

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS PARA A SUSTENTABILIDADE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM PLANEJAMENTO E USO DE RECURSOS
RENOVÁVEIS

LUCAS KRÖHLING BERNARDI

**ESTIMATIVA DE VOLUME DO TRONCO POR RECONSTRUÇÃO
TRIDIMENSIONAL E TRIANGULAÇÃO DE CONTORNOS**

Sorocaba

2024

LUCAS KRÖHLING BERNARDI

**ESTIMATIVA DE VOLUME DO TRONCO POR RECONSTRUÇÃO
TRIDIMENSIONAL E TRIANGULAÇÃO DE CONTORNOS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Planejamento e Uso de Recursos Renováveis da Universidade Federal de São Carlos como requisito parcial para obtenção de título de Doutor em Planejamento e Uso de Recursos Renováveis.

Orientadora: Profa. Dra. Monica Fabiana Bento
Moreira Thiersch

Co-Orientador: Prof. Dr. Claudio Roberto
Thiersch

Financiamento: CAPES

Sorocaba

2024

Bernardi, Lucas Kröhling

Estimativa de volume do tronco por reconstrução tridimensional e triangulação de contornos / Lucas Kröhling Bernardi -- 2024.
76f.

Tese de Doutorado - Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba

Orientador (a): Monica Fabiana Bento Moreira Thiersch
Banca Examinadora: Claudio Roberto Thiersch, Fabio Minoru Yamaji, José Mauro Santana da Silva, Adriana Leandra de Assis, Nelson Yoshihiro Nakajima
Bibliografia

1. Reconstrução tridimensional. 2. Triangulação de nuvem de pontos. 3. Estimativa de volume. I. Bernardi, Lucas Kröhling. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Maria Aparecida de Lourdes Mariano -
CRB/8 6979



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências e Tecnologias Para a Sustentabilidade
Programa de Pós-Graduação em Planejamento e Uso de Recursos Renováveis

Folha de Aprovação

Defesa de Tese de Doutorado do candidato Lucas Kröhling Bernardi, realizada em 30/04/2024.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Claudio Roberto Thiersch (UFSCar)

Prof. Dr. Nelson Yoshihiro Nakajima (UFPR)

Profa. Dra. Adriana Leandra de Assis (UFMG)

Prof. Dr. Jose Mauro Santana da Silva (UFSCar)

Prof. Dr. Fábio Minoru Yamaji (UFSCar)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Planejamento e Uso de Recursos Renováveis.

*Dedico à minha esposa, companheira e
melhor amiga, Gabi.*

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Agradeço à Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, pela oportunidade de desenvolver toda a minha pesquisa.

Agradeço aos meus professores orientadores, a Profa. Dra. Monica Fabiana Bento Moreira Thiersch e o Prof. Dr. Claudio Roberto Thiersch, por mais uma vez aceitarem orientar meus estudos, desta vez por 4 longos anos. Agradeço também aos membros da banca de qualificação e defesa, que muito contribuíram para a melhoria e aperfeiçoamento deste trabalho.

A todos os colegas de pós-graduação e graduação que, de alguma forma, me auxiliaram no meu caminho até aqui, na execução desta pesquisa, nos dias de campo, debaixo de sol e chuva e no meio do barro. Sem vocês isso não teria sido possível.

A meu grande amigo e Mestre, Dr. Celso Charuri, a você agradeço o exemplo, por ter me mostrado um propósito grandioso e me fazer sempre querer ser cada vez melhor.

Ao meu querido avô Eriberto, que me auxiliou inúmeras vezes, até mesmo me ajudando a projetar e confeccionar o xilômetro que utilizei na minha tese.

Aos meus sogros queridos, Ana e Paiva, por me amarem como seu filho e por colocarem neste mundo o amor da minha vida.

Aos meus pais, Cris e Beto, agradeço com todo o meu coração, pelo privilégio de ser seu filho, pela oportunidade da vida e por serem grandes exemplos para mim. Muito obrigado por me apresentarem princípios e cultivarem em mim a vontade de fazer dessa, uma vida feliz. E Aos meus irmãos, Ana Júlia e Thiago, obrigado pelo privilégio de ser seu irmão mais velho, desejo que continuem ao meu lado, como sempre estiveram, amo vocês.

À minha esposa e melhor amiga, Gabi... obrigado por sempre cuidar tão bem de mim, obrigado por sempre estar do meu lado, seja qual for a situação. Se hoje eu estou aqui é porque você me deu toda a força que eu precisava para continuar lutando, me trabalhando e me dedicando. Sem você eu não teria conseguido chegar até o fim. Muito obrigado pela sua parceria e pela sua presença na minha vida. Eu te amo, meu amor.

SUMÁRIO

RESUMO	v
ABSTRACT	vi
INTRODUÇÃO GERAL	7
CAPÍTULO 1: CONCEITOS E TEORIA FUNDAMENTAL - ESTIMATIVA DE VOLUME DE ÁRVORES E METODOLOGIAS DE RECONSTRUÇÃO TRIDIMENSIONAL	9
1. ESTIMATIVA DO VOLUME DE MADEIRA	12
2. OBTENÇÃO DO VOLUME	13
2.1. Xilômetro.....	13
2.2. Cubagem Rigorosa	14
2.2.1. Método de Smalian	15
2.2.2. Método de Newton	16
2.2.3. Método de Huber	17
2.2.4. Método Centroide	17
2.2.5. Método de Pressler	19
2.2.6. Método de Hohenadl 5 seções	20
2.2.7. Método de Hohenadl 10 seções	20
2.2.8. Método Seccional Padrão	20
2.2.9. Método FAO	21
3. O PRINCIPAL PROBLEMA DOS MÉTODOS DE CUBAGEM	21
4. MÉTODOS PARA OBTENÇÃO DO DIÂMETRO	23
4.1. Suta dendrométrica	24
4.2. Fita métrica	25
4.3. Electronic Tree Measuring Fork (ETMF)	25
4.4. Forquilha de Bitterlich (Bitterlich sector-fork)	26
5. Influência da forma do fuste na medição do diâmetro	27
6. VALOR REAL DA ÁREA SECCIONAL	28
6.1. Método da interpretação de imagens seccionais do tronco	28
7. RECONSTRUÇÃO TRIDIMENSIONAL DO VOLUME	29
7.1. Algoritmos para reconstrução de volumes	30
7.2. Métodos de geração de malha	34
7.3. Triangulação de Delaunay	35
8. O ESTUDO DA FORMA DO FUSTE	37
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	39

CAPÍTULO 2 TRIANGULAÇÃO DE CONTORNOS DAS SEÇÕES TRANSVERSAIS DO TRONCO PARA OBTENÇÃO DO VOLUME DE REFERÊNCIA	46
RESUMO	47
ABSTRACT	48
1. INTRODUÇÃO.....	49
2. MATERIAL E MÉTODOS.....	49
2.1. CARACTERIZAÇÃO DA ÁREA DE ESTUDO.....	49
2.2. OBTENÇÃO DOS DADOS.....	50
2.2.1. Cubagem rigorosa.....	50
2.3. GERAÇÃO DOS CONTORNOS DOS DISCOS	51
2.4. GERAÇÃO DA NUVEM DE PONTOS	52
2.4.1. Nuvem de pontos gerada a partir de dois discos subsequentes	52
2.4.2. Nuvem de pontos gerada a partir de três discos adjacentes.....	54
2.5. TRIANGULAÇÃO E RECONSTRUÇÃO DO VOLUME.....	54
2.5.1. Análise estatística da reconstrução tridimensional do tronco.....	55
3. RESULTADOS E DISCUSSÃO	56
4. CONCLUSÕES.....	68
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	69

ÍNDICE DE EQUAÇÕES

(Equação 1) – Método de Smalian	15
(Equação 2) – Volume total da árvore pelo método de Smalian	15
(Equação 3) – Método de Newton	16
(Equação 4) – Volume total da árvore pelo método de Newton	16
(Equação 5) – Método de Huber.....	17
(Equação 6) – Volume total da árvore pelo método de Huber	17
(Equações 7, 8, 9, 10 e 11) – Método Centróide	17
(Equação 12) – Volume de Pressler	19
(Equações 13 e 14) – Volume total pelo método de Pressler	19
(Equação 15) – Método Hohenadl 5 seções	20
(Equação 16) – Método Hohenadl 10 seções	20
(Equação 17) – Método Seccional Padrão.....	20
(Equação 18) – Método FAO	21
(Equação 19) – Número de possíveis triangulações entre duas linhas de contorno	31
(Equação 20) – Equação da parábola ordinária	37
(Equação 21) – Generalização da equação da parábola ordinária	38
(Equação 22) – Raiz do erro quadrático médio (RMSE)	55
(Equação 23) – Mean absolute Bias (MAB)	55
(Equação 24) – Coeficiente de Determinação (R^2)	55

ÍNDICE DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1. Forquilha de Bitterlich	26
FIGURA 2. Disco de madeira antes e depois do processamento pela RNA	28
FIGURA 3. Aproximação da superfície pela triangulação de linhas de contorno	32
FIGURA 4. Decomposição iterativa de um conjunto de pontos de contorno	33
FIGURA 5. Triangulação de Delaunay	35
FIGURA 6. Representação do sólido de revolução resultante de uma parábola ordinária	39
FIGURA 7. Seção transversal do disco tirada no Studio box	51
FIGURA 8. Representação do perfil longitudinal de uma árvore.	53
FIGURA 9. Tora gerada pela triangulação da nuvem de pontos.....	57
FIGURA 10. Árvore inteira gerada pela triangulação da nuvem de pontos.....	58
FIGURA 11. Dispersão dos resíduos para as estimativas de volumes totais	61
FIGURA 12. Dispersão dos resíduos para as estimativas de volume por seção	64

RESUMO

BERNARDI, Lucas Kröhling. **Estimativa de volume do tronco por reconstrução tridimensional e triangulação de contornos**. 2024. 78p. Tese (Doutorado em Planejamento e Uso de Recursos Renováveis) – Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, SP.

A quantificação precisa do volume de madeira é vital para a gestão sustentável dos empreendimentos florestais e servem de base para o planejamento da produção. Os métodos de estimativa do volume de madeira presente na floresta que se baseiam na realização da cubagem rigorosa assumem que o tronco das árvores pode ser aproximado pela união de várias seções de um sólido geométrico, o que pode resultar em estimativas imprecisas. Com o avanço da tecnologia, novas ferramentas e métodos estão sendo desenvolvidos para agregar maior precisão e riqueza de informação aos inventários florestais. A técnica de interpretação de imagens digitais e sensores como *laser scanner* terrestre podem ser aplicados para gerar nuvens de pontos que podem ser convertidas em medidas precisas de diâmetros e alturas das árvores. Este estudo propõe um novo método de reconstrução tridimensional do volume das árvores utilizando fotografias digitais. Os resultados mostram que o método proposto tem potencial de aplicação no setor florestal pelo seu baixo custo e alta precisão, requerendo apenas uma câmera digital e *studio box*. As estimativas de volume pelo método proposto, quando comparadas ao volume obtido pelo xilômetro, foram superiores aos métodos de cubagem convencionais com a utilização da suta e da fita métrica. A análise de variância e o teste de Tukey ao nível de significância de 1% indicaram a utilização de imagens digitais para obtenção da área seccional como o método com menor erro em relação ao xilômetro (2,19%). Os métodos de triangulação com dois discos (2,32%) e com três discos (2,34%) foram estatisticamente iguais à suta (2,72%). Já a fita métrica se apresentou com os piores resultados (6,03%). Sob a análise de dispersão dos resíduos, os métodos de triangulação se comportaram iguais ao método das imagens digitais, sendo superiores aos métodos com suta e fita métrica. Portanto, os métodos propostos se apresentam como alternativas promissoras para melhorar a precisão das estimativas de volume comercial, contribuindo para a gestão eficiente e sustentável dos recursos florestais, principalmente no contexto de estimativa de múltiplos produtos, onde o conhecimento da forma do fuste é mais importante do que o volume total individual da árvore.

PALAVRAS-CHAVE: triangulação; inteligência artificial; forma do fuste; volumetria

ABSTRACT

BERNARDI, Lucas Kröhling. **Stem volume estimation through three-dimensional reconstruction and contour triangulation**. 2024. 78p. Thesis (PhD in Planning and Use of Renewable Resources) – Federal University of São Carlos, Sorocaba, SP, Brazil.

Accurate quantification of wood volume is vital for sustainable forest management and serves as the basis for production planning. The methods for estimating the volume of wood present in the forest that rely on upper-stem diameter measurements assume that the stem can be approximated by the union of various sections of a geometric solid, which can result in inaccurate estimates. With the advancement of technology, new tools and methods are being developed to add greater precision and richness of information to forest inventories. Techniques such as digital image interpretation and sensors like terrestrial laser scanners can be applied to generate point clouds that can be converted into precise measurements of tree diameters and heights. This study proposes a new method of three-dimensional reconstruction of tree volume using digital photographs. The results show that the proposed method has potential application in the forestry sector due to its low cost and high precision, requiring only a digital camera and a studio box. Volume estimates using the proposed method, when compared to the volume obtained by the xylometer, were superior to conventional methods using caliper and measuring tape. Analysis of variance and the Tukey test at a 1% significance level indicated the use of digital images for obtaining the sectional area as the method with the lowest error compared to the xylometer (2.19%). The triangulation methods with two wooden discs (2.32%) and three discs (2.34%) were statistically equal to the caliper (2.72%). The measuring tape showed the worst results (6.03%). Under the analysis of scatter plots of residual distribution, the triangulation methods behaved similarly to the digital image method, being superior to the methods using caliper and measuring tape. Therefore, the proposed methods present themselves as promising alternatives to improve the accuracy of commercial volume estimates, contributing to the efficient and sustainable management of forest resources, especially in the context of estimating multiple products, where the knowledge of the stem shape is more important than the total individual tree volume.

KEYWORDS: triangulation; artificial intelligence; taper; volumetrics

INTRODUÇÃO GERAL

O Brasil destaca-se na produção florestal, sendo um dos principais produtores globais de celulose, com aproximadamente 9,94 milhões de hectares de florestas plantadas, majoritariamente de Eucalyptus e Pinus. Essa atividade representa 1,3% do PIB nacional e 7,2% da produção industrial. O Eucalipto representa 7,6 milhões de hectares (76%), situados principalmente nos estados de Mato Grosso do Sul, Minas Gerais e São Paulo, sendo 28% de sua produção destinada à celulose e papel, 11% às usinas de carvão vegetal, 4% para a produção de painéis de madeira e pisos laminados, entre outros usos (Indústria Brasileira de Árvores, 2023).

A obtenção correta das informações referentes ao estoque de madeira e do potencial de crescimento destes plantios é de extrema importância para a otimização do uso de seus recursos e, para isso, a quantificação do volume de madeira é o objetivo principal nos processos de inventário florestal. No setor florestal, a estimativa do volume de árvores é fundamentada na técnica da seleção de modelos de regressão, utilizando como volume real aquele obtido pela cubagem rigorosa, em que algumas árvores são derrubadas e seus diâmetros mensurados em várias alturas para que o volume do fuste seja calculado por meio de uma aproximação matemática.

Inúmeros são os métodos de aproximação matemática existentes para obtenção do volume, dentre os mais consolidados, cita-se os métodos de Smalian, Newton e Huber. Em todos esses métodos, os cálculos têm como base a medição direta dos diâmetros por meio de fita métrica ou suta, por exemplo. Tais instrumentos, entretanto, podem apresentar erros tanto pela fabricação como pelo mau uso, podendo resultar em valores equivocados dessas variáveis e, conseqüentemente, adicionar viés à estimativa do volume.

Além dos vieses oriundos dos aparelhos e sua utilização, os métodos de cubagem tradicionais assumem pressupostos de que o tronco é composto pela união de várias seções de um mesmo sólido geométrico, dessa forma cada método considera a variação da forma do fuste apenas pela variação das áreas seccionais da base, do topo e/ou do centro das seções mensuradas. Entretanto, é de pleno conhecimento que um sólido geométrico irregular como o tronco de uma árvore, pode assumir infinitas formas.

Essa aproximação realizada pode resultar em erros na seleção de modelos, afirmando, por exemplo, que certos modelos volumétricos subestimam volumes muito além do que de fato subestimem.

Recentemente, com o advento da tecnologia e a facilidade da interpretação de fotografias digitais para o cálculo de medidas reais, propôs-se o cálculo da área seccional por imagens digitais do tronco (Thiersch *et al.*, 2021)

Na área da medicina, a técnica de interpretação de imagens para obtenção das dimensões de um objeto já é amplamente consolidada, visto que não existe a possibilidade de medição direta de órgãos e estruturas internas do corpo humano, havendo a necessidade da estimativa por meio indireto com o uso dos equipamentos de ultrassonografia, ressonância magnética, raios-x etc. As imagens geradas nesses procedimentos subdividem a estrutura tridimensional em inúmeras imagens bidimensionais, chamadas fatias (*slices*) e a partir do contorno dessas, algoritmos realizam a reconstrução tridimensional das estruturas estudadas com precisão.

Já na área florestal, as alternativas aos métodos de cubagem puramente matemáticos já existentes, em sua maioria surgem no sentido da aplicação de *laser scanner* ou sensores como o LiDAR que, por meio do uso de feixes de luz, geram uma nuvem de pontos que podem ser convertidas indiretamente em medidas como diâmetros ou alturas e, com o uso de algoritmos de reconstrução tridimensional pode-se estimar os volumes. Os demais métodos desenvolvidos para estimativa do diâmetro do tronco pelo uso de fotografias digitais se fundamentam na seção do tronco como sendo um círculo perfeito, o que pode acrescentar viés à sua estimativa.

A obtenção de imagens digitais das seções transversais do tronco das árvores possibilita a aplicação de algoritmos de triangulação como os utilizados na medicina para a reconstrução tridimensional do tronco como uma alternativa à realização da cubagem rigorosa para obtenção do volume comercial das árvores.

Portanto, este trabalho teve como objetivo propor um novo método de reconstituição tridimensional do volume do fuste como alternativa aos métodos tradicionais de cubagem por meio do uso de fotografias digitais e triangulação de linhas de contorno.

CAPÍTULO 1:
CONCEITOS E TEORIA FUNDAMENTAL - ESTIMATIVA DE VOLUME DE
ÁRVORES E METODOLOGIAS DE RECONSTRUÇÃO TRIDIMENSIONAL

RESUMO

BERNARDI, Lucas Kröhling. **Capítulo 1: Conceitos e teoria fundamental - estimativa de volume de árvores e metodologias de reconstrução tridimensional**. 2024. Cap. 1, pp. 6-41. Tese (Doutorado em Planejamento e Uso de Recursos Renováveis) – Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, SP.

O presente capítulo teve como objetivo construir uma revisão de literatura sobre métodos de cubagem, estimativa de volume e reconstrução tridimensional, com o objetivo de definir conceitos necessários para o entendimento completo deste trabalho. A correta estimação do volume de madeira presente nos povoamentos é crucial para o planejamento florestal e gestão sustentável de florestas. O volume é quantificado por meio da aplicação de modelos matemáticos, conhecidos como equações volumétricas, que se utilizam de variáveis como diâmetro e altura das árvores. A cubagem rigorosa é uma técnica de subdivisão do tronco para estimar o volume das árvores, servindo como parâmetro para o ajuste de modelos volumétricos. Esses métodos, por serem aproximações, acabam inserindo incertezas nos valores utilizados como referência, além disso, a coleta dos diâmetros, feita com instrumentos como suta e fita métrica, também pode introduzir erros de medição devido à irregularidade dos troncos e à imprecisão dos equipamentos, bem como pelo mau uso. Recentemente, estudos utilizando-se de Redes Neurais Artificiais para o reconhecimento de imagens têm possibilitado obter essas mensurações de forma mais assertiva. Thiersch et al. (2021) propuseram um método usando fotografias digitais, mostrando alta precisão na estimativa de volumes em comparação com métodos tradicionais como a fita métrica e a suta. Essas imagens digitais podem servir de base para a criação de métodos de reconstrução tridimensional de volumes a partir de imagens bidimensionais para melhorar a precisão das estimativas do volume das árvores.

PALAVRAS-CHAVE: cubagem; equações volumétricas; xilômetro; triangulação de nuvem de pontos

ABSTRACT

BERNARDI, Lucas Kröhling. **Chapter 1: Concepts and Fundamental Theory - Tree Volume Estimation and Three-Dimensional Reconstruction Methodologies**. 2024. Chap. 1, pp. 6-41. Thesis (PhD in Planning and Use of Renewable Resources) – Federal University of São Carlos, Sorocaba, SP, Brazil.

The present chapter aimed to construct a literature review on timber measurement methods, volume estimation, and three-dimensional reconstruction, with the purpose of defining necessary concepts for a complete understanding of this work. Accurately estimating the volume of wood in stands is crucial for forest planning and sustainable forest management. The volume is quantified through the application of mathematical models, known as volumetric equations, which use variables such as tree diameter and height. To adjust volumetric models for estimating wood volume, several upper-stem diameter measurements need to be obtained in order to divide the stem into small parts and estimate its volume. These methods, being approximations, introduce uncertainties in the values used as references. Additionally, the collection of diameters, done with instruments like calipers and diameter tape, can also introduce measurement errors due to the irregularity of the stem and the imprecision of the equipment, as well as improper use. Recently, studies using Artificial Neural Networks for image recognition have made it possible to obtain these measurements more accurately. Thiersch et al. (2021) proposed a method using digital photographs, showing high precision in volume estimation compared to traditional methods like metric tape and calipers. These digital images can serve as a basis for creating three-dimensional volume reconstruction methods from two-dimensional images to improve the accuracy of tree volume estimates.

KEYWORDS: cubic measurement; volumetric equations; xylometer; point cloud triangulation

1. ESTIMATIVA DO VOLUME DE MADEIRA

O volume de madeira é uma das variáveis de maior importância nos processos de planejamento da produção florestal e, por isso, quantificá-los de maneira correta e acurada é de fundamental importância para os empreendimentos que visam implementar planos de manejo sustentável de florestas, sejam elas plantadas ou nativas, pois fornece subsídios para a avaliação do estoque de madeira e dados para a análise do potencial produtivo das florestas (Akindele; LeMay, 2006; Leite; Andrade, 2002; Spurr, 1952; Thomas *et al.*, 2006).

Entretanto, o volume de uma árvore não é uma variável facilmente obtida no campo, como por exemplo o diâmetro ou a altura, sendo necessário utilizar-se de equações matemáticas para realizar suas estimativas. Por esse motivo, ao longo do tempo, diversos modelos matemáticos foram desenvolvidos desde que o homem começou a manejar as florestas (Machado; Conceição; Figueiredo, 2002).

Tais modelos (equações volumétricas) são aproximações matemáticas que visam prever a variável dependente, proveniente do processo de cubagem rigorosa (que será detalhada na seção 1.2.2), pelo uso de variáveis independentes como diâmetro a 1,30 m de altura (DAP) e a altura total ou comercial das árvores (Machado; Conceição; Figueiredo, 2002).

Ao se testar diversas equações volumétricas escolhe-se aquela que apresenta o melhor ajuste à base de dados para que, com seu uso para toda a população, seja possível chegar-se à estimativa de volume por árvore, por parcela, por hectare e para todo o povoamento com base em um intervalo de confiança (Miguel *et al.*, 2014).

Desde a metade do século passado as equações volumétricas vêm sendo testadas, ajustadas e comparadas para diferentes espécies florestais, diferentes espaçamentos e regiões. Esses estudos vêm contribuindo para melhorar os estimadores do volume, propor novas equações, novos métodos, facilitando a quantificação desta variável para produtores que pretendem comercializar suas áreas (Golding; Hall, 1961; Machado; Conceição; Figueiredo, 2002; Miguel *et al.*, 2014; Paula Neto *et al.*, 1977; Pelissari; Lansanova; Drescher, 2011; Schröder *et al.*, 2013).

A primeira contribuição relacionada à estimativa do volume total de uma árvore a partir de algum tipo de equação volumétrica é atribuída a Schubert (1881, apud Spurr, 1952), que ao estudar o Abeto Prateado (*Albies alba* Mill.) introduziu o conceito do quociente de forma entre os diâmetros a 0,5 e 1,30 m de altura para expressar a forma do fuste de uma árvore. A proposta do quociente de forma desencadeou estudos subsequentes voltados ao estudo da forma do fuste

e da relação do diâmetro e altura com o volume total, sendo as equações volumétricas mais conhecidas as de Spurr (1952) e principalmente as de Schumacher e Hall (1933).

Além dos modelos volumétricos, outro método muito empregado para o cálculo de volume de madeira é o estudo da forma do fuste feito com o uso de equações de afilamento, conhecidas também como *Taper*, que representam o perfil longitudinal de uma árvore a partir da estimativa dos diâmetros ao longo da altura (Husch; Beers; Kershaw JR., 2003).

O afilamento do tronco é componente essencial na realização do sortimento, prática comum em sistemas de planejamento do manejo florestal moderno. O sortimento é o estudo dos múltiplos produtos da madeira que visa o maior aproveitamento do povoamento. O estudo do sortimento permite classificar a matéria-prima de acordo com as suas dimensões e qualidade visando a quantificação dos múltiplos usos da madeira (Heidarsson; Pukkala, 2011; Müller; Finger; Schneider, 2005).

Ao utilizar o DAP, a altura total e diferentes alturas de medição ao longo do tronco, as equações de afilamento permitem estimar o diâmetro do tronco a qualquer altura definida, o volume total do tronco, o volume comercial, o volume entre quaisquer seções do tronco além de também ser possível obter a altura da árvore onde é encontrado qualquer diâmetro definido (Kozak, 2004).

2. OBTENÇÃO DO VOLUME

2.1. XILÔMETRO

Dentre os métodos de medição do volume de sólidos, aquele que retorna com maior fidelidade o volume do objeto é o método conhecido por xilometria, fundamentado no princípio de Arquimedes, que consiste em mergulhar o sólido em água e anotar o volume de água deslocado. Na biometria florestal a aplicação da xilometria realizada por meio do seccionamento do tronco em toras e da submersão destas em água, obtendo-se o valor mais próximo do real dos volumes das seções e, conseqüentemente, da árvore como um todo (Andrade, 2023; Machado; Figueiredo-Filho, 2014).

Para converter o volume de água deslocado em volume de madeira é necessário o uso de um xilômetro, um tambor (geralmente metálico) cilíndrico, com graduações laterais diretas ou então com a colocação de um tubo externo que contém a graduação. Essa graduação deve ser calibrada de forma a saber o quanto cada milímetro de água deslocada representa em m³ (Campos, 2014).

Apesar de ser um método bastante confiável para a aferição do volume de uma árvore, o uso do xilômetro é bastante caro e minimamente operacional quando se trata das condições reais observadas no campo, pois é um processo demorado que requer muito cuidado e atenção. Portanto, devido seu alto custo e à dificuldade no manuseio de grandes peças de madeira para serem submersas é que o método da xilometria não é muito empregado na prática no setor florestal, sendo mais utilizado em situações de pesquisa (Andrade, 2023; Machado; Figueiredo-Filho, 2014).

Todavia, o uso do xilômetro é altamente recomendado em casos em que se pretende mensurar o volume de árvores com fustes sinuosos e retorcidos, como é o caso das espécies da Caatinga e do Cerrado, por exemplo, ou então de árvores menores. (Andrade, 2023; Loetsch; Zöhner; Haller, 1973; Machado; Figueiredo-Filho, 2014).

2.2. CUBAGEM RIGOROSA

A técnica de cubagem rigorosa consiste na subdivisão do fuste em várias seções e da tomada dos seus respectivos diâmetros sucessivos ao longo do tronco. Essa subdivisão pode ser em alturas pré-estabelecidas, como por exemplo 0,1 m, 0,7 m, 1,3 m, 2 m, 4 m, e assim por diante de 2 em 2 m até a altura total de cada árvore. Sendo assim cada árvore terá um número diferente de toras que dependerá da sua altura total. Esse método, chamado de absoluto, é caracterizado por tornar o processo de cubagem mais prático e operacional.

Além do método de alturas pré-estabelecidas, também existem cientistas biométricos que preferem a coleta dos diâmetros a alturas relativas à altura total da árvore, por exemplo, a 1%, 2%, 3%, 5%, 10%, 20%, 30% e assim por diante, de 10 em 10% da altura da árvore até a altura total. Nesse caso, todas as árvores apresentarão o mesmo número de medições. Esse método, chamado de relativo, visa representar uniformemente os diferentes perfis de fuste que a amostra pode assumir, porém, é um método menos operacional visto que para cada árvore será necessário calcular as alturas relativas em que devem ser coletados os diâmetros, fazendo com que um maior tempo seja gasto no processo de cubagem no campo.

O volume do tronco ou das seções do tronco é obtido pelo somatório dos volumes das seções de cada árvore. Quanto menor for o comprimento de cada seção, mais próximo será o volume estimado pela cubagem do volume verdadeiro da árvore.

Diferentemente do método da xilometria, os métodos de cubagem utilizados atualmente são compostos de expressões matemáticas que se baseiam em sólidos geométricos como parabolóide, neiloide ou tronco de cone e, ao se utilizar de medições dos diâmetros ao longo do

fuste, estes métodos estimam com certa acuracidade o volume entre essas seções do tronco (Machado; Figueiredo-Filho, 2014).

Dentre as expressões matemáticas existentes para estimar o volume, pode-se citar os mais comumente utilizados como os métodos de Smalian, Huber, Newton, Pressler, Hohenadl de 5 seções, Hohenadl de 10 seções e o método Centroide. Além destes, ainda pode-se citar métodos derivados das fórmulas de Smalian, de Huber e de Hohenadl 5 seções, esses métodos são conhecidos, respectivamente como: Cubagem relativa de 19 seções, Método Seccional Padrão e método FAO (Food and Agriculture Organization of the United Nations) (Lima, 2015; Machado *et al.*, 2006).

2.2.1. Método de Smalian

A fórmula proposta por Smalian (Equação 1) é fundamentada no pressuposto de que as seções do fuste são uma série de troncos de parabolóide. Sua fórmula para o cálculo do volume por seção do tronco é descrita a seguir:

$$v_i = \left(\frac{g_i + g_{i+1}}{2} \right) l_i \quad (1)$$

Em que:

v_i é o volume da i -ésima seção do tronco

g_i é a área seccional da base da i -ésima seção do tronco

g_{i+1} é a área seccional do topo da i -ésima seção do tronco

l_i é o comprimento da i -ésima seção do tronco

Dessa forma, o volume total da árvore (Equação 2) será dado por:

$$v = v_t + \sum_{i=1}^{n-1} v_i + v_p \quad (2)$$

Em que:

v é o volume total da árvore

v_t é o volume do toco, considerado como um cilindro, portanto, igual a: $v_t = g_0 \cdot l_0$

v_i é o volume da i -ésima seção do tronco

v_p é o volume da ponta da árvore, considerado como um cone, portanto, igual: $v_p = \frac{g_n \cdot l_n}{3}$

g_0 é a área seccional do topo do toco

l_0 é a altura do toco

g_n é a área seccional da base da ponta da árvore, representada pela área seccional do topo da última seção mensurada

l_n é o comprimento da ponta da árvore

Tradicionalmente no Brasil, a fórmula de Smalian (Equação 1) é amplamente utilizada nos inventários florestais com o objetivo de estimar o volume real, tanto para o ajuste de modelos volumétricos quanto para modelos de afilamento do fuste. Geralmente, a aplicação do método é feita mensurando-se seções curtas até os 2 m de altura e de 1 em 1 ou 2 em 2 m no restante do tronco, com o objetivo de quantificar a maior variação do volume na porção do tronco mais próximo à linha do solo. O maior emprego da fórmula de Smalian no Brasil é devido à sua praticidade de aplicação e não por sua acuracidade (Machado; Figueiredo-Filho, 2014).

2.2.2. Método de Newton

Diferentemente da fórmula de Smalian (Equação 1), que utiliza as áreas seccionais do topo e da base das seções do tronco, o método de Newton faz uso de uma média ponderada das áreas seccionais da base, do meio e do topo das seções. Desse modo, a fórmula de Newton (Equação 3) acaba também por ser uma aproximação parabolóide do tronco das árvores, sendo sua equação dada por:

$$v_i = \left(\frac{g_i + 4g_{mi} + g_{i+1}}{6} \right) l_i \quad (3)$$

Em que:

v_i é o volume da i -ésima seção do tronco

g_i é a área seccional da base da i -ésima seção do tronco

g_{mi} é a área seccional no meio da i -ésima seção do tronco

g_{i+1} é a área seccional do topo da i -ésima seção do tronco

l_i é o comprimento da i -ésima seção do tronco

Da mesma forma que o método de Smalian (Equação 2), o volume total da árvore pelo método de Newton (Equação 4) é dado por:

$$v = v_t + \sum_{i=1}^{n-1} v_i + v_p \quad (4)$$

v é o volume total da árvore

v_t é o volume do toco, considerado como um cilindro

v_i é o volume da i -ésima seção do tronco

v_p é o volume da ponta da árvore, considerado como um cone

2.2.3. Método de Huber

Assim como as fórmulas de Smalian (Equação 1) e Newton (Equação 3), o método de Huber (Equação 5) também assume que as seções das árvores são troncos de parabolóide, porém, diferentemente de Smalian e Newton, esse método se baseia apenas em uma única medida de área seccional, tomada no meio de cada seção. A medição da área seccional no meio da seção do tronco se dá com base na suposição de que a área seccional média de uma seção do tronco se encontra no ponto médio da seção, sendo assim, sua fórmula se dá por:

$$v_i = g_{mi} \cdot l_i \quad (5)$$

Em que:

v_i é o volume da i -ésima seção do tronco

g_{mi} é a área seccional no meio da i -ésima seção do tronco

l_i é o comprimento da i -ésima seção do tronco

E mais uma vez, assim como nos métodos de Smalian (Equação 2) e Newton (Equação 4), o volume total da árvore pelo método de Huber (Equação 6) será dado pela fórmula a seguir:

$$v = v_t + \sum_{i=1}^{n-1} v_i + v_p \quad (6)$$

Em que:

v é o volume total da árvore

v_t é o volume do toco, considerado como um cilindro

v_i é o volume da i -ésima seção do tronco

v_p é o volume da ponta da árvore, considerado como um cone

2.2.4. Método Centróide

O Método Centróide (Equações 7, 8, 9, 10 e 11) foi proposto por Wood *et al.* (1990) como uma alternativa aos métodos convencionais de cubagem de Huber, Smalian e Newton, inicialmente para árvores de *Pinus radiata* entre 21 e 45 anos de idade. Além disso a cubagem foi feita pelo método absoluto, com cada árvore tendo um número (n total específico de pontos de medição dos diâmetros ao longo do fuste, de acordo com sua altura total. Sendo que os números de observações por árvore variaram de 7 a 42 pontos com média de 23,6.

Entretanto, ao analisarem os dados coletados em suas pesquisas, os autores observaram que em todos os casos em que uma das alturas absolutas mensuradas coincidia à altura relativa

0,3 (30% da altura total) o viés absoluto médio das equações de afilamento testadas eram os menores apresentados em toda a base de dados.

Isso chamou a atenção dos autores, que já sabiam que cerca de 50% do volume das árvores de *Pinus radiata* costuma estar concentrado no terço inferior do fuste e, segundo (Forslund, 1982), o centro de gravidade das árvores de *Populus tremuloides* também era encontrado a 30% da altura total a partir da base.

Dessa forma, os autores supuseram que deveria haver algum tipo de relação entre a altura relativa a 30% da altura total e o centroide da árvore, o qual eles definiram de centro de volume do sólido (fuste) ou de qualquer uma das suas seções (toras). Sua fórmula é fundamentada no pressuposto estabelecido por Carron (1968) de que as árvores de *Pinus radiata* são conhecidas por terem uma forma do fuste que se aproxima da forma de um parabolóide de segundo grau.

O método Centróide necessita de mais etapas anteriores ao cálculo do volume, pois, antes é necessário que seja calculado o centroide de cada seção do tronco. Sua aplicação se dá pelas fórmulas a seguir:

$$v_i = g_{i+1} \cdot l_i + \frac{1}{2} b_1 l_i^2 + \frac{1}{3} b_2 l_i^3 \quad (7)$$

Sendo:

$$b_1 = \frac{g_i - g_{i+1} - b_2 l_i^2}{l_i} \quad (8)$$

$$b_2 = \frac{g_i - g_{ci} \frac{l_i}{e_i} - g_{i+1} \left(1 - \frac{l_i}{e_i}\right)}{l_i^2 - l_i \cdot e_i} \quad (9)$$

$$e_i = l_i - e_{i1} \quad (10)$$

$$e_{i1} = l_i - \left[\left(\frac{\left[\left(\frac{d_{i2}}{d_{i1}} \right)^4 + 1 \right]^{0,5} - 2^{0,5}}{2^{0,5} \left[\left(\frac{d_{i2}}{d_{i1}} \right)^2 - 1 \right]} \right) l_i \right] \quad (11)$$

Em que:

v_i é o volume da i -ésima seção do tronco

g_{i+1} é a área seccional do topo da i -ésima seção do tronco

l_i é o comprimento da i -ésima seção do tronco

g_i é a área seccional da base da i -ésima seção do tronco

g_{ci} é a área seccional na posição centroide da seção do tronco medida a partir da distância e_1 (m) da base da i -ésima seção do tronco

e_{i1} é a distância da base da i -ésima seção do tronco até a posição centroide (m)

e_i é a distância do topo da i -ésima seção do tronco até a posição centroide (m)

d_{i1} é o diâmetro mensurado na base da i -ésima seção do tronco

d_{i2} é o diâmetro mensurado no topo da i -ésima seção do tronco

2.2.5. Método de Pressler

Pode ser utilizado para obter o valor do volume total das árvores ainda em pé e parte do pressuposto de que o tronco das árvores assume a forma de um conoide. O método consiste na aferição da chamada altura de Pressler, ou ponto de Pressler, que corresponde à posição do fuste onde o diâmetro é igual à metade do DAP. Segundo Loetsch, Zöhner e Haller (1973), a altura de Pressler é um bom indicador da forma e, conseqüentemente, do volume do fuste.

O cálculo do volume é feito em duas etapas. Na primeira etapa é calculado o chamado volume de Pressler (Equação 12), que consiste no volume entre a posição 1,3m até a altura total, sua fórmula é dada por:

$$v_{Pressler} = \frac{2}{3} \cdot g_{1,3} \cdot h_p \quad (12)$$

Em que:

$v_{Pressler}$ é o volume de Pressler, ou volume acima de 1,3 m de altura

$g_{1,3}$ é a área seccional referente à altura do peito (1,3 m)

h_p é a altura de Pressler, onde o diâmetro equivale à metade do DAP

Pressler propõe que o volume abaixo de 1,3 m seja assumido como um cilindro de altura 1,3 m e diâmetro igual ao DAP, portanto o volume total (Equação 13) será o resultado da soma entre o volume de Pressler e o volume do cilindro até 1,3 m, dado por:

$$v = v_{Pressler} + (g_{1,3} \cdot 1,3) \quad (13)$$

Substituindo $v_{Pressler}$ na equação acima, temos a Equação 14:

$$v = g_{1,3} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot h_p + 1,3 \right) \quad (14)$$

2.2.6. Método de Hohenadl 5 seções

O método proposto por Hohenadl (Equação 15) consiste na divisão do tronco em cinco seções estabelecidas em função da altura total, sendo sugeridas as alturas 15%, 35%, 55%, 75% e 95%. Em cada um desses pontos devem ser obtidas as respectivas áreas seccionais e assim, obter o volume total da árvore com o uso da fórmula a seguir:

$$v = \frac{h}{5} \cdot (g_{0,15} + g_{0,35} + g_{0,55} + g_{0,75} + g_{0,95}) \quad (15)$$

Em que:

v é o volume da árvore em metros cúbicos

h é a altura total da árvore em metros

$g_{0,15} \dots g_{0,95}$ são as áreas seccionais calculadas a 15%, 35%, 55%, 75% e 95% da altura total

2.2.7. Método de Hohenadl 10 seções

Além do método convencional originalmente proposto por Hohenadl, com a divisão em 5 seções, com o objetivo de representar de forma mais acurada a forma do fuste, cientistas biométricos propõem a divisão em 10 seções relativas à altura total, nas posições 5%, 15%, 25%, 35% e assim sucessivamente, de 10 em 10% até a altura 95% da altura total do fuste. Sendo assim, o volume total da árvore pelo método Hohenadl 10 seções (Equação 16) pode ser calculado por:

$$v = \frac{h}{10} \cdot (g_{0,05} + g_{0,15} + g_{0,25} \dots + g_{0,95}) \quad (16)$$

v é o volume da árvore em metros cúbicos

h é a altura total da árvore em metros

$g_{0,15} \dots g_{0,95}$ são as áreas seccionais calculadas a 15%, 35%, 55%, 75% e 95% da altura total

2.2.8. Método Seccional Padrão

Adequado para o cálculo de volume total ou comercial tanto para árvores folhosas como coníferas, o método Seccional Padrão (Equação 17) é baseado na fórmula de Huber e, por convenção, as seções geralmente são mensuradas com 3 m de comprimento. Diferentemente dos métodos de Smalian, Huber e Newton, o método Seccional Padrão utiliza o valor mensurado do diâmetro ao invés da área seccional, sendo aplicado o diâmetro no meio de cada seção e o volume da árvore é calculado pela fórmula a seguir:

$$v = \frac{\pi}{4} \left(l_i \sum d_i^2 + l_n \frac{d_n^2}{3} \right) \quad (17)$$

Em que:

v é o volume da árvore em metros cúbicos

l_i é o comprimento das seções (deve ser constante)

l_n é o comprimento da ponta da árvore

d_i é o diâmetro no meio das seções com comprimento l_i

d_n é o diâmetro na extremidade superior da última sessão com comprimento l_i

l_n é o comprimento da última sessão do tronco, com comprimento menor do que l_i (comprimento da ponta)

2.2.9. Método FAO

O método utilizado pela *Food and Agriculture Organization of the United Nations* (FAO) é fundamentado no método de Hohenadl com 5 seções. Porém, diferentemente do método de Hohenadl, o método FAO propõe a medição de dois pontos adicionais na base do tronco, mensurados a 1/6 e 5/6 da seção inferior do tronco relativa a 20% da altura total.

O volume total da árvore segundo o método FAO (Equação 18) é dado por:

$$v = \frac{h}{5} \cdot \left[\left(\frac{2g_1 + g_{0,1} + g_2}{4} \right) + g_{0,3} + g_{0,5} + g_{0,7} + g_{0,9} \right] \quad (18)$$

Em que:

v é o volume da árvore em metros cúbicos

h é a altura total da árvore em metros

g_1 e g_2 são as áreas seccionais calculadas às alturas 1/6 e 5/6 da seção inferior do tronco relativa a 20% da altura total da árvore

$g_{0,1} \dots g_{0,9}$ são as áreas seccionais calculadas às alturas 10%, 30%, 50%, 70% e 90% da altura total da árvore

3. O PRINCIPAL PROBLEMA DOS MÉTODOS DE CUBAGEM

Todos os métodos de cubagem conhecidos e mencionados anteriormente são fundamentados em aproximações matemáticas do formato do fuste de uma árvore. Esses métodos assumem os pressupostos de que o tronco de uma árvore é composto pela união de várias seções de um mesmo tronco de sólido geométrico, dessa forma cada método considera a variação da forma do tronco apenas pela variação das áreas seccionais da base, do topo e/ou do centro das seções mensuradas.

Entretanto, uma árvore assume pelo menos três formas distintas podendo assumir até mesmo infinitas formas ao longo do seu fuste, sendo estas, uma forma próxima a linha do solo que se assemelha a um tronco de neiloide, uma porção maior do centro da árvore se assemelha a forma de um parabolóide e a ponta da árvore que tipicamente apresenta uma forma cônica, princípio esse seguido por alguns modelos de afilamento do fuste como os de forma variável e polinomiais segmentados (McTague; Weiskittel, 2021).

Essa aproximação realizada pelos métodos de cubagem, que são comumente utilizados como forma de se obter o valor real do volume para o ajuste de equações volumétricas ou de afilamento, pode resultar em erros na seleção de modelos, afirmando, por exemplo, que certos modelos volumétricos subestimam volumes muito além do que de fato pudessem subestimar.

Os vieses dos métodos de cubagem podem ser facilmente identificados quando suas estimativas são comparadas às medições realizadas com o auxílio do xilômetro. O grau de viés desses modelos vem sendo amplamente estudado por diversos autores, especialmente comparando a eficácia dos métodos em estimar volumes próximos aos obtidos pelo uso do xilômetro (Figueiredo-Filho; Machado; Carneiro, 2000; Lima *et al.*, 2016; Machado *et al.*, 2006; Phillips; Taras, 1987).

Phillips e Taras (1987) estudaram o comportamento dos métodos de cubagem de Smalian, Huber, Newton, Grosenbaugh, tronco de neilóide e tronco de cone, coletando os diâmetros ou circunferências ao longo dos fustes com o auxílio de fita métrica e suta. Os autores compararam a eficiência dos métodos em se aproximar do valor real obtido pelo xilômetro com os dois instrumentos de medição e observaram que, independentemente do instrumento utilizado, as fórmulas de Huber e Newton obtiveram melhor desempenho em relação às demais fórmulas.

Figueiredo-Filho, Machado e Carneiro (2000) compararam a acurácia de três fórmulas tradicionais de cubagem e três métodos mais recentes para estimar o volume real de árvores de *Pinus elliottii* em uma floresta de 32 anos localizada no município de Pinhais no Paraná. As fórmulas comparadas foram as de Smalian, Huber e Newton e os métodos foram o Centróide, Spline Cúbica e Sobreposição de Seções de Bailey. As estimativas obtidas por todos os métodos utilizados foram comparadas com medições do volume realizadas com um xilômetro. Os autores identificaram que todos poderiam ser utilizados quando o comprimento das seções do tronco mensuradas não fosse superior a 2 m. Contudo, nos casos em que esses comprimentos eram maiores, a fórmula de Huber apresentou resultados superiores aos demais métodos. Independentemente do comprimento da seção, a fórmula de Huber foi superior, portanto, os

autores recomendaram o uso da fórmula, principalmente com o objetivo de reduzir os esforços com a coleta dos dados, reduzindo os custos da cubagem.

Lima *et al.* (2016), estudando o volume de árvores de *Pinus taeda*, também compararam métodos de cubagem, como o método da cubagem relativa de 19 seções, os métodos de Hohenadl com 5 e 10 seções, o método FAO, de Newton, de Huber, de Smalian, o método Seccional Padrão e o de Pressler com o valor real do volume obtido com o xilômetro, para identificar quais os modelos mais acurados em relação ao volume verdadeiro. Com amostras aleatórias de indivíduos com 9, 13 e 20 anos de idade, os autores observaram que o melhor método dentre todos testados foi o de Huber, que apenas diferiu estatisticamente do valor real para a idade de 13 anos, idade na qual nenhum outro modelo foi estatisticamente igual ao valor obtido pelo xilômetro.

Machado *et al.* (2006) realizaram a comparação de métodos de cubagem absolutos com os valores reais obtidos pelo xilômetro para árvores de *Mimosa scabrella* Bentham, popularmente conhecida no Brasil como Bracatinga. Os autores aplicaram os métodos de Smalian, Huber, Newton e Centroide e variaram os comprimentos das seções de medição, coletando os diâmetros acima de 1,3 m de altura com comprimentos de seção de 1, 2 e 4 m. Os autores observaram que todos os métodos testados apresentam superestimativas dos volumes verdadeiros, porém, o método de Huber foi o que apresentou os resultados mais próximos ao valor real, seguido pelo método Centroide.

O método de Smalian frequentemente aparece como o pior entre todos os métodos, apresentando as maiores tendências de superestimativas dos volumes próximos à linha do solo. Além disso, quanto maiores os comprimentos de seção utilizados com esse método, piores os seus resultados, o que mostra a necessidade da utilização de seções pequenas, aumentando o esforço durante a coleta de dados, diferentemente do método de Huber (Figueiredo-Filho; Machado; Carneiro, 2000; Lima *et al.*, 2016; Machado *et al.*, 2006; Phillips; Taras, 1987).

4. MÉTODOS PARA OBTENÇÃO DO DIÂMETRO

O viés dos métodos de cubagem, além de serem proporcionados pelas aproximações matemáticas das suas fórmulas, que consideram o fuste das árvores como um único sólido geométrico, ainda podem ser influenciados por outras fontes de erro. Ao coletar-se os diâmetros das árvores, é muito comum o uso de instrumentos como a suta dendrométrica e a fita métrica, onde o primeiro obtém os valores como medida do diâmetro e o segundo os valores do comprimento da circunferência do tronco na posição de medição. Além da suta e da fita métrica,

amplamente utilizados e conhecidos no setor florestal, existem equipamentos menos difundidos que também realizam medições ou estimativa dos diâmetros, como a forquilha eletrônica de medição de árvores (Eletronic Tree Measuring Fork), e a forquilha de Bitterlich ou Bitterlich sector-fork, também conhecido no Brasil como Visor de Diâmetro de Bitterlich (Liu *et al.*, 2011).

4.1. SUTA DENDROMÉTRICA

A suta é um instrumento que consiste em uma régua graduada com dois braços perpendiculares à régua e paralelos entre si, muito semelhante ao funcionamento de um paquímetro, porém em maiores dimensões. Assim como no paquímetro, um dos braços é fixo na extremidade da régua na posição zero e o outro é móvel, deslizando sobre a régua. Dessa forma, ao mensurar o diâmetro do fuste, deve-se deslizar o braço móvel e posicionar a suta de forma que os dois braços toquem as extremidades do tronco e, quando estiverem no mesmo nível e paralelos entre si, deve ser lida a medida indicada onde o braço móvel cruza com a régua graduada.

Como a suta apenas toma uma medida por vez e, é comum observarmos troncos onde as seções transversais apresentam-se irregulares, com formatos muito diferentes de um círculo, por isso é recomendado sempre tomar duas medidas ortogonais do diâmetro e que o valor utilizado como diâmetro da seção mensurada seja a média aritmética das medições. Dessa forma o diâmetro médio tende a retornar resultados menos enviesados em relação à área seccional real da posição de medição.

A suta é um dos equipamentos de mensuração florestal comumente utilizados em coletas de dados em povoamentos seja para a realização da cubagem rigorosa ou amostragem nas parcelas (Dobner Jr.; Higa; Urbano, 2012; Mendonça *et al.*, 2007; Özçelik; Crecente-Campo, 2016; Souza *et al.*, 2008), principalmente devido sua praticidade de utilização e agilidade na obtenção das medições, tornando-a de alto valor operacional.

Assim, como todo equipamento, a suta não é perfeitamente precisa, apresenta imperfeições e pode resultar em erros de medição. Esses erros podem ser provenientes de diversas fontes, dentre elas, imprecisão na régua graduada ou no equipamento que identifica o deslizamento do braço transversal móvel no caso de sutas digitais, provocado por grandes irregularidades na forma do tronco ou mesmo erros de utilização do equipamento pelo operador, que não posiciona a suta nivelada corretamente, perpendicular ao eixo do tronco.

4.2. FITA MÉTRICA

A fita métrica, como o próprio nome já diz, consiste numa fita, geralmente de nylon ou aço, que apresenta duas unidades de medida. Em uma face é indicada a medida do comprimento da circunferência com graduação em centímetros e submúltiplos em milímetros, e na face inversa é indicada a graduação em unidades de diâmetro, onde já é feita a conversão do comprimento da circunferência para o diâmetro médio pelo uso da relação $C = \pi d$, em que C é o comprimento da circunferência da seção do tronco e d é o valor do diâmetro, considerando π 3,1416.

Independentemente da forma da seção do tronco, com a fita métrica só é tomada uma única medição a cada altura, que deve ser feita de forma ortogonal à altura da árvore para evitar a superestimativa do diâmetro.

Por sua simplicidade de utilização e pela necessidade de apenas uma tomada de medida, a fita métrica também é muito utilizada em inventários florestais (Bila, 2011; Fischer *et al.*, 2001; Lumbres; Pyo; Lee, 2014; Sousa; Azevedo; Barreto, 2013), principalmente para a coleta das circunferências com a árvore ainda em pé, como CAS e CAP (circunferência à altura do solo e circunferência à altura do peito, respectivamente), visto que após a derrubada da árvore a utilização da fita métrica fica prejudicada pela necessidade de passar a fita por baixo do tronco para obter a circunferência corretamente.

Da mesma forma que a suta, a fita métrica também não possui precisão perfeita, principalmente nos casos em que a seção do tronco é altamente irregular. Como a única forma de obter o valor do diâmetro pelo uso da fita métrica é pela conversão $d = \frac{C}{\pi}$, o valor obtido para o diâmetro é equivalente a assumir que a seção transversal do tronco é um círculo perfeito. Além disso, assim como na utilização da suta, o operador da fita métrica pode cometer erros ao mensurar o comprimento da circunferência da seção ao posicionar a fita inclinada ao redor do tronco, ou não reparar na existência de algum nó e posicionar a fita sobre ele, gerando uma superestimativa da circunferência naquela região.

4.3. ELECTRONIC TREE MEASURING FORK (ETMF)

Além da suta e da fita métrica, existem outros aparelhos menos conhecidos, um exemplo destes é o Electronic Tree Measuring Fork, ou ETMF (Binot; Pothier; Lebel, 1995). Este aparelho consiste em dois braços metálicos dispostos em um ângulo de 60° entre si, formando uma forquilha, com emissores-receptores ultrassônicos localizados na base da forquilha, além de um coletor de dados. O ângulo de 60° entre os braços faz com que a distância entre os

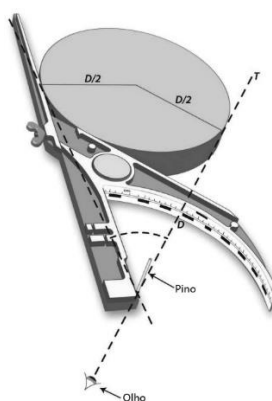
emissores-receptores seja igual ao diâmetro da área seccional de formato circular. Da mesma forma que a suta, o ETMF deve tomar duas medidas ortogonais em casos em que a seção do tronco seja irregular.

4.4. FORQUILHA DE BITTERLICH (BITTERLICH SECTOR-FORK)

A Forquilha de Bitterlich é um instrumento resultante de estudos para melhoria e desenvolvimento de um primeiro equipamento desenvolvido em 1952 pelo mundialmente renomado Engenheiro Florestal austríaco Walter Bitterlich. Conhecido por desenvolver métodos e equipamentos para mensuração florestal amplamente utilizados até os dias de hoje, como o método de Bitterlich para determinação da área basal em povoamentos florestais sem a medição dos diâmetros das árvores, além do multifuncional Relascópio de Bitterlich, ou Relascópio de Espelho, utilizado para obter a área basal, altura, diâmetros ao longo do fuste, distâncias horizontais e declividade do terreno (Soares; Paula Neto; Souza, 2011).

A Forquilha de Bitterlich é basicamente composta por plástico, sendo muito leve para uso no campo, e pode medir diâmetros variando entre 4 e 100 cm, apoiando o equipamento no tronco. A Forquilha é feita para ser aplicada com a mão esquerda, dessa forma, devendo ser apoiada na face esquerda do tronco, de forma a qual medida indicada na escala do equipamento está posicionada a extremidade direita do tronco. Dessa forma, o diâmetro é lido diretamente ao apoiar o equipamento no tronco (Figura 1).

FIGURA 1. Representação do funcionamento da Forquilha de Bitterlich



FONTE: modificado de Liu *et al.* (2011).

Assim como a suta, deve-se tomar duas medidas de diâmetro para o cálculo da média aritmética entre estas para a obtenção do diâmetro médio da seção. Em relação às diferenças entre fita métrica, suta e forquilha de Bitterlich, geralmente as medições da forquilha se

aproximam estatisticamente das encontradas pela suta e ambas costumam ser estatisticamente diferentes das obtidas pela dita diamétrica (Liu *et al.*, 2011).

5. INFLUÊNCIA DA FORMA DO FUSTE NA MEDIÇÃO DO DIÂMETRO

Qualquer que seja o instrumento dendrométrico utilizado, a mensuração é feita por meio da obtenção do diâmetro ou da circunferência das seções do tronco assumindo que estas sejam círculos perfeitos. No caso da suta e da Forquilha de Bitterlich, nas seções transversais irregulares que se aproximem de elipsoides, o diâmetro resultante será a média aritmética das duas medidas ortogonais do maior e menor diâmetros da seção, dessa forma a área seccional resultante será próxima à área da elipse. Entretanto, quando essa seção for altamente irregular, sem uma forma definida, fica difícil para o operador do instrumento escolher quais medidas de diâmetros tomar.

No caso do EMTF, como os braços não são paralelos entre si, como a suta, existem problemas de estimativa em situações em que a seção transversal do tronco se aproxime de um elipsoide. O ângulo de 60° entre os braços não permite que o aparelho toque exatamente nas extremidades do elipsoide, cuja reta passe no centro da seção transversal. Dessa forma, a medição pelo EMTF resultará na subestimativa do maior diâmetro e na superestimativa do menor diâmetro do elipsoide, resultando em medições enviesadas para regiões com seção transversal do tronco irregular (Binot; Pothier; Lebel, 1995).

A fita métrica, por sua vez, quando for mensurar o comprimento da circunferência de círculos perfeitos retornará valores muito próximos ao diâmetro e área seccional do tronco, porém, são poucos os casos em que as seções serão círculos perfeitos. Quando a seção transversal do tronco for um elipsoide ou qualquer outra forma geométrica irregular a fita métrica superestimar a área seccional e isso se deve à Desigualdade Isoperimétrica.

Segundo Blåsjö (2005) o teorema da Desigualdade Isoperimétrica, também conhecido como Problema Isoperimétrico, é um problema antigo, formulado no plano Euclidiano na Grécia Antiga e resolvido pelo matemático grego Zenodorus que provou que um círculo tem área superior a qualquer polígono de mesmo perímetro. Portanto, quando a seção do tronco for irregular, a fita métrica fará o cálculo da área seccional considerando que o perímetro mensurado se refere a um círculo perfeito e, dessa forma, superestimar a área seccional do tronco na posição de medição.

6. VALOR REAL DA ÁREA SECCIONAL

6.1. MÉTODO DA INTERPRETAÇÃO DE IMAGENS SECCIONAIS DO TRONCO

Ao estudar qual método de obtenção da área seccional do tronco era mais preciso ou menos tendencioso, Thiersch *et al.* (2021) propuseram a obtenção da área da seção transversal do fuste com o uso de fotografias digitais do tronco. O método proposto consiste no seccionamento da árvore nas alturas de medição para fotografar o disco de madeira resultante do corte e posicionar um objeto de área conhecida na superfície do disco para gerar escala para que a foto possa ser interpretada futuramente.

O processo requer o uso de um *studio box* com fundo contrastante de forma que o interior do equipamento, por não permitir a entrada de luz externa, evite a projeção de sombras provocadas pela luz solar. Assim, a imagem resultante será apenas o fundo contrastante, o disco de madeira e o objeto de área conhecida sobre o disco. As imagens são processadas por uma rede neural artificial (RNA) *Perceptron* de camada única implementada dentro do ambiente do *software R* (R CORE TEAM, 2023), que interpreta as imagens, desenha o contorno dos discos de madeira e do objeto de área conhecida (Figura 2). Então, ao atribuir ao objeto a sua verdadeira área, o *software R* consegue fazer o cálculo da área seccional do disco de madeira de forma proporcional.

FIGURA 2. Disco de madeira retirado na altura de medição antes e depois do processamento pela Rede Neural Artificial.



FONTE: (Thiersch *et al.*, 2021)

Os autores calcularam então os volumes obtidos pelo método de Smalian para as coletas de dados com fita métrica, suta e pelas imagens dos discos e, ao comparar os valores obtidos

com a medição do valor referencial do volume com o auxílio de um xilômetro, constataram que as imagens retornavam o menor erro para estimativa de volume. Os dados coletados com a fita métrica resultaram na superestimativa do volume das árvores pelo método de Smalian de 4,08% em média em relação ao volume obtido pelo xilômetro. Quando coletados com o auxílio da suta, os dados resultaram na subestimativa do volume em 1,41% em média. Já com o uso das imagens, os dados coletados resultaram em uma superestimativa de apenas 0,26% em média em relação ao volume obtido pelo xilômetro.

Deve-se levar em consideração que o método de Smalian não é o mais recomendado para realizar a cubagem devido sua tendenciosidade a superestimar os volumes, principalmente na região mais próxima à linha do solo. Portanto a superestimativa encontrada pela utilização das imagens das áreas seccionais pode ser também devido à falta de acuracidade do método de Smalian.

Além do método de Smalian, os autores ajustaram equações de afilamento utilizando os valores dos diâmetros médios a cada altura de medição para as coletas de dados com a fita métrica, suta e pelas imagens. Novamente, os dados obtidos pelas imagens digitais proporcionaram melhores ajustes para as equações de afilamento, retornando além dos diâmetros, volumes mais acurados em relação ao xilômetro, quando comparados com os ajustes fornecidos pelos diâmetros coletados com fita e suta.

A alta acurácia do método proposto pelos autores sugere a possibilidade da reconstrução tridimensional do volume por algoritmos capazes de compreender as seções do tronco e redesenhar a árvore tridimensionalmente utilizando reconstrução para então calcular o volume.

7. RECONSTRUÇÃO TRIDIMENSIONAL DO VOLUME

A reconstrução tridimensional de objetos a partir de seções bidimensionais é amplamente difundida na área da saúde especialmente entre os imaginologistas, que trabalham com o diagnóstico pelo uso de imagens, como a radiografia, ultrassonografia, ressonância magnética e tomografia computadorizada (Ekoule; Peyrin; Odet, 1991).

Esse procedimento de reconstrução das imagens tridimensionais é de extrema importância para a medicina, principalmente para a representação de estruturas internas da anatomia humana, como a representação de ossos, tecidos, órgãos e tumores. As técnicas de tomografia computadorizada assistida, ressonância magnética nuclear e ultrassonografia permitem obter imagens seccionais dessas estruturas internas e, com essas imagens paralelas,

conhecidas como “fatias” do objeto é possível reconstruir e visualizar a superfície externa do objeto de estudo (Ekoule; Peyrin; Odet, 1991; Meyers; Skinner; Sloan, 1992).

Segundo Jóia-Filho (2008), o processo de reconstrução tridimensional de um objeto a partir de fatias bidimensionais transversais é chamado de Visualização Volumétrica ou de Volumes e os algoritmos de visualização podem ser subdivididos em duas categorias principais: as técnicas de reconstrução de volumes e técnicas de reconstrução de superfícies.

A técnica de reconstrução de volumes tem como objetivo gerar uma imagem tridimensional a partir das seções bidimensionais do objeto de forma a representar todos os parâmetros externos e internos presentes nas imagens e geralmente são aplicados para visualizar objetos amorfos, como gases, dados geológicos ou estruturas do corpo humano como sangue e gordura (Peixoto; Gattass, 2000).

Já a Reconstrução de Superfícies, também chamada de extração de isosuperfícies, funciona de forma diferente, principalmente direcionada a extrair o contorno das imagens pela coloração das mesmas. Quando é possível identificar contornos nas imagens, o objetivo é extrair esses contornos e utilizar um método de interpolação entre as camadas subsequentes para reconstruir a superfície externa do objeto de estudo. A técnica de Extração de Isosuperfícies é comumente aplicada na reconstrução de objetos com formatos definidos como imagens médias provenientes de ressonâncias magnéticas, tomografias computadorizadas e ultrassonografias, principalmente de ossos, órgãos ou mesmo para identificação de tumores, cistos e inflamações. O método é mais simples do que a reconstrução de volumes, pois independe do interior do objeto, uma vez que somente os contornos da estrutura são processados para reconstruir o volume do objeto (Ekoule; Peyrin; Odet, 1991; Fuchs; Kedem; Uselton, 1977; Jóia-Filho, 2008; Keppel, 1975; Meyers; Skinner; Sloan, 1992).

7.1. ALGORITMOS PARA RECONSTRUÇÃO DE VOLUMES

O método da obtenção de isolinhas e geração de triangulações entre planos adjacentes de imagens bidimensionais para reconstruir o volume de um objeto surgiu com (KEPPEL, 1975) com a criação do algoritmo Contour Connecting, que permite o uso de qualquer tipo de imagens bidimensionais, independentemente do formato do objeto de estudo.

O algoritmo atua inicialmente em cada imagem separadamente para identificar os contornos, conectando os pontos identificados na imagem para traçar uma isolinha (linha de isovalores) referente ao contorno do objeto, para então encontrar a conexão ótima triangulando as isolinhas adjacentes. O algoritmo Contour Connecting é baseado na teoria dos Grafos para

resolver o problema da combinação ótima entre os pontos das isolinhas adjacentes, sendo a trajetória definida por decisões heurísticas, podendo levar a vieses inconscientes (Jóia-Filho, 2008).

A técnica de aproximação de superfícies complexas pela triangulação de linhas de contornos foi proposta como um algoritmo para, utilizando-se da triangulação, obter uma aproximação ótima de uma superfície tridimensional definida por pontos aleatoriamente distribuídos dentro de linhas de contorno. Segundo Keppel (1975) o problema de uma triangulação reside no fato de que linhas de contorno não contém informação suficiente sobre o sistema de gradientes associados à superfície tridimensional que os mesmos descrevem.

Portanto, o aspecto combinatório do problema se torna aparente quando se considera quantos diferentes arranjos T de triângulos podem ser definidos para um número fixo de pontos de contorno. Para duas linhas de contornos compostas por n e m pontos, o número de possíveis triangulações (T) (Equação 19) é dado por:

$$T(m, n) = \frac{[(m - 1) + (n + 1)]!}{[(m - 1)! (n - 1)!]} \quad (19)$$

A expressão demonstra que para um conjunto pequeno de pontos m e n , por exemplo, $m = n = 12$, o número de triangulações possíveis é aproximadamente 10^7 e, conseqüentemente, diferentes formas de superfícies resultantes, resultando em uma procura exaustiva pela triangulação ótima.

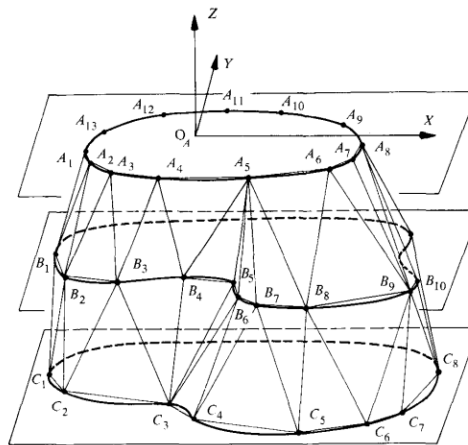
Diferentemente da triangulação de Delaunay, que apresenta uma solução matemática para a triangulação ótima, utilizando-se da restrição de que todo triângulo resultante deve ter uma circunferência circunscrevendo-o e que não contenha nenhum outro vértice de nenhum outro triângulo da triangulação resultante, a solução proposta por Keppel (1975) concentra-se em um método computacional para triangular superfícies arbitrárias definidas por pontos aleatorizados dentro dos contornos. Sendo assim, o método proposto é aplicável a todas e quaisquer linhas complexas ou simples, retorcidas em porções côncavas ou convexas, que se possa obter.

Considera-se uma superfície tridimensional desconhecida cujo mapa de contornos é dado em um sistema de coordenadas cartesianas como na Figura 3. Uma linha de contorno dessa superfície pode ser definida como uma seção transversal de valor z constante e é fornecida numericamente pelas coordenadas xy de uma sequência ordenada e distribuída aleatoriamente de pontos na linha de contorno. O número total de pontos a serem lançados no contorno dependerá da precisão almejada. O espaçamento entre as seções transversais pode ser variável.

A principal estratégia para encontrar a disposição ideal dos triângulos aproximando-se da superfície desconhecida é decompor o conjunto de pontos na linha contorno em subconjuntos de forma que uma função objetiva adequada possa ser declarada separadamente para cada subconjunto.

A primeira etapa de decomposição das linhas de contorno consiste no manuseio de cada par de linhas de contorno adjacentes de forma independente. Quando um objeto é definido por mais de duas seções transversais, cada faixa de superfície lateral delimitada por duas linhas de contorno adjacentes é triangulada separadamente, e toda a superfície é obtida pelo manuseio subsequente de todos os pares de linhas de contorno adjacentes.

FIGURA 3. Método de aproximação da superfície de um objeto pela triangulação de linhas de contorno.



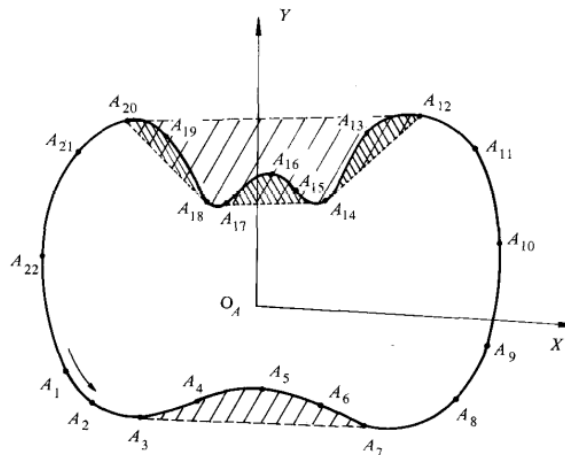
Fonte: (Keppel, 1975).

Em caso de linhas mais complexas, por exemplo, curvas, flexionadas de forma aleatória, alternando entre concavidade e convexidade, o processo de decomposição decisivo deve ser aplicado. Dessa forma, inicialmente assume-se as linhas de contorno a serem fechadas e os pontos de contorno ordenados em uma sequência positiva, por exemplo, no sentido anti-horário. O sinal de curvatura é então fixado convencionalmente; uma sequência de três pontos de contorno consecutivos é convexa se a curvatura do círculo que passa pelos três pontos tiver um sinal positivo, caso contrário é côncava.

A triangulação de um par de linhas de contorno é obtida por uma decomposição iterativa dos pontos de contorno em subconjuntos de pontos de sequências exclusivamente convexas ou côncavas, alternadamente. A Figura 4 ilustra essa decomposição gradual de um conjunto fechado S de pontos de uma linha contorno em subconjuntos puramente côncavos e convexas

S_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$. O subconjunto convexo S_1 para a primeira etapa de iteração é obtido removendo de S qualquer ponto A_k para o qual o círculo que passa por A_{k-1} , A_k e A_{k+1} tem sinal negativo de curvatura. As seqüências de pontos restantes são então testadas para sinais opostos de curvatura da mesma forma, e o processo é repetido até que os pontos da linha de contorno sejam separados em seqüências convexas ou côncavas.

FIGURA 4. Exemplo de uma decomposição iterativa de um conjunto de pontos de contorno $S = \{A_1, A_2, \dots, A_{22}\}$ em, alternadamente, subconjuntos côncavos e convexas.



Fonte: (Keppel, 1975).

Um dos algoritmos mais utilizados para a técnica de Reconstrução de Volumes é o algoritmo desenvolvido de forma independente por Lorensen e Cline (1987) e Wyvill, McPheeters e Wyvill (1986), chamado Marching Cubes, que foi criado com o objetivo de processar imagens médicas em três dimensões obtidas por meio de tomografias e ressonâncias magnéticas. O Marching Cubes inicialmente foi projetado para identificar como um cubo hipotético é cortado pela superfície do objeto representado em um conjunto de dados tridimensional. É um algoritmo de fácil entendimento e sua implementação é simples e retorna bons resultados sem ser oneroso (Jóia-Filho, 2008; Paiva; Rodriguez; Gattass, 1998).

Uma evolução do algoritmo Marching Cubes foi proposta por Cline *et al.* (1988) e ficou conhecida como Dividing Cubes que adicionava a subdivisão do *voxel* (unidade tridimensional de medida das imagens, equivalente ao *pixel*, que é a unidade de medida de imagens *raster* bidimensionais). Essa subdivisão, permitiu o aumento na precisão da interpolação dos dados para a renderização do objeto tridimensional no final. Entretanto, esse aumento na precisão resultava em um maior tempo de processamento da imagem.

Chernyaev (1995) encontrou algumas falhas no método Marching Cubes, a primeira falha era causada por discrepâncias na etapa de conexão de alguns vértices ambíguos, ou seja,

que eram presentes em células vizinhas em cada isolinha gerada em imagens adjacentes. Quando essa discrepância acontecia, era possível identificar falhas na reconstrução da isosuperfície pelo aparecimento de espaços vazios (buracos) no volume renderizado. A segunda falha observada pelo autor era resultante de ambiguidades geradas pelos diferentes tipos de cortes que uma superfície poderia fazer no cubo que fazia com que pudessem ser obtidos resultados diferentes de acordo com a interpretação da tipologia. O algoritmo original propunha 15 tipologias distintas e Chernyaev aumentou para 33 possibilidades para resolver os casos de ambiguidades.

7.2. MÉTODOS DE GERAÇÃO DE MALHA

Além dos métodos de conexão de contornos, outra forma de identificar superfícies e reconstruir o volume de fatias bidimensionais de um objeto tridimensional é pelo método de geração de malha. Os métodos de geração de malha geralmente são utilizados para interpretar dados bidimensionais e assim gerar elementos poligonais planos interpolando o contorno do polígono resultante da base de dados, normalmente usam triângulos e permitem o cálculo da área resultante do polígono por meio do somatório das áreas dos triângulos (Chan *et al.*, 1999; Jóia-Filho, 2008).

Quando aplicados em conjuntos de dados tridimensionais, os métodos geradores de malha são aplicados para formar uma casca ou uma malha de superfície, assim como os métodos de reconstrução de volumes, que também geram malhas de superfície, ou isosuperfícies, ao sobrepor as fatias bidimensionais e interpolar os vértices por triangulação dos contornos (Chan *et al.*, 1999; Jones; Chen, 1994).

Segundo De Berg *et al.* (2008), alguns métodos geradores de malha de volume, que se utilizam apenas de dados tridimensionais produzem elementos tetraédricos que preenchem o interior do objeto sem deixar espaços vazios entre si e sem a ocorrência de sobreposição dos elementos. De acordo com Jóia-Filho (2008), a qualidade dessas malhas é definida pelo cumprimento das premissas de ausência de espaços vazios e sobreposição, além do preenchimento total do volume e pelo grau de homogeneidade da distribuição dos elementos. Portanto, para que o método seja eficaz, é necessário que o interior do objeto seja preenchido com poliedros convexos regulares, como tetraedros ou hexaedros, por exemplo, sendo o mais uniforme possível entre si.

Dentre as técnicas de triangulação de objetos tridimensionais existentes na literatura a grande maioria se baseia na triangulação de Delaunay 3D para reconstruir o volume do objeto

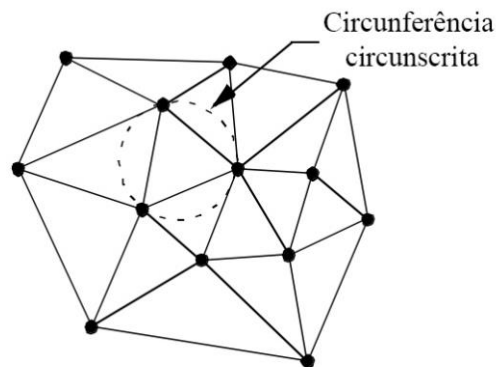
de estudo. O algoritmo proposto por Delaunay (1934) é inspirado no primeiro trabalho conhecido dentro da área de geometria computacional, o chamado Diagrama de Voronoï, que consiste numa estrutura geométrica proposta por Voronoï (1909) e que serviu de base para todos os tipos de triangulação existentes hoje.

7.3. TRIANGULAÇÃO DE DELAUNAY

A técnica de triangulação, segundo Schroeder, Martin e Lorensen (2006) consiste em construir uma topologia a partir de pontos desestruturados. Para isso, esses pontos são triangulados de forma a criar uma estrutura topológica que é composta por simplexos n -dimensionais, que são generalizações triangulares ou tetraédricas, que ligam completamente os pontos desestruturados por combinações lineares, chamadas de *convex hull*, e o resultado é um conjunto de triângulos em bases de dados bidimensionais ou um conjunto de tetraedros no caso de bases de dados tridimensionais. Uma triangulação n -dimensional de um conjunto de pontos $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$ consiste numa coleção de pontos onde simplexos n -dimensionais se encontram. Em uma triangulação, os simplexos não se sobrepõem ou se intersectam, mas compartilham arestas e/ou faces.

No caso da triangulação de Delaunay, segundo os mesmos autores existe uma restrição adicional à definição anterior, que diz que para cada simplexo existe uma circunferência circunscrita (2D) ou esfera circunscrita (3D) a eles que não contém nenhum outro ponto presente em P a não ser os $n + 1$ pontos definidos no respectivo simplexo. Ou seja, em um conjunto de pontos $P \subseteq R^2$, uma triangulação é de Delaunay se, e somente se, a circunferência que circunscreve cada um dos triângulos resultantes não contiver nenhum outro ponto de P . A Figura 5 representa essa propriedade, conhecida como critério de Delaunay.

FIGURA 5. Triangulação de Delaunay.



Fonte: SCHROEDER; MARTIN; LORENSEN (2006).

A razão dessa triangulação ser tão importante em diferentes aplicações reside em duas propriedades fundamentais que a torna uma representante especial entre todas as triangulações associadas ao mesmo conjunto de pontos: maximiza o menor dos ângulos entre todas as triangulações possíveis (Sibson, 1978); se não existirem mais que três pontos cocirculares, então a triangulação é única.

No caso de dados bidimensionais, a triangulação de Delaunay é caracterizada como a triangulação ótima, o que significa que o ângulo interior mínimo de um triângulo na triangulação de Delaunay é maior ou igual ao ângulo interior mínimo de qualquer outra triangulação possível (de Berg *et al.*, 2008; Klein, 2016; Lee; Schachter, 1980; Paul Chew, 1989; Su; Scot Drysdale, 1997).

A triangulação de Delaunay é uma metodologia conceitual, podendo ser aplicada de diversas formas e, por isso, já sofreu uma série de modificações ao longo do tempo. Sua aplicação pode ser feita isoladamente por um algoritmo que siga os pressupostos formulados por Delaunay (1934) ou que utilize combinações deste com outros algoritmos. Dentre as implementações mais notáveis do método cita-se o algoritmo desenvolvido de forma independente por Bowyer (1981) e Watson (1981).

Segundo Schroeder, Martin e Lorensen (2006) o algoritmo inicia construindo uma triangulação de Delaunay que apenas une o conjunto de pontos P , chamada de *bounding triangulation*. Essa triangulação pode ser simples como um triângulo (2D) ou um tetraedro (3D). Então, cada ponto do conjunto P é adicionado, um por um, dentro da triangulação. Se o ponto adicionado cair dentro do círculo circunscrito de qualquer simplexo, então o simplexo é deletado, deixando um buraco na triangulação. Após deletar todos os simplexos, as $n - 1$ faces no limite dos buracos, junto com o ponto adicionado, são usados para construir uma triangulação modificada. O processo continua até que todos os pontos do conjunto P sejam inseridos na triangulação. O último passo remove os simplexos que conectam os pontos formando a *bounding triangulation* inicial para revelar a triangulação de Delaunay completa.

As técnicas de triangulação apresentam algumas dificuldades, como problemas numéricos ou degeneração. Os problemas numéricos podem ocorrer ao tentar calcular os centros das circunferências, principalmente nos casos de triangulações de altas dimensões, ou com simplexos de proporções estranhas. Já as degenerações ocorrem quando pontos na triangulação se apresentam de uma forma que a triangulação resultante não é única. Por exemplo, pontos que formam os vértices de um hexágono, quadrado ou retângulo são degenerados por que podem ser triangulados em mais de um modo onde cada triangulação é

equivalente às demais de acordo com os pressupostos da triangulação de Delaunay (de Berg *et al.*, 2008; Schroeder; Martin; Lorensen, 2006; Su; Scot Drysdale, 1997).

Como a aplicação no setor florestal visa a obtenção da superfície do tronco para estimativa do volume real das árvores a partir dos dados obtidos na cubagem por meio das imagens das seções do tronco, este trabalho tem por objetivo o estudo dos métodos relacionados à geração de malha baseados na triangulação de Delaunay 3D. Ao realizar a interpolação dos pontos e gerar a triangulação de Delaunay respeitando todos os pressupostos estabelecidos, o somatório das áreas das isosuperfícies dos tetraedros resultantes da triangulação é igual ao volume do objeto de estudo.

Portanto, para calcular o volume de uma árvore a partir de imagens das seções transversais do tronco, basta extrair o contorno referente à forma do fuste de cada seção, gerar uma malha tridimensional a partir da triangulação de Delaunay entre cada uma das seções e somar as áreas das isosuperfícies dos tetraedros resultantes. Dessa forma obter-se-á o valor correspondente ao volume de cada seção do tronco, sendo necessário realizar o somatório dos volumes para obter o volume do tronco desde a altura do toco até a altura comercial.

8. O ESTUDO DA FORMA DO FUSTE

Os fustes de espécies arbóreas apresentam formas distintas, variando de espécie para espécie; de indivíduo para indivíduo dentro da mesma espécie; entre clones de uma mesma origem, dependendo da sua localização (sítio) bem como sua posição dentro do talhão; além das diferenças originadas pelos tratamentos silviculturais, estação do ano, ou outras possíveis situações particulares ou características intrínsecas; e, por fim, dentro do próprio indivíduo, que varia ao longo da idade (Gomes, 1957). Tamanha quantidade de fontes de variabilidade requer estudos constantes direcionados à estimativa cada vez mais precisa, fazendo com que inúmeros modelos matemáticos capazes de representar o perfil do fuste sejam desenvolvidos.

A representação matemática da forma do fuste de uma árvore pode ser resumida por um conceito simples da geometria analítica e estudo das cônicas.

A equação da parábola ordinária (Equação 20), definida por:

$$y = \pm kx^{\frac{1}{2}} \quad (20)$$

Em que:

k é uma constante

x é o valor da coordenada do eixo das abcissas

Tal equação assemelha-se a uma imensa variedade de espécies florestais, sendo importante ponto de partida para a estimativa do perfil longitudinal do fuste destas. Entretanto, sabe-se que na maioria das vezes o perfil do fuste pode assumir inúmeras formas de sólidos geométricos, dessa forma, comumente se generaliza a formulação da parábola ordinária obtendo-se diferentes curvas resultantes (Equação 21) (Gomes, 1957; Husch; Beers; Kershaw JR., 2003):

$$y = \pm kx^r \quad (21)$$

Em que:

k é uma constante

x é o valor da coordenada do eixo das abcissas

r é o índice da parábola generalizada

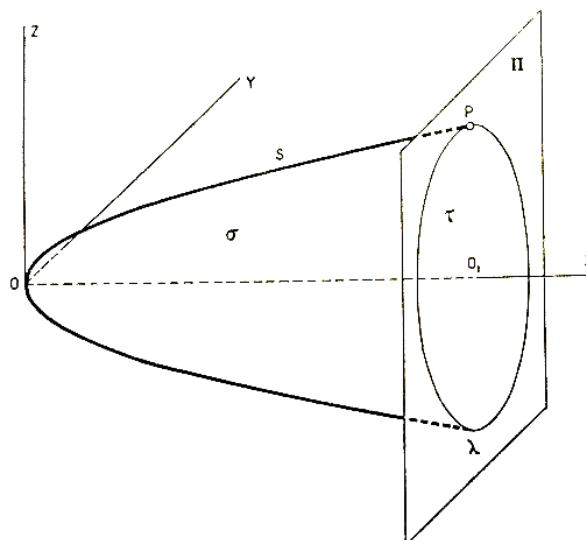
Em resumo, se na Equação 21, $r = \frac{1}{2}$, obtém-se a Equação 20, ou seja, a parábola ordinária, muito semelhante às regiões centrais das árvores. Se $r = \frac{1}{3}$, obtém-se uma curva parabolóide cúbica. Se $r = \frac{2}{3}$, obtém-se uma curva parabolóide semicúbica. Se $r = 1$ obtém-se duas retas que passam pela origem e são simétricas em relação ao eixo das abcissas, sendo o ângulo α formado pelas retas com o eixo O que condiciona o valor de k na Equação 21 ($k = tg\alpha$), muito semelhante às extremidades superiores dos troncos. Por fim, se $r = \frac{3}{2}$, obtém-se a curva denominada parábola de Neil, ou neilóide, muito semelhante às seções da base das árvores.

Considera-se a Figura 6 retirada de (Gomes, 1957): um sistema de referência ortornormado Oxyz; um ramo de parábola ordinária S de vértice em O, cujo eixo referencial é o eixo Ox; uma circunferência λ situada em um plano II perpendicular ao eixo das abcissas, com o centro O_1 em Ox e tal que a curva S a encontra num ponto P (de S).

Supondo que um dos ramos da parábola (S) se move de forma que, mantendo seu vértice em O e o eixo referencial em Ox, o ponto P percorra a circunferência λ num mesmo sentido até que atinja novamente a posição inicial, o ramo da parábola gerará uma superfície de revolução σ de superfície parabólica. O conjunto infinito de pontos coincidentes com a superfície σ ou que pertençam à região do espaço compreendida por ela, dá-se o nome parabolóide de revolução. O ramo da parábola (S) dá-se o nome *geratriz* do parabolóide e à circunferência λ

dá se o nome *diretriz*. Sendo assim, a superfície σ é gerada pela rotação do ramo S , com O fixo e diretriz λ (GOMES, 1957).

FIGURA 6. Sistema de referência Orto-normado $Oxyz$ com sólido de revolução parabolóide.



Fonte: (Gomes, 1957).

Sendo assim, de uma maneira geral, a equação 21 pode ser a representação do perfil longitudinal de qualquer sólido geométrico, podendo ser aplicada como uma representação do perfil do fuste de uma árvore.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AKINDELE, S. O.; LEMAY, V. M. Development of tree volume equations for common timber species in the tropical rain forest area of Nigeria. **Forest Ecology and Management**, v. 226, n. 1–3, p. 41–48, 2006. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.foreco.2006.01.022>

ANDRADE, V. C. L. de. Fórmulas de Huber, Smalian e Newton avaliadas no cálculo do volume do fuste de *Corymbia citriodora*. **Advances in Forestry Science**, v. 10, n. 2, p. 1965–1978, 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.34062/afs.v10i2.13077>

BILA, J. M. Relações hipsométricas de ecossistemas de mopane *Colophospermum mopane* em Mabalane, Província de Gaza, Moçambique. **Pesquisa Florestal Brasileira**, v. 31, n. 66, p. 155–160, 2011. Disponível em: <https://doi.org/10.4336/2011.pfb.31.66.155>

BINOT, J.-M.; POTHIER, D.; LEBEL, J. Comparison of relative accuracy and time requirement between the caliper, the diameter tape and an electronic tree measuring fork. **The**

Forestry Chronicle, v. 71, n. 2, p. 197–200, 1995. Disponível em:

<https://doi.org/10.5558/tfc71197-2>

BLÅSJÖ, V. The Isoperimetric Problem. **The American Mathematical Monthly**, v. 112, n. 6, p. 526–566, 2005.

BOWYER, A. Computing Dirichlet tessellations. **The Computer Journal**, v. 24, n. 2, p. 162–166, 1981. Disponível em: <https://doi.org/10.1093/comjnl/24.2.162>

CAMPOS, O. J. de. **Cubagem de árvores**. 2014. - Dissertação (Mestrado em Matemática) - Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, [s. l.], 2014. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/123279/327161.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

CARRON, L. T. **An Outline of Forest Mensuration with Special Reference to Australia**. [S. l.]: Australian National University Press, 1968.

CHAN, C. F.; KWOH, C. K.; TEO, M. Y.; NG, W. S. Tessellated Surface Reconstruction from 2D Contours. In: [S. l.: s. n.], p. 297–307. *E-book*. Disponível em: https://doi.org/10.1007/10704282_33

CHERNYAEV, E. **Marching cubes 33 : Construction of Topologically Correct Isosurfaces. Technical Report CERN CN 95-17**. Saint-Petersburg, Russia: [s. n.], 1995.

CLINE, H. E.; LORENSEN, W. E.; LUDKE, S.; CRAWFORD, C. R.; TEETER, B. C. Two algorithms for the three-dimensional reconstruction of tomograms. **Medical Physics**, v. 15, n. 3, p. 320–327, 1988. Disponível em: <https://doi.org/10.1118/1.596225>

DE BERG, M.; CHEONG, O.; VAN KREVELD, M.; OVERMARS, M. **Computational Geometry**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2008. *E-book*. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-77974-2>

DELAUNAY, B. Sur la sphère vide. A la mémoire de Georges Voronoï. **Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS**, v. 1, n. 6, p. 793–800, 1934.

DOBNER JR., M.; HIGA, A. R.; URBANO, E. Determinação da idade e intensidade ótimas para realização do primeiro desbaste em um povoamento de *Eucalyptus dunnii*. **FLORESTA**, v. 42, n. 3, p. 485, 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.5380/rf.v42i3.21028>

EKOULE, A. B.; PEYRIN, F. C.; ODET, C. L. A triangulation algorithm from arbitrary shaped multiple planar contours. **ACM Transactions on Graphics**, v. 10, n. 2, p. 182–199, 1991. Disponível em: <https://doi.org/10.1145/108360.108363>

FIGUEIREDO-FILHO, A.; MACHADO, S. A.; CARNEIRO, M. R. A. Testing

accuracy of log volume calculation procedures against water displacement techniques (xylometer). **Canadian Journal of Forest Research**, v. 30, n. 6, p. 990–997, 2000.

Disponível em: <https://doi.org/10.1139/x00-006>

FISCHER, F.; SCOLFORO, J. R. S.; ACERBI-JÚNIOR, F. W.; MELLO, J. M.; MAESTRI, R. Exatidão dos modelos polinomiais não-segmentados e das razões entre volumes para representar o perfil do tronco de *Pinus taeda*. **Ciência Florestal**, v. 11, n. 1, p. 167–188, 2001.

FORSLUND, R. R. A geometrical tree volume model based on the location of the centre of gravity of the bole. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 12, n. 2, p. 215–221, 1982. Disponível em: <https://doi.org/10.1139/x82-033>

FUCHS, H.; KEDEM, Z. M.; USELTON, S. P. Optimal surface reconstruction from planar contours. **Communications of the ACM**, v. 20, n. 10, p. 693–702, 1977. Disponível em: <https://doi.org/10.1145/359842.359846>

GOLDING, D. L.; HALL, O. F. Tests of precision of cubic-foot tree-volume equations on aspen, jackpine, and white spruce. **The Forestry Chronicle**, v. 37, n. 2, p. 123–132, 1961. Disponível em: <https://doi.org/10.5558/tfc37123-2>

GOMES, A. M. de A. **Medição dos Arvoredos**. 1. ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa, 1957.

HEIDARSSON, L.; PUKKALA, T. Taper functions for lodgepole pine (*Pinus contorta*) and Siberian larch (*Larix sibirica*) in Iceland. **Icelandic Agricultural Sciences**, v. 24, n. 1, p. 3–11, 2011.

HUSCH, B.; BEERS, T. W.; KERSHAW JR., J. A. **Forest mensuration**. [S. l.]: Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2003.

INDÚSTRIA BRASILEIRA DE ÁRVORES, I. **Relatório Anual 2023**. [S. l.: s. n.]. Disponível em: <https://iba.org/datafiles/publicacoes/relatorios/relatorio-anual-iba2023-r.pdf>. Acesso em: 21 out. 2023.

JÓIA-FILHO, P. **Reconstrução e geração de malhas em estruturas biomecânicas tridimensionais para análise por elementos finitos**. 2008. - Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Estadual Paulista, Bauru, [s. l.], 2008.

JONES, M. W.; CHEN, M. A New Approach to the Construction of Surfaces from Contour Data. **Computer Graphics Forum**, v. 13, n. 3, p. 75–84, 1994. Disponível em: <https://doi.org/10.1111/1467-8659.1330075>

KEPPEL, E. Approximating Complex Surfaces by Triangulation of Contour Lines.

IBM Journal of Research and Development, v. 19, n. 1, p. 2–11, 1975. Disponível em: <https://doi.org/10.1147/rd.191.0002>

KLEIN, R. Voronoi Diagrams and Delaunay Triangulations. *In: Encyclopedia of Algorithms*. New York, NY: Springer New York, 2016. p. 2340–2344. *E-book*. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-1-4939-2864-4_507

KOZAK, A. My last words on taper equations. **The Forestry Chronicle**, v. 80, n. 4, p. 507–515, 2004. Disponível em: <https://doi.org/10.5558/tfc80507-4>

LEE, D. T.; SCHACHTER, B. J. Two algorithms for constructing a Delaunay triangulation. **International Journal of Computer & Information Sciences**, v. 9, n. 3, p. 219–242, 1980. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF00977785>

LEITE, H. G.; ANDRADE, V. C. L. de. Um método para condução de inventários florestais sem o uso de equações volumétricas. **Revista Árvore**, v. 26, n. 3, p. 321–328, 2002. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S0100-67622002000300007>

LIMA, G. C. P. **Comparação de diferentes métodos de cubagem de madeira de povoamento de Pinus taeda L. na região serrana de Santa Catarina**. 2015. - Dissertação (Mestrado em Engenharia Florestal) - Universidade Estadual de Santa Catarina, Lages, [s. l.], 2015.

LIMA, G. C. P.; KOHLER, S. V.; SILVESTRE, R.; NAVROSKI, M. C.; BONAZZA, M.; ALLEGRETTI, G.; SCARIOTI, R. ACURACIDADE DE MÉTODOS DE CUBAGEM PARA ESTIMATIVA DO VOLUME DE Pinus taeda L. **BIOFIX Scientific Journal**, v. 1, n. 1, 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.5380/biofix.v1i1.49101>

LIU, S.; BITTERLICH, W.; CIESZEWSKI, C. J.; ZASADA, M. J. Comparing the Use of Three Dendrometers for Measuring Diameters at Breast Height. **Southern Journal of Applied Forestry**, v. 35, n. 3, p. 136–141, 2011. Disponível em: <https://doi.org/10.1093/sjaf/35.3.136>

LOETSCH, F.; ZÖHRER, F.; HALLER, K. E. **Forest Inventory**. 2. ed. München: BLV Verlagsgesellschaft, 1973.

LORENSEN, W. E.; CLINE, H. E. Marching cubes: A high resolution 3D surface construction algorithm. *In: 1987, New York, New York, USA. Proceedings of the 14th annual conference on Computer graphics and interactive techniques - SIGGRAPH '87*. New York, New York, USA: ACM Press, 1987. p. 163–169. Disponível em: <https://doi.org/10.1145/37401.37422>

LUMBRES, R. I. C.; PYO, J. K.; LEE, Y. J. Development of stem taper equations for

Pinus kesiya in Benguet province, Philippines. **Forest Science and Technology**, v. 10, n. 1, p. 22–28, 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/21580103.2013.821094>

MACHADO, S. do A.; CONCEIÇÃO, M. B.; FIGUEIREDO, D. J. Modelagem do volume individual para diferentes idades e regimes de desbaste em plantações de Pinus oocarpa. **Revista Ciências Exatas e Naturais**, v. 4, n. 2, p. 185–197, 2002.

MACHADO, S. do A.; FIGUEIREDO-FILHO, A. **Dendrometria**. 2. ed. Guarapuava: Unicentro, 2014.

MACHADO, S. do A.; TÉO, S. J.; URBANO, E.; FIGURA, M. A.; SILVA, L. C. R. Comparação de métodos de cubagem absolutos com o volume obtido pelo xilômetro para bracatinga (*Mimosa scabrella* Bentham). **Cerne**, v. 12, n. 3, p. 239–253, 2006.

MCTAGUE, J. P.; WEISKITTEL, A. Evolution, history, and use of stem taper equations: a review of their development, application, and implementation. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 51, n. 2, p. 210–235, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1139/cjfr-2020-0326>

MENDONÇA, A. R.; SILVA, G. F.; OLIVEIRA, J. T. da S.; ASSIS, A. L. Avaliação de funções de afilamento visando a otimização de fustes de *Eucalyptus* sp. para multiprodutos. **Cerne**, v. 13, n. 1, p. 71–82, 2007.

MEYERS, D.; SKINNER, S.; SLOAN, K. Surfaces from contours. **ACM Transactions on Graphics**, v. 11, n. 3, p. 228–258, 1992. Disponível em: <https://doi.org/10.1145/130881.131213>

MIGUEL, E. P.; LEAL, F. A.; ONO, H. A.; LEAL, U. A. S. Modelagem na predição do volume individual em plantio de *Eucalyptus Urograndis*. **Revista Brasileira de Biometria**, v. 32, n. 4, p. 584–598, 2014.

MÜLLER, I.; FINGER, C. A. G.; SCHNEIDER, P. R. Forma de tronco e sortimentos de madeira de *Eucalyptus grandis* Hill ex Maiden., na região sudeste do estado do Rio Grande do Sul. **Ciência Florestal**, v. 15, n. 3, p. 293, 2005. Disponível em: <https://doi.org/10.5902/198050981867>

ÖZÇELİK, R.; CRECENTE-CAMPO, F. Stem Taper Equations for Estimating Merchantable Volume of Lebanon Cedar Trees in the Taurus Mountains, Southern Turkey. **Forest Science**, v. 62, n. 1, p. 78–91, 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.5849/forsci.14-212>

PAIVA, A. C.; RODRIGUEZ, N.; GATTASS, M. **Técnicas Paralelas de Rendering**. Rio de Janeiro: PUC-Rio, 1998.

PAUL CHEW, L. Constrained delaunay triangulations. **Algorithmica**, v. 4, n. 1–4, p. 97–108, 1989. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF01553881>

PAULA NETO, F.; BRANDI, R. M.; RIBEIRO, J. C.; GUIMARÃES, D. P. Teste de aplicação de tabelas volumétricas para estimar a produção e plantações de *Eucalyptus paniculata* Sm. na região de Ipatinga. **Revista Árvore**, v. 1, n. 2, p. 154–166, 1977.

PEIXOTO, A.; GATTASS, M. **Reconstrução de Superfícies a partir de Seções Bidimensionais**. PUC-Rio.Inf.MCC 28/00: [s. n.], 2000.

PELLISSARI, A. L.; LANSSANOVA, L. R.; DRESCHER, R. Modelos volumétricos para *Pinus* tropicais, em povoamento homogêneo, no Estado de Rondônia. **Pesquisa Florestal Brasileira**, v. 2011, n. 67, p. 173–181, 2011. Disponível em: <https://doi.org/10.4336/2011.pfb.31.67.173>

PHILLIPS, D.; TARAS, M. A. Accuracy of log volume estimates by density and formulas compared with water displacement. **Forest Products Journal**, v. 37, p. 37–42, 1987.

SCHRÖDER, T.; HOFIÇO, N. A. dos S.; ZIMMERMANN, A. P. L.; PEREIRA, L. D.; ROCHA JUNIOR, D. S.; MEYER, E. A.; FLEIG, F. D. Métodos de estimativa de volume comercial para *Eucalyptus grandis*: especificidades e recomendações. **Pesquisa Florestal Brasileira**, v. 33, n. 73, p. 1–7, 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.4336/2013.pfb.33.73.446>

SCHROEDER, W.; MARTIN, K.; LORENSEN, B. **The visualization toolkit : an object-oriented approach to 3D graphics**. 4. ed. [S. l.]: Kitware, 2006.

SCHUMACHER, F. X.; HALL, F. dos S. Logarithmic expression of timber-tree volume. **Journal of Agricultural Research**, v. 47, n. 9, p. 719–734, 1933.

SIBSON, R. Locally equiangular triangulations. **The Computer Journal**, v. 21, n. 3, p. 243–245, 1978. Disponível em: <https://doi.org/10.1093/comjnl/21.3.243>

SOARES, C. P. B.; PAULA NETO, F.; SOUZA, A. L. **Dendrometria e inventário florestal**. 2. ed. Viçosa: UFV, 2011.

SOUSA, G. T. O.; AZEVEDO, G. B.; BARRETO, P. A. B. Relações hipsométricas para *Eucalyptus urophylla* conduzidos sob regime de alto fuste e talhadia no Sudoeste da Bahia. v. 9, p. 1–7, 2013.

SOUZA, C. A. M.; SILVA, G. F.; XAVIER, A. C.; MENDONÇA, A. R.; ALMEIDA, A. Q. Evaluation of no segmented taper models to estimate height and merchantable volume from *Eucalyptus* sp. stems. **Ciência Florestal**, v. 18, n. 3, p. 387–399, 2008.

SPURR, S. H. **Forest Inventory**. [S. l.]: The Ronald Press Company, 1952.

SU, P.; SCOT DRYSDALE, L. R. A comparison of sequential Delaunay triangulation algorithms. **Computational Geometry**, v. 7, n. 5–6, p. 361–385, 1997. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/S0925-7721\(96\)00025-9](https://doi.org/10.1016/S0925-7721(96)00025-9)

THIERSCH, C. R.; SANTOS, C. J.; BERNARDI, L. K.; PÁDUA, F. A. de; THIERSCH, M. F. B. M. Uso de fotografias digitais como alternativa à fita e a suta na cubagem rigorosa. **Research, Society and Development**, v. 10, n. 16, p. e62101623153, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.33448/rsd-v10i16.23153>

THOMAS, C.; ANDRADE, C. M.; SCHNEIDER, P. R.; FINGER, C. A. G. Comparação de equações volumétricas ajustadas com dados de cubagem e análise de tronco. **Ciência Florestal**, v. 16, n. 3, p. 319, 2006. Disponível em: <https://doi.org/10.5902/198050981911>

VORONÓÏ, G. Nouvelles applications des paramètres continus à théorie des formes quadratiques. Deuxième Mémoire. Recherches sur les paralléloèdres primitifs. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, v. 1909, n. 136, p. 67–182, 1909. Disponível em: <https://doi.org/10.1515/crll.1909.136.67>

WATSON, D. F. Computing the n-dimensional Delaunay tessellation with application to Voronoi polytopes. **The Computer Journal**, v. 24, n. 2, p. 167–172, 1981. Disponível em: <https://doi.org/10.1093/comjnl/24.2.167>

WOOD, G. B.; WIANT, H. V.; LOY, R. J.; MILES, J. A. Centroid sampling: A variant of importance sampling for estimating the volume of sample trees of radiata pine. **Forest Ecology and Management**, v. 36, n. 2–4, p. 233–243, 1990. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0378-1127\(90\)90027-9](https://doi.org/10.1016/0378-1127(90)90027-9)

WYVILL, G.; MCPHEETERS, C.; WYVILL, B. Data structure for soft objects. **The Visual Computer**, v. 2, n. 4, p. 227–234, 1986. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF01900346>

CAPÍTULO 2
TRIANGULAÇÃO DE CONTORNOS DAS SEÇÕES TRANSVERSAIS DO TRONCO
PARA OBTENÇÃO DO VOLUME DE REFERÊNCIA

RESUMO

BERNARDI, Lucas Kröhling. **Triangulação de contornos das seções transversais do tronco para obtenção do valor real do volume da árvore**. Sorocaba: UFSCar, 2023. Cap. 2, p. 45-65 (Tese – Doutorado em Planejamento e Uso de Recursos Renováveis).

O método de reconstituição do volume, que transforma seções bidimensionais em visualizações tridimensionais, tem o potencial de revolucionar a estimativa de volume de árvores em plantios comerciais, ou até mesmo em fragmentos nativos. O presente estudo propõe um novo método para estimar o volume de árvores utilizando fotografias digitais e reconstrução tridimensional. A pesquisa foi realizada em plantios clonais de *Eucalyptus citriodora* e *Eucalyptus urophylla* em Água Clara, Mato Grosso do Sul. Utilizou-se um xilômetro para medir o volume de água deslocado pelas toras e um *Studio Box* para fotografar os discos de madeira. A interpretação das imagens foi realizada por uma Rede Neural Artificial *perceptron* de camada única e a reconstrução tridimensional foi realizada por meio de duas variações de um mesmo método: um utilizando 3 imagens de seções transversais do tronco adjacentes e o outro utilizando apenas 2 seções adjacentes, e o volume pelo método de Smalian. O método de triangulação a partir de dois e três discos demonstrou-se eficaz na geração das nuvens de pontos para representar o exterior das árvores, com capacidade de projetar infinitas subseções entre as alturas de medição coletadas. A análise de variância e o teste de Tukey ao nível de significância de 1% indicaram a utilização de imagens digitais para obtenção da área seccional como o método com menor erro em relação ao xilômetro (2,19% para volume total e 5,25% para volume por seção). Os métodos de triangulação com dois discos (2,32% e 5,31%) e com três discos (2,34% e 5,71%) foram estatisticamente iguais à suta (2,72% e 5,40%). Já a fita métrica se apresentou com os piores resultados (6,03% e 8,99%). Sob a análise de dispersão dos resíduos, os métodos de triangulação se comportaram iguais ao método das imagens digitais, sendo superiores aos métodos com suta e fita métrica. O método de reconstrução tridimensional representa uma inovação valiosa para o setor florestal, proporcionando estimativas precisas e detalhadas do volume das árvores. Estes resultados destacam o potencial deste método na gestão sustentável das florestas e na tomada de decisões relacionadas à exploração e comercialização de produtos florestais.

PALAVRAS-CHAVE: reconstrução tridimensional; nuvem de pontos; Smalian; xilômetro; rede neural artificial

ABSTRACT

BERNARDI, Lucas Kröhling. **Triangulation of cross-sectional trunk contours to obtain the parametric value of tree volume.** Sorocaba: UFSCar, 2023. Chap. 2, p. 45-65 (Thesis – PhD in Planning and Use of Renewable Resources).

The volume reconstruction method, which transforms two-dimensional sections into three-dimensional visualizations, has the potential to revolutionize tree volume estimation in commercial plantations, or even in native forests. The present study proposes a new method for estimating tree volume using digital photographs and three-dimensional reconstruction. The research was conducted in clonal plantations of *Eucalyptus citriodora* and *Eucalyptus urophylla* in Água Clara, Mato Grosso do Sul. A water displacement method was used to measure the volume of the logs, and a Studio Box was used to photograph the wooden discs removed from each measurement position. Image interpretation was carried out by a single-layer perceptron Artificial Neural Network, and the three-dimensional reconstruction was performed through two variations of the same method: one using 3 images of adjacent cross-sectional trunk sections and the other using only 2 adjacent sections with its volume estimated by the Smalian method. The triangulation method from two and three discs proved effective in generating point clouds to represent the exterior of the trees, with the ability to project infinite subsections between the collected measurement heights. Analysis of variance and the Tukey test at a 1% significance level indicated the use of digital images to obtain the sectional area as the method with the lowest error compared to the xylometer (2.19% for total volume and 5.25% for volume per section). The triangulation methods with two discs (2.32% and 5.31%) and with three discs (2.34% and 5.71%) were statistically equal to the caliper (2.72% and 5.40%). The measuring tape showed the worst results (6.03% and 8.99%). Under the analysis of residual dispersion, the triangulation methods behaved similarly to the digital image method, being superior to the methods using calipers and measuring tapes. The three-dimensional reconstruction method represents a valuable innovation for the forestry sector, providing accurate and detailed estimates of tree volume. These results highlight the potential of this method in sustainable forest management and in decision-making related to the exploitation and commercialization of forest products.

KEYWORDS: three-dimensional reconstruction; point cloud; Smalian; xylometer; Artificial Neural Network.

1. INTRODUÇÃO

A reconstrução tridimensional de objetos, originalmente desenvolvida e amplamente utilizada na área da saúde para representar estruturas internas da anatomia humana, possui potencial para aplicações em diversos setores, incluindo o florestal. Esta técnica, que permite a visualização volumétrica de objetos a partir de seções bidimensionais, pode inovar a maneira como estimamos o volume das árvores ou como selecionamos modelos matemáticos para tal.

Em um povoamento, a estimativa precisa do volume das árvores é essencial para o manejo sustentável e eficiente dos recursos. Tradicionalmente, métodos de cubagem são utilizados para estimá-los, baseando-se em medições diretas e aproximações matemáticas (Nascimento *et al.*, 2023; Saldanha *et al.*, 2023).

A reconstrução tridimensional de objetos já vem sendo utilizada no setor florestal com o auxílio de sensores como o LiDAR, gerando uma nuvem de pontos que pode ser então convertida em um objeto tridimensional utilizando-se da triangulação de Delaunay. Nesse contexto, o método proposto no presente estudo se diferencia por utilizar fotografias digitais para gerar as nuvens de pontos e reconstruir o volume das árvores, trazendo uma abordagem inédita e de baixo custo como uma alternativa promissora para estimar o volume das árvores de forma precisa e eficiente (Abegg *et al.*, 2023; Barros *et al.*, 2023; Bornand *et al.*, 2023; Silva, 2023).

A técnica de reconstrução tridimensional por meio de fotografias digitais permite obter modelos 3D detalhados das árvores a partir das imagens capturadas. Este método oferece uma nova perspectiva para o manejo florestal, possibilitando uma gestão mais precisa e eficaz das florestas, principalmente pela ótica da estimativa dos múltiplos produtos da madeira.

Portanto, o objetivo deste capítulo é a apresentação dos métodos utilizados na reconstrução do volume das árvores por meio da interpretação das imagens digitais das seções do tronco e da triangulação de contornos, bem como os resultados obtidos com tais métodos.

2. MATERIAL E MÉTODOS

2.1. CARACTERIZAÇÃO DA ÁREA DE ESTUDO

A base de dados utilizada no presente estudo foi proveniente de plantios clonais de *Corymbia citriodora* e de *Eucalyptus urophylla*, com sete anos de idade, aproximadamente. Os plantios localizam-se na região leste do Estado do Mato Grosso do Sul, no município de Água Clara.

O município de Água Clara, segundo a classificação climática de Köppen-Geiger, está sob influência do clima tropical (Aw) e é caracterizado como “Tropical Brando de Transição”. Segundo dados da estação meteorológica automática A756 localizada no município, em funcionamento desde 2010, de propriedade do Instituto Nacional de Meteorologia (INMET), a temperatura máxima já registrada foi de 44,6 °C no dia 5 de outubro de 2020, e a mínima histórica é de -0,6 °C, registrada no dia 01 de julho de 2021. Além disso, a área apresenta precipitação anual variando entre 1000 e 1200 mm, com o período de chuvas de novembro a fevereiro e período seco de quatro a cinco meses de duração.

De acordo com Atlas Multirreferencial da Secretaria de Planejamento e Coordenação Geral do IBGE (SEPLAN; IBGE, 1990), Água Clara encontra-se na bacia sedimentar do Paraná, que é composta principalmente por depósitos do Grupo Bauru, constituído por rochas das formações Santo Anastácio e Adamantina. No solo da região, predomina-se a ocorrência de Latossolo Vermelho-Escuro e Areias Quartzosas, sendo o segundo caracterizado por ser solo mineral, hidromórfico e com conteúdo de argila inferior a 12%. Os solos quartzosos são bastante lixiviados, não sendo recomendados para agricultura e são, em sua maioria, mal drenados e geralmente destituídos de materiais facilmente intemperizáveis. Predomina na região a ocorrência de vegetação Arbórea Densa (Cerradão) e Arbórea Aberta (Campo Cerrado), sendo a primeira constituída de uma formação campestre com estrato denso de árvores baixas e a segunda constituída por um revestimento contínuo de gramíneas que seca durante o período de estiagem.

2.2. OBTENÇÃO DOS DADOS

2.2.1. Cubagem rigorosa

Os dados para processamento da reconstituição do volume e obtenção do volume real foram obtidos de 58 árvores aleatoriamente abatidas e cubadas pelo método de Smalian com suas medições realizadas nas alturas 0,2, 0,7, 1,3, 2, 3, 4 m, e assim sucessivamente, de 1 em 1 metro até atingir o diâmetro comercial mínimo de 5 cm com casca. As medições realizadas na cubagem foram obtidas de três formas diferentes:

- a) com o uso de uma fita métrica milimetrada;
- b) com o uso da suta dendrométrica milimetrada;
- c) e por meio de fotografias digitais, como proposto por Thiersch *et al.* (2021).

As imagens (Figura 7) foram processadas no *software* R (R CORE TEAM, 2023) obtendo assim o contorno da área seccional em cada altura de medição na cubagem. Para que a triangulação e conseqüente reconstituição do sólido e cálculo do volume fossem feitas da forma mais fiel possível, foram necessários que todos os discos de madeira retirados nas alturas de medição fossem fotografados na mesma orientação, respeitando o formato natural da árvore, supondo que a rotação aleatória dos discos de madeira poderia incorrer em erros de estimativa do sólido resultante da triangulação.

O volume referencial das árvores foi obtido por meio do xilômetro, mergulhando-se as toras seccionadas e descascadas em um tanque cilíndrico e observando o volume de água deslocado.

FIGURA 7. Fotografia da seção transversal do disco tirada no *Studio box* com o objeto de referência sobre o disco.



2.3. GERAÇÃO DOS CONTORNOS DOS DISCOS

No presente trabalho, assim como no estudo de Thiersch *et al.* (2021), as linhas de contorno foram geradas por uma Rede Neural Artificial (RNA) *Perceptron* de camada única que interpreta as fotografias digitais dos discos das seções transversais do tronco retirados nas alturas de medição de cada árvore abatida para cubagem rigorosa. Após o treinamento da RNA, esta reconhece os diferentes “alvos” na imagem, diferenciando-os entre “fundo”, “sombra”, “objeto de referência” e “disco”. Assim, foi possível gerar, para cada disco, as informações de coordenadas x e y dos pontos que formam o polígono resultante do contorno da seção transversal do tronco. A coordenada z, constante para cada linha de contorno, é definida pela

altura de medição de cada disco de madeira (em centímetros) obtido na cubagem, formando assim uma matriz de coordenadas *xyz* em centímetros.

2.4. GERAÇÃO DA NUVEM DE PONTOS

Após a geração dos contornos de todas as imagens dos discos, tem-se os arquivos vetoriais nas alturas de medição com as coordenadas *xyz* da árvore nas alturas de medição, podendo ser aplicado um algoritmo de triangulação para reconstruir o volume. Portanto, aplicou-se a função *delaunay* do pacote *geometry* na nuvem de pontos original oriunda apenas da identificação dos contornos do tronco nas alturas de medição.

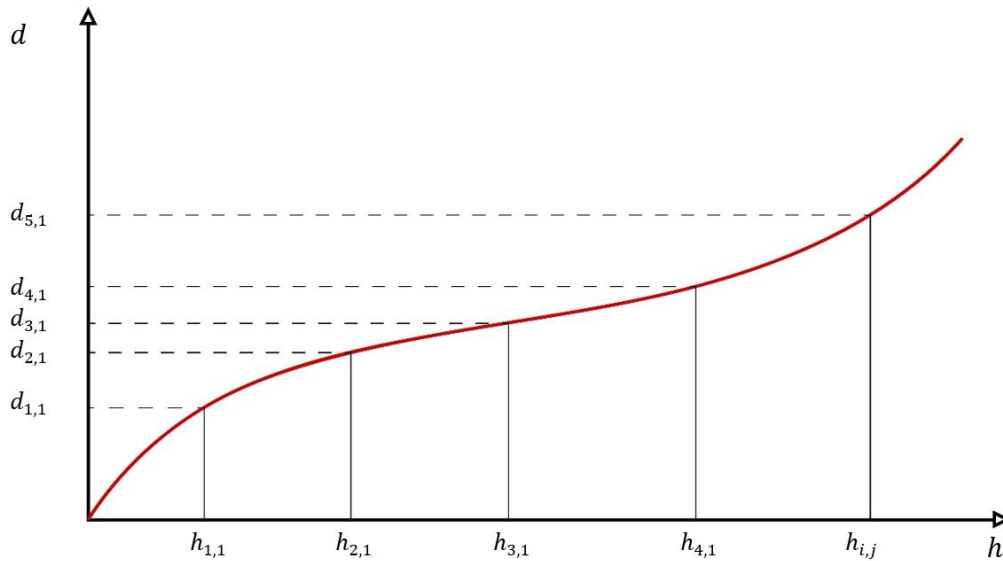
Todavia, considerando-se as dimensões reduzidas dos discos (5 a 50 cm de diâmetro), a distância de 1 m entre as seções pode ocasionar erros nos algoritmos fazendo com que os pressupostos da triangulação de Delaunay não sejam cumpridos. Além disso, como os algoritmos traçam arestas retilíneas entre os pontos a serem triangulados, o sólido resultante se assemelharia a um tronco de cone ao invés de um parabolóide.

Sendo assim, dois outros métodos foram desenvolvidos e testados para a geração de uma nuvem de pontos, com discos intermediários entre as imagens, ambos com base na equação da parábola ordinária (Equação 21), apresentada no item 8.4.1 do capítulo 1. No primeiro método, utilizou-se dois discos subsequentes para a geração da nuvem de pontos, no segundo utilizou-se três discos subsequentes.

2.4.1. Nuvem de pontos gerada a partir de dois discos subsequentes

Sendo a Figura 8 o esquema do perfil longitudinal de um fuste, cuja ponta da árvore é a posição onde a linha vermelha passa pela origem e a base é representada pelo outro extremo da linha, tem-se que: para cada tora resultante, existe uma equação da parábola generalizada $y = k \cdot l^r$ que define a forma do fuste representada pela linha vermelha, em que l representa o comprimento da tora; $k = \frac{d_{i2} - d_{i1}}{l^r}$ a taxa de decréscimo do diâmetro em relação à variação na altura; r o fator que define a forma da curva parabolóide.

FIGURA 8. Representação do perfil longitudinal de uma árvore.



Fonte: O Autor (2024).

Os discos de cada árvore foram agrupados aos pares, respeitando-se a posição da altura do fuste. Agrupou-se o disco a 0,2 m de altura com o disco a 0,7 m de altura; depois o disco a 0,7 m com o subsequente a 1,3 m de altura, e assim sucessivamente.

No disco da seção inferior de cada par, chamado a partir de agora de “disco 1”, definiu-se o centroide do contorno. Dividiu-se as coordenadas xy dos pontos que definem o contorno em 360 classes (representando os 360 graus em um círculo) e com o valor central de cada classe obteve-se um novo conjunto de 360 pontos ao redor do centroide. Este processo não compromete a fidelidade do contorno resultante em relação ao disco de madeira da seção transversal do tronco e possibilita referenciar cada um dos 360 pontos do disco 1 com seu respectivo ponto do disco 2 (disco adjacente).

Com os 360 pontos de cada disco referenciado com seu ponto subsequente, realizou-se para cada par de pontos, o seguinte algoritmo:

- 1) Calcula-se o raio de cada ponto em relação ao centroide e a área seccional do círculo resultante;
- 2) Calcula-se o volume de Smalian entre os dois círculos subsequentes (círculo formado pelo ponto 1 do disco 1 e pelo ponto 1 do disco 2);
- 3) Calcula-se, pela equação da parábola ordinária, $y = k \cdot l^r$, qual o valor de r que resulta no volume de Smalian calculado no item 2.
- 4) Com isso, tem-se a forma da parábola, representada pela linha vermelha na Figura 12, que resulta no volume de Smalian para este par de pontos. Sendo assim, pode-

se obter infinitos pontos entre os dois discos adjacentes. Para este trabalho, definiu-se 1 ponto a cada 10 cm de altura.

- 5) Repetir o processo para todos os 360 pontos.
- 6) Repetir o processo para todas os pares de discos subsequentes de cada árvore.

Com o algoritmo acima, gera-se uma nuvem de pontos xyz com o contorno do tronco a cada 10 cm de altura, resultando numa malha tridimensional que pode ser triangulada.

2.4.2. Nuvem de pontos gerada a partir de três discos adjacentes

Diferentemente do método anterior com dois discos, que tem como base o volume de Smalian, o segundo método é referenciado no disco intermediário da tora.

O método consiste em seguir os mesmos passos iniciais do método de dois discos, sendo:

- 1) Definir o centroide do disco, estratificar as coordenadas xy em 360 classes e obter o valor central de cada classe;
- 2) Calcular o raio do ponto 1 de cada um dos 3 discos;
- 3) Utilizando-se novamente a Equação 21, definir qual índice da parábola (r resulta na curva que tem origem no ponto 1 do disco 1, passa pelo ponto 1 do disco intermediário (disco 2) e finaliza no ponto 1 do disco 3.
- 4) Repetir o processo para os 360 pontos e, posteriormente, para os demais trios de discos subsequentes da árvore;

Dessa forma é possível definir infinitos pontos entre os 3 discos iniciais, novamente definiu-se um novo ponto a cada 10 cm, resultando em uma nuvem de pontos xyz que representa a malha tridimensional da superfície do tronco da árvore.

2.5. TRIANGULAÇÃO E RECONSTRUÇÃO DO VOLUME

A partir da ideia da aproximação da superfície de sólidos complexos pela triangulação de linhas de contorno subsequentes das seções transversais proposta por Keppel (1975), uma triangulação de Delaunay foi realizada para unir as nuvens de pontos das árvores de forma a aproximar a superfície do sólido resultante entre as seções e subseções e calcular o volume do mesmo por meio do somatório das áreas dos triângulos gerados.

Para realizar a triangulação das nuvens de pontos geradas pelos métodos a partir de dois e três discos utilizou-se a função *ashape3d* do pacote *alphashape3d* (Lafarge; Pateiro-Lopez, 2023) e a estimativa do volume resultante da triangulação é obtida com a função *volume_ashape3d* do mesmo pacote, ambas implementadas em linguagem R (R CORE TEAM, 2023).

Por meio da função *plot* foi possível gerar uma visualização tridimensional interativa da reconstrução do volume da árvore inteira gerado pela triangulação com a função *ashape3d*.

2.5.1. Análise estatística da reconstrução tridimensional do tronco

A eficácia do método de reconstituição do volume foi comparada com o método de Smalian aplicado com os diâmetros mensurados com a fita métrica, com a suta e utilizando-se da área seccional calculada para cada disco por meio das imagens digitais. Para comparação utilizou-se como valor referencial do volume aquele obtido para cada seção do tronco com o uso do xilômetro. Os cinco métodos foram analisados tanto na precisão em estimar o volume individual por seção como também para o volume da árvore como um todo.

Para determinar o melhor método, utilizou-se medidas de precisão como: a raiz do erro quadrático médio em porcentagem ou RMSE (Equação 22), em que o melhor método será o que apresentar o menor valor para esta medida; o “*Mean Absolute Bias*” ou MAB (Equação 23), calculado como a diferença entre o valor real obtido pelo xilômetro e o valor estimado pelo método, em que o melhor método será aquele que obtiver o menor valor de MAB, conseqüentemente o menor viés; e, por último, o coeficiente de determinação (R^2) (Equação 24), que varia de 0 a 1, sendo o melhor método aquele que mais se aproximar de 1. Além das medidas de precisão, utilizou-se da análise gráfica da dispersão dos resíduos para comparar a acuracidade dos métodos.

$$RMSE\% = \frac{\sqrt{\frac{\sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n - 1}}}{\bar{Y}} \times 100 \quad (22)$$

$$MAB = \frac{\sum(|Y_i - \hat{Y}_i|)}{n} \quad (23)$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2} \quad (24)$$

Em que:

n é o número de árvores cubadas;

Y_i é o volume da i -ésima árvore obtido pelo xilômetro;

\hat{Y}_i é o volume da i -ésima árvore estimado pelo método;

\bar{Y} é a média dos volumes obtidos pelo xilômetro.

Após a estimativa dos volumes por todos os métodos, realizou-se o teste da ANOVA (Análise de Variância) para verificar a existência de diferença significativa entre os métodos ao estimar o volume (quando comparados ao xilômetro). Sendo assim, utilizou-se como comparação os resíduos por seção e por árvore. Após a realização da ANOVA, fez-se a análise pós-hoc com o Teste de Tukey a fim de identificar se houve diferença entre as médias dos métodos testados.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste item serão apresentados os resultados da reconstituição tridimensional das nuvens de ponto geradas pelas duas variações do método proposto de dois e de três discos e como se comportam em relação aos métodos já existentes.

Para todas as 58 árvores envolvidas no estudo, ambas as abordagens do método, a partir de dois e de três discos, se mostraram viáveis para gerar a nuvem de pontos que representam o exterior das árvores, sendo capazes de projetar infinitas subseções entre as alturas de medição coletadas inicialmente.

Para fins de dimensionamento e parametrização de esforço computacional envolvido no método aplicado, as nuvens de pontos geradas para todas as árvores do estudo compuseram uma matriz de coordenadas xyz com mais de 1.500.000 informações, considerando que foram geradas subseções a cada 10 cm.

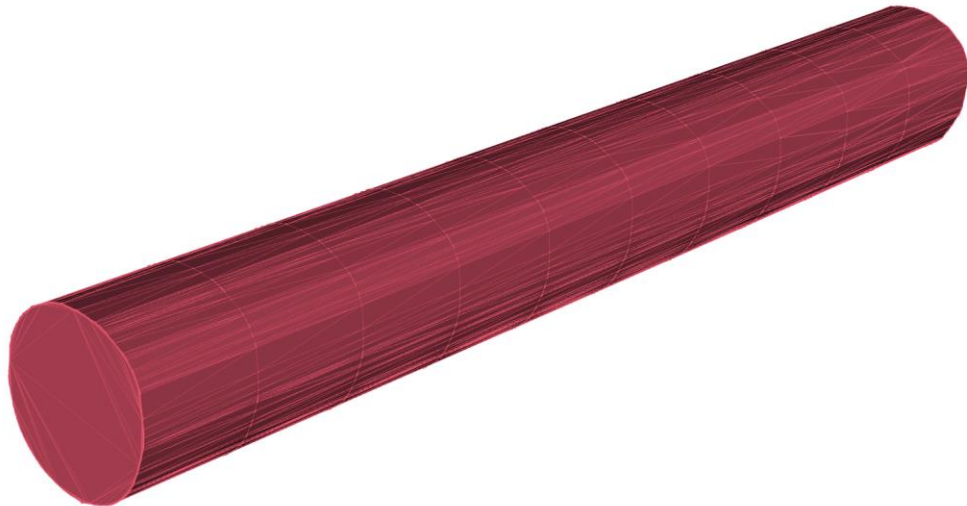
O desafio na implementação da função *ashape3d* está na rede neural para identificação dos alvos das imagens e obtenção do arquivo vetorial dos contornos dos discos e nos métodos de geração das nuvens de pontos das árvores, considerando as múltiplas subseções que devem ser originadas, fazendo com que cada disco tenha 360 pontos interligados com seus discos adjacentes e novos 360 pontos sejam gerados a cada 10 cm com base na equação da parábola ordinária.

Com as nuvens definidas, a função *ashape3d* foi capaz de gerar a triangulação interligando todas as subseções da árvore e o volume pôde ser calculado para cada subseção de 10cm.

A Figura 9 mostra uma tora de exemplo que foi triangulada pelo algoritmo α -*shape* da função *ashape3d* e visualizada pela função *plot* do *software* R. A tora em questão possui 1 m

de comprimento, observando-se a cada 10cm um novo contorno criado pelo método de geração de nuvem de pontos. No exemplo da Figura 13, o método utilizado para gerar as subseções da tora foi o método a partir de três discos.

FIGURA 9. Tora gerada pela triangulação da nuvem de pontos utilizando o algoritmo da função *ashape3d* do pacote *alphashape3d*.



FONTE: O Autor (2024).

Além de gerar a visualização por tora, é possível gerar a visualização para cada subseção ou mesmo para a árvore como um todo (Figura 10). O visualizador tridimensional ajuda a se ter noção da forma da árvore com relação à sua conicidade e reais dimensões.

A Figura 10 apresenta a visualização tridimensional da mesma árvore que originou a tora apresentada na Figura 9. Observa-se o grau de detalhamento do método e a quantidade de triângulos gerados para reconstruir a árvore inteira. A quantidade de triângulos gerada é diretamente proporcional ao nível de detalhamento da nuvem de pontos, ou seja, caso fosse definido que seriam geradas subseções a cada 5 cm a triangulação seria ainda mais detalhada.

FIGURA 10. Árvore inteira gerada pela triangulação da nuvem de pontos utilizando o algoritmo da função *ashape3d* (OBS: nas visualizações geradas houve distorção por perspectiva para que a maior parte da árvore coubesse em uma única imagem).



FONTE: O Autor (2024).

Os valores obtidos para as medidas de precisão (RMSE, MAB e R^2) comparando os métodos de reconstituição do volume total das árvores podem ser observados na Tabela 1. O melhor método é escolhido de acordo com sua eficácia em todas as medidas de precisão, teste de médias e também com relação ao gráfico da dispersão de resíduos.

TABELA 1. Medidas de precisão para os métodos estimativa do volume total da árvore.

Método de estimativa do volume	RMSE (%)	MAB	R^2	Ranking geral
Método dos 2 discos	2,32 (2)	0,003807 (3)	0,9966 (2)	(2)
Método dos 3 discos	2,34 (3)	0,003806 (2)	0,9965 (3)	(3)
Smalian por Foto	2,19 (1)	0,003646 (1)	0,9970 (1)	(1)
Smalian com Fita	6,03 (5)	0,011517 (5)	0,9773 (5)	(5)
Smalian com Suta	2,72 (4)	0,004849 (4)	0,9953 (4)	(4)

Onde: RMSE (%) = raiz do erro quadrático médio em porcentagem; MAB = *mean absolute bias*; R^2 = coeficiente de determinação

Para verificar a existência de diferença significativa entre os métodos e suas respectivas precisões (RMSE), realizou-se a análise de variância (ANOVA) (Tabela 2) e o teste pós-hoc de Tukey (Tabela 3).

TABELA 2. Análise de variância para a diferença de volume (real - estimado) obtido por meio dos métodos testados.

Fonte de variação	GL	SQ	QM	F	Pr(>F)
Tratamentos	4	0,005923	0,0014807	38,69	$<2 \times 10^{-16}$
Resíduos	285	0,011289	0,0000383		

Onde: GL – graus de liberdade; SQ – soma de quadrados; QM – quadrado médio; F – F calculado; Pr(>F) – nível de significância.

É possível verificar na Tabela 2 que houve diferença significativa entre os tratamentos. Assim sendo, a Tabela 3 traz o teste de média proposto por Tukey ao nível de significância de 5% com o objetivo de identificar o melhor tratamento.

TABELA 3. Teste de Tukey para a diferença de volume (real - estimado) obtido por meio dos métodos testados. Tratamentos seguidos da mesma letra são, pelo teste de Tukey ao nível de significância de 1%, iguais estatisticamente.

Tratamento	Diferença média
Foto	-0,001067759 a
Suta	0,002512981 b
Triangulação com 3 discos	0,002680791 b
Triangulação com 2 discos	0,002363331 b
Fita	-0,008926152 c

O teste de Tukey indicou, ao nível de 5% de significância, que a Fita é estatisticamente diferente dos demais métodos, sendo o pior método em estimar o volume total das árvores. De acordo com o teste de Tukey, a foto é estatisticamente diferente da suta e dos métodos de triangulação, sendo superior a todos os métodos. Os métodos de triangulação propostos se apresentaram estatisticamente iguais à Suta ao estimar o volume total das árvores.

Analisando a Tabela 1, e considerando-se a existência de diferença estatística entre as estimativas, apresentada na Tabela 3, observa-se que o pior método é, de fato, o método de Smalian quando aplicado com o uso da Fita métrica, que apresentou RMSE de 6,03%, e o único método que não apresentou valores de R^2 acima de 0,99 e MAB abaixo de 0,005. Como mencionado anteriormente, devido à desigualdade isoperimétrica, a Fita acaba superestimando as áreas seccionais de todas as seções do tronco, gerando superestimativa do volume pelo método de Smalian, a tendência de superestimativa da fita métrica já vem sendo amplamente discutida no setor florestal, sendo um viés constante, independente do operador, apenas do grau de irregularidade da seção transversal do tronco. Quanto mais próxima de um círculo perfeito for a seção menor será o erro de superestimativa causado pela fita (Silva; Paula-Neto, 1979).

Com relação ao melhor método, cita-se o método de Smalian aplicado com as estimativas de área seccional obtidas por meio da interpretação das imagens digitais (foto), que apresentou os melhores valores de RMSE (2,19%), MAB (0,0036) e R^2 (0,997). Tal resultado corrobora com o encontrado por Thiersch *et al.* (2021), que apontaram que as estimativas do volume eram mais precisas quando realizadas com o método de Smalian usando os valores de área seccional obtidos por imagens digitais, quando comparados com o volume obtido com o auxílio do xilômetro.

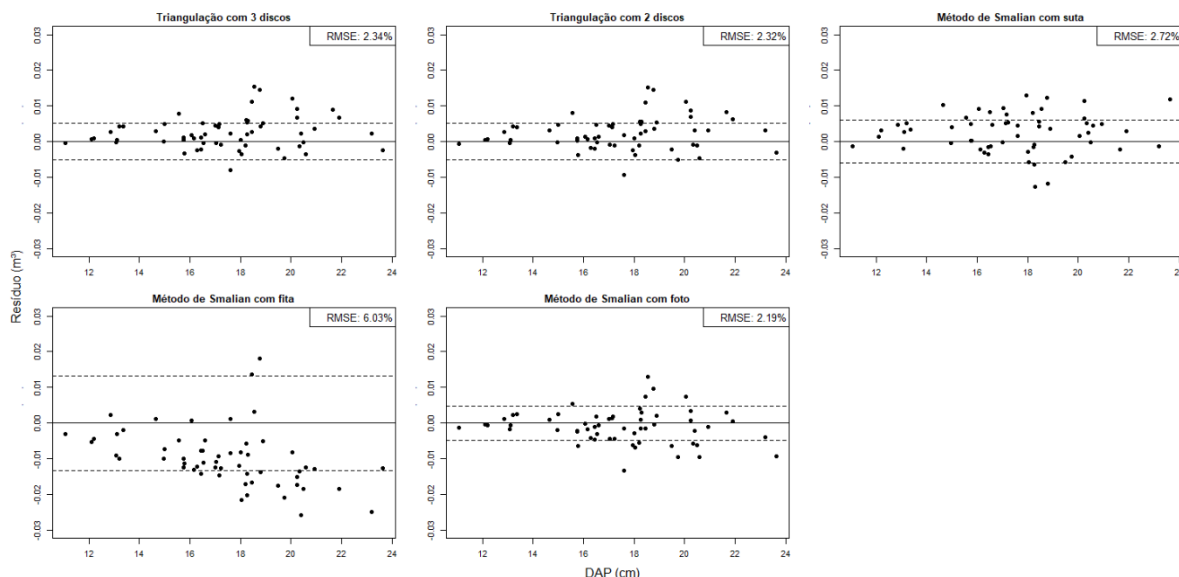
Cita-se ainda o resultado positivo encontrado para os métodos de triangulação a partir de dois e três discos. Com RMSE de 2,32% e 2,34%, respectivamente, os métodos apresentaram-se estatisticamente iguais à Suta, perdendo apenas para as estimativas com uso das fotos, tendo sido superiores à fita em estimar o volume total das 58 árvores deste estudo.

A Figura 11 traz os gráficos de resíduos para os cinco métodos avaliados, em relação ao valor real do volume obtido pelo xilômetro. Para as estimativas do método de Smalian com o uso da fita métrica, observa-se que a grande maioria dos pontos se encontra abaixo do eixo x, ou seja, os resíduos são negativos, confirmando a superestimativa causada pela fita. Observa-se que quanto maior o DAP da árvore maior a tendência do método em superestimar o volume total.

Já os demais métodos todos apresentaram bons resultados, com dispersão de resíduos mais concentrada ao redor do eixo das abcissas, quando comparados à fita. Porém, nota-se que os métodos de triangulação e o método de Smalian com foto apresentaram resultados superiores ao método de Smalian com suta, que apresenta boa parte dos resíduos positivos, indicando uma tendência de subestimação dos volumes totais enquanto, tanto os métodos de triangulação a partir de dois e três discos como o método de Smalian com foto não demonstram nenhum tipo

de tendência aparente, e a maioria dos resíduos concentrada dentro dos limites do RMSE absoluto médio.

FIGURA 11. Dispersão dos resíduos para as estimativas de volumes totais. A linha pontilhada representa o intervalo abrangido pelo RMSE absoluto médio para cada um dos cinco métodos.



Fonte: O Autor (2024).

Buck *et al.* (2012) estudando a modelagem tridimensional do tronco de *Pinus elliottii* a partir de dados obtidos com *laser scanner* terrestre, identificaram que o processo de triangulação da nuvem de pontos gerou estimativas de volumes muito mais precisas do que o método de Huber utilizando fita métrica e suta, principalmente nas seções inferiores do tronco, onde não havia galhos nem folhas que poluíssem a nuvem de pontos gerada pelo *laser*. Os autores apontam também, da mesma forma que encontrado neste trabalho, que as estimativas de volume com o uso da fita métrica apresentam os piores resultados quando comparados ao volume obtido pelo xilômetro.

Os resultados obtidos para a estimativa de volume total demonstram o potencial do uso de imagens digitais no setor florestal como uma excelente alternativa para os métodos tradicionais de cubagem, trazendo resultados mais precisos e confiáveis. A geração de nuvem de pontos tendo por base as imagens das seções transversais do tronco não apresentaram ganho significativo na estimativa de volume total que justificasse sua opção em relação ao método de Smalian aplicado por foto, mas indicam superioridade quando comparados à fita. Assim como encontrado em Buck (2016) e Buck *et al.* (2012), a triangulação é um método extremamente

eficiente e preciso, sendo capaz de representar com acuracidade a forma irregular dos fustes das árvores. Entretanto, erros no processo de coleta de dados, como por exemplo, nuvens de pontos contendo “sujeira” proveniente de galhos e folhas, quando da aplicação de *laser scanner* terrestre, ou a falta de orientação das imagens das seções do tronco representadas pelos discos de madeira no caso das imagens digitais.

Além do volume total, a forma do fuste e o volume de madeira nas diferentes porções da árvore são variáveis de extrema importância, principalmente no estudo do sortimento. Sendo assim, a análise das medidas de precisão e dispersão de resíduos para os volumes por seção do tronco traz uma visão mais detalhada das diferenças entre os métodos estudados.

Os valores obtidos das medidas de precisão para a estimativa de volume por seção do tronco comparando os métodos de reconstituição por triangulação das nuvens de pontos e pelos métodos de Smalian utilizando fita métrica, suta e foto podem ser observados na Tabela 4.

TABELA 4. Medidas de precisão para os métodos estimativa do volume por seção da árvore.

Método de estimativa do volume	RMSE (%)	MAB	R ²	Ranking geral
Triangulação com 2 discos	5,31 (2)	0,00046 (1)	0,9851 (2)	(2)
Triangulação com 3 discos	5,71 (4)	0,00049 (4)	0,9828 (4)	(4)
Smalian por Foto	5,25 (1)	0,00047 (2)	0,9854 (1)	(1)
Smalian com Fita	8,99 (5)	0,00084 (5)	0,9573 (5)	(5)
Smalian com Suta	5,40 (3)	0,00048 (3)	0,9846 (3)	(3)

Onde: RMSE (%) = raiz do erro quadrático médio em porcentagem; MAB = *mean absolute bias*; R² = coeficiente de determinação

Para verificar a existência de diferença significativa entre os métodos e suas respectivas precisões, realizou-se a análise de variância (ANOVA) (Tabela 5) e o teste pós-hoc de Tukey (Tabela 6).

TABELA 5. Análise de variância para a diferença de volume (real - estimado) obtido por meio dos métodos testados.

Fonte de variação	GL	SQ	QM	F	Pr(>F)
Tratamentos	4	0,0003637	9,1x10 ⁻⁵	143,8	<2x10 ⁻¹⁶
Resíduos	4880	0,0030865	6,3x10 ⁻⁷		

Onde: GL – graus de liberdade; SQ – soma de quadrados; QM – quadrado médio; F – F calculado; Pr(>F) – nível de significância.

É possível verificar na Tabela 5 que houve diferença significativa entre os tratamentos. Assim sendo, a Tabela 6 traz o teste de média proposto por Tukey ao nível de significância de 5% com o objetivo de identificar entre quais tratamentos ocorreu essa diferença significativa e, conseqüentemente, qual o melhor tratamento dentre os métodos testados.

TABELA 6. Teste de Tukey para a diferença de volume (real - estimado) obtido por meio dos métodos testados. Tratamentos seguidos da mesma letra são, pelo teste de Tukey ao nível de significância de 1%, iguais estatisticamente.

Tratamento	Diferença média
Foto	-0,000065573 a
Suta	0,000154328 b
Triangulação com 3 discos	0,000164634 b
Triangulação com 2 discos	0,000145138 b
Fita	-0,000548177 c

O Teste de Tukey indicou, ao nível de significância de 5%, que o método de Smalian com suta e os métodos de triangulação com 2 e 3 discos não são estatisticamente diferentes, mas que estes se diferem estatisticamente dos métodos de Smalian com fita e por foto.

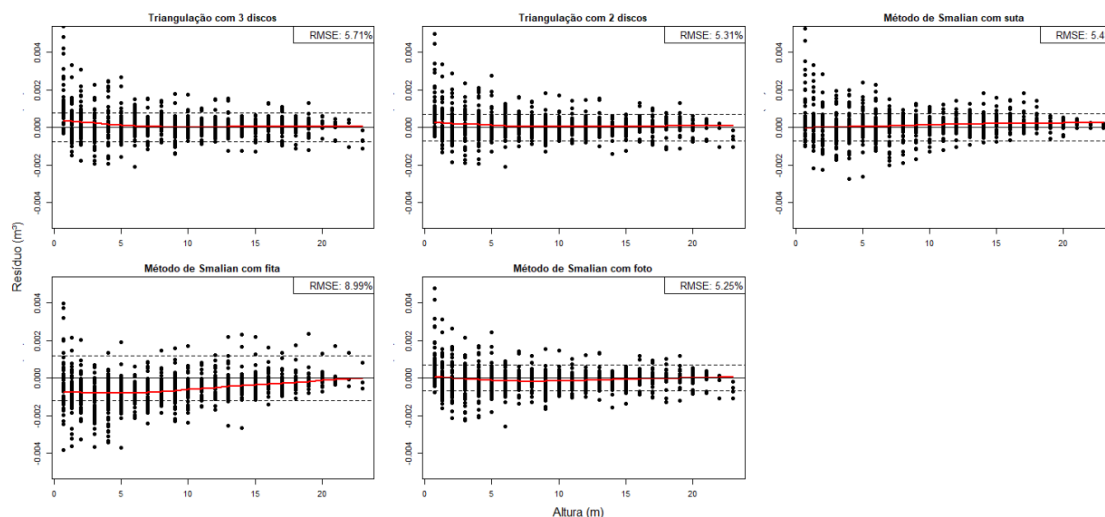
Observa-se pelas Tabelas 4 e 6 que, em média, o volume obtido com a foto é mais acurado do que os obtidos por meio da suta, da fita e das triangulações. Comparando-se os métodos de triangulação com o método de Smalian com fita, tem-se que a triangulação é mais acurada, uma vez que a variação em relação ao volume real é de $1,45 \times 10^{-4} \text{ m}^3$ para a triangulação com 2 discos, $1,64 \times 10^{-4}$ para a triangulação com 3 discos e $5,48 \times 10^{-4}$ para o método de Smalian com fita.

Assim como ao estimar o volume total das árvores, o método de Smalian com fita métrica apresentou os piores resultados para a estimativa dos volumes individuais de cada seção do tronco. Com RMSE de 8,99%, foi o único método que destoou dos demais, com R^2 de 0,95 e MAB de $8,4 \times 10^{-4}$. O método de Smalian aplicado com as áreas seccionais calculadas pelas imagens apresentou os melhores valores para as medidas de precisão com RMSE de 5,25%, MAB de $4,7 \times 10^{-4}$ e R^2 de 0,985. Já o método da triangulação utilizando dois discos apresentou-se com o segundo melhor resultado geral, com RMSE de 5,31%, R^2 de 0,985 e o melhor resultado para MAB, com $4,6 \times 10^{-4}$. A nuvem de pontos gerada a partir de três discos e o método

de Smalian com suta obtiveram resultados inferiores aos dois melhores métodos, mas bem superiores ao método de Smalian com a fita métrica.

Os gráficos de resíduos para estimativa do volume por seção do tronco podem ser vistos na Figura 12. Além da análise do ponto de vista estatístico ao se comparar os métodos quanto às medidas de precisão, a análise da dispersão dos erros de cada um dos métodos ao longo do fuste é de extrema importância no contexto florestal, pois, quanto mais assertivo e confiável em diversos cenários for um método maior é a certeza na tomada de decisão.

FIGURA 12. Dispersão dos resíduos para as estimativas de volume por seção ao longo do tronco. A linha pontilhada representa o intervalo abrangido pelo RMSE absoluto médio para cada um dos métodos. A linha vermelha representa uma regressão LOWESS para os resíduos por seção como indicativo de tendências de estimativa.



Fonte: O Autor (2024).

Analisando a dispersão dos resíduos, quanto à existência de tendências, representada pela linha vermelha, pode-se constatar que o método de triangulação a partir de dois e três discos trazem resultados estáveis ao longo do fuste, principalmente após os 5 metros de altura, enquanto na base da árvore os melhores métodos são Smalian por foto e Smalian com suta. O método de Smalian com suta apresentou leve tendência de subestimativa a partir dos 9 m de altura, até a altura total das árvores, enquanto o método de Smalian com foto apresentou superestimativa dos volumes apenas entre 5 e 12 m de altura.

O método de Smalian com fita métrica apresentou tendência a superestimar os volumes por seção ao longo de todas as alturas de medição, principalmente até os 15 m de altura. Pelo

efeito da desigualdade isoperimétrica causado pelo uso da fita, quanto maior for a circunferência (regiões mais baixas das árvores) maior será a tendência a superestimar os diâmetros das seções e por consequência, os volumes.

Ao observar a Figura 12, é possível constatar que em todos os métodos a base da árvore é a região mais problemática, pois, naturalmente é onde há a maior variação de diâmetro de uma altura de medição a outra. Levando-se em conta a subjetividade da precisão dos métodos de Smalian com suta e foto nas regiões basais da árvore, visto que esse comportamento pode nem sempre se repetir dado a enorme variação de diâmetro dessas seções, observa-se que o método de Smalian por foto apresentou superestimativa dos volumes entre 5 e 12 m de altura, enquanto o método de Smalian com suta apresentou subestimativa de todos os volumes a partir dos 9 m de altura. Portanto, os métodos mais adequados para a estimativa de volume por seção, com base na dispersão dos resíduos, são os métodos de geração de nuvens de pontos e triangulação, sendo o método de geração a partir de dois discos o mais preciso, com o comportamento mais estável ao longo de toda a árvore, principalmente após os 6 m de altura.

O comportamento estável do método de geração da nuvem de pontos a partir dos dois discos sugere seu potencial de aplicação no contexto do estudo do sortimento, agregando um conhecimento muito maior da forma do fuste quando comparado com o método de Smalian. O método proposto pode representar um excelente avanço, pois, gera a representação fiel da superfície do tronco, que pode ser útil para a tomada de decisão sobre a seleção de modelos de afilamento para a estimativa dos múltiplos produtos da madeira.

Trabalhando com *laser scanner* terrestre, Buck *et al.* (2012) identificaram altas precisões ao estimar o volume das árvores por meio de triangulação da nuvem de pontos nas porções mais próximas à linha do solo. O volume estimado pelo método da triangulação da nuvem de pontos gerada pelo *laser scanner* nessas regiões foi estatisticamente igual ao volume obtido pelo xilômetro. Entretanto, encontraram problemas nas estimativas de volume conforme aumenta-se a altura de obtenção destes pontos por conta da presença de galhos e folhas. Aos 5 m de altura, por exemplo, os autores observaram erros de estimativa de volume superiores a 20%, chegando a 40% próximo aos 10 m de altura. Além disso, ao alcançar a copa da árvore o *laser* já não era mais capaz de varrer a superfície do tronco, impossibilitando sua modelagem.

Buck (2016), estudando a aplicação de *laser scanner* terrestre para estimar o volume de plantios clonais de *Eucalyptus* spp. também encontrou bons resultados na estimativa de diâmetro e volume nas porções mais próximas à linha do solo, com altas precisões e estimativas estatisticamente iguais ao volume obtido por meio do xilômetro. Entretanto, assim como em

Buck *et al.* (2012), o processo da coleta de dados foi fator crucial na precisão do método, no qual o autor encontrou dificuldades em estimar os diâmetros em porções maiores da altura das árvores, próximas à copa e altura total. Em seu estudo, Buck (2016) utilizou florestas de diferentes idades e detectou que em idades mais avançadas, o uso do *laser* terrestre fica mais prejudicado por conta das copas mais volumosas que reduzem o campo de visão. Mesmo com a aplicação adequada de filtros de limpeza dos dados e remoção de galhos, os diâmetros e volumes obtidos nas porções mais altas do fuste foram estatisticamente diferentes dos obtidos pelos métodos de cubagem tradicionais com suta.

Além da estimativa de volume, o autor testou a viabilidade da aplicação destas nuvens de pontos como fonte de dados para ajuste de modelos de afilamento do fuste para a realização do sortimento. O autor menciona que, para as regiões mais próximas à linha do solo, e sem influência de galhos e folhas, o método apresenta resultados muito bons quando utilizado para o ajuste e aplicação de modelos de afilamento. Entretanto, a partir dos 20% da altura total, os dados *laser* começam a apresentar aumento significativo de variância, se tornando muito distintos dos dados de cubagem coletados com suta. Isso resultou em erros superiores a 100% a partir dos 50% da altura total das árvores quando as estimativas de diâmetro foram realizadas com os modelos de afilamento ajustados com os dados *laser*.

Bornand *et al.* (2023) utilizaram-se de dados de *laser scanner* terrestre e realizaram a triangulação por meio do algoritmo da função *ashape3d* do pacote R *alphashape3d*, assim como o presente estudo. Os autores encontraram ótimos resultados para estimativas de diâmetro por triangulação das nuvens de pontos, com erro médio de 0,18%. Para a estimativa de volume por reconstrução tridimensional, o erro do algoritmo foi de 8,67%, quando comparado aos volumes reconstruídos por cubagem utilizando-se do método de Huber.

Nos casos já observados em literatura e no presente trabalho, a triangulação de nuvens de pontos tem se mostrado eficaz em estimar os volumes quando os dados são coletados sem nenhum tipo de influência externa ou viés, seja pela presença de galhos e folhas, ou pela não orientação longitudinal dos discos removidos das seções do tronco.

Nos últimos anos, têm sido desenvolvidos diversos estudos utilizando-se de *laser scanner* terrestre (TLS) no contexto de ecologia ou manejo florestal. Estes estudos têm demonstrado potencial considerável para a estimativa de volume individual ou mesmo de biomassa acima do solo (Atkins *et al.*, 2018; Bornand *et al.*, 2023; Calders *et al.*, 2020; Disney *et al.*, 2018; Xu *et al.*, 2021).

Quanto ao método proposto neste trabalho, o *studio box* sendo apenas uma caixa de madeira ou mesmo papelão, pode ser facilmente transportado ao campo, não havendo a necessidade de levar os discos para serem fotografados no escritório. Além disso, como o método constitui na geração de uma nuvem de pontos com infinitas subseções, pode-se optar por realizar uma cubagem com seções maiores, reduzindo o número de discos a serem obtidos sem prejudicar a precisão da cubagem realizada.

No caso das metodologias tradicionais, como a utilização da fita métrica ou da suta, o aumento das seções do tronco (reduzindo o número de medições) resulta em maiores erros, inviabilizando sua aplicação. Já a diminuição das seções (aumentando o número de medições) torna o processo muito oneroso, pelo maior tempo despendido em sua execução.

Sendo assim, numa possível substituição da metodologia de cubagem, o método proposto pode acelerar o processo de cubagem, diminuindo os custos relacionados ao inventário, mantendo o nível de precisão das metodologias tradicionais.

Ao utilizar-se das metodologias tradicionais de mensuração do tronco, assume-se que a seção do tronco é circular e, apesar de serem metodologias precisas, trazem vieses oriundos dessa premissa. Por considerar a área real da seção, independentemente da forma desta, o método da interpretação das imagens digitais da seção do tronco possui melhor precisão do que a suta ou a fita.

Os resultados encontrados no presente trabalho corroboram com a ideia de que os métodos de geração de nuvem de pontos, desde que corretamente aplicados, podem ser ferramentas poderosas para auxiliar no inventário florestal melhorando as mensurações de diâmetro e estimativas de volume. Em todos os casos, para estimativa de volume por meio de *laser scanner* terrestre, o maior desafio consiste na obtenção de nuvens de pontos detalhadas e precisas de toda a extensão do fuste, sendo muito difícil sua obtenção na região próxima à copa pela maior presença de galhos e folhas (Bornand *et al.*, 2023).

Diferentemente dos resultados obtidos por outros autores com o uso de *laser* terrestre, os métodos apresentados no presente trabalho não sofrem perda de qualidade ao gerar as nuvens de pontos e estimar os diâmetros e volumes nas maiores porções da altura do fuste. Todavia, o uso do *laser scanner* possibilita a realização da cubagem de forma não-destrutiva, necessária em casos de florestas nativas voltadas à conservação dos recursos naturais, o que não é possível no método proposto neste trabalho.

4. CONCLUSÕES

Os métodos propostos para a geração das nuvens de pontos a partir de dois e três discos adjacentes se mostraram viáveis como alternativas para a cubagem tradicional, apresentando resultados superiores ao método de Smalian com fita e com suta, e muito próximos ao método de Smalian aplicado a imagens digitais da seção do tronco.

Para a estimativa do volume total, o método de Smalian por foto apresentou-se como o mais adequado pelas medidas de precisão, porém pela análise da dispersão dos resíduos não há diferença significativa quando comparado ao desempenho dos métodos de triangulação propostos.

A triangulação da nuvem de pontos gerada a partir do método dos dois discos subsequentes apresentou os melhores resultados para estimativa dos volumes por seção do tronco pela maior estabilidade nas estimativas ao longo da árvore, quando comparada aos métodos de Smalian com suta ou por foto, que apresentaram erros de estimativa nas porções médias das árvores. O método é viável e apresenta excelentes resultados com erros muito baixos e próximos ao volume do xilômetro, sem tendências a erros sistemáticos, como o que acontece com o método de Smalian com fita, que apresenta tendência de superestimativa.

O método de geração da nuvem de pontos proposto juntamente com a estimativa do volume pela triangulação possui grande potencial de aplicação no setor florestal, principalmente no contexto das equações de afilamento com o objetivo de estimar os múltiplos produtos da madeira, visto que traz um novo grau de detalhamento da forma do fuste.

Com o avanço da tecnologia e a facilidade de acesso a ferramentas poderosas como o sensor LiDAR (disponível em alguns celulares), o setor florestal e a área da biometria florestal tem um potencial de desenvolvimento grandioso pela frente, abrindo espaço para novas pesquisas utilizando-se dessas ferramentas para agregar maior riqueza de informação aos inventários.

O método apresentado neste trabalho tem grande potencial e necessita de maiores validações em espécies e idades diferentes. Além disso, com pequenas alterações nos parâmetros dos algoritmos propostos, como por exemplo, a definição de mais de 360 graus por seção, ou subseções com distâncias menores (2 ou 5 cm, por exemplo) podem resultar em ganhos de acuracidade do método. Embora seja um método de cubagem destrutiva, diferentemente do *laser scanner* (LiDAR), é uma técnica de baixo custo, sendo necessário apenas uma câmera digital e um *studio box* para sua execução.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABEGG, M.; BÖSCH, R.; KÜKENBRINK, D.; MORSDORF, F. Tree volume estimation with terrestrial laser scanning — Testing for bias in a 3D virtual environment. **Agricultural and Forest Meteorology**, v. 331, p. 109348, 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.agrformet.2023.109348>

ATKINS, J. W.; BOHRER, G.; FAHEY, R. T.; HARDIMAN, B. S.; MORIN, T. H.; STOVALL, A. E. L.; ZIMMERMAN, N.; GOUGH, C. M. Quantifying vegetation and canopy structural complexity from terrestrial LiDAR data using the *forestr* R package. **Methods in Ecology and Evolution**, v. 9, n. 10, p. 2057–2066, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1111/2041-210X.13061>

BARROS, Q. S.; RODRIGUES, N. M. M.; PINHEIRO, R. de M.; FERREIRA, E. J. L. Potencial da tecnologia LiDAR terrestre na área florestal. **Scientia Naturalis**, v. 5, n. 1, 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.29327/269504.5.1-29>

BORNAND, A.; REHUSH, N.; MORSDORF, F.; THÜRIG, E.; ABEGG, M. Individual tree volume estimation with terrestrial laser scanning: Evaluating reconstructive and allometric approaches. **Agricultural and Forest Meteorology**, v. 341, p. 109654, 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.agrformet.2023.109654>

BUCK, A. L. B. **Modelagem de dados de laser scanner terrestre para estimativa do volume em plantios clonais de Eucalyptus spp.** 2016. - Universidade Federal do Paraná. Tese (Doutorado em Engenharia Florestal), [s. l.], 2016.

BUCK, A. L. B.; SILVA, M. N.; LINGNAU, C.; MACHADO, Á. M. L.; MARTINS NETO, R. P.; PESCK, V. A. Avaliação da modelagem tridimensional do tronco de *Pinus elliottii* a partir de dados laser terrestre / Evaluation of three-dimensional trunk modeling of *Pinus elliottii* from terrestrial laser data. **Revista Ambiência**, v. 8, n. Especial, p. 549–557, 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.5777/ambiencia.2012.04.09>

CALDERS, K. *et al.* Terrestrial laser scanning in forest ecology: Expanding the horizon. **Remote Sensing of Environment**, v. 251, p. 112102, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.rse.2020.112102>

DISNEY, M. I.; BONI VICARI, M.; BURT, A.; CALDERS, K.; LEWIS, S. L.; RAUMONEN, P.; WILKES, P. Weighing trees with lasers: advances, challenges and opportunities. **Interface Focus**, v. 8, n. 2, p. 20170048, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1098/rsfs.2017.0048>

KEPPEL, E. Approximating Complex Surfaces by Triangulation of Contour Lines. **IBM Journal of Research and Development**, v. 19, n. 1, p. 2–11, 1975. Disponível em: <https://doi.org/10.1147/rd.191.0002>

LAFARGE, T.; PATEIRO-LOPEZ, B. **alphashape3d: Implementation of the 3D Alpha-Shape for the Reconstruction of 3D Sets from a Point Cloud**. [S. l.: s. n.] Disponível em: <https://cran.r-project.org/package=alphashape3d>

NASCIMENTO, J. de C.; MARTINS, M. T.; PFEIFER, M. I.; NUNES, D. G.; BUGS, C. A.; FLORIANO, E. P. MÉTODOS DE CUBAGEM E XILOMETRIA PARA ESTIMATIVA DE VOLUME DE TORAS DE EUCALYPTUS SP. **REVISTA FOCO**, v. 16, n. 7, p. e02710, 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.54751/revistafoco.v16n7-131>

R CORE TEAM. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. [S. l.]: R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2023. Disponível em: <https://www.r-project.org/>

SALDANHA, M. A.; QUEVEDO, A. C.; MENDES, L. J.; ROUBUSTE, R. R.; SILVA, S. D. P.; SCHUMACHER, M. V. Estimativa do estoque de carbono em um povoamento de Eucalyptus sp. de 25 anos estabelecido no Sul do Brasil. **Acta Biológica Catarinense**, v. 10, n. 1, p. 81–89, 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.21726/abc.v10i1.1966>

SEPLAN; IBGE. **Atlas multirreferencial**. Campo Grande, MS.: A Secretária, 1990.

SILVA, J. A. A. da; PAULA-NETO, F. de. **Princípios básicos de dendrometria**. Recife: [s. n.], 1979.

SILVA, M. T. **Modelagem volumétrica de plantios de Eucalipto por meio de dados do LiDAR GEDI, Sentinel e ambientais**. 2023. - Universidade Estadual de Feira de Santana, [s. l.], 2023.

THIERSCH, C. R.; SANTOS, C. J.; BERNARDI, L. K.; PÁDUA, F. A. de; THIERSCH, M. F. B. M. Uso de fotografias digitais como alternativa à fita e a suta na cubagem rigorosa. **Research, Society and Development**, v. 10, n. 16, p. e62101623153, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.33448/rsd-v10i16.23153>

XU, D.; WANG, H.; XU, W.; LUAN, Z.; XU, X. LiDAR Applications to Estimate Forest Biomass at Individual Tree Scale: Opportunities, Challenges and Future Perspectives. **Forests**, v. 12, n. 5, p. 550, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.3390/f12050550>