UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia

Departamento de Matemática

Uma introdução aos espaços métricos e aos espaços vetoriais normados

Aluno: Abner Vitor dos Santos

Curso: Matemática

RA: 779818

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo da Silva Rodrigues

Curso: Matemática

Centro: Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia

São Carlos - SP

2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

ABNER VITOR DOS SANTOS

Uma introdução aos espaços métricos e aos espaços vetoriais normados

Monografia apresentada à disciplina: Trabalho de Conclusão de Curso B. Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo da Silva Rodrigues

São Carlos - SP

2023

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - CCM/CCET
Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905
Telefone: (16) 33518221 - http://www.ufscar.br

DP-TCC-FA nº 18/2024/CCM/CCET

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

ABNER VITOR DOS SANTOS

UMA INTRODUÇÃO AOS ESPAÇOS MÉTRICOS E AOS ESPAÇOS VETORIAIS NORMADOS

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos

São Carlos, 08 de fevereiro de 2024

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	Rodrigo da Silva Rodrigues
Membro da Banca 1	Karina Schiabel
Membro da Banca 2	Alex Carlucci Rezende

Documento assinado eletronicamente por **Rodrigo da Silva Rodrigues**, **Professor(a) do Ensino Superior**, em 05/03/2024, às 16:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Karina Schiabel**, **Professor(a) do Ensino Superior**, em 12/03/2024, às 08:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Alex Carlucci Rezende**, **Professor(a) do Ensino Superior**, em 03/07/2024, às 05:42, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Referência: Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo nº 23112.004418/2024-18

SEI nº 1367123

Modelo de Documento: Grad: Defesa TCC: Folha Aprovação, versão de 02/Agosto/2019

Dedico este trabalho com todo o meu amor e gratidão aos meus pais, Lauro e Rosângela, e minha irmã Ingridy.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente a Deus, pela ajuda e por ter guiado meus passos até o momento. Por estar comigo nos momentos que pensei em desistir durante essa jornada e por cada pessoa que ele tem posto em minha vida.

Agradeço, em especial, à minha família, que tem sido fonte de apoio e incentivo durante essa trajetória. Expresso imensa gratidão ao meu pai, Lauro, por ter me apoiado muito no início e ter ajudado no que foi preciso. Da mesma forma, agradeço à minha mãe, Rosângela, e a minha irmã, Ingridy, pessoas que servem como inspirações para que eu siga em frente.

Não posso deixar de agradecer meu orientador, Prof. Dr. Rodrigo da Silva Rodrigues, ao qual esse trabalho tem sido proveitoso em grande parte pelas ajudas durante os seminários que tivemos. Além do mais, foi um prazer poder tê-lo mais uma vez como orientador, assim como tem sido na iniciação científica, pude aprender muito durante esse tempo.

Aos meus colegas e amigos de graduação deixo também meus sinceros agradecimentos, em especial para Vinicius, Olavo, Sato, Liniker por terem me ajudado durante o primeiro semestre, e que foram uma parte importante para não desistir do curso. Deixo também, agradecimento aos demais colegas que também foram importante, como Gabriela Watanabe, Beatriz, Relissa, Iara, Sabrina, Nelson, Douglas e Daniel.

Por fim, agradeço aos professores que tive privilégio de conhecê-los na graduação até o momento, que muitos foram inspiração durante a graduação, e que continuaram sendo.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos uma introdução aos Espaços Métricos, partindo da definição e exemplos, definindo e entendendo os conceitos primários deste contexto, como bolas abertas e fechadas, conjuntos abertos e fechados assim como suas principais propriedades. A seguir definimos e estudamos convergência de sequências em espaços métricos. A partir dos estudos de sequências definimos espaços métricos completos. Na parte final do trabalho é feita uma introdução aos espaços compactos e a definição de espaços normados.

Palavras-chave: Espaços Métricos. Conjuntos abertos e fechados. Sequências. Espaços métricos completos. Espaços compactos. Espaços normados.

Abstract

In this work, we present an introduction to Metric Spaces, starting with the definition and examples, defining and understanding the primary concepts of this context, such as open and closed balls, open and closed sets as well as their main properties. context, such as open and closed balls, open and closed sets, as well as their main properties. Next, we define and study convergence of sequences in metric spaces. Based on our studies of sequences, we define complete metric spaces. The final part of the work gives an introduction to compact spaces and the definition of normed spaces.

Keywords: Metric spaces. Open and closed sets. Sequences. Complete metric spaces. Compact spaces. Normalized spaces.

Conteúdo

Lista de Figuras

Capítulo

1

Introdução

Este trabalho é dedicado ao estudo dos espaços métricos, tal como sua definição e principais conceitos. O objetivo é estudar conceitos mais abstratos e mais gerais do que os proporcionados na Licenciatura em Matemática já que os cursos de Espaços Métricos e Topologia não fazem parte da formação de um licenciando. Mesmo que de forma introdutória, é muito interessante conhecer e estudar conceitos mais abstratos a fim de complementar a formação.

Apesar das formas mais triviais de realizar "medições" entre dois elementos de um conjunto, existem maneiras incomuns, mas que por sua vez satisfazem as propriedades para que possam ser classificadas como métricas, como é possível notar durante o decorrer deste trabalho.

O trabalho está organizado em quatro capítulos: Conceitos introdutórios, Espaços métricos e suas propriedades, Noções topológicas em espaços métricos e sequências.

No Capítulo 2, apresentaremos alguns conceitos introdutórios que são usados no decorrer dos demais capítulos, como a noção de conjuntos enumeráveis, conjuntos finitos e infinitos e as noções de supremo e ínfimo.

Já no Capítulo 3, iremos apresentar os conceitos iniciais de Espaços Métricos. Em um primeiro momento faremos um estudo da definição trabalhando algumas métricas, como a usual na reta e a métrica zero-um em qualquer conjunto M não-vazio. Em $\mathbb{R}^n$ vamos definir três maneiras distintas de medir distâncias entre dois elementos e demonstrar uma relação entre elas.

No Capítulo 4 vamos trabalhar noções topológicas em espaços métricos, definindo bolas, conjuntos limitados, e noções de conjuntos abertos e fechados, os conceitos de bolas.

Em nosso Capítulo 5, apresentaremos os conceitos de continuidade e continuidade uniforma de funções. Além do mais, apresentamos alguns resultados que serão úteis nos capítulos posteriores.

No Capítulo 6, abordaremos os conceitos de convergência de sequências em espaços métricos, assim como propriedades de convergência e topologia. Finalizando com a definição de Sequência de Cauchy.

Já no Capítulo 7, trouxemos a construção dos números reais a partir de sequências de Cauchy de números racionais, com o objetivo de demonstrar a completude dos números reais.

Com isso, em nosso Capítulo 8, tratamos dos espaços métricos completos, os quais tem a propriedade de toda sequência de Cauchy convergir.

Em nossos últimos dois capítulos 9 e 10, introduzimos, respectivamente, os conceitos de compacidade e espaços normados.

Capítulo

2

Preliminares

Neste primeiro capítulo, introduziremos alguns conceitos preliminares que servirão de base para os estudos subsequentes. Para isso, será necessário abordar temas como conjuntos finitos e a noção de supremo e ínfimo de um conjunto, entre outros conceitos que serão úteis na obtenção de resultados posteriores.

2.1 Conjuntos finitos e conjuntos enumeráveis

Vamos considerar os conjuntos:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\},$$
$$I_n = \{1, 2, 3, 4, ..., n\},$$

onde o primeiro é o conjunto dos números naturais e o segundo, o conjunto dos naturais de 1 a n.

Exemplo 2.1 *O conjunto I_3 é composto dos números naturais até 3, isto é, $I_3 = \{1, 2, 3\}$.*

Com base nos dois conjuntos apresentados é possível definir as noções de conjunto finito e conjunto enumerável.

Intuitivamente, diremos que um conjunto X será finito se for possível contar seus elementos. Ou ainda, se existir $n \in \mathbb{N}$ de forma que podemos colocar em correspondência um a um cada elemento de X com os elementos de I_n.

Definição 2.1 (Conjunto finito) *Um conjunto X é dito finito se é vazio, ou se, para algum $n \in \mathbb{N}$, existe uma bijeção*

$$f : I_n \to X.$$

Tomando $x_1 = f(1), ..., x_n = f(n)$, *temos então* $X = \{x_1, ..., x_n\}$.

Neste caso, diremos que X tem cardinalidade n, isto é, n é o número de elementos de X. O número cardinal é bem definido, o resultado que nos garante a boa definição é o corolário seguinte.

Corolário 2.1 *Se* $f : I_m \to X$ *e* $g : I_n \to X$ *forem bijeções então* $m = n$.

Demonstração *(ver [8], p. 4, Corolário 1).*

Exemplo 2.2 *Seja* $X = \{x \in \mathbb{R} : |3x + 1| = 4\}$. *Qual a cardinalidade de* X*?*

Solução *Temos que os elementos de* X *são as soluções da equação*

$$|3x + 1| = 4,$$

ou seja,

$$X = \left\{-\frac{5}{3}, 1\right\}.$$

Logo X *tem dois elementos e a função*

$$\begin{array}{rcc} f : I_2 & \to & X \\ 1 & \mapsto & -\dfrac{5}{3} \\ 2 & \mapsto & 1 \end{array}$$

é uma bijeção. ■

De forma intuitiva, um conjunto é considerado enumerável quando é possível organizar seus elementos em uma lista de tal forma que seja possível alcançar qualquer um desses elementos ao avançarmos suficientemente na lista. Em outras palavras, um conjunto é enumerável se for possível estabelecer uma correspondência um a um entre seus elementos e os números naturais.

Definição 2.2 (Conjunto enumerável) *Diremos que um conjunto* X *será enumerável se for finito ou quando existir uma bijeção* $f : \mathbb{N} \to X$. *Diremos que* f *será a enumeração dos elementos de* X.

Escrevendo

$$\begin{aligned} f(1) &= x_1 \\ f(2) &= x_2 \\ &\vdots \\ f(n) &= x_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

temos $X = \{x_1, ..., x_n, ...\}$.

Exemplo 2.3 *O conjunto $\mathbb{N}_I$ dos números inteiros positivos ímpares é enumerável.*

Solução *De fato, definamos*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N}_I \\ n &\mapsto f(n) = 2n - 1 \end{aligned}$$

Esquematicamente:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\ 1 & 3 & 5 & 7 & \cdots \end{array}$$

Verificaremos que de fato f é uma bijeção:

- *Notemos que f está bem definida. Primeiramente, dado $n \in \mathbb{N}$, temos $f(n) = 2n-1$, que é um ímpar positivo. Agora, suponhamos que, para $m = n \in \mathbb{N}$, tenhamos $f(m) \neq f(n)$, dessa forma*

$$\begin{aligned} f(m) &\neq f(n) \\ \Rightarrow 2m - 1 &\neq 2n - 1 \\ \Rightarrow 2m &\neq 2n \\ \Rightarrow m &\neq n, \end{aligned}$$

  o que contradiz nossa suposição inicial. Logo, f está bem definida.

- *f é injetiva. Sejam $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = f(m)$, temos então*

$$\begin{aligned} f(n) &= f(m) \\ 2n - 1 &= 2m - 1 \\ 2n &= 2m \\ n &= m, \end{aligned}$$

  o que prova que f é injetiva.

- *f é sobrejetora. De fato, se $x \in \mathbb{N}_I$, por definição de número ímpar existe $k \in \mathbb{Z}$, com $k \geq 0$ tal que $x = 2k+1$.*

  Dessa forma, basta fazer $n = k+1 \in \mathbb{N}$ (pois $k \geq 0$), e então

$$\begin{aligned} f(n) &= f(k+1) \\ &= 2(k+1)-1 \\ &= 2k+2-1 \\ &= 2k+1 \\ &= x. \end{aligned}$$

  isto é, dado x ímpar positivo sempre existirá um número natural n tal que $f(n) = x$, e portanto, a Im(f) é igual seu contradomínio o que faz de f sobrejetora.

Dessa maneira, concluímos que f é uma bijeção e, portanto, o conjunto dos números ímpares positivos é enumerável. ■

Exemplo 2.4 *O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ é enumerável.*

Solução *De fato, basta definir a bijeção $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ por:*

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n-1}{2}, & \text{se } n \text{ ímpar,} \\ -\dfrac{n}{2}, & \text{se } n \text{ par.} \end{cases}$$

Esquematicamente:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & \cdots \end{array}$$

De fato f é uma bijeção como verificaremos a seguir:

- *f **está bem definida**. De fato, se n for par, então pela definição de número par positivo existe um inteiro $k \geq 0$ tal que $n = 2k$. Dessa forma:*

$$\begin{aligned} f(n) &= f(2k) \\ &= -\frac{2k}{2} \\ &= -k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

  Analogamente, se n ímpar, então dado $k' \geq 0$ inteiro, pela definição de número *ímpar temos que* $n = 2k' + 1$. *Dessa maneira*

$$\begin{aligned} f(n) &= f(2k'+1) \\ &= \frac{2k'+1-1}{2} \\ &= \frac{2k'}{2} \\ &= k' \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Mais que isso dados $n, m \in \mathbb{N}$, *com* $n = m$, *temos dois casos:* n, m *par ou* n, m *ímpares. Em ambos os casos vamos supor* $f(n) \neq f(m)$. *Temos dois casos a verificar:*

– *Caso par*

$$\begin{aligned} f(n) &\neq f(m) \\ -\frac{n}{2} &\neq -\frac{m}{2} \\ n &\neq m. \end{aligned}$$

– *Caso ímpar*

$$\begin{aligned} f(n) &\neq f(m) \\ \frac{n-1}{2} &\neq \frac{m-1}{2} \\ n &\neq m. \end{aligned}$$

Notamos que em ambos os casos chegamos a uma contradição com nossa suposição inicial, $n = m$. *Concluímos que, dados* $n = m$ *naturais, então necessariamente a imagem será a mesma.*

- f ***é injetora***. *De fato, tomando* $m, n \in \mathbb{N}$ *com paridades diferentes é claro que* $m \neq n$, *e pela boa definição de* f *temos então que* $f(n) \neq f(m)$.

  Resta verificarmos o caso em que m *e* n *têm a mesma paridade.*

Caso n, m sejam pares distintos, então pela definição de número par existem distintos k_1, k_2 inteiros positivos tais que

$$n = 2k_1,$$
$$m = 2k_2.$$

Temos então

$$\begin{aligned} & k_1 & \neq & \ k_2 \\ \Leftrightarrow & \ 2k_1 & \neq & \ 2k_2 \\ \Leftrightarrow & \ n & \neq & \ m \\ \Leftrightarrow & \ -n & \neq & \ -m \\ \Leftrightarrow & \ \frac{-n}{2} & \neq & \ \frac{-m}{2} \\ \Leftrightarrow & \ f(n) & \neq & \ f(m). \end{aligned}$$

Caso n, m sejam ímpares distintos, então pela definição de número ímpar existem distintos k_3, k_4 inteiros positivos tais que

$$n = 2k_3 + 1,$$
$$m = 2k_4 + 1.$$

Temos então

$$\begin{aligned} & k_3 & \neq & \ k_4 \\ \Leftrightarrow & \ 2k_3 + 1 & \neq & \ 2k_4 + 1 \\ \Leftrightarrow & \ n & \neq & \ m \\ \Leftrightarrow & \ n - 1 & \neq & \ m1 \\ \Leftrightarrow & \ \frac{n-1}{2} & \neq & \ \frac{m-1}{2} \\ \Leftrightarrow & \ f(n) & \neq & \ f(m). \end{aligned}$$

Notemos que esgotamos todos os casos de $m \neq n$, e independente do caso concluímos que $f(m) \neq f(n)$, implicando assim que f é injetora.

- *Resta agora mostrarmos que f é sobrejetora. De fato, dado z um inteiro não negativo basta considerarmos o número ímpar $n = 2z + 1$, que é natural. Logo,*

$$f(n) = f(2z + 1) = \frac{2z + 1 - 1}{2} = \frac{2z}{2} = z,$$

e como z é um inteiro não negativo qualquer geramos então $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$.

Dado qualquer $z \in \mathbb{Z}^-$, existe $-z \in \mathbb{N}$. Dessa forma, basta considerarmos o número par $n = 2(-z)$. Dessa maneira:

$$f(n) = f(2(-z)) = -\frac{2(-z)}{2} = -(-z) = z.$$

Dos dois argumentos anteriores, concluímos que dado um número inteiro $z \in \mathbb{Z}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = z$.

Dessa maneira, como f é bem definida, e é uma bijeção dos naturais nos inteiros temos que $\mathbb{Z}$ é enumerável pela Definição 2.2. ■

Teorema 2.1 *Se $X \subset \mathbb{N}$, então X é enumerável.*

Demonstração *Se X é finito então, por definição, ele é enumerável. Suponha X não-finito.*

Chamemos de x_1 o menor elemento[1] *de X. Denotemos por x_2 o menor elemento do conjunto*

$$A_2 = X \backslash \{x_1\}.$$

Após isso, denotemos x_3 como sendo o menor elemento de

$$A_3 = X \backslash \{x_1, x_2\},$$

e assim por diante.

Definimos $f : \mathbb{N} \to X$, com $f(1) = x_1$, $f(2) = x_2$, assim por diante para os n primeiros elementos de $\mathbb{N}$. Notemos que

$$f(1) < f(2) < \cdots < f(n).$$

Consideremos $A_n = X \backslash \{f(1), ..., f(n)\}$. Notemos que $A_n \neq \varnothing$, pois X é infinito e $A_n \subset \mathbb{N}$, isto é, existe um menor elemento $x_{n+1} \in A_n$.

Pela construção dos elementos de $f(1), ..., f(n)$ e de A_n temos que $f(n) < x$ para todo $x \in A_n$. Definindo $f(n+1) := x_{n+1}$ temos então

$$f(1) < f(2) < \cdots < f(n) < f(n+1).$$

A função f definida é injetora pela ordenação de sua imagem. Suponhamos também que f não seja sobrejetora, isto é, que exista $x \in X - f(\mathbb{N})$. Então, $x \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é

$$f(n) < x,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, e portanto, $f(\mathbb{N})$ é limitado, o que é uma contradição pois só conjuntos finitos de $\mathbb{N}$ são limitados (ver [8], p. 6, Corolário 2), entretanto, $f(\mathbb{N})$ é ilimitado pela construção a partir de um conjunto infinito. ■

[1]Princípio da Boa Ordem: todo subconjunto dos naturais possui um menor elemento.

Corolário 2.2 *Se $f : X \to Y$ é injetiva e Y enumerável, então X é enumerável. Em particular, todo subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável.*

Demonstração *Como Y é enumerável existe uma bijeção $g : Y \to \mathbb{N}$. Consideremos a composta $h = g \circ f : X \to \mathbb{N}$.*

Como f e g são injetivas, logo, para $x, y \in X$ tais que $h(x) = h(y)$, temos:

$$\begin{aligned} h(x) &= h(y) \\ \Rightarrow (g \circ f)(x) &= (g \circ f)(y) \\ \Rightarrow g(f(x)) &= g(f(y)) \\ \Rightarrow f(x) &= f(y), \\ \Rightarrow x &= y, \end{aligned}$$

e portanto, h também é injetiva. Dessa maneira, temos que h é uma bijeção de X em um subconjunto dos naturais, isto é

$$h : X \to h(X) \subset \mathbb{N}.$$

Como $h(X) \subset \mathbb{N}$ temos pelo Teorema 2.1 que $h(X)$ é enumerável. Logo, existe

$$i : h(X) \to \mathbb{N},$$

que é uma bijeção. Dessa forma

$$i \circ h : X \to \mathbb{N},$$

é uma bijeção, e portanto, X é enumerável.

O esquema abaixo pode servir como um auxílio para entender a passagem ao lado

$$\begin{array}{c|ccccc} X & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\ h(X) & h(x_1) & h(x_2) & h(x_3) & h(x_4) & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\ \mathbb{N} & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \end{array}$$

Com efeito, se Y for finito, e f uma injetividade, então ela é uma bijeção de X sobre um subconjunto $f(X)$ de Y. Como $f(X)$ é subconjunto de um conjunto finito, ele é finito (ver [8], p. 5, Teorema 2), dessa forma como existe uma bijeção de X em um conjunto finito temos que X é também finito.

Em particular, caso $X \subset Y$, tomemos a aplicação inclusão, isto é

$$\begin{aligned} f : X &\hookrightarrow Y \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

concluindo assim que se $X \subset Y$, com Y enumerável, então X é enumerável. ∎

Corolário 2.3 *Seja X enumerável. Se $f : X \to Y$ é sobrejetiva, então Y enumerável.*

Demonstração *Seja $A \subset X$ tal que*

$$f|_A : A \to Y$$

seja bijetora.

A existência de A é garantida pela sobrejetividade de f. Como f pode não ser injetora, é possível que mais de um elemento $x \in X$ seja associado a um único $y \in Y$. Caso $y \in Y$ seja a imagem de um único $x \in X$ definamos $f(x) = y$, com $x \in A$. Caso $y \in Y$ seja imagem pela f de dois ou mais elementos de X, suponhamos $f(x_1) = f(x_2) = ... = f(x_n) = y$, escolhemos um deles, digamos que x_1, e adicionamos em A, já os demais, $\{x_2, ..., x_n\}$, adicionamos à $X - A$. Repetindo esse processo para todos $y \in Y$, temos então que para todo $y \in Y$ existe apenas um $a \in A$ tal que $f(a) = y$, e portanto, $f|_A$ é bijetora por construção.

Como $A \subset X$, temos que A é enumerável pelo Corolário 2.2. Como $f|_A$ é uma bijeção temos que existe sua inversa

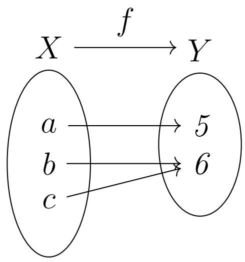
$$(f|_A)^{-1} : Y \to A,$$

que é injetiva. Dessa maneira, como A é enumerável, concluímos novamente pelo Corolário 2.2 que Y é enumerável. ∎

Exemplo 2.5 *Consideremos os conjuntos $X = \{a, b, c\}$ e $Y = \{5, 6\}$, defina $f : X \to Y$ como*

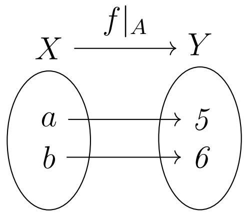
$$\begin{aligned} f(a) &= 5, \\ f(b) &= 6, \\ f(c) &= 6, \end{aligned}$$

o diagrama abaixo ilustra a função definida:



Restrinja o domínio para termos uma função bijetora.

Solução *Para termos uma função bijetiva é necessário então fazermos uma restrição no domínio, ou seja, vamos considerar apenas um elemento de* X *tal que* $f(x) = 5$*, e o mesmo para* $f(x_1) = 6$*. Consideremos o domínio* $D_{f|_A} = \{a, b\}$*. Dessa maneira,*



temos uma função bijetora. ■

Para demonstrarmos que o produto cartesiano de conjuntos enumeráveis é enumerável precisamos relembrar o Teorema Fundamental da Aritmética que aqui vamos colocar como lema por ser um resultado preliminar para o que desejamos demonstrar.

Lema 2.1 (Teorema Fundamental da Aritmética) *Todo inteiro* $a \geq 2$ *pode ser escrito como produto de números primos. Esta decomposição é única exceto pela ordem dos fatores primos.*

Demonstração *Ver [3], página 6, Teorema 3.1.* ■

Exemplo 2.6 *O número 1408 expresso em fatores primos é*

$$1408 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 = 2^7 \cdot 11.$$

Corolário 2.4 *O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.*

Demonstração *Primeiramente vamos demonstrar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.*

De fato, definimos

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ (n, m) &\mapsto 2^n 3^m. \end{aligned}$$

Temos que f é injetiva, pois

$$2^{n_1} 3^{m_1} = 2^{n_2} 3^{m_2} \Rightarrow (n_1, m_1) = (n_2, m_2),$$

pelo Lema 2.1 anterior. Logo pelo Corolário 2.2 temos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

Sejam X e Y enumeráveis, logo existem

$$f : \mathbb{N} \rightarrow X \quad e \quad g : \mathbb{N} \rightarrow Y,$$

bijetivas. Dessa maneira, dado $(x, y) \in X \times Y$ qualquer, pela sobrejetividade de f e g temos

$$\begin{aligned} \exists m \in \mathbb{N} \text{ tal que } f(m) &= x, \\ \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } g(n) &= y. \end{aligned}$$

Dessa forma, basta definirmos

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow X \times Y \\ (m, n) &\mapsto (f(m), g(n)), \end{aligned}$$

que é sobrejetiva pelo argumento anterior. Dessa maneira, pelo Corolário 2.3, $X \times Y$ é enumerável. ∎

Corolário 2.5 *O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável.*

Demonstração *Lembremos que $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$.*

Consideremos $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$. Como $\mathbb{Z}^* \subset \mathbb{Z}$, e o conjunto dos inteiros é enumerável temos pelo Corolário 2.2 que $\mathbb{Z}^*$ é enumerável. E, portanto, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ é enumerável pelo resultado anterior.

Definimos então

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* &\rightarrow \mathbb{Q} \\ (m, n) &\mapsto \frac{m}{n}, \end{aligned}$$

que é sobrejetora pela definição do conjunto dos racionais. Concluímos pelo Corolário 2.3 que $\mathbb{Q}$ é enumerável. ∎

Intuitivamente na noção de conjunto enumerável segue que $\mathbb{Q}^+$, racionais positivos, podem ser listados da maneira como se segue no esquema abaixo

$$\begin{tikzcd}
\frac{1}{1} \arrow[r] & \frac{1}{2} \arrow[dl] & \frac{1}{3} \arrow[dl] & \frac{1}{4} \arrow[dl] & \cdots \\
\frac{2}{1} \arrow[urr] & \frac{2}{2} \arrow[dl] & \frac{2}{3} \arrow[dl] & \frac{2}{4} & \cdots \\
\frac{3}{1} \arrow[uurrr] & \frac{3}{2} \arrow[dl] & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \cdots \\
\frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \cdots
\end{tikzcd}$$

Note que agrupamos os elementos cuja soma do numerador com o denominador é a mesma. Eliminando os elementos repetidos temos como resultado a lista

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, ...,$$

que contém os racionais positivos.

Corolário 2.6 *A reunião de uma família enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.*

Demonstração *Sejam $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ conjuntos enumeráveis. Então, existem bijeções*

$$\begin{aligned}
f_1 : \mathbb{N} &\rightarrow X_1 \\
f_2 : \mathbb{N} &\rightarrow X_2 \\
&\vdots \\
f_n : \mathbb{N} &\rightarrow X_n \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Tomemos o conjunto união dos conjuntos anteriores, isto é

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n.$$

No intuito de usar o Corolário 2.3 vamos definir uma função g de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ em X sobrejetiva.

Dado $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, a cada n natural fixado temos que $f_n(m)$, com m percorrendo os naturais, obtemos o conjunto X_n.

Para fixar a ideia, tome $n = 1$. Logo, $f_1(m)$, com $m \in \mathbb{N}$, descreve o conjunto X_1.

Dessa forma, definimos então a aplicação g como sendo

$$\begin{aligned} g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow X \\ (m, n) &\mapsto g(m, n) = f_n(m), \end{aligned}$$

e pelo argumento anterior, com n variando, obtemos todos os conjuntos X_n, ou seja,

$$Im(g) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$$

como descrito. Logo, g é sobrejetora e pelo Corolário 2.3 temos que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ é enumerável. ■

Exemplo 2.7 (Um conjunto não-enumerável) *O intervalo $(0, 1)$ dos números reais é não-enumerável.*

Solução *Suponha que o intervalo $(0, 1)$ seja enumerável. Desta forma, existe uma bijeção $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow (0, 1)$, e assim podemos listar todos os valores entre $(0, 1)$, de modo que $\sigma(i) = x_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$, como descreveremos abaixo*

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, x_{11}x_{12}x_{13}... \\ x_2 &= 0, x_{21}x_{22}x_{23}... \\ x_2 &= 0, x_{31}x_{32}x_{33}... \quad \textit{onde } 0 \leq x_{ij} \leq 9. \\ \vdots & \qquad\quad \vdots \\ x_j &= 0, x_{j1}x_{j2}x_{j3}... \\ \vdots & \qquad\quad \vdots \end{aligned}$$

Vamos considerar agora o número real $a = 0, a_1a_2a_3...$, onde

$$a_1 = \begin{Bmatrix} 1, x_{11} \neq 1 \\ 2, x_{11} = 1 \end{Bmatrix}, a_2 = \begin{Bmatrix} 1, x_{22} \neq 1 \\ 2, x_{22} = 1 \end{Bmatrix}, \cdots, a_j = \begin{Bmatrix} 1, x_{jj} \neq 1 \\ 2, x_{jj} = 1 \end{Bmatrix}, ...$$

Assim temos que $a \in (0,1)$, porém $a \neq x_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$, e portanto, existe um número no intervalo $(0,1)$ que não está listado por σ, o que é uma contradição. Concluímos então que $(0,1)$ é não-enumerável. ∎

Corolário 2.7 *O conjunto dos reais é não enumerável.*

Demonstração *Suponha que $\mathbb{R}$ seja enumerável, dessa forma pelo Corolário 2.2 temos que intervalo $(0,1)$ do exemplo anterior seria enumerável, como provamos que ele é não enumerável, temos então uma contradição. Logo, $\mathbb{R}$ é não enumerável.* ∎

2.2 Supremo e ínfimo

Antes de introduzirmos a noção de supremo e ínfimo em um subconjunto dos números reais, vamos iniciar falando de conjuntos limitados em $\mathbb{R}$.

Definição 2.3 *Consideremos X um subconjunto de $\mathbb{R}$.*

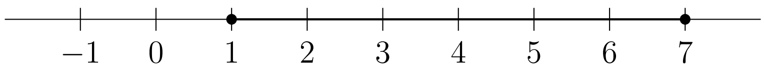
a) Dizemos que X é limitado superiormente se existir um número real b tal que $x \leq b$ para todo x pertencente a X. Nesse caso, X está contido no intervalo $(-\infty, b]$, onde b é dito cota superior de X.

b) Dizemos que X é limitado inferiormente se existir um número real a tal que $a \leq x$ para todo x pertencente a X. Nesse caso, X está contido no intervalo $[a, +\infty)$, onde a é dito cota inferior de X.

c) Se em X forem satisfeitas as condições (a) e (b) então diremos que X é limitado. Ou seja, X é limitado se, e somente se existem reais a e b de forma que $X \subset [a, b]$.

Exemplo 2.8 *Consideremos o conjunto $X = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 7\}$. Verifique se X é limitado.*

Solução *De fato, abaixo temos uma representação do conjunto X*



Notemos que 1 é a cota inferior de X e 7 a cota superior. Logo, X é limitado pois $X \subset [1, 7]$. ∎

Exemplo 2.9 *Verifique se o conjunto $X = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ é limitado.*

Solução *Primeiramente, notemos que o conjunto pode ser reescrito da forma*

$$X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\right\}.$$

Agora, notemos que o conjunto é limitado inferiormente por zero, de fato

$$0 \leq \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N},$$

além disso

$$n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 1 \leq n \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq 1,$$

isto é, o conjunto X é também limitado superiormente, logo é limitado tendo 0 como cota inferior e 1 como cota superior. ∎

Agora que temos em mente a ideia de cota superior e inferior de um conjunto, iremos definir supremo e ínfimo de um conjunto.

Definição 2.4 (Supremo) *Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado superiormente. Um elemento $b \in \mathbb{R}$ é dito* ***supremo*** *de X se valer:*

S.1 Para qualquer $x \in X$ temos que $x \leq b$.

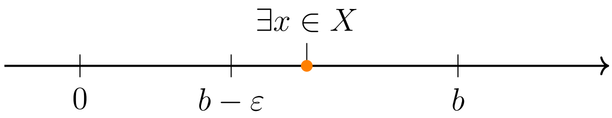
S.2 Se $c \in \mathbb{R}$ e $x \leq c$, $\forall x \in X$, então $b \leq c$.

Denotaremos $b = \sup X$.

Em outras palavras, temos que o supremo é a menor das cotas superiores de X. Podemos caracterizar as propriedades $S.1$ e $S.2$ da seguinte maneira

$$b = \sup X \Leftrightarrow \begin{cases} S1' & - \quad \forall x \in X, x \leq b, \\ S2' & - \quad \forall \varepsilon > 0, \exists x \in X \text{ tal que } b - \varepsilon < x < b. \end{cases}$$

Podemos representar essa caracterização do supremo geometricamente da seguinte maneira:



Definição 2.5 (ínfimo) *Seja $Y \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado inferiormente. Um elemento $a \in \mathbb{R}$ é dito* ***ínfimo*** *de Y se valer:*

I.1 Para qualquer $y \in Y$ temos que $a \leq y$.

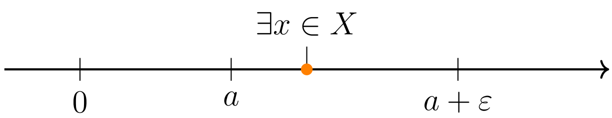
I.2 Se $c \in \mathbb{R}$ e $c \leq y$, $\forall y \in Y$, então $c \leq a$.

Denotaremos $a = \inf X$.

Em outras palavras, temos que o ínfimo é a maior das das cotas inferiores de Y. Podemos caracterizar as propriedades $I.1$ e $I.2$ da seguinte maneira

$$a = \inf Y \Leftrightarrow \begin{cases} I1' & - \quad \forall y \in Y, a \leq y, \\ I2' & - \quad \forall \varepsilon > 0, \exists y \in Y \text{ tal que } a < x < a + \varepsilon. \end{cases}$$

Podemos representar essa caracterização do ínfimo geometricamente da seguinte maneira:



Observação 2.1 *Caso $b = \sup X$ pertença a X, diremos que b é o* ***máximo*** *de X. Analogamente se $a = \inf X$ pertencer a X, diremos que a é o* ***mínimo*** *de X.*

Exemplo 2.10 *Consideremos $X = \{-1, 2, 3, 4, 10\}$, determine o ínfimo e o supremo de X.*

Solução *Temos:*

$$\sup X = 10 \text{ e } \inf X = -1,$$

que são, respectivamente, o máximo e o mínimo do conjunto. ■

Exemplo 2.11 *O conjunto $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ dos números naturais não é limitado superiormente.*

Solução *Se* $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ *fosse limitado superiormente, existiria* $c = \sup \mathbb{N}$. *Pela definição de supremo teríamos então que* $c - 1$ *não seria uma cota superior de* $\mathbb{N}$, *isto é, existiria* n *nos naturais, tal que* $c - 1 < n < c$, *ou ainda* $c < n + 1$, *mas* $n + 1 \in \mathbb{N}$, *logo* c *não é um supremo, contradizendo nossa hipótese. Logo,* $\mathbb{N}$ *é ilimitado superiormente.* ■

Exemplo 2.12 *Seja* $Y = \left\{ \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$. *Mostre que* $\inf Y = 0$.

Solução *Primeiramente, notemos que* $\dfrac{1}{n} > 0$ *para todo* n *natural, ou seja, zero é uma cota inferior de* Y. *Mostraremos agora que nenhum* $c > 0$ *é uma cota inferior de* Y. *De fato, suponha que* $c > 0$ *seja uma cota inferior para* Y, *então teríamos*

$$\frac{1}{n} > c, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sabemos que dado $c > 0$ *pelo Exemplo 2.11 que existe* n_0 *natural tal que*

$$n_0 > \frac{1}{c},$$

ou ainda,

$$c > \frac{1}{n_0} > 0,$$

o que contradiz o fato de c *ser cota inferior para* Y. *Logo,* $\inf Y = 0$. ■

Lema 2.2 *Sejam* $A, B \subset \mathbb{R}$ *conjuntos limitados e* $c \in \mathbb{R}$. *Dessa forma, também são limitados os conjuntos* $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$ *e* $c \cdot A = \{c \cdot x : x \in A\}$. *Além disso,* $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ *e* $\sup(c \cdot A) = c \cdot supA$, *com* $c \geq 0$.

Demonstração *Seja* $a = \sup A$ *e* $b = \sup B$.

Dado $z \in A + B$, *existem* $x \in A$ *e* $y \in B$ *tais que* $z = x + y$. *Como* a *é cota superior de* A *e* b *é cota superior de* B, *temos* $x \leq a$ *e* $y \leq b$. *Logo,*

$$z = x + y \leq a + b.$$

Isto mostra que $a + b$ *é cota superior de* $A + B$ *e, em particular,* $A + B$ *é limitado superiormente.*

Provaremos agora que $a+b$ é a menor das cotas superiores de $A+B$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, qualquer, existem x em A e y em B tal que

$$a - \frac{\varepsilon}{2} < x \quad e \quad b - \frac{\varepsilon}{2} < y,$$

daí segue que

$$a - \frac{\varepsilon}{2} + b - \frac{\varepsilon}{2} = a + b - \varepsilon < x + y,$$

isto é, $a+b$ é a menor das cotas superiores, e portanto,

$$\sup(A+B) = a + b = \sup A + \sup B.$$

Provemos agora a segunda afirmação. Tomemos $c > 0$, o caso $c = 0$ é trivial. Para qualquer x pertencente a A temos que

$$x \leq \sup A = a,$$

dessa maneira

$$c \cdot x \leq c \cdot a,$$

isto é, $c \cdot a$ é uma cota superior do conjunto $c \cdot A$ e, em particular, $c \cdot A$ é limitado superiormente. Além disso, dado qualquer d menor que $c \cdot a$ temos que

$$\frac{d}{c} < a.$$

Como a supremo de A, temos que $\frac{d}{c}$ não é uma cota superior de A, isto é, existe x pertencente a A tal que

$$\frac{d}{c} < x < a,$$

disso concluímos que

$$d < c \cdot x,$$

e portanto, d não é uma cota superior de $c \cdot A$, e então

$$\sup(c \cdot A) = c \cdot a = c \cdot \sup A,$$

como queríamos demonstrar. ■

Lema 2.3 *Seja* $A \subset \mathbb{R}$ *limitado superiormente e* $B \subset A$*, então* $\sup B \leq \sup A$.

Demonstração *De fato, como para todo* $b \in B$*, é dado que* $b \in A$*, vale* $b \leq \sup A$*. Portanto, da caracterização de supremo temos que*

$$\sup B \leq \sup A.$$

■

Disso, temos o seguinte corolário.

Corolário 2.8 *Sejam* $f, g : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ *funções limitadas. Então as funções*

$$f + g, c \cdot f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R},$$

são limitadas. Além disso,

$$\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g \ \ e \ \ \sup(c \cdot f) = c \cdot \sup f, c \geq 0.$$

Demonstração *Provaremos primeiramente a limitação de* $f + g$ *e* $c \cdot f$*. Como* f *e* g *são limitadas, por hipótese existem* k_1, k_2 *reais positivos, tais que*

$$\begin{array}{rcl} |f(x)| & \leq & k_1, \forall x \in \mathbb{X}, \\ |g(x)| & \leq & k_2, \forall x \in \mathbb{X}, \end{array}$$

seja $k_0 = k_1 + k_2$*. Logo, pela Desigualdade Triangular, temos*

$$\begin{array}{rcl} |f(x) + g(x)| & \leq & |f(x)| + |g(x)| \\ & < & k_1 + k_2 \\ & = & k_0, \end{array}$$

para todo x *pertencente a* $\mathbb{X}$*. Daí, temos que* $f + g$ *é uma função limitada. Da mesma maneira, notemos que*

$$|c \cdot f(x)| = |c| \cdot |f(x)| < c \cdot k_1,$$

e portanto, $c \cdot f$ *é também limitada.*

Agora, consideremos os conjuntos

$$\begin{aligned} A &= f(\mathbb{X}) = \{f(x) : x \in \mathbb{X}\}, \\ B &= g(\mathbb{X}) = \{g(x) : x \in \mathbb{X}\}, \\ C &= (f+g)(\mathbb{X}) = \{f(x)+g(x) : x \in \mathbb{X}\}, \end{aligned}$$

e notemos que $C \subset A + B$. Logo, pelo Lema 2.3, temos $\sup C \leq \sup(A+B)$. Daí, obtemos que

$$\begin{aligned} \sup(f+g) &= \sup C \\ &\leq \sup(A+B) \\ &= \sup A + \sup B \\ &= \sup f + \sup f. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \sup(cf) &= \sup\{c \cdot f(x) : x \in \mathbb{X}\} \\ &= \sup(cA) \\ &= c \sup A, \end{aligned}$$

quando $c \geq 0$. ■

Exemplo 2.13 *Consideremos os conjuntos A, B e C definidos no Corolário 2.8. Dê um exemplo onde f, g implica em $C \subsetneq A + B$.*

Solução *Consideremos f, g definidas da seguinte maneira*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, & \qquad g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto x+1, & x &\mapsto -x, \end{aligned}$$

teremos então

$$\begin{aligned} f+g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x)+g(x) = (x+1)+(-x) = 1. \end{aligned}$$

Vejamos que

$$\begin{aligned} A &= f(\mathbb{R}) = \{x+1 : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}, \\ B &= g(\mathbb{R}) = \{-x : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}, \\ C &= (f+g)(\mathbb{R}) = \{1 : x \in \mathbb{R}\} = \{1\}, \end{aligned}$$

ou seja, $\{1\} = C \subset A + B$. *Entretanto,* $-1 \in A + B$, *mas* $-1 \notin C$. *Logo,*

$$C \subsetneq A + B.$$

$\blacksquare$

Capítulo

3

Espaços métricos e suas propriedades

3.1 Definição e exemplos

Tanto no Cálculo quanto na Geometria, ainda que estudados de modos elementar e intuitivo, o papel da noção de "distância entre dois pontos" é fundamental, bem como conceitos que derivam deste contexto: "vizinhança de um ponto", "limite de sequências", dentre muitos outros. Assim, parece razoável, quando queremos uma generalização dos conceitos do Cálculo, da Análise Matemática e da Geometria, buscarmos também uma generalização do conceito de distância que independa dos "espaços" em questão.

De forma intuitiva, podemos dizer que um espaço métrico é um conjunto no qual temos uma maneira de medir a distância entre seus pontos, mais que isso espaços métricos são conjuntos munidos de um estrutura onde é possível conceituar operações com limites e continuidade, como dito anteriormente.

Umas das noções de distâncias mais usuais é a distância entre dois pontos no $\mathbb{R}^2$.

Sabemos, pela relação de Pitágoras, que

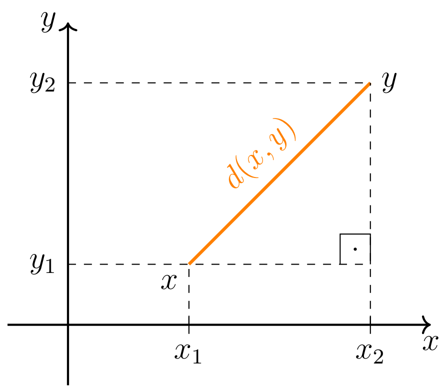
$$d(x,y)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

ou seja,

$$d(x,y) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

que é a distância usual no $\mathbb{R}^2$. Na Figura 3.1, temos a representação dessa métrica.

Figura 3.1: Representação distância entre pontos em $\mathbb{R}^2$.



Fonte: Do autor. Feita no Tikz.

Entretanto, podemos ter mais de uma maneira de medir a distância. Qualquer função que satisfaça as seguintes propriedades pode ser usada para medir distâncias:

- A distância entre dois pontos nunca é negativa e só é zero a distância de um ponto a ele mesmo.
- A distância é simétrica, isto é, a distância de x até y é igual à distância de y até y.
- A distância entre 2 pontos x e z é sempre menor ou igual à soma das distâncias de x até y e de y até z, onde y é um ponto qualquer.

Definição 3.1 (Métrica) *Seja M um conjunto. Uma **métrica** em M é uma função*

$$d : M \times M \to \mathbb{R},$$

onde $M \times M$ é o produto cartesiano de M por M:

$$M \times M = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in M\},$$

*que associa a cada par ordenado de $M \times M$ um número real $d(x, y)$, chamado a **distância** de x a y, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições, para quaisquer $x, y, z \in M$:*

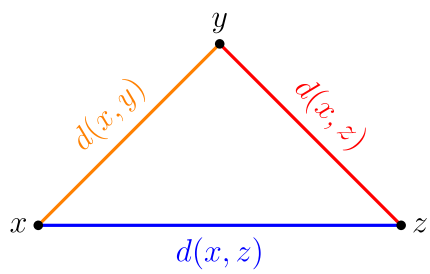
d1) $d(x, y) \geq 0$ *e* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

d2) $d(x, y) = d(y, x)$;

d3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

A condição (d3) é denominada "desigualdade triangular" representada na Figura 3.2.

Figura 3.2: Representação da Desigualdade Triangular.



Fonte: Do autor. Feita no Tikz.

Com a definição de métrica em um conjunto M podemos então definir o que é um espaço métrico.

Definição 3.2 (Espaço métrico) *Um **espaço métrico** $\mathcal{M}$ é um par:*

$$\mathcal{M} = (M, d : M \times M \to \mathbb{R}),$$

onde M é um conjunto e $d : M \times M \to \mathbb{R}$ é uma métrica sobre M.

Com essas definições faremos a partir de agora alguns exemplos de métricas.

Exemplo 3.1 (Métrica usual de $\mathbb{R}$) *Seja $M = \mathbb{R}$ e a função*

$$\begin{array}{rcl} d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ (x, y) & \mapsto & |x - y|. \end{array}$$

Temos que d é uma métrica em $\mathbb{R}$, denominada métrica usual de $\mathbb{R}$.

Solução *De fato, vamos verificar que são satisfeitas as condições necessárias para d ser uma métrica.*

d1) Temos, pela definição de módulo de números reais que $|x| \geq 0$ e $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Portanto, $d(x, y) = |x - y| \geq 0$ e

$$\begin{array}{rcl} d(x, y) & = & 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \\ & & \Leftrightarrow x - y = 0 \\ & & \Leftrightarrow x = y. \end{array}$$

d2) Lembremos que $(-1) \cdot x = -x$, para todo x real. Além do mais, $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Desta maneira,

$$\begin{array}{rcl} d(x, y) & = & |x - y| \\ & = & |-(y - x)| \\ & = & |-1||(y - x)| \\ & = & |y - x| \\ & = & d(y, x). \end{array}$$

d3) Primeiramente, vejamos que dados $a, b \in \mathbb{R}$, se $a + b \geq 0$, então por definição de módulo: $|a + b| = a + b \leq |a| + |b|$.

Caso contrário, $a + b < 0$, então por definição de módulo: $|a + b| = -(a + b) = -a - b = -a + (-b) \leq |a| + |b|$.

Chamando $a = x - z$ e $b = z - y$ segue que

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |x - y| \\ &= |x + (-z + z) + y| \\ &= |(x - z) + (z - y)| \\ &\leq |x - z| + |z - y| \\ &= d(x,z) + d(z,y), \end{aligned}$$

que é a desigualdade triangular. ∎

Exemplo 3.2 (Métrica zero-um) *Seja M um conjunto qualquer não-vazio. A função*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & se\ x = y, \\ 1, & se\ x \neq y, \end{cases}$$

*satisfaz as propriedades de métrica, e é denominada de **métrica zero-um** ou **métrica trivial**.*

Solução *De fato, para isso vamos verificar as condições necessárias para d ser uma métrica em M.*

d1) Para quaisquer x, y pertencentes a M por definição temos que

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, x = y, \\ 1, x \neq y, \end{cases}$$

ou seja, independente do caso temos que $d(x,y) \geq 0$.

Mais que isso, se $d(x,y) = 0$ resta $x = y$, caso contrário, se supormos $x \neq y$ por definição teríamos então $d(x,y) = 1$. Reciprocamente, por definição se $x = y$ então $d(x,y) = 0$.

d2) Para quaisquer x, y pertencentes a M temos dois casos a considerar.

- *Se $x = y$, então por definição $d(x,y) = 0 = d(y,x)$.*

- *Caso* $x \neq y$, *temos também por definição que* $d(x,y) = 1 = d(y,x)$.

Concluímos então que, independentemente do caso, temos:

$$d(x,y) = d(y,x).$$

d3) Dados x, y, z *pertencentes a* M *teremos alguns casos a considerar para verificar a última propriedade da Definição 3.1.*

- $x = y = z$. *Neste caso temos*

$$d(x,y) = d(x,z) = d(y,z),$$

daí

$$d(x,y) = 0 \leq 0 + 0 = d(x,z) + d(y,z).$$

- $x = y$ *e* $x \neq z$. *Aqui temos*

$$d(x,y) = 0 \text{ e } d(x,z) = d(y,z) = 1,$$

de onde segue que

$$d(x,y) = 0 \leq 1 + 1 = d(x,z) + d(y,z).$$

- $x = z$ *e* $z \neq y$. *Então*

$$d(x,z) = 0 \text{ e } d(x,y) = d(y,z) = 1,$$

que implica em

$$d(x,y) = 1 \leq 0 + 1 = d(x,z) + d(y,z).$$

- *Ainda, se* $y = z$ *e* $x \neq y$ *temos*

$$d(y,z) = 0 \text{ e } d(x,y) = d(x,z) = 1,$$

que implica em

$$d(x,y) = 1 \leq 1 + 0 = d(x,z) + d(y,z).$$

- *Caso $x \neq y$, $y \neq z$ e $x \neq z$ segue que*

$$d(x,y) = d(x,z) = d(y,z) = 1,$$

que implica em

$$d(x,y) = 1 \leq 1 + 1 = d(x,z) + d(y,z).$$

Verificamos então, que independentemente do caso, temos

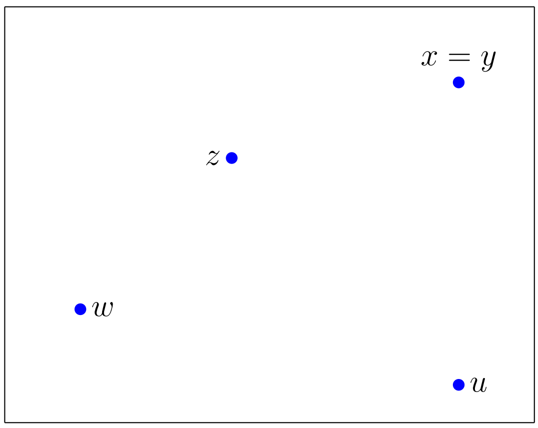
$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z).$$

Como foram verificadas as três condições da Definição 3.1, concluímos que d é uma métrica sobre um conjunto M qualquer não-vazio. ■

Na Figura 3.3 temos uma representação da métrica zero-um em um conjunto M não vazio.

$$\begin{aligned} d(x,y) &= 0 \\ d(x,z) &= 1 \\ d(x,u) &= 1 \\ d(x,w) &= 1 \\ d(w,z) &= 1 \\ d(w,u) &= 1 \\ d(z,u) &= 1 \end{aligned}$$

Figura 3.3: Representação da métrica zero-um em um conjunto M qualquer.



Fonte: Do autor. Feita no Tikz.

Notemos que essa métrica tem a deficiência de não diferenciar a distância entre pontos distintos. Por exemplo, se $M = \mathbb{R}$, temos então que $d(5,6) = d(5,7) = 1$, etc.

Consideremos agora o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Os pontos de $\mathbb{R}^n$ são as listas $x = (x_1, ..., x_n)$, onde cada uma das n coordenadas x_i é números real. Vamos definir a distância entre dois pontos em $\mathbb{R}^n$ de três maneiras diferentes, que são ditas métricas usualmente utilizadas.

Exemplo 3.3 (Métrica euclidiana) *Seja $M = \mathbb{R}^n$. Consideremos a função*

$$\begin{array}{rcl} d_E : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}, \\ ((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) & \mapsto & \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}. \end{array}$$

Vamos verificar que d_E é uma métrica.

Solução *Sejam x, y e z pertencentes a $\mathbb{R}^n$, com $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n)$ e $z = (z_1, ..., z_n)$. Temos:*

d1) Visto que, para qualquer índice $i = 1, 2, ..., n$ temos que

$$(x_i - y_i)^2 \geq 0,$$

segue que

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 \geq 0.$$

Mais que isso, se $d_E(x, y) = 0$, então

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = 0,$$

Entretanto, notemos que

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \geq \sqrt{(x_i - y_i)^2} = |x_i - y_i|,$$

para todo $i = 1, 2, ..., n$. Dessa forma,

$$0 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \geq \sqrt{(x_i - y_i)^2} = |x_i - y_i|, \forall i = 1, 2, ..., n,$$

e, portanto,

$$|x_i - y_i| = 0 \Leftrightarrow x_i - y_i = 0 \Leftrightarrow x_i = y_i$$

para $i = 1, ..., n$. Ou seja, $x = (x_1, ..., x_n) = (y_1, ..., y_n) = y$. Reciprocamente, se

$x = y$ então

$$x_i = y_i,$$

para $i = 1, 2, ..., n$, dessa maneira

$$x_i - y_i = 0, \forall i \in \mathbb{N},$$

daí obtemos

$$\begin{aligned} d_E(x,y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \\ &= \sqrt{0 + \cdots + 0} \\ &= \sqrt{0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

d2) Notemos que dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\begin{aligned} d_E(x,y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \\ &= \sqrt{(-(y_1 - x_1))^2 + \cdots + (-(y_n - x_n))^2} \\ &= \sqrt{(-1)^2(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (-1)^2(y_n - x_n)^2} \\ &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2} \\ &= d_E(y,x). \end{aligned}$$

d3) Agora consideremos x, y e z pertencentes a $\mathbb{R}^n$. Vemos que

$$\begin{aligned} (d_E(x,y))^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_i + 0 - y_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_i + (z_i - z_i) - y_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i + z_i - y_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[(x_i - z_i)^2 + 2(x_i - z_i)(z_i - y_i) + (z_i - y_i)^2\right] \\ &\overset{(\boldsymbol{S1} \text{ e } \boldsymbol{S2})}{=} \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)(z_i - y_i) + \sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}|x_i - z_i||z_i - y_i| + \sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2. \end{aligned}$$

Pelo Lema 12.2 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz), segue que

$$\begin{aligned}
(d_E(x,y))^2 &\leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 + 2\cdot\sum_{i=1}^{n}|x_i - z_i||z_i - y_i| + \sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 + 2\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2} + \sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2 \\
&\leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Da última desigualdade temos então que

$$(d_E(x,y))^2 \leq (d_E(x,z) + d(z,y))^2,$$

portanto,

$$d_E(x,y) \leq d_E(x,z) + d(z,y),$$

e vale a desigualdade triangular.

Por satisfazer (d1), (d2) e (d3), segue que d_E é uma métrica. ■

Exemplo 3.4 (Métrica retangular) *Seja $M = \mathbb{R}^n$. Consideremos a função*

$$\begin{aligned}
d_R : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}, \\
((x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)) &\mapsto |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|.
\end{aligned}$$

Vamos verificar que d_R é uma métrica.

Solução *De fato,*

d1) Dados $x = (x_1,...,x_n), y = (y_1,...,y_n) \in \mathbb{R}^n$ temos que, para qualquer índice $i = 1,2,...,n$,

$$|x_i - y_i| \geq 0,$$

pela definição usual de módulo de um número real. Dessa maneira,

$$d_R(x,y) = \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i| = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| \geq 0,$$

Além do mais, se $d_R(x,y) = 0$, *temos*

$$0 = d_R(x,y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| \geq |x_i - y_i|,$$

para qualquer índice $i = 1, ..., n$. *Dessa maneira, segue então pela definição de módulo que*

$$\begin{aligned} |x_i - y_i| &= 0 \\ &\Leftrightarrow x_i - y_i = 0 \\ &\Leftrightarrow x_i = y_i, \end{aligned}$$

para $i = 1, ..., n$. *E, portanto,* $x = y$.

Reciprocamente, tomando $x = y$, *temos que*

$$x_i = y_i,$$

para $i = 1, ..., n$. *Dessa maneira, temos que*

$$x_i - y_i = 0,$$

para $i = 1, ..., n$. *Daí,*

$$\begin{aligned} d_R(x,y) &= |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| \\ &= |0| + \cdots + |0| \\ &= 0. \end{aligned}$$

d2) Como

$$\begin{aligned} |x_i - y_i| &= |-(y_i - x_i)| \\ &= |-1||y_i - x_i| \\ &= |y_i - x_i|, \end{aligned}$$

para qualquer $i \in \{1, ..., n\}$, *temos que*

$$\begin{aligned} d_R(x,y) &= |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| \\ &= |y_1 - x_1| + \cdots + |y_n - x_n| \\ &= d_R(y,x). \end{aligned}$$

d3) Sejam $x = (x_1, ..., x_n)$ *e* $y = (y_1, ..., y_n)$ *pertencentes a* $\mathbb{R}^n$. *A desigualdade triangular segue diretamente do fato de que, dado qualquer* $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{R}^n$, *para todo* $i \in \{1, ..., n\}$, *vale*

$$|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i|,$$

que é a desigualdade triangular de números reais demonstrada no Exemplo 3.1. Daí, segue então

$$\begin{aligned} d_R(x, y) &= \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) \\ &\overset{(\textbf{\textit{S1 e S2}})}{=} \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i| \\ &= d_R(x, z) + d_R(z, y). \end{aligned}$$

Por satisfazer (d1), (d2) e (d3), segue que d_R *é uma métrica.* ∎

Exemplo 3.5 (Métrica do máximo) *Seja* $M = \mathbb{R}^n$. *Consideremos a função*

$$\begin{aligned} d_M : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}, \\ ((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) &\mapsto \max\{|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|. \end{aligned}$$

Vamos verificar que d_M *é uma métrica.*

Solução *De fato,*

d1) Dados $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ *temos, para qualquer índice* $i = 1, 2, ..., n$,

$$|x_i - y_i| \geq 0,$$

pela definição usual de módulo de um número real. Dessa maneira,

$$d_M(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| \geq 0,$$

Além do mais, se $d_M(x, y) = 0$, *temos*

$$0 = d_M(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|,$$

como temos que $|x_i - y_i|$*, com* $i = 1, ..., n$ *são números não negativos, então que para todo* i*,*

$$|x_i - y_i| = 0,$$

o que implica em $x = y$*.*

Reciprocamente, se $x = y$*, temos então que, para todo* $i = 1, ..., n$*,*

$$x_i - y_i = 0,$$

daí obtemos

$$d_M(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| = 0.$$

d2) Temos que

$$|x_i - y_i| = | - (y_i - x_i)| = | - 1||y_i - x_i| = |y_i - x_i|,$$

para qualquer $i \in \{1, ..., n\}$*, vale*

$$\begin{aligned} d_M(x, y) &= \max\{|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|\} \\ &= \max\{|y_1 - x_1|, ..., |y_n - x_n|\} \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} |y_i - x_i| \\ &= d_M(y, x). \end{aligned}$$

d3) Sejam $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$*. A desigualdade triangular segue diretamente do fato de que, dado qualquer* $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{R}^n$*, para todo* $i \in \{1, ..., n\}$*, vale*

$$|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i|,$$

que é a desigualdade triangular de números reais demonstrada no Exemplo 3.1. Em particular,

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\} &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - z_i| + |z_i - y_i|\} \\ &\overset{Lema\ 12.3}{=} \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - z_i|\} + \max_{1 \leq i \leq n} \{|z_i - y_i|\}, \end{aligned}$$

isto é,

$$d_M(x, y) \leq d_M(x, z) + d_M(z, y).$$

Por satisfazer (d1), (d2) e (d3), segue que d_M é uma métrica. ■

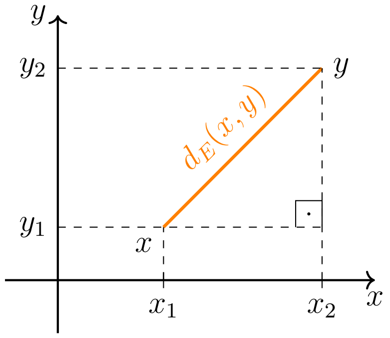
Com o objetivo de exemplificar geometricamente as três distâncias definidas anteriormente, consideremos $M = \mathbb{R}^2$. Consideremos os diagramas abaixo:

No caso de d_E, que é a medida euclidiana, temos

$$d_E(x, y) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

que é a hipotenusa do triângulo determinado como vemos na Figura 3.4.

Figura 3.4: Representação da métrica euclidiana em $\mathbb{R}^2$.



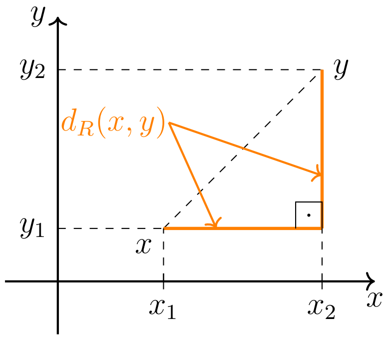
Fonte: Do autor. Feita no Tikz.

No caso de d_R, que é a métrica retangular, temos

$$d_R(x, y) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|,$$

que é a soma dos catetos do triângulo determinado como vemos na Figura 3.5.

Figura 3.5: Representação da métrica retangular em $\mathbb{R}^2$.



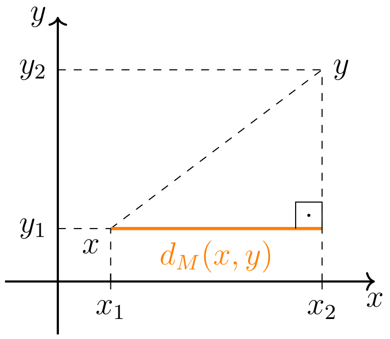
Fonte: Do autor. Feita no Tikz.

No caso de d_M, que é a métrica do máximo, temos

$$d_M(x, y) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\},$$

que é a medida do maior cateto como vemos na Figura 3.6.

Figura 3.6: Representação da métrica do máximo em $\mathbb{R}^2$.



Fonte: Do autor. Feita no Tikz.

Podemos relacionar as três métricas definidas anteriormente por meio do seguinte resultado.

Proposição 3.1 *Sejam as métricas d_E, d_R e d_M definidas anteriormente. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ quaisquer, tem-se*

$$d_M(x,y) \overset{a}{\leq} d_E(x,y) \overset{b}{\leq} d_R(x,y) \overset{c}{\leq} n \cdot d_M(x,y).$$

Demonstração *De fato,*

a) Notemos que

$$d_M(x,y) = \max\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\} = |x_j - y_j|,$$

para um certo $j \in \{1, ..., n\}$. Daí

$$\begin{aligned} d_M(x,y) &= |x_j - y_j| \\ &= \sqrt{(x_j - y_j)^2} \\ &\leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_j - y_j)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \\ &= d_E(x,y). \end{aligned}$$

Portanto,

$$d_M(x,y) \leq d_E(x,y).$$

b) Vejamos que

$$\begin{aligned} d_E(x,y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \\ &= \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2} \\ &\leq \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2 + 2\sum_{i \neq j} |x_i - y_i| \cdot |x_j - y_j|} \\ &= \sqrt{(|x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|)^2} \\ &= |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| \\ &= d_R(x,y). \end{aligned}$$

Portanto,

$$d_E(x,y) \leq d_R(x,y).$$

c) Sabemos que

$$|x_i - y_i| \leq \max\{|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|\},$$

para qualquer $i = 1, 2, ..., n$. *Temos então*

$$\begin{aligned} d_R(x,y) &= |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| \\ &\leq \max\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\} + \cdots + \max\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\} \\ &= n \cdot d_M(x,y). \end{aligned}$$

Portanto,

$$d_R(x,y) \leq n \cdot d_M(x,y).$$

Logo, concluímos que

$$d_M(x,y) \leq d_E(x,y) \leq d_R(x,y) \leq n \cdot d_M(x,y),$$

como queríamos. ■

3.2 Métrica induzida e subespaço

Definição 3.3 (Métrica induzida) *Sejam* $\mathcal{M} = (M, d)$ *um espaço métrico e* $N \subseteq M$, *com* N *não vazio. Podemos definir em* N *a* ***métrica induzida*** $d_N = d \restriction_{N \times N}$*:*

$$\begin{aligned} d_N : N \times N &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto d(x,y). \end{aligned}$$

Neste caso, dizemos que (N, d) *é um* ***subespaço métrico*** *de* $\mathcal{M}$.

$$\begin{tikzcd} M \times M \arrow[r, "d"] & \mathbb{R} \\ N \times N \arrow[u, "M \times M \lfloor_{N \times N}"] \arrow[ur, "d_N"'] & \end{tikzcd}$$

Exemplo 3.6 *Consideremos* $(\mathbb{R}^2, d_E)$ *e* $\mathbb{R}$ *como subconjunto de* $\mathbb{R}^2$, *ou seja*

$$\mathbb{R} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Observemos que a métrica d_E restrita a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ coincide com a métrica do Exemplo 3.1. De fato,

$$\begin{aligned} d_E(x,y) &= \sqrt{(x-y)^2 + (0-0)^2} \\ &= \sqrt{(x-y)^2} \\ &= |x-y|. \end{aligned}$$

3.3 Produto cartesiano de espaços métricos

Consideremos M e N espaços métricos, cujas métricas indicaremos, respectivamente, por d_M e d_N.

Definição 3.4 *O produto cartesiano $M \times N$ é o conjunto dos pares ordenados $z = (x,y)$, onde $x \in M$ e $y \in N$. A distância de $z = (x,y)$ a $z' = (x', y')$, onde $z, z' \in M \times N$, definida como:*

$$\begin{aligned} d(z,z') &= \sqrt{d_N(x,x')^2 + d_M(y,y')^2}, \ \textit{ou} \\ d_1(z,z') &= d_N(x,x') + d_M(y,y'), \ \textit{ou} \\ d_2(z,z') &= \max\{d_N(x,x'), d_M(y,y')\}, \end{aligned}$$

é uma métrica em $M \times N$.

Generalizando, sejam $M_1, M_2, \ldots, M_n$ espaços métricos. O produto cartesiano $M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$ é o conjunto das n-uplas $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, onde $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \ldots, x_n \in M_n$. Com qualquer uma das três métricas abaixo:

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sqrt{d_{M_1}(x_1,y_1)^2 + d_{M_2}(x_2,y_2)^2 + \cdots + d_{M_n}(x_n,y_n)^2}, \\ d_1(z,z') &= d_{M_1}(x_1,y_1) + d_{M_2}(x_2,y_2) + \cdots + d_{M_n}(x_n,y_n), \\ d_2(z,z') &= \max\{d_{M_1}(x_1,y_1), d_{M_2}(x_2,y_2), \ldots, d_{M_n}(x_n,y_n)\}, \end{aligned}$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in M$, o conjunto $M_1 \times \cdots \times M_n$ é um espaço métrico.

Exemplo 3.7 *Mostre que $M \times N$ com a distância d_1 define um espaço métrico.*

Solução *De fato, para isso, vamos verificar se são satisfeitas as condições de métrica em d_1. Para que $M \times N$ seja um espaço métrico sob d_1, é necessário que as seguintes condições sejam atendidas:*

d1) *Dados* $x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2) \in M \times N$, *temos*

$$d_1(x, y) = d_M(x_1, x_2) + d_N(y_1, y_2),$$

não negativo, pois d_M *e* d_N *são métricas. Além do mais, como* d_M *e* d_N *são métricas,*

$$\begin{aligned}
0 &= d_1(x, y) = d_M(x_1, x_2) + d_N(y_1, y_2) \\
\Leftrightarrow 0 &= d_M(x_1, x_2) + d_N(y_1, y_2) \\
\Leftrightarrow 0 &= d_M(x_1, x_2) \text{ e } 0 = d_N(y_1, y_2) \\
\Leftrightarrow x_1 &= x_2 \text{ e } y_1 = y_2 \\
\Leftrightarrow x &= y.
\end{aligned}$$

d2) *Dados* $x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2) \in M \times N$, *temos*

$$\begin{aligned}
d_1(x, y) &= d_M(x_1, x_2) + d_N(y_1, y_1) \\
&= d_M(x_2, x_1) + d_N(y_2, y_1) \\
&= d_1(y, x),
\end{aligned}$$

e, portanto, d_1 *é simétrico.*

d3) *Para demonstrar que vale a desigualdade triangular em* d_1, *vamos utilizar a desigualdade triangular válida em* d_M *e* d_N. *Isto é, dados* $x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2), z = (x_2, y_2) \in M \times N$ *temos*

$$\begin{aligned}
d_1(x, y) &= d_M(x_1, x_2) + d_N(y_1, y_2) \\
&\leq [d_M(x_1, x_3) + d_M(x_3, x_2)] + [d_N(y_1, y_3) + d_N(y_3, y_2)] \\
&= d_M(x_1, x_3) + d_N(y_1, y_3) + d_M(x_3, x_2) + d_N(y_3, y_2) \\
&= [d_M(x_1, x_3) + d_N(y_3, y_2)] + [d_M(x_3, x_2) + d_N(y_3, y_2)] \\
&= d_1(x, z) + d_1(z, y).
\end{aligned}$$

Como são satisfeitas as condições para d_1 *ser uma métrica, temos que* $(M \times N, d_1)$ *é um espaço métrico.* ■

Proposição 3.2 *Sejam* d, d_1 *e* d_2 *as métricas da Definição 3.4. Para quaisquer* $x, y \in$

$M = M_1 \times \cdots \times M_n$, *temos*

$$d_2(x,y) \leq d(x,y) \leq d_1(x,y) \leq n \cdot d_2(x,y).$$

Demonstração *Sejam* $x, y \in M$ *e suponha, sem perda de generalidade, que* $d_2(x,y) = d_{M_1}(x_1,y_1)$, *assim:*

$$\begin{aligned}
d_2(x,y) &= d_{M_1}(x_1,y_1) \\
&= \sqrt{d_{M_1}(x_1,y_1)^2} \\
&\leq \sqrt{d_{M_1}(x_1,y_1) + d_{M_2}(x_2,y_2) + \cdots + d_{M_n}(x_n,y_n)} \\
&= d(x,y).
\end{aligned}$$

Além do mais,

$$\begin{aligned}
[d_1(x,y)]^2 &= \left[\sum_{k=1}^{n} d(x_k,y_k)\right]^2 \\
&= d(x_1,y_1) \cdot \sum_{k=1}^{n} d(x_k,y_k) + \cdots + d(x_n,y_n) \cdot \sum_{k=1}^{n} d(x_k,y_k) \\
&= (d(x_1,y_1))^2 + d(x_1,y_1) \cdot d(x_2,y_2) + \cdots + d(x_1,y_1) \cdot d(x_n,y_n) \\
&\quad + \cdots + (d(x_n,y_n))^2 + d(x_n,y_n) \cdot \sum_{k=1}^{n-1} d(x_k,y_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (d(x_k,y_k))^2 + 2\sum_{i<j} d(x_i,y_i) \cdot d(x_j,y_j) \\
&\geq \sum_{k=1}^{n} (d(x_k,y_k))^2 \\
&= [d(x,y)]^2
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$d(x,y) \leq d_1(x,y).$$

Por fim,

$$\begin{aligned}
n \cdot d_2(x,y) &= d_{M_1}(x_1,y_1) + \cdots + d_{M_1}(x_1,y_1) \\
&\geq d_{M_1}(x_1,y_1) + d_{M_2}(x_2,y_y) + \cdots + d_{M_n}(x_n,y_n) \\
&= d_1(x,y).
\end{aligned}$$

Dessa maneira,

$$d_2(x,y) \leq d(x,y) \leq d_1(x,y) \leq n \cdot d_2(x,y).$$

■

3.4 Espaço de funções reais limitadas

Dado $\mathbb{X}$ um conjunto não vazio, uma função $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ é dita limitada se existir um número real k tal que

$$|f(x)| \leq k,$$

para qualquer x pertencente a $\mathbb{X}$. Indicaremos por $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{R})$, o conjunto das funções limitadas de $\mathbb{X}$ em $\mathbb{R}$. Para quaisquer $f, g \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{R})$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ definimos

S) $(f+g)(x) = f(x) + g(x),$ para todo $x \in \mathbb{X}$.

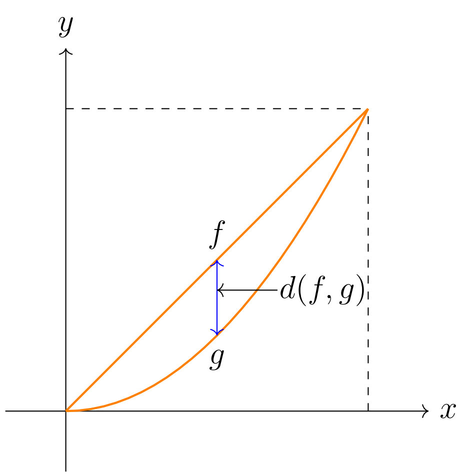
P) $(\alpha f)(x) = \alpha f(x),$ para todo $x \in \mathbb{X}$.

Assim, para que o conjunto $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{R})$ seja um espaço métrico, basta definir sua métrica da seguinte forma:

$$d(f,g) = \sup_{x \in \mathbb{X}} \{|f(x) - g(x)|\}.$$

Na Figura 3.7 temos uma representação da métrica definida acima.

Figura 3.7: Representação da métrica do supremo.



Fonte: Do autor. Feita no Tikz.

Observemos que, para qualquer x pertencente a $\mathbb{X}$, temos um número real $|f(x)-g(x)|$. O supremo do conjunto desses números é a distância entre f e g. A existência desse supremo é garantida pela limitação de ambas as funções. De fato, como f e g são limitadas, temos que existem k_1 e k_2 números reais, tais que

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq k_1, \\ |g(x)| &\leq k_2, \end{aligned}$$

para todo x pertencente a $\mathbb{X}$. Pela desigualdade triangular, temos então

$$\begin{aligned} |f(x)-g(x)| &\leq |f(x)|+|g(x)| \\ &\leq k_1+k_2 \\ &= k_3, \end{aligned}$$

para todo x pertencente a $\mathbb{X}$, isto é, o conjunto $\{|f(x)-g(x)| : x \in \mathbb{X}\}$ é limitado e, portanto, admite um supremo.

Proposição 3.3 *Considere o conjunto das funções limitadas $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{R})$. Logo*

$$d(f,g) = \sup_{x\in\mathbb{X}}\{|f(x)-g(x)|\}$$

é uma métrica sobre $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{R})$.

Demonstração *Sejam f, g e h funções pertencentes a $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{R})$. Provaremos agora que são satisfeitas as condições de métrica.*

d1) Notemos que $d(f,g) \geq 0$ por definição, pois para cada x pertencente a $\mathbb{X}$, o número real $|f(x)-g(x)|$ é não-negativo pela definição de módulo de um número real.

Além do mais,

$$\begin{aligned} d(f,g)=0 &\Leftrightarrow \sup_{x\in\mathbb{X}}\{|f(x)-g(x)|\}=0 \\ &\Leftrightarrow |f(x)-g(x)|=0, \forall x\in\mathbb{X} \\ &\Leftrightarrow f(x)=g(x), \forall x\in\mathbb{X} \\ &\Leftrightarrow f=g. \end{aligned}$$

d2) $d(f,g)=d(g,f)$ segue imediatamente das propriedades de módulo de números reais.

De fato, notemos que para qualquer x pertencente a $\mathbb{X}$:

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &= |(-1) \cdot (g(x) - f(x))| \\ &= |(-1)| \cdot |g(x) - f(x)| \\ &= |g(x) - f(x)|, \end{aligned}$$

em particular

$$\begin{aligned} d(f,g) &= \sup_{x\in\mathbb{X}}\{|f(x) - g(x)|\} \\ &= \sup_{x\in\mathbb{X}}\{|g(x) - f(x)|\} \\ &= d(g,f). \end{aligned}$$

d3) Dados f, g e h em $\mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{R})$, temos que para qualquer x pertencente a $\mathbb{X}$ vale

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &= |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \\ &\leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|, \end{aligned}$$

logo temos que

$$\sup_{x\in\mathbb{X}}\{|f(x) - g(x)|\} \leq \sup_{x\in\mathbb{X}}\{|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|\}.$$

Além do mais, segue do Corolário 2.8 que

$$\sup_{x\in\mathbb{X}}\{|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|\} \leq \sup_{x\in\mathbb{X}}\{|f(x) - h(x)|\} + \sup_{x\in\mathbb{X}}\{|h(x) - g(x)|\},$$

e assim, concluímos que

$$\sup_{x\in\mathbb{X}}\{|f(x) - g(x)|\} \leq \sup_{x\in\mathbb{X}}\{|f(x) - h(x)|\} + \sup_{x\in\mathbb{X}}\{|h(x) - g(x)|\},$$

isto é,

$$d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g).$$

Assim, d é uma métrica no espaço das funções limitadas. ■

Capítulo

4

Noções topológicas em espaços métricos

Neste capítulo estudaremos alguns importantes conceitos de espaços métricos, introduziremos alguns exemplos e suas principais propriedades.

Iniciaremos com a noção de bola aberta, do qual será útil para definir conceitos como conjuntos abertos e outras noções topológicas.

Definição 4.1 (Bola aberta) *Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico, x_0 pertencente a M e um número real r positivo. A* ***bola aberta de centro*** x_0 ***e raio*** r *é o conjunto*

$$B(x_0, r) = \{x \in M : d(x, x_0) < r\}.$$

Exemplo 4.1 *Notemos que em qualquer conjunto M com a métrica zero-um do Exemplo 3.2 temos que a bola aberta de centro x_0 é dada por*

$$B(x_0, r) = \begin{cases} M, & se\ r \geq 1, \\ \{x_0\}, & se\ r < 1, \end{cases}$$

ou seja, se o raio for maior ou igual a um, a bola aberta coincide com o espaço. Caso for menor que um, temos que a bola aberta é apenas o centro x_0.

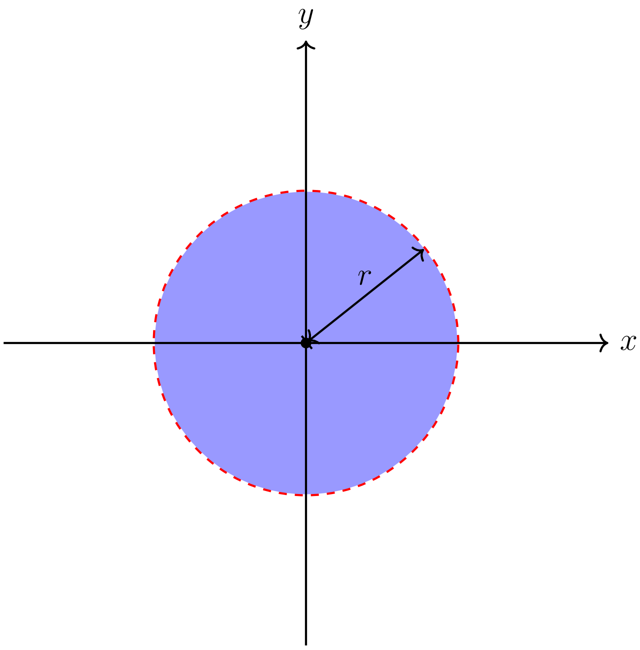
Exemplo 4.2 *Esboçaremos agora a bola aberta de centro $(0,0)$ e raio 1 no espaço métrico $(\mathbb{R}^2, d_E)$, em que d_E é a métrica euclidiana.*

Solução *Sabemos que*

$$\begin{aligned} B((0,0),1) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_E((x,y),(0,0)) < 1\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} < 1\}. \end{aligned}$$

Para o esboço, vamos determinar, primeiramente, a curva que delimita a bola aberta, isto é, os pontos de $\mathbb{R}^2$ *tais que* $x^2 + y^2 = 1$*, que da geometria sabemos que é a equação que representa uma circunferência, dessa forma* $\sqrt{x^2 + y^2} < 1$ *são os pontos interiores da mesma. Na Figura 4.1 temos uma representação do nosso esboço.* ■

Figura 4.1: Representação da bola aberta com a métrica euclidiana no $\mathbb{R}^2$.



Fonte: Do autor. Feita no Tikz.

Exemplo 4.3 *Esboçaremos agora a bola aberta de centro* $(0, 0)$ *e raio 1 no espaço métrico* $(\mathbb{R}^2, d_R)$*, em que* d_R *é a métrica retangular.*

Solução *Sabemos que*

$$\begin{aligned} B((0,0),1) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_R((x,y),(0,0)) < 1\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}, \end{aligned}$$

para o nosso esboço vamos determinar, primeiramente, a curva que delimita a bola aberta, isto é, os pontos de $\mathbb{R}^2$ *tais que* $|x| + |y| = 1$*. Para isso, temos quatro casos a considerar:*

1. (x, y) *no primeiro quadrante, ou seja,* $x, y > 0$*, de modo que a curva que delimita a bola aberta é dada por* $1 = |x| + |y| = x + y$*, ou seja,* $y = 1 - x$*;*

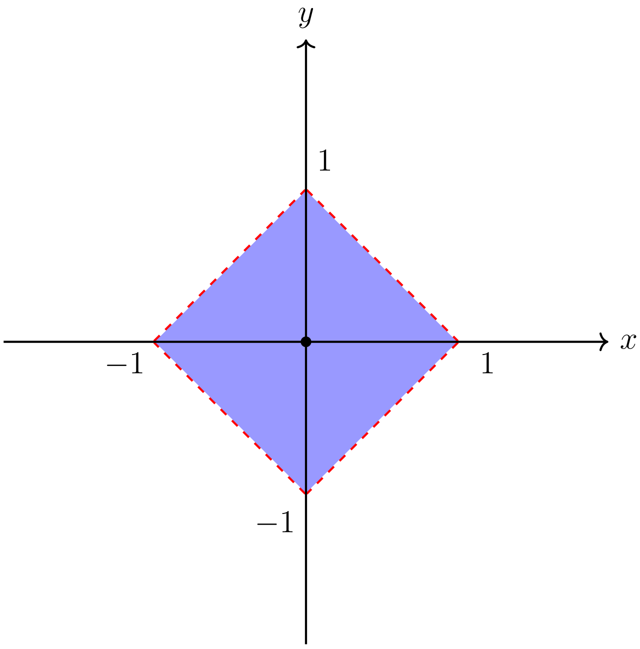
2. (x, y) *no segundo quadrante, ou seja,* $x < 0$ *e* $y > 0$*, de modo que a curva que delimita a bola aberta é dada por* $1 = |x| + |y| = -x + y$*, ou seja,* $y = 1 + x$*;*

3. (x, y) *no terceiro quadrante, ou seja,* $x < 0$ *e* $y < 0$*, de modo que a curva que delimita a bola aberta é dada por* $1 = |x| + |y| = -x - y$*, ou seja,* $y = -1 - x$*;*

4. (x, y) *no quarto quadrante, ou seja,* $x > 0$ *e* $y < 0$*, de modo que a curva que delimita a bola aberta é dada por* $1 = |x| + |y| = x - y$*, ou seja,* $y = x - 1$*.*

Portanto, no espaço métrico $(\mathbb{R}^2, d_R)$*, uma bola aberta de centro em* $(0, 0)$ *e raio 1 é constituída por todos os pontos* (x, y) *internos à curva obtida pela concatenação dos quatro segmentos acima, como visto na Figura 4.2.* ■

Figura 4.2: Representação da bola aberta com a métrica retangular no $\mathbb{R}^2$.



Fonte: Do autor. Feita no Tikz.

Exemplo 4.4 *Esboçaremos agora a bola aberta de centro* $(0, 0)$ *e raio 1 no espaço métrico* $(\mathbb{R}^2, d_M)$*, em que* d_M *é a métrica do máximo.*

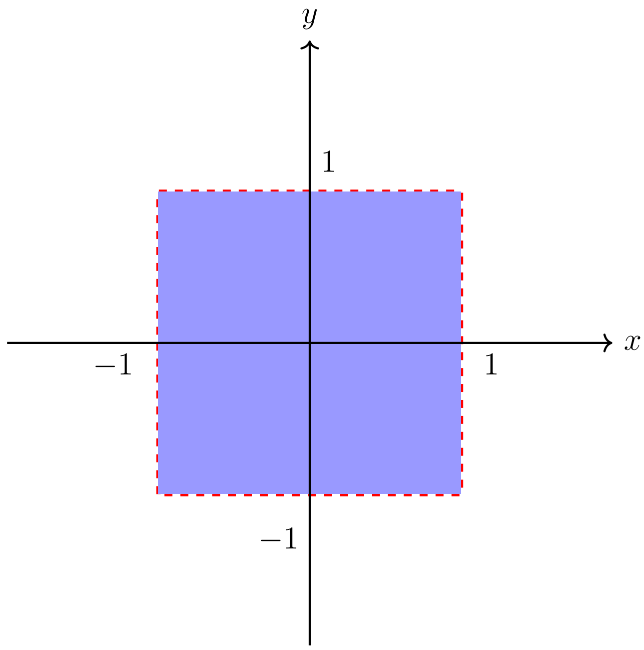
Solução *Temos que que a bola aberta que queremos e da forma*

$$\begin{aligned} B((0,0),1) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d_M((x, y), (0, 0)) < 1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} < 1\}. \end{aligned}$$

Primeiramente, notemos que a curva que delimita a bola aberta é constituída pelos pontos de $\mathbb{R}^2$ *tais que* $\max\{|x|, |y|\} = 1$*, ou seja, o quadrado de vértices* $(-1, -1)$, $(-1, 1)$,

$(1, -1)$ *e* $(1, 1)$. *Portanto, a bola aberta que queremos são os pontos interiores ao quadrado como mostrado na Figura 4.3.* ■

Figura 4.3: Representação da bola aberta com a métrica do máximo no $\mathbb{R}^2$.



Fonte: Do autor. Feita no Tikz.

Definição 4.2 (Bola fechada) *Sejam* $\mathcal{M} = (M, d)$ *um espaço métrico,* x_0 *pertencente a* M *e um número real* r *positivo. A* ***bola fechada de centro*** x_0 ***e raio*** r *é o conjunto*

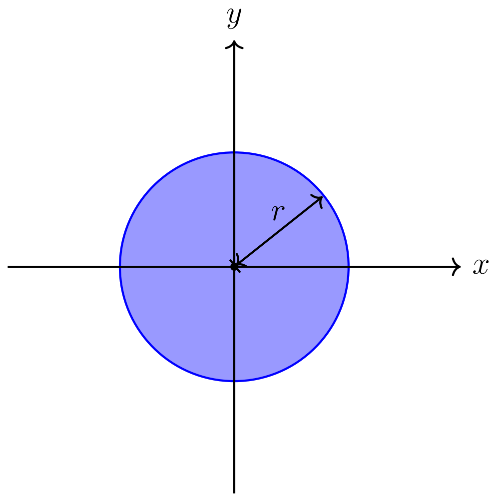
$$B[x_0, r] = \{x \in M : d(x, x_0) \leq r\}.$$

Definição 4.3 (Esfera) *Sejam* $\mathcal{M} = (M, d)$ *um espaço métrico,* x_0 *pertencente a* M *e um número real* r *positivo. A* ***esfera de centro*** x_0 ***e raio*** r *é o conjunto*

$$S(x_0, r) = \{x \in M : d(x, x_0) = r\}.$$

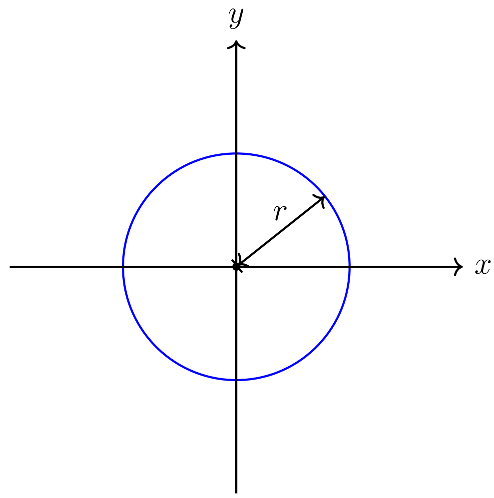
Exemplo 4.5 *Consideremos o espaço métrico* $(\mathbb{R}^2, d_E)$. *A bola fechada de centro em* $(0, 0)$ *e raio 1 e a esfera de mesmo centro e raio possuem, respectivamente, são representadas como mostram a Figura 4.4 e a Figura 4.5.*

Figura 4.4: Bola fechada, $B[(0,0),1]$, no $\mathbb{R}^2$ com a métrica euclidiana.



Fonte: Do autor. Feita no Tikz.

Figura 4.5: Esfera, $S((0,0),1)$, no $\mathbb{R}^2$ com a métrica euclidiana.



Fonte: Do autor. Feita no Tikz.

Notemos que, pelas definições anteriores, temos

$$B[x_0, r] = B(x_0, r) \sqcup S(x_0, r),$$

isto é, a bola fechada de centro x_0 e raio r é a união disjunta da bola aberta com a esfera, ambas também com centro em x_0 e raio r.

Como vimos anteriormente, dependendo da métrica, o "aspecto" das bolas pode ser diferente do ponto de vista da Geometria Elementar. Outros aspectos se alteram ao compararmos as métricas. Um desses aspectos que se alteram é a área da bola aberta de centro em $(0,0)$ e raio um em cada métrica.

Pelos Exemplos 4.2, 4.3 e 4.4 a bola de raio um com centro em $(0,0)$ tem diferentes aspectos. Além do mais, em cada caso, a área da bola se alterna. Da geometria, temos que, no primeiro caso, a área da bola é

$$A_{d_E} = \pi \cdot r^2 = \pi,$$

já no caso da métrica retangular, temos

$$\begin{aligned} A_{d_R} &= 4 \cdot \left(\frac{1 \cdot 1}{2}\right) \\ &= 2, \end{aligned}$$

e, por último, na métrica do máximo, temos que a área é dada por

$$\begin{aligned} A_{d_M} &= 4 \cdot (1 \cdot 1) \\ &= 4. \end{aligned}$$

Logo, nesse caso, para a bola de raio um e centro em $(0,0)$, a relação entre as áreas é

$$A_{d_R} < A_{d_E} < A_{d_M}.$$

Definição 4.4 (Espaço métrico discreto) *Um espaço métrico é dito discreto quando todo ponto do espaço é isolado, isto é, quando existe $r > 0$ tal que $B(a,r) = \{a\}$. Em outras palavras, além do próprio a, não existe ponto no espaço que tenha uma distância de a inferior a r.*

Exemplo 4.6 *Qualquer espaços métrico M munido da métrica zero-um é um espaço métrico discreto.*

Solução *De fato, dado $a \in M$ qualquer, considerando $r < 1$ temos*

$$B(a,r) = \{x \in M : d(x,a) < 1\} = \{a\}.$$

■

4.1 Propriedades de bolas abertas

Sejam $\mathcal{M} = (M,d)$ um espaço métrico, $x_0, y_0 \in M$ e r, r_1 e r_2 números reais positivos.

Proposição 4.1 *Se $r_1 \leq r_2$, então $B(x_0,r_1) \subseteq B(x_0,r_2)$.*

Demonstração *De fato, dado qualquer $x \in B(x_0,r_1)$, temos $d(x,x_0) < r_1 \leq r_2$, ou seja, $d(x,x_0) < r_2$, de modo que $x \in B(x_0,r_2)$. Assim, $B(x_0,r_1) \subseteq B(x_0,r_2)$.* ■

Proposição 4.2 *Dados os pontos $x_0 \neq y_0$ num espaço métrico, sejam $r_1 > 0$ e $r_2 > 0$ tais que $r_1 + r_2 \leq d(x_0,y_0)$. Então, as bolas abertas $B(x_0,r_1)$ e $B(y_0,r_2)$ são disjuntas.*

Demonstração *Suponhamos que exista* $z \in B(x_0, r_1) \cap B(y_0, r_2)$, *então pela definição de bola aberta temos que* $d(x_0, z) < r_1$ *e* $d(y_0, z) < r_2$. *Assim,*

$$\begin{aligned} d(x_0, y_0) &\leq d(x_0, z) + d(y_0, z) \\ &< r_1 + r_2 \\ &\leq d(x_0, y_0), \end{aligned}$$

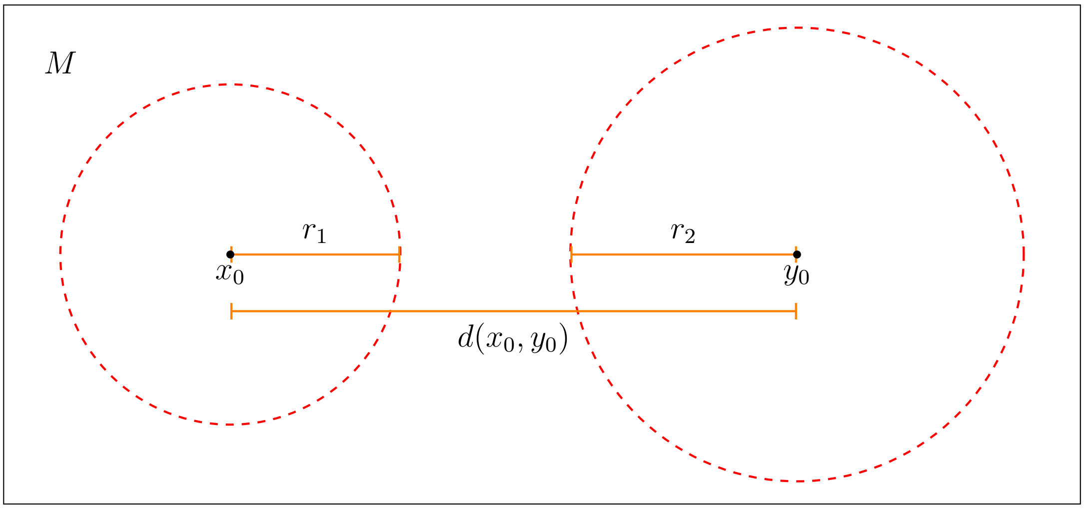
ou seja, concluímos que

$$d(x_0, y_0) < d(x_0, y_0),$$

o que é um absurdo. ■

Na Figura 4.6 mostramos uma representação de bolas disjuntas.

Figura 4.6: Representação de bolas disjuntas.



Fonte: Do autor. Feita no Tikz.

4.2 Conjuntos limitados

Estudaremos nessa sessão uma generalização para espaços métricos da noção de conjuntos limitados.

Definição 4.5 (Conjunto limitado) *Sejam* M *um espaço métrico e* X *um subconjunto não-vazio de* M. *Diremos que* X *é* ***limitado*** *quando existir* k, *constante positiva, tal que*

$$d(x, y) \leq k,$$

para quaisquer x, y pertencentes a X.

Ao menor desses números k chamamos de ***diâmetro*** *de X e denotamos por diam(X). Isto é,*

$$diam(X) = \sup\{d(x, y) : x, y \in X\}.$$

Caso X não seja limitado, escrevemos diam$(X) = \infty$.

Proposição 4.3 *Se X é limitado e $Y \subset X$, então Y é limitado e diam$(Y) \leq$ diam(X).*

Demonstração *De fato, como X é limitado, existe k uma constante positiva, tal que*

$$d(x, y) \leq k,$$

para quaisquer $x, y \in X$. Dados quaisquer $x_0, y_0 \in Y$, como por hipótese Y está contido em X, temos que $x_0, y_0 \in X$, logo

$$d(x_0, y_0) \leq k,$$

e, portanto, Y é limitado. Além disso, como $Y \subset X$, temos pelo Lema 2.3 que

$$\sup\{d(x_0, y_0) : x_0, y_0 \in Y\} \leq \sup\{d(x, y) : x, y \in X\}.$$

Logo, pela definição de diâmetro, temos

$$diam(Y) \leq diam(X).$$

■

Proposição 4.4 *Toda bola aberta, de raio ε, em um espaço métrico é um conjunto limitado e seu diâmetro não ultrapassa 2ε. O mesmo vale para bolas fechadas e esferas.*

Demonstração *De fato, sejam x, y quaisquer pertencentes a $B(a, \varepsilon)$. Temos*

$$d(x, a) < \varepsilon \text{ e } d(y, a) < \varepsilon.$$

Assim, pela desigualdade triangular, temos

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) = d(x, a) + d(y, a) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Analogamente, dados x, y quaisquer pertencentes a $B[a, \varepsilon]$, temos

$$d(x, a) \leq \varepsilon \text{ e } d(y, a) \leq \varepsilon.$$

Assim, pela desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, a) + d(a, y) \\ &= d(x, a) + d(y, a) \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Da mesma forma, sejam $x, y \in S(a, \varepsilon)$, temos que $d(x, a) = \varepsilon$ e $d(y, a) = \varepsilon$. Logo,

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, a) + d(a, y) \\ &= \varepsilon + \varepsilon \\ &= 2\varepsilon. \end{aligned}$$

E, portanto, temos que toda bola é limitada. ∎

Proposição 4.5 *Sejam X e Y conjuntos limitados em um espaço métrico. Então $X \cup Y$ é limitado.*

Demonstração *Caso $X = \varnothing$ ou $Y = \varnothing$ nada temos que fazer. Supondo ambos diferentes do vazio, e fixando $a \in X$, $b \in Y$, temos pela limitação de X e Y que existem k_1 e k_2 constantes positivas tais que*

$$\begin{aligned} d(x, a) &\leq k_1, \forall x \in X, \\ d(y, b) &\leq k_2, \forall y \in Y. \end{aligned}$$

Notemos ainda, pelas propriedade da desigualdade triangular em um espaço métrico, que, para $x \in X$ e $y \in Y$ quaisquer, temos

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, a) + d(a, y), \\ d(a, y) &\leq d(a, b) + d(b, y). \end{aligned}$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, a) + d(a, y) \\ &\leq d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) \\ &\leq k_1 + d(a, b) + k_2. \end{aligned}$$

Logo, denotando $k = k_1 + d(a,b) + k_2$, temos que para todo $x, y \in X \cup Y$

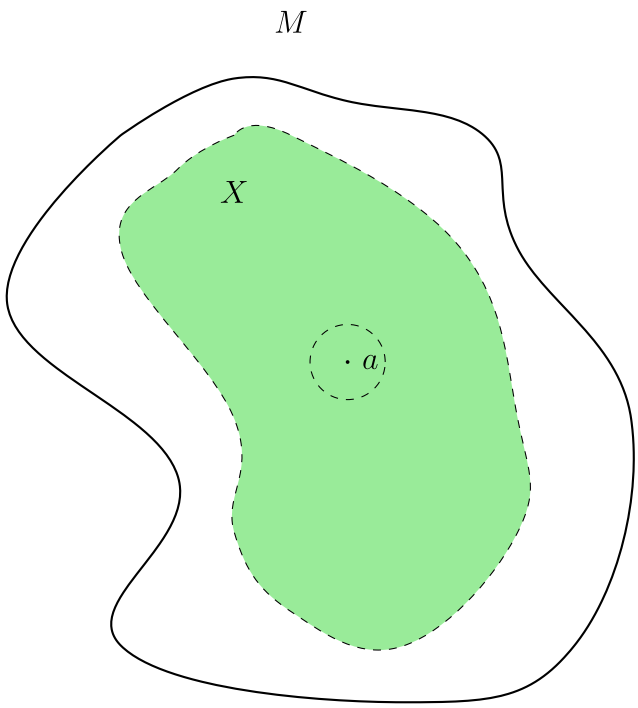
$$d(x,y) \leq k.$$

Logo, $X \cup Y$ é um conjunto limitado. ∎

4.3 Conjuntos abertos

Definição 4.6 (Ponto interior) *Sejam $\mathcal{M} = (M,d)$ um espaço métrico, X um subconjunto de M e $x_0 \in X$. Diremos que x_0 é um ponto interior de X quando é centro de uma bola aberta contida em X. Isto é, se existir um número real positivo ε tal que $B(x_0, \varepsilon) \subset X$. Como mostrado na Figura 4.7.*

Figura 4.7: Representação de ponto interior.



Fonte: Do autor. Feita no Tikz.

Observação 4.1 *Caso um ponto não for interior, denominaremos de ponto não interior.*

Definição 4.7 (Interior de um conjunto) *Sejam $\mathcal{M} = (M,d)$ um espaço métrico e X um subconjunto de M. O conjunto de todos os pontos interiores de X é denominado*

interior de *X, e denotamos por*

$$int.(X) = \overset{\circ}{X} = \{x \in M : B(x, \varepsilon) \subset X, \text{ para algum } \varepsilon > 0\}.$$

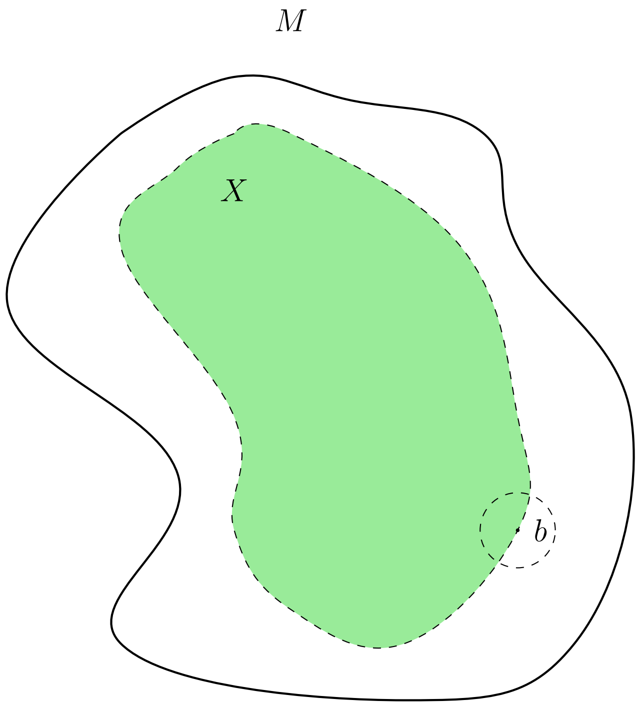
Definição 4.8 (Conjunto aberto) *Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico e X um subconjunto de M. Diremos que X é aberto se, e somente se:*

$$X = int.(X),$$

ou seja, X é aberto se, e somente se, para todo $x_0 \in X$ existir $\varepsilon > 0$ tal que $B(x_0, \varepsilon) \subset X$.

Definição 4.9 (Fronteira) *Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico e X um subconjunto de M. O conjunto de todos os pontos $x_0 \in M$ tais que toda bola aberta de centro x_0 contém pelo menos um ponto de X e um ponto do complementar $M - X$ é dito* ***fronteira*** *de X. Denotaremos a fronteira por ∂X. Como mostrado na Figura 4.8.*

Figura 4.8: Representação ponto de fronteira.



Fonte: Do autor. Feita no Tikz.

Observação 4.2 *Notemos que a fronteira de X, pela Definição 4.9, pode também conter pontos que não estão em X.*

Observação 4.3 *Além do mais, notemos que os conjuntos int.*(X) *e* ∂X *são disjuntos pelas definições.*

Proposição 4.6 *Sejam* $\mathcal{M} = (M, d)$ *um espaço métrico e* $X \subseteq M$*. Tem-se que int.*$(X) \subseteq X$*.*

Demonstração *Dado qualquer* x_0 *pertencente ao interior de* X*, temos que existe* ε *positivo tal que* $B(x_0, \varepsilon) \subset X$*. Como* x_0 *pertence a* $B(x_0, \varepsilon)$*, segue que* $x_0 \in X$*. Como tomamos* x_0 *qualquer em int.*(X)*, temos então provado o resultado.* ∎

Observação 4.4 *Notemos que o contrário,* $X \subset$ *int.*(X)*, nem sempre é verdade como veremos no exemplo a seguir.*

Exemplo 4.7 *Considere o intervalo* $[0, 1) \subset \mathbb{R}$*, determine sua fronteira e o seu interior.*

Solução *Provaremos que o int.*$([0, 1)) = (0, 1)$ *e* $\partial([0, 1)) = \{0, 1\}$*. De fato, dado* x *pertencente a* $(0, 1)$*, tomando*

$$\varepsilon = \min\{x, 1 - x\},$$

temos que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ *está contido em* $(0, 1)$*.*

Além do mais, 0 e 1 não são pontos interiores. De fato, qualquer intervalo aberto de centro em 0, contém pontos negativos e positivos. Além disso, qualquer intervalo aberto de centro em 1, contém números menores que 1, e maiores. Por exemplo, tomando $r = 1/2$*, temos o intervalo*

$$\left(1 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right),$$

que contém pontos menores e maiores que 1. Dessa maneira, como qualquer intervalo aberto, de centro em 0 *ou centro em* 1*, contém pontos de* $(0, 1)$ *e pontos de* $\mathbb{R}/(0, 1)$*, temos que* $0, 1 \in \partial([0, 1))$*.*

Além do mais, dado y *um número real negativo, notemos que ele não pertence à fronteira de* $[0, 1)$*. De fato, basta tomarmos*

$$\varepsilon_y = \frac{0 - y}{2} = -\frac{y}{2} > 0,$$

e então $(y - \varepsilon_y, y + \varepsilon_y)$ *não possui interseção com* $[0, 1)$ *e, portanto,* $y \notin$ *int.*(X)*. Analogamente, para números reais positivos maiores que 1, temos que os mesmos não pertencem à fronteira de* $[0, 1)$*. Dessa maneira, int.*$([0, 1)) = (0, 1)$ *e* $\partial([0, 1)) = \{0, 1\}$*.* ∎

Proposição 4.7 *Em qualquer espaço métrico, uma bola aberta $B(a, \varepsilon)$ é um conjunto aberto.*

Demonstração *Para isso, vamos provar que $B(a, \varepsilon) = int.(B(a, \varepsilon))$. Notemos que $int.(B(a, \varepsilon)) \subset B(a, \varepsilon)$ pela Proposição 4.6. Basta mostrarmos então que $B(a, \varepsilon) \subset int.(B(a, \varepsilon))$.*

Consideremos x pertencente a $B(a, \varepsilon)$. Por definição $d(a, x) < \varepsilon$. Notemos que

$$\varepsilon_1 = \varepsilon - d(a, x),$$

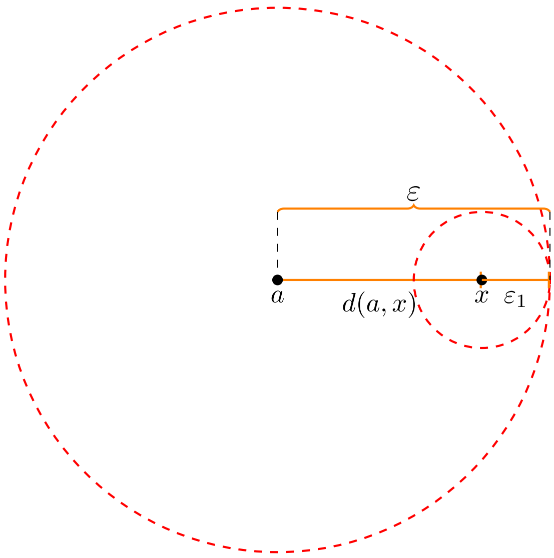
é um número real positivo. Vamos provar que $B(x, \varepsilon_1)$ está contido em $B(a, \varepsilon)$. De fato, dado y pertencente a $B(x, \varepsilon_1)$, temos que $d(x, y) < \varepsilon_1$, e portanto,

$$d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + \varepsilon_1 = \varepsilon,$$

isto é, y pertence a $B(a, \varepsilon)$. Como tomamos y qualquer em $B(x, \varepsilon_1)$, temos então que $B(x, \varepsilon_1) \subset B(a, \varepsilon)$. Como x é qualquer em $B(a, \varepsilon)$, temos que $B(a, \varepsilon) \subset int.(B(a, \varepsilon))$, e portanto, $B(a, \varepsilon) = int.(B(a, \varepsilon))$. ■

Na Figura 4.9 temos uma representação da construção realizada na demonstração.

Figura 4.9: Representação de um ponto interior à bola aberta.



Fonte: Do autor. Feita no Tikz.

Corolário 4.1 *Para todo $X \subset M$ temos que $int.(X)$ é aberto em M.*

Demonstração *De fato, pela Proposição 4.6 temos que $int.(int.(X)) \subset int.(X)$. Basta provarmos que $int.(X) \subset int.(int.(X))$.*

Seja $a \in int.(X)$. Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(a, \varepsilon) \subset X$. Para todo x pertencente a $B(a, \varepsilon)$, temos pela Proposição 4.7 que existe ε_1 tal que $B(x, \varepsilon_1) \subset B(a, \varepsilon)$, isto é, $B(x, \varepsilon_1) \subset X$. Disso, concluímos que todo ponto x pertencente a $B(a, \varepsilon)$ é interior a X, ou seja, que $B(a, \varepsilon) \subset int.(X)$.

Notemos então que $a \in int.(int.(X))$. Como tomamos a qualquer, concluímos que $int.(X) \subset int.(int.(X))$. Dessa maneira, temos $int.(X) = int.(int.(X))$ e, portanto, um aberto. ■

Proposição 4.8 *O conjunto vazio (ϕ) e o conjunto universo (M) são conjuntos abertos.*

Demonstração *Para um conjunto A não ser aberto, deve existir um $x \in A$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ ocorre que*

$$B(x, \varepsilon) \nsubseteq A.$$

No caso do conjunto vazio, tal elemento x não existe, logo o vazio é aberto por vacuidade. Já no caso do conjunto universo, temos que para todo $x \in M$, vale

$$B(x, \varepsilon) \subset M,$$

o que nos faz concluir que M também é um conjunto aberto. ■

Exemplo 4.8 *Seja M um espaço métrico. O conjunto $\{a\}$ é um conjunto aberto em M se, e somente se, a é um ponto isolado.*

Solução *De fato, se $\{a\}$ é aberto, então para todo $x \in \{a\}$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset \{a\}$. Então, existe $\varepsilon_1 > 0$, de maneira que*

$$B(a, \varepsilon_1) \subset \{a\},$$

e como $\{a\} \subset B(a, \varepsilon_1)$ temos que

$$B(a, \varepsilon_1) = \{a\},$$

e, portanto, pela Definição 4.4 temos que a é um ponto isolado.

Reciprocamente, se a é um ponto isolado em M então, novamente, pela Definição 4.4, existe $r > 0$, tal que $B(a, r) = \{a\}$, ou ainda, $B(a, r) \subset \{a\}$. Notemos então que para todo x em $\{a\}$, existe $\varepsilon = r > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset \{a\}$. Logo, $\{a\}$ é aberto. ■

Dentre os resultados acerca de conjuntos abertos destacamos os dois que se seguem abaixo.

Proposição 4.9 *Seja $\mathfrak{U}$ a coleção dos subconjuntos abertos de um espaço métrico. Então:*

1. *Se $A_1, ..., A_n \in \mathfrak{U}$, então $A_1 \cap ... \cap A_n \in \mathfrak{U}$. (A interseção de um número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto.)*

2. Se $A_\lambda \in \mathfrak{U}$ para todo $\lambda \in L$, então $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \mathfrak{U}$. (A reunião de uma família qualquer de conjuntos abertos é um conjunto aberto.)

Demonstração *1. Seja $x \in \bigcap_{j=1}^{n} A_j$. Desta maneira, $x \in A_j$, para todo $j = 1, ..., n$. Como esses conjuntos são abertos, temos que existem $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ positivos, de forma que*

$$\begin{aligned} B(x, \varepsilon_1) &\subset A_1, \\ B(x, \varepsilon_2) &\subset A_2, \\ &\vdots \\ B(x, \varepsilon_n) &\subset A_n. \end{aligned}$$

Tomemos

$$\varepsilon = \min_{j=1,...,n} \{\varepsilon_j\}.$$

Daí, temos

$$\begin{aligned} B(x, \varepsilon) &\subset B(x, \varepsilon_1) \subset A_1, \\ B(x, \varepsilon) &\subset B(x, \varepsilon_2) \subset A_2, \\ &\vdots \\ B(x, \varepsilon) &\subset B(x, \varepsilon_n) \subset A_n, \end{aligned}$$

ou seja,

$$B(x, \varepsilon) \subset \bigcap_{j=1}^{n} A_j,$$

e, como tomamos x um ponto arbitrário em $A_1 \cap ... \cap A_n$, temos que o conjunto é aberto.

2. Seja $a \in A$ qualquer. Então, existe ao menos um índice λ em L tal que $a \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, por hipótese, temos que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B(a, \varepsilon) \subset A_\lambda,$$

como A_λ está contido em A temos então que

$$B(a, \varepsilon) \subset A,$$

e, portanto, A é um conjunto aberto, pois todo ponto pertencente a A é interior. ∎

Observação 4.5 *Notemos que no item (1) da Proposição 4.9, temos a interseção finita* *de conjuntos abertos. A interseção infinita de abertos nem sempre será um aberto, como veremos no exemplo a seguir.*

Exemplo 4.9 *Consideremos $M = \mathbb{R}$. Prove que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)$ não é aberto em $\mathbb{R}$.*

Solução *De fato, mostraremos que*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right) = \{a\}.$$

Primeiramente, notemos que $\left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)$ é uma bola aberta em $\mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. E, portanto, pela Proposição 4.7, temos que

$$\left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)$$

é um conjunto aberto, para todo natural n.

Agora, notemos que

$$a \in \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right),$$

para todo n natural. Logo,

$$\{a\} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right).$$

Suponhamos que exista b em $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)$, diferente de a. Logo,

$$|b - a| < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, como o conjunto dos números naturais não é limitado superiormente pelo Exemplo 2.11, temos que existe n_0 natural tal que

$$n_0 > \frac{1}{\varepsilon},$$

ou ainda

$$\varepsilon > \frac{1}{n_0}.$$

Logo,

$$0 \leq |b - a| < \frac{1}{n_0} < \varepsilon,$$

isto é,

$$b = a,$$

e portanto,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n} \right) = \{a\}.$$

Além do mais, notemos que a, com a métrica usual em $\mathbb{R}$, não é ponto isolado e, portanto, pelo Exemplo 4.8, temos que $\{a\}$ não é aberto. ∎

Corolário 4.2 *Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico e A um subconjunto de M. Temos que A é aberto se, e somente se, é uma reunião de bolas abertas.*

Demonstração *De fato, se A é uma reunião de bolas abertas, então A é aberto em M pela Proposição 4.7 e do item 2 da Proposição 4.9.*

Reciprocamente, se A é aberto, então, para cada x pertencente a A, existe um $\varepsilon_x > 0$ de forma que

$$B(x, \varepsilon_x) \subset A,$$

ou ainda

$$\bigcup_{x \in A} B_x \subset A. \tag{4.1}$$

Além do mais, notemos que $\{x\}$ está contido na bola aberta $B(x, \varepsilon_x)$ e, assim,

$$\bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} B_x.$$

Além disso, o conjunto A é a reunião dos seus elementos, logo

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} B_x, \tag{4.2}$$

e portanto, por (4.1) e (4.2) temos que

$$A = \bigcup_{x \in A} B_x,$$

isto é, A é uma reunião de bolas abertas. ∎

4.3.1 Conjuntos abertos na reta

Para finalizarmos a seção de conjunto abertos, vamos apresentar uma aplicação no espaço dos reais. Iniciaremos definindo formalmente o que é um intervalo na reta com o objetivo de demonstrar que todo conjunto X aberto em $\mathbb{R}$ é a união de uma classe enumerável de intervalos abertos.

Definição 4.10 (Intervalo na reta) *Um intervalo é um subconjunto $I \subseteq \mathbb{R}$ tal que, $\forall a, b \in I$, se $a < c < b$, então $c \in I$.*

Observemos que se $X \subset \mathbb{R}$ for aberto, então dado $x \in X$, existe ε_x positivo tal que $(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \subset X$. Dessa forma, temos que a família de intervalos $\mathcal{F}_{X_x} = \{I \subset X :$ I é um intervalo aberto com $x \in I\}$ é não vazia. Daí, vamos denotar por I_x a união de todos os intervalos abertos que contêm x e estão contidos em X, isto é

$$I_x = \bigcup_{I \in \mathcal{F}_{X_x}} I.$$

Provaremos a seguir que o conjunto I_x também será um intervalo aberto contido em X.

Teorema 4.1 *Seja X um subconjunto não-vazio e aberto de $\mathbb{R}$. Se $x \in X$, então I_x é um intervalo aberto contido em X.*

Demonstração *Sejam $a, b \in I_x$ e consideremos $c \in \mathbb{R}$ tal que $a < c < b$. Mostremos que $c \in I_x$.*

Denotemos por I_a um dos intervalos abertos da união I_x que contém a. Analogamente, denotemos por I_b um intervalo, de I_x, tal que $x, b \in I_b$.

Temos 3 casos possíveis para c:

1. *$c = x$. Se $c = x$, então pela construção de I_x, temos que $c \in I_x$.*

2. *$c < x$. Neste caso, temos $a < c < x$ e, como $x, a \in I_a$, segue que $c \in I_a$ e, portanto, $c \in I_x$.*

3. *$c > x$. Neste caso, temos $x < c < b$ e, novamente como $x, b \in I_b$, segue que $c \in I_b$ e, portanto, $c \in I_x$.*

Isso prova que I_x é um intervalo. Além disso, como I_x é a união de abertos, temos pela Proposição 4.9, que I_x é aberto. E, $I_x \subseteq X$ por construção, pois dado $z \in I_x$, temos que z pertence a algum intervalo aberto $I_\lambda \in \mathcal{F}_{X_x}$ e $I_\lambda \subset X$, logo $z \in X$. ■

Teorema 4.2 *Todo conjunto aberto X, não-vazio, contido em $\mathbb{R}$ é a união de uma classe enumerável disjuntas de intervalos abertos.*

Demonstração *Desde que X é não vazio e aberto, o Teorema 4.1 implica que para cada $x \in X$ temos que I_x é um intervalo aberto contido em X.*

Afirmação 1: *Se y pertence a I_x, então $I_x = I_y$.*

De fato, seja z um elemento qualquer de I_x, logo existe um intervalo aberto $I \in \mathcal{F}_{X_x}$ que contém x e z. Da mesma forma, como y pertence a I_x, existe um intervalo aberto $J \in \mathcal{F}_{X_x}$ tal que x e y pertencem a J.

Como I e J são abertos, temos pelo Teorema 4.1 temos que $M = I \cup J$ é um intervalo aberto que contém x, y e z. Logo, $M \in \mathcal{F}_{X_y} \cap \mathcal{F}_{X_x}$, donde segue que $z \in I_y$. Portanto, $I_x \subset I_y$. Analogamente, segue que $I_y \subset I_x$ e concluímos que $I_x = I_y$.

Daí, utilizando a Afirmação 1, concluímos que dados dois pontos x e y distintos em X, então I_x e I_y são ou disjuntos ou idênticos. De fato, supondo I_x e I_y não idênticos com z na interseção então temos que $I_x = I_z = I_y$ pela Afirmação 1.

Consideremos $\mathcal{I}$ a família de todos os conjuntos distintos da forma I_x, onde x está em X. Isto é, uma família disjunta de intervalos abertos onde X é essa união. Em outras palavras,

$$X = \bigcup_{J \in \mathcal{I}} J.$$

Afirmação 2: *$\mathcal{I}$ é enumerável.*

De fato, consideremos

$$X_r = X \cap \mathbb{Q} = \{q \in X : q \in \mathbb{Q}\}.$$

Como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ (Ver Exemplo 4.11), temos que X_r é não-vazio. Dessa maneira, pelos Corolários 2.2 e 2.5 temos que X_r é enumerável. Definamos

$$\begin{aligned} f : X_r &\rightarrow \mathcal{I}, \\ q &\mapsto I_q, \end{aligned}$$

em que I_q é o único intervalo que contém q. Como todo intervalo contém algum racional, segue que f é sobrejetora, e como X_r é enumerável, resulta do Corolário 2.3 que $\mathcal{I}$ é enumerável. ■

4.4 Conjuntos fechados

Definição 4.11 (Ponto aderente) *Sejam M um espaço métrico e $X \subset M$. Um ponto a chama-se aderente a X, quando*

$$d(a, X) = \inf\{d(a, x) : x \in X\} = 0,$$

isto é, existem pontos de X suficientemente próximos de a, ou ainda, para cada ε positivo, existe x em X tal que $d(a, x) < \varepsilon$. Ou equivalentemente:

(i) Para todo ε positivo, existe x em $B(a, \varepsilon) \cap X$;

(ii) para todo aberto A contendo a, tem-se que $A \cap X \neq \varnothing$;

(iii) toda vizinhança[1] de a tem pontos em comum com X.

Proposição 4.10 *As equivalências da Definição 4.11 são verdadeiras.*

Demonstração *Definição $\Rightarrow$ (i). De fato, seja $\varepsilon > 0$. Se a é aderente a X então*

$$d(a, X) = \inf\{d(a, x) : x \in X\} = 0 < \varepsilon,$$

isto é, existe x_0 em X tal que $d(a, x_0) < \varepsilon$. Da definição de bola aberta, temos que

$$x_0 \in B(a, \varepsilon),$$

e portanto, existe $x_0 \in B(a, \varepsilon) \cap X$.

(i) $\Rightarrow$ (ii). De fato, se A é um aberto que contém a, então existe ε positivo tal que $B(a, \varepsilon) \subset A$. Como por (i), para todo ε positivo, existe $x_0 \in B(a, \varepsilon) \cap X$, temos então que $x_0 \in B(a, \varepsilon) \subset A$ e $x_0 \in X$, logo

$$x_0 \in A \cap X,$$

[1] O conjunto V é uma vizinhança do ponto a quando $a \in \text{int.}(V)$.

e portanto, a interseção de A, um aberto que contém a, e X é não vazia.

(ii) ⇒ (iii). Se V é uma vizinhança de a, então temos que $a \in int.(V)$. *Pelo Corolário 4.1 temos que* $int.(V)$ *é um aberto e, portanto, por (ii)*

$$int.(V) \cap X \neq \varnothing,$$

mas como pela Proposição 4.6, temos que $int.(V) \subseteq V$, *concluímos que*

$$V \cap X \neq \varnothing.$$

(iii) ⇒ Definição. De fato, como toda vizinhança de a tem pontos em comum com X, tomemos em particular

$$V_n = B\left(a, \frac{1}{n}\right),$$

com $n \in \mathbb{N}$.

Como $V_n \cap X \neq \varnothing$, *temos que existe* x_n *tal que*

$$x_n \in B\left(a, \frac{1}{n}\right) \cap X,$$

ou ainda,

$$d(a, x_n) < \frac{1}{n},$$

para todo n natural.

Denotaremos por X_n *o conjunto formado por estes* x_n. *Assim, usando o Exemplo 2.12, temos*

$$0 \leq \inf_{x \in X} \{d(a, x)\} \overset{X_n \subset X}{\leq} \inf_{x_n \in X_n} \{d(a, x_n)\} = 0,$$

logo

$$d(a, X) = \inf_{x \in X} \{d(a, x)\} = 0.$$

E assim ficam verificadas as equivalências. ■

Observação 4.6 *Todo ponto a em X é aderente a X. De fato, basta notar que*

$$d(a, a) = 0.$$

Além do mais, os pontos da fronteira de X também são aderentes a X.

Definição 4.12 (Fecho (ou aderência)) *O fecho de um conjunto X, no espaço métrico M, é o conjunto $\overline{X}$ dos pontos de M que são aderentes a X.*

Proposição 4.11 *Se $X \subset Y$, então $\overline{X} \subset \overline{Y}$.*

Demonstração *De fato, se $z \in \overline{X}$, então por definição temos que z é aderente a X, isto é, para todo ε positivo, temos que*

$$B(z, \varepsilon) \cap X \neq \varnothing,$$

ou seja, existe x_0 na interseção de $B(z, \varepsilon)$ e X. Como $X \subset Y$, temos que x_0 pertence a Y, logo

$$B(z, \varepsilon) \cap Y \neq \varnothing,$$

para todo ε positivo. Logo, z é aderente a Y e, portanto, $z \in \overline{Y}$. Como tomamos z qualquer em $\overline{X}$, concluímos que

$$\overline{X} \subset \overline{Y},$$

como queríamos. ∎

Proposição 4.12 *Dado $X \subset M$, onde M é um espaço métrico, temos que $\overline{X} = X \cup \partial X$.*

Demonstração *De fato, se x pertence a $\overline{X}$ e não pertence a X, temos que*

$$(M - X) \cap B(x, \varepsilon) \neq \varnothing,$$

para todo ε positivo. Além do mais, como x é aderente a X, temos que para todo $\varepsilon > 0$

$$B(x, \varepsilon) \cap X \neq \varnothing.$$

Logo, temos que dado qualquer ε positivo valem

$$\begin{aligned} (M - X) \cap B(x, \varepsilon) &\neq \varnothing, \\ B(x, \varepsilon) \cap X &\neq \varnothing, \end{aligned}$$

isto é, $x \in \partial X$. ∎

O exemplo a seguir é uma aplicação do resultado anterior, a fim de mostrarmos que conjuntos diferentes podem ter fechos semelhantes.

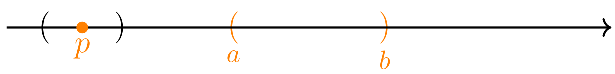
Exemplo 4.10 *Se $M = \mathbb{R}$, identifique o fecho dos subconjuntos $A = (a, b)$, $B = (a, b]$, e $C = [a, b)$.*

Solução *Notemos que nos três casos o fecho será $[a, b]$. De fato, todos os pontos de (a, b) pertencem aos conjuntos dados. Mais que isso, $\partial A = \partial B = \partial C = \{a, b\}$. Logo, pela Proposição 4.12, $\overline{A} = \overline{B} = \overline{C} = [a, b]$.* ■

Observação 4.7 *Notemos que para um ponto a não ser aderente a X basta que exista ε positivo de modo que*

$$B(x, \varepsilon) \cap X = \varnothing.$$

Por exemplo, consideremos $M = \mathbb{R}$ e $X = (a, b)$ e um ponto p não pertencente a $X \cup \partial X$. Vemos na representação abaixo um caso em que foi possível encontrar ε positivo tal que $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ não tem interseção com X. Logo, p não é aderente a X.



Definição 4.13 (Subconjunto denso) *Sejam M um espaço métrico e $X \subset M$. Diremos que X é denso em M quando $\overline{X} = M$, isto é, quando toda bola aberta de M contém algum ponto de X.*

Exemplo 4.11 *$\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.*

Solução *De fato, notemos que, para qualquer intervalo aberto (a, b) da reta, temos que existe um número racional q (ver [8], p.29, Teorema 6). Logo, para qualquer ε positivo, teremos*

$$B(q, \varepsilon) \cap (a, b) \subset \mathbb{R}.$$

Logo, temos que $\mathbb{Q}$ é denso nos reais. ■

Definição 4.14 (Conjunto fechado) *Um conjunto $F \subset M$, onde M é um espaço métrico, é dito **fechado** quando seu complementar é aberto em M, ou seja, $M - F$ é aberto.*

O próximo resultado nos dará uma caracterização para os conjuntos fechados. Em algumas bibliografias encontramos a proposição a seguir como a definição de conjunto fechado, e, portanto, é demonstrado que seu complementar é aberto. Nesse trabalho optamos por definir fechado como sendo o conjunto em que seu complementar é aberto.

Proposição 4.13 *Seja $F \subset M$. O conjunto F é fechado se, e somente se, contém todos os seus pontos aderentes, ou seja, $F = \overline{F}$.*

Demonstração *Supondo F fechado, temos então por definição que $M - F$ é aberto, isto é, para todo z pertencente a $M - F$, existe ε positivo tal que*

$$B(z, \varepsilon) \subset M - F.$$

Em outras palavras, para todo $z \in M - F$, existe $B(z, \varepsilon)$ que não contém pontos de F. Logo, esses pontos que não pertencem a F também não são aderentes a ele, pois existe ε positivo tal que

$$B(a, \varepsilon) \cap F = \varnothing$$

e, portanto, $F = \overline{F}$.

Reciprocamente, se $F = \overline{F}$, significa que F contém todos os seus pontos aderentes. Assim, os pontos que não pertencem a F não são aderentes a ele, isto é, para todo $z \in M - F$ existe ε positivo tal que

$$B(z, \varepsilon) \cap F = \varnothing,$$

ou seja, $B(z, \varepsilon) \subset M - F$. Daí concluímos que $M - F$ é aberto, e por definição, F é fechado. ∎

Corolário 4.3 *O conjunto vazio ($\varnothing$) e o conjunto universo (M) são conjuntos fechados.*

Demonstração *Como o conjunto vazio não tem pontos, então $\varnothing = \overline{\varnothing}$, e portanto, pela Proposição 4.13, temos que $\varnothing$ é fechado.*

Ainda, como M é o conjunto universo, temos que ele contém todos os pontos, e como vimos, todos os pontos de um conjunto são aderentes a ele. E assim, $M = \overline{M}$, e portanto, M é fechado. ∎

Observação 4.8 *Notemos que ser fechado não é o contrário de ser aberto. Por exemplo, como vimos durante o trabalho os conjuntos universo e vazio são abertos e fechados ao mesmo tempo.*

Dessa maneira, dado um conjunto X não aberto, não podemos afirmar diretamente que ele será fechado. Ou ainda, se Y é aberto, não podemos afirmar que Y não é fechado.

Proposição 4.14 *Toda bola fechada em um espaço métrico M é um conjunto fechado.*

Demonstração *Sejam $B[x_0, \varepsilon]$ uma bola fechada e o seu complementar $M - B[x_0, \varepsilon]$. Tomemos x pertencente a $M - B[x_0, \varepsilon]$, logo*

$$d(x_0, x) > \varepsilon.$$

Notemos que $d(x_0, x) - \varepsilon$ é positivo. Logo, definimos ε_1 como

$$\varepsilon_1 = d(x_0, x) - \varepsilon.$$

Seja a bola aberta $B(x, \varepsilon_1)$, e tomemos um ponto $y \in B(x, \varepsilon_1)$, qualquer. Por definição

$$d(x, y) < \varepsilon_1.$$

Pela desigualdade triangular, temos:

$$d(x_0, x) \leq d(x_0, y) + d(y, x).$$

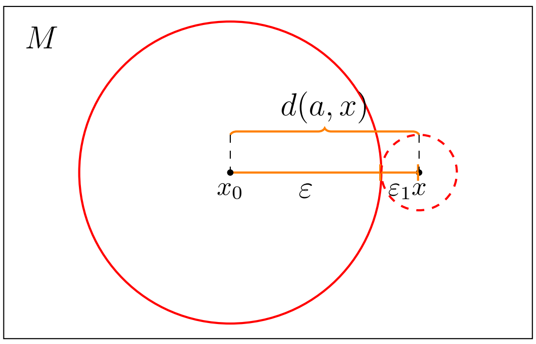
Daí,

$$\begin{aligned} d(x_0, y) &\geq d(x_0, x) - d(y, x) \\ &> d(x_0, x) - \varepsilon_1 \\ &= d(x_0, x) - [d(x_0, x) - \varepsilon] \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

isto é, temos que y pertence a $M - B[x_0, \varepsilon]$. Como tomamos y arbitrário em $B(x, \varepsilon_1)$, concluímos que $B(x, \varepsilon_1)$ está contida em $M - B[x_0, \varepsilon]$, e portanto, $x \in int.(M - B[x_0, \varepsilon])$. Como tomamos x qualquer em $M - B[x_0, \varepsilon]$, temos que o complementar da bola fechada é um conjunto aberto e, portanto, $B[x_0, \varepsilon]$ é fechado. ■

A Figura 4.10 representa a construção realizada na demonstração.

Figura 4.10: Representação da construção de uma bola aberta no complementar de uma bola fechada.



Fonte: Do autor. Feita no Tikz.

Proposição 4.15 *Os subconjuntos fechados de um espaço métrico M satisfazem as seguintes propriedades:*

1. *A reunião $F = F_1 \cup \cdots \cup F_n$ de um número finito de subconjuntos fechados $F_1, ..., F_n$ de M é um subconjunto fechado de M;*

2. *A interseção $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ de uma família qualquer $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ (finita ou infinita) de subconjuntos fechados $F_\lambda \subset M$ é um subconjunto fechado de M.*

Demonstração *1. Como $F_1, ..., F_n$ são fechados em M, temos que os conjuntos*

$$\begin{aligned} A_1 &= (F_1)^c, \\ &\vdots \\ A_n &= (F_n)^c, \end{aligned}$$

são abertos em M. Desse modo, temos pela Proposição 4.9 e pela Proposição 12.1 (Leis de De Morgan) que

$$\begin{aligned} A_1 \cap \cdots \cap A_n &= (F_1)^c \cap \cdots \cap (F_n)^n \\ &= (F_1 \cup \cdots \cup F_n)^c, \end{aligned}$$

é aberto e, portanto, $F_1 \cup \cdots \cup F_n$ é fechado em M.

2. Como cada F_λ é fechado, ponhamos $A_\lambda = (F_\lambda)^c$ para cada $\lambda \in L$. Então, cada A_λ é aberto em M e, portanto, pela Proposição 4.9 e pela Proposição 12.1 (Leis de De Morgan)

$$\begin{aligned} \cup A_\lambda &= \cup (F_\lambda)^c \\ &= (\cap F_\lambda)^c, \end{aligned}$$

é aberto em M. Segue-se então que $\cap F_\lambda$ é fechado. ■

Observação 4.9 *Notemos que a união infinita de fechados nem sempre é um conjunto fechado. De fato, tomemos por exemplo*

$$\bigcup_{p \in (0,1)} \{p\} = (0,1),$$

que não é fechado em $\mathbb{R}$.

Proposição 4.16 *A fronteira ∂X de qualquer subconjunto X de M é um subconjunto fechado de M.*

Demonstração *O conjunto ∂X contém os seus pontos aderentes. De fato, seja $z \in \overline{\partial X}$. Logo, por definição temos que para todo ε positivo*

$$B(z, \varepsilon) \cap \partial X \neq \varnothing.$$

Seja $x_0 \in B(z, \varepsilon) \cap \partial X \neq \varnothing$. Pela Proposição 4.7 temos que $B(z, \varepsilon)$ é aberto. Logo, existe ε_1 de modo que

$$B(x_0, \varepsilon_1) \subset B(z, \varepsilon).$$

Além do mais, como x_0 está na fronteira de X, temos

$$\begin{aligned} B(x_0, \varepsilon_1) \cap X &\neq \varnothing, \\ B(x_0, \varepsilon_1) \cap (M - X) &\neq \varnothing. \end{aligned}$$

Daí como $B(x_0, \varepsilon_1) \subset B(z, \varepsilon)$, temos

$$\begin{aligned} B(z, \varepsilon) \cap X &\neq \varnothing, \\ B(z, \varepsilon) \cap (M - X) &\neq \varnothing, \end{aligned}$$

isto é, $z \in \partial X$. Disso, concluímos que, se z é aderente a ∂X, então $z \in \partial X$. Logo, pela Proposição 4.13, temos que ∂X é fechado. ∎

Um conceito importante, principalmente na definição de limites, são os pontos de acumulação.

Definição 4.15 (Ponto de acumulação) *Os pontos de acumulação de um conjunto $X \subset M$ são os pontos a pertencentes a M tais que toda bola aberta centrada em a contém pontos do conjunto X diferente do ponto a. Chamamos de* ***derivado do conjunto*** *X o conjunto de pontos de acumulação de X em M, e representamos por X'.*

Observação 4.10 *Nem todo ponto de aderência é ponto de acumulação. De fato, tomemos o conjunto $X = \{a\}$. Como $a \in X$, então é aderente, mas não é de acumulação, pois não há nenhum outro elemento diferente de a em X.*

Capítulo

5

Funções contínuas

Neste capítulo, estudaremos as funções contínuas entre espaços métricos, que é um tópico importante de espaços métricos e da topologia.

Sejam M, N espaços métricos e $f : M \to N$ uma função. Intuitivamente a ideia de continuidade é que pequenas variações no domínio da função ocasionam pequenas variações na imagem.

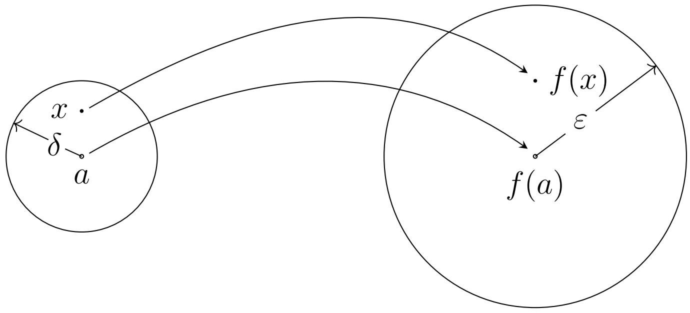
5.1 Definição e exemplos

Definição 5.1 *Sejam M e N espaços métricos com as métricas "d_1" e "d_2", respectivamente. Dizemos que a aplicação $f : M \to N$ é contínua no ponto $a \in M$, se dado $\varepsilon > 0$, pode-se obter $\delta > 0$ tal que*

$$d_1(x, a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Na Figura 5.1 temos uma representação no caso em que M e N são o plano Euclidiano.

Figura 5.1: Inequações no caso dos Planos Euclidianos $M = \mathbb{R}^2$ e $N = \mathbb{R}^2$.



Fonte: Do autor. Feita no Tikz. Baseado no livro Kreyszig [5] p.20.

Equivalentemente, $f : M \to N$ é contínua no ponto $a \in M$, quando dada qualquer bola $B' = B(f(a), \varepsilon)$ de centro $f(a)$, pode-se encontrar uma bola $B = B(a, \delta)$, de centro a, tal que $f(B) \subset B' = B(f(a), \varepsilon)$.

Observação 5.1 *Para uma notação mais limpa, vamos denotar as distâncias em cada um deles com a mesma letra d sempre que isso não causar ambiguidade.*

Exemplo 5.1 (Imersão isométrica) *Uma imersão isométrica é uma aplicação $f : M \to N$, tal que $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ para quaisquer $x, y \in M$. Toda aplicação isométrica é uma aplicação contínua.*

Solução *De fato, dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = \varepsilon$, logo*

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) = d(x, a) < \delta = \varepsilon,$$

para qualquer $a \in M$. ■

Exemplo 5.2 (Função Lipschitziana) *Sejam M, N espaços métricos e $f : M \to N$ uma função. Dizemos que f é função lipschitziana se existir $c > 0$ constante, chamada constante de Lipschitz, tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y),$$

para quaisquer $x, y \in M$. Toda função Lipschitiziana é contínua em cada ponto $a \in M$.

Solução *De fato, dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{c} > 0$. Daí, segue que*

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) \leq c \cdot d(x, a) < c \cdot \delta = c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon,$$

para qualquer $a \in M$. ■

Definição 5.2 (Contração fraca) *Dizemos que uma aplicação $f : M \to N$ é uma contração fraca quando*

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y),$$

para quaisquer $x, y \in M$.

Exemplo 5.3 *Toda contração fraca é uma aplicação contínua.*

Solução *De fato, basta notarmos que toda contração fraca é uma função lipschitiziana com $c = 1$. Logo, pelo Exemplo 5.2, temos que toda contração fraca é contínua.* ∎

Exemplo 5.4 *Para cada $i = 1, ..., n$, a projeção*

$$\begin{aligned} p_i : M_1 \times \cdots \times M_n &\to M_i, \\ p_i(x_1, ..., x_n) &\mapsto x_i, \end{aligned}$$

é uma contração fraca, se tomamos no produto cartesiano qualquer uma das três métricas definidas na Definição 3.4.

Solução *Como as métricas são equivalentes, provaremos aqui com a métrica d da Definição 3.4. Sejam $x = (x_i, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in M_1 \times \cdots \times M_n$, assim*

$$\begin{aligned} d(p_i(x), p_i(y)) &= d(x_i, y_i) \\ &\leq \sqrt{d(x_1, y_1)^2 + \cdots + d(x_i, y_i)^2 \cdots + d(x_n, y_n)^2} \\ &= d(x, y). \end{aligned}$$

∎

Exemplo 5.5 (Ponto isolado) *Seja $a \in M$ um ponto isolado. Então, toda aplicação $f : M \to N$ é contínua no ponto a.*

Solução *Como a é isolado, dado $\varepsilon > 0$, basta tomarmos δ tal que $B(a, \delta) = \{a\}$. Então,*

$$d(x, a) < \delta \implies x = a \implies d(f(x), f(a)) = 0 < \varepsilon,$$

e, portanto, f é contínua em a. ∎

Exemplo 5.6 (Espaço Métrico Discreto) *Se M é um espaço métrico discreto, então $f : M \to N$ é contínua.*

Solução *De fato, como M é discreto, temos pela Definição 4.4 que todo ponto $a \in M$ é isolado em M. Daí, segue pelo Exemplo 5.5 que f é contínua para todo $a \in M$ e, portanto, f é contínua.* ∎

Definição 5.3 (Descontinuidade) *Sejam M, N espaços métricos. Chamaremos a função $f : M \to N$ de descontínua no ponto $a \in M$, no caso de não ser contínua em a. Isto é, quando existir $\varepsilon > 0$ tal que $\forall \delta > 0$, é possível ter um x_δ tal que*

$$d(x_\delta, a) < \delta \implies d(f(x_\delta), f(a)) \geq \varepsilon.$$

Exemplo 5.7 (Aplicação descontínua) *A função $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:*

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & se\ x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

é descontínua em $a \notin \mathbb{Q}$.

Solução *De fato, tomando $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, dado $\delta > 0$, tomamos x_δ tal que*

$$|x_\delta - a| < \delta,$$

sendo $x_\delta \in \mathbb{Q}$ e $a \notin \mathbb{Q}$, então

$$\begin{aligned} |\phi(x_\delta) - \phi(a)| &= |1 - 0| \\ &= 1 \\ &> \frac{1}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

5.2 Propriedades de aplicações contínuas

Proposição 5.1 *Sejam f, g funções contínuas. Se $f : A \to B$ é contínua em a e $g : B \to C$ contínua em $f(a)$, então $g \circ f : A \to C$ é contínua em a. Ou seja, a composta de duas funções contínuas é contínua.*

Demonstração *Seja $\varepsilon > 0$. Como g é contínua em $f(a)$, podemos obter $\lambda > 0$ tal que para $y \in B$*

$$d(y, f(a)) < \lambda \implies d(g(y), g(f(a))) < \varepsilon. \tag{5.1}$$

Além do mais, para o mesmo λ, como f é contínua em a, podemos obter $\sigma > 0$ tal que

$$d(x, a) < \sigma \implies d(f(x), f(a)) < \lambda.$$

Daí, segue de (5.1), que

$$d(g(f(x)), g(f(a))) < \varepsilon.$$

■

Corolário 5.1 *Sejam M, N espaços métricos e $X \subset M$. Se $f : M \to N$ é contínua no ponto $a \in X$, então $f_{|X} : X \to N$ é contínua no ponto a.*

Demonstração *De fato, notemos que $f_{|X}$ pode ser descrita como uma composição:*

$$f \circ i : X \to M,$$

onde $i : X \to M$, é uma aplicação inclusão, isto é, $i(x) = x$, $x \in X$. Além do mais,

$$d(i(x), i(a)) \leq d(x, a),$$

e, portanto, i é uma contração fraca, o que implica na sua continuidade. Como f é contínua, pela Proposição 5.1 temos $f_{|X}$ contínua. ■

5.3 Aplicação uniformemente contínua

Intuitivamente, diremos que uma aplicação f é uniformemente contínua quando dados dois valores próximos em M, existem dois correspondentes em N que estão próximos.

Definição 5.4 (Aplicação uniformemente contínua) *Se M, N são espaços métricos, uma aplicação $f : M \to N$ é dita uniformemente contínua se, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tais que:*

$$\text{Para } x, y \in M, d(x, y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Observação 5.2 *Toda aplicação uniformemente contínua é uma aplicação contínua. De fato, dado a aplicação $f : M \to N$, uniformemente contínua, dado qualquer ponto $a \in M$ dado $\varepsilon > 0$, sabemos que existe $\delta > 0$ tal que*

$$d(x, a) < \delta \implies d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Daí, temos que f é contínua em a. Como a é qualquer em M temos f contínua. Entretanto, a recíproca não é verdadeira.

Exemplo 5.8 *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$ é contínua, mas não uniformemente contínua.*

Solução *Primeiramente provaremos que f é contínua. De fato, dado $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, escolha*

$$\delta \leq \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{1+2|x_0|}\right\},$$

segue que

$$|x+x_0| \;=\; |x-x_0+2x_0| \leq |x-x_0|+|2x_0| < 1+|2x_0|.$$

Suponhamos agora, $|x-x_0| < \delta$. Dessa maneira,

$$\begin{aligned} |f(x)-f(x_0)| &= |x^2-x_0^2| \\ &= |(x-x_0)(x+x_0)| \\ &= |x-x_0||x+x_0| \\ &< \delta|x+x_0| \\ &< \frac{\varepsilon}{1+2|x_0|}\cdot(1+2|x_0|) \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

E portanto, f é contínua. Agora, mostraremos que f não é uniformemente contínua. De fato, seja $\varepsilon = 1$, para qualquer $\delta > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n} < \delta.$$

Fazendo $x = n$ e $y = n + \frac{1}{n}$. Então,

$$|y-x| = \left|n - \left(n+\frac{1}{n}\right)\right| = \left|-\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \delta.$$

Dessa forma,

$$|y-x| = \frac{1}{n} < \delta \implies |f(y)-f(x)| = \left|n^2+2+\frac{1}{n^2}-n^2\right| = 2+\frac{1}{n^2} > \varepsilon.$$

Logo, f não é uniformemente contínua. ■

Exemplo 5.9 (Função Lipschitziana) *Toda aplicação Lipschitziana é uniformemente contínua.*

Solução *De fato, sejam* M, N *espaços métricos e* $f : M \to N$ *uma aplicação Lipschitziana, então existe* $c > 0$ *tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y),$$

para quaisquer $x, y \in M$. *Assim, dado* $\varepsilon > 0$, *tomamos* $\delta = \dfrac{\varepsilon}{c}$, *temos:*

$$d(x, y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y) < c \cdot \delta = c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$$

e, portanto, f *é uniformemente contínua.* ∎

Capítulo 6

Sequências

Definição 6.1 (Sequência) *Uma sequência x em um espaço métrico M é uma função $x : \mathbb{N} \to M$ que associa a cada número natural n um valor da sequência, que chamamos de n-ésimo termo da sequência e denotamos por x_n:*

$$\begin{aligned} x : \mathbb{N} &\to M, \\ n &\mapsto x_n. \end{aligned}$$

Usaremos (x_n) para representar uma sequência e a notação $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ para representar o conjunto dos valores da sequência.

Exemplo 6.1 *Determine o conjunto de valores da sequência definida como*

$$\begin{aligned} x : \mathbb{N} &\to \mathbb{R}, \\ n &\mapsto x_n = (-1)^n. \end{aligned}$$

Solução *Notemos que com a definição dada obtemos a sequência*

$$(-1, 1, -1, ...),$$

onde para números ímpares a sequência assume o valor -1, e para valores pares, 1. O conjunto de valores da sequência é

$$\{-1, 1\}.$$

■

Observação 6.1 *Observemos que, se $x : \mathbb{N} \to M$ for injetiva, ou seja, $m \neq n$ implica $x_m \neq x_n$, então (x_n) é uma sequência de termos distintos, isto é, sem repetições.*

Definição 6.2 (Subsequência) *Seja* (x_n) *uma sequência. Dizemos que uma* ***subsequência*** *de* (x_n)*, denotada por* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$*, é a função* x_n *restrita a* $\mathbb{N}' = n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$*, que é um subconjunto infinito de* $\mathbb{N}$*.*

Exemplo 6.2 *Do Exemplo 6.1 temos que a sequência* $(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ *é uma subsequência de* (x_n)*, na qual* $\mathbb{N}'$ *é o conjunto dos números pares.*

6.1 Sequências limitadas

Definição 6.3 (Sequências limitadas) *Uma sequência* (x_n) *no espaço métrico* M *chama-se limitada quando o conjunto dos seus termos é limitado, isto é, quando existe* $c > 0$ *tal que* $d(x_m, x_n) \leq c$ *para quaisquer* $m, n \in \mathbb{N}$*.*

Exemplo 6.3 *Seja* $M = \mathbb{R}$*, com a métrica usual da reta. A sequência* (x_n) *definida por* $x_n = \frac{1}{n}$ *é limitada.*

Solução *Com efeito, notemos que para todo* m, n *naturais temos pela desigualdade triangular que*

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right) &= \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{m}\right| + \left|\frac{1}{n}\right| \\ &\leq 2. \end{aligned}$$

Daí, concluímos que existe $c = 2 > 0$*, tal que* $d(x_m, x_n) \leq 2$ *para quaisquer* $m, n \in \mathbb{N}$*.* ■

Proposição 6.1 *Toda subsequência de uma sequência limitada é limitada.*

Demonstração *De fato, por hipótese a sequência é limitada, ou seja, existe* $c > 0$ *tal que*

$$d(x_m, x_n) \leq c,$$

para quaisquer m, n *números naturais. Como a subsequência é formada por termos da sequência, então quaisquer dois termos que escolhemos da subsequência, teremos*

$$d(x_{n_t}, x_{m_k}) \leq c,$$

com t, k *naturais. Logo, a subsequência é limitada.* ■

6.2 Limite de uma sequência

Definição 6.4 (Limite) *Seja (x_n) uma sequência em um espaço métrico M. Diremos que o ponto $a \in M$ é **limite da sequência** (x_n) se, para qualquer ε positivo, pode-se encontrar n_0 natural tal que, se $n > n_0$, então*

$$d(x_n, a) < \varepsilon.$$

Denotaremos por $\lim x_n = a$ ou $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Ou ainda, dizemos que x_n tende para a, denotado por $x_n \to a$.

Assim, dizer que $a \in M$ é limite da sequência (x_n) é equivalente a dizer que toda bola $B(a, \varepsilon)$ contém termos x_n com índices n suficientemente grandes, ou seja, apenas $x_1, ..., x_{n-1}$ podem não pertencer à bola $B(a, \varepsilon)$.

Diremos que a sequência $(x_n) \in M$ é convergente em M, se existe $a = \lim x_n$ pertencente a M, e neste caso dizemos que (x_n) converge para a. Caso contrário, a sequência será dita divergente em M.

Exemplo 6.4 *Seja a sequência $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Prove que $\lim x_n = 0$.*

Demonstração *De fato, dado $\varepsilon > 0$, como $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente (Exemplo 2.11), tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que*

$$n_0 > \frac{1}{\varepsilon},$$

daí, dado $n > n_0 > 0$, implica em

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon,$$

isto é, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$, temos

$$d\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

como queríamos. ■

Proposição 6.2 *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração *De fato, consideremos* (x_n) *uma sequência convergente em um espaço métrico* M*, e seja* $a = \lim x_n \in M$*. Em particular, tomando* $\varepsilon = 1$*, temos pela convergência de* (x_n) *que existe* $n_0 \in \mathbb{N}$*, tal que* $n > n_0$ *implica em* $d(x_n, a) < 1$*, ou ainda*

$$x_n \in B(a, 1),$$

para $n > n_0$*. Pela definição de sequência convergente temos então que a sequência está contida em*

$$\{x_1, ..., x_{n_0}\} \cup B(a, 1),$$

onde ambos são limitados. De fato, $\{x_1, ..., x_{n_0}\}$ *é um conjunto finito e* $B(0, 1)$ *é limitada pela Proposição 4.4, e assim, a união é limitada pela Proposição 4.5, e portanto, a sequência é limitada.* ■

Proposição 6.3 (Unicidade do limite) *O limite de uma sequência convergente é único.*

Demonstração *Consideremos* (x_n) *uma sequência convergente no espaço métrico* M*. Suponhamos que existam* $a, b \in M$ *distintos tais que*

$$a = \lim x_n \quad e \quad b = \lim x_n.$$

Assim, tomando $\varepsilon = \dfrac{d(a,b)}{2} > 0$*, existe* $n_1 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n > n_1$ *implica em*

$$d(x_n, a) < \varepsilon;$$

analogamente, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n > n_2$ *implica em*

$$d(x_n, b) < \varepsilon.$$

Tomemos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$*, então para todo* $n > n_0$ *seque que*

$$\begin{aligned} d(a,b) &\leq d(a, x_n) + d(x_n, b) \\ &< \varepsilon + \varepsilon \\ &= 2\varepsilon \\ &= d(a,b), \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Portanto, $a = b$, ou seja, o $\lim x_n$ é único. ■

Exemplo 6.5 *Toda sequência constante é convergente.*

Solução *Consideremos (x_n) tal que $x_n = a$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, a) = d(a, a) = 0 < \varepsilon$. Portanto, é convergente e $\lim x_n = a$.* ■

Proposição 6.4 *Se $\lim x_n = a$, então toda subsequência de (x_n) converge para a.*

Demonstração *Consideremos $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$ um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. Como a sequência (x_n) tende para a, então para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $d(x_n, a) < \varepsilon$. Tomemos k_0 tal que $n_{k_0} \geq n_0$. Logo, para todo $k > k_0$, temos*

$$n_k > n_{k_0} \geq n_0 \Rightarrow d(x_{n_k}, a) < \varepsilon.$$

Assim, toda subsequência de (x_n) também converge para a. ■

Corolário 6.1 *Se $\lim x_n = a$, então para todo $p \in \mathbb{N}$, tem-se que $\lim x_{n+p} = a$.*

Demonstração *De fato, notemos que $(x_{n+p})_{n\in\mathbb{N}} = (x_{p+1}, x_{p+2}, ...)$ é uma subsequência de (x_n), logo converge para a.* ■

Corolário 6.2 *Se $\lim x_n = a \neq b$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica que $x_n \neq b$.*

Demonstração *De fato, vamos supor o contrário, isto é, para todo k natural existe n_k tal que $n_k > n$ implica $x_{n_k} = b$. Os índices $n_k \in \mathbb{N}$ formam um conjunto infinito e então a subsequência constante (x_{n_k}) converge para b, o que contradiz a Proposição 6.4.* ■

Proposição 6.5 *Se uma sequência (x_n) possui duas subsequências que convergem para limites distintos, então ela é divergente.*

Demonstração *Se existisse $a = \lim x_n$ então pela Proposição 6.4 toda subsequência de (x_n) convergiria para a. E, pela unicidade do limite demonstrada na Proposição 6.3, temos que uma subsequência de (x_n) não convergiria para $b \neq a$, isto é, não possuiria duas subsequências convergindo para limites distintos.* ■

Observação 6.2 *Notemos que a recíproca da Proposição 6.2 nem sempre é verdade. De fato, consideremos a sequência* $(x_n) = (-1)^n$*. A mesma é limitada por 1, já que o conjunto dos seus valores é* $\{-1, 1\}$*. Além do mais, notemos que a subsequência de termos pares converge para* 1*, já a de termos ímpares, para* -1*, isto é, temos subsequências convergindo para limites distintos, e pela Proposição 6.5 temos que* (x_n) *diverge.*

Para concluirmos essa seção, mostraremos um resultado importante para o limite de uma sequência no produto cartesiano $M \times N$. Aqui, usaremos a métrica "d" da Definição 3.4.

Proposição 6.6 *Uma sequência de pontos* $z_n = (x_n, y_n)$ *no produto cartesiano* $M \times N$ *de espaços métricos, converge para o ponto* $c = (a, b) \in M \times N$ *se, e somente se,* $\lim x_n = a$ *em* M *e* $\lim y_n = b$ *em* N*.*

Demonstração *Suponhamos que* $\lim z_n = c$*, ou seja,*

$$\lim_{n \to +\infty} (x_n, y_n) = (a, b).$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$*, existe* n_0*, tal que* $n > n_0$ *implica*

$$d((x_n, y_n), (a, b)) < \varepsilon.$$

Entretanto,

$$\begin{aligned} d((x_n, y_n), (a, b)) &= \sqrt{d(x_n, a)^2 + d(y_n, b)^2} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Daí, temos

$$d(x_n, a)^2 + d(y_n, b)^2 < \varepsilon^2.$$

Como $d(x_n, a) \geq 0$ *e* $d(y_n, b) \geq 0$ *temos*

$$d(x_n, a) < \varepsilon \quad e \quad d(y_n, b) < \varepsilon,$$

para $n > n_0$*. E, portanto,* $\lim x_n = a$ *e* $\lim y_n = b$*.*

Reciprocamente, se $\lim x_n = a$ *e* $\lim y_n = b$*, então para* $\varepsilon > 0$*, existe* n_1*, tal que*

$$d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},$$

para $n > n_1$. *E existe* n_2, *de modo que*

$$d(y_n, b) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},$$

para $n > n_2$.

Tomemos $n_0 = \max n_1, n_2$. *Assim, para* $n > n_0$

$$d(x_n, a)^2 < \frac{\varepsilon^2}{2} \quad e \quad d(y_n, b)^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Assim,

$$d(x_n, a)^2 + d(y_n, b)^2 < \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2,$$

e, portanto,

$$d((x_n, y_n), (a, b)) = \sqrt{d(x_n, a)^2 + d(y_n, b)^2} < \varepsilon,$$

e, como $(x_n, z_n) = z_n$ *e* $(a, b) = c$, *temos* $d(z_n, c) < \varepsilon$, $\forall n > n_0$ *e, portanto,* $\lim z_n = c = (a, b)$. ■

6.3 Propriedades de convergência e topologia

Lema 6.1 *Seja* (x_n) *tal que, para todo* $n \in \mathbb{N}$, $d(x_n, a) \leq \frac{1}{n}$. *Então* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.

Demonstração *Dado* $\varepsilon > 0$, *temos pelo Exemplo 2.11 que existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\frac{1}{n} < \varepsilon,$$

para todo $n > n_0$. *Por hipótese*

$$d(x_n, a) < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

para todo $n > n_0$ *e, portanto,* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. ■

Proposição 6.7 *Sejam* M, N *espaços métricos. A função* $f : M \to N$ *é contínua no ponto* a *se, e somente se, para toda* (x_n) *que converge para* a *em* M *então* $f(x_n)$ *converge para* $f(a)$ *em* N.

Demonstração *Suponhamos que f é contínua em a. Dessa maneira, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$d(x,a) < \delta \implies d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Caso $x_n \to a$, então dado o mesmo δ, podemos obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \implies d(x_n, a) < \delta.$$

Daí, pela continuidade de f, $d(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$, para $n > n_0$, isto é, $f(x_n) \to f(a)$.

Reciprocamente, supondo que se $x_n \to a$, então $f(x_n) \to f(a)$ provaremos que f é contínua. Suponhamos por absurdo f não seja contínua, ou seja, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos obter $x_n \in M$, com

$$d(x_n, a) < \frac{1}{n} \text{ e } d(f(x_n), f(x)) \geq \varepsilon.$$

Nas condições acima temos pelo Lema 6.1, que $x_n \to a$. Entretanto, notemos que $f(x_n) \not\to f(a)$ e, portanto, temos uma contradição. ∎

Proposição 6.8 *Seja M um espaço métrico e $A \subset M$. Assim, $a \in \overline{A}$ se, e somente se, a for limite de uma sequência $x_n \in A$.*

Demonstração *Suponhamos que $a \in \overline{A}$. Dessa maneira, para todo $\varepsilon > 0$, existe $x_\varepsilon \in B(a, \varepsilon) \cap A$. Tomemos $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$. Dessa maneira, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe x_n tal que*

$$x_n \in B\left(a, \frac{1}{n}\right) \cap A.$$

Notemos que $(x_n) \subset A$ e, $d(x_n, a) < \dfrac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, assim, pelo Lema 6.1 temos $\lim x_n = a$.

Reciprocamente, se $\lim x_n = a$, então para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica em $d(x_n, a) < \varepsilon$, ou seja,

$$x_n \in B(a, \varepsilon) \cap A,$$

para $n > n_0$. Logo, $a \in \overline{A}$, pois dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $x_n \in B(a, \varepsilon) \cap A$. ∎

Corolário 6.3 *$A \subset M$ é fechado se, e somente se, para toda sequência $(x_n) \in A$ tal que $\lim x_n = a$, então $a \in A$.*

Demonstração *Suponha A fechado, ou seja, $A = \overline{A}$, isto é, todos os seus pontos são aderentes. Como $(x_n) \in A$ e $\lim x_n = a$, temos pela Proposição 6.8 que $a \in \overline{A} = A$.*

Reciprocamente, suponha que toda sequência $(x_n) \in A$ tal que $\lim x_n = a$, então $a \in A$. Suponhamos que A não é fechado, isto é, $\overline{A}$ não está contido em A, então existe $a \in \overline{A}$ tal que $a \notin A$. Pela Proposição 6.8, existe uma sequência $(x_n) \in A$, tal que $x_n \to a$. Mas por hipótese, $a \in A$, absurdo. ■

6.4 Sequências de Cauchy

Definição 6.5 (Sequência de Cauchy) *Seja M um espaço métrico. Uma sequência (x_n) em M é dita* ***sequência de Cauchy*** *se, para todo $\varepsilon > 0$, existe n_0 natural, tal que $m, n > n_0$ implica em*

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Notemos que uma característica interessante é que seus termos vão se aproximando uns dos outros tanto quanto se queira à medida que cresce o índice n.

Proposição 6.9 *Toda subsequência de uma sequência de Cauchy é também de Cauchy.*

Demonstração *De fato, se (x_n) é de Cauchy, então dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon,$$

para quaisquer $m, n > n_0$.

Como todo termo da subsequência é também termo da sequência (x_n) temos que $n_p, n_k > n_0$ implica em

$$d(x_{n_p}, x_{n_k}) < \varepsilon,$$

logo a subsequência é de Cauchy. ■

Notemos que quando uma sequência em um espaço métrico M converge para $a = \lim x_n \in M$, significa pela definição que os termos da sequência estão se aproximando de a tanto quanto se queira, o que intuitivamente nos faz pensar que consequentemente eles devem se aproximar um dos outros. O resultado abaixo nos mostra exatamente isso.

Proposição 6.10 *Toda sequência convergente em um espaço métrico M é de Cauchy.*

Demonstração *De fato, sejam M um espaço métrico e (x_n) uma sequência que converge para a. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica em*

$$d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daí, se $m, n > n_0$ temos então

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, a) + d(a, x_m) \\ &= d(x_m, a) + d(x_m, a) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

logo, a sequência (x_n) é de Cauchy. ■

Exemplo 6.6 *Mostre que nem toda sequência de Cauchy é convergente.*

Solução *Para isso, consideremos uma sequência de números racionais que converge para um número irracional. Por exemplo, a sequência a seguir:*

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 1,4 \\ x_3 &= 1,41 \\ x_4 &= 1,414 \\ &\vdots \end{aligned}$$

com $\lim x_n = \sqrt{2}$. Essa sequência é de Cauchy, uma vez que é convergente em $\mathbb{R}$. No entanto, notemos que (x_n) não é convergente em $\mathbb{Q}$, pois $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. ■

Proposição 6.11 *Toda sequência de Cauchy em um espaço métrico é limitada.*

Demonstração *Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em um espaço métrico M. Então, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para quaisquer $m, n > n_0$ temos*

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Em particular, considerando $\varepsilon = 1$, podemos afirmar que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para $m, n > n_1$, temos

$$d(x_m, x_n) < 1,$$

ou seja, o conjunto

$$X = \{x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, x_{n_1+3}, ...\},$$

é limitado, pois, para quaisquer dois elementos de X, a distância entre eles é menor que 1. Além disso, como $\{x_1, x_2, ..., x_{n_1}\}$ é finito, temos da análise real que é limitado. Portanto, podemos concluir que a sequência

$$(x_n) = \{x_1, x_2, ..., x_{n_1}\} \cup X,$$

é limitada, pela Proposição 4.5. ■

Observação 6.3 *É importante notarmos que a recíproca nem sempre é verdadeira. Em outra palavras, nem toda sequência limitada é de Cauchy, como iremos exemplificar a seguir.*

Exemplo 6.7 *Mostre que a sequência $(x_n) = (-1)^n$ em $(\mathbb{R}, d_E)$ não é de Cauchy.*

Solução *A sequência é de fato limitada, entretanto, podemos demonstrar que não é uma sequência de Cauchy. Tomemos em particular $\varepsilon = \frac{1}{2}$, e notemos que,*

$$d(x_n, x_{n+1}) = 2,$$

para todo natural n. Isto é, a distância entre termos subsequentes da sequência é sempre 2. Portanto, a sequência não satisfaz a definição de uma sequência de Cauchy. ■

Proposição 6.12 *Se uma sequência (x_n) em um espaço métrico M é de Cauchy e existe (x_{n_k}) subsequência convergente, então (x_n) converge. Em particular, (x_n) converge para o mesmo limite de (x_{n_k}).*

Demonstração *Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em um espaço métrico M e (x_{n_k}) uma subsequência convergindo para $a \in M$. Seja $\varepsilon > 0$, qualquer.*

- ***Convergência de (x_{n_k}) para a:***

Existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n_k > n_1$ temos:

$$d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

- ***Sequência de Cauchy*** *(x_n):*

  Existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que, para $m, n > n_2$ temos:

$$d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

- ***Convergência de*** *(x_n)* ***para*** *a*

  Definamos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Logo, para todo $n > n_0$ e tomando $n_k > n_0$, podemos combinar as desigualdades acima, de modo que obtemos:

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(a, x_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, (x_n) converge para a. ■

Proposição 6.13 *Toda aplicação uniformemente contínua transforma sequências de Cauchy em sequências de Cauchy.*

Demonstração *De fato, seja $f : M \to N$ uma aplicação uniformemente contínua, e (x_n) uma sequência de Cauchy em M. Vamos mostrar que $(f(x_n))$ é de Cauchy.*

Como f é uniformemente contínua, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \varepsilon,$$

para $x, y \in M$. Agora, como (x_n) é de Cauchy, tomando $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, de modo que $n, m > n_0$ implica $d(x_n, x_m) < \delta$. Dessa maneira, concluímos

$$d(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon,$$

para $n, m > n_0$, isto é, $(f(x_n))$ é de Cauchy. ■

Capítulo

7

Aplicação sequências de Cauchy

Neste capítulo iremos apresentar uma forma de construir os números reais a partir de sequências de Cauchy de números racionais, denominada Construção de Cantor. Para isto, iremos assumir os axiomas dos números racionais. Para iniciarmos esta seção enunciaremos abaixo algumas definições.

Definição 7.1 (Sequência limitada) *Seja $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais. Uma sequência (x_n), nos racionais, é dita limitada se existir um número racional K, tal que*

$$|x_n| \leq K, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definição 7.2 (Sequência de Cauchy) *Uma sequência (x_n) nos racionais é dita de Cauchy se para qualquer número racional $\varepsilon > 0$, existir um inteiro positivo n_0 tal que*

$$|x_n - x_m| < \varepsilon, \forall n, m \geq n_0.$$

Definição 7.3 (Convergência) *Uma sequência (x_n) nos racionais é dita convergente para um número racional x, se para qualquer número racional $\varepsilon > 0$, existe um inteiro positivo n_0, tal que*

$$|x_n - x| < \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

Em símbolos, $\lim_{n \to +\infty} x_n = x$. Caso exista x nos racionais, diremos que x é o limite da sequência.

Das definições acima, podemos verificar alguns resultados que já foram provados de forma mais amplas anteriormente.

1. Uma sequência convergente em $\mathbb{Q}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{Q}$. (Ver Proposição 6.10);

2. Toda sequência de Cauchy em $\mathbb{Q}$ é limitada; em particular, toda sequência convergente em $\mathbb{Q}$ é limitada (Ver Proposição 6.2 e Proposição 6.11);

3. O limite de uma sequência convergente em $\mathbb{Q}$ é único (Ver Proposição 6.3).

Denotaremos de $F_{\mathbb{Q}}$ o conjunto de todas as sequências de Cauchy em $\mathbb{Q}$. Com isso podemos definir uma relação de equivalência nesse conjunto, como se segue abaixo.

Definição 7.4 (Sequências equivalentes) *Uma sequência (x_n) em $F_{\mathbb{Q}}$ é dita* ***equivalente*** *a uma sequência (y_n) de $F_{\mathbb{Q}}$ se, e somente se, $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n - y_n| = 0$. Em símbolos, $(x_n) \sim (y_n)$.*

Proposição 7.1 *A relação $\sim$ definida em $F_{\mathbb{Q}}$ é uma relação de equivalência.*

Demonstração *De fato, para isso verificaremos que são válidas as três condições para ser uma relação de equivalência: reflexividade, simetria e transitividade.*

(i) Reflexiva: $(x_n) \sim (x_n)$, pois $|x_n - x_n| = 0$ para todo n, logo $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n - x_n| = 0$.

(ii) Simetria: Se $(x_n) \sim (y_n)$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n - y_n| = 0$; mas $|x_n - y_n| = |y_n - x_n|$ e, portanto, $\lim\limits_{n\to+\infty} |y_n - x_n| = 0$, de modo que $(y_n) \sim (x_n)$.

(iii) Transitiva: Supondo $(x_n) \sim (y_n)$ e $(y_n) \sim (z_n)$. Então,

$$\lim_{n\to+\infty} |x_n - y_n| = 0 = \lim_{n\to+\infty} |y_n - z_n|.$$

Utilizando a desigualdade triangular, temos

$$0 \leq |x_n - z_n| \leq |x_n - y_n| + |y_n - z_n|,$$

pra todo n natural. Logo, $(x_n) \sim (z_n)$. ■

Assim, a relação $\sim$ divide $F_{\mathbb{Q}}$ em classes de equivalência. Quaisquer dois membros da mesma classe de equivalência são equivalentes, enquanto nenhum membro de uma classe de equivalência é equivalente a um membro de qualquer outra classe de equivalência. A classe de equivalência contendo a sequência (x_n) será denotada por $[(x_n)]$ ou simplesmente $[x_n]$, ou seja,

$$[x_n] = \{(x_n) \in F_{\mathbb{Q}} : (y_n) \sim (x_n)\}.$$

Com isso, podemos enunciar e demonstrar alguns resultados que serão importantes para a definição do conjunto dos reais posteriormente.

Proposição 7.2 *Se $(x_n) \in F_{\mathbb{Q}}$ então $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ se, e somente se $(x_n) \sim (x)$. Aqui (x) é a sequência constante, onde todo termo assume o valor x.*

Demonstração *Se $(x_n) \sim (x)$, pela definição de $\sim$, segue que*

$$\lim_{n\to+\infty} |x_n - x| = 0,$$

ou ainda, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Reciprocamente, se $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$, então

$$\lim_{n\to+\infty} |x_n - x| = 0$$

e, portanto, $(x_n) \sim (x)$. ■

Proposição 7.3 *Se (x_n) e (y_n) pertencem a $F_{\mathbb{Q}}$, então $(x_n + y_n)$ e $(x_n y_n)$ também pertencem a $F_{\mathbb{Q}}$.*

Demonstração *Seja $\varepsilon > 0$ um número racional. Como (x_n) e (y_n) são de Cauchy, existem n_1 e n_2 tais que*

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n, m \geq n_1 \quad e \quad |y_n - y_m| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n, m \geq n_2.$$

Tomemos $n_0 \geq \max\{n_1, n_2\}$. Então, para $n, m \geq n_0$, nós temos

$$\begin{array}{rcl} |(x_n + y_n) - (x_m + y_m)| & \leq & |x_n - x_m| + |y_n - y_m| \\ & < & \varepsilon. \end{array}$$

Logo, $(x_n + y_n)$ é uma sequência de Cauchy de números racionais.

Para demonstrarmos que $(x_n y_n)$ é uma sequência de Cauchy, lembremos ainda que pela Proposição 6.11 as sequências (x_n) e (y_n) são limitadas, isto é, existem $k_1, k_2 \in \mathbb{Q}$, *tal que*

$$|x_n| \leq k_1 \quad e \quad |y_n| \leq k_2, \forall n.$$

Agora, para $n, m \geq n_0$, temos

$$\begin{aligned} |x_ny_n - x_my_m| &= |x_ny_n - x_my_m + x_my_n - x_my_n| \\ &= |y_n(x_n - x_m) + x_m(y_n - y_m)| \\ &\leq |y_n| \cdot |(x_n - x_m)| + |x_m| \cdot |(y_n - y_m)| \\ &< k_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + k_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &= (k_1 + k_2)\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot \end{aligned}$$

Como k_1 e k_2 são fixos, segue que (x_ny_n) é uma sequência de Cauchy de números racionais. ∎

O próximo resultado nos será útil posteriormente para garantir que a soma de reais estará bem definida.

Proposição 7.4 *Se $(x_n), (y_n), (x'_n), (y'_n) \in F_{\mathbb{Q}}$ e $(x_n) \sim (x'_n)$, $(y_n) \sim (y'_n)$, então $(x_n + y_n) \sim (x'_n + y'_n)$ e $(x_ny_n) \sim (x'_ny'_n)$.*

Demonstração *Dado $\varepsilon > 0$ um número racional. Como $(x_n) \sim (x'_n)$, $(y_n) \sim (y'_n)$, existe n_0 tal que, para $n \geq n_0$, temos*

$$|x_n - x'_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad e \quad |y_n - y'_n| < \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Logo, segue que para $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (x'_n - y'_n)| &\leq |x_n - x'_n| + |y_n - y'_n| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

ou seja, $\lim_{n\to+\infty} |(x_n + y_n) - (x'_n - y'_n)| = 0$ e, portanto, $(x_n + y_n) \sim (x'_n + y'_n)$.

Para o produto, novamente lembremos que toda sequência de Cauchy é limitada. Logo, existem k_1 e k_2 racionais, tais que

$$|x_n| \leq k_1 \quad e \quad |y'_n| \leq k_2, \forall n.$$

Dessa maneira, tomando $\varepsilon > 0$ racional, temos

$$|x_n - x'_n| < \frac{\varepsilon}{2k_2} \quad e \quad |y_n - y'_n| < \frac{\varepsilon}{2k_1},$$

pois $(x_n) \sim (x'_n)$, $(y_n) \sim (y'_n)$. Para $n \geq n_0$, segue que

$$\begin{aligned} |x_n y_n - x'_n y'_n| &= |x_n y_n - x'_n y'_n + x_n y'_n - x_n y'_n| \\ &= |y'_n(x_n - x'_n) + x_n(y_n - y'_n)| \\ &\leq |y'_n| \cdot |x_n - x'_n| + |x_n| \cdot |y_n - y'_n| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

o que, por sua vez, implica $\lim_{n\to+\infty} |x_n y_n - x'_n y'_n| = 0$ e, portanto, $(x_n y_n) \sim (x'_n y'_n)$. ■

A seguinte propriedade será de extrema importância para verificarmos a existência do inverso de um número real não nulo.

Proposição 7.5 *Se (x_n) é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{Q}$ que não tem o limite 0, então existe uma sequência (y_n) também de Cauchy em $\mathbb{Q}$, tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n y_n - 1| = 0$, isto é, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n y_n = 1$*

Demonstração *Notemos que, desde que (x_n) não tem limite igual a 0, então existe um número positivo $\alpha \in \mathbb{Q}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $k \geq n$ implica*

$$|x_k| \geq \alpha.$$

Como (x_n) é uma sequência de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$|x_n - x_m| < \frac{\alpha}{2},$$

para $m, n \geq n_0$.

Se $|x_{k_0}| \geq \alpha$, onde $k_0 > n_0$, então

$$|x_n| = |x_{k_0} - (x_{k_0} - x_n)| \geq |x_{k_0}| - |x_{k_0} - x_n| > \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2},$$

para todo $n \geq n_0$. Portanto, $x_n \neq 0, \forall n \geq n_0$.

Consideremos a sequência

$$y_n = \begin{cases} 1, & se\ n < n_0 \\ \dfrac{1}{x_n}, & se\ n \geq n_0. \end{cases}$$

Então, (y_n) é uma sequência de números racionais. Como (x_n) é uma sequência de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, racional, existe n_ε tal que

$$|x_n - x_m| < \frac{\alpha^2\varepsilon}{4}, \forall m, n \geq n_\varepsilon.$$

Dessa maneira,

$$\begin{aligned} |y_n - y_m| &= \left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_m}\right| \\ &= \left|\frac{x_m - x_n}{x_n x_m}\right| \\ &= \frac{|x_n - x_m|}{|x_n||x_m|} \\ &< \left(\frac{\alpha^2\varepsilon}{4}\right) \cdot \left(\frac{4}{\alpha^2}\right) \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

para todo $m, n \geq \max\{n_0, n_\varepsilon\}$. E, portanto, (y_n) é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{Q}$. Além do mais, $x_n y_n = 1$, para todo $n \geq n_0$, e assim, $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n y_n - 1| = 0$. ■

7.1 Adição, multiplicação e ordem nos Reais

Nesta seção iremos definir o que é um número real, assim como a soma e multiplicação de dois reais e mostraremos que $\mathbb{R}$ mantém a ordem dos racionais.

Definição 7.5 (Número real) *Um **número real** é uma classe de equivalência $[x_n]$ com respeito a relação de equivalência $\sim$ definida em $F_\mathbb{Q}$.*

Denotamos por $\mathbb{R}$ o conjunto de todos os números reais. Se $\xi \in \mathbb{R}$ é $[x_n]$, então

$$\xi = \{(y_n) \in F_\mathbb{Q} : (y_n) \sim (x_n)\}.$$

Definição 7.6 (Soma e produto de reais) *Sejam $\xi = [x_n]$ e $\eta = [y_n]$ pertencentes a*

$\mathbb{R}$. *Definimos a soma* $\xi + \eta$ *como*

$$\xi + \eta = [x_n] + [y_n] = [x_n + y_n],$$

e o produto $\xi\eta$ *como sendo*

$$\xi\eta = [x_n] \cdot [y_n] = [x_n y_n].$$

Mostraremos a seguir que essa soma e esse produto estão bem definidos. Além do mais, mostraremos que os reais é um corpo.

Proposição 7.6 *As operações de soma e produto estão bem definidas. Além do mais, com estas operações* $\mathbb{R}$ *é um corpo.*

Demonstração *De fato, a boa definição da soma e do produto segue da Proposição 7.4. Além do mais, ambas as operações são fechadas em* $\mathbb{R}$ *pela Proposição 7.3. Mostraremos agora que* $\mathbb{R}$ *satisfaz as condições para ser corpo.*

Sejam $\xi = [x_n], \eta = [y_n]$ *e* $\zeta = [z_n]$ *números reais. Sendo conhecidas as propriedades dos números racionais, temos:*

A1) $(\xi + \eta) + \zeta = \xi + (\eta + \zeta)$ *(associatividade da soma).*

$$\begin{aligned}(\xi + \eta) + \zeta &= ([x_n] + [y_n]) + [z_n] \\ &= [x_n + y_n] + [z_n] \\ &= [x_n + y_n + z_n] \\ &= [x_n + (y_n + z_n)] \\ &= [x_n] + [y_n + z_n] \\ &= \xi + (\eta + \zeta).\end{aligned}$$

A2) $\exists 0 = [(0)] \in \mathbb{R}$ *tal que* $\xi + 0 = 0 + \xi = x$ *(existência de elemento neutro para a soma).*

De fato,

$$\begin{aligned}\xi + 0 &= [x_n] + [(0)] \\ &= [x_n + 0] \\ &= [x_n],\end{aligned} \qquad \begin{aligned}0 + \xi &= [(0)] + [x_n] \\ &= [0 + x_n] \\ &= [x_n].\end{aligned}$$

A3) Para todo $\xi \in \mathbb{R}$ existe um único $\xi_{-1} \in \mathbb{R}$, tal que $\xi + \xi_{-1} = \xi_{-1} + \xi = 0$ (existência de inverso aditivo).

De fato, para cada n, temos que x_n é um número racional. Como os racionais é um corpo, temos que existe $-x_n$ tal que $x_n + (-x_n) = (-x_n) + x_n = 0$. Logo, considerando $\xi_{-1} = [-x_n]$, temos

$$\begin{aligned} \xi + \xi_{-1} &= [x_n] + [-x_n] \\ &= [x_n + (-x_n)] \\ &= [(0)] \\ &= 0, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \xi_{-1} + \xi &= [-x_n] + [x_n] \\ &= [-x_n + x_n] \\ &= [(0)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

A4) $\xi + \eta = \eta + \xi$ (comutatividade da soma).

$$\xi + \eta = [x_n] + [y_n] = [x_n + y_n] = [y_n + x_n] = \eta + \xi.$$

M1) $(\xi \cdot \eta) \cdot \zeta = \xi \cdot (\eta \cdot \zeta)$ (associatividade do produto).

$$\begin{aligned} (\xi \cdot \eta) \cdot \zeta &= ([x_n] \cdot [y_n]) \cdot [z_n] \\ &= [x_n y_z] \cdot [z_n] \\ &= [(x_n y_n) z_n] \\ &= [x_n (y_n z_n)] \\ &= [x_n] \cdot [z_n y_z] \\ &= \xi \cdot (\eta \cdot \zeta). \end{aligned}$$

M2) $\xi \cdot (\eta + \zeta) = \xi \cdot \eta + \xi \cdot \zeta$ e $(\xi + \eta) \cdot \zeta = \xi \cdot \zeta + \eta \cdot \zeta$ (distributividade à esquerda e à direita).

$$\begin{aligned} \xi \cdot (\eta + \zeta) &= [x_n] \cdot ([y_n] + [z_n]) \\ &= [x_n] \cdot [y_n + z_n] \\ &= [x_n (y_n + z_n)] \\ &= [x_n y_n + x_n z_n] \\ &= [(x_n y_n) + (x_n z_n)] \\ &= [x_n y_n] + [x_n z_n] \\ &= [x_n] \cdot [y_n] + [x_n] \cdot [z_n] \\ &= \xi \cdot \eta + \xi \cdot \zeta. \end{aligned}$$

Analogamente para a distributividade à direita.

M3) *Existe* $1 = [(1)] \in \mathbb{R}$ *tal que* $\xi \cdot 1 = 1 \cdot \xi = \xi$ *(elemento unidade).*

Como $x_n \cdot 1 = 1 \cdot x_n = x_n$ *para todo* n*, temos*

$$\begin{aligned} \xi \cdot 1 &= [x_n] \cdot [(1)] \\ &= [x_n \cdot 1] \\ &= [x_n] \\ &= \xi, \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 1 \cdot \xi &= [(1)] \cdot [x_n] \\ &= [1 \cdot x_n] \\ &= [x_n] \\ &= \xi. \end{aligned}$$

M4) $\xi \cdot \eta = \eta \cdot \xi$ *(comutatividade do produto).*

$$\begin{aligned} \xi \cdot \eta &= [x_n] \cdot [y_n] \\ &= [x_n y_n] \\ &= [y_n x_n] \\ &= [y_n] \cdot [x_n] \\ &= \eta \cdot \xi. \end{aligned}$$

M5) *Para todo* ξ *pertencente a* $\mathbb{R}$*, não nulo, existe* ξ^{-1} *em* $\mathbb{R}$*, tal que* $\xi \cdot \xi^{-1} = \xi^{-1} \cdot \xi = 1$ *(existência do inverso multiplicativo).*

Quando $\xi = [x_n] \neq 0 = [(0)]$*, é possível que* $x_n = 0$ *para algum* n*. Consequentemente, para provarmos a existência do inverso multiplicativo, requer alguns cuidados:*

Se $\xi = [x_n] \neq 0 = [(0)]$*, então* (x_n) *não é equivalente a* (0)*, ou seja,*

$$\lim_{n \to +\infty} x_n \neq 0,$$

nos racionais. Portanto, pela Proposição 7.5, existe $(y_n) \in F_{\mathbb{Q}}$*, tal que*

$$\lim_{n \to +\infty} x_n y_n = 1,$$

isto é, $(x_n y_n) \sim (1)$*. Daí, segue que* $[y_n]$ *é o inverso multiplicativo de* $[x_n]$*.* ∎

Definição 7.7 (Sequência positiva) *Uma sequência* (x_n) *nos racionais, é dita* ***positiva*** *se existir um número racional positivo* α *e um inteiro positivo* m*, tal que*

$$x_n > \alpha, \forall n \geq m.$$

Observemos que, pela definição acima, a sequência pode ter um número finito de termos não positivos.

Proposição 7.7 *Se* (x_n) *e* (y_n) *são sequências positivas de números racionais, então* $(x_n + y_n)$ *e* $(x_n y_n)$ *também são sequências positivas.*

Demonstração *Como* (x_n) *e* (y_n) *são positivas, existem* α, β *racionais positivos e* $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$*, tais que*

$$x_n > \alpha, \forall n \geq m_1,$$
$$y_n > \beta, \forall n \geq m_2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} x_n + y_n &> \alpha + \beta, \forall n \geq \max\{m_1, m_2\}, \\ x_n y_n &> \alpha\beta, \forall n \geq \max\{m_1, m_2\}. \end{aligned}$$

E, portanto, $(x_n + y_n)$ *e* $(x_n y_n)$ *também são sequências positivas.* ■

Proposição 7.8 *Se* (x_n) *é uma sequência positiva em* $\mathbb{Q}$ *e* $(x_n) \sim (x'_n)$*, então* (x'_n) *é também uma sequência positiva de números racionais.*

Demonstração *Como* (x_n) *é uma sequência positiva, existem* α*, racional positivo, e* $m_1 \in \mathbb{N}$*, tais que*

$$x_n > \alpha, \forall n \geq m_1.$$

Além do mais, como $(x_n) \sim (x'_n)$*, temos* $\lim\limits_{n \to +\infty} |x_n - x'_n| = 0$*, ou seja, para* $\dfrac{\alpha}{2} > 0$*, existe um inteiro positivo* m_2*, tal que*

$$|x_n - x'_n| \leq \frac{\alpha}{2},$$

para $n \geq m_2$*.*

Tomemos $m_0 = \max\{m_1, m_2\}$, *Dessa maneira, para* $n \geq m_0$, *temos*

$$\begin{aligned} |x_n - x'_n| \leq \frac{\alpha}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{\alpha}{2} < x_n - x'_n < \frac{\alpha}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad -x_n - \frac{\alpha}{2} < -x'_n < \frac{\alpha}{2} - x_n \\ &\Leftrightarrow \quad x_n - \frac{\alpha}{2} < x'_n < x_n + \frac{\alpha}{2}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$x'_n > \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2},$$

para $n \geq m_0$. ■

Observação 7.1 *Observemos então, que se em uma classe de equivalência, contiver uma sequência positiva, então todas as sequências da classe são positivas.*

Com isso, podemos definir o que será um número real positivo.

Definição 7.8 (Número real positivo) *Um número* $\xi \in \mathbb{R}$ *é dito* ***positivo*** *se contém uma sequência positiva. O conjunto de todos os números reais positivos será denotado por* $\mathbb{R}^+$*:*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^+ &= \{\xi \in \mathbb{R} : \xi \text{ é positivo}\} \\ &= \{\xi \in \mathbb{R} : \text{ algum } (x_n) \in \xi \text{ é uma sequência positiva de números racionais}\}. \end{aligned}$$

Como observado anteriormente, $\xi \in \mathbb{R}$ é dito **positivo** se toda sequência pertencente a ele é positiva. Além do mais, pela Proposição 7.7, $\mathbb{R}^+$ é fechado sob a soma e o produto, isto é, se $\xi, \eta \in \mathbb{R}^+$, então $\xi + \eta, \xi\eta \in \mathbb{R}^+$.

Proposição 7.9 *Se* $\xi \in \mathbb{R}$, *então um e apenas um dos seguintes itens deve ser válido.*

(i) $\xi = 0$,

(ii) $\xi \in \mathbb{R}^+$,

(iii) $-\xi \in \mathbb{R}^+$.

Demonstração *Se* $\xi = 0$, *não há o que fazer. Suponhamos que (i) não aconteça. Logo, se* $(x_n) \in \xi$, *então*

$$\lim_{n \to +\infty} x_n \neq 0,$$

ou seja, existe um número positivo $\alpha \in \mathbb{Q}$ *tal que para cada* $n \in \mathbb{N}$*, existe* $k = k(n, \alpha) \in \mathbb{N}$ *de modo que*

$$|x_k| \geq \alpha, \text{ com } k > n,$$

ou seja,

$$x_k < -\alpha \quad \text{ou} \quad x_k > \alpha, \text{ com } k > n.$$

Além do mais, como (x_n) *é de Cauchy, existe* $n_2 \in \mathbb{N}$*, tal que*

$$|x_n - x_m| < \frac{\alpha}{2}, n, m > n_2.$$

Daí, existe $n_0 = n_0(n_2, \alpha) \in \mathbb{N}$*, com* $n_0 > n_2$*, tal que* $x_{n_0} < -\alpha$ *ou* $x_{n_0} > \alpha$*.*
Assim, caso

- $x_{n_0} > \alpha$*, então*

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n_0} + x_n - x_{n_0} \\ &> \alpha - \frac{\alpha}{2} \\ &= \frac{\alpha}{2}, \forall n > n_2. \end{aligned}$$

  Logo, (x_n) *é positivo e, portanto,* $\xi \in \mathbb{R}^+$*.*

  Analogamente, temos que

- *se* $x_{n_0} < -\alpha$*, então*

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n_0} + x_n - x_{n_0} \\ &< -\alpha + \frac{\alpha}{2} \\ &= -\frac{\alpha}{2}, \forall n > n_2. \end{aligned}$$

  Daí, $(-x_n)$ *é positivo e, portanto,* $-\xi \in \mathbb{R}^+$*.* ∎

Dado o resultado anterior, podemos assim, definir **valor absoluto** de um número real, assim como a relação de ordem $(>)$.

Definição 7.9 (Relação de ordem e valor absoluto) *Se* $\xi, \eta \in \mathbb{R}$*, definiremos* $\xi > \eta$ *se* $\xi - \eta \in \mathbb{R}^+$*. Além do mais, o* ***valor absoluto****,* $|\xi|$*, de* ξ *será* 0 *se* $\xi = 0$*,* ξ *se* $\xi \in \mathbb{R}^+$ *e* $-\xi$ *se* $-\xi \in \mathbb{R}^+$*.*

Assim, com a definição de ordem acima, podemos mostrar que o corpo $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado:

Proposição 7.10 *Sejam $\xi, \eta, \zeta \in \mathbb{R}$, são válidas as seguintes propriedades:*

Transitividade: *$\xi > \eta > \zeta$, então $\xi > \zeta$.*

Compatibilidade da relação de ordem com a soma: *Se $\xi > \eta$ e $\zeta \in \mathbb{R}$, então $\xi + \zeta > \eta + \zeta$.*

Compatibilidade da relação de ordem com o produto: *Se $\xi > \eta$ e $\zeta > 0$, então $\xi\zeta > \eta\zeta$.*

Demonstração *De fato,*

Transitividade: *Se $\xi > \eta > \zeta$, então por definição*

$$\begin{aligned} \xi - \eta &\in \mathbb{R}^+ \\ \eta - \zeta &\in \mathbb{R}^+, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} (\xi - \eta) + (\eta - \zeta) &\in \mathbb{R}^+, \\ \xi + (-\eta + \eta) - \zeta &\in \mathbb{R}^+, \\ \xi - \zeta &\in \mathbb{R}^+, \end{aligned}$$

ou seja, $\xi > \zeta$.

Compatibilidade da relação de ordem com a soma: *Se $\xi > \eta$, então por definição*

$$\xi - \eta \in \mathbb{R}^+.$$

Logo, dado $\zeta \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} (\xi + \zeta) - (\eta + \zeta) &= \xi + (\zeta - \eta) - \zeta \\ &= \xi + (-\eta + \zeta) - \zeta \\ &= (\xi - \eta) + (\zeta - \zeta) \\ &= \xi - \eta \in \mathbb{R}^+, \end{aligned}$$

ou seja, $\xi + \zeta > \eta + \zeta$.

Compatibilidade da relação de ordem com o produto: *Se $\xi > \eta$, então por definição*

$$\xi - \eta \in \mathbb{R}^+.$$

Logo, dado $\zeta > 0$, temos

$$\xi\zeta - \eta\zeta = (\xi - \eta) \cdot \zeta \in \mathbb{R}^+,$$

ou seja, $\xi\zeta > \eta\zeta$. ■

Com isso, podemos agora definir uma aplicação injetiva dos racionais nos reais. Em outras palavras, iremos mostrar que os racionais estão imersos nos reais.

Proposição 7.11 *A aplicação*

$$\begin{aligned} i : \mathbb{Q} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto [x], \end{aligned}$$

é um homomorfismo injetor. Além do mais, i preserva a ordem.

Demonstração *Sejam $x, y \in \mathbb{Q}$, então*

1) Soma

$$\begin{aligned} i(x \underset{\mathbb{Q}}{+} y) &= [x \underset{\mathbb{Q}}{+} y] \\ &= [x] \underset{\mathbb{R}}{+} [y] \\ &= i(x) \underset{\mathbb{R}}{+} i(y), \end{aligned}$$

2) Produto

$$\begin{aligned} i(x \underset{\mathbb{Q}}{\cdot} y) &= [x \underset{\mathbb{Q}}{\cdot} y] \\ &= [x] \underset{\mathbb{R}}{\cdot} [y] \\ &= i(x) \underset{\mathbb{R}}{\cdot} i(y). \end{aligned}$$

Além do mais, dado $x \neq y$ com $x, y \in \mathbb{Q}$, temos

$$\lim_{n\to+\infty} x = x, \lim_{n\to+\infty} y = y.$$

Daí, temos que $(x) \not\sim (y)$, e assim, $[x] \neq [y]$. Com isso, concluímos que dados dois racinais x, y distintos, temos $i(x) \neq i(y)$ e, portanto, a aplicação i é injetiva.

Em relação à ordem, $x < y \in \mathbb{Q}$ se, e somente se $y - x > 0 \in \mathbb{Q}$ e, portanto, $(y - x)$ é uma sequência positiva em $F_{\mathbb{Q}}$, o que implica em $[y - x] \in \mathbb{R}$ positivo. ■

Proposição 7.12 *Para qualquer sequência $(x_n) \in F_{\mathbb{Q}}$, vale $|[x_n]| = [|x_n|]$.*

Demonstração *Primeiramente, vamos mostrar que $|[x_n]| = 0$ se, e somente se, $[|x_n|] = 0$. Para esse fim, notemos que*

$$|[x_n]| = [0] \Leftrightarrow (x_n) \sim (0).$$

Como

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |x_n| = 0, \tag{7.1}$$

temos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} ||x_n| - 0| &= \lim_{n\to+\infty} ||x_n|| \\ &= ||0|| \\ &= 0 \end{aligned}$$

e, portanto, $(|x_n|) \sim (0)$*, ou ainda,* $[|x_n|] = [0]$*. Reciprocamente,*

$$[|x_n|] = [0] \Leftrightarrow (|x_n|) \sim (0),$$

o que implica por (7.1), que

$$\lim_{n\to+\infty} |x_n - 0| = \lim_{n\to+\infty} |x_n| = |0| = 0$$

e, portanto, $(x_n) \sim (0)$*, ou ainda,* $[x_n] = [0]$*. Além disso,* $|[0]| = [0]$*, logo* $|[x_n]| = [x_n] = [0]$*.*

Agora, vamos considerar o caso $[x_n] > [0]$*. Pela Definição 7.8,* (x_n) *é uma sequência positiva, isto é, existem* $\alpha > 0$ *racional, e* $m \in \mathbb{N}$*, tal que*

$$x_n > \alpha, \forall n \geq m.$$

Pela definição de valor absoluto em $\mathbb{Q}$ *(lembrando que aqui estamos considerando conhecidas todas as propriedades dos racionais), segue que* $|x_n| = x_n$ *para* $n \geq m$*, ou seja*

$$\lim_{n\to+\infty} ||x_n| - x_n| = 0$$

e, portanto, $(|x_n|) \sim (x_n)$*, o que implica em* $[|x_n|] = [x_n]$*. Por outro lado, pela Definição 7.9, temos* $|[x_n]| = [x_n]$*. Assim,* $|[x_n]|$ *e* $[|x_n|]$ *são ambos iguais a* $[x_n]$*.*

O caso em que $[x_n] < [0]$ *é semelhante.* ∎

7.2 Completude dos reais

A convergência em $\mathbb{R}$ é definida exatamente como na Definição 7.3, mas substituindo racional por real. Primeiro, vamos provar que toda sequência de Cauchy de números racionais converge em $\mathbb{R}$, ou mais precisamente, que sua imagem sobre a aplicação injetiva de preservação de ordem $i : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ tem limite em $\mathbb{R}$.

Proposição 7.13 *Se* $(x_n) \in F_{\mathbb{Q}}$ *e* $(x_n) \in \xi$, *então* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \xi \in \mathbb{R}$, *ou ainda,* $\lim\limits_{n\to+\infty} i(x_n) = \xi$.

Demonstração *Seja* ε *um real positivo. Pela Definição 7.8,* ε *contém uma sequência positiva* $[z_n]$ *de números racionais. Então, existem um racional positivo* 2α *e* $n_1 \in \mathbb{N}$, *tal que* $z_n > 2\alpha$ *para* $n \geq n_1$. *Logo,*

$$z_n - \alpha > \alpha,$$

para $n \geq n_1$ *e, portanto,* $(z_n - \alpha)$ *é uma sequência positiva de números racionais. Observemos então que*

$$[z_n] - [\alpha] = [z_n] - i(\alpha) = [z_n - i(\alpha)] = [z_n - i(\alpha)] > 0.$$

Segue que

$$\varepsilon = [z_n] > i(\alpha). \tag{7.2}$$

Como (x_n) *é de Cauchy, existe* $n_2 \in \mathbb{N}$, *tal que*

$$|x_n - x_m| < \frac{\alpha}{2},$$

para $n, m \geq n_2$. *Portanto,*

$$\alpha - |x_n - x_m| > \frac{\alpha}{2} > 0,$$

para $n, m \geq n_2$. *Consequentemente, para cada* $n \geq n_2$, *a sequência* $(x_n - x_m)_{m\geq 1}$, *tem a seguinte propriedade:*

$$[|x_n - x_m|] < i(\alpha). \tag{7.3}$$

Portanto, $n \geq n_2$ implica

$$
\begin{aligned}
|i(x_n) - \xi| &= |i(x_n) - [x_m]| \\
&= |[(x_n - x_m)_{m\geq 1}]| \\
&= [|x_n - x_m|] \\
&< i(\alpha) \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}
$$

usando a Proposição 7.12, (7.3) e (7.2) em ordem. Assim, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \xi$. ■

Para evitar confusão nas notações, denotaremos $i(x)$ por x. Por exemplo, no resultado abaixo $|\xi - x|$ significa $|\xi - i(x)|$.

Corolário 7.1 *Se $\xi \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0 \in \mathbb{R}$, então existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que*

$$|\xi - x| < \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

Demonstração *De fato, seja $(x_n) \in \xi$. Então, pela Proposição 7.13,* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \xi$. *Portanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$|\xi - x_n| < \varepsilon \in \mathbb{R}, \forall n \geq n_0.$$

Em particular, considerando $x = x_{n_0}$, temos $x =\in \mathbb{Q}$ e $|\xi - x| < \varepsilon \in \mathbb{R}$. ■

Corolário 7.2 *Se $\xi < \eta \in \mathbb{R}$, então existe $z \in \mathbb{Q}$ tal que $\xi < z < \eta$.*

Demonstração *Primeiramente, $\xi < \eta$, implica, pela ordem em $\mathbb{R}$, que*

$$2\xi < \xi + \eta < 2\eta,$$

e, portanto,

$$\xi < \frac{\xi + \eta}{2} < \eta.$$

Vamos definir

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{\xi + \eta}{2} - \xi, \eta - \frac{\xi + \eta}{2}\right\},$$

então $\varepsilon > 0$, *e pelo Corolário 7.1, existe* $z \in \mathbb{Q}$ *tal que*

$$\begin{aligned} \xi &\leq \frac{\xi+\eta}{2} - \varepsilon \\ &< z \\ &< \frac{\xi+\eta}{2} + \varepsilon \\ &\leq \eta. \end{aligned}$$

■

Corolário 7.3 $\mathbb{R}$ *é Arquimediano.*

Demonstração *Para* $0 < \xi < \eta \in \mathbb{R}$, *sejam* $x, y \in \mathbb{Q}$, *existentes pelo Corolário 7.2, tal que*

$$0 < x < \xi < \eta < y < \xi + \eta.$$

Como $\mathbb{Q}$ *é Arquimediano, existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $nx > y$. *E, portanto,*

$$n\xi > nx > y > \eta.$$

■

Teorema 7.1 *Toda sequência de Cauchy de números reais converge em* $\mathbb{R}$.

Demonstração *Seja* $(\xi_n)_{n\geq 1}$ *uma sequência de Cauchy em* $\mathbb{R}$. *Pelo Corolário 7.1, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *existe um número racional* x_n, *tal que*

$$|\xi_n - x_n| < \frac{1}{n}.$$

Mostraremos primeiramente que (x_n) *é uma sequência de Cauchy em* $\mathbb{Q}$. *Como* $(\xi_n)_{n\geq 1}$ *uma sequência de Cauchy em* $\mathbb{R}$, *dado* $\varepsilon > 0$ *em* $\mathbb{R}$, *existe* $m_1 \in \mathbb{N}$, *tal que*

$$|\xi_n - \xi_m| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ para } m, n \geq m_1.$$

Seja $m_2 \in \mathbb{N}$, *tal que*

$$\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{3}, \forall n \geq m_2.$$

Logo,

$$|\xi_n - x_n| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall n \geq m_2.$$

Consideremos $m_0 = \max\{m_1, m_2\}$. *Então,* $n, m \geq m_0$*, implica*

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= |x_n - \xi_n + \xi_n - \xi_m + \xi_m - x_m| \\ &\leq |x_n - \xi_n| + |\xi_n - \xi_m + \xi_m - x_m| \\ &\leq |x_n - \xi_n| + |\xi_n - \xi_m| + |\xi_m - x_m| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $(x_n) \in F_{\mathbb{Q}}$*, e então* $\xi = [x_n] \in \mathbb{R}$*. Mostraremos agora que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \xi_n = \xi$*. Para esse propósito, consideremos* $\varepsilon > 0$*, real. Sejam* m_1 *e* m_2 *acima. Pela Proposição 7.13*

$$\lim_{n\to+\infty} i(x_n) = \xi$$

e, portanto, existe $m_3 \in \mathbb{N}$*, tal que*

$$|\xi - x_n| = |x_n - \xi| < \frac{2\varepsilon}{3}, \ \textit{para } n \geq m_3.$$

Daí, para $n \geq m = \max\{m_2, m_3\}$*, temos*

$$\begin{aligned} |\xi_n - \xi| &= |\xi_n - x_n + x_n - \xi| \\ &\leq |\xi_n - x_n| + |x_n - \xi| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

E assim, concluímos que $\lim\limits_{n\to+\infty} \xi_n = \xi$ *em* $\mathbb{R}$*.* ∎

Para finalizarmos provaremos que todo subconjunto de números reais limitado superiormente de admite supremo (Ver Definição 2.4).

Teorema 7.2 *Todo subconjunto não vazio dos números reais limitado superiormente tem um supremo.*

Demonstração *Seja* $A \subset \mathbb{R}$ *não vazio limitado superiormente. Como* $A \neq \varnothing$*, existe* $\alpha \in A$*, e* β *limitante superior de* A*, de modo que*

$$\alpha \leq \beta.$$

Como $\beta - \alpha \geq 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{m}{n} \geq \beta - \alpha,$$

ou ainda,

$$\alpha + \frac{m}{n} \geq \beta \geq \alpha.$$

Como consequência, $\alpha + m/n$, é um limite superior para A. Desse modo, para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto

$$B_n = \{m \in \mathbb{N} : \alpha + m/n \text{ é um limitante superior para } A\}$$

é não vazio. Como B_n é conjunto não vazio de números naturais, existe $m_n = \min\{B_n\}$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$y_n = \alpha + \frac{m_n}{n}$$

é um limitante superior de A, isto é,

$$x \leq y, \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \forall x \in A.$$

Além do mais,

$$x_n = y_n - \frac{1}{n} = \alpha + \frac{m_n - 1}{n} \leq x, \text{ para algum } x \in A,$$

isto pois, $m_n = \min\{B_n\}$. Ainda,

$$y_n \geq x \geq x_m, \forall m, n \in \mathbb{N}$$

Segue-se que, para qualquer $m, n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{array}{rcl} x_n - x_m & \leq & y_m - x_m = \dfrac{1}{m} \\ & e & \\ x_m - x_n & \leq & y_n - x_n = \dfrac{1}{n}\cdot \end{array}$$

Ou ainda,

$$|x_n - x_m| \leq \max\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right\}, \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Usaremos a inequação anterior para argumentar que (x_n) é de Cauchy. Consideremos $\varepsilon > 0$. Como $\mathbb{R}$ é Arquimediano, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$n_0 > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Assim, para $m, n \geq n_0$, segue da inequação acima que

$$|x_n - x_m| < \varepsilon,$$

o que mostra que (x_n) é de Cauchy. Como $\mathbb{R}$ é completo, (x_n) converge; seja $\xi = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ em $\mathbb{R}$. Mostraremos agora que ξ é limitante superior de A. De fato, suponhamos que não, logo $\exists x \in A$ tal que

$$\xi < x.$$

Como $\xi = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, dado $\varepsilon = \dfrac{x-\xi}{2} > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$, tal que

$$x_n - \xi \leq |x_n - \xi| < \frac{x-\xi}{2}, \text{ para } n \geq n_1.$$

Além do mais, como $\mathbb{R}$ é Arquimediano, existe n_2, de modo que

$$\frac{1}{n_2} < \frac{x-\xi}{2}.$$

Consideremos $n = \max\{n_1, n_2\} \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\begin{array}{rcl} x_n - \xi \leq |x_n - \xi| & < & \dfrac{x-\xi}{2} \\ & e & \\ \dfrac{1}{n} & < & \dfrac{x-\xi}{2}. \end{array}$$

Então,

$$\begin{aligned} y_n &= x_n + \frac{1}{n} \\ &< \frac{x+\xi}{2} + \frac{x-\xi}{2} \\ &= x \end{aligned}$$

e, portanto, um absurdo, pois $x \in A$ e y_n é um limitante superior de A. Dessa maneira, a contradição mostra que ξ é um limitante superior de A.

Finalmente, demonstraremos que ξ é menor ou igual a todo limite superior de A. Suponhamos o contrário. Seja $\eta < \xi$, onde η é um limite superior de A.

Como $\lim_{n \to +\infty} x_n = \xi$, dado $\delta = \xi - \eta > 0$, existe $n_1(\delta) \in \mathbb{N}$, tal que

$$\xi - x_n \leq |\xi - x_n| < \delta = \xi - \eta, \text{ para } n \geq n_1,$$

e, portanto,

$$\eta < x_n < x,$$

para algum $x \in A$, de onde temos $\eta < x$ para algum $x \in A$. Isso implica que η não é um limitante superior de A. Dessa maneira, nenhum número real menor que ξ pode ser um limitante superior de A. ■

Capítulo

8

Espaços métricos completos

Definição 8.1 (Espaço métrico completo) *Um espaço métrico M é dito completo quando toda sequência de Cauchy em M é convergente.*

Observação 8.1 *Note que o procedimento que realizado an construção dos reais feita acima pode ser realizado em qualquer espaço métrico não-completo. É possível ver mais sobre o assunto em (Shirali, 2005, p. 52, [9]).*

8.1 Exemplos e propriedades de espaços métricos completos

Exemplo 8.1 (Completude dos Reais) *O conjunto dos números reais é completo.*

Solução *Ver Teorema 7.1.* ■

Exemplo 8.2 (Espaço métrico incompleto) *O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais não é completo.*

Solução *De fato, como vimos no Exemplo 6.6, com a métrica usual, existem sequências de Cauchy de números racionais que não convergem em $\mathbb{Q}$.* ■

Observação 8.2 *Notemos que com a métrica zero-um teremos que o conjunto dos números racionais é completo. Mais que isso, veremos no exemplo a seguir que todo espaço métrico M é completo com a métrica zero-um.*

Exemplo 8.3 (Métrica zero-um) *Todo espaço métrico M com a métrica zero-um é completo.*

Solução *De fato, seja uma sequência de Cauchy* $(x_n) \in M$. *Como* (x_n) *é de Cauchy, para* $0 < \varepsilon < 1$ *existe um natural* n_0 *tal que*

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon,$$

para todo $n, m \geq n_0$. *Dessa maneira, para* $n \geq n_0$, *temos* $x_n = x_0$, *pois* $d(x_n, x_0) = 0$. *Assim, toda sequência de Cauchy no espaço métrico com a métrica zero-um é da forma*

$$(x_1, x_2, ..., x_{n_0}, x_{n_0}, ...),$$

e, portanto, convergente para o limite x_{n_0}. ■

Exemplo 8.4 (Conjunto dos números naturais) *O conjunto* $\mathbb{N}$ *dos números naturais com a métrica*

$$d(m, n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|,$$

onde $m, n \in \mathbb{N}$, *é um espaço métrico incompleto.*

Solução *Primeiramente, provaremos que* $(\mathbb{N}, d)$ *é um espaço métrico. De fato,*

d1) pela definição de módulo temos

$$d(m, n) \geq 0,$$

para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$. *Além do mais,*

$$d(m, n) = 0 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{n} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{n} \Leftrightarrow m = n.$$

d2) Pela definição e propriedades de módulo temos

$$d(m, n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| = \left|-1\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right)\right| = |-1| \cdot \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| = d(n, m).$$

d3) Para $(\mathbb{N}, d)$ *ser um espaço métrico resta mostrar que é válida a desigualdade* *triangular. Sejam $m, n, r \in \mathbb{N}$, pela propriedade de desigualdade de modular, temos*

$$\begin{aligned} d(m,n) &= \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \\ &= \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{r} + \frac{1}{r} - \frac{1}{n}\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{r}\right| + \left|\frac{1}{r} - \frac{1}{n}\right| \\ &= d(m,r) + d(r,n). \end{aligned}$$

Agora, provaremos que $(\mathbb{N}, d)$ não é um espaço métrico completo. Para isso, consideremos a sequência dos números naturais, ou seja, $(n)_{n\geq 1}$. Primeiramente, mostraremos que a sequência é de Cauchy.

Dado $\varepsilon > 0$, tomemos o menor inteiro positivo n_0, tal que

$$n_0 > \frac{1}{\varepsilon},$$

dessa maneira, temos

$$\begin{aligned} d(m,n) &= \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \\ &\leq \max\left\{\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right\} \\ &\leq \frac{1}{n_0} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim, a sequência é de Cauchy. Entretanto, a sequência $(n)_{n\geq 1}$ não converge. De fato, suponha que $(n)_{n\geq 1}$ converge para algum $p \in \mathbb{N}$. Seja $\varepsilon = \dfrac{1}{2p}$, e tomemos n_1 natural maior que $2p$. Então, $n \geq n_1$ implica

$$d(p,n) = \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{p} - \frac{1}{n_1} > \frac{1}{p} - \frac{1}{2p} = \frac{1}{2p},$$

e, portanto, uma contradição, concluindo assim que $(n)_{n\geq 1}$ não converge em $\mathbb{N}$. ■

■

Proposição 8.1 (Subespaço completo) *Um subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo. Reciprocamente, um subespaço completo de qualquer espaço métrico é fechado.*

Demonstração *Seja F subespaço fechado M, com M completo. Dada uma sequência de Cauchy $(x_n) \in F$, existe $\lim x_n = a \in M$. Como F é fechado em M temos pelo Corolário 6.3 que $a \in F$ e, portanto, F é completo.*

Reciprocamente, seja $M \subset N$ um subespaço completo. Dada uma sequência $(x_n) \in M$, com $\lim x_n = a \in N$ temos pela Proposição 6.10 que (x_n) é de Cauchy. Além do mais, como M é completo, existe $b \in M$ tal que $b = \lim x_n$ e, portanto, pela unicidade do limite $a = b \in M$ e pelo Corolário 6.3, M é fechado em N. ∎

Na proposição seguinte, o produto cartesiano $M \times N$ é considerado com uma das três métricas usuais da Definição 3.4, como as métricas são ditas "equivalentes", usaremos em algumas passagem o que foi demonstrado na Proposição 3.2.

Proposição 8.2 *O produto cartesiano[1] $M \times N$ é completo se, e somente se, M e N são completos.*

Demonstração *Suponhamos M e N espaços métricos completos. Dada uma sequência de Cauchy $(z_n) \in M \times N$, onde $z_n = (x_n, y_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sejam as projeções*

$$\begin{aligned} p_1 : M \times N &\to M, \\ p_2 : M \times N &\to N, \end{aligned}$$

que são Lipschitizanas e, portanto, uniformemente contínuas. De fato, sem perda de generalidade, consideremos $p_1 : M \times N \to M$. Dessa maneira,

$$\begin{aligned} d_M(p_1((x_1, y_1)), p_1((x_2, y_2))) &= d_M(x_1, x_2) \\ &\leq \max\{d_M(x_1, y_1), d_N(x_2, y_2)\} \\ &= d_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \\ &\leq d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \\ &\leq d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)). \end{aligned}$$

Com isso, concluímos que p_1 e p_2 são uniformemente contínuas e, portanto, pela Proposição 6.13,(x_n) e (y_n) são sequências de Cauchy em M e N respectivamente. Daí, existem $a = \lim x_n \in M$ e $b = \lim y_n \in N$. Colocando $c = (a, b)$, pela Proposição 6.6 $\lim z_n = c$ e, portanto, $M \times N$ é fechado.

[1] Com as métricas usuais da Definição 3.4.

Reciprocamente, supondo $M \times N$ completo, sejam $(x_n) \in M$ e $(y_n) \in N$ sequências de Cauchy. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &< \frac{\varepsilon}{2}, n, m > n_1, \\ \\ d(y_n, y_m) &< \frac{\varepsilon}{2}, n, m > n_2. \end{aligned}$$

Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, temos que para todo $n, m > n_0$, vale

$$\begin{aligned} d(z_n, z_m) &= d_2((x_n, y_n), (x_m, y_m)) \\ &= \max\{d(x_n, x_m), d(y_n, y_m)\} \\ &\leq d((x_n, x_m), (y_n, y_m)) \\ &\leq d_1((x_n, x_m), (y_n, y_m)) \\ &= d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= < \varepsilon. \end{aligned}$$

e, portanto, $z_n = (x_n, y_n)$ é de Cauchy em $M \times N$ e $\lim z_n = c = (a, b) \in M \times N$. Pela Proposição 6.6, (x_n) converge para $a \in M$ e (y_n) para $b \in N$, implicando que M e N são espaços métricos completos. ∎

Daí, podemos generalizar para n conjuntos métricos, isto é:

Corolário 8.1 *O produto cartesiano $M_1 \times \cdots \times M_n$ é completo se, e somente se, $M_1, ..., M_n$ são completos.*

Demonstração *De fato, seja $M_{12} = M_1 \times M_2$. Pela Proposição 8.2, M_{12} é completo se, e somente se, M_1 e M_2 são completos. Agora, seja $M_{123} = M_{12} \times M_3$. Novamente, pela Proposição 8.2, M_{123} é completo se, e somente se, M_{12} e M_3 são completos.*

Suponhamos que vale para $n - 1$, ou seja,

$$M_{1...(n-1)} = M_1 \times \cdots \times M_{n-1},$$

é completo se, e somente se, $M_1, M_2, ..., M_{n-1}$ são completos. Vamos mostrar que vale para n.

Seja $M = M_{1\ldots(n-1)} \times M_n$. *Pela Proposição 8.2,* M *é completo se, e somente se,* $M_{1\ldots(n-1)}$ *e* M_n *são completos e, portanto, pela hipótese de indução,* $M_1 \times \cdots M_n$ *é completo se, e somente se,* $M_1, ..., M_n$ *são completos.* ■

Observação 8.3 *Sendo* $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\ vezes}$, *concluímos pelo Corolário acima que* $\mathbb{R}^n$ *é completo com qualquer uma das métricas usuais de produto cartesiano.*

Capítulo

9

Compacidade

Nesse capítulo faremos um breve estudo de espaços métricos compactos, iniciando pela compacidade na reta trazendo alguns teoremas clássicos da topologia na reta.

9.1 Compacidade na reta

Definição 9.1 (Cobertura) *Seja* $X \subset \mathbb{R}$. *Uma cobertura de* X *é uma família* $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ *de conjuntos* $C_\lambda \subset \mathbb{R}$ *tais que* $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$*; isto é, para todo* $x \in X$*, existe algum* $\lambda \in L$ *tal que* $x \in C_\lambda$.

Definição 9.2 (Cobertura aberta) *Uma cobertura* $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ *é dita aberta quando cada conjunto* A_λ*,* $\lambda \in L$*, é aberto em* $\mathbb{R}$.

Definição 9.3 (Cobertura finita) *A cobertura* $\bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$ *de* X *é dita finita quando* L *é um conjunto finito, isto é,* $L = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ *e* $X \subset C_{\lambda_1} \cup \cdots \cup C_{\lambda_n}$.

Definição 9.4 (Subcobertura) *Uma subcobertura de* $\mathcal{C}$ *é uma família* $\mathcal{C}' = (C_\lambda)_{\lambda \in L'}$*,* $L' \subset L$*, tal que ainda* $X \subset \bigcup_{\lambda \in L'} C_\lambda$.

Exemplo 9.1 *Os intervalos abertos* $C_1 = \left(0, \frac{2}{3}\right)$*,* $C_2 = \left(\frac{1}{3}, 1\right)$ *e* $C_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{10}\right)$*, constituem uma cobertura* $\mathcal{C} = (C_1, C_2, C_3)$ *para o intervalo* $X = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$.

Solução *De fato, notemos que* $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \subset C_1 \cup C_2 \cup C_3 = (0,1)$*, ou seja,*

$$\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda,$$

para $L = \{1, 2, 3\}$. Além do mais, $L' = \{1, 3\}$ determina uma subcobertura de $\mathcal{C}$, pois

$$\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \subset C_1 \cup C_3 = \left(0, \frac{9}{10}\right).$$

■

Definição 9.5 *Um conjunto $K \subset \mathbb{R}$ é dito compacto quando toda cobertura aberta de K possui uma subcobertura finita.*

Proposição 9.1 *Todo $X \subset \mathbb{R}$ finito é compacto.*

Demonstração *De fato, digamos que $X = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Se $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma cobertura aberta de X, então cada ponto de X pertence a algum C_λ. Digamos que $a_1 \in C_{\lambda_1}, a_2 \in C_{\lambda_2}, ..., a_n \in C_{\lambda_n}$. Dessa maneira,*

$$X \subset C_{\lambda_1} \cup C_{\lambda_2} \cup \cdots \cup C_{\lambda_n}.$$

Como $\{C_{\lambda_1}, ..., C_{\lambda_n}\}$ é um conjunto finito, temos pela definição de conjunto compacto que X é compacto. ■

Observação 9.1 *Para mostrar que um conjunto M não é compacto basta encontrarmos uma cobertura aberta de M que não contenha subcobertura finita.*

Exemplo 9.2 *O intervalo (a, b) não é um conjunto compacto.*

Solução *De fato, consideremos a família de abertos*

$$A_n = \left(a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right).$$

Notemos que

$$\lim_{n\to+\infty} a + \frac{1}{n} = a \quad e \quad \lim_{n\to+\infty} b - \frac{1}{n} = b$$

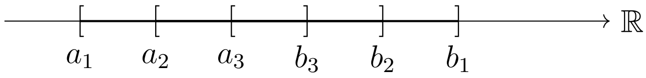
e, portanto, $(a, b) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. No entanto, a união de um número finito de intervalos

$$\left(a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right)$$

é igual ao intervalo de maior índice, que não contém o intervalo (a, b). ■

O teorema chamado de intervalos encaixados ou intervalos encaixantes, a seguir será usado para nos auxiliar nas demonstrações dos teoremas que virão a seguir.

Vamos considerar uma sequência decrescente $I_1 \supset I_2 \supset \cdots I_n \supset \cdots$ de intervalos, de número reais, limitados e fechados, ou seja, $I_n = [a_n, b_n]$. Para uma melhor compreensão do foi mencionado, apresentamos a seguinte representação:



O resultado a seguir, afirma que nas condições anteriores, existe ao menos um número real c na interseção desses intervalos.

Teorema 9.1 (Intervalos encaixados) *Dada uma sequência decrescente* $I_1 \supset I_2 \supset \cdots I_n \supset \cdots$ *de intervalos, de número reais, limitados e fechados, ou seja,* $I_n = [a_n, b_n]$*, então, existe pelo menos um número real* c *tal que* $c \in I_n$ *para todo* $n \in N$*, isto é*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \varnothing.$$

Demonstração *Notemos que as inclusões* $I_n \supset I_{n+1}$ *significam que*

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1.$$

O conjunto $B = \{b_1, b_2, ..., b_n, ...\}$ *é, portanto, limitado inferiormente, e admite um ínfimo. Seja* $c = \inf B$*. Evidentemente, pela caracterização de ínfimo, temos*

$$c \leq b_n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$*. Além disso, como cada* a_n *é uma cota inferior de* B*, temos*

$$a_n \leq c,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$*. E, portanto,*

$$a_n \leq c \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$c \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n].$$

■

Observação 9.2 *É importante ressaltar que o resultado só é garantido devido os intervalos serem limitados e fechados. Consideremos, por exemplo,* $I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right]$, *temos* $I_n \supset I_{n+1}$, *entretanto,*

$$S = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \varnothing.$$

De fato, supondo $a \in S$, *temos que* $a \neq 0$, *pois* $0 \notin I_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Logo,* $a > 0$. *Como os naturais são ilimitados superiormente, existe* $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $m > \dfrac{1}{a}$, *ou ainda,*

$$0 < \frac{1}{m} < a.$$

Ou seja, encontramos um intervalo I_n *que não contém* a, *e portanto,* $a \notin S$, *o que é uma contradição, o que nos faz concluir que*

$$S = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \varnothing.$$

Teorema 9.2 *Toda sequência* (x_n) *limitada possui uma subsequência convergente.*

Demonstração *Consideremos uma sequência* (x_n) *limitada. Logo, existe* $I_1 = [a_1, b_1]$ *tal que* $(x_n) \subset I_1$. *Definamos* $x_{n_1} = x_1$ *e sejam* M_1 *o ponto médio do intervalo* I_1.

Desde que $I_1 = [a_1, M_1] \cup [M_1, b_1]$, *onde necessariamente um dos intervalos possui infinitos termos da sequência. Denotemos tal intervalo por* I_2, *cujo comprimento é*

$$\frac{b_1 - a_1}{2}.$$

Tomemos $x_{n_2} \in I_2 \cap (x_n)$ *com* $n_2 > n_1$. *Escrevendo* $I_2 = [a_2, b_2]$ *e sendo* M_2 *o ponto médio de* I_2, *temos* $I_2 = [a_2, M_2] \cup [M_2, b_2]$. *Como* I_2 *contém infinitos elementos da sequência, necessariamente ao menos um dos intervalos,* $[a_2, M_2]$ *ou* $[M_2, b_2]$, *possui infinitos elementos, denotemos tal por* $I_3 = [a_3, b_3]$, *cujo comprimento é*

$$b_3 - a_3 = \frac{b_1 - a_1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{b_1 - a_1}{2^2},$$

da mesma maneira que anteriormente, tomemos $x_{n_3} \in I_3 \cap (x_n)$, *de modo que,* $n_3 > n_2 > n_1$.

Seguindo o mesmo raciocínio, obtemos $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ *com* $I_n = [a_n, b_n]$ *com comprimento*

$$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}},$$

e uma subsequência (x_{n_k}) *com* $x_{n_k} \in I_k$.

Pelo Teorema 9.1 (intervalos encaixantes), existe $L \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$L \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k.$$

Daí, como $L, x_{n_k} \in I_k$, *para todo* k, *temos*

$$|x_{n_k} - L| \leq b_k - a_k = \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}} \to 0 (k \to +\infty).$$

E, portanto,

$$\lim x_{n_k} = L.$$

■

Teorema 9.3 (Bolzano-Weierstrass) *Todo subconjunto infinito e limitado* $X \subset \mathbb{R}$ *possui um ponto de acumulação.*

Demonstração *Como* X *é limitado, existem* $a, b \in \mathbb{R}$, *com* $a < b$ *tal que* $X \subset [a, b]$. *Sendo* X *um conjunto infinito então pelo menos um dos intervalos*

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right] \quad ou \quad \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

contém uma infinidade de pontos de X, *caso ambos tenham, sem perda de generalidade escolhemos um e denominamos de* $[a_1, b_1]$. *Analogamente,*

$$\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right] \quad ou \quad \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$$

contém uma infinidade de pontos de X. *Consideremos* $[a_2, b_2]$ *o intervalo desejado. Prosseguindo desta maneira, obtermos uma família de intervalos tal que:*

i) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \subset [a, b]$ *para todo* $n \geq 1$.

ii) Além do mais,

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n},$$

e

iii) cada $[a_n, b_n]$ contém uma infinidade de pontos de X.

Assim, pelo Teorema dos Intervalos Encaixantes, (Teorema 9.1), existe

$$x_0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n].$$

Dessa maneira, basta provarmos que x_0 é ponto de acumulação de X. De fato, seja $\varepsilon > 0$ e consideremos $B(x_0, \varepsilon)$. Consideremos $n \in \mathbb{N}$ de maneira tal que

$$\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon.$$

Sendo que $x_0 \in [a_n, b_n]$ e ε é maior que o comprimento de $[a_n, b_n]$, concluímos que $[a_n, b_n] \subset B(x_0, \varepsilon)$. E, portanto, toda bola aberta $B(x_0, \varepsilon)$ centrada em x_0 contém infinitos pontos de X, isto é, x_0 é ponto de acumulação de X. ■

Teorema 9.4 (Borel-Lebesgue) *Seja $F \subset \mathbb{R}$ um subconjunto limitado e fechado. Toda cobertura $F \subset \bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda$ de F por meio de abertos admite uma subcobertura finita, tal que $F \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda n}$.*

Demonstração *Consideremos $F = [a, b]$ e $\mathcal{F}$ uma família de abertos tal que*

$$[a, b] \subset \bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda.$$

Suponhamos que não seja possível obter uma subfamília finita $A_1, A_2, ..., A_k$ tal que

$$[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^{k} A_i.$$

Consideremos os intervalos.

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right] \quad e \quad \left[\frac{a+b}{2}, b\right].$$

Pelo menos um deles só é coberto por uma infinidade de abertos de $\mathcal{F}$. Denominamos $[a_1, b_1]$ tal intervalo. De forma análoga, pelo menos um dos intervalos

$$\left[a_1, \frac{a_1 + b_1}{2}\right] \quad ou \quad \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1\right]$$

não pode ser coberto por uma subfamília finita de abertos de $\mathcal{F}$, denominaremos tal intervalo de $[a_2, b_2]$. Prosseguindo desta forma obtermos uma coleção de intervalos $[a_n, b_n]$ tal que:

i) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \subset [a, b]$ *para todo* $n \geq 1$.

ii) Além do mais,

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n},$$

e

iii) cada $[a_n, b_n]$ *só pode ser cobertura por uma infinidade de abertos de* $\mathcal{F}$

Pelo Teorema dos Intervalos Encaixantes, existe $x_0 \in \cap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$. Assim, podemos fixar $\lambda_0 \in L$ tal que $x_0 \in A_{\lambda_0} \in \mathcal{F}$. Como A_{λ_0} é aberto, existe $r > 0$ tal que

$$(x_0 - r, x_0 + r) \subset A_{\lambda_0}.$$

Seja $k \in \mathbb{N}$ de maneira que

$$\frac{b - a}{2^k} < r.$$

Daí, concluímos que $[a_k, b_k] \subset A_{\lambda 0}$, ou seja, encontramos uma subfamília finita que cobre $[a_k, b_k]$, o que é um absurdo. Dessa maneira, temos que a suposição inicial está errada, ou seja, dada uma família de abertos que contém F é possível obter uma subfamília finita que ainda contém F.

Agora, consideremos F qualquer subconjunto fechado e limitado e $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ uma cobertura aberta de F. Sabemos que existe um intervalo $[a, b]$ tal que $F \subseteq [a, b]$. Tomando $F^c = B = \mathbb{R} - F$, que por ser o complementar de F que é fechado é aberto. Além do mais,

$$[a, b] \subset (\cup_{\lambda \in L} A_\lambda) \cup B.$$

Assim, existem $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in L$ *tais que*

$$F \subseteq [a, b] \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n} \cup B.$$

Por fim, já que F *não está contido em* B*, então* $F \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$ *e, portanto,* F *é compacto.* ∎

Observação 9.3 *Pelo Teorema 9.4 temos que todo intervalo fechado* $[a, b]$ *de* $\mathbb{R}$ *é compacto. Entretanto,* $\mathbb{R}$ *não é compacto. De fato, notemos que para* $A_n = (-n, n)$*, a cobertura* $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ *de* $\mathbb{R}$ *não admite subcobertura finita.*

9.2 Espaços métricos compactos

Com o objetivo de expandir as noções de compacidade para espaços métricos em geral, faremos nessa seção um estudo das principais definições e resultados.

Definição 9.6 (Espaço métrico compacto) *Um espaço métrico* (M, d) *é compacto se, para toda cobertura aberta* $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ *existe uma subcobertura finita* $\{A_{\lambda 1}, ..., A_{\lambda n}\}$ *tal que*

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{k} A_{\lambda_i},$$

isto é, um espaço métrico M *diz-se compacto quando toda cobertura aberta possui uma subcobertura finita.*

Teorema 9.5 *Todo subconjunto fechado de um espaço métrico compacto é compacto. Reciprocamente, um subconjunto compacto de qualquer espaço métrico é fechado.*

Demonstração *Sejam* M *um espaço métrico compacto e* F *um subconjunto fechado de* M*. Dada uma cobertura aberta* $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ *de* F*, tem-se*

$$M = \cup A_\lambda \cup (M - F).$$

Portanto, $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L} \cup \{M - F\}$ *é uma cobertura aberta de* M*. Como* M *é compacto por hipótese, extraímos da cobertura aberta uma subcobertura finita*

$$M = A_{\lambda 1} \cup \cdots \cup A_{\lambda n} \cup (M - F).$$

Como nenhum ponto de F pertence a $M - F$, então $F \subset A_{\lambda 1} \cup \cdots \cup A_{\lambda n}$ e, portanto, é compacto.

Reciprocamente, seja $K \subset M$ um subconjunto compacto de um espaço métrico M qualquer. Suponhamos que K não seja fechado em M, isto é, existe x tal que

$$x \in \overline{K} - K.$$

Seja

$$A_n = M - B\left(x, \frac{1}{n}\right),$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Afirmação: *$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta de K.*

De fato, pelo Teorema dos intervalos encaixantes (Teorema 9.1)

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(M - B\left(x, \frac{1}{n}\right)\right) = M - \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B\left(x, \frac{1}{n}\right) = M - \{x\}.$$

Como $x \notin K$, então $K \subset M - \{x\} = \cup A_n$ é uma cobertura aberta. Entretanto, como $A_1 \subset A_2 \subset \cdots A_n \subset \cdots$, a reunião de um número finito de conjuntos A_n é igual ao de maior índice. Como nenhum A_n contém K, pois como $x \in \overline{K}$, cada $B(x, 1/n)$ contém algum ponto de K e, portanto, a cobertura aberta não admite subcobertura finita, o que contradiz a hipótese de K ser compacto. Dessa maneira, concluímos que K é um subconjunto fechado. ■

Observação 9.4 *Um subconjunto de um espaço métrico compacto não é necessariamente compacto. Por exemplo, o intervalo $(0, 1)$ é um subconjunto do intervalo $[0, 1]$ que é compacto, no entanto $(0, 1)$ não é compacto como visto no Exemplo 9.2.*

Teorema 9.6 *Qualquer interseção $K = \bigcap_{\lambda\in L} K_\lambda$ de compactos $K_\lambda \subset M$ é compacta.*

Demonstração *Seja $K = \bigcap_{\lambda\in L} K_\lambda$, onde K_λ é um subconjunto compacto em M. Neste caso, pelo Teorema 9.5, cada K_λ é fechado e, portanto, pela Proposição 4.15 a interseção K é um subconjunto fechado em M e em cada K_λ. Agora, dado $\lambda_0 \in L$, então*

$$\bigcap_{\lambda\in L} K_\lambda \subset K_{\lambda_0}.$$

Como K_{λ_0} é compacto e K fechado, pelo Teorema 9.5, K também é compacto. ■

Teorema 9.7 *Todo espaço métrico compacto é limitado.*

Demonstração *Seja M um espaço métrico compacto. Para cada ponto $x \in M$, seja $A_x = B(x,1)$. Então, $\{A_x\}_{x\in M}$ é uma cobertura aberta de M, pois*

$$M \subset \bigcup_{x\in M} A_x.$$

Sendo M compacto, podemos extrair uma subcobertura finita de M, isto é,

$$M \subset A_{x_1} \cup \cdots \cup A_{x_m}.$$

Como pela Proposição 4.4 cada A_{x_i} é limitado, temos pela Proposição 4.5 *que a união também é. E, portanto, M é limitado.* ∎

Teorema 9.8 *A imagem de um conjunto compacto por uma aplicação contínua é um conjunto compacto.*

Demonstração *Sejam $f : M \to N$ uma aplicação contínua e $K \subset M$ compacto. Dada uma cobertura aberta $\{A_\lambda\}_{\lambda\in L}$ de $f(K)$, pela continuidade de f temos $f^{-1}(A_\lambda)$ aberto em M (ver Teorema 3.1.9, [9]).*

Além do mais, $\{f^{-1}(A_\lambda)\}_{\lambda\in L}$ é uma cobertura aberta de K. De fato, dado $x \in K$, existe $\lambda \in L$ tal que $x \in \{f^{-1}(A_\lambda)\}_{\lambda\in L}$.

Assim, como K é compacto, existem $\lambda_1, ..., \lambda_n \in L$, tal que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(A_{\lambda_i}).$$

Por fim, pelo Teorema 12.2, segue que

$$f(K) \subset f\left(\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(A_{\lambda_i})\right) = \bigcup_{i=1}^{n} f(f^{-1}(A_{\lambda_i})) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_{\lambda_i}$$

e, portanto, $f(K)$ é compacto. ∎

Capítulo

10

Espaços normados

Por fim, traremos uma pequena introdução de espaços normados começando pela definição de espaço vetorial e demonstrando que todo espaço normado é um espaço métrico.

Definição 10.1 (Espaço vetorial) *Sejam V um conjunto, $x, y, z \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, em que $\mathbb{K}$ é um corpo (ver Definição 12.1). Chamamos V de espaço vetorial se existem duas operações*

$$+ : V \times V \to V \quad e \quad \cdot : \mathbb{K} \times V \to V,$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

(1) $x + y = y + x$ *(comutativa);*

(2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ *(associativa);*

(3) Existe um elemento $w \in V$ tal que $x + w = x$, para todo $x \in V$. Denotamos $w = 0$ e o denominamos de elemento neutro;

(4) Para todo $x \in V$, existe um único elemento $-x \in V$ tal que $x + (-x) = 0$. Denominamos $-x$ de oposto de x;

(5) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ *(distributiva);*

(6) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ *(distributiva em relação aos escalares);*

(7) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$*;*

(8) $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$ *.*

Chamamos os elementos de um espaço vetorial de vetores.

Exemplo 10.1 (Espaço das funções reais) *O conjunto*

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f \text{ é uma função}\},$$

conjunto das funções reais, com a operação de adição definida por:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x); \forall f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$$

e a operação de multiplicação por escalar definida por:

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x); \forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

é um espaço vetorial real.

Solução *De fato, primeiramente notemos que a adição de duas funções e a multiplicação de uma função por escalar continuam sendo funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e, portanto, o fechamento da adição e multiplicação por escalares são garantidos em $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.*

Agora, sejam $f, g, h \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(1) (comutativa) Dado que $f(x)$ e $g(x)$ são números reais temos:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x).$$

(2) (associativa) Como $f(x), g(x)$e $h(x)$ são números reais temos:

$$\begin{aligned}(f+(g+h))(x) &= f(x) + (g+h)(x) \\ &= f(x) + (g(x) + h(x)) \\ &= (f(x) + g(x)) + h(x) \\ &= (f+g)(x) + h(x) \\ &= ((f+g)+h)(x).\end{aligned}$$

(3) O elemento neutro $w \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ é uma função tal que $(f+w)(x) = f(x)$, logo $w(x) = 0$, assim, o elemento neutro das funções é a função nula $w(x) = 0$;

(4) A função oposta de f é uma função $-f$, de modo que $(f+(-f))(x) = f(x) - f(x) = 0$. O que de fato existe, pois cada $f(x)$ é um número real e, portanto, existe seu

oposto.

(5) *(distributiva) Uma vez que $\alpha, f(x), g(x) \in \mathbb{R}$, temos:*

$$(\alpha(f+g))(x) = \alpha(f(x)+g(x)) = \alpha f(x) + \alpha g(x) = (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x).$$

(6) *(distributiva em relação aos escalares) Uma vez que $\alpha, \beta, f(x) \in \mathbb{R}$, temos:*

$$((\alpha+\beta)f)(x) = (\alpha+\beta)f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x) = (\alpha f)(x) + (\beta f)(x).$$

(7) $((\alpha\beta)f)(x) = (\alpha\beta)f(x) = \alpha(\beta f(x)) = (\alpha(\beta f))(x)$;

(8) $(1f)(x) = 1f(x) = f(x)$.

E, portanto, valem todas as propriedades, logo $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial real. ■

Definição 10.2 (Transformação linear) *Sejam V e W espaços vetoriais sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$. Uma função*

$$T : V \to W,$$

é dita transformação linear se, para quaisquer $x, y \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, valem as seguintes propriedades:

(1) $T(x+y) = T(x) + T(y)$;

(2) $T(\alpha x) = \alpha T(x)$.

Considerando espaços sobre um corpo $\mathbb{K}$, seguem algumas definições.

Definição 10.3 (Subespaço vetorial) *Seja S um subconjunto não vazio de V. Caso S seja um espaço vetorial diremos que S é um* ***subespaço vetorial*** *de V.*

Observação 10.1 *Na definição acima, S é um espaço vetorial sobre o mesmo corpo que V e com as mesmas operações definidas em V.*

Lema 10.1 *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Então, $(-1)x = -x$, $\forall x \in V$.*

Demonstração *De fato, sabendo que* $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_V$*, pela distributividade por escalares, temos:*

$$0_V = 0_{\mathbb{K}} \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x.$$

Assim, por definição $(-1) \cdot x$ *é elemento oposto de* x*, do qual denotamos por* $-x$*.* ■

Teorema 10.1 *Um subconjunto não vazio* S *de um espaço vetorial* V *é um subespaço vetorial se, e somente se, satisfaz as seguintes propriedades:*

1) *O elemento neutro 0 de* V *está em* S*;*

2) *Para todo* $x, y \in S$*, tem-se* $x + y \in S$*, i.e,* S *é fechado em relação à soma definida em* V*;*

3) *Para todo* $x \in S$ *e* $\alpha \in \mathbb{K}$*, tem-se* $\alpha x \in S$*, isto,* S *é fechado em relação à multiplicação por escalar definida em* V*.*

Demonstração *Supondo que* S *seja um subespaço vetorial temos por definição que ele é um espaço vetorial e, portanto, satisfaz todas as condições de espaço vetorial, em particular, satisfaz a existência do elemento neutro e os fechamentos da soma de dois elementos e produto por escalar.*

Reciprocamente, suponhamos que sejam satisfeitas as condições 1, 2 *e* 3*. Resta mostrarmos que* S *é um espaço vetorial. Das condições de espaço vetorial já temos o fechamento e a existência do elemento neutro.*

Já as condições $(1), (2), (5), (6), (7)$ *e* (8) *da definição de espaço vetorial valem em* S*, pois são válidas para quaisquer elementos de* V*.*

Agora, resta mostrar que $\forall x \in S$*, existe* $-x \in S$*, isto é, o seu oposto em* V *está em* S*. Pela condição* 3*, temos* $\alpha x \in S$*,* $\forall \alpha \in \mathbb{K}$*, assim, tomando* $\alpha = -1_{\mathbb{K}}$*, teremos*

$$-1_{\mathbb{K}} \cdot x = -x \in S.$$

Como são satisfeitas todas as condições, S *é um espaço vetorial e, portanto, um subespaço vetorial de* V*.* ■

Definição 10.4 *Sejam* V *e* W *dois espaços vetoriais sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *e* $T : V \to W$ *uma transformação linear. O conjunto*

$$\{v \in V : T(v) = 0\}$$

é dito núcleo de T, e denotaremos por $\ker(T)$.

Teorema 10.2 *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Então* $\ker(T)$ *é um subespaço vetorial de V. Em particular, T é injetora se, e somente se, o núcleo de T consiste apenas do elemento neutro.*

Demonstração *Primeiramente provemos que* $\ker(T)$ *é um subespaço vetorial de V. De fato*

(1) $0_v \in \ker(T)$. *De fato,* $T(0_v) = T(0 \times 0_v) = 0 \times T(0_v) = 0_w$.

(2) $x + y \in \ker(T)$. *Se* $x, y \in \ker(T)$, *então* $T(x + y) = T(x) + T(y) = 0_w + 0_w = 0_w$.

(3) $\alpha x \in \ker(T)$. *Se* $x \in \ker(T)$, *então* $T(\alpha x) = \alpha T(x) = \alpha 0_w = 0_w$.

Como são satisfeitas as três condições do Teorema 10.1, $\ker(T)$ *é um subespaço vetorial.*

Agora, suponhamos T injetora, isto é, $T(x) = T(y) \Rightarrow x = y$. *Como T é uma transformação linear temos* $T(0_v) = 0_w$. *Seja* $x \in \ker(T)$, *assim* $T(0) = T(x)$ *e, portanto, pela injetividade* $x = 0$. *Daí, temos que o núcleo de T contém apenas o elemento neutro.*

Reciprocamente, suponhamos que $\ker(T) = \{0\}$. *Dados* $x, y \in V$, *tais que*

$$T(x) = T(y) \implies T(x) - T(y) = 0 \implies T(x - y) = 0 \implies x - y \in \ker(T).$$

Entretanto, por hipótese, o núcleo possui apenas o elemento neutro, ou seja, $x - y = 0$, *ou ainda,* $x = y$. *Portanto, T é injetora.* ■

10.1 Espaços normados

Definição 10.5 (Norma) *Seja E um espaço vetorial real. Uma norma em E é uma função real* $||\cdot|| : E \to \mathbb{R}$ *que associa a cada elemento* $x \in E$ *o número real* $||x||$, *chamado de* ***norma*** *de x, de modo a serem cumpridas as condições abaixo para quaisquer* $x, y \in E$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$:

(1) $||x|| \geq 0$ *e* $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(2) $||\lambda x|| = |\lambda|||x||$;

(3) $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ *(Desigualdade triangular).*

Um **espaço vetorial normado** é um par $(E, ||\cdot||)$ onde E é um espaço vetorial e $||\cdot||$ é a norma em E.

Exemplo 10.2 *A dupla* $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$*, onde* $||x|| = \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|$*, para todo* $x \in \mathbb{R}^n$ *é um espaço vetorial normado.*

Solução *De fato, sejam* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$.

(1) Por definição $||x|| \geq 0$*. Além do mais, se* $(x_1, ..., x_n) = (0, ..., 0) \Leftrightarrow \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i| = 0$*, ou seja,* $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(2) Como $||\lambda x|| = ||(\lambda \cdot x_1, ..., \lambda \cdot x_n)||$*, então*

$$||\lambda \cdot x|| = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda \cdot x_i| = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda||x_i| = |\lambda| \cdot \max_{1\leq i\leq n} |x_i| = |\lambda| \cdot ||x||.$$

(3) Sendo $||x+y|| = ||(x_1+y_1, ..., x_n+y_n)||$*, temos pelo Lema 12.3:*

$$||x+y|| = \max_{1\leq i\leq n} |x_i+y_i| \leq \max_{1\leq i\leq n}(|x_i| + |y_i|) = \max_{1\leq i\leq n} |x_i| + \max_{1\leq i\leq n} |y_i| = ||x|| + ||y||.$$

E, portanto, $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$ *é um espaço vetorial normado.* ■

Exemplo 10.3 *Seja* $\mathcal{P}$ *o conjunto dos polinômios reais, com uma variável, definidos de* 0 *a* 1*. Definindo a aplicação* $||p|| = \sup\limits_{0\leq x\leq 1} |p(x)|$*, temos que* $||\cdot||$ *é uma norma para o espaço vetorial* $\mathcal{P}$.

Solução *De fato, pela continuidade dos polinômios no compacto* $[0,1]$*, obtemos pelo Teorema 9.8 que a imagem é compacta e, portanto, limitada. Daí, temos que a norma definida pelo supremo está bem definida.*

Além disso, sejam $p, q \in \mathcal{P}$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$.

(1) Seja $p(x) \in \mathcal{P}$ *uma função não identicamente nula, então para algum* $x \in [0,1]$*, temos* $p(x) \neq 0$*. Logo* $||p|| > 0$*. Além do mais, caso a função seja identicamente nula em* $[0,1]$*, então* $||p|| = 0$*. Reciprocamente, se* $||p|| = 0$*, então, por definição da norma, o conjunto dos elementos* $|p(x)|$ *contém apenas o zero e, portanto,* $p(x) = 0$ *para todo* $x \in [0,1]$.

(2)

$$\begin{aligned} ||\lambda \cdot p|| &= \sup_{0\le x\le 1} |(\lambda \cdot p)(x)| \\ &= \sup_{0\le x\le 1} |\lambda \cdot p(x)| \\ &= \sup_{0\le x\le 1} |\lambda| \cdot |p(x)| \\ &= |\lambda| \cdot \sup_{0\le x\le 1} |p(x)| \\ &= |\lambda| \cdot ||p||. \end{aligned}$$

(3) Temos pelo Corolário 2.8 que

$$\begin{aligned} ||f+g|| &= \sup_{0\le x\le 1} |(f+g)(x)| \\ &= \sup_{0\le x\le 1} |f(x)+g(x)| \\ &\le \sup_{0\le x\le 1} (|f(x)|+|g(x)|) \\ &\le \sup_{0\le x\le 1} |f(x)| + \sup_{0\le x\le 1} |g(x)| \\ &= ||f|| + ||g||. \end{aligned}$$

Portanto, $||\cdot||$ *é uma norma em* $\mathcal{P}$. ■

Para concluirmos iremos mostrar que um espaço vetorial normado é um espaço métrico com a métrica induzida pela norma definida como $d(x,y) = ||x-y||$.

Proposição 10.1 *Um espaço vetorial normado* E *é um espaço métrico.*

Demonstração *Sejam* $x, y, z \in E$, *e defina* $d : E \to \mathbb{R}$ *tal que* $d(x,y) = ||x-y||$, *então temos que:*

1. $d(x,x) = ||x-x|| = ||0|| = 0$.

2. *Se* $x \neq y$, *então* $d(x,y) = ||x-y|| > 0$.

3. $d(x,y) = ||x-y|| = ||y-x|| = d(y,x)$.

4. $d(x,y) = ||x-y|| = ||x-z+z-y|| \le ||x-z|| + ||z-y|| = d(x,z) + d(z,y)$.

Portanto, $(E, ||\cdot||)$ *é um espaço métrico.* ■

Capítulo

11

Considerações finais

Em resumo, com o desenvolvimento deste trabalho, observamos que o assunto é muito vasto. Além do mais, a importância dos conteúdos abordados e apresentados nas literaturas utilizadas foi perceptível durante nossos estudos. Mesmo com caráter introdutório foi possível ter uma boa ideia dos espaços métricos e estudar alguns exemplos.

Durante o desenvolvimento do trabalho estudamos vários tópicos não vistos no curso de graduação, mas ficou evidente o uso de ferramentas já vistas anteriormente, como o Cálculo, Álgebra e a Análise.

Ao decorrer do trabalho apresentamos alguns resultados da teoria dos espaços métricos e concluímos com a definição de espaços normados que são conceitos primordiais para estudos posteriores como os Espaços de Banach. Desse modo, cumprimos com os objetivos previamente estabelecidos. Em geral, foi um trabalho proveitoso, explorando diversas definições e resultados importantes para estudos posteriores e para o amadurecimento matemático.

Bibliografia

[1] ÁVILA, Geraldo. **Análise matemática para licenciatura**. Editora Blucher, 2006.

[2] BONELLI, Rebeca Cristina. Desigualdades matemáticas e aplicações. 2017. Disponível em: `https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/151180/bonelli_rebeca_me_rcla.pdf?sequence=3`. Acesso em: 10 junho 2023.

[3] GIMENES, Luciene Parron. Teorema Fundamental da Aritmética. Disponível em: `http://www.dma.uem.br/kit/calculo-e-pre-calculo/teoremafundamentalaritmetica.pdf`. Acesso em: 21 maio 2023.

[4] GONÇALVES, Mirian Buss; GONÇALVES, Daniel. **Elementos de análise**. UFSC, 2009.

[5] KREYSZIG, Erwin. **Introductory functional analysis with applications**. John Wiley & Sons, 1991.

[6] LIMA, Elon Lages. **Espaços Métricos**. 5. ed. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: Impa, 2015. 299 p.

[7] LIMA, Elon Lages. **Álgebra Linear**. 9. ed. Coleção matemática universitária. Rio de Janeiro: Impa, 2016. 357 p.

[8] LIMA, Elon Lages. **Análise Real**. Vol. 1, 12. ed. Coleção matemática universitária. Rio de Janeiro: Impa, 2017. 198 p.

[9] SHIRALI, Satish; VASUDEVA, Harkrishan Lal. **Metric spaces**. Springer Science & Business Media, 2005.

Capítulo

12

Apêndice

Os conceitos abaixo foram utilizados durante o nosso trabalho servindo como base para a demonstração de alguns resultados. Estes conceitos, foram colocados no apêndice por serem pontuais e para não mudar o corpo do texto optamos por introduzi-los no apêndice.

Definição 12.1 (Corpo) *Seja $\mathbb{K}$ um conjunto não vazio, onde estejam definidas duas operações, as quais chamaremos de soma e produto em $\mathbb{K}$.*

Assim,

$$\begin{array}{rcl} + : \mathbb{K}\times\mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rcl} \cdot : \mathbb{K}\times\mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ (x,y) & \mapsto & x\cdot y, \end{array}$$

diremos que $\mathbb{K}$ é um corpo se para quaisquer que sejam x, y, z pertencentes a $\mathbb{K}$ valer:

A1) $(x+y)+z = x+(y+z)$ *(associatividade da soma).*

A2) $\exists 0 \in \mathbb{K}$ *tal que* $x+0 = 0+x = x$ *(existência de elemento neutro para a soma soma).*

A3) Para todo $x \in \mathbb{K}$ existe um único $y \in \mathbb{K}$, o qual denotamos por $y = -x$, tal que $x+y = y+x = 0$ (existência de inverso aditivo).

A4) $x+y = y+x$ *(comutatividade da soma).*

M1) $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$ *(associatividade do produto).*

M2) $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ *e* $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$ *(distributividade à esquerda e à direita).*

M3) Existe $1 \in \mathbb{K}$ *tal que* $x\cdot 1 = 1\cdot x = x$ *(elemento unidade).*

M4) $x\cdot y = y\cdot x$ *(comutatividade do produto).*

M5) Para todo x pertencente a $\mathbb{K}$ existe y em $\mathbb{K}$, o qual denotamos por $y = x^{-1}$, tal que $x \cdot y = y \cdot x = 1$ (existência do inverso multiplicativo).

Lema 12.1 (Propriedades de soma) *Consideremos um corpo $\mathbb{K}$. Valem as seguintes propriedades da soma em $\mathbb{K}$:*

S1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} kx_i = k \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$, *onde k é uma constante.*

S2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$.

Demonstração *De fato,*

S1) Provemos primeiramente que é válido para um caso base. Tomemos $n = 2$ e notemos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2} kx_i &= kx_1 + kx_2 \\ &\overset{M2}{=} k(x_1 + x_2) \\ &= k \cdot \sum_{i=1}^{2} x_i.\end{aligned}$$

Suponhamos que nossa afirmação seja válida para algum $m \geq 2$ natural, isto é,

$$\sum_{i=1}^{m} kx_i = k \cdot \sum_{i=1}^{m} x_i.$$

Provemos agora que, se vale para m, então vale para $m + 1$, provando assim por indução nossa afirmação:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m+1} kx_i &= \left[\sum_{i=1}^{m} kx_i\right] + kx_{m+1} \\ &\overset{H.I}{=} \left[k \cdot \sum_{i=1}^{m} x_i\right] + kx_{m+1} \\ &\overset{M2}{=} k \cdot \left[\sum_{i=1}^{m} x_i + x_{m+1}\right] \\ &= k \cdot \sum_{i=1}^{m+1} x_i.\end{aligned}$$

Concluímos, por indução, que nossa afirmação é verdadeira, isto é,

$$\sum_{i=1}^{n} kx_i = k \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

para todo n natural, onde k é uma constante.

S2) *Primeiramente vamos provar que nossa afirmação é válida para um caso base. Para isso tomemos $n = 2$. Vejamos que*

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2}(x_i + y_i) &= (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \\
&\overset{A1 \ \underline{e} \ A4}{=} (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \\
&= \sum_{i=1}^{2} x_i + \sum_{i=1}^{2} y_i.
\end{aligned}$$

Suponhamos agora que para $m \geq 2$, natural, seja válido

$$\sum_{i=1}^{m}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{m} x_i + \sum_{i=1}^{m} y_i.$$

Notemos que para $m + 1$, teremos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m+1}(x_i + y_i) &= \left[\sum_{i=1}^{m}(x_i + y_i)\right] + (x_{m+1} + y_{m+1}) \\
&\overset{H.I}{=} \left[\sum_{i=1}^{m} x_i + \sum_{i=1}^{m} y_i\right] + (x_{m+1} + y_{m+1}) \\
&\overset{A1 \ \underline{e} \ A4}{=} \left(\left[\sum_{i=1}^{m} x_i\right] + x_{m+1}\right) + \left(\left[\sum_{i=1}^{m} y_i\right] + y_{m+1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m+1} x_i + \sum_{i=1}^{m+1} y_i.
\end{aligned}$$

Temos então, por indução, que nossa afirmação é verdadeira. ∎

Lema 12.2 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) *Sejam* $x_1, x_2, ..., x_n$ *e* $y_1, y_2, ..., y_n$

pertencentes a $\mathbb{R}$ *então*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}.$$

Demonstração *Ver [2], página 50, Teorema 3.4.* ■

Lema 12.3 *Sejam* A, B *dois conjuntos limitados superiormente de maneira que existem* $\max(A)$ *e* $\max(B)$*, então*

$$\max(A + B) = \max(A) + \max(B).$$

Demonstração *De fato, pela definição de máximo*

$$\max(A) \in A \ \ e \ \ \max(B) \in B.$$

ou seja, pela definição de $A + B$*, temos*

$$\max(A) + \max(B) \in A + B.$$

Agora, se $x \in A + B$*, temos que existem* a *pertencente* A *e* b *pertencente a* B *tal que*

$$x = a + b,$$

mais que isso, pela definição de máximo temos

$$\begin{cases} \max(A) \geq a \\ \max(B) \geq b \end{cases} \Rightarrow \max(A) + \max(B) \geq a + b = x.$$

Como x *é um elemento qualquer de* $A + B$ *e* $\max(A) + \max(B) \in A + B$*, concluímos então que*

$$\max(A + B) = \max(A) + \max(B),$$

como queríamos. ■

Teorema 12.1 (Leis de De Morgan)

1. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

2. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Demonstração *De fato,*

1.

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B)^c &\Leftrightarrow x \notin A \cap B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \text{ ou } x \in B^c \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^c &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ e } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \text{ e } x \in B^c \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c. \end{aligned}$$

■

Teorema 12.2 *Sejam $f : X \to Y$ e $A_1, ..., A_n \subset X$. Então*

$$f(\cup A_n) = \cup f(A_n)$$

Demonstração *Primeiramente, mostraremos que $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.*

De fato,

$$\begin{aligned} y \in f(A_1 \cup A_2) &\Leftrightarrow \exists x \in A_1 \cup A_2 : y = f(x) \\ &\Leftrightarrow \exists x : (x \in A_1 \text{ ou } x \in A_2) \text{ e } y = f(x) \\ &\Leftrightarrow \exists x : (x \in A_1 \text{ e } y = f(x)) \text{ ou } (x \in A_2 \text{ e } y = f(x)) \\ &\Leftrightarrow y \in f(A_1) \text{ ou } y \in f(A_2) \\ &\Leftrightarrow y \in f(A_1) \cup f(A_2). \end{aligned}$$

Agora, suponhamos que seja válido para $n-1$, isto é,

$$f(A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) = \bigcup_{i=1}^{n} f(A_i).$$

Provemos que seja válido para n*. Denominemos* $A = A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}$*. Assim,*

$$\begin{aligned} y \in f(A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1} \cup A_n) = f(A \cup A_n) &\Leftrightarrow \exists x \in A_{\cup} A_n : y = f(x) \\ &\Leftrightarrow \exists x : (x \in A \ \ ou \ x \in A_n) \ \ e \ y = f(x) \\ &\Leftrightarrow \exists x : (x \in A \ \ e \ y = f(x)) \\ &\quad\ ou \ (x \in A_n \ \ e \ y = f(x)) \\ &\Leftrightarrow y \in f(A) \ \ ou \ y \in f(A_n) \\ &\Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(A_n). \end{aligned}$$

Entretanto, por hipótese $f(A) = f(A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} f(A_i)$*. E, portanto,*

$$f(\cup A_n) = \cup f(A_n).$$

■