31+32 = 63 7 63+64 = 127 8 127+128 = 255 Número anterior + seu sucessor = próxima quantidade

Fonte: Transcrição nossa.

Observamos que os alunos do grupo DB2613 utilizam o registro em língua materna convertendo para o registro numérico, após os tratamentos dentro desse registro, ou seja, realizam as adições para determinar a quantidade de movimentações solicitadas para cada quantidade de discos, os alunos realizam nova conversão para o registro em língua materna em busca de "generalizar" as estratégias utilizadas.

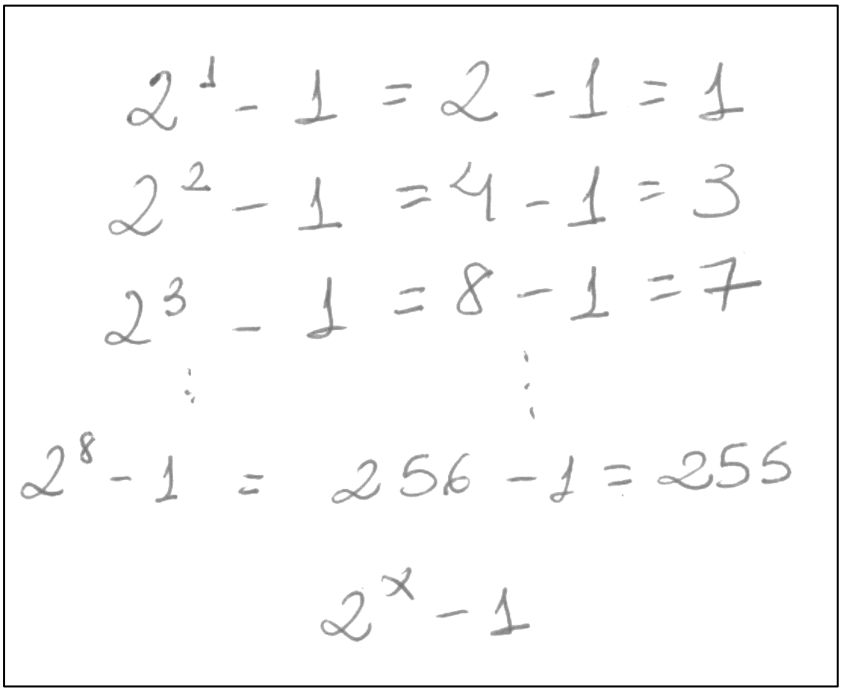
O grupo DB2812 (Figura 78) apresenta um processo de conversão do registro algébrico para o registro em língua materna, sendo que utiliza 2x para representar um número somado a ele mesmo, observamos indiretamente que os alunos compreendem a soma de polinômios semelhantes, ou seja, podemos destacar a mobilização da característica **COD** do Pensamento algébrico.

Nosso objetivo com a **Atividade 5** era levar os alunos a determinarem um modelo matemático que expressasse a quantidade mínima de movimentos em função do número de discos, com a condição de não recorrer à quantidade anterior de movimentos.

Os grupos que responderam a **Atividade 5** apresentaram três tipos de expressões para representar a quantidade de movimentos em função do número de discos. Somente um grupo não apresentou uma expressão para representar a situação proposta, ou seja, 10 dos 11 grupos presentes no momento da aplicação dessa tarefa apresentaram uma resposta para a **Atividade 5**.

A primeira expressão apresentada pelos grupos foi a função f(x) = $2^x - 1$ ou expressão equivalente (Figura 79), sendo que essa expressão foi estabelecida por 2 dos 10 grupos que responderam essa questão. Destacamos que um dos grupos questionou se a expressão tinha potência, sendo que, o questionamento foi respondido afirmativamente pelo professor para que todos os alunos compreendessem, nesse momento alguns alunos conseguiram associar a potência de base 2, fato que levou alguns alunos a realizarem o teste numérico das potências.

Figura 79: Resolução apresentada pelo grupo DB0307

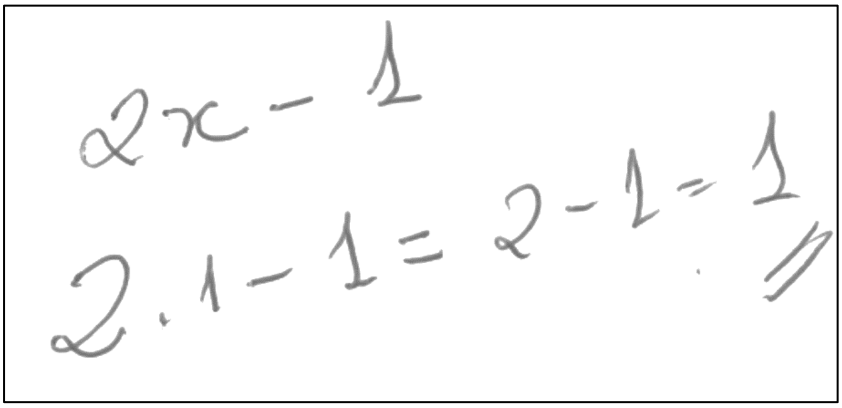


Fonte: Arquivo pessoal.

Observamos que os alunos do grupo DB0307 realizaram o tratamento do registro numérico com o objetivo de validar a generalização, e por fim, realizaram a conversão para o registro algébrico, logo os alunos que apresentaram essa expressão mobilizaram as característica **CG** e **CCS**, pois generalizaram a situação para uma expressão algébrica e conseguem dar significado para a linguagem e os objetos algébricos relacionados. Observamos este tipo de construção, com algumas variações, no outro grupo, que chegou também a uma expressão equivalente a f(x) = 2^x - 1.

Outra lei de formação que observamos entre as obtidas pelos alunos foi a expressão 2x + 1 (Figura 80), que foi apresenta por 5 dos 10 grupos da pesquisa, ou seja, mesmo afirmando que a expressão não poderia levar em consideração a quantidade de movimentos anterior, sendo que 5 dos 6 grupos mantiveram a expressão apresentada na **Atividade 4**. A construção realizada pelo grupo DB0115 (Figura 80) e os demais quatro grupos que obtiveram essa expressão apresentaram pouca ou nenhuma variação em suas construções, diferenciando-se principalmente na quantidade de representações numéricas para validação da expressão e na utilização de letras diferentes para as variáveis.

Figura 80: Resolução apresentada pelo grupo DB0115 para Atividade 5

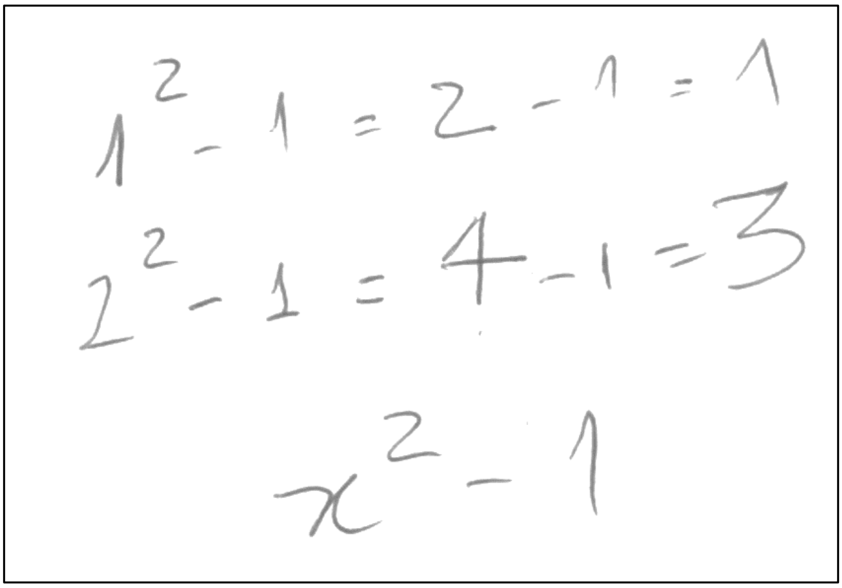


Fonte: Arquivo pessoal.

Como alguns grupos não conseguiam construir outra expressão diferente da apresenta na Figura 80, destacamos que muitos alunos argumentavam que não havia outro “jeito de fazer”, foi solicitado a esses grupos que descrevessem o significado de cada uma das variáveis que eles utilizaram, sendo que a maioria descreveu o valor de x ou outra variável como sendo a quantidade de movimentações anterior. Em seguida realizaram uma verificação numérica dessas expressões, neste caso apesar dos alunos não conseguirem generalizar uma expressão que relacionasse quantidade de movimentos em função do número de discos, observamos que conseguiram realizar uma expressão válida, levando em consideração as designações dos termos da expressão utilizada por eles, ou seja, os alunos apresentaram parcialmente a característica **CG** do Pensamento algébrico.

Por fim, a última lei de formação apresentada pelos alunos foi a função $f(x) = x^2 - 1$ ou expressão equivalente, que foi apresentada por 3 dos 10 grupos participantes (Figura 81), em ambos os casos observamos que os alunos aplicaram a forma algébrica de uma função quadrada, ou seja, apresentaram uma representação algébrica do tipo f(x) = ax² + bx + c, para representar a situação descrita, todavia ao realizarem o teste numérico se equivocaram na resolução da potência, pois ao resolverem 1 elevado ao quadrado obtiveram 2 como resposta ($1^2 = 2$), ou seja, os alunos resolveram $1^2 = 2 . 1 = 2$ ao invés de resolverem $1^2 = 1 . 1 = 1$. Além do erro apresentado, os alunos generalizaram somente para os dois primeiros discos o que não permitiu que verificassem que a expressão encontrada não era válida para os demais números de discos.

Figura 81: Resolução apresentada pelo grupo DB0917 para Atividade 5



Fonte: Arquivo pessoal.

Sendo assim, destacamos que os três grupos de alunos que apresentaram esse tipo de construção não apresentam a característica **CG** do Pensamento algébrico, pois não conseguiram apresentar uma expressão algébrica válida para a situação proposta.

A partir da análise das respostas dos 12 grupos participantes desta sequência de atividades, podemos observar as características do pensamento algébrico, como proposto por Almeida (2016), mobilizadas pelos alunos durante o desenvolvimento das tarefas propostas, sendo assim elaboramos o Quadro 13.

Quadro 13: Característica do PA mobilizadas pelos grupos

Características do PA	Grupos com a manisfestação da característica do PA
Estabelecer relações (CER)	DB2613; DB0115; DB0307; DB0410; DB0527; DB2812; DB0917; DB1825; DB2123; TB021629; TB061922; TB081130
Modelar (CM)	DB2613; DB0115; DB0307; DB0410; DB0527; DB2812; DB0917; DB1825; DB2123; TB021629; TB061922
Generalizar (CG)	DB2613; DB0115; DB0307; DB0527; DB2812; DB2123; TB021629
Operar com o desconhecido como se fosse conhecido (COD)	DB2613; DB0115; DB0307; DB0527; DB2812; DB2123; TB021629
Construir significado para a linguagem e os objetos algébricos (CCS)	DB0307; TB021629

Fonte: Elaboração própria.

Analisando o Quadro 13 observamos que 12 grupos (27 alunos) mobilizaram a característica **CER**, 11 grupos (24 grupos) mobilizaram a característica **CM**, 7 grupos (15 alunos) mobilizaram a característica **CG**, 4 grupos (9 alunos) mobilizaram a característica **COD**, e por fim, dois grupos (5 alunos) mobilizaram característica **CCS**.

A partir da observação e análise das características do Pensamento algébrico realizadas e resumidas no Quadro 13, estabelecemos o nível do desenvolvimento do Pensamento algébrico dos grupos participantes desta pesquisa ao realizarem a Proposta 2, a partir da classificação em níveis propostas por Almeida (2016). Sendo essas características descritas abaixo:

- **Nível 0 (N0)** - ausência do pensamento algébrico, ou seja, apresenta nenhuma ou mobiliza uma característica do PA;

- **Nível 1 (N1) -** pensamento algébrico incipiente, ou seja, mobiliza de duas a três características do PA;
- **Nível 2 (N2) -** pensamento algébrico intermediário, ou seja, são mobilizadas quatro características do PA;
- **Nível 3 (N3) -** pensamento algébrico consolidado, ou seja, mobiliza as cinco características do PA.

A partir das descrições dos níveis de desenvolvimento do Pensamento algébrico, construímos o Quadro 14, que apresenta os grupos em seus respectivos níveis do Pensamento algébrico.

Quadro 14: Níveis do desenvolvimento do PA apresentados pelos grupos

Nível de desenvolvimento do PA	Grupos do Nível
Nível 0	TB081130
Nível 1	DB0410; DB0917; DB1825; TB061922
Nível 2	DB2613; DB0115; DB0527; DB2812; DB2123
Nível 3	DB0307; TB021629

Fonte: Elaboração própria.

Analisando os resultados presentes no Quadro 14, observamos que somente um grupo, contendo três alunos, apresentou ausência do PA, pois apresentaram somente a característica CER; quatro grupos contendo 9 alunos apresentam pensamento algébrico incipiente, ou seja, mobilizaram de duas a três característica do PA; cinco grupos contendo 10 alunos apresentam pensamento algébrico intermediário, ou seja, mobilizaram quatro característica do PA; e por fim, dois grupos, contendo cinco alunos, apresentaram pensamento algébrico consolidado.

Observamos uma distribuição dos 12 grupos entre os níveis do pensamento algébrico. Esperávamos que os alunos estariam todos nos níveis **N0** e **N1**, devido à dificuldade que alegavam apresentar em Matemática, sendo que a escolha da Trilha de Humanas ocorreu exatamente por essa dificuldade na disciplina.

O grupo presente no **N0** (ausência de pensamento algébrico) somente apresentou a característica **CER**, sendo que a presença dessa característica já era esperada, pois, segundo Almeida (2016), essa característica é a primeira a ser mobilizada no desenvolvimento do Pensamento algébrico. Destacamos que ter a presença de uma das características do pensamento algébrico, segundo Almeida e Câmara (2017), não significa que houve evidência do processo do pensamento algébrico, por isso o grupo, apesar de apresentar a característica **CER**, está no **N0**.

Os quatro grupos presentes no **N1** (pensamento algébrico incipiente) mobilizaram duas características, sendo elas, **CER** e **CM**, nesse caso foram grupos que conseguiram estabelecer uma relação entre a quantidade de movimento e o número de discos, além de apresentarem estratégias válidas para se obter os resultados apresentados, porém não conseguiram apresentar um modelo algébrico válido para a situação proposta.

Os cinco grupos presentes no **N2** (pensamento intermediário) mobilizaram quatro característica, sendo elas, **CER**, **CM**, **CG** e **COD**, nesse caso foram grupos que conseguiram, além dos processos realizados pelos grupos do **N1**, apresentar estratégias válidas e determinar uma expressão algébrica aplicável, mesmo não sendo a expressão esperada para a tarefa.

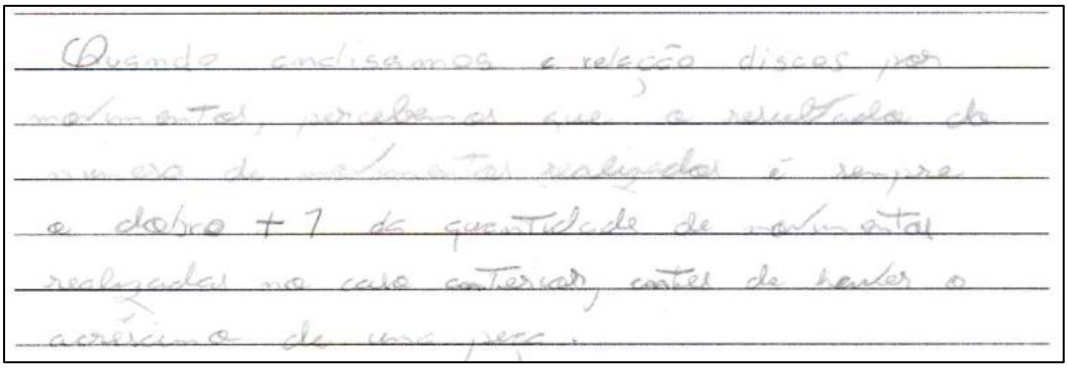
Por fim, os dois grupos presentes no **N3** (pensamento algébrico consolidado) mobilizaram as cinco características do pensamento algébrico. Ao analisar o rendimento dos alunos desses grupos, observamos que no 1º semestre de 2022, o aluno B03 apresentou média semestral igual a 10,0, o aluno B07 obteve média 8,5, o aluno B02 obteve média 8,5, o aluno B16 obteve média 9,5, e por fim, o aluno B15 apresentou rendimento médio igual a 7,5. Desta forma, a atividade foi importante para observamos não somente as dificuldades, mas o desenvolvimento global dos alunos na disciplina de Matemática, independente das notas alcançadas por eles.

Ao analisarmos as respostas dos alunos observamos que ao trabalharem em grupo os alunos apresentaram avanços na forma de registrar as resoluções das tarefas propostas, sendo que visualizamos uma melhor mobilização de registros de representação pelos alunos, na qual foi possível observar conversões entre registros que não ocorreram na atividade individual. 7 dos 11 grupos que responderam as tarefas propostas, mobilizaram pelo menos dois registros de representação para resolvê-las.

Destacamos que os alunos recorreram ao registro em língua materna para descrever as situações e ao registro numérico como forma de verificar os resultados obtidos, ou seja, os alunos utilizaram do tratamento desses registros como forma de validar seus resultados.

Os alunos praticamente não realizaram o tratamento do registro algébrico, sendo que só foi possível observar a característica COD do pensamento algébrico no registro em língua materna como apresentado pelo grupo DB0527 (Figura 82) e transcrito a seguir: “Quando analisamos a relação discos por movimentos, percebemos que os resultados do número de movimentos realizados é sempre o dobro + 1 da quantidade de movimentos realizadas no caso anterior, antes de haver o acréscimo de uma peça”.

Figura 82: Resposta apresentado pelo grupo DB0527 para Atividade 4



Quando analisamos a relação discos por movimentos, percebemos que o resultado do numero de movimentos realizados é sempre o dobro + 1 da quantidade de movimentos realizadas no caso anterior, antes de haver o acréscimo de uma peça.

Fonte: Arquivo pessoal.

A seguir foi realizada a discussão dos resultados das Propostas 1 e 2, no qual comparamos os resultados apresentados na aplicação das duas propostas, observando os alunos que realizaram ambas as sequências de atividades.

4.3. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Nesta seção iremos realizar a discussão dos resultados obtidos com as análises a *posteriori* comparadas com as análises a *priori*, sendo que, observamos se os resultados obtidos na análise a *posteriori* validam os apontamentos apresentados na análise a *priori*.

Devido ao 2º semestre apresentar menos dias letivos, optamos por aplicar as duas atividades nas quatro primeiras aulas desse semestre e realizar a correção das mesmas após as duas aplicações, lincando as duas propostas, de tal forma que essas atividades fossem as motivações para os estudos que iriam ser desenvolvidos a seguir, além de observar o desempenho dos alunos na primeira avaliação do 2º semestre que apresentou esse conteúdo como foco avaliativo.

Todavia tivemos que realizar uma modificação no desenvolvimento da pesquisa, pois o colégio que professor pesquisador desta pesquisa trabalha realizou dinâmicas com as turmas para recepção do 2º semestre, e só foi possível a aplicação das sequências de atividades na segunda semana de agosto. entretanto houve a necessidade do professor (autor) de se afastar das atividades do colégio a partir da terceira semana de agosto, por 15 dias, devido a ter contraído conjuntivite e por suspeita de Covid, ao retornar devido ao cronograma de aulas tivemos que focar no conteúdo do currículo regular, sendo que conseguimos realizar a correção das sequências de atividades somente após a aplicação das provas, ou seja, após a segunda semana de setembro.

No total, 25 alunos realizaram essa primeira atividade. A aplicação da Proposta 1 foi realizada com 25 alunos no dia 08 de agosto de 2022, ou seja, mais de 75% dos alunos da turma estavam presentes no dia da aplicação desta atividade.

Na Proposta 1 (Divisão celular) esperávamos que os alunos mobilizassem a característica **CER** do pensamento algébrico para realização dos **itens a** e **d**, além mobilizar a conversão do registro em língua materna para o registro tabular, utilizando ou não da conversão do registro numérico ou algébrico para determinar os demais valores da tabela e como dificuldades esperávamos que os alunos apresentassem uma não compreensão de que na primeira bactéria não houve divisão ou que os alunos associassem a divisão das bactérias a outra modelo que não o esperado para essa atividade, ou seja, diferente de uma função exponencial de base 2.

Ao analisar as respostas observamos que todos os alunos completaram a tabela de maneira direta, ou seja, a partir da informação do enunciado os alunos começaram a completar a tabela, portanto os alunos realizaram a conversão do registro em língua materna e figural (enunciado e figura com as divisões) para o registro tabular e numérico (ao completar a tabela com a quantidade de bactérias).

Pudemos observar que 16 alunos no **item a** e 21 alunos no **item d** mobilizaram a característica CER, ou seja, conseguiram estabelecer corretamente a relação entre a quantidade de bactérias e o número de divisões, sendo que esperávamos que os alunos mobilizassem essa característica nesses itens.

Os 9 alunos que não conseguiram estabelecer corretamente a relação para o **item a**, sendo que os quatro alunos identificaram a quantidade de bactérias da primeira divisão de forma incorreta e cinco alunos associaram a divisão com os múltiplos de 2. Os quatro alunos que não conseguiram estabelecer corretamente a relação para o **item d**, sendo que dois alunos associaram a divisão com os múltiplos de 10, um aluno com potência de base 10 e um aluno errou a quantidade de bactérias a partir da quinta divisão.

Estabelecemos na análise *a priori* que os alunos poderiam utilizar outro modelo para completar a tabela para os **item a** e **item d**, ou seja, que os alunos poderiam associar a quantidade de bactérias aos múltiplos de 2 e 5, pois diferente dos alunos de Bonotto (2015), os alunos participantes da nossa pesquisa não haviam ainda estudado Funções exponenciais e Progressões geométricas, sendo que, haviam estudado somente Função afim e Função quadrada no 1º semestre, portanto fazendo sentido que esses alunos buscarem estabelecer uma relação com múltiplos, ao invés de estabelecer uma relação com potências de base 2.

Todavia diferente do que havíamos estabelecido na análise *a priori*, os alunos apresentaram associação com múltiplos de 10 e potência de base 10, ao invés de estabelecerem uma relação direta com múltiplos de 5 como havíamos projetado. Destacamos que Bonotto (2015) só havia observado a situação, na qual os alunos não compreenderam que não havia divisão para uma bactéria, sendo as divisões só contadas a partir da divisão da primeira bactéria em duas.

Ao buscar a resolução das atividades propostas, observamos que os alunos realizaram muitas dos processos de conversão entre registros de forma mental, sem apresentar um registro escrito para as situações apresentadas, nesse sentindo Duval (2011) aponta que a atividade matemática “mobiliza sempre dois registros, o registro principal de trabalho, no qual efetuamos, gráfica e/ou oralmente, um encaminhamento matemático, e outro que mobilizamos mentalmente para antecipar, controlar ou compensar os limites de registro do trabalho” (DUVAL, 2011, p. 150). Portanto observamos que muitos dos alunos participantes dessa pesquisa ainda optam por realizar muitos dos processos de conversão e tratamento entre registro de forma mental.

Nos **itens b** e **e** tínhamos como objetivo compreender as estratégias que os alunos utilizaram (**CM**) para obter a lei de formação (**CG**) para calcular a quantidade de bactérias para n divisões, outra característica do Pensamento algébrico que poderíamos observar era a **COD**, pois no tratamento do registro algébrico poderíamos observar os alunos aplicando as propriedades das operações entre polinômios, e por fim, poderíamos observar a característica **CCS** caso os alunos demostrassem na sua resposta compreender o significado da linguagem e do objeto algébrico em estudo.

Esperávamos que os alunos relacionassem que cada divisão das bactérias irá gerar o dobro da quantidade de bactérias anterior, ou seja, esperávamos observar a funções exponenciais $f(n) = 2^n$ (**item b**) e $f(n) = 5.2^n$ (**item b**), sendo que três alunos que conseguiram obter a expressão esperada para o **item b** e dois alunos obtiveram a expressão esperada para o **item e**.

Bonotto (2015) ao aplicar o item b desta tarefa, não observou nenhuma expressão que não fosse exponencial, porém como nossos alunos são da 1ª série do Ensino Médio diferente dos alunos da pesquisa de Bonotto (2015) que eram alunos da 2ª série do Ensino Médio, havíamos projetado que os alunos poderiam apresentar expressões equivalentes a função $f(x) = 2x$ (**item b**) e $f(x) = 5x$ (**item e**), pois no semestre anterior foi abordada a função afim, ou seja, esperávamos que devido ao estudo anterior de função afim e função quadrada que os alunos buscariam associar a lei de formação a uma expressão equivalente a essas funções.

Ao realizarmos a análise das repostas dos alunos para o **item b**, podemos observar que 17 alunos apresentaram a dificuldade que havíamos projetado durante a análise *a priori*, ou seja, os alunos apresentaram expressão equivalente a função $f(x) = 2x$.

Todavia para o **item e** podemos observar que nenhuma das respostas dos alunos foi de encontro com a associação que esperávamos, caso os alunos errassem a tarefa, sendo que 13 alunos representaram a situação proposta utilizando as expressões equivalentes as funções $f(x) = 2x$ e $f(x) = 10x$.

Para ambos os itens (b e e) os alunos consideraram x como sendo o número da divisão, ou seja, não podemos considerar que esses alunos apresentaram a característica **CG**, pois a expressão não é válida quando substituímos a variável usada pelo número de divisões.

A partir da análise das respostas apresentadas pelos alunos podemos observar que parte dos alunos não conseguiram mobilizar as características **CM** e **CG**, sendo essas duas capacidades diretamente relacionada uma com a outra, pois como observado por Almeida (2016), “concomitante a esse processo de modelar, surge outra característica do pensar algebricamente, a capacidade de generalizar” (ALMEIDA, 2016, p. 82).

Nesse caso podemos observar que os alunos tiveram dificuldade de conseguir converter os registros numéricos ou em língua materna que desenvolveram ao modelar a situação propostas, para o registro algébrico com o objetivo de generalizar os dados por eles levantados, sendo assim como aponta por Duval (2012) “uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam também ser reconhecidas em cada uma de suas representações” (DUVAL, 2012, p.270).

Para os **itens c** e **f** esperávamos que os alunos construíssem um gráfico para representa a função de Naturais para Reais, $f(n) = 2^n$, sendo assim, esperávamos que os alunos conseguissem construir significados para o objeto matemático função exponencial (**CCS**) compreendendo a partir da situação proposta as características que podem contribuir para identificar uma função desse tipo.

Em relação as dificuldades que os alunos poderiam ter nos **itens c** e **f**, foram pautadas nos resultados obtidos por Bonotto (2015) em que os alunos apresentaram dificuldades em determinar o domínio da função, pois haviam conectados os pontos ao construir o gráfico. Outras projeções que apresentamos, levando em consideração os estudos das funções que os alunos já haviam realizado, foram em relação aos alunos não conseguirem construir o gráfico obedecendo a escala espera e construir gráfico que representasse outro tipo de função diferente da função exponencial.

Ao analisarmos os **itens c** e **f** observamos que somente um aluno acertou o **item c** e nenhum aluno acertou o **item f**, sendo assim, dos alunos que não acertaram os itens. foi observado que apresentaram o que havíamos projetado, pois os alunos apresentaram construções que não estavam em escala, utilizaram retas para representear os gráficos solicitados, e por fim, não reconheceram o domínio nos números inteiros positivos da função ao conectar os pontos do plano cartesiano.

Um grupo de 12 alunos realizou a representação gráfica da situação proposta utilizando gráfico de barras, sendo 12 alunos para o **item c** e 11 alunos para o **item f**. Ao questionar esses alunos no momento da correção sobre a razão de utilizarem o gráfico de barras, alguns alunos ficaram surpresos com a informação de que esse tipo de representação não poderia ser utilizada para as situações propostas, pois entendiam que ao ser solicitada a construção gráfica, esse tipo de gráfico poderia ser utilizado. Nesse momento foi explicado aos alunos que gráficos de barras são utilizados para descrever situação estatísticas, ou seja, para representar coleta de dados e não sequências como havíamos proposto nessa tarefa.

A partir das análises dos **itens c** e **f**, podemos constatar que nenhum dos alunos conseguiu realizar a conversão do registro algébrico para o registro gráfico, pois todos os alunos construíram gráficos que apresentaram alguma característica dissonante em relação à representação gráfica esperada, seja em relação a não apresentar os valores nos eixos de forma proporcional ou em ligar os pontos ao construir o gráfico. A partir disso é possível inferir que os alunos não coordenam as variáveis visuais da representação gráfica e o domínio da função.

A partir dessas tarefas podemos observar que a capacidade de construir significado (**CCS**) encontra-se em estágio inicial, pois os alunos ainda não conseguem realizar a conversão entre os diferentes registros que representam a função exponencial de foram significativas, ou seja, como já apresentado, segundo Duval (2009), só existe compreensão conceitual Matemática quando o aluno mobiliza a conversão e coordenação de dois ou mais registros do objeto matemático de estudo.

Para o **item g,** esperávamos que os alunos comparassem as respostas apresentadas nos itens anteriores buscando apresentar elementos, semelhanças e diferenças entre os resultados obtidos, sendo que somente o aluno B03 apresentou características semelhantes pertinentes, principalmente ao observar a generalização $f(x) = y. 2^x$ para outros casos, pois nesse caso y representa a quantidade de bactérias iniciais e x representa o número de divisões.

Ao aplicar o **item g,** observamos que os alunos apresentaram como dificuldade não conseguir observar que ambas as expressões representam funções exponenciais, ou seja, na construção da lei de formação ou dos gráficos os alunos chegaram em representações que não permitiam estabelecer corretamente as características comuns e distintas das atividades propostas.

Além das dificuldades que projetamos, observamos que os alunos apresentaram dificuldade em diferenciar gráfico de função de gráfico estatístico. Para o **item g** não havia parâmetro relacionado à pesquisa de Bonotto (2015), pois esse item foi uma adição que realizamos em nossa pesquisa com o objetivo de que os resultados das comparações pudessem auxiliar a nossa avaliação dos alunos em relação à mobilização da capacidade de construir significado para linguagem e objetos algébricos (**CCS**).

Nossa análise a *posteriori* da Proposta 1 apresentou respostas dos alunos que não haviam surgido na pesquisa de Bonotto (2015), por exemplo, a associação a função afim para representar a situação proposta ou a utilização de gráficos estatísticos para representação gráfica da situação proposta. Todavia, observamos que 23 dos 25 alunos conseguiram estabelecer a relação entre a quantidade de bactérias e número de divisões em pelo menos uma das tarefas propostas, ou seja, os alunos podem vir a desenvolver o pensamento algébrico, apesar das dificuldades que muitos relataram ter em Matemática.

A aplicação da Proposta 2 foi realizada com 27 alunos no dia 11 de agosto de 2022, ou seja, mais de 80% dos alunos da turma estavam presentes no dia da aplicação desta atividade, sendo que, esses alunos foram divididos em 9 duplas e três trios para realização a Sequência de Atividades.

Na análise a *priori* da **Atividade 1** esperávamos que os alunos realizassem as movimentações dos discos para se adaptar às regras do jogo (Torre de Hanói), sendo que esperávamos que os alunos mobilizassem as características **CER** e **CM** ao desenvolver estratégias para reduzir a quantidade de movimentos para cada disco, sendo que, orientados pela pesquisa de Silva e Coqueiro (2016), optamos nessa primeira atividade em não informar aos alunos o objetivo do jogo. Todavia incentivamos os alunos a tentarem o melhor resultado obtido por cada integrante do grupo, neste momento observamos que alguns grupos tiveram dificuldade para estabelecer estratégias para reduzir a quantidade de movimentos necessários, realizando movimentos aleatórios, atitude que havíamos projetado na análise *a priori* como possível dificuldade que os alunos poderiam ter.

Ao compararmos os resultados que obtivemos na análise a *posteriori* com a pesquisa de Silva e Coqueiro (2016), todos os alunos acertaram os movimentos até dois discos, sendo assim, nossa pesquisa obteve resultados próximos aos demonstrados por Silva e Coqueiro (2016), pois com exceção dos dois grupos que erraram os movimentos para o primeiro disco, os demais 10 grupos acertaram a quantidade de movimentos até dois discos.

Novamente pudemos observa que para resolver a tarefa proposta, os alunos realizaram muitas dos processos de conversão entre registros de forma mental, sem apresentar um registro escrito para as situações apresentadas, nesse sentindo Duval

(2011) aponta que a atividade matemática “mobiliza sempre dois registros, o registro principal de trabalho, no qual efetuamos, gráfica e/ou oralmente, um encaminhamento matemático, e outro que mobilizamos mentalmente para antecipar, controlar ou compensar os limites de registro do trabalho” (DUVAL, 2011, p. 150). Portanto observamos que em a maioria dos alunos participantes dessa pesquisa ainda optam por realizar muitos dos processos de conversão e tratamento entre registro de forma mental.

Na **Atividade 2** esperávamos que os alunos determinassem o número mínimo de movimentos para torres de 1 a 5 discos e que mobilizassem as características **CM** e **CER**, sendo assim, ao analisarmos essa tarefa observamos uma melhora nos resultados dos alunos em comparação à atividade anterior, com exceção de um dos grupos, todos os demais grupos chegaram à quantidade mínima de movimentos para três discos, sendo que 8 grupos chegaram ao mínimo de movimentos para quatro discos e 5 grupos chegaram ao mínimo de movimentos para cinco discos. Devido ao nosso número de participantes, não verificamos resultado semelhante ao descrito por Silva e Coqueiro (2016), pois somente um dos grupos não conseguiu chegar na quantidade mínima de movimentos.

Ao observamos as respostas dos alunos, obtivemos como resultado que dos cinco grupos que acertaram a quantidade mínima de movimentos, três grupos já apresentavam aspectos das características **CM** e **CER**, pois conseguiram obter um modelo (**CM**) para determinar o mínimo de movimento, estabelecendo a relação entre a quantidade de movimentos e o número de discos em uma torre (**CER**).

Observamos que para os alunos mobilizarem a característica CM tiveram que estabelecer uma relação entre a quantidade de movimentos realizadas e a quantidade de discos na torre. Comprovamos, assim, que a característica **CER** é central no processo de desenvolvimento do pensamento algébrico, sendo que, segundo Almeida (2016), as demais características surgem a partir da capacidade de estabelecer relações.

Destacamos dessas duas primeiras atividades que o fato dos nossos alunos estarem na 1ª série do Ensino Médio, em uma turma de Trilha de Humanas, não afetou o desempenho na realização da tarefa, principalmente ao levarmos em consideração a **Atividade 1**, na qual os resultados ficaram próximos aos resultados obtidos por Silva e Coqueiro (2016), cujos sujeitos de pesquisa já haviam concluído o Ensino Médio e cursavam o 1º semestre do curso superior de Matemática.

Nesse caso observamos que muitos alunos utilizaram inicialmente a intuição para a realização das movimentações nas duas primeiras atividades, todavia já buscavam criar estratégias para reduzir o número de movimentos, ou seja, ao realizarem desenvolver mentalmente as estratégias para redução do número de movimentos, no qual Duval (2011) aponta que um dos registros de representação podem ser mobilizados “mentalmente para antecipar, controlar ou compensar os limites de registro do trabalho” (DUVAL, 2011, p. 150).

Na análise *a priori* da **Atividade 3,** esperávamos que os alunos descrevessem as estratégias utilizadas para determinar a quantidade mínima de movimentos dos discos para concluir o jogo, podendo ou não utilizar da representação algébrica (**CG**) e do tratamento desse registro (**COD**) como uma forma de estratégia, todavia nenhum dos grupos analisados utilizou o registro algébrico para descrever as atividades, ou seja, a característica **CG** não foi mobilizada nessa atividade pelos grupos participantes, pois todos os grupos se utilizaram do registro em língua materna para expressar suas estratégias.

Salientamos que mesmo utilizando do registro em língua materna, observamos no tratamento desse registro que os alunos compreendiam a noção de operar valores desconhecidos, com destaque para a construção da dupla DB0527, que apresentou a seguinte estratégia: “Percebemos que na relação discos por movimentos a quantidade de movimentos sempre será o dobro + 1 do número de movimentos anteriores, no caso, antes de ter sido adicionado mais uma peça ao jogo”, ou seja, concluímos que os alunos compreendem a ideia do dobro de um valor desconhecido adicionado 1 unidade, logo temos mobilizada a característica **COD**.

Observamos que os três grupos que se destacaram na **Atividade 2**, apresentaram consolidadas as características CM e CER na construção dos seus argumentos para obterem a resposta da **Atividade 3**.

Diferente dos resultados obtidos por Silva e Coqueiro (2016), nossos alunos não apresentaram as estratégias utilizadas em relação as movimentações realizadas para obter a quantidade mínima de movimentos, sendo que a maioria dos alunos descreveram que chegaram à quantidade de movimentos após várias tentativas, ou seja, obtiveram a quantidade mínima de forma empírica.

Observamos que outros grupos de alunos buscaram, já nessa atividade, observar um padrão na sequência construída na tabela, porém sem usar ainda o registro algébrico, portanto concluímos que os alunos realizaram a conversão do registro tabular para o registro em língua materna antes de obter um possível registro algébrico para situação proposta.

Na análise *a priori* da **Atividade 4** esperávamos que os alunos validassem ou não as estratégias estabelecidas na **Atividade 3**, sendo que, em caso de não validação, esperávamos que o grupo estabelecesse novas estratégias para determinar a quantidade de movimentos, para isso, como realizaram Silva e Coqueiro (2016), foram apresentadas as quantidades mínimas de movimentos para torres de 1 a 5 discos e os alunos deveriam estabelecer a quantidade mínima de movimentos para torres de 6 a 8 discos.

A partir dessa atividade, um dos trios de aluno se ausentou da aula, reduzindo o número de participantes para 11 grupos e 24 alunos, sendo que todos os 11 grupos participantes completaram corretamente a quantidade de movimentos para torres de 6 a 8 discos. Destacamos que 10 desses grupos apresentaram procedimentos válidos para se obter a quantidade mínima de movimentos, sendo esse, associar que a cada nova peça adicionada o número de movimentações necessárias será igual ao dobro do número de movimentações anterior mais uma movimentação, argumento estre previsto em nossa análise *a priori* e também observado na pesquisa de Silva e Coqueiro (2016).

Diferente do que foi observado por Silva e Coqueiro (2016), nenhum dos grupos observou o comportamento exponencial, novamente destacamos que realizamos o estudo de Função afim no 1º semestre, além do fato de que esse tipo de função também é abordada no 9º ano do Ensino Fundamental. Esse fato pode ter contribuído para que os alunos buscassem associar a atividade proposta a esse tipo de expressão.

Verificamos que os 10 grupos que apresentaram estratégias válidas, mobilizaram as características **CER** e **CM** consolidadas, pois apresentaram uma estratégia válida para determinar a quantidade de movimentos (**CM**) e estabeleceram as relações entre a quantidade de movimentos e o número de discos (**CER**).

Na análise *a priori* da **Atividade 5**, esperávamos que os alunos apresentassem a lei de formação que representasse a quantidade de movimentos em função do número de discos na torre, como sendo a função exponencial $f(n) = 2^n - 1$, no $f(n)$ é o número de movimentações e n o número de peças na torre.

Era esperado que os alunos mobilizassem a característica **CG** no desenvolvimento dessa tarefa, sendo que foi possível observar que dois dos grupos apresentaram essas característica de forma consolidada, pois chegaram na expressão esperada, entretanto 5 grupos apresentaram a expressão $y = 2x + 1$, na qual x era o número de movimentos da quantidade anterior de discos, ou seja, podemos verificar que os alunos apresentam a característica **CG** parcialmente desenvolvida, pois apesar de não conseguirem estabelecer a generalização solicitada, apresentaram uma generalização possível para outro critério.

Essas duas repostas apresentadas pelos alunos foram observadas por Silva e Coqueiro (2016) em sua pesquisa, portanto esse tipo de representação já era esperada por nós.

Ao todo participaram da aplicação das duas sequências de atividades propostas 30 alunos, sendo que 22 desses alunos participaram das duas propostas, todavia dois alunos não completaram a Proposta 2, pois tiveram que sair da aula antes de concluí-la, portanto utilizaremos para comparação os 20 alunos que concluíram as duas propostas. Sendo assim, a partir do cruzamento das análises realizadas podemos construir o Quadro 15, resumindo assim a mobilização das características do Pensamento algébrico desses 20 alunos que concluíram as sequências de atividades realizadas.

Quadro 15: Características do PA mobilizadas pelos alunos que realizaram as duas sequências de atividades

Características do PA	Proposta 1	Proposta 2
Sem caracteristicas do PA	B13	Nenhum aluno
Estabelecer relações (CER)	B01; B02; B03; B04; B05; B06; B07; B09; B10; B12; B15; B16; B17; B18; B19; B21; B22; B23; B25	B01; B02; B03; B04; B05; B06; B07; B09; B10; B12; B13; B15; B16; B17; B18; B19; B21; B22; B23; B25
Modelar (CM)	B01; B02; B03; B04; B05; B06; B07; B10; B12; B15; B16; B18; B19; B21; B22; B23; B25	B01; B02; B03; B04; B05; B06; B07; B09; B10; B12; B13; B15; B16; B17; B18; B19; B21; B22; B23; B25
Generalizar (CG)	B03; B15	B01; B02; B03; B05; B07; B12; B13; B15; B16; B21; B23
Operar com o desconhecido como se fosse conhecido (COD)	B03; B15	B01; B02; B03; B07; B12; B13; B15; B16; B21; B23
Construir significado para a linguagem e os objetos algébricos (CCS)	B03; B15	B02; B03; B07; B16

Fonte: Elaboração própria.

Observamos que quando comparadas a mobilização do Pensamento algébrico, temos um aluno na Proposta 1 que não mobilizou nenhuma das características do PA, todavia na Proposta 2 seu grupo conseguiu mobilizar pelo menos uma característica do PA, destacamos que o aluno B13 realizou a Proposta 2 com o aluno B26, sendo que este não realizou a primeira sequência de atividades, todavia esse aluno tem um bom desempenho em Matemática, o que pode ter contribuído para a melhora do desempenho do aluno B13.

Ao analisar a característica **CER**, podemos observar que todos os alunos que apresentaram essa característica na Proposta 1 estavam em grupos que mobilizaram essa mesma característica para a Proposta 2, portanto podemos confirmar o que Almeida (2016) observou em sua pesquisa, no qual “a primeira característica do pensamento algébrico desenvolvida e revelada por um sujeito é a capacidade de estabelecer relações" (ALMEIDA, 2016, p. 79).

Podemos observar que a característica **CM** foi mobilizada nas duas atividades por 17 alunos em comum, sendo que dois alunos (B13 e B17) mobilizaram essa característica somente na Proposta 2, ou seja, podemos que os alunos que apresentaram essa característica na Proposta 1 continuaram a mobilizá-la no desenvolvimento da atividade 2.

Para as características **CG** e **COD** observamos uma maior disparidade dos resultados obtidos nas duas propostas, enquanto na Proposta 1 somente dois alunos haviam mobilizado essas duas características do PA, na Proposta 2 observamos um aumento significativo, pois 11 alunos estavam presentes em grupos que mobilizaram essas características, sendo que os dois alunos que mobilizaram essas características na Proposta 1 mobilizaram-nas novamente no desenvolvimento da Proposta 2. Se levarmos em conta que os alunos B03 e B15 fizeram contribuições essenciais para seus grupos, ainda assim observamos 7 alunos que mobilizaram essa característica na Proposta 2, pois seis deles haviam mobilizado as características **CER** e **CM** na Proposta 1, ou seja, ao compartilharem informações, esses alunos obtiveram um melhor desenvolvimento do PA.

Como observado em nossa pesquisa e constatado por Silva e Coqueiro (2016), o desenvolvimento de uma atividade envolvendo um material manipulativo em grupos "possibilitou aos alunos a interação com os colegas do grupo e a troca de ideias no desenvolvimento das tarefas" (SILVA e COQUEIRO, 2016, p. 11), ou seja, ao realizarem as tarefas em grupos, os alunos puderam compartilhar suas estratégias e validá-las com o apoio dos colegas do grupo, contribuindo, assim, para um melhor desenvolvimento do Pensamento algébrico.

Por fim, somente o aluno B03 repetiu o desempenho observado na Proposta 1, pois mobilizou, ainda que parcialmente, a característica **CCS.** Destacamos uma melhora na argumentação do aluno B03 para a Proposta 2, que pode ter sido motivada pela troca de ideias com o seu colega de dupla B07, ou seja, a melhora do desempenho pode também ser vista no trabalho em grupo, em alunos que apresentaram um desempenho satisfatório individualmente.

A partir das características mobilizadas nas atividades, definimos os níveis de desenvolvimento do Pensamento algébrico que esses 20 alunos se encontravam para o estudo de Função exponencial, após a aplicação das sequências de atividades, sendo assim, construímos o Quadro 16 que resume os níveis do desenvolvimento do PA desses alunos.

Quadro 16: Níveis de desenvolvimento do PA observadas nas Propostas 1 e 2

Nível de desenvolvimento do PA	Proposta 1	Proposta 2
Nível 0	B09; B13; B17	Nenhum aluno
Nível 1	B01; B02; B04; B05; B06; B07; B10; B12; B16; B18; B19; B21; B22; B23; B25	B04; B06; B09; B10; B17; B18; B19; B22; B25
Nível 2	Nenhum aluno	B01; B05; B12; B13; B15; B21; B23
Nível 3	B03; B15	B02; B03; B07; B16

Fonte: Elaboração própria.

Ao analisarmos o Quadro 16 podemos observar individualmente os níveis de desenvolvimento do PA dos alunos na Proposta 1. Constatamos que 18 dos 20 alunos estão presentes nos níveis 0 e 1, sendo que esperávamos este tipo de resultado, dada as características da turma participante. Todavia, destacamos que somente três alunos dos 20 que realizaram as duas atividades apresentaram ausência de pensamento algébrico na Proposta 1. Observamos que 15 alunos estavam no nível 1 do PA, apresentam pensamento algébrico incipiente, ou seja, há um início de desenvolvimento algébrico.

Observamos que o trabalho em grupo, desenvolvido na Proposta 2, possibilitou constatarmos um potencial nos alunos para apresentarem melhora no nível do desenvolvimento do PA, pois 11 alunos apresentaram melhora no nível de desenvolvimento do PA, pois em grupos apresentaram nível de PA acima do que apresentaram individualmente.

O aluno B15 foi o único aluno que apresentou uma mudança de nível abaixo do nível apresentado da Proposta 1 para Proposta 2, isso pode indicar que o aluno pode estar no processo de transição entre os níveis 2 e 3, ou seja, o aluno tem potencialidade para desenvolver seu pensamento do nível intermediário para o nível em que seu processo do desenvolvimento do PA esteja consolidado.

Observamos que somente o aluno B03 apresenta nível de desenvolvimento do pensamento algébrico consolidado, destacamos que esse aluno é um dos poucos que escolheram a Trilha de Humanas objetivando a sua escolha futura de curso universitário, pois esse aluno deseja cursar nível superior em Jornalismo ou História, ou seja, a não escolha da Trilha de Exatas para esse aluno não estava associada à não compreensão das disciplinas de exatas, mas ao seu desejo futuro de atuação profissional na área das Ciências Humanas.

Comparando as duas atividades em relação à mobilização dos registros de representação, observamos que na Proposta 2, os alunos puderam mobilizar mais registros de maneira independente, sem que o professor sugerisse o tipo de registro a ser utilizado.

Ainda na Proposta 2, observamos que os alunos mobilizaram até dois tipos de registros, principalmente os registros em língua materna, numérico e algébrico. Destacamos que esse grupo de alunos utilizou como principal tipo de representação o registro em língua materna, ou seja, podemos observar que os alunos não apresentaram confiança para utilização do registro algébrico e os tratamentos referentes a esse tipo de registro, utilizando do tratamento em outros tipos de registros convertendo para o registro algébrico somente após terem certeza de que a lei de formação funcionava para a situação proposta.

Portanto podemos concluir que os alunos mobilizaram com maior frequência as características do PA “capacidade de estabelecer relações” e “capacidade modelar” nas sequências de atividades propostas e que o grupo participante da pesquisa apresenta a maioria dos alunos presentes no nível 1 do desenvolvimento do Pensamento algébrico, ou seja, ainda apresentam conceitos iniciais no processo de Pensamento algébrico. Todavia, podemos observar potencialidades para uma melhora significativa do desenvolvimento do Pensamento algébrico desses alunos.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa tínhamos como objetivo compreender as características do Pensamento algébrico apresentadas pelos alunos e em quais níveis do desenvolvimento algébrico os alunos se encontravam quando resolviam atividades envolvendo Função exponencial. Utilizamos como referencial para as análises das atividades propostas a pesquisa desenvolvida por Almeida (2016), que apresenta o modelo para as características do PA e para os níveis de desenvolvimento do PA.

A escolha pela turma da Trilha de Humanas ocorreu devido ao desempenho dos alunos apresentado no 1º semestre de 2022, além das dificuldades que esses alunos julgavam ter na disciplina de Matemática, sendo que a escolha pela trilha em questão, para a maioria dos alunos, se deu devido a essa dificuldade e não objetivando um futuro curso universitário ou carreira de atuação na área de Linguagens e Humanas.

Portanto, ao analisarmos as respostas apresentadas pelos alunos para as duas sequências de atividades propostas, tínhamos a intenção de verificar se esse grupo de alunos apresentava níveis 0 e 1 no desenvolvimento do Pensamento algébrico, ou seja, se esse grupo de alunos apresentava ausência do pensamento algébrico ou pensamento algébrico incipiente.

Utilizando a teoria da Engenharia Didática proposta por Artigue (1993) e Almouloud e Coutinho (2008), realizamos uma análise a priori das tarefas que aplicamos com os alunos, buscando estabelecer possíveis acertos e dificuldades que os alunos poderiam apresentar, como os alunos poderiam mobilizar os registros de representação do objeto matemático e estabelecer como e em que tarefas as características do PA poderiam ser mobilizadas no desenvolvimento das atividades propostas. Ao realizar a aplicação das sequências, observamos como os alunos desenvolviam as atividades (experimentação) e a partir das análises a *posteriori* das tarefas realizadas pelos alunos, validamos ou invalidamos o que havíamos projetado na análise *a priori*.

A partir dessas análises respondemos a nossa questão de pesquisa: **“Quais são os níveis de desenvolvimento e as características do Pensamento Algébrico presentes na resolução de tarefas envolvendo função exponencial para alunos da 1ª série do ensino médio?**”.

Ao analisarmos os resultados obtidos, constatamos que os alunos apresentaram com maior frequências as características “capacidade de estabelecer relações” e “capacidade de modelar”, sendo que a maior incidência estava na característica **CER**, pois todos os alunos que apresentaram a característica **CM** também apresentaram a característica **CER**, porém o contrário não pode ser observado, confirmando o que Almeida (2016) já havia constatado em sua pesquisa, que afirma que “a primeira característica do pensamento algébrico desenvolvida e revelada por um sujeito é a capacidade de estabelecer relações” (ALMEIDA, 2016, p. 79), sendo esta a característica central do desenvolvimento do Pensamento algébrico, pois, segundo Almeida e Câmara (2017), as demais características do pensamento algébrico orbitam a “capacidade de estabelecer relações”.

Analisando individualmente os resultados obtidos pelos alunos, observamos um desempenho dentro das projeções que havíamos estabelecido na análise *a priori*, na qual a maioria dos alunos participantes demonstravam desenvolvimento no nível 1 do pensamento algébrico (pensamento incipiente), ou seja, ainda estavam no início do processo de desenvolvimento do pensamento algébrico. Todavia, ao observamos o desempenho em grupo desses alunos, constatamos que a maioria deles apresentavam potencial para melhora no nível do desenvolvimento do PA.

Observamos que os alunos que mobilizaram a conversão entre dois tipos de registro de representação de forma independente, ou seja, realizaram conversões entre registros além daqueles solicitados na tarefa proposta, obtiveram níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico intermediário (nível 2) ou consolidado (nível 3), portanto constatamos, como destacado por Duval (2012, p. 270), que o “recurso a muitos registros parece mesmo uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam também ser reconhecidos em cada uma de suas representações”.

Com os resultados obtidos destacamos que ao determinarmos o nível de desenvolvimento do PA com atividades individuais e em grupos, podemos compreender e desenvolver em sala de aula atividades que estejam mais próximas dos níveis de desenvolvimento algébrico das turmas, observando assim possíveis potencialidades e dificuldades que os alunos possam ter para iniciar o desenvolvimento de novos conteúdos em Matemática.

Dessa forma, concluímos com nossa pesquisa que, quando os alunos criam e compartilham outras estratégias em grupos, como observado em atividades manipuláveis, como na proposta do jogo Torre de Hanói, também desenvolvem uma melhor coordenação entre os registros de representação do objeto algébrico, proporcionando o desenvolvimento significativo do pensamento algébrico desses alunos. De acordo com Rêgo e Rêgo (2006), com o uso apropriado de material manipulável “os alunos ampliam sua concepção sobre o que é, como e pra quê aprender Matemática, vencendo os mitos e os preconceito negativos, favorecendo a aprendizagem pela formação de ideias e modelos” (RÊGO e RÊGO, 2006, p. 43).

Destacamos que com nossa pesquisa, observamos que o modelo proposto por Almeida (2016), pode ser aplicado para outros tipos de objetos algébricos, sendo que ao determinarmos o nível de desenvolvimento do pensamento algébrico, podemos direcionar o trabalho desenvolvido com a turma participante. Os alunos que participaram das atividades propostas nesta pesquisa apresentaram uma melhora significativa de desempenho no 2º semestre, sendo que a menor média geral dos alunos observada no 2º semestre foi 6,0, obtida na segunda avaliação do semestre (AV2).

Na primeira avaliação do 2º semestre, que abordava o objeto matemático desenvolvida em nossa pesquisa, os alunos obtiveram média geral igual a 6,5, ou seja, um rendimento maior que o observado nas três avaliações do 1º semestre.

Um questionamento surgido durante as análises e comparações dos resultados que obtivemos com as pesquisas de Bonotto (2015) e Silva e Coqueiro (2016), foi em relação aos níveis de Pensamento algébrico que os alunos da Trilha de Exatas poderiam apresentar no desenvolvimento das atividades aplicadas em nossa pesquisa, além de se verificar se os motivos para escolha da Trilha de Exatas são similares aos observados para os alunos que optaram pela Trilha de Humanas.

A partir desse questionamento sugerimos uma pesquisa que comparasse o nível de desenvolvimento algébrico de turmas que ao entrarem no Ensino Médio tenham realizado a escolha por itinerários formativos que privilegiam Matemática com turmas que realizaram a escolha por itinerários formativos que não priorizam Matemática, buscando observar quais as similares e disparidades entre os níveis de pensamento algébrico dessas turmas.

A sugestão de pesquisa acima surgiu, também, em decorrência dos resultados que obtivemos em comparação às pesquisas realizadas por Bonotto (2015) e Silva e Coqueiro (2016). Nossa pesquisa revelou que os alunos que realizaram as atividades propostas por nós apresentaram dificuldades semelhantes as descritas por essas pesquisas, porém devemos levar em consideração que as pesquisas de Bonotto (2015) e Silva e Coqueiro (2016) foram realizadas com turmas que já haviam estudado Funções exponenciais e Progressões Geométricas.

Esse fato contribuiu para que as pesquisas supracitadas não apresentassem alguns dos resultados que observamos em nossa pesquisa, como por exemplo, um resultado obtido pelos alunos na Proposta da Divisão celular, no qual associaram a quantidade de bactérias e o número de divisões com a função f(x) = 2x ou expressão equivalente, tipo de expressão que não foi apresentada pelos sujeitos participantes da pesquisa realizada por Bonotto (2015).

Acreditamos que pesquisas futuras que contemplem a elaboração de atividades que proporcionem o desenvolvimento dos níveis de pensamento algébrico são de suma importância, sobretudo para o desenvolvimento de estratégias que propiciem aos estudantes de Matemática aprendizado significativo dos conceitos matemáticos, independentemente do nível de desenvolvimento do pensamento algébrico que estes estudantes se encontrem.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Jadilson Ramos. **Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico: um modelo para os problemas de partilha de quantidade**. 2016. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE), Recife. 2016.

ALMEIDA, Jadilson Ramos; CÂMARA, Marcelo. Pensamento algébrico: em busca de uma definição. **Revista Paranaense de Educação Matemática - RPEM**, Campo Mourão, v. 6, n. 10, p. 34-60, jan-jun. 2017.

ALMEIDA, Jadilson Ramos; CÂMARA, Marcelo. Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes dos anos finais do ensino fundamental: o caso dos problemas de partilha. **Revista Educação Matemática e Pesquisa (EMP)**, São Paulo, v. 21, n. 3, p. 167-187. 2019.

ALMOULOUD, Saddo Ag; COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. **REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Vol. 3, n. 1, p. 62-77, UFSC: 2008.

ARTIGUE, Michèle; DOUADY; Régine. A Didáctica da Matemática na França. **Quadrante**, Vol. 2, nº 2, p. 41-67. 1993.

BERTOLETTI, Anderson de Abreu. **Introdução às expressões algébricas na escola básica: variáveis e células de planilhas eletrônicas**. 2014. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2014.

BLANTON, Maria; KAPUT, James. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, Boston, v. 36, n. 5, p. 412– 446, 2005.

BONOTTO, Aline Kempa. **Ensino e aprendizagem da função exponencial por meio de atividades investigativas e do uso de objeto de aprendizagem.** 2015. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e Matemática) Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa e Extensão, Universidade Franciscana, Santa Maria, 2015.

BRINER, Ron B.; DENYER, David. Systematic review and evidence synthesis as a practice and scholarship tool. **Handbook of evidence-based management**: Compaines, classrooms and research, p.112-129, 2012.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo das teorias das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino**. São Paulo: Ática, 2008.

BROUSSEAU, Guy. **Didática da Matemática** [Filme-vídeo]. Produção de Luciana Sperandio, direção de Regis Horta. São Paulo: ATTA Mídia e Educação, 2009. DVD, 25 min.

CANAVARRO, Ana Paula. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. **Quadrante**, Lisboa, v. 16, n. 2, p. 81-118, 2007.

CARDOSO, Renata Nogueira. **Um estudo de Progressões Geométricas e Funções Exponenciais, relacionando-as através da conversão dos Registros de Representação Semiótica, com o auxílio de um Objeto de Aprendizagem**. Monografia (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, Rio de Janeiro, 2012

CHEVALLARD, Yves, BOSCH, Mariana, GASCÓN, Josep. Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège: l'évolution de la transposition didactique. In : **Petit X** n° 5, IREM, Grenoble, 1984.

CRUZ, Patrícia de Souza Ferreira da. **Pensamento Algébrico e os Significados do Sinal de Igualdade: O Uso da Oralidade e da Narrativa nas Aulas de Matemática**. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo, 2016.

CURY, Helena Noronha. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

DOUADY, Régine. Rapport enseignement-aprentissage: dialectique outil-obket, jeux de cadre. **Cahiers de didactique**, n. 3, 1987.

DUVAL, Raymond. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Anales de Didactique et de Sciences Cognitives**, IREM de Strasbourg, v. 5, 1993.

DUVAL, Raymond. **Registros de Representação Semiótica e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática**. IN: S. D. A. Machado (Eds). Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica. (pp, 3 - 11). São Paulo: Papirus, 2008

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano**: registro semiótico e aprendizagens intelectuais. Tradução Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. 1 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: Machado, S. D. A. (org.). **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus, 2010. P. 11-33.

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**: Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semiótica: volume I. Organização: Tânia M. M. Campos. Tradução Marlene Alves Dias.1 ed. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revista Eletrônica de Educação Matemática,** Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

DUVAL, Raymond; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça; DIAS, Marlene Alves; BARROS, Luiz Gonzaga Xavier. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**: Introduzir a álgebra no ensino: Qual é o objetivo e como fazer isso? : volume II. Organização: Tânia M. M. Campos.1 ed. São Paulo: PROEM, 2014.

FELIX, Ângela Cristina Morete. **Estudo dos Registro de Representação mediados por um objeto de Aprendizagem**. 2014. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática), Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, 2014.

FERREIRA, Cristiane Regina de Moura. OS ALUNOS DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO E OS PADRÕES: **Observação, Realização e Compreensão**. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo, 2009.

FERREIRA, Miriam Criez Nobrega; RIBEIRO, Alessandro Jacques; RIBEIRO, Carlos Miguel da Silva. Álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental: investigando a compreensão de professores acerca do Pensamento Algébrico. **Revista do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul** (UFMS), v. 11, n. 25, p. 53-78, 2018.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela; MIGUEL, Antônio. **Pro-Posições**. vol.4 n.1. Contribuição para um Repensar a Educação Algébrica Elementar. 1993.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3 ed. rev.. Campinas: Autores Associados, 2012.

GINEZ, Patrícia Costa. **Fenômeno de congruência e não congruência sobre a função exponencial em materiais didáticos**. 2020. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas), Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), Sorocaba, 2020.

GODINO, Juan D.; AKÉ, Lilia P.; WILHELMI, Miguel R. Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar: implicaciones para la formación de maestros. In: **Enseñanza de las Ciências**, v. 32, n. 1. Espanha, 2014.

GOUCH, David, Weight of evidence: a framework for the appraisal of the quality and relevance of evidence. **Reseach Papers in Education**, v. 22, n. 2, 213-228, 2007. DOI: https://doi.org/10.1080/02671520701296189

KAPUT, James. Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), **Mathematics classrooms that promote understanding**. (p. 1 – 34) Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 1999.

LINS, Rômulo Campos. O modelo teórico dos campos semânticos: uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico. **Dynamis**. V. 1, n. 7, p. 29 – 39. Blumenau, 1994.

LINS, Rômulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

LOURENÇO, Edrei Henrique; OLIVEIRA, Paulo César. Congruência semântica equivalência referencial em problemas envolvendo equações de 1º grau. **Revista Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.20, n.1, p.84-109. 2018.

MACKAY, Jock; OLDFORD, Wayne. **Stat 231 Course Notes Fall 1994**. Canada: University of Waterloo, 1994. In: WILD, C.; PFANNKUCH, M. Statistical thinking in empirical enquiry. **International Statistical Review,** Voorburg, n. 67, p. 223-265, 1999

MARCHAND, Patricia; BEDNARZ, Nadine. L'enseignement de l'algèbre au secondaire: une analyse des problèmes présentés aux élèves. In: **Bulletin AMQ**, Vol. XXXIX, N°4. Québec: AMQ. 1999.

MCCONNELL, Jack. **Uso de computadores e calculadoras no aprendizado da álgebra**, 1995. In: As ideias da Álgebra. Organizadores: COXFORD, Arthur. F.; SHULTE, Albert. P. Tradução: DOMINGUES. H. H. São Paulo: Atual, 1994

MIORIM, Maria Ângela; MIGUEL, Antônio; FIORENTINI, Dario. Ressonâncias e dissonâncias do movimento pendular entre álgebra e geometria no currículo escolar brasileiro. **Zetetiké**, São Paulo, ano 1, n. 1, p. 19 – 89, 1993.

MODANEZ, Leila. **Das sequências de padrões geométricos à introdução ao pensamento algébrico**. 2003. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo, 2003.

MOSSI, Shayene Vieira. **Análise discursiva das representações semióticas mobilizadas por licenciados em matemática no ensino e na aprendizagem de funções**. 2016. Dissertação (Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), Santa Maria, 2016.

OLIVEIRA, Paulo César; SOUZA, Rodrigo Rodolfo Baltazar de Souza. Análise de erros no cálculo da superfície de embalagem cilíndrica. *In*: VIII Jornada Nacional de Educação Matemática e XXI Jornada Regional de Educação Matemática, 8. e 11., 2020. Passo Fundo. **Anais** [...] Passo Fundo: Universidade de Passo Fundo, 2020. p. 1 – 15.

OLIVEIRA, Izabella; FARIAS, Luiz Márcio Santos. BNCC: uma análise das tarefas prescritas na unidade temática álgebra. **EM TEIA - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 12, n. 3, p. 1-24. 2021.

OLIVEIRA, Paulo César; SOUZA, Adriano Ortiz; LOURENÇO, Edrei Henrique. O traçado de curvas de funções exponenciais com base na Teoria dos Registros de

Representação Semiótica**. Revista Binacional Brasil Argentina: diálogo entre as ciências**, Vitória da Conquista/Santa Fé, V. 11, n. 1, p. 92-110, junho. 2022

PEREIRA, José Geral de Araújo. **Abordagem das Funções Exponenciais e Logarítmicas numa perspectiva conceitual e gráfica no ensino médio**. 2010. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Pontifica Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010

POLYA, George. A arte de resolver problemas. Editora: **Interciência**, 1978.

PONTE, João Pedro. Números e Álgebra no currículo escolar. Em I. Vale, T. Pimental, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro (Org), **Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores** (pp. 5-27). Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. 2006.

PONTE, João Pedro; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. **Álgebra no ensino básico**. Lisboa: DGIDC, 2009.

PONTE, João Pedro; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemática na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

RADFORD, Luis. Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. **North America Conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education – PME**. 1, p. 1 – 21. México, 2006.

RADFORD, Luis. Signis, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. In: **North America Conference of the International Group pf Psychology of Mathematics Education – PME**. Bergen University College. V. 1, 2006.

RÊGO, Rômulo Marinho do; RÊGO, Rogéria Gaudencio do. **Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática**. In: LORENZATO, Sérgio. Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores. Campinas: Autores Associados, 2006. p.39-56.

ROBERT, Aline; ROGALSKI, Janine. Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. **Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education**, 2002. v. 2, n. 4, p. 505–528.

RODRIGUES, Márcio Urel. **Narrativas no ensino de funções por meio de investigação matemática**. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007

ROGALSKI, Janine. Y a-t-il un pilote dans la classe? Une analyse de l’activité de l’enseignant comme gestion d’un environnement dynamique ouvert. **Recherches en didactique des mathématiques,** v. 23, n. 3, p. 343-388, 2003.

SALGUEIRO, Nilton Cesar Garcia. **Como estudantes do Ensino Médio Lidam com Registro de Representação Semiótica de Funções**. 2011. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática), Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, 2011.

SANTOS, Adriana Tiago dos; BIANCHINI, Barbara Lutaif. Análise das estratégias utilizadas pelos estudantes no estudo de funções logarítmicas e exponenciais. **Vidya**, v. 32, nº, p. 35-49, jan./jun., 2012, Santa Maria, 2012.

SARAIVA, Lucilene Oenning. **Atividades Investigativas para o Ensino e Aprendizagem dos conceitos e propriedades de sucessões numéricas**. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2012.

SILVA, Suzana Domingues da; COQUEIRO, Valdete dos Santos. Um estudo de função exponencial por meio de tarefas investigativas e a torre de Hanói. *In*: Encontro Nacional de Educação Matemática. 12., 2016. São Paulo **Anais** [...] São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2016. p. 1 – 12.

SOUZA, Eliane Reame de; DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira. Álgebra: das várias às equações e funções. São Paulo: **Cadernos do CAEM** n. 5, 1994.

SOUZA, Claudia Vicente. **A função exponencial no caderno do Professor de 2008 da Secretaria do Estado de São Paulo, análise de atividades realizadas por alunos da 2ª série do Ensino Médio**. 2010. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo, 2010.

SOUZA, Rodrigo Rodolfo Baltazar de Souza; OLIVEIRA, Paulo César. Área de polígonos: uma análise do material de apoio ao currículo do estado de São Paulo. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**, v.8, n.1, pp.16-36, São Paulo, 2019.

SOBRINHO, Andressa Sanches Teixeira. **Uma análise sobre conceitos algébricos em produções acadêmicas: questões para formação de professores e para pesquisa**. 2019. Dissertação. (Mestrado em Educação em Ciências), Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, 2019.

URSINI, Sonia; ESCAREÑO, Fortino; MONTES, Delia; TRIGUEROS, Maria Trigueros, **Enseñanza del Algebra Elemental: Una propuesta alternativa**. México: Trillas, 2005.

USISKIN, Zalman. Concepções sobre a Álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: **As ideias da Álgebra**. Organizadores Coxford a. F.; Shulte, A. P. Editora: Atual, 1995.

VYGOTSKY, Lev Semionovitch. **Pensamento e linguagem**. Tradução Jefferson Luiz Camargo. 4ª ed. São Paulo: Martins Fontes, 2008.

WILD, Chris.; PFANNKUCH, Maxine. Statistical thinking in empirical enquiry. **International Statistical Review**, n. 67, p. 223-265, 1999.