

Vinícius dos Santos Malafatti

Relatividade Geral, Buracos Negros e Ondas Gravitacionais

São Carlos, SP

25 de julho de 2023

Vinícius dos Santos Malafatti

Relatividade Geral, Buracos Negros e Ondas Gravitacionais

Monografia apresentada à Banca Examinadora referente à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso 2 (95117) no dia 11/07/2023, como um dos requisitos para obtenção do título de Bacharel em Física pela Universidade Federal de São Carlos.

Universidade Federal de São Carlos – UFSCar
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia – CCET
Departamento de Física – DF

Orientador: Prof. Dr. Raphael Santarelli

São Carlos, SP
25 de julho de 2023

*Dedico esse trabalho à Santíssima Trindade,
à Mãe de Deus, Maria Santíssima, a todos os Santos,
e aqueles que acreditaram em mim .*

Agradecimentos

Quero expressar meu primeiro agradecimento, meu louvor e minha ação de graças a Deus, a seu filho Jesus Cristo e ao Espírito Santo, pela força, pela condução e a providência em minha vida, que me trouxe em 2017 para estudar na UFSCar, sem a Sua bondade, misericórdia e o amor infinito por mim, eu não teria conseguido terminar esse curso tão difícil, agradecido ao bondoso Deus, que me ajudou a não perder a fé, mas sim aumentá-la mais, e aprender a praticar o amor a Ele, vivendo a santidade a cada dia mais. Agradeço a Maria, nossa Mãe, por ter cuidado de mim, e estar sempre ao meu lado, nos terços que rezava e em todas as circunstâncias. A todos os Santos que estão na vida eterna ao lado de Jesus, por toda a intercessão e pela vida exemplar aqui na Terra, que me ajudam diariamente a aprender a imitar o Cristo, em especial, alguns santos de devoção: São João Maria Vianney, Santo Afonso Maria de Ligório, São Luiz Gonzaga, Santa Gemma Galgani, Santa Elizabete da Trindade, Santa Catarina de Sena e a todos os Santos; agradeço a proteção fiel e guarda de minha vida, ao meu anjo da guarda, por tantas vezes estar comigo em momentos difíceis, e agradeço a todos aqueles que já vivem a glória eterna, um profundo louvor e gratidão.

Agradeço, imensamente aos meus amados pais, Pedro e Marialva, pela força, pelo apoio, pelas palavras, ensinamentos, também pela ajuda financeira; nesses anos longe de casa, pela oração protetora e santificadora, que me ajudaram a ficar no caminho de Deus, e não buscar outros caminhos, por serem grandes pais, dados por Deus. Agradeço também ao Sebastião, por tudo que me ensinou, pela ajuda, por todas as vezes que me trouxe até São Carlos, por fazer um papel de pai também.

A minha querida e amada Vanessa, por tudo que me ensinou nesses bons anos, por todo o seu exemplo, apoio, paciência, e pelas virtudes concedidas pela graça de Deus, que faz resplandecer em si a face do Senhor, e a sua família por todas as orações e o apoio. Aos grandes amigos que fiz aqui, Douglas, Guilherme, Matheus, amigos santos, e amigos de fé, agradeço por todas as conversas, por todas as cantorias, risadas, e papos altamente complexos, sejam eles em relação a ciência, sejam eles relacionados aos mistérios divinos, que sejamos cada dia mais santos. Aos queridos amigos no curso, Lucas, Victor, Alyne e a tantos outros por todas as disciplinas cursadas, por todas as discussões sobre física e sobre nosso querido departamento, por todo o conhecimento aprendido, e compartilhado, e por todas as cálculos "será que vou passar na disciplina?".

Expresso meu profundo agradecimento, e as minhas orações ao meu orientador Prof. Raphael Santarelli, pelos inúmeros aprendizados, desde o dia que o procurei em 2018, até o dia de hoje, o qual ajudou-me a realizar o meu sonho de ser orientado numa área que

sempre sonhei estudar, por todos os seus ensinamentos, por fazer-me colocar o pé no chão e saber que tudo tem sua hora; agradeço também a meu ex-orientador na iniciação científica, Prof. Alex Rezende que me ensinou inúmeras coisas, inclusive escrever no Latex (kkkkk), a tudo que passou para mim, nesses bons anos de IC, toda sua experiência e testemunho de Deus; aos grandes professores do Departamento de Física: Prof. Márcio Martins, Prof. Vivaldo Leiria, Prof. Javier Ramos, Prof. Gustavo Rigolin, Prof. Vinícius Tribuzi, Prof. Paulo Emmel e tantos outros, que me inspiraram a aprender física, a ser um físico, e como fazer física; expresse meu agradecimento ao secretário do curso de física, Raphael Santos, por toda a ajuda, e pelas conversas, pela paciência em sempre estar disposto a atender as necessidades dos alunos. Levo meu agradecimento também, a toda minha família (tias, tios, primos e primas), pelo apoio, por toda a força, e alegria. A toda comunidade da UFSCar, por toda a ajuda, e por tudo que fizeram por mim nesses anos.

Rendo graças e meus sinceros agradecimentos a todos aqueles que de algum modo, me ajudaram, motivaram, aconselharam, e tiveram alguma participação nessa etapa tão especial da minha vida, a qual são poucos aqueles que chegam no fim dessa corrida; em especial agradeço e deixo em memória esse trabalho ao Prof. James Hartle, que faleceu no mês de Maio, e escreveu um dos livros que usei para poder escrever esse trabalho. A todos inúmeros que passaram pela minha vida, ofereço minhas orações, minhas preces, para que no fim estejamos todos eternamente juntos com nosso Amado, Jesus os conceda a graça de serem santos.

Louvado seja Nosso Senhor Jesus Cristo, para sempre seja louvado, e sua Mãe Maria Santíssima.

*“E Jesus dizia aos judeus que creram nele:
Se permanecerdes na minha palavra,
sereis meus verdadeiros discípulos;
conhecereis a verdade e a verdade vos libertará. “
(Evangelho de Nosso Senhor Jesus Cristo, segundo São João 8, 31-32)*

Resumo

Neste estudo, em primeiro lugar, são introduzidas as ideias, conceitos e princípios básicos da Relatividade Restrita, para ajudar a compreender a construção da Relatividade Geral. O segundo capítulo é uma introdução ao formalismo matemático da Relatividade Geral, como a derivada covariante, tensor de Riemann e transporte paralelo. No próximo capítulo é mostrado a construção da equação de Einstein por uma abordagem clássica. Os dois últimos capítulos são para apresentar as duas primeiras soluções da equação de Einstein, a primeira é a solução de Schwarzschild, que traz a precessão do periélio de Mercúrio e o surpreendente resultado: a existência de buracos negros. O último, trata-se de uma solução dada por Einstein, que consiste em linearizar sua equação usando uma pequena perturbação na métrica. Esta solução mostra a existência de ondas gravitacionais no espaço-tempo, como são produzidas, como se propagam e como detectá-las.

Palavras-chaves: Relatividade Geral; Equação de Einstein; Solução de Schwarzschild; Buracos Negros; Gravidade Linearizada; Ondas Gravitacionais.

Abstract

In this study, firstly, it's introduced the basics ideas, concepts and principles of Special Relativity, to help understand the construct of General Relativity. The second chapter is an introduction to the mathematical formalism of General Relativity, as the covariant derivative, Riemann's tensor, parallel transport, etc. The next chapter is showed the construct of Einstein's equation by a classical approach. The last two chapters are to present the firsts two solutions of Einstein's equation, the first is the Schwarzschild's solution, which brings the precession of Mercury's perihelion correction, and the amazing result, the existence of black hole. The last one, is about a solution gives by Einstein, which consist of linearize his equation by using a small perturbation in the metric, these solution shows the existence of gravitational waves in the spacetime, how they are produced, how they propagate, and how to detect them.

Key-words: General Relativity; Einstein Equations; Schwarzschild solution; Black Holes ; Linearized Gravity; Gravitational Waves.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Cone de Luz	16
Figura 2 – Desvio Geodésico	23
Figura 3 – Potencial efetivo para vários valores do momentum angular l	42
Figura 4 – Órbitas limitadas	43
Figura 5 – Órbitas ilimitadas	44
Figura 6 – Raios de luz em coordenadas de Eddington-Finkelstein	49
Figura 7 – Diagrama de Kruskal	51
Figura 8 – Linhas de mundo do diagrama de Kruskal	52
Figura 9 – Polarização de uma Onda Gravitacional	58
Figura 10 – Sistema Binário PSR B1913+16	62
Figura 11 – Esquema de configuração do LIGO	64

Lista de abreviaturas e siglas

RG	Relatividade Geral
OG	Ondas Gravitacionais
ISCO	Órbita circular estável mais interna (Innermost Stable Circular Orbit)

Lista de símbolos

$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$	Símbolo de Christoffel
$G_{\mu\nu}$	Tensor de Einstein
G	Constante da gravitação Universal
$\eta_{\mu\nu}$	Métrica do espaço-tempo plano (métrica de Minkowski)
$g_{\mu\nu}$	Métrica geral do espaço-tempo
$T_{\mu\nu}$	Tensor energia-momentum
$R_{\mu\nu}$	Tensor de Ricci
R	Escalar de Curvatura
$h_{\mu\nu}$	Perturbação da métrica

Sumário

1	INTRODUÇÃO	12
2	RELATIVIDADE ESPECIAL	13
2.1	Princípios da Relatividade	13
2.2	Transformações de Lorentz	13
2.3	Geometria da Relatividade Especial	14
2.4	Dinâmica Relativística	16
3	GEOMETRIA DE UM ESPAÇO-CURVO	19
3.1	Variedades Diferenciáveis	19
3.2	Tensor de Curvatura	21
3.3	Identidade de Bianchi, tensor de Ricci e escalar de curvatura	24
4	EQUAÇÕES DE EINSTEIN	25
4.1	Princípios	25
4.2	Movimento de partículas no espaço-tempo curvo	26
4.3	Tensor Energia Momentum	28
4.3.1	Leis de Conservação	30
4.4	Equações de Campo de Einstein	31
5	SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD	36
5.1	Métrica de Schwarzschild	36
5.2	Órbita de partículas testes	39
5.2.1	Órbita circulares estáveis	45
5.2.2	Forma das órbitas	46
5.3	Buraco Negro de Schwarzschild	47
5.3.1	Coordenadas Eddington-Finkelstein	47
5.3.2	Coordenadas Kruskal-Szekeres	50
6	ONDAS GRAVITACIONAIS	53
6.1	Fórmula de Quadrupolo	58
6.2	Energia radiada por uma Onda Gravitacional	60
6.3	Deteção das Ondas Gravitacionais	63
7	CONCLUSÃO	66
	REFERÊNCIAS	67

1 Introdução

Gravidade é uma das quatro forças fundamentais da natureza, e tem sido objeto de estudos por séculos pela humanidade. Isaac Newton em 1687 publica seu livro "Principia", no qual colabora para o entendimento do que seria a gravidade, e como ela agiria nos corpos, sejam eles aqui na Terra ou no Universo.

Depois de mais de dois séculos, o físico alemão Albert Einstein dá uma nova forma para o entendimento das leis do movimento, ao verificar que as transformações de Galileu não estavam condizentes com o Eletromagnetismo. Surge então uma teoria baseada em princípios que iria se mostrar invariante sob as leis do Eletromagnetismo, indicando uma nova relação entre referenciais inerciais na qual o tempo deixa de ser absoluto, o que implica em comportamentos diferentes e anti-intuitivos, como os efeitos da dilatação do tempo e da contração do espaço. Assim nasce a Relatividade Especial em 1905, mas ainda sem incorporar a gravidade. Só 10 anos depois é que Einstein escreve uma equação que mudaria e ajudaria a entender os fenômenos astrofísicos e todo o funcionamento do Universo [1], ao considerar a gravidade de acordo com os princípios da Relatividade Especial

A Teoria da Relatividade Geral, é regida pelas equações de Einstein, uma equação tensorial que não é fácil de resolver. Ela descreve como o espaço-tempo se comporta quando há uma fonte de matéria ou energia, e assim é possível determinar qual seria a órbita de uma partícula nas proximidades, ou o que acontece num colapso gravitacional.

Felizmente, apenas alguns meses depois, Karl Schwarzschild, um físico alemão, numa trincheira na Primeira Guerra Mundial, conseguiria uma solução exata, que levaria em outros resultados importantes e desafiadores para a física. Em 1916, Einstein, não sabendo como resolver exatamente a sua equação, realizou uma aproximação, que a resolvia de uma maneira aproximada. Felizmente também essa solução, 100 anos depois, resultaria na descoberta direta das ondas gravitacionais, e na comprovação de que dois objetos massivos (buracos negros, estrela de neutrôns), poderiam gerar ondas no espaço-tempo.

A motivação e objetivo desse trabalho foi entender a Relatividade Geral, a equação que a descreve, e como foi formulada, entender as duas primeiras soluções, que até hoje são usadas e estão sendo testadas para comprovar a validade da teoria.

2 Relatividade Especial

Antes de propriamente falar sobre a Relatividade Geral (RG), é útil e necessário introduzir a Relatividade Especial, que ajudará no desenvolvimento da RG, definindo alguns conceitos e resultados que são importantes para compreender a RG e suas implicações. [2, 3, 4].

2.1 Princípios da Relatividade

A Relatividade Especial é construída a partir de dois princípios fundamentais, um proposto inicialmente por Galileu (mas generalizado por Einstein), e outro idealizado por Einstein. O princípio de Galileu refere-se às leis da mecânica, e o princípio de Einstein irá referir-se a todas as leis da física.

Princípio da Relatividade 1: *"As leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais"*.

Esse princípio deixa claro que não há referenciais preferenciais.

Princípio da Relatividade 2: *"A velocidade da luz (c) é a mesma em todos os referenciais inerciais"*

Esses dois princípios são as bases para o desenvolvimento da relatividade especial e para as transformações de Lorentz, que nos dão a nova relação entre referenciais inerciais. Como agora a velocidade da luz deve ser constante, diferentes observadores não irão mais concordar com a simultaneidade dos eventos (a passagem do tempo é diferente para eles, de forma a manter o valor de c constante).

2.2 Transformações de Lorentz

As transformações de Lorentz dizem como realizar uma transformação entre dois referenciais inerciais, sendo que ela generaliza as transformações de Galileu (2.1).

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}, \quad (2.1)$$

As transformações de Lorentz irão recuperar as transformações de Galileu quando for analisado uma dinâmica não relativística, ou seja, $v \ll c$. O seguinte conjunto de equações

é chamado de transformações de Lorentz (2.2)

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - (v/c)x) \\ x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (2.2)$$

sendo $\gamma := (1 - (v/c)^2)^{-1/2}$.

Para velocidades $v \approx c$ é possível notar alguns efeitos, que se tornam desprezíveis quando $v \ll c$, como por exemplo a dilatação do tempo e a contração do espaço, ou seja, uma partícula se movimentando em um referencial S , tendo seu tempo medido em um referencial S' terá um tempo medido maior que o tempo no seu referencial.

Exemplo 2.2.1 *Um exemplo da ocorrência da dilatação temporal e da contração espacial. A partícula múon tem seu tempo de vida aproximadamente de $2.0\mu\text{s}$, medido em seu referencial. Grande parte dessas partículas são criadas a 15 km de altitude, com velocidades na ordem de $0.99c$, velocidade tal que os efeitos relativísticos tem que ser considerados. Usando a relação de que $\Delta t' = \gamma\Delta t$, onde $\Delta t'$ é o tempo medido no referencial do observador, e Δt é o tempo medido no referencial do múon, o tempo de meia-vida do múon relativístico é cerca de $\Delta t' = 110\mu\text{s}$, nesse referencial o múon irá levar mais tempo para decair, consequentemente percorrerá uma distância maior, a partir de $\Delta L = \Delta L'/\gamma$, e chegará até a superfície da Terra.*

2.3 Geometria da Relatividade Especial

Na geometria Euclidiana pode-se medir distâncias entre dois pontos próximos utilizando o elemento de linha dado por:

2.3.1 Distância na Relatividade Especial

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.3)$$

A distância é medida entre a diferença entre as coordenadas no espaço tridimensional, mas na relatividade especial o tempo é tratado como uma dimensão também, então incluindo o tempo no elemento de linha a distância no espaço-tempo é dado por

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (2.4)$$

chamado normalmente de espaço-tempo de Minkowski, ou espaço-tempo plano¹

¹ (1) Há duas possíveis convenções de sinais para a equação 2.4, a que foi utilizada com a componente temporal tendo sinal negativo e outra com a coordenada temporal tendo sinal positivo. O sinal positivo para o tempo é normalmente utilizado em Física de Partículas. Para esse trabalho é utilizado a convenção do tempo com sinal negativo.

2.3.2 Métrica

A métrica na geometria da relatividade especial pode ser escrita como um tensor métrico, com dois índices, sendo um objeto simétrico $g_{\mu\nu}$ que admite como inverso outro tensor simétrico.

Para métrica do espaço-tempo de Minkowski, ao invés de g escreve-se a letra η , sendo escrita como

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.5)$$

Essa nova notação de índices será de suma importância para o desenvolvimento da RG, na qual as letras gregas vão de 0 a 3, com o 0 sendo a coordenada temporal e 1 a 3 as coordenadas espaciais. Aqui também introduzimos a convenção da soma de Einstein, na qual índices repetidos em cima e embaixo são somados em todos os seus valores possíveis.

Pode-se representar a métrica na forma matricial. No caso de Minkowski tem-se:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

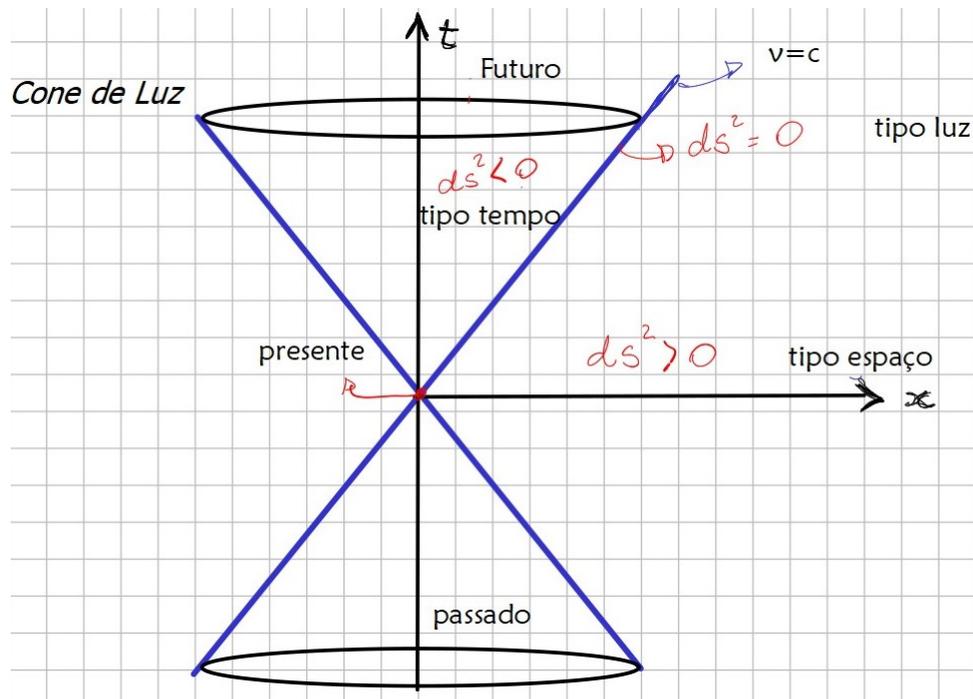
2.3.3 Cone de Luz

Como a geometria do espaço-tempo não é uma geometria Euclidiana, pode-se encontrar que a distância entre dois pontos próximos 2.4, é positiva, negativa ou zero. Quando esse intervalo for $ds^2 > 0$ diz-se que ele possui separação do *tipo-espaço*, se a diferença for $ds^2 < 0$ então os pontos possuem separação do *tipo-tempo*, e para o caso em que $ds^2 = 0$ então eles possuem separação do *tipo-nula* ou do *tipo-luz* (o caminho que a luz percorrerá no espaço), ou seja, esses pontos estão conectados por raios de luz se movendo com velocidade c . Resumindo, pode-se escrever da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} ds^2 > 0 &\rightarrow \text{tipo-espaço,} \\ ds^2 = 0 &\rightarrow \text{tipo-luz,} \\ ds^2 < 0 &\rightarrow \text{tipo-tempo.} \end{aligned} \quad (2.7)$$

É possível também fazer uma representação gráfica, representado na figura 1, assumindo que $c = 1$ na coordenada t .

Figura 1 – Cone de Luz



Fonte: Figura produzida pelo autor

2.4 Dinâmica Relativística

A leis da mecânica Newtoniana precisam ser alteradas para serem condizentes com os princípios da relatividade descritos no começo desse capítulo. Vamos deixar de tratar o espaço como sendo tridimensional com uma medida de tempo absoluto e passar a tratar o espaço-tempo como quadridimensional, com o tempo incluído nas transformações entre referenciais. Para isso utiliza-se um novo conjunto de notações para representar as grandezas dinâmicas, as quais seguem abaixo [4].

2.4.1 Vetores

A definição de vetores no espaço quadridimensional seguirá da mesma forma como são definidos no espaço tridimensional. É possível representa-los com uma letra em negrito \mathbf{u} , para diferenciá-los dos vetores em três dimensões que são representados como sendo \vec{u} . As componentes do quadri vetor podem ser escritas compactamente como

$$\mathbf{u} = (u^\alpha) = u^\alpha \hat{e}_\alpha \quad (2.8)$$

Essa forma indica que está havendo uma soma sobre os índices sobrescritos e subscritos. Os índices gregos vão de 0 a 3, e os índices romanos de 1 a 3. O termo \hat{e}_μ representa os vetores de base. Essa notação pode ser chamada de notação covariante, quando os índices forem sobrescritos são chamados de contravariantes.

2.4.2 Quadrivelocidade

Na relatividade especial a velocidade é chamada quadrivelocidade, sendo um quadri vetor no qual as componentes u^α são as derivadas da posição ao longo do tempo próprio 2.9 (tempo próprio: o tempo medido pela própria partícula), considerando que essa partícula esteja se movendo numa linha de mundo (caminho por onde a partícula percorrerá o espaço-tempo quadridimensional), e adotando por facilidade que $c = 1$

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \quad (2.9)$$

A equação 2.9 dá o vetor tangente a cada instante da partícula ao se movimentar pela linha de mundo. Caso a partícula esteja num referencial inercial, usando a relação do tempo (t) e do tempo próprio (τ), pode-se escrever as componentes de sua quadrivelocidade

$$u^t = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{V}^2}} \quad (2.10)$$

Assim, é possível escrever as coordenadas espaciais como sendo

$$u^x = \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{V^x}{\sqrt{1 - \vec{V}^2}} \quad (2.11)$$

Utilizando uma forma mais resumida escrevendo 2.9 e usando γ , da seguinte forma

$$u^\alpha = (\gamma, \gamma \vec{V}). \quad (2.12)$$

Algo importante tirado das relações acima é a condição de normalização dada por

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = -1 \quad (2.13)$$

2.4.3 Força, Momentum e Energia

Escrevendo agora o análogo para a força Newtoniana na mecânica relativística:

$$m \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = \mathbf{f} \quad (2.14)$$

Para energia e o momentum pode-se escrever as seguintes equações.

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u} \quad (2.15)$$

Onde as componentes temporais e espaciais são escritas da seguinte forma

$$p^t = \frac{m}{\sqrt{1 - \vec{V}^2}}, \quad \vec{p} = \frac{m\vec{V}}{\sqrt{1 - \vec{V}^2}} \quad (2.16)$$

Uma importante propriedade dessa definição do quadrimomentum, segue da equação 2.15 e da 2.13.

$$\mathbf{p}^2 \equiv \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = -m^2. \quad (2.17)$$

Também pode-se escrever o quadrimomentum como sendo

$$p^\alpha = (E, \vec{p}) = (m\gamma, m\gamma\vec{V}) \quad (2.18)$$

A equação 2.18 relaciona o momentum e a Energia, sendo $p^t = p^0 = E$ e \vec{p} os três momentum nas direções espaciais (p_x, p_y, p_z) . A equação 2.17 pode ser solucionada para que seja possível chegar na seguinte relação para a Energia

$$E = (m^2 + \vec{p}^2)^{1/2} \quad (2.19)$$

A partir da equação acima pode-se chegar a uma das equações mais famosas de toda física: quando considerada uma partícula em repouso, e restabelecendo o valor de c , chega-se na expressão $E = mc^2$. Nas referências [3, 2] é possível encontrar mais resultados e deduções para a Relatividade Especial.

3 Geometria de um Espaço-Curvo

Nesse capítulo será feita uma introdução sobre a geometria de um espaço-curvo que é utilizada na geometria diferencial e na geometria Riemanniana, trazendo as ferramentas matemáticas necessárias para sua descrição. Com isso será possível entender a Relatividade Geral e seus resultados. As principais referências para esse capítulo são [4, 5, 6, 7].

3.1 Variedades Diferenciáveis

Para estudar os espaços onde haja curvatura os matemáticos trabalharam por bons anos para desenvolver uma teoria de análise (diferenciação, integração). Assim foram criados os "*manifolds*" ou como chamados em português *variedades* que possuem curvatura ou não. Quando uma superfície ou variedade é curva, ao analisar uma pequena região, ela pode ser considerada plana, o que contribui muito para os cálculos, já que se pode usar o cálculo diferencial usual. Caracterizando uma variedade escreve-se \mathbb{M}^n , denotando que essa variedade tem n dimensões, e suas coordenadas podem ser representadas como sendo (x^1, \dots, x^n) . Uma das variedades mais conhecidas e muito utilizadas pelos físicos é a esfera, que é representada como sendo uma variedade \mathbb{S}^2 , também há o torus \mathbb{T}^2 . Localmente a variedade M é um \mathbb{R}^n .

As variedades diferenciáveis serão espaços onde haverá uma diferenciabilidade e uma continuidade da função que a descreve. A superfície de uma esfera é diferenciável em todo o local, ou seja, não tem se pontos onde a derivada não exista. Com isso definiremos vetores e campos vetoriais em cada ponto da superfície. Seja uma curva diferenciável $\alpha(t) = (x^1, \dots, x^n)$. A derivada dessa curva $\alpha'(t)$ dará o vetor tangente em cada ponto dela. Pode-se construir um plano tangente em cada ponto do espaço, sendo esse plano formado pelos vetores pertencentes a superfície ou a variedade.

3.1.1 Vetores Duais

Um vetor dual ω é uma transformação linear que irá levar vetores para números reais, esses números podem ser representados como $\omega(\mathbf{a}) = \omega_\alpha a^\alpha$. Para cada vetor dual haverá um vetor correspondente: $\omega(b) = g_{\alpha\beta} a^\beta b^\alpha$. A relação acima pode ser invertida considerando que a métrica possua uma inversa que possa ser escrita como sendo $g^{\alpha\beta}$, multiplicando-a pela métrica tem-se a seguinte relação: $g_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = \delta_\beta^\alpha$. Através dessa relação é possível subir e descer índices dos vetores e dos tensores. Os vetores com os índices sobrescritos são chamados de vetores contravariantes u^μ , e os vetores com índices subscritos são chamados de vetores covariantes u_μ .

3.1.2 Tensores

De uma maneira simplificada, pode-se pensar num tensor como um mapa linear de vetores que leva a um número real. A métrica é um tensor que define um mapa linear de dois vetores em um número. Um vetor é um tensor de rank-1, a métrica usada em RG será um tensor de rank-2, quando houver um tensor de rank-3 haverá então 3 vetores levando a números reais, e assim por diante. Pode-se representar um tensor em negrito \mathbf{t} , ou como costuma-se usar em RG com letras maiúsculas $T_{\mu\nu}$, no caso um tensor de rank-2. Pode-se escrever então o tensor métrico como sendo

$$g(a, b) = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu \quad (3.1)$$

Pode-se abaixar e subir os índices multiplicando o tensor pela métrica

$$g_{\mu\nu} g^\mu{}_\alpha = g_{\nu\alpha} \quad (3.2)$$

Os tensores podem ser transformados da seguinte forma

$$T'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\nu} T_{\beta\alpha} \quad (3.3)$$

essa transformação é usada para transformações entre diferentes sistemas de coordenadas.

3.1.3 Derivadas Covariantes

Diferenciando os vetores espera-se encontrar um tensor de rank-2, dado que o vetor é \mathbf{v} , a derivada para uma variedade é escrita como $\nabla \mathbf{v}$, cuja as componentes podem ser $\nabla_\alpha v^\beta$, um dos índices para a direção do vetor e outro representando a direção da derivada. A sua derivada irá envolver a diferença entre pontos próximos no espaço-tempo. Porém, as operações definidas com os vetores (adição, subtração, etc) são definidas em um ponto nesse espaço, e dois vetores em diferentes pontos vivem em espaços tangentes diferentes, ou seja, precisa-se de algo que possa fazer com que eles se aproximem, e assim introduzimos o conceito de transporte paralelo, que irá trazer um dos vetores para o espaço tangente do outro, tornando possível fazer os cálculos e operações matemáticas. Essa noção é definida também para o espaço curvo, pois localmente no ponto que deseja-se calcular, o espaço é plano. Então definimos a chamada *Derivada covariante*, que pode ser escrita como:

$$\nabla_\alpha v^\beta = \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta v^\gamma \quad (3.4)$$

Os primeiros termos da derivada covariante vem da mudança no campo do vetor, de x^α para $x^\alpha + dx^\alpha$, e o segundo termo vem da mudança na base do vetor. O segundo termo inclui os chamados *símbolos de Christoffel*, que podem ser interpretados como sendo a

conexão entre dois pontos com espaços tangentes diferentes. Os símbolos de Christoffel podem ser escritos da seguinte forma:

$$\Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta} = \frac{1}{2}g^{\beta\lambda} \left(\frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{\lambda\gamma}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\lambda}} \right). \quad (3.5)$$

Onde g é a métrica do espaço estudado. Uma demonstração da origem dos símbolos de Christoffel pode ser encontrada em [5]. Ao trabalhar num espaço plano, os símbolos de Christoffel são nulos, sendo uma forma de descobrir se o espaço é curvo ou não; a derivada covariante para um espaço plano se reduz a derivada usual, definida em \mathbb{R}^3 . Uma forma de escrever os símbolos de Christoffel, caso a métrica seja diagonal, é :

$$\Gamma_{\alpha\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^{\gamma}} \quad (3.6)$$

Ao trabalhar-se com vetores (ou tensores) de ordem mais alta, adiciona-se mais símbolos de Christoffel na derivada covariante. Para o caso de um tensor de rank-2

$$\nabla_{\gamma} v^{\alpha\beta} = \frac{\partial v^{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \Gamma_{\sigma\gamma}^{\alpha} v^{\sigma\beta} + \Gamma_{\sigma\gamma}^{\beta} v^{\alpha\sigma} \quad (3.7)$$

Caso haja um tensor com índices covariantes e contravariantes, a equação 3.7 é reescrita da seguinte forma

$$\nabla_{\gamma} v_{\beta}^{\alpha} = \frac{\partial v_{\beta}^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} + \Gamma_{\sigma\gamma}^{\alpha} v_{\beta}^{\sigma} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\sigma} v_{\sigma}^{\alpha} \quad (3.8)$$

3.2 Tensor de Curvatura

Antes de introduzir o tensor de curvatura, que será o ponto principal nesse capítulo, é útil falar sobre as geodésicas. Geodésicas são as curvas percorridas pelas partículas no espaço-curvo, desde que estejam livre de forças que anulem o movimento. Elas são as linhas de mundo que extremizam o tempo próprio (tempo medido pelo observador), ou seja, o menor caminho entre dois pontos contidos em uma variedade curva. Elas podem ser escritas como sendo

$$\frac{d^2 x^{\alpha}}{d\tau^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \frac{dx^{\beta}}{d\tau} \frac{dx^{\gamma}}{d\tau} = 0 \quad (3.9)$$

A letra τ representa o tempo próprio, a equação 3.9 é um conjunto de 4 equações percorrendo os índices de 0 a 3. Com essa equação e a métrica apropriada é possível descrever o movimento de partículas testes ao redor do Sol (movimento de Mercúrio).

As derivadas covariantes não são geralmente comutativas, então é preciso definir um comutador sendo $\nabla_{\beta}\nabla_{\alpha}T_{\delta}^{\mu} - \nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}T_{\delta}^{\mu}$. O comutador de duas derivadas covariantes, mede diferença entre o primeiro tensor e depois do outro, versus a ordem oposta. Derivando 3.4

$$\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}V^{\mu} = \partial_{\alpha}(\nabla_{\beta}V^{\mu} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}\nabla_{\lambda}V^{\mu} + \Gamma_{\alpha\sigma}^{\mu}\nabla_{\beta}V^{\sigma}) \quad (3.10)$$

A equação para $\nabla_\beta \nabla_\alpha V^\mu$ é análoga, apenas trocando os índices $\alpha \leftrightarrow \beta$. Subtraindo 3.10 e a comutante dela e assumindo que

$$\partial_\beta \partial_\alpha V^\mu = \partial_\alpha \partial_\beta V^\mu$$

encontra-se o seguinte resultado

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta V^\mu - \nabla_\beta \nabla_\alpha V^\mu = (\partial_\alpha \Gamma_{\beta\sigma}^\mu - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\sigma}^\mu + \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu \Gamma_{\beta\sigma}^\lambda - \Gamma_{\sigma\alpha}^\lambda \Gamma_{\lambda\beta}^\mu) V^\sigma - 2\Gamma_{[\alpha\beta]}^\lambda \nabla_\lambda V^\sigma \quad (3.11)$$

Onde defini-se que

$$R_{\sigma\alpha\beta}^\mu = \partial_\alpha \Gamma_{\beta\sigma}^\mu - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\sigma}^\mu + \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu \Gamma_{\beta\sigma}^\lambda - \Gamma_{\sigma\alpha}^\lambda \Gamma_{\lambda\beta}^\mu \quad (3.12)$$

O último termo de 3.11, é denominado tensor de torção, como não há torção, o tensor de Riemann pode-se definir como

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta V^\mu - \nabla_\beta \nabla_\alpha V^\mu = R_{\sigma\alpha\beta}^\mu V^\sigma \quad (3.13)$$

Esse é o chamado tensor de Riemann, e V^a é um vetor qualquer. O tensor de Riemann pode ser escrito em termos da métrica também. Usando o tensor de Riemann totalmente covariante, se encontra algumas propriedades como: antissimetria nos dois primeiros índices e nos dois últimos,

$$R_{\mu\sigma\alpha\beta} = -R_{\sigma\mu\alpha\beta} \quad (3.14)$$

é invariante sobre troca dos pares de índices, ou seja,

$$R_{\mu\sigma\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\sigma} \quad (3.15)$$

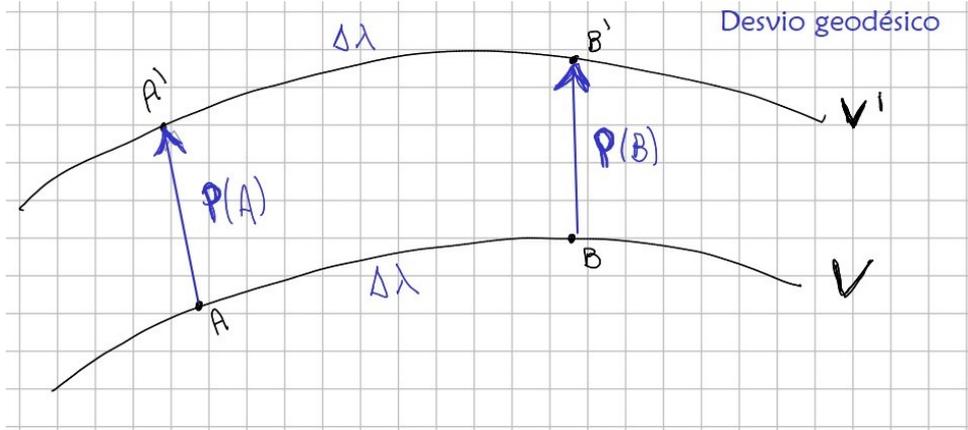
Através de alguns cálculos é possível encontrar que :

$$R_{\mu\sigma\alpha\beta} + R_{\mu\alpha\beta\sigma} + R_{\mu\beta\sigma\alpha} \equiv 0 \quad (3.16)$$

A equação acima é conhecida como identidade de Bianchi, com essa identidade e as simetrias e antissimetrias é possível reduzir o número de componentens de 256 termos para 20 termos apenas.

Vamos encontrar uma equação para o desvio geodésico, que na Mecânica Newtoniana descreve a separação entre vetores. Dada uma diferença infinitesimal entre duas geodésicas próximas, ou seja, linhas paralelas, quando essas linhas forem extendidas no espaço curvo, não se manterão mais paralelas. Considerando duas geodésicas com \mathbf{V} e \mathbf{V}' tangentes, a princípio estão próximos um do outro e paralelos, em pontos distintos A e B para \mathbf{V} e A'

Figura 2 – Desvio Geodésico



Fonte: Figura produzida pelo autor baseado em [7]

e B' para V' . Seja o parâmetro afim de uma geodésica λ , ver figura 2. Definindo um vetor que ligue os pontos da primeira geodésica aos da segunda, denotado por \mathbf{P} e \mathbf{P}' , a equação para a geodésica num sistema de coordenadas localmente inercial pode ser escrita como

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} = 0 \quad (3.17)$$

Os símbolos de Christoffel desaparecem por estarem num espaço-plano local. Mas para a segunda geodésica contida em outro sistema de coordenadas, há a seguinte equação para descrevê-la

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma_{00}^\alpha = 0 \quad (3.18)$$

Como os pontos na primeira e segunda geodésicas estão separados pelo vetor \mathbf{P} , o lado direito da equação acima se reescreve da seguinte forma

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \partial_\beta \Gamma_{00}^\alpha \mathbf{P}^\beta = 0 \quad (3.19)$$

Agora a diferença entre as geodésicas \mathbf{V} e \mathbf{V}' é apenas a componente do vetor \mathbf{P} . Por isso no ponto A tem se que

$$\left. \frac{d^2 x}{d\lambda^2} \right|_{A'=0} - \left. \frac{d^2 x}{d\lambda^2} \right|_{A=0} = -\partial_\beta \Gamma_{00}^\alpha \mathbf{P}^\beta \quad (3.20)$$

Na equação 3.20 foi calculada a mudança das componentes de \mathbf{P} , como não foi especificado o sistema de coordenadas, não há derivada segunda das componentes, mas sim uma completa derivada covariante, assim encontra-se que

$$\nabla_V \nabla_V \mathbf{P} = R^\alpha{}_{\beta 00} \mathbf{P}^\beta = R^\alpha{}_{\mu\nu\beta} V^\mu V^\nu \mathbf{P}^\beta \quad (3.21)$$

As geodésicas em um espaço plano mantém a separação entre si, já nos espaços curvos não. A equação 3.21 é chamada de equação do desvio geodésico e mostra matematicamente que as forças de maré (*tidal forces*) de um campo gravitacional fazem com que as trajetórias

das partículas vizinhas diverjam. As forças de maré podem ser representadas pela curvatura de um espaço-tempo no qual as partículas sigam geodésicas.[7].

3.3 Identidade de Bianchi, tensor de Ricci e escalar de curvatura

Fazendo a diferenciação das componentes do tensor de Riemann com respeito a x^λ , num espaço localmente inercial, aparecem identidades diferenciais, que são denominadas de identidades de Bianchi como já visto

$$\nabla_\lambda R_{\mu\sigma\alpha\beta} + \nabla_{\mu\alpha} R_{\sigma\alpha\beta\lambda} + \nabla_\sigma R_{\alpha\beta\lambda\mu} = 0 \quad (3.22)$$

Essa identidade irá valer em qualquer sistema de coordenadas, e através do seu resultado é possível chegar a forma final das Equações de Einstein (ver Capítulo 4). Definindo outro tensor que é utilizado na Geometria Riemanniana e faz parte das equações de Einstein, temos o *tensor de Ricci*:

$$R_{\alpha\beta} = R^\mu{}_{\alpha\mu\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu} g^{\mu\nu} \quad (3.23)$$

Sendo 3.23 uma contração do tensor de Riemann, no primeiro e no terceiro índice, dado que o tensor de Riemann é antissimétrico em α e β e em μ e ν , todas essas contrações irão sumir ou reduzir para o tensor $R_{\alpha\beta}$, sendo a única contração possível do tensor de Riemann. Ao contrair o tensor de Ricci pela métrica $g_{\mu\nu}$ obtêm-se o escalar de Ricci que é dado por:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu}. \quad (3.24)$$

4 Equações de Einstein

4.1 Princípios

Para iniciar a discussão e construção das equações de Einstein, de uma maneira intuitiva e parecida com a maneira que ele fez em seus artigos de 1915 e 1916 [1], vamos seguir preferencialmente as referências [6, 8], que têm a melhor abordagem e mais didática para um primeiro contato com a equação. É necessário introduzir dois princípios que motivaram Einstein a desenvolver suas equações, a partir dos resultados da Relatividade Especial: Princípio da Equivalência Fraca e Princípio da Equivalência de Einstein.

O Princípio da Equivalência Fraca, aquele que governa a Mecânica Newtoniana, diz que $m_i = m_g$, onde m_i é a massa inercial e m_g a massa gravitacional. Isso diz que o movimento das partículas testes é universal, independente de suas massas, com aceleração dada por:

$$a = -\nabla\phi \quad (4.1)$$

Aqui, ϕ é o potencial gravitacional, sugerindo que há uma classe de trajetórias através do espaço-tempo onde estão os referenciais inerciais (em inglês "Local Inertial Frames", LIF), no qual as partículas viajam sem aceleração. Esse princípio irá implicar na condição de que não se pode distinguir os efeitos de um campo gravitacional do efeito de partículas que estejam num referencial uniformemente acelerado, não podendo distinguir entre gravidade ou aceleração.

Mas ao levar em conta a questão da relatividade especial como apresentada no Capítulo 2, o conceito de massa perde sua particularidade, tornando-se uma manifestação da energia (E) e momentum (p). Einstein diz ter tido o pensamento mais feliz de sua vida ao pensar na possibilidade da extrapolação do 1º princípio, e no que essa extrapolação culminaria no desenvolvimento da Relatividade Geral.

A equivalência de campo com aceleração uniforme e um campo gravitacional uniforme, pode ser ilustrado da seguinte forma. Imagine que haja um laboratório em repouso na superfície da Terra. Um observador deixa cair um livro e uma caneta, se a massa inercial e a gravitacional são iguais, ambos então caem no chão com aceleração g . Agora imagine uma segunda situação onde esse mesmo observador esteja dentro de um laboratório viajando pelo espaço, e longe de qualquer fontes de força gravitacional, e o laboratório esteja com aceleração g . O observador também deixa cair o livro e a caneta ao mesmo tempo, e ambas chegam no chão com a aceleração g . O observador que esteja dentro desse laboratório fechado não pode distinguir em qual situação ele se encontra apenas usando

esse experimento. Sendo as duas situações completamente equivalentes.

Então, "em regiões locais (pequenas) do espaço-tempo, as leis da física se reduzem para as leis da relatividade especial, ou seja, o espaço-tempo se torna plano, sendo impossível detectar a existência de um campo gravitacional (g) usando apenas experimentos locais". Assim, surge a ideia da gravidade ser universal, afetando todas as partículas da mesma maneira. Com isso é possível generalizar as leis da física para os espaços-curvos, por alguns passos:

1. Tome uma lei da física válida em coordenadas inerciais num espaço-tempo plano.
2. Escreva a lei em coordenadas invariantes em uma forma tensorial, ou seja, expressar todas as leis da física na forma tensorial para que elas tenham a mesma forma independente do sistema de coordenadas, isso é conhecido como *princípio da covariância geral*
3. Verifique que a lei resultante mantém-se verdadeira em espaço-tempo curvo.

4.2 Movimento de partículas no espaço-tempo curvo

Para construir as equações de Einstein, primeiramente analisa-se o comportamento de uma partícula no espaço-tempo curvo e como será possível escrever as equações para descrevê-la. No espaço-tempo plano a métrica é $\eta_{\mu\nu}$, métrica de Minkowski. Já para o espaço-tempo curvo, ou de uma forma generalizada, a métrica é $g_{\mu\nu}$, e trocam-se as derivadas parciais ∂_μ pelas derivadas covariantes ∇_μ , que generalizam o conceito das derivadas como visto no Capítulo 3 para um espaço \mathbb{R}^n . As partículas livres no espaço-tempo plano irão ter suas trajetórias sendo retas. Já para a RG , generaliza-se o conceito das geodésicas, o qual se faz útil para um espaço-tempo arbitrário (que esteja em qualquer sistema de coordenadas). Quando as partículas-testes ou livres estão sujeitas a ação gravitacional (livres de outras forças) elas descreverão seu movimento seguindo geodésicas no espaço-tempo. Então, sempre será possível encontrar um sistema de coordenadas (referencial em queda livre), em que a partícula esteja parada. Esse movimento pode ser descrito utilizando a mecânica newtoniana, como na equação (4.2)

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} = 0 \quad (4.2)$$

Porém, essa representação não servirá para o que é preciso, pois não serve para um sistema de coordenadas gerais. Uma equação tensorial será necessária, dessa maneira já é possível ver a receita dita, aparecendo a necessidade do uso de uma forma tensorial. Embora a primeira derivada $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$ seja formada por componentes de um vetor bem definido, as

componentes da segunda derivada não serão bem definidas. Para achar uma equação que seja geral, pode-se fazer o uso da regra da cadeia, escrevendo:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} = \frac{dx^\nu}{d\lambda} \partial_\nu \frac{dx^\mu}{d\lambda} \quad (4.3)$$

Agora é preciso transformá-la numa equação tensorial passando a derivada parcial para a derivada covariante 3.4.

$$\frac{dx^\nu}{d\lambda} \partial_\nu \frac{dx^\mu}{d\lambda} \rightarrow \frac{dx^\nu}{d\lambda} \nabla_\nu \frac{dx^\mu}{d\lambda} \rightarrow \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \quad (4.4)$$

O resultado acima mostra uma generalização do movimento de uma partícula-teste em um referencial qualquer, levando a concluir que a partícula está num movimento geodésico, e os símbolos de Christoffel trazem todas as forças inerciais incluídas neles. É necessário mostrar que esse resultado é válido para a gravidade Newtoniana. Assume-se para isso que as partículas se movimentam com velocidades $v \ll c$, podendo utilizar a aproximação em campos fracos, onde é possível decompor a métrica que se encontra dentro dos símbolos de Christoffel escrevendo-a como $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ sendo $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ e estático (que não varia no tempo), onde $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$. A partir do fato de que as partículas se movem devagar é possível expressar que

$$\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dt}{d\tau} \quad (4.5)$$

então a equação da geodésica 3.9 ou 4.4 pode ser escrita como sendo:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad (4.6)$$

Usando as considerações acima do campo estático, os símbolos de Christoffel se tornam relevantes apenas em Γ_{00}^μ .

$$\Gamma_{00}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (\partial_0 g_{\lambda 0} + \partial_0 g_{0\lambda} - \partial_\lambda g_{00}) = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\lambda g_{00} \quad (4.7)$$

A partir do fato de estar em um campo fraco e sabendo que o inverso da métrica $g_{\mu\nu}$ é

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$$

onde $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho} \eta^{\sigma\nu} h_{\rho\sigma}$, com a métrica de Minkowski é possível subir ou descer os índices. O símbolo de Christoffel para a primeira ordem de $h_{\mu\nu}$, é

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\lambda} \partial_\lambda h_{00} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \quad (4.8)$$

A equação da geodésica se torna:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda h_{00}. \quad (4.9)$$

Usando o fato de que $\partial_0 h_{00} = 0$, para o índice $\mu = 0$ tem-se que

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0$$

O que implica então que $\frac{dt}{d\tau}$ é constante. Para examinar as coordenadas espaciais, recorre-se que as componentes de $\eta_{\mu\nu}$ são apenas aquelas de uma matriz identidade 3 x 3. Por isso reescrevendo 4.9, chega-se em

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \partial_i h_{00}. \quad (4.10)$$

Dividindo os dois lados de 4.10 da equação por $\left(\frac{dt}{d\tau} \right)$, consegue-se converter a derivada do lado esquerdo de $\tau \rightarrow t$, deixando apenas

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{1}{2} \partial_i h_{00}. \quad (4.11)$$

Vê-se uma similariedade com a teoria da gravitação de Newton. Comparando a equação 4.11 com $a = -\nabla\phi$, elas são análogas, assim

$$h_{00} = -2\phi \quad (4.12)$$

ou usando a métrica $g_{\mu\nu}$

$$g_{00} = -(1 + 2\phi) \quad (4.13)$$

4.3 Tensor Energia Momentum

Agora vamos generalizar o conceito da fonte de matéria e energia que irá contribuir para a geração da curvatura do espaço-tempo. Considerando uma coleção de partículas que vão constituir um fluido, de modo que haja um referencial onde elas todas estarão em repouso, denomina-se esse conjunto de "poeira" ou matéria, tal que o observador se movimentando junto com um elemento de fluido não observa um movimento aleatório das partículas, o movimento delas terá a mesma velocidade do elemento do fluido como um todo. A densidade de repouso é a quantidade de partículas por unidade de volume, sendo medida no referencial de repouso do elemento de fluido $n = \frac{N}{V}$. Caso as partículas não estejam em repouso num referencial, sua densidade mudará, devido ao volume que será reduzido pelo fator de Lorentz (γ), logo, é possível escrever a densidade como sendo $n\gamma$. Isso indica que a densidade de número num referencial qualquer pode ser escrita como nu^0 , onde n é a densidade de número de repouso e u^0 a primeira componente da quadri-velocidade dos elementos desse fluido. O quadri-vetor pode ser dado por

$$N^\mu = nu^\mu \quad (4.14)$$

A componente N^i representa o fluxo de partículas através de uma superfície cruzando uma unidade de área por unidade de tempo. Cada observador pode inferir o conteúdo da densidade de fluxo de número de partículas em seu referencial, sendo que

$$\vec{N} \cdot \vec{N} = \eta_{\mu\nu} N^\mu N^\nu = -n^2 \quad (4.15)$$

A poeira foi caracterizada por meio da densidade de partículas, mas precisamos identificar a energia momentum, os quais serão as fontes geradoras da curvatura e conseqüentemente do campo gravitacional. Para a relatividade especial, a energia pode ser dada retomando o valor de c , para cada partícula sendo m (mc^2), e a densidade de energia é escrita $\epsilon = nm$. Não é possível representar a densidade de energia como componente de apenas um vetor, precisará ser representada por uma componente de um tensor que seja escrito da seguinte forma $T^{\mu\nu}$, um tensor de rank 2 (0, 2). Assim será possível generalizar a densidade de momentum, fluxo de momentum e fluxo de energia num só objeto matemático.

Todas essas quantidades estarão contidas neste tensor. A quantidade de $T^{\mu\nu}$ dá o fluxo da componente μ de momentum através de uma superfície x^ν constante; T^{00} dá a densidade de energia; T^{0i} dá o fluxo de energia através da superfície com $x^\nu = cte$; T^{i0} dá a densidade da componente i do momentum; T^{ij} dá o fluxo de umi através da superfície com x^j constante, podendo ser pensado como

$$\Delta p^\alpha = T^{\alpha\beta} \eta_\beta \Delta \quad (4.16)$$

As componentes T^{ij} representam o tensor de estresse, a força exercida sobre uma área.

$$\Delta F^i = T^{ij} n_j \Delta A \quad (4.17)$$

Na mecânica clássica, T^{ij} é chamado tensor de estresse. Para a poeira pode-se definir o tensor $T = \vec{p} \otimes \vec{N} = mn\vec{U} \otimes \vec{U} = \epsilon \vec{U} \otimes \vec{U}$, a componente $T^{00} = mn$. Escrevendo componentes do tensor que descreverá a "poeira" $T_{\mu\nu} = \epsilon U^\mu U^\nu$. O tensor de energia momentum é um tensor simétrico, ou seja, ao fazer a inversão dos índices ele não irá alterar o sinal. Agora generalizando não somente para a "poeira", mas para quaisquer fluidos (fluidos gerais), também levando em consideração que essas partículas estejam com velocidade aleatórias e as várias forças entre elas poderão contribuir com energias potenciais, a seguinte interpretação física para as componentes do tensor será

- T^{00} é a densidade de energia = ϵ
- T^{0i} é o fluxo de energia podendo ser a condução de calor em um referencial onde a partícula acelerada esteja em repouso por um momento (referencial MCRF ver [7])
- T^{i0} é a densidade de momentum, que é igual o fluxo de energia
- T^{ij} é o tensor de estresse e representa forças entre elementos de fluidos que sejam adjacentes.

Agora é importante mostrar a conservação dessas quantidades, para que possam realmente obedecer as leis de conservação.

4.3.1 Leis de Conservação

No espaço plano a energia e o momentum são conservados satisfazendo a equação 4.18:

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0 \quad (4.18)$$

O índice α representa 4 leis de conservação, sendo 3 para o momentum e 1 para a energia. A componente 0 dará a seguinte equação para a conservação

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\pi} = 0 \quad (4.19)$$

Onde $\vec{\pi}$ é a densidade de momentum e ϵ é a densidade de energia. Integrando a equação 4.19 encontra-se que a taxa de variação da energia é igual ao fluxo de energia para fora do volume da superfície que esteja sendo considerada na integração.

$$\frac{\partial \pi^i}{\partial t} = -\partial_j T^{ij} = \phi^i \quad (4.20)$$

A taxa de variação do momentum será uma força, a densidade de momentum será uma densidade de força denotada por ϕ^i . Já a densidade de partículas e o fluxo devem variar ponto a ponto, mas deve ser feito de forma que o seu número total seja conservado. Escrevendo a equação da continuidade, já conhecida no eletromagnetismo por exemplo:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \nabla \cdot N = 0 \quad (4.21)$$

Para ver realmente a conservação do número de partículas, integra-se 4.21 num volume V :

$$\frac{d}{dt} \int_V N d^3x + \int_{\partial V} \vec{N} \cdot d\vec{A} \quad (4.22)$$

na qual usa-se o Teorema de Gauss. A primeira integral é o número de partículas no volume V , e a segunda integral é a taxa com que as partículas cruzam a superfície que cerca o volume, ou seja, o fluxo das partículas.

A expressão diz que a taxa de variação do número de partículas dentro do volume é igual a taxa que essas partículas irão cruzar a superfície. Escrevendo o tensor de energia-momentum para um fluido perfeito no espaço plano tem-se:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) U^\mu U^\nu + p\eta^{\mu\nu} \quad (4.23)$$

Para um espaço curvo troca-se apenas a métrica, usando a métrica mais geral

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu} \quad (4.24)$$

Onde U^μ e U^ν nas duas equações acima são a quadrivelocidade do fluido, ρ e p são as densidades de energia e momentum.

Dadas as seguintes expressões acima, o lado direito das equações de Einstein está parcialmente construído. Agora precisa-se encontrar o lado esquerdo, que é a parte da geometria do espaço-tempo. Não é possível derivar as equações de Einstein a partir de primeiros princípios, mas pode ser motivada a partir das generalizações já feitas.

4.4 Equações de Campo de Einstein

Vamos começar usando a equação de Poisson, que é:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad (4.25)$$

O objetivo será generalizar 4.25 para um espaço-curvo. O lado direito é generalizado usando o tensor de energia-momentum 4.24, e para o lado esquerdo é necessário encontrar algo que tenha as mesmas características e seja um operador diferencial de segunda ordem agindo sobre um potencial (gravitacional). Essa generalização tomará a forma de uma equação tensorial, respeitando o princípio da covariância geral. O potencial gravitacional será trocado pelo tensor métrico, sendo $g_{00} = -(1 + 2\phi)$, relacionando-se a perturbação da métrica com o potencial Newtoniano. Uma forma preliminar da equação 4.25 pode ser dada por

$$[\nabla^2 g]_{\mu\nu} \propto T_{\mu\nu} \quad (4.26)$$

mas sendo completamente tensorial, já que o lado esquerdo nos sugere que precisamos de um tensor simétrico $(0, 2)$ que é composto por derivadas de segunda ordem da métrica. Uma primeira opção seria a ação do d'Alembertiano $\square = \nabla^\mu \nabla_\mu$ na métrica $g_{\mu\nu}$, mas isto é automaticamente zero pela compatibilidade da métrica. Felizmente, há uma quantidade que já foi apresentada e que é construída a partir das derivadas primeira e segunda da métrica: o tensor de Riemann 3.14, $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$. Relembrando que o tensor de Riemann é construído a partir dos símbolos de Christoffel e das suas derivadas primeiras, e os símbolos de Christoffel, como visto, são construídos da métrica e suas derivadas primeiras, o que faz com que o tensor de Riemann então contenha segundas derivadas da métrica $g_{\mu\nu}$. Apesar do tensor de Riemann não ter o número ideal de índices que é necessário, sendo um tensor $(1, 3)$, há uma contração para que alcance o rank 2, o qual chama-se tensor de Ricci 3.23 ($R_{\mu\nu}$), o qual supõe que as equações do campo gravitacional são

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (4.27)$$

κ é uma constante que será determinada mais adiante. Einstein primeiramente sugeriu que poderia ser essa equação. Porém ela não conserva a energia. A conservação da energia

implicaria que:

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0 \quad (4.28)$$

e

$$\nabla^\mu R_{\mu\nu} = 0 \quad (4.29)$$

mas a partir da identidade de Bianchi satisfeita pelo tensor de Riemann implica-se que:

$$\nabla^\mu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \nabla_\nu R \quad (4.30)$$

isso implicaria que $R = cte$ o que levaria a $R = 0$ e que $g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = 0$ sendo uma condição muito restritiva para o tensor energia-momentum, levando a condição de que ele seria constante através do espaço-tempo. Isto é altamente contraditório já que para o vácuo $T = 0$ e na matéria $T \neq 0$, será necessário ir mais a fundo. Usando a identidade de Bianchi, e eliminando a equação 4.27, obtemos uma nova solução, onde definimos uma nova quantidade tensorial

$$\nabla^\nu \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = 0 \quad (4.31)$$

Os termos entre parênteses são definidos como o tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (4.32)$$

o qual irá obedecer agora a conservação de energia, $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$, sendo levado a escrever então

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (4.33)$$

como uma equação de campo para a métrica. A equação 4.33 satisfaz todos os requisitos impostos: o lado direito é uma expressão covariante da densidade de energia e momentum na forma de tensor simétrico $(0, 2)$ sendo conservado; o lado esquerdo é um tensor simétrico de rank 2 construído a partir da métrica e das suas primeiras e segundas derivadas. Agora só falta encontrar a constante κ que se encaixe para que as equações de Einstein estejam completa. Para descobrir o valor de κ que se ajuste, pode-se usar o limite Newtoniano, pois as equações de Einstein serão uma generalização da gravitação Newtoniana. Contraíndo os dois lados da equação 4.33 nas quatro dimensões

$$R = -\kappa T \quad (4.34)$$

e reescrevendo-a de uma maneira diferente obtemos

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right), \quad (4.35)$$

que é a mesma equação 4.33. Vamos agora aplicar as condições da gravidade Newtoniana, onde o campo é fraco, independente do tempo e as partículas (fluido) estão se movendo com baixas velocidades. Considere o tensor de energia momentum sendo a fonte de um

fluido perfeito, como já visto tem-se que o tensor de energia momentum da "poeira" é dado por

$$T_{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu \quad (4.36)$$

Este fluido pode ser um corpo massivo, como a Terra ou o Sol, e vamos trabalhar no referencial de repouso dele, no qual a quadrivelocidade pode ser escrita como

$$U^\mu = (U^0, 0, 0, 0) \quad (4.37)$$

A componente temporal pode ser fixada usando a condição de normalização $g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = -1$. No limite de campo fraco a componente da métrica é

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 + h_{00} \\ g^{00} &= -1 - h_{00} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Usando a condição de normalização, a componente U^0 fica

$$U^0 = (1 + h_{00})^{1/2} \quad (4.39)$$

Expandindo a expressão acima em primeira ordem de $h_{\mu\nu}$, tem-se

$$U^0 = 1 + \frac{1}{2}h_{00} \quad (4.40)$$

Colocando a quadrivelocidade em 4.36 e a densidade de energia sendo considerada pequena (espaço-tempo será plano quando ρ tender a zero), para a simplificação $U^0 = 1$ e $U_0 = -1$, então

$$T_{00} = \rho \quad (4.41)$$

e as outras componentes desaparecem, nesse limite a energia de repouso será maior que os outros termos presentes em $T_{\mu\nu}$, e o foco será sobre $\mu = 0$ e $\nu = 0$. O traço para a menor ordem pode ser dado por

$$T = g^{00}T_{00} = -T_{00} = -\rho \quad (4.42)$$

A partir desses resultados é possível voltar a 4.35 e substituindo com as devidas aproximações, o tensor $R_{\mu\nu}$ é dado por

$$R_{00} = \frac{1}{2}\kappa\rho \quad (4.43)$$

A equação acima relaciona as derivadas da métrica contidas em R_{00} com a densidade de energia ρ . Para encontrar a forma explícita, faz-se o uso da equação que $R_{00} = R^\lambda{}_{0\lambda 0}$, precisando apenas de $R^i{}_{0i0}$, pois $R^0{}_{000} = 0$. Tendo que o tensor de Riemann será

$$R^i{}_{0j0} = \partial_j\Gamma^i{}_{00} - \partial_0\Gamma^i{}_{j0} + \Gamma^i{}_{j\lambda}\Gamma^\lambda{}_{00} - \Gamma^i{}_{0\lambda}\Gamma^\lambda{}_{j0} \quad (4.44)$$

O segundo termo na expressão acima é uma derivada no tempo, portanto dadas as condições, assumindo o campo estático, o termo se anula. O terceiro e quarto termo serão

negligenciados também, pois são da forma $(\Gamma)^2$, e Γ é de primeira ordem na perturbação da métrica, como necessita-se de termos de primeira ordem, fica-se apenas com

$$R^i{}_{0j0} = \partial_j \Gamma_{00}^i \quad (4.45)$$

Resolvendo, tem-se

$$\begin{aligned} R_{00} &= R^i{}_{0i0} \\ &= \partial_i \left[\frac{1}{2} g^{i\lambda} (\partial_0 g_{\lambda 0} + \partial_0 g_{0\lambda} - \partial_\lambda g_{00}) \right] \end{aligned} \quad (4.46)$$

O primeiro e segundo termos são derivadas no tempo, então são nulos, restando apenas

$$\begin{aligned} &= \partial_i \left(-\frac{1}{2} g^{i\lambda} \partial_\lambda g_{00} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_i \partial_j h_{00} \\ &= -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} \end{aligned} \quad (4.47)$$

Igualando a equação 4.43 com a equação 4.47 no limite Newtoniano encontra-se o seguinte

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} \\ \frac{1}{2} \kappa \rho &= -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} \\ \nabla^2 h_{00} &= -\kappa \rho \end{aligned} \quad (4.48)$$

A equação acima é exatamente a equação de Poisson 4.25, pode-se ver que as equações de Einstein 4.33 retornam ao limite Newtoniano. Partindo de 4.12, será possível encontrar a constante para a equação de Einstein.

$$\begin{aligned} -\nabla^2 2\phi &= -\kappa \rho \\ \nabla^2 \phi &= \frac{\kappa \rho}{2} \\ \nabla^2 \phi &= \frac{\kappa \rho}{2} = 4\pi G \rho \\ \nabla^2 \phi &= 8\pi G \rho \end{aligned} \quad (4.49)$$

Então, $\kappa = 8\pi G$, colocando com todas as constantes $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$. Reescrevendo enfim as equações de Einstein em sua forma covariante

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (4.50)$$

usando as unidades geometrizadas, onde $G = c = 1$ (nos próximos capítulos serão adotadas essas unidades, para facilitar o desenvolvimento), chega-se às equações de campo de Einstein, ou às equações de campo de Einstein

$$\mathbf{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathbf{R} \mathbf{g}_{\mu\nu} = 8\pi \mathbf{T}_{\mu\nu} \quad (4.51)$$

As equações de Einstein são um conjunto de 10 equações parciais não lineares, independentes, sendo uma equação tensorial. Nas palavras de John Archibald Wheeler (físico norte-americano que trabalhou com RG): "*A matéria diz ao espaço-tempo como se curvar e o espaço-tempo diz à matéria como se mover*". Parafraseando, essa equação dá a condição de explicar como a matéria vai se curvar próximo a um objeto massivo como o Sol, ou uma Galáxia, dizendo como as partículas irão se mover ao longo das geodésicas. Em algumas situações será útil escrever 4.51 de uma outra forma. Partindo de que $R = -\kappa T$, com $R_{\mu\nu}$ ficando da seguinte forma

$$R_{\mu\nu} = 8\pi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) \quad (4.52)$$

Quando as equações de Einstein forem tratadas no vácuo, onde $T_{\mu\nu} = 0$ (por exemplo, exteriormente a uma estrela ou planeta) o lado direito de 4.52 irá zerar e resultará em

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (4.53)$$

Como toda a equação na física, o desejo é encontrar a solução dela, mas 4.51 não é tão simples como algumas equações encontradas na física, por isso precisam ser feitas algumas simplificações, colocando algumas condições iniciais. As duas soluções que serão tratadas nos próximos capítulos serão a *Solução de Schwarzschild* e a *Gravidade Linearizada*. A primeira encontrada pelo físico alemão Karl Schwarzschild em 1915, logo após a publicação dos trabalhos de Einstein, no qual ele irá tratar de uma solução com simetria esférica (sem rotação) no vácuo para a equação de Einstein. A segunda, proposta pelo próprio Einstein, trata a métrica como duas partes: a primeira sendo a métrica de Minkowski e a outra, uma pequena perturbação. Essa segunda solução aproximada dá origem às Ondas Gravitacionais.

Obs: *Há outras formas de se chegar nas equações de Einstein. A utilizada nesse capítulo seria a mais intuitiva para um estudante de graduação que já tenha visto mecânica clássica, mas as referências [8, 9] mostram outras formas, talvez mais elegantes, de se chegar nessas equações.*

5 Solução de Schwarzschild

A partir da solução de Schwarzschild será possível entender o movimento das partículas que se movem no vácuo próximas a objetos massivos esféricos. Além disso, a própria existência de buracos negros poderá ser obtida, e saberemos a razão da órbita do planeta Mercúrio não poder ser explicada através da Mecânica Newtoniana. As referências [8, 4] foram utilizadas para a compreensão desse assunto.

5.1 Métrica de Schwarzschild

A solução de Schwarzschild será a única solução para as equações de Einstein no vácuo esfericamente simétrica. Com ela é possível descrever o espaço-tempo ao redor da Terra e do Sol (assumindo que as rotações são pequenas) e também irá levar a descoberta da existência de singularidades físicas, geradas pelos buracos negros. O desejo é encontrar a métrica, que descreva a geometria do espaço-tempo fora de um objeto massivo esférico no vácuo, e com as condições iniciais mencionadas, sendo que $R_{\mu\nu} = 0$ (solução exterior). Dizer que seja estático é dizer que a métrica é independente da coordenada temporal, e que não tem termos cruzados ($dt dx^i + dx^i dt$) na métrica. Essa última condição faz sentido ao pensar que ao realizar uma inversão temporal $t \rightarrow -t$, o termo t se mantém invariante, então a solução espera-se que seja independente do tempo. Impondo a simetria esférica, é possível escrever a métrica de Minkowski nas coordenadas esféricas, tomando que $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$, e escrevendo o elemento de linha correspondente

$$ds_{Mink}^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (5.1)$$

para facilitar a notação, chame $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$. Um requisito para que a simetria esférica seja preservada é que se mantenha a forma do termo $d\Omega^2$, isso leva com que a esfera seja perfeitamente circular, o coeficiente do termo $d\phi^2$ deva ser $\sin^2 \theta$ vezes o termo de $d\theta^2$, mas sendo livre para multiplicar todos os termos por coeficientes separados, desde que eles sejam apenas funções da coordenada radial r , como a seguinte expressão

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + e^{2\gamma(r)} r^2 d\Omega^2 \quad (5.2)$$

As funções são expressas como exponenciais para que a assinatura da métrica não mude, usando a mudança de coordenadas é feita uma simplificação para a métrica estática e esfericamente simétrica. Antes de usar as equações de Einstein, pode-se definir simultaneamente as coordenadas e a métrica como função destas coordenadas, ou seja, não sabendo o que é a coordenada radial realmente, é possível interpretar a solução que esteja em mãos. Definindo uma nova coordenada \bar{r} , onde

$$\bar{r} = e^{\gamma(r)} r$$

temos que

$$d\bar{r} = e^{\gamma(r)} dr + e^{\gamma(r)} r d\gamma = \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr}\right) e^{\gamma(r)} dr \quad (5.3)$$

Agora colocando a métrica na nova variável definida acima

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr}\right)^{-2} e^{(2\beta-2\gamma)} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 \Omega^2 \quad (5.4)$$

onde cada função de r é uma função de \bar{r} de uma maneira óbvia. Agora renomeando $\bar{r} \rightarrow r$:

$$\left(1 + r \frac{d\gamma}{dr}\right)^{-2} e^{(2\beta-2\gamma)} \rightarrow e^{2\beta} \quad (5.5)$$

Não há nada que proíba que essa mudança ocorra, são apenas rótulos, que não tem definições externas, então a métrica pode ser escrita como

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (5.6)$$

essa equação é a mesma que 5.2, exceto pelo fato de que não há mais a função $e^{2\gamma(r)}$, que foi eliminada ao escolher a coordenada radial tal que ela não exista. Considerando a métrica acima, iremos usar as equações de Einstein para encontrar quais são as funções $\alpha(r)$ e $\beta(r)$. A primeira coisa prática a se fazer é calcular os símbolos de Christoffel. Usando que os índices $(t, r, \theta, \phi) \rightarrow (0, 1, 2, 3)$, calculando para as coordenadas esféricas os símbolos

$$\Gamma_{tr}^t = \frac{1}{2} g^{t\delta} \left(\frac{\partial g_{r\delta}}{\partial x^t} + \frac{\partial g_{\delta t}}{\partial x^r} - \frac{\partial g_{rt}}{\partial x^\delta} \right) \quad (5.7)$$

Essa é a forma como serão calculados os símbolos de Christoffel, ciclando os índices até encontrar todas as combinações possíveis. Felizmente alguns são nulos, fazendo o cálculo explícito para um deles temos como exemplo

$$\Gamma_{tr}^t = \frac{1}{2} g^{tt} \left(\frac{\partial g_{rt}}{\partial x^t} + \frac{\partial g_{tt}}{\partial x^r} - \frac{\partial g_{rt}}{\partial x^t} \right) \quad (5.8)$$

O primeiro e o terceiro termos, como são termos fora da diagonal principal, se anulam.

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= \frac{1}{2} e^{-2\alpha(r)} \left(\frac{\partial}{\partial r} e^{2\alpha(r)} \right) \\ \Gamma_{tr}^t &= \frac{1}{2} e^{-2\alpha(r)} 2\alpha'(r) e^{2\alpha(r)} \\ \Gamma_{tr}^t &= \cancel{e^{-2\alpha(r)}} \alpha'(r) \cancel{e^{2\alpha(r)}} \\ \Gamma_{tr}^t &= \partial_r \alpha \end{aligned} \quad (5.9)$$

Esse é o primeiro símbolo de Christoffel, e existem mais oito, para os quais é apresentado abaixo apenas os resultados finais, mas seguem a mesma forma para serem calculados

$$\begin{aligned}
\Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{r} & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -re^{-2\beta} & \Gamma_{r\phi}^\phi &= \frac{1}{r} \\
\Gamma_{\phi\phi}^r &= -re^{-2\beta} \sin^2 \theta & \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta & \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\
\Gamma_{tt}^r &= e^{2(\alpha-\beta)} \partial_r \alpha & \Gamma_{rr}^r &= \partial_r \beta
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Quaisquer combinações de índices não escritos são nulos, ou são simétricos aos que já estão escritos.

Calculado os Γ , é possível descobrir as componentes do tensor de Riemann (a curvatura):

$$\begin{aligned}
R^t{}_{rtr} &= \partial_r \alpha \partial_r \beta - \partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 \\
R^t{}_{\theta t \theta} &= -re^{-2\beta} \partial_r \alpha \\
R^t{}_{\phi t \phi} &= -re^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_r \alpha \\
R^r{}_{\theta r \theta} &= re^{-2\beta} \partial_r \beta \\
R^r{}_{\phi r \phi} &= re^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_r \beta \\
R^\theta{}_{\phi \theta \phi} &= (1 - e^{-2\beta}) \sin^2 \theta.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Com as componentes do tensor de Riemann, o tensor de Ricci pode ser calculado

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= e^{2(\alpha-\beta)} \left[\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \alpha \right] \\
R_{rr} &= -\partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 + \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \beta \\
R_{\theta\theta} &= e^{-2\beta} [r(\partial_r \beta - \partial_r \alpha) - 1] + 1 \\
R_{\phi\phi} &= \sin^2 \theta R_{\theta\theta}
\end{aligned} \tag{5.12}$$

e por fim, calculando o escalar de curvatura R obtemos

$$R = -2e^{-2\beta} \left[\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} (\partial_r \alpha - \partial_r \beta) + \frac{1}{r^2} (1 - e^{2\beta}) \right] \tag{5.13}$$

O desejo seria que fosse possível igualar a zero o tensor de Ricci. Já que as componentes R_{tt} e R_{rr} desaparecem independentemente, pode-se escrever então que,

$$0 = e^{2(\beta-\alpha)} R_{tt} + R_{rr} = \frac{2}{r} (\partial_r \alpha + \partial_r \beta) \tag{5.14}$$

A partir disso, chega-se que $\alpha = -\beta + c$, onde c seria uma constante. Ao colocar esta constante igual a zero, rescalando a coordenada temporal por $t \rightarrow e^{-c}t$, obtém-se que

$$\alpha = -\beta$$

Retornando ao fato de que $R_{\theta\theta} = 0$, o qual agora é

$$e^{2\alpha} (2r \partial_r \alpha + 1) = 1 \tag{5.15}$$

A expressão acima vem de uma regra do produto, a qual seria

$$\partial_r(re^{2\alpha}) = 1 \quad (5.16)$$

Integrando dos dois lados em r , encontramos a seguinte solução

$$e^{2\alpha} = 1 - \frac{R_s}{r} \quad (5.17)$$

Onde R_s é uma constante, chamada de raio de Schwarzschild, com $\alpha = -\beta$ e a partir da equação acima, a métrica que era procurada fica

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (5.18)$$

Há uma melhor forma de resolver onde mantém-se as equações $R_{tt} = 0$ e $R_{rr} = 0$, para qualquer valor de R_s . Para encontrar o valor de R_s , volta-se ao limite de campo fraco, analisando a componente tt da métrica em volta de um ponto de massa, a qual satisfaz

$$g_{tt} = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

Portanto, a métrica deve se reduzir ao campo fraco quando $r \gg 2M$, mas para a componente tt as formas são as mesmas apenas é necessário identificar que

$$R_s = 2M$$

que pode ser pensado como a definição para o parâmetro M . A métrica então ficará

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (5.19)$$

a métrica 5.19 é a métrica de Schwarzschild, sendo M , a massa do objeto que gerará a curvatura no espaço-tempo. Para o caso de $M \rightarrow 0$, o espaço será plano, retornando a métrica de Minkowski. Uma outra maneira de recuperar a métrica de Minkowski é quando $r \rightarrow \infty$, ou seja, a fonte de curvatura está distante. Nas próximas seções será apresentada as implicações dessa métrica, e o que se pode explicar com ela.

5.2 Órbita de partículas testes

Na mecânica Newtoniana, as leis de conservação estão conectadas a existência de simetrias. Para que a energia seja conservada, a força precisa ser conservativa, a qual vem da derivada do potencial e esse mesmo potencial deve ser independente do tempo. Para o momentum linear ser conservado ao longo de uma direção particular, o potencial vai precisar ser constante. Para que o momentum angular seja conservado, o potencial deve ser esfericamente simétrico. Resumindo: a energia é conservada quando há uma simetria

sobre deslocamentos no tempo, o momentum linear é conservado quando há simetrias sobre deslocamentos no espaço e o momentum angular é conservado quando há simetrias nas rotações. Quantidades conservadas para o movimento de partículas testes não são esperadas num espaço-tempo geral onde não haja simetrias especiais. Uma métrica do espaço-tempo geral é dependente de todas as quantidades mencionadas acima. Caso haja simetria no espaço-tempo haverá a existência de uma lei de conservação, por exemplo, se a geometria do espaço-tempo é independente do tempo a energia das partículas testes será conservada. Para expressar quando uma quantidade é conservada é costume utilizar na RG a ideia dos vetores de Killing, que irão representar em qual direção ou em qual coordenada há simetria. Nessa direção a métrica não mudará, e pode-se denotar esses vetores como $\xi^\alpha = (0, 1, 0, 0)$ por exemplo. Resolver as equações da geodésica para a métrica de Schwarzschild não é uma tarefa fácil, como dito em [8], para isso é melhor fazer uso das simetrias presentes nela, as quais corresponderão aos vetores de Killing, sendo três para a simetria esférica e um para a translação temporal, cada um levando a uma constante de movimento para a partícula teste. Algumas propriedades que se pode tirar são:

- Independência temporal: a métrica é independente de t . Então, há um vetor de Killing associado a essa simetria, tendo a componente $\xi^\alpha = (1, 0, 0, 0)$.
- Simetria esférica: Sendo a métrica independente de ϕ , ela é invariante sobre rotações sobre o eixo z , sendo representado pelo vetor de Killing com componente $\eta^\alpha = (0, 0, 0, 1)$.

Com isso agora é possível encontrar como serão as órbitas das partículas testes, no campo gravitacional gerado pelo objeto de massa M . Sempre há uma constante de movimento para a geodésica onde a partícula se encontra. Usando da equação de Lagrange 5.20, onde a geodésica vem do princípio de extremização do tempo próprio,

$$-\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial(dx^\alpha/d\sigma)} + \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} \right) = 0 \quad (5.20)$$

Se a métrica for independente e portanto L uma lagrangeana qualquer e que seja independente da coordenada x^1 , então a quantidade $\partial L/\partial x^1 = 0$, então a equação 5.20 para o valor de $\alpha = 1$ fica

$$-\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial(dx^1/d\sigma)} \right) = 0 \quad (5.21)$$

O que implica em

$$= \frac{\partial L}{\partial(dx^1/d\sigma)} = -g_{1\beta} \frac{1}{L} \frac{dx^\beta}{d\sigma} = -g_{1\beta} \frac{dx^\beta}{d\tau} = -g_{\alpha\beta} \xi^\alpha u^\beta = -\xi \cdot u \quad (5.22)$$

sendo então conservado ao longo da geodésica, define-se que haverá então quantidades conservadas para qualquer sistema de coordenadas [4, 8], como sendo

$$\xi \cdot u = \text{const.} \quad (5.23)$$

as quantidades ao longo da geodésica serão dadas pela equação acima, Através da independência temporal e de ϕ do sistema de coordenadas esféricos usado na métrica 5.19 duas grandezas são conservadas

$$e = -\xi \cdot u = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} \quad (5.24)$$

$$l = \eta \cdot u = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\tau} \quad (5.25)$$

Sendo 5.24 a energia conservada (e) e 5.25 o momentum angular (l) conservado. A conservação do momentum angular implica que as órbitas estão num plano. Vamos considerar que ela esteja no plano equatorial onde o ângulo é $\theta = \frac{\pi}{2}$ e a velocidade na direção θ é $u^\theta = 0$. Usando a condição de normalização $g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = -1$, a métrica fica

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) (u^t)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} (u^r)^2 + r^2 (u^\phi)^2 = -1 \quad (5.26)$$

Usando as equações 5.24 e 5.25, é possível eliminar $\frac{dt}{d\tau}$ e $\frac{d\phi}{d\tau}$, então a métrica é escrita

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} e^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{l^2}{r^2} = -1 \quad (5.27)$$

Reescrevendo a equação acima obtém-se que

$$\frac{e^2 - 1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{l^2}{r^2} - 1\right) \right] \quad (5.28)$$

Chamando $\varepsilon = \left(\frac{e^2 - 1}{2}\right)$ sendo uma constante, e e é a energia total por unidade de massa, e o potencial efetivo fica sendo

$$V_{efe}(r) = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right) - 1 \right] = -\frac{M}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{Ml^2}{r^3} \quad (5.29)$$

Os termos $-\frac{M}{r}$ e $\frac{l^2}{2r^2}$ são termos oriundos da solução clássica para um sistema de duas partículas, já o termo $-\frac{Ml^2}{r^3}$ é o termo adicional vindo da métrica de Schwarzschild. Considerando agora novamente as unidades c e G , trocando t e τ para ct e $c\tau$, o potencial efetivo fica

$$V_{efe}(r) = \frac{1}{c^2} \left(-\frac{GM}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{GMl^2}{c^2 r^3} \right). \quad (5.30)$$

Analisando a órbita relativística é preciso considerar as propriedades do potencial efetivo

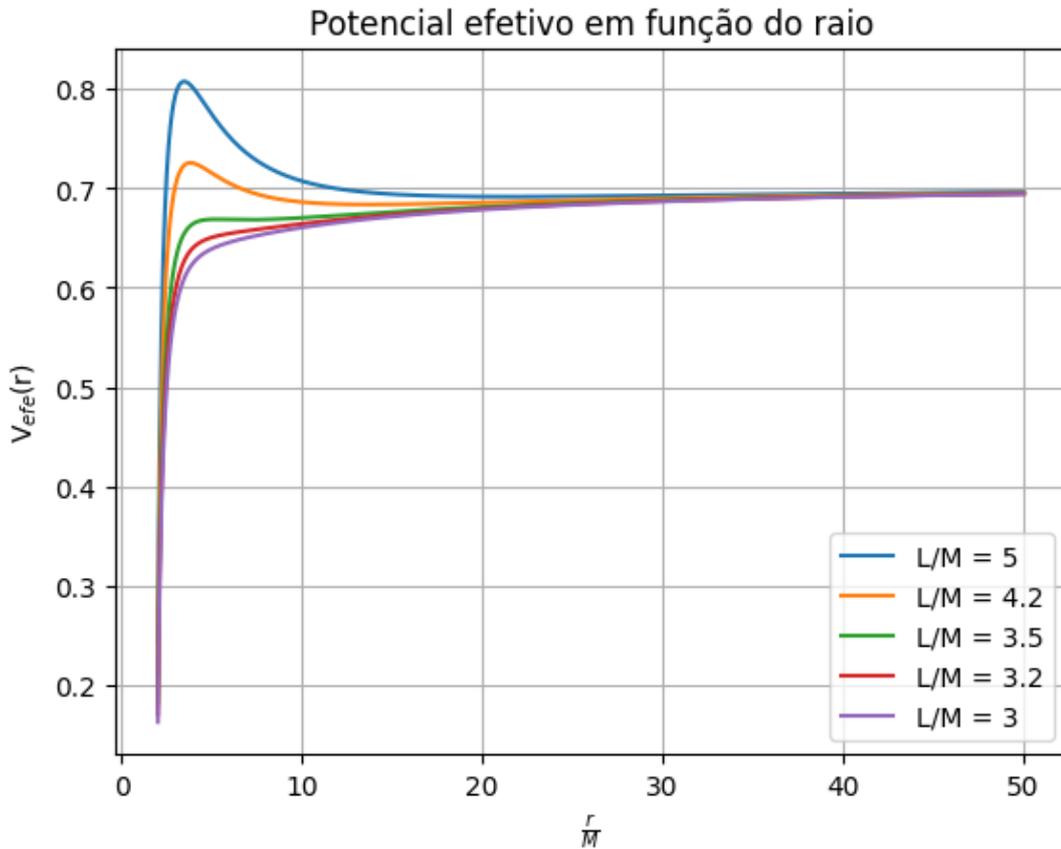
$$V_{efe}(r \rightarrow \infty) - \frac{M}{r} \quad V_{efe}(2M) = -\frac{1}{2} \quad (5.31)$$

A partir de 5.29, reescreve-se ela deixando-a da seguinte forma

$$V_{efe}(r) = \frac{1}{2} - \frac{M}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{Ml^2}{r^3} \quad (5.32)$$

a partir da equação acima é possível construir a seguinte figura 3, do potencial efetivo pela distância, onde o valor de $M = 1$, e para diferentes valores de l/M .

Figura 3 – Potencial efetivo para vários valores do momentum angular l .



Fonte: Figura produzida pelo autor com base em [4]

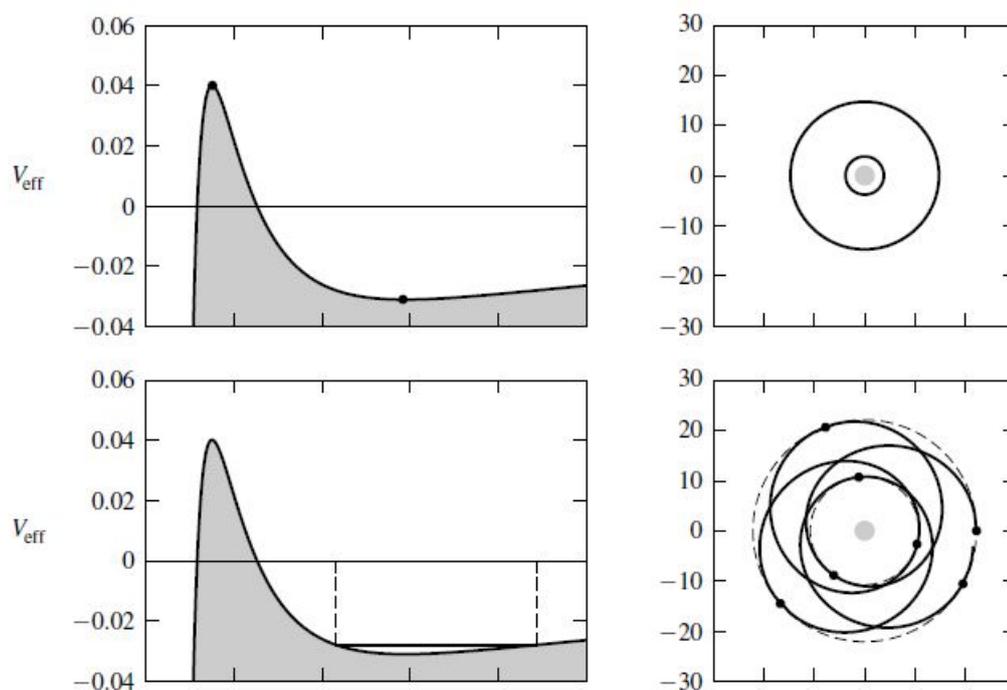
Para valores grandes de r tem-se que o potencial se aproxima do potencial Newtoniano $\frac{1}{r}$, mas quando r decresce o termo $\frac{1}{r^3}$ oriundo da correção relativística começa a ser efetivo. Os extremos para V_{efe} são encontrados resolvendo $\frac{dV_{efe}}{dr} = 0$. Teremos um mínimo local e um máximo, cujo o valor do raio circular da órbita pode ser dado por

$$r_c = \frac{l^2}{2M} \left[1 \pm \sqrt{1 - 12 \left(\frac{M}{l} \right)^2} \right] \quad (5.33)$$

Nas figuras 4 e 5 temos os quatro tipos de órbitas que podem ser possíveis na geometria descrita pela métrica de Schwarzschild. Tendo seus potenciais efetivos em função de r/M , e com valores de $l/M = 4.3$, as linhas horizontais representam o valores de $\varepsilon = (e^2 - 1)/2$. Na figura 4 vê-se na parte superior duas órbitas circulares, uma instável e outra estável, sendo indicado pelos pontos no gráfico do potencial efetivo. Já a parte inferior mostra

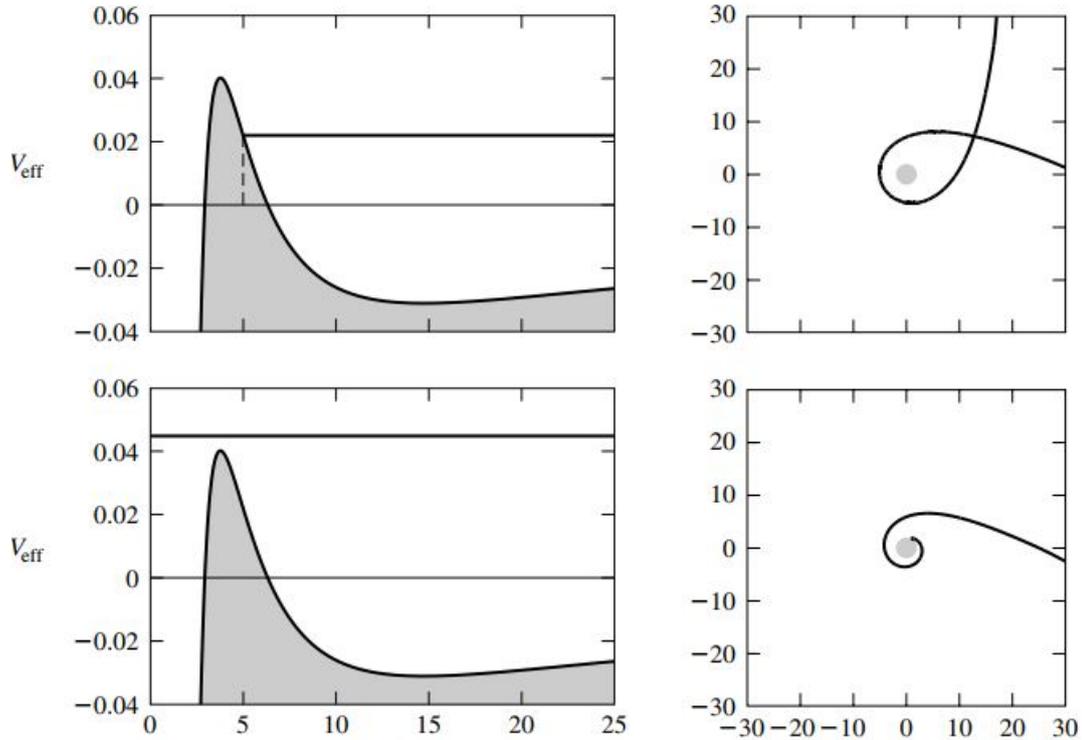
uma órbita fechada limitada pelas linhas tracejadas. Na figura 5 na parte superior vê-se uma partícula que vem do infinito, orbita o centro de atração e retorna para o infinito, na parte inferior a partícula também vem do infinito, porém acaba caindo em direção ao centro do objeto.

Figura 4 – Órbitas limitadas



Fonte: Imagem retirada de [4]

Figura 5 – Órbitas ilimitadas



Fonte: Imagem retirada de [4]

O exemplo mais simples de uma órbita é a *queda livre radial* de uma partícula vindo do infinito, com $l = 0$. Ela pode vir do infinito com vários valores de energia cinética, mas começando por um caso especial, onde a partícula se encontra em repouso tendo $dt/d\tau = 1$ no infinito, $e = 1$ e $l = 0$, a equação 5.28 fica

$$0 = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{M}{r} \quad (5.34)$$

podendo encontrar agora a quadrivelocidade da componente radial $dr/d\tau$, ficando

$$u^\alpha = \left(\left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1}, - \left(\frac{2M}{r} \right)^{1/2}, 0, 0 \right) \quad (5.35)$$

da equação 5.34,

$$r^{1/2} dr = -(2M)^{1/2} d\tau \quad (5.36)$$

Integrando os dois lados em r como função de τ o resultado é

$$r(\tau) = \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} (2M)^{1/3} (\tau_* - \tau)^{2/3} \quad (5.37)$$

onde τ_* é uma constante de integração, a qual fixa o tempo próprio quando $r = 0$. Para encontrar o tempo na métrica, é conveniente calcular t como função de r . Calculando dt/dr , com $e = 1$

$$\frac{dt}{dr} = - \left(\frac{2M}{r} \right)^{-1/2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \quad (5.38)$$

agora integrando obtemos

$$t = t_* + 2M \left[-\frac{2}{3} \left(\frac{r}{2M} \right)^{3/2} - 2 \left(\frac{r}{2M} \right)^{1/2} + \log \left| \frac{\left(\frac{r}{2M} \right)^{1/2} + 1}{\left(\frac{r}{2M} \right)^{1/2} - 1} \right| \right] \quad (5.39)$$

Algumas características importantes da órbita radial de queda livre podem ser vistas a partir de 5.37 e 5.39. Da equação 5.39 $r \rightarrow \infty$ e $t \rightarrow -\infty$, significando que a partícula está caindo para dentro do infinito. De 5.37 vê-se que de qualquer valor fixo para r na trajetória, é preciso então, apenas um tempo-próprio finito para chegar em $r = 2M$, mesmo embora que 5.39 mostre que é tomado uma quantidade infinita da coordenada tempo. Isto é uma indicação que as coordenadas na métrica, tem imperfeições em $r = 2M$.

Velocidade de escape: Seja um observador em uma posição estacionária num raio R da coordenada de Schwarzschild, e ele lança um projétil radialmente para fora com uma velocidade V , como medido pelo seu próprio referencial. Qual deve ser o valor dessa velocidade para que o projétil chegue ao infinito com velocidade $V = 0$? Calculando primeiro a energia necessária para que isso ocorra, usando a partir de 5.19, a componente da quadrivelocidade é $u_{obs}^t = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2}$,

$$\begin{aligned} E &= -p \cdot u_{obs} = -mu \cdot u_{obs} = -mg_{\alpha\beta} u^\alpha u_{obs}^\beta \\ &= -mg_{tt} u^t u_{obs}^t = -m \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} \end{aligned} \quad (5.40)$$

No referencial do observador a energia da partícula é relacionada com sua velocidade sendo $E = \frac{m}{\sqrt{1-V^2}}$, então igualando as duas energias, a velocidade de escape é

$$V_{esc} = \left(\frac{2M}{r} \right)^{1/2} \quad (5.41)$$

sendo o valor já conhecido da mecânica clássica.

5.2.1 Órbita circulares estáveis

As órbitas circulares estáveis irão ocorrer quando $r = r_{min}$, este raio irá decrescer com o decréscimo de l/M , mas as órbitas estáveis não são possíveis para raios arbitrariamente pequenos. De 5.33, a órbita circular estável mais interna, ou ISCO, irá ocorrer na geometria de Schwarzschild quando $l/M = \sqrt{12}$ no raio dado por

$$r_{ISCO} = 6M \quad (5.42)$$

A velocidade angular de uma partícula numa órbita circular, medida com respeito a um relógio estacionário, sendo τ o tempo próprio, é a seguinte

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi/d\tau}{dt/d\tau} = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{l}{e}\right) \quad (5.43)$$

Usando que ε é igual o valor do potencial efetivo no mínimo, a equação fica

$$e^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right)$$

e o potencial é mínimo no raio da órbita, levando numa relação entre r e l , ficando com

$$\frac{l}{e} = (Mr)^{1/2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \quad (5.44)$$

A velocidade angular fica

$$\Omega^2 = \frac{M}{r^3} \quad (5.45)$$

sendo análoga a terceira lei de Kepler, o período em coordenadas de Schwarzschild é $2\pi/\Omega$.

A quadrivelocidade de uma partícula em órbita circular é

$$u^\alpha = u^t(1, 0, 0, \Omega) \quad (5.46)$$

a partir do valor de Ω é possível determinar a quadrivelocidade pela condição de normalização $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1$, sendo \mathbf{u} os vetores da quadrivelocidade, sendo escrita como

$$u^t = \left(1 - \frac{2M}{r} - r^2\Omega^2\right)^{-1/2} = \left(1 - \frac{3M}{r}\right)^{-1/2} \quad (5.47)$$

5.2.2 Forma das órbitas

Para encontrar a forma das órbitas é preciso encontrar r como função de ϕ , ou ϕ como função de r . Usando que

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + V_{efe} \quad (5.48)$$

onde

$$l = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\tau}$$

resolvendo com $\theta = \frac{\pi}{2}$, para $\frac{d\phi}{d\tau}$, dividindo o primeiro pelo segundo

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{l}{r^2} \frac{1}{[2(\varepsilon - V_{efe}(r))]^{1/2}} = \pm \frac{l}{r^2} \left[e^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right) \right] \quad (5.49)$$

o sinal irá corresponder a que direção em ϕ a partícula move com o aumento de r . As órbitas são ditas próximas se a magnitude de ângulo que varrerá na passagem é 2π . Se não for 2π , então o ponto de retorno precessionará, e a quantidade de precessão da órbita é $\delta\phi_{prec} = \Delta\phi - 2\pi$. O ângulo de varredura entre sucessivos pontos de retorno r_1 e r_2 poderá ser escrito

$$\Delta\phi = 2l \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \left[e^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right) \right]^{-1/2} \quad (5.50)$$

onde r_1 e r_2 são pontos onde $dr/d\tau$ desaparecem ao longo da órbita. Para aplicações no sistema solar, $\Delta\phi$ precisa ser avaliado apenas em ordem $1/c^2$ depois da Newtoniana

$$\Delta\phi = 2l \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \left[c^2(e^2 - 1) + \frac{2GM}{r} - \frac{l^2}{r^2} + \frac{2GMl^2}{c^2 r^3} \right]^{-1/2} \quad (5.51)$$

Resolvendo e expandindo a integral para encontrar a correção relativística de primeira ordem para o resultado Newtoniano, obtemos

$$\delta\phi_{prec} = 6\pi \left(\frac{GM}{cl} \right)^2 \quad (5.52)$$

Com essa precisão pode-se determinar em termos de ϵ (excentricidade) e do eixo maior (a)

$$l^2 = \left(r^2 \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \approx \left(r^2 \frac{d\phi}{dt} \right)^2 = GMa(1 - e^2) \quad (5.53)$$

Assim, é possível encontrar o ângulo da precessão do periélio

$$\delta\phi_{prec} = \frac{6\pi G}{c^2} \frac{M}{a(1 - e^2)} \quad (5.54)$$

Essa é a precessão relativística do ponto de retorno da elipse Kepleriana. O efeito se torna maior para objetos próximos de objetos muito massivos, como o caso de Mercúrio. A precessão da órbita de Mercúrio acontece numa taxa de 43 arcseg a cada 100 anos.

5.3 Buraco Negro de Schwarzschild

Considerando um colapso gravitacional onde uma estrela, por exemplo, irá colapsar sobre si mesmo. O corpo colapsante e o espaço-tempo fora são esféricamente simétricos. Sendo o potencial fora independente do tempo para que a massa seja conservada. Pelo teorema de Birkhoff,¹ pode-se demonstrar que embora a distribuição de massa é dependente do tempo a geometria fora do colapso gravitacional esféricamente simétrico é independente do tempo na geometria de Schwarzschild. Na métrica de Schwarzschild é possível encontrar duas singularidades nas coordenadas, uma em $r = 2M$ e outra em $r = 0$, e é possível eliminar as singularidades se elas forem singularidades provenientes do sistema de coordenadas escolhido, mas se forem singularidades físicas, é provável que realmente esteja ocorrendo algo fisicamente no objeto nesse ponto. Haverá dois sistemas de coordenadas que ajudarão a eliminar a singularidade removível, o primeiro será as coordenadas de Eddington-Finkelstein e o outro as coordenadas de Kruskal-Szekeres.

5.3.1 Coordenadas Eddington-Finkelstein

Nessas coordenadas será trocada a coordenada temporal t por uma nova coordenada v definida por

$$t = v - r - 2M \log \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| \quad (5.55)$$

¹ Esse teorema não será demonstrado nesse trabalho mas na referência [8] há uma excelente demonstração.

Começando tanto por $r < 2M$ ou $r > 2M$ e transformando t em v , no elemento de linha, as coordenadas de Eddington-Finkelstein ficam

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 + 2dvdr + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (5.56)$$

Essa não é uma nova geometria, é a mesma geometria independente do tempo, e esfericamente simétrica, representada pela métrica de Schwarzschild 5.19, e a falta da singularidade em $r = 2M$ mostra que era apenas uma singularidade nas coordenadas. O elemento de linha 5.56 servirá para descrever a física fora, dentro e no raio de Schwarzschild. A não existência da singularidade em $r = 2M$ mostra que se um observador cair em direção a esse raio, não verá nada de especial no espaço-tempo local. Esse sistema se torna útil ao querer estudar o comportamento do colapso gravitacional. Em grandes valores de r a métrica irá se aproximar da métrica plana, tendo t trocado por $v - r$, pois o logaritmo em 5.55 se torna negligível comparado a r . A métrica não é diagonal, tendo termos mistos como $g_{vr} = g_{rv} = 1$, pois esse é o preço pago por tentar encontrar uma métrica não singular fazendo uma conexão entre a física em grandes valores e pequenos valores de r . A métrica nas coordenadas de Schwarzschild e de Eddington-Finkelstein são singulares em $r = 0$, pois nesse local a curvatura do espaço-tempo e as forças gravitacionais são infinitas. Para compreender melhor a forma dessa nova métrica é útil construir cones de luz dessa geometria, entendendo como funcionam os raios de luz radiais. Para isso precisamos das linhas de mundo para as quais $d\theta = d\phi = 0$ e $ds^2 = 0$. Nesse caso escrevemos 5.56 como

$$- \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 + 2dvdr = 0 \quad (5.57)$$

Dado que os raios radiais movem se ao longo de curvas onde $v = \text{const.}$, de 5.55, vê-se que para $r > 2M$ os raios de luz estão indo em direção a singularidade em $r = 0$, pois t aumenta, e r deve decrescer para que v se mantenha constante. Uma outra solução possível é

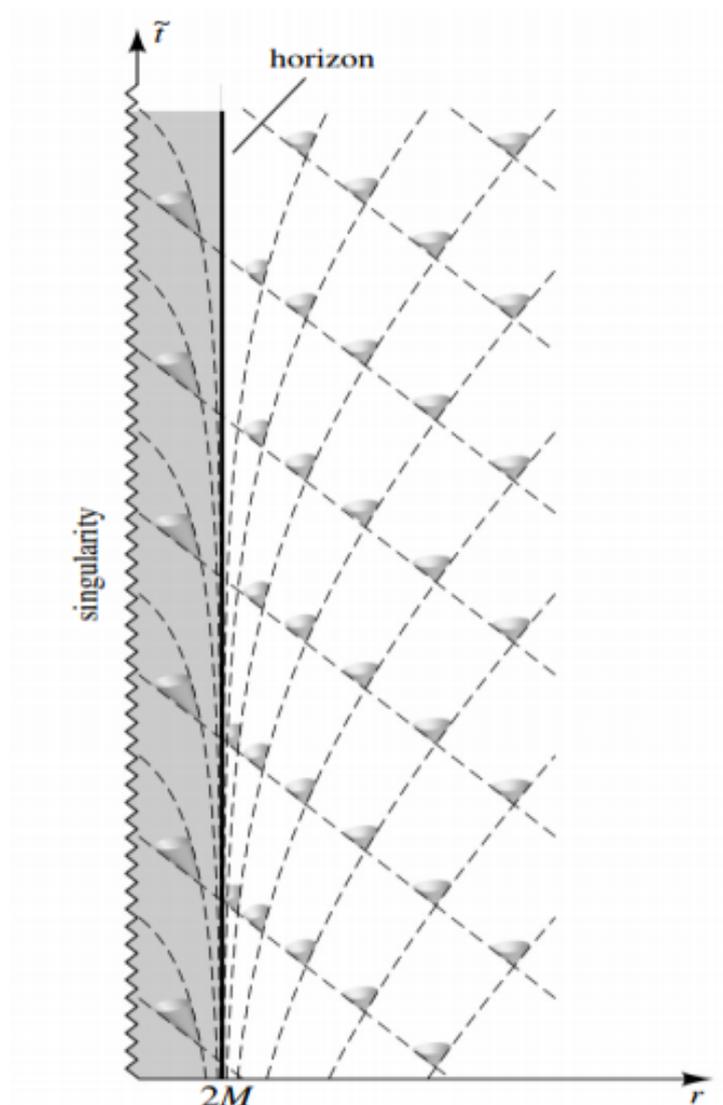
$$- \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv + 2dr = 0 \quad (5.58)$$

Solucionando a equação acima para $\frac{dv}{dr}$, o resultado encontrado é que os raios de luz vão se mover em curvas

$$v - 2 \left(r + 2M \log \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| \right) = \text{const.} \quad (5.59)$$

Quando o raio de luz está longe do objeto que será o buraco negro, ou seja $r > 2M$, o raio de luz está saindo, pois segundo a equação 5.59, $t = r + \text{constante}$ como mostra em 5.55. Quando $r < 2M$ os raios estão entrando pois r diminui para que o v aumente. Já em $r = 2M$ os raios de luz serão estacionários. A figura 6 é uma representação de um diagrama do espaço-tempo para essas coordenadas mostrando as linhas de mundo da geometria de Schwarzschild, plotadas nas coordenadas de Eddington-Finkelstein. Se os raios de luz estiverem indo para o infinito em $r < 2M$ eles irão colapsar na singularidade em $r = 0$, portanto só raios de luz que estejam em $r > 2M$ poderão escapar.

Figura 6 – Raios de luz em coordenadas de Eddington-Finkelstein



Fonte: Imagem retirada de [4]

Os outros raios radiais estão se movendo para fora a medida que os valores de r aumentam. Em contraste, para $r < 2M$, ambos os raios radiais de luz estão se movendo para dentro a medida que os valores de r ficam menores e eventualmente irão chegar na singularidade em $r = 0$. Na fronteira de $r = 2M$ há a separação das duas regiões, um raio radial se move para dentro enquanto o outro se mantém estacionário. A superfície em $r = 2M$ divide o espaço-tempo em duas regiões: a região fora de $r = 2M$ da qual a luz pode escapar para infinito e a região dentro $r = 2M$, onde a gravidade é tão forte que nem mesmo a luz pode escapar. Isto é a definição característica da geometria de um *buraco negro*. A superfície em $r = 2M$ é chamada de *horizonte de eventos*, ou horizonte do buraco negro.

Esse horizonte estará em $r = 2M$, sendo uma superfície tridimensional nula, com o vetor normal na direção de r e nulo. Uma vez que um observador passe pelo horizonte, não há mais possibilidade de retorno, sendo o horizonte estacionário, não expandirá, e será

gerado pelos raios estacionários. A singularidade $r = 0$ não é um lugar no espaço e sim um instante no tempo

5.3.2 Coordenadas Kruskal-Szekeres

Há mais um sistema de coordenadas que irá retirar a singularidade de 5.19, mas ela trará uma perspectiva diferente da física no buraco negro de Schwarzschild. Essas coordenadas serão denotadas por (V, U, θ, ϕ) , e escrevendo as transformações, primeiro para $r > 2M$,

$$U = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{\frac{r}{4M}} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) ; V = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{\frac{r}{4M}} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) \quad (5.60)$$

e agora para $r < 2M$ ficará

$$U = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{\frac{r}{4M}} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) ; V = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{\frac{r}{4M}} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \quad (5.61)$$

A geometria de Schwarzschild, usando essas coordenadas (trocando t e r por V e U), fica

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{2M}} (-dV^2 + dU^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (5.62)$$

Aqui, r é considerado como uma função de V e U , $r = r(V, U)$, definido implicitamente pela relação

$$\left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{\frac{r}{2M}} = U^2 - V^2 \quad (5.63)$$

As quais são derivadas das transformações de U e V . A métrica de Kruskal-Szekeres não é singular em $r = 2M$, mostrando de novo que a singularidade na métrica de Schwarzschild é apenas uma singularidade na coordenada. Também é possível obter um diagrama tipo cone de luz para representar essa geometria, o diagrama de Kruskal. As linhas com r constante são curvas de constante $U^2 - V^2$ e por isso hipérbolas no plano UV . O valor de $r = 2M$ corresponde a ambas linhas retas $V = \pm U$. O valor $r = 0$ corresponde à hipérbole

$$V = +\sqrt{U^2 + 1} \quad (5.64)$$

De maneira similar, as linhas com t constante podem ser colocadas no diagrama de Kruskal (ver figura 7). Através das transformações, encontra para $r > 2M$

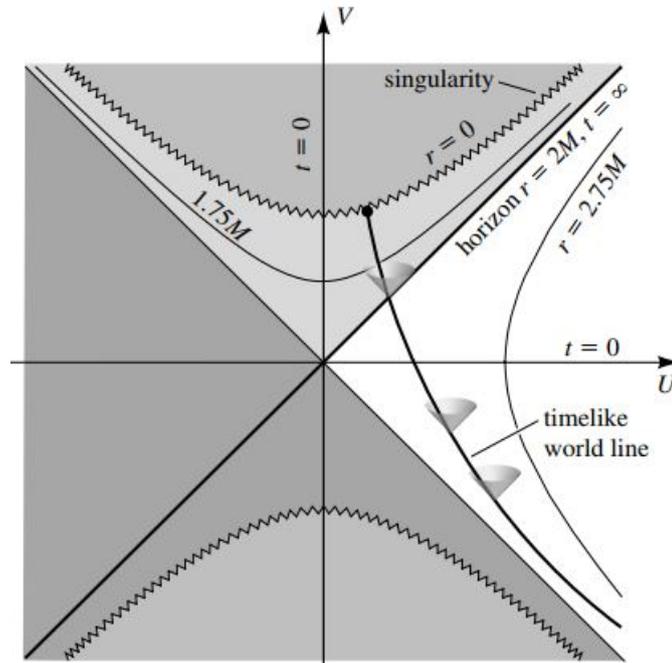
$$\tanh\left(\frac{t}{4M}\right) = \frac{V}{U} \quad (5.65)$$

e para $r < 2M$

$$\tanh\left(\frac{t}{4M}\right) = \frac{U}{V} \quad (5.66)$$

Assim o diagrama fica

Figura 7 – Diagrama de Kruskal



Fonte: Imagem retirada de [4]

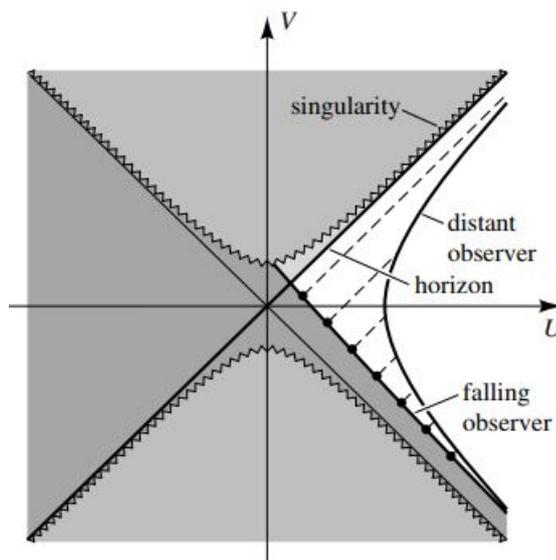
Linhas com t constante (valor constante de U/V) são linhas retas através da origem. O valor $t = +\infty$, corresponde a $U = V$, em contraste $t = -\infty$ corresponde a $U = -V$. O valor $t = 0$ corresponde a linha $V = 0$ para $r > 2M$ e a $U = 0$ para $r > 2M$. O quadrante não pintado do diagrama de Kruskal $U > 0$, $-U < V < U$ é coberto pelas coordenadas de Schwarzschild $-\infty < t < +\infty$, $2M < r < \infty$. A região inteira coberta pela coordenada Eddington-Finkelstein $\infty < v < +\infty$, $0 < r < \infty$ é mapeado dentro da parte do diagrama com $V > -U$. Essa é a região através da qual as linhas de mundo da superfície colapsante da estrela movem-se, apenas uma parte de fora da superfície da estrela é relevante para o colapso esférico.

Para todo os valores de (V, U, θ, ϕ) a componente g_{VV} da métrica é negativa, mas g_{UU} , $g_{\theta\theta}$ e $g_{\phi\phi}$ são sempre positivas. A direção ao longo de V é então tipo-tempo, e a direção ao longo U é sempre tipo-espaco. Contrastando isso com as coordenadas de Schwarzschild: aumentando t é uma direção tipo-tempo para $r > 2M$ mas um tipo-espaco para $r < 2M$; aumentando r é uma direção tipo-espaco para $r > 2M$ mas tipo-tempo para $r < 2M$. Os raios de luz são especialmente fáceis de analisar nas coordenadas de Kruskal. Raios de luz radiais movem-se ao longo de curvas nas quais $d\theta = d\phi = 0$ (radial) e $ds^2 = 0$ (nulo). Das coordenadas de Kruskal, estas são curvas onde

$$V = \pm U \pm const. \quad (5.67)$$

Os raios de luz radiais se movimentam ao longo de linhas que estão 45° no diagrama de Kruskal, e os cones de luz em cada ponto no diagrama fazem um ângulo de 45° com a

Figura 8 – Linhas de mundo do diagrama de Kruskal



Fonte: Imagem retirada de [4]

vertical. As linhas de mundo de partículas são tipo-tempo e devem permanecer dentro do cone de luz, passando através de cada ponto. Linhas de mundo das partículas radiais devem manter-se dentro das linhas de 45° . Apenas regiões sem sombra e levemente sombreadas no diagrama representam o espaço-tempo fora da estrela colapsante.

As propriedades da geometria do buraco negro de Schwarzschild que foram descobertas nas coordenadas de Eddington-Finkelstein podem ser vistas de uma perspectiva diferente no diagrama de Kruskal (ver figura 8).

A singularidade em $r = 0$ é claramente revelada que não é uma singularidade das coordenadas, mas sim de origem física, sendo uma superfície tipo-espaço. O horizonte em $r = 2M$ está a 45° com a linha $V = U$, mostrando ser uma superfície gerada pelos raios de luz radiais, mantendo-se estacionários em $r = 2M$. Dentro de $r = 2M$ (acima da linha $V = U$), todas as linhas de mundo nulas e do tipo-tempo levam para a singularidade em $r = 0$, demonstrando a formação inevitável uma vez que a superfície da estrela cruza o raio de Schwarzschild. Nenhum raio de luz ou linha de mundo tipo-tempo pode escapar de dentro do horizonte, os eventos lá dentro se mantêm escondidos do observador externo. As coordenadas de Kruskal revelam mais diretamente as propriedades do buraco negro do que as coordenadas de Eddington, trazendo representações mais úteis da geometria do buraco negro, embora não sejam úteis para analisar as órbitas das partículas testes e raios de luz em grandes distâncias desse buraco negro. As coordenadas de Eddington tem a facilidade de poder trabalhar com elas em análises tanto próximas como longe dos buracos negros.

6 Ondas Gravitacionais

Nesse capítulo, será abordada a solução usando uma aproximação na métrica, de maneira semelhante a utilizada na seção 4.2, e as referências usadas foram [4, 8, 9, 10]. Como visto no capítulo anterior, resolver as equações de Einstein, não é uma tarefa fácil, e simples, pois lida-se com 10 equações diferenciais parciais não lineares, mas uma alternativa é analisar a solução da equação 4.51, para um regime que possa ser quase espaço-tempo plano, para isso usa-se a equação 4.53, e lineariza-se ela usando que

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (6.1)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski, a métrica do espaço-tempo plano, e $h_{\mu\nu}$ a perturbação que será da ordem de $h_{\mu\nu} \ll 1$. Essa será a condição para que seja possível linearizar a equação 4.51. Assumindo, como no capítulo 4, que estamos longe de qualquer fonte gravitacional, o campo é fraco e a métrica desviará apenas um pouco da métrica plana - no Universo é possível encontrar situações semelhantes. Então, a receita é sempre a mesma, encontrar os símbolos de Christoffel para essa condição

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\lambda}(\partial_{\nu}g_{\mu\lambda} + \partial_{\mu}g_{\nu\lambda} - \partial_{\lambda}g_{\mu\nu}) \quad (6.2)$$

Aplicando que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ e $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$, e substituindo no símbolo de Christoffel acima, tem-se que,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(\eta^{\sigma\lambda} - h^{\sigma\lambda})(\partial_{\nu}(\eta_{\mu\lambda} + h_{\mu\lambda}) + \partial_{\mu}(\eta_{\nu\lambda} + h_{\nu\lambda}) - \partial_{\lambda}(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})) \\ &= \frac{1}{2}(\eta^{\sigma\lambda}(\partial_{\nu}h_{\mu\lambda} + \partial_{\mu}h_{\nu\lambda} - \partial_{\lambda}h_{\mu\nu})) \end{aligned} \quad (6.3)$$

O tensor de Ricci ficará, dado que ele pode ser escrito como sendo $R_{\mu\nu} = g^{\sigma\rho}R_{\mu\sigma\nu\rho}$,

$$\begin{aligned} R_{\nu\sigma} &= \frac{1}{2}\eta^{\mu\rho}(\partial_{\rho}\partial_{\nu}h_{\mu\sigma} + \partial_{\sigma}\partial_{\mu}h_{\nu\rho} - \partial_{\sigma}\partial_{\nu}h_{\mu\rho} - \partial_{\rho}\partial_{\mu}h_{\nu\sigma}) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_{\mu\nu}h^{\mu}{}_{\sigma} + \partial_{\sigma}\partial_{\mu}h^{\sigma}{}_{\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}h - \square h_{\nu\rho}) \end{aligned} \quad (6.4)$$

onde $h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu} = h^{\mu}{}_{\mu}$ e $\square = -\partial_t^2 + \nabla^2$. Contraíndo agora o tensor de Ricci para

encontrar o escalar de curvatura

$$\begin{aligned}
R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\partial_\sigma \partial_\nu h^\sigma{}_\mu + \partial_\sigma \partial_\mu h^\sigma{}_\nu - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu}) \\
&= \frac{1}{2} (\partial_\sigma \partial_\nu h^{\sigma\nu} + \partial_\sigma \partial_\mu h^{\sigma\mu} - \partial_\mu \partial^\mu h - \square h_{\mu\nu}) \\
&= \frac{1}{2} (\partial_\sigma \partial_\nu h^{\sigma\nu} + \partial_\sigma \partial_\mu h^{\sigma\mu} - \square h - \square h) \\
&= \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} + \partial_{\nu\mu} h^{\nu\mu} - 2\square h)
\end{aligned} \tag{6.5}$$

resultando em

$$R = \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - \square h \tag{6.6}$$

Agora substituindo tudo nas equações de Einstein 4.51, para encontrar quais as equações de campo linearizada, com $G = c = 1$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} (\partial_\sigma \partial_\nu h^\sigma{}_\mu + \partial_\sigma \partial_\mu h^\sigma{}_\nu - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} (\partial_\rho \partial_\lambda h^{\rho\lambda} - \square h)) &= 8\pi T_{\mu\nu} \\
((\partial_\sigma \partial_\nu h^\sigma{}_\mu + \partial_\sigma \partial_\mu h^\sigma{}_\nu - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} (\partial_\rho \partial_\lambda h^{\rho\lambda} - \square h)) &= 16\pi T_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Em 6.7, $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momentum calculado na ordem zero em $h_{\mu\nu}$, com isso a presença de matéria pode ser utilizada, mesmo que esteja-se numa métrica quase plana, tal que sua magnitude é da mesma ordem da perturbação, e ele satisfaz a lei de conservação já vista dada por $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Agora é necessário lidar com o problema da invariância de gauge. Essa questão virá do fato de que ao usarmos a métrica 6.1, não é especificado qual sistema de coordenadas é utilizado. Deve haver outro sistema de coordenadas no qual essa métrica possa ser escrita como a métrica plana, mais uma pequena perturbação, embora essa perturbação seja diferente, e com isso concluímos que essa decomposição não é unívoca. Assim, as equações de campo não darão uma única solução: qualquer solução obtida dessas equações pode gerar novas soluções através de uma transformação de coordenadas, essa característica é assegurada pelo princípio da covariância geral, onde se diz que as leis da física tomam a mesma forma não importando o sistema de coordenadas.

Precisa-se então determinar uma transformação que mantenha $h_{\mu\nu}$ unívoca, uma possibilidade mais geral seria

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = x_\mu + \xi_\mu(x) \tag{6.8}$$

partindo da lei de transformação tensorial da métrica

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\rho} \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\sigma} g_{\rho\sigma}$$

então, $h_{\mu\nu}$ pode se transformar da seguinte forma,

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu \tag{6.9}$$

onde $\xi_\mu = \xi_\nu \eta^{\mu\nu}$, a equação 6.9 é chamada de transformação de gauge para a gravidade linearizada. A equação 6.7 parece complicada, mas a liberdade de gauge nos irá ajudar a solucioná-la. Os dois sistemas que serão discutidos é o gauge harmônico (semelhante ao gauge de Lorentz) e o gauge TT. O gauge harmônico será dado por

$$g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0 \quad (6.10)$$

cujos a forma linearizada pode ser escrita como

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\nu h \quad (6.11)$$

Essa escolha particular de gauge é sempre possível, pois mesmo que a perturbação original $h_{\mu\nu}$ não a obedeça, pode-se usar uma transformação

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu$$

de modo que ela satisfaça 6.11, e realizando a transformação de coordenada ela seja solução de

$$\square \xi_\nu = \partial^\mu h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\nu h \quad (6.12)$$

Com o gauge harmônico, é possível escrever a equação de Einstein da seguinte forma,

$$\square \left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \right) = -16\pi T_{\mu\nu} \quad (6.13)$$

a equação 6.13 traz a necessidade de introduzir a "perturbação de traço-reverso", onde

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h$$

definindo que $\bar{h} = -h$, o gauge harmônico fica então $\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$, semelhante ao do eletromagnetismo ($\partial_\mu A^\mu = 0$). Reescrevendo a equação 6.13 nesse gauge e tomando o traço-reverso obtemos

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu} \quad (6.14)$$

que nada mais é do que uma equação de onda para cada uma das componentes da perturbação.

É possível escrever a equação 6.13 utilizando um outro gauge, para isso escolhe-se ξ^0 tal que o traço de $\bar{h}_{\mu\nu}$ desapareça, ou seja, $\bar{h} = 0$. Assim, a perturbação do traço reverso e a perturbação da métrica coincidem

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu}$$

Após, escolhem-se três funções ξ^i tal que h^{0i} , impondo isso a condição do gauge harmônico, fica $\partial^0 h_{00}$, com h_{00} independente do tempo e correspondente ao potencial Newtoniano da fonte. Acertando que $h_{00} = 0$, tem-se que

$$h_{0\mu} = 0 ; \quad -h = 0 ; \quad \partial^i h_{ij} \quad (6.15)$$

o qual define o novo gauge, chamado de gauge transverso-sem traço (TT gauge). Estudando com cuidado as liberdades de gauge, conclui-se de fato que as componentes TT da perturbação são as únicas a satisfazerem uma equação de onda, em qualquer sistema de coordenadas. A métrica nesse gauge é dada como $h_{\mu\nu}^{TT}$. Esse gauge só é possível no vácuo, onde

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (6.16)$$

Caso haja alguma fonte de matéria, é mais útil o gauge harmônico, tendo a liberdade para escolher ξ_μ , satisfazendo $\square \xi_\mu = 0$. A solução para 6.16, serão ondas planas, onde

$$h_{ij}^{TT} = \varepsilon_{ij} \exp(ik^\mu x_\mu) \quad (6.17)$$

onde k^μ é o quadrivetor de onda, $k^\mu = (\omega/k)$, onde ω é a frequência angular da onda, nesse caso as ondas gravitacionais, e ε_{ij} será o tensor polarização da onda. Para ondas gravitacionais se propagando na direção z , ao ignorar a parte imaginária e impondo h_{ij} simétrico e sem traço, pode-se escrever a seguinte solução

$$h_{ij}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos[w(t - z)] \quad (6.18)$$

onde h_+ e h_\times são as amplitudes das ondas gravitacionais em duas polarizações. As componentes ij de $h_{\mu\nu}^{TT}$, podem ser escritas como

$$h_{ij}^{TT} = h_+ \varepsilon_{ij}^+ \cos[w(t - z)] + h_\times \varepsilon_{ij}^\times \cos[w(t - z)] \quad (6.19)$$

onde

$$\varepsilon_{ij}^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.20)$$

$$\varepsilon_{ij}^\times = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.21)$$

Agora, veremos o efeito de uma onda gravitacional em uma partícula livre em repouso ($\tau = 0$). A equação da geodésica dessa partícula para as coordenadas espaciais é

$$\left(\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^i \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \right) = 0 \quad (6.22)$$

os símbolos de Christoffel em $\alpha = 0$ e $\beta = 0$ ficam

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^i &= \frac{1}{2}\eta^{i\mu}(\partial_0 h_{\mu 0} + \partial_0 h_{0\mu} - \partial_\mu h_{00}) \\ &= \partial_0 h_0^i - \frac{1}{2}\partial^i h_{00}\end{aligned}\quad (6.23)$$

como a partícula está em repouso, no gauge TT, $\Gamma_{00}^i = 0$ desaparece. A partícula então se mantém em repouso (coordenada fixa). Porém, isso não deve ser interpretado como se a passagem das ondas gravitacionais não tivesse nenhum efeito fixo, já que em RG a escolha do sistema de coordenadas é arbitrária. A distância própria entre duas partículas que estejam em $(x_0, 0, 0)$ e $(-x_0, 0, 0)$, é $L(t) = \int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{g_{xx}} dx' = \int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{1 + h_{xx}} dx'$.

$$L(t) \approx L_0 \left[1 + \frac{1}{2} h_+ \cos \omega t \right] \quad (6.24)$$

já para partículas em $(0, x_0, 0)$ e $(0, -x_0, 0)$

$$L(t) \approx L_0 \left[1 - \frac{1}{2} h_+ \cos \omega t \right] \quad (6.25)$$

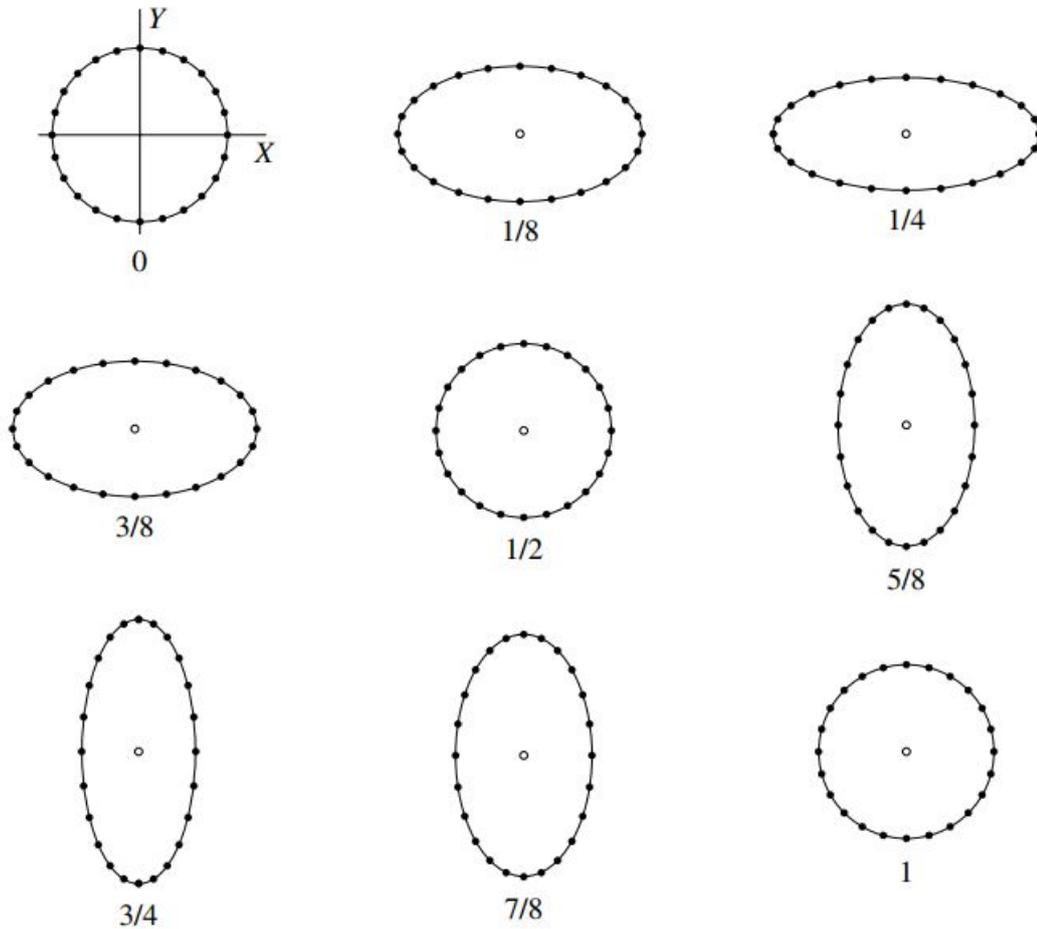
A distância própria entre essas duas partículas muda com o tempo periodicamente e a variação é proporcional à amplitude da onda gravitacional. Considerando que haja uma rotação de 45° , as expressões serão então para a amplitude h_\times . Por fim, a passagem de uma onda gravitacional se propagando na direção de um anel de partículas pode ser vista na Figura 9, onde a primeira polarização é para h_+ e a segunda para h_\times , mostrando o comportamento no tempo de massas testes onde as frações representam a fração do período da onda.

Solucionando então 6.14 para o caso de uma fonte $T_{\mu\nu}$, a solução será semelhante a encontrar a solução para as equações de Maxwell onde $\square A^\mu = -4\pi J^\mu$ para o quadripotencial. A solução para 6.14 pode ser encontrada usando o método da função de Green,

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, x) = 4 \int \frac{T_{\mu\nu}(t-|x-y|)}{|x-y|} d^3y \quad (6.26)$$

onde $t = x^0$. A quantidade $t_r \equiv t - |x - y|$ é chamado de tempo retardado, e o seu uso é devido ao fato de o observador está distante da fonte, e sua ocorrência no argumento de $\bar{h}_{\mu\nu}$ implica que a perturbação gravitacional se propague com a velocidade da luz no vácuo. Essa solução pode ser interpretada como: a perturbação no campo gravitacional em (t, x) é a soma das influências da energia e momentum da fonte no ponto $(t_r, x - y)$ no cone de luz no passado. Ao contrário da Mecânica Newtoniana, em que toda dinâmica ocorre instantaneamente, na RG a perturbação gerada deverá levar um certo tempo até chegar a outro ponto do espaço-tempo.

Figura 9 – Polarização de uma Onda Gravitacional



Fonte: Imagem retirada de [4]

6.1 Fórmula de Quadrupolo

Extrair informações sobre a radiação emitida por uma fonte $T_{\mu\nu}$ leva a eliminar a dependência do tensor de energia-momentum no tempo retardado, e para isso podemos utilizar uma transformada de Fourier na variável temporal, para facilitar a solução da equação de onda. Se $\tilde{T}_{\mu\nu}$ e $\tilde{h}_{\mu\nu}(\omega, x)$ são respectivamente as transformadas de $T_{\mu\nu}$ e $\bar{h}_{\mu\nu}$, reescrevendo a solução

$$\begin{aligned}
 \tilde{h}_{\mu\nu} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{i\omega t} \bar{h}_{\mu\nu} \\
 &= \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{i\omega t} \int d^3y \frac{T_{\mu\nu}(t - |x - y|, y)}{|x - y|} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt_r \int d^3y \frac{e^{i\omega|x-y|}}{|x - y|} T_{\mu\nu} \\
 &= 4 \int d^3y \frac{e^{i\omega|x-y|}}{|x - y|} \tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, y)
 \end{aligned} \tag{6.27}$$

Restringindo agora que a fonte esteja isolada, distante e não é composta por matéria relativística, essas aproximações serão adequadas para sistemas que sejam binários. Colocando agora o sistema de coordenadas próximo da fonte, é válido trocar $|x - y|$ por $r = |x|$, e então é possível escrever

$$\frac{e^{i\omega|x-y|}}{|x-y|} = \frac{e^{i\omega r}}{r}$$

Tomando o limite para baixas velocidades onde $v \ll c$, assume-se que r é praticamente constante, pois demora muito tempo até que a distância e o observador tenham alguma mudança significativa. Reescrevendo a última equação 6.27 obtemos

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = 4 \frac{e^{i\omega r}}{r} \int d^3y \tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, x) \quad (6.28)$$

Agora é necessário calcular as componentes espaciais de $\tilde{h}_{\mu\nu}$, sendo motivado fisicamente pelo fato de que $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, ou seja, há conservação de energia, e com isso todas as integrais sobre $T^{0\nu}$ são conservadas e independentes do tempo, ou, de outra maneira, a transformada de Fourier de $T^{0\nu}$ com respeito a variável temporal conterá apenas termos estáticos ($\omega = 0$). Com isso tem-se a parte independente do tempo da métrica, a qual caracteriza a radiação que está contida nas componentes espaciais da perturbação.

Resolvendo apenas para as componentes espaciais então,

$$\int d^3y \tilde{T}^{ij}(\omega, y) = \partial_k (y^i \tilde{T}^{kj}) - \int d^3y y^i (\partial_k \tilde{T}^{kj}) \quad (6.29)$$

O primeiro termo da integral irá desaparecer pois depende da fonte estar isolada, e o segundo termo está relacionado com \tilde{T}^{0j} , uma vez que a lei de conservação é $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Quando escrita no espaço de Fourier, fica

$$\partial_k \tilde{T}^{k\mu} = i\omega \tilde{T}^{0\mu} \quad (6.30)$$

Reescrevendo a equação 6.29,

$$\begin{aligned} \int d^3y \tilde{T}^{ij}(\omega, y) &= -i\omega \int d^3y y^i \tilde{T}^{0j} \\ &= \frac{-i\omega}{2} \int d^3y (y^i \tilde{T}^{0j} + y^j \tilde{T}^{0i}) \\ &= \frac{-i\omega}{2} \int d^3y (\partial_k (y^i y^j \tilde{T}^{0k})) - y^i y^j (\partial_k \tilde{T}^{0k}) \\ &= \frac{-\omega^2}{2} \int d^3y y^i y^j \tilde{T}^{00} \end{aligned} \quad (6.31)$$

Na literatura [8] é comum chamar de "tensor momento de quadrupolo" da distribuição de matéria a quantidade

$$I^{ij}(t) = \int d^3y y^i y^j \tilde{T}^{00} \quad (6.32)$$

Podendo escrever então que

$$\bar{h}_{ij}(\omega, x) = -2\omega^2 \frac{e^{i\omega r}}{r} \tilde{I}_{ij} \quad (6.33)$$

e retornando para a dependência temporal, a equação acima fica

$$\tilde{h}_{ij}(t, x) = \frac{2}{r} \frac{d^2}{dt^2} I_{ij}(t_r) \quad (6.34)$$

A equação acima é chamada fórmula de quadrupolo. A onda gravitacional produzida por um objeto isolado e não relativístico é portanto proporcional a derivada segunda do momento de quadrupolo da densidade de energia.

6.2 Energia radiada por uma Onda Gravitacional

A partir da equação 6.34, que dá a amplitude da onda gravitacional longe da fonte de matéria, usando a definição de 6.32, a partir da referência [4]. Há uma expectativa que a expressão para o fluxo da energia seja quadrático na amplitude da onda. E a luminosidade L_{OG} (potência total radiada), na radiação gravitacional, deve por isso, ser quadrática em I^{ij} e em suas derivadas temporais, sendo uma provável combinação de \dot{I}^{ij} , alternativamente, pode-se notar que a amplitude de onda em $\bar{h}_{\mu\nu}$, é proporcional a \ddot{I}^{ij} , tendo um fator adicional de ω^2 no fluxo de energia. L_{OG} também comporta-se como um escalar sobre rotações e deve ser uma combinação de \ddot{I}^{ij} . Sendo as duas possibilidades possíveis $\ddot{I}^{ij} \ddot{I}_{ij}$ e \ddot{I}_k^k . Essa combinação terá que estar fixada pelo fato que não haja radiação sendo emitida de um sistema esfericamente simétrico e por isso não há perda de energia. A combinação pode ser escrita como

$$Q^{ij} = I^{ij} - \frac{1}{3} \delta^{ij} I_k^k \quad (6.35)$$

a equação acima é chamada de *tensor reduzido do momento de quadrupolo*, o qual desaparece para simetria esférica já que é a parte sem traço de 6.32. L_{OG} deve ser portanto proporcional a $\ddot{Q}^{ij} \ddot{Q}_{ij}$. A fórmula de quadrupolo para a potência total radiada média em ondas gravitacionais é

$$L_{OG} = \frac{1}{5} \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}^{ij} \rangle \quad (6.36)$$

a equação acima é análoga a equação do eletromagnetismo para a potência radiada, embora no eletromagnetismo seja usado o momento de dipolo. A equação de quadrupolo pode ser obtida para um sistema binário, onde tem-se as componentes de I^{ij} . Dadas por

$$\begin{aligned} I_{xx} &= 2MR^2 \cos^2(\Omega t) = MR^2 [1 + \cos(2\Omega t)], \\ I_{yy} &= 2MR^2 \sin^2(\Omega t) = MR^2 [1 - \cos(2\Omega t)], \\ I_{zz} &= 2MR^2 \cos^2(\Omega t) = MR^2 [1 + \cos(2\Omega t)] \end{aligned} \quad (6.37)$$

onde M é a massa do objeto, R o raio da órbita e Ω a frequência orbital do objeto, o traço nesse caso é $I_k^k = 2MR^2$, e é independente do tempo, o que faz com que as derivadas temporais \dot{Q}_{ij} e \dot{I}_{ij} coincidam. Tomando a terceira derivada temporal de cada componente I_{ij} , somando seus quadrados e tirando a média num período para obter o fator 1/2, o valor da potência radiada é

$$L_{OG} = \frac{128}{5} M^2 R^4 \Omega^6 \quad (6.38)$$

Exemplo 6.2.1 Calculando agora para um caso real a taxa de perda de energia, o qual rendeu o prêmio Nobel em 1993 [11] para Hulse e Taylor, que analisaram um sistema binário chamado PSR B1913 + 16, consistindo de um pulsar e uma estrela de nêutrons, e calcularam a mudança no período da órbita devido a perda de energia emitida pelas ondas gravitacionais. Na aproximação Newtoniana adequada para um sistema não relativístico, a energia será

$$E_{Newt} = 2 \left(\frac{1}{2} M V^2 \right) - \frac{M^2}{2R} \quad (6.39)$$

onde V é a velocidade orbital. Usando a lei de Newton, com P sendo o período, obtemos:

$$\frac{V^2}{R} = \frac{1}{R} \left(\frac{2\pi R}{P} \right)^2 = \frac{M}{(2R)^2} \quad (6.40)$$

para relacionar V com R e a lei de Kepler para um sistema binário

$$R = \left(\frac{M}{4\Omega^2} \right)^{1/3} = \left(\frac{(MP)^2}{16\pi^2} \right) \quad (6.41)$$

para qual $\Omega = \frac{2\pi}{P}$, a qual irá relacionar R com P , a energia para a aproximação Newtoniana fica

$$E_{Newt} = -\frac{M^2}{4R} = -\frac{1}{4} M \left(\frac{4\pi M}{P} \right)^{2/3} \quad (6.42)$$

O sinal negativo na equação acima é devido ao fato de que as órbitas estão ligadas. A medida que a energia diminui, o período também sofrerá uma redução. Quanto menor o valor do período mais negativa é a energia. Diferenciando a equação acima com respeito a variável t e igualando ao valor de 6.38 (colocando a equação em termos de P).

$$\frac{dE_{Newt}}{dt} = -L_{OG} \quad (6.43)$$

é possível encontrar a seguinte equação para a taxa de queda no período (P):

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{96}{5} \pi 4^{1/3} \left(\frac{2\pi M}{P} \right)^{5/3} \quad (6.44)$$

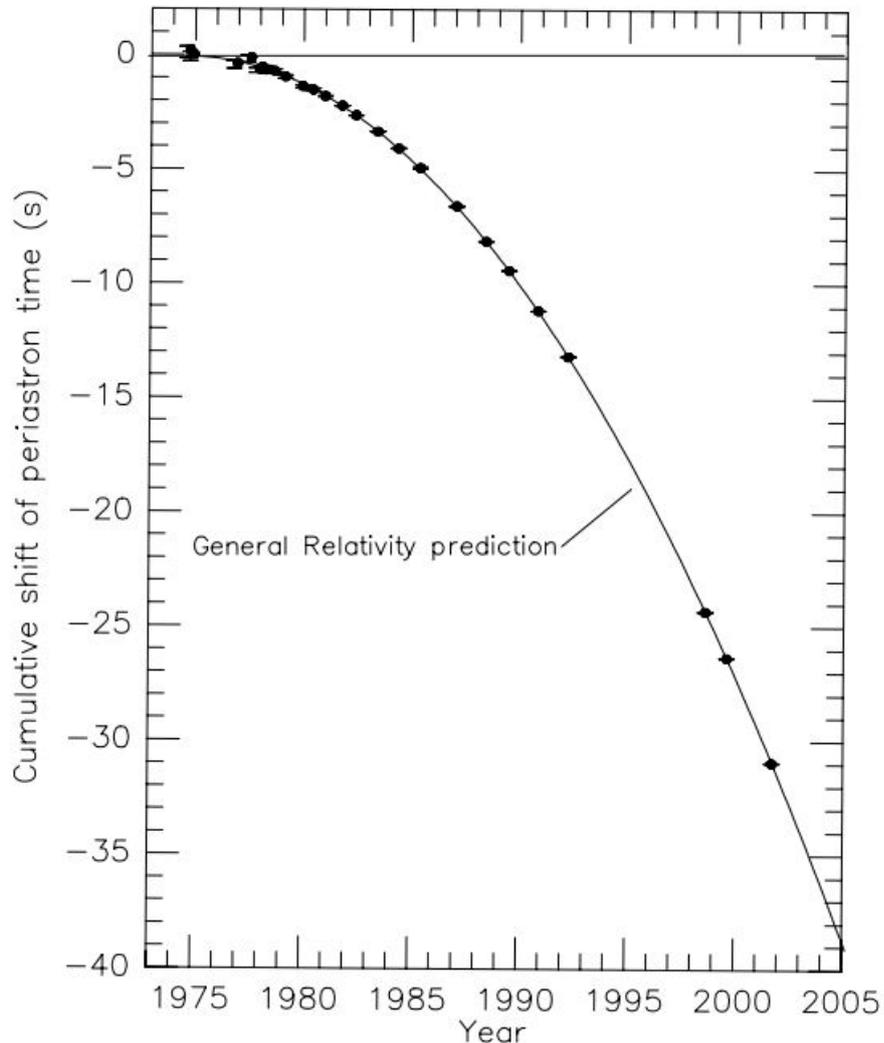
melhorando a equação acima

$$\frac{dP}{dt} = -3.4 \times 10^{-12} \left(\frac{M}{M_{\odot} \frac{P}{1h}} \right)^{5/3} \quad (6.45)$$

Para o sistema binário que rendeu o prêmio Nobel, o qual tem massas aproximadamente de $1.4M_{\odot}$ e um período de 7.75h, o valor teórico encontrado é de

$$\frac{dP}{dt} \sim -2.2 \times 10^{-13} s/s \quad (6.46)$$

Figura 10 – Sistema Binário PSR B1913+16



Fonte: Imagem retirada de [4]

Os valores medidos pelo radio telescópio de Arecibo durante três décadas mostram que o valor é de $-2.422 \pm 0.006 \times 10^{-12}$, lembrando que foi considerado que a órbita desse sistema seja circular, o que já demonstra uma alta proximidade dos valores. Ao considerar os cálculos segundo [10] para uma órbita elíptica, o valor para a taxa de decrescimento do período desse sistema seria de $\sim -2.4 \times 10^{-12}$, o qual se aproxima ainda mais do valor medido. Na figura 10 são mostrados os valores medidos ao longo dos anos do decrescimento do período e a curva teórica dada pela RG.

6.3 Detecção das Ondas Gravitacionais

Nos capítulos anteriores foram apresentados como as ondas gravitacionais são geradas, a solução para a gravidade linearizada e a energia que ela pode irradiar. Mas como é possível detectar essas ondas gravitacionais, que foram emitidas tão distantes de observadores aqui na Terra? No exemplo acima foi analisada indiretamente a produção de ondas gravitacionais, mas a questão é detectá-las diretamente, e em 2016, através do experimento LIGO, isso foi possível. Nesse trabalho será apresentado de maneira introdutória como foi possível determinar diretamente a presença das ondas gravitacionais sendo emitidas por um sistema binário de buracos negros coalescendo. Antes é preciso estimar alguns parâmetros para obter algumas ordens de grandezas necessárias para saber com que precisão esse experimento precisa ser construído. Os parâmetros serão a massa do objeto (M) ou do sistema, o raio da órbita (R), r a distância desse objeto ou sistema até a Terra (laboratório), R_s o raio de Schwarzschild e Ω a frequência orbital. A frequência desse objeto e conseqüentemente da onda produzida é aproximadamente

$$f = \frac{\Omega}{2\pi} \sim \frac{cR_s^{1/2}}{10R^{3/2}} \quad (6.47)$$

essa onda deve ter uma amplitude da ordem de

$$h \sim \frac{R_s^2}{rR} \quad (6.48)$$

Aplicando estas aproximações para um par de buracos negros colidindo, tomando que tenham massas iguais e sejam da ordem de $10M_\odot$, estejam a uma distância de 100Mpc, e separados por uma distância que seja de $10R_s$. Então,

$$\begin{aligned} R_s &\sim 10^4 m \\ R &\sim 10^5 m \\ r &\sim 10^{24} m \end{aligned} \quad (6.49)$$

A frequência dessa onda gravitacional produzida, será da ordem de $f \sim 10^2 Hz$ para um observador aqui na Terra, já a amplitude da onda que é encontrada através de 6.34 é da ordem de $h \sim 10^{-21}$. Para detectar esse sistema seria necessário um experimento que detectasse valores próximos ou menores que esses valores. Nas referências [7, 9, 12] são apresentados alguns possíveis experimentos, sendo que [9] traz a maior quantidade, apesar de não comentar sobre o experimento com o interferômetro. Já [7] e [12] são livros mais atuais, e citam o interferômetro.

O interferômetro consiste em medir a mudança relativa entre a distância de dois feixes de laser que percorrem diferentes caminhos. Na figura 11 tem-se um esquema de como é a montagem do interferômetro. Ele consiste de um laser que irá enviar um feixe até um separador, que irá dividir o feixe em dois, que seguirão caminhos diferentes, um

A mudança relativa no caminho do feixe será dada por

$$\frac{\Delta L}{L} \sim h$$

A diferença sofrida no comprimento do braço do interferômetro induzirá uma mudança de fase. Segundo [12] a mudança esperada com uma onda de magnitude $h \sim 10^{-21}$, com um o feixe de laser percorrendo um comprimento de $L = 1km$, é de $\Delta L \sim 10^{-18}m$. Caso o laser tenha um comprimento de onda $\lambda = 1.064nm$ as franjas formadas terão uma pequena fração de $\Delta L/\lambda \sim 10^{-12}$. Como efeito de comparação em como esse valor é realmente pequeno, o valor de Δ é menor do que o raio de Bohr, que é de $5.29 \times 10^{-11}m$. A detecção de ondas gravitacionais exige grande esforço e avanço científico, e levou cerca de 100 anos após a publicação da RG para que fosse possível ter uma detecção direta de tal evento.

7 Conclusão

O objetivo principal desse trabalho foi dar uma visão mais aprofundada de uma das áreas mais belas da física a RG, a qual não é vista num curso de graduação com tanta profundidade. Primeiro foi obtida a equação de Einstein, que descreve como o espaço-tempo se comportará na presença de fontes de matéria e energia, e como essas fontes irão se comportar num espaço que seja curvo. Vimos também como o tempo e distância são medidos ao redor de um objeto massivo, e como as trajetórias das partículas podem ser afetadas pela sua presença.

Depois, como toda a equação na física, busca-se uma solução, sendo a primeira a solução de Schwarzschild, que traz uma correção para o problema do periélio da órbita de Mercúrio que a gravitação newtoniana não conseguia resolver. Através dessa solução, é possível descrever um objeto do qual nem mesmo a luz escaparia, sendo ele o buraco negro, um objeto que tem uma singularidade de coordenadas (horizonte de eventos) e uma singularidade física, mostrada através das coordenadas de Kruskal.

Por fim, fizemos o estudo da linearização da equação de Einstein, que traz uma aproximação para a equação e a possibilidade da existência de ondas gravitacionais geradas por objetos massivos e que percorrem todo o espaço-tempo, sendo detectadas diretamente em 2015.

Com tudo isso, foi possível uma melhor compreensão da RG e de duas soluções importantes e ainda muito usadas na física atual, possibilitando uma compreensão mais cuidadosa de um assunto extremamente complexo, mas muito belo. Faz-se menção que os estudos não podem parar apenas nisso, já que é uma área muito densa com inúmeros resultados que precisam ser melhor estudados e mais aprofundados, como o aprofundamento do estudo das ondas gravitacionais, a equação TOV, as outras métricas que descrevem melhor os buracos negros reais, e as outras formulações da equação de Einstein.

De forma geral, também salienta-se as boas referências para o entendimento de tal área. Por fim, fica a motivação de não parar de estudar física, e nem deixar de querer compreender mais e mais essa tão bela ciência.

Referências

- 1 EINSTEIN, A. Die grundlage der allgemeinen relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, v. 354, n. 7, p. 769–822, 1916. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 25.
- 2 RESNICK, R. *Introduction to Special Relativity*. [S.l.]: Wiley, 1968. ISBN 9780471717256. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 18.
- 3 DRAY, T. *The Geometry of Special Relativity*. 1st. ed. [S.l.]: A K Peters/CRC Press, 2012. ISBN 978-1-4665-1048-7,978-1-4665-1047-0. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 18.
- 4 HARTLE, J. B. *Gravity, An Introduction to Einstein's General Relativity*. United Kingdom: Cambridge University Press, 2021. Citado 15 vezes nas páginas 13, 16, 19, 36, 41, 42, 43, 44, 49, 51, 52, 53, 58, 60 e 62.
- 5 BIEZUNER, R. J. *Notas de Aula Geometria Riemanniana*. UFMG: Departamento de Matemática, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 21.
- 6 D'INVERNO, R.; VICKERS, J. *Introducing Einstein's Relativity: A Deeper Understanding*. [S.l.]: Oxford University Press, 2022. ISBN 9780198862031. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 25.
- 7 SCHUTZ, B. *A First Course in General Relativity*. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009. Citado 6 vezes nas páginas 19, 23, 24, 29, 63 e 64.
- 8 CARROLL, S. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. [S.l.]: Addison Wesley, 2004. ISBN 9780805387322. Citado 8 vezes nas páginas 25, 35, 36, 40, 41, 47, 53 e 59.
- 9 MISNER, C.; THORNE, K.; WHEELER, J.; KAISER, D. *Gravitation*. [S.l.]: Princeton University Press, 2017. ISBN 9780691177793. Citado 3 vezes nas páginas 35, 53 e 63.
- 10 RAMOS, M. P.; MALUF, R. V. Sobre a teoria de einstein para ondas gravitacionais e sua aplicação no estudo da radiação emitida por um pulsar binário. *Revista Brasileira De Ensino De Fisica*, v. 40, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 62.
- 11 SCHWARZSCHILD, B. Hulse and Taylor Win Nobel Prize for Discovering Binary Pulsar. *Physics Today*, v. 46, n. 12, p. 17–19, 12 1993. ISSN 0031-9228. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.2809120>>. Citado na página 61.
- 12 ANDERSSON, N. Gravitational-Wave Astronomy: Exploring the Dark Side of the Universe. In: _____. Oxford University Press, 2019. cap. 7, p. 133–135. ISBN 9780198568032. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/oso/9780198568032.001.0001>>. Citado 2 vezes nas páginas 63 e 65.