



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Departamento de Matemática



Cálculo Variacional: Uma Breve Introdução e Aplicações

Aluno: Vinícius Marques da Silva

Curso: Matemática

RA: 760951

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo da Silva Rodrigues

Curso: Matemática

Centro: Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia

São Carlos - SP

2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

VINICIUS MARQUES DA SILVA

Cálculo variacional: uma breve introdução e aplicações

Trabalho de conclusão de curso apresentado
à Coordenação dos Cursos de Graduação em
Matemática da Universidade Federal de São
Carlos.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo da Silva Rodrigues

**FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**

COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - CCM/CCET
Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905
Telefone: (16) 33518221 - <http://www.ufscar.br>

DP-TCC-FA nº 6/2024/CCM/CCET

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso**Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)****FOLHA DE APROVAÇÃO****VINICIUS MARQUES DA SILVA****CÁLCULO VARIACIONAL: UMA BREVE INTRODUÇÃO E APLICAÇÕES****Trabalho de Conclusão de Curso****Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos**

São Carlos, 06 de fevereiro de 2024

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	Rodrigo da Silva Rodrigues
Membro da Banca 1	Olímpio Hiroshi Miyagaki
Membro da Banca 2	Alex Carlucci Rezende



Documento assinado eletronicamente por **Rodrigo da Silva Rodrigues, Professor(a) do Ensino Superior**, em 05/03/2024, às 16:54, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Olímpio Hiroshi Miyagaki, Professor(a) do Ensino Superior**, em 11/03/2024, às 10:00, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Alex Carlucci Rezende, Professor(a) do Ensino Superior**, em 03/07/2024, às 20:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufscar.br/autenticacao>, informando o código verificador **1365784** e o código CRC **2CDA51D4**.

Referência: Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo nº
23112.004286/2024-16

SEI nº 1365784

Modelo de Documento: Grad: Defesa TCC: Folha Aprovação, versão de 02/Agosto/2019

*Dedico este trabalho com todo amor, carinho e gratidão aos meus pais, Natal e Nadia,
minha irmã, Bianca, Minha tia, Telma e minha avó Maria.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pelas inúmeras bênçãos que tem derramado em minha vida, por todo zelo e misericórdia. Nessa caminhada passei por altos e baixos que muitas vezes me fizeram pensar em desistir, mas com a graça de Deus mantive a fé que tudo seguiria conforme a vontade do senhor em minha vida e por fim hoje concluo mais uma etapa da minha trajetória.

Exalto também a importância dos meus familiares, especialmente meus pais, Natal e Nadia, minha irmã, Bianca, meus avôs e avós e minha tia, Telma, pois através dessas pessoas especiais tive a oportunidade encontrar descanso, refugio e paz. Muitas decisões tomadas em minha vida passam pelos conselhos e carinho vindos da minha família que é um pilar extremamente importante.

Expresso meus sinceros agradecimentos ao meu orientador Prof. Dr. Rodrigo da Silva Rodrigues pois sempre se manteve solícito a sanar todas as dúvidas, por sempre me manter motivado a buscar o conhecimento, por todo o auxílio dele para comigo e por que jamais hesitou em trabalhar arduamente em nossos seminários. Com toda certeza posso afirmar que foi uma honra tê-lo como orientador durante esse período.

Agradeço também aos meus grandes amigos, Abner, Olavo, Liniker, Fozat, Victor, pela amizade e por toda força que demos uns aos outros. Também agradeço aos demais colegas, Gabriela Watanabe, Beatriz, Relissa, Vitoria, Maiara, Paulo, Nelson, Leandro, Douglas, por todos os momentos compartilhados juntos

Ao final, a todos os demais professores a quem tive o privilégio de ter convivido nesse período acadêmico que de certa forma contribuíram imensamente para minha formação.

Resumo

O intuito desse trabalho de conclusão de curso é apresentar uma breve introdução ao cálculo variacional e suas aplicações. Desta forma o desenvolvimento consiste em relembrar conceitos de espaços vetoriais normados, espaços métricos e cálculo diferencial e integral. Posteriormente esses conceitos serão aprimorados para o estudo de funcionais, onde inevitavelmente surgirão conceitos a respeito da derivada de Fréchet e Gâteaux, bem como a equação de Euler. Por fim discutiremos sobre condições suficientes para extremos.

Palavras-chave: Cálculo variacional, Equação de Euler, Espaços vetoriais normados, Derivada de Fréchet, Derivada Gâteaux.

Abstract

The aim of this end-of-course work is to present a brief introduction to variational calculus and its applications. In this way, the development consists of recalling concepts of normed vector spaces, metric spaces and differential and integral calculus. Subsequently, these concepts will be refined for the study of functionals, where concepts about the Fréchet and Gâteaux derivatives, as well as the Euler equation, will inevitably arise. Finally, we will discuss sufficient conditions for extrema.

Keyword: Variational calculus, Euler equation, Normed vector spaces, Fréchet derivative, Gâteaux derivative.

Sumário

1	Introdução	9
2	Espaços vetoriais	11
2.1	Espaços vetoriais	11
2.2	Espaços vetoriais normados	23
2.2.1	Métrica induzida	28
3	Funcionais	31
3.1	Equação de Euler-Lagrange	39
3.1.1	Primeiro caso: $F = F(s, y'(s))$	41
3.1.2	Segundo caso: $F = F(y(s), y'(s))$	43
3.1.3	Terceiro caso: $F = F(s, y(s), y'(s))$	45
3.1.4	Quarto Caso: $F = F(s, y(s))$	46
3.1.5	Quinto Caso: $F = F(y'(s))$	47
3.2	O problema da braquistócrona	48
4	Condições suficientes para extremos	55
4.1	Campos	59
4.2	Condição necessária de Jacobi	64
4.3	Condição de Weierstrass e Legendre	68
5	Considerações finais	78
6	Apêndice	80

Lista de Figuras

2.1	Bola fechada euclidiana.	30
2.2	Bola aberta euclidiana.	30
2.3	Bola fechada - métrica da soma.	30
2.4	Bola aberta - métrica da soma.	30
2.5	Bola fechada - métrica do máximo.	30
2.6	Bola aberta - métrica do máximo.	30
3.1	Problema da braquistócrona.	48
3.2	Análise do problema da braquistócrona.	49
4.1	Representação da variação no espaço das funções.	56
4.2	Casos do funcional $J(V(s))$ quando $V(s) = s^\alpha$	58
4.3	Campo próprio ilustrativo.	59
4.4	Inclinação do campo no ponto.	60
4.5	Campo próprio formado pela família de retas $y = x + c, c \in \mathbb{R}$	60
4.6	Campo não próprio utilizando a família de curvas $y = 1 - (x - a)^2, a \in \mathbb{R}$	61
4.7	Campo central.	62
4.8	Campo próprio.	63
4.9	Campo central.	63
4.10	Campo não próprio.	63

Introdução

Historicamente os primeiros vestígios do que hoje se conhece como cálculo variacional foram concebidas na Grécia antiga com Aristóteles, mas apenas conceitos supérfluos. Andando no tempo, existem outras duas aparições de problemas otimizadores concretos que chamaram a atenção, um dedicado a Heron de Alexandria (20-62) a.C e outro a obra Eneida, de Virgílio 70 a.C.

Heron postulou que na reflexão por um espelho plano a luz seguiria o caminho mais curto entre dois pontos, o que reforça o princípio aristotélico na qual diz “A natureza não faz nada de modo mais difícil”.

Na obra Eneida, Virgílio retrata Elissa de Tiro, popularmente conhecida como Dido, que segunda a lenda, foi a primeira rainha de Cartago. Dido era fenícia (civilização antiga) onde atualmente é localizada nas regiões litorâneas do Líbano e da Síria.

Conta-se que após a morte de seu marido, Dido conseguiu fugir juntamente com alguns seguidores chegando ao norte da África. Com o intuito de fundar uma nova cidade, ela negociou com o rei Jarbas a compra das terras. Entretanto o rei Jarbas lhe disse que ela poderia comprar apenas a quantidade de terra que conseguisse cercar usando a pele de um touro. Desse modo, ela decidiu cortar a pele do touro em tiras bem finas e emendá-las de maneira que formasse uma corda muito comprida para cercar o máximo de terra possível.

A grande genialidade de Dido e seus seguidores foi perceber que a melhor forma de cercar o território desejado era cercá-lo conforme uma semicircunferência. Além disso, a escolha das terras tendo como horizonte o mar lhe beneficiava tanto com as navegações como a economia de tiras de couro para o perímetro. Tal feito ficou conhecido historicamente como problema isoperimétrico, que significa igual perímetro, e a cidade fundada levou o nome de Cartago.

No decorrer da história, o cálculo das variações aparentemente ficou em segundo plano por longos anos. Pierre de Fermat voltou a dar relevância ao tema após afirmar que a trajetória percorrida pela luz ao se propagar de um ponto a outro é tal que o tempo gasto em percorrê-la é mínimo (princípio Fermat). Posteriormente, Sneel e Descartes também concluíram experimentalmente.

Intrigados com tal descoberta, questionavam-se nas motivações das formulações seguirem tais preceitos, muitos deles creditavam tais fatos à natureza.

Isaac Newton em 1686 se debruçou ao tema quando buscou otimizar um túnel que ligava dois pontos na superfície da terra, de modo que permitia que um corpo de massa m se deslocasse no menor tempo possível.

Apesar dos feitos de Newton e Fermat, foram os irmãos Jacques (1654-1705) e Johan Bernoulli (1667-1748) que impulsionaram o cálculo variacional no cenário mundial. Com a publicação do problema da braquistócrona (menor tempo), despertando então o interesse de solução em diversos matemáticos. Dentre estes destacaram-se Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) e Leonhard Euler (1707-1783). Inclusive, Euler reforça a importância do cálculo variacional quando diz “Como o universo é perfeito e o trabalho de um criador muito sábio, nada ocorre na natureza sem que uma lei de máximo ou mínimo não intervenha”.

Esse foi o estopim para que viessem outros matemáticos como Legendre, Jacobi Weierstrass, Gauss, Hilbert e Hamilton, cada qual com a sua contribuição.

Em relação à dissertação, inicialmente será necessário que recordemos alguns conceitos essenciais sobre espaços vetoriais, espaços métricos e espaços vetoriais normados, tendo em vista que o auxílio desses objetos é extremamente importante para que haja prosseguimento do tema.

O estudo de funcionais inicia-se propriamente no terceiro capítulo, pois nesse momento a ênfase está em direcionar nossos esforços ao cálculo das variações. Os objetos de estudos nessa nova etapa são os funcionais, ou mais precisamente, analisar extremos de funcionais. Contudo, as ferramentas apresentadas até este determinado momento não são suficientes, sendo assim, novas ferramentas como a derivada de Fréchet e Gâteaux ganham relevância.

Através da inserção dessas novas ferramentas será possível que façamos um progresso rumo à equação de Euler Lagrange, que basicamente permite que estudemos extremantes dos funcionais, sendo que, encontrar uma solução para a equação de Euler Lagrange é o mesmo que encontrar curvas candidatas a extremos desse funcional.

Espaços vetoriais

Historicamente a noção de espaços vetoriais aparece de maneira rústica. As contribuições de René Descartes e Pierre de Fermat em relação à geometria analítica (de coordenadas) possibilitou que pontos sobre uma curva plana, solucionassem equações de duas variáveis. Bolzano, por sua vez, optou por uma linha de raciocínio distinta e buscava soluções geométricas sem utilizar as coordenadas, mas sim, estabelecendo certas operações entre pontos, linhas e os demais objetos. Essencialmente o que Bolzano estava desenvolvendo eram as operações de vetores que comumente conhecemos hoje. Notoriamente, esse conceito foi sendo aprimorado com o passar dos anos, nas mãos de grandes matemáticos, como Peano, Cayley, Gauss, Hilbert, entre outros.

Neste capítulo introduziremos o conceito de espaço vetorial, que é amplamente utilizado não só em diversas áreas da matemática, mas em outras ciências correlacionadas, como física, ciência da computação, etc. Tal conceito será de extrema importância para que no decorrer do trabalho compreendamos o conceito de espaço vetorial normado e os demais temas que surgirão.

A grosso modo, podemos dizer que um espaço vetorial é uma estrutura que contém um conjunto e está munido de duas operações, nas quais possuem certas propriedades que precisam ser satisfeitas.

Além disso, quando tal espaço vetorial possuir uma certa norma, isto é, quando for possível medir o comprimento de um vetor, diremos que esse espaço vetorial é normado. Em geral, os espaços vetoriais normados possuem uma métrica induzida, ou seja, a norma é proveniente da métrica do espaço no qual se está trabalhando. No decorrer da dissertação veremos algumas dessas métricas.

2.1 Espaços vetoriais

É necessário que recordemos o conceito de corpo, pois será útil na definição e nas justificativas que virão a seguir. Um corpo é uma estrutura algébrica na qual três objetos são primordiais, a saber, um conjunto e duas operações, sendo uma delas a adição e a outra a multiplicação, das quais se derivam certas propriedades.

Definição 2.1 (Corpos) Um corpo \mathbb{K} é um conjunto não vazio, munido de duas operações, indicadas por

$$\begin{aligned} + : \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{K} & \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) &\mapsto x + y & (x, y) &\mapsto x \cdot y \end{aligned}$$

satisfazendo, para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{K}$, as propriedades:

- A1) (Comutativa da adição): $x + y = y + x$.
- A2) (Associativa da adição): $x + (y + z) = (x + y) + z$.
- A3) (Elemento neutro da adição): $\exists 0 \in \mathbb{K}$ tal que $x + 0 = x$.
- A4) (Elemento oposto da adição): $\exists -x \in \mathbb{K}$ tal que $x + (-x) = 0$.
- M1) (Comutativa da multiplicação): $x \cdot y = y \cdot x$.
- M2) (Associativa da multiplicação): $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
- M3) (Elemento unidade): $\exists 1 \in \mathbb{K}$ tal que $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$.
- M4) (Inverso multiplicativo): Para cada $x \in \mathbb{K}, x \neq 0, \exists x^{-1} \in \mathbb{K}$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.
- D) (Distributiva): $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

São exemplos de corpos, os conjuntos dos números reais (\mathbb{R}), racionais (\mathbb{Q}) e os complexos (\mathbb{C}). Por simplicidade, quando não houver perigo de confusão, omitiremos o sinal da operação de multiplicação afim de que não tenhamos uma notação carregada.

Exemplo 2.1 O conjunto $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ munido com as seguintes operações:

$$\begin{aligned} + : (a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) &= (a + c) + (b + d)\sqrt{2}, \\ \cdot : (a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) &= (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}, \end{aligned}$$

é um corpo.

Solução. As justificativas nas igualdades abaixo devem-se ao seguinte motivo, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ são corpos, sendo que $x = a + b\sqrt{2}, y = c + d\sqrt{2}, z = e + f\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Comutativa da adição:

$$\begin{aligned} x + y &= (a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) \\ &\stackrel{def.}{=} (a + c) + (b + d)\sqrt{2} \\ &\stackrel{(A1)}{=} (c + a) + (d + b)\sqrt{2} \\ &\stackrel{(A2, D)}{=} (c + d\sqrt{2}) + (a + b\sqrt{2}) \\ &= y + x. \end{aligned}$$

Associativa da adição:

$$\begin{aligned}
x + (y + z) &= a + b\sqrt{2} + [(c + d\sqrt{2}) + (e + f\sqrt{2})] \\
&\stackrel{\text{def.}}{=} a + b\sqrt{2} + [(c + e) + (d + f)\sqrt{2}] \\
&\stackrel{\text{def.}}{=} (a + c + e) + (b + d + f)\sqrt{2} \\
&\stackrel{D}{=} (a + c + e) + b\sqrt{2} + d\sqrt{2} + f\sqrt{2} \\
&\stackrel{(A2, A1)}{=} (a + c) + b\sqrt{2} + d\sqrt{2} + e + f\sqrt{2} \\
&\stackrel{D}{=} (a + c) + (b + d)\sqrt{2} + e + f\sqrt{2} \\
&\stackrel{(\text{def}, A1)}{=} [(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2})] + e + f\sqrt{2} \\
&= (x + y) + z.
\end{aligned}$$

Elemento neutro da adição: Considere o seguinte elemento $0 = 0 + 0\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

$$\begin{aligned}
x + 0 &= (a + b\sqrt{2}) + (0 + 0\sqrt{2}) \\
&\stackrel{\text{def.}}{=} (a + 0) + (b + 0)\sqrt{2} \\
&\stackrel{(D, A3)}{=} a + b\sqrt{2} \\
&= x.
\end{aligned}$$

Elemento oposto da adição: Considere o seguinte elemento $-x = -a - b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

$$\begin{aligned}
x + (-x) &= (a + b\sqrt{2}) + (-a - b\sqrt{2}) \\
&\stackrel{\text{def.}}{=} (a + (-a)) + (b\sqrt{2} + (-b\sqrt{2})) \\
&\stackrel{D}{=} (a - a) + (b - b)\sqrt{2} \\
&\stackrel{(A4)}{=} 0 + 0\sqrt{2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Comutativa da multiplicação:

$$\begin{aligned}
x.y &= (a + b\sqrt{2}).(c + d\sqrt{2}) \\
&\stackrel{\text{def.}}{=} (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} \\
&\stackrel{(M1)}{=} (ca + 2db) + (da + cb)\sqrt{2} \\
&\stackrel{(A1)}{=} (ca + 2db) + (cb + da)\sqrt{2} \\
&\stackrel{\text{def.}}{=} (c + d\sqrt{2}).(a + b\sqrt{2}) \\
&= y.x.
\end{aligned}$$

Elemento unidade: Existe $1 \in \mathbb{Q}$, tal que

$$\begin{aligned}
x.1 &= (a + b\sqrt{2}).1 \\
&\stackrel{(M3)}{=} (a + b\sqrt{2}) \\
&= x.
\end{aligned}$$

Associativa da multiplicação:

$$\begin{aligned}
 x.(y.z) &= (a + b\sqrt{2}).[(c + d\sqrt{2}).(e + f\sqrt{2})] \\
 &\stackrel{def.}{=} (a + b\sqrt{2}).[(ce + 2df) + (cf + de)\sqrt{2}] \\
 &\stackrel{def.}{=} ace + 2adf + 2bcf + 2bde + (acf + ade + bce + 2bdf)\sqrt{2} \\
 &\stackrel{(D)}{=} e[(ac + 2bd) + \sqrt{2}(bc + ad)] + 2f(ad + 2bc) + (ac + 2bd)f\sqrt{2} \\
 &\stackrel{def.}{=} [(ac + 2bd) + (bc + ad)\sqrt{2}].(e + f\sqrt{2}) \\
 &\stackrel{def.}{=} [(a + b\sqrt{2}).(c + d\sqrt{2})].(e + f\sqrt{2}) \\
 &= (x.y).z.
 \end{aligned}$$

Inverso multiplicativo: É natural que pensemos na seguinte igualdade para encontrar tal elemento:

$$\begin{aligned}
 (a + b\sqrt{2}).(c + d\sqrt{2}) &= 1, \\
 (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} &= 1 + 0\sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

Daqui tira-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} ac + 2bd = 1, \\ ad + bc = 0, \end{cases}$$

donde da segunda equação, obtemos $d = \frac{-bc}{a}$, se $a \neq 0$. Do mesmo modo, também é possível isolar c , onde encontra-se $c = \frac{-ad}{b}$, se $b \neq 0$.

Consideramos então $c = \frac{-ad}{b}$ e tomemos $a = 0 \Leftrightarrow c = 0$, sendo assim, retornando à primeira equação do sistema, temos:

$$2bd = 1 \Rightarrow d = \frac{1}{2b},$$

e portanto, $(a + b\sqrt{2})^{-1} = \frac{1}{2b} \cdot \sqrt{2}$. De fato, vejamos que satisfaz o que desejávamos:

$$(b.\sqrt{2}).\left(\frac{1}{2b} \cdot \sqrt{2}\right) = 1.$$

Por outro lado, se utilizarmos $d = \frac{-bc}{a}$ e substituirmos na primeira equação do sistema, obtêm-se que:

$$ac - \frac{2b^2c}{a} = 1,$$

ao passo de que isolando c encontra-se:

$$c\left(a - \frac{2b^2}{a}\right) = 1 \Rightarrow c = \frac{a}{a^2 - 2b^2}.$$

Desta maneira, chega-se à conclusão de que:

$$\begin{aligned}(a + b\sqrt{2})^{-1} &= \frac{a}{a^2 - 2b^2} - \left(\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{a^2 - 2b^2}\right) \cdot \sqrt{2} \\ &= \frac{a}{a^2 - 2b^2} - \left(\frac{b}{a^2 - 2b^2}\right) \cdot \sqrt{2} \\ &= \left(\frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2}\right), \text{ se } a^2 - 2b^2 \neq 0.\end{aligned}$$

De fato, vamos verificar:

$$(a + b\sqrt{2}) \cdot \left(\frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2}\right) = \left(\frac{a^2 - 2b^2}{a^2 - 2b^2}\right) = 1.$$

Afirmção 2.1 *O produto de um número racional diferente de zero por um número irracional tem como resultado um número irracional.*

De fato. Sejam $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{Q} - \{0\}$, isto é, $y = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a, b \neq 0$. Suponhamos por absurdo que $x \cdot y$ seja racional, ou seja, existem $c, d \in \mathbb{Z}$ com $d \neq 0$, tal que:

$$x \cdot \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Como \mathbb{Q} é um corpo, sabemos que todo elemento não nulo possui um inverso multiplicativo, sendo assim, vamos operá-lo em ambos os lados de igualdade:

$$x \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{a}.$$

desta forma, segue que:

$$x = \frac{cb}{ad}.$$

Como $cb, ad \in \mathbb{Z}$, temos que x se expressa como um racional, o que gera uma contradição, pois por hipótese $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Portanto, $x \cdot y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Assim, concluímos a prova desta afirmação.

Afirmção 2.2 *Se $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}) - \{0\}$, então $a^2 - 2b^2 \neq 0$.*

De fato. Suponha por absurdo que $a^2 = 2b^2$, Logo, $a = \sqrt{2} \cdot |b|$, e deste modo, pela **Afirmção 2.1**, sabe-se que $\sqrt{2} \cdot |b| \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Mas $a \in \mathbb{Q}$, gerando uma contradição e, portanto, $a^2 - 2b^2 \neq 0$. Note que, se $a = 0$, obtemos que $(a + b\sqrt{2})^{-1} = \frac{1}{2b}$, conforme já havíamos encontrado acima. Por outro lado, se $b = 0$, conclui-se que $c = \frac{1}{a}$ e, assim, $(a + b\sqrt{2})^{-1} = \frac{1}{a}$. Logo concluímos a prova desta afirmação.

Distributiva:

$$\begin{aligned}
x.(y+z) &= (a+b\sqrt{2}).[(c+d\sqrt{2})+(e+f\sqrt{2})] \\
&\stackrel{def.}{=} (a+b\sqrt{2}).[(c+e)+(d+f)\sqrt{2}] \\
&\stackrel{(D)}{=} (ac+ae+2bd+2bf)+(ad+af+bc+be)\sqrt{2} \\
&\stackrel{(A1,D)}{=} (ac+2bd)+(bc+ad)\sqrt{2}+(ae+2bf)+(be+af)\sqrt{2} \\
&\stackrel{def.}{=} (a+b\sqrt{2}).(c+d\sqrt{2})+(a+b\sqrt{2}).(e+f\sqrt{2}) \\
&= x.y+x.z.
\end{aligned}$$

□

Definição 2.2 (*Espaços vetoriais*) Um espaço vetorial real \mathcal{V} é um conjunto não vazio munido de duas operações chamadas, respectivamente, de adição e multiplicação por um escalar,

$$\begin{aligned}
+ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{V} & \cdot : \mathbb{K} \times \mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{V} \\
(v, u) &\mapsto v+u & (\lambda, v) &\mapsto \lambda.v
\end{aligned}$$

satisfazendo, para quaisquer $u, v, w \in \mathcal{V}$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, as propriedades:

- 1) (Comutativa da adição): $v+u = u+v$.
- 2) (Associativa da adição): $(v+u)+w = v+(u+w)$.
- 3) (Elemento neutro da adição): $\exists 0 \in \mathcal{V}$, tal que $v+0 = v$.
- 4) (Elemento oposto da adição): $\forall v \in \mathcal{V}$, $\exists -v \in \mathcal{V}$, tal que $v+(-v) = 0$.
- 5) (Propriedade associativa): $\lambda.(\mu.v) = (\lambda.\mu).v$.
- 6) (Unidade): $1.v = v$, sendo 1 o elemento unidade de \mathbb{K} .
- 7) (Distributividade 1): $\lambda.(u+v) = \lambda.u + \lambda.v$.
- 8) (Distributividade 2): $(\lambda+\mu).v = \lambda.v + \mu.v$.

É importante ressaltar que quaisquer elementos do conjunto \mathcal{V} , como v, u, w , são chamados de vetores. Por sua vez, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ são ditos escalares, e por fim o elemento neutro proveniente da propriedade (3) não é um zero escalar, mas sim o vetor nulo, denotado por $\vec{0}$.

Exemplo 2.2 O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n, n \geq 1$, é um espaço vetorial.

Solução. Considere as operações de soma e multiplicação por escalar usuais. Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$, logo, como \mathbb{R} é corpo, segue que:
Comutativa da adição:

$$x+y = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n) = (y_1+x_1, \dots, y_n+x_n) = y+x.$$

Associativa da adição:

$$\begin{aligned}
 (x + y) + z &= [(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)] + (z_1, \dots, z_n) \\
 &= (x_1 + y_1 + z_1, \dots, x_n + y_n + z_n) \\
 &= (x_1 + z_1 + y_1, \dots, x_n + z_n + y_n) \\
 &= ((x_1 + z_1) + y_1, \dots, (x_n + z_n) + y_n) \\
 &= (x_1, \dots, x_n) + [y_1 + z_1, \dots, y_n + z_n] \\
 &= (x_1, \dots, x_n) + [(y_1, \dots, y_n) + (z_1, \dots, z_n)],
 \end{aligned}$$

as justificativas dessas igualdades e as demais que veremos nesse exemplo, são provenientes de que \mathbb{R} é corpo.

Elemento neutro: Considere $0 = (0_1, \dots, 0_n)$, logo:

$$x + 0 = (x_1, \dots, x_n) + (0_1, \dots, 0_n) = (x_1 + 0_1, \dots, x_n + 0_n) = x.$$

Elemento oposto: Considere $-x \in \mathbb{R}$ definido da seguinte forma:

$$-x = (-x_1, \dots, -x_n).$$

De fato isso é válido, pois sabemos que dado um número real, existe seu elemento oposto. Sendo assim, segue que:

$$\begin{aligned}
 x + (-x) &= (x_1, \dots, x_n) + (-x_1, \dots, -x_n) \\
 &= (x_1 + (-x_1), \dots, x_n + (-x_n)) = 0 = \vec{0}.
 \end{aligned}$$

Propriedade associativa: De fato, para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, segue que:

$$\begin{aligned}
 \lambda.(\mu.x) &= \lambda.(\mu.x_1, \dots, \mu.x_n) \\
 &= (\lambda.\mu.x_1, \dots, \lambda.\mu.x_n) \\
 &= (\lambda.\mu).(x_1, \dots, x_n) \\
 &= (\lambda.\mu).x.
 \end{aligned}$$

Unidade: É válida, pois dado $1 \in \mathbb{R}$, temos que:

$$1 \cdot x = (1 \cdot x_1, \dots, 1 \cdot x_n) = (x_1, \dots, x_n).$$

Distributiva 1: É válida. De fato, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned}
 \lambda.(x + y) &= \lambda.(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\
 &= (\lambda.(x_1 + y_1), \dots, \lambda.(x_n + y_n)) \\
 &= (\lambda.x_1 + \lambda.y_1, \dots, \lambda.x_n + \lambda.y_n)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda.(x_1, \dots, x_n) + \lambda.(y_1, \dots, y_n) \\
&= \lambda.x + \lambda.y.
\end{aligned}$$

Distributiva 2: É válida. De fato, para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned}
(\lambda + \mu).x &= (\lambda + \mu).(x_1, \dots, x_n) \\
&= ((\lambda + \mu).x_1, \dots, (\lambda + \mu).x_n) \\
&= (\lambda.x_1 + \mu.x_1, \dots, \lambda.x_n + \mu.x_n) \\
&= \lambda.(x_1, \dots, x_n) + \mu.(x_1, \dots, x_n) \\
&= \lambda.x + \mu.x.
\end{aligned}$$

□

Exemplo 2.3 Seja $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ o conjunto formado por todas as funções $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, em que $A \neq \emptyset$ é um conjunto arbitrário. Dados $f, g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ definem-se as seguintes operações de soma e produto por escalar:

$$\begin{array}{ccc}
+ : \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) \times \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) \\
(f, g) & \longmapsto & f + g
\end{array}
\quad e \quad
\begin{array}{ccc}
\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) \\
(\lambda, f) & \longmapsto & \lambda.f
\end{array},$$

sendo $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(\lambda.f)(x) = \lambda.f(x)$, para todo $x \in A$.

Solução. Primeiramente notemos que as funções estão bem definidas, pois f e g são funções e o contradomínio é o conjunto dos números reais. Agora, verifiquemos que as propriedades de espaços vetoriais são satisfeitas. As justificativas das igualdades abaixo correspondem ao fato de \mathbb{R} ser corpo.

Comutativa da adição:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x).$$

Associativa da adição:

$$\begin{aligned}
(f + (g + h))(x) &= f(x) + (g + h)(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) \\
&= (f(x) + g(x)) + h(x) = (f + g)(x) + h(x) \\
&= ((f + g) + h)(x).
\end{aligned}$$

Elemento neutro: Considere $e(x) = 0$, a função nula, isto é, a função que leva todos os elementos do domínio no zero. Donde segue que:

$$(f + e)(x) = f(x) + e(x) = f(x) + 0 = f(x).$$

Elemento oposto: Considere a função oposta de f denotado por $-f$ como a função que

posso como imagem os elementos opostos de f , isto é:

$$(f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) + (-f(x)) = f(x) - f(x) = 0 = e(x).$$

Propriedade associativa: De fato, para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ temos:

$$(\lambda(\mu f))(x) = \lambda((\mu f)(x)) = \lambda(\mu f(x)) = (\lambda\mu)f(x) = ((\lambda\mu)f)(x).$$

Unidade: Considere $\lambda = 1 \in \mathbb{R}$, desta forma segue que:

$$(\lambda f)(x) = (1f)(x) = 1f(x) = f(x).$$

Distributiva 1:

$$\begin{aligned} (\lambda(f + g))(x) &= \lambda(f(x) + g(x)) = \lambda f(x) + \lambda g(x) \\ &= (\lambda f)(x) + (\lambda g)(x) = (\lambda f + \lambda g)(x). \end{aligned}$$

Distributiva 2: De fato, para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ temos:

$$\begin{aligned} ((\lambda + \mu)f)(x) &= (\lambda + \mu)f(x) = \lambda f(x) + \mu f(x) \\ &= (\lambda f)(x) + (\mu f)(x) = (\lambda f + \mu f)(x). \end{aligned}$$

□

Observação. Consideremos o subconjunto de $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ formado pelas funções contínuas em A , que denotaremos por $\mathcal{C}(A)$; como a função constante igual a zero é contínua, a soma de funções contínuas é uma função contínua e o produto de um escalar por uma função contínua é uma função contínua, segue que $\mathcal{C}(A)$ é um subespaço vetorial ([8], p.15, Teorema 1.3).

Exemplo 2.4 *O espaço das matrizes $M_{n \times m}(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial.*

Solução. Considere as operações usuais de adição e multiplicação por um escalar real de matrizes. As justificativas das igualdades abaixo são creditadas ao fato de \mathbb{R} ser corpo. Sejam $A, B, C \in M_{m \times n}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

Comutativa da adição:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_{11} + a_{11} & \dots & b_{1n} + a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} + a_{m1} & \dots & b_{mn} + a_{mn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = B + A.
\end{aligned}$$

Associativa da adiç3o:

$$\begin{aligned}
(A + B) + C &= \left[\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \\
&= \left[\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \\
&= \left[\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} + c_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} + c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} + c_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} + c_{mn} \end{pmatrix} \right] \\
&= \left[\begin{pmatrix} a_{11} + (b_{11} + c_{11}) & \dots & a_{1n} + (b_{1n} + c_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + (b_{m1} + c_{m1}) & \dots & a_{mn} + (b_{mn} + c_{mn}) \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} b_{11} + c_{11} & \dots & b_{1n} + c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} + c_{m1} & \dots & b_{mn} + c_{mn} \end{pmatrix} \right] = A + (B + C).
\end{aligned}$$

Elemento neutro: Considere a seguinte matriz:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{m \times n},$$

portanto, segue que:

$$A + 0 = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + 0 & \dots & a_{1n} + 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + 0 & \dots & a_{mn} + 0 \end{pmatrix} = A.$$

Elemento oposto: Considere $-A \in M_{m \times n}$ definido da seguinte maneira:

$$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix},$$

daí segue que:

$$\begin{aligned} A + (-A) &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} + (-a_{11}) & \dots & a_{1n} + (-a_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + (-a_{m1}) & \dots & a_{mn} + (-a_{mn}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Propriedade associativa: De fato, para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ temos:

$$\begin{aligned} \lambda(\mu A) &= \lambda \left[\begin{pmatrix} \mu a_{11} & \dots & \mu a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu a_{m1} & \dots & \mu a_{mn} \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} \lambda \mu a_{11} & \dots & \lambda \mu a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \mu a_{m1} & \dots & \lambda \mu a_{mn} \end{pmatrix} \right] \\ &= \left[\begin{pmatrix} (\lambda \mu) a_{11} & \dots & (\lambda \mu) a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\lambda \mu) a_{m1} & \dots & (\lambda \mu) a_{mn} \end{pmatrix} \right] = (\lambda \mu) \left[\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \right] \\ &= (\lambda \mu) A, \end{aligned}$$

em especial se $\lambda = 1, \mu = -1$, obtemos a matriz $-A$ do item anterior.

Unidade: Pois dado $1 \in \mathbb{R}$, temos que:

$$1 \cdot A = 1 \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot a_{11} & \dots & 1 \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 \cdot a_{m1} & \dots & 1 \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = A.$$

Distributiva 1: Pois para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ têm-se:

$$\begin{aligned} \lambda(A + B) &= \lambda \left[\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \lambda(a_{11} + b_{11}) & \dots & \lambda(a_{1n} + b_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda(a_{m1} + b_{m1}) & \dots & \lambda(a_{mn} + b_{mn}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\lambda a_{11} + \lambda b_{11}) & \dots & (\lambda a_{1n} + \lambda b_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\lambda a_{m1} + \lambda b_{m1}) & \dots & (\lambda a_{mn} + \lambda b_{mn}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda b_{11} & \dots & \lambda b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda b_{m1} & \dots & \lambda b_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \lambda A + \lambda B. \end{aligned}$$

Distributiva 2: Pois para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)A &= (\lambda + \mu) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu)a_{11} & \dots & (\lambda + \mu)a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\lambda + \mu)a_{m1} & \dots & (\lambda + \mu)a_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda a_{11} + \mu a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} + \mu a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} + \mu a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} + \mu a_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu a_{11} & \dots & \mu a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu a_{m1} & \dots & \mu a_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \lambda A + \mu A. \end{aligned}$$

□

Acima vimos alguns exemplos clássicos de espaços vetoriais com as operações usuais, entretanto existem inúmeros outros espaços vetoriais que são munidos das mais diversas operações. Esse primeiro contato com espaços vetoriais foi totalmente intencional para que pudéssemos ir nos familiarizando, a fim de que a próxima definição pudesse ser agregada

ao nosso estudo.

2.2 Espaços vetoriais normados

Denomina-se um espaço normado o seguinte par $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$, onde \mathcal{V} é um espaço vetorial sobre um corpo \mathbb{R} ou \mathbb{C} e $\|\cdot\|$ é a função norma:

$$\|\cdot\| : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\},$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

- 1) $\|x\| \geq 0$,
- 2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- 3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
- 4) (Desigualdade triangular:) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Definição 2.3 (*Espaço de Banach*) Um espaço normado \mathcal{V} é chamado de espaço de Banach se toda sequência de Cauchy em \mathcal{V} converge para um elemento de \mathcal{V} .

Vejamos abaixo alguns exemplos de espaços vetoriais normados.

Exemplo 2.5 *O espaço vetorial \mathbb{R}^n munido da norma euclidiana:*

$$\|x\| := \left(\sum_{k=1}^n (x_k)^2 \right)^{1/2},$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, é um espaço vetorial normado.

Solução. Para mostrarmos isso, é necessário que verifiquemos as condições propostas na definição.

Notemos inicialmente que $\|x\| \geq 0$, pois é a raiz quadrada da soma de termos não negativos, que justifica (1).

Agora, se $x = 0$, então $x_i = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$, e segue imediatamente da definição que $\|x\| = 0$. Por outro lado, segue que

$$\|x\| = 0 \Rightarrow 0 = \left(\sum_{k=1}^n (x_k)^2 \right)^{1/2} \geq (x_i^2)^{1/2} = |x_i|, \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow x_i = 0, \forall i = 1, \dots, n,$$

logo $x = 0$; o que prova (2).

Note que (3) também é válida pois:

$$\begin{aligned}\|\lambda x\| &= \left(\sum_{k=1}^n (\lambda x_k)^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^n \lambda^2 (x_k)^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\lambda^2 \sum_{k=1}^n (x_k)^2 \right)^{1/2} = |\lambda| \left(\sum_{k=1}^n (x_k)^2 \right)^{1/2} \\ &= |\lambda| \|x\|.\end{aligned}$$

E por fim (4) também será válida pois:

$$\begin{aligned}\|x + y\| &= \left(\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{k=1}^n (x_k)^2 + 2(x_k)(y_k) + (y_k)^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{k=1}^n (x_k)^2 + \sum_{k=1}^n 2(x_k)(y_k) + \sum_{k=1}^n (y_k)^2 \right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Perceba que:

$$\sum_{k=1}^n 2(x_k)(y_k),$$

é exatamente o produto escalar entre os vetores x, y . Relembremos que nesse caso é válida a desigualdade de Cauchy-Schwarz, isto é:

$$\sum_{k=1}^n 2(x_k)(y_k) = 2(x \cdot y) \leq 2\|x\|\|y\|.$$

Dessa forma, segue que:

$$\left(\sum_{k=1}^n (x_k)^2 + \sum_{k=1}^n 2(x_k)(y_k) + \sum_{k=1}^n (y_k)^2 \right)^{1/2},$$

e portanto:

$$\begin{aligned}\|x + y\| &\leq \left(\sum_{k=1}^n (x_k)^2 + 2\|x\|\|y\| + \sum_{k=1}^n (y_k)^2 \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{\|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2} \\ &= \sqrt{(\|x\| + \|y\|)^2} = \|\|x\| + \|y\|\| = \|x\| + \|y\|.\end{aligned}$$

□

Exemplo 2.6 O espaço vetorial de todos os polinômios com coeficientes reais $P(\mathbb{R})$ da forma, $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, onde $a_i \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ é um espaço vetorial normado, munido da norma

$$\|P\| = \sum_{i=0}^n |a_i|.$$

Solução. De fato, vejamos que (1) é verdadeira, pois $\|P\|$ é a soma de termos não negativos.

Tomando $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$, temos $a_i = 0$, para todo $i = 0, \dots, n$, o que implica que $\|P\| = \sum_{i=0}^n |a_i| = 0$. Por outro lado, temos que

$$\|P\| = 0 \Rightarrow 0 = \sum_{i=0}^n |a_i| \geq |a_k|, \forall k = 0, \dots, n \Rightarrow a_k = 0, \forall k = 0, \dots, n,$$

donde $P(x) = 0$. Assim, concluímos a prova de (2).

A propriedade (3) também é satisfeita, vejamos:

$$\|\lambda P\| = \sum_{i=0}^n |\lambda a_i| = \sum_{i=0}^n |\lambda| |a_i| = |\lambda| \sum_{i=0}^n |a_i| = |\lambda| \|P\|.$$

Finalmente, verificaremos que a propriedade (4) também é satisfeita. Consideremos $P = \sum_{i=0}^m a_i x^i$ e $Q = \sum_{i=0}^n b_i x^i$, sem perda de generalidade consideraremos $m \leq n$. Tomando $a_i = 0$, se $i = m + 1, \dots, n$, podemos reescrever P na forma $\sum_{i=0}^n a_i x^i$. Assim, tem-se

$$\begin{aligned} \|P + Q\| &= \left\| \sum_{i=0}^n a_i x^i + \sum_{i=0}^n b_i x^i \right\| = \left\| \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) x^i \right\| \\ &= \sum_{i=0}^n |a_i + b_i| \leq \sum_{i=0}^n (|a_i| + |b_i|) \leq \sum_{i=0}^n |a_i| + \sum_{i=0}^n |b_i| \\ &= \left(\sum_{i=0}^m |a_i| + \underbrace{\sum_{i=m+1}^n |a_i|}_{=0} \right) + \sum_{i=0}^n |b_i| = \sum_{i=0}^m |a_i| + \sum_{i=0}^n |b_i| \\ &= \|P\| + \|Q\|. \end{aligned}$$

□

Exemplo 2.7 O espaço vetorial das funções reais contínuas, definidas num intervalo

fechado, denotado por $\mathcal{C}([a, b])$, é um espaço vetorial normado, munido da norma:

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Solução. De fato, vejamos que (1) é verdadeira, pois $|f(x)| \geq 0$ para todo x , independente do intervalo $[a, b]$, ou seja:

$$\int_a^b |f(x)| dx \geq 0.$$

Agora, provaremos que a propriedade (2) também é válida. Supondo que $f(x) = 0$, para todo $x \in [a, b]$, temos $|f(x)| = 0$ e portanto

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b |0| dx = 0.$$

Por outro lado, tomando $\|f\| = 0$ e, supondo por absurdo que existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) \neq 0$, temos pelo teorema de conservação de sinal para funções contínuas que existe $[c, d] \subset [a, b]$ tal que $x_0 \in [c, d]$ e $|f(x)| \geq |f(x_0)|$, para todo $x \in [c, d]$. Daí, segue:

$$0 = \|f\| = \int_a^b |f(x)| dx \geq \int_c^d |f(x)| dx \geq \int_c^d |f(x_0)| dx = |f(x_0)|(d - c) > 0,$$

o que é absurdo. Logo, $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$.

Perceba que (3) também é satisfeita:

$$\|\lambda f\| = \int_a^b |\lambda f(x)| dx = \int_a^b |\lambda| |f(x)| dx = |\lambda| \int_a^b |f(x)| dx = \lambda \|f\|.$$

Por fim, vejamos que (4) é satisfeita:

$$\begin{aligned} \|f + g\| &= \int_a^b |(f + g)(x)| dx = \int_a^b |f(x) + g(x)| dx \\ &\leq \int_a^b |f(x)| + |g(x)| dx = \int_a^b |f(x)| dx + \int_a^b |g(x)| dx \\ &= \|f\| + \|g\|. \end{aligned}$$

□

Exemplo 2.8 O espaço $C^1[a, b]$ das funções que possuem derivadas parciais de primeira ordem contínuas, munido da norma:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{C^1} : C^1[a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ \Psi &\mapsto \|\Psi\|_{C^1} := \sup_{t \in [a, b]} |\Psi(t)| + \sup_{t \in [a, b]} |\Psi'(t)|, \end{aligned}$$

é um espaço de Banach.

Solução. A seguir verificaremos apenas que $C^1[a, b]$ é um espaço normado, e indicamos [7, Exercício 1.9] para a conclusão de que é um espaço de Banach. Como Ψ e Ψ' são contínuas no intervalo fechado $[a, b]$, e portanto limitadas ([2, Teorema de Weierstrass]), e sendo \mathbb{R} um espaço completo, segue que $\|\Psi\|_{C^1}$ está bem definida. Verifiquemos que (1) é satisfeita. De fato, para qualquer $t \in [a, b]$ teremos que $|\Psi(t)|$ e $|\Psi'(t)|$ são não negativos, logo $\|\Psi\|_{C^1} = \sup_{t \in [a, b]} |\Psi(t)| + \sup_{t \in [a, b]} |\Psi'(t)| \geq 0$.

Veja que (2) também é válida. De fato, consideremos $\|\Psi\|_{C^1} = 0$, o que implica $0 \leq |\Psi(t)| \leq \sup_{t \in [a, b]} |\Psi(t)| + \sup_{t \in [a, b]} |\Psi'(t)| = \|\Psi\|_{C^1} = 0$, donde $\Psi(t) = 0$, para todo $t \in [a, b]$. Por outro lado, se $\Psi(t) = 0$, para todo $t \in [a, b]$, segue que $\Psi'(t) = 0$, para todo $t \in [a, b]$, donde obtemos que $\|\Psi\|_{C^1} = \sup_{t \in [a, b]} |\Psi(t)| + \sup_{t \in [a, b]} |\Psi'(t)| = 0$.

Prosseguindo, observe que (3) é verdadeiro, pois:

$$\begin{aligned} \|\lambda\Psi\|_{C^1} &= \sup_{t \in [a, b]} |\lambda\Psi(t)| + \sup_{t \in [a, b]} |\lambda\Psi'(t)| \\ &= \sup_{t \in [a, b]} |\lambda| |\Psi(t)| + \sup_{t \in [a, b]} |\lambda| |\Psi'(t)| \\ &\stackrel{\text{Teorema 6.1}}{=} |\lambda| (\sup_{t \in [a, b]} |\Psi(t)| + \sup_{t \in [a, b]} |\Psi'(t)|) \\ &= |\lambda| \|\Psi\|_{C^1}. \end{aligned}$$

Por fim, confirmemos a veracidade de (4). Considere $\Psi, \Phi \in C^1[a, b]$:

$$\begin{aligned} \|\Psi + \Phi\|_{C^1} &= \sup_{t \in [a, b]} \underbrace{|\Psi(t) + \Phi(t)|}_{\leq |\Psi| + |\Phi|} + \sup_{t \in [a, b]} \underbrace{|\Psi'(t) + \Phi'(t)|}_{\leq |\Psi'| + |\Phi'|} \\ &\stackrel{\text{Teorema 6.2}}{\leq} \sup_{t \in [a, b]} (|\Psi(t)| + |\Phi(t)|) + \sup_{t \in [a, b]} (|\Psi'(t)| + |\Phi'(t)|) \\ &\stackrel{\text{Teorema 6.1}}{\leq} \sup_{t \in [a, b]} |\Psi(t)| + \sup_{t \in [a, b]} |\Phi(t)| + \sup_{t \in [a, b]} |\Psi'(t)| + \sup_{t \in [a, b]} |\Phi'(t)| \\ &= \|\Psi\|_{C^1} + \|\Phi\|_{C^1}. \end{aligned}$$

Consequente, como todas as propriedades foram verificadas, segue que $C^1[a, b]$ é um espaço vetorial normado. \square

Exemplo 2.9 (Veja [7, Teorema 4.5, página 22]) *Sejam X e Y espaços vetoriais de Banach. O conjunto dos funcionais lineares contínuos de X em Y , denotado por $\mathcal{L}(X, Y)$, é um espaço de Banach munido da norma*

$$\|\Psi\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\substack{f \in X \\ \|f\|_X = 1}} \|\Psi(f)\|_Y.$$

Em particular, tomando $X = C^1[a, b]$ e $Y = \mathbb{R}$, temos o espaço de Banach $\mathcal{L}(C^1[a, b], \mathbb{R})$

munido da norma

$$\|\Psi\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\substack{f \in C^1[a,b] \\ \|f\|_{C^1} = 1}} |\Psi(f)|.$$

2.2.1 Métrica induzida

Todo espaço normado é em particular um espaço métrico (veja [6]), com a seguinte métrica induzida pela norma:

$$\begin{aligned} d : \mathcal{V} \times \mathcal{V} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) = \|x - y\|. \end{aligned}$$

Para verificar isso, é necessário que mostremos que as seguintes propriedades são válidas:

- $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in \mathcal{V}$.

De fato, se $x, y \in \mathcal{V}$, segue que $x - y \in \mathcal{V}$ e, portanto, $d(x, y) = \|(x - y)\| \stackrel{(1)}{\geq} 0$.

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

De fato, temos

$$d(x, y) = \|x - y\| = 0 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} x - y = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

- $d(x, y) = d(y, x)$.

Note que:

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \|x - y\| = \|-(y - x)\| = \|(-1)(y - x)\| \\ &\stackrel{(3)}{=} |-1| \|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x). \end{aligned}$$

- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Veja que:

$$\begin{aligned} d(x, z) &\stackrel{def.}{=} \|x - z\| \\ &\stackrel{-y+y=0}{=} \|x - y + y - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \\ &\stackrel{(4)}{\leq} \|(x - y)\| + \|(y - z)\| \\ &\stackrel{def.}{=} d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

Portanto, a distância $d(x, y) = \|(x - y)\|$ é uma métrica em \mathcal{V} .

Por exemplo, considerando o espaço vetorial normado \mathbb{R}^n (ver Exemplo 2.5) existem outras normas e métricas que são aplicadas conforme sua prática e conveniência, ou seja, desde que esteja bem definida e funcione conforme se deseja, é possível manipular e operar esses objetos. Há algumas normas clássicas que não podemos deixar de conhecer,

bem como as respectivas métricas provenientes delas, essas, por sua vez, são facilmente encontradas nas literaturas matemáticas, como ([6, Capítulo 1, Exemplo 4]):

1) (Norma Euclidiana)

$$\|x\| := \left(\sum_{k=1}^n (x_k)^2 \right)^{1/2}.$$

2) (Norma da soma)

$$\|x\| := \sum_{k=1}^n |x_k|.$$

3) (Norma do máximo)

$$\|x\| := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

1) (Métrica Euclidiana)

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}.$$

2) (Métrica da soma)

$$d_s(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

3) (Métrica da máximo)

$$d_m(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

As métricas acima, apesar de serem calculadas de formas diferentes, possuem certa relação entre si. Nesse sentido diz-se que essas normas ou métricas são equivalentes.

Proposição 2.1 (*Métricas Equivalentes*) (Veja [6, Proposição 1, Capítulo 1]) *Sejam d , d' e d'' as respectivas métricas, euclidiana, soma e a do máximo. Então, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se:*

$$d_{max}(x, y) \leq d_e(x, y) \leq d_s(x, y) \leq n \cdot d_{max}(x, y).$$

Definição 2.4 (*Bola Aberta*) *A bola aberta de centro a e raio r é o conjunto $B(a; r)$ dos pontos de M (espaço métrico), cuja a distância ao ponto a é menor do que r . Ou seja,*

$$B = \{x \in M \mid d(x, a) < r\}.$$

Definição 2.5 (*Bola Fechada*) *A bola fechada de centro a e raio r é o conjunto $B[a; r]$, formado pelos pontos de M (espaço métrico) que estão a uma distância menor do que ou igual a r do ponto a . Ou seja,*

$$B = \{x \in M \mid d(x, a) \leq r\}.$$

Com base nas métricas é possível pensar em suas representações gráficas. Nesse momento visualizaremos o conceito de bolas, tanto abertas como fechadas em \mathbb{R}^2 , como veremos nas Figuras 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6.

Bola na métrica Euclidiana

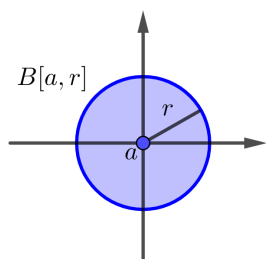


Figura 2.1: Bola fechada euclidiana.

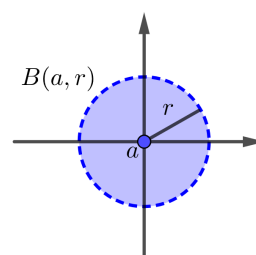


Figura 2.2: Bola aberta euclidiana.

Bola na métrica da soma

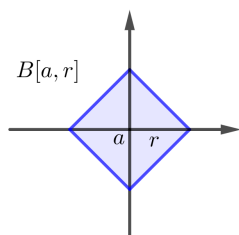


Figura 2.3: Bola fechada - métrica da soma.

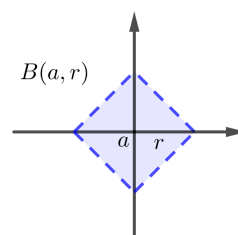


Figura 2.4: Bola aberta - métrica da soma.

Bola na métrica do máximo

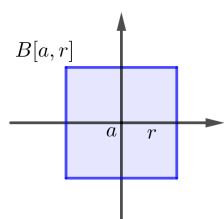


Figura 2.5: Bola fechada - métrica do máximo.

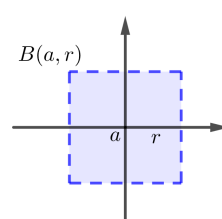


Figura 2.6: Bola aberta - métrica do máximo.

Funcionais

O conceito de função é amplamente utilizado em matemática. No capítulo anterior, por exemplo, vimos algumas funções que fazem regras de associações entre conjuntos, sejam eles quaisquer. A dinâmica se baseava em deslocar um elemento do conjunto de saída (domínio) até um único elemento no conjunto de chegada (contradomínio).

Pois bem, um funcional não é nada mais nada menos que uma função, entretanto a diferença é que os elementos presentes no domínio do funcional são funções que, ao passar pelo funcional, retornam um valor numérico, ou seja, dizemos que os elementos do contradomínio, ou imagem dessa função, é um corpo de escalares. Em resumo, podemos formalizar esse conceito e reduzir à seguinte definição.

Definição 3.1 *Consideremos um espaço vetorial \mathcal{V} . Um funcional $F : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função que associa a cada $v \in \mathcal{V}$ um único número real. Além disso, é dito funcional linear quando satisfaz as seguintes condições:*

- 1) $F(u + v) = F(u) + F(v)$,
- 2) $F(\lambda v) = \lambda F(v)$, com $u, v \in \mathcal{V}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

Observação O conjunto de todos os funcionais lineares é denotado por $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathbb{R})$, e forma um espaço vetorial.

Vejam alguns exemplos de funcionais lineares:

Exemplo 3.1 *Sejam $[a, b]$ um intervalo fechado e $C([a, b])$ o espaço de todas as funções reais contínuas em $[a, b]$. Verifique que:*

$$F : \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$$
$$g \mapsto F(g) = \int_a^b g(t)dt,$$

é um funcional linear, para toda $g \in \mathcal{C}([a, b])$.

Solução. De fato, vamos nos certificar de que (1) é válida. Para isso, estaremos apoiados nas propriedades de integrais definidas:

$$F(f + g) = \int_a^b f(t) + g(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt = F(f) + F(g).$$

Note que (2) também é satisfeita:

$$F(\lambda f) = \int_a^b \lambda f(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt = \lambda F(f).$$

□

No decorrer deste capítulo, gostaríamos de derivar esses funcionais. Entretanto, diferentemente de uma função $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, o domínio de um funcional é um espaço vetorial e, portanto, é preciso que façamos uma adequação ao conceito de derivada da função.

Recordemos agora que a derivada de uma função $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{Int}(D_f)$, é calculada da seguinte forma:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

ou ainda, reescrevendo obtêm-se:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - hf'(x_0)}{h} = 0 \iff \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - hf'(x_0)}{|h|} = 0,$$

onde a variação do incremento é descrito por:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \epsilon(h),$$

e portanto:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\epsilon(h)}{|h|} = 0.$$

Em outras palavras, quando h se aproxima de zero temos que o erro, denotado por $\epsilon(h)$, é menor que o próprio incremento.

De forma análoga ao que vimos acima, existe uma definição ajustada para que possamos conceber o conceito de diferenciabilidade de uma função de duas variáveis reais.

Definição 3.2 *Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aberto de \mathbb{R}^2 , e $(x_0, y_0) \in A$. Dizemos que f é diferenciável em (x_0, y_0) se, e somente se, existirem reais a, b tais que:*

$$\lim_{\|(h, k)\| \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - ah - bk}{\|(h, k)\|} = 0.$$

Além disso, se f for diferenciável em (x_0, y_0) , então f admitirá derivadas parciais nesse ponto e a transformação linear:

$$\begin{aligned} T_{(x_0, y_0)} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (h, k) &\mapsto T_{(x_0, y_0)}(h, k) = f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k, \end{aligned}$$

será a única que satisfaz a seguinte expressão:

$$\lim_{\|(h,k)\| \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{\|(h, k)\|} = 0,$$

com:

$$\lim_{\|(h,k)\| \rightarrow 0} \frac{\epsilon(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0, \quad (3.1)$$

onde:

$$\epsilon(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k.$$

Observações.

- 1) A transformação linear $T_{(x_0, y_0)}(h, k)$ é chamada de diferencial da função f no ponto (x_0, y_0) . Usualmente, fazemos a identificação $h = dx$, $k = dy$ e

$$df_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0).dx + f_y(x_0, y_0).dy.$$

- 2) Recordemos também que a existência das derivadas parciais não garante que a função seja diferenciável no ponto (x_0, y_0) , nem mesmo contínua nesse ponto. Por outro lado, sabemos que para f ser diferenciável no ponto (x_0, y_0) , é necessário que existam as derivadas parciais no ponto (x_0, y_0) e o limite dado em (3.1) deve ser válido. Para mais detalhes, veja ([3, Corolário, página 256]).
- 3) Além disso, recorde que para que os limites nos espaços Euclidianos estejam bem definidos é essencial que esses espaços sejam completos, ou seja, sejam espaços de Banach. Assim, para generalizarmos o conceito de diferenciabilidade para funcionais, trabalharemos em espaços de Banach, conforme mencionada na Definição 2.3.

Essa mesma ideia vista acima será replicada para diferenciabilidade de um funcional definido em um espaço de Banach.

Definição 3.3 *Sejam E espaço de Banach e $U \subset E$ um subconjunto aberto. O funcional $\psi : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ possui derivada de Gâteaux em $x_0 \in U$ na direção de $h \in E$, se existe o limite:*

$$\frac{\partial \psi}{\partial h}(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi(x_0 + th) - \psi(x_0)}{t}.$$

Além disso, se, para todo $h \in E$, existir a derivada de Gâteaux em x_0 , na direção de h , dizemos simplesmente que ψ é Gâteaux diferenciável em x_0 , e denotamos a derivada de Gâteaux por $\nabla \psi(x_0)$, ou seja

$$\nabla \psi(x_0)(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi(x_0 + th) - \psi(x_0)}{t}, \forall h \in E.$$

Naturalmente, podemos nos indagar se o fato do funcional ψ ser Gâteaux diferenciável implicará em diferenciabilidade. Pois bem, a resposta é não, vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 3.2 Consideremos a função

$$\psi(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y}{x^6 + y^3} & , \text{ se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & , \text{ se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Mostremos que ψ é Gâteaux diferenciável, mas não é contínua em $(0, 0)$.

Solução. Primeiro, verifiquemos que ψ é Gâteaux diferenciável em $x_0 = (0, 0)$. Consideremos $h = (m, n) \in \mathbb{R}^2$.

No caso $h = (m, n)$ com $n \neq 0$, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial h}(x_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi(tm, tn) - \psi(0, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(tm)^4 (tn)}{(tm)^6 + (tn)^3} \cdot \frac{1}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^5 m^4 n}{t^7 m^6 + t^4 n^3} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} m^4 n \cdot \frac{t}{t^3 m^6 + n^3} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $h = (m, 0)$, segue que $\psi(tm, 0) - \psi(0, 0) = 0$, e portanto

$$\frac{\partial \psi}{\partial h}(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi(tm, 0) - \psi(0, 0)}{t} = 0.$$

Assim, concluímos que ψ é Gâteaux diferenciável em x_0 .

Mostremos agora que ψ não é contínua em $x_0 = (0, 0)$. Considere a curva $\delta(t) = (\sqrt{t}, t)$, logo:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \psi(\delta(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{t})^4 t}{(\sqrt{t})^6 + t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3}{2t^3} = \frac{1}{2} \neq 0 = \psi(0, 0),$$

ou seja, ψ não é contínua em $(0, 0)$. □

Dito isto, a seguir apresentaremos uma definição de diferenciabilidade de funcionais mais ampla que a diferenciabilidade de Gâteaux.

Definição 3.4 Sejam E espaço de Banach e $U \subset E$ um conjunto aberto e $\psi : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional. Dizemos que ψ é Fréchet diferenciável em $x_0 \in U$, se existe $d\psi_{x_0} \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ tal que, para todo $h \in E$ suficientemente próximo de 0_E , temos

$$\psi(x_0 + h) = \psi(x_0) + d\psi_{x_0}(h) + \epsilon(h),$$

com

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\epsilon(h)}{\|h\|_E} = 0.$$

Além do mais, se ψ é Fréchet diferenciável em x_0 , para todo $x_0 \in U$, dizemos simplesmente que ψ é Fréchet diferenciável.

A seguir definiremos o funcional que utilizaremos no decorrer do trabalho.

Definição 3.5 Considere o espaço normado $C^1[x_0, x_1]$ munido da norma

$$\|y\|_{C^1} = \sup_{s \in [x_0, x_1]} |y(s)| + \sup_{s \in [x_0, x_1]} |y'(s)|.$$

Definimos o funcional $\Psi : C^1[x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\Psi(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(s, y(s), y'(s)) ds,$$

sendo F uma função de três variáveis reais a valores reais de classe C^1 .

Teorema 3.1 (Ver [1, Teorema 7.5]) Sejam E um espaço de Banach, $U \subset E$ aberto, $h_0 \in U$ e $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que o $\nabla\psi(h)$ existe para todo h em uma vizinhança de h_0 e é contínuo em h_0 . Então, $d\psi(h_0) = \nabla\psi(h_0)$, ou seja, a derivada de Fréchet em h_0 é igual a derivada de Gâteaux em h_0 .

Teorema 3.2 A derivada de Fréchet de Ψ em $y \in C^1[x_0, x_1]$ (ver Definição 3.5) é a transformação linear contínua $d\Psi(y) : C^1[x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d\Psi(y)(h) = \int_{x_0}^{x_1} F_y(s, y(s), y'(s)) \cdot h(s) + F_{y'}(s, y(s), y'(s)) \cdot h'(s) ds.$$

Demonstração. Veja que, pelo Teorema 3.1, basta mostrarmos que Ψ é Gâteaux diferenciável em y e que a derivada de Gâteaux é contínua em y .

Afirmiação 1. Ψ é Gâteaux diferenciável em y , e mais

$$\nabla\Psi(y)(h) = \int_{x_0}^{x_1} F_y(s, y(s), y'(s)) \cdot h(s) + F_{y'}(s, y(s), y'(s)) \cdot h'(s) ds,$$

para toda $h \in C^1[x_0, x_1]$.

De fato. Seja $\epsilon > 0$ dado. Aplicando o Teorema do Valor Médio (veja [5, Teorema do Valor Médio]), considerando as seguintes ternas $a = (s, y(s), y'(s))$ e $v = (0, th(s), th'(s))$, temos que existe $\theta \in (0, 1)$ tal que:

$$\begin{aligned} & F(s, y(s) + th(s), y'(s) + th'(s)) - F(s, y(s), y'(s)) \\ &= \nabla F(s, y(s) + \theta th(s), y'(s) + \theta th'(s)) \cdot (0, th(s), th'(s)) \\ &= [F_y(s, y(s) + \theta th(s), y'(s) + \theta th'(s)) \cdot h(s) + F_{y'}(s, y(s) + \theta th(s), y'(s) + \theta th'(s)) \cdot h'(s)] t. \end{aligned}$$

Daí, temos que:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\Psi(y + th) - \Psi(y)}{t} - \int_{x_0}^{x_1} F_y(s, y(s), y'(s)).h(s) + F_{y'}(s, y(s), y'(s)).h'(s) ds \right| \\
&= \left| \int_{x_0}^{x_1} \frac{F(s, y(s) + th(s), y'(s) + th'(s)) - F(s, y(s), y'(s))}{t} ds \right. \\
&\quad \left. - \int_{x_0}^{x_1} F_y(s, y(s), y'(s)).h(s) + F_{y'}(s, y(s), y'(s)).h'(s) ds \right| \\
&= \left| \int_{x_0}^{x_1} \frac{[F_y(s, y(s) + \theta th(s), y'(s) + \theta th'(s)).h(s) + F_{y'}(s, y(s) + \theta th(s), y'(s) + \theta th'(s)).h'(s)]t}{t} ds \right. \\
&\quad \left. - \int_{x_0}^{x_1} F_y(s, y(s), y'(s)).h(s) + F_{y'}(s, y(s), y'(s)).h'(s) ds \right| \\
&= \left| \int_{x_0}^{x_1} [F_y(s, y(s) + \theta th(s), y'(s) + \theta th'(s)).h(s) + F_{y'}(s, y(s) + \theta th(s), y'(s) + \theta th'(s)).h'(s)] ds \right. \\
&\quad \left. - \int_{x_0}^{x_1} F_y(s, y(s), y'(s)).h(s) + F_{y'}(s, y(s), y'(s)).h'(s) ds \right| \\
&= \left| \int_{x_0}^{x_1} [F_y(s, y(s) + \theta th(s), y'(s) + \theta th'(s)) - F_y(s, y(s), y'(s))] .h(s) \right. \\
&\quad \left. + [F_{y'}(s, y(s) + \theta th(s), y'(s) + \theta th'(s)) - F_{y'}(s, y(s), y'(s))] .h'(s) ds \right| \\
&\leq \int_{x_0}^{x_1} |F_y(s, y(s) + \theta th(s), y'(s) + \theta th'(s)).h(s) - F_y(s, y(s), y'(s)).h(s)| \\
&\quad + |F_{y'}(s, y(s) + \theta th(s), y'(s) + \theta th'(s)).h'(s) - F_{y'}(s, y(s), y'(s)).h'(s)| ds.
\end{aligned}$$

Temos que $y, h \in C^1[x_0, x_1]$, F é de classe C^1 e $[-1, 1] \times [x_0, x_1]$ é compacto. Logo, $g_1, g_2 : [-1, 1] \times [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$, dadas por $g_1(t, s) = F_y(s, y(s) + \theta th(s), y'(s) + \theta th'(s))h'(s)$ e $g_2(s, t) = F_{y'}(s, y(s) + \theta th(s), y'(s) + \theta th'(s))h'(s)$, são uniformemente contínuas (ver [5, Teorema 21, página 46]). Assim, existe $\delta > 0$, dependendo apenas de ϵ , tal que para $|(t, s) - (0, s)| = |t| < \delta$ tem-se

$$|[F_y(s, y(s) + \theta th(s), y'(s) + \theta th'(s)) - F_y(s, y(s), y'(s))]h(s)| < \frac{\epsilon}{2(x_1 - x_0)}$$

e

$$|[F_{y'}(s, y(s) + \theta th(s), y'(s) + \theta th'(s)) - F_{y'}(s, y(s), y'(s))]h'(s)| < \frac{\epsilon}{2(x_1 - x_0)}.$$

Assim, substituindo acima obtemos

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\Psi(y + th) - \Psi(y)}{t} - \int_{x_0}^{x_1} F_y(s, y(s), y'(s))h(s) + F_{y'}(s, y(s), y'(s))h'(s)ds \right| \\
& \leq \int_{x_0}^{x_1} |[F_y(s, y(s) + \theta th(s), y'(s) + \theta th'(s)) - F_y(s, y(s), y'(s))]| \cdot |h(s)| \\
& \quad + |[F_{y'}(s, y(s) + \theta th(s), y'(s) + \theta th'(s)) - F_{y'}(s, y(s), y'(s))]| \cdot |h'(s)| ds \\
& < \int_{x_0}^{x_1} \frac{\epsilon}{(x_1 - x_0)} ds = \epsilon,
\end{aligned}$$

o que prova a *Afirmação 1*.

Afirmação 2. A aplicação $\nabla\Psi : C^1[x_0, x_1] \rightarrow \mathcal{L}(C^1[x_0, x_1], \mathbb{R})$, que associa cada $y \in C^1[x_0, x_1]$ ao funcional linear $\nabla\Psi(y)$, é contínua em y .

De fato. Seja $\epsilon > 0$ dado. Sejam $y, u \in C^1[x_0, x_1]$. Queremos mostrar que existe $\delta > 0$ tal que, para todo $\|u\| < \delta$,

$$\|\nabla\Psi(y + u) - \nabla\Psi(y)\|_{\mathcal{L}(C^1[x_0, x_1], \mathbb{R})} = \sup_{\substack{h \in C^1[x_0, x_1] \\ \|h\|_{C^1} = 1}} |\nabla\Psi(y + u)(h) - \nabla\Psi(y)(h)| < \epsilon.$$

Note que:

$$\begin{aligned}
& |\nabla\Psi(y + u)(h) - \nabla\Psi(y)(h)| \\
& = \left| \int_{x_0}^{x_1} F_y(s, y(s) + u(s), y'(s) + u'(s)) \cdot h(s) + F_{y'}(s, y(s) + u(s), y'(s) + u'(s)) \cdot h'(s) ds \right. \\
& \quad \left. - \int_{x_0}^{x_1} F_y(s, y(s), y'(s)) \cdot h(s) + F_{y'}(s, y(s), y'(s)) \cdot h'(s) ds \right| \\
& = \left| \int_{x_0}^{x_1} [F_y(s, y(s) + u(s), y'(s) + u'(s)) - F_y(s, y(s), y'(s))] \cdot h(s) ds \right. \\
& \quad \left. - \int_{x_0}^{x_1} [F_{y'}(s, y(s) + u(s), y'(s) + u'(s)) - F_{y'}(s, y(s), y'(s))] \cdot h'(s) ds \right| \\
& \leq \int_{x_0}^{x_1} |[F_y(s, y(s) + u(s), y'(s) + u'(s)) - F_y(s, y(s), y'(s))]| \cdot |h(s)| ds \\
& \quad - \int_{x_0}^{x_1} |[F_{y'}(s, y(s) + u(s), y'(s) + u'(s)) - F_{y'}(s, y(s), y'(s))]| \cdot |h'(s)| ds.
\end{aligned}$$

Observe que, para todo $s \in [x_0, x_1]$,

$$\begin{aligned}
\|(s, y(s) + u(s), y'(s) + u'(s)) - (s, y(s), y'(s))\|_{\mathbb{R}^3} &= \|(0, u(s), u'(s))\|_{\mathbb{R}^3} \\
&\leq \|u\|_{C^1}.
\end{aligned}$$

Considerando $\|u\|_{C^1} \leq 1$, temos que:

$$K = [x_0, x_1] \times [-a, a] \times [-a, a],$$

sendo $a = \|y\|_{C^1} + 1$, é um compacto em \mathbb{R}^3 . Além disso, F é de classe C^1 , o que implica que F_y e $F_{y'}$ são uniformemente contínuas em K ([5, Teorema 21, página 46]). Portanto, existe $\delta > 0$ tal que para $\|u\|_{C^1} < \delta$ tem-se

$$|F_y(s, y(s) + u(s), y'(s) + u'(s)) - F_y(s, y(s), y'(s))| < \frac{\epsilon}{2(x_1 - x_0)}$$

e

$$|F_{y'}(s, y(s) + u(s), y'(s) + u'(s)) - F_{y'}(s, y(s), y'(s))| < \frac{\epsilon}{2(x_1 - x_0)}.$$

Assim, usando que $\|h\|_{C^1} = 1$ e acima, obtemos:

$$\begin{aligned} & |\nabla\Psi(y + u)(h) - \nabla\Psi(y)(h)| \\ &= \left| \int_{x_0}^{x_1} [F_y(s, y(s) + u(s), y'(s) + u'(s)) - F_y(s, y(s), y'(s))] \cdot h(s) ds \right. \\ &\quad \left. - \int_{x_0}^{x_1} [F_{y'}(s, y(s) + u(s), y'(s) + u'(s)) - F_{y'}(s, y(s), y'(s))] \cdot h'(s) ds \right| \\ &\leq \int_{x_0}^{x_1} |F_y(s, y(s) + u(s), y'(s) + u'(s)) - F_y(s, y(s), y'(s))| \cdot \underbrace{|h(s)|}_{\leq 1} ds \\ &\quad + \int_{x_0}^{x_1} |F_{y'}(s, y(s) + u(s), y'(s) + u'(s)) - F_{y'}(s, y(s), y'(s))| \cdot \underbrace{|h'(s)|}_{\leq 1} ds \\ &\leq \int_{x_0}^{x_1} |F_y(s, y(s) + u(s), y'(s) + u'(s)) - F_y(s, y(s), y'(s))| ds \\ &\quad + \int_{x_0}^{x_1} |F_{y'}(s, y(s) + u(s), y'(s) + u'(s)) - F_{y'}(s, y(s), y'(s))| ds < \int_{x_0}^{x_1} \frac{\epsilon}{(x_1 - x_0)} ds = \epsilon, \end{aligned}$$

o que prova a *Afirmção 2*.

Portanto, provadas as Afirmções 1 e 2, segue da Proposição 7.5 que $d\Psi(y) = \nabla\Psi(y)$. \square

Da mesma maneira com que foi desenvolvida a ideia de diferenciabilidade em espaços de Banach, é relevante que procuremos por valores críticos do funcional, isto é, pontos de máximo e mínimo, onde conseqüentemente a derivada de Fréchet se anule.

Definição 3.6 *Seja E um espaço de Banach. Dizemos que $y_0 \in E$ é um ponto de máximo local do funcional $\Psi : E \rightarrow \mathbb{R}$ quando existe uma vizinhança $V \subset E$ de y_0 tal que*

$$\Psi(y) \leq \Psi(y_0), \forall y \in V.$$

Além disso, quando y_0 é ponto de máximo local de Ψ e também $\Psi(y) = \Psi(y_0)$, $y \in V$, somente quando $y = y_0$, dizemos que o funcional assume um máximo estrito em y_0 . Analogamente, definimos mínimo local para $\Psi(y)$. Se y_0 for um mínimo ou máximo local (ou global) de Ψ , dizemos que y_0 é um extremante de Ψ .

Teorema 3.3 *Sejam E um espaço de Banach e $U \subset E$ um aberto. Seja $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional Fréchet diferenciável em U , com derivada de Fréchet contínua em U . Se y_0 é um extremo para ψ então, $d\psi(y_0)(h) = 0$, para todo $h \in E$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, vamos supor que y_0 é um ponto de mínimo. Agora, definimos

$$f(t) := \psi(y_0 + th),$$

donde segue que:

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{\psi(y_0 + th) - \psi(y_0)}{t}.$$

Logo, como $\psi(y_0) \leq \psi(y_0 + th)$, para todo t , obtemos:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t} \geq 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(t) - f(0)}{t} \leq 0.$$

Note que Ψ é Gâteaux diferenciável em y_0 , isto é:

$$\nabla\psi(y_0)(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi(y_0 + th) - \psi(y_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = 0,$$

pois os limites laterais existem e são iguais. Portanto, pelo Teorema 3.1, $d\psi(y_0) = 0$. □

Observação 3.1 *Decorre dos Teoremas 3.2 e 3.3 que, se $y_0 \in C^1[x_0, x_1]$ for extremante do funcional Ψ (ver Definição 3.5), então*

$$d\Psi(y_0)(h) = \int_{x_0}^{x_1} F_{y_0}(s, y_0(s), y_0'(s)) \cdot h(s) + F_{y_0'}(s, y_0(s), y_0'(s)) \cdot h'(s) ds = 0,$$

para toda $h \in C^1[x_0, x_1]$.

3.1 Equação de Euler-Lagrange

Através do Teorema 3.3 desenvolvido acima é possível concluir que uma condição necessária para que o funcional Ψ (ver Definição 3.5) possua valores de extremos é

justamente que a derivada de Fréchet se anule, isto é, $d\Psi(y_0)(h) = 0$. A seguir mostraremos um lema que será essencial para obtermos a equação de Euler-Lagrange, a saber,

$$F_y - \frac{d}{ds}F_{y'} = 0. \quad (3.2)$$

Lema 3.1 (*Lema fundamental do cálculo variacional*) *Seja $E(s)$ uma função contínua num intervalo $[x_0, x_1]$. Se*

$$\int_{x_0}^{x_1} E(s)\mu(s)ds = 0,$$

para qualquer função arbitrária $\mu : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $[x_0, x_1]$, com $\mu(x_0) = \mu(x_1) = 0$, então $E(s) = 0$, para qualquer valor de $s \in [x_0, x_1]$.

Demonstração. Suponha que exista um $s_1 \in [x_0, x_1]$ tal que $E(s_1) \neq 0$. Tomemos, sem perda de generalidade, $E(s_1) > 0$. Como por hipótese E é contínua, podemos encontrar um subintervalo $] \eta_1, \eta_2[\subset [x_0, x_1]$, onde $E(s) > 0$ para $s \in] \eta_1, \eta_2[$. Considere:

$$\mu(s) = \begin{cases} 0, & \text{se } x_0 \leq s \leq \eta_1, \\ (s - \eta_1)^2(s - \eta_2)^2, & \text{se } \eta_1 \leq s \leq \eta_2, \\ 0, & \text{se } \eta_2 \leq s \leq x_1. \end{cases}$$

Perceba que a função μ é contínua em $[x_0, x_1]$ e $\mu(x_0) = \mu(x_1) = 0$. Em particular, para s no intervalo $] \eta_1, \eta_2[$, temos que $\mu(s) > 0$. Veja também que $E(s) > 0$ para $s \in] \eta_1, \eta_2[$, sendo assim:

$$\int_{x_0}^{x_1} E(s)\mu(s)ds = \int_{\eta_1}^{\eta_2} E(s)[(s - \eta_1)^2(s - \eta_2)^2]ds > 0.$$

Mas, note que por hipótese $\int_{x_0}^{x_1} E(s)\mu(s)ds = 0$ para qualquer função μ contínua em $[x_0, x_1]$, com $\mu(x_0) = \mu(x_1) = 0$. Logo, obtemos uma contradição e, portanto, $E(s) = 0$ para todo $s \in [x_0, x_1]$. □

Teorema 3.4 *Seja F uma função de três variáveis reais a valores reais e classe C^2 . Considere $\Psi : C^1[x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ dado por*

$$\Psi(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(s, y(s), y'(s))ds.$$

Suponha que

$$d\Psi(y)(\mu) = \int_{x_0}^{x_1} F_y(s, y(s), y'(s))\cdot\mu(s) + F_{y'}(s, y(s), y'(s))\cdot\mu'(s)ds = 0,$$

para toda função $\mu(s)$ de classe C^1 em $[x_0, x_1]$, com $\mu(x_0) = \mu(x_1) = 0$. Então, tem-se

$$F_y - \frac{d}{ds}F_{y'} = 0 \text{ em } [x_0, x_1].$$

Demonstração. Como F é de classe C^2 e μ é de classe C^1 , temos que $F_y(s, y(s), y'(s)) \cdot \mu(s)$ e $F_{y'}(s, y(s), y'(s)) \cdot \mu'(s)$ são funções contínuas em $[x_0, x_1]$. Além disso, temos

$$\int_{x_0}^{x_1} F_y(s, y(s), y'(s)) \cdot \mu(s) ds + \int_{x_0}^{x_1} F_{y'}(s, y(s), y'(s)) \cdot \mu'(s) ds = 0. \quad (3.3)$$

Desenvolvendo integração por partes na segunda integral (com $u = F_{y'}(s, y(s), y'(s))$ e $v' = \mu'(s)$), obtém-se:

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y'}(s, y(s), y'(s)) \cdot \mu'(s) ds = \underbrace{F_{y'}(s, y(s), y'(s)) \cdot \mu(s) \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \mu(s) (F_{y'})' ds}_{uv - \int v du}, \quad (3.4)$$

onde:

$$F_{y'}(s, y(s), y'(s)) \cdot \mu(s) \Big|_{x_0}^{x_1} = F_{y'}(s, y(x_0), y'(x_0)) \cdot \mu(x_0) - F_{y'}(s, y(x_1), y'(x_1)) \cdot \mu(x_1) = 0,$$

como já era de se esperar, pois $\mu(x_0) = \mu(x_1) = 0$. Retomando a equação (3.3) e substituindo (3.4), encontra-se:

$$\int_{x_0}^{x_1} F_y(s, y(s), y'(s)) \cdot \mu(s) ds - \int_{x_0}^{x_1} (F_{y'}(s, y(s), y'(s)))' \cdot \mu(s) ds = 0,$$

que é equivalente:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{ds} F_{y'} \right) \mu(s) ds = 0. \quad (3.5)$$

Por fim, como F é de classe C^2 e $y \in C^1[x_0, x_1]$, temos $E(s) = F_y - \frac{d}{ds} F_{y'}$ contínua em $[x_0, x_1]$. Portanto, pelo Lema 3.1, segue que

$$F_y - \frac{d}{ds} F_{y'} = 0 \text{ em } [x_0, x_1].$$

□

Em outras palavras, os candidatos a extremante do funcional são soluções da equação de Euler - Lagrange. Eventualmente podemos ter situações nas quais F não será dependente simultaneamente de $s, y(s), y'(s)$ e, portanto, é preferível que abordemos os diferentes casos possíveis que a equação de Euler pode assumir.

3.1.1 Primeiro caso: $F = F(s, y'(s))$.

Neste caso o funcional dependerá apenas de s e $y'(s)$, isto é, $F = F(s, y'(s))$ e, portanto, a equação de Euler se reduz a:

$$\frac{d}{ds}(F_{y'}(s, y'(s))) = 0.$$

Realizando a integração em ambos os lados em relação a s , temos:

$$F_{y'}(s, y'(s)) = C. \quad (3.6)$$

A seguir vejamos alguns exemplos que elucidam esse caso.

Exemplo 3.3 *Procure os candidatos a extremo do seguinte funcional:*

$$\int_0^2 (3sy'(s) + [y'(s)]^2) ds, \quad y(0) = 4, \quad y(2) = 7.$$

Solução. Veja que $F = F(s, y'(s))$ se enquadra na equação de Euler descrita em (3.6).
 Onde segue que:

$$\begin{aligned} F_{y'(s)}(s, y'(s)) = 3s + 2y'(s) &\implies 3s + 2y'(s) = C \\ &\implies y'(s) = \frac{C - 3s}{2}, \end{aligned}$$

e daí, integrando em relação a s , temos:

$$y(s) = -\frac{3}{4}s^2 + C_1s + C_2.$$

Através das condições de contorno vamos determinar as constantes C_1, C_2 , vejamos:

$$y(0) = 4 \implies 0C_1 - 3(0)^2 + C_2 = 4 \implies C_2 = 4,$$

$$y(2) = 7 \implies -3 + 2C_1 + 4 = 7 \implies C_1 = 3,$$

e, portanto, temos o seguinte candidato a extremo do funcional:

$$y(s) = -\frac{3}{4}s^2 + 3s + 4.$$

□

Exemplo 3.4 *Encontre candidatos a extremo do funcional abaixo:*

$$\int_{x_0}^{x_1} y'(1 + xy') ds.$$

Solução. Perceba que novamente temos $F = F(s, y'(s))$ e, portanto, estamos no caso

onde a equação de Euler se adequa à expressão determinada em (3.6). Daí temos:

$$\begin{aligned} F_{y'(s)}(s, y'(s)) = 1 + 2s^2[y'(s)] &\implies 1 + 2s^2[y'(s)] = C \\ &\implies y'(s) = \frac{C-1}{2s^2}, \end{aligned}$$

donde integrando em relação a s , obtemos:

$$\int_{x_0}^{x_1} y'(s) ds = \frac{C-1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{s^2} ds \implies y'(s) = \frac{C-1}{2} \left(-\frac{1}{s} + C_1 \right).$$

Devido a ausência das condições de contorno, só reajustaremos as constantes para simplificar a expressão, encontrando-se a seguinte candidata a extremo do funcional:

$$y(s) = -\frac{C_2}{s} + C_3.$$

□

3.1.2 Segundo caso: $F = F(y(s), y'(s))$.

Já neste caso o funcional será dependente apenas de $y(s)$ e $y'(s)$, ou seja, $F = F(y(s), y'(s))$. Com base nessa dependência, a equação de Euler-Lagrange possuirá a seguinte configuração:

$$F_y - \frac{d}{ds} F_{y'} = 0,$$

podemos descrevê-la como:

$$F_y - y' F_{yy'} - y'' F_{y'y'} = 0, \quad (3.7)$$

ou ainda:

$$\frac{d}{dx} (F(y(s), y'(s)) - y' F_{y'}(y(s), y'(s))) = 0, \quad (3.8)$$

pois:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (F(y(s), y'(s)) - y' F_{y'}(y(s), y'(s))) &= F_y y' + F_{y'} y'' - [y'' F_{y'} + y' (F_{yy'} y' + F_{y'y'} y'')] \\ &= y' [F_y - (F_{yy'} y' + F_{y'y'} y'')] \\ &= y' [F_y - \underbrace{(F_{yy'} y' + F_{y'y'} y'')}_{\frac{dF_{y'}}{ds}}]. \end{aligned}$$

Abaixo veremos alguns exemplos que contemplam este caso.

Exemplo 3.5 *Busque os candidatos a extremantes do funcional a seguir:*

$$\int_{x_0}^{x_1} (yy' + [y'(s)]^2) ds.$$

Solução. Constata-se que o funcional está de acordo com a equação de Euler-Lagrange apresentada em (3.7), pois $F = F(y, y'(s))$. Por conta disso:

$$F_y - y'F_{y'y} - y''F_{y'y'} = 0 \Rightarrow y' - y'.(1) - y''.(2) = 0 \Rightarrow -2y'' = 0 \Rightarrow y'' = 0.$$

Daí, ao aplicar a integral de ambos os lados em relação a s , encontramos que:

$$\int y''(s)ds = \int 0ds \Rightarrow \int y'(s)ds = \int sds \Rightarrow y(s) = as + b.$$

Como não há condições de contorno, não é possível determinar C e, portanto, realocando as constantes, encontra-se como candidato a extremo do funcional a devida família de equações:

$$y(s) = as + b, \quad s \in [x_0, x_1].$$

□

Exemplo 3.6 Identifique os possíveis candidatos a extremante do funcional abaixo:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} ([y'(s)]^2 - [y(s)]^2)ds, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Solução. Como $F = F(y(s), y'(s))$ é nítido que estamos nos referindo da equação (3.7). Logo:

$$F_y - y'F_{y'y} - y''F_{y'y'} = 0 \Rightarrow -2y - 2y'' = 0 \Rightarrow y'' + y = 0.$$

Essa equação diferencial ordinária que acabamos de encontrar é linear de segunda ordem com coeficientes constantes. Deste modo, vamos utilizar o polinômio característico para determinar suas soluções, ou seja:

$$m^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm i,$$

donde sua solução geral é dada por:

$$y(s) = C_1 \cos(s) + C_2 \sen(s).$$

Através das condições de contorno, é viável determinar as constantes C_1, C_2 , pois bem:

$$\begin{aligned} y(0) = 0 &= C_1 \underbrace{\cos(0)}_{=1} + C_2 \underbrace{\sen(0)}_{=0} \Rightarrow C_1 = 0, \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 &= C_1 \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + C_2 \underbrace{\sen\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} \Rightarrow C_2 = 1, \end{aligned}$$

e, portanto, um candidato a extremo desse funcional será:

$$y(s) = \sen(s).$$

□

3.1.3 Terceiro caso: $F = F(s, y(s), y'(s))$.

Neste caso o funcional é dependente das três variáveis, isto é, $F = F(s, y(s), y'(s))$. Desta forma, a equação de Euler-Lagrange será:

$$F_y - F_{sy'} - y'F_{yy'} - y''F_{y'y'} = 0. \quad (3.9)$$

Vejam alguns exemplos que concretizam essa situação.

Exemplo 3.7 *Analise os possíveis candidatos a extremantes do funcional:*

$$\int_{x_0}^{x_1} (y(s)^2 + [y'(s)]^2 + 2y(s)e^s) ds.$$

Solução. Note que $F = F(s, y(s), y'(s))$. Logo está de acordo com a equação de Euler-Lagrange mencionada em (3.9). Prosseguindo, é necessário que calculemos $F_y, F_{sy'}, F_{yy'}, F_{y'y'}$, pois bem:

$$F_y = 2y + 2e^s; \quad F_{yy'} = 0; \quad F_s = 2ye^s; \quad F_{y'} = 2y'; \quad F_{y'y'} = 2; \quad F_{sy'} = 0,$$

e substituindo na equação (3.9), segue que:

$$2y + 2e^s - 2y'' = 0 \Rightarrow y'' = y + e^s \Rightarrow y'' - y = e^s.$$

Note que a equação diferencial ordinária encontrada acima é de segunda ordem não homogênea, e para solucionarmos, utilizaremos o método dos coeficientes a determinar, determinando então uma solução particular y_p e outra homogênea y_h , de maneira que a solução geral será $y = y_h + y_p$.

Solução homogênea: Consideremos:

$$y'' - y = 0,$$

onde através do polinômio característico:

$$m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = \pm 1,$$

e, portanto:

$$y_h = c_1 e^s + c_2 e^{-s}.$$

Solução particular: Uma candidata a solução particular é $y = Ae^{\alpha s}$. Ao comparar essa candidata solução particular com o termo não homogêneo da nossa equação diferencial ordinária, percebemos que $\alpha = 1$. Entretanto, notem que esse termo já aparece na solução homogênea, obrigando-nos a fazer um pequeno ajuste em nossa candidata a solução particular, isto é, consideraremos então $y_p = Ase^s$. Calculando as derivadas e

retornando à equação, obtemos:

$$2Ae^s + Ase^s - Ase^s = e^s \Rightarrow 2Ae^s = e^s \Rightarrow 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}.$$

Daí segue que:

$$y_p = \frac{se^s}{2},$$

e, portanto, os candidatos a extremantes do funcional são dados por:

$$y(s) = c_1e^s + c_2e^{-s} + \frac{se^s}{2}.$$

□

3.1.4 Quarto Caso: $F = F(s, y(s))$.

Estamos diante do caso em que $F = F(s, y(s))$, donde segue que a equação de Euler-Lagrange se resume a:

$$F_y = 0,$$

que simplesmente pelo fato de não depender das constantes indeterminadas, só será compatível quando as condições de contorno fizerem sentido ao problema. Observe então que, em geral, a solução para o problema variacional não existe. Somente existirá quando a solução passar pelos pontos de contorno.

Exemplo 3.8 *Determine a função que extremiza o funcional*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} y(2s - y)ds, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Solução. Note que $F = F(s, y(s))$. Como F não depende de $y'(s)$, segue que a equação de Euler-Lagrange será:

$$F_y = 0 \implies 2s - 2y = 0 \implies y(s) = s.$$

Verificando as condições de contorno, temos que:

$$y(0) = 0 \text{ e } y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Observe que se tivéssemos outra condição de contorno, como $y(0) = 0$ e $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, o problema não teria solução.

□

3.1.5 Quinto Caso: $F = F(y'(s))$.

Em relação a este caso, como F depende apenas de $y'(s)$, a equação de Euler-Lagrange possui a seguinte configuração:

$$\frac{d}{ds}F_{y'(s)} = 0,$$

donde segue que:

$$[F_{y'(s)}]' \cdot y''(s) = 0 \implies y''(s) = 0 \quad (3.10)$$

$$\implies y'(s) = C_1$$

$$\implies y(s) = C_1s + C_2. \quad (3.11)$$

Portanto, no caso em que $F = F(y'(s))$, as funções extremais são necessariamente funções lineares.

Exemplo 3.9 (*Curva plana de comprimento mínimo*)

Encontre os candidatos a extremais do funcional abaixo:

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y'(s))^2} ds, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$$

Solução. Perceba que $F = F(y'(s))$ e, portanto, a equação de Euler respeita as expressões (3.10, 3.11). Logo, aplicando as condições de contorno, segue que:

$$y(x_0) = y_0 \implies y_0 = C_1x_0 + C_2,$$

$$y(x_1) = y_1 \implies y_1 = C_1x_1 + C_2,$$

e multiplicando a segunda equação por -1 e somando com a primeira, obtemos:

$$y_0 - y_1 = C_1(x_0 - x_1) \implies C_1 = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}.$$

Do mesmo modo, multiplicando a primeira equação por $-x_1$ e a segunda por x_0 e efetuando a soma, temos:

$$y_0x_1 + y_1x_0 = C_2(x_1 + x_0) \implies C_2 = \frac{y_0x_1 + y_1x_0}{x_1 + x_0}.$$

Portanto, a solução pode ser simplificada na seguinte expressão:

$$y(x) = \left(\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \right) \cdot (x - x_0) + y_0.$$

□

3.2 O problema da braquistócrona

Historicamente, sabe-se que o problema da braquistócrona teve origem através de uma publicação do matemático Johann Bernoulli em um jornal científico conhecido como “Acta Eruditoriu”. Entusiasmado com o problema, Johann faz menção à publicação com o seguinte título: “Um novo problema que convido os matemáticos a resolver”. A formulação do problema consiste em determinar uma curva no plano cartesiano, na qual temos o menor tempo possível no deslocamento de uma partícula ao sair de um ponto de partida até chegar a um certo ponto final, considerando apenas a ação da gravidade.

A modelagem que apresentaremos a seguir parte do princípio que a partícula descera ao longo de uma rampa, partindo do repouso de um ponto inicial A , somente sob ação da gravidade conforme foi proposto historicamente. Visualizaremos a rampa como uma curva de classe C^1 .

É bem verdade que essa modelagem posteriormente foi aprimorada dentro de outras análises que podem influenciar o experimento, como a força de atrito, entre outros.

A princípio consideraremos o problema da braquistócrona sem atrito e idealizada no plano xy , cujo o eixo da vertical, eixo y , possui orientação positiva para baixo. Sem perda de generalidade, tomaremos em nosso sistema de coordenadas o ponto A na origem, isto é, $A = (0, 0)$, de tal forma que a trajetória do movimento iniciado no ponto A é descrita pela curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Ver Figura 3.1

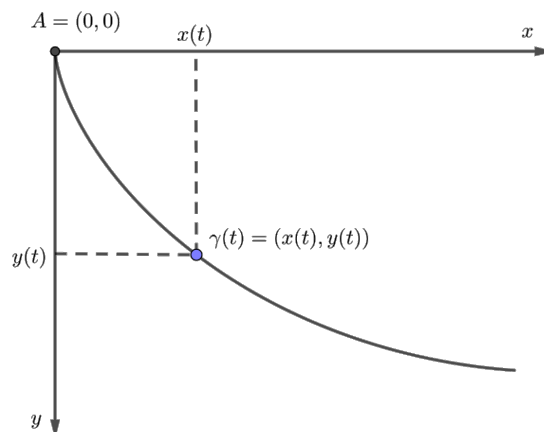


Figura 3.1: Problema da braquistócrona.

Recorde que o comprimento da curva entre os instantes $t_0 = 0$ e t é dado por

$$S(t) = \int_0^t \|\gamma'(s)\| ds = \int_0^t \sqrt{(x'(s))^2 + (y'(s))^2} ds.$$

Pelo segundo teorema fundamental do cálculo, obtemos:

$$S'(t) = \|\gamma'(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}. \quad (3.12)$$

Note que inicialmente a partícula está em repouso. Assim que o movimento se inicia, haverá força da gravidade atuando sobre a partícula no sentido do eixo y . Além disso, consideraremos duas novas retas auxiliares, denotadas por reta a , reta b e o vetor tangente à curva γ no ponto B , denotado por $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$.

As retas a e b são duas retas perpendiculares no ponto B cuja construção se remete

respectivamente ao traçar paralelas aos eixos x e y . Conseqüentemente, por construção, haverá um ângulo θ formado entre $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$ e a reta b , conforme a Figura 3.2.

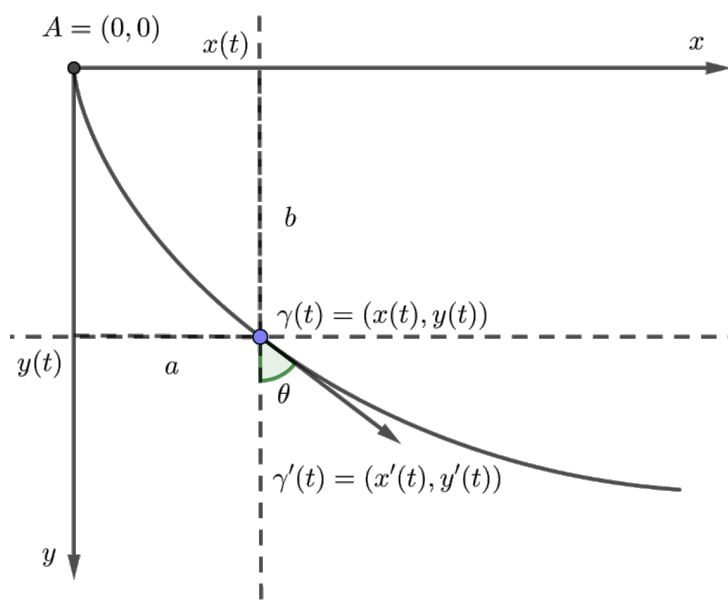


Figura 3.2: Análise do problema da braquistócrona.

De acordo com a segunda lei de Newton, a força resultante que atua sobre um corpo é igual ao produto de sua massa pela aceleração, ou seja:

$$F_r = m \cdot a,$$

onde:

- F_r := Força resultante (N).
- m := massa do corpo (kg).
- a := aceleração (m/s^2).

Conforme já mencionado, a força da gravidade atua sobre a partícula, logo, decompondo a força peso, $P = m \cdot g$, e considerando a componente vertical, encontra-se:

$$P_y = P \cdot \cos(\theta).$$

Assim, a força atuante na partícula na direção do eixo y pode ser expressa da seguinte forma:

$$F_{r_y} = P_y = P \cdot \cos(\theta) \implies F_{r_y} = m \cdot g \cdot \cos(\theta).$$

Mas, note que pela configuração da nossa modelagem:

$$\cos(\theta) = \frac{y'(t)}{\|\gamma'(t)\|}.$$

Conseqüentemente, obtemos

$$F_{r_y} = m \cdot g \cdot \frac{y'(t)}{S'(t)}.$$

Agora, utilizaremos a segunda lei de Newton, com aceleração vertical aproximada pela aceleração total, donde obtemos:

$$m \cdot \underbrace{S''(t)}_{=a} = F_{r_y} = m \cdot g \cdot \frac{y'(t)}{S'(t)} \implies S'(t)S''(t) = g \cdot y'(t),$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}((S'(t))^2)' = g \cdot y'(t) \iff \frac{1}{2} \cdot \frac{d(S'(t))^2}{dt} = g \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Integrando, temos

$$\frac{1}{2}(S'(t))^2 = g \cdot y(t) + C.$$

Como consideramos nosso sistema partindo da origem com a velocidade inicial zero, temos que

$$0 = \frac{1}{2}(S'(0))^2 = g \cdot y(0) + C = C,$$

donde

$$\frac{1}{2}(S'(t))^2 = g \cdot y(t) \implies S'(t) = \sqrt{2gy(t)}.$$

Pela natureza do nosso problema, podemos interpretar nossa curva como o gráfico de uma função $y = y(x)$. Assim, retomando a expressão (3.12), obtemos, através da regra da cadeia R.C

$$\begin{aligned} S'(t) = \|\gamma'(t)\| &\stackrel{R.C.}{=} \sqrt{[x'(t)]^2 + \left[\frac{dy}{dx}(x(t)) \cdot x'(t)\right]^2} \\ &= \sqrt{[x'(t)]^2 + \left[\frac{dy}{dx}(x(t))\right]^2 [x'(t)]^2} \\ &= \sqrt{[x'(t)]^2 \left(1 + \left[\frac{dy}{dx}(x(t))\right]^2\right)} \\ &= |x'(t)| \sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}(x(t))\right]^2}, \end{aligned}$$

e veja que $|x'(t)| = x'(t)$, pois pela configuração do problema temos que a velocidade da partícula é positiva, donde

$$\frac{dx}{dt} \cdot \sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}(x(t))\right]^2} = \sqrt{2gy(x(t))}.$$

Como queremos minimizar o tempo, e o tempo está diretamente relacionado com o deslocamento horizontal da partícula, vamos interpretar a derivada de x em relação a t

como a diferencial, ou seja, como o quociente de duas variações. Assim, obtemos

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}(x)\right]^2}}{\sqrt{2gy(x)}}.$$

Usando o segundo teorema fundamental do cálculo, concluímos que

$$t(x) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^x \frac{\sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}(s)\right]^2}}{\sqrt{y(s)}} ds.$$

Assim, o tempo total para o deslocamento da partícula do ponto inicial $A = (0, 0)$ até o ponto final $B = (x_0, y_0)$ é dado por

$$t(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_0} \frac{\sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}(s)\right]^2}}{\sqrt{y(s)}} ds.$$

Desse modo, basta minimizarmos o funcional

$$\Psi(y) = \int_0^{x_0} \frac{\sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}(s)\right]^2}}{\sqrt{y(s)}} ds.$$

Utilizaremos o segundo caso da equação de Euler para encontrarmos os candidatos à mínimo desse funcional, com

$$F = F(y, y') = \frac{\sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2}}{\sqrt{y}}.$$

Considerando então a equação dada em (3.8), segue que:

$$\frac{d}{dx}(F - y'F_{y'}) = 0 \implies \frac{d}{dx} \left(\sqrt{\frac{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2}{y}} - \frac{dy}{dx} \left[\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{y \left(1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2\right)}} \right] \right) = 0$$

Integrando em relação a x , temos:

$$\sqrt{\frac{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2}{y}} - \frac{dy}{dx} \left[\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{y \left(1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2\right)}} \right] = C,$$

ou ainda:

$$\frac{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\sqrt{y \left(1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2\right)}} = C \implies \frac{1}{\sqrt{y \left(1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2\right)}} = C,$$

que é o mesmo que:

$$\begin{aligned} 1 = C \left(\sqrt{y \left(1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2\right)} \right) &\implies C_1 = y \left(1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2\right) \\ &\implies C_1 = y + y \left[\frac{dy}{dx}\right]^2 \\ &\implies \left[\frac{dy}{dx}\right]^2 = \frac{C_1 - y}{y} \\ &\implies \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{C_1 - y}{y}}. \end{aligned}$$

Sabemos pela natureza do problema que a curva de estudo pode ser interpretada como gráfico de função. Nesse sentido, dependendo a conveniência utilizaremos $y = y(x)$ ou $x = x(y)$. Pois bem, nesse momento vamos interpretar $x = x(y)$ e a expressão acima se torna:

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y}{C_1 - y}}. \quad (3.13)$$

Retornando à Figura 3.2 podemos observar que o ângulo θ formado entre $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$ e a reta b tem uma dependência implícita do tempo, pois a cada instante de tempo, o ângulo se altera à medida que a partícula se desloca sobre a curva. Daí temos:

$$\tan(\theta) = \frac{\text{sen}(\theta)}{\text{cos}(\theta)} = \frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y}{C_1 - y}},$$

e elevando ambos os lados ao quadrado, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen}^2(\theta)}{\text{cos}^2(\theta)} = \frac{y}{C_1 - y} &\implies y(\text{sen}^2(\theta) + \text{cos}^2(\theta)) = C_1 \text{sen}^2(\theta) \\ &\implies y = C_1 \text{sen}^2(\theta). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Através de identidades trigonométricas, a expressão acima pode ser reescrita como:

$$y = \frac{C_1}{2}(1 - \cos(2\theta)).$$

Nosso interesse agora é derivar a variável x com relação a θ . Desta maneira utilizando a regra da cadeia, encontra-se:

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{d\theta},$$

onde a saber:

$$\frac{dy}{d\theta} = C_1 \operatorname{sen}(2\theta) \implies \frac{dy}{d\theta} = 2C_1 \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta).$$

Note que, ao combinar a equação acima com a expressão vista em (3.13), chega-se à seguinte equação:

$$\frac{dx}{d\theta} = \sqrt{\frac{y}{C_1 - y}} \cdot 2C_1 \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta),$$

e substituindo (3.14) temos:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= \sqrt{\frac{C_1 \operatorname{sen}^2(\theta)}{C_1 - C_1 \operatorname{sen}^2(\theta)}} \cdot 2C_1 \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) \\ &= C_1 \sqrt{\frac{C_1 \operatorname{sen}^2(\theta)}{C_1(1 - \operatorname{sen}^2(\theta))}} \cdot 2 \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) \\ &= C_1 \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{(1 - \operatorname{sen}^2(\theta))}} \cdot 2 \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) \\ &= C_1 \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}} \cdot 2 \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) \\ &= 2C_1 \operatorname{sen}^2(\theta) \\ &= 2C_1 \left(\frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \right) \\ &= C_1(1 - \cos(2\theta)). \end{aligned}$$

Tratando de uma equação diferencial ordinária separável, basta integrar ambos os lados:

$$\begin{aligned} \int dx &= \int C_1(1 - \cos(2\theta))d\theta \implies x = C_1 \left(\int d\theta - \int \cos(2\theta)d\theta \right) \\ &\implies x = C_1 \left(\theta - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2} \right) \\ &\implies x = \frac{C_1}{2}(2\theta - \operatorname{sen}(2\theta)). \end{aligned}$$

E, portanto, as soluções candidatas a extremo são as seguintes curvas paramétricas:

$$x(\theta) = \frac{C_1}{2}(2\theta - \text{sen}(2\theta)),$$
$$y(\theta) = \frac{C_1}{2}(1 - \text{cos}(2\theta)),$$

que parametrizam a curva é conhecida como cicloide. Justificaremos que a cicloide de fato é extremo desse funcional no próximo capítulo. ■

Até este exato momento podemos resumir que nosso trabalho estava sendo buscar candidatos a extremante de um funcional. Note que para isso fizemos o uso da equação de Euler-Lagrange em seus diferentes casos. Entretanto, acontece que a equação de Euler-Lagrange não confirma se de fato tal função assume o papel de extremante.

A fim de obter respostas veremos no próximo capítulo alguns outros resultados e condições que vão nos permitir validar se de fato um candidato a extremante assume propriamente o papel de extremo do funcional.

Condições suficientes para extremos

Neste capítulo trataremos sobre condições suficientes que vão nos permitir classificar um candidato a extremo como de fato um extremante para o funcional. Como motivação consideremos o seguinte exemplo.

Exemplo 4.1 Dado o seguinte conjunto $\mathcal{F}_0 = \{y \in C^1[0, 1]; y(0) = 0 \text{ e } y(1) = 1\}$, calcule o extremante do funcional abaixo:

$$J(y) = \int_0^1 [[y'(s)]^2 + 12sy(s)]ds, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

Solução. Perceba que $F = F(s, y(s), y'(s))$. Logo está de acordo com a equação de Euler-Lagrange mencionada em (3.9). Prosseguindo, é necessário que calculemos $F_y, F_{sy'}, F_{yy'}, F_{y'y'}$:

$$F_y = 12s; \quad F_{yy'} = 0; \quad F_s = 12y(s); \quad F_{y'} = 2y'; \quad F_{y'y'} = 2; \quad F_{sy'} = 0,$$

e substituindo na equação (3.9), segue que:

$$12s - 2y''(s) = 0 \implies y''(s) - 2s = 0.$$

Tratando-se de uma equação diferencial de segunda ordem homogênea, iremos aplicar o processo de integração com relação a s , isto é:

$$\int y''(s)ds = \int 6sds \implies y'(s) = \frac{6s^2}{2} + c,$$

e integrando novamente obtém-se:

$$\int y'(s)ds = \int (3s^2 + C)ds \implies y(s) = s^3 + Ct + C_1.$$

Utilizando as condições de contorno, segue que:

$$\begin{aligned}y(0) = 0 = 0^3 + C \cdot (0) + C_1 &\implies C_1 = 0, \\y(1) = 1 = 1^3 + C \cdot (1) &\implies C = 0.\end{aligned}$$

Desta maneira, um candidato a extremante será:

$$y(s) = s^3.$$

No decorrer do capítulo abordaremos resultados poderosos que justificarão esse processo de modo mais eficiente. Enquanto isso, a justificativa de que o candidato de fato é um extremante será dada algebricamente. Em particular, mostraremos que $J(V(s)) \geq J(y^*(s))$, para todo $V(s) \in \mathcal{F}_0$. Primeiramente fixemos então $y^*(s) = s^3$ como candidato a extremante do funcional. Em seguida, avaliaremos tal candidato no funcional em questão,

$$J(y^*(s)) = \int_0^1 [(y'^*(s))^2 + 12sy^*(s)] ds,$$

sendo assim:

$$J(y^*(s)) = \int_0^1 [(3s^2)^2 + 12s^4] ds \implies J(y^*(s)) = \int_0^1 21s^4 ds = \frac{21}{5}.$$

O segundo passo é considerar uma função $V(s) = \delta_V(s) + y^*(s)$ que será dada a partir de um deslocamento da função $y^*(s)$. Esse pequeno deslocamento é causado por uma função acréscimo ($\delta_V(s)$) em torno de $y^*(s)$ dentro do espaço das funções, como vemos na Figura 4.1.

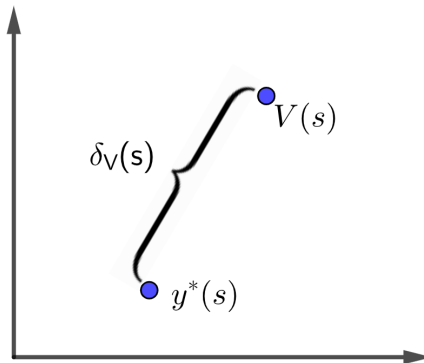


Figura 4.1: Representação da variação no espaço das funções.

Aplicaremos a função $V(s)$ no funcional conforme outrora já foi realizada para a função $y^*(s)$:

$$J(y^*(s) + \delta_V(s)) = \int_0^1 [(3s^2 + \delta'_V(s))^2 + 12s(s^3 + \delta_V(s))] ds$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 [9s^4 + 6s^2\delta'_V(s) + \delta'_V(s)^2 + 12s^4 + 12s\delta_V(s)]ds \\
&= \int_0^1 [21s^4 + 6s^2\delta'_V(s) + \delta'_V(s)^2 + 12s\delta_V(s)]ds \\
&= J(y^*(s)) + \int_0^1 [6s^2\delta'_V(s) + \delta'_V(s)^2 + 12s\delta_V(s)]ds \\
&= J(y^*(s)) + \underbrace{\int_0^1 6s^2\delta'_V(s)ds}_{\text{Integração por partes}} + \int_0^1 \delta'_V(s)^2 ds + \int_0^1 12s\delta_V(s)ds. \quad (4.1)
\end{aligned}$$

Considerando $u = 6s^2$ e $dv = \delta'_V(s)dt$ na integração por partes, segue que:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 6s^2\delta'_V(s)ds &= 6s^2\delta_V(s) - \int_0^1 [12s\delta_V(s)]ds \\
&= \underbrace{6s^2\delta_V(s)}_{=0} \Big|_0^1 - \int_0^1 [12s\delta_V(s)]ds.
\end{aligned}$$

Donde, retomando a expressão (4.1),

$$\begin{aligned}
J(y^*(s) + \delta_V(s)) &= J(y^*(s)) - \int_0^1 [12s\delta_V(s)]ds + \int_0^1 [\delta'_V(s)^2]ds + \int_0^1 [12s\delta_V(s)]ds \\
&= J(y^*(s)) + \int_0^1 \underbrace{[\delta'_V(s)^2]}_{\geq 0} ds.
\end{aligned}$$

Portanto, para qualquer $\delta_V(s)$, temos $J(y^*(s) + \delta_V(s)) \geq J(y^*(s))$. Isso nos indica de que $y^*(s)$ é um ponto de mínimo local. Fazemos uma pequena análise tomando $\mathcal{F}_0 \ni V(s) = s^\alpha, s \in [0, 1]$.

Comentários: Veja que, tomando $V(s) = s^\alpha$ no funcional J , obtemos:

$$\begin{aligned}
J(s^\alpha) &= \int_0^1 (\alpha s^{\alpha-1})^2 + 12s(s^\alpha)ds \\
&= \alpha^2 \int_0^1 s^{2\alpha-2}ds + 12 \int_0^1 s^{\alpha+1}ds \\
&= \alpha^2 \lim_{M \rightarrow 0^+} \int_M^1 s^{2\alpha-2}ds + 12 \cdot \frac{s^{\alpha+2}}{\alpha+2} \Big|_0^1 \\
&= \alpha^2 \underbrace{\lim_{M \rightarrow 0^+} \int_M^1 s^{2\alpha-2}ds}_{\text{Requer uma análise}} + \frac{12}{\alpha+2}.
\end{aligned}$$

Analisando a integral na equação acima, conclui-se que:

$$\int_M^1 s^{2\alpha-2} ds = \begin{cases} \frac{s^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} \Big|_M^1, & \text{se } 2\alpha \neq 1, \\ \ln(|s|) \Big|_M^1, & \text{se } 2\alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1 - M^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}, & \text{se } \alpha \neq \frac{1}{2}, \\ \ln\left(\frac{1}{M}\right), & \text{se } \alpha = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Daí,

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ se } \alpha = \frac{1}{2}, \text{ então} \\ \lim_{M \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{1}{M}\right) = +\infty; \\ \bullet \text{ se } \alpha < \frac{1}{2}, \text{ então} \\ \lim_{M \rightarrow 0^+} \frac{1 - M^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} = +\infty. \end{array} \right\} \text{ Note que nesses casos o} \\ \text{funcional não está bem} \\ \text{definido, pois } J : V \rightarrow \mathbb{R}.$$

• Se $\alpha > \frac{1}{2}$,

$$\lim_{M \rightarrow 0^+} \frac{1 - M^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} = \frac{1}{2\alpha-1}.$$

Logo, para $\alpha > \frac{1}{2}$,

$$J(s^\alpha) = \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} + \frac{12}{\alpha+2} \geq J(s^3) = \frac{21}{5}.$$

Na Figura 4.2 consideramos alguns casos particulares para α .

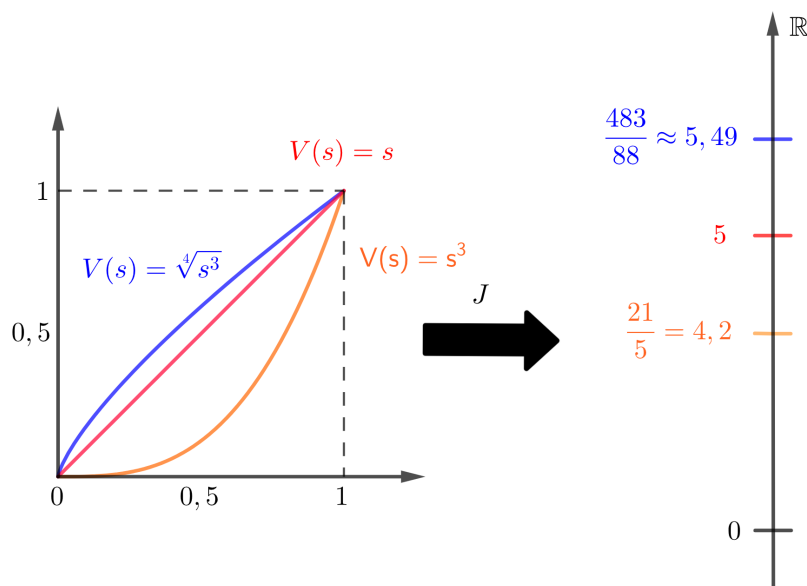


Figura 4.2: Casos do funcional $J(V(s))$ quando $V(s) = s^\alpha$.

1. Perceba que $V(s) = s^\alpha \in \mathcal{F}_0$ se $\alpha \geq 1$, pois, $V(0) = 0^\alpha = 0$ e $V(1) = 1^\alpha = 1$ respeitando as condições de contorno. Além disso, $V'(s) = \alpha s^{\alpha-1}$, $\alpha - 1 \geq 0$, é contínua. Logo, $V(s) \in \mathcal{F}_0$.
2. Veja também que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ satisfaz as condições de contorno $V(0) = 0, V(1) = 1$. Entretanto, $V'(s) = \alpha s^{\alpha-1}$, que não é contínua em $s = 0$, ou seja, $V(s) = s^\alpha$ para, $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, não é de classe C^1 . Isso nos propõe a seguinte pergunta “Seria possível estudarmos extremantes de J em um domínio “mais amplo” que \mathcal{F}_0 ?”.

Neste trabalho não entraremos no mérito de responder a pergunta acima, mas observamos que na resolução do exemplo (4.1) utilizamos a continuidade da derivada quando usamos o teorema de integração por partes.

Antes de enunciarmos os principais resultados sobre condições suficientes para extremantes, será necessário conhecer alguns conceitos preliminares.

4.1 Campos

Definição 4.1 (*Campo próprio*): Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ e $y = y(x, c)$ uma família de curvas a um parâmetro. Dizemos que essa família é um campo próprio se para cada ponto de D existe uma única curva (único $c \in \mathbb{R}$) que passa por esse ponto, como mostra a Figura 4.3.

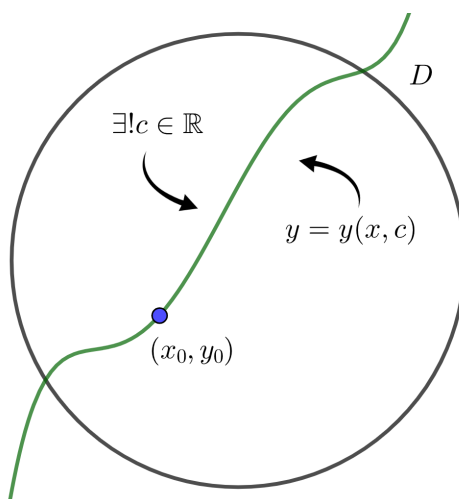


Figura 4.3: Campo próprio ilustrativo.

Definição 4.2 (*Inclinação do campo*): Diz-se que o coeficiente angular da tangente $p(s, y)$ à curva da família $y = y(s, c)$ que passa pelo ponto $A = (s, y)$ se chama inclinação do campo neste ponto, como mostra a Figura 4.4.

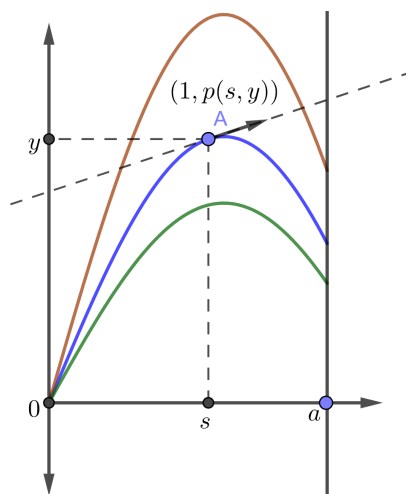


Figura 4.4: Inclinação do campo no ponto.

Exemplo 4.2 No plano xy , uma região D delimitada pelo círculo $x^2 + y^2 \leq 1$, as retas paralelas $y = x + c$, $c \in \mathbb{R}$, formam um campo próprio no interior do círculo com inclinação constante igual a 1, como mostra a Figura 4.5.

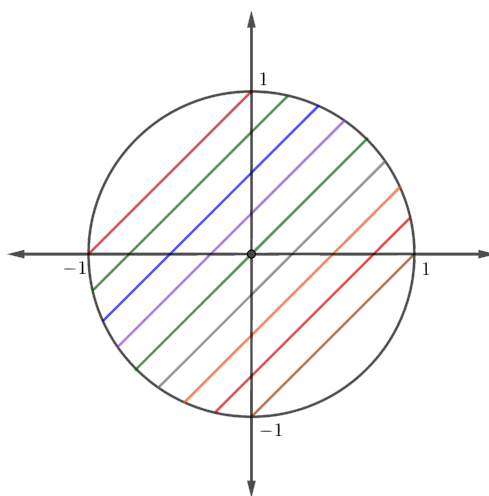


Figura 4.5: Campo próprio formado pela família de retas $y = x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

De fato, dado um ponto $P = (x_0, y_0)$ no disco $x^2 + y^2 \leq 1$, haverá um único $c \in \mathbb{R}$ que faz com que cada ponto seja interceptado por uma única reta da família de retas $y = x + c$, pois:

$$y_0 = x_0 + c \implies c = y_0 - x_0 \implies y = x + (y_0 - x_0).$$

Perceba que as retas paralelas $y = x + c$ formam um campo próprio no interior da circunferência e a sua inclinação é $p(s, y) = 1$, para toda reta y .

É importante ressaltar que estamos visualizando a função descrita como uma curva do tipo $\beta(x) = (x, x + (y_0 - x_0))$. Perceba também que o coeficiente angular de todas as retas dessa família é o mesmo implicando então que todas as retas são paralelas.

□

A seguir daremos um exemplo de campo não próprio, que significa que existe algum ponto da região em que não passa nenhuma curva ou passam mais que uma curva da família.

Exemplo 4.3 A família de parábolas do tipo $y = 1 - (x - a)^2$ não forma um campo próprio. Veja a Figura 4.6.

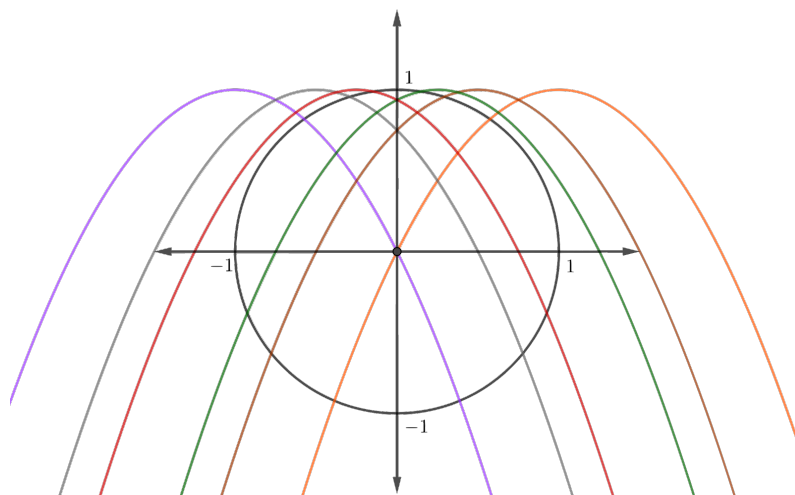


Figura 4.6: Campo não próprio utilizando a família de curvas $y = 1 - (x - a)^2$, $a \in \mathbb{R}$.

Solução. Vamos mostrar que dado um ponto qualquer dentro da região, existe mais de uma curva que passa por $P = (x_0, y_0)$. Veja que

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 - (x_0 - a)^2 \\ &= 1 - [x_0^2 - 2x_0a + a^2] \\ &= -x_0^2 + 2x_0a + (1 - a)^2, \end{aligned}$$

o que implica:

$$\begin{aligned} y_0 + x_0^2 - 2x_0a - 1 + a^2 = 0 &\implies a = \frac{2x_0 \pm \sqrt{4x_0^2 - 4(1)(-1 + x_0^2 + y_0)}}{2} \\ &\implies a = x_0 \pm \sqrt{1 - y_0}. \end{aligned}$$

- Se $\Delta = 1 - y_0 > 0$, temos dois valores de a para os quais a curva $y = 1 - (x - a)^2$ passa por (x_0, y_0) . Logo, o campo não é próprio.

Tomando, por exemplo, $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ temos:

$$\Delta = 1 - \frac{1}{2} \implies \Delta = \frac{1}{2} > 0,$$

e portanto:

$$a_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}} \implies a_1 = \frac{1 + \sqrt{2}}{2},$$

$$a_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{2}} \implies a_2 = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}.$$

□

Na sequência conheceremos uma nova definição sobre campos que será agregada ao nosso estudo, tendo em vista que todos esses novos conceitos serão de extrema importância para nos encaminhar para os campos de Jacobi.

Definição 4.3 (*Campo central*) Um campo é dito central quando as curvas de uma família cobrem toda a região D e além disso se interceptam somente no seu centro (ponto da região). Veja Figura 4.7.

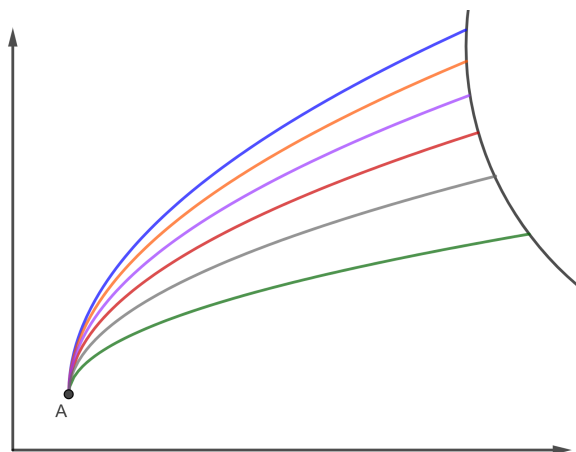


Figura 4.7: Campo central.

Exemplo 4.4 A família de senoídes $y(x) = C \text{sen}(x)$, $0 \leq x \leq a < \pi$, sendo $a > 0$, é um campo central.

De fato, vejamos que para cada ponto há apenas uma curva da família de curvas do tipo $y = C \text{sen}(x)$ que passa por ela, além disso, essas famílias preenchem toda a região. Seja $Q = (x_0, y_0)$, sendo assim:

$$y_0 = C \text{sen}(x_0) \implies C = \frac{y_0}{\underbrace{\text{sen}(x_0)}_{x_0 \neq k\pi, k \in \mathbb{N}}},$$

logo:

$$y_0 = \frac{y_0 \cdot \text{sen}(x_0)}{\text{sen}(x_0)} = y_0.$$

As Figuras 4.8, 4.9 e 4.10 nos ajudarão a compreender algumas situações.

- Se $0 < \delta < s \leq a < \pi$, onde δ é um pequeno recuo à direita da origem, estamos diante de um campo próprio (veja Figura 4.8).
- Se $0 < s \leq a$, estamos diante do campo central, apresentado na Definição 4.3 e Figura 4.7, donde a inclinação do campo em um determinado ponto $P(x_0, y_0)$ é dado por $y' = C \cos(x_0)$ (veja Figura 4.9). Em particular, no ponto central do campo, a inclinação é dada por $y'(0) = C$.

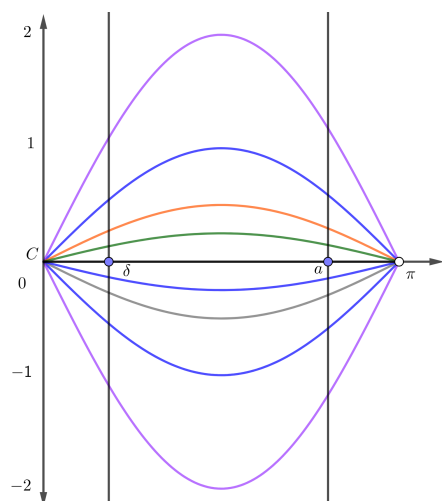


Figura 4.8: Campo próprio.

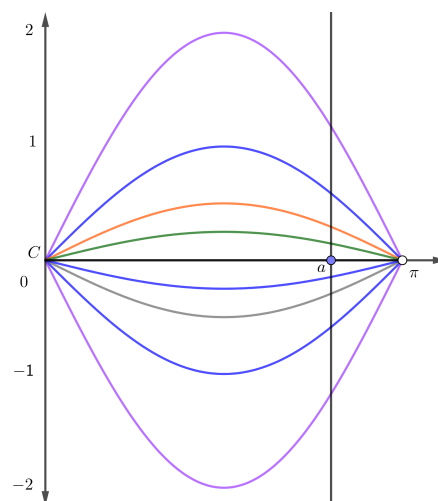


Figura 4.9: Campo central.

- Se $a \geq \pi$, não temos campo central, como mostra a Figura 4.10

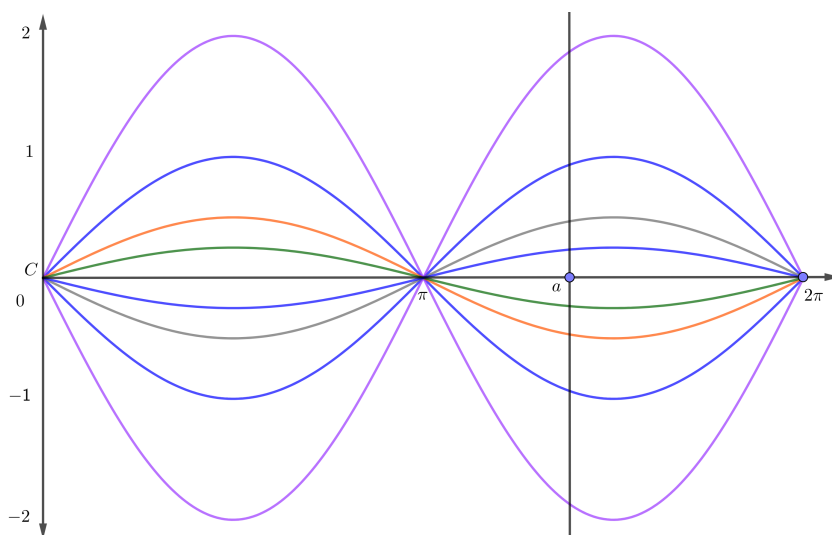


Figura 4.10: Campo não próprio.

■

Definição 4.4 Dizemos que um candidato a extremante, $y(s)$, de um problema variacional pertence ao campo de extremais $y(s, c)$ quando existe um c_0 tal que $y(s) = y(s, c_0)$.

Definição 4.5 (*Campo de extremais*) Um campo é denominado campo de extremais quando for um campo próprio ou central formado por uma família de candidatos a extremais de um certo problema variacional.

Exemplo 4.5 Recordemos o Exemplo 3.6 feito no Capítulo 3:

$$\Psi(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ([y'(s)]^2 - [y(s)]^2) ds, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Obtivemos através do uso da equação de Euler-Lagrange que $y(s) = \text{sen}(s)$ era um candidato a extremante do funcional, o qual pertence ao campo de extremais $y(s) = C \cdot \text{sen}(s)$, $s \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Veja que, neste caso, trata-se de um campo central, com centro em $(0, 0)$ e os parâmetros dessas curvas correspondem à inclinação do campo no ponto central.

4.2 Condição necessária de Jacobi

Nesta seção, introduziremos a condição de Jacobi e a definição de pontos conjugados. Para fazermos isso, vamos introduzir o conceito de curva C -discriminante de um campo central formado pelos candidatos a extremais de um problema variacional.

Consideremos o problema variacional

$$\Psi(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(s, y(s), y'(s)) ds, \quad (4.2)$$

com as condições de fronteira $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$, ou seja, o extremante do funcional $y = y(x)$ deve passar pelo pontos $A = (x_0, y_0)$ e $B = (x_1, y_1)$. A união de A, B e $y = y(x)$ entre esses pontos será chamado arco AB

Definição 4.6 Seja $y = y(s, c)$ uma família a um parâmetro de curvas. Definimos as curvas C -discriminantes associadas a essa família por

$$y = y(s, c) \text{ e } \frac{\partial y(s, c)}{\partial c} = 0.$$

Observação 4.1 Veja que, se $y = y(s, c)$ é um campo central de extremais, com centro em A , do problema variacional (4.2), as curvas do campo central satisfazem

$$y(x_0, c) = A,$$

para todo c , isto é, $y(x_0, c)$ é constante em c . Donde segue que $\frac{\partial y(x_0, c)}{\partial c} = 0$, ou seja, o ponto central pertence à curva-discriminante.

Definição 4.7 (*Ponto conjugado*) Dizemos que x_0 e $\bar{s} \in (x_0, x_1]$ são pontos conjugados

quando existe uma família, $y = y(s, c)$, a um parâmetro de soluções da equação de Euler do problema variacional (4.2), de classe C^2 , tal que $\frac{\partial y(s, c)}{\partial c}$ se anula nos pontos x_0 e \bar{s} .

Segundo Elsgoltz (ver [9, Página 361]), duas curvas, infinitamente próximas, de uma família $F(s, y, c) = 0$, se interceptam próximas à curva C -discriminante. Assim, para um feixe de curvas que contém o arco AB ser um campo de extremantes, $y = y(s, c)$, do problema variacional (4.2), essas curvas não podem interceptar a curva C -discriminante, exceto no ponto central, quando se tratar de um campo central. Em outras palavras, $\frac{\partial y(s, c)}{\partial c} \neq 0$, isto é, não temos pontos conjugado a x_0 em $(x_0, x_1]$. Além disso, segundo [9, Página 361], as derivadas das curvas $y = y(s, c)$, em relação a c , dependem apenas de s , ou seja,

$$\frac{\partial y}{\partial c} = \eta(s).$$

Considerando, também, que as curvas $y = y(s, c)$ são soluções da equação de Euler-Lagrange, segue que:

$$F_y(s, y(s, c), y'(s, c)) - \frac{d}{ds}[F_{y'}(s, y(s, c), y'(s, c))] = 0.$$

Assim, usando a regra da cadeia, a derivada da expressão acima em relação a c será:

$$F_{yy} \cdot \underbrace{\frac{\partial y(s, c)}{\partial c}}_{\eta(s)} + F_{yy'} \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{\partial y(s, c)}{\partial s} \right)}_{\eta'(s)} - \frac{d}{ds} \left[F_{y'y} \cdot \underbrace{\frac{\partial y(s, c)}{\partial c}}_{\eta(s)} + F_{y'y'} \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{\partial y(s, c)}{\partial s} \right)}_{\eta'(s)} \right] = 0,$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} &\implies F_{yy}\eta(s) + F_{yy'}\eta'(s) - \frac{d}{ds} [F_{y'y}\eta(s) + F_{y'y'}\eta'(s)] = 0 \\ &\implies F_{yy}\eta(s) + F_{yy'}\eta'(s) - \frac{d}{ds} [F_{y'y}\eta(s)] - \frac{d}{ds} [F_{y'y'}\eta'(s)] = 0 \\ &\implies F_{yy}\eta(s) + F_{yy'}\eta'(s) - (F_{y'y})'\eta(s) - F_{yy'}\eta'(s) - (F_{y'y'})'\eta'(s) - F_{y'y'}\eta''(s) = 0 \\ &\implies F_{yy}\eta(s) + \eta'(s) \underbrace{(F_{yy'} - F_{y'y})}_{\substack{\text{Teorema 6.3} \\ F_{yy'} = F_{y'y}}} - (F_{y'y})'\eta(s) - (F_{y'y'})'\eta'(s) - F_{y'y'}\eta''(s) = 0, \end{aligned}$$

daí:

$$F_{yy}\eta(s) - (F_{y'y})'\eta(s) - (F_{y'y'})'\eta'(s) - F_{y'y'}\eta''(s) = 0.$$

Portanto, reescrevendo obtemos uma equação diferencial ordinária de segunda ordem linear e homogênea. Tal equação é conhecida como equação de Jacobi:

$$\left(F_{yy} - \frac{d}{ds}(F_{y'y}) \right) \eta(s) - \frac{d}{ds}(F_{y'y'}\eta'(s)) = 0. \quad (4.3)$$

Teorema 4.1 (Ver [10, Proposição 5.5, Página 54]) Os pontos x_0 e $\bar{s} \in (x_0, x_1]$ são conjugados se, e somente se, existe pelo menos uma solução (não trivial) da equação de Jacobi (4.3), $\eta(s)$, tal que $\eta(x_0) = \eta(\bar{s}) = 0$.

O resultado a seguir é conhecido como condição necessária de Jacobi.

Teorema 4.2 (Ver [11, Teorema 5, Página 66]) (Condição necessária de Jacobi) Para um candidato a extremante $y = y(s) \in C^2[x_0, x_1]$ ser um ponto de mínimo para o problema variacional $\Psi(y)$ (veja (4.2)) é necessário que no intervalo (x_0, x_1) não existam pontos conjugados de x_0 .

O próximo resultado nos fornece uma condição suficiente para garantir a não existência de pontos conjugados.

Teorema 4.3 (Ver [10, Teorema 4.27, Página 47]) Seja y uma solução da equação de Euler-Lagrange no intervalo $[a, b]$. Se o funcional quadrático

$$\int_a^b (P(s)h'^2(s) + Q(s)h^2(s))ds,$$

é positivo definido para todo $h \in C^1(a, b)$ tal que $h(a) = h(b) = 0$, sendo $P(s) = F_{y'y'}(s, y(s), y'(s)) > 0$ e $Q(s) = (F_{yy}(s, y(s), y'(s)) - \frac{d}{ds}(F_{y'y'}(s, y(s), y'(s))))$, então o intervalo $(a, b]$ não contém pontos conjugados ao ponto a .

Exemplo 4.6 Verifique a não existência de um mínimo para o seguinte funcional:

$$J(y(s)) = \int_0^4 [y^2 - (y')^2 + 6y \operatorname{sen}(2s)]ds, \quad y(0) = 0, \quad y(4) = 1.$$

Solução. Primeiramente devemos encontrar os candidatos a extremantes via equação de Euler-Lagrange.

• Estudo da Equação de Euler-Lagrange

Analisando o integrando é possível visualizar a dependência de s , y e y' , isto é, $F = F(s, y, y'(s))$. Desta forma, a equação de Euler-Lagrange:

$$F_y - \frac{d}{ds}(F_{y'}) = 0,$$

se configura conforme o terceiro caso (3.9). Sendo $F = y^2 - (y')^2 + 6y \operatorname{sen}(2s)$, obtemos as seguintes derivadas parciais:

$$F_{y'} = -2y', \quad F_y = 2y + 6 \operatorname{sen}(2s),$$

donde a equação de Euler-Lagrange se reescreve como:

$$2y + 6 \operatorname{sen}(2s) - 2y'' = 0 \implies -y'' + y = -3 \operatorname{sen}(2s).$$

Note que a equação diferencial ordinária encontrada acima é de segunda ordem não homogênea, e para solucionarmos, utilizaremos o método dos coeficientes a determinar, determinando então uma solução particular y_p e outra homogênea y_h , de maneira que a solução geral será $y = y_h + y_p$.

Solução da homogênea associada: Consideremos:

$$-y'' + y = 0,$$

onde através do polinômio característico:

$$-m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m = \pm 1,$$

e, portanto:

$$y_h = c_1 e^s + c_2 e^{-s}, \forall s \in \mathbb{R}.$$

Solução particular: Uma candidata a solução particular é $y_p = A \cos(2s) + B \sin(2s)$. Calculando as derivadas e retornando à equação, obtemos:

$$\begin{aligned} 4A \cos(2s) + 4B \sin(2s) + A \cos(2s) + B \sin(2s) &= -3 \sin(2s) \\ \implies 5A \cos(2s) + 5B \sin(2s) &= -3 \sin(2s). \end{aligned}$$

Igualando os respectivos coeficientes conclui-se que $A = 0$ e $B = -\frac{3}{5}$. Logo, $y = h_h + y_p$ se representa como:

$$y(s) = C_1 e^s + C_2 e^{-s} - \frac{3}{5} \sin(2s).$$

Utilizando as condições de contorno segue que:

$$\begin{aligned} y(0) = 0 &\implies 0 = C_1 + C_2 - \frac{3}{5} \sin(2 \cdot 0) \implies C_1 = -C_2, \\ y(4) = 1 &\implies 1 = C_2(e^{-4} - e^4) - \frac{3}{5} \sin(8) \implies C_2 = \frac{1 + \frac{3}{5} \sin(8)}{(e^{-4} - e^4)}. \end{aligned}$$

Portanto, o candidato a extremante do funcional é:

$$y(s) = \left[\frac{1 + \frac{3}{5} \sin(8)}{(e^4 - e^{-4})} \right] e^s + \left[\frac{1 + \frac{3}{5} \sin(8)}{(e^{-4} - e^4)} \right] e^{-s} - \frac{3 \sin(2s)}{5}.$$

Na próxima etapa estudaremos a condição necessária de Jacobi e para isso devemos nos concentrar na solução da equação de Jacobi (4.3).

• Analisando a equação de Jacobi

Observe que $F = y^2 - (y')^2 + 6y \sin(2s)$ e, por consequência, temos:

$$F_y = 2y + 6 \sin(2s) \implies F_{yy} = 2,$$

$$F_{y'} = -2y' \implies F_{y'y'} = -2.$$

Logo, substituindo na equação de Jacobi (4.3), obtemos

$$2\eta(s) - \frac{d}{ds}(-2\eta'(s)) = 0 \implies \eta''(s) + \eta(s) = 0.$$

Tratando-se de uma equação diferencial de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes, temos o seguinte polinômio característico:

$$m^2 + 1 = 0 \implies m = \pm i.$$

Donde a solução da equação de Jacobi é dada por:

$$\eta(s) = K_1 \operatorname{sen}(s) + K_2 \operatorname{cos}(s).$$

Além disso, o Teorema 4.1 nos afirma que $x_0 = 0$ possui um ponto conjugado em $\bar{s} \in (0, 4)$ se alguma solução da equação de Jacobi se anular nesses pontos. Veja que $\eta_0(s) = \operatorname{sen}(s)$ é uma solução da equação de Jacobi e mais $\eta_0(0) = 0 = \eta_0(\pi)$, ou seja, $x_0 = 0$ e $\bar{s} = \pi$ são pontos conjugados. Assim, segue do Teorema 4.2 que esse problema variacional não admite ponto de mínimo.

□

4.3 Condição de Weierstrass e Legendre

Para motivarmos as condições de Weierstrass e Legendre, vamos considerar o seguinte caso particular do problema variacional (4.2):

$$\Psi(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(s, y'(s)) ds, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1, \quad (4.4)$$

satisfazendo a condição necessária de Jacobi, isto é, x_0 não possui pontos conjugados em $(x_0, x_1]$, e seja $y = y(s)$ um candidato a extremante deste problema variacional (proveniente da equação de Euler-Lagrange).

A fim de que y seja um minimizante de Ψ , para um pequeno acréscimo $\delta_V(s)$ de classe C^1 com $\delta_V(x_0) = 0 = \delta_V(x_1)$, teremos que a variação

$$\Delta\Psi = \Psi(y + \delta_V) - \Psi(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(s, y' + \delta'_V) - F(s, y') ds \geq 0. \quad (4.5)$$

Aplicando o polinômio de Taylor com resto de Lagrange conseguimos

$$F(s, y' + \delta'_V) = F(s, y') + F_{y'}(s, y')\delta'_V + \frac{1}{2!}F_{y'y'}(s, y' + \theta\delta'_V)(\delta'_V)^2,$$

para algum $0 < \theta < 1$. Substituindo em (4.5), obtemos

$$\Delta\Psi = \int_{x_0}^{x_1} F_{y'}(s, y')\delta'_V + \frac{1}{2!}F_{y'y'}(s, y' + \theta\delta_V)(\delta'_V)^2 ds \geq 0, \quad (4.6)$$

para algum $0 < \theta < 1$.

Como y satisfaz a equação de Euler-Lagrange, ou seja,

$$\frac{d(F_{y'})}{ds} = 0,$$

usando integração por partes, conseguimos

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y'}(s, y')\delta'_V ds = F_{y'}(s, y') \underbrace{(\delta_V(x_1) - \delta_V(x_0))}_{=0} - \int_{x_0}^{x_1} \underbrace{\frac{d(F_{y'}(s, y'))}{ds}}_{=0} \delta_V ds = 0.$$

Portanto, concluímos que a variação do funcional é dada por

$$\begin{aligned} \Delta\Psi &\stackrel{(4.5)}{=} \int_{x_0}^{x_1} \underbrace{F(s, y' + \delta'_V) - F(s, y') - F_{y'}(s, y')\delta'_V}_{=E(s, y, y', y' + \delta'_V)} ds \\ &\stackrel{(4.6)}{=} \frac{1}{2!} \int_{x_0}^{x_1} F_{y'y'}(s, y' + \theta\delta_V)(\delta'_V)^2 ds \geq 0, \end{aligned}$$

para algum $0 < \theta < 1$.

A expressão $E(s, y, y', y' + \delta') \geq 0$ é a chamada condição de Weierstrass e a expressão $F_{y'y'}(s, y') \geq 0$ é a condição de Legendre para que tenhamos que y seja um mínimo do funcional Ψ . Analogamente, para que y seja um máximo do funcional Ψ devemos ter a condição de Weierstrass $E(s, y, y', y' + \delta') \leq 0$ ou a condição de Legendre $F_{y'y'}(s, y') \leq 0$.

Agora, consideremos o caso geral. Tomemos o problema variacional:

$$\Psi(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(s, y(s), y'(s)) ds, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1, \quad (4.7)$$

satisfazendo a condição necessária de Jacobi, isto é, x_0 não possui pontos conjugados em $(x_0, x_1]$, e seja $y = y(s)$ um candidato a extremante deste problema variacional (proveniente da equação de Euler-Lagrange).

Veremos nos teoremas a seguir que as condições de Weierstrass e Legendre para que y seja um mínimo (respectivamente, máximo) do funcional Ψ , são respectivamente, definidas por

$$E(s, y, y', y + \delta_v) = F(s, y, y' + \delta'_v) - F(s, y, y') - F_{y'}(s, y, y')\delta'_v \geq 0 \quad (\leq 0),$$

e

$$F_{y'y'}(s, y, y') \geq 0 \quad (\leq 0).$$

Os próximos teoremas nos fornecem as condições suficientes para que uma solução da equação de Euler-Lagrange seja um extremante para os problemas variacionais.

Teorema 4.4 (Ver [11, Teorema 12, Página 102]) (Condição suficiente de Weierstrass) Para que uma curva y seja um extremante local do funcional (4.4) devidamente acompanhado das condições de fronteiras basta que se cumpram as seguintes condições:

1. é uma solução da equação de Euler-Lagrange para (4.4) satisfazendo as condições de fronteira;
2. satisfaz a condição necessária de Jacobi (Teorema 4.2);
3. A função $E(s, y, y', y + \delta_v)$ conserva o mesmo sinal para todo incremento δ_v suficientemente pequeno.

O resultado a seguir é similar ao anterior, porém com a condição de Legendre ao invés da condição de Weierstrass, a qual é mais simples de ser verificada.

Teorema 4.5 (Ver [11, Teorema 13, Página 103]) (Condição suficiente de Legendre) Para que uma curva y seja um extremante local do funcional (4.4) devidamente acompanhado das condições de fronteiras basta que se cumpram as seguintes condições:

1. é uma solução da equação de Euler-Lagrange para (4.4) satisfazendo as condições de fronteira;
2. satisfaz a condição necessária de Jacobi (Teorema 4.1);
3. e $F_{y'y'}(s, y, y') > 0$ ($F_{y'y'}(s, y, y') < 0$).

Então y é um mínimo local (respectivamente, máximo local) para o funcional Ψ .

Vejamos alguns exemplos de fixação.

Exemplo 4.7 Encontre o extremante para o seguinte funcional:

$$J(y(s)) = \int_1^2 \frac{s^3}{(y')^2} ds, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 4.$$

Solução. Para encontrarmos o extremante do funcional acima, devemos respeitar as hipóteses do Teorema 4.4. Desta forma, primeiramente devemos encontrar os candidatos a extremantes via equação de Euler-Lagrange.

• Estudo da Equação de Euler-Lagrange

Analisando o integrando é possível visualizar a dependência de s e y' , isto é, $F = F(s, y'(s))$. Desta forma, a equação de Euler-Lagrange:

$$F_y - \frac{d}{ds}(F_{y'}) = 0,$$

se configura conforme o primeiro caso (3.6). Sendo $F = \frac{s^3}{(y')^2}$, obtemos as seguintes derivadas parciais:

$$F_{y'} = -\frac{2s^3}{(y')^3}, \quad F_y = 0,$$

donde a equação de Euler-Lagrange se reescreve como:

$$-\frac{d}{ds} \left(-\frac{2s^3}{(y')^3} \right) = 0,$$

daí integrando em relação a s , temos:

$$-\frac{2s^3}{(y')^3} = C \implies y' = \sqrt[3]{\frac{2s^3}{c}} \implies y' = \frac{s\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{C}}.$$

Interessados na solução y , integraremos ambos os lados em relação a s :

$$\int y' ds = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{C}} \int s ds,$$

obtendo:

$$y(s) = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{C}} \left(\frac{s^2}{2} + C_1 \right).$$

Utilizando as condições de contorno encontra-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 1 = \sqrt[3]{\frac{2}{C}} \cdot \left(\frac{1}{2} + C_1 \right), \\ 4 = \sqrt[3]{\frac{2}{C}} \cdot (2 + C_1). \end{cases}$$

Sem perda de generalidade, primeiramente determinaremos a constante C . Para isso multiplicaremos a segunda equação por -1 e posteriormente somaremos com a primeira equação:

$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{C}} + C_1\sqrt[3]{\frac{2}{C}}, \\ -4 = -2\sqrt[3]{\frac{2}{C}} - C_1\sqrt[3]{\frac{2}{C}}, \end{cases} \Rightarrow + \begin{cases} 1 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{C}} + C_1\sqrt[3]{\frac{2}{C}} \\ -4 = -2\sqrt[3]{\frac{2}{C}} - C_1\sqrt[3]{\frac{2}{C}} \end{cases}$$

$$-3 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{C}} - 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{C}}.$$

Por fim basta isolar C :

$$-3 = \sqrt[3]{\frac{2}{C}} \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \implies 2 = \sqrt[3]{\frac{2}{C}} \implies C = \frac{1}{4}.$$

Agora para encontrar o valor de C_1 podemos, por exemplo, substituir o valor de C na primeira equação, ou seja:

$$1 = \sqrt[3]{8} \left(\frac{1}{2} - C_1 \right) \implies 1 = 2 \left(\frac{1}{2} - C_1 \right) \implies C_1 = 0.$$

Portanto os candidatos a extremante do funcional são dados pela seguinte expressão:

$$y(s) = s^2.$$

Dando continuidade às hipóteses do Teorema 4.4 é preciso que verifiquemos a possibilidade de incluir $y(s) = s^2$ num campo. Essa etapa consiste em analisar o cumprimento ou não da condição de Jacobi e para tal devemos nos concentrar na solução da equação de Jacobi (4.3).

• **Analisando a equação de Jacobi**

Note que $F = \frac{s^3}{(y')^2}$ e, por consequência, temos $F_{y'} = -\frac{2s^3}{(y')^3}$ e $F_{y'y'} = \frac{6s^3}{(y')^4}$. Logo, a equação de Jacobi:

$$\left(F_{yy} - \frac{d}{ds}(F_{y'y}) \right) \eta(s) - \frac{d}{ds}(F_{y'y'}\eta'(s)) = 0,$$

se reescreve como:

$$-\frac{d}{ds} \left(\frac{6s^3}{(y')^4} \cdot \eta'(s) \right) = 0.$$

Integrando ambos os lados em relação a s , segue que:

$$\frac{6s^3}{(y')^4} \cdot \eta'(s) = C_2.$$

Recorde-se que $y(s) = s^2$, o que implica em $y'(s) = 2s$, daí:

$$\frac{3}{8s} \cdot \eta'(s) = C_2. \implies \eta'(s) = \frac{8sC_2}{3}.$$

Integrando novamente ambos os lados em relação a s encontra-se:

$$\eta(s) = \frac{4s^2C_2 + 8C_3}{3}. \tag{4.8}$$

Agora, para verificarmos a condição necessária de Jacobi (Teorema 4.2) precisamos mostrar que não existe um ponto conjugado, $\bar{s} \in (1, 2]$, em relação a $x_0 = 1$.

Veja que a solução da equação de Jacobi (4.8) é zero em $x_0 = 1$ quando

$$\eta(1) = 0 \iff \frac{4C_2 + 8C_3}{3} = 0.$$

E supondo que existe $\bar{s} \in (1, 2]$ conjugado a $x_0 = 1$, teremos

$$\eta(\bar{s}) = 0 \iff \frac{4\bar{s}^2 C_2 + 8C_3}{3} = 0.$$

Donde obtemos o sistema linear:

$$\begin{cases} 4C_2 + 8C_3 = 0, \\ 4\bar{s}^2 C_2 + 8C_3 = 0. \end{cases}$$

Veja que da primeira equação temos:

$$C_2 = -\frac{8C_3}{4} \implies C_2 = -2C_3.$$

Daí, substituindo na segunda equação:

$$\begin{aligned} 4\bar{s}^2(-2C_3) + 8C_3 = 0 &\implies 8C_3 + 8\bar{s}^2 C_3 = 0 \\ &\implies 8\bar{s}^2 C_3 = 8C_3 \\ &\implies \bar{s} = \pm 1, \text{ se } C_3 \neq 0. \end{aligned}$$

Isso nos mostra que a solução da equação de Jacobi se anula em dois pontos, contudo, como $\bar{s} = -1$ não pertence ao intervalo $(1, 2]$, ou seja, não há pontos conjugados a $x_0 = 1$.

Por fim nos resta verificar a condição suficiente de Legendre (Teorema 4.5).

• Aplicando o teste de Legendre

Esse teste consiste em olhar para derivada segunda do integrando, $F(s, y, y')$, em relação à variável y' . Note que:

$$F_{y'y'} = \frac{3}{8s} > 0, \forall s \in (1, 2],$$

e, portanto, as hipóteses do Teorema 4.5 são satisfeitas, e podemos concluir que de fato $y(s) = s^2$ é um minimizante para o funcional $J(s)$.

□

Exemplo 4.8 *Encontre o extremante para o seguinte funcional:*

$$J(y(s)) = \int_1^3 [12sy + (y')^2] ds, \quad y(1) = 0, \quad y(3) = 23.$$

Solução. Para encontrarmos o extremante do funcional acima, devemos respeitar as hipóteses do Teorema 4.4. Deste modo, primeiramente devemos buscar os candidatos a extremantes via equação de Euler-Lagrange.

• Estudo da Equação de Euler-Lagrange

Analisando o integrando é possível visualizar a dependência de s , y e y' , isto é,

$F = F(s, y, y'(s))$. Desta maneira, a equação de Euler-Lagrange:

$$F_y - \frac{d}{ds}(F_{y'}) = 0,$$

encontra-se conforme diz o terceiro caso (3.9). Sendo $F = 12sy + (y')^2$, obtemos as seguintes derivadas parciais:

$$F_{y'} = 2y', \quad F_y = 12s,$$

daí a equação de Euler-Lagrange se reescreve como:

$$12s - 2y'' = 0 \implies y'' = 6s.$$

Integrando ambos os lados da equação em relação a s , segue que:

$$\int y'' ds = \int (6s) ds \implies y' = 3s^2 + 6c.$$

Repetindo novamente o mesmo processo, obtém-se:

$$\int y' ds = \int (3s^2 + 6c) ds \implies y = s^3 + sc_5 + c_4.$$

Utilizando as condições de contorno:

$$\begin{aligned} y(1) = 0 &\implies 0 = 1^3 + c_4 + c_5 \implies c_4 + c_5 = -1, \\ y(3) = 26 &\implies 26 = 27 + c_4 + 3c_5 \implies c_5 = \frac{-1 - c_4}{3}. \end{aligned}$$

Tendo em vista que são duas equações a duas incógnitas, por substituição segue:

$$\begin{aligned} c_4 + \left(\frac{-1 - c_4}{3}\right) &= -1 \implies 2c_4 = -2 \\ &\implies c_4 = -1, \end{aligned}$$

e como consequência:

$$c_5 = \frac{-1 - (-1)}{3} \implies c_5 = 0.$$

Conclui-se que os candidatos a extremantes do funcional são:

$$y(s) = s^3 - 1.$$

Assim como nos demais exemplos já apresentados a etapa a seguir consiste em verificar a condição de Jacobi.

• **Analisando a equação de Jacobi**

É de conhecimento que $F = 12sy + (y')^2$ e, por consequência, temos:

$$\begin{aligned} F_y = 12s &\implies F_{yy} = 0, \\ F_{y'} = 2y' &\implies F_{y'y'} = 2. \end{aligned}$$

Logo, a equação de Jacobi:

$$\left(F_{yy} - \frac{d}{ds}(F_{y'y}) \right) \eta(s) - \frac{d}{ds}(F_{y'y'}\eta'(s)) = 0,$$

se reescreve como:

$$-\frac{d}{ds}(2\eta'(s)) = 0 \implies 2\eta'(s) = c.$$

Integrando ambos os lados com relação a s :

$$\int \eta'(s) = \int \left(\frac{c}{2} \right) ds \implies \eta(s) = \frac{sc}{2} + c_3. \quad (4.9)$$

Agora, verificaremos a condição necessária de Jacobi (Teorema 4.2) precisamos mostrar que não existe um ponto conjugado, $\bar{s} \in (1, 3]$, em relação a $x_0 = 1$.

Veja que a solução da equação de Jacobi (4.9) é zero em $x_0 = 1$ quando

$$\eta(1) = 0 \implies 0 = \frac{c}{2} + c_3 = 0 \implies c_3 = -\frac{c}{2}.$$

E supondo que existe $\bar{s} \in (1, 3]$ conjugado a $x_0 = 1$, teremos $\eta(\bar{s}) = \frac{\bar{s}c}{2} - \frac{c}{2}$, também se anula, isto é:

$$\frac{\bar{s}c}{2} - \frac{c}{2} = 0 \implies c(\bar{s} - 1) = 0 \implies \bar{s} = 1.$$

Assim, $x_0 = 1$ não admite pontos conjugados em $(1, 3]$.

Para concluir nos resta aplicar a condição suficiente de Legendre (Teorema 4.5).

• **Aplicando o teste de Legendre**

Esse teste resume-se a olhar para derivada segunda do integrando, $F(s, y, y')$, em relação a variável y' . Observe que:

$$F_{y'y'} = 2 > 0, \forall s \in (1, 3],$$

e assim as hipóteses do Teorema 4.5 são satisfeitas, logo podemos terminar afirmando que $y(s) = s^3 - 1$ é um minimizante para o funcional $J(s)$.

□

No Capítulo 3 fizemos uma abordagem sobre o problema na braquistócrona. Contudo, não tínhamos toda teoria necessária para concluir que de fato o candidato a extremante encontrado via equação de Euler-Lagrange era alcançado. Pois bem, os resultados

explorados neste capítulo nos dá capacidade para justificar e finalizar o problema da braquistócrona. De antemão, dissemos que essas curvas candidatas a mínimo do problema da braquistócrona eram as cicloides, cuja definição está a seguir.

Definição 4.8 *Sejam C uma circunferência de raio r , s uma reta e P um ponto de C . Denominamos cicloide à curva descrita pelo ponto P quando C caminha sobre a reta s , sem deslizar, dada pela equação paramétrica:*

$$\begin{cases} x &= r(\alpha - \text{sen}(\alpha)), \\ y &= r(1 - \text{cos}(\alpha)). \end{cases}$$

Exemplo 4.9 (Solução da braquistócrona) *Conclua que a cicloide*

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \frac{C_1}{2}(2\theta - \text{sen}(2\theta)), \\ y(\theta) &= \frac{C_1}{2}(1 - \text{cos}(2\theta)), \end{aligned}$$

é um minimizante do problema da braquistócrona, ou seja, é um extremante do funcional:

$$\Psi(y) = \int_0^{x_0} \frac{\sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}(s)\right]^2}}{\sqrt{y(s)}} ds, \quad y(0) = 0, \quad y(x_0) = y_0.$$

Solução. Note que a solução encontrada via equação de Euler-Lagrange é exatamente a equação paramétrica da cicloide, basta visualizar $\alpha = 2\theta$ e $r = \frac{C_1}{2}$. Como a solução de Euler-Lagrange já é conhecida, basta verificarmos as hipóteses do Teorema 4.5.

• Analisando a equação de Jacobi e Legendre

Pelo ponto $B = (x_0, y_0)$ passará uma certa cicloide com as seguintes equações paramétricas:

$$\begin{cases} x(\theta) &= M(2\theta - \text{sen}(2\theta)), \\ y(\theta) &= M(1 - \text{cos}(2\theta)), \end{cases}$$

onde $M = \frac{C_1}{2}$ é determinado de modo único pois estamos visualizando essa rampa (trajetória) como gráfico de função, com $x_0 < 2\pi M$. Observe que, pela descrição do problema da braquistócrona, temos $y > 0$ em $(0, x_0]$. Porém, o primeiro valor positivo de θ em que $y(\theta) = 0$ é $\theta = \pi$, e a abscissa correspondente será $x(\pi) = 2M\pi$. Esse é o motivo pelo qual exigimos $x_0 < 2M\pi$.

Recorde que

$$F(s, y, y') = \frac{\sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}(s)\right]^2}}{\sqrt{y(s)}} ds.$$

Assim, como $y > 0$ no intervalo $(0, x_0]$, obtemos

$$P(s) = F_{y'y'} = \frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{[1+(y')^2][1+(y'')^2]}} > 0$$

e

$$Q(s) = F_{yy} - \underbrace{\frac{dF_{y'y'}}{ds}}_{=0} = F_{yy} = \frac{3\sqrt{[1+(y')^2]}}{4\sqrt[5]{y^2}} > 0,$$

para todo $s \in (0, x_0]$. Deste modo, temos que

$$\int_0^{x_0} (P(s)h'^2(s) + Q(s)h^2(s))ds$$

é positivo definido para todo $h \in C^1(0, x_0)$ tal que $h(0) = h(x_0) = 0$. Portanto, segue do Teorema 4.3 que 0 não possui pontos conjugados em $(0, x_0]$. Também, como visto acima $F_{y'y'} > 0$, que se trata da condição de Legendre.

Por fim, aplicando o Teorema 4.5, segue que a cicloide é um minimizante do problema da braquistócrona. ■

Considerações finais

Em resumo, podemos distinguir o cálculo variacional do cálculo diferencial através do objeto a ser otimizado (maximizado ou minimizado). No cálculo diferencial procura-se estudar números com propriedades otimizadoras, ou seja, encontrar um valor x no qual $f(x)$ alcança um valor de extremo, enquanto no cálculo variacional o foco é encontrar propriedades otimizadoras com respeito a funções.

Através do desenvolvimento realizado na primeira etapa, foi possível perceber que o cálculo variacional está diretamente ligado com as demais áreas da matemática, como, álgebra linear, cálculo diferencial e integral e análise. Proveniente dessas áreas, nos apropriamos dos seguintes tópicos: espaços métricos, espaços vetoriais normados, equações diferenciais ordinárias.

No decorrer da dissertação, além da utilização dessas ferramentas citadas acima, foi necessário expandir os horizontes a fim de ganhar outras ferramentas que refinassem nosso estudo sobre funcionais. Desta forma, os elementos que ganharam destaque foram as derivadas de Fréchet e de Gâteaux. A culminância de todos esses objetos possibilitou definir e compreender a equação de Euler-Lagrange, que basicamente, respeitando algumas hipóteses, nos permite encontrar curvas candidatas a extremante de um funcional.

Por fim, constatou-se que somente os resultados conhecidos até o momento não nos garantiam que de fato o mínimo (máximo) era realmente atingido. Desse modo, foi preciso agregar outros resultados poderosos como, por exemplo, condição necessária de Jacobi, condição suficiente de Weierstrass e condição suficiente de Legendre para que pudéssemos concluir que o funcional estudado em questão possuía um extremante.

Referências Bibliográficas

- [1] DEIMLING, Klaus. **Nonlinear functional analysis**. Courier Corporation, 2010.
- [2] GUIDORIZZI, Hamilton L. **Um curso de Cálculo** vol. 1. 5^a edição. LTC, 2001.
- [3] GUIDORIZZI, Hamilton L. **Um curso de Cálculo** vol. 2. 5^a edição. LTC, 2001.
- [4] LIMA, Elon Lages. **Curso de análise**, volume 1-IMPA. 2000.
- [5] LIMA, Elon Lages. **Curso de análise**, volume 2-IMPA. 2000.
- [6] LIMA, Elon Lages.; **Espaços Métricos**. Coleção Projeto Euclides. Rio de Janeiro, v. 2, n. 3, 2009.
- [7] OLIVEIRA, César R. de **Introdução à análise funcional** / César R. de Oliveira. 1 ed. Rio de Janeiro : IMPA, 2014.257 p. (Projeto Euclides)
- [8] SANTOS, Reginaldo J. **Álgebra linear e aplicações**. Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, v. 28, 2006.
- [9] ELSGOLTZ, L. **Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional**, Mir, Moscou, 1969.
- [10] BARBOSA, João Lucas M. **Geometria Diferencial e Cálculo das Variações**, IMPA, 10^o Colóquio Brasileiro de Matemática Poços de Caldas 7/26 Julho 1975.
- [11] DE LIMA, Gabriel Loureiro. **Cálculo variacional: problemas clássicos, aspectos teóricos e desdobramentos**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual de Campinas, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior. 2004.

Apêndice

Alguns resultados presentes na dissertação necessitaram da utilização dos teoremas a seguir. Contudo, omitiremos suas demonstrações, deixando-os apenas enunciados.

Teorema 6.1 ([4, Corolário, p. 121]) *Sejam $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funções limitadas. Para todo $c \in \mathbb{R}$, são limitadas as funções $f + g, cf : X \rightarrow \mathbb{R}$. Tem-se além disso:*

Caso $c \geq 0$

- 1) $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$.
- 2) $\inf(f + g) \geq \inf f + \inf g$.
- 3) $\sup(cf) = c \cdot \sup f$.
- 4) $\inf(cf) = c \cdot \inf f$.

Caso $c < 0$

- 1) $\sup(cf) = c \cdot \inf(f)$.
- 2) $\inf(cf) = c \cdot \sup f$.

Teorema 6.2 *Sejam f, g funções definidas num conjunto $X \neq \emptyset$. Se $f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in X$, então $\sup f \leq \sup g$*

Propriedade do supremo: Todo conjunto de números reais, não vazio e limitado superiormente admite supremo.

Teorema 6.3 (Clairaut - Schwarz): *Seja $D \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar de classe C^2 . Então para qualquer ponto $(d_1, \dots, d_n) \in D$ segue que:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(d_1, \dots, d_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(d_1, \dots, d_n)$$