



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL (PPGECiv)**

**FABRICIO DA SILVA AGUIAR**

**ESTIMATIVA DO MÓDULO DE ELASTICIDADE  
TRANSVERSAL PARA MADEIRAS DE ESPÉCIES NATIVAS  
VIA ENSAIOS DE FLEXÃO ESTÁTICA**

**DISSERTAÇÃO**

**SÃO CARLOS**  
**2024**

**FABRICIO DA SILVA AGUIAR**

**ESTIMATIVA DO MÓDULO DE ELASTICIDADE TRANSVERSAL PARA  
MADEIRAS DE ESPÉCIES NATIVAS VIA ENSAIOS DE FLEXÃO ESTÁTICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de São Carlos, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

**Área de concentração:** Estruturas e Geotecnia

**Orientador:** Prof. Dr. André Luis Christoforo

**Coorientador:** Prof. Dr. Francisco Antônio Rocco Lahr

**SÃO CARLOS**

**2024**





**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

---

**Folha de Aprovação**

---

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Fabricio da Silva Aguiar, realizada em 14/03/2024.

**Comissão Julgadora:**

Prof. Dr. Andre Luis Christoforo (UFSCar)

Profa. Dra. Edna Moura Pinto (UFRN)

Prof. Dr. Pedro Gutemberg de Alcântara Segundinho (UFES)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

## DEDICATÓRIA

*Dedico essa dissertação para minha  
querida mãe, que sempre me encorajou a  
estudar e me deu todo o suporte até o  
presente momento.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela sabedoria que me deu para fazer o presente trabalho e por me fazer forte nos momentos mais difíceis da minha vida nos quais achei que não conseguiria levantar.

Agradeço à minha mãe por ser meu porto seguro e por ser essa pessoa tão importante para mim, que amo tanto. Agradeço, também, aos meus irmãos: Natália, Ilma, Fabiano, Flávio e Fábio, por acreditarem em mim quando nem eu mesmo acreditei. Em resumo, sem minha família ao meu lado e professores especiais que passaram na minha vida desde o ensino médio até aqui nada disso seria possível.

Agradeço aos meus colegas da pós-graduação por terem me ajudado de alguma forma nesta jornada. Agradeço de modo especial ao Domingos Franzim Neto por disponibilizar as madeiras que utilizou em seu trabalho de conclusão de curso para que eu pudesse dar continuidade à minha pesquisa de mestrado.

Agradeço a todo corpo docente do Programa de Pós-graduação de Engenharia Civil da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) que contribuíram para a minha formação.

Agradeço ao Prof. Dr. Pedro Gutemberg de Alcântara e à Prof. Dra. Edna Moura Pinto pela disponibilidade de participação na banca e por dividirem seus conhecimentos comigo.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. André Luis Christoforo, por me ajudar com seus ensinamentos, pela paciência que teve comigo ao longo deste trabalho e por sempre acreditar em mim, mostrando que conseguiria vencer mais esta etapa de minha vida. Muito obrigado meu mestre e querido amigo, o senhor é ser humano incrível.

Agradeço ao meu coorientador, Prof. Dr. Francisco Antônio Rocco Lahr, por ter aberto as portas do Laboratório de Madeiras e Estruturas de Madeiras (LaMEM - USP). Sou grato pela atenção, carinho, por todo conhecimento compartilhado comigo e sua amizade.

Agradeço aos profissionais do Laboratório de Madeiras e Estruturas de Madeiras (LaMEM - USP) que me ajudaram com os ensaios laboratoriais.

Agradeço o apoio financeiro concedido pela CAPES, sendo que o presente trabalho foi realizado com assistência da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES).

## RESUMO

A madeira vem desempenhando um papel fundamental na construção civil devido as suas propriedades estruturais e, principalmente, sustentáveis. O módulo de elasticidade transversal (G) é uma propriedade elástica importante para a análise e dimensionamento adequado de componentes estruturais. No entanto, sua determinação para espécies de madeira nativas no Brasil carece de ensaio experimental padronizado. Diante desta lacuna, este estudo aborda a estimativa do módulo cisalhante (G) para madeiras tropicais por meio de ensaio de flexão estática. Com essa finalidade investigou-se a influência das deformações devido os esforços cisalhantes na flecha de elementos de viga, bem como comparou-se o uso de ensaio de flexão estática a três e quatro pontos na estimativa do módulo de elasticidade longitudinal e transversal. Foram empregadas 6 espécies nativas diferentes no estudo: Pequiá (*Caryocar villosum*), Marupá (*Simarouba amara*), Cupiúba (*Goupia glabra*), Sapucaia (*Lecythis spp.*), Tatajuba (*Bagassa guianensis*) e Roxinho (*Peltogyne spp.*), e os ensaios foram realizados segundo três normativas (ABNT NBR 7190-3:2022, ISO/FDIS 13910:2014 e BS EN 408:2010). Os resultados mostraram que para a relação entre o vão e a altura da seção transversal menor ou igual à 18 as deformações devido ao cisalhamento influenciam significativamente o cálculo do módulo de elasticidade longitudinal (E). Além disso, o ensaio de flexão estática a três pontos mostrou-se mais indicado para estimar o G. A relação entre o módulo de elasticidade longitudinal e transversal variou de  $G=E/5$  a  $G=E/18$ , divergindo dos resultados da norma brasileira.

**Palavras-chave:** Módulo de elasticidade transversal; módulo cisalhante; módulo de elasticidade longitudinal; madeira nativa; flexão.

**ABSTRACT**

Wood has been playing a key role in civil construction due to its structural and, especially, sustainable properties. The transverse elasticity modulus ( $G$ ) is an important elastic property for the proper analysis and dimensioning of structural components. However, its determination for native wood species in Brazil lacks a standardized experimental test. Faced with this gap, this study addresses the estimation of the shear modulus ( $G$ ) for tropical woods through static bending tests. For this purpose, the influence of deformations due to shear forces on the deflection of beam elements was investigated, as well as the comparison of using static bending tests at three and four points in estimating the longitudinal and transverse elasticity modulus. Six different native species were employed in the study: Pequiá (*Caryocar villosum*), Marupá (*Simarouba amara*), Cupiúba (*Goupia glabra*), Sapucaia (*Lecythis* spp.), Tatajuba (*Bagassa guianensis*), and Roxinho (*Peltogyne* spp.), and the tests were conducted according to three standards (ABNT NBR 7190-3:2022, ISO/FDIS 13910:2014, and BS EN 408:2010). The results showed that for the ratio between span and cross-sectional height equal to or less than 18, deformations due to shearing significantly influence the calculation of the longitudinal elasticity modulus ( $E$ ). Furthermore, the three-point static bending test proved more suitable for estimating  $G$ . The ratio between longitudinal and transverse elasticity modulus varied from  $G=E/5$  to  $G=E/18$ , diverging from the Brazilian standard results.

**Keywords:** Transverse elasticity modulus; shear modulus; longitudinal elasticity modulus; native wood; flexion.

**LISTA DE FIGURAS**

FIGURA 1 - CURVA GENÉRICA OBTIDA NO ENSAIO DE TORÇÃO DE UM MATERIAL QUALQUER. ....	14
FIGURA 2 - EIXOS PRINCIPAIS DA MADEIRA EM RELAÇÃO ÀS FIBRAS. ....	18
FIGURA 3 - ANÁLISE DE UM ELEMENTO SOLICITADO TRIAXIALMENTE. ....	23
FIGURA 4 - DIAGRAMA DE ESFORÇO CORTANTE (DEC) E DE MOMENTO FLETOR (DMF) PARA VIGA SUBMETIDA À FLEXÃO ESTÁTICA A TRÊS PONTOS PARA CARRREGAMENTO REAL E VIRTUAL. ....	27
FIGURA 5 - DIAGRAMA DE ESFORÇO CORTANTE (DEC) E DE MOMENTO FLETOR (DMF) PARA VIGA SUBMETIDA À FLEXÃO ESTÁTICA A QUATRO PONTOS PARA CARREGAMENTO REAL E FLEXÃO ESTÁTICA A TRÊS PONTOS PARA CARREGAMENTO VIRTUAL. ....	28
FIGURA 6- ESQUEMA DE ENSAIO DE TORÇÃO. ....	37
FIGURA 7- EXEMPLO DE CONFIGURAÇÃO PARA O ENSAIO DE TORÇÃO. ....	38
FIGURA 8 - SISTEMA DE MEDIÇÃO DE DEFORMAÇÃO ANGULAR. ....	39
FIGURA 9 - GRÁFICO DO TORQUE POR ROTAÇÃO RELATIVA. ....	40
FIGURA 10 - ARRANJO PARA O ENSAIO CAMPO DE CISCALHAMENTO. ....	41
FIGURA 11 - EXEMPLO DE APARELHAMENTO PARA ENSAIO DE CAMPO DE CISCALHAMENTO. ....	41
FIGURA 12 - DEFORMAÇÕES NAS DIAGONAIS DO QUADRO. ....	42
FIGURA 13 - ARRANJO PARA O ENSAIO DE FLEXÃO PARA OBTER O MÓDULO DE ELASTICIDADE NA FLEXÃO SEGUNDO A BS EN 408 (1995). ....	44
FIGURA 14 - GRÁFICO CARGA-DEFORMAÇÃO DENTRO DO REGIME ELÁSTICO. ....	45
FIGURA 15 - ARRANJO PARA O ENSAIO DE FLEXÃO PARA OBTER O MÓDULO DE ELASTICIDADE APARENTE SEGUNDO A BS EN 408 (1995). ....	46
FIGURA 16 - DETERMINAÇÃO DO MÓDULO DE ELASTICIDADE TRANSVERSAL NO MÉTODO DO VÃO VARIÁVEL. ....	48
FIGURA 17 - CORPOS DE PROVA UTILIZADOS NA PESQUISA, DE CIMA PARA BAIXO, TEM-SE: PEQUIÁ, CUPIÚBA, MARUPÁ, SAPUCAIA, TATAJUBA E ROXINHO. ....	54
FIGURA 18 – DIMENSÕES DO CORPO DE PROVA PARA O ENSAIO DE FLEXÃO. ....	55
FIGURA 19 – EQUIPAMENTOS DE MEDIDA: (A) PAQUÍMETRO ELETRÔNICO E (B) TRENA. ....	56
FIGURA 20 - MÁQUINA UNIVERSAL DE ENSAIOS AMSLER. ....	56

FIGURA 21 - ESQUEMA DOS DIFERENTES ESPAÇAMENTOS ENTRE APOIOS UTILIZADOS NA PESQUISA. ....	57
FIGURA 22 - ESQUEMA MONTADO PARA REALIZAÇÃO DO ENSAIO DE FLEXÃO A TRÊS PONTOS SEGUNDO A ABNT NBR 7190-3 (2022B), COM DESTAQUE PARA O RELÓGIO ANALÓGICO MEDIDOR DE DESLOCAMENTOS POSICIONADO NO MEIO DO VÃO DA VIGA. ....	58
FIGURA 23 - REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DO ENSAIO DE FLEXÃO COMO DESCRITO NO ITEM 5.10.4 DA ABNT NBR 7190-3 (2022B). ....	58
FIGURA 24 - CICLOS DE CARGA E DESCARGA DURANTE O ENSAIO DE FLEXÃO .....	59
FIGURA 25 - ESQUEMA MONTADO PARA REALIZAÇÃO DO ENSAIO DE FLEXÃO A QUATRO PONTOS SEGUNDO A BS EN 408 (2010), COM DESTAQUE PARA SENSORES LVDTs POSICIONADOS NOS PONTOS 1, 2 E 3. ....	60
FIGURA 26 - REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DO ENSAIO DE FLEXÃO COMO DESCRITO NO ITEM 6.2 DA ISO/FDIS 13910. ....	<b>ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.</b>
FIGURA 27 - DIAGRAMA FORÇA X DESLOCAMENTO DA FLEXÃO ESTÁTICA A TRÊS PONTOS PARA ESPÉCIE: (A) MARUPÁ; (B) SAPUCAIA; (C) CUPIÚBA; (D) PEQUIÁ; (E) TATAJUBA; (F) ROXINHO. ....	70
FIGURA 28 - DIAGRAMA FORÇA X DESLOCAMENTO DA FLEXÃO ESTÁTICA A QUATRO PONTOS PARA ESPÉCIE: (A) MARUPÁ; (B) SAPUCAIA; (C) CUPIÚBA; (D) PEQUIÁ; (E) TATAJUBA; (F) ROXINHO. ....	71
FIGURA 29 - GRÁFICO DO MÓDULO DE ELASTICIDADE LONGITUDINAL APARENTE, EM GPA, PARA FLEXÃO ESTÁTICA A TRÊS PONTOS DA ESPÉCIE: (A) MARUPÁ; (B) SAPUCAIA; (C) CUPIÚBA; (D) PEQUIÁ; (E) TATAJUBA; (F) ROXINHO. ....	74
FIGURA 30 - GRÁFICO DO MÓDULO DE ELASTICIDADE LONGITUDINAL APARENTE, EM GPA, PARA FLEXÃO ESTÁTICA A QUATRO PONTOS DA ESPÉCIE: (A) MARUPÁ; (B) SAPUCAIA; (C) CUPIÚBA; (D) PEQUIÁ; (E) TATAJUBA; (F) ROXINHO. ....	75

**LISTA DE TABELAS**

TABELA 1 - COMPARAÇÃO ENTRE OS MATERIAIS ESTRUTURAIS MAIS UTILIZADOS NA CONSTRUÇÃO CIVIL.....	12
TABELA 2 - VALORES MÉDIOS PARA MÓDULOS ELÁSTICAS DA MADEIRA SEGUNDO MASCIA (1991), EM MPA.....	33
TABELA 3 - VALORES MÉDIOS PARA MÓDULOS ELÁSTICAS DA MADEIRA SEGUNDO TRINCA (2011), EM MPA.....	33
TABELA 4 – RAZÕES ELÁSTICAS PARA MADEIRAS COM TEOR DE UMIDADE DE APROXIMADAMENTE 12%.....	35
TABELA 5 - MÓDULOS ELÁSTICOS POR CLASSE DE RESISTÊNCIA PARA MADEIRAS DE REFLORESTAMENTO. ....	36
TABELA 6 - VALORES DE FATOR DE FORMA PARA ENSAIO DE TORÇÃO.....	39
TABELA 7 - RESUMO DA RELAÇÃO ENTRE E E G OBTIDO NO LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO.....	49
TABELA 8 - E/G MÉDIO RETIRADO DA USDA (2010). ....	50
TABELA 9 - RESUMO DOS ENSAIOS NORMATIVOS PARA ESTIMAR O MÓDULO CISALHANTE PARA MADEIRA. ....	51
TABELA 10 - CLASSES DE RESISTÊNCIAS PARA AS MADEIRAS DA PESQUISA. ....	54
TABELA 11 - MÓDULO DE ELASTICIDADE APARENTE E TESTE DE TUKEY (TU) PARA AS MADEIRAS EM ESTUDO. ....	72
TABELA 12 – DESLOCAMENTO MÉDIO REAL E DE CÁLCULO PARA FLEXÃO ESTÁTICA A TRÊS PONTOS.....	77
TABELA 13 – DESLOCAMENTO MÉDIO REAL E DE CÁLCULO PARA FLEXÃO ESTÁTICA A QUATRO PONTOS.....	77
TABELA 14 - MÓDULO DE ELASTICIDADE TRANSVERSAL OBTIDO VIA VARIAÇÃO DA RELAÇÃO L/H.....	79
TABELA 15 - RELAÇÃO E/G OBTIDA SEGUNDO MÉTODO DE VARIAÇÃO DO L/H. ....	80
TABELA 16 - MÓDULO DE ELASTICIDADE LONGITUDINAL E TRANSVERSAL OBTIDO POR SISTEMA DE EQUAÇÃO LINEAR PARA A ESPÉCIE MARUPÁ. ....	81
TABELA 17 - MÓDULO DE ELASTICIDADE LONGITUDINAL E TRANSVERSAL OBTIDO POR SISTEMA DE EQUAÇÃO LINEAR PARA A ESPÉCIE SAPUCAIA. ....	82

---

TABELA 18 - MÓDULO DE ELASTICIDADE LONGITUDINAL E TRANSVERSAL OBTIDO POR SISTEMA DE EQUAÇÃO LINEAR PARA A ESPÉCIE CUPÍUBA. ....	82
TABELA 19 - MÓDULO DE ELASTICIDADE LONGITUDINAL E TRANSVERSAL OBTIDO POR SISTEMA DE EQUAÇÃO LINEAR PARA A ESPÉCIE PEQUIÁ.....	83
TABELA 20 - MÓDULO DE ELASTICIDADE LONGITUDINAL E TRANSVERSAL OBTIDO POR SISTEMA DE EQUAÇÃO LINEAR PARA A ESPÉCIE TATAJUBA. ....	83
TABELA 21 - MÓDULO DE ELASTICIDADE LONGITUDINAL E TRANSVERSAL OBTIDO POR SISTEMA DE EQUAÇÃO LINEAR PARA A ESPÉCIE ROXINHO.....	84
TABELA 22 - QUANTIFICAÇÃO DE VALORES DE G INCOERENTE POR COMBINAÇÃO. ....	84
TABELA 23 - RELAÇÃO E/G OBTIDA SEGUNDO MÉTODO DE SISTEMA DE EQUAÇÃO LINEAR. ....	85

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>10</b>
1.1	OBJETIVOS .....	15
1.1.1	Geral .....	15
1.1.2	Específicos .....	15
<b>2</b>	<b>ASPECTOS FUNDAMENTAIS</b> .....	<b>18</b>
2.1	GENERALIDADE .....	18
2.2	TENSÕES E DEFORMAÇÕES .....	19
2.3	LEI DE HOOKE GENERALIZADA .....	20
2.4	PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS (PTV) .....	25
2.5	CONCLUSÃO .....	30
<b>3</b>	<b>REVISÃO DE LITERATURA</b> .....	<b>32</b>
3.1	VALORES DE CONSTANTES ELÁSTICAS DE INTERESSE PARA MADEIRA RETIRADOS DA LITERATURA .....	32
3.2	DIRETRIZES DE DIMENSIONAMENTO – VALORES DO MÓDULO DE ELASTICIDADE LONGITUDINAL E TRANSVERSAL .....	35
3.3	ENSAIOS NORMATIVOS PARA OBTEÇÃO DO MÓDULO DE ELASTICIDADE TRANSVERSAL .....	36
3.3.1	ISO/FDIS 13910:2014 e ABNT NBR 7190- 4:2022 .....	37
3.3.2	BS EN 408:2010+A1:2012 .....	38
3.3.2.1	Ensaio de Torção .....	38
3.3.2.2	Método Campo de Cisalhamento .....	40
3.3.3	BS EN 408:1995 .....	43
3.3.3.1	Método de Flexão de Vão Único .....	43
3.3.3.2	Método de Flexão de Vão Variável .....	47
3.4	CONCLUSÃO .....	48
<b>4</b>	<b>MATERIAIS E MÉTODOS</b> .....	<b>53</b>
4.1	ESPÉCIES DE MADEIRA ESTUDADAS .....	53
4.2	PREPARAÇÃO DOS CORPOS DE PROVA .....	55
4.3	ENSAIOS DE FLEXÃO .....	56
4.3.1	ABNT NBR 7190- 3:2022 – Ensaio de flexão estática a três pontos .....	57
4.3.2	BS EN 408:2010 – Ensaio de flexão estática a quatro pontos .....	60
4.3.3	ISO/FDIS 13910:2014 – Ensaio de flexão estática a quatro pontos .....	62
4.4	MÉTODOS .....	64

---

4.4.1	Método 1 – Módulo de Elasticidade Aparente .....	64
4.4.2	Método 2 – Deslocamento em viga .....	64
4.4.3	Método 3 – G para diferentes relações de L/h .....	65
4.4.4	Método 4 – Sistema de equações lineares na determinação do G .....	66
4.5	ANÁLISE ESTATÍSTICA DO MÓDULO DE ELASTICIDADE LONGITUDINAL APARENTE.....	67
<b>5</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES.....</b>	<b>69</b>
5.1	MÓDULO DE ELASTICIDADE LONGITUDINAL APARENTE .....	69
5.2	DESLOCAMENTO – TEORIA DE VIGA DE TIMOSHENKO E BERNOULLI ...	76
5.3	MÓDULO DE ELASTICIDADE TRANSVERSAL OBTIDO PARA DIFERENTES RELAÇÕES L/H.....	78
5.4	MÓDULO DE ELASTICIDADE TRANSVERSAL E LOGITUDINAL OBTIDOS VIA APLICAÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES .....	81
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES .....</b>	<b>88</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>94</b>

# **CAPÍTULO 1**



## 1 INTRODUÇÃO

A indústria da construção civil é reconhecida por sua ampla gama de impactos negativos ao meio ambiente, causando diversos problemas como geração de resíduos, elevada emissão de dióxido de carbono e consumo desordenado de energia e recursos não renováveis (Skullestad; Bohne; Lohne, 2016; Invidiata; Lavagna; Ghisi, 2018; Xu *et al.*, 2022).

Farias e Marinho (2020) e Mishra *et al.* (2022) evidenciam que esses impactos são particularmente pronunciados nos processos de fabricação de materiais amplamente utilizados na construção. Ainda, Bissoli-Dalvi *et al.* (2017) ressaltam que o setor da construção está aumentando o consumo desses materiais, impulsionado pelo crescimento populacional, desenvolvimento econômico e melhoria do padrão de vida.

Diante disso surge a necessidade premente de explorar alternativas que possam mitigar tais impactos e promover a preservação do meio ambiente. Uma resposta promissora a esse cenário tem sido a ascensão global do uso de produtos de madeira.

A madeira é renovável e oferece redução do consumo de energia, do emprego de recursos e da poluição (Araujo, 2017). Sua relevância como material estrutural para o desenvolvimento sustentável é notável, uma vez que a árvore, sua matéria-prima, absorve dióxido de carbono durante o processo de fotossíntese, contribuindo para mitigar os problemas climáticos. Mishra *et al.* (2022) destacam que ao ser amplamente utilizada em edificações, a madeira pode funcionar como sumidouro de carbono a longo prazo.

Diversos países ao redor do mundo têm adotado a madeira na construção, especialmente em regiões com abundância de recursos florestais. Um exemplo notável é o Canadá que emprega amplamente esse recurso na elaboração de casas, edifícios comerciais e galpões industriais. O governo canadense tem incentivado ativamente o uso sustentável da madeira como material ecologicamente correto (Annual Report, 2022). De igual modo, segundo Fu (2023) nos Estados Unidos aproximadamente 94% das residências são construídas com o sistema *wood-frame*, destacando a prevalência desse método construtivo no país.

Tão significativos quanto os mencionados anteriormente, os Países Nórdicos, como Suécia, Finlândia e Noruega, possuem uma indústria madeireira forte e tradicional (Pousette *et al.*, 2012). Essas nações investem em pesquisas e tecnologias avançadas para a construção em madeira, permitindo a criação de estruturas cada vez mais altas e complexas. Um exemplo é o edifício Mjøstårnet, na Noruega, concluído em 2019, que se destaca como o mais alto do mundo com 18 andares construído em madeira (Erdoğan; Begeç, 2021).

Apesar da riqueza florestal e da vastidão dos recursos naturais encontrados no Brasil, notavelmente representados pela imensidão da Floresta Amazônica, que ocupa boa parte do território nacional, a utilização desses na construção civil permanece aquém do potencial existente. Com mais de 15000 espécies de árvores apenas na Amazônia, conforme evidenciado pelo estudo de Ter Steege *et al.* (2020), o país enfrenta desafios consideráveis na maximização desse patrimônio em sistemas estruturais.

Além disso, a realidade da Floresta Amazônica, outrora abrangendo cerca de 280 milhões de hectares do território brasileiro, enfrenta ameaças contínuas de desmatamento e incêndios, conforme documentado por De Carvalho *et al.* (1984) e De Araujo *et al.* (2022).

Obstáculos como preconceitos arraigados, oriundos do histórico de má utilização e da escassa divulgação das informações tecnológicas disponíveis, têm contribuído para a subutilização desse recurso, resultando em questões de durabilidade nas edificações (Calil Junior *et al.*, 2019; Meirelles *et al.*, 2007).

Ao mesmo tempo, circulam concepções equivocadas, como aquela que erroneamente associa o uso da madeira à devastação de florestas e ameaça à ecológica. Não se trata de uma exploração irresponsável e predatória dos recursos naturais, e sim, a implementação de um manejo inteligente, embasado em técnicas consolidadas, visando assegurar a sustentabilidade nas reservas florestais a longo prazo e combater práticas ilegais de desmatamento (Calil Junior *et al.* 2019).

É importante destacar que a madeira possui excelentes propriedades mecânicas o que lhe confere bom desempenho estrutural competindo igualmente com o aço e o concreto. Ramage *et al.* (2017) destacam que a principal vantagem em comparação com esses materiais é a sua elevada relação entre resistência e densidade, resultando em fundações menos robustas nas estruturas com elevada

contribuição do peso próprio. Segundo Calil Jr e Dias (1997) essa relação para madeiras folhosas, que de modo geral são mais densas, é de aproximadamente doze vezes e três vezes superior em comparação ao concreto e ao aço, respectivamente (ver Tabela 1).

Tabela 1 - Comparação entre os materiais estruturais mais utilizados na construção civil.

Material	Densidade (D) [KN/m <sup>3</sup> ]	Energia para Produção (EN) [MJ/m <sup>3</sup> ]	Resistência (R) [MPa]	Módulo de Elasticidade (E) [MPa]	EN/R	R/D	E/D
Concreto	24	1920 (óleo)	20	20000	96	0,83	833
Aço	78	234000 (carvão)	250	210000	936	3,21	2692
Madeira Conífera	6	600 (solar)	50	10000	12	8,33	1667
Madeira Folhosa	9	630 (solar)	90	25000	7	10	2778

Fonte: Calil Jr e Dias (1997).

Zangiácomo, Christoforo e Lahr (2013) e Bilko *et al.* (2021) destacam que a madeira é um material com grande complexidade anatômica e propriedades que variam ao longo de três eixos perpendiculares entre si (longitudinal - L, radial - R e tangencial - T).

O módulo de elasticidade (E), o módulo de cisalhamento (G) e o coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) que caracterizam as constantes elásticas são os parâmetros físicos fundamentais dos materiais. No caso da madeira, são necessárias nove constantes elásticas independentes, representando E, G e  $\nu$  em cada uma das três direções principais (Wang *et al.*, 2022).

O módulo de elasticidade transversal ou módulo cisalhante, representado pela letra G, representa a resposta de um material à tensão de cisalhamento, representando a relação entre essa tensão e a deformação angular resultante.

Essa propriedade é fundamental para diversos procedimentos de construção no quesito eficiência e economia (Yoshihara, 2011), especialmente se considerar

elementos curtos em estruturas ou peças sujeitas à torção, além de ser relevante para a madeira sob flexão, onde a deflexão geralmente também é influenciada pelo módulo de cisalhamento. Engenheiros estruturais utilizam essa medida em análises de elementos finitos, como é possível observar nos trabalhos de Tran, Oudjene e Méausoone (2014) e Claus e Seim (2018).

Conforme apontado por Krüger e Wagenführ (2020), a estimativa do módulo de elasticidade transversal para a madeira pode ser realizada por meio de ensaios laboratoriais, os quais se dividem em ensaios diretos, como o ensaio de torção pura, e ensaios indiretos, a exemplo do ensaio de flexão estática. Alternativamente, quando conhecido módulo de elasticidade longitudinal ( $E$ ) e coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) do material é possível aplicá-los na Equação 1 para estimar o módulo de cisalhamento.

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (1)$$

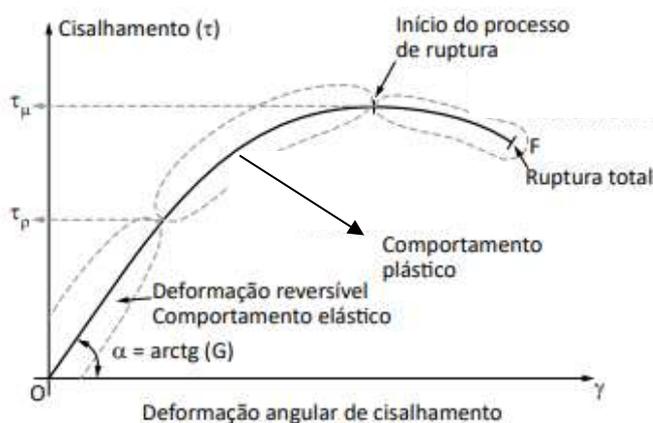
A relação entre o módulo de elasticidade ( $E$ ) e o módulo de cisalhamento ( $G$ ) é aplicada em equações de projeto para determinar a rigidez torcional. Empregando a Equação 1, como um método simplificado para calcular o  $G$  e considerando a informação apresentada por Bodig e Jayne (1982) de que o coeficiente de Poisson médio para madeiras folhosas é de 0,5; obtém-se um valor máximo possível de  $G=E/3$ .

No entanto, a norma ABNT NBR 7190-1 (2022a) estabelece uma relação diferente, indicando o uso de  $G=E/16$  para quando não se dispõe de valores experimentais. Assim, torna-se evidente a importância de estudos voltados para a determinação desse parâmetro devido as divergências que podem ocorrer.

É fundamental destacar ainda que a norma brasileira de madeira divide a caracterização das propriedades físicas e mecânicas das madeiras em duas partes: ABNT NBR 7190-4 (2022c) e ABNT NBR 7190-3 (2022b). A primeira fornece o ensaio de torção para determinar o parâmetro  $G$  de madeiras de florestas plantadas, no entanto, não se encontrou nenhuma pesquisa a nível nacional com esse viés. Enquanto a segunda, que trata de madeiras nativas, nem mesmo traz um ensaio para determinar o módulo de cisalhamento, limitando somente ao uso da equação normativa mencionada anteriormente.

No ensaio de torção pura, o módulo de elasticidade transversal é basicamente obtido respeitando a Lei de Hooke, onde a região do gráfico da Figura 1 é linear e elástica. Desse modo, até o limite de proporcionalidade desse gráfico, as deformações angulares são proporcionais as tensões cisalhantes por meio do módulo G e pode ser obtido pela Equação 2 (Da Costa, 2019).

Figura 1 - Curva genérica obtida no ensaio de torção de um material qualquer.



Fonte: Adaptado de Da Costa (2019).

$$\tau = G\gamma \quad (2)$$

O ensaio de flexão é uma técnica comum para determinar a rigidez e a resistência dos materiais, incluindo a madeira. Na flexão a três pontos, a carga é aplicada entre os dois apoios. Por outro lado, na flexão a quatro pontos, a carga é aplicada em dois pontos de aplicação separados e os pontos de apoio estão localizados entre eles.

Embora ambos os métodos de ensaio de flexão sejam amplamente utilizados na determinação da rigidez da madeira, existem diferenças na distribuição de carga, no modo de falha esperado e na sensibilidade à anisotropia que podem influenciar os resultados obtidos. Deste modo é necessário identificar qual dos métodos é o mais adequado para se estimar o módulo cisalhante via ensaio de flexão estática.

Yoshihara (1998) relata que o módulo cisalhante (G) obtido pela flexão depende da teoria de viga de Timoshenko, pois durante a flexão a relação carga-deformação está intrinsecamente relacionada com o esforço cortante e momento fletor. Lahr (1983) concluiu em seus estudos que o efeito das forças cisalhantes se tornam

relevantes no cálculo dos deslocamentos quando a relação  $L/h$  é menor que 21 para viga de madeira, sendo  $L$  o comprimento do vão e  $h$  a altura da seção transversal. Portanto, para  $L/h \geq 21$  pode ser usada a teoria de viga de Euler Bernoulli que simplifica os cálculos dos deslocamentos.

Segundo Bilko *et al.* (2021), a determinação experimental do comportamento da madeira em cisalhamento tem sido historicamente desafiadora devido à dificuldade em alcançar um estado de cisalhamento puro e uniforme. Como resultado, foram desenvolvidos diversos métodos experimentais, como o teste de Arcan, testes fora do eixo, teste de Iosipescu, teste de flexão de quatro e três pontos, entre outros (Bru *et al.*, 2017).

Em linhas gerais, este trabalho está inserido em um contexto em que pouco se conhece o módulo de elasticidade transversal de madeiras nativas. A presente pesquisa se justifica pela necessidade de estudar essa propriedade de rigidez via ensaio de flexão estática. Com o estudo será possível avaliar a relação entre os módulos de elasticidade longitudinais ( $E$ ) e transversal ( $G$ ), comparar as metodologias de ensaio e verificar se os módulos elásticos permanecem os mesmos à medida que a relação entre o comprimento do vão livre e altura da seção transversal diminui.

Com essa pesquisa, espera-se contribuir para o avanço do conhecimento científico na área de engenharia da madeira. Além disso, procura-se a obtenção de estimativas mais precisas do módulo de elasticidade transversal visando ensaios de fácil execução em qualquer tipo de laboratório de estrutura.

## **1.1 OBJETIVOS**

### **1.1.1 Geral**

O objetivo geral deste trabalho é estimar o módulo de elasticidade transversal de madeira nativa por meio de ensaios de flexão estática, visando contribuir para o conhecimento das propriedades mecânicas desse material.

### **1.1.2 Específicos**

Os objetivos específicos se resumem em:

- I. verificar a relação entre o comprimento do vão e altura da viga ( $L/h$ ) nos ensaios de flexão estática a três e quatro pontos a partir da qual os valores dos Módulos de Elasticidade Aparente ( $E_{ap}$ ) não sejam afetados pela deformação devido os esforços cisalhantes;
- II. demonstrar o efeito da deformação devido o cisalhamento (teoria de viga de Timoshenko), em comparação com a teoria de viga de Euler Bernoulli, à medida que é reduzido a relação entre vão e altura da seção transversal;
- III. averiguar se existe diferença na estimativa do módulo de elasticidade longitudinal e transversal quando realizada flexão estática a três e quatro pontos;
- IV. determinar a relação entre  $E$  e  $G$  que mais se ajuste às madeiras de florestas nativas em estudo. Ainda, verificar se a relação apresentada pela NBR 7190-1 (2022a) para determinar o módulo de elasticidade transversal é adequada para as madeiras estudadas.

Com a conclusão dos objetivos listados, almeja-se a geração de informações que contribuam para uma futura revisão da norma brasileira de estruturas de madeira (NBR 7190:2022), no que diz respeito à estimativa e procedimento experimental para módulo de elasticidade transversal ( $G$ ).

## **CAPÍTULO 2**



### **2 ASPECTOS FUNDAMENTAIS**

## 2 ASPECTOS FUNDAMENTAIS

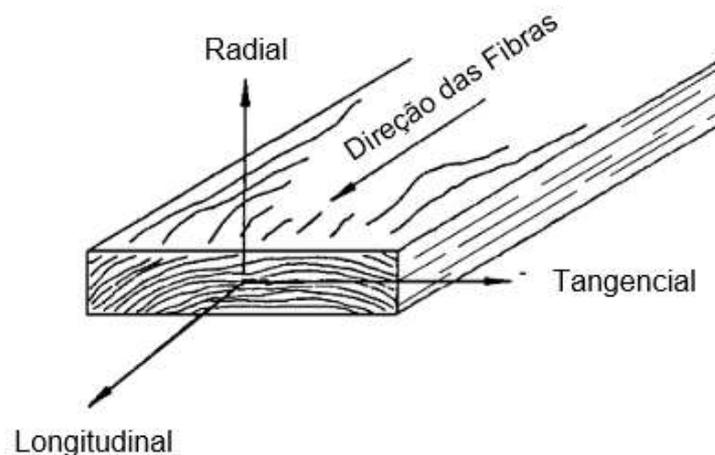
Neste capítulo serão abordadas as questões da anisotropia da madeira, bem como a fundamentação teórica de cálculo tensional para resolução de problemas que envolvem materiais ortotrópicos tridimensionais. Ressalta-se que será explanado aqui, também, o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) para embasar a metodologia do trabalho, sendo assim, uma forma de prever o módulo de elasticidade longitudinal (E) e transversal (G) em viga submetida à flexão.

### 2.1 GENERALIDADE

A madeira é um material fibroso, anisotrópico e de coordenadas cilíndricas de eixos. Porém alguns autores como Bodig e Jayne (1982), Mascia (1991) e Fusco (1989) provam que a madeira pode ser considerada de forma simplificada como ortotrópica, assim, sendo desprezível a interferência da curvatura nas propriedades do material nas direções radial e tangencial.

A definição de ortotropia para materiais sólidos refere-se à sua estrutura interna, no qual se caracteriza por três eixos simétricos e perpendiculares entre si (longitudinal, radial e tangencial). É possível identificar três distintas direções na madeira a nível macroscópico devido ao seu arranjo anatômico, conforme pode ser visto na Figura 2.

Figura 2 - Eixos principais da madeira em relação às fibras.



Fonte: Adaptado de Green, Winandy e Kretschmann (1999).

A análise mecânica ou a avaliação da elasticidade de materiais ortotrópicos pode ser realizada utilizando tensões, ou seja, matrizes tensoriais. Esse método utiliza cálculos matriciais e tensoriais para descrever um sistema físico simplificando-o no caso de materiais ortotrópicos devido à sua simetria interna.

Comumente, ao resolver problemas envolvendo materiais ortotrópicos, uma determinada propriedade é conhecida em um sistema de referência e é necessário convertê-la para outro sistema. O cálculo de tensão é utilizado para realizar essas transformações, levando em consideração os cossenos dos ângulos entre os eixos dos sistemas.

## 2.2 TENSÕES E DEFORMAÇÕES

Quando um corpo é submetido a carregamentos externos esses causam mudanças em sua forma e tensões internas. As tensões em um meio contínuo são medidas como força por unidade de área e são apresentadas por  $\sigma_{ij}$ . Estas tensões são obtidas pela associação de um vetor de forças internas a cada uma das três direções do sistema de eixos adotado. Supondo a condição de não ocorrência de aceleração infinita, tem-se:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (3)$$

Portanto existem seis tensões independentes. A rotação para os tensores das tensões é  $\sigma_{ij}$ ,  $i$  e  $j$  pode assumir valores de 1, 2 e 3, sendo escrita em forma de matriz da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (4)$$

A matriz é simétrica em relação à sua diagonal principal. Sabe-se que o índice  $i$ , ou primeiro índice, se refere à direção normal à face onde atua a tensão e o  $j$ , ou segundo índice, à própria direção da tensão. Quando  $i = j$  os esforços são assumidos como normais e se  $i \neq j$  os esforços são de cisalhamentos.

Em contra partida a ideia de deformação está associada ao deslocamento de um ponto interno em um meio contínuo. Forças e deslocamentos na superfície de um corpo fazem o ponto, inicialmente posicionado em  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ , ser deslocado para uma posição  $x_1 + \Delta_1$ ,  $x_2 + \Delta_2$  e  $x_3 + \Delta_3$ . O vetor deslocamento é constituído de  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  e  $\Delta_3$ .

Os elementos do tensor das deformações ( $\varepsilon_{ij}$ ) são definidos como função dos deslocamentos,  $\Delta_i$ , por meio da Equação 5:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \Delta_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta_j}{\partial x_i} \right] \quad (5)$$

Nota-se a possibilidade de os índices  $i$  e  $j$  assumir os valores de 1, 2 e 3. Analogamente, se escreve:

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \Delta_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \Delta_2}{\partial x_1} \right] \quad (6)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \Delta_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \Delta_2}{\partial x_2} \right] = \frac{\partial \Delta_2}{\partial x_2} \quad (7)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad (8)$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (9)$$

A matriz  $\varepsilon_{ij}$  é simétrica em relação a sua diagonal principal e existem seis componentes independentes.

### 2.3 LEI DE HOOKE GENERALIZADA

Pacheco (2019) explica que na Lei de Hooke as tensões são proporcionais as deformações no regime elástico e linear do material sujeito à um carregamento externo. Quando o material é solicitado além do seu limite de proporcionalidade, para pequenos acréscimos de força há uma deformação relativamente grande, o mesmo

passa a não seguir a Lei de Hooke. De modo geral, os materiais aplicados em estruturas seguem essa lei, ou seja, os projetos trabalham dentro do limite de proporcionalidade (regime elástico).

Aplicando a Lei de Hooke na forma tensorial, obtém-se a seguinte equação:

$$\sigma_{ij} = C_{kl}\varepsilon_{ij} \quad (10)$$

Em que:

$C_{kl}$  – matriz tensor constitutivo formado por elementos que são naturalmente constantes, os quais dependem do material em consideração e de seu grau de anisotropia;

$i$  e  $j$  assumem valores de 1 a 3;

$k$  e  $l$  assumem valores de 1 a 6.

Logo pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Sendo reescrito  $\sigma_{ij}$ , quando  $i = j$ , por  $\sigma_i$  (tensão normal) e  $\sigma_{ij}$ , quando  $i \neq j$ , por  $\tau_{ij}$  (tensão cisalhante). Substituindo  $\varepsilon_{ij}$ , quando  $i = j$ , por  $\varepsilon_i$  (deformação linear específica) e  $\varepsilon_{ij}$ , quando  $i \neq j$ , por  $\gamma_{ij}$  (deformação angular) é possível simplificar a Equação 11 por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Na matriz  $C_{kl}$  existem 36 constantes desconhecidas, porém aplicando o Teorema de Maxwell é possível reduzir para 21. O teorema estabelece condições de conservação de energia que são observadas em corpos em equilíbrio. No caso do deste trabalho o material apresentar simetria segundo três eixos ortogonais reduzindo as constantes elásticas independentes para 9. Portanto pode-se reescrever a Equação 12, como sendo:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Respeitando a Lei de Hooke, a tensão  $\sigma_1$  produz uma deformação  $\varepsilon_1$  dada pela seguinte equação:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E_1} \sigma_1 \quad (14)$$

Em que:

$E_1$  – Módulo de deformação na direção  $x_1$ .

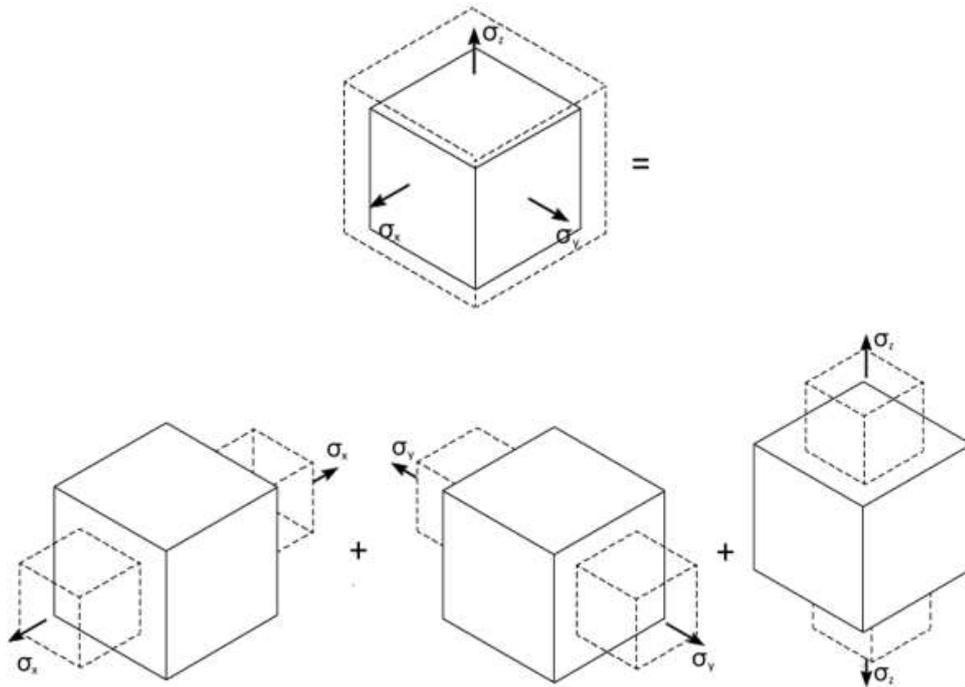
Analogamente, tem-se:

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E_2} \sigma_2 \quad (15)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E_3} \sigma_3 \quad (16)$$

Leonel (2022) descreve que para ilustrar a dependência da deformação normal em cada um dos eixos coordenados devido a atuação de tensões pode-se aplicar o princípio da superposição dos efeitos, conforme a Figura 3.

Figura 3 - Análise de um elemento solicitado triaxialmente.



Fonte: Adaptado de Leonel (2022).

É possível, então, associar  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  pela expressão:

$$\varepsilon_1 = -\nu_{12}\varepsilon_2 \quad (17)$$

Em que:

$\nu_{12}$  – Coeficiente de Poisson.

Combinando a Equação 15 com a Equação 17 obtém-se:

$$\varepsilon_1 = \frac{-\nu_{12}}{E_2} \sigma_2 \quad (18)$$

A tensão  $\sigma_2$  produz uma deformação  $\varepsilon_1$  com sinal contrário à deformação  $\varepsilon_2$ . O mesmo ocorre para a tensão  $\sigma_3$ , na direção  $x_3$ , como segue:

$$\varepsilon_1 = \frac{-\nu_{13}}{E_3} \sigma_3 \quad (19)$$

Somando os efeitos, conforme a sobreposição dos efeitos ilustrada na Figura 3, obtém-se a deformação total na direção 1:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E_1} \sigma_1 - \frac{\nu_{12}}{E_2} \sigma_2 - \frac{\nu_{13}}{E_3} \sigma_3 \quad (20)$$

Analogamente para as outras direções têm-se:

$$\varepsilon_2 = -\frac{\nu_{21}}{E_1} \sigma_1 + \frac{1}{E_2} \sigma_2 - \frac{\nu_{23}}{E_3} \sigma_3 \quad (21)$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{\nu_{31}}{E_1} \sigma_1 - \frac{\nu_{32}}{E_2} \sigma_2 + \frac{1}{E_3} \sigma_3 \quad (22)$$

Existem, ainda, as deformações cisalhantes. Admitindo que as tensões cisalhantes atuantes em um plano não provoquem distorções em outros planos ortogonais, pode-se escrever que:

$$\gamma_{23} = \frac{1}{G_{23}} \tau_{23} \quad (23)$$

$$\gamma_{13} = \frac{1}{G_{13}} \tau_{13} \quad (24)$$

$$\gamma_{12} = \frac{1}{G_{12}} * \tau_{12} \quad (25)$$

Em que:

$G_{12}, G_{13}, G_{23}$  – Módulos de elasticidade transversal do material.

Combinando a Equação 13 com a Equação 20 até 25 se obtém a Lei de Hooke para materiais ortotrópicos, sendo apresentada na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -v_{12}/E_2 & -v_{13}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -v_{21}/E_2 & 1/E_2 & -v_{23}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -v_{31}/E_3 & -v_{32}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{bmatrix} \quad (26)$$

Os índices 1 ou x, 2 ou y e 3 ou z, no caso da madeira, podem ser considerados coincidentes com as direções longitudinal (L), radial (R) e tangencial (T), respectivamente.

## 2.4 PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS (PTV)

Quando conhecido o deslocamento e a carga aplicada em um elemento estrutural linear uma forma de estimar sua rigidez é aplicando o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). O deslocamento total em um elemento é proveniente da somatória dos deslocamentos causados por momento fletor, esforço normal, esforço cortante e momento torçor. O PTV é resumido da seguinte forma: o trabalho das forças externas é igual ao trabalho das forças internas, sendo a Equação 27 proveniente dessa teoria.

$$\bar{P} * \delta = \int_0^L \frac{N\bar{N}}{EA} dx + \int_0^L \frac{M\bar{M}}{EI} dx + k \int_0^L \frac{V\bar{V}}{GA} dx + \int_0^L \frac{T\bar{T}}{GI_t} dx \quad (27)$$

Em que:

$\bar{P}$  – carga virtual;

$\delta$  – deslocamento total em determinado ponto;

L – comprimento do elemento;

N,  $\bar{N}$  – esforços normais devido aos carregamentos real e virtual, respectivamente;

E – módulo de elasticidade longitudinal;

$A$  – área da seção transversal;

$M, \bar{M}$  – momentos fletores devido aos carregamentos real e virtual, respectivamente;

$k$  – coeficiente de forma, igual à 1,2 para seção transversal retangular;

$V, \bar{V}$  – esforços cisalhantes devido aos carregamentos real e virtual, respectivamente;

$G$  – módulo de elasticidade transversal ou módulo cisalhante;

$T, \bar{T}$  - momentos de torção devido aos carregamentos real e virtual, respectivamente;

$I$  – momento de inércia;

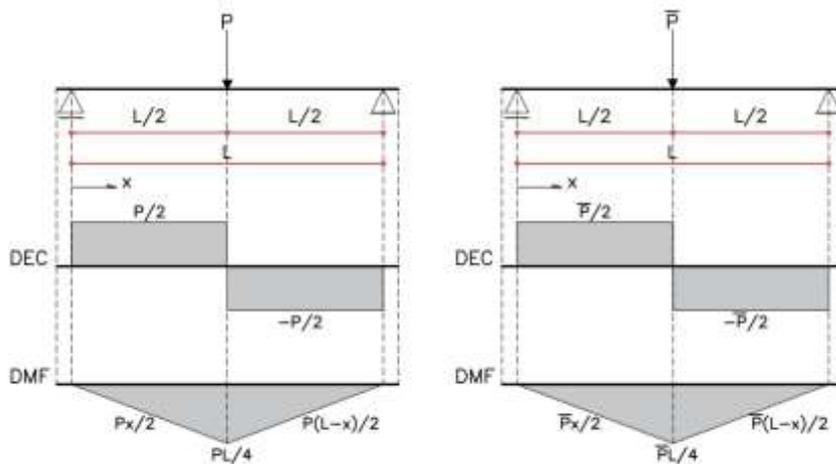
$I_t$  – momento de inércia à torção.

Considerando a teoria de vigas de Timoshenko e a afirmação de Lahr (1983), para flexão estática são descartadas as parcelas devido aos esforços de torção e normais da equação anterior. Portanto, a flecha de um elemento submetido à flexão estática pode ser estimada por meio das parcelas de momento fletor e esforço cortante. Logo, para este trabalho, a Equação 27 pode ser reformulada para:

$$\bar{P} * \delta = \int_0^L \frac{M\bar{M}}{EI} dx + k \int_0^L \frac{V\bar{V}}{GA} dx \quad (28)$$

Para o caso de flexão a três pontos e uma força virtual aplicada no centro do vão da viga, os diagramas de esforço cortante e momento fletor estão expressos na Figura 4.

Figura 4 - Diagrama de esforço cortante (DEC) e de momento fletor (DMF) para viga submetida à flexão estática a três pontos para carregamento real e virtual.



Fonte: Autoria própria (2024).

Deduzindo-se separadamente cada uma das parcelas, a flecha devido ao momento fletor fica expressa por:

$$\bar{P} * \delta_{M,3} = \int_0^L \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \frac{2}{EI} \left( \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{P\bar{P}x^2}{4} dx \right) = \frac{2}{EI} \left( \frac{P\bar{P}x^3}{12} \Big|_0^{\frac{L}{2}} \right) = \frac{P\bar{P}L^3}{48EI} \quad (29)$$

Impondo que  $\bar{P} = 1$  na Equação 29, tem-se:

$$\delta_{M,3} = \frac{PL^3}{48EI} \quad (30)$$

A flecha devida o efeito da cortante fica expressa por:

$$\bar{P} * \delta_{V,3} = k \int_0^L \frac{V\bar{V}}{GA} dx = \frac{2k}{GA} \left( \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{P\bar{P}}{4} dx \right) = \frac{2k}{GA} \left( \frac{P\bar{P}x}{4} \Big|_0^{\frac{L}{2}} \right) = \frac{kP\bar{P}L}{4GA} \quad (31)$$

Impondo que  $\bar{P} = 1$  e  $k = 1,2$  na Equação 31, tem-se:

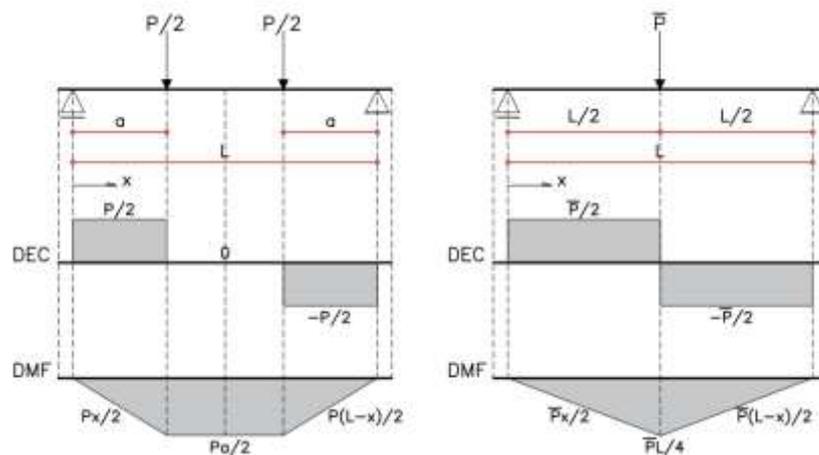
$$\delta_{V,3} = \frac{3PL}{10GA} \quad (32)$$

O deslocamento total no centro do vão considerando as parcelas de flexão e cisalhamento é determinado pela somatória dos efeitos para pequenos deslocamentos, assim tem-se o deslocamento total para flexão a três pontos dado pela Equação 33.

$$\delta_{T,3} = \delta_{M,3} + \delta_{V,3} = \frac{PL^3}{48EI} + \frac{3PL}{10GA} \quad (33)$$

Para o caso de flexão a quatro pontos e uma força virtual aplicada no centro do vão da viga, os diagramas de esforço cortante e momento fletor estão expressos na Figura 5.

Figura 5 - Diagrama de esforço cortante (DEC) e de momento fletor (DMF) para viga submetida à flexão estática a quatro pontos para carregamento real e flexão estática a três pontos para carregamento virtual.



Fonte: Autoria própria (2024).

Deduzindo-se separadamente cada uma das parcelas, a flecha devido ao momento fletor fica expressa por:

$$\begin{aligned}\bar{P} * \delta_{M,4} &= \int_0^L \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \frac{2}{EI} \left( \int_0^a \frac{P\bar{P}x^2}{4} dx + \int_a^{\frac{L}{2}} \frac{P\bar{P}ax}{4} dx \right) \\ \bar{P} * \delta_{M,4} &= \frac{2}{EI} \left( \frac{P\bar{P}x^3}{12} \Big|_0^a + \frac{P\bar{P}ax^2}{8} \Big|_a^{\frac{L}{2}} \right) \\ \bar{P} * \delta_{M,4} &= \frac{2}{EI} \left( \frac{P\bar{P}a^3}{12} + \frac{P\bar{P}aL^2}{32} - \frac{P\bar{P}a^3}{8} \right) = \frac{1}{EI} \left( \frac{P\bar{P}aL^2}{16} - \frac{P\bar{P}a^3}{12} \right) \\ \bar{P} * \delta_{M,4} &= \frac{P\bar{P}}{48EI} (3aL^2 - 4a^3)\end{aligned}\tag{34}$$

Em que:

a - Distância entre a linha de apoio e a linha de carregamento mais próxima.

Impondo que  $\bar{P} = 1$  na Equação 34, tem-se:

$$\delta_{M,4} = \frac{P}{48EI} (3aL^2 - 4a^3)\tag{35}$$

A flecha devida o efeito da cortante fica expressa por:

$$\begin{aligned}\bar{P} * \delta_{V,4} &= k \int_0^L \frac{V\bar{V}}{GA} dx = \frac{2k}{GA} \left( \int_0^a \frac{P\bar{P}}{4} dx + \int_0^{L/2} \frac{0\bar{P}ax}{2} dx \right) \\ \bar{P} * \delta_{V,4} &= \frac{P\bar{P}xk}{2GA} \Big|_0^a = \frac{P\bar{P}ak}{2GA}\end{aligned}\tag{36}$$

Impondo que  $\bar{P} = 1$  e  $k = 1,2$  na Equação 36, tem-se:

$$\delta_{V,4} = \frac{6Pa}{10GA}\tag{37}$$

O deslocamento total no centro do vão considerando as parcelas de flexão e cisalhamento é determinado pela somatória dos efeitos para pequenos

deslocamentos, assim tem-se o deslocamento total para flexão a quatro pontos dado pela Equação 38.

$$\delta_{T,4} = \delta_{M,4} + \delta_{V,4} = \frac{P}{48EI} (3aL^2 - 4a^3) + \frac{6Pa}{10GA} \quad (38)$$

## 2.5 CONCLUSÃO

A madeira é um material anisotrópico que em teoria é simplificado como sendo ortotrópico, a qual suas propriedades podem ser estimadas via cálculos matriciais e tensoriais para problemas tridimensionais. Levando em consideração uma viga, simplificada como elemento linear, a Equação 33 e 38 podem prever o deslocamento para situação de flexão estática a três e quatro pontos, respectivamente. No entanto, quando não conhecido o módulo de elasticidade longitudinal e transversal é possível, por meio de ensaios, obter equações com essas duas incógnitas, visto que o deslocamento é limitado por norma e a força é fornecida durante o ensaio experimental.

# **CAPÍTULO 3**



## **3 REVISÃO DE LITERATURA**

### 3 REVISÃO DE LITERATURA

Este capítulo destina-se à apresentação de trabalhos científicos e normas que discorrem acerca do módulo de elasticidade transversal (G), como também da relação desse parâmetro com o módulo de elasticidade longitudinal (E) da madeira. Esta revisão bibliográfica pautou-se em pesquisas desenvolvidas ao longo dos anos, sendo utilizados como mecanismos de busca *Web of Science*, *Scopus (Elsevier)* e *Google Scholar*. Além disso, aplicou-se a busca cruzada para rastrear e identificar trabalhos relevantes por meio das citações dos autores encontrados na etapa anterior.

As pesquisas foram realizadas por meio de código de busca (*strings*) em inglês: "*Shear Modulus*" AND ("*Wood*" OR "*Timber*") AND NOT ("*Cross-Laminated Timber*" OR "*Glued-Laminated Timber*" OR "*Rolling Shear*"), e em português: "Módulo de Elasticidade Transversal" AND "Madeira".

#### 3.1 VALORES DE CONSTANTES ELÁSTICAS DE INTERESSE PARA MADEIRA RETIRADOS DA LITERATURA

Hearmon e Barkas (1941) estudaram a influência da inclinação das fibras na obtenção do módulo de elasticidade longitudinal e transversal de duas espécies de madeira, *Beech* e *Sitka Spruce*. Seu trabalho pautou-se em cálculos dos parâmetros elásticos da madeira via resultados experimentais feitos por meio da frequência vibracional na flexão, para o módulo de elasticidade longitudinal (E), e frequência vibracional na torção, para o módulo de elasticidade transversal (G). Logo foi obtido para a espécie de madeira *Sitka Spruce* valores médios de  $E=8115$  MPa,  $G_{TL}=578$  MPa e  $G_{RL}=688,5$  MPa. Já para a espécie *Beech* os valores foram:  $E=11875$  MPa,  $G_{TL}=846$  MPa e  $G_{RL}=870$  MPa.

No cenário nacional, Mascia (1991) apresenta várias constantes elásticas para algumas madeiras, ver Tabela 2. Enquanto Trinca (2011) traz os parâmetros elásticos para outras espécies obtidos por ensaio de ultrassom, conforme pode ser visto na Tabela 3.

Tabela 2 - Valores médios para módulos elásticos da madeira segundo Mascia (1991), em MPa.

<b>Espécie</b>	<b>E<sub>L</sub></b>	<b>E<sub>R</sub></b>	<b>E<sub>T</sub></b>	<b>G<sub>LT</sub></b>	<b>G<sub>LR</sub></b>	<b>G<sub>RT</sub></b>
<b>Guarapuvú</b>	3507,5	516,5	287,2	420,8	377,8	72,9
<b>Ipê</b>	18043,9	1748,1	960,5	831,2	620,2	356,3
<b>Angico</b>	8558,5	759	462,1	727,1	542,4	248,6
<b>Pinus</b>	5471	1049,4	737,6	307	542,6	116,3

Fonte: Adaptado Mascia (1991).

Tabela 3 - Valores médios para módulos elásticos da madeira segundo Trinca (2011), em MPa.

<b>Espécie</b>	<b>E<sub>L</sub></b>	<b>E<sub>R</sub></b>	<b>E<sub>T</sub></b>	<b>G<sub>LT</sub></b>	<b>G<sub>LR</sub></b>	<b>G<sub>RT</sub></b>
<b>Garapeira</b>	14333	2323	1452	1489	1865	536
<b>Cupiúba</b>	13583	2113	1813	892	1950	642
<b>Eucalipto saligna</b>	13617	3680	2180	1172	2360	829

Fonte: Trinca (2011).

Carrasco *et al.* (2020) avaliaram as constantes elásticas utilizando o método de propagação de ondas ultrassônicas na madeira de Pequiá. Entre os resultados obtidos foram determinados os valores de módulo cisalhante no plano tangencial-longitudinal e radial-longitudinal ( $G_{TL}=1087$  MPa e  $G_{RL}=1355$  MPa respectivamente) e, também, o módulo de elasticidade na direção longitudinal ( $E_L=11561$  MPa). Por fim, concluíram que é viável estabelecer os coeficientes elásticos empregando o procedimento de disseminação de ondas ultrassônicas, apresentando elevada precisão, eficiência e com baixo investimento.

Sendo os parâmetros elásticos de difícil obtenção, Bodig e Jayne (1982) relacionam as constantes elásticas da madeira da seguinte forma:

- i)  $E_L : E_R : E_T \cong 20 : 1,6 : 1$ ;
- ii)  $G_{LR} : G_{LT} : G_{RT} \cong 10 : 9,4 : 1$ ;
- iii)  $E_L : G_{LR} \cong 14 : 1$

No entanto existe divergência com relação à estas relações. Ballarin e Nogueira (2003) concluíram para a espécie de madeira em seu estudo que o módulo de elasticidade na direção radial tem valor aproximado de 1/10 do módulo de elasticidade longitudinal ( $E_R \cong \frac{E_L}{10}$ ). Enquanto para o módulo de elasticidade transversal no plano LR (longitudinal-radial) tem valor aproximado de 1/20 do módulo de elasticidade longitudinal.

Lahr (1983) foi um dos primeiros a nível nacional a apresentar uma metodologia de cálculo para estimar o módulo de elasticidade transversal via flexão estática. Ademais, seu estudo comprovou que os módulos de cisalhamento obtidos na flexão, ora quando a carga é aplicada perpendicularmente à direção radial ora quando é aplicada perpendicularmente a direção tangencial, são equivalentes estatisticamente. Obteve, ainda, que para as madeiras da sua pesquisa o  $G$  é entorno de  $E/30$  e  $E/40$ .

Seguindo a mesma linha de pesquisa, Christoforo *et al.* (2013) apresentam uma metodologia analítica para o cálculo dos módulos de elasticidade longitudinal ( $E$ ) e transversal ( $G$ ) em vigas de madeira de dimensões estruturais. Esta metodologia se respalda no método dos mínimos quadrados e na teoria de viga de Timoshenko. Para tal, foram ensaiadas vigas de madeira à flexão estática a três pontos variando o vão e respeitando a relação  $L/h \leq 21$ , sendo o  $L$  o comprimento do vão e  $h$  a altura da seção transversal da viga.

Zangiácomo, Christoforo e Lahr (2013) também estudaram o módulo de elasticidade transversal e longitudinal obtido na flexão estática à três pontos. Os autores analisaram peças roliças estruturais de madeira Eucalipto-Cidró por meio de variação de vão levando em consideração a relação  $L/d$  (comprimento do vão livre por diâmetro dos corpos de prova). Concluíram que a relação fornecida pela norma ABNT NBR 7190 (1997), vigente no período da pesquisa,  $G=E/20$ , não representava muito bem a espécie estudada, pois a relação encontrada foi  $G=E/56$ . Este estudo foi replicado em 2016 para peças roliças estruturais de madeira Pinus e chegou-se à uma relação de  $G=E/43$  (Zangiácomo; Christoforo; Lahr, 2016).

Lahr *et al.* (2017) ensaiaram a flexão madeiras para estima o módulo de elasticidade transversal e longitudinal. Chegou-se à conclusão que os módulos elásticos transversais nas direções longitudinal-radial e Longitudinal-tangencial são equivalentes e, também, afirmam que não é possível estimar o módulo de elasticidade transversal pelo módulo de elasticidade longitudinal. No entanto, fornecem a relação  $G=E/35$  como forma de comparar com a relação fornecida por norma.

Já o estudo recente de Afoutou, Zhang e Dubois (2024) utilizou ondas ultrassônicas por compressão como forma de inovação tecnológica para fazer a caracterização da propriedades elásticas da madeira *Douglas Fir*. Após a otimização dos resultados os autores apresentam  $E_L=13,1$  GPa,  $G_{TL}=0,737$  GPa e  $G_{RL}=1,45$  GPa para a espécie em estudo.

### 3.2 DIRETRIZES DE DIMENSIONAMENTO – VALORES DO MÓDULO DE ELASTICIDADE LONGITUDINAL E TRANSVERSAL

Além dos autores mencionados anteriormente, a USDA (2010) disponibiliza uma série de tabelas que detalham as propriedades de resistência e rigidez de espécies comerciais de madeira dos Estados Unidos, destinadas a serem utilizadas no processo de dimensionamento estrutural. A Tabela 4, por sua vez, constitui uma adaptação dos dados deste documento.

Tabela 4 – Razões elásticas para madeiras com teor de umidade de aproximadamente 12%.

Folhosas			Coníferas		
Espécie	$E_L/G_{LR}$	$E_L/G_{LT}$	Espécie	$E_L/G_{LR}$	$E_L/G_{LT}$
<b>Ash, White</b>	9,17	12,99	<b>Baldcypress</b>	15,87	18,51
<b>Balsa</b>	18,52	27,03	<b>Cedar, northern White</b>	4,76	5,35
<b>Basswood</b>	17,86	21,74	<b>Cedar, western red</b>	11,49	11,63
<b>Birch, yellow</b>	13,51	14,01	<b>Douglas-fir</b>	15,62	12,82
<b>Cherry, black</b>	6,80	10,31	<b>Fir, subalpine</b>	14,29	17,24
<b>Cottonwood, Eastern</b>	13,16	19,23	<b>Hemlock, western</b>	26,31	31,25
<b>Mahogany, African</b>	11,36	16,95	<b>Larch, western</b>	15,87	14,49
<b>Mahogany, Honduras</b>	15,15	11,63	<b>Pine Loblolly</b>	12,19	12,34
<b>Maple, sugar</b>	9,01	15,87	<b>Pine Lodgepole</b>	20,41	21,74
<b>Maple, red</b>	7,52	13,51	<b>Pine Longleaf</b>	14,08	16,67
<b>Oak, red</b>	11,24	12,35	<b>Pine Pond</b>	20,00	22,22
<b>Oak, White</b>	11,63	-	<b>Pine Ponderosa</b>	7,25	8,7
<b>Sweetgum</b>	11,24	16,39	<b>Pine Red</b>	10,42	12,35
<b>Walnut, black</b>	11,76	16,13	<b>Pine Slash</b>	18,18	18,87
<b>Yellow-poplar</b>	13,33	14,49	<b>Pine Sugar</b>	8,06	8,85
			<b>Pine Western White</b>	19,23	20,83
			<b>Redwood</b>	15,15	12,99
			<b>Spruce, Sitka</b>	15,62	16,39
			<b>Spruce, Engelmann</b>	8,06	8,33

Fonte: Adaptado de USDA (2010).

Por outro lado, a ABNT NBR 7190-1 (2022a) dispõe de classes de resistência para madeiras com propriedades padronizadas divididas em duas diferentes tabelas,

sendo uma referente as madeiras nativas e outra com relação as madeiras de reflorestamento. A primeira fornece, entre os parâmetros elásticos, somente o módulo de elasticidade longitudinal médio ( $E_{0,m}$ ), enquanto a segunda tabela além deste é possível consultar valores do módulo de elasticidade transversal médio ( $G_m$ ), conforme podem ser vistos na Tabela 5.

Tabela 5 - Módulos elásticos por classe de resistência para madeiras de reflorestamento.

<b>Tipo</b>	<b>Classe</b>	<b><math>E_{0,m}</math> (GPa)</b>	<b><math>G_m</math> (GPa)</b>	<b>E/G</b>
<b>Coníferas</b>	<b>C14</b>	7	0,4	17,5
	<b>C16</b>	8	0,5	16
	<b>C18</b>	9	0,6	15
	<b>C20</b>	9,5	0,6	15,83
	<b>C22</b>	10	0,6	16,67
	<b>C24</b>	11	0,7	15,71
	<b>C27</b>	12	0,7	17,14
	<b>C30</b>	12	0,8	15
	<b>C35</b>	13	0,8	16,25
	<b>C40</b>	14	0,9	15,56
	<b>C45</b>	15	0,9	16,67
<b>Folhosas</b>	<b>C50</b>	16	1	16
	<b>D18</b>	9,5	0,6	15,83
	<b>D24</b>	10	0,6	16,67
	<b>D30</b>	11	0,7	15,71
	<b>D35</b>	12	0,8	15
	<b>D40</b>	13	0,8	16,25
	<b>D50</b>	14	0,9	15,56
	<b>D60</b>	17	1,1	15,45
<b>D70</b>	20	1,25	16	

Fonte: Adaptado da ABNT NBR 7190-1 (2022a).

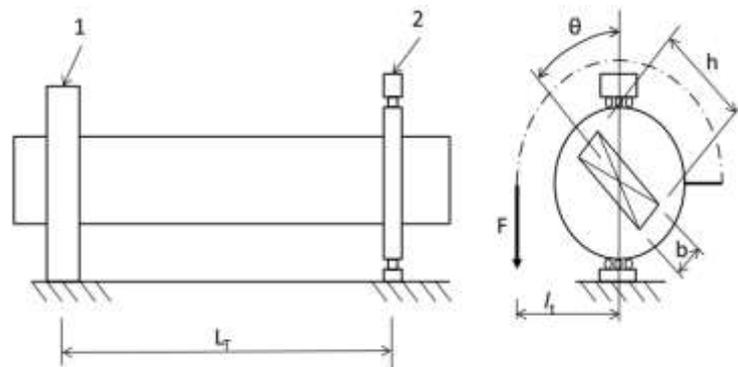
### 3.3 ENSAIOS NORMATIVOS PARA OBTENÇÃO DO MÓDULO DE ELASTICIDADE TRANSVERSAL

A seguir será apresentada a norma internacional ISO/FDIS 13910 (2014), a europeia BS EN 408 (2010; 1995) e a nacional ABNT NBR 7190-4 (2022c) que aborda a determinação experimental do módulo de elasticidade transversal para a madeira.

### 3.3.1 ISO/FDIS 13910:2014 e ABNT NBR 7190- 4:2022

Ambas as normas apresentam a mesma metodologia experimental que pode ser vista a seguir. Vale ressaltar que se trata de ensaio de torção em peças de madeira estrutural. A configuração do ensaio é mostrada na Figura 6.

Figura 6- Esquema de ensaio de torção.



Fonte: ISO/FDIS 13910 (2014) .

Na Figura 6 o ponto 1 refere-se à extremidade engastada e o ponto 2 refere-se ao plano de torque. Os comprimentos necessários são definidos como:  $L_T$ , comprimento do corpo de prova igual à 18 vezes a largura da seção transversal, e  $l_t$ , braço de alavanca com comprimento de 500 mm.

O ensaio consiste na aplicação de uma carga  $F$  que atua através de um braço de alavanca de comprimento  $l_t$  gerando no elemento um torque. O módulo de elasticidade transversal é calculado pela seguinte equação:

$$G_{t,0} = \frac{3L_T l_t}{hb^3 \left[ 1 - 0,63 \left( \frac{h}{b} \right) \right]} \frac{\Delta F}{\Delta \theta} \quad (39)$$

Em que:

$\frac{\Delta F}{\Delta \theta}$  – inclinação do gráfico de força pela deformação angular;

$\theta$  – ângulo de rotação;

$b$  – largura da seção transversal do corpo de prova;

$h$  – altura da seção transversal do corpo de prova.

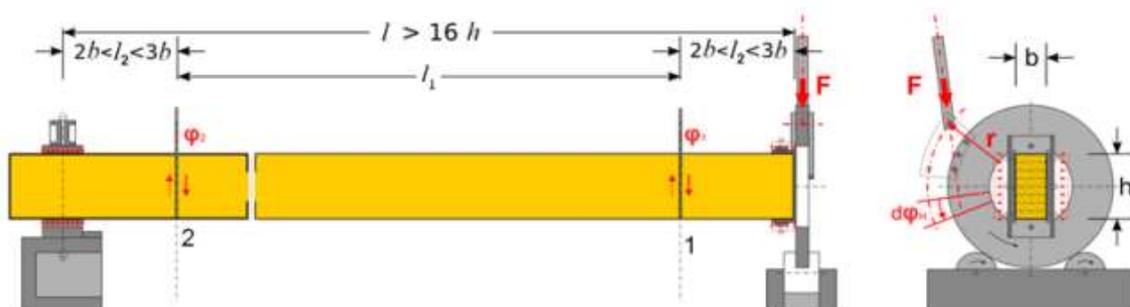
### 3.3.2 BS EN 408:2010+A1:2012

BS EN 408 (2010) apresenta duas formas diferentes de obter o parâmetro  $G$ , as quais estão descritas a seguir.

#### 3.3.2.1 Ensaio de Torção

Método é aplicado em corpos de prova seção transversal retangular que devem ter comprimento de pelo menos 19 vezes a sua altura. Durante o ensaio deve-se minimizar a deformação por flexão devido ao peso próprio da madeira e alinhar os suportes de tal forma que a fixação não cause nenhuma deformação que possa influenciar os resultados da torção. O torque é aplicado pela rotação de um ou ambos os suportes. A seguir, a Figura 7 mostra a configuração do ensaio.

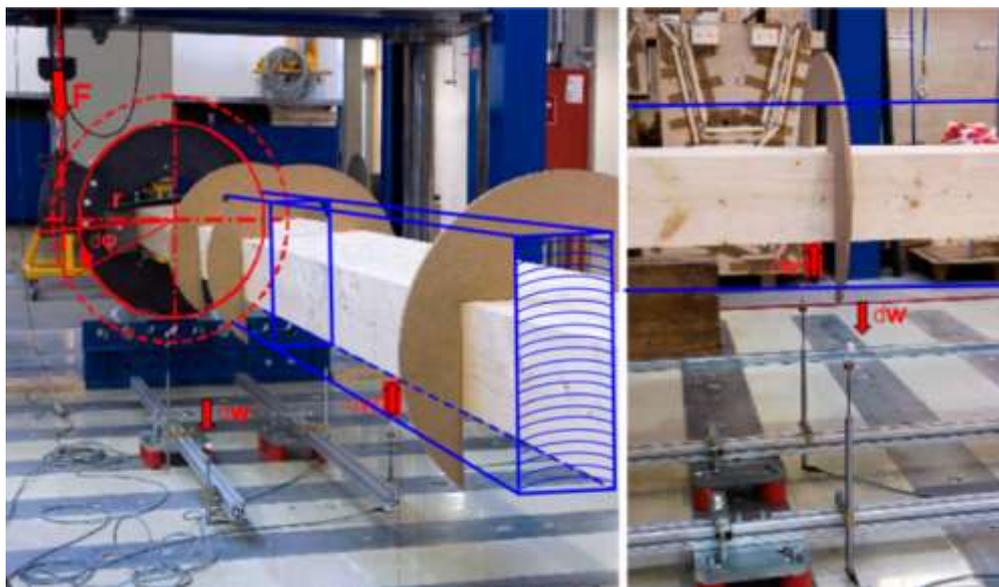
Figura 7- Exemplo de configuração para o ensaio de torção.



Fonte: BS EN 408 (2010).

Na Figura 8 é possível identificar os medidores de rotação em um experimento real.

Figura 8 - Sistema de medição de deformação angular.



Fonte: BS EN 408 (2010).

O torque é aplicado de modo que a taxa de rotação relativa por incremento de tempo ( $d\varphi/dt$ ) seja:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{f_{v,k}\chi}{225G\eta} \left(\frac{l_1}{h}\right) \quad (40)$$

Em que:

$f_{v,k}$  – resistência característica ao cisalhamento paralelo às fibras;

$l_1$  – comprimento compreendido entre duas seções que medem a rotação relativa, ver Figura 7;

$\chi$  e  $\eta$  – valores dados pela Tabela 6.

Tabela 6 - Valores de fator de forma para ensaio de torção.

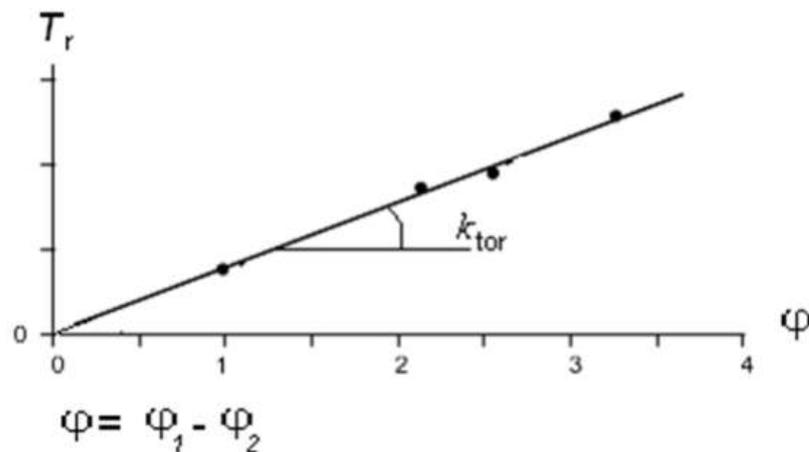
$h/b$	1,0	1,2	1,5	2,0	2,5	3	4	5	10
$\eta$	0,1406	0,166	0,196	0,229	0,249	0,263	0,281	0,291	0,312
$\chi$	0,4158	0,4564	0,4618	0,4904	0,5162	0,5334	0,5634	0,5960	0,6270

Fonte: Adaptado de BS EN 408 (2010).

A relação entre o torque aplicado,  $T_r$ , e a rotação relativa,  $\varphi$ , representa a rigidez ao torque,  $K_{tor}$ , e é determinada utilizando uma equação linear conforme

mostrado na Figura 9. Uma porção elástica linear do gráfico é tomada para a análise de regressão linear. O coeficiente de correlação deve ser de pelo menos 0,98.

Figura 9 - Gráfico do torque por rotação relativa.



Fonte: BS EN 408 (2010).

O torque máximo aplicado deve ser alcançado em 150 segundos e não deve ultrapassar o limite de proporcionalidade ou causar danos à peça entre as seções. Por isso o torque é limitado a:

$$T_r = \frac{2}{3} b^2 h f_{v,k} \chi \quad (41)$$

O equipamento de carregamento deve ser capaz de medir o torque com precisão de 1% do torque aplicado ao corpo de prova ou, para cargas inferiores a 10% do torque máximo aplicado, com precisão de 0,1% do torque máximo aplicado.

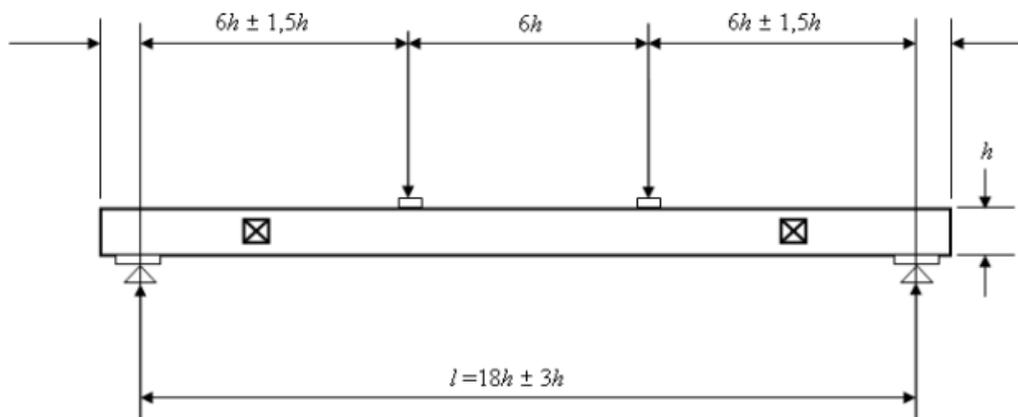
Então o G é calculado pela seguinte equação:

$$G_{\text{tor}} = \frac{K_{\text{tor}}}{\eta h b^3} l_1 \quad (42)$$

### 3.3.2.2 Método Campo de Cisalhamento

Método é aplicado em corpos de prova seção transversal retangular que devem ter comprimento de pelo menos 19 vezes a sua altura. A configuração do ensaio e as dimensões necessárias são encontradas na Figura 10.

Figura 10 - Arranjo para o ensaio campo de cisalhamento.



Fonte: BS EN 408 (2010).

A carga deve ser aplicada a uma taxa constante e não superior a  $(0,003h)$  mm/s. A carga máxima aplicada não deve exceder quatro vezes a carga máxima estimada,  $F_{\max,est}$ , que deve ser obtida em testes de pelo menos 10 corpos de provas ou de testes existentes apropriados.

No meio da região sob tensão de cisalhamento constante, um quadrado é marcado em ambas as faces laterais, colocado simetricamente em relação à altura do corpo de prova, ver Figura 11. Um dispositivo que mede a mudança das diagonais quadradas é fixado na peça de teste nos cantos desses quadrados.

Figura 11 - Exemplo de aparelhamento para ensaio de campo de cisalhamento.

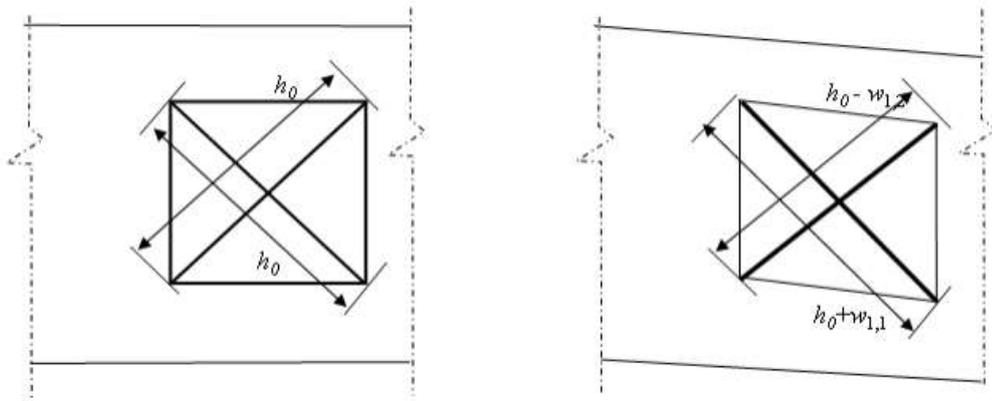


Fonte: BS EN 408 (2010).

As deformações devem ser determinadas com uma precisão de 1% ou, para deformações inferiores a 2 mm, com uma precisão de 0,02 mm. A força de cisalhamento aplicada não deve exceder o limite de proporcionalidade. O equipamento de carregamento deve ser capaz de medir a força de cisalhamento com uma precisão de 1% da força de cisalhamento aplicada ao corpo de prova ou, para cargas inferiores a 10% da força de cisalhamento máxima aplicada, com uma precisão de 0,1% desta força.

A deformação de cisalhamento,  $w_s$ , é definida como o valor médio da soma das leituras absolutas de ambas as diagonais em cada face lateral da seção transversal. A figura a seguir ilustra as deformações das diagonais do quadrado provocadas pelo esforço cisalhante.

Figura 12 - Deformações nas diagonais do quadrado.



Fonte: BS EN 408 (2010).

Então para vigas de seção transversal retangular o módulo de elasticidade transversal é dado por:

$$G_{\text{tor},s} = \frac{\alpha h_0 (V_{s,2} - V_{s,1})}{bh (w_2 - w_1)} \quad (43)$$

Em que:

$$\alpha = \frac{3}{2} - \frac{h_0^2}{4h}$$

$$w_i = \frac{|w_{i,1}| + |w_{i,2}|}{2}, \text{ com } i=1, 2;$$

$w_i$  – deformação média de ambas as diagonais  $i$  nas faces laterais opostas da viga para uma dada carga de cisalhamento, em milímetros;

$(V_{s,2} - V_{s,1})$  – incremento de carga de cisalhamento, em Newtons.

### 3.3.3 BS EN 408:1995

BS EN 408 (1995) é a versão anterior da BS EN 408 (2010), sua discretização aqui é importante visto que traz duas formas diferentes de obter o parâmetro módulo de elasticidade transversal por meio de flexão, as quais estão descritas a seguir.

#### 3.3.3.1 Método de Flexão de Vão Único

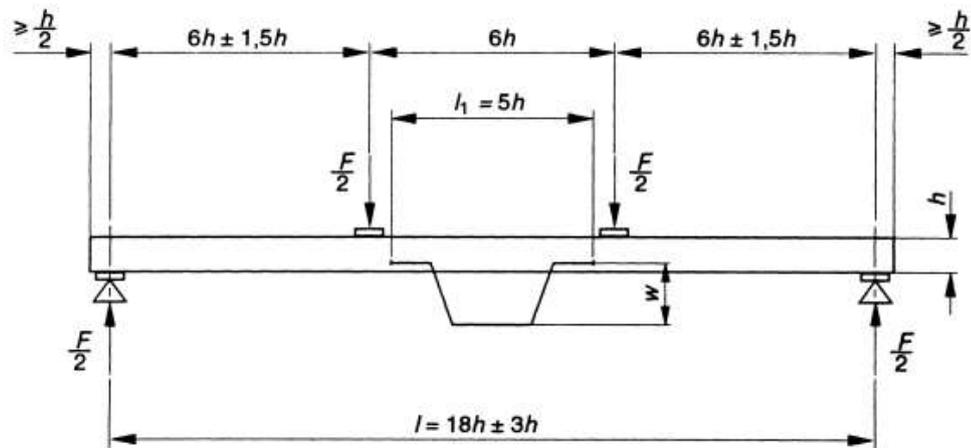
Neste método é necessário determinar o módulo de elasticidade na flexão ( $E_m$ ) e o módulo de elasticidade aparente ( $E_{m,app}$ ).

##### I. Módulo de elasticidade na flexão ( $E_m$ ):

A carga deve ser aplicada a uma taxa constante e não superior a  $(0,003h)$  mm/s. A carga máxima aplicada não deve exceder o limite de proporcionalidade e nem causar danos à peça. O equipamento de carregamento deve ser capaz de medir a força de cisalhamento com uma precisão de 1% da força de cisalhamento aplicada ao corpo de prova ou, para cargas inferiores a 10% da força de cisalhamento máxima aplicada, com uma precisão de 0,1% desta força. As deformações devem ser determinadas com uma precisão de 1% ou, para deformações inferiores a 2 mm, com uma precisão de 0,02 mm.

A configuração do ensaio e as dimensões necessárias são encontradas na Figura 13.

Figura 13 - Arranjo para o ensaio de flexão para obter o módulo de elasticidade na flexão segundo a BS EN 408 (1995).



Fonte: BS EN 408 (1995).

O módulo de elasticidade longitudinal na flexão é dado por:

$$E_m = \frac{al_1(F_2 - F_1)}{16I(w_2 - w_1)} \quad (44)$$

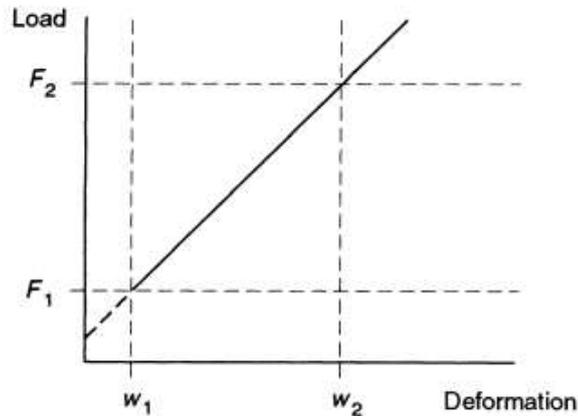
Em que:

$(F_2 - F_1)$  – incremento de carga da curva carga *versus* deformação, ver Figura 14, em Newtons;

$(w_2 - w_1)$  - incremento de deformação correspondente a  $(F_2 - F_1)$ , em milímetros;

$I$  – momento de inércia, em milímetros à quarta.

Figura 14 - Gráfico carga-deformação dentro do regime elástico.



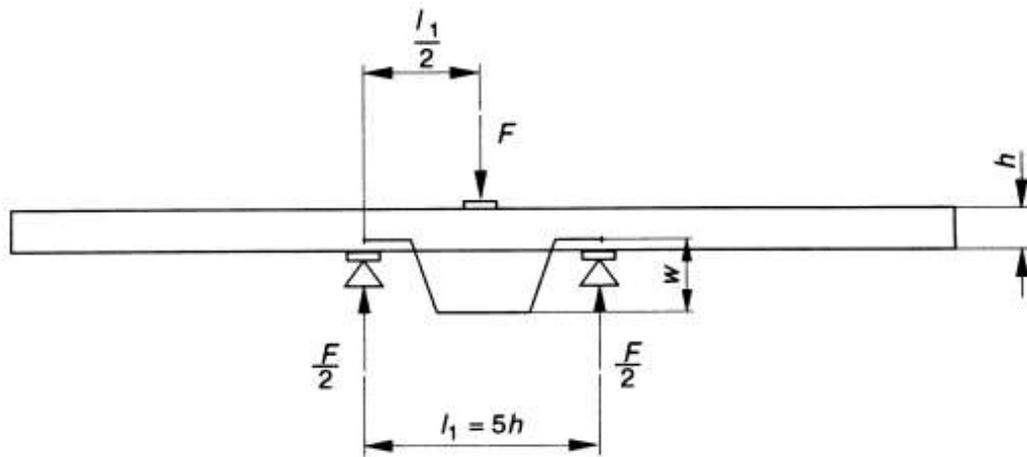
Fonte: BS EN 408 (1995).

## II. Módulo de elasticidade aparente na flexão ( $E_{m,app}$ ):

A carga deve ser aplicada a uma taxa constante e não superior a  $(0,002h)$  mm/s. A carga máxima aplicada não deve exceder o limite de proporcionalidade e nem causar danos à peça. O equipamento de carregamento deve ser capaz de medir a força de cisalhamento com uma precisão de 1% da força de cisalhamento aplicada ao corpo de prova ou, para cargas inferiores a 10% da força de cisalhamento máxima aplicada, com uma precisão de 0,1% desta força. As deformações devem ser determinadas com uma precisão de 1% ou, para deformações inferiores a 2 mm, com uma precisão de 0,02 mm.

A configuração do ensaio e as dimensões necessárias são encontradas na Figura 15.

Figura 15 - Arranjo para o ensaio de flexão para obter o módulo de elasticidade aparente segundo a BS EN 408 (1995).



Fonte: BS EN 408 (1995).

O módulo de elasticidade longitudinal aparente na flexão é dado por:

$$E_{m,app} = \frac{l_1^3 (F_2 - F_1)}{48I (w_2 - w_1)} \quad (45)$$

Em que:

$(F_2 - F_1)$  – incremento de carga da curva carga *versus* deformação, ver Figura 14, em Newtons;

$(w_2 - w_1)$  - incremento de deformação correspondente à  $(F_2 - F_1)$ , em milímetros;

$I$  – momento de inércia, em milímetros à quarta.

### III. Módulo de elasticidade transversal na flexão (G):

Correlacionando  $E_m$  e  $E_{m,app}$ , obtem-se o módulo de elasticidade transversal conforme a Equação 46.

$$G = \frac{k_G h^2}{l_1^2 \left[ \frac{1}{E_{m,app}} - \frac{1}{E_m} \right]} \quad (46)$$

Em que:

$h$  – altura da seção transversal;

$k_G$  - 1,2, para seções transversais retangulares ou quadradas.

### 3.3.3.2 Método de Flexão de Vão Variável

Este método envolve a determinação do módulo de elasticidade aparente ( $E_{m,app}$ ) para cada corpo de prova em vários vãos. O corpo de prova deve ter um comprimento mínimo de 21 vezes a altura da seção transversal.

O ensaio consiste na flexão a três pontos do corpo de prova variando pelo menos quatro vezes o vão. Os vãos devem ser escolhidos de forma a terem incrementos de  $(h/L)^2$  aproximadamente iguais entre si e dentro da faixa de 0,0025 a 0,035.

A carga deve ser aplicada a uma taxa constante e não superior a:

$$\frac{5 * 10^{-5} l^2}{6h} \text{ mm/s} \quad (47)$$

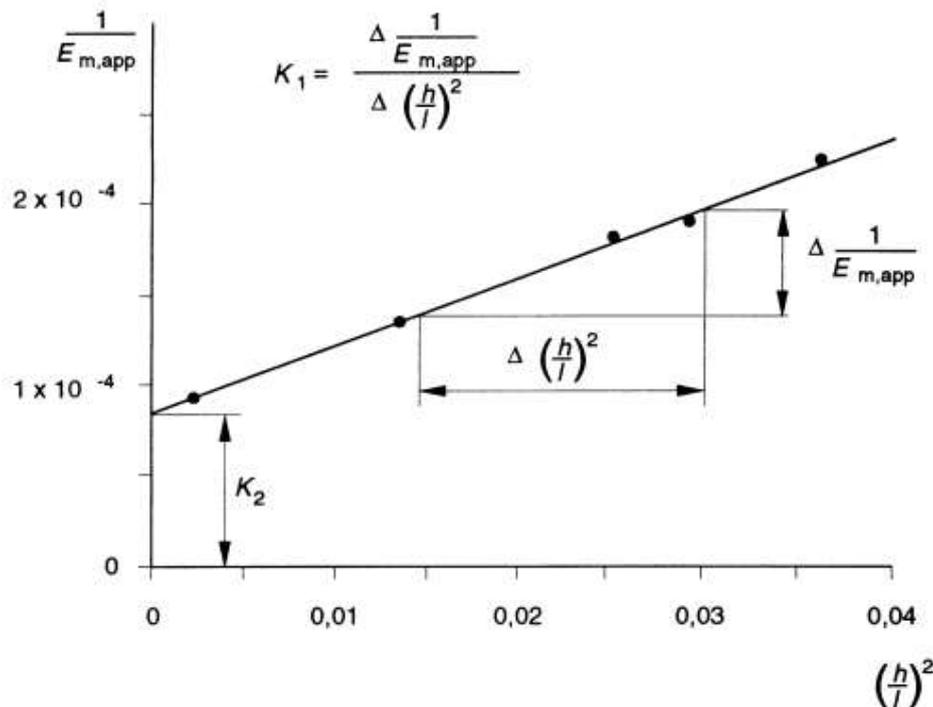
O equipamento de carregamento deve ser capaz de medir a força de cisalhamento com uma precisão de 1% da força de cisalhamento aplicada ao corpo de prova ou, para cargas inferiores a 10% da força de cisalhamento máxima aplicada, com uma precisão de 0,1% desta força. As deformações devem ser determinadas com uma precisão de 1% ou, para deformações inferiores a 2 mm, com uma precisão de 0,02 mm.

A configuração do ensaio e as dimensões necessárias são as mesmas da Figura 15. O módulo de elasticidade longitudinal aparente é calculado da mesma forma que descrito anteriormente.

Para cada corpo de prova os valores de  $\frac{1}{E_{m,app}}$  devem ser plotados em gráfico *versus*  $(h/L)^2$ , como mostrado na Figura 16, e a inclinação  $K_1$  da melhor reta que passa

pelos pontos deve ser determinada. Um valor para o módulo de elasticidade,  $E_m$ , é dado por  $\frac{1}{K_2}$ , onde  $K_2$  é a interceptação da reta em zero  $(h/L)^2$ .

Figura 16 - Determinação do módulo de elasticidade transversal no método do vão variável.



Fonte: BS EN 408 (1995).

Logo o módulo de elasticidade transversal pode ser obtido por:

$$G = \frac{k_G}{K_1} \quad (48)$$

Em que:

$k_G$  - 1,2, para seções transversais retangulares ou quadradas.

### 3.4 CONCLUSÃO

De acordo com a ABNT NBR 7190-1 (2022a), a relação  $G=E/16$  é recomendada quando a propriedade do material não é conhecida. No entanto, um levantamento

bibliográfico revelou que diversos autores propõem relações diferentes daquela estabelecida pela norma, conforme apresentado na Tabela 7.

É importante salientar que, ao aplicar madeira em estruturas, ela é geralmente cortada de modo que as fibras fiquem paralelas ao comprimento da peça, no sentido longitudinal. A disposição dos anéis de crescimento (radial ou tangencial) na seção transversal do elemento não recebe tanta atenção, uma vez que no dimensionamento são consideradas apenas as direções: paralela (0°) e perpendicular (90°) às fibras.

Tabela 7 - Resumo da relação entre E e G obtido no levantamento bibliográfico.

<b>Autor(es)</b>	<b>Método de Ensaio</b>	<b>Relação</b>
Hearmon e Barkas (1941)	Frequência Vibracional	$\frac{E}{14} \leq G \leq \frac{E}{12}$
Lahr (1983)	Flexão	$\frac{E}{45} \leq G \leq \frac{E}{31}$
Mascia (1991)	Flexão e Compressão	$\frac{E}{29} \leq G \leq \frac{E}{8}$
Ballarin e Nogueira (2003)	Compressão e Tração	$G \cong \frac{E}{20}$
Trinca (2011)	Ultrassom	$\frac{E}{15} \leq G \leq \frac{E}{6}$
Christoforo <i>et al.</i> (2013)	Flexão	$\frac{E}{18} \leq G \leq \frac{E}{17}$
Zangiácomo, Christoforo e Lahr (2013)	Flexão	$G \cong \frac{E}{56}$
Zangiácomo, Christoforo e Lahr (2016)	Flexão	$G \cong \frac{E}{43}$
Lahr <i>et al.</i> (2017)	Flexão	$\frac{E}{48} \leq G \leq \frac{E}{27}$
Carrasco <i>et al.</i> (2020)	Ultrassom	$\frac{E}{11} \leq G \leq \frac{E}{9}$
Afoutou, Zhang e Dubois (2024)	Ultrassom	$\frac{E}{18} \leq G \leq \frac{E}{9}$

Fonte: Autoria própria (2024).

Assim, ao considerar o menor e o maior valor encontrado da relação entre E e G da Tabela 7, independentemente do plano radial-longitudinal ou tangencial-longitudinal, observa-se uma variação próxima de 11% entre eles. Portanto, não é viável assumir uma única relação para estimar o módulo de elasticidade transversal da madeira, conforme indicam os resultados do levantamento.

Na Tabela 8 são apresentados os valores médios da relação E/G e seus respectivos coeficientes de variação segundo dados retirados da USDA (2010).

Tabela 8 - E/G médio retirado da USDA (2010).

	Folhosas		Coníferas	
	$E_L/G_{LR}$	$E_L/G_{LT}$	$E_L/G_{LR}$	$E_L/G_{LT}$
<b>Média</b>	11	15	13	14
<b>Coeficiente de Variação (%)</b>	22,80	12,59	44,46	43,89

Fonte: Autoria própria (2024).

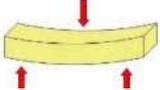
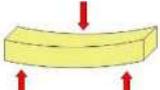
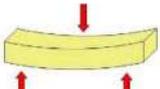
Dada a alta variabilidade apresentada pelos coeficientes de variação na Tabela 8, não é apropriado adotar uma única relação que represente o tipo de madeira, seja ela folhosa ou conífera.

No entanto, ao agrupar as madeiras por classes de resistência, não foi observada uma significativa variação de E/G. A análise da Tabela 5 revela uma variação máxima de apenas 2,5 unidades entre as classes. Entretanto, é crucial investigar se os valores do módulo de cisalhamento estabelecidos pela normativa em questão estão em conformidade com os dados experimentais. Essa indagação surge devido a descobertas no levantamento bibliográfico sobre a relação entre os módulos de elasticidade e cisalhamento do Pinus e Eucalipto provenientes de florestas plantadas, os quais diferem significativamente das classes de resistência consideradas.

Entre os métodos destacados na bibliografia, os mais relevantes são os de flexão e ultrassom. O método de flexão é amplamente utilizado para prever o comportamento elástico da madeira fletida, enquanto o método de ultrassom é indicado para determinar todos os parâmetros elásticos considerando a anisotropia do material.

Por outro lado, a Tabela 9 resume os métodos de ensaio normativos para estimar o módulo de elasticidade transversal da madeira.

Tabela 9 - Resumo dos ensaios normativos para estimar o módulo cisalhante para madeira.

Norma	Tipo de madeira	Tipo de ensaio	Formulação
ISO/FDIS 13910:2014 ABNT NBR 7190- 4:2022	Estrutural	 Torção	$G_{t,0} = \frac{3L_T l_t}{hb^3 \left[1 - 0,63 \left(\frac{h}{b}\right)\right]} * \frac{\Delta F}{\Delta \theta}$
		 Torção	$G_{tor} = \frac{K_{tor}}{\eta hb^3} l_1$
BS EN 408:2010+A1:2012	Estrutural	 Flexão	$G_{tor,s} = \frac{\alpha h_0}{bh} * \frac{(V_{s,2} - V_{s,1})}{(w_2 - w_1)}$
		 Flexão	$G = \frac{k_G h^2}{l_1^2 \left[ \frac{1}{E_{m,app}} - \frac{1}{E_m} \right]}$
BS EN 408:1995	Estrutural	 Flexão	$G = \frac{k_G}{K_1}$

Fonte: Autoria própria (2024).

Como não foram encontrados relatos de equipamentos de ensaio de torção para madeira no Brasil, conforme indicado pela ABNT NBR 7190-4 (2022c) para madeiras de reflorestamento, é válido afirmar que métodos alternativos, como o de flexão, para obtenção do módulo cisalhante, tornaram-se uma opção simples, de baixo custo e que dispõe de equipamento disponível em qualquer laboratório de estruturas.

# **CAPÍTULO 4**



## **4 MATERIAIS E MÉTODOS**

## 4 MATERIAIS E MÉTODOS

Este capítulo descreve os materiais, os ensaios e os métodos empregados no estudo sobre módulo de elasticidade transversal para madeiras de espécies nativas por meio de ensaios de flexão estática. As informações apresentadas neste capítulo são fundamentais para garantir a replicabilidade dos resultados obtidos e proporcionar uma compreensão clara do processo experimental realizado.

Uma vez que a pesquisa se caracteriza como um estudo experimental, onde as etapas são extensas, foi traçado um plano experimental para obtenção dos resultados. Em primeiro momento foram realizados os ensaios no Laboratório de Madeiras e Estruturas de Madeiras (LaMEM) da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo e em seguida foram tratados os resultados experimentais para chegar às conclusões.

### 4.1 ESPÉCIES DE MADEIRA ESTUDADAS

Foram utilizadas seis espécies diferentes neste estudo de tal forma a abranger algumas das classes de resistência para madeira nativa contidas na ABNT NBR 7190-1 (2022a), são elas: Marupá (*Simarouba amara*), Sapucaia (*Lecythis spp.*), Cupiúba (*Goupia glabra*), Pequiá (*Caryocar villosum*), Tatajuba (*Bagassa guianensis*) e Roxinho (*Peltogyne spp.*).

Com a finalidade de enquadrar as espécies de madeira em suas respectivas classes de resistência, foi consultado a ABNT NBR 7190-3 (2022b) e o IPT (2023?). Este último foi levado em consideração, pois a norma brasileira em questão não aborda todas as espécies de madeiras deste trabalho. No entanto, o IPT (2023?) não dispõe de dados de classe de resistência das madeiras, o que levou a converter a resistência média à compressão paralela as fibras para uma determinada umidade fornecida por ele em um valor característico para a umidade-padrão. Para isso, foi necessário corrigir o valor para umidade de 12% e, logo em seguida, multiplicar por 0,7 para encontrar a resistência característica. Na Tabela 10 estão listadas as madeiras e suas classes de resistências.

Tabela 10 - Classes de resistências para as madeiras da pesquisa.

<b>Espécie</b>	<b>ABNT NBR 7190-3 (2022b)</b>	<b>IPT (2023?)</b>
<b>Marupá</b>	D20	D20
<b>Sapucaia</b>	-	D40
<b>Cupiúba</b>	D40	D50
<b>Pequiá</b>	-	D60
<b>Tatajuba</b>	D60	D60
<b>Roxinho</b>	D60	D60

Fonte: Autoria própria (2024).

Para cada espécie foram extraídos 6 corpos de prova, totalizando 36 elementos diferentes que foram ser ensaiados, como mostra a Figura 17.

Figura 17 - Corpos de Prova utilizados na pesquisa, de cima para baixo, tem-se: Pequiá, Cupiúba, Marupá, Sapucaia, Tatajuba e Roxinho.



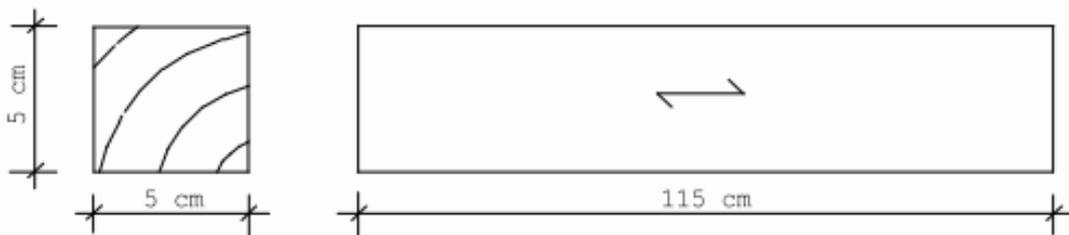
Fonte: Autoria própria (2024).

As espécies de madeira foram fornecidas pela Madeireira do Cesar, com sede na cidade de Brotas – SP. As peças são originárias de áreas certificadas da floresta tropical do sul do Pará. Usualmente estas são retiradas da parte central do tronco, região em que há maior aproveitamento no desdobro.

## 4.2 PREPARAÇÃO DOS CORPOS DE PROVA

As madeiras foram submetidas a um processo de preparação para os ensaios de flexão estática. Primeiramente, os corpos de prova foram seccionados em dimensões padronizadas, levando em conta o tamanho e formato recomendados pela ABNT NBR 7190-3 (2022b), ver Figura 18. Em seguida, foram cuidadosamente lixadas para remover irregularidades e proporcionar uma superfície plana e uniforme para a aplicação das cargas durante os ensaios.

Figura 18 – Dimensões do corpo de prova para o ensaio de flexão.



Fonte: ABNT NBR 7190-3 (2022b).

As dimensões dos corpos de prova usados nos ensaios de flexão devem ser de aproximadamente 115 cm de comprimento, 5 cm de largura e 5 cm de altura. O comprimento foi medido com auxílio de uma trena, enquanto a altura e a largura foram medidas em três seções distintas: uma no meio e outras duas próximas das extremidades, com o auxílio de um paquímetro eletrônico da marca Starrett com precisão de 0,01 mm (ver Figura 19). Como há três valores diferentes para as dimensões de altura e largura da seção transversal dos corpos de prova, para uso nas fórmulas, foi adotado o valor médio correspondente.

Figura 19 – Equipamentos de medida: (a) Paquímetro Eletrônico e (b) Trena.



Fonte: Autoria própria (2024).

Cada corpo de prova foi devidamente identificado, com suas dimensões medidas, além de várias marcações feitas em diversas posições de modo a facilitar o posicionamento dos apoios e dos sensores utilizados para aferição de deslocamentos, e também dos pontos de aplicação de carga.

### 4.3 ENSAIOS DE FLEXÃO

Todos os ensaios foram realizados na máquina universal AMSLER, equipada com uma Célula de Carga de 25 toneladas, conforme mostrado na Figura 20.

Figura 20 - Máquina universal de ensaios AMSLER.

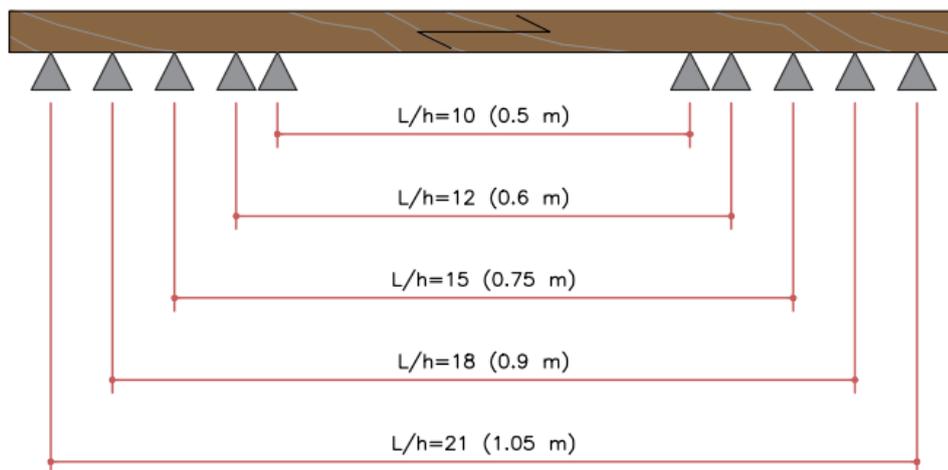


Fonte: Autoria própria (2024).

Cada corpo de prova foi submetida a ensaios de acordo com as especificações da norma internacional ISO/FDIS 13910 (2014) e europeia BS EN 408 (2010), que adotam a metodologia de flexão estática a quatro pontos, e a norma nacional ABNT NBR 7190-3 (2022b), que aborda flexão estática a três pontos.

Variou-se a distância entre os apoios de modo a obter valores de forças respeitando as deformações dentro da região elástica linear da madeira para cada configuração de ensaio. O esquema de espaçamento entre apoios pode ser observado na Figura 21, expressos em função da relação Vão-Altura ( $L/h$ ). Como os corpos de prova têm 5 cm de altura, isto resulta em um espaçamento entre apoios de 105, 90, 75, 60 e 50 cm.

Figura 21 - Esquema dos diferentes espaçamentos entre apoios utilizados na pesquisa.



Fonte: Autoria própria (2024).

Foram realizados 10 ensaios para cada corpo de prova, totalizando 360 ensaios. Vale elucidar que tanto para BS EN 408:2010 quanto para ISO/FDIS 13910: 2014 a configuração do ensaio é a mesma, logo, como simplificação, foi feito somente um ensaio para as duas normas.

#### 4.3.1 ABNT NBR 7190- 3:2022 – Ensaio de flexão estática a três pontos

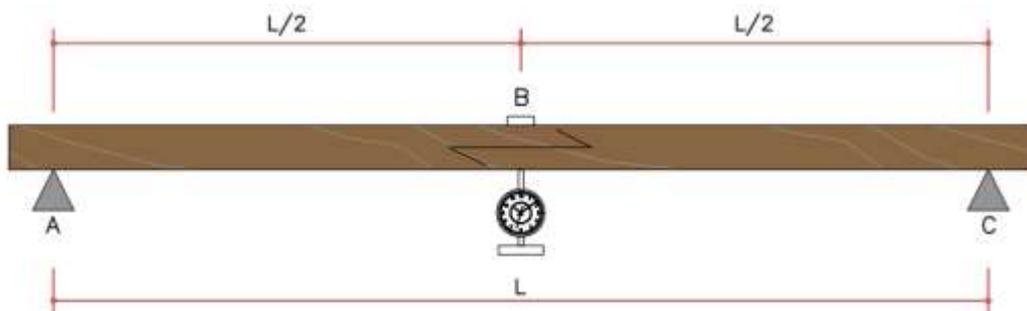
A parte 3 da NBR 7180:2022 traz o cálculo da rigidez à flexão da madeira de espécie nativa isenta de defeito. O esquema de apoio deste ensaio é mostrado na Figura 22 e Figura 23.

Figura 22 - Esquema montado para realização do ensaio de flexão a três pontos segundo a ABNT NBR 7190-3 (2022b), com destaque para o relógio analógico medidor de deslocamentos posicionado no meio do vão da viga.



Fonte: Autoria própria (2024).

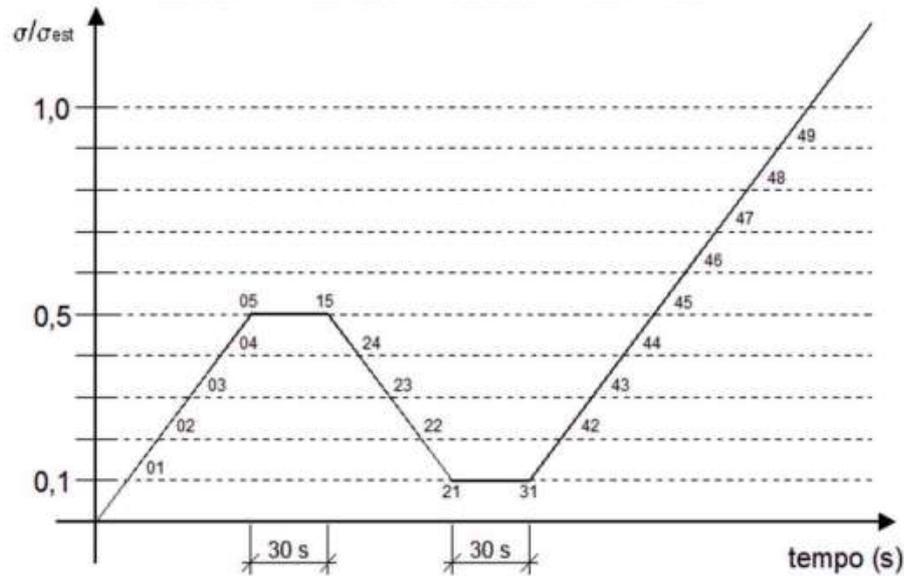
Figura 23 - Representação esquemática do ensaio de flexão como descrito no item 5.10.4 da ABNT NBR 7190-3 (2022b).



Fonte: Autoria própria (2024).

No ensaio foi aplicado o ciclo de carga indicado na Figura 24 para a acomodação da madeira, conforme indicado pela ABNT NBR 7190-3 (2022b).

Figura 24 - Ciclos de carga e descarga durante o ensaio de flexão



Fonte: ABNT NBR 7190-3 (2022b).

Não foram rompidos corpos de prova gêmeos para determinar a carga máxima estimada, logo a determinação da rigidez na flexão foi feita a partir de uma adaptação da norma. Para evitar danos aos relógios comparadores, optou-se por limitar a flecha em  $L/300$ , sendo  $L$  o comprimento entre apoios, que é o valor de deslocamento limite preconizado pela ABNT NBR 7190-1 (2022a). Isso evita com que a região de plastificação seja atingida e, para a determinação da rigidez, seja só considerado o comportamento elástico do material.

Para tanto, foram medidos os valores do deslocamento no meio do vão para o limite da flecha e para um deslocamento intermediário de  $L/500$ . Portanto os pontos 15 e 45 do diagrama da Figura 24 aferiu-se a força para o deslocamento de  $L/300$  e para o ponto 31 aferiu-se a força para o deslocamento de  $L/500$ .

A prensa AMSLER forneceu a força  $F_{1,500}$  e  $F_{1,300}$ , em kgf, correspondente aos deslocamentos de  $L/500$  e  $L/300$ , em mm, respectivamente, de modo que seja possível aplicar a Equação 49.

$$E_1 = \frac{(F_{1,300} - F_{1,500})L^3}{(v_{300} - v_{500})4bh^3} \quad (49)$$

Em que:

$E_1$  – módulo de elasticidade longitudinal da madeira na flexão segundo ABNT NBR 7190-3 (2022b), em Kgf/mm<sup>2</sup>;

$F_{1,300}$  - força aplicada no meio do vão da viga que causa um deslocamento de  $v_{300}$ , também no meio do vão, em kgf;

$F_{1,500}$  - força aplicada no meio do vão da viga que causa um deslocamento de  $v_{500}$ , também no meio do vão, em kgf;

$v_{300}$  - deslocamento no meio do vão da viga causada pela força  $F_{1,300}$ , em mm;

$v_{500}$  - deslocamento no meio do vão da viga causada pela força  $F_{1,500}$ , em mm;

$L$  – comprimento de vão entre apoios, em mm;

$b$  – largura da seção transversal, em mm

$h$  – altura da seção transversal, em mm.

#### 4.3.2 BS EN 408:2010 – Ensaio de flexão estática a quatro pontos

BS EN 408 (2010) utiliza o ensaio de flexão estática a quatro pontos na determinação da rigidez e resistência à este tipo de solicitação para madeira com dimensões estruturais. O esquema de apoio desse ensaio é mostrado na Figura 13 e Figura 25.

Figura 25 - Esquema montado para realização do ensaio de flexão a quatro pontos segundo a BS EN 408 (2010), com destaque para sensores LVDTs posicionados nos pontos 1, 2 e 3.



Fonte: Autoria própria (2024).

Novamente, para garantir a permanência das solicitações sobre o corpo de prova dentro do regime elástico, o deslocamento máximo permitido foi de  $L/300$ . Foi medida a força aplicada,  $F$ , em kgf, no meio do vão de uma viga metálica de seção “I” auxiliar apoiada sobre dois cutelos responsáveis por transmitir igualmente essa carga em dois pontos da viga de madeira.

Os deslocamentos em três pontos diferentes, denotados como 1, 2 e 3, em mm, foram aferidos por meio de sensores transdutores de deslocamento (LVDTs), com fundo de escala de 10 mm. As medições foram realizadas pelos equipamentos eletrônicos em intervalos de 500 ms ao longo da duração do ensaio. Os valores de força registrados foram aqueles associados aos deslocamentos de  $L/500$  e  $L/300$  no meio do vão entre apoios, apenas.

Este procedimento é uma adaptação do que consta na BS EN 408:2010, de modo a adequar o estudo às limitações existentes no ambiente de laboratório. O ensaio, como originalmente descrito em BS EN 408 (2010), usa uma barra rígida apoiada nos pontos 1 e 3, e um transdutor de deslocamento com uma das extremidades ligada no ponto 2, e a outra no meio do vão da própria barra. Este esquema garante que a leitura feita pelo transdutor é exatamente o deslocamento relativo do ponto 2 em relação aos pontos 1 e 3.

A adaptação feita para esta pesquisa consistiu em medir o deslocamento absoluto dos pontos 1, 2 e 3 sob uma mesma referência, e simplesmente calcular o deslocamento relativo extraindo a diferença matematicamente, como mostram nas equações seguintes.

$$w_{500} = \delta_{2,500} - \frac{\delta_{1,500} + \delta_{3,500}}{2} \quad (50)$$

$$w_{300} = \delta_{2,300} - \frac{\delta_{1,300} + \delta_{3,300}}{2} \quad (51)$$

Em que:

$\delta_{1,500}$  e  $\delta_{1,300}$  - deslocamento no ponto 1 associado à força  $F$  que causa um deslocamento de  $L/500$  e  $L/300$  no meio do vão, respectivamente, em mm;

$\delta_{2,500}$  e  $\delta_{2,300}$  - deslocamento no ponto 2 associado à força F que causa um deslocamento de L/500 e L/300 no meio do vão, respectivamente, em mm;

$\delta_{3,500}$  e  $\delta_{3,300}$  - deslocamento no ponto 3 associado à força F que causa um deslocamento de L/500 e L/300 no meio do vão, respectivamente, em mm;

$w_{500}$  e  $w_{300}$  - deslocamento relativo entre o ponto 2 e a média dos deslocamentos entre os pontos 1 e 3, associado à força F que causa um deslocamento de L/500 e L/300 no meio do vão, respectivamente, em mm.

Uma vez determinado os valores dos deslocamentos relativos, usa-se a Equação 52 para calcular o Módulo de Elasticidade.

$$E_2 = \frac{(F_{2,300} - F_{2,500})aL_1^3}{(w_{300} - w_{500})\frac{4bh^3}{3}} \quad (52)$$

Em que:

$E_2$  – módulo de elasticidade longitudinal da madeira na flexão segundo BS EN 408 (2010), em Kgf/mm<sup>2</sup>;

$F_{2,300}$  – força aplicada na viga que causa um deslocamento de  $w_{300}$ , em kgf;

$F_{2,500}$  – força aplicada na viga que causa um deslocamento de  $w_{500}$ , em kgf;

$w_{300}$  e  $w_{500}$  - deslocamento relativo entre o ponto 2 e a média dos deslocamentos entre os pontos 1 e 3, associado à força F que causa um deslocamento de L/500 e L/300 no meio do vão, respectivamente, em mm;

a – distância entre o apoio e o ponto de aplicação da força mais próximo, em mm;

$L_1$  – distância entre os pontos 1 e 3, em mm;

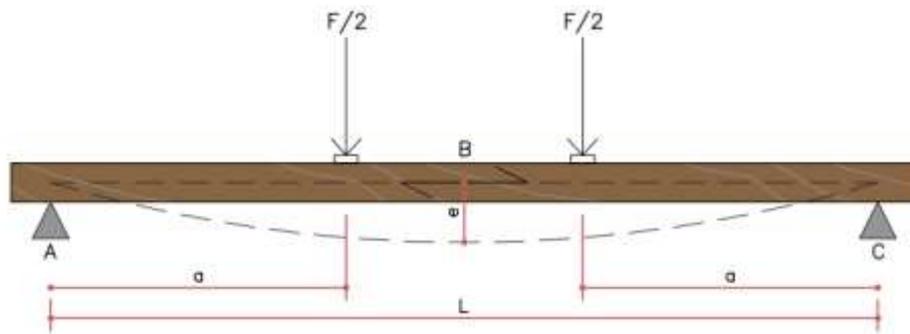
b – largura da seção transversal, em mm;

h – altura da seção transversal, em mm.

#### 4.3.3 ISO/FDIS 13910:2014 – Ensaio de flexão estática a quatro pontos

A configuração do ensaio e as dimensões necessárias para o ensaio de resistência e rigidez à flexão são encontradas na Figura 26.

Figura 26 - Representação esquemática do ensaio de flexão como descrito no item 6.2 da ISO/FDIS 13910.



Fonte: Adaptado da ISO/FDIS 13910 (2014).

Do ponto de vista funcional, o ensaio é o mesmo descrito no item anterior, porém a fórmula a ser utilizada para o cálculo do módulo de elasticidade é diferente, como mostrado a seguir. Na Equação 53 é inserido o deslocamento total medido no ponto central do vão, e não o deslocamento relativo entre os pontos de medição citados na BS EN 408 (2010).

$$E_3 = \frac{(F_{3,300} - F_{3,500}) a(3L^3 - 4a^2)}{(\delta_{2,300} - \delta_{2,500}) 4bh^3} \quad (53)$$

Em que:

$E_3$  – módulo de elasticidade longitudinal da madeira na flexão segundo ISO /FDIS 13910, em Kgf/mm<sup>2</sup>;

$F_{2,300}$  – força aplicada na viga que causa um deslocamento de  $\delta_{2,300}$ , em kgf;

$F_{2,500}$  – força aplicada na viga que causa um deslocamento de  $\delta_{2,500}$ , em kgf;

$\delta_{2,300}$ , e  $\delta_{2,500}$ , - deslocamento no centro do vão associado à força F que causa um deslocamento de L/500 e L/300 no meio do vão, em mm;

a – distância entre o apoio e o ponto de aplicação da força mais próximo, em mm;

L – comprimento do vão entre apoios da viga, em mm;

b – largura da seção transversal, em mm;

h – altura da seção transversal, em mm.

## 4.4 MÉTODOS

As metodologias empregadas aqui visam estudar a influência e a determinação do módulo de elasticidade transversal e longitudinal no ensaio de flexão para madeira de espécies nativas.

### 4.4.1 Método 1 – Módulo de Elasticidade Aparente

Este primeiro método baseia-se no trabalho de Lahr (1983). Tendo em vista avaliar o valor do módulo de elasticidade longitudinal à medida que é variada a relação L/h (vão entre apoio por altura da seção transversal). As relações estudadas foram 21, 18, 15, 12 e 10, como já mencionadas anteriormente. No cálculo do módulo de elasticidade longitudinal aparente foram utilizadas as mesmas equações contidas nos itens 4.3.1, 4.3.2 e 4.3.3 desta pesquisa aplicadas para as cinco relações L/h estudadas.

### 4.4.2 Método 2 – Deslocamento em viga

Aqui será adotada a relação  $G=E/16$  fornecida pela ABNT NBR 7190-1:2022 para o cálculo do deslocamento no meio da viga fletida considerando a teoria de viga de Timoshenko. Substituindo na Equação 33 essa relação obtém-se a Equação 54 para a flexão à três pontos.

$$\delta_{T,3} = \delta_{M,3} + \delta_{V,3} = \frac{PL^3}{48EI} + \frac{3PL}{10 \left( \frac{E}{16} \right) A} \quad (54)$$

$$\delta_{T,3} = \frac{PL}{E} \left( \frac{L^2}{48I} + \frac{4,8}{A} \right)$$

Para flexão à quatro pontos, seguindo a mesma linha de pensamento, tem-se:

$$\delta_{T,4} = \delta_{M,4} + \delta_{V,4} = \frac{P}{48EI} (3aL^2 - 4a^3) + \frac{6Pa}{10 \left( \frac{E}{16} \right) A} \quad (55)$$

$$\delta_{T,4} = \frac{Pa}{E} \left[ \frac{3L^2 - 4a^2}{48I} + \frac{9,6}{A} \right]$$

Para tanto será assumido que o módulo de elasticidade longitudinal, E, aplicado nas equações seja o valor obtido em ensaio para a relação L/h=21, pois segundo Lahr (1983) as deformações por cisalhamento é pouco influente na flecha total para L/h≥21.

Determinou-se, também, o deslocamento central das vigas segundo a teoria de viga de Euler Bernoulli para ambas as configurações de ensaio de flexão. Nessa hipótese admite-se que somente a parcela do momento fletor é relevante no deslocamento, conforme é apresentado pela Equação 30 e Equação 35 para flexão estática a três e quatro pontos, respectivamente.

A finalidade deste método é comparar as flechas aferidas nos experimentos com as flechas obtidas com a relação normativa G=E/16 para a aplicação da teoria de Timoshenko e segundo a teoria de Bernoulli.

#### 4.4.3 Método 3 – G para diferentes relações de L/h

Assim, como o método anterior será adotado o módulo de elasticidade longitudinal, E, obtido nos ensaios com L/h=21. De posse dos resultados de forças e deslocamentos, assim, como dados geométricos é possível determinar o módulo de elasticidade transversal pelas Equações 56 e 57, para flexão estática a três e quatro pontos, respectivamente.

$$G = \frac{3PL}{10A \left( \delta_{T,3} - \frac{PL^3}{48EI} \right)} \quad (56)$$

$$G = \frac{6Pa}{10A \left( \delta_{T,4} - \frac{P}{48EI} (3aL^2 - 4a^3) \right)} \quad (57)$$

#### 4.4.4 Método 4 – Sistema de equações lineares na determinação do G

Este método utiliza as equações obtidas pelo PTV demonstradas no Capítulo Aspectos Fundamentais. Segundo a presente metodologia se faz necessário realizar dois ensaios de flexão sucessivos no mesmo corpo de prova. Primeiramente, posiciona a amostra com comprimento entre apoio de  $L_1$ , de tal maneira o ensaio procede e se determina uma força  $F_1$  para um deslocamento  $\delta_1 = L_1/300$ . Para o segundo experimento os apoios são aproximados e são obtidos para um deslocamento de  $\delta_2 = L_2/300$  o valor de  $F_2$ .

Para o ensaio de flexão estática a três pontos o emprego de  $F_1, F_2, L_1, L_2, \delta_1$  e  $\delta_2$  na Equação 33 conduz a um sistema de equações, conforme a seguir:

$$\begin{cases} \left( \frac{P_1 L_1^3}{48EI} + \frac{3P_1 L_1}{10GA} \right) = \delta_1 \\ \left( \frac{P_2 L_2^3}{48EI} + \frac{3P_2 L_2}{10GA} \right) = \delta_2 \end{cases} \quad (58)$$

O momento de inércia e a área da seção transversal retangular são iguais a  $bh^3/12$  e  $bh$ , respectivamente. Assim, resolvendo o sistema de equação anterior obtém-se o módulo de elasticidade transversal e longitudinal, expressos por:

$$G = \frac{3P_1 P_2 L_1 L_2 (L_1^2 - L_2^2)}{10bh(\delta_2 P_1 L_1^3 - \delta_1 P_2 L_2^3)} \quad (59)$$

$$E = \frac{P_1 P_2 L_1 L_2 (L_2^2 - L_1^2)}{4bh^3(\delta_2 P_1 L_1 - \delta_1 P_2 L_2)} \quad (60)$$

Para o ensaio de flexão estática a quatro pontos o emprego de  $F_1, F_2, L_1, L_2, \delta_1, \delta_2, a_1$  e  $a_2$  na Equação 38 conduz a um sistema de equações, conforme a seguir:

$$\begin{cases} \left( \frac{P_1}{48EI} (3a_1 L_1^2 - 4a_1^3) + \frac{6P_1 a_1}{10GA} \right) = \delta_1 \\ \left( \frac{P_2}{48EI} (3a_2 L_2^2 - 4a_2^3) + \frac{6P_2 a_2}{10GA} \right) = \delta_2 \end{cases} \quad (61)$$

Resolvendo o sistema de equações, tem-se:

$$G = \frac{6P_1P_2(a_2(3a_1L_1^2 - 4a_1^3) - a_1(3a_2L_2^2 - 4a_2^3))}{10bh(\delta_2P_1(3a_1L_1^2 - 4a_1^3) - \delta_1P_2(3a_2L_2^2 - 4a_2^3))} \quad (62)$$

$$E = \frac{P_1P_2(a_1(3a_2L_2^2 - 4a_2^3) - a_2(3a_1L_1^2 - 4a_1^3))}{4bh^3(\delta_2P_1a_1 - \delta_1P_2a_2)} \quad (63)$$

#### 4.5 ANÁLISE ESTATÍSTICA DO MÓDULO DE ELASTICIDADE LONGITUDINAL APARENTE

Após a realização dos ensaios, os valores do módulo de elasticidade longitudinal aparente ( $E_{app}$ ) foram analisados estatisticamente por meio do teste de contraste de médias de Tukey, ao nível de 5% de significância.

Buscou-se determinar a influência tanto do espaçamento entre apoios nos valores do Módulo de Elasticidade, quanto da metodologia de cálculo segundo as três normas. Do teste de Tukey, "A" denota o tratamento associado ao maior valor médio da propriedade, "B" o segundo maior valor médio e assim de forma sucessiva, e letras iguais implicam em tratamentos distintos com médias estatisticamente equivalentes entre si.

# **CAPÍTULO 5**



## **5 RESULTADOS E DISCUSSÕES**

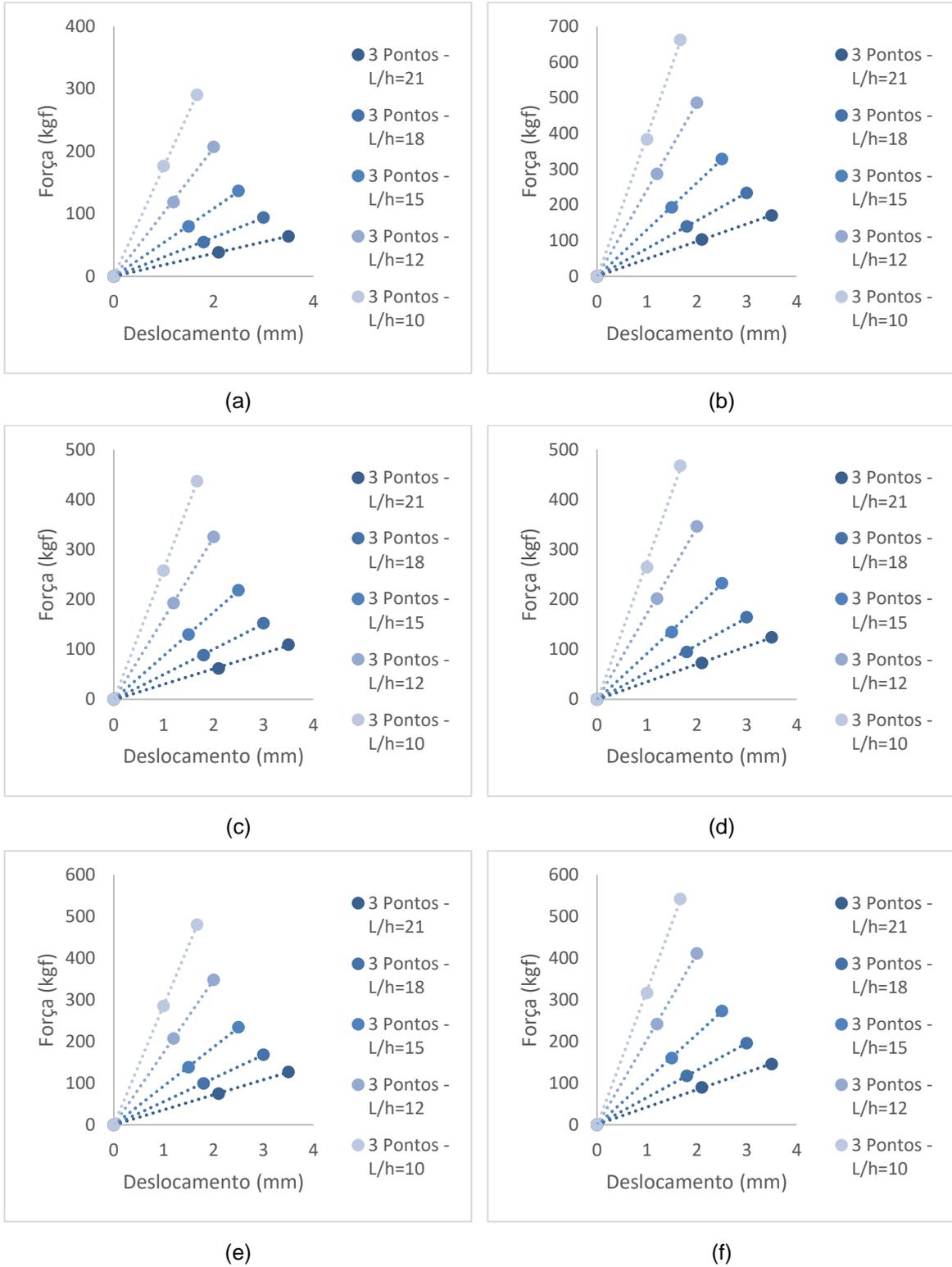
## 5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos após a aplicação das metodologias descritas no capítulo anterior. As médias dos valores do módulo de elasticidade longitudinal aparente para cada relação  $L/h$  são comparadas entre si por meio de uma análise estatística para verificar a influência do cisalhamento nessas medidas. São calculadas ainda as deflexões das vigas segundo teoria de viga de Timoshenko e Bernoulli e comparadas com as deflexões reais aferidas em ensaio. Por fim é apresentado o módulo de elasticidade transversal ( $G$ ) obtido segundo duas metodologias diferentes e, também, uma análise é feita para identificar a melhor configuração de ensaio em cada caso.

### 5.1 MÓDULO DE ELASTICIDADE LONGITUDINAL APARENTE

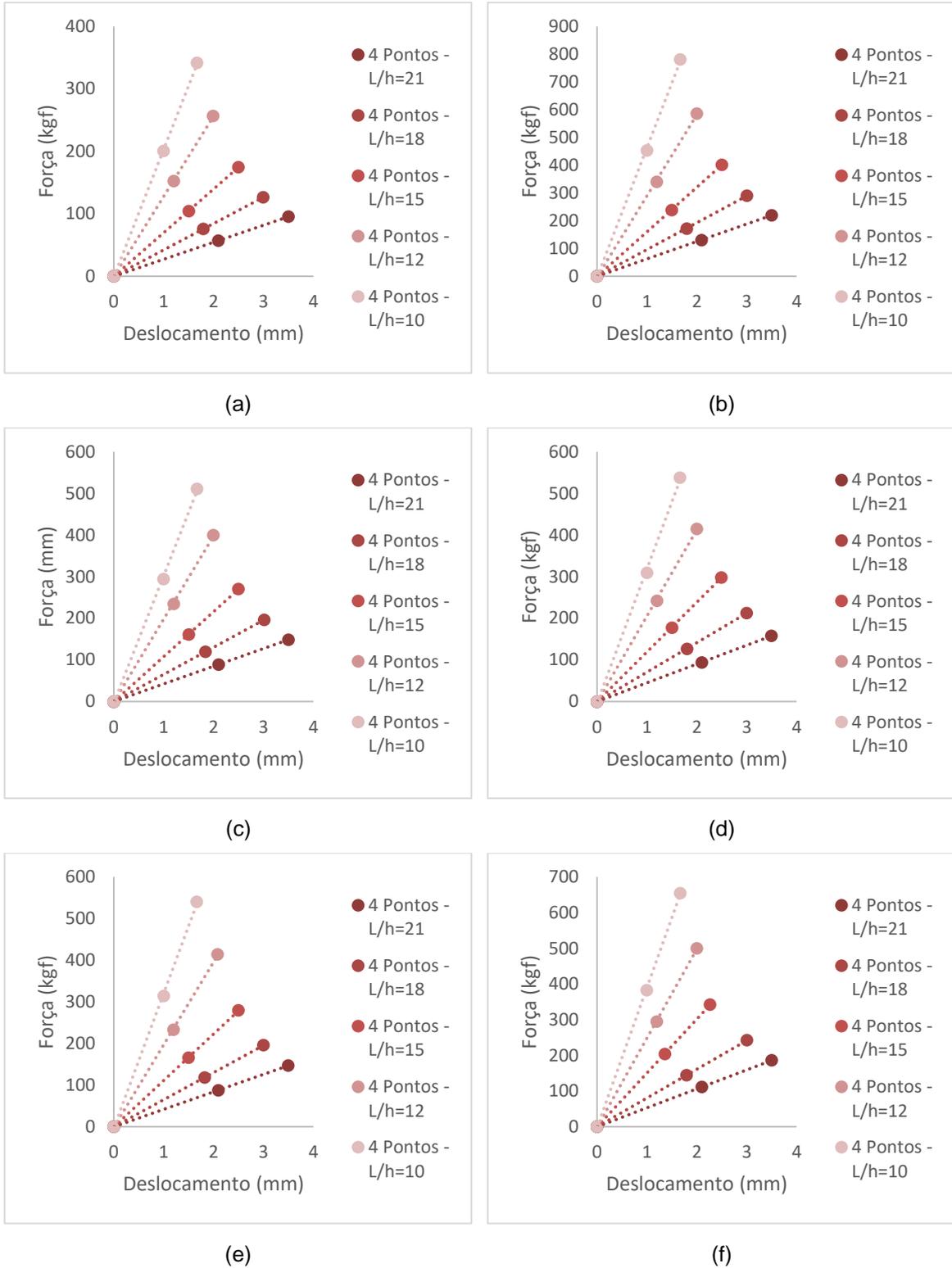
Para a determinação das respostas do módulo de elasticidade longitudinal aparente, foram aplicados os valores do diagrama Força x Deslocamento correspondente ao regime elástico. Na Figura 27 e Figura 28 é apresentado esse diagrama para flexão estática a três e quatro pontos conforme cada espécie de madeira utilizada neste estudo, respectivamente.

Figura 27 - Diagrama Força x Deslocamento da flexão estática a três pontos para espécie: (a) Marupá; (b) Sapucaia; (c) Cupiúba; (d) Pequiá; (e) Tatajuba; (f) Roxinho.



Fonte: Autoria própria (2024)

Figura 28 - Diagrama Força x Deslocamento da flexão estática a quatro pontos para espécie: (a) Marupá; (b) Sapucaia; (c) Cupiúba; (d) Pequiá; (e) Tatajuba; (f) Roxinho.



Fonte: Autoria própria (2024)

Na Tabela 11 são apresentados os valores médios, os coeficientes de variação (CV) e os resultados do teste de contraste de médias de Tukey (5% de significância) acerca dos valores dos módulos de elasticidade aparentes obtidos de acordo com os três documentos normativos considerados e para as cinco relações L/h adotadas.

Tabela 11 - Módulo de elasticidade aparente e teste de Tukey (Tu) para as madeiras em estudo.

Espécie	L/h	NBR 7190 (2022)			BS EN 408 (2010)			ISO/FDIS 13910 (2014)		
		E (GPa)	CV (%)	Tu*	E (GPa)	CV (%)	Tu*	E (GPa)	CV (%)	Tu*
Marupá	21	8,03	9,33	A	9,60	11,26	A	10,35	11,57	A
	18	9,05	17,84	A	9,50	12,76	A	10,04	10,53	AB
	15	9,12	17,19	A	8,57	9,79	A	9,68	11,14	AB
	12	9,08	13,28	A	10,86	21,57	A	9,23	9,81	AB
	10	8,10	11,28	A	9,71	17,04	A	8,53	10,59	B
Sapucaia	21	21,04	12,96	A	20,66	12,53	A	23,58	6,24	A
	18	21,43	6,25	A	23,15	13,61	A	22,94	6,14	AB
	15	21,48	8,05	A	20,50	11,03	A	22,05	6,45	AB
	12	20,16	7,19	A	23,47	13,85	A	21,14	6,36	BC
	10	19,47	9,13	A	20,25	7,41	A	19,57	6,27	C
Cupiúba	21	14,62	8,14	A	14,70	8,59	A	15,70	2,73	A
	18	14,41	10,86	A	14,56	10,05	A	15,08	2,56	AB
	15	13,85	2,96	AB	15,21	14,14	A	14,68	2,80	BC
	12	13,32	5,04	AB	15,48	6,26	A	14,19	5,45	C
	10	12,44	3,47	B	12,90	17,45	A	12,80	2,65	D
Pequiá	21	16,10	19,14	A	16,03	30,02	A	16,91	20,53	A
	18	15,99	17,86	A	16,48	33,95	A	16,77	21,43	A
	15	15,59	17,12	A	16,13	28,28	A	16,49	20,47	A
	12	14,66	17,23	A	16,97	27,31	A	15,03	19,74	A
	10	14,26	18,67	A	13,05	16,83	A	13,76	19,93	A
Tatajuba	21	16,78	8,19	A	15,99	14,29	A	16,53	8,85	A
	18	16,50	7,85	A	15,06	10,31	A	16,14	9,46	AB
	15	15,89	5,83	AB	15,32	13,54	A	16,08	5,76	AB
	12	14,94	6,63	AB	14,91	21,59	A	14,83	7,60	AB
	10	14,36	7,04	B	14,17	11,06	A	14,25	6,34	B
Roxinho	21	17,88	6,75	A	18,24	2,82	A	20,39	3,54	A
	18	18,43	6,63	A	18,35	8,03	A	19,49	3,76	AB
	15	18,52	6,78	AB	18,10	5,47	A	19,35	4,11	AB
	12	17,77	6,50	AB	20,33	13,19	A	18,16	5,40	BC
	10	16,26	6,66	B	19,17	13,68	A	16,81	5,36	C

*\* Letras iguais implicam em valores médios do módulo de elasticidade estatisticamente equivalentes entre si para cada relação L/h, e quando diferentes, A > B, B > C e assim sucessivamente.*

Fonte: Autoria própria (2024).

A Tabela 11 mostra a influência da variação do espaçamento entre apoios na determinação do módulo de elasticidade longitudinal. Dos 18 casos analisados, 10 apresentaram resultados para o módulo de elasticidade que são estatisticamente equivalentes para corpos de prova de uma mesma espécie independentemente da variação da relação L/h, pois receberam a classificação "A" para todas as relações L/h analisadas.

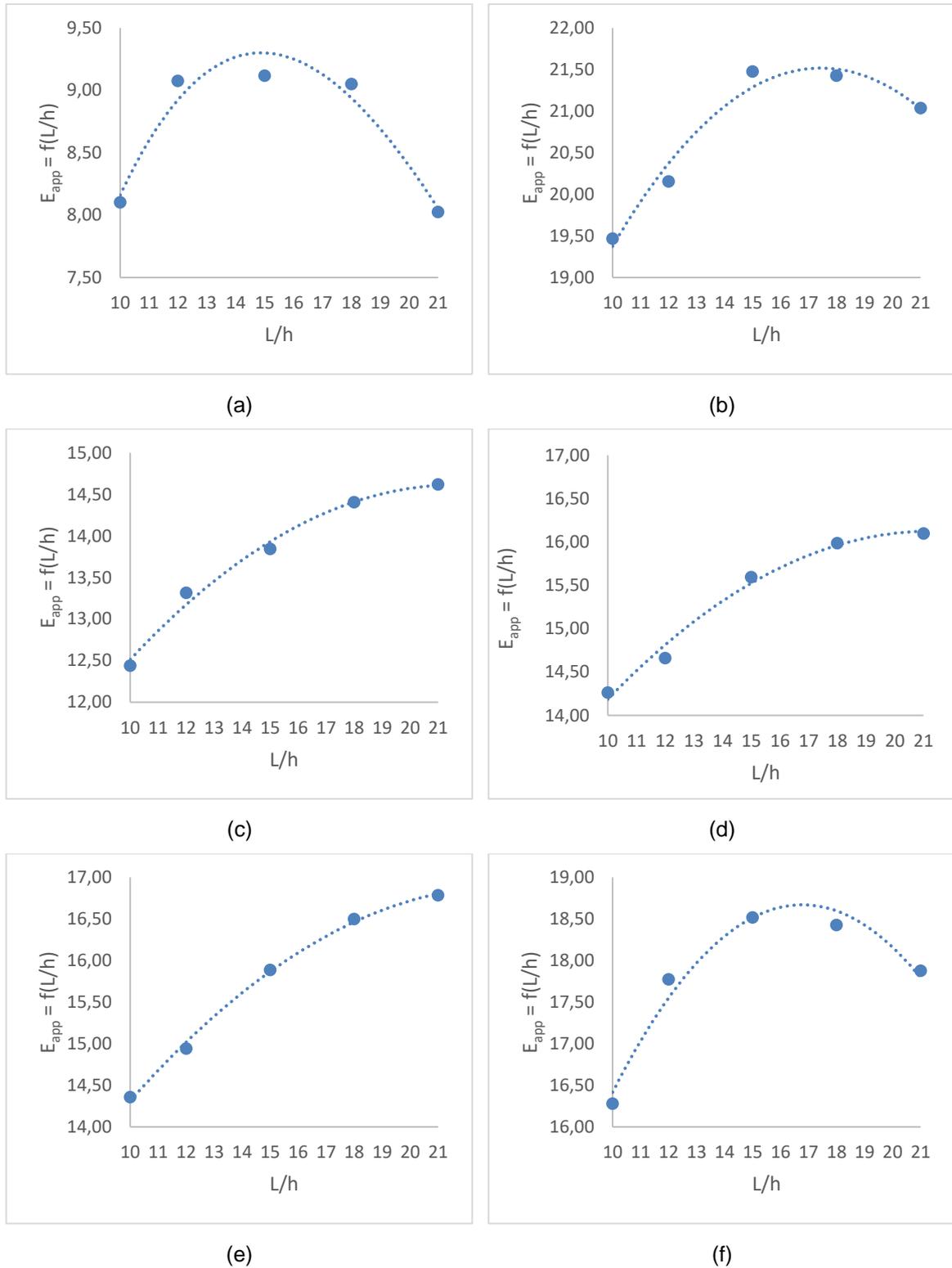
Para a metodologia da ABNT NBR 7190-3:2022, os corpos de prova das espécies de Marupá, Pequiá e Sapucaia revelaram módulos de elasticidade longitudinal equivalentes dentro de cada espécie. Por sua vez, de acordo com a BS EN 408:2010, todos os corpos de prova demonstraram equivalência dentro de suas respectivas espécies. Por fim, segundo a ISO/FDIS 13910:2014, apenas a espécie Pequiá apresentou valores de módulo de elasticidade equivalentes.

Esta análise sugere que a metodologia da norma BS EN 408:2010 é mais adequada para determinar os módulos de elasticidade longitudinais das madeiras testadas. Isso se deve ao fato de que ela conduz a resultados estatisticamente mais consistentes, pelo menos dentro do intervalo de valores da relação L/h que foi avaliado, em comparação com as outras duas normas mencionadas.

No entanto, em oito casos, observou-se uma variação significativa nos valores de módulo de elasticidade para corpos de prova da mesma espécie. Essa variação está claramente associada a uma tendência de redução nos valores de E à medida que a relação L/h diminui, como evidenciado pela mudança na classificação de "A" para "AB", e posteriormente para "B", "C" ou "D".

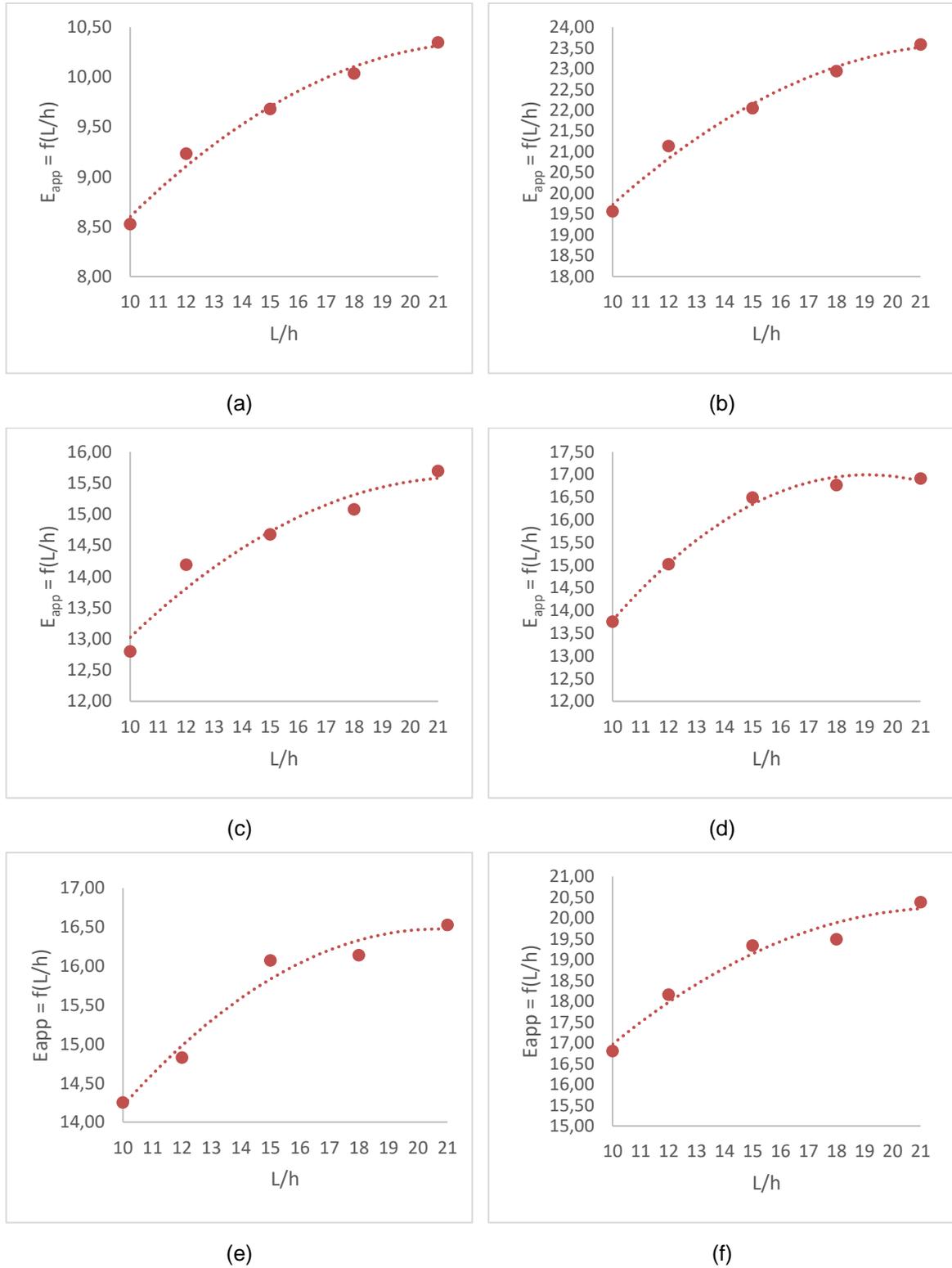
Com a finalidade de observar a tendência da variação do módulo de elasticidade longitudinal aparente em função da relação L/h foram traçados os gráficos da Figura 29 e Figura 30 conforme flexão estática a três pontos (ABNT NBR 7190-3:2022) e quatro pontos (ISO/FDIS 13910:2014), respectivamente.

Figura 29 - Gráfico do módulo de elasticidade longitudinal aparente, em GPa, para flexão estática a três pontos da espécie: (a) Marupá; (b) Sapucaia; (c) Cupiúba; (d) Pequiá; (e) Tatajuba; (f) Roxinho.



Fonte: Autoria própria (2024).

Figura 30 - Gráfico do módulo de elasticidade longitudinal aparente, em GPa, para flexão estática a quatro pontos da espécie: (a) Marupá; (b) Sapucaia; (c) Cupiúba; (d) Pequiá; (e) Tatajuba; (f) Roxinho.



Fonte: Autoria própria (2024).

Uma simples observação dos gráficos e tabela deste item evidencia a variação do módulo de elasticidade longitudinal em função da relação  $L/h$  da viga, mostrando a influência das deformações devido aos esforços cisalhantes na flecha total de uma peça fletida quando aplicado o procedimento da ABNT NBR 7190-3:2022 e ISO/FDIS 13910:2014.

No entanto, na flexão estática a três pontos para as madeiras de Marupá, Sapucaia e Roxinho o módulo de elasticidade longitudinal tendeu a aumentar no intervalo  $10 \leq L/h \leq 15$  e logo em seguida diminuir para as relações  $L/h=18$  e  $L/h=21$ . Esse fenômeno pode ser explicado devido à alguns fatores como: a concentração de carga em um único ponto associado a anisotropia e anatomia do material, a não preocupação com o plano de flexão (tangencial-longitudinal ou radial-longitudinal) que pode interferir em algumas espécies e possíveis *outliers* que interferem nos resultados, visto que somente foram ensaiados 6 corpos de provas correspondendo a uma amostra muito pequena para minimizá-los.

Foi observado que o módulo de elasticidade longitudinal obtido por flexão estática a quatro pontos é, de modo geral, maior que o obtido via flexão estática a três pontos. Além disso, é possível dizer que a partir da relação  $L/h=18$  as flechas das vigas de madeira em estudo passam a não ter mais influência significativa das deformações cisalhantes no cálculo do  $E$  segundo a análise estatística.

Nos próximos itens deste capítulo os resultados relativos à flexão estática a três e quatro pontos serão apresentados conforme as diretrizes estabelecidas pela ABNT NBR 7190-3:2022 e pela ISO/FDIS 13910:2014, respectivamente. Esta abordagem é adotada em razão da constatação de que a norma BS EN 408:2010 demonstrou ser eficaz na obtenção de valores para o módulo de elasticidade longitudinal, sem a interferência do cisalhamento, mesmo quando a relação  $L/h$  é reduzida.

## 5.2 DESLOCAMENTO – TEORIA DE VIGA DE TIMOSHENKO E BERNOULLI

Como descrito no capítulo anterior, foram calculados os deslocamentos segundo a teoria de viga de Euler Bernoulli e Timoshenko, para essa última foi levado em consideração a relação  $G=E/16$  fornecida pela ABNT NBR 7190-1:2022. Os cálculos foram procedidos utilizando o módulo de elasticidade longitudinal obtido da relação  $L/h=21$  para cada espécie e as normas: ABNT NBR 7190-3:2022 e ISO/FDIS

13910:2014. Os resultados dos deslocamentos médios calculados e os experimentais na flexão estática a três e quatro pontos estão na Tabela 12 e Tabela 13, respectivamente.

Tabela 12 – Deslocamento médio real e de cálculo para flexão estática a três pontos.

L/h	Deslocamento (mm)					
	Timoshenko	Bernoulli	Real	(1)/(3)	(2)/(3)	(1)/(2)
	(1)	(2)	(3)			
21	3,62	3,46	3,50	1,03	0,99	1,04
18	3,17	2,99	3,00	1,06	1,00	1,06
15	2,67	2,45	2,50	1,07	0,98	1,09
12	2,13	1,88	2,00	1,07	0,94	1,14
10	1,77	1,48	1,67	1,06	0,88	1,20

Fonte: Aatoria própria (2024).

Tabela 13 – Deslocamento médio real e de cálculo para flexão estática a quatro pontos.

L/h	Deslocamento (mm)					
	Timoshenko	Bernoulli	Real	(1)/(3)	(2)/(3)	(1)/(2)
	(1)	(2)	(3)			
21	3,58	3,46	3,50	1,02	0,99	1,04
18	3,03	2,89	3,00	1,01	0,96	1,05
15	2,50	2,34	2,50	1,00	0,94	1,07
12	1,93	1,74	2,01	0,96	0,87	1,11
10	1,52	1,32	1,67	0,91	0,79	1,15

Fonte: Autor (2024).

O deslocamento de ensaio (real) foi limitado por norma sendo igual ao comprimento do vão por trezentos (L/300) e seu valor diminui à medida que o valor de L/h diminui, o que sugere uma relação diretamente proporcional entre essas duas variáveis.

As colunas "(1)/(3)", "(2)/(3)" e "(1)/(2)" representam as razões entre os valores dos deslocamentos das colunas "Timoshenko (1)" e "Real (3)", "Bernoulli (2)" e "Real (3)", e "Timoshenko (1)" e "Bernoulli (2)", respectivamente. Resultados dessas razões superiores a 1 indicam que o valor da coluna que está no numerador é maior do que o valor que está no denominador, enquanto resultados menores que 1 implica no

inverso. É possível analisar como esses modelos se comparam entre si usando as razões calculadas.

Em ambas tabelas foi averiguado que a teoria de viga de Timoshenko, em comparação com a teoria de viga de Bernoulli, gerou maiores deslocamentos em todos os casos apresentados.

Segundo Da Silva (2019) em vigas isostáticas é indicado considerar o efeito da deformação causada pelo cisalhamento quando a discrepância entre os deslocamentos previstos por ambas as teorias for maior que 2%. Portanto, para as cinco relações deste estudo e as duas configurações de flexão, a teoria da viga de Timoshenko mostrou-se relevante, visto que foi constatada a relevância do esforço cortante, pois a diferença mínima encontrada entre as teorias foi de 4%.

Ao comparar o deslocamento medido no ensaio com a teoria da viga de Timoshenko, que foi indicada como a mais apropriada, para a flexão estática a três pontos, a flecha calculada chegou a ser 7% superior ao valor real. Enquanto para a flexão estática a quatro pontos, fazendo a mesma comparação, o deslocamento real mostrou-se maior que o teórico para as relações  $L/h=12$  e  $L/h=10$ . Portanto, é possível inferir que o módulo de elasticidade transversal indicado pela norma pode não representar o comportamento de todas as espécies de madeira estudadas, ou que o módulo de cisalhamento pode variar conforme a relação  $L/h$ .

Por outro lado, ao aplicar  $G=E/16$  para o cálculo teórico do deslocamento, na maioria dos resultados, obteve-se flechas que favorecem a segurança.

### **5.3 MÓDULO DE ELASTICIDADE TRANSVERSAL OBTIDO PARA DIFERENTES RELAÇÕES L/H**

A Tabela 14 apresenta os resultados do módulo de elasticidade transversal obtidos através da variação da relação  $L/h$  para diferentes espécies de madeira, utilizando equações derivadas da teoria de viga de Timoshenko. A análise excluiu a relação  $L/h=21$ , pois o módulo de elasticidade longitudinal na flexão foi determinado por essa relação conforme as indicações bibliográficas.

Tabela 14 - Módulo de elasticidade transversal obtido via variação da relação L/h.

Espécie	L/h	Flexão estática a 3 pontos			Flexão estática a 4 pontos		
		G (GPa)	C.V. (%)	Valores incoerentes	G (GPa)	C.V. (%)	Valores incoerentes
Marupá	18	0,98	107,59	4	1,03	49,63	0
	15	0,25	-	5	0,58	24,62	0
	12	0,82	62,59	4	0,47	11,59	0
	10	0,76	33,89	4	0,41	13,90	0
	<b>Média</b>	<b>0,70</b>	<b>45,24</b>	-	<b>0,62</b>	<b>45,51</b>	-
Sapucaia	18	0,72	-	5	1,65	33,68	0
	15	0,84	-	5	1,18	18,60	0
	12	3,28	43,30	1	0,96	13,31	0
	10	2,65	57,82	0	0,88	11,14	0
	<b>Média</b>	<b>1,87</b>	<b>68,78</b>	-	<b>1,17</b>	<b>29,38</b>	-
Cupiúba	18	0,52	73,12	3	1,25	45,04	0
	15	1,36	90,05	2	0,82	13,98	0
	12	1,41	68,88	1	0,68	19,77	0
	10	1,20	59,55	0	0,53	13,04	0
	<b>Média</b>	<b>1,12</b>	<b>36,38</b>	-	<b>0,82</b>	<b>38,06</b>	-
Pequiá	18	0,37	38,93	2	2,07	44,40	1
	15	1,11	105,21	1	1,66	23,94	0
	12	1,28	74,89	0	0,87	49,32	0
	10	1,12	67,05	0	0,54	15,45	0
	<b>Média</b>	<b>0,97</b>	<b>42,00</b>	-	<b>1,29</b>	<b>54,66</b>	-
Tatajuba	18	0,93	51,63	1	1,45	47,76	0
	15	0,85	29,19	1	1,04	16,97	1
	12	0,89	16,40	1	0,93	22,70	0
	10	0,95	17,22	1	0,76	24,23	0
	<b>Média</b>	<b>0,90</b>	<b>4,78</b>	-	<b>1,04</b>	<b>28,09</b>	-
Roxinho	18	2,22	48,60	3	1,23	31,53	0
	15	1,90	63,97	3	1,31	27,15	0
	12	1,59	45,10	3	1,00	23,75	0
	10	1,57	28,12	1	0,77	23,64	0
	<b>Média</b>	<b>1,82</b>	<b>17,04</b>	-	<b>1,08</b>	<b>22,28</b>	-

Fonte: Autoria própria (2024).

A partir daqui denota-se valores incoerentes do módulo cisalhante (G) aqueles que são negativos ou que são superiores a 50% do módulo de elasticidade longitudinal, visto que por teoria é o máximo que esse parâmetro consegue ser atingido (ver Equação 1).

Observou-se que, para a flexão estática a quatro pontos, à medida que a relação L/h diminui, o módulo cisalhante também diminui, como evidenciado na tabela anterior. Por outro lado, não foi observada nenhuma tendência clara para a flexão estática a três pontos. Para identificar a configuração de flexão que produz resultados mais adequados, correlacionou-se o módulo de elasticidade longitudinal e transversal, as relações entre esses parâmetros são apresentadas na Tabela 15.

Tabela 15 - Relação E/G obtida segundo método de variação do L/h.

Espécie	Flexão - 3 Pontos	Flexão - 4 Pontos
	E/G	E/G
<b>Marupá</b>	11,45	16,67
<b>Sapucaia</b>	11,23	20,16
<b>Cupiúba</b>	13,02	19,14
<b>Pequiá</b>	16,57	13,15
<b>Tatajuba</b>	18,57	15,86
<b>Roxinho</b>	9,83	18,95

Fonte: Autoria própria (2024).

Na Tabela 15, verifica-se que a flexão estática a três pontos resultou em relações E/G menores, indicando uma maior sensibilidade na estimativa do módulo de elasticidade transversal. Entre as configurações deste ensaio, a relação L/h=10 mostrou-se mais adequada, com menor quantidade de valores incoerentes e um menor coeficiente de variação, em comparação com outras relações.

Ao identificar a configuração de flexão mais apropriada e analisar as relações entre os módulos de elasticidade longitudinal e transversal, contribui-se para uma compreensão mais precisa das propriedades mecânicas das diferentes espécies de madeira testadas.

#### 5.4 MÓDULO DE ELASTICIDADE TRANSVERSAL E LOGITUDINAL OBTIDOS VIA APLICAÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Como discutido anteriormente neste capítulo, o módulo cisalhante (G) é uma propriedade crucial para determinar o deslocamento total de um elemento de viga de madeira, especialmente para relações  $L/h \leq 21$ .

Neste contexto, utilizou-se a teoria de viga de Timoshenko em conjunto com a aplicação de sistemas de equações lineares para determinar os módulos de elasticidade transversal e longitudinal por meio de ensaios de flexão estática, conforme detalhado na metodologia deste estudo. O método envolve a realização de dois ensaios de flexão consecutivos no mesmo corpo de prova variando o comprimento do vão. Foram conduzidos ensaios com espaçamentos entre apoios de 105, 90, 75, 60 e 50 cm, resultando em 10 combinações possíveis de vãos para serem utilizadas no sistema de equações lineares.

Os valores dos módulos elásticos na flexão estática a três e quatro pontos para cada espécie estudada são apresentados da Tabela 16 a Tabela 21.

Tabela 16 - Módulo de elasticidade longitudinal e transversal obtido por sistema de equação linear para a espécie Marupá.

L1 (cm)	L2 (cm)	Flexão - 3 Pontos				Flexão - 4 Pontos			
		E		G		E		G	
		(GPa)	C.V. (%)	(GPa)	C.V. (%)	(GPa)	C.V. (%)	(GPa)	C.V. (%)
105	90	6,83	21,25	3,07	-	11,06	12,96	0,53	71,09
105	75	7,47	14,98	-	-	11,06	11,13	0,33	30,68
105	60	7,88	14,86	2,46	-	10,97	10,96	0,35	14,10
105	50	8,01	14,33	-	-	11,00	10,57	0,33	13,83
90	75	8,57	8,96	0,69	84,39	11,08	10,10	0,32	28,40
90	60	8,86	12,14	1,85	31,27	10,92	10,30	0,35	9,16
90	50	8,91	12,45	1,52	51,16	10,99	10,03	0,33	17,63
75	60	9,36	18,51	1,46	121,41	10,76	11,53	0,40	28,73
75	50	9,25	16,27	1,26	52,71	10,93	10,51	0,34	23,56
60	50	9,14	14,58	1,00	42,99	11,30	10,30	0,32	35,94
<b>Média</b>		<b>8,43</b>	<b>10,02</b>	<b>1,66</b>	<b>46,90</b>	<b>11,01</b>	<b>1,25</b>	<b>0,36</b>	<b>18,11</b>

Fonte: Autoria própria (2024).

Tabela 17 - Módulo de elasticidade longitudinal e transversal obtido por sistema de equação linear para a espécie Sapucaia.

L1 (cm)	L2 (cm)	Flexão - 3 Pontos				Flexão - 4 Pontos			
		E		G		E		G	
		(GPa)	C.V. (%)	(GPa)	C.V. (%)	(GPa)	C.V. (%)	(GPa)	C.V. (%)
105	90	20,97	8,49	1,11	-	25,60	6,92	0,57	52,67
105	75	21,68	7,70	3,64	75,12	25,16	3,91	0,70	24,74
105	60	22,05	7,11	1,65	12,90	25,07	4,47	0,72	17,20
105	50	22,13	6,72	1,55	30,67	25,04	4,25	0,73	13,03
90	75	22,62	8,29	1,26	23,21	24,82	6,49	0,93	62,63
90	60	22,84	7,30	1,29	16,28	24,82	6,41	0,78	27,58
90	50	22,81	6,39	1,30	20,99	24,81	5,43	0,75	14,17
75	60	23,17	7,48	1,21	23,82	24,89	8,14	0,81	33,75
75	50	23,00	5,83	1,28	28,07	24,83	5,34	0,74	10,14
60	50	22,80	6,52	1,08	12,29	24,93	6,90	0,77	27,65
<b>Média</b>		<b>22,41</b>	<b>3,08</b>	<b>1,54</b>	<b>49,30</b>	<b>25,00</b>	<b>0,98</b>	<b>0,75</b>	<b>11,86</b>

Fonte: Autoria própria (2024).

Tabela 18 - Módulo de elasticidade longitudinal e transversal obtido por sistema de equação linear para a espécie Cupiúba.

L1 (cm)	L2 (cm)	Flexão - 3 Pontos				Flexão - 4 Pontos			
		E		G		E		G	
		(GPa)	C.V. (%)	(GPa)	C.V. (%)	(GPa)	C.V. (%)	(GPa)	C.V. (%)
105	90	12,67	4,59	-	-	17,30	7,01	0,67	127,83
105	75	13,19	6,05	1,38	-	16,95	4,01	0,45	24,23
105	60	13,64	4,84	1,56	41,37	16,73	4,05	0,69	83,76
105	50	13,86	4,64	1,35	21,64	17,01	3,43	0,42	14,66
90	75	13,97	10,94	0,73	34,74	16,62	5,39	0,59	47,39
90	60	14,38	6,70	1,69	80,20	16,39	2,59	0,73	72,64
90	50	14,59	5,80	0,98	21,70	16,88	2,79	0,43	15,41
75	60	15,02	3,50	0,94	30,23	16,31	9,86	0,67	78,78
75	50	15,25	5,34	0,85	40,29	17,15	4,78	0,42	21,55
60	50	15,75	10,14	0,96	81,29	20,01	22,71	0,35	33,50
<b>Média</b>		<b>14,23</b>	<b>6,69</b>	<b>1,16</b>	<b>29,32</b>	<b>17,14</b>	<b>6,17</b>	<b>0,54</b>	<b>26,07</b>

Fonte: Autoria própria (2024).

Tabela 19 - Módulo de elasticidade longitudinal e transversal obtido por sistema de equação linear para a espécie Pequiá.

L1 (cm)	L2 (cm)	Flexão - 3 Pontos				Flexão - 4 Pontos			
		E		G		E		G	
		(GPa)	C.V. (%)	(GPa)	C.V. (%)	(GPa)	C.V. (%)	(GPa)	C.V. (%)
105	90	16,85	23,81	0,38	39,47	17,30	19,67	1,06	73,89
105	75	16,29	26,91	1,37	100,24	17,36	19,62	1,45	73,86
105	60	16,25	24,94	0,96	40,12	18,20	20,92	0,50	23,57
105	50	16,28	24,08	0,79	16,28	18,32	20,20	0,44	17,56
90	75	15,91	31,85	0,79	71,02	17,48	19,84	0,81	38,15
90	60	15,98	26,66	0,91	51,13	18,87	21,89	0,45	30,42
90	50	16,05	24,71	0,89	18,96	18,92	20,58	0,41	20,12
75	60	16,23	20,51	1,13	56,10	20,98	25,43	0,34	18,08
75	50	16,34	19,29	0,94	40,84	20,26	21,55	0,36	14,97
60	50	16,74	19,99	1,34	97,02	19,28	17,00	0,40	29,91
<b>Média</b>		<b>16,29</b>	<b>1,85</b>	<b>0,95</b>	<b>30,23</b>	<b>18,70</b>	<b>6,59</b>	<b>0,62</b>	<b>59,63</b>

Fonte: Autoria própria (2024).

Tabela 20 - Módulo de elasticidade longitudinal e transversal obtido por sistema de equação linear para a espécie Tatajuba.

L1 (cm)	L2 (cm)	Flexão - 3 Pontos				Flexão - 4 Pontos			
		E		G		E		G	
		(GPa)	C.V. (%)	(GPa)	C.V. (%)	(GPa)	C.V. (%)	(GPa)	C.V. (%)
105	90	17,71	6,17	0,76	62,63	17,50	8,76	0,41	15,82
105	75	17,57	5,15	0,74	20,57	16,96	11,59	0,69	35,40
105	60	17,43	5,55	0,83	12,03	17,43	8,70	0,59	26,82
105	50	17,29	5,67	0,97	13,48	17,34	8,83	0,62	21,54
90	75	17,50	7,86	0,92	51,23	16,54	16,21	0,76	44,58
90	60	17,30	7,28	0,92	44,50	17,48	11,29	0,68	44,04
90	50	17,11	7,05	1,05	19,24	17,29	9,74	0,65	33,28
75	60	17,07	6,93	0,97	16,96	19,37	12,64	0,49	49,46
75	50	16,84	7,15	1,19	32,13	18,19	6,37	0,52	14,82
60	50	16,50	10,01	2,58	99,83	17,01	15,49	0,62	39,37
<b>Média</b>		<b>17,23</b>	<b>2,11</b>	<b>1,09</b>	<b>49,27</b>	<b>17,51</b>	<b>4,47</b>	<b>0,60</b>	<b>17,56</b>

Fonte: Autoria própria (2024).

Tabela 21 - Módulo de elasticidade longitudinal e transversal obtido por sistema de equação linear para a espécie Roxinho.

L1 (cm)	L2 (cm)	Flexão - 3 Pontos				Flexão - 4 Pontos			
		E		G		E		G	
		(GPa)	C.V. (%)	(GPa)	C.V. (%)	(GPa)	C.V. (%)	(GPa)	C.V. (%)
105	90	19,63	9,48	0,79	76,11	23,31	3,16	0,35	19,48
105	75	19,66	4,66	1,75	66,48	21,75	4,11	0,69	27,85
105	60	19,51	3,93	1,52	44,70	21,78	2,98	0,66	21,01
105	50	19,78	3,75	1,00	28,86	21,92	3,26	0,61	24,38
90	75	19,92	7,53	1,15	87,89	20,18	6,25	1,60	55,73
90	60	19,54	4,97	1,35	49,36	20,90	3,54	0,84	28,94
90	50	19,96	5,21	0,94	24,19	21,28	4,22	0,69	32,39
75	60	19,17	5,31	1,91	72,95	21,91	1,86	0,67	26,90
75	50	20,04	5,34	0,93	21,63	22,25	3,06	0,60	32,51
60	50	22,03	10,15	0,73	30,80	23,07	9,67	0,59	46,47
<b>Média</b>		<b>19,92</b>	<b>3,92</b>	<b>1,21</b>	<b>33,74</b>	<b>21,84</b>	<b>4,27</b>	<b>0,73</b>	<b>45,11</b>

Fonte: Autoria própria (2024).

Com a finalidade de determinar qual a melhor configuração de ensaio para esta metodologia foi contabilizada na Tabela 22 a quantidade de valores do módulo cisalhante (G) incoerentes por corpo de prova para as 10 combinações de vãos.

Tabela 22 - Quantificação de valores de G incoerente por combinação.

Combinação	L1	L2	Flexão - 3 Pontos	Flexão - 4 Pontos
	(cm)	(cm)		
I	105	90	21	3
II	105	75	13	1
III	105	60	9	0
IV	105	50	7	0
V	90	75	12	3
VI	90	60	4	0
VII	90	50	2	0
VIII	75	60	2	1
IX	75	50	1	0
X	60	50	2	1

Fonte: Autoria própria (2024).

São apresentadas na Tabela 23 as relações entre módulo de elasticidade longitudinal e transversal conforme cada tipo de flexão.

Tabela 23 - Relação E/G obtida segundo método de sistema de equação linear.

Espécie	Flexão - 3 Pontos	Flexão - 4 Pontos
	E/G	E/G
<b>Marupá</b>	5,07	30,60
<b>Sapucaia</b>	14,57	33,31
<b>Cupiúba</b>	12,26	31,62
<b>Pequiá</b>	17,17	30,06
<b>Tatajuba</b>	15,76	29,04
<b>Roxinho</b>	16,49	29,87

Fonte: Autoria própria (2024).

A metodologia empregada para determinar os parâmetros de elasticidade longitudinal (E) revelou-se eficiente, como evidenciado pelos baixos coeficientes de variação observados na Tabela 16 a Tabela 21. No entanto, os valores inconsistentes do parâmetro G e sua grande variabilidade demonstram a sensibilidade desses resultados às variações nas cargas aplicadas e deslocamentos, ressaltando a necessidade de cautela na interpretação dos dados obtidos através desse método.

Uma comparação entre os resultados da flexão estática a três e quatro pontos mostrou que, embora os valores do módulo de elasticidade transversal tenham sido mais consistentes na flexão estática a quatro pontos, a estimativa do módulo cisalhante revelou-se inadequada, representando apenas cerca de 3% do módulo de elasticidade longitudinal (E). Esta discrepância pode ser atribuída à ausência de esforço cisalhante em todo o comprimento do elemento durante a aplicação de cargas na flexão a quatro pontos, resultando em uma subestimação significativa dessa propriedade.

Portanto, optou-se pela flexão estática a três pontos como a configuração mais adequada para esta metodologia. Entre as 10 combinações avaliadas na Tabela 22, a combinação "VII" ( $L_1=90\text{cm}$  e  $L_2=50\text{cm}$ ) demonstrou-se mais eficiente, apresentando valores mais coerentes para o parâmetro G e menores coeficientes de variação. As combinações "VIII", "IX" e "X" foram descartadas devido à elevada variabilidade dos resultados.

Os valores aproximados da relação entre o módulo de elasticidade longitudinal e transversal encontrados foram: 5 para Marupá, 14 para Sapucaia, 12 para Cupiúba, 17 para Pequiá, 16 para Tatajuba e Roxinho. É importante notar que esses valores diferem, em sua maioria, do padrão apresentado pela ABNT NBR 7190-1:2022, que estabelece a relação como sendo 16 para a madeira.

Em suma, os resultados destacam a importância de selecionar cuidadosamente a configuração experimental e interpretar os dados com consideração às limitações do método, fornecendo *insights* valiosos para futuras investigações na área.

# **CAPÍTULO 7**



**7 CONCLUSÕES**

## 6 CONCLUSÕES

Com base nas análises conduzidas neste estudo, conclui-se que:

- A variação do módulo de elasticidade longitudinal para  $L/h \leq 18$  revela maior influência das deformações devido aos esforços cisalhantes na flecha total de uma peça fletida, conforme aplicado nos procedimentos da ABNT NBR 7190-3:2022 e ISO/FDIS 13910:2014;
- A norma BS EN 408:2010 se mostrou eficiente para estimar o módulo de elasticidade longitudinal na flexão, pois foi capaz de minimizar o efeito do esforço cisalhante no cálculo desta propriedade mesmo diminuindo a relação  $L/h$ ;
- De modo geral, o módulo de elasticidade longitudinal estimado via flexão estática a quatro pontos é maior quando comparado ao estimado via flexão estática a três pontos;
- De modo geral, o módulo de elasticidade transversal estimado via flexão estática a quatro pontos é menor quando comparado ao estimado via flexão estática a três pontos;
- Foi observado o efeito da deformação devido ao cisalhamento, conforme previsto pela teoria de viga de Timoshenko, em comparação com a teoria de viga de Euler-Bernoulli, à medida que a relação entre vão e altura da seção transversal é reduzida. Isso ressalta a importância de considerar os efeitos de deformação por cisalhamento em análises estruturais de viga de madeira para  $L/h \leq 21$ ;
- A flexão estática a três pontos se mostrou mais adequada para ser aplicada nas metodologias de estimativa do módulo cisalhante, visto que nessa configuração de ensaio o corpo de prova está completamente sujeito ao esforço cisalhante;
- A relação apresentada pela ABNT NBR 7190-1 (2022a),  $G=E/16$ , para determinar o módulo de elasticidade transversal não se mostrou totalmente adequada para as madeiras de florestas nativas investigadas neste estudo. A relação  $E/G$  variou aproximadamente de 5 a 18 nas estimativas via flexão estática a três pontos, isso sugere a necessidade de ajustes ou

formulações específicas para melhor representar as características desse material;

- É importante uma abordagem cuidadosa na seleção da configuração experimental e interpretação dos resultados. Recomenda-se para as duas metodologias de estimativa do G o ensaio de flexão estática com força concentrada aplicada no meio do vão. Logo os procedimentos de ensaios são:
  - a) Os corpos de prova devem ser prismáticos, de seção transversal de 5 cm de base e 5 cm de altura, com comprimento de 115 cm;
  - b) O carregamento consiste em uma força aplicada concentrada no meio do vão;
  - c) A taxa de carregamento corresponde à preconizada pelo documento normativo brasileiro ABNT NBR 7190-3 (2022b), ou seja, 10 MPa/min, sendo aplicado o carregamento com ciclos de carga e descarga conforme detalhado por essa diretriz;
  - d) Os deslocamentos devem ser medidos no meio do vão com precisão de 0,01 mm;
  - e) Os ensaios são não destrutivos e devem sempre respeitar o regime elástico do material, o carregamento máximo deve ser determinado para um deslocamento limite correspondente ao vão dividido por 300 (L/300);
- Método 1:
  - É necessário realizar dois ensaios consecutivos no mesmo corpo de prova seguindo os mesmos procedimentos até aqui listados:
  - Primeiro ensaio:
    - Calcula-se a distância que a peça deve conter entre os apoios para a realização do ensaio, que deve ser de vinte e uma (21) vezes a altura da seção transversal, ou seja, 105 cm;
    - Na estimativa do módulo de elasticidade longitudinal, emprega-se a seguinte equação:
      - $$E = \frac{(F_{M,10\%} - F_{M,50\%})L^3}{(v_{10\%} - v_{50\%})4bh^3}$$
      - Em que:

- $F_{M,10\%}$  e  $F_{M,50\%}$  - são as forças correspondentes a 10% e 50% da força estimada, aplicada ao corpo de prova, em Newtons (N);
  - $v_{10\%}$  e  $v_{50\%}$  - são os deslocamentos no meio do vão correspondentes a 10% e 50% da força estimada, em milímetros (mm);
  - L – comprimento de vão entre apoios, em milímetros (mm);
  - b – largura da seção transversal, em milímetros (mm);
  - h – altura da seção transversal, em milímetros (mm).
- Segundo ensaio:
    - Calcula-se a distância que a peça deve conter entre os apoios para a realização do ensaio, que deve ser de dez (10) vezes a altura da seção transversal, ou seja, 50 cm;
    - Na estimativa do módulo de elasticidade transversal, emprega-se a seguinte equação:
      - $$G = \frac{3F_{M,50\%}L}{10A\left(v_{50\%} - \frac{F_{M,50\%}L^3}{48EI}\right)}$$
      - Em que:
        - $F_{M,50\%}$  - é a força correspondente a 50% da força estimada, aplicada ao corpo de prova, em Newtons (N);
        - $v_{50\%}$  - é o deslocamento no meio do vão correspondentes a 50% da força estimada, em milímetros (mm);
        - L – comprimento de vão entre apoios, em milímetros (mm);
        - A – área da seção transversal, em milímetros quadrados (mm<sup>2</sup>);

- I – momento de inércia, em milímetros à quarta (mm<sup>4</sup>);
  - E – módulo de elasticidade longitudinal obtido no ensaio anterior, em Newtons por milímetros quadrados (N/mm<sup>2</sup>).
- Método 2:
    - É necessário realizar dois ensaios consecutivos no mesmo corpo de prova seguindo os mesmos procedimentos gerais listados anteriormente:
    - Primeiro ensaio:
      - Calcula-se a distância que a peça deve conter entre os apoios para a realização do ensaio, que deve ser de dezoito (18) vezes a altura da seção transversal, ou seja, 90 cm;
      - Afere-se o valor de força e deslocamento.
    - Segundo ensaio:
      - Calcula-se a distância que a peça deve conter entre os apoios para a realização do ensaio, que deve ser de dez (10) vezes a altura da seção transversal, ou seja, 50 cm;
      - Afere-se o valor de força e deslocamento.
    - Na estimativa do módulo de elasticidade transversal, emprega-se a seguinte equação:
      - $$G = \frac{3F_{M,50\%,1}F_{M,50\%,2}L_1L_2(L_1^2 - L_2^2)}{10bh(v_{50\%,2}F_{M,50\%,1}L_1^3 - v_{50\%,1}F_{M,50\%,2}L_2^3)}$$
      - Em que:
        - $F_{M,50\%,1}$  e  $F_{M,50\%,2}$  - é a força correspondente a 50% da força estimada, aplicada ao corpo de prova no ensaio 1 e ensaio 2, respectivamente, em Newtons (N);
        - $v_{50\%,1}$  e  $v_{50\%,2}$  - é o deslocamento no meio do vão correspondentes a 50% da força estimada, no ensaio 1 e ensaio 2, respectivamente, em milímetros (mm);

- $L_1$  e  $L_2$  – comprimento de vão entre apoios, no ensaio 1 e ensaio 2, respectivamente, em milímetros (mm);
- $b$  – largura da seção transversal, em milímetros (mm);
- $h$  – altura da seção transversal, em milímetros (mm).

# **REFERÊNCIAS**



**REFERÊNCIAS**

## REFERÊNCIAS

- AFOUTOU, J. S.; ZHANG, X.; DUBOIS, F. Full elastic properties characterization of wood by ultrasound using a single sample. **Wood Science and Technology**, v. 58, n. 1, p. 403–422, 10 jan. 2024. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00226-023-01525-y>
- ANNUAL REPORT. **The State of Canada's Forests**. 2022. ISSN 1488-2736.
- ARAUJO, V. A. DE. **Casas de madeira e o potencial de produção no Brasil**. 2017. Tese (Doutorado em Recursos Florestais) - Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, Universidade de São Paulo, Piracicaba, 2017. DOI:10.11606/T.11.2018.tde-22032018-113405.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 7190: Projeto de estruturas de madeira**. Rio de Janeiro: ABNT, 1997.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 7190-1: Projeto de estruturas de madeira – Parte 1: Critérios de dimensionamento**. Rio de Janeiro: ABNT, 2022a.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 7190-3: Projeto de estruturas de madeira – Parte 3: Métodos de ensaio para corpos de prova isentos de defeitos para madeiras de florestas nativas**. Rio de Janeiro: ABNT, 2022b.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 7190-4: Projeto de estruturas de madeira - Parte 4: Métodos de ensaio para caracterização de peças estruturais**. Rio de Janeiro: ABNT, 2022c.
- BALLARIN, A. W.; NOGUEIRA, M. Caracterização elástica da madeira de eucalyptus citriodora. **CERNE**, v. 9, n. 1, p. 66–80, 2003.
- BILKO, P.; SKORATKO, A.; RUTKIEWICZ, A.; MAŁYSZKO, L. Determination of the Shear Modulus of Pine Wood with the Arcan Test and Digital Image Correlation. **Materials**, v. 14, n. 2, p. 468, 19 jan. 2021. DOI: <https://doi.org/10.3390/ma14020468>
- BISSOLI-DALVI, M.; FERRES, S. C.; ALVAREZ, C. E.; FUICA, G. E. S. Avaliação da Sustentabilidade da Madeira por Meio da Ferramenta ISMAS. **Floresta e Ambiente**, v. 24, p. 1–7, 16 out. 2017. DOI: <https://doi.org/10.1590/2179-8087.077214>
- BODIG, G. J.; JAYNE, B. A. **Mechanics of wood and wood composites**. New York: Van Nostrand, 1982.
- BRITISH STANDARD. **EN 408:1995: Timber structures — Structural timber and glued laminated timber — Determination of some physical and mechanical properties**. 1995.
- BRITISH STANDARDS INSTITUTION. **BS EN 408:2010+A1:2012: Timber**

**structures — Structural timber and glued laminated timber — Determination of some physical and mechanical properties.** Londres, 2010.

BRU, T.; OLSSON, R.; GUTKIN, R.; VYAS, G. M. Use of the Iosipescu test for the identification of shear damage evolution laws of an orthotropic composite.

**Composite Structures**, v. 174, p. 319–328, ago. 2017.

DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.04.068>

CALIL JR, C.; DIAS, A. A. Utilização da madeira em construções rurais. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, v. 1, n. 1, p. 71–77, 1997.

DOI: <https://doi.org/10.1590/1807-1929/agriambi.v1n1p71-77>

CALIL JUNIOR, C.; LAHR, F. A. R.; MARTINS, G. C. A.; DIAS, A. A. **Estruturas de madeira: Projetos, dimensionamento e exemplos de cálculo.** 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2019.

CARRASCO, E. V. M.; ALVES, R. C.; KRÜGER, P. V.; REZENDE, M. A. P.; PIZZOL, V. D.; MANTILLA, J. N. R.; GUIMARÃES, M. A. S. C. Determination of constant elastic of pequi wood using ultrasound. **MIX Sustentável**, v. 6, n. 4, p. 139–144, 7 ago. 2020. DOI: <https://doi.org/10.29183/2447-3073.MIX2020.v6.n4.139-144>

CHRISTOFORO, A. L.; FILHO, S. L. M. R.; PANZERA, T. H.; ROCCO, A. F. L. Metodologia para o cálculo dos módulos de elasticidade longitudinal e transversal em vigas de madeira de dimensões estruturais. **Ciência Rural**, v. 43, n. 4, p. 610–615, 2013. DOI: <https://doi.org/10.1590/S0103-84782013000400008>

CLÁUS, T.; SEIM, W. Development of the multiple tenon timber connection based on experimental studies and FE simulation. **Engineering Structures**, v. 173, n. November 2017, p. 331–339, out. 2018.

DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.06.102>

DA COSTA, H. M. **Ensaio Mecânicos.** 1. ed. Rio de Janeiro: SESES, 2019.

DA SILVA, T. C. Estudo analítico das teorias de viga de Bernoulli e Timoshenko para condições de contorno variadas. **Revista de Engenharia Civil IMED**, Passo Fundo, v. 6, n. 1, p. 57-70, jul. 2019. ISSN 2358-6508. DOI: <https://doi.org/10.18256/2358-6508.2019.v6i1.2997>.

DE ARAUJO, V. A.; VASCONCELOS, J. S.; LAHR, F. A. R.; CHRISTOFORO, A. L. Timber forest products: a way to intensify global bioeconomy from bio-materials. **Acta Facultatis Xylogiae Zvolen**, v. 64, n. 1, p. 99–111, 2022. ISSN: 1336-3824. DOI: [10.17423/afx.2022.64.1.09](https://doi.org/10.17423/afx.2022.64.1.09)

DE CARVALHO, J. O. P.; SILVA, J. N. M.; LOPES, J. C. A.; DA COSTA, H. B. **Manejo de florestas naturais do tropico úmido com referência especial à floresta nacional do tapajós no estado do Pará.** Embrapa-CPATU, p. 14, 1984.

ERDOĞAN, D.; BEGEÇ, H. Tall timber architecture : an opportunity for green building as Mjøstårnet. **International Symposium of Architecture, Technology and**

Innovation, 2021.

FARIAS, L. M.; MARINHO, J. L. A. Construções sustentáveis: Perspectivas sobre práticas utilizadas na construção civil. **Brazilian Journal of Development**, v. 6, n. 3, p. 16023–16033, 2020. DOI: <https://doi.org/10.34117/bjdv6n3-466>

FU, J. **Wood-Framed Home Share Increased for Three Straight Years**. National Association of Home Builders Discusses Economics and Housing Policy, 2023. Disponível em: <https://eyeonhousing.org/2023/08/wood-framed-home-share-increased-for-three-straight-years/>. Acesso em: 16 set. 2023.

FUSCO, P. B. Caracterização da deformabilidade na elasticidade linear: conceitos básicos para a definição das propriedades elásticas da madeira. **Encontro Brasileiro Em Madeiras e Em Estruturas De Madeira**, v. 5, n. 1, p. 175–215, 1989.

GREEN, D. W.; WINANDY, J. E.; KRETSCHMANN, D. E. Mechanical properties of wood. **Wood handbook : wood as an engineering material**. Madison: U.S. Department of Agriculture, Forest Products Laboratory, 1999.

HEARMON, R. F. S.; BARKAS, W. W. The effect of grain direction on the Young's moduli and rigidity moduli of beech and sitka spruce. **Proceedings of the Physical Society**, v. 53, n. 6, p. 674–680, 1 nov. 1941. DOI: <https://doi.org/10.1088/0959-5309/53/6/306>

INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION. **ISO/FDIS 13910: Timber structures – Strength graded timber – Test methods for structural properties**. Genebra, 2014.

INVIDIATA, A.; LAVAGNA, M.; GHISI, E. Selecting design strategies using multi-criteria decision making to improve the sustainability of buildings. **Building and Environment**, v. 139, p. 58–68, jul. 2018. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.buildenv.2018.04.041>

IPT - INSTITUTO DE PESQUISAS TECNOLÓGICAS. **Informações técnicas sobre madeiras brasileiras e plantadas**. 2023?. Disponível em: <https://madeiras.ipt.br/>. Acesso em: 10 jan. 2024.

KRÜGER, R.; WAGENFÜHR, A. Comparison of methods for determining shear modulus of wood. **European Journal of Wood and Wood Products**, v. 78, n. 6, p. 1087–1094, 7 nov. 2020. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00107-020-01565-2>

LAHR, F. A. R.; CHRISTOFORO, A. L.; VARANDA, L. D.; CHAHUD, E.; ARAÚJO, V. A.; BRANCO, L. A. M. N. Shear and longitudinal modulus of elasticity in wood: relations based on static bending tests. **Acta Scientiarum**, v. 39, n. 4, p. 433, 15 set. 2017. DOI: <https://doi.org/10.4025/actascitechnol.v39i4.30512>

LAHR, F. A. R. **Sobre a determinação de propriedades de elasticidade da madeira**. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo. São Carlos, 1983.

LEONEL, E. D. **Notas de Aula para as Disciplinas Resistência dos Materiais e Mecânica dos Sólidos**. São Carlos, 2022.

MASCIA, N. T. **Considerações a respeito da anisotropia da madeira**. Tese (Doutorado) da Escola de Engenharia de São Carlos - USP. São Carlos, 1991.

MEIRELLES, C.R.M; DINIS H.; SEGALL, M.S.; SANT'ANNA, S.S. **Considerações sobre o uso da madeira no Brasil em Construções Habitacionais**. Fórum de Pesquisa Mackenzie. São Paulo, 2007.

MISHRA, A.; HUMPENÖDER, F.; CHURKINA, G.; REYER, C. P. O.; BEIER, F.; BODIRSKY, B. L.; SCHELLNHUBER, H. J.; LOTZE-CAMPEN, H.; POPP, A. Land use change and carbon emissions of a transformation to timber cities. **Nature Communications**, v. 13, n. 1, p. 4889, 30 ago. 2022.  
DOI: <https://doi.org/10.1038/s41467-022-32244-w>

PACHECO, T. L. **O estudo das propriedades elásticas de materiais compósitos**. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro, 2019.

POUSETTE, A.; GUSTAFSSON, A.; FYNHOLM, P.; EDVARDBSEN, D. F. **Harmonization of building regulations in the Nordic countries for wooden houses**. Nordic Innovation Publication, 2012.

RAMAGE, M. H.; BURRIDGE, H.; BUSSE-WICHER, M.; FEREDAY, G.; REYNOLDS, T.; SHAH, D.U.; WU, G.; YU, L.; FLEMING, P.; DENSLEY-TINGLEY, D.; ALLWOOD, J.; DUPREE, P.; LINDEN, P.F.; SCHERMAN, O. The wood from the trees: The use of timber in construction. **Renewable and Sustainable Energy Reviews**, v. 68, p. 333–359, fev. 2017.  
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rser.2016.09.107>

SKULLESTAD, J. L.; BOHNE, R. A.; LOHNE, J. High-rise timber buildings as a climate change mitigation measure - a comparative lca of structural system alternatives. **Energy Procedia**, v. 96, n. 1876, p. 112–123, 2016.  
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.egypro.2016.09.112>

TER STEEGE, H. et al. Biased-corrected richness estimates for the Amazonian tree flora. **Scientific Reports**, v. 10, n. 1, p. 10130, 23 jun. 2020.  
DOI: <https://doi.org/10.1038/s41598-020-66686-3>

TRAN, V.-D.; OUDJENE, M.; MÉAUSOONE, P.-J. FE analysis and geometrical optimization of timber beech finger-joint under bending test. **International Journal of Adhesion and Adhesives**, v. 52, p. 40–47, jul. 2014.  
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2014.03.007>

TRINCA, A. J. **Metodologia para determinação das constantes elásticas da madeira por ultrassom**. Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Agrícola. Campinas, 2011.

USDA, UNITED STATES DEPARTMENT OF AGRICULTURE. **Wood handbook - Wood as an engineering material**. Madison: Forest Products Laboratory, 508 p., 2010.

WANG, Z.; ZHANG, D.; WANG, Z.; LIANG, X.; YANG, X.; WANG, J. Research progress on dynamic testing methods of wood shear modulus: A review.

**BioResources**, v. 18, n. 1, 16 nov. 2022.

DOI: <https://doi.org/10.15376/biores.18.1.Wang>

XU, X.; XU, P.; ZHU, J.; LI, H.; XIONG, Z. Bamboo construction materials: Carbon storage and potential to reduce associated CO<sub>2</sub> emissions. **Science of The Total Environment**, v. 814, p. 152697, mar. 2022.

DOI: <https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2021.152697>

YOSHIHARA, H. Measurement of the shear modulus of wood by static bending tests. **Journal of Wood Science**, v. 44, n. 1, p. 15–20, 1998.

YOSHIHARA, H. R. Examination of the edgewise shear modulus of wood measured by dynamic square-plate twist. **Wood Research**, v. 56, n. 3, p. 311–320, 2011.

ZANGIÁCOMO, A. L.; CHRISTOFORO, A. L.; LAHR, F. A. R. Módulos de elasticidade longitudinal e transversal em vigas roliças de madeira de *Corymbia citriodora*. **Revista Vértices**, v. 15, n. 1, p. 63–68, 24 jul. 2013.

DOI: <https://doi.org/10.5935/1809-2667.20130006>

ZANGIÁCOMO, A. L.; CHRISTOFORO, A. L.; LAHR, F. A. R. Elasticity moduli in round wooden beams of *pinus caribaea*. **Journal of the Brazilian Association of Agricultural Engineering**, v. 36, n. 3, p. 566–570, 2016.

DOI: <https://doi.org/10.1590/1809-4430-Eng.Agric.v36n3p566-570/2016>