



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**Caio Fernando e Silva**

**Correlações intrínsecas em sistemas tipo-Dirac confinados  
por um campo magnético constante**

São Carlos  
2024

**Caio Fernando e Silva**

**Correlações intrínsecas em sistemas tipo-Dirac confinados por um campo magnético constante**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Física.

**Orientador: Prof. Dr. Alex Eduardo de Bernardini**

Este trabalho corresponde à versão final da Tese defendida por Caio Fernando e Silva e orientada pelo Prof. Dr. Alex Eduardo de Bernardini.

São Carlos  
2024

*Página intencionalmente deixada em branco.*

## FOLHA DE APROVAÇÃO

Abaixo se apresentam os membros da comissão julgadora da sessão pública de defesa de dissertação para o Título de Doutor em Física na área de concentração Física Básica, a que se submeteu o aluno Caio Fernando e Silva, em 30 de junho de 2024 no Programa de Pós-Graduação em Física – UFSCar, em São Carlos/SP.

**Prof. Dr. Alex Eduardo de Bernardini**

Presidente da Comissão Julgadora

**Prof. Dr. Roldão da Rocha Junior**

UFABC

**Prof. Dr. Victor Augusto Sant Anna Valderramos Bittencourt**

UNISTRA

**Prof. Dr. Jonas Floriano Gomes dos Santos**

UFGD

**Prof. Dr. Gustavo Garcia Rigolin**

UFSCar

A ata da defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, encontra-se arquivada no Programa de Pós-Graduação em Física.

*E, enquanto não me descobres,  
os mundos vão navegando  
nos ares certos do tempo,  
até não se sabe quando...  
– e um dia me acabarei.*

(Cecília Meireles)

## AGRADECIMENTOS

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) – Finance Code 001 (Grant No. 88887.499837/2020-00).

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Alex, que me aconselhou e guiou ao longo desse trabalho. Para além de aspectos académicos – evidentemente essenciais para a escrita deste trabalho – também foi vital para atravessar os últimos anos, particularmente desafiadores para a ciência brasileira.

Agradeço aos meus pais, Márcio e Luzia; aos meus irmãos, Kelly, Rodrigo, Poliana, Felipe, pelo apoio às minhas decisões profissionais e pessoais. Também pela compreensão por não estar presente em diversos compromissos e eventos.

Agradeço a Jhony, Wagner, Diogo, também pelo apoio, paciência e companherismo, em especial durante os anos mais duros da pandemia.

Agradeço aos meus novos colegas da Faculdade de Saúde Pública da USP. Apesar do pouco tempo, acolheram-me e fizeram do trabalho um lugar receptivo e com direito a muitas risadas.

Embora não consiga nomear todos aqui, agradeço também a todos os meus colegas e pessoas que encontrei ao longo desta trajetória: São Carlos, Worcester, Leiden e São Paulo. Ainda que o tempo tenha nos afastado, tornaram esse percurso menos árduo.

## RESUMO

O formalismo de Weyl-Wigner no espaço de fases é investigado no contexto de espinores de Dirac como *qubits* correlacionados por graus de liberdade contínuos. A extensão para equações relativísticas permite conectar fenômenos da mecânica quântica a quantificadores de informação, a qual está armazenada nos espaços de Hilbert de uma partícula de Dirac confinada. Em particular, enfatizam-se medidas de entropia linear, as quais são calculadas diretamente com a função de Wigner para tempos iguais. Por outro lado, a informação quântica pode ser calculada pelo quantificador de emaranhamento, a concorrência. Assim, para testar diversos aspectos de uma teoria de informação quântica, considera-se um férmion aprisionado por um campo magnético. Verifica-se que a medida de emaranhamento intrínseco é afetada pela interferência no espaço das configurações, mas não por combinações lineares no espaço de fases. Estados de gato podem ser obtidos analiticamente como superposições gaussianas dependentes de um parâmetro de distância no espaço de fases. Esses estados são sucedidos por padrões de evolução temporal conhecidos como revivals quânticos, como previsto para soluções altamente localizadas. No entanto, o aspecto imprevisto é que a simetria dos estados de gato impede que eles sigam a dinâmica usual, mais precisamente, eles exibem escalas de evolução fracionárias com relação ao seu correspondente clássico. Finalmente, também se consideram ensembles estatísticos das funções de Wigner-Dirac. Investiga-se a obtenção unívoca da concorrência para sistemas mistos. Nesse contexto, calcula-se também a função de partição do ensemble canonicamente distribuído. Ela é obtida a partir de técnicas de integração complexa, exibindo um comportamento distinto para altas e baixas temperaturas. Respectivamente, observa-se uma dependência polinomial na temperatura e uma expansão em termos de funções Hurwitz analiticamente continuadas. Como esse é o objeto que também descreve a termodinâmica para sistemas tipo-Dirac confinados em dimensões espaciais reduzidas, nosso resultado estabelece o formalismo para se calcular correlações intrínsecas em sistemas que exibem a mesma álgebra da equação de Dirac em três dimensões espaciais. Neste contexto, propõe-se um método que também pode ser utilizado para investigar correlações em sistemas de baixa energia, seja em bandas eletrônicas, seja em sistemas bosônicos.

## ABSTRACT

The Weyl-Wigner formalism in phase space is investigated in the context of Dirac spinors as *qubits* correlated by continuous degrees of freedom. The extension to relativistic equations connects quantum mechanical phenomena to quantifiers of the information stored in the Hilbert spaces of a confined Dirac particle. In particular, one focuses in linear entropy measures, calculated from the Wigner function for equal times. On the other hand, quantum information can be calculated by an entanglement measure, the quantum concurrence. In this context, to investigate the aspects of a quantum information theory, a fermion trapped by a magnetic field is considered. One finds that this entanglement measure is affected by interference in the configuration space, but not by linear combinations in phase space. Cat states can be obtained analytically as Gaussian superpositions dependent on a distance parameter in phase space. These states are followed by patterns of temporal evolution known as quantum revivals, as predicted for highly localized solutions. However, the unexpected feature is that the symmetry of cat states prevents them from following the usual dynamics. Namely, they exhibit fractional revivals with respect to their classical counterparts. Finally, statistical ensembles of Wigner-Dirac functions are also considered. A unique measure of quantum concurrence for mixed states is investigated. In this context, the partition function of the canonically distributed ensembles is also calculated. It is obtained from complex integration techniques, exhibiting distinct behavior for high and low temperatures. Respectively, a polynomial dependence on temperature and an expansion in terms of analytically continued Hurwitz functions are observed. Since this is the object that also describes the thermodynamics of confined Dirac-like systems in reduced spatial dimensions, our result establishes the formalism for calculating intrinsic correlations in systems that exhibit the same algebra as the Dirac equation in three spatial dimensions. In this context, we propose a method that can be applied to low energy systems, from electronic bands to bosonic systems.



## Lista de Figuras

1	Evolução temporal de um estado inicialmente gaussiano . . . . .	38
2	Positividade da pureza quântica no espaço de fases . . . . .	39
3	Informação mútua em um estado gaussiano . . . . .	40
4	Caráter localizado da concorrência quântica de spin-paridade . . . . .	43
5	Emaranhamento em um estado inicial gaussiano . . . . .	44
6	Estados de gato de Dirac no espaço de fases . . . . .	47
7	Evolução temporal da informação mútua em estados localizados . . . . .	52
8	Evolução temporal do emaranhamento de formação em estados localizados . .	53
9	Função espectral para estados de gato . . . . .	56
10	Interferência entre paridade negativa e positiva . . . . .	60
11	Oscilações clássicas . . . . .	62
12	Distorção do revival em campos magnéticos intensos . . . . .	63
13	Super revival de estados de gato . . . . .	65
14	revivals na representação da densidade de probabilidade . . . . .	69
15	Revivals quase ideais nas componentes da matriz espinorial de Wigner-Dirac .	72
16	Correlações intrínsecas em superposições e misturas estatísticas . . . . .	80
17	Deslocalização no espaço de fases . . . . .	87
18	Estados gaussianos maximalmente mistos . . . . .	89
19	Funções termodinâmicas em sistemas bidimensionais . . . . .	96
20	Pureza quântica em níveis de Landau desigualmente espaçados . . . . .	98
21	Correlações clássico-quânticas em níveis de Landau relativísticos . . . . .	100

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Funções de Wigner em sistemas tipo-Dirac</b>	<b>16</b>
2.1	O formalismo de Wigner em uma teoria de informação . . . . .	20
2.1.1	Emaranhamento de Formação . . . . .	24
2.2	Espinoros em um campo magnético constante . . . . .	26
2.2.1	Funções de Wigner estacionárias . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Superposição e Emaranhamento em estados gaussianos</b>	<b>32</b>
3.1	Estados de gato como superposições gaussianas no espaço de fases . . . . .	34
3.2	Dinâmica de correlações intrínsecas em um campo magnético . . . . .	36
3.2.1	Correlações quânticas e decoerência . . . . .	41
3.2.2	Matriz de Wigner para estados do gato de Dirac . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Revivals quânticos</b>	<b>54</b>
4.1	Expansão da energia e períodos de oscilação coletiva . . . . .	57
4.2	Amplitude de sobrevivência para estados com paridade definida . . . . .	59
4.3	Morte Súbita de Emaranhamento . . . . .	65
<b>5</b>	<b>Ensembles Estatísticos</b>	<b>74</b>
5.1	Interferência e Aleatoriedade . . . . .	77
5.2	Estados Gaussianos Mistos . . . . .	83
5.3	Correlações em temperaturas finitas . . . . .	90
5.4	Correlações no grafeno monocamada . . . . .	102
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>105</b>
	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>107</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Os espinores, tradicionalmente estudados na mecânica quântica relativística (THALLER, 1992; GREINER, W., 2000), podem também ser relevantes em uma teoria de informação quântica. Precisamente, os férmions de Dirac – generalizando os férmions de Weyl para partículas massivas – exibem, em um espaço-tempo quadridimensional, uma estrutura equivalente a um sistema de *qubits*, ou bits quânticos. Essa conexão pode ser verificada a partir da teoria de representação de grupos, de onde o spin emerge naturalmente a partir das simetrias do sistema.

De fato, a descrição de férmions massivos requer as representações irredutíveis do grupo de Lorentz completo, composto pelo grupo de Lorentz próprio sem inversões temporais,  $SO^+(1, 3)$ , juntamente com as inversões espaciais. Essa última simetria exige que os espinores de helicidade esquerda e direita, ou quiralidade no caso partículas sem massa, sejam considerados simultaneamente, o que pode ser remediado ao se utilizar os (bi)espinores de Dirac. Considerando que a equação de Dirac comporta uma estrutura de grupo  $SU(2) \otimes SU(2)$  que pode ser relacionada aos graus de liberdade spin e paridade intrínseca (BITTENCOURT; BERNARDINI, 2016), as quatro componentes dos espinores de Dirac identificam o estado desses qubits, eventualmente correlacionadas por variáveis do espaço de fases. Nesse contexto, as propriedades algébricas dos Hamiltonianos tipo-Dirac já foram investigadas para potenciais externos constantes, classificados a partir de transformações de Poincaré e que são utilizados para mapear a equação de Dirac com interações em sistemas físicos controláveis (LAMATA et al., 2011; CASANOVA et al., 2010; BERMUDEZ; MARTIN-DELGADO; SOLANO, 2007a), ou até menos em problemas de física de alta energia (BERNARDINI; GUZZO; NISHI, 2011; BITTENCOURT; MIZRAHI; BERNARDINI, 2015; BITTENCOURT; BERNARDINI; BLASONE, 2021).

Por outro lado, a introdução de potenciais que reduzem as simetrias implícitas da equação de Dirac (GREINER, W., 2000) precisa ser revisitada, particularmente quando esses potenciais exibem um caráter de localização com a inclusão de graus de liberdade contínuos

(BERMUDEZ; MARTIN-DELGADO; SOLANO, 2007b; RUSIN; ZAWADZKI, 2010). Uma vez que essas variáveis contínuas modificam a covariância da equação, um formalismo alternativo deve ser encontrado para estudar o perfil de informações dos biespinores. Isso se torna uma extensão esperada dos métodos utilizados em sistemas discretizados, nos quais os qubits usuais representam uma ferramenta essencial para o desenvolvimento de tarefas que demandam correlações quânticas como um recurso (BRAUNSTEIN et al., 1999; STEANE, 1998; EKERT; JOZSA, 1998). Além disso, a inclusão desses potenciais no contexto da informação quântica amplia os cenários de aplicação da equação de Dirac como um sistema de qubits acoplado a um ambiente externo (MINTERT et al., 2005).

Para solucionar as dificuldades acima, o formalismo de Weyl-Wigner (WIGNER, 1932; MOYAL, 1949; BALLENTINE, 1998) pode ser utilizado na obtenção de observáveis em uma teoria de informação quântica com um caráter de confinamento introduzido na dinâmica do sistema. Em particular, a função de Wigner espinorial (ELZE; GYULASSY; VASAK, 1986) fornece o operador densidade, de modo que a generalização para estados mistos é análoga à função de Wigner utilizada em sistemas sem spin. Para o problema do campo magnético constante, introduzido por meio do potencial vetor dependente de coordenadas espaciais, verificam-se os níveis de Landau relativísticos, de modo que as soluções da Hamiltoniana são rotuladas por um número quântico discreto. Em sistemas bidimensionais cuja Hamiltoniana é tipo-Dirac, essa quantização é relacionada ao fenômeno do efeito Hall quântico, no qual a condutância exibe platôs, ou seja, é também quantizada, mesmo quando a densidade de elétrons é modificada (CASTRO NETO et al., 2009). Esse fenômeno pode ser explicado essencialmente a partir da descrição de uma partícula, sem recorrer a interações entre elétrons. De modo similar, uma quantização no perfil de correlações quânticas para férmions em um campo magnético é esperada.

Os níveis de Landau tipo-Dirac são descritos algebricamente por polinômios de Hermite no espaço das configurações (BAGROV; GITMAN, 2014), e suas propriedades no espaço de fases também podem ser estudadas em termos de funções elementares, os polinômios de Laguerre, de modo que a quantificação das correlações quânticas pode ser obtida algebricamente. Portanto, aspectos usuais da mecânica quântica, como as superposições de estados puros ou mistos, podem ter um impacto quantificável nas correlações clássico-quânticas do sistema.

A superposição e o emaranhamento introduzem algumas das características distintas da mecânica quântica. Para investigar a sua inter-relação dentro de uma teoria de informação, pode-se recorrer à decoerência, mecanismo pelo qual um sistema físico perde suas características quânticas (SCHLOSSHAUER, 2019). Na linguagem da matriz densidade, por exemplo, a decoerência suprime a interferência entre estados puros, as coerências, eliminando também as correlações quânticas do sistema. Compreendendo sistemas de qubits – eventualmente tipo-Dirac – como plataformas que comportam essa caracterização, tais questões aproximam a descrição de uma partícula a problemas de magneto-eletrônica (PRINZ, 1998), da spintrônica (WOLF et al., 2001; ŽUTIĆ; FABIAN; SARMA, 2004; AWSCHALOM; FLATTÉ, 2007), ou ainda do estudo de técnicas de computação quântica (XI; LI; FAN, 2015; MA et al., 2016; CHITAMBAR; HSIEH, 2016), com a existência dos estados de gato na ótica quântica (BERMUDEZ; MARTIN-DELGADO; SOLANO, 2007b). Em particular, as plataformas experimentais para estados de gato (SOLANO; MATOS FILHO; ZAGURY, 2001; SOLANO; AGARWAL; WALTHER, 2003; SYCHEV et al., 2017) impulsionadas por estruturas de espinores de Dirac, já revelaram propriedades sutis de fenômenos não-clássicos. Restringindo aos sistemas tipo-Dirac (BITTENCOURT; BLASONE; BERNARDINI, 2018), verificam-se plataformas experimentais para fenômenos de baixa energia e até mesmo mesoscópicos (TENEV; IVANOV; VITANOV, 2013; MCCANN; KOSHINO, 2013).

No entanto, a evolução temporal de superposições envolvendo um número arbitrariamente grande de estados introduz algumas dificuldades que merecem ser estudadas. O revival quântico (ROBINETT, 2004), por exemplo, é um fenômeno observado na evolução de sistemas quânticos em grandes escalas temporais, quando um estado se regenera próximo à configuração inicial. Essa é uma característica comum a sistemas não relativísticos e relativísticos e já foi observada em condensados de Bose-Einstein, tanto teoricamente (GEA-BANACLOCHE, 1990; STRANGE, 2010) quanto experimentalmente (GREINER, M. et al., 2002; XU et al., 2010). Para Hamiltonianas de Dirac, no entanto, os revivals são tipicamente menos bem definidos, pois a relação de dispersão relativística distorce o preciso padrão das oscilações coletivas. Ainda assim, o estudo da evolução temporal de estados altamente localizados permite também conectar a estrutura de espinores com outros fenômenos fisicamente mensuráveis, como revivals de corrente de elétrons e transições de fases nesses sistemas (ROMERA; LOS SANTOS, 2009; ROMERA; BOLÍVAR et al., 2016; ZONDINER et al., 2020)

A extensão a ensembles estatísticos é essencial no formalismo de matriz densidade. Porém, um dos desafios em se analisar estados mistos é descrever a natureza de correlações e sobretudo quantificá-las. Esse problema surge por dois motivos principais. Além de existirem diversos quantificadores de emaranhamento, há correlações quânticas que são distintas de emaranhamento (OLLIVIER; ZUREK, 2001; LUO, 2008a; BERA et al., 2017). Para caracterizar um determinado sistema como um candidato adequado a protocolos de informação quântica, é necessário investigar tais questões. Como cada estado misto corresponde a uma interação entre ambiente e sistema, a descrição dos ensembles estatísticos amplia os sistemas que podem ser descritos pelo formalismo aqui proposto. De particular relevância é o ensemble canônico, que pode ser utilizado para investigar as correlações intrínsecas de biespinores em temperaturas finitas.

Desse modo, o objetivo central deste trabalho é investigar a equação de Dirac com campo magnético constante dentro de uma teoria de informação quântica. Particularmente, por meio dos níveis de Landau relativísticos, descritos por biespinores que dependem de um número quântico discreto, investiga-se a relação entre aspectos da mecânica quântica e seus impactos nas correlações intrínsecas de spin-paridade de uma partícula. Utilizando as propriedades matemáticas dos polinômios de Laguerre, foca-se em estados gaussianos, devido à sua correspondência com sistemas clássicos, ao menos do ponto de vista da positividade da sua distribuição no espaço de fases. Tendo isso em vista, o trabalho foi dividido da seguinte maneira. No capítulo 2, o formalismo de Weyl-Wigner é introduzido, de um sistema sem spin à sua generalização por meio da função de Wigner espinorial. Também são introduzidos os quantificadores de informação quântica, que são construídos com as medidas de entropia de von Neumann. Ao fim do capítulo, os níveis de Landau relativísticos são obtidos, tanto na representação da posição quanto no espaço de fases. No capítulo 3, quantifica-se o efeito de superposições quânticas nos quantificadores de informação propostos (SILVA; BERNARDINI, 2021). Em particular, os chamados estados de gato de Dirac, obtidos como a superposição de dois estados gaussianos separados por uma distância no espaço de fases, são evoluídos no tempo e suas correlações intrínsecas são também quantificadas. No capítulo 4, o efeito da alta localização é conectado aos revivals quânticos (SILVA; BERNARDINI, 2023). Os estados de gato introduzidos são rediscutidos em termos da probabilidade de sobrevivência para evoluções em grandes escalas temporais. Também se discutem os revivals como um possível fenômeno que induz a um padrão de oscilação entre

emaranhamento e separabilidade em tempos finitos. No capítulo 5, investigam-se os ensembles estatísticos, por meio da combinação linear de funções de Wigner no espaço de fases (SILVA; BERNARDINI, 2024). Estados gaussianos mistos são obtidos analiticamente, e as correlações quânticas são obtidas com integrações gaussianas. Esse resultado preliminar é utilizado para se obter a função de partição para o ensemble canônico. Embora nesse caso a função de Wigner não seja mais analítica, calculam-se as correlações intrínsecas em temperaturas finitas, em termos de funções de Hurwitz analiticamente continuadas para os números complexos. No capítulo 6, as principais conclusões são apresentadas, e se discute a possível aplicação desse trabalho nos níveis de Landau tipo-Dirac bidimensionais observados no grafeno monocamada.

## 2 FUNÇÕES DE WIGNER EM SISTEMAS TIPO-DIRAC

As distribuições no espaço de fases são particularmente úteis, pois utilizam a mesma linguagem para abordar a mecânica quântica e seu limite semiclássico, o qual pode se tornar bastante sutil dentro das abordagens usuais da mecânica quântica. Antes mesmo de considerar o spin, é possível observar algumas dessas sutilezas. Por exemplo, um operador  $\hat{O} = O(\hat{x}, \hat{p})$ , função dos operadores posição e momento, possui diversas representações. Na base das posições, pode-se considerar a chamada transformada de Weyl,

$$O^W(x, p) = 2 \int dy \exp [2 i p y / \hbar] \langle x - y | \hat{O} | x + y \rangle, \quad (2.1)$$

i. e. é uma operação que conecta um operador a uma função de números comutativos no espaço de fases. Essa definição pode ser utilizada para  $x = (x_1, x_2, \dots)$  e  $p = (p_1, p_2, \dots)$  em dimensões arbitrárias. Segue da definição que  $\hat{x}^W = x$  e  $\hat{p}^W = p$  e, de modo genérico, qualquer polinômio de  $\hat{x}$  ou  $\hat{p}$  tem sua transformada de Weyl apenas pela substituição dos operadores pelos números comutativos. Esse mapeamento, embora arbitrário, permite construir toda a álgebra de operadores a partir da operação traço,

$$\text{Tr} [\hat{O}_1 \hat{O}_2] = 2\pi \int \int dx dp O_1^W(x, p) O_2^W(x, p), \quad (2.2)$$

onde a operação  $\text{Tr} [\dots]$  é construída com relação a uma base (contínua) qualquer.

Para construir os valores esperados da teoria,  $\langle O \rangle = \text{Tr}[\hat{O}\hat{\rho}]$ , com a expressão acima, calcula-se a transformada de Weyl do operador densidade,

$$\begin{aligned} \rho^W(x, p) &= 2 \int dy \exp [2 i p y / \hbar] \langle x - y | \hat{\rho} | x + y \rangle \\ &= 2 \int dy \exp [2 i p y / \hbar] \psi(x - y) \psi^*(x + y) \\ &= 2\pi W(x, p). \end{aligned} \quad (2.3)$$



Na última linha, define-se a função de Wigner. Em outras palavras, ela é proporcional à transformada de Weyl do operador densidade e desempenha um papel equivalente no espaço de fases. No entanto, vale notar que enquanto  $\psi(x)\psi^*(x)$  descreve a densidade de probabilidade na coordenada  $x$ , que é sempre positiva,  $W(x, p)$  pode assumir valores negativos e, portanto, não pode ser identificada com uma verdadeira densidade de probabilidade nas coordenadas  $(x, p)$ . Ainda que a positividade da distribuição não garanta que ela seja clássica – como no caso dos estados apertados (squeezed states) –, esta é uma das características que distinguem a função de Wigner de uma distribuição clássica no espaço de fases, a qual pode também ser arbitrariamente localizada.

Em que pesem as ressalvas acima, a função de Wigner desempenha o papel de uma função peso no espaço de fases, de forma equivalente ao operador densidade,

$$\langle O \rangle = \text{Tr} [\hat{O} \hat{\rho}] = \int \int dx dp W(x, p) O^W(x, p), \quad (2.4)$$

ou seja, os valores esperados podem ser reconstruídos no espaço de fases, partindo da transformada de Weyl dos operadores acima. Evidentemente, isso é equivalente à obtenção do valor esperado construído com a densidade de probabilidade  $\psi(x)\psi^*(x)$ , ao menos para estados puros. No entanto, a dinâmica evidencia as maiores diferenças entre essas abordagens. Como a evolução temporal clássica da distribuição de probabilidade é descrita pela equação de Liouville e suas generalizações para sistemas interagentes, a evolução na mecânica quântica é analogamente considerada a partir da equação de von Neumann para o operador densidade ou – através da sua transformada de Weyl – a partir de termos adicionais à equação Liouville clássica.

Explicitamente, a evolução temporal da função de Wigner  $W(x, p; t)$  pode ser escrita como a divergência de um vetor no espaço de fases (CASE, 2008),

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_p}{\partial p} \equiv \frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (2.5)$$

onde  $\mathbf{J}(x, p; t) = J_x \hat{x} + J_p \hat{p}$  é o fluxo vetorial, cujas componentes são dadas por

$$J_x(x, p; t) = \frac{p}{m} W(x, p; t), \quad (2.6)$$

$$J_p(x, p; t) = - \sum_{\eta=0}^{\infty} \left( \frac{i\hbar}{2} \right)^{2\eta} \frac{1}{(2\eta+1)!} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^{2\eta+1} V(x) \right] \left( \frac{\partial}{\partial p} \right)^{2\eta} W(x, p; t), \quad (2.7)$$

para um potencial  $V(x)$  que pode ser expandido em uma série de Taylor. Nota-se que a equação acima se reduz à equação de Liouville clássica para a distribuição de probabilidade quando apenas o termo  $\eta = 0$  é considerado. Assim, no oscilador harmônico a evolução é essencialmente clássica. Para potenciais arbitrários, os termos  $\eta > 0$  introduzem correções quânticas, proporcionais a  $\hbar$ , dado que o limite clássico é tipicamente considerado no limite  $\hbar \rightarrow 0$ .

Para além da conexão com o limite semiclássico da mecânica quântica, o formalismo de Weyl-Wigner também possui uma aplicação relevante no contexto da teoria de informação. Essa conexão pode ser explorada ao se considerar a dinâmica de férmions. Nomeadamente, a invariância sob transformações de Poincaré e paridade da equação de Dirac em  $(3+1)$  introduzem uma estrutura de grupo  $SU(2) \otimes SU(2)$ , a qual pode ser relacionada a dois graus de liberdade discretos: o spin e a paridade intrínseca de uma partícula descrita por essa equação. Ou seja, a equação de Dirac pode ser considerada como um sistemas de dois qubits, cuja estrutura de correlação é transportada pelos biespinores. Por outro lado, a dinâmica de um férmion é drasticamente afetada por um campo externo que possua um caráter localizador. Assim, espera-se que o perfil de informação quântica associado a esses qubits seja também afetado por um campo confinante.

Nesse caso, é necessário estender a definição da função de Wigner para uma matriz de Wigner no espaço dos espinores, a qual reproduz a estrutura da equação de Dirac covariante (HEINZ, 1983; ELZE; GYULASSY; VASAK, 1986; VASAK; GYULASSY; ELZE, 1987; BERNARDINI, 2020a), comportando uma decomposição em termos dos dezesseis geradores da álgebra de Clifford,  $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$ , onde  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ .

Recordando a representação de Dirac, na qual as matrizes gama são dadas por  $\gamma_0 = \beta$ ,  $\gamma_j = \beta\alpha_j$ ,  $\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0$ , e  $\sigma_{\mu\nu} = (i/2)[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ , a seguinte decomposição pode ser aplicada à função de Wigner (TICCIATI, 1999; WEICKGENANNT et al., 2019)

$$W(\{q\}) \equiv S(\{q\}) + i\gamma_5 \Pi(\{q\}) + \gamma_\mu \mathcal{V}^\mu(\{q\}) + \gamma_\mu \gamma_5 \mathcal{A}^\mu(\{q\}) + \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} \mathcal{T}^{\mu\nu}(\{q\}), \quad (2.8)$$

com  $\{q\} \equiv \{x, p\}$ . Multiplicando o lado esquerdo pelo gerador correspondente que aparece na frente de cada termo e aplicando o traço sobre índices espinoriais, as contribuições escalar, pseudo-escalar, vetorial, axial-vetorial e tensor antissimétrico são identificadas

respectivamente (HEINZ, 1983; ELZE; GYULASSY; VASAK, 1986; VASAK; GYULASSY; ELZE, 1987). Explicitamente,

$$S(\{q\}) = \frac{1}{4} \text{Tr}[W(\{q\})], \quad (2.9)$$

$$\Pi(\{q\}) = -\frac{i}{4} \text{Tr}[\gamma_5 W(\{q\})], \quad (2.10)$$

$$\mathcal{V}^\mu(\{q\}) = \frac{1}{4} \text{Tr}[\gamma^\mu W(\{q\})], \quad (2.11)$$

$$C^\mu(\{q\}) = \frac{1}{4} \text{Tr}[\gamma_5 \gamma^\mu W(\{q\})], \quad (2.12)$$

$$\mathcal{T}^{\mu\nu}(\{q\}) = -\mathcal{T}^{\nu\mu}(\{q\}) = \frac{1}{4} \text{Tr}[\sigma^{\mu\nu} W(\{q\})]. \quad (2.13)$$

A decomposição espinorial da função de Wigner é motivada a partir da teoria de eletrodinâmica quântica, que define o operador de Wigner

$$\hat{W}_{\xi\lambda}(x, p) = (2\pi)^{-4} \int d^4u \exp[-ip \cdot y] \bar{\psi}_\lambda(x - u) \psi_\xi(x + u), \quad (2.14)$$

onde, na linguagem da segunda quantização, os espinores são operadores de Heisenberg e a função de Wigner deve ser tomada como  $W = \langle : \hat{W} : \rangle$ , uma média do conjunto estatístico com ordenamento normal com relação ao vácuo (ELZE; GYULASSY; VASAK, 1986). No entanto, para que essa definição seja também invariante de gauge, uma outra definição garante que após uma transformação de gauge a função de Wigner não se altere.

Como observado acima, a função de Wigner para tempos iguais pode ser calculada a partir de diversas configurações dos espinores, estacionários ou não. A dinâmica do espaço de fases pode ser descrita pela função de Wigner de Dirac de tempo igual (ZHUANG; HEINZ, 1996; SHENG et al., 2019), que suporta a decomposição mencionada anteriormente.<sup>1</sup> Uma superposição de estados estacionários pode ser geralmente colocada na seguinte forma

$$\phi_\lambda(x + u) = \sum_j \psi_{\lambda,j}(x + u) \exp[-ik_{0,j}(t + \tau)], \quad (2.15)$$

para  $t, \tau$  e  $k_0$  as componentes temporais de  $x, u$  e  $k$ , onde o índice  $j$  identifica o  $j$ -ésimo espinor na superposição para uma base ortonormal específica. Então, a função de Wigner pode ser

<sup>1</sup>Daqui em diante, a função de Wigner utilizada refere-se à expressão de tempo igual, em vez da covariante.

calculada como uma transformada de Weyl aplicada ao operador densidade,

$$\begin{aligned}
\omega_{\xi\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{k}; t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathcal{E} W_{\lambda\xi}(\mathbf{x}, k) \\
&= \pi^{-1} \sum_{j,m} \exp[i(k_{0,j} - k_{0,m})t] \int d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathcal{E} \exp[-i(2\mathcal{E} - k_{0,j} - k_{0,m})\tau] \\
&\quad \times \pi^{-3} \int d^3\mathbf{u} \exp[2i\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}] \bar{\psi}_{\lambda,j}(\mathbf{x} - \mathbf{u}) \psi_{\xi,m}(\mathbf{x} + \mathbf{u}) \\
&= \pi^{-3} \sum_{j,m} \exp[i(k_{0,j} - k_{0,m})t] \int d^3\mathbf{u} \exp[2i\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}] \bar{\psi}_{\lambda,j}(\mathbf{x} - \mathbf{u}) \psi_{\xi,m}(\mathbf{x} + \mathbf{u}), \quad (2.16)
\end{aligned}$$

onde a última linha é obtida avaliando as integrais sobre  $\tau$  e depois  $\mathcal{E}$ . A definição acima é compreendida como uma função de Wigner média em energia para um referencial fixo. Além disso, ela não é igual à soma das funções de Wigner correspondentes a estados estacionários, dado que a linearidade da equação de Dirac é perdida ao se mover para o espaço de fase.

Abrindo mão da covariância, a nova definição da função de Wigner permite introduzir uma decomposição apenas em geradores Hermitianos (ZHUANG; HEINZ, 1996),

$$\begin{aligned}
(\omega_{\gamma_0})(\{q\}) &= 1/4 \left[ f_0(\{q\}) + \gamma_5 f_1(\{q\}) - i\gamma_0\gamma_5 f_2(\{q\}) + \gamma_0 f_3(\{q\}) \right. \\
&\quad \left. - \gamma_0\gamma_5 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{g}_0(\{q\}) + \gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{g}_1(\{q\}) - i\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{g}_2(\{q\}) - \gamma_5 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{g}_3(\{q\}) \right], \quad (2.17)
\end{aligned}$$

onde as densidades no espaço de fases Eqs. (2.9)-(2.13) foram divididas em componentes temporais ( $f_0, f_1, f_2, f_3$ ) e espaciais ( $\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ ), ou seja,  $\mathbf{g}_i = (g_i^x, g_i^y, g_i^z)$ . Os índices espinoriais foram omitidos para facilitar a notação. Nota-se que abrindo mão da covariância,  $\omega_{\gamma_0}$  é de fato uma matriz Hermitiana, pois todas as combinações de matrizes que aparecem acima também o são.

## 2.1 O FORMALISMO DE WIGNER EM UMA TEORIA DE INFORMAÇÃO

De forma similar ao formalismo não-relativístico, a densidade de probabilidade pode ser obtida com a soma dos elementos diagonais identificados por  $\lambda = \xi$ . Ainda é necessário integrar sobre o espaço de fase, ou seja, a conservação da componente tipo-tempo da componente vetorial é equivalente a

$$\int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{k} Tr [\gamma_0 \omega_{\xi\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{k}; t)] = \mathcal{N}, \quad (2.18)$$

onde a operação de traço é sobre índices espinoriais, e  $\mathcal{N}$  depende apenas dos coeficientes da superposição se os estados quânticos forem ortonormalizados; se houver um único estado (estacionário), segue-se que  $\mathcal{N} = 1$ . Isso é uma generalização da função de Wigner tipo Schrödinger (WIGNER, 1932) que incorpora a estrutura de grupo  $SU(2) \otimes SU(2)$  associada a espinores de Dirac no formalismo de espaço de fases de Weyl-Wigner. De uma perspectiva semelhante, uma extensão para misturas estatísticas também é possível, com a pureza quântica para espinores de Dirac generalizada para (BERNARDINI, 2020a)

$$\mathcal{P} = 8\pi^3 \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{k} \text{Tr} \left[ (\gamma^0 \omega(\mathbf{x}, \mathbf{k}; t))^2 \right] = 8\pi^3 \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{k} \text{Tr} \left[ \omega(\mathbf{x}, \mathbf{k}; t) \omega^\dagger(\mathbf{x}, \mathbf{k}; t) \right], \quad (2.19)$$

onde o fator extra de  $8\pi^3$  assegura a restrição de estado puro como  $\mathcal{P} = 1$ . Claro, isso é uma extensão direta da expressão de pureza para a mecânica quântica não-relativística,  $\text{Tr}[\hat{\rho}^2]$ , uma vez que a matriz densidade é identificada com a função de Wigner através da transformada de Weyl de operadores quânticos (CASE, 2008; BERNARDINI, 2020a). Em ambos os casos, a pureza quântica quantifica a perda de informação que pode ser associada a interações sistema-ambiente, como os efeitos de termalização que suprimem flutuações quânticas (SILVA; BERNARDINI, 2020).

Em analogia à teoria de informação, deseja-se quantificar a informação armazenada nas variáveis contínuas, o espaço de fases, e nas variáveis discretas, o espaço de Hilbert de spin-paridade. A motivação de se estudar os biespinores como qubits correlacionados advém da estrutura de grupo implícita da equação de Dirac, que pode ser escrita na seguinte forma para uma partícula massiva livre,

$$H = \mathbf{k} \cdot (\sigma_x^{(P)} \otimes \boldsymbol{\sigma}^{(S)}) + m(\sigma_z^{(P)} \otimes I_2^{(S)}), \quad (2.20)$$

onde  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  são as matrizes de Pauli, e os graus de liberdade discretos spin ( $S$ ) e a paridade ( $P$ ) podem ser identificados. No entanto, o emaranhamento entre esses graus de liberdade internos é finito apenas após a introdução de um acoplamento externo (BITTENCOURT; BERNARDINI, 2016).

Ao se introduzir algum tipo de localização, variáveis contínuas também são relevantes, como discutido na seção anterior. Deseja-se, portanto, estender a abordagem da informação quântica para incluir o espaço de fases de uma partícula de Dirac confinada. Para isso, a informação relativa a cada espaço de Hilbert será quantificada em termos da entropia de von Neumann.

A entropia pode ser calculada a partir da matriz densidade para cada espaço de Hilbert ao se calcular o traço parcial nas variáveis que se deseja eliminar. A matriz de spin-paridade é obtida por uma integração no espaço de fases,

$$\rho_{SP} = \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{k} \omega(\mathbf{x}, \mathbf{k}; t) \gamma^0, \quad (2.21)$$

que, a propósito, também é um operador densidade válido para sistemas de dois qubits, pois é hermitiano e pode ser normalizado. No entanto, é uma matriz densidade reduzida, pois a média no espaço de fases desempenha o papel de um traço sobre variáveis contínuas. Por outro lado, a matriz densidade no espaço de fases é escrita como

$$\rho_{\{\mathbf{x}, \mathbf{k}\}} = \text{Tr}[\omega(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \gamma_0], \quad (2.22)$$

onde, daqui em diante,  $\text{Tr}[\dots]$  é o traço sobre os índices espinoriais. Ela também é uma matriz densidade reduzida, não exibindo pureza unitária. Ambas as matrizes acima são necessárias para avaliar o perfil informacional em termos da entropia, a partir da definição da informação mútua entre os graus de liberdade spin-paridade e posição-momento,

$$M_{x, k_x}^{SP(vN)} = \mathcal{S}_{\{x, k_x\}}^{(vN)} + \mathcal{S}_{SP}^{(vN)} - \mathcal{S}_{Tot}^{(vN)}, \quad (2.23)$$

onde o último termo  $\mathcal{S}_{Tot}^{(vN)}$  quantifica a entropia no espaço de Hilbert total. Essa quantidade é nula caso o espaço de fases seja estatisticamente independente dos graus de liberdade discretos e, portanto,  $\mathcal{S}_{Tot}^{(vN)} = \mathcal{S}_{\{x, k_x\}}^{(vN)} + \mathcal{S}_{SP}^{(vN)}$  (THOMAS; JOY, 2006). Por outro lado, caso existam correlações, a informação mútua quantifica a informação que pode ser inferida sobre a (quasi-) distribuição de posição e momento, a partir do estado de spin-paridade, e vice-versa.

No entanto, será útil primeiro linearizar a entropia de von Neumann. De forma instrutiva, o caso em uma dimensão espacial é escrito como

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{(vN)} &= -\ln(2\pi) - \int_V dV W \ln(W) = - \int_V dV W \ln(2\pi W) = \int_V dV W - 2\pi \int_V dV W^2 + \dots \\ &= 1 - \mathcal{P} + \mathcal{O}(W^3), \end{aligned} \quad (2.24)$$

onde  $dV$  é elemento de integração no espaço de fases  $dx dp$  para uma quasi-densidade de probabilidade localizada  $W$  em termos da pureza calculada no subespaço correspondente. Tanto a matriz de Wigner no espaço de Hilbert composto, quanto a matriz densidade reduzida no espaço de fases podem ser expandidas da forma acima. Nota-se que  $W$  deve satisfazer o princípio da incerteza de Heisenberg, o que garante a validade da expansão<sup>2</sup>. Por outro lado, para a matriz densidade  $\rho_{SP}$  assume-se que a entropia linear possa também ser utilizada, embora a aproximação seja feita nesse caso em torno de um estado puro.

A entropia linear com relação ao espaço de Hilbert de spin-paridade pode então ser escrita como

$$\mathcal{I}^{SP} = 1 - \text{Tr}[\rho_{SP}^2]. \quad (2.25)$$

Para sistemas de variáveis contínuas, a operação traço é substituída por uma integral no espaço de fases,

$$\mathcal{I}_{\{\mathbf{x}, \mathbf{k}\}} = 1 - (2\pi)^3 \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{k} \rho^2(\mathbf{x}, \mathbf{k}), \quad (2.26)$$

com  $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \rho_{\{\mathbf{x}, \mathbf{k}\}}$ , correspondente à entropia linear relativa ao espaço de fases. O fator de normalização aparece naturalmente porque o segundo termo do lado direito quantifica a pureza quântica no espaço de Hilbert de variáveis contínuas (CASE, 2008). Consequentemente, os estados puros no espaço de Hilbert reduzido também são estados de entropia zero, e nenhuma incerteza ou informação é armazenada nas variáveis remanescentes.

Essas definições colocam em pé de igualdade os graus de liberdade do espinor e do espaço de fase. As entropias linearizadas são particularmente úteis para cálculos algébricos, porque as integrais envolvendo potências arbitrárias de matrizes densidade localizadas tipicamente não podem ser feitas em termos de funções elementares. Portanto, a informação armazenada na função Wigner para tempos iguais será avaliada em termos desses quantificadores. A expressão para a informação mútua linearizada se simplifica para (BERNARDINI, 2020a),

$$M_{\{\mathbf{x}, \mathbf{k}\}}^{SP} = \mathcal{I}_{\{\mathbf{x}, \mathbf{k}\}} + \mathcal{I}^{SP} - (1 - \mathcal{P}). \quad (2.27)$$

A entropia linear com relação à matriz densidade global precisa ser subtraída para levar em conta a perda de informações (ou entropia) da matriz densidade com relação ao espaço de

<sup>2</sup>Precisamente, a expansão é feita em torno de  $W = (2\pi)^{-1}$  (em unidades adimensionais), sendo que a quasi-densidade de probabilidade deve satisfazer  $|W| \leq \pi^{-1}$  (CASE, 2008). Assim, para distribuições que são suficientemente localizadas e positivas, como funções gaussianas, a expansão é válida.

Hilbert total. Observa-se que o quantificador de informação mútua é sempre uma quantidade não negativa. Para estados mistos, essa medida é degradada devido à incerteza da matriz densidade global e é sempre menor do que a soma das entropias individuais com relação a cada espaço de Hilbert.

### 2.1.1 Emaranhamento de Formação

Para investigar como as correlações clássicas e quânticas podem ser distinguidas em um determinado estado, pode-se também recorrer ao emaranhamento de formação, um quantificador de emaranhamento. Originalmente, essa medida foi obtida ao se demonstrar que uma quantidade mínima de informação quântica é necessária, na forma de singletos (no caso de sistemas de qubits de spin 1/2) parcialmente emaranhados, para se produzir um estado arbitrário (BENNETT et al., 1996). Durante essa conversão, a entropia de emaranhamento é conservada e, portanto, torna-se um quantificador relevante da não separabilidade em sistemas de dois qubits.

A medida de não separabilidade para estados puros é dada pelo emaranhamento de formação, enquanto a extensão para estados mistos pode ser definida a partir da *convex roof*. Essa construção corresponde a um algoritmo em duas etapas. Primeiro, obtém-se o emaranhamento médio de todas as decomposições em estados puros. Segundo, escolhe-se o valor mínimo obtido para o emaranhamento. De forma concisa (WOOTTERS, 1998),

$$E_{EoF}[\rho] = \min_{\rho_k} \sum_k q_k E_{vN}[\rho_k]. \quad (2.28)$$

Por outro lado, esse quantificador também pode ser relacionado à concorrência quântica  $C[\rho]$ ,

$$E_{EoF}[\rho] = \mathcal{E} \left[ \frac{1 - \sqrt{1 - C^2[\rho]}}{2} \right], \quad (2.29)$$

com  $\mathcal{E}[\lambda] = -\lambda \log_2 \lambda - (1 - \lambda) \log_2(1 - \lambda)$ , e onde  $C[\rho]$  é dado para sistemas de dois qubits como

$$C[\rho] = \max\{\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4, 0\}, \quad (2.30)$$

onde  $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4$  são os autovalores do operador  $\sqrt{\sqrt{\rho}(\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y)\sqrt{\rho}}$  e  $\rho^*$  é o operador densidade após a conjugação complexa. Assim, a concorrência quântica é também uma medida de não separabilidade. Para estados puros, uma definição alternativa pode ser



utilizada,

$$C[\varrho] = \sqrt{\langle w|\tilde{\rho}|w\rangle} = |\langle w|\tilde{w}\rangle| = \sqrt{\text{Tr}[\varrho\tilde{\varrho}]}, \quad (2.31)$$

com  $\varrho = |w\rangle\langle w|$ , onde  $|\tilde{w}\rangle$  é o estado após o *spin flip*,

$$|\tilde{w}\rangle = \sigma_y^{(1)} \otimes \sigma_y^{(2)} |w^*\rangle, \quad (2.32)$$

e “\*” a conjugação complexa. Como descrito anteriormente, identifica-se a matriz densidade com  $\varrho \equiv \gamma^0 \omega$ , onde a decomposição  $SU(2) \otimes SU(2)$  do operador de spin flip é  $\gamma^2 = i\sigma_y^{(1)} \otimes \sigma_y^{(2)}$  (BERNARDINI, 2020a). Logo, a matriz densidade após o operador de spin flip é  $\tilde{\varrho} \equiv (-i\gamma^2)\gamma^0 \omega^* (-i\gamma^2)$ .

No entanto, a fórmula obtida para estados mistos não é trivial. Uma alternativa é reconsiderar o algoritmo da obtenção da concorrência. Nomeadamente, encontrar um conjunto de matrizes densidade puras que realizam  $\varrho$  (agora um estado misto) com uma concorrência única. Nesse caso, a concorrência média,

$$C[\varrho] = \min_{\varrho_k} \sum_k q_k C[\varrho_k], \quad (2.33)$$

é igual à concorrência de estado puro para o conjunto que minimiza o quantificador, já que  $\sum_k q_k = 1$  (WOOTTERS, 1998). Observa-se que em grande parte dos sistemas, a distribuição de probabilidade  $q_k$  não é única, o que torna o algoritmo de minimização uma tarefa numericamente complexa.

Todavia, em sistemas com algum tipo de confinamento, as autoenergias são discretizadas, e os autoestados do Hamiltoniano são rotulados por um número quântico inteiro. De forma similar, existem estados mistos que também são rotulados por um único número quântico (discreto) adicional, havendo um conjunto reduzido – ou mesmo um único conjunto – de estados puros que podem ser utilizados na decomposição do estado misto. Se isso é verificado, o algoritmo de minimização na eq. (2.33) é trivial. Na presença de um campo magnético, o número quântico inteiro identifica as órbitas de Landau, simplificando as decomposições de estados mistos discutidos no capítulo 5.

Para obter os quantificadores discutidos acima, as soluções estacionárias da equação de Dirac em um campo magnético constante são introduzidas a seguir, com as correspondentes matrizes de Wigner.

## 2.2 ESPINORES EM UM CAMPO MAGNÉTICO CONSTANTE

Nesta seção, investigam-se as soluções da equação de Dirac com a inclusão de um campo magnético por meio do acoplamento minimal. Assumindo um campo magnético ao longo da direção  $z$ , essa interação pode ser introduzida por meio do potencial vetor  $\mathbf{A}$  tal que  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \mathcal{B} \hat{z}$ . Diversas configurações são permitidas para o potencial vetor. Por simplicidade, restringem-se os graus de liberdade contínuos a apenas uma direção com  $\mathbf{A} = \mathcal{B} x \hat{y}$ .

O acoplamento minimal na equação de Dirac é introduzido com  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + (-1)^r e\mathbf{A}$ , onde  $e > 0$  é a unidade de carga, com  $r = 1, 2$  descrevendo partículas com carga negativa e positiva respectivamente. Desse modo, a Hamiltoniana para uma partícula de massa  $m$  assume a forma (BAGROV; GITMAN, 2014)

$$H_B = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} + (-1)^r e\mathbf{A}) + \beta m. \quad (2.34)$$

Para resolver a equação de Dirac,  $H_B \psi = E \psi$ , as soluções estacionárias  $\psi$  são escritas como

$$\psi = e^{-iEt} \begin{pmatrix} \phi_a \\ \phi_b \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

de modo que  $\phi_{a,b}$  são espinores de duas componentes. As soluções no espaço das configuração podem ser construídas a partir da relação de comutação canônica,  $[\mathbf{x}, \mathbf{p}] = \mathbf{i}$ . Nessa base o operador momento é dado por  $\mathbf{p} = -i\nabla$ . Além disso, na representação de Dirac,

$$\boldsymbol{\alpha} = \gamma_0 \boldsymbol{\gamma} = (\sigma_z \otimes I_2)(i\sigma_y \otimes \boldsymbol{\sigma}) = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Assim, utilizando a notação por blocos, a equação de Dirac pode ser escrita na forma matricial,

$$\left[ \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{p} + (-1)^r e\mathbf{A}) + m \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \phi_a \\ \phi_b \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \phi_a \\ \phi_b \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

onde cada linha pode ser considerada separadamente,

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\nabla + (-1)^r e\mathbf{A})\phi_b, = (E - m)\phi_a \quad (2.38)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\nabla + (-1)^r e\mathbf{A})\phi_a = (E + m)\phi_b. \quad (2.39)$$

Nota-se que as componentes  $\phi_{a,b}$  estão acopladas. Isolando  $\phi_b$  na segunda equação acima e substituindo na primeira, obtém-se uma equação diferencial apenas para  $\phi_a$ ,

$$\begin{aligned} (E^2 - m^2)\phi_a &= \left[ \boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\nabla + (-1)^r e\mathbf{A}) \right]^2 \phi_a \\ &= \left[ -\nabla^2 + (e\mathcal{B})^2 x^2 - (-1)^r e\mathcal{B} \left( 2i x \frac{\partial}{\partial y} - \sigma_z \right) \right] \phi_a. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Como a equação obtida não depende explicitamente das coordenadas  $y$  e  $z$ , os momentos correspondentes,  $\hat{p}_y$  e  $\hat{p}_z$ , são grandezas conservadas, comutando, portanto, com a Hamiltoniana,  $[H_B, \hat{p}_y] = [H_B, \hat{p}_z] = 0$ . Assim, esses três operadores compartilham os mesmos autoestados, ou seja,  $\hat{p}_z \phi_a = k_z \phi_a$  e  $\hat{p}_y \phi_a = k_y \phi_a$ <sup>3</sup>. Além disso, como  $[H_B, \sigma_z] = 0$ , pode-se impor que  $\phi_a$  seja também autoestado de  $\sigma_z$ ,

$$\phi_a \equiv \phi_a^\pm(\mathbf{x}) = \exp[i(k_y y + k_z z)] \mathcal{F}_\pm(x) \chi_\pm, \quad (2.41)$$

com  $\chi_\pm$  os autoestados de  $\sigma_z$ . Obtém-se com a eq. (2.40) a equação diferencial para  $\mathcal{F}_\pm(x)$ ,

$$\frac{d^2 \mathcal{F}_\pm}{dx^2} - (e\mathcal{B}x + (-1)^r k_y)^2 \mathcal{F}_\pm + (E^2 - m^2 - k_z^2 \mp (-1)^r e\mathcal{B}) \mathcal{F}_\pm = 0, \quad (2.42)$$

ou seja, equivalente à equação de Hermite,

$$\left[ \frac{d^2}{ds_r^2} - s_r^2 + \zeta_{r,\pm} \right] \mathcal{F}_\pm(s_r) = 0, \quad (2.43)$$

com a origem do sistema de coordenada  $x$  agora deslocado para

$$s_r = \sqrt{e\mathcal{B}} \left( x + (-1)^r \frac{k_y}{e\mathcal{B}} \right). \quad (2.44)$$

---

<sup>3</sup>Como  $\hbar = 1$ , as soluções de onda plana são escritas em termos dos momentos  $k_z = p_z$  e  $p_y = k_y$ , onde, no espaço dos momentos,  $p_z$  e  $p_y$  são números reais. Para evitar confusão com os operadores hermitianos, utilizamos os momentos  $k_z$  e  $k_y$ .

As autofunções dependem de  $r$  e, portanto, partículas com carga positiva e negativa estão separadas para um mesmo  $k_y \neq 0$ . Para obter uma solução, impõe-se que o parâmetro

$$\zeta_{r,\pm} = \frac{E^2 - m^2 - k_z^2 \mp (-1)^r e\mathcal{B}}{e\mathcal{B}}. \quad (2.45)$$

seja  $\zeta_{r,\pm} = 2\nu + 1$  para  $\nu = 0, 1, 2, \dots$ . Caso contrário, as soluções não são bem definidas. Por exemplo, tais funções não são quadrado integráveis. Assim, os autovalores assumem a forma

$$E_{\nu,\pm}^2 = m^2 + k_z^2 + [(2\nu + 1) \mp (-1)^r] e\mathcal{B}, \quad (2.46)$$

com  $\mathcal{F}_{\pm}(s)$  relacionadas às funções de Hermite normalizadas,

$$\mathcal{F}_{\pm}(s) = \mathcal{F}_n(s) = \left( \frac{\sqrt{e\mathcal{B}}}{n! 2^n \sqrt{\pi}} \right)^{1/2} e^{-s^2/2} H_n(s). \quad (2.47)$$

As relações de ortonormalidade e completeza são respectivamente,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_n(s) \mathcal{F}_m(s) ds = \sqrt{e\mathcal{B}} \delta_{nm}, \quad (2.48)$$

e

$$\sum_n \mathcal{F}_n(s) \mathcal{F}_n(s') = \sqrt{e\mathcal{B}} \delta(s - s') = \delta(x - x'). \quad (2.49)$$

Desse modo, temos uma base adequada para utilizar integrais no espaço das configurações. Vale notar que a relação de ortogonalidade é válida apenas para uma mesma coordenada  $s$ , de modo que há uma base ortogonal para cada  $r$ .

A partir da eq. (2.46), os autovalores podem ser expressos de uma única forma,

$$E_n^2 = m^2 + k_z^2 + 2n e\mathcal{B}. \quad (2.50)$$

Para obter essa expressão, considere  $r = 1$  (carga negativa). Com a solução "+", impõe-se  $\nu = n - 1$  e com a solução "-",  $\nu = n$ . Porém, para  $r = 2$ , a solução "+" pode ser obtida com  $\nu = n$  e para "-",  $\nu = n - 1$ , de modo que todos os autovalores para  $n \neq 0$  podem ser expressos da forma acima. No entanto, quando  $n = 0$ , a única solução para  $r = 1$  é obtida com "-". Por outro lado, se  $r = 2$ , a solução é obtida com "+" na eq. (2.46). Portanto, o estado fundamental é o único estado não degenerado com relação ao spin.

Deste modo, as soluções possuem uma degenerescência infinita em  $k_y$  e mais uma dupla degenerescência de spin (se  $n \neq 0$ ). Além disso, as soluções  $E_n < 0$  estão naturalmente incluídas, o que é esperado para uma equação relativística. Explicitamente, os autovalores finalmente assumem a forma

$$E_n = \pm \sqrt{m^2 + k_z^2 + 2n e\mathcal{B}}, \quad (2.51)$$

onde agora o sinal da expressão não possui relação o operador  $\sigma_z$ , mas ao operador de paridade intrínseca,  $\gamma_0$ . No entanto, devido ao campo magnético, os estados estacionários não são mais autoestados de  $\gamma_0$ , pois  $[H_B, \gamma_0] \neq 0$ .

Retornando para a forma completa dos espinores, as soluções estacionárias introduzidas na eq. (2.35) podem ser expressas na forma

$$\exp[i((-1)^r E_n t + k_y y + k_z z)] u_{n,r}^\pm(s_r), \quad (2.52)$$

com

$$u_{n,1}^+(s_r) = \sqrt{\eta_n} \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{n-1}(s_r) \\ 0 \\ A_n \mathcal{F}_{n-1}(s_r) \\ -B_n \mathcal{F}_n(s_r) \end{pmatrix}, \quad u_{n,1}^-(s_r) = \sqrt{\eta_n} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{F}_n(s_r) \\ -B_n \mathcal{F}_{n-1}(s_r) \\ -A_n \mathcal{F}_n(s_r) \end{pmatrix}, \quad (2.53)$$

as soluções com  $E_n > 0$  e

$$u_{n,2}^-(s_r) = \sqrt{\eta_n} \begin{pmatrix} A_n \mathcal{F}_{n-1}(s_r) \\ B_n \mathcal{F}_n(s_r) \\ \mathcal{F}_{n-1}(s_r) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_{n,2}^+(s_r) = \sqrt{\eta_n} \begin{pmatrix} B_n \mathcal{F}_{n-1}(s_r) \\ -A_n \mathcal{F}_n(s_r) \\ 0 \\ \mathcal{F}_n(s_r) \end{pmatrix}, \quad (2.54)$$

as soluções com  $E_n < 0$ . As constantes adimensionais utilizadas,

$$A_n = \frac{k_z}{E_n + m}, \quad B_n = \frac{\sqrt{2n e\mathcal{B}}}{E_n + m}, \quad \text{and} \quad \eta_n = \frac{E_n + m}{2E_n}, \quad (2.55)$$

determinam o regime de interesse. Pode-se escolher apenas duas constantes, pois elas satisfazem a relação  $\eta_n(A_n^2 + B_n^2 + 1) = 1$  e, além disso,  $0 \leq A_n, B_n \leq 1$ . Por exemplo, o parâmetro  $B_n$  pode ser ajustado para se introduzir um campo externo fraco com  $B_n \approx 0$ , ou um campo externo forte com  $B_n \approx 1$ . Ambos os casos serão estudados nos próximos capítulos.

### 2.2.1 Funções de Wigner estacionárias

Uma vez que os níveis de Landau foram obtidos, as funções de Wigner podem ser obtidas imediatamente com a eq. (2.16), a qual envolve o cálculo de 16 componentes matriciais. Para cada componente, calcula-se a transformada de Fourier indicada. No entanto, muitas dessas componentes se repetem ou são nulas, e as funções escalares no espaço de fases se resumem a apenas dois tipos, como obtido abaixo.

Para posteriormente estudar superposições quânticas, é necessário também fixar a origem do sistema de coordenadas. Escolhendo  $s_{r=1} \equiv s$ , as soluções com  $E > 0$  são obtidas com (BERNARDINI, 2020a)

$$\omega_{n,1}^+(s, k_x) = \eta_n \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{n-1} & 0 & -A_n \mathcal{L}_{n-1} & B_n \mathcal{M}_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_n \mathcal{L}_{n-1} & 0 & -A_n^2 \mathcal{L}_{n-1} & A_n B_n \mathcal{M}_n \\ -B_n \mathcal{M}_n & 0 & A_n B_n \mathcal{M}_n & -B_n^2 \mathcal{L}_n \end{pmatrix}, \quad (2.56)$$

$$\omega_{n,1}^-(s, k_x) = \eta_n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_n & B_n \mathcal{M}_n & A_n \mathcal{L}_n \\ 0 & -B_n \mathcal{M}_n & -B_n^2 \mathcal{L}_{n-1} & -A_n B_n \mathcal{M}_n \\ 0 & -A_n \mathcal{L}_n & -A_n B_n \mathcal{M}_n & -A_n^2 \mathcal{L}_n \end{pmatrix}, \quad (2.57)$$

e o conjunto correspondente a  $E < 0$  é mapeado para as soluções de paridade intrínseca negativa,

$$\omega_{n,2}^-(s, k_x) = \eta_n \begin{pmatrix} A_n^2 \mathcal{L}_{n-1} & A_n B_n \mathcal{M}_n & -A_n \mathcal{L}_{n-1} & 0 \\ A_n B_n \mathcal{M}_n & B_n^2 \mathcal{L}_n & -B_n \mathcal{M}_n & 0 \\ A_n \mathcal{L}_{n-1} & B_n \mathcal{M}_n & -\mathcal{L}_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.58)$$

$$\omega_{n,2}^+(s, k_x) = \eta_n \begin{pmatrix} B_n^2 \mathcal{L}_{n-1} & -A_n B_n \mathcal{M}_n & 0 & -B_n \mathcal{M}_n \\ -A_n B_n \mathcal{M}_n & A_n^2 \mathcal{L}_n & 0 & A_n \mathcal{L}_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_n \mathcal{M}_n & -A_n \mathcal{L}_n & 0 & -\mathcal{L}_n \end{pmatrix}, \quad (2.59)$$

onde as funções no espaço de fases são dadas em termos dos polinômios de Laguerre,

$$\mathcal{L}_n \equiv \mathcal{L}_n(s, k_x) = \frac{(-1)^n \sqrt{e\mathcal{B}}}{\pi} \exp[-(s^2 + k_x^2)] L_n[2(s^2 + k_x^2)], \quad (2.60)$$

com  $L_n$  o polinômio de Laguerre de ordem  $n$  e

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n &\equiv \mathcal{M}_n(s, k_x) \\ &= \frac{(-1)^n}{2\pi} \sqrt{\frac{e\mathcal{B}}{n}} \exp[-(s^2 + k_x^2)] \left( \frac{d}{ds} L_n[2(s^2 + k_x^2)] \right). \end{aligned} \quad (2.61)$$

As funções acima exibem relações de ortogonalidade equivalentes às exibidas pelos polinômios de Laguerre, como pode ser esperado da transformada de Fourier na eq. (2.16). Isso pode ser resumido nas seguintes identidades,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \mathcal{L}_n(s, k_x) = 1 \quad (2.62)$$

$$\frac{2\pi}{\sqrt{e\mathcal{B}}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \mathcal{L}_n(s, k_x) \mathcal{L}_m(s, k_x) = \delta_{mn}, \quad (2.63)$$

e para a função ímpar,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \mathcal{M}_n(s, k_x) = 0, \quad (2.64)$$

$$\frac{2\pi}{\sqrt{e\mathcal{B}}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \mathcal{M}_n(s, k_x) \mathcal{M}_m(s, k_x) = \delta_{mn}. \quad (2.65)$$

Essas relações garantem a conservação de probabilidade das funções de Wigner encontradas. Além disso, as integrais no espaço de fases podem ser simplificadas ao se recorrer às identidades acima.

### 3 SUPERPOSIÇÃO E EMARANHAMENTO EM ESTADOS GAUSSIANOS

Para investigar a relação entre dinâmica e os quantificadores de informação, superposições podem ser estudadas a partir da função de Wigner proposta na eq. (2.16), a qual permite imediatamente estender a abordagem para estados não estacionários. Ao se obter a decomposição de um estado em relação a uma base ortogonal, a função de Wigner permite calcular a evolução temporal dos quantificadores de informação propostos. Nesse sentido, estados gaussianos podem ser obtidos analiticamente a partir das propriedades dos polinômios de Hermite.

Inicialmente, a superposição de estados para um mesmo nível de Landau pode ser considerada. Por exemplo, o seguinte estado,

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_n^{(1)}(s, t) &= \left( \exp(-iE_n t) u_{n,1}^+ + \exp(iE_n t) (-A_n u_{n,2}^- + B_n u_{n,2}^+) \right) \\
&= \sqrt{\eta_n} \left\{ \exp(-iE_n t) \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{n-1} \\ 0 \\ A_n \mathcal{F}_{n-1} \\ -B_n \mathcal{F}_n \end{pmatrix} + \exp(iE_n t) \begin{pmatrix} (B_n^2 + A_n^2) \mathcal{F}_{n-1} \\ 0 \\ -A_n \mathcal{F}_{n-1} \\ +B_n \mathcal{F}_n \end{pmatrix} \right\} \\
&\equiv \eta_n \begin{pmatrix} \left[ \exp(-iE_n t) + \exp(iE_n t) (A_n^2 + B_n^2) \right] \mathcal{F}_{n-1} \\ 0 \\ -2i \sin(E_n t) A_n \mathcal{F}_{n-1} \\ 2i \sin(E_n t) B_n \mathcal{F}_n \end{pmatrix}, \tag{3.1}
\end{aligned}$$



é simplificado em  $t = 0$  para  $(\mathcal{F}_{n-1} \ 0 \ 0 \ 0)^T$ , de modo que para uma superposição com  $n = 1$ , o estado inicial é gaussiano, pois

$$\mathcal{F}_0(s) = \left( \frac{\sqrt{e\mathcal{B}}}{2\sqrt{\pi}} \right)^{1/2} e^{-s^2/2},$$

onde se observa na eq. (2.47) que  $F_0(s)$  corresponde ao polinômio de Hermite de menor ordem.

A polarização do estado acima é arbitrária e é possível construir uma base de estados com outras polarizações,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_n^{(2)}(s, t) &= \left( \exp(-iE_n t) u_{n,1}^- + \exp(iE_n t) (A_n u_{n,2}^+ + B_n u_{n,2}^-) \right) \\ &\equiv \eta_n \begin{pmatrix} 0 \\ \left[ \exp(-iE_n t) + \exp(iE_n t) (A_n^2 + B_n^2) \right] \mathcal{F}_n \\ 2i \sin(E_n t) B_n \mathcal{F}_{n-1} \\ 2i \sin(E_n t) A_n \mathcal{F}_n \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

ou ainda, com a componentes inferiores,

$$\mathcal{G}_n^{(3)}(s, t) = \left( \exp(iE_n t) u_{n,2}^- + \exp(-iE_n t) (A_n u_{n,1}^+ - B_n u_{n,1}^-) \right) \quad (3.3)$$

e

$$\mathcal{G}_n^{(4)}(s, t) = \left( \exp(-iE_n t) (-B_n u_{n,1}^+ - A_n u_{n,1}^-) + \exp(iE_n t) u_{n,2}^+ \right), \quad (3.4)$$

de modo que qualquer um desses estados pode descrever estados inicialmente gaussianos com diversas polarizações de spin-paridade. No entanto,  $n = 0$  para as configurações  $\mathcal{G}_n^{(2)}$  e  $\mathcal{G}_n^{(4)}$  serão permanentemente Gaussianas porque há apenas dois estados estacionários não-triviais para  $n = 0$ . Por outro lado, as configurações com superíndices ímpares evoluem para estados não gaussianos, de modo que se espera que a escolha da polarização afete aspectos locais do conteúdo informacional, o que também será investigado.

### 3.1 ESTADOS DE GATO COMO SUPERPOSIÇÕES GAUSSIANAS NO ESPAÇO DE FASES

Os estados obtidos acima correspondem a superposições para um mesmo número quântico principal. No entanto, o estado mais genérico é obtido pela superposição de autoestados com diversos números quânticos, na forma

$$\phi_i(s, t) = \mathcal{N}^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mathcal{G}_n^{(i)}(s, t). \quad (3.5)$$

onde a constante de normalização  $\mathcal{N}$  e  $\mathcal{G}_n^{(i)}$  foram obtidos com as eqs. (3.1)-(3.4) com  $i = 1, 2, 3, 4$ . Desse modo, impondo que  $i = 1$ ,  $c_{2n+1} = 0$  e  $c_{2n} = \exp(-a^2/4)(a/\sqrt{2})^{2n}/\sqrt{(2n)!}$ , com  $a$  um parâmetro de distância adimensional, a única componente não-nula para  $t = 0$  é dada por  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$  multiplicado por

$$\exp(-a^2/4) \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_{2n}(s) \frac{(a/\sqrt{2})^{2n}}{\sqrt{(2n)!}} = \left(\frac{e\mathcal{B}}{\pi}\right)^{1/4} e^{-s^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{2n}(s)}{(2n)!} \left(\frac{a}{2}\right)^{2n}. \quad (3.6)$$

A soma infinita pode ser escrita como uma expressão de forma fechada, dadas as seguintes propriedades dos polinômios de Hermite,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} H_{2k}(s) = \exp(-t^2) \cosh(2st) \quad (3.7)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} H_{2k+1}(s) = \exp(-t^2) \sinh(2st). \quad (3.8)$$

Escolhe-se a primeira linha, com  $t = a/2$ . Assim, a soma infinita pode ser expressa como a soma de duas gaussianas. Como apenas os índices pares na eq. (3.5) não são nulos, a eq. (3.6) simplifica para (GRADSHTEYN; RYZHIK, 2014)

$$\phi^S(s, t = 0) = \frac{1}{2} \left(\frac{e\mathcal{B}}{\pi}\right)^{1/4} \left\{ \exp\left[-\frac{1}{2}(s-a)^2\right] + \exp\left[-\frac{1}{2}(s+a)^2\right] \right\} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \quad (3.9)$$

onde o índice  $S$  corresponde a uma superposição simétrica de estados Gaussianos centralizados  $s = \pm a$ : um estado de gato de Dirac simétrico (SILVA; BERNARDINI, 2021). Ao incluir toda a

dependência temporal do espinor com a eq. (3.1), o estado evolui como

$$\phi^S(s, t) = \begin{pmatrix} \phi_1^S(s, t) \\ 0 \\ \phi_3^S(s, t) \\ \phi_4^S(s, t) \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

onde

$$\phi_1^S(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-a^2/4} \mathcal{F}_{2n}(s)}{1 + A_{2n+1}^2 + B_{2n+1}^2} \frac{(a/\sqrt{2})^{2n}}{\sqrt{(2n)!}} \left( e^{-iE_{2n+1}t} + (A_{2n+1}^2 + B_{2n+1}^2) e^{iE_{2n+1}t} \right), \quad (3.11)$$

$$\phi_3^S(s, t) = -2i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-a^2/4} A_{2n+1}}{1 + A_{2n+1}^2 + B_{2n+1}^2} \frac{(a/\sqrt{2})^{2n}}{\sqrt{(2n)!}} \mathcal{F}_{2n}(s) \sin(E_{2n+1}t), \quad (3.12)$$

$$\phi_4^S(s, t) = 2i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-a^2/4} B_{2n+1}}{1 + A_{2n+1}^2 + B_{2n+1}^2} \frac{(a/\sqrt{2})^{2n}}{\sqrt{(2n)!}} \mathcal{F}_{2n+1}(s) \sin(E_{2n+1}t). \quad (3.13)$$

De forma similar, estados de gato antissimétricos (A) podem ser construídos a partir das contribuições ímpares na soma infinita da eq. (3.5), i.e. ao impor  $c_{2n} = 0$  e  $c_{2n+1} = \exp(-a^2/4)(a/\sqrt{2})^{2n+1}/\sqrt{(2n+1)!}$ . Analogamente ao caso anterior,

$$\phi^A(s, t=0) = \frac{1}{2} \left( \frac{e\mathcal{B}}{\pi} \right)^{1/4} \left\{ \exp \left[ -\frac{1}{2}(s-a)^2 \right] - \exp \left[ -\frac{1}{2}(s+a)^2 \right] \right\} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \quad (3.14)$$

e o estado evoluído no tempo pode ser escrito como

$$\phi^A(s, t) = \begin{pmatrix} \phi_1^A(s, t) \\ 0 \\ \phi_3^A(s, t) \\ \phi_4^A(s, t) \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

com

$$\phi_1^A(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-a^2/4} \mathcal{F}_{2n-1}(s)}{1 + A_{2n}^2 + B_{2n}^2} \frac{(a/\sqrt{2})^{2n-1}}{\sqrt{(2n-1)!}} \left( e^{-iE_{2n}t} + (A_{2n}^2 + B_{2n}^2) e^{iE_{2n}t} \right), \quad (3.16)$$

$$\phi_3^A(s, t) = -2i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-a^2/4} A_{2n}}{1 + A_{2n}^2 + B_{2n}^2} \frac{(a/\sqrt{2})^{2n-1}}{\sqrt{(2n-1)!}} \mathcal{F}_{2n-1}(s) \sin(E_{2n}t), \quad (3.17)$$

$$\phi_4^A(s, t) = 2i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-a^2/4} B_{2n}}{1 + A_{2n}^2 + B_{2n}^2} \frac{(a/\sqrt{2})^{2n-1}}{\sqrt{(2n-1)!}} \mathcal{F}_{2n}(s) \sin(E_{2n}t). \quad (3.18)$$

Novamente, diferentes polarizações podem ser obtidas, ao se utilizar  $\mathcal{G}_n^{(2,3,4)}$ , ao invés de  $\mathcal{G}_n^{(1)}$ , na eq. (3.5).

Nota-se que os chamados estados de gato deixam também de ser superposições de estados gaussianos quando  $t \neq 0$ , devido às fases que cada exponencial introduz na evolução temporal. Ainda assim, as condições de normalização e pureza devem ser satisfeitas, o que impõe restrições algébricas sobre os estados.

Dentro da premissa que estados gaussianos são considerados como uma possível realização clássica de uma partícula i. e. localizada no espaço de fases, estados de gato violariam essa noção de classicalidade, pois no presente caso são estados que apresentam uma densidade de probabilidade com picos em duas regiões arbitrariamente distantes no espaço de fases. Além disso, convém ressaltar que estados de gato podem ser encontrados em diversas aplicações, envolvendo múltiplas componentes e apresentando um perfil de emaranhamento explícito (KARIMIPOUR; BAHRAMINASAB; BAGHERINEZHAD, 2002; SHEN et al., 2015), ainda que nestes casos o emaranhamento seja extrínseco i. e. entre partículas distintas. À vista disso, o perfil de emaranhamento intrínseco desses estados será investigado dentro do formalismo de Wigner no espaço de fases.

### 3.2 DINÂMICA DE CORRELAÇÕES INTRÍNSECAS EM UM CAMPO MAGNÉTICO

Nesta seção, as funções de Wigner serão explicitamente calculadas para os estados obtidos anteriormente. Para o estado gaussiano,  $\mathcal{G}_n^{(1)}$  (cf. eq. (3.1)), a função de Wigner é calculada componente a componente a partir da matriz  $\mathcal{G}_n^{(1)}(\mathcal{G}_n^{(1)})^\dagger \gamma_0$ ,

$$\omega_{n,1}(s, k_x; t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t)\mathcal{L}_{n-1}(s, k_x) & 0 & a_{13}(t)\mathcal{L}_{n-1}(s, k_x) & a_{14}(t)\mathcal{M}_n(s, k_x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31}(t)\mathcal{L}_{n-1}(s, k_x) & 0 & a_{33}(t)\mathcal{L}_{n-1}(s, k_x) & a_{34}(t)\mathcal{M}_n(s, k_x) \\ a_{41}(t)\mathcal{M}_n(s, k_x) & 0 & a_{43}(t)\mathcal{M}_n(s, k_x) & a_{44}(t)\mathcal{L}_n(s, k_x) \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

onde a dependência temporal é expressa pelos coeficientes

$$a_{11}(t) = 1 - 4(A_n^2 + B_n^2)\eta^2 \sin^2(E_n t), \quad (3.20)$$

$$a_{33}(t) = -4A_n^2\eta^2 \sin^2(E_n t), \quad (3.21)$$

$$a_{44}(t) = -4B_n^2\eta^2 \sin^2(E_n t), \quad (3.22)$$

$$a_{34}(t) = a_{43}(t) = -4A_n B_n \eta^2 \sin^2(E_n t), \quad (3.23)$$

$$a_{13}(t) = -a_{31}^*(t) = -2i\eta \sin(E_n t) A_n (\cos(E_n t) + i \sin(E_n t)(1 - 2\eta)), \quad (3.24)$$

$$a_{14}(t) = -a_{41}^*(t) = 2i\eta \sin(E_n t) B_n (\cos(E_n t) + i \sin(E_n t)(1 - 2\eta)). \quad (3.25)$$

Convém observar que as componentes não são independentes, o que é sugerido nas três últimas linhas. O comportamento no espaço de fases ainda é descrito por polinômios de Laguerre, como no caso estacionário,

$$\mathcal{L}_n(s, k_x) = (-1)^n \frac{\sqrt{e\mathcal{B}}}{\pi} \exp[-(s^2 + k_x^2)] L_n[2(s^2 + k_x^2)], \quad (3.26)$$

e

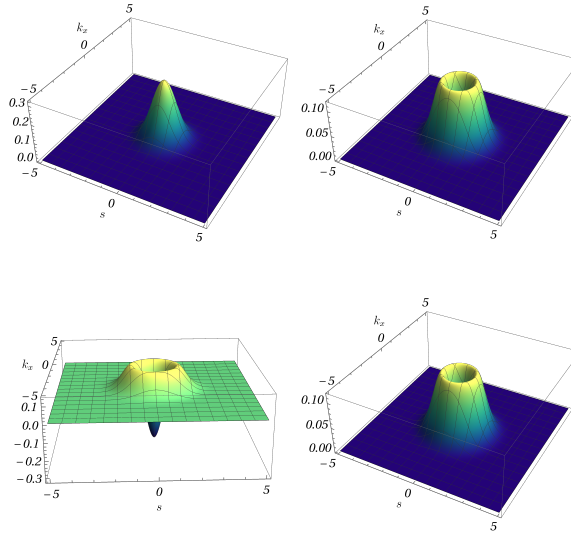
$$\mathcal{M}_n(s, k_x) = \frac{(-1)^n}{2\pi} \sqrt{\frac{e\mathcal{B}}{n}} \exp[-(s^2 + k_x^2)] \left( \frac{d}{ds} L_n[2(s^2 + k_x^2)] \right). \quad (3.27)$$

Desse modo, é possível verificar que a condição de normalização,

$$\int dx \int dk_x \text{Tr}[\omega_{n,1}\gamma_0] = a_{11} - a_{33} - a_{44} = 1, \quad (3.28)$$

é satisfeita. Além disso, considerando o comportamento dos polinômios de Laguerre, o integrando não é necessariamente positivo, exibindo regiões de negatividade a depender do valor do nível de Landau.

Para exemplificar, a evolução temporal da *quasi*-densidade de probabilidade  $\text{Tr}[\omega_{n,i}\gamma^0]$  para  $\mathcal{G}_n^{(1)}$  e  $\mathcal{G}_n^{(2)}$  é comparada na fig. (1). Observa-se que apenas  $\omega_{n,1}(s, k_x; t)$  é uma gaussiana em  $t = 0$  e  $n = 1$ , pois  $\mathcal{L}_0(s, k_x) \propto \exp[-(s^2 + k_x^2)]$  e, portanto, é positiva para qualquer coordenada no espaço de fases. Então, embora a escolha da polarização de spin-paridade afete o caráter localizado de um estado, essa escolha não afeta os resultados após uma integração nas variáveis contínuas. Com essa observação,  $\omega_{n,1}(s, k_x; t)$  será escolhido para se investigar a estrutura informacional.

**Figura 1** – Evolução temporal de um estado inicialmente gaussiano

Evolução temporal da (quasi)densidade de probabilidade  $\frac{1}{\sqrt{e\mathcal{B}}} \text{Tr}[\omega_{n=1,i}\gamma^0]$  no espaço de fases  $(s, k_x)$  para  $i = 1$  (linha superior) e  $i = 2$  (linha inferior). Os estados são inicializados em  $t = 0$  (esquerda) e  $t = \frac{\pi}{2E_1}$  (direita). Os parâmetros foram definidos como  $k_z = e\mathcal{B} = m = 1$ . Fonte: Elaborada pelo Autor.

Para além da normalização do espinor, a pureza do estado também pode ser calculada algebricamente, onde a expressão integrada pode ser escrita em termos das componentes integradas (cf. (3.20)-(3.25)),

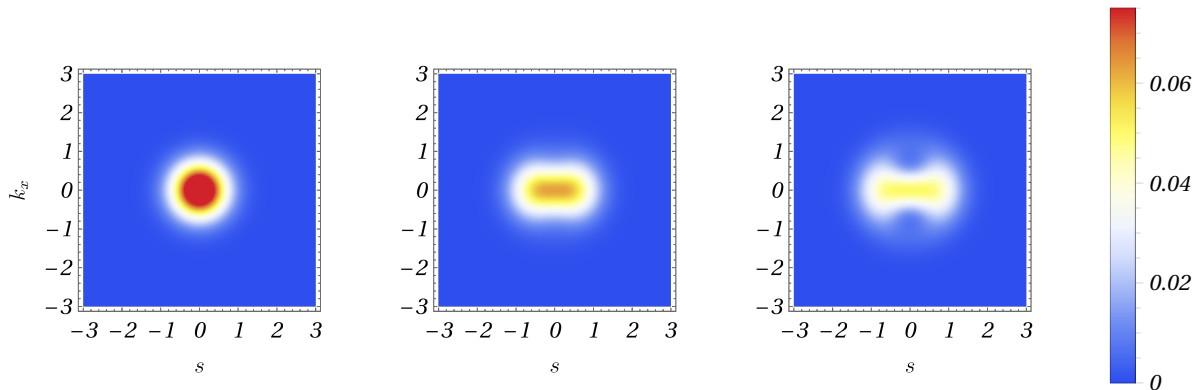
$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \frac{2\pi}{\sqrt{e\mathcal{B}}} \int dx \int dk_x \text{Tr}[(\omega_{n,1}\gamma_0)^2] \\ &= a_{11}^2 + a_{33}^2 + a_{44}^2 + 2|a_{13}|^2 + 2|a_{34}|^2 + 2|a_{14}|^2, \end{aligned} \quad (3.29)$$

e, observando que

$$|a_{13}|^2 = -a_{11}a_{33}, \quad (3.30)$$

$$a_{34}^2 = a_{33}a_{44}, \quad (3.31)$$

$$|a_{14}|^2 = -a_{11}a_{44}, \quad (3.32)$$

**Figura 2** – Positividade da pureza quântica no espaço de fases

Pureza quântica,  $(1/e\mathcal{B})\text{Tr}[(\omega_{n,1}\gamma_0)^2]$  no espaço de fases  $(s, k_x)$ , calculada para um estado gaussiano ( $n = 1$ ). Os resultados também são obtidos para  $k_z = e\mathcal{B} = m = 1$ , e o esquema de cores indica as regiões onde o estado é maximalmente misto (azul). Da esquerda para direita,  $t = (\frac{\pi}{4E_1})j$ , for  $j = 0, 1, 2$ . O estado apresenta um perfil de pureza gaussiano, que se espalha ao longo do eixo  $s$ .

pode-se re-escrever a pureza como

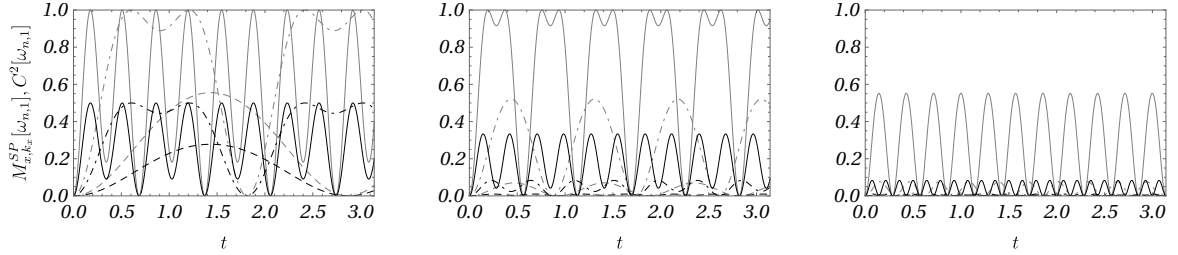
$$\mathcal{P} = (a_{11} - a_{33} - a_{44})^2 = 1, \quad (3.33)$$

i. e. a condição de um estado puro, onde se nota que a expressão entre parênteses,  $a_{11} - a_{33} - a_{44}$ , é a mesma obtida no cálculo da normalização, na eq. (3.28).

Ainda que a condição de estado puro seja satisfeita, vale notar que a pureza quântica não integrada apresenta uma direção preferencial ao longo do eixo  $k_x = 0$  devido aos termos  $\mathcal{M}_n^2(s, k_x)$ , que introduzem uma assimetria entre as coordenadas  $(s, k_x)$ . Isso é ilustrado na fig. (2), onde regiões mistas, indicadas pela cor azul, circundam bolsões de regiões puras, indicadas pelas cores branca e vermelha. Esse comportamento é observado ao longo da evolução da função de Wigner, também afetando localmente o quantificador de pureza. De todo modo, qualquer região no espaço de fases apresenta uma pureza não-negativa, o único resultado fisicamente aceitável.

Com o resultado obtido anteriormente, a informação mútua entre o graus de liberdade de spin-paridade e espaço de fases pode ser calculada. As entropias lineares são calculadas imediatamente, seja para variáveis discretas <sup>1</sup>,

<sup>1</sup>A notação  $\langle \dots \rangle$  indica uma integração no espaço de fases bidimensional, evitando acúmulo de símbolos.

**Figura 3** – Informação mútua em um estado gaussiano

Informação mútua entre espaço de fase e espaço (de Hilbert) de spin-paridade para um estado gaussiano (linhas cinzas) e concorrência quântica (linhas pretas). Para todos os gráficos,  $m = 1$  e, da esquerda para a direita,  $k_z^2 = 0, 10, 100$ ; o campo magnético é também variado com  $eB = 1/10, 1, 10$  para linhas tracejadas, pontilhadas e sólidas, respectivamente.

$$\mathcal{I}_{SP} = 1 - \text{Tr} \left[ (\gamma_0 \langle \omega_{n,1} \rangle)^2 \right] = 8 \sin^2(E_n t) \eta_n^2 B_n^2 \left( 1 - 4B_n^2 \eta_n^2 \sin^2(E_n t) \right), \quad (3.34)$$

seja para variáveis contínuas,

$$\mathcal{I}_{\{x,k_x\}} = 1 - \frac{2\pi}{\sqrt{eB}} \int dx \int dk_x (\text{Tr} [\omega_{n,1} \gamma_0])^2 = 8 \sin^2(E_n t) \eta_n^2 B_n^2 \left( 1 - 4B_n^2 \eta_n^2 \sin^2(E_n t) \right). \quad (3.35)$$

Acidentalmente, as expressões são idênticas e dependem do número quântico principal exclusivamente por meio da expressão  $2neB$ . Assim, para dois estados com  $n$  distintos, é possível ajustar o parâmetro do campo magnético para se obter valores coincidentes, ao menos após a integração. O quantificador de informação mútua é obtido somando-se os resultados anteriores (cf. eq. (2.27)), simplificando para

$$M_{x,k_x}^{SP} = 16 \sin^2(E_n t) \eta_n^2 B_n^2 \left( 1 - 4B_n^2 \eta_n^2 \sin^2(E_n t) \right), \quad (3.36)$$

e é exibido na fig. (3).

Em  $t = 0$ , é nula a correlação entre os graus de liberdade de spin-paridade e espaço de fases. Uma forma de se compreender tal resultado é observando a função de Wigner na eq. (3.19). Nesse instante, pode-se fatorar a dependência espacial, e a função de Wigner pode ser expressa como um produto entre uma matriz, com coeficientes constantes, e uma função no espaço de fases. A fig. (3) confirma que esses graus de liberdade não estão correlacionados inicialmente.



### 3.2.1 Correlações quânticas e decoerência

Ainda que a informação mútua quantifique as correlações entre as variáveis discretas e contínuas, não é possível ainda afirmar que elas sejam de natureza exclusivamente quântica. Isso se deve ao fato de que um estado quântico pode exibir correlações clássicas e quânticas (HENDERSON; VEDRAL, 2001). Para quantificar as correlações quânticas, o conceito de decoerência pode ser útil. Em sistemas de dois qubits, um conjunto de projetores ortogonais é introduzido para os espaços de Hilbert de spin e paridade i. e. tais projetores correspondem a medições com relação à projeção de spin (*up-down*) e paridade (positiva-negativa).

Como apenas os elementos das diagonais correspondem a possíveis medições, os elementos de fora da diagonal da matriz de densidade decairão naquela base específica (VEDRAL, 2003; LUO, 2008b; SCHLOSSHAUER, 2019). Portanto, pode-se considerar uma matriz estocástica com a distribuição de probabilidade dos resultados possíveis na base padrão citada acima. Então, para o caso presente, a base é definida a partir da representação de Dirac. O *ansatz* para a matriz estocástica é obtido a partir da função de Wigner obtida na eq. (3.19), onde os elementos fora da diagonal podem ser descartados. Essa matriz será identificada por  $\omega_{n,1}^{(cl)} = \text{Diag} [a_{11}\mathcal{L}_{n-1} \quad 0 \quad a_{33}\mathcal{L}_n \quad a_{44}\mathcal{L}_{n-1}]$ . Nota-se que os coeficientes  $a_{ij}$  da matriz densidade são não-negativos, pois correspondem a uma distribuição de probabilidade.

Para calcular a contribuição desse estado para a informação mútua, nota-se que ele não é mais um estado puro, pois

$$\mathcal{P}^{(cl)} = a_{11}^2 + a_{33}^2 + a_{44}^2 \leq 1, \quad (3.37)$$

onde a igualdade é verificada apenas em  $t = 0$ . Assim, há de fato uma perda de informação após a medição nesse estado. As entropias lineares também podem ser calculadas,

$$\mathcal{I}_{SP}^{(cl)} = 1 - a_{11}^2 - a_{33}^2 - a_{44}^2, \quad (3.38)$$

e

$$\mathcal{I}_{\{x,k_x\}}^{(cl)} = 1 - a_{11}^2 - a_{33}^2 - a_{44}^2 + 2a_{11}a_{33}. \quad (3.39)$$

Elas permitem construir a informação mútua para função de Wigner diagonal,  $\omega_{n,1}^{(cl)}$ ,

$$M_{x,k_x}^{SP} = -32B_n^4\eta_n^4 \sin^4(E_n t) + 8B_n^2\eta_n^2 \sin^2(E_n t) + 32B_n^2A_n^2\eta_n^4 \sin^4(E_n t). \quad (3.40)$$

Este resultado mostra que uma parte das correlações apresenta uma natureza clássica. Por consequência, a diferença entre a informação mútua total, eq. (3.36), e a informação mútua clássica, eq. (3.40), possui natureza quântica. Para estados puros, correlações quânticas indicam emaranhamento, o qual também pode ser quantificado pela chamada concorrência quântica. Felizmente, ao calcular explicitamente a concorrência via função de Wigner, verifica-se que o grau de não-separabilidade entre spin e paridade de fato concorda com o resultado acima obtido, ou seja: a concorrência quantifica a informação mútua de natureza quântica.

Assim, pode-se considerar inicialmente a seguinte expressão para a concorrência, a partir da eq. (2.31),

$$\begin{aligned} C^2[\omega_{n,1}](s, k_x) &= (-1)\text{Tr}[\omega_{n,1} \gamma^2 \gamma^0 \omega_{n,1}^* \gamma^2 \gamma^0] \\ &= 8\eta_n^2 \sin^2(E_n t) B_n^2 \left[ 1 - 4(A_n^2 + B_n^2) \eta_n^2 \sin^2(E_n t) \right] \\ &\quad \times (\mathcal{L}_n(s, k_x) \mathcal{L}_{n-1}(s, k_x) + \mathcal{M}_n^2(s, k_x)), \end{aligned} \quad (3.41)$$

onde o produto  $\mathcal{L}_n(s, k_x) \mathcal{L}_{n-1}(s, k_x)$  indica regiões de negatividade devido às correlações entre os graus de liberdade de spin-paridade e o espaço de fases, como mostrado na fig. (4). Evidentemente, esse comportamento inesperado no quantificador é corrigido ao se calcular a média no espaço de fases,

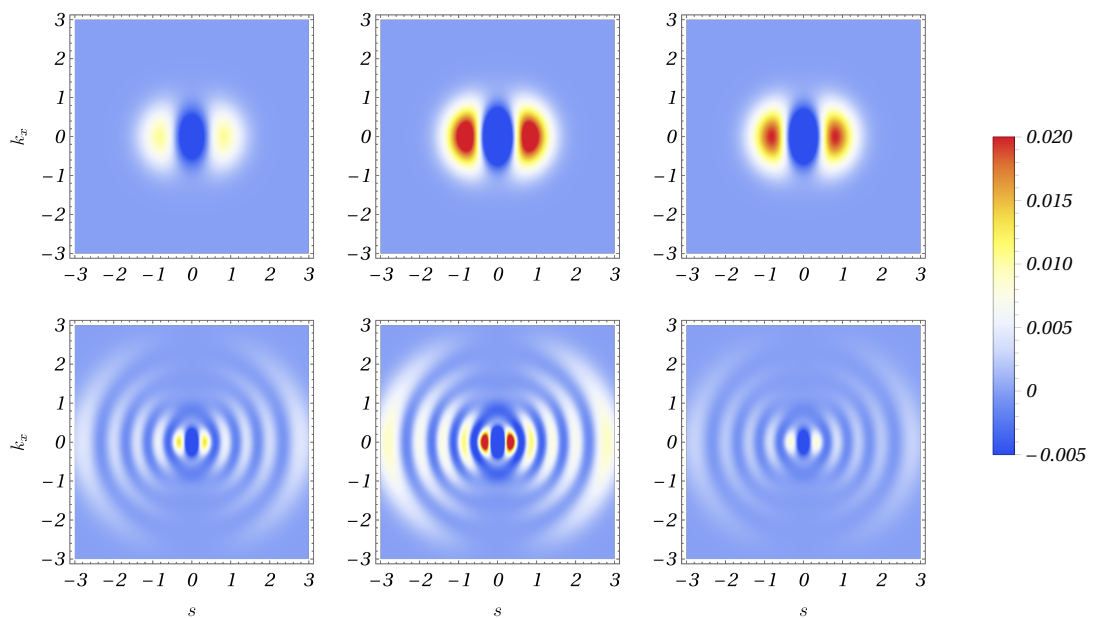
$$C_{SP}^2 = 8\eta_n^4 \sin^2(E_n t) B_n^2 \left( \frac{1}{\eta_n^2} - 4 \sin^2(E_n t) (A_n^2 + B_n^2) \right), \quad (3.42)$$

o qual é a medida correta para a não-separabilidade entre spin e paridade.<sup>2</sup>

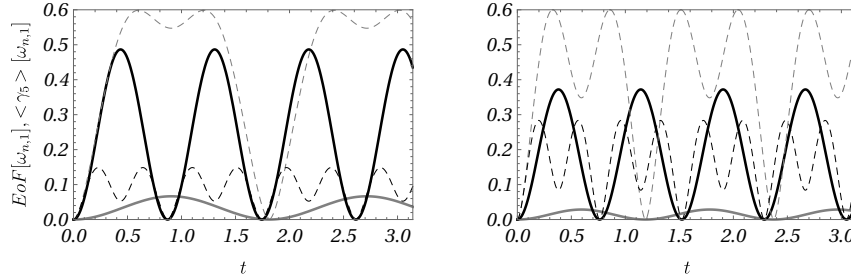
É notável que o resultado acima de fato corresponde à diferença entre as correlações (totais), calculadas na eq. (3.36) e as correlações clássicas da eq. (3.40), como foi previamente sugerido na fig. (3). Portanto, a concorrência quântica deve ser considerada como uma medida de correlação estritamente quântica, de modo que estados separáveis são facilmente identificados a partir de uma escolha específica de parâmetros. Para  $t = (l\pi)/E_n$ , com  $l$  inteiro, obtém-se o estado inicial, que é separável. Para massa nula,  $A_n^2 + B_n^2 = 1$  (2.55), a concorrência também é nula para  $t = \pi(l + 1/2)/E_n$  ( $l$  inteiro).

Por completeza, a concorrência também pode ser relacionada ao fenômeno da oscilação quiral (BITTENCOURT; BERNARDINI, 2016). Foi demonstrado que os valores médios do

<sup>2</sup>A mesma expressão é obtida ao se considerar  $\varrho \equiv \gamma^0 \langle \omega_{n,1} \rangle$ , de modo que a concorrência é calculada após a média no espaço de fases. Portanto, verifica-se que apenas os graus de liberdade discretos são relevantes para esse quantificador.

**Figura 4** – Caráter localizado da concorrência quântica de spin-paridade

Evolução temporal da concorrência quântica localizada no espaço de fases  $(1/e\mathcal{B})C^2[\omega_{n,1}](s, k_x)$  para um estado gaussiano (linha superior), com  $n = 1$ , e para  $n = 5$  (linha inferior). Da esquerda para a direita,  $t = (\pi/j)/E_n$  para  $j = 8, 4, 2$ . Parâmetros adicionais seguem fig. (2). Nota-se o perfil local da concorrência quântica não é definido positivamente devido à correlação intrínseca com os graus de liberdade contínuos.

**Figura 5** – Emaranhamento em um estado inicial gaussiano

$EoF$  (linhas tracejadas) e oscilação quiral  $\langle \gamma_5 \rangle(t)$  para um estado gaussiano. O campo magnético  $eB = 1, 3$  da esquerda para a direita e  $k_z^2 = 1/100, 10$  para linha cinza e preta, respectivamente, e massa unitária.

operador quiral  $\hat{\gamma}_5$  coincidem com os pontos críticos da concorrência para potenciais externos constantes (BITTENCOURT; BERNARDINI; BLASONE, 2016). Aqui, as projeções quirais são obtidas a partir da própria matriz de Wigner,  $\omega_{L,R} = P_{L,R} \omega$ , com os projetores usuais esquerdo e direito,  $P_L = (1 - \hat{\gamma}_5)/2$  e  $P_R = (1 + \hat{\gamma}_5)/2$ . Como  $P_{L,R}P_{L,R} = P_{L,R}$  e  $P_{L,R}P_{R,L} = 0$ , pode-se verificar com a álgebra das matrizes gamas que uma projeção quiral é separável em relação ao spin e paridade. Isso sugere que o emaranhamento é afetado pela interferência entre projeções quirais. Para verificar essa correspondência, a quiralidade média é calculada a partir da função de Wigner,

$$\begin{aligned} \langle \gamma_5 \rangle &= \int dx \int dk_x \text{Tr} [\omega_{n,1} \gamma_0 \gamma_5] \\ &= \frac{4\eta A_n m}{E_n} \sin^2(E_n t), \end{aligned} \quad (3.43)$$

a qual satisfaz  $0 \leq \langle \gamma_5 \rangle \leq 1$ , onde o valor não-negativo se deve à escolha do estado  $\mathcal{G}_n^{(1)}(s, t)$ . Observando que a amplitude da oscilação quiral média é proporcional a  $2k_z m/E_n^2$  (cf. 2.55), conclui-se que ela é suprimida para campos magnéticos intensos, ao passo que a amplitude da oscilação da concorrência aumenta. Da mesma forma, o maior valor de  $|\langle \gamma_5 \rangle| = 1$  é obtido para  $B_n = \sqrt{2neB}/(E_n + m) = 0$ , quando o estado é separável. Além disso, quando  $|\langle \gamma_5 \rangle|$  está em um máximo local, a concorrência quântica está em um mínimo local. Este comportamento é representado em termos de  $EoF$  na fig. (5).

Em suma, estudou-se a dinâmica dos quantificadores de informação local e global para um férmion preparado inicialmente como um estado gaussiano. Demonstrou-se que a informação

mútua engloba correlações clássicas e quânticas. Além disso, este último exibe uma estreita conexão com a oscilação quirial, devido ao fato de que as projeções quirais são funções de Wigner separáveis, com relação aos graus de liberdade spin e paridade.

A seguir, essas ferramentas serão estendidas para as configurações de estados de gato introduzidas pela eq. (3.10). Para tanto, a dependência das funções de Wigner, anteriormente dada pelos polinômios de Laguerre (e suas primeiras derivadas), deve também ser estendida, agora em termos dos polinômios generalizados de Laguerre, dado que os estados de gato agora dependem de dois números quânticos principais.

### 3.2.2 Matriz de Wigner para estados do gato de Dirac

Para analisar as correlações na superposição de dois estados gaussianos, será considerada a superposição simétrica de estados gaussianos, para a qual a matriz densidade assume a forma  $\phi^S \bar{\phi}^S$  (cf. eq. (3.10)). A função de Wigner correspondente envolve infinitas integrais na seguinte forma

$$\pi^{-1} \int du e^{2iku} e^{-(s+u)^2/2} e^{-(s-u)^2/2} H_n(s-u) H_m(s+u), \quad (3.44)$$

para  $n, m = 0, 1, 2, \dots$  de modo que há infinitos termos a partir das eqs. (3.11)-(3.13). É necessário então considerar  $n \geq m$  e  $n \leq m$  separadamente (GRADSHTEYN; RYZHIK, 2014). No primeiro caso,

$$(-2)^n \pi^{-1/2} (m!) \exp[-(s^2 + k^2)] (-s + ik)^{n-m} L_m^{n-m}(2(k^2 + s^2)) \quad (3.45)$$

para  $n \geq m$  e

$$(-2)^n \pi^{-1/2} (n!) \exp[-(s^2 + k^2)] (+s + ik)^{m-n} L_n^{m-n}(2(k^2 + s^2)) \quad (3.46)$$

para  $m \geq n$ . As funções  $L_2^{l_1}(z^2)$  são os polinômios de Laguerre generalizados na nova coordenada  $z^2 = 2(k^2 + s^2)$  e só ocorrem com índices naturais (WENIGER, 2012). Para  $n = m$ , ambas as expressões são equivalentes. As relações de ortogonalidade podem ser utilizadas se os coeficientes das funções  $\mathcal{F}_n(s)$  (cf. 2.47) forem também incluídos. Assim, definem-se

$$\mathfrak{L}_{mn} = \begin{cases} \left( \mathcal{L}_m^{(n-m)} \right)^* = \frac{\sqrt{eB}}{\pi} \left( \frac{m!}{n!} \right)^{1/2} (-1)^m e^{-(s^2+k_x^2)} [2^{1/2}(s - ik_x)]^{n-m} L_m^{(n-m)} [2(k_x^2 + s^2)], & n \geq m, \\ \mathcal{L}_n^{(m-n)} = \frac{\sqrt{eB}}{\pi} \left( \frac{n!}{m!} \right)^{1/2} (-1)^n e^{-(s^2+k_x^2)} [2^{1/2}(s + ik_x)]^{m-n} L_n^{(m-n)} [2(k_x^2 + s^2)], & m \geq n, \end{cases} \quad (3.47)$$

onde a dependência do espaço de fase foi omitida. A notação  $(\dots)^*$  foi introduzida para indicar conjugação complexa seguida de troca de índices. Os componentes da função  $\mathfrak{L}_{mn}$  satisfazem

(WENIGER, 2012; GRADSHTEYN; RYZHIK, 2014)

$$\int dx \int dk_x \mathfrak{L}_{mn} = \delta_{mn} \quad (3.48)$$

e

$$\int dx \int dk_x \mathfrak{L}_{mn} \mathfrak{L}_{m'n'} = \frac{\sqrt{eB}}{2\pi} \delta_{mn'} \delta_{nm'}, \quad (3.49)$$

as quais irão compor as relações de normalização e pureza. Essas integrais duplas podem ser calculadas de forma análoga aos polinômios anteriores, ao se considerar a coordenada polar complexa  $z = 2^{1/2}(s - ik_x)$  (GRADSHTEYN; RYZHIK, 2014). Essas relações são suficientes para calcular todos os valores médios dos quantificadores de informação quântica.

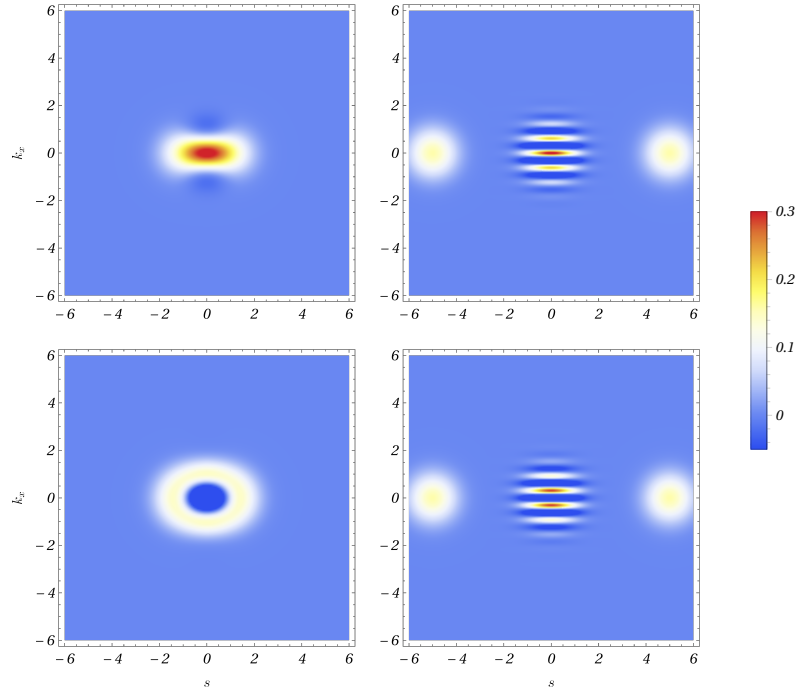
Uma vez estabelecida a estrutura das funções no espaço de fases, todos os elementos da matriz de Wigner para os estados de gato simétricos podem ser obtidos. Por exemplo,

$$\mathcal{W}_{11}(s, k_x; t) = \mathcal{N}_a \sum_{\{m,n\}\text{ímpar}} \frac{\left( e^{iE_n t} + (A_n^2 + B_n^2) e^{-iE_n t} \right)}{1 + A_n^2 + B_n^2} \frac{\left( e^{-iE_m t} + (A_m^2 + B_m^2) e^{iE_m t} \right)}{1 + A_m^2 + B_m^2} \times \frac{(a/\sqrt{2})^{n+m-2}}{\sqrt{\Gamma(n)\Gamma(m)}} \mathfrak{L}_{(m-1)(n-1)}(s, k_x), \quad (3.50)$$

onde o índice  $S$  (estado de gato simétrico) foi omitido,  $\Gamma(n) = (n-1)!$  é a função gama,  $\mathcal{N}_a$  é a constante de normalização a ser determinada, e o somatório é obtido sobre os números ímpares. A expressão acima é obtida ao notar que o fator dependente do tempo do  $n$ -ésimo termo vem de  $\phi^\dagger(s, t)$  (cf. eq. (3.10)), enquanto o  $m$ -ésimo termo vem de  $\phi(s, t)$ . De forma análoga, os outros termos diagonais são escritos como

$$\mathcal{W}_{33}(s, k_x; t) = -4\mathcal{N}_a \sum_{\{m,n\}\text{ímpar}} \frac{\sin(E_n t) A_n}{1 + A_n^2 + B_n^2} \frac{\sin(E_m t) A_m}{1 + A_m^2 + B_m^2} \frac{(a/\sqrt{2})^{n+m-2}}{\sqrt{\Gamma(n)\Gamma(m)}} \mathfrak{L}_{(m-1)(n-1)}(s, k_x), \quad (3.51)$$

$$\mathcal{W}_{44}(s, k_x; t) = -4\mathcal{N}_a \sum_{\{m,n\}\text{ímpar}} \frac{\sin(E_n t) B_n}{1 + A_n^2 + B_n^2} \frac{\sin(E_m t) B_m}{1 + A_m^2 + B_m^2} \frac{(a/\sqrt{2})^{n+m-2}}{\sqrt{\Gamma(n)\Gamma(m)}} \mathfrak{L}_{mn}(s, k_x). \quad (3.52)$$

**Figura 6** – Estados de gato de Dirac no espaço de fases

Quasi-densidade de probabilidade no espaço de fases  $(s, k_x)$  para estados de gato de Dirac,  $\frac{1}{\sqrt{eB}} \text{Tr}[\mathcal{W}(s, k_x; t) \gamma_0]$ , centralizado em  $a = \pm 1$  (esquerda) e  $a = \pm 5$  (direita). Ambas as superposições simétricas (superior) e antissimétricas (inferior) são exibidas com os parâmetros correspondentes  $k_z^2 = eB = 1$ . Para valores crescentes de  $a$ , os estados se tornam indistinguíveis, enquanto as figuras com  $a \rightarrow 0$  mostram que o estado antissimétrico é suprimido devido à interferência.

Todos os termos da diagonal são de fato reais. Os elementos fora da diagonal podem também ser obtidos como

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{31}(s, k_x; t) &= -2i\mathcal{N}_a \sum_{\{m,n\}\text{ímpar}} \frac{\left( e^{iE_n t} + (A_n^2 + B_n^2)e^{-iE_n t} \right)}{1 + A_n^2 + B_n^2} \frac{\sin(E_m t) A_m}{1 + A_m^2 + B_m^2} \frac{(a/\sqrt{2})^{n+m-2}}{\sqrt{\Gamma(n)\Gamma(m)}} \mathcal{L}_{(m-1)(n-1)}(s, k_x) \\ &= -\mathcal{W}_{13}^*(s, k_x; t), \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{41}(s, k_x; t) &= 2i\mathcal{N}_a \sum_{\{m,n\}\text{ímpar}} \frac{\left( e^{iE_n t} + (A_n^2 + B_n^2)e^{-iE_n t} \right)}{1 + A_n^2 + B_n^2} \frac{\sin(E_m t) B_m}{1 + A_m^2 + B_m^2} \frac{(a/\sqrt{2})^{n+m-2}}{\sqrt{\Gamma(n)\Gamma(m)}} \mathcal{L}_{(m)(n-1)}(s, k_x) \\ &= -\mathcal{W}_{14}^*(s, k_x; t), \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{34}(s, k_x; t) &= -4\mathcal{N}_a \sum_{\{m,n\}\text{ímpar}} \frac{\sin(E_n t) A_n}{1 + A_n^2 + B_n^2} \frac{\sin(E_m t) B_m}{1 + A_m^2 + B_m^2} \frac{(a/\sqrt{2})^{n+m-2}}{\sqrt{\Gamma(n)\Gamma(m)}} \mathcal{L}_{(m)(n-1)}(s, k_x) \\ &= \mathcal{W}_{43}^*(s, k_x; t). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Embora as expressões pareçam intrincadas, as propriedades de  $\mathfrak{L}_{mn}(s, k_x)$  facilitam a maioria dos cálculos. Por exemplo, os elementos matriciais  $\mathcal{W}_{\mu\nu}$  com  $\mu + \nu$  ímpar sempre possuem uma integral nula, pois contêm termos na forma  $\mathfrak{L}_{(m)(n-1)}$  i. e. um índice par e o outro ímpar. Da eq. (3.47), tal combinação corresponde a uma função ímpar a ser integrada em um intervalo simétrico, o que sempre se anula. No entanto, os termos quadráticos geralmente não têm média zero e, dessa forma, podem ser considerados como uma generalização das funções discutidas anteriormente. Nota-se que  $\mathfrak{L}_{mn}(s, k_x)$  estão relacionadas aos polinômios da seção anterior quando os seus índices diferem de uma unidade,  $\mathfrak{L}_{(l)(l+1)} + \mathfrak{L}_{(l+1)(l)}$ ,

$$\begin{aligned} \left(\mathfrak{L}_l^{(1)}\right)^* + \mathfrak{L}_l^{(1)} &= \frac{2^{3/2}(l+1)^{-1/2}}{\pi} s \exp[-(s^2 + k^2)] L_l^{(1)}(2(k^2 + s^2)) \\ &= 2\mathcal{M}_{l+1}(s, k_x), \end{aligned} \quad (3.56)$$

onde  $\mathcal{M}_{l+1}(s, k_x)$  foi obtido na eq. (3.27). Por outro lado, para  $n = m$ ,

$$\mathfrak{L}_n^{(0)} = \left(\mathfrak{L}_n^{(0)}\right)^* = (-1)^n \frac{\sqrt{e\mathcal{B}}}{\pi} \exp[-(s^2 + k_x^2)] L_n[2(s^2 + k_x^2)], \quad (3.57)$$

o polinômio de Laguerre  $\mathcal{L}_n(s, k_x)$  da eq. (3.26).

Essas propriedades podem ser utilizadas para verificar algebricamente as condições de pureza e conservação de probabilidade. A normalização é calculada com

$$\begin{aligned} &\int dx \int dk_x \text{Tr}[\mathcal{W}(s, k_x; t) \gamma_0] = \int dx \int dk_x (\mathcal{W}_{11} - \mathcal{W}_{33} - \mathcal{W}_{44}) \\ &= \mathcal{N}_a \sum_{n \text{ ímpar}} \eta_n^2 \left\{ 1 + (A_n^2 + B_n^2)^2 + 2(A_n^2 + B_n^2) \cos(2E_n t) - 4 \sin^2(E_n t) (A_n^2 + B_n^2) \right\} \frac{(a^2/2)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \mathcal{N}_a \cosh(a^2/2) = 1, \end{aligned} \quad (3.58)$$

onde as integrais são avaliadas em termos das condições de ortonormalização de (3.48).

Embora os resultados acima correspondam ao estado  $S$  (simétrico), a superposição de estados  $A$  (antissimétricos) pode ser avaliada de forma equivalente. Neste caso, as expansões das eqs. (3.50)-(3.55) deverão ter apenas índices pares (substituindo ímpares). Isso permite verificar que para  $t = 0$  o único elemento não-nulo possui uma dependência na forma  $\mathfrak{L}_{(m-1)(n-1)}$ , agora com  $m - 1$  e  $n - 1$  ímpares, de modo que as manipulações algébricas são equivalentes, exceto pela constante de normalização  $\mathcal{N}_a = \cosh(a^2/2)^{-1}$  (para o estado simétrico; cf. (3.58)) que é substituída por  $\mathcal{N}_a = \sinh(a^2/2)^{-1}$  para o estado antissimétrico.



Essa distinção se torna inócua para  $a \rightarrow \infty$ , porém o estado antissimétrico é suprimido para  $a \rightarrow 0$ , como pode ser visto no espaço de fases representado na fig. (6).

De agora em diante, a função Wigner normalizada está implícita na multiplicação de  $\mathcal{W}_{\mu\nu}$  por  $\cosh^{-1}(a^2/2)$  (para o estado simétrico) ou por  $\sinh^{-1}(a^2/2)$  (para o estado antissimétrico) para ter a unitariedade preservada. Desta forma, os quantificadores de informações, agora normalizados, podem ser calculados.

A pureza pode ser expressa na seguinte notação  $\mathcal{W}_{\mu\nu}(s, k_x; t) \equiv \mathcal{W}_{\mu\nu}$ ,

$$\mathcal{P} = \frac{2\pi}{\sqrt{e\mathcal{B}}} \left( \langle \mathcal{W}_{11}^2 \rangle + \langle \mathcal{W}_{33}^2 \rangle + \langle \mathcal{W}_{44}^2 \rangle - 2\langle \mathcal{W}_{13} \mathcal{W}_{31} \rangle + 2\langle \mathcal{W}_{34} \mathcal{W}_{43} \rangle - 2\langle \mathcal{W}_{14} \mathcal{W}_{41} \rangle \right), \quad (3.59)$$

Cada termo pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{W}_{11} \rangle^2 &= \cosh(a^2/2)^{-2} \left( \sum_{n \text{ ímpar}} \eta_n^2 \left| e^{-iE_n t} + (A_n^2 + B_n^2) e^{iE_n t} \right|^2 \frac{(a/\sqrt{2})^{2n-2}}{\Gamma(n)} \right)^2 \\ &= \cosh(a^2/2)^{-2} \left( \cosh(a^2/2) - 4 \sum_{n \text{ ímpar}} \eta_n^2 \sin^2(E_n t) (A_n^2 + B_n^2) \frac{(a^2/2)^{n-1}}{\Gamma(n)} \right)^2 \\ &= \left( 1 - \frac{4}{\cosh(a^2/2)} \sum_{n \text{ ímpar}} \eta_n^2 \sin^2(E_n t) (A_n^2 + B_n^2) \frac{(a^2/2)^{n-1}}{\Gamma(n)} \right)^2 \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{e\mathcal{B}}} \langle \mathcal{W}_{11}^2 \rangle, \end{aligned} \quad (3.60)$$

onde a última igualdade é obtida notando que, após a integração de  $\mathcal{W}_{11}^2$ , pode-se usar o conjunto de relações das eqs. (3.48)-(3.49). De forma similar, verifica-se que (SILVA; BERNARDINI, 2021)

$$\langle \mathcal{W}_{33} \rangle^2 = \frac{2\pi}{\sqrt{e\mathcal{B}}} \langle \mathcal{W}_{33}^2 \rangle = 16 \cosh(a^2/2)^{-2} \left( \sum_{n \text{ ímpar}} \eta_n^2 \sin^2(E_n t) A_n^2 \frac{(a^2/2)^{n-1}}{\Gamma(n)} \right)^2, \quad (3.61)$$

$$\langle \mathcal{W}_{44} \rangle^2 = \frac{2\pi}{\sqrt{e\mathcal{B}}} \langle \mathcal{W}_{44}^2 \rangle = 16 \cosh(a^2/2)^{-2} \left( \sum_{n \text{ ímpar}} \eta_n^2 \sin^2(E_n t) B_n^2 \frac{(a^2/2)^{n-1}}{\Gamma(n)} \right)^2, \quad (3.62)$$

$$\langle \mathcal{W}_{13} \mathcal{W}_{31} \rangle = \langle \mathcal{W}_{11}^2 \rangle^{1/2} \langle \mathcal{W}_{33}^2 \rangle^{1/2}, \quad (3.63)$$

$$\langle \mathcal{W}_{34} \mathcal{W}_{43} \rangle = \langle \mathcal{W}_{33}^2 \rangle^{1/2} \langle \mathcal{W}_{44}^2 \rangle^{1/2}, \quad (3.64)$$

$$\langle \mathcal{W}_{14} \mathcal{W}_{41} \rangle = \langle \mathcal{W}_{11}^2 \rangle^{1/2} \langle \mathcal{W}_{44}^2 \rangle^{1/2}. \quad (3.65)$$

A expressão de pureza finalmente resulta em

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \left( \langle \mathcal{W}_{11} \rangle - \langle \mathcal{W}_{33} \rangle - \langle \mathcal{W}_{44} \rangle \right)^2 \\ &= 1, \end{aligned} \quad (3.66)$$

onde a expressão entre colchetes reproduz a condição de normalização calculada na eq. (3.58). Assim, os estados do gato correspondem efetivamente a um estado puro.

A entropia de spin-paridade é calculada de forma semelhante com

$$\mathcal{I}_{SP} = 1 - \langle \mathcal{W}_{11} \rangle^2 - \langle \mathcal{W}_{33} \rangle^2 - \langle \mathcal{W}_{44} \rangle^2 + 2\langle \mathcal{W}_{13} \rangle \langle \mathcal{W}_{31} \rangle, \quad (3.67)$$

dos quais apenas o último termo ainda não foi calculado, e  $\mathcal{W}_{13}$  é o único elemento não diagonal que não tem média zero. Na verdade, verifica-se que

$$\langle \mathcal{W}_{31} \rangle = -2i \cosh(a^2/2)^{-1} \sum_{n \text{ ímpar}} \eta_n^2 \left( e^{-iE_n t} + (A_n^2 + B_n^2) e^{iE_n t} \right) \sin(E_n t) A_n \frac{(a^2/2)^{n-1}}{\Gamma(n)}, \quad (3.68)$$

uma expressão de valor complexo. No entanto,

$$\langle \mathcal{W}_{31} \rangle \langle \mathcal{W}_{13} \rangle = 4 \left| \cosh(a^2/2)^{-1} \sum_{n \text{ ímpar}} \eta_n^2 \left( e^{-iE_n t} + (A_n^2 + B_n^2) e^{iE_n t} \right) \sin(E_n t) A_n \frac{(a^2/2)^{n-1}}{\Gamma(n)} \right|^2 \quad (3.69)$$

é real. Para a entropia no espaço de fases,

$$\mathcal{I}_{\{x, k_x\}} = 1 - \frac{2\pi}{\sqrt{e\mathcal{B}}} \left( \langle \mathcal{W}_{11}^2 \rangle - \langle \mathcal{W}_{33}^2 \rangle - \langle \mathcal{W}_{44}^2 \rangle + 2\langle \mathcal{W}_{11} \mathcal{W}_{33} \rangle \right), \quad (3.70)$$

onde foi usado que  $\langle \mathcal{W}_{11} \mathcal{W}_{44} \rangle = \langle \mathcal{W}_{33} \mathcal{W}_{44} \rangle = 0$ .<sup>3</sup> Apenas o termo mais à direita ainda não foi calculado, e o cálculo é análogo às identidades anteriores. Resumindo,

$$\frac{2\pi}{\sqrt{e\mathcal{B}}} \langle \mathcal{W}_{11} \mathcal{W}_{33} \rangle = \langle \mathcal{W}_{31} \rangle \langle \mathcal{W}_{13} \rangle, \quad (3.71)$$

de modo que as entropias lineares coincidem.

<sup>3</sup>Como é necessário calcular integrais de produtos como  $\mathfrak{L}_{(m-1)(n-1)}(s, k_x) \mathfrak{L}_{m'n'}(s, k_x)$  com índices ímpares.

Os resultados numéricos para a informação mútua (2.27) são exibidos na fig. (7) para um parâmetro de distância  $a$ . A expressão é reduzida a um único termo se  $a \ll 1$ . Caso contrário, as séries nas eqs. (3.60)-(3.62) devem ser truncadas.<sup>4</sup>

Para valores pequenos de  $a$ , os estados gaussianos se aproximam da origem (cf. fig. (6)), e apenas o nível ímpar (par) de Landau mais baixo contribui no caso simétrico (antissimétrico) no limite de  $a \rightarrow 0$ . Neste caso, a expressão concorda com a informação mútua obtida para uma superposição com um número quântico fixo (cf. (3.36)). Consequentemente, a informação mútua também é nula no limite do campo magnético fraco, como já observado.

Por outro lado, para  $a \rightarrow \infty$  i.e. uma superposição ideal de estados gaussianos, as contribuições de grandes números quânticos podem ser vistas na segunda linha da fig. (7). Neste caso, a informação mútua se torna maior que um, confirmando que as correlações aumentam na superposição de dois estados gaussianos. Esse comportamento persiste mesmo que se diminua o campo magnético, pois ele aparece nas expressões sempre na forma  $\sqrt{2n eB}$  (cf. (2.55)), de modo que grandes números quânticos compensam campos magnéticos fracos.

Finalmente, deseja-se verificar um comportamento equivalente para a concorrência quântica. Ela pode ser calculada em termos dos elementos da matriz de Wigner, onde aqui apenas se calcula o valor médio no espaço de fases, com a eq. (2.31),

$$\begin{aligned} \langle C^2 \rangle_{\{x,k_x\}} &= - \left( \frac{2\pi}{\sqrt{eB}} \right) 2 \langle \mathcal{W}_{11} \rangle \langle \mathcal{W}_{44} \rangle \\ &= 8 \sum_{\{n,m\} \text{ ímpar}} \cosh(a^2/2)^{-2} \left\{ \eta_n^2 \eta_m^2 \sin^2(E_m t) B_m^2 \left( \eta_n^{-2} - 4(A_n^2 + B_n^2) \sin^2(E_n t) \right) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{(a^2/2)^{n+m-2}}{\Gamma(n)\Gamma(m)} \right\}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

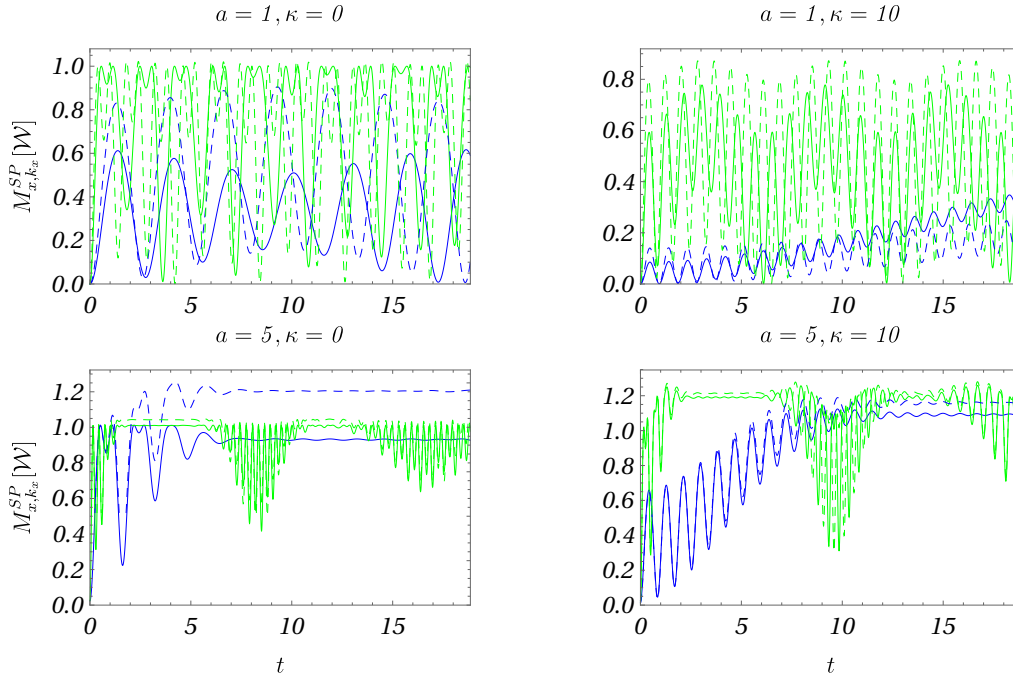
<sup>4</sup>Um algoritmo simples para estimar o erro de truncar a série é dado a seguir. A série aqui considerada pode ser geralmente colocada na forma

$$\sum_{n=0}^l (\dots) \frac{(a^2/2)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=l+1}^{\infty} (\dots) \frac{(a^2/2)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (\dots) \frac{(a^2/2)^{2n}}{(2n)!}, \quad (3.72)$$

onde (...) é menor que a unidade, então seja (...) = 1 como limite superior. Embora o lado direito seja simplesmente  $\cosh(a^2/2)$ , o lado esquerdo é considerado a expansão em série desta função. O erro normalizado pode ser dado como

$$\text{Er}(a, l) = 1 - \frac{S^{(l)}}{\cosh(a^2/2)}, \quad (3.73)$$

onde o numerador é a soma finita truncada em  $n = l$ . Segue-se que  $\text{Er}(a, l) = 0$  só é obtido com termos infinitos; assim, um erro razoável, por exemplo, é  $\text{Er}(a, l = 0) \approx 0,1$  para  $a = 1$  e  $\text{Er}(a, l = 8) \approx 0,1$  por  $a = 5$ . Uma estratégia semelhante se aplica ao lidar com estados antissimétricos.

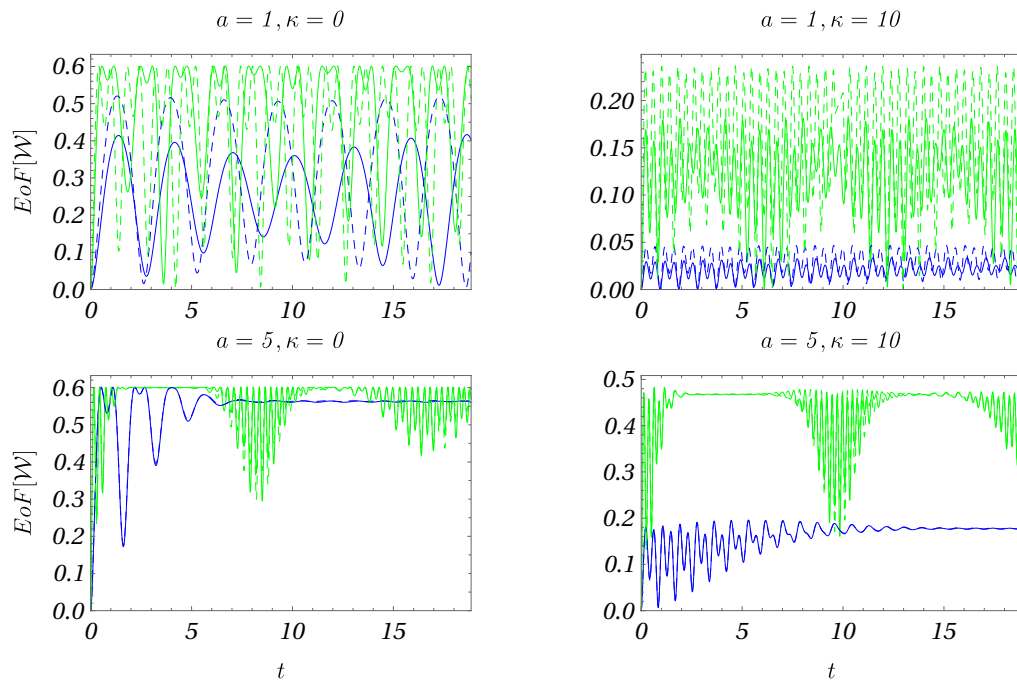
**Figura 7** – Evolução temporal da informação mútua em estados localizados

Informação mútua entre espaço de fases e espaço de spin-paridade com parâmetros  $m = 1$ ,  $\kappa = k_z^2$ ,  $\epsilon = e\mathcal{B} = 1/10$  e 1 (linhas azuis (cinza escuro) e verdes (cinza claro), respectivamente) para estados de gato simétricos (linhas sólidas) e antissimétricos (tracejados). Na primeira linha, as contribuições mais significativas vêm dos níveis mais baixos de Landau, com um período de oscilação definido, que se assemelha ao padrão de informação quântica encontrado na seção anterior. Na segunda linha, as correlações estagnam próximo ao seu valor máximo. Tal comportamento é ligeiramente afetado pelo aumento do campo magnético.

Novamente, os termos  $n = m$  correspondem à concorrência quântica para o estado gaussiano calculado a partir da eq. (3.42), exceto pela normalização introduzida nos estados de gato.

Os resultados numéricos são mostrados na fig. (8), em termos de EoF, onde se comparam dois casos limites de acordo com o parâmetro  $a$ . Para valores pequenos de  $a$ , o estado oscila entre um estado emaranhado e separável. No entanto, as oscilações parecem suprimidas conforme aumentamos a distância  $a$ . Em particular, um comportamento relevante é observado ao comparar o lado inferior direito das figs.(7)-(8). Quando  $e\mathcal{B}/k_z^2 \ll 1$  ou em campos magnéticos fracos, há uma tendência inversa entre informação mútua e EoF, nomeadamente, enquanto aquela é maximizada, esta é minimizada. Portanto, as correlações clássicas também atingem seu valor máximo neste caso.

Em suma, as correlações de estados gaussianos foram estudadas no espaço de fases. As relações de ortogonalidade dos polinômios de Laguerre foram utilizadas para obter os valores médios dos quantificadores de informação relativos aos graus de liberdade discretos

**Figura 8** – Evolução temporal do emaranhamento de formação em estados localizados

EoF com o mesmo esquema de cores e parâmetros da fig. (7). As correlações quânticas são quase idênticas entre estados simétricos e antissimétricos para  $a$  crescentes, caso em que o bi-spinor de Dirac é separável apenas para o estado inicial. Por outro lado, para valores menores de  $a$ , o padrão de oscilação corresponde aos níveis de Landau mais baixos.

e contínuos. Em particular, a concorrência quântica entre spin e paridade foi identificada a partir do fenômeno da decoerência, na qual se obtém uma função de Wigner diagonal. Esse resultado preliminar foi utilizado para se construir estados de gato emaranhados como uma superposição de estados gaussianos. Para uma superposição com um parâmetro de distância arbitrariamente grande, as correlações medidas são de fato maiores que nos estados gaussianos anteriores. De forma não esperada, o emaranhamento atinge um platô em um intervalo temporal determinado. Este fenômeno é interessante, porque a superposição de infinitos autoestados apresenta correlações que se tornam constantes no tempo. No entanto, ao se observar escalas temporais maiores, uma oscilação com períodos definidos pode ser observada ciclicamente.

Para investigar este aspecto, a próxima seção será dedicada ao estudo dos revivals quânticos de superposições localizadas. Inicialmente, o formalismo para estados localizados será discutido no contexto de oscilações clássicas. Então, a evolução temporal para grandes escalas temporais será estudada para os estados de gato obtidos.

## 4 REVIVALS QUÂNTICOS

O objetivo desta seção é descrever a evolução dos estados de gato em grandes escalas temporais. Será utilizado o formalismo dos revivals quânticos para funções de onda localizadas no regime de grandes números quânticos. Esses estados são tipicamente estudados em conexão com o limite semiclássico da mecânica quântica a partir do princípio da correspondência. Desse modo, é profícuo investigar preliminarmente a distribuição de energia dos estados em análise. A função espectral, por exemplo, fornece a decomposição de um estado arbitrário em relação a uma base completa, (BALLENTINE, 1998),

$$\eta(E) = \langle \phi^{A,S} | \delta(E - H) | \phi^{A,S} \rangle = \sum_{v,r,m} |c_{m,r}^v|^2 \delta(E - (-1)^r E_m), \quad (4.1)$$

para estados simétricos ou antissimétricos  $|\phi^{A,S}\rangle$ , como obtido na seção anterior, e os coeficientes  $c_{m,r}^v$  determinam a decomposição de um estado inicial em uma base ortonormal, ou seja,

$$c_{m,r}^v = \int ds \phi^\dagger(s, t=0) u_{m,r}^v(s). \quad (4.2)$$

Em muitos casos, essa decomposição só pode ser calculada por meio de métodos numéricos apropriados <sup>1</sup>, pois envolvem o cálculo de muitas integrais de *overlap*. Felizmente, como os coeficientes já foram obtidos analiticamente, não é necessário calcular nenhuma integral

---

<sup>1</sup>Certas simetrias podem auxiliar o cálculo das integrais por meio de regras de seleção. Por exemplo, os estados de gato são inicializados como

$$\phi(s, t=0) = f(s)\phi, \quad (4.3)$$

onde  $f(s)$  possui paridade definida,  $f(-s) = \pm f(s)$ , e  $\phi$  é um espinor. Como os estados estacionários para o problema do campo magnético podem ser escritos como uma superposição de autoestados do operador de spin  $\Sigma_z = \text{diag}\{\sigma_z, \sigma_z\}$ , cada um deles terá uma paridade espacial bem definida, o que decorre da simetria de paridade da equação de Dirac. Assim, como o espinor é autoestado de  $\Sigma_z$ , a integral de *overlap* será não nula quando  $m$  for ímpar para  $f(s)$  par e vice-versa.

adicional. Explicitamente, os coeficientes obtidos a partir da eq. (3.5) foram

$$c_{m+1,r=1}^+ = \mathcal{N}_a \exp(-a^2/4)(a/\sqrt{2})^m / \sqrt{m!}, \quad (4.4)$$

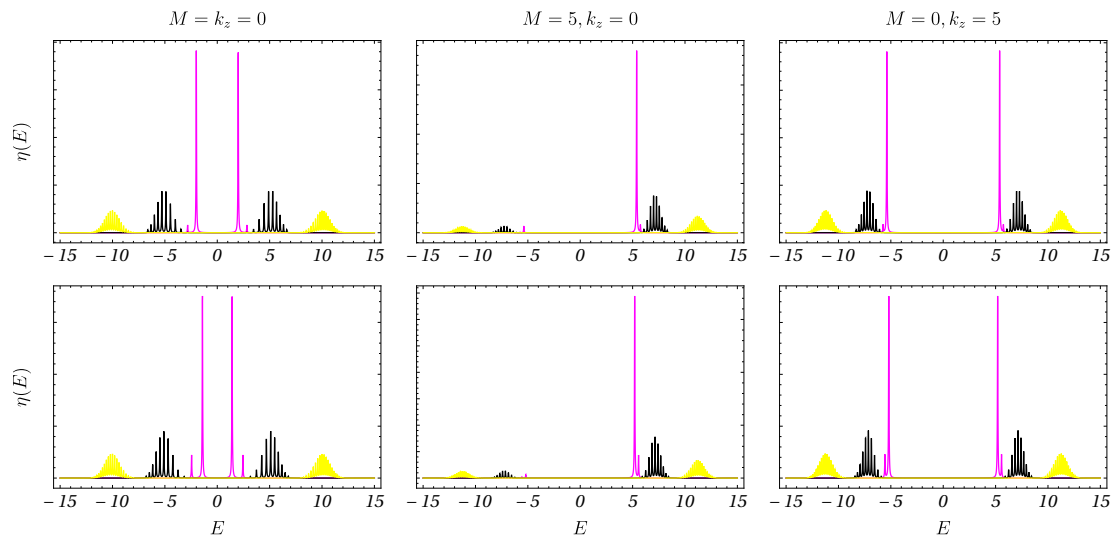
$$c_{m+1,r=2}^+ = \mathcal{N}_a(-A_m) \exp(-a^2/4)(a/\sqrt{2})^m / \sqrt{m!}, \quad (4.5)$$

$$c_{m+1,r=2}^- = \mathcal{N}_a B_m \exp(-a^2/4)(a/\sqrt{2})^m / \sqrt{m!}, \quad (4.6)$$

onde  $\mathcal{N}_a$  é a constante de normalização e os índices  $m = 2k$  ( $k$  inteiro) para  $\mathcal{N}_a = \cosh^{-1/2}(a^2/2)$  e  $m = 2k + 1$  para  $\mathcal{N}_a = \sinh^{-1/2}(a^2/2)$ .

Enquanto ela é uma função delta para uma solução estacionária, para uma superposição qualquer, a função espectral é uma soma de funções delta normalizadas pelos coeficientes da superposição. No limite em que as autoenergias  $E_m$  se aproximam, as superposições podem ser consideradas como uma distribuição de energia de largura finita em torno de um valor médio. Nota-se que também é possível utilizar a função espectral em sistemas mais realistas nos quais se observam alargamentos de energia em bandas contínuas, como ocorre em sistemas com um grande número de partículas interagindo. Nesse caso, a função delta é substituída por uma outra função determinada empiricamente (BALLENTINE, 1998).

Por outro lado, os parâmetros Hamiltonianos controlam a forma da função espectral. Para exemplificar, os parâmetros  $k_z$  e  $M$  são variados enquanto  $e\mathcal{B} = 1$  na fig. (9). Para valores crescentes da massa, a interferência entre estados com energias opostas é suprimida: o gráfico para  $M = 5$  mostra que apenas estados com  $E > 0$  são relevantes. Contudo, para valores crescentes de  $k_z$ , os estados com  $E < 0$  permanecem significativos. Por fim, três valores para o parâmetro de distância  $a$  são incluídos. À medida que se aumenta  $a$ , mais autoestados contribuem para a distribuição de energia, e estados simétricos e antissimétricos se tornam distinguíveis apenas por um fator de fase inicial no limite  $a \rightarrow \infty$ . Desse modo, uma função espectral localizada em torno de grandes números quânticos pode ser obtida para valores crescentes de  $k_z$  e  $a$ .

**Figura 9** – Função espectral para estados de gato

Distribuição de energia dos estados de gato antissimétrico (superior) e simétrico (inferior) (cf. eqs. (4.4)-(4.6)) dependente do parâmetro de distância  $a = 1$  (magenta, cinza), 5 (preto), 10 (amarelo, cinza claro) em torno de um nível médio de energia. O eixo  $y$  não tem escala e as quantidades plotadas são adimensionais (cf. (2.51)).

Os estados de gato apresentam algumas particularidades com relação à função espectral. Primeiro, os picos observados na função espectral, os quais identificam os autoestados excitados, também identificam os níveis de Landau  $n$  ímpares para estados simétricos e pares para estados antissimétricos. Além disso, se a superposição é composta por um grande número de autoestados ( $a$  crescente), ela se espalha ao longo de um intervalo de energia maior. Nesse caso, os coeficientes ao quadrado são ajustados a uma distribuição gaussiana

$$P_n = \frac{1}{\Delta n \pi^{1/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{n - n_0}{\Delta n / \sqrt{2}} \right)^2 \right], \quad (4.7)$$

para cada sinal de energia, onde os fatores extras aparecem por causa da paridade dos números quânticos. O *spread*  $\Delta n$  também depende do parâmetro de distância e determina a precisão da expansão dos autovalores de energia em torno do valor médio. Se  $M = k_z = 0$ , o espaçamento entre níveis de Landau é mais evidente e tende a  $\sqrt{2n} - \sqrt{2(n-2)}$ . Cálculos típicos para um comportamento de longo prazo bem definido restringem  $\Delta n$  a  $\Delta n/n_0 \ll 1$  (ROBINETT, 2004; KRUECKL; KRAMER, 2009; ROMERA, 2011). Tais restrições serão discutidas a seguir,



pois esses parâmetros podem ser simplesmente ajustados à expansão infinita das funções hiperbólicas usadas nas eqs. (4.4)-(4.6).

A função espectral é relevante, pois há uma correspondência entre a distribuição de energia e a dinâmica do sistema quântico. Essa correspondência permite obter a evolução temporal dos estados de gato de forma concisa. Relembrando que cada autoestado contribui com um fator na forma  $\exp[i(-1)^r E_n t]$  durante a evolução temporal, uma superposição de infinitos estados, não parece — quando se espera uma interferência aleatória de cada exponencial complexa —, exibir um padrão de evolução temporal bem definido. No entanto, se as autoenergias não estiverem muito dispersas, oscilações coletivas com períodos precisos podem ser observadas ao longo da evolução temporal.

#### 4.1 EXPANSÃO DA ENERGIA E PERÍODOS DE OSCILAÇÃO COLETIVA

Formalmente, isso é demonstrado a partir da expansão de Taylor da energia média. Expandindo  $E_n \equiv E(n)$  para o número quântico em torno de um nível médio de Landau  $n_0$  (cf. fig. (9)),

$$E(n) \approx E(n_0) + E'(n_0)(n - n_0) + \frac{E''(n_0)}{2}(n - n_0)^2 + \frac{E'''(n_0)}{6}(n - n_0)^3 + \dots \quad (4.8)$$

Cada ordem na expansão de energia define uma frequência característica que modula as oscilações de frequência mais altas. Convém lembrar que a dispersão de energia não depende apenas do número quântico principal,  $n$ , mas também dos parâmetros  $M$  e  $k_z$ . Portanto, se a distribuição de energia for altamente localizada em torno do valor médio, uma precisão é atingida com poucos termos na expansão.

A primeira frequência,  $E_{n_0}$ , é uma fase constante para estados quânticos cujos autovalores de energia possuem um sinal definido. Para estados de gato de Dirac na fig. (9), isso corresponde ao caso em que a massa domina. Caso contrário, é uma interferência típica para estados com paridade intrínseca oposta, que, em certo sentido, é análoga ao efeito Zitterbewegung (BREIT, 1928; SCHRÖDINGER, 1930, 1931; ITZYKSON; ZUBER, 2012), ou oscilações ultrarrápidas, na mecânica quântica relativística e é sempre regenerada em um campo magnético. Essa oscilação rápida altera o fator de fase dos estados de gato ao longo de sua evolução temporal, o que não é observado para revivals quânticos do tipo Schrödinger,

uma vez que todos os autovalores de energia (frequência) têm o mesmo sinal. Esta é uma das características distintivas da evolução temporal nos sistemas Dirac.

À medida que outras escalas de tempo são consideradas, ambas as paridades (intrínsecas) contribuem para a evolução no longo prazo. Isso decorre da função espectral de energia e observando que termos de ordem superior na eq. (4.8) determinam a evolução temporal mesmo que os sinais negativos e positivos dos autovalores de energia sejam encontrados na superposição quântica. Assim, o padrão de oscilação anterior é suprimido temporariamente. Uma característica interessante na expansão de estados de gato é que cada termo  $(n - n_0)$  é sempre um número par, pois  $n$  e  $n_0$  têm a mesma paridade e, dessa forma, as escalas de tempo associadas a cada frequência serão redimensionadas por potências de 2 (SILVA; BERNARDINI, 2023). Por exemplo, os outros três períodos são dados por

$$T_1 = \frac{2\pi\hbar}{2|E'(n_0)|}, \quad T_2 = \frac{2\pi\hbar}{4|E''(n_0)|/2}, \quad \text{e} \quad T_3 = \frac{2\pi\hbar}{8|E'''(n_0)|/6}. \quad (4.9)$$

Na abordagem semiclássica, encontram-se essas escalas temporais, denominadas como período clássico, revival e super revival (ROBINETT, 2004; KRUECKL; KRAMER, 2009; ROMERA, 2011; ROMERA; LOS SANTOS, 2009). Supõe-se, portanto, que os estados de gato e os estados semiclássicos possam apresentar o mesmo padrão de oscilação. No entanto, a simetria dos estados de gato reduz pela metade (para cada ordem) os períodos dessas oscilações, pois eles excitam apenas metade dos autoestados se comparados a um estado localizado no espaço de fases. A partir da expressão dos estados de gato obtidos anteriormente nas eqs. (3.10)-(3.15), um estado gaussiano pode ser obtido simplesmente pela superposição de estados simétricos e antissimétricos. Nesse caso, o estado obtido oscila com períodos dados por  $2T_1, 4T_2, 8T_3$ , respectivamente, quando comparado com a eq. (4.9), o que já foi verificado em diversos sistemas físicos.

A relação entre distribuição de energia e a evolução temporal pode ser obtida explicitamente. Os estados evoluídos no tempo são na forma

$$|\phi^{A,S}(s, t)\rangle = e^{-iH_0 t} |\phi^{A,S}(s, t = 0)\rangle, \quad (4.10)$$

de modo que o módulo da amplitude de sobrevivência que o sistema permanece no estado original  $|\phi^{A,S}(s, t = 0)\rangle$  é

$$|C(t)| = |\langle \phi^{A,S}(s, 0) | e^{-iH_0 t} | \phi^{A,S}(s, 0) \rangle|, \quad (4.11)$$

ou seja: uma medida de ortogonalidade em relação ao estado inicial (HILGEVOORD, 1996). Explicitamente, os instantes nos quais  $C(t) \neq 0$  correspondem a uma regeneração, ainda que parcial, do estado inicial. Essa regeneração nem sempre é ideal, pois apenas em  $|C(t)| = 1$  o estado efetivamente retorna à sua configuração inicial.

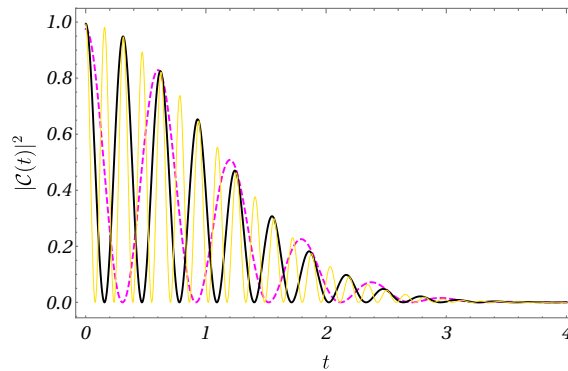
A função acima pode ser manipulada com uma expansão do estado inicial em uma base completa (cf. eqs. (4.4)-(4.6)),

$$\begin{aligned} C(t) &= \sum_{v,r,n} |c_{n,r}^v|^2 e^{(-1)^r i E_n t} \\ &= \sum_{v,r,n} |c_{n,r}^v|^2 \int dE e^{-iEt} \delta(E - (-1)^r E_n) \\ &= \int dE e^{-iEt} \left( \sum_{v,r,n} |c_{n,r}^v|^2 \delta(E - (-1)^r E_n) \right), \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde se observa que a expressão entre parênteses é a função espectral na eq. (4.1).  $C(t)$  é também chamada de função de autocorrelação (ROBINETT, 2004; KRUECKL; KRAMER, 2009). A equivalência entre a distribuição de energia e a evolução temporal é formalmente estabelecida pela transformada de Fourier, que extrai os autoestados excitados da evolução temporal. Portanto, o padrão de oscilação de longo prazo é mais bem definido para uma distribuição de energia localizada. Em aplicações físicas, onde a função espectral não é infinitamente localizada como uma soma de funções delta de Dirac devido a interações adicionais,  $C(t)$  também descreve tempos de vida finitos de estados excitados instáveis (BALLENTINE, 1998). De qualquer maneira, a normalização dos coeficientes garante que  $|C(t)| \leq 1$ . Como a primeira linha da eq. (4.12) mostra que a probabilidade de sobrevivência é a soma das exponenciais  $e^{(-1)^r i E_n t}$  para cada autoestado excitado, a expansão de energia, juntamente com as escalas temporais introduzidas na eq. (4.9) podem ser utilizadas para descrever o comportamento de longo prazo de  $C(t)$ . De fato, o resto da seção será dedicado à verificação da função de autocorrelação para estados com paridade definida, até a escala do super revival.

## 4.2 AMPLITUDE DE SOBREVIVÊNCIA PARA ESTADOS COM PARIDADE DEFINIDA

O desenvolvimento inicial para diversos valores de  $a$  é mostrado na fig. (10) no referencial tal que  $k_z = 0$ . Além disso, escolhe-se  $M^2/e\mathcal{B} \approx 0$ , o que corresponde a limites com campos externos fortes para partículas massivas, ou ainda, no limite de massa nula. Para valores

**Figura 10** – Interferência entre paridade negativa e positiva

Interferência entre estados com paridade intrínseca positiva e negativa em escalas de tempo curtas para parâmetro de distância crescente:  $a = 5, 10$  e  $20$  para magenta tracejado, preto contínuo e amarelo contínuo linhas, respectivamente, onde os parâmetros de uma partícula (ver eq. (2.55)) são fixados em  $A_{n_0} = 0, B_{n_0} = 1$ , e  $\eta_{n_0} = 1/2$  (limite sem massa). Fonte: Elaborada pelo Autor.

crecentes de  $a$ , observam-se frequências adicionais devido a contribuição de mais autoestados. Ainda assim, a oscilação é rapidamente suprimida e regenerada na próxima escala temporal. Como ambas paridades intrínsecas contribuem para o estado, essas oscilações sempre estão presentes quando  $C(t) \neq 0$ . Esse fenômeno é equivalente ao *Zitterbewegung* previsto para soluções de onda localizadas na equação de Dirac (RUSIN; ZAWADZKI, 2010; ROMERA, 2011).

O comportamento da fig. (10) descreve apenas a evolução para curtos intervalos, pois essa oscilação é modulada por uma outra oscilação com uma periodicidade maior  $T_1$  (cf. (4.9)). Nessa nova escala temporal, a amplitude diminui em uma tendência exponencial até que a função de onda se espalhe significativamente, perdendo uma frequência bem definida de oscilação (cf. fig. (11)). A amplitude decrescente se assemelha à lei de decaimento exponencial encontrada nas funções espectrais Lorentzianas (BONITZ, 2016). Porém, o estado se regenera parcialmente e um movimento periódico local pode mais uma vez ser observado em uma escala maior,  $T_2$ . Em particular, isso é evidente para  $a = 5$ , para os quais  $C(t)$  oscila apenas duas vezes antes da função de onda se espalhar. Esse processo de regeneração e colapso continuará ainda em escalas maiores, como será discutido. O mesmo padrão também é observado para valores maiores do parâmetro distância  $a$ , já que tempos maiores são considerados conforme eq. (4.7). Convém enfatizar que o período  $T_1$  é metade do período estimado para a evolução das funções de onda localizadas. O período associado à oscilação clássica correspondente é  $T_{CL} \approx 30, 60, 126$  para o nível médio de Landau  $n_0 = 12, 50, 200$ , respectivamente<sup>2</sup>. Em comparação, é possível

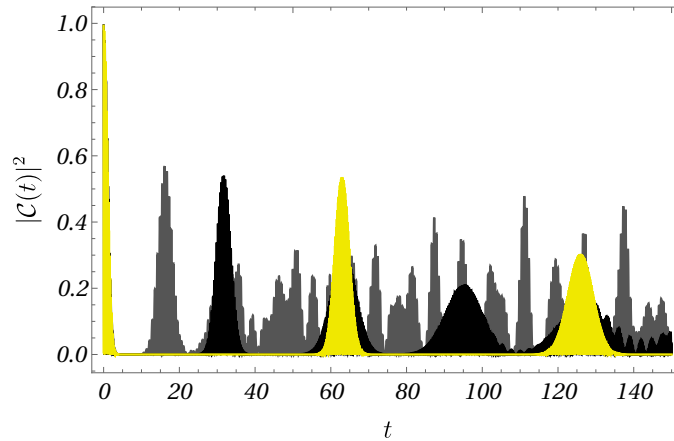
<sup>2</sup>O nível médio depende do parâmetro de distância no espaço de fases e foi derivado a partir da função espectral

observar na fig. (11) que o estado oscila nessa escala com um período de  $T_1 \approx 15, 30, 63$  para  $a = 5$  (cinza),  $a = 10$  (preto), e  $a = 20$  (amarelo), respectivamente. Isto é: os estados de gato oscilam com metade do período clássico, reformando o estado inicial.

Os chamados *fractional revivals* (revivals fracionários) também ocorrem nessas novas escalas de tempo<sup>3</sup>, o que pode ser observado na escala de  $T_2$  na fig. (12), onde a oscilação inicial foi apenas descrita. Esse padrão de revival fracionário pode ser definido genericamente a partir das escalas de tempo nas quais cópias do estado original oscilam com frações do período esperado. Os revivals fracionários podem, portanto, ser identificados na curva de probabilidade como uma oscilação que é mais rápida do que o padrão usual. Na verdade, os revivals fracionários ocorrem em múltiplos racionais do tempo de revival, determinando a periodicidade instantânea do estado. Explicitamente, a periodicidade é dada por frações da forma  $T_1/q$  ( $q$  ímpar), em  $t = (p/q)T_2$ , onde  $p, q$  são mutuamente primos (ROBINETT, 2004). Se  $q$  for par, a periodicidade é  $2T_1/q$ . Por exemplo, os revivals fracionários mais evidentes são de ordem meio ( $q = 2$ ) e um quarto ( $q = 4$ ). O primeiro pode ser observado em  $t = T_2/2$ , quando o estado tem periodicidade local  $T_1$ , e o último pode ser observado em  $t = T_2/4$  e  $t = 3T_2/4$ , com periodicidade  $T_1/2$ . Os picos observados próximos aos revivals em  $t = T_2/4$  e em  $t = T_2/2$  não possuem uma amplitude regular na fig. (12) para  $a = 5$ , ainda que oscilem com os períodos previstos. A razão é dupla: primeiro, o padrão é distorcido porque o intervalo entre os dois revivals fracionários é curto e, portanto, os padrões estão sobrepostos. Em segundo lugar, quando há uma variação significativa dos números quânticos, as escalas de tempo são menos definidas. Isso ocorre particularmente em campos magnéticos fortes, quando o espaçamento entre dois níveis de energia aumenta.

---

<sup>3</sup>Nota-se que uma escala de revival mais curta também foi observada no problema do poço infinito para a equação de Schrödinger (ARONSTEIN; STROUD, 1997), devido à simetria de reflexão. O meio revival é equivalente ao revival completo apenas para estados próprios pares.

**Figura 11** – Oscilações clássicas

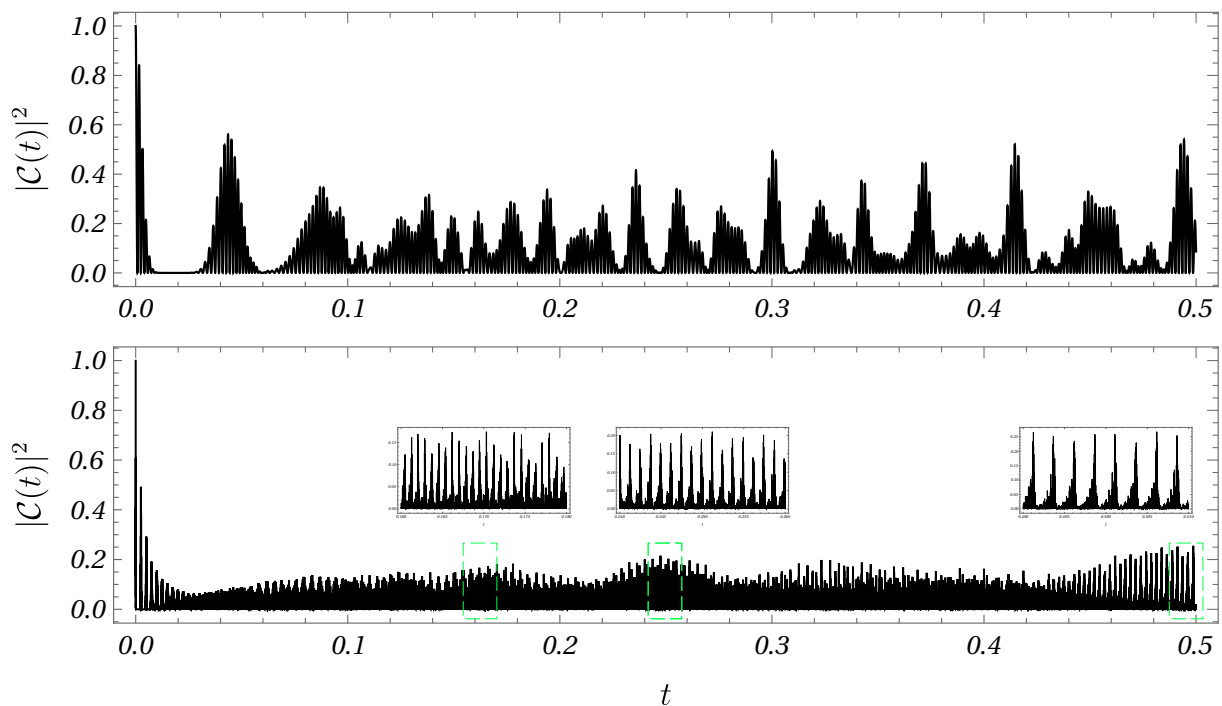
Probabilidade de sobrevivência na escala de  $T_1$ , com  $a = 5$  ( $T_1 = 15$ ), 10 ( $T_1 = 30$ ), 20 ( $T_1 = 63$ ) para cinza, preto e linhas amarelas (cinza claro), respectivamente, onde os parâmetros de uma partícula (ver eq. (2.55)) são fixados em  $A_{n_0} = 0$ ,  $B_{n_0} = 1$ , e  $\eta_{n_0} = 1/2$ . Todos os gráficos se sobrepõem parcialmente em  $t = 0$ . Fonte: Elaborada pelo Autor.

Conforme mais autoestados são excitados, mais revivals fracionários podem ser detectados. Um exemplo adicional pode ser observado na fig. (12) para  $a = 20$ , onde o revival em  $t = (1/6)T_2$  é observado com periodicidade de  $T_1/3$ , como previsto. No entanto, os picos na probabilidade de sobrevivência tornam-se menos distinguíveis com mais autoestados (cf. fig. 9), pois a probabilidade está distribuída entre eles. Isso coloca uma limitação nos estados de gatos obtidos: a detecção do padrão de oscilação fracionária exatamente em múltiplos do período clássico, ou múltiplos de suas frações (ROBINETT, 2004; KRUECKL; KRAMER, 2009), não é possível aqui.

A próxima escala temporal é chamada de super revival,  $T_3$ , quando as escalas anteriores não regeneram completamente o estado inicial. Além disso, para o oscilador harmônico usual, as derivadas na eq. (4.8) a partir desta ordem desaparecem, de modo que essa oscilação não é facilmente verificável. Para uma dispersão relativística, no entanto, todas as ordens poderiam ser observadas em princípio, desde que a função espectral não se espalhe significativamente (cf. fig. 9).

O estado quântico oscila em frações de  $T_3$ , conforme mostrado explicitamente abaixo. O tempo de super revival é representado na fig. (13) para estados de gato com  $a = 5$ , que foram

Figura 12 – Distorção do revival em campos magnéticos intensos



Probabilidade de sobrevivência em um campo magnético forte, que pode ser simulado por parâmetros (ver eq. (2.55))  $A_{n_0} = 0, B_{n_0} = 1$  e  $\eta_{n_0} = 1/2$  como na figura (10). O eixo horizontal é dado em unidades de  $T_2^{-1}$  onde  $T_2 = 3,7 \times 10^2, 2,5 \times 10^4$  foi calculado com a eq. (4.9) para  $a = 5, 20$  (figura superior e inferior). As inserções no último gráfico confirmam que as periodicidades locais são preservadas, com um padrão de revival fracionário ocorrendo em  $t/T_2 = 1/6, 1/4, 1/2$  com períodos de  $T_1/3, T_1/2$  e  $T_1$ , respectivamente, onde  $T_1/T_2 \approx 4 \times 10^{-2}$  ( $a = 5$ ),  $3 \times 10^{-3}$  ( $a = 20$ ). A fig. (11) descreve a evolução na escala de tempo clássica  $T_1$ , o que é útil para comparar a ordem de grandeza entre as escalas. Fonte: Elaborada pelo Autor.

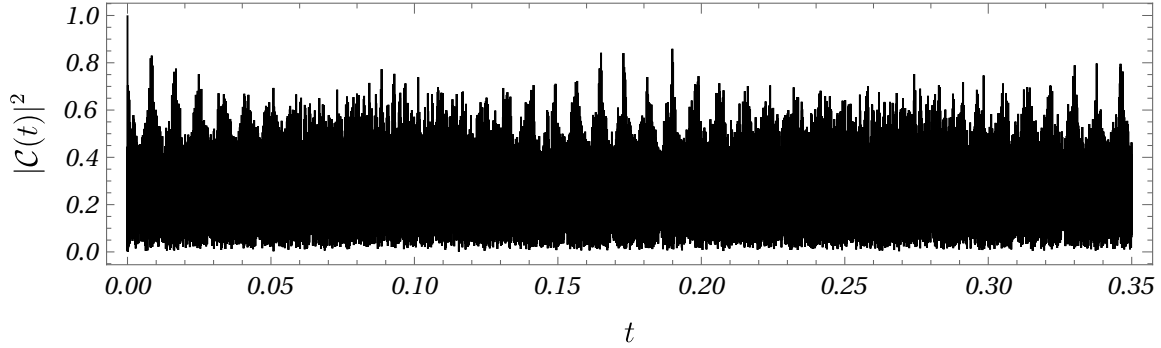
observados para  $k_z \neq 0$ . O valor previsto para esse período em pacotes de ondas i. e. localizados é oito vezes maior (cf. eq. (4.9)) do que  $T_3$  para estados de gato. Semelhante à escala de revival, todas as oscilações com frequência mais alta podem ser encontradas. Em contrapartida, as periodicidades locais não são dadas apenas por frações de  $T_2$ , mas dependem tanto de  $T_1$  quanto de  $T_2$  se o sistema for periódico. Para uma dispersão tipo-Dirac, esta correção sutil não é relevante, e o sistema inicialmente oscila com períodos  $T_2/2 \approx T_3/100$  (revivals de ordem meio) por aproximadamente seis períodos na fig. (13), recuperando oscilações bem definidas em  $t/T_3 \approx 0,08; 0,16$  e  $0,33$ ; com periodicidade correspondente de  $T_2/4, T_2/2$  e  $T_2/2$ . De fato, os dois primeiros períodos foram previstos para os átomos de Rydberg (BLUHM; KOSTELECKÝ, 1995a,b), enquanto para o último se esperava observar o período  $T_2$ .

Para os estados de gato de Dirac estudados aqui, o super revival pode ser obtido se  $A_{n_0}/B_{n_0} \gtrsim 2$  (cf. (2.55)), de modo que a função espectral se torna suficientemente localizada, com a probabilidade de sobrevivência quase retornando à unidade. Isto é, ainda que existam muitos autoestados contribuindo para a superposição quântica, o espaçamento dos autovalores pode ser ajustado, e o mesmo é válido aumentando o parâmetro de massa. Para valores maiores do que essa razão, os picos na probabilidade de sobrevivência são mais perceptíveis, mas as escalas de tempo aumentam consideravelmente. Por outro lado, se  $A_{n_0}/B_{n_0}$  não for suficientemente alto, a estrutura de revival se repete indefinidamente na escala de  $T_2$ . Conclui-se que o espaçamento desigual dos níveis relativísticos de Landau distorce a estrutura de revival, de modo que o padrão é mais bem definido — com regenerações muito próximas à configuração inicial — em campos magnéticos fracos.

Resumindo, esta seção descreveu o comportamento temporal da probabilidade de sobrevivência, exibindo colapso e revivals em um padrões que exibem uma correlação significativa entre os autoestados excitados. A intrincada evolução do estado e as frequências de oscilação são totalmente codificadas na distribuição de energia conforme descrito pela função espectral. No entanto, quando existem muitos autoestados excitados, perde-se a precisão necessária para se detectar os revivals fracionários, pois picos com periodicidades distintas se sobrepõem durante a evolução temporal.

Na próxima seção, os revivals serão observados a partir das regras de seleção das matrizes no espaço espinorial. Especificamente, a partir da decomposição da matriz de Wigner nas densidades no espaço de fases, obtém-se inicialmente a densidade de probabilidade no espaço das configurações, o que torna possível observar a oscilação dos dois estados gaussianos no



**Figura 13** – Super revival de estados de gato

Probabilidade de sobrevivência para um estado de gato Dirac com  $a = 5$  na escala de tempo  $T_3 = 2,7 \times 10^5$  (super revival). Os parâmetros de uma partícula são definidos como  $A_{n_0}/B_{n_0} = 2,04$  e  $\eta_{n_0} = 1/2$  (cf. eq. (2.55)). O eixo do tempo é dado em unidades de  $T_3^{-1}$ , com proporções de escalas menores dadas pela eq. (4.9), ou seja,  $T_2/T_3 \approx 1.6 \times 10^{-2}$ . Fonte: Elaborada pelo Autor.

plano  $(s, t)$ . Por fim, as oscilações de operadores podem ser relacionadas aos quantificadores de informação quântica intrínseca dos estados de gato.

### 4.3 MORTE SÚBITA DE EMARANHAMENTO

A decomposição hermitiana da matriz de Wigner é uma escolha mais natural para cálculos em um referencial fixo. Essa decomposição também permite construir os valores esperados dos quantificadores de informação quântica diretamente do espaço das configurações.

Por exemplo, a normalização (de carga) pode ser imposta como

$$\begin{aligned} \int d^3\mathbf{x} \left( \rho(\mathbf{x}) \right) &= \int d^3\mathbf{x} \left( \int d^3\mathbf{k} \text{Tr}[\omega\gamma_0] \right) \\ &= 1/4 \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{k} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{k}; t) = 1, \end{aligned} \quad (4.13)$$

i. e. a condição de normalização. Outras densidades no espaço de fases também têm um significado evidente, como as componentes espaciais da corrente de Dirac,

$$\begin{aligned} \int d^3\mathbf{x} \mathbf{j}(\mathbf{x}) &= \int d^3\mathbf{x} \bar{\psi}\boldsymbol{\gamma}\psi = \int d^3\mathbf{x} \left( \int d^3\mathbf{k} \text{Tr}[\omega\boldsymbol{\gamma}] \right) \\ &= 1/4 \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{k} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k}; t), \end{aligned} \quad (4.14)$$

ou as componentes do pseudovetor, que podem ser escritas como uma densidade de spin, com

$$\begin{aligned} \int d^3\mathbf{x} \mathbf{j}_{\gamma_5}(\mathbf{x}) &= - \int d^3\mathbf{x} \bar{\psi} \gamma_5 \boldsymbol{\gamma} \psi = \int d^3\mathbf{x} \psi^\dagger \Sigma \psi \\ &= - \int d^3\mathbf{x} \left( \int d^3\mathbf{k} \text{Tr}[\omega \gamma_5 \boldsymbol{\gamma}] \right) = 1/4 \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{k} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}, \mathbf{k}; t), \end{aligned} \quad (4.15)$$

em que  $\gamma_0 \gamma_5 \boldsymbol{\gamma} = \Sigma = \text{diag}\{\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}\}$ . A corrente vetorial descreve a evolução temporal do operador de velocidade, enquanto a corrente pseudovetorial descreve a evolução temporal do operador de spin.

Embora seja possível impor a normalização de carga como na eq. (4.13), não se pode obter condições equivalentes para outras componentes. No entanto, para um estado puro, os valores esperados das densidades no espaço de fases podem ser calculados também no espaço das configurações a partir do operador hermitiano na eq. (2.17). Isso significa que os observáveis podem ser calculados sem calcular a matriz completa de Wigner.

Para calcular a evolução temporal dos operadores da eq. (2.17) para estados de gato, é necessário calcular elementos de matriz na seguinte forma,

$$\langle u_{n,r}^v | \Gamma | u_{m,r'}^{v'} \rangle, \quad (4.16)$$

em que  $\Gamma$  denota qualquer das matrizes gama na decomposição do operador densidade. Novamente, as simetrias dos estados de gato simplificam significativamente esses cálculos. Para um nível de Landau  $n$ , os polinômios de Hermite serão de ordem  $n$  e  $n - 1$ . Portanto, como os estados de gato excitam níveis com paridade definida, qualquer valor esperado na forma acima, com  $m \neq n$ , é sempre zero. Os únicos termos que sobrevivem correspondem a  $n = m$ , ou seja, entre os mesmos níveis de Landau. Esse resultado é obtido com o produto escalar entre os autoestados  $m$  e  $n$ : sempre se obtém uma função ímpar se  $m \neq n$ , ao passo que se obtém uma função par quando  $n = m$ . Em contraste, um estado localizado, e. g. gaussiano com um momento inicial (KRUECKL; KRAMER, 2009; RUSIN; ZAWADZKI, 2010), apresenta regras de seleção com  $n = m \pm 1$ , para  $\Gamma$  uma matriz de bloco não diagonal. Nota-se que devido à paridade, essas regras de seleção também são observadas para o operador posição. Portanto, os valores esperados nunca misturam os coeficientes de expansão na superposição definida pelas eqs. (4.4)-(4.6) para números quânticos do oscilador harmônico distintos.

A partir das considerações acima, obtêm-se os elementos de matriz. Os valores esperados são obtidos entre estados com os mesmos números quânticos e, portanto, os graus de liberdade

espaciais adicionais são ondas planas constantes que não afetam o resultado. As funções obtidas também são descritas por funções escalares com simetria de paridade espacial, como será mostrado em breve.

Para exemplificar a regra de seleção acima, a conservação da componente tempo da corrente de Dirac (cf. 4.13) é obtida explicitamente a partir da densidade de probabilidade

$$\begin{aligned} \frac{f_0(s, t)}{4} = & \frac{1}{\cosh(a^2/2)} \sum_{n,m} \frac{(a/\sqrt{2})^{n+m}}{\sqrt{n!m!}} \left[ \mathcal{F}_{n-1}(s)\mathcal{F}_{m-1}(s) \cos((E_n - E_m)t) - \right. \\ & \left. \sum_{n,m} \sin(E_n t) \sin(E_m t) B_n B_m \eta_n \eta_m \left( \mathcal{F}_{n-1}(s)\mathcal{F}_{m-1}(s) - \mathcal{F}_n(s)\mathcal{F}_m(s) \right) \right], \end{aligned} \quad (4.17)$$

com

$$\begin{aligned} (1/4) \int ds f_0(s, t) &= \frac{1}{\cosh(a^2/2)} \sum_{n,m} \frac{(a/\sqrt{2})^{n+m}}{\sqrt{n!m!}} \left[ \delta_{n,m} \cos((E_n - E_m)t) - \right. \\ & \left. \sum_{n,m} \sin(E_n t) \sin(E_m t) B_n B_m \eta_n \eta_m \left( \delta_{n,m} - \delta_{n,m} \right) \right], \\ &= \frac{1}{\cosh(a^2/2)} \sum_n \frac{(a/\sqrt{2})^{2n}}{n!} = 1, \end{aligned} \quad (4.18)$$

e  $n, m$  são sempre índices pares. Após a integração, apenas os termos  $n = m$  sobrevivem. Como afirmado anteriormente, isso é válido para qualquer valor esperado na forma da eq. (4.16). Portanto, a partir de agora, o cálculo do valor médio dos operadores será resumido e restrito aos níveis de Landau com  $n = m$ .

Antes de proceder ao cálculo de valores médios, nota-se que a densidade de probabilidade na eq. (4.17) é simétrica em torno da origem  $s = 0$ . Isso sugere que os estados de gato preservam a paridade na coordenada  $s$  em toda a sua evolução, o que altera o padrão usual de revivals.

Primeiramente, a expansão de energia em torno de  $E_{n_0}$  pode ser inserida no termo  $\cos((E_n - E_m)t)$ ,

$$(E_n - E_m) \approx E'(n_0)(n - n_0) + \frac{E''(n_0)}{2}(n - n_0)^2 + \dots \quad (4.19)$$

que descreve as oscilações de frequência mais baixa, pois a oscilação com frequência  $E_{n_0}$  é ausente nesse termo. Como  $(n - n_0)$  é par, as frequências ainda são duplicadas. Por outro lado, os termos proporcionais a  $\sin(E_n t) \sin(E_m t)$  indicam que a oscilação com frequência  $E_{n_0}$  é preservada, a menos que  $B_{n_0} \eta_{n_0} \approx 0$ , para campos fracos. Assim, todas as escalas de tempo podem ser detectadas na densidade de probabilidade, e, como se observam os polinômios de

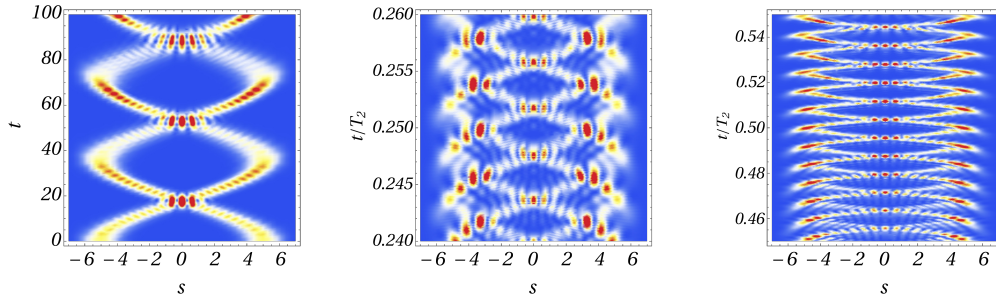
Hermite pares e ímpares, os estados de gato simétricos e antissimétricos exibem o mesmo padrão de evolução.

Esse resultado é ilustrado na fig. (14), onde a densidade de probabilidade descreve a evolução de dois estados gaussianos inicialmente localizados em  $s = \pm a$ , cada um exibindo a periodicidade definida pela expansão na eq. (4.8). O período clássico é então reduzido pela metade, como discutido na eq. (4.9), porque os dois estados localizados trocam de posição e reformam um estado idêntico, simétrico ou antissimétrico. O movimento inicial dos estados de gato, portanto, reproduz precisamente o padrão de revival fracionário de ordem um quarto: um estado localizado se divide em cópias deslocadas espacialmente. Cada cópia oscila com  $2T_1$ , o período clássico padrão. No entanto, como elas são indistinguíveis, conforme demonstrado pela probabilidade de sobrevivência, o estado de gato se reforma em  $t = T_1$ , metade do período clássico. Pelo mesmo motivo, na metade do tempo de revival em  $t = T_2/2$ , o estado inicial é regenerado, pois o revival completo e o revival de ordem um meio são indistinguíveis.

Embora a imagem da densidade de probabilidade funcione como uma forma de compreender a evolução dos estados de gato, apenas os valores esperados são relevante para a construção dos observáveis em uma teoria de informação quântica. Assim, os valores médios no espaço de fases – os quais consideram a contribuição de ambos estados gaussianos – podem ser finalmente relacionados ao fenômeno de separabilidade e emaranhamento.

A estrutura do produto tensorial da representação de Dirac evidencia que o valor esperado dos operadores está intimamente ligado à estrutura de informação quântica dos férmions em um campo magnético constante. De fato, os operadores no espaço dos espinores podem ser considerados operadores de dois qubits associados aos graus internos de liberdade da estrutura de grupo  $SU(2) \otimes SU(2)$  (BITTENCOURT; BERNARDINI; BLASONE, 2016) implícita na equação de Dirac. Assim, espera-se que a dependência do tempo desses observáveis possa afetar os quantificadores usuais das correlações quânticas.

Os operadores quânticos médios do conjunto podem ser obtidos com algumas manipulações algébricas, como foi exemplificado para a densidade de probabilidade. Os valores

**Figura 14** – revivals na representação da densidade de probabilidade

Gráficos de contorno para a densidade de probabilidade  $f_0(s, t)$  (4.17) de um estado de gato com um esquema de cores que identifica o valor máximo (vermelho). O estado inicialmente se reforma duas vezes com um período de  $T_1 = 35$  (esquerda), mas oscila posteriormente com frações desse período em revivals fracionários. Por exemplo, em  $t/T_2 = 1/4$  (figura central), observam-se oscilações com um período  $T_1/2$ , correspondendo a um quarto de revival, e oscilações com período  $T_1$  novamente em  $t/T_2 = 1/2$ , um meio revival (figura à direita). Os parâmetros hamiltonianos são definidos como na fig. (13),  $A_{n_0}/B_{n_0} = 2,04$  e  $\eta_{n_0} = 1/2$  (cf. eq. (2.55)) para  $a = 5$ , o que corresponde a um revival de período  $T_2 = 4 \times 10^3$  ( $T_1/T_2 \approx 8 \times 10^{-3}$ ). Fonte: Elaborada pelo Autor.

médios obtidos são

$$(1/4) \int ds g_1^z(s, t) = \langle \alpha_z \rangle_{CS} = \frac{-2M}{\cosh(a^2/2)} \sum_n \frac{(a^2/2)^{2n}}{(2n)!} \frac{\eta_{2n+1} A_{2n+1}}{E_{2n+1}} \sin(E_{2n+1}t)^2, \quad (4.20)$$

$$(1/4) \int ds g_0^z(s, t) = \langle \gamma_5 \alpha_z \rangle_{CS} = 1 - \frac{8}{\cosh(a^2/2)} \sum_n \frac{(a^2/2)^{2n}}{(2n)!} \eta_{2n+1}^2 B_{2n+1}^2 \sin(E_{2n+1}t)^2, \quad (4.21)$$

$$(1/4) \int ds g_2^z(s, t) = -\langle i\gamma_z \rangle_{CS} = \frac{2}{\cosh(a^2/2)} \sum_n \frac{(a^2/2)^{2n}}{(2n)!} \eta_{2n+1} A_{2n+1} \sin(2E_{2n+1}t), \quad (4.22)$$

$$(1/4) \int ds g_3^z(s, t) = -\langle \gamma_5 \gamma_z \rangle_{CS} = 1 - \frac{8}{\cosh(a^2/2)} \sum_n \frac{(a^2/2)^{2n}}{(2n)!} \eta_{2n+1}^2 A_{2n+1}^2 \sin(E_{2n+1}t)^2, \quad (4.23)$$

$$(1/4) \int ds f_3(s, t) = \langle \gamma_0 \rangle_{CS} = 1 - \frac{8}{\cosh(a^2/2)} \sum_n \frac{(a^2/2)^{2n}}{(2n)!} \eta_{2n+1}^2 (A_{2n+1}^2 + B_{2n+1}^2) \sin(E_{2n+1}t)^2, \quad (4.24)$$

com  $\langle i\gamma_z \rangle_{CS} = \langle i\gamma_0 \gamma_5 \rangle_{CS}$  e  $\langle \gamma_5 \rangle_{CS} = -\langle \alpha_z \rangle_{CS}$ . A segunda coluna foi escrita como a média do conjunto avaliada para o estado de gato de Dirac simétrico (CS) introduzido nas eqs. (4.4)-(4.6).

A primeira e a segunda linhas, eqs. (4.20) e (4.21), correspondem às componentes, na direção do campo magnético, dos operadores de velocidade e densidade de spin, respectivamente. Por outro lado, as componentes perpendiculares, por exemplo,  $\alpha_x$  e  $\alpha_y$ , são nulas. Essa é uma assinatura da propriedade simétrica dos estados de gato, já que um estado

quântico que se propaga em uma direção perpendicular não seria simétrico. Nesse sentido, os estados estão confinados neste plano.

O resultado acima pode ser utilizado para mostrar que os valores esperados das densidades no espaço de fases podem ser obtidas diretamente na representação de coordenadas, já que o sistema quântico é puro. Essas quantidades têm uma relevância particular quando se consideram os biespinores de Dirac como qubits emaranhados. Os quantificadores de informação quântica obtidos anteriormente (BERNARDINI, 2020a; SILVA; BERNARDINI, 2021) podem ser construídos explicitamente a partir de combinações específicas das funções acima para um estado de gato de Dirac puro. Por exemplo, ao reescrever  $\langle \gamma_5 \gamma_0 \gamma_z \rangle$  como a densidade de spin  $\langle \Sigma_z \rangle$ , é possível mostrar que

$$(1 + \langle \gamma_0(t) \rangle) \left( \frac{1 - \langle \Sigma_z(t) \rangle}{2} \right) = \langle C^2(t) \rangle_{x,k_x}^{SP}, \quad (4.25)$$

onde o índice  $CS$  foi suprimido. O lado direito da eq. (4.25) corresponde à média da concorrência quântica (ao quadrado) entre spin e paridade, e o lado esquerdo é escrito como o produto entre as funções dos operadores de spin e paridade intrínseca. Isso confirma que o estado inicial, com paridade e projeção de spin bem definidos, pode ser escrito como um estado de dois *qubits* separável i. e. com concorrência nula. Além disso, essa expressão descreve a evolução temporal do emaranhamento intrínseco de um estado de gato. Em outras palavras: partindo de um estado separável nos graus de liberdade spin e paridade, a evolução temporal na eq. (4.25) determina que o estado permanecerá emaranhado permanentemente, excepto nos zeros da função acima, os quais determinam os revivals do estado inicial.

Desse modo, o comportamento descrito para a probabilidade de sobrevivência permite prever o comportamento das correlações quânticas em grandes escalas temporais. Em particular, isso pode ser aplicado em sistemas que simulam os níveis relativísticos de Landau (RUSIN; ZAWADZKI, 2010). Uma diferença relevante entre os estados mesoscópicos previamente relatados (BERMUDEZ; MARTIN-DELGADO; SOLANO, 2007b) é a descrição do emaranhamento entre os graus de liberdade orbital e espinorial. Aqui, o emaranhamento intrínseco quantifica as correlações – mediadas pela base do oscilador harmônico – entre os graus de liberdade discretos na estrutura de grupo  $SU(2) \otimes SU(2)$  implícita na equação de Dirac (BITTENCOURT; BERNARDINI, 2016). Portanto, a normalização dos polinômios de Hermite garante a conservação de probabilidade e pureza quântica, independentemente do regime específico considerado. Essa restrição é essencial para o cálculo dos quantificadores

de informação quântica, como entropias lineares e a concorrência quântica (BERNARDINI, 2020a).

De forma similar, a informação mútua assume uma forma simplificada para estados puros<sup>4</sup> e também pode ser expressa em termos de valores médios,

$$\langle \mathcal{M}(t) \rangle_{x,k_x}^{SP} = 2 - \frac{1}{2} \left( (1 + \langle \gamma_0(t) \rangle)^2 + (\langle \gamma_0 \Sigma_z(t) \rangle + 1)^2 + (\langle \Sigma_z(t) \rangle - 1)^2 - \langle i\gamma_z(t) \rangle^2 - 4\langle \alpha_z(t) \rangle^2 \right), \quad (4.26)$$

em que  $\langle \gamma_5 \gamma_z \rangle$  foi escrito como  $\langle \gamma_0 \Sigma_z \rangle$  e nota-se que todos os valores médios não nulos contribuem para esse quantificador<sup>5</sup>.

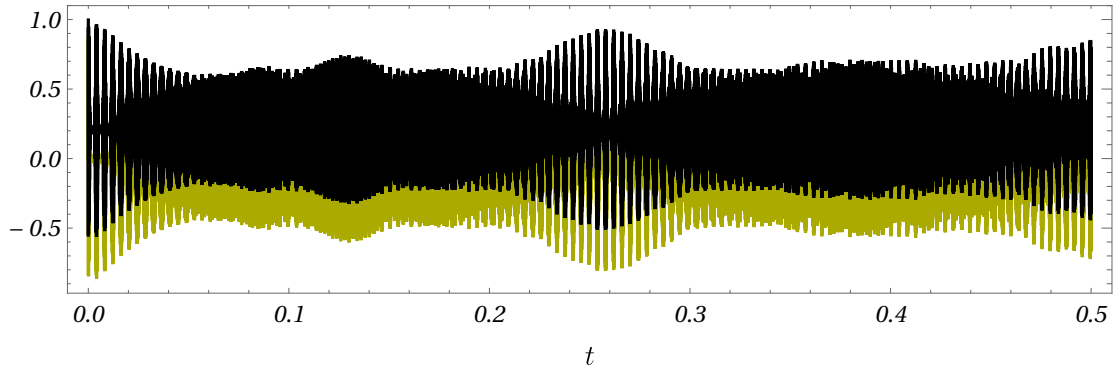
Ainda que a expressão para a informação mútua seja menos intuitiva que a eq. (4.25), ela é não nula mesmo em campos magnéticos fracos. Relembrando que esse quantificador compreende as correlações clássicas e quânticas (SILVA; BERNARDINI, 2021), a dependência explícita nos termos cinéticos, por exemplo, a componente da corrente vetorial  $\langle \alpha_z \rangle$  (cf. (4.20)) mostra que as correlações clássicas são maximizadas nesse caso.

A informação mútua envolve todos os valores médios de matrizes que aparecem na decomposição espinorial da matriz de Wigner. De fato, espera-se que qualquer quantificador de informação quântica dependa de alguma combinação particular desses valores esperados para um estado puro, pois nesse caso a função de onda e a função de Wigner espinorial são equivalentes. No entanto, isso também deve ser válido para estados mistos. Nesse caso, o revival deve ser obtido diretamente da matriz de Wigner, dado que a função de onda já não pode ser mais obtida.

Em resumo, a regra de seleção dos operadores quânticos reflete as simetrias dos estados de gato. Para operadores que não são matrizes diagonais em bloco, e.g. as componentes da corrente vetorial no plano perpendicular ao campo magnético, seus valores esperados são nulos. Por outro lado, os operadores que são escritos como matrizes diagonais em bloco têm uma evolução temporal não trivial que também exhibe uma estrutura de revival fracionário. As escalas de tempo detectadas na probabilidade de sobrevivência são reduzidas à metade mais uma vez, o que pode ser usado para descrever o comportamento de longo prazo das correlações quânticas. Assim, sempre que os estados do gato de Dirac são reformados, os

<sup>4</sup>Essa é duas vezes a entropia linear do espaço de fase, que mede o grau de localização de um estado quântico.

<sup>5</sup>Uma descrição alternativa de revivals em termos de entropias de posição e momento também foi proposta em (ROMERA; LOS SANTOS, 2007).

**Figura 15** – Revivals quase ideais nas componentes da matriz espinorial de Wigner-Dirac

Revivals nos valores médios das componentes nas eqs. (4.22)-(4.23),  $(1/4) \int_s g_2^z(s, t)$  (amarelo, claro cinza) e  $(1/4) \int_s g_3^z(s, t)$  com  $B_{n_0}/A_{n_0} \approx 0,49$ ,  $\eta = 1/2$  (cf. eq. (2.55)) e  $a = 5$ . A variável  $t$  é dada na escala de  $(T_2)^{-1}$ , com  $T_2 = 4,3 \times 10^3$ . Revivals completos e meios revivals são observados em  $t = 0,5$  e  $t = 0,25$ , respectivamente. Também se observam um quarto de revivals em  $t = 0,125$  e  $t = 0,375$ . Fonte: Elaborada pelo Autor.

graus de liberdade spin e paridade tornam-se separáveis. Como ilustração, dois operadores são exemplificados na fig. (15), uma vez que os valores esperados nas eqs. (4.20)-(4.24) têm um padrão de dependência temporal semelhante. A escala de revival de  $T_2$  reproduz todos os padrões observados na função de probabilidade de sobrevivência, com a principal diferença de que as frequências são duplicadas mais uma vez devido aos termos  $\sin^2(E_n t)$ . Por exemplo, revivals completos são observados em  $t/T_2 = 1/2$ , em vez de  $t = T_2$ . Quando a energia é dominada pelo termo cinético  $k_z$  (cf. eq. (2.55)), a estrutura de revival é exata, uma vez que os níveis de energia são quase uniformemente espaçados e, além disso, a função espectral se torna altamente localizada em torno de uma energia média. A regeneração do estado inicial é quase perfeita, pois o valor esperado inicial do operador é também regenerado no revival de ordem meio,  $t/T_2 = 1/4$ . Porém, para esses parâmetros, a concorrência quântica é desprezível e a informação mútua é associada apenas a correlações clássicas.

O regime de campos fracos corresponde a padrões de revivals mais precisos, quando as correlações clássicas são relevantes. De fato, qualquer regeneração reforma parcialmente o estado inicial, que é separável nos graus de liberdade spin e paridade. Portanto, os parâmetros do Hamiltoniano de Dirac podem ser ajustados a regimes específicos para os níveis de Landau considerados, permitindo um controle sobre a estrutura de revivals dos estados de gato e o perfil de correlação correspondente em longos períodos.



A abordagem no espaço das configurações, ou no espaço de fases – com o formalismo de Wigner-Dirac –, parece ser uma questão opcional, ainda que os quantificadores de informação quântica não sejam evidentes diretamente da função de onda. No entanto, essa equivalência será revisitada na próxima seção, onde *ensembles* estatísticos serão estudados. Nesse caso, a representação da matriz densidade se torna inevitável.

## 5 ENSEMBLES ESTATÍSTICOS

Além dos fenômenos dependentes do tempo, espera-se que interações externas também influenciem o perfil de informação quântica em uma descrição mais realista da equação de Dirac (BITTENCOURT; BERNARDINI, 2016). No entanto, quando os detalhes do ambiente não são conhecidos, uma alternativa é recorrer a *ensembles* em vez de resolver um Hamiltoniano ainda mais complexo. Assim, a especificação do estado misto depende do tipo de interação que se deseja estudar. O *ensemble* canônico é um exemplo relevante de interações entre sistema e ambiente, no qual a distribuição de probabilidades está relacionada a um sistema termodinâmico.

Nesse contexto, estados mistos serão estudados sob o formalismo de Weyl-Wigner para se estudar a perda de pureza quântica e o cálculo de quantificadores de informação em *ensembles* estatísticos. Preliminarmente, superposições serão distinguidas de misturas quânticas a partir das propriedades das funções de Wigner.

Uma possível extensão para funções de Wigner mistas é obtida a partir da seguinte decomposição,

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \sum_i p_i \omega_i(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \quad (5.1)$$

em que  $\omega_i(\mathbf{x}, \mathbf{k})$  é uma função de Wigner pura estacionária e  $\sum_i p_i = 1$ . Partindo da definição da função de Wigner na eq. (2.16), a combinação linear acima fornece um *ensemble* estatístico estacionário. Nota-se que partindo de um estado misto, não é uma tarefa trivial extrair cada  $p_i$  com relação a uma base de dimensão infinita. No entanto, todos os estados mistos, estacionários ou não, podem ser decompostos de forma equivalente, em uma base de funções de Wigner-Dirac puras. Ao longo do trabalho, a distribuição de probabilidade será imposta para estados independentes do tempo, o que simplifica o estudo de misturas estatísticas sem a complicada dependência de tempo na estrutura relativística, a qual foi discutida na seção anterior. Como será demonstrado, a distribuição de probabilidade é única em sistemas confinados.

De qualquer modo, não é possível escrever a matriz densidade estacionária  $W(\mathbf{x}, \mathbf{k})$  na forma da eq. (2.16), já que nenhuma função de onda pode descrever esse estado. Isso vai ao encontro da prescrição de uma matriz densidade em termos de estados quânticos puros  $|\psi_i\rangle$  de um espaço de Hilbert genérico i. e.

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|. \quad (5.2)$$

Em ambos os casos,  $p_i$  é não negativo e, portanto, pode ser considerado como uma distribuição de probabilidade. Efetivamente, as soluções de estado puro são obtidas quando todos, exceto um,  $p_i = 0$ . Para a função de Wigner de tempos iguais considerada aqui, essa situação é satisfeita quando o quantificador de pureza,

$$\mathcal{P} = (2\pi)^3 \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{k} \text{Tr} \left[ (\gamma^0 \omega(\mathbf{x}, \mathbf{k}; t))^2 \right] = (2\pi)^3 \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{k} \text{Tr} \left[ \omega(\mathbf{x}, \mathbf{k}; t) \omega^\dagger(\mathbf{x}, \mathbf{k}; t) \right], \quad (5.3)$$

é maximizado em  $\mathcal{P} = 1$  (BERNARDINI, 2020a). De maneira semelhante a sistemas de qubit, a pureza quântica é calculada a partir do traço – nos graus de liberdade relevantes – da matriz densidade ao quadrado. No entanto, para sistemas confinados, o operador traço inclui também o traço sobre graus de liberdade contínuos i. e. a integração no espaço de fases. Portanto, a pureza quântica  $\mathcal{P} = 1$  não pode ser confirmada sem a média nessas variáveis adicionais. De agora em diante, a dependência no tempo será omitida, já que apenas soluções estacionárias serão discutidas.

A ortogonalidade das soluções estacionárias é mantida no espaço de fase no sentido da eq. (5.3), simplificando a expressão da pureza quântica para soluções mistas particulares. Para quaisquer duas soluções estacionárias puras de um determinado Hamiltoniano,

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = p_A \omega^A(\mathbf{x}, \mathbf{k}) + p_B \omega^B(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \quad (5.4)$$

também é uma solução estacionária do mesmo Hamiltoniano (cf. (2.16)), e usa-se a eq. (5.3) para calcular a pureza do estado misto,

$$\mathcal{P}[W] = p_A^2 + p_B^2 + 2p_A p_B \chi_{AB}, \quad (5.5)$$

onde

$$\chi_{AB} = (2\pi)^3 \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{k} \text{Tr} \left[ \omega_B(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \omega_A^\dagger(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \right].$$

Somente  $\chi_{AB} = 0$  é admissível, o que decorre da ortogonalidade dos estados. Desse modo, a pureza quântica depende exclusivamente dos parâmetros  $p_A$  e  $p_B$ , o que pode ser generalizado para uma combinação linear de várias funções de Wigner. Dois estados puros não se sobrepõem no espaço de fases, em média, e a pureza quântica sempre satisfaz  $1/m \leq \mathcal{P} \leq 1$  para uma mistura estatística de  $m$  funções de Wigner puras, em que o limite inferior é obtido para uma mistura igual i. e. quando todos os  $p_i$  têm o mesmo valor  $p_i = 1/m$ .

Desse modo, as variáveis contínuas, posição e momento, introduzem novos graus de liberdade que precisam ser considerados nos quantificadores de informação, sobretudo quando se consideram estados mistos. A concorrência quântica é o exemplo mais notável da distinção entre sistemas de qubits localizados. Em um estado puro, a matriz densidade de spin-paridade,  $\rho_{SP} = \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{k} \omega(\mathbf{x}, \mathbf{k}; t)\gamma^0$ , é uma matriz densidade reduzida, onde a integral corresponde à operação traço nas coordenadas do espaço de fases. Os critérios de separabilidade poderiam ser aplicados pelo método da diagonalização, mas as medidas de correlações assim obtidas produzem, na melhor das hipóteses, um limite inferior na estrutura de correlação quântica intrínseca dos bispinores de Dirac. Na pior das hipóteses, os autovalores que aparecem na fórmula de concorrência da eq. (2.30) são ambíguos para funções de Wigner mistas porque a raiz quadrada da matriz densidade no espaço de fases é mal definida.

Uma expressão explícita para a concorrência quântica em funções de Wigner-Dirac mistas pode ser obtida por uma outra rota. Argumenta-se que a quantização dos estados estacionários é também verificada na estrutura de correlação como, por exemplo, a quantização da concorrência quântica (SILVA; BERNARDINI, 2023). Portanto, há um conjunto reduzido de estados puros que realizam este estado misto específico, e os algoritmos de otimização podem ser bastante simplificados. Isso só é possível quando o espectro de energia é discreto e a matriz densidade relevante depende de números quânticos adicionais. Em um campo magnético, esses números quânticos correspondem aos níveis de Landau, que restringem imediatamente o conjunto de estados puros na decomposição das matrizes densidade.

Esse resultado pode ser verificado a partir das propriedades das funções de Wigner. Relembrando inicialmente que a conservação de probabilidade implica na condição de normalização,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \text{Tr}[(\omega_{n,r}^s(s, k_x)\gamma_0)] = 1, \quad (5.6)$$

o que é válido para estados puros e mistos. Além da normalização, dois autoestados quaisquer são sempre ortogonais no espaço de fases,

$$\frac{2\pi}{\sqrt{e\mathcal{B}}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \text{Tr}[(\omega_{n,r}^s(s, k_x)\gamma_0)(\omega_{n',r'}^{s'}(s, k_x)\gamma_0)] = \delta_{s,s'}\delta_{r,r'}\delta_{n,n'}, \quad (5.7)$$

e a propriedade de ortogonalidade é verificada nas soluções estacionárias, como sugerido pela eq. (5.3). O fator adicional vem da normalização das funções do espaço de fases (cf. (2.63)). Isso confirma que as funções de onda permanecem ortogonais no espaço de fases. Essa ortogonalidade pode ser usada em certas decomposições em funções de Wigner puras, semelhante a uma decomposição em autofunções no espaço das configurações, mas apenas com coeficientes positivos como na eq. (5.4). Se essa decomposição em coeficientes positivos não for possível, observa-se o fenômeno da superposição quântica.

De fato, essa decomposição particular não é possível para uma matriz densidade arbitrária  $4 \times 4$ . Precisamente, uma superposição pode introduzir uma matriz adicional — que não é uma matriz de Wigner válida — e deve ser calculada diretamente no espaço das configurações. Para verificar esse comportamento, um exemplo instrutivo será discutido a seguir, comparando superposições e misturas estatísticas. Em seguida, obtém-se a prometida expressão da concorrência para estados mistos.

## 5.1 INTERFERÊNCIA E ALEATORIEDADE

Para descrever as diferenças entre superposições e misturas dentro da estrutura de Weyl-Wigner, é útil considerar primeiro uma superposição quântica dentro do subespaço degenerado,

$$\omega_{n,\theta} = \sin^2(\theta) \omega_{n,1}^+ + \cos^2(\theta) \omega_{n,1}^- + \sin(\theta) \cos(\theta) \Omega_n, \quad (5.8)$$

$$\text{onde } \Omega_n(s, k_x) = \eta_n \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{M}_n & -B_n \mathcal{L}_{n-1} & A_n \mathcal{M}_n \\ \mathcal{M}_n & 0 & -A_n \mathcal{M}_n & -B_n \mathcal{L}_n \\ B_n \mathcal{L}_{n-1} & A_n \mathcal{M}_n & 2A_n B_n \mathcal{L}_{n-1} & (A_n^2 - B_n^2) \mathcal{M}_n \\ -A_n \mathcal{M}_n & -B_n \mathcal{L}_n & (A_n^2 - B_n^2) \mathcal{M}_n & -2A_n B_n \mathcal{L}_n \end{pmatrix},$$

que é obtido inserindo os estados puros normalizados  $\sin(\theta) u_{n,1}^+(s) + \cos(\theta) u_{n,1}^-(s)$  na definição da função de Wigner de tempo igual na eq. (2.16). Assim, os dois primeiros termos do lado direito representam a matriz densidade de cada estado na superposição, e o terceiro termo corresponde a uma superposição entre eles, em que  $\sin(\theta) \cos(\theta)$  quantifica naturalmente essa

superposição. De fato,  $\Omega_n(s, k_x)$  não é de forma alguma uma função de Wigner válida, pois não pode ser normalizada (cf. (4.13)),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \operatorname{Tr}[\Omega_n(s, k_x)\gamma_0] = -2\eta_n A_n B_n \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x (\mathcal{L}_n - \mathcal{L}_{n-1}) = 0, \quad (5.9)$$

e  $\sin(2\theta)/2$  é negativo para  $\pi/2 < \theta < \pi$ ; no entanto, a expressão completa em (5.8) é, de fato, uma função de Wigner válida. Primeiro, ela é normalizada,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \operatorname{Tr}[\omega_{n,\theta}(s, k_x)\gamma_0] &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \operatorname{Tr} \left[ \left( \sin^2(\theta) \omega_{n,1}^+ + \cos^2(\theta) \omega_{n,1}^- \right) \gamma_0 \right] \\ &= 1, \end{aligned} \quad (5.10)$$

em que se usou a condição de normalização na eq. (4.13) para cada termo acima. Em segundo lugar, a matriz  $\Omega_n(s, k_x)$  conduz os efeitos de interferência entre as soluções de estado puro  $\omega_{n,1}^+$  e  $\omega_{n,1}^-$ , não afetando o conteúdo de pureza da superposição, que é calculado como

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \frac{2\pi}{\sqrt{e\mathcal{B}}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \operatorname{Tr}[(\omega_{n,\theta}(s, k_x)\gamma_0)^2] \\ &= (\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta))^2 \eta_n^2 (1 + A_n^2 + B_n^2)^2 \\ &= 1, \end{aligned} \quad (5.11)$$

ou seja, como um estado puro. A simplificação na última linha,  $\eta_n(1 + A_n^2 + B_n^2) = 1$  (cf. (2.55)) decorre de uma manipulação algébrica dos parâmetros de energia. Assim, a eq. (5.8) não é uma mistura de estados quânticos. Ela corresponde a uma mudança de base, pois o espectro tem uma degenerescência dupla de spin.

Por outro lado, uma mistura entre duas funções de Wigner estacionárias de um número quântico fixo  $n$  é escrita como

$$\omega_{n,\phi} = \sin^2(\phi) \omega_{n,1}^+ + \cos^2(\phi) \omega_{n,1}^-. \quad (5.12)$$

Observa-se que o *ensemble* também é constituído por estados que pertencem ao subespaço degenerado, e somente coeficientes positivos aparecem na decomposição, sem nenhum termo

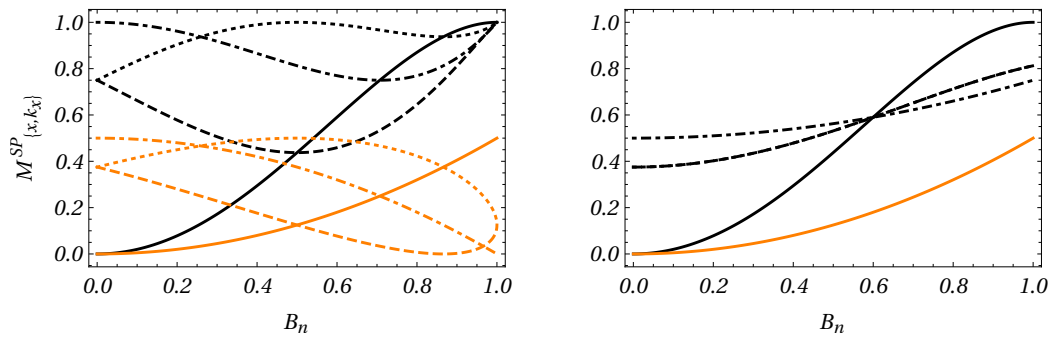
de interferência. O conteúdo de pureza é calculado de forma análoga,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P} &= \frac{2\pi}{\sqrt{eB}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \text{Tr}[(\omega_{n,\phi}(s, k_x)\gamma_0)^2] \\
 &= (\sin^4(\phi) + \cos^4(\phi))\eta_n^2(1 + A_n^2 + B_n^2)^2 \\
 &= \sin^4(\phi) + \cos^4(\phi) \leq 1.
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Assim,  $\phi$  é um verdadeiro parâmetro de mistura e produz soluções de estado puro para  $\phi = l\pi/2$  com  $l$  inteiro. A pureza depende apenas da distribuição de probabilidade, conforme esperado da eq. (5.5). Em resumo, a medida de pureza quântica quantifica exclusivamente os efeitos das combinações lineares que ocorrem no espaço de fases, não sendo afetada pelas superposições no espaço das configurações.

É possível mostrar que a distribuição de probabilidade na eq. (5.12) é única. Para isso, supõe-se inicialmente que é possível obter o mesmo estado misto com uma decomposição distinta. Como a base dos polinômios de Laguerre do oscilador harmônico é ortogonal no espaço de fases, somente as misturas para um  $n$  fixo nas eqs. (2.56)-(2.57) exibem a ordem correta dos polinômios. Mesmo assim, agora é preciso combinar todas as 16 constantes dos elementos matriciais da matriz densidade. Verifica-se que não é possível obter o mesmo estado com uma combinação linear distinta, com coeficientes positivos, com outros estados puros. Portanto, essa decomposição é única.

Agora, calcula-se a informação mútua em (2.27) para ângulos de superposição e mistura  $\theta$  e  $\phi$ , respectivamente. Embora a dependência de diversos parâmetros torne a interpretação um tanto obscura, propriedades mais interessantes são observadas diretamente na fig. (16) para valores coincidentes de  $\theta$  e  $\phi$ . Os mesmos ângulos foram escolhidos de modo a comparar cada mistura com uma superposição quântica correspondente, de modo que, em ambos os casos, obtém-se uma função de Wigner estacionária, pois os níveis de energia são degenerados.

**Figura 16** – Correlações intrínsecas em superposições e misturas estatísticas

Informação mútua para níveis de Landau estacionários. As correlações são calculadas com a informação mútua (cf. eq. (2.27); linhas pretas) para a qual se supõe que  $m = 0$  (cf. eq. (2.55)). (Gráfico à esquerda) Os resultados são para superposições puras de estados com spin down e spin up como obtidos na eq. (5.8), para coeficientes  $\sin^2(\theta) = 0$  (sólido),  $1/4$  (tracejado),  $1/2$  (tracejado) e  $3/4$  (pontilhado). (Gráfico à direita) Os resultados são para misturas dos mesmos estados com spin down e spin up (5.12), para coeficientes  $\sin^2(\phi) = 0$  (sólido),  $1/4$  (tracejado),  $1/2$  (tracejado por pontos) e  $3/4$  (pontilhado), ou seja, com os mesmos padrões. Os resultados da concorrência quântica (linhas laranja) também são exibidos em ambos os gráficos, mantendo os padrões de linha. Enfatiza-se que enquanto uma certa quantidade de informações é perdida em estados mistos para campos magnéticos fortes ( $B_n = 1$ ), a aleatoriedade cria correlações em campos magnéticos fracos ( $B_n = 0$ ). Além disso, todas as misturas compartilham o mesmo valor de concorrência quântica. Fonte: Elaborada pelo Autor.

O campo externo afeta fortemente as correlações. Por um lado, a informação mútua para superposições quânticas ( $\theta \neq 0$ ) é uma função não monotônica do campo magnético representada por  $B_n = \frac{\sqrt{2n e B}}{\sqrt{k_z^2 + 2n e B}}$ , porque o padrão de interferência pode amplificar ou suprimir seus efeitos sobre as correlações. No entanto, é curioso que, para um campo forte ( $B_n \approx 1$ ), esse quantificador se aproxime da unidade para todos os valores de  $\theta$ . Por outro lado, as correlações para um  $\phi$  fixo sempre aumentam quando o campo magnético aumenta. Fixando o valor da interação, no entanto,  $\phi$  determina a quantidade total de correlações.

De fato, há um valor do campo a partir do qual o aumento de  $\phi$  degrada ou amplifica as correlações. Na figura, isso ocorre em  $B_n \approx 0,6$ . Abaixo desse valor, a perda de pureza cria correlações; acima desse valor, o grau de mistura suprime as correlações. Por exemplo,



considerando o estado puro como, uma mistura igual com  $\sin^2(\phi) = 1/2$  (linhas tracejadas) perde quase um quarto das correlações devido à aleatoriedade em um campo magnético forte. Entretanto, em um campo magnético fraco ( $B_n = 0$ ), metade dessas correlações são observadas para o mesmo ângulo de mistura.

Outras propriedades também são observadas. Duas misturas distintas para as quais os valores de  $\phi$  são complementares exibem valores coincidentes para todos os quantificadores. Em particular, para  $\sin^2(\phi) = 1/4$  ( $\phi = \pi/6$ ),  $3/4$  ( $\phi = \pi/3$ ), obtêm-se as mesmas medidas de informação. Em uma mistura de dois estados puros, isso significa que a permutação da distribuição de probabilidade gera um estado equivalente, ao menos com relação a esses quantificadores. Em contrapartida, não há equivalência entre as superposições quânticas com os mesmos ângulos  $\sin^2(\theta) = 1/4, 3/4$  (linhas tracejadas e pontilhadas, respectivamente), o que é uma consequência da distinção fundamental entre superposições e misturas: enquanto  $\theta$  quantifica a interferência dos estados, o ângulo de mistura  $\phi$  atribui apenas uma probabilidade, ou chance, de medir cada estado puro.

Além da informação mútua total medida pelas entropias lineares, a concorrência quântica também pode ser calculada. Como discutido anteriormente, a fórmula exata para sistemas de dois qubits correlacionados por variáveis de espaço de fase foi calculada somente para estados puros (BERNARDINI, 2020a; SILVA; BERNARDINI, 2021).

O principal resultado é que o grau adicional de liberdade relacionado à função de onda orbital introduz uma quantização no emaranhamento de estado puro, que exhibe valores coincidentes para qualquer uma das matrizes de densidade mostradas nas eqs. (2.56)-(2.59),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x C^2[\omega_{n,r}^{\pm}] = 2(\eta_n B_n)^2, \quad (5.14)$$

em que esses coeficientes foram introduzidos na eq. (2.55) e estão relacionados à razão entre a intensidade do campo magnético e as autoenergias da partícula de Dirac. Portanto, a concorrência é quantizada, e todos os estados quânticos do mesmo nível de Landau exibem valores coincidentes do emaranhamento entre spin e paridade.

Retornando ao *ensemble* estatístico parametrizado pelo ângulo  $\phi$  na eq. (5.12), a concorrência para estados mistos é obtida procurando o valor mínimo entre todos os conjuntos que realizam esse estado (cf. (2.33)). Como esses estados são unicamente definidos pela

distribuição de probabilidade, essa já é a decomposição que minimiza o quantificador. Logo,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} ds \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x C^2[\omega_{n,\phi}] &= (\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi)) \int_{-\infty}^{+\infty} ds \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x C^2[\omega_n^\pm] \\ &= 2(\eta_n B_n)^2, \end{aligned} \quad (5.15)$$

independente do ângulo de mistura.

Por outro lado, a superposição considerada na eq. (5.8) – um estado puro – tem uma concorrência dada por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x C^2[\omega_{n,\theta}] = 2\eta_n^2 (B_n \cos(2\theta) - A_n \sin(2\theta))^2, \quad (5.16)$$

simplificando para a concorrência quântica na eq. (5.14) quando  $\cos(2\theta) = \pm 1$ . Portanto, esse quantificador distingue entre uma superposição quântica e um *ensemble* estatístico, ou ainda, entre a interferência e a mera incerteza na preparação de um estado.

Isso também está incluído na fig. (16) para  $A_n^2 + B_n^2 = 1$  (limite sem massa). Os resultados indicam a diferença mais significativa entre estados puros e mistos em um campo confinante. Embora um desemaranhamento completo seja observado para superposições quânticas com  $\sin^2(\theta) = 1/4, 1/2$  (linhas tracejadas e pontilhadas, respectivamente), o perfil de emaranhamento intrínseco não é afetado pela mistura de estados que têm a mesma concorrência intrínseca. De fato, essa medida tem o mesmo comportamento qualitativo da informação mútua para estados mistos, aumentando sempre que o campo magnético aumenta, não sendo sensível à incerteza associada à preparação do estado quântico.

Resumindo, as correlações armazenadas em graus de liberdade discretos e contínuos, quantificadas pela informação mútua, são afetadas pela aleatoriedade e interferência de maneiras diferentes. Enquanto a primeira limita o máximo de informação que pode ser medida no estado misto, a segunda altera a dependência (monotônica) do campo magnético para uma superposição. Especificamente com relação às correlações quânticas, elas são determinadas por efeitos de interferência, não por uma distribuição de probabilidade no espaço de fases. Isso implica que a informação mútua menos a concorrência quântica quantifica um tipo de correlação que pode ser amplificada ou suprimida pela aleatoriedade, isto é: a incerteza pode introduzir ou degradar as correlações clássicas. Por outro lado, a interferência afeta todos os tipos de correlações de uma maneira não trivial.

Estabelecidas as diferenças entre combinações lineares de matrizes densidade e superposições quânticas, na próxima seção calculam-se correlações de estados gaussianos mistos, que têm semelhanças com as distribuições clássicas no espaço de fase, nomeadamente, a distribuição de probabilidade é sempre positiva. Elas são obtidas a partir das funções geradoras dos polinômios de Laguerre no espaço de fases.

## 5.2 ESTADOS GAUSSIANOS MISTOS

Na base obtida nas eqs. (2.56)-(2.59), há quatro estados puros para cada nível de Landau. Assim, o estado maximalmente misto dentro desse subespaço é obtido por uma mistura igual com ambos os sinais da paridade,

$$\begin{aligned}
 W_n(s, k_x) &= \frac{1}{4} \sum_{s,r=1}^2 \omega_{n,r}^s(s, k_x), \\
 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{n-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathcal{L}_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathcal{L}_n \end{pmatrix}, \tag{5.17}
 \end{aligned}$$

em que a soma apenas com  $s = 1$  produz os resultados da seção anterior. No entanto, esses estados eram consideravelmente difíceis de manipular, porque a matriz densidade não era diagonal e dependia de diversos parâmetros físicos. Aqui, por outro lado, a forma bastante simples da função de Wigner simplifica todos os quantificadores.

A pureza é calculada de forma direta, pois a matriz densidade é diagonal,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P} &= \frac{2\pi}{\sqrt{e\mathcal{B}}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \text{Tr}[(W_n(x, k_x)\gamma_0)^2] \\
 &= \frac{\pi}{4\sqrt{e\mathcal{B}}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x (\mathcal{L}_{n-1}^2 + \mathcal{L}_n^2) \\
 &= \frac{1}{4}, \tag{5.18}
 \end{aligned}$$

em que se obteve a última igualdade usando a eq. (2.63). Assim, esse estado misto corresponde a uma mistura igual de quatro estados puros, como suposto inicialmente.

Passando para o cálculo das entropias com relação ao espaço de fases e ao espaço de paridade e spin, obtêm-se

$$\mathcal{I}_{\{x,k_x\}} = 1 - \frac{2\pi}{\sqrt{e\mathcal{B}}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \text{Tr} [\gamma_0 W_n(s(x), k_x)]^2 = \frac{1}{2}, \quad (5.19)$$

e

$$\mathcal{I}^{SP} = 1 - \text{Tr} \left[ \left( \gamma_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x W_n(s, k_x) \right)^2 \right] = \frac{3}{4}, \quad (5.20)$$

respectivamente. Elas são calculadas considerando as relações de ortogonalidade das funções de base nas eqs. (2.62)-(2.63). Então, a informação mútua pode ser obtida, resultando em

$$\begin{aligned} M_{\{x,k_x\}}^{SP} &= \mathcal{I}_{\{x,k_x\}} + \mathcal{I}^{SP} - (1 - \mathcal{P}) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Surpreendentemente, esse resultado não depende de nenhum regime específico ou parâmetro de energia, e todas as correlações são constantes para a mistura máxima dentro do mesmo nível de Landau. Comparando com a concorrência intrínseca (ao quadrado) discutida anteriormente,

$$C^2 = 2(\eta_n B_n)^2, \quad (5.22)$$

que é uma quantidade que assume um valor fixo para cada nível de Landau e é restrita a  $0 \leq C^2 \leq 1/2$  (cf. (2.55)). Portanto, no limite inferior, a informação mútua é dominada por correlações clássicas. No limite superior, as correlações são dominadas pela concorrência, pois a aleatoriedade degrada todas as correlações clássicas.

Usando esse estado diagonal para cada nível de Landau, buscam-se agora estados que são arbitrariamente mistos. Em geral, eles correspondem a *ensembles* que envolvam todos os autoestados. Propõe-se o *ansatz*

$$\mathcal{W}(s, k_x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n W_n(s, k_x), \quad (5.23)$$

em que  $W_n(s, k_x)$  é uma mistura igual de estados, conforme obtido na eq. (5.17).

Para escolhas apropriadas de  $p_n$ , é possível obter a soma em termos de funções elementares. Supondo então que  $p_n = z^n$ , a mistura pode ser interpretada da seguinte forma:  $z = 0$

seleciona apenas o estado fundamental, enquanto  $z = 1$  seleciona um número infinito de níveis de Landau. Essa parametrização é particularmente útil porque os polinômios de Laguerre satisfazem

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(r^2) z^n = \frac{1}{1-z} \exp\left(\frac{z r^2}{z-1}\right), \quad (5.24)$$

em que o lado direito é sua função geradora com  $r^2 = s^2 + k_x^2$ . Relembrando a base completa de funções na eq. (2.60), apenas duas componentes da função de Wigner precisam ser calculadas,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n(s, k_x) z^n &= \sqrt{e\mathcal{B}} \exp(-r^2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_n(2r^2) z^n \\ &= \sqrt{e\mathcal{B}} \frac{\exp\left[2r^2\left(\frac{z}{z+1} - 1/2\right)\right]}{z+1}, \end{aligned} \quad (5.25)$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n(s, k_x) z^{n+1} &= z \sqrt{e\mathcal{B}} \exp(-r^2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_n(2r^2) z^n \\ &= z \sqrt{e\mathcal{B}} \frac{\exp\left[2r^2\left(\frac{z}{z+1} - 1/2\right)\right]}{z+1}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Portanto, todas as componentes são funções gaussianas no espaço de fases. Para funções de Wigner admissíveis e uma conexão clara com conjuntos estatísticos,  $z$  deve ser restrito a valores positivos. De fato,  $z$  pode ser considerado como um parâmetro da mistura, selecionando estados com números quânticos grandes à medida que  $z \rightarrow 1$ . Ao coletar os fatores de normalização, o resultado final é a seguinte função de Wigner,

$$\mathcal{W}_{11} = \frac{N \sqrt{e\mathcal{B}}}{4 \pi} \frac{z}{z+1} \exp\left[2(s^2 + k_x^2) \left(\frac{z}{z+1} - 1/2\right)\right], \quad (5.27)$$

$$\mathcal{W}_{22} = \frac{N \sqrt{e\mathcal{B}}}{4 \pi} \left\{ \exp[-(s^2 + k_x^2)] + \frac{1}{z+1} \exp\left[2(s^2 + k_x^2) \left(\frac{z}{z+1} - 1/2\right)\right] \right\}, \quad (5.28)$$

$$\mathcal{W}_{33} = -\mathcal{W}_{11}, \quad (5.29)$$

$$\mathcal{W}_{44} = -\mathcal{W}_{22}, \quad (5.30)$$

onde  $\mathcal{W}_{ij}$  denota o elemento na  $i$ -ésima linha e na  $j$ -ésima coluna. Além disso,  $N = (\sum_{n=0}^{\infty} z^n)^{-1} = 1 - z$  é a constante de normalização, e todos os outros elementos da matriz são zero.

Antes de calcular os observáveis físicos relevantes, é útil salientar que os polinômios de Laguerre, que são ortogonais no espaço de fases, foram substituídos pela sua função geradora, uma função gaussiana. Assim, as integrais no espaço de fases podem ser alternativamente calculadas usando coordenadas polares, uma vez que essas funções dependem exclusivamente do raio  $r^2 = s^2 + k_x^2$ , e os integrandos são simplificados para funções exponenciais de uma única variável. Observando que  $ds dk_x = r dr d\theta$ ,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} ds \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \exp[(s^2 + k_x^2)\alpha] &= 2\pi \int_0^{+\infty} dr r \exp(\alpha r^2) \\ &= -\pi \left( \frac{1}{\alpha} \right), \end{aligned} \quad (5.31)$$

para  $\Re[\alpha] < 0$ . Todos os observáveis físicos podem ser obtidos usando essa mudança de variáveis. Por exemplo, a densidade de probabilidade no espaço de fase  $\text{Tr}[\mathcal{W}(s, k_x)\gamma_0]$  é uma função gaussiana normalizada, pois

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \text{Tr}[\mathcal{W}\gamma_0] &= (1-z) \int_0^{+\infty} dr r \left\{ \exp\left[2r^2 \left(\frac{z}{z+1} - \frac{1}{2}\right)\right] + \exp[-r^2] \right\} \\ &= 1. \end{aligned} \quad (5.32)$$

À medida que  $z$  se aproxima da unidade, a densidade de probabilidade se espalha por todas as coordenadas do espaço de fases e o estado não é mais localizado, o que é mostrado na fig. (17). Como  $z = 1$  seleciona todos os níveis excitados, a probabilidade se torna uniformemente distribuída entre todos os autoestados do *ensemble*. Esse fenômeno é quantificado pela pureza quântica, a qual também assume uma forma simplificada,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathcal{W}} &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \text{Tr}[(\gamma_0 \mathcal{W}(x, k_x))^2] \\ &= \frac{(z-1)(z^2-2)}{4(z+1)}, \end{aligned} \quad (5.33)$$

em que foram usadas coordenadas polares, pois os expoentes são sempre não positivos. Uma pureza quântica nula para  $z = 1$  de fato corresponde a um estado maximalmente misto no espaço de Hilbert de dimensão infinita. A partir da densidade de probabilidade em (5.32) e da pureza quântica acima, pode-se supor (erroneamente) que esse estado é trivial. Entretanto, a probabilidade integrada ainda satisfaz a condição de normalização para qualquer  $z$ .

Observa-se ainda que a localização, controlada pelo parâmetro de mistura, não pode ser arbitrariamente escolhida. Essa propriedade deve satisfazer o princípio da incerteza de variáveis canonicamente conjugadas. Usando a densidade de probabilidade acima, o desvio

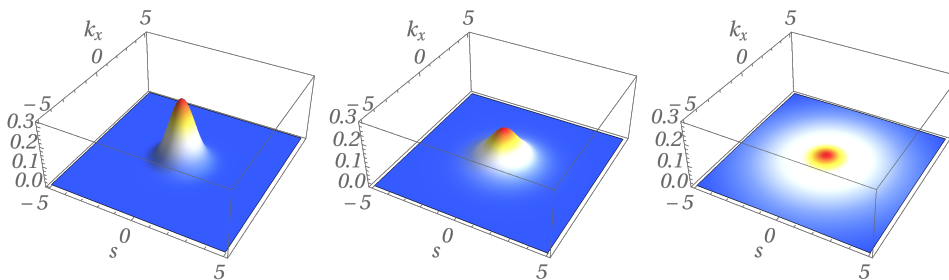
padrão no momento e na posição é formalmente calculado como

$$(\sigma_{k_x})^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x k_x^2 \text{Tr}[\mathcal{W}\gamma_0] = \frac{z^2 + 1}{2(1 - z)}, \quad (5.34)$$

$$(\sigma_x)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x s^2 \text{Tr}[\mathcal{W}\gamma_0] = \frac{z^2 + 1}{2(1 - z)}, \quad (5.35)$$

exibindo valores coincidentes. Para  $z = 0$ , a relação de incerteza é saturada com  $\sigma_{k_x} \sigma_x = 1/2$  i. e. um estado de incerteza mínima. Por outro lado, ela é ilimitada para valores crescentes do parâmetro de mistura, aproximando-se de infinito para o estado maximalmente misto e deslocalizado com  $z = 1$ , como é ilustrado na fig. (17).

**Figura 17** – Deslocalização no espaço de fases



Deslocalização de estados gaussianos mistos no espaço de fases. A localização é medida em termos da densidade de probabilidade  $\frac{\text{Tr}[\mathcal{W}\gamma_0]}{\sqrt{eB}}$  dos estados obtidos nas eqs. (5.27)-(5.28). O chamado estado coerente (gráfico à esquerda), com  $z = 0$ , cobre a área mínima, enquanto os estados gaussianos com  $z = 1/2$  (gráfico central) e  $z = 9/10$  (gráfico à direita) são suavizados ao longo das coordenadas no espaço de fases. Fonte: Elaborada pelo Autor.

O conteúdo informacional dos estados gaussianos também é relevante. Utilizando a mudança de variáveis conforme discutido acima (cf. (5.31)), as entropias com relação aos dois espaços de Hilbert podem ser calculadas. Relembrando que a entropia no espaço de fases é calculada pela integração da densidade de probabilidade ao quadrado (cf. (2.26)), o resultado é

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\{x,k_x\}} &= 1 - 4\pi^2 \int_0^{+\infty} dr r \operatorname{Tr}[\mathcal{W}\gamma_0]^2 \\
&= \frac{z}{2} \left( 2 + z - z^2 \right).
\end{aligned} \tag{5.36}$$

O estado de incerteza mínima é obtido para  $z = 0$ , com entropia nula, enquanto o estado gaussiano completamente deslocalizado com  $z = 1$  satura a entropia linear na unidade. Portanto, a deslocalização – com uma densidade de probabilidade arbitrariamente pequena no espaço de fases – produz a quantidade máxima de informação (ou entropia) nesse espaço de Hilbert.

Para o cálculo da entropia de spin-paridade, o resultado pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^{SP} &= 1 - 4\pi^2 \operatorname{Tr} \left[ \left( \gamma_0 \int_0^{+\infty} dr r \mathcal{W} \right)^2 \right] \\
&= \frac{1}{2} \left( 1 + z - \frac{z^2}{2} \right),
\end{aligned} \tag{5.37}$$

que é finito para todos os estados gaussianos, inclusive o estado fundamental.

Novamente, a informação mútua total é então composta por todos os três quantificadores acima,

$$M_{\{x,k_x\}}^{SP} = \frac{3z^2 + z - z^4}{2 + 2z}, \tag{5.38}$$

sendo nula apenas para  $z = 0$  na região  $0 \leq z \leq 1$ , o que confirma que o estado completamente misto não é trivial.

Esse resultado é confrontado com a expressão para a concorrência,

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}^2 &= \sum_{i=0}^{\infty} p_i \mathcal{C}_i^2 = p_0 \mathcal{C}_0^2 + \sum_{i \neq 0}^{\infty} p_i \mathcal{C}_i^2 \\
&= 0 + \sum_{i=1}^{\infty} p_i \mathcal{C}_i^2 \leq \frac{1-z}{2} \sum_{i=1}^{\infty} z^i \\
&= \frac{z}{2},
\end{aligned} \tag{5.39}$$

onde o limite superior  $\mathcal{C}_i^2 = \frac{1}{2}$  só é válido em campos magnéticos fortes. Assim,  $\mathcal{C}^2 = z/2$  é o maior valor para a concorrência intrínseca; caso contrário, não pode ser calculado analiticamente. De qualquer modo, a concorrência minimiza a informação mútua. Para ver



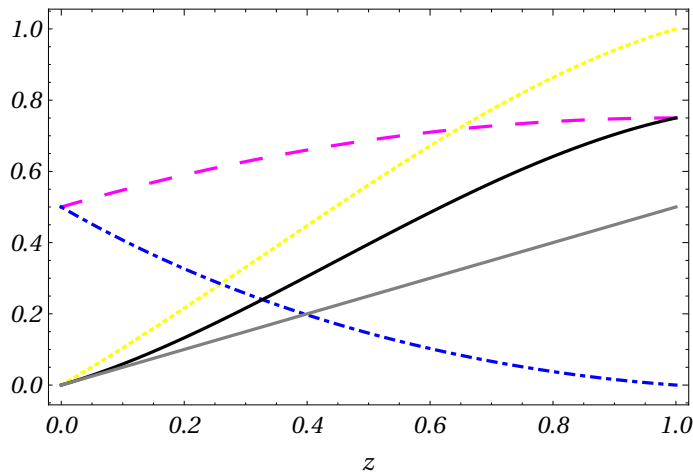
isso, a informação mútua na eq. (5.38) é expandida em torno do estado fundamental,  $z \approx 0$ ,

$$M_{\{x,k_x\}}^{SP} = \frac{z}{2} + \mathcal{O}(z^2), \quad (5.40)$$

concordando com o resultado obtido anteriormente. Assim, tanto a informação mútua quanto a concorrência intrínseca aumentam linearmente para valores pequenos do parâmetro de mistura. Para valores maiores de  $z$ , as correlações clássicas tornam-se relevantes.

Esses resultados são ilustrados na fig. (18), onde todos os quantificadores de informação são representados. O estado maximalmente misto, com  $z = 1$ , de fato maximiza a entropia linear do espaço de fase,  $\mathcal{I}_{\{x,k_x\}}$ , e é completamente deslocalizado. Assim, para estados suficientemente mistos, a matriz densidade global perde a quantidade exata de informação que é adquirida pela matriz densidade nas variáveis contínuas. Ao atingir a pureza nula, a informação mútua entre os espaço de fases e o espaço de spin-paridade é descrita exclusivamente pelos graus de liberdade discretos i. e. pela entropia linear com relação à paridade e spin.

**Figura 18** – Estados gaussianos maximalmente mistos



Balanço de correlações para estados gaussianos mistos. Entropias lineares,  $\mathcal{I}_{\{x,k_x\}}$  (cf. eq. (5.36); linha amarela pontilhada) e  $\mathcal{I}^{SP}$  (cf. eq. (5.37); linha magenta tracejada), relativas ao espaço de fases e aos espaços de Hilbert de spin-paridade, são representadas ao lado do valor estimado para a concorrência máxima (cf. eq. (5.39); linha cinza sólida) e pureza quântica (cf. eq. (5.33); linha azul pontilhada). A informação mútua total considerando todos esses quantificadores (cf. eq. (5.38); linha preta sólida) também está incluída. Ela é igual à entropia de spin-paridade para um estado maximalmente misto, com  $z = 1$ , que tem pureza zero e entropia no espaço de fases máxima. Fonte: Elaborada pelo Autor.

Em resumo, o perfil de informação quântica em estados gaussianos estacionários foi examinado no espaço de fases. O resultado é peculiar, pois as medidas de entropia dependem

apenas da distribuição de probabilidade devido aos efeitos de aleatoriedade. O chamado estado coerente tem uma entropia nula no espaço de fases, pois cobre a menor área possível pelo princípio da incerteza, enquanto o estado deslocalizado maximiza o mesmo quantificador. Com relação à informação mútua, o principal resultado é que, à medida que o estado fundamental contribui menos para a mistura, essa medida se torna maior que a concorrência quântica, incluindo outras correlações. No estado maximalmente misto, a informação mútua se simplifica para a entropia de spin-paridade.

Na próxima seção, um outro estado misto é considerado: a matriz densidade é finalmente relacionada a elétrons termalizados em dimensões reduzidas. Os resultados obtidos nessa seção serão utilizados qualitativamente para discutir os quantificadores de informação quântica, agora calculados em termos do observável físico relevante, ou seja, a função de partição.

### 5.3 CORRELAÇÕES EM TEMPERATURAS FINITAS

Os resultados anteriores descrevem *ensembles* estatísticos genéricos como combinações lineares de funções de Wigner. Frequentemente, os sistemas físicos exibem uma distribuição de probabilidade que é imposta pela interação qubit-ambiente i. e. o próprio ambiente seleciona probabilisticamente a matriz densidade. Supõe-se, então, que a probabilidade seja distribuída de acordo com as autoenergias. Se a probabilidade de medir cada estado for canonicamente distribuída (GIBBS, 1902), um conjunto de funções de Wigner descreve sistemas termalizados em duas dimensões espaciais. Para verificar isso, as autoenergias são reescritas como

$$E_n = \sqrt{\Delta^2 + 2n e\mathcal{B}} \text{ com } \Delta^2 = m^2 + k_z^2, \quad (5.41)$$

e uma mistura estatística pode ser identificada a partir da base das funções de Wigner como

$$W(s, k_x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (\omega_{n,1}^-), \quad (5.42)$$

onde se supõe a distribuição de probabilidade não normalizada  $p_n = \exp[-\beta E_n]$  com  $\beta = \frac{1}{T}$ , onde  $k_B = 1$  é a constante de Boltzmann e  $T$  a temperatura de equilíbrio. Na expressão acima, os níveis de Landau são puros, incluindo o estado fundamental. Como ele não exibe a degenerescência de spin observada nos níveis de Landau excitados, justifica-se o conjunto estatístico acima, apenas com paridade intrínseca positiva ( $r = 1$ ) e estados com spin *down*.

Com efeito, esse conjunto é arbitrário. Cada nível de Landau poderia, a princípio, ser misto ou estar em um estado de superposição que afeta o perfil de correlação, conforme verificado na fig. (16). Para o primeiro caso, a mistura estatística pode ser descartada, pois os pesos estatísticos  $p_n$  teriam de ser normalizados novamente. Para o segundo, no entanto, uma mudança de base é admitida e, portanto, é necessário investigar se a informação total pode ser calculada sem ambiguidade. Essa multivaloração, ou ainda, a arbitrariedade em se escolher o estado apropriado, é esperada, pois há vários sistemas quânticos que são descritos pela mesma função de partição.

Para todos os sistemas que podem ser identificados dessa forma, espera-se que os observáveis relevantes da teoria sejam independentes das funções de Wigner dependentes do calibre escolhidas para realizar esse conjunto. Explicitamente, observa-se que a eq. (5.42) ainda não está normalizada, pois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \text{Tr}[W\gamma_0] = \sum_{n=0}^{\infty} \exp[-\beta E_n] = \mathcal{Z}, \quad (5.43)$$

onde é usada a notação para a função de partição  $\mathcal{Z}$ .

Observa-se que para férmions em três dimensões espaciais, a soma sobre os estados deve levar em conta o número quântico relacionado ao grau de liberdade  $k_z$ . No entanto, a eq. (5.43) é o objeto relevante para as quantidades termodinâmicas em sistemas descritos pela equação de Dirac em dimensões reduzidas como, por exemplo, elétrons no grafeno, onde esse número quântico adicional pode ser lido como um parâmetro fixo (HOUÇA; JELLAL, 2019). De fato, para o grafeno descrito como um sistema tipo-Dirac, o parâmetro  $\Delta$  e o acoplamento Rashba desempenham um papel semelhante no cálculo da função de partição (HOUÇA; JELLAL, 2019). Sem esse acoplamento, a função de partição é formalmente obtida com  $\Delta = 0$ , porém, com resultados obtidos anteriormente restritos ao limite de temperatura infinita ( $T \rightarrow \infty$ ). O cálculo será revisitado a seguir para estender o resultado para todas as temperaturas.

Seja

$$\mathcal{Z} = \sum_{n=0}^{\infty} \exp \left[ -\mu \sqrt{\kappa + n} \right], \quad (5.44)$$

com

$$\mu = \frac{\sqrt{2e\mathcal{B}}}{T} \text{ e } \kappa = \frac{\Delta^2}{2e\mathcal{B}}. \quad (5.45)$$

A função exponencial pode ser expressa em termos de uma integral de contorno complexa,

$$e^{-z} = \frac{1}{2\pi i} \oint ds z^{-s} \Gamma(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n!}, \quad (5.46)$$

em que a integração é realizada ao longo de um contorno no sentido anti-horário que inclui todos os polos da função gama. Uma escolha apropriada é o círculo de raio  $R \rightarrow \infty$  em torno da origem no plano complexo. Para obter a segunda igualdade com o teorema do resíduo, a função gama  $\Gamma(s)$  pode ser definida no plano complexo como uma função meromórfica com polos simples nos números inteiros não positivos por meio da relação fundamental

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}, \quad (5.47)$$

para qualquer  $s$  no plano complexo, exceto nos polos (ARTIN, 2015). Para números inteiros positivos, por outro lado, a função gama admite a representação fatorial usual,  $\Gamma(s) = (s-1)!$ . Os polos simples em  $s = -n$ , com  $n$  um número inteiro não negativo, têm resíduos dados por

$$\text{Res}(\Gamma(s), -n) = \lim_{s \rightarrow -n} (s+n)\Gamma(s) = \lim_{s \rightarrow -n} \frac{(s+n)\Gamma(s+n+1)}{s(s+1)\dots(s+n)} = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad (5.48)$$

em que a relação de recorrência (5.47) foi usada  $n+1$  vezes para relacionar  $\Gamma(-n)$  a  $\Gamma(1) = 1$ . Esses resíduos podem ser inseridos na eq. (5.46) para finalmente obter a segunda igualdade, que mostra que a integral complexa acima é uma representação válida da função exponencial, desde que todos os resíduos no plano complexo sejam incluídos.

Retornando ao cálculo da função de partição, essa integral complexa pode ser inserida na eq. (5.44),

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{+\infty} \oint ds \mu^{-s} (n+\kappa)^{-s/2} \Gamma(s) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint ds \zeta(s/2, \kappa) \Gamma(s) \mu^{-s}, \end{aligned} \quad (5.49)$$

onde a série na primeira linha foi identificada como a função zeta de Hurwitz  $\zeta(z, \kappa)$ , uma generalização da conhecida função zeta de Riemann  $\zeta(z)$ . Quando  $\kappa = 1$ ,  $\zeta(z, 1) \equiv \zeta(z)$  (HASSE, 1930) i. e. elas são coincidentes. A série converge quando  $\Re(z) > 1$ , mas pode ser analiticamente continuada para todos os  $z$  no plano complexo e  $\kappa > 0$ , exceto no polo simples

$z = 1$ .<sup>1</sup> A continuação é necessária, pois os resíduos do integrando precisam ser calculados nos polos da função gama (cf. (5.48)). Além disso, como o contorno da integração contém o eixo real, a nova singularidade já está incluída.<sup>2</sup> Para aplicar o teorema do resíduo em  $z = 1$ , uma representação alternativa deve ser considerada. Dentre algumas representações equivalentes, considera-se uma continuação analítica em termos de um somatório duplo com coeficientes binomiais  $\binom{n}{m}$  (HASSE, 1930),

$$\begin{aligned} \text{Res}(\zeta(z, \kappa), 1) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left( \frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} (\kappa+m)^{1-z} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} (1-1)^n \\ &= 1, \end{aligned} \tag{5.50}$$

onde o teorema binomial foi utilizado na terceira igualdade. Desta forma, o resultado desejado é  $\text{Res}(\zeta(z, \kappa), 1) = 1$ .

Por fim, a função de partição é obtida incluindo os resíduos dos polos em números inteiros não positivos e também em  $s = 2$ . A expressão final da função de partição é

$$\mathcal{Z} = \sum_{m=0}^{+\infty} \zeta\left(-\frac{m}{2}, \kappa\right) \frac{(-\mu)^m}{m!} + \frac{2}{\mu^2}. \tag{5.51}$$

A série à esquerda pode então ser considerada como uma expansão no parâmetro  $\mu = \frac{\sqrt{2eB}}{T}$ . Ela é absolutamente convergente, devido à continuação analítica das funções zeta e determina o regime de baixas temperaturas, enquanto o último termo à direita na eq. (5.51) se torna relevante para altas temperaturas. Isso é consistente com (SANTOS; MALUF; ALMEIDA, 2014), onde tanto a expansão como o termo principal quando  $\mu \approx 0$  estão presentes.

No escopo deste trabalho, as correlações serão investigadas no regime de altas temperaturas, e alguns termos da série podem ser incluídos como correções para o limite  $\mu = 0$ . Ainda assim, as duas representações da função de partição, (5.44) ou (5.51), são equivalentes,

<sup>1</sup>Em (HASSE, 1930), a função zeta de Hurwitz é definida como  $\zeta(s, w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(w+n)^s}$ , e  $w = \kappa - 1$  na notação atual. Assim,  $w > -1$  implica  $\kappa > 0$ .

<sup>2</sup>A representação em série das funções zeta diverge no semiplano  $\Re(z) \leq 1$ . Portanto, a singularidade da continuação analítica permite extrair o resíduo relevante, e um contorno adequado deve incluir todas as singularidades, que afetam profundamente o cálculo. Essa suposição será testada a seguir para confirmar se os quantificadores relevantes são fisicamente aceitáveis.

mas úteis em diferentes regimes. No primeiro caso, ela se simplifica a um único termo no zero absoluto; no segundo, ela se reduz a um único termo para temperaturas infinitas.

Para obter as funções termodinâmicas a partir da função de partição acima, é útil revisitar como as variáveis adimensionais podem ser obtidas para comparar com resultados para o grafeno não-comutativo (SANTOS; MALUF; ALMEIDA, 2014). A função de partição foi obtida a partir do somatório

$$\mathcal{Z} = \sum_n \exp(-\beta E_n), \quad \beta = \frac{1}{k_B T}, \quad (5.52)$$

onde  $k_B$  é a constante de Boltzmann  $T$  é a temperatura de equilíbrio. Assim, apenas a função de partição é rigorosamente adimensional. Considera-se, por exemplo,  $E_n$  com as constantes físicas usuais,

$$E_n = \sqrt{(mc^2)^2 + (c\hbar k_z)^2 + 2n e\mathcal{B}\hbar c^2}. \quad (5.53)$$

Utilizando o termo correspondente ao campo magnético como uma escala física, as variáveis adimensionais são introduzidas como

$$\tilde{\beta} = \frac{1}{\tilde{T}}, \quad \tilde{T} = \frac{1}{c\sqrt{2e\mathcal{B}\hbar}} \left( \frac{1}{\beta} \right) \quad (5.54)$$

onde “~” indica que a variável é adimensional. Essa escolha permite comparar o sistema em estudo com elétrons de Dirac no grafeno, onde a velocidade de luz é substituída pela velocidade de Fermi.

Assim, é possível obter as funções termodinâmicas usuais em termos dessa nova variável, como a energia livre  $F$ , a energia interna  $U$ , a entropia  $S$  e o calor específico  $C$ . A conversão entre o sistema de unidades adimensional e as unidades originais é obtida ao se observar que

$$\beta = \tilde{\beta} \left( \frac{1}{c\sqrt{2e\mathcal{B}\hbar}} \right) \quad (5.55)$$

possui unidades do inverso da energia. Assim, as funções termodinâmicas adimensionais são

$$\tilde{F} = \frac{F}{c\sqrt{2eB\hbar}} = -\frac{1}{\tilde{\beta}} \ln \mathcal{Z}, \quad (5.56)$$

$$\tilde{U} = \frac{U}{c\sqrt{2eB\hbar}} = -\frac{\partial}{\partial \tilde{\beta}} \ln \mathcal{Z} \quad (5.57)$$

$$\tilde{S} = \frac{S}{k_B} = \tilde{\beta}^2 \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{\beta}}, \quad (5.58)$$

$$\tilde{C} = \frac{C}{k_B} = \tilde{\beta}^2 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{\beta}}. \quad (5.59)$$

Nesse trabalho, as chamadas unidades naturais são utilizadas com  $k_B = c = \hbar = 1$ . Isso corresponde a escolher o sistema de unidades adimensionais i.e. as variáveis com “~”. Explicitamente,  $\mu = \tilde{\beta}$ , de modo que  $\mu$  corresponde ao inverso da temperatura (em unidades adimensionais), sendo utilizado como o parâmetro de expansão. A partir daqui, retorna-se à notação anterior, e “~” é omitido.

Para exemplificar, duas das funções termodinâmicas podem ser obtidas explicitamente em termos das funções zeta, como

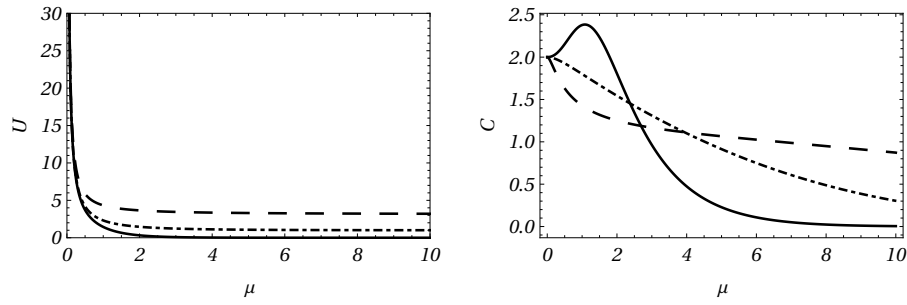
$$\begin{aligned} U &= -\sqrt{2eB} \frac{\partial \ln(\mathcal{Z})}{\partial \beta} = -\frac{\partial \ln(\mathcal{Z})}{\partial \mu} \\ &= \frac{-1}{\mathcal{Z}} \left\{ \sum_{m=0}^{+\infty} \zeta \left( -\frac{m+1}{2}, \kappa \right) \frac{(-\mu)^m}{m!} - \frac{4}{\mu^3} \right\}, \end{aligned} \quad (5.60)$$

a energia interna, e

$$\begin{aligned} C &= -\mu^2 \left( \frac{\partial U}{\partial \mu} \right) \\ &= -\mu^2 \left\{ U^2 - \frac{1}{\mathcal{Z}} \left( \sum_{m=0}^{+\infty} \zeta \left( -\frac{m+2}{2}, \kappa \right) \frac{(-\mu)^m}{m!} + \frac{12}{\mu^4} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (5.61)$$

o calor específico.

Elas estão representados na fig. (19), que inclui as correções de baixas temperaturas. Por um lado, os resultados não são muito esclarecedores à medida que  $\kappa$  aumenta indefinidamente, pois são necessários mais termos para obter a precisão adequada. Por outro lado, o limite de temperatura infinita é independente do parâmetro  $\kappa$ . De fato, em  $\mu = 0$ , a lei de Dulong-Petit é recuperada para o calor específico em duas dimensões. Isso poderia ser previsto, já que essa função de partição também descreve elétrons próximos aos pontos de Dirac no grafeno.

**Figura 19** – Funções termodinâmicas em sistemas bidimensionais

Energia interna sem dimensões (gráfico à esquerda) e calor específico (gráfico à direita) em altas temperaturas. Em unidades naturais,  $\mu = \frac{\sqrt{2\epsilon B}}{T}$  é o parâmetro de expansão da função de partição. Os resultados são para  $\kappa = 0$  (linha sólida), 1 (linha traço ponto) e 10 (linha tracejada) quando alguns termos da expansão infinita (cf. eqs. (2.35) e (5.46)) são considerados. Em  $\mu = 0$ , o resultado é analítico e independente de  $\kappa = \frac{m^2 + k_z^2}{2\epsilon B}$  (cf. eq. (5.45)). Fonte: Elaborada pelo Autor.

Voltando ao cálculo dos observáveis de informações quânticas relevantes para temperaturas finitas, a função de Wigner normalizada é  $\mathcal{W}_{TE} = (\mathcal{Z})^{-1}W$ , de modo a garantir que a probabilidade seja conservada.

Usando a eq. (5.5), a pureza quântica pode ser calculada apenas a partir da distribuição de probabilidade,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}[\mathcal{W}_{TE}] &= \mathcal{Z}^{-2}(\mu) \sum_{n \neq 0}^{\infty} (\exp[-\mu \sqrt{\kappa + n}])^2 + \\ &= \mathcal{Z}^{-2}(\mu) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \exp[-2\mu \sqrt{\kappa + n}] \right) \\ &= \mathcal{Z}^{-2}(\mu) \mathcal{Z}(2\mu) \end{aligned} \quad (5.62)$$

$$\approx \frac{\mu^2}{8}, \quad (5.63)$$

em que a última linha é válida no limite de altas temperaturas (cf. eq. (5.51)). Assim, a pureza quântica depende apenas da função de partição, calculada em duas temperaturas distintas,  $\mu$  e  $2\mu$ . Esse resultado é de fato consistente (BERNARDINI, 2020b), pois a pureza quântica depende apenas da função de partição em um sistema termodinâmico. No zero absoluto ( $T \approx 0$ ), entretanto, ela é mais facilmente obtida a partir da eq. (5.44), cujo termo principal resulta em

$$\mathcal{P}[\mathcal{W}_{TE}]_{T=0} = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{Z}(2\mu)}{\mathcal{Z}(\mu)^2} = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\exp[-2\mu \kappa^{1/2}]}{\exp[-\mu \kappa^{1/2}]^2} = 1, \quad (5.64)$$

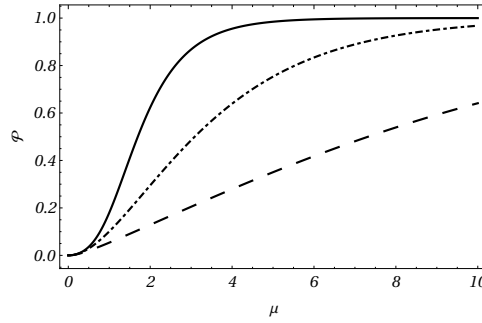


ou seja, o sistema quântico é puro e está no estado fundamental para qualquer valor de  $\kappa$ , como esperado. Isso está de acordo com os resultados numéricos exibidos na fig. (20), que mostra que a pureza quântica é de fato restrita a  $0 \leq \mathcal{P} \leq 1$ . É coerente que o comportamento altamente oscilatório das funções zeta nunca viole os valores admissíveis da pureza quântica. Esse comportamento só pode ser obtido quando um número cada vez maior de termos na expansão da função de partição é incluído em baixas temperaturas.

Portanto, a continuação das funções zeta para números inteiros negativos produz um quantificador de pureza consistente. Além disso, a fig. (20) mostra que a pureza em conjuntos termodinâmicos para níveis de Landau desiguais tem uma interpretação profícua. Começando no zero absoluto, as curvas traçadas indicam que o sistema está no estado fundamental. À medida que a temperatura aumenta, o sistema também ocupa níveis excitados. Para valores pequenos de  $\kappa$ , a energia mais baixa (o estado fundamental) está longe do primeiro nível excitado, e o sistema permanece no estado fundamental mesmo em grandes temperaturas. Por outro lado, para valores crescentes de  $\kappa$ , o nível de energia do ponto zero está muito mais próximo dos níveis excitados e, portanto, uma pequena quantidade de energia térmica é necessária para povoar níveis excitados. De modo objetivo, para  $\kappa \rightarrow \infty$ , o sistema permanece no estado fundamental estritamente no zero absoluto. Para  $\kappa = 0$  e  $\kappa = 1$ , o sistema permanece no estado fundamental até  $\mu \approx 5$  e  $\mu \approx 10$ , respectivamente. Isso é característico em níveis de energia que não estão igualmente espaçados. Em contrapartida, um espectro de energia com espaçamento constante poderia ter a sua origem simplesmente deslocada por uma quantidade constante. Assim, a pureza quântica não dependeria de nenhum parâmetro adicional.

Para resumir, a função de partição foi calculada usando métodos de integrais complexas. Embora o comportamento em baixas temperaturas não tenha uma expressão de forma fechada, o quantificador de pureza quântica, que depende apenas da função de partição, varia de uma mistura máxima no limite de temperaturas infinitas a um estado puro no zero absoluto. Enfatiza-se que a pureza quântica é calculada diretamente após a obtenção da função de partição. Em seguida, esse resultado será usado para finalmente calcular as correlações intrínsecas dependentes da temperatura para os espinores de Dirac.

Diferentemente da expressão de pureza quântica, que depende exclusivamente da distribuição de probabilidade, outras medidas de entropia não têm uma dependência evidente da função de partição. Pior ainda, os parâmetros de energia de cada função de Wigner da eq. (2.54) dificultam a obtenção de somas infinitas, porque é preciso considerar os graus de

**Figura 20** – Pureza quântica em níveis de Landau desigualmente espaçados

Pureza quântica em níveis de Landau desiguais em temperaturas finitas. Como na fig. (19), os gráficos são para  $\kappa = 0$  (linha sólida), 1 (linha traço-ponto) e 10 (linha tracejada). No zero absoluto ( $T \rightarrow 0$ ),  $\mu \rightarrow \infty$  e todos os conjuntos se aproximam assintoticamente de  $\mathcal{P} = 1$ , um estado puro. No limite de temperatura infinita ( $T \rightarrow \infty$ ),  $\mu = 0$ , todos os estados são maximalmente mistos. Fonte: Elaborada pelo Autor.

liberdade espinoriais. No entanto, é essencial verificar se um comportamento geral é observado no limite de temperaturas infinitas. Em particular, espera-se que as correlações apresentem platôs dependentes da temperatura, ou seja, uma temperatura para a qual esses quantificadores se tornam saturados. Elas podem ser calculadas mesmo que a matriz densidade não apresente uma forma fechada, porque a ortogonalidade no espaço de fases pode ser usada para calcular as integrais relevantes.

Nos cálculos a seguir, será assumido que  $\kappa = 0$  (cf. (5.45)), válido em campos magnéticos fortes. Os parâmetros de energia associados assumem a forma

$$B_n = \frac{\sqrt{2n e\mathcal{B}}}{\sqrt{m^2 + k_z^2 + 2n e\mathcal{B} + m}} = 1 - \delta_{n,0}, \quad (5.65)$$

$$A_{n \neq 0} = \frac{k_z}{\sqrt{m^2 + k_z^2 + 2n e\mathcal{B} + m}} = 0, \quad (5.66)$$

$$\eta_{n \neq 0} = \frac{\sqrt{m^2 + k_z^2 + 2n e\mathcal{B} + m}}{2\sqrt{m^2 + k_z^2 + 2n e\mathcal{B}}} = \frac{1}{2}. \quad (5.67)$$

Em outras palavras, para  $\kappa = 0$ , as constantes acima assumem um valor universal para níveis excitados. No entanto, a normalização do estado fundamental ainda é indeterminada, mas é restrita a  $1/2 \leq \eta_0 \leq 1$ .

A razão para essa suposição é tripla. Primeiro, a estrutura de correlação não depende mais do nível de Landau específico,<sup>3</sup> simplificando as somas sobre vários índices. De fato, a partir

<sup>3</sup>Isso é verdadeiro somente após o cálculo da média do espaço de fase. O comportamento local da função de Wigner ainda é quantizado e descrito pela base HO.

dos resultados preliminares mostrados na fig. (16), a informação total também assume um valor universal. Segundo, a função de partição em  $\kappa = 0$  descreve elétrons de Dirac bidimensionais termalizados no grafeno (SANTOS; MALUF; ALMEIDA, 2014). Terceiro, o principal interesse é o comportamento das correlações no limite de temperaturas infinitas, que se espera ser independente de  $\kappa$ .

Agora, lembrando que o conjunto da eq. (5.42) é dado em termos de  $\omega_{n,1}^-(s, k_x)$  introduzido na eq. (2.57), que para  $n > 0$  e  $\kappa = 0$  simplifica para

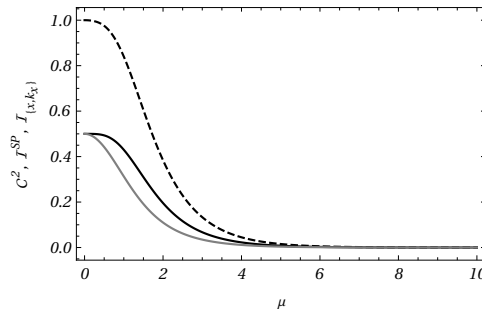
$$\omega_{n,1}^-(s, k_x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_n & \mathcal{M}_n & 0 \\ 0 & -\mathcal{M}_n & -\mathcal{L}_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.68)$$

O estado fundamental precisa de uma normalização adicional, que não afeta qualitativamente o resultado para altas temperaturas. A entropia do espaço de fase é calculada para  $\mathcal{W}_{TE}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\{x,k_x\}} &= 1 - \frac{2\pi}{\sqrt{e\mathcal{B}}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \text{Tr}[\mathcal{W}_{TE}\gamma_0]^2 \\ &= 1 - \frac{2\pi}{\mathcal{Z}^2 \sqrt{e\mathcal{B}}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \left( \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} p_n \mathcal{L}_{n-1} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} p_n \mathcal{L}_n + p_0 \mathcal{L}_0 \right)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{\mathcal{Z}^2} \left( \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (p_n)^2 + \frac{p_0^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} p_n p_{n+1} + \frac{1}{2} p_0 p_1 \right) \\ &= 1 - \frac{\mathcal{Z}(2\mu)}{2\mathcal{Z}^2(\mu)} - \frac{p_0^2}{2\mathcal{Z}^2} - \frac{1}{2\mathcal{Z}^2} \sum_{n=0}^{+\infty} p_n p_{n+1}, \end{aligned} \quad (5.69)$$

As integrais na segunda linha podem ser feitas com as relações de ortogonalidade nas eq. (2.63). Além disso, a série e o terceiro termo na última se tornam desprezíveis. Isso pode ser obtido ao se notar que  $\mathcal{Z}^2(\mu) = (\sum p_n)^2$ , de modo que o denominador é sempre maior que o numerador. Em altas temperaturas, todos os  $p_n$  são arbitrariamente pequenos e, assim, esses termos podem ser desconsiderados.

Portanto, a entropia linear no espaço de fases é aproximada como  $\mathcal{I}_{\{x,k_x\}} \approx 1 - 1/2 \mathcal{P}$ , aproximando-se da unidade em  $\mu = 0$ . Um resultado semelhante foi obtido para estados gaussianos na seção anterior. O estado quântico é espalhado no espaço de fases e, portanto, qualquer medição produz a quantidade máxima de informações com relação aos graus de

**Figura 21** – Correlações clássico-quânticas em níveis de Landau relativísticos

Correlações intrínsecas em temperaturas finitas para níveis de Landau irregulares. Assume-se que  $\kappa = 0$  (cf. (5.45)), válido em campos magnéticos fortes. No limite de temperaturas infinitas, com  $\mu = 0$ , esses resultados não dependem de  $\kappa$ . As linhas pretas sólidas e tracejadas são para entropias de spin-paridade (cf. eq. (5.70)) e espaço de fases (cf. eq. (5.69)), respectivamente. A linha cinza sólida é para a concorrência (cf. eq. (5.71)). O resultado mostra que essas medidas de entropia aumentam com o aumento da temperatura, e as correlações quânticas são preservadas. Fonte: Elaborada pelo Autor.

liberdade contínuos. Por outro lado, no zero absoluto, a eq. (5.69) simplifica para  $\mathcal{Z} = p_0 = 1$ , logo,  $\mathcal{I}_{\{x,k_x\}} = 0$ , ou seja, o estado fundamental tem entropia zero.

Efetivamente, a pureza quântica está intimamente ligada à entropia no espaço de fases, o que pode ser confirmado na fig. (21), pois a entropia linear é, em uma boa aproximação, um reflexo da curva de pureza quântica. Qualitativamente, esses quantificadores têm um comportamento oposto para temperaturas finitas. Para  $\kappa = 0$ , o estado quântico tem entropia zero quando  $\mu \gtrsim 5$ , a temperatura abaixo da qual o estado é puro. Esse resultado pode ser generalizado para diferentes tipos de interações, desde que a partícula esteja confinada. Em outras palavras, um estado maximalmente misto corresponde a uma mistura estatística arbitrária de infinitos estados próprios de um determinado Hamiltoniano. Conclui-se que a entropia nas variáveis contínuas é sempre maximizada, pois a base é ortogonal e, portanto, os estados mistos estão espalhados ao longo de todo o espaço de fases.

O cálculo da entropia linear de spin-paridade é análogo. O resultado final para  $\kappa = 0$  é

$$\mathcal{I}^{SP} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{p_0^2}{\mathcal{Z}^2} \right), \quad (5.70)$$

onde foi assumida a mesma normalização do estado fundamental da eq. (5.69). Observa-se que a informação codificada nos graus de liberdade discretos também aumenta com a temperatura.

Por fim, calcula-se a concorrência como

$$\begin{aligned} C_{TE}^2 &= \mathcal{Z}^{-1} \sum_{n=0} p_n C_n^2 = \mathcal{Z}^{-1} \sum_{n=1} 2p_n (\eta_n B_n)^2 \\ &\leq \frac{1}{2\mathcal{Z}} (\mathcal{Z} - p_0), \end{aligned} \quad (5.71)$$

onde a igualdade é válida quando  $\kappa = 0$ , o caso em consideração.  $p_0$  aparece novamente, porque o estado fundamental tem concorrência zero. É válido lembrar que essa medida é afetada pela base escolhida, conforme discutido preliminarmente na fig. (16). De fato, há múltiplos conjuntos estatísticos, com a mesma função de partição, que exibem apenas correlações clássicas.

Os resultados das entropias parciais e da concorrência estão esquematizados na fig. (21), confirmando o que já foi sugerido pela fig. (20). Nomeadamente, para temperaturas crescentes, a diminuição da pureza quântica compensa o aumento da entropia no espaço de fases. Esse efeito de compensação é exato no limite de temperaturas infinitas, quando a pureza quântica e a entropia de variáveis contínuas atingem 0 e 1, respectivamente. Assim, a entropia de spin-paridade se torna a única fonte de informação restante, e  $M_{\{x,k_x\}}^{SP} = \mathcal{I}^{SP} = C_{TE}^2$  em  $\mu = 0$  (cf. (2.27)). Embora a informação mútua total não seja afetada pela escolha de  $\kappa \neq 0$  no limite infinito de temperatura, as correlações quânticas diminuem com o aumento de  $\kappa$  ou com a escolha de uma superposição distinta.

Em resumo, as entropias parciais foram calculadas analiticamente para temperaturas finitas em termos da função de partição. Também foram medidas as correlações quânticas com a concorrência de spin-paridade. O emaranhamento atinge o valor máximo devido aos níveis de Landau altamente excitados à medida que a temperatura aumenta. No limite de temperaturas infinitas, o estado quântico se espalha pelo espaço de fase e, portanto, maximiza a entropia linear contínua enquanto minimiza a pureza quântica, confirmando a observação para estados gaussianos. Nesse caso, a entropia linear de spin-paridade se torna a única fonte de informação transportada pelo estado. Essa informação pode ser clássica ou quântica, que, no último caso, pode ser quantificada em termos da concorrência. Entretanto, uma mudança de base afeta o emaranhamento, e cada escolha identifica um sistema quântico distinto.

#### 5.4 CORRELAÇÕES NO GRAFENO MONOCAMADA

Especificamente, a função de partição não identifica unicamente o sistema termalizado em dimensões reduzidas. Por exemplo, o grafeno é uma plataforma que comporta o formalismo descrito aqui. Ele corresponde a uma camada bidimensional de átomos de carbono ( $A - B$ ) empacotados em uma rede hexagonal, e cujas excitações de baixa energia são descritas por Hamiltonianos de Dirac nos cantos da zona de Brillouin. Usando brevemente uma notação alternativa (GOERBIG, 2011), o Hamiltoniano efetivo de baixa energia pode ser escrito como

$$H_{\mathbf{p}} = v_F \sigma^z \otimes \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (5.72)$$

para pequenos desvios  $\mathbf{q}$  ( $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{q}$ ) dos pontos de Dirac, e  $v_F$  a velocidade de Fermi. Assim, a primeira matriz de Pauli  $\sigma^z$  denota o pseudospin<sup>4</sup> do vale ( $K - K'$ ) e o segundo conjunto de matrizes de Pauli representa o pseudospin da sub-rede ( $A - B$ ). Os níveis de Landau podem ser observados quando um campo magnético perpendicular é introduzido por meio do acoplamento minimal,  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - e\mathbf{A}$ . Os níveis excitados podem ser escritos na base<sup>5</sup>.  $\Psi = (\psi_{\mathbf{p},K}^A, \psi_{\mathbf{p},K}^B, \psi_{\mathbf{p},K'}^B, \psi_{\mathbf{p},K'}^A)^T$  e são proporcionais a

$$\Psi_{n,k_y}^{\pm}(\mathbf{x}) = \exp(-ik_y y) \begin{pmatrix} \phi_{n-1} \\ \pm\phi_n \\ \phi_{n-1} \\ (\mp)\phi_n \end{pmatrix} \quad (5.73)$$

onde o sinal superior corresponde à banda de condução e o sinal inferior à banda de valência, com autovalores  $\epsilon_n = \pm \frac{\hbar v_F}{l_B} \sqrt{2n}$ . A base do oscilador harmônico no espaço das configurações é escrita como (CASTRO NETO et al., 2009)

$$\phi_n = \frac{H_n((x - l_B^2 k_y)/l_B)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi} l_B}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - l_B^2 k_y}{l_B}\right)^2\right], \quad (5.74)$$

<sup>4</sup>O pseudospin pode ser compreendido como um grau de liberdade adicional que é tratado matematicamente como o spin. Fisicamente, no entanto, não há relação com o spin de uma partícula.

<sup>5</sup>O Hamiltoniano é escrito como um produto tensorial se as funções das sub-redes  $A - B$  forem invertidas para o vale  $K'$

em que  $l_B = \sqrt{\hbar/eB}$  é o comprimento magnético e  $H_n(x)$  é um polinômio de Hermite i. e. precisamente as funções obtidas para a equação de Dirac em três dimensões espaciais, exceto pelas constantes físicas.

As duas cópias da equação de Dirac em  $(2 + 1)$  dimensões sem massa não são equivalentes à equação de Dirac de  $(3 + 1)$  dimensões e, portanto, não compartilham o mesmo conjunto de soluções. No entanto, observa-se que, para um nível fixo de Landau, um mapeamento entre essas soluções é obtido por uma expansão direta das autofunções, em que se pode reconstruir as soluções para ambas as bandas (cf. (2.53)-(2.54)),

$$u_{n,1}^+(s) + u_{n,2}^-(s) \propto \Psi_{n,k_y}^+(\mathbf{x}), \quad (5.75)$$

$$-u_{n,1}^-(s) + u_{n,2}^+(s) \propto \Psi_{n,k_y}^-(\mathbf{x}), \quad (5.76)$$

(com  $k_z = m = 0$ ) até um fator de normalização. Há um fator adicional  $\exp(-ik_y y)$  em ambos os lados que é fatorado.

Em outras palavras, os estados estacionários dos Hamiltonianos de baixa dimensão são expandidos na base do Hamiltoniano de Dirac de spin-paridade, uma base equivalente em três dimensões espaciais, ao identificar  $v_F \leftrightarrow c$ . Essa expansão envolve apenas níveis de Landau com o mesmo índice. Após esse mapeamento, esses hamiltonianos compartilham os mesmos autovalores,

$$\epsilon_n = \pm \frac{\hbar v_F}{l_B} \sqrt{2n} \leftrightarrow \pm E_n = \pm \frac{\hbar c}{l_B} \sqrt{2n}, \quad (5.77)$$

e, portanto, a banda de condução está associada a estados de paridade positiva, enquanto a banda de valência está associada a estados de paridade negativa.

A superposição de estados com paridade distintas não é estacionária, diferente da eq. (5.8) ( $\sin(\theta) u_{n,1}^+(s) + \cos(\theta) u_{n,1}^-(s)$ ). No entanto, em  $t = 0$  e  $\theta = \pi/4$ , todas as medidas de informação quântica exibem valores coincidentes. Essa correspondência decorre do fato de que esse estado estacionário difere das eqs. (5.75)-(5.76) apenas por um sinal relativo nos componentes do bispinor.

A partir do mapeamento acima, os quantificadores de informação podem medir as correlações vale-sub-rede implícitas nos Hamiltonianos efetivos próximos aos pontos de Dirac. Retomando resultados anteriores, quando os autovalores de energia são dominados pelo campo magnético ( $B_n = 1$ ) na fig. (16), a informação mútua total atinge a unidade. No entanto, a concorrência intrínseca entre os graus de liberdade vale e sub-rede é obtida a partir da

eq. (5.16),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x C^2[\omega_{n,\theta}] = \frac{1}{2} \cos^2(2\theta)|_{\theta=\pi/4} = 0, \quad (5.78)$$

ou seja, esses qubits são separáveis. Esse resultado poderia ser previsto, pois o Hamiltoniano é diagonal no subespaço do vale. Assim, a informação total armazenada nos biespinores de Dirac é composta por duas partes: a entropia associada a graus de liberdade contínuos, descritos pela base do oscilador harmônico, e a entropia associada a graus de liberdade discretos, os pseudospins dos vales e sub-redes. Entretanto, esses qubits não estão emaranhados. Espera-se que uma medida de concorrência não nula possa ser observada caso acoplamentos entre os vales sejam introduzidos.

Não obstante, a função de partição obtida aqui também descreve a termodinâmica dos elétrons do grafeno perto dos pontos de Dirac. As medidas de entropia foram obtidas em termos de variáveis sem dimensão que incluem um fator de escala, sendo consistentes seja com os Hamiltonianos relativísticos seja com o Hamiltoniano no contexto da física do estado sólido. Embora as correlações quânticas sejam triviais sem qualquer acoplamento entre os vales, essa estrutura é adequada não apenas às estruturas de bandas eletrônicas, mas também aos Hamiltonianos de Dirac recentemente relatados para sistemas bosônicos (KUMAR; HERBUT; GANESH, 2020; SUN; GUO; FENG, 2021) com um potencial de confinamento.



## 6 CONCLUSÕES

Considerando os biespinores de Dirac e as matrizes de Wigner como um sistemas de qubits (BITTENCOURT; BERNARDINI, 2016; BITTENCOURT; BERNARDINI; BLASONE, 2016; BERNARDINI, 2020a), as correlações intrínsecas de spin-paridade armazenadas em um férmion foram investigadas em níveis de Landau. As soluções para o problema do campo magnético constante, as órbitas de Landau, introduzem um número quântico discreto, o qual demanda uma nova sistemática para se calcular as correlações referentes aos graus de liberdade implícitos pela estrutura  $SU(2) \otimes SU(2)$  da equação de Dirac, dado que o formalismo até então desenvolvido foi dedicado a acoplamentos externos constantes, sem a introdução dos graus de liberdade contínuos.

Por um lado, a introdução do campo magnético – sem um campo elétrico – abdica do formalismo covariante necessário a uma equação relativística. Por outro, o estudo da dinâmica em um referencial fixo permitiu obter observáveis físicos independentes do potencial vetor, o que permite inferir que os graus de liberdade introduzidos pelo calibre de fato influenciam o perfil de informação quântica de um férmion. Esses aspectos foram investigados dentro de três categoriais, as quais foram descritas nos capítulos do trabalho.

Preliminarmente, estados gaussianos foram investigados a partir das medidas de informação quântica. Em particular, verificou-se a possível relação entre a medida de informação mútua, calculada pela entropia de von Neumann, e a medida de emaranhamento, formalmente quantificada pelo emaranhamento de formação, ou ainda, pela concorrência quântica. Observou-se que essa última medida corresponde ao quantificador de informação mútua após a decoerência, ou seja: pode-se calcular o emaranhamento a partir da informação mútua após a perda das coerências, ou diretamente da expressão da concorrência quântica.

Nesse contexto, a dinâmica dos chamados gatos de Dirac foi analisada. Esses estados correspondem a superposições de estados gaussianos com uma simetria definida. Embora haja se verificado algebricamente a conservação da probabilidade e pureza, suas medidas de informação quântica são maximizadas ao longo da sua evolução temporal, exibindo um padrão

de estagnação peculiar. Nomeadamente, os quantificadores exibem platôs para tempos finitos. Para explicar a existência desses padrões de estagnação, estudaram-se os revivals quânticos.

Esse padrão de aparente estabilidade corresponde às oscilações coletivas de superposições altamente localizadas. Em superposições gaussianas obtidas aqui, os períodos de oscilação são reduzidos em potências de dois. De forma concisa, estados altamente localizados – devido à correspondência clássica de grandes números quânticos – oscilam com um período clássico, análogo a uma partícula clássica em condições correspondentes. No entanto, a função de onda sofre um processo de deslocalização, apresentando padrões de oscilação não clássicos. Em tempos finitos, o estado inicial pode ser recuperado parcialmente, reformando todo o padrão de oscilação e, com ele, as medidas de emaranhamento intrínseco.

O estudo dos quantificadores de informação mútua também foi estendido aos conjuntos estatísticos no formalismo de Wigner-Dirac. Em particular, um estudo preliminar com estados gaussianos mostrou que um estado maximalmente misto possui entropia linear máxima no espaço de fases. Portanto, a entropia de spin-paridade é única fonte de informação finita que quantifica as correlações entre o espaço de fases e o espaço de Hilbert discreto.

O resultado acima foi utilizado para se investigar as correlações de spin-paridade em temperaturas finitas. A função de partição do ensemble canônico foi obtida com técnicas de integração complexa, resultando em uma série infinita em  $1/T$  para baixas temperaturas e quadrática no limite de temperaturas infinitas. Os coeficientes dessa expansão correspondem a funções Zeta analiticamente continuadas, permitindo obter o quantificador de pureza em níveis de Landau tipo-Dirac.

Finalmente, a estrutura tensorial de elétrons de Dirac no grafeno monocamada foi mapeada na equação de Dirac em  $3+1$ , permitindo descrever o grafeno monocamada como um sistema de qubits, com os graus de liberdade discretos vale e sub-rede. Embora esses graus de liberdade estejam correlacionados, não se verificou um emaranhamento finito. Ainda assim, a função de partição obtida descreve ambos os sistemas, quantificando a informação mútua em temperaturas arbitrárias.

Como extensões imediatas dos resultados obtidos aqui, espera-se que a introdução de acoplamento de vale modifiquem o perfil de emaranhamento. Além disso, o mapeamento dos bispinores de Dirac também pode ser generalizado para sistemas bosônicos tipo-Dirac, com níveis de Landau introduzidos por uma deformação mecânica (KUMAR; HERBUT; GANESH, 2020; SUN; GUO; FENG, 2021).

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARONSTEIN, D. L.; STROUD, C. Fractional wave-function revivals in the infinite square well. **Physical Review A**, APS, v. 55, n. 6, p. 4526, 1997.
- ARTIN, E. **The gamma function**. [S.l.]: Courier Dover Publications, 2015.
- AWSCHALOM, D. D.; FLATTÉ, M. E. Challenges for semiconductor spintronics. **Nature physics**, Nature Publishing Group UK London, v. 3, n. 3, p. 153–159, 2007.
- BAGROV, V.; GITMAN, D. **The Dirac equation and its solutions**. [S.l.]: Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2014.
- BALLENTINE, L. **Quantum Mechanics: a Modern Development**. [S.l.]: World Scientific, 1998. p. 633.
- BENNETT, C. H.; BERNSTEIN, H. J.; POPESCU, S.; SCHUMACHER, B. Concentrating partial entanglement by local operations. **Physical Review A**, APS, v. 53, n. 4, p. 2046, 1996.
- BERA, A. et al. Quantum discord and its allies: a review of recent progress. **Reports on Progress in Physics**, IOP Publishing, v. 81, n. 2, p. 024001, 2017.
- BERMUDEZ, A.; MARTIN-DELGADO, M.; SOLANO, E. Exact mapping of the 2+ 1 Dirac oscillator onto the Jaynes-Cummings model: Ion-trap experimental proposal. **Physical Review A**, APS, v. 76, n. 4, p. 041801, 2007.
- BERMUDEZ, A.; MARTIN-DELGADO, M.; SOLANO, E. Mesoscopic superposition states in relativistic Landau levels. **Physical review letters**, APS, v. 99, n. 12, p. 123602, 2007.
- BERNARDINI, A. E. Phase-space elementary information content of confined Dirac spinors. **The European Physical Journal Plus**, Springer, v. 135, p. 675, 2020.
- BERNARDINI, A. E. On the elementary information content of thermodynamic ensembles. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 557, p. 124889, 2020.
- BERNARDINI, A. E.; GUZZO, M. M.; NISHI, C. C. Quantum flavor oscillations extended to the Dirac theory. **Fortschritte der Physik**, Wiley Online Library, v. 59, n. 5-6, p. 372–453, 2011.
- BITTENCOURT, V. A.; BERNARDINI, A. E. Entanglement of Dirac bi-spinor states driven by Poincaré classes of  $SU(2) \otimes SU(2)$  coupling potentials. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 364, p. 182–199, 2016.
- BITTENCOURT, V. A.; BERNARDINI, A. E.; BLASONE, M. Chiral oscillations in the non-relativistic regime. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 81, n. 5, p. 411, 2021.

- BITTENCOURT, V. A.; BERNARDINI, A. E.; BLASONE, M. Quantum transitions and quantum entanglement from Dirac-like dynamics simulated by trapped ions. **Physical Review A**, APS, v. 93, n. 5, p. 053823, 2016.
- BITTENCOURT, V. A.; BLASONE, M.; BERNARDINI, A. E. Bilayer graphene lattice-layer entanglement in the presence of non-Markovian phase noise. **Physical Review B**, APS, v. 97, n. 12, p. 125435, 2018.
- BITTENCOURT, V. A.; MIZRAHI, S. S.; BERNARDINI, A. E.  $SU(2) \otimes SU(2)$  bi-spinor structure entanglement induced by a step potential barrier scattering in two-dimensions. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 355, p. 35–47, 2015.
- BLUHM, R.; KOSTELECKÝ, V. A. Long-term evolution and revival structure of Rydberg wave packets. **Physics Letters A**, Elsevier, v. 200, n. 3-4, p. 308–313, 1995.
- BLUHM, R.; KOSTELECKÝ, V. A. Long-term evolution and revival structure of Rydberg wave packets for hydrogen and alkali-metal atoms. **Physical Review A**, APS, v. 51, n. 6, p. 4767, 1995.
- BONITZ, M. **Quantum kinetic theory**. [S.l.]: Springer, 2016.
- BRAUNSTEIN, S. L. et al. Separability of very noisy mixed states and implications for NMR quantum computing. **Physical Review Letters**, APS, v. 83, n. 5, p. 1054, 1999.
- BREIT, G. An interpretation of Dirac's theory of the electron. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, National Acad Sciences, v. 14, n. 7, p. 553–559, 1928.
- CASANOVA, J. et al. Klein tunneling and Dirac potentials in trapped ions. **Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics**, APS, v. 82, n. 2, p. 020101, 2010.
- CASE, W. B. Wigner functions and Weyl transforms for pedestrians. **American Journal of Physics**, American Association of Physics Teachers, v. 76, n. 10, p. 937–946, 2008.
- CASTRO NETO, A. H. et al. The electronic properties of graphene. **Reviews of modern physics**, APS, v. 81, n. 1, p. 109–162, 2009.
- CHITAMBAR, E.; HSIEH, M.-H. Relating the resource theories of entanglement and quantum coherence. **Physical review letters**, APS, v. 117, n. 2, p. 020402, 2016.
- EKERT, A.; JOZSA, R. Quantum algorithms: entanglement-enhanced information processing. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, The Royal Society, v. 356, n. 1743, p. 1769–1782, 1998.
- ELZE, H.-T.; GYULASSY, M.; VASAK, D. Transport equations for the QCD quark Wigner operator. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 276, n. 3-4, p. 706–728, 1986.
- GEA-BANACLOCHE, J. Collapse and revival of the state vector in the Jaynes-Cummings model: An example of state preparation by a quantum apparatus. **Physical review letters**, APS, v. 65, n. 27, p. 3385, 1990.
- GIBBS, J. **Elementary principles in statistical mechanics: developed with especial reference to the rational foundations of thermodynamics**. [S.l.]: C. Scribner's sons, 1902.

- GOERBIG, M. Electronic properties of graphene in a strong magnetic field. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 83, n. 4, p. 1193–1243, 2011.
- GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. **Table of integrals, series, and products**. San Diego: Academic press, 2014.
- GREINER, M.; MANDEL, O.; HÄNSCH, T. W.; BLOCH, I. Collapse and revival of the matter wave field of a Bose–Einstein condensate. **Nature**, Nature Publishing Group UK London, v. 419, n. 6902, p. 51–54, 2002.
- GREINER, W. **Relativistic quantum mechanics**. [S.l.]: Springer, 2000.
- HASSE, H. Ein Summierungsverfahren für die Riemannsche  $\zeta$ -Reihe. **Mathematische Zeitschrift**, Springer, v. 32, n. 1, p. 458–464, 1930.
- HEINZ, U. Kinetic theory for plasmas with non-Abelian interactions. **Physical Review Letters**, APS, v. 51, n. 5, p. 351, 1983.
- HENDERSON, L.; VEDRAL, V. **J. Phys. A: Math. Gen**, v. 34, p. 6899, 2001.
- HILGEVOORD, J. The uncertainty principle for energy and time. **American Journal of Physics**, American Association of Physics Teachers, v. 64, n. 12, p. 1451–1456, 1996.
- HOUÇA, R.; JELLAL, A. Thermodynamic properties of graphene in a magnetic field and Rashba coupling. **Physica Scripta**, IOP Publishing, v. 94, n. 10, p. 105707, 2019.
- ITZYKSON, C.; ZUBER, J.-B. **Quantum field theory**. [S.l.]: Courier Corporation, 2012.
- KARIMIPOUR, V.; BAHRAMINASAB, A.; BAGHERINEZHAD, S. Entanglement swapping of generalized cat states and secret sharing. **Physical Review A**, APS, v. 65, n. 4, p. 042320, 2002.
- KRUECKL, V.; KRAMER, T. Revivals of quantum wave packets in graphene. **New Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 11, n. 9, p. 093010, 2009.
- KUMAR, P. S.; HERBUT, I. F.; GANESH, R. Dirac Hamiltonians for bosonic spectra. **Physical Review Research**, APS, v. 2, n. 3, p. 033035, 2020.
- LAMATA, L. et al. Relativistic quantum mechanics with trapped ions. **New Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 13, n. 9, p. 095003, 2011.
- LUO, S. Quantum discord for two-qubit systems. **Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics**, APS, v. 77, n. 4, p. 042303, 2008.
- LUO, S. Using measurement-induced disturbance to characterize correlations as classical or quantum. **Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics**, APS, v. 77, n. 2, p. 022301, 2008.
- MA, J. et al. Converting coherence to quantum correlations. **Physical review letters**, APS, v. 116, n. 16, p. 160407, 2016.
- MCCANN, E.; KOSHINO, M. The electronic properties of bilayer graphene. **Reports on Progress in physics**, IOP Publishing, v. 76, n. 5, p. 056503, 2013.

- MINTERT, F.; CARVALHO, A. R.; KUŚ, M.; BUCHLEITNER, A. Measures and dynamics of entangled states. **Physics Reports**, Elsevier, v. 415, n. 4, p. 207–259, 2005.
- MOYAL, J. E. Quantum mechanics as a statistical theory. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1. MATHEMATICAL Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. [S.l.: s.n.], 1949. v. 45, p. 99–124.
- OLLIVIER, H.; ZUREK, W. H. Quantum discord: a measure of the quantumness of correlations. **Physical review letters**, APS, v. 88, n. 1, p. 017901, 2001.
- PRINZ, G. A. Magnetolectronics. **science**, American Association for the Advancement of Science, v. 282, n. 5394, p. 1660–1663, 1998.
- ROBINETT, R. W. Quantum wave packet revivals. **Physics reports**, Elsevier, v. 392, n. 1-2, p. 1–119, 2004.
- ROMERA, E.; BOLÍVAR, J.; ROLDÁN, J.; SANTOS, F. de los. Revivals of electron currents and topological-band insulator transitions in 2D gapped Dirac materials. **Europhysics Letters**, IOP Publishing, v. 115, n. 2, p. 20008, 2016.
- ROMERA, E. Revivals of zitterbewegung of a bound localized Dirac particle. **Physical Review A**, APS, v. 84, n. 5, p. 052102, 2011.
- ROMERA, E.; LOS SANTOS, F. de. Revivals, classical periodicity, and zitterbewegung of electron currents in monolayer graphene. **Physical Review B**, APS, v. 80, n. 16, p. 165416, 2009.
- ROMERA, E.; LOS SANTOS, F. de. Identifying wave-packet fractional revivals by means of information entropy. **Physical review letters**, APS, v. 99, n. 26, p. 263601, 2007.
- RUSIN, T. M.; ZAWADZKI, W. Zitterbewegung of relativistic electrons in a magnetic field and its simulation by trapped ions. **Physical Review D**, APS, v. 82, n. 12, p. 125031, 2010.
- SANTOS, V.; MALUF, R.; ALMEIDA, C. Thermodynamical properties of graphene in noncommutative phase-space. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 349, p. 402–410, 2014.
- SCHLOSSHAUER, M. Quantum decoherence. **Physics Reports**, Elsevier, v. 831, p. 1–57, 2019.
- SCHRÖDINGER, E. Über die kräftefreie Bewegung in der relativistischen Quantenmechanik. (No Title), 1930.
- SCHRÖDINGER, E. **Zur quantendynamik des elektrons**. [S.l.: s.n.], 1931.
- SHEN, Y. et al. Nonlinear entanglement and its application to generating cat states. **Physical Review Letters**, APS, v. 114, n. 10, p. 100403, 2015.
- SHENG, X.-l.; FANG, R.-h.; WANG, Q.; RISCHKE, D. H. Wigner function and pair production in parallel electric and magnetic fields. **Physical Review D**, APS, v. 99, n. 5, p. 056004, 2019.
- SILVA, C. F.; BERNARDINI, A. E. Intrinsic correlations for statistical ensembles of Dirac-like structures. **Physical Review A**, APS, v. 109, n. 2, p. 022206, 2024.

- SILVA, C. F.; BERNARDINI, A. E. Revival patterns for Dirac cat states in a constant magnetic field. **Physical Review A**, APS, v. 107, n. 4, p. 042220, 2023.
- SILVA, C. F.; BERNARDINI, A. E. Classical and statistical limits of the quantum singular oscillator. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 558, p. 124915, 2020.
- SILVA, C. F.; BERNARDINI, A. E. Intrinsic quantum correlations for Gaussian localized Dirac cat states in phase space. **Phys. Rev. A**, v. 104, p. 052213, 2021.
- SOLANO, E.; MATOS FILHO, R. de; ZAGURY, N. Mesoscopic superpositions of vibronic collective states of N trapped ions. **Physical Review Letters**, APS, v. 87, n. 6, p. 060402, 2001.
- SOLANO, E.; AGARWAL, G. S.; WALTHER, H. Strong-driving-assisted multipartite entanglement in cavity QED. **Physical review letters**, APS, v. 90, n. 2, p. 027903, 2003.
- STEANE, A. Quantum computing. **Reports on Progress in Physics**, IOP Publishing, v. 61, n. 2, p. 117, 1998.
- STRANGE, P. Relativistic quantum revivals. **Physical review letters**, APS, v. 104, n. 12, p. 120403, 2010.
- SUN, J.; GUO, H.; FENG, S. Magnon Landau levels in the strained antiferromagnetic honeycomb nanoribbons. **Physical Review Research**, APS, v. 3, n. 4, p. 043223, 2021.
- SYCHEV, D. V. et al. Enlargement of optical Schrödinger's cat states. **Nature Photonics**, Nature Publishing Group UK London, v. 11, n. 6, p. 379–382, 2017.
- TENEV, T. G.; IVANOV, P. A.; VITANOV, N. V. Proposal for trapped-ion emulation of the electric dipole moment of neutral relativistic particles. **Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics**, APS, v. 87, n. 2, p. 022103, 2013.
- THALLER, B. **The Dirac Equation**. [S.l.]: Springer-Verlag, 1992.
- THOMAS, M.; JOY, A. T. **Elements of information theory**. [S.l.]: Wiley-Interscience, 2006.
- TICCIATI, R. **Quantum field theory for mathematicians**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1999.
- VASAK, D.; GYULASSY, M.; ELZE, H.-T. Quantum transport theory for Abelian plasmas. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 173, n. 2, p. 462–492, 1987.
- VEDRAL, V. Classical correlations and entanglement in quantum measurements. **Physical review letters**, APS, v. 90, n. 5, p. 050401, 2003.
- WEICKGENANT, N. et al. Kinetic theory for massive spin- 1/2 particles from the Wigner-function formalism. **Physical Review D**, APS, v. 100, n. 5, p. 056018, 2019.
- WENIGER, E. J. On the mathematical nature of Guseinov's rearranged one-range addition theorems for Slater-type functions. **Journal of Mathematical Chemistry**, Springer, v. 50, p. 17–81, 2012.

- WIGNER, E. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. **Physical review**, APS, v. 40, n. 5, p. 749, 1932.
- WOLF, S. et al. Spintronics: a spin-based electronics vision for the future. **science**, American Association for the Advancement of Science, v. 294, n. 5546, p. 1488–1495, 2001.
- WOOTTERS, W. Quantum Inf. **Phys. Rev. Lett**, v. 80, p. 2245, 1998.
- XI, Z.; LI, Y.; FAN, H. Quantum coherence and correlations in quantum system. **Scientific reports**, Nature Publishing Group UK London, v. 5, n. 1, p. 10922, 2015.
- XU, J.-S. et al. Experimental demonstration of photonic entanglement collapse and revival. **Physical review letters**, APS, v. 104, n. 10, p. 100502, 2010.
- ZHUANG, P.; HEINZ, U. Relativistic quantum transport theory for electrodynamics. **annals of physics**, Elsevier, v. 245, n. 2, p. 311–338, 1996.
- ZONDINER, U. et al. Cascade of phase transitions and Dirac revivals in magic-angle graphene. **Nature**, v. 582, n. 7811, p. 203–208, 2020.
- ŽUTIĆ, I.; FABIAN, J.; SARMA, S. D. Spintronics: Fundamentals and applications. **Reviews of modern physics**, APS, v. 76, n. 2, p. 323, 2004.