UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

POLIEDROS REGULARES E SEMIRREGULARES: UM ESTUDO COM EXPERIMENTOS EM SALA DE AULA

Vanessa Cristina Correa Seisdedos

São Carlos – SP
Fevereiro de 2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

POLIEDROS REGULARES E SEMIRREGULARES: UM ESTUDO COM EXPERIMENTOS EM SALA DE AULA

Vanessa Cristina Correa Seisdedos

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

Orientador: Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio.

São Carlos – SP
Fevereiro de 2024

Correa Seisdedos, Vanessa Cristina

Poliedros regulares e semirregulares: um estudo com experimentos em sala de aula / Vanessa Cristina Correa Seisdedos -- 2024.
42f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos
Orientador (a): João Carlos Vieira Sampaio
Banca Examinadora: João Carlos Vieira Sampaio, Claudia Buttarello Gentile Moussa, Rafael Fernando Barostichi
Bibliografia

1. Educação matemática. 2. Poliedros regulares. 3. Poliedros semirregulares. I. Correa Seisdedos, Vanessa Cristina. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Ronildo Santos Prado - CRB/8 7325

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - CCM/CCET

Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905
Telefone: (16) 33518221 - http://www.ufscar.br

DP-TCC-FA nº 21/2024/CCM/CCET

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

VANESSA CRISTINA CORRÊA SEISDEDOS

POLIEDROS REGULARES E SEMIRREGULARES: UM ESTUDO COM EXPERIMENTOS EM SALA DE AULA

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos

São Carlos, 07 de fevereiro de 2024

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	**Nome Completo**
Orientador	João Carlos Vieira Sampaio
Membro da Banca 1	Claudia Buttarello Gentile Moussa
Membro da Banca 2	Rafael Fernando Barostichi

Documento assinado eletronicamente por **Joao Carlos Vieira Sampaio**, **Professor(a) do Ensino Superior**, em 06/03/2024, às 16:24, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Claudia Buttarello Gentile Moussa**, **Professor(a) do Ensino Superior**, em 11/07/2024, às 16:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Rafael Fernando Barostichi**, **Professor(a) do Ensino Superior**, em 12/07/2024, às 17:05, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufscar.br/autenticacao, informando o código verificador **1367633** e o código CRC **A3ED4F84**.

Referência: Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo nº 23112.004439/2024-25 SEI nº 1367633

Modelo de Documento: Grad: Defesa TCC: Folha Aprovação, versão de 02/Agosto/2019

Dedicatória

Dedico este estudo aos meus avós, Ildo Correa e Deolinda Balan Corrêa, aos meus pais, Adriana Correa e José Carlos Seisdedos, e ao meu noivo, Eduardo Paiolli Troli, por serem as fontes de amor, inspiração e apoio incondicional em minha jornada acadêmica e na vida. Vocês são os verdadeiros alicerces de todas as minhas conquistas.

"Usar o material concreto no ensino da matemática é dar oportunidade aos discentes de enxergar a materialização do que antes era apenas abstrato". (QUEIROZ, 2022).

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de expressar minha mais profunda gratidão aos meus avós, Ildo Correa e Deolinda Balan Corrêa, cuja sabedoria, amor e apoio incondicional foram fundamentais em cada passo da minha jornada. Vocês são a personificação da força e do amor, e cada palavra de incentivo de vocês ressoou profundamente em meu coração, guiando-me pelos caminhos da vida e da educação.

Aos meus pais, Adriana Correa e José Carlos Seisdedos, minha eterna gratidão por todo sacrifício, apoio e amor inabaláveis. Vocês me ensinaram o valor do trabalho duro e da perseverança, e sua confiança em minhas capacidades foi a força motriz que me impulsionou a buscar sempre o meu melhor. Sem vocês, nada disso seria possível.

Um agradecimento especial ao meu noivo, Eduardo Paioli Troli, pelo amor, paciência e compreensão. Sua presença em minha vida tem sido uma fonte constante de alegria e inspiração. Seu apoio incondicional nos momentos mais desafiadores desta jornada foi essencial para a realização deste trabalho.

A todos vocês, meu mais sincero obrigado por estarem ao meu lado, compartilhando as alegrias e desafios, e por fazerem parte dessa importante etapa da minha vida.

Resumo

Este estudo destaca a importância do uso de materiais concretos no ensino de poliedros, tanto regulares quanto irregulares, fundamentado em revisão bibliográfica e experiências práticas. Alinhado à teoria cognitiva de Piaget, enfatiza a aprendizagem eficaz por meio de experiências tangíveis. Propõe um modelo educativo que intercala teoria e prática para tornar o aprendizado mais significativo. A metodologia inclui revisão bibliográfica detalhada e relatos de experiências educativas, abrangendo história, filosofia, classificação dos poliedros e estratégias didáticas para seu ensino. O estudo explora a história rica dos poliedros, desde Platão até Kepler, e sua classificação em convexos e não convexos. Destaca estratégias didáticas, ressaltando a eficácia de métodos práticos pós-pandemia. Compartilha experiências na Rede Estadual de Ensino, enfatizando inovações pedagógicas e a importância do engajamento dos alunos. Conclui que o uso de materiais concretos é fundamental para um aprendizado matemático efetivo, facilitando a compreensão dos conceitos geométricos e contribuindo para o desenvolvimento integral dos alunos. A inovação pedagógica e a flexibilidade são cruciais, buscando equilíbrio entre teoria e prática no ensino de matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática. Poliedros Regulares. Poliedros Semirregulares.

Abstract

This study highlights the importance of using concrete materials in teaching polyhedra, both regular and irregular, based on a literature review and practical experiences. In line with Piaget's cognitive theory, it emphasizes effective learning through tangible experiences. It proposes an educational model that combines theory and practice to make learning more meaningful. The methodology includes a detailed bibliographic review and reports of educational experiences, covering history, philosophy, classification of polyhedra and didactic strategies for teaching them. The study explores the rich history of polyhedra, from Plato to Kepler, and their classification into convex and non-convex. It highlights teaching strategies, highlighting the effectiveness of practical post-pandemic methods. Shares experiences in the State Education Network, emphasizing pedagogical innovations and the importance of student engagement. We conclude that the use of concrete materials is fundamental for effective mathematical learning, facilitating the understanding of geometric concepts and contributing to the integral development of students. Pedagogical innovation and flexibility are crucial, seeking a balance between theory and practice in mathematics teaching.

Key Words: Mathematics Education. Regular Polyhedra. Semiregular Polyhedra.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1

INTRODUÇÃO

O ensino tradicional da matemática tem sido caracterizado, por métodos que enfatizam exposições teóricas e a memorização de fórmulas. Essas práticas frequentemente empregam lousas ou projeções de slides e são acompanhadas de extensas listas de exercícios. No entanto, este método enfrenta limitações, especialmente quando se trata de conteúdos de maior complexidade, o que muitas vezes resulta em dificuldades crescentes de compreensão por parte dos alunos.

Diante deste cenário, há necessidade de adotar estratégias inovadoras no processo de ensino, destacando a eficácia de introduzir materiais concretos no início do processo de aprendizagem. Esta abordagem não só facilita a compreensão dos alunos, mas também contribui significativamente para o sucesso na abordagem de conteúdos mais avançados (PONTE et al., 2023).

Além disso, a justificativa para a pesquisa atual reside na complexidade inerente aos vários ramos da matemática, como geometria, álgebra e aritmética. Esses campos enfrentam desafios significativos em sua transmissão educacional. Esta complexidade sublinha a importância de identificar lacunas no processo educacional e desenvolver estratégias para atenuar os crescentes déficits de aprendizado na disciplina. Munari (2010) ressalta a questão do fracasso escolar em matemática e a necessidade urgente de inovações educacionais. Tais inovações devem focar tanto no desenvolvimento profissional dos professores quanto no sucesso dos alunos, promovendo assim uma abordagem de ensino mais eficaz e inclusiva (MUNARI, 2010).

Portanto, fundamentando-se em uma vasta revisão bibliográfica e enriquecido por relatos de experiências na rede pública de ensino, na Escola Estadual Dona Aracy Leite Pereira Lopes, localizada em São Carlos, São Paulo, durante os anos de 2022 e 2023, objetiva enfatizar a relevância do uso de materiais concretos no processo de ensino e aprendizagem de poliedros regulares e irregulares. Integrando esta prática em ambientes de aprendizado. Adotando uma abordagem lúdica alinhada com a teoria do desenvolvimento cognitivo de Piaget, este método visa melhorar substancialmente a eficiência do processo de ensino e aprendizagem. Piaget defende que as crianças aprendem de maneira mais eficaz quando começam com experiências tangíveis antes de progredir para conceitos abstratos. Por isso, é crucial que o ensino inicie com a prática, pavimentando o caminho para a compreensão teórica (MUNARI, 2010).

Conforme salienta Turrioni (2004), a importância do material concreto na aprendizagem, é por ser uma ferramenta facilitadora, durante o processo de observação e análise, além disso contribui no desenvolvimento do raciocínio lógico, crítico e científico, sendo imprescindível no ensino experimental. Esta abordagem não só ajuda na compreensão de um tópico específico, mas também promove o desenvolvimento pessoal dos alunos em diversas áreas, incluindo a autonomia, autoestima e confiança.

Nesta linha, os alunos têm a chance de manipular conteúdos de maneira individualizada, o que facilita a compreensão e os aproxima dos resultados desejados. A manipulação de formas e sólidos geométricos ajuda os alunos a compreender melhor os elementos básicos das figuras e a realizar cálculos fundamentais de maneira mais racional, distanciando-se da memorização e do cálculo mecânico.

Deste modo, com base nessa perspectiva, sugere-se um modelo de ensino que rompa com os métodos tradicionais, sem perder a essência do ensino dos conteúdos, enfatizando o uso de materiais concretos no ensino de poliedros regulares e irregulares. Este modelo propõe um equilíbrio entre o concreto e o abstrato, visando um aprendizado mais significativo e envolvente para os alunos.

Neste trabalho, exploramos a seguir a fascinante jornada dos poliedros na matemática, desde suas raízes históricas e filosóficas até as práticas contemporâneas de ensino. O estudo é dividido em capítulos cuidadosamente estruturados, cada um abordando aspectos distintos e cruciais dos poliedros e de sua aplicação educacional.

No Capítulo 2, intitulado "Poliedros Através dos Tempos: Uma Jornada Histórica e Filosófica", mergulhamos na rica história e na significância filosófica dos poliedros. Discutimos as contribuições de figuras históricas como Platão e Kepler, ilustrando como os poliedros são um testemunho da interconexão entre a matemática, a filosofia e a história.

Seguindo para o Capítulo 3, "Classificação dos Poliedros", adentramos no estudo técnico dos poliedros, abrangendo sua classificação em categorias como convexos e não convexos. Esse capítulo aprofunda o conhecimento sobre os diferentes tipos de poliedros, desde os famosos Poliedros de Platão até as formas mais complexas encontradas na geometria moderna.

O Capítulo 4 é dedicado ao "Ensino de Poliedros com Materiais Concretos". Aqui, focamos nas estratégias didáticas e na importância de utilizar materiais concretos para ensinar conceitos geométricos, especialmente no desafiador contexto pós-pandêmico. Este capítulo realça a eficácia de métodos de ensino práticos e interativos na compreensão e no interesse dos alunos pela matemática.

Logo, no Capítulo 5 traz "Experiências e Aprendizados na Rede Estadual de Ensino", onde compartilho minha própria jornada como educadora, incluindo os desafios e as conquistas enfrentados no ensino de matemática na rede estadual. Este capítulo oferece uma perspectiva pessoal e prática, destacando as inovações pedagógicas e a importância do engajamento ativo dos alunos no processo de aprendizagem.

Cada capítulo deste trabalho foi cuidadosamente elaborado para oferecer uma visão abrangente e detalhada do mundo dos poliedros, sua relevância histórica, classificação, abordagens de ensino e impacto no cenário educacional atual. Baseando-se nos seguintes autores: Coxeter (1948), Veloso e Viana (1998), Dolce e Pompeo (2005), Garcia e Castilho (2006), Lima et al. (2006), Barison (2007), Marques (2018), Lorenzato (2008a), Dante (2010), Iezzi et al. (2010), Eves (2011), Dias et al. (2013), Kaleff, Monteiro e Garcia (2005), Pohl (1994), entre outros.

2

POLIEDROS ATRAVÉS DOS TEMPOS: UMA JORNADA HISTÓRICA E FILOSÓFICA

Os aspectos históricos e filosóficos dos poliedros são profundamente enraizados na história da filosofia e da matemática (DANTE, 2018; DIAS et al., 2013).

Platão, um filósofo grego nascido aproximadamente entre 427 e 428 a.C. e falecido em 348 a.C., foi um dos principais precursores no estudo dos poliedros. Platão, originalmente chamado Aristocles, é conhecido por sua fundação da Academia de Atenas, um epicentro de discussões sobre filosofia, matemática e outros campos do saber.

A importância da geometria na Academia era tal que havia uma inscrição em sua entrada que dizia: "Que não entre aqui aquele que não sabe Geometria" (DANTE, 2018, p. 96).

Além de suas contribuições filosóficas, Platão também teve um papel crucial no desenvolvimento dos conceitos de poliedros, com alguns destes sendo nomeados em sua honra como os poliedros de Platão. Esses poliedros são caracterizados por ter faces com o mesmo número de arestas e vértices que recebem o mesmo número de arestas, seguindo a relação $V + F - A = 2$ (DANTE, 2018).

A discussão sobre os poliedros foi além da geometria, alcançando a esfera filosófica.

Dias et al. (2013) explicam que na Grécia Antiga, os poliedros regulares eram associados a elementos fundamentais como terra, fogo, ar e água, e Platão até propôs um quinto poliedro, o dodecaedro, para representar a forma do Cosmos.

Este enfoque filosófico e conceitual dos poliedros continuou com Johannes Kepler no século XVI-XVII. Kepler, em sua obra "Harmonices Mundi", tentou explicar a harmonia do universo em termos de polígonos e poliedros, regulares e semirregulares, estabelecendo uma relação entre as esferas celestes e os cinco poliedros regulares.

Sua teoria, apesar de descontinuada após a descoberta de novos planetas, reflete o esforço em descobrir uma ordem no universo que é tanto científica quanto filosófica (DIAS et al., 2013).

Consequentemente, o estudo dos poliedros não se limita à matemática; ele é um testemunho da interconexão entre a matemática, a história e a filosofia, como demonstrado pelas contribuições de figuras históricas como Platão e Kepler.

Os poliedros, em sua simplicidade geométrica, encapsulam séculos de pensamento humano, abrangendo desde a antiguidade até a era moderna, ilustrando a natureza multifacetada do conhecimento humano (DIAS et al., 2013; DANTE, 2018).

3

CLASSIFICAÇÃO DOS POLIEDROS

Poliedros são estruturas tridimensionais que permeiam nosso cotidiano de formas diversas, manifestando-se em objetos comuns como latas de óleo, dados de jogos, embalagens de produtos variados, além das célebres pirâmides do Egito e dos imponentes arranha-céus das grandes metrópoles. Essas formas poliédricas são parte integrante e notável do nosso ambiente cotidiano.

A classificação dos poliedros pode ser feita em duas categorias principais: convexos e não convexos. Poliedros convexos, conforme definido por Garcia e Castilho (2006), são aqueles em que qualquer segmento de reta traçado entre dois pontos em sua superfície ou interior está completamente contido no poliedro. Em contraste, os poliedros não convexos ou côncavos são caracterizados pela inexistência dessa propriedade para todos os pares de pontos.

Desta maneira, entre os poliedros convexos, destacam-se os poliedros de Platão, Arquimedes, Johnson e Catalan, conforme explorado por diversos autores no campo da geometria. Os poliedros de Platão distinguem-se de maneira notável por apresentarem uma característica geométrica uniforme, na qual cada uma de suas faces é composta por um número idêntico de lados. Além disso, estes poliedros exibem uma consistência na quantidade de faces que se encontram em cada vértice, bem como um número igual de arestas que convergem nestes mesmos vértices, conferindo-lhes uma simetria e regularidade únicas em sua estrutura tridimensional (IEZZI et al., 2010).

Já os poliedros de Arquimedes, com todos os vértices e arestas congruentes, mas faces de número variado de arestas, ainda que regulares, são explorados em trabalhos como os de Coxeter (1948). No grupo dos poliedros não convexos, os poliedros de Kepler-Poinsot são discutidos, por exemplo, por Dante (2010), Este conjunto distingue-se notavelmente pelo fato de que cada uma de suas faces é caracterizada pela uniformidade no número de arestas, e também, observa-se uma consistência notável no que se refere à convergência de um número idêntico de arestas em cada um dos seus vértices. Estas classificações e descrições representam um consenso entre os estudiosos da geometria poliédrica e são fundamentais para a compreensão das estruturas e propriedades dos poliedros.

De acordo com Lima et al. (2006), os poliedros são caracterizados como uma entidade geométrica que emerge da conjunção de um conjunto finito de polígonos planos, sendo cada aresta pertencente a um polígono compartilhada exclusivamente com apenas um outro polígono adjacente. Essa visão é complementada por Iezzi et al. (2010), que inicialmente definem sólidos geométricos como formas tridimensionais idealizadas pela Geometria e, em seguida, especificam poliedros como sólidos geométricos cujas superfícies são formadas apenas por polígonos planos, elucidando que a palavra poliedro origina-se do grego, onde 'poli' significa 'vários' e 'edros', 'faces'.

Segundo Dante (2010), na elucidação da estrutura dos poliedros, esclarece-se que cada um é constituído mediante a agregação de um conjunto delimitado de regiões poligonais bidimensionais, conhecidas como faces, que juntas demarcam uma zona espacial circunscrita por estas superfícies. A interseção entre quaisquer duas faces adjacentes pode resultar em uma aresta compartilhada, um vértice confluente, ou uma interseção inexistente. Além disso, cada segmento de linha pertencente a uma região poligonal, que simultaneamente faz fronteira com exatamente duas faces, é designado como a aresta do poliedro.

Por outro lado, Coxeter (1948), apresenta o poliedro como um conjunto finito de polígonos, onde cada aresta é comum a dois e somente dois deles. Esses polígonos, que circundam um vértice, formam uma sequência única, constituindo as faces do poliedro, cujos lados e vértices são, respectivamente, as arestas e vértices do poliedro. Além disso, também introduz o conceito de 'figura do vértice', um polígono formado ao conectar os pontos médios das arestas concorrentes em um vértice, representando uma importante característica estrutural do poliedro.

3.1 POLÍGONOS

O conceito de "polígono", abrangendo tanto a linha quanto a área circunscrita, é diversamente interpretado por vários estudiosos. Carvalho (1982) defende que um polígono é formado tanto pela área poligonal quanto pelo seu perímetro, propondo que cada um destes elementos, isoladamente, pode ser considerado um polígono.

Contrastando com esta visão, Castrucci (1978), Morgado, Wagner e Jorge (1973), e Dolce e Pompeo (1993) focam na definição da linha poligonal. Eles descrevem um polígono como uma série de três ou mais segmentos lineares, conectados em suas extremidades. Morgado, Wagner e Jorge (1973) aprofundam-se ao distinguir as linhas poligonais em abertas e fechadas, enquanto Dolce e Pompeo (1993) destacam a necessidade de os vértices da linha poligonal serem coplanares.

Aprofundando na análise, Dolce e Pompeo (2005) definem polígonos como a união dos segmentos segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$ onde $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ são pontos sequenciais em um plano, todos distintos e tais que nenhum trio consecutivo desses pontos é colinear, com n sendo maior ou igual a 3. Segundo os autores, os pontos $A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n$, são os vértices do polígono, os segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$, são os lados do polígono e os ângulos $\widehat{A_1} = A_n\widehat{A_1}A_2, \widehat{A_2} = A_1\widehat{A_2}A_3, \ldots, \widehat{A_n} = A_{n-1}\widehat{A_n}A_1$ são os ângulos do polígono.

Estendendo essa discussão, Garcia e Castilho (2006) apresentam uma abordagem inicial sobre a linha poligonal, identificando-a como uma sequência de segmentos de reta, consecutivos e não linearmente alinhados. Eles distinguem duas variantes: uma aberta, onde os extremos não se encontram, e outra fechada, formando um circuito contínuo.

Complementando essas perspectivas, Dante (2010) propõe uma definição mais elaborada, caracterizando o polígono como uma entidade geométrica definida por uma linha contínua e fechada, composta exclusivamente por segmentos de reta no mesmo plano e sem intersecções. Esta descrição ressalta a natureza planar dos polígonos e a importância da não-interseção dos segmentos dentro desse plano.

Por fim, Dante (2010) propõe uma definição mais elaborada, caracterizando o polígono como uma entidade geométrica definida por uma linha contínua e fechada, composta exclusivamente por segmentos de reta no mesmo plano e sem intersecções. Esta descrição ressalta a natureza planar dos polígonos e a importância da não-interseção dos segmentos dentro desse plano. Assim, o polígono é entendido de diversas maneiras, mas comumente como uma forma geométrica delimitada por segmentos de reta, seja enfatizando sua linha perimétrica, seus vértices e ângulos, ou sua natureza planar e fechada.

3.2 POLIEDRO REGULAR

A classificação formal de um poliedro como regular, ou platônico, também conhecido como Poliedro de Platão, envolve a aderência a critérios específicos. Conforme Dias et al. (2013), um poliedro é considerado regular se for convexo, com todas as suas faces compostas por polígonos regulares idênticos, e se o número de faces adjacentes a cada vértice for constante em toda a sua estrutura. Esta definição é exemplificada por cinco poliedros específicos: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro, ilustrados na Figura 3.1.

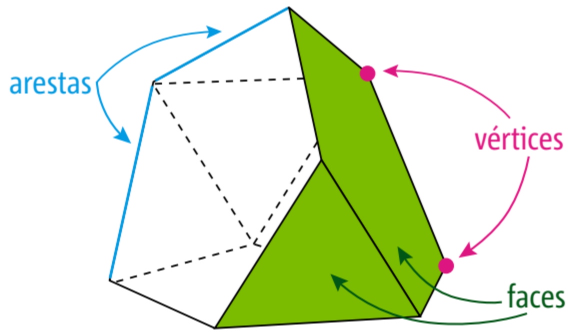
Figura 3.1. Poliedros de Platão.

Fonte: Dante (2018).

Autores como Veloso e Viana (1998), e Marques (2018) expandem essa conceituação, referindo-se ao trabalho de Cauchy em 1913, que reconhece a existência de nove poliedros regulares, incluindo formas não apenas convexas, mas também não convexas. Esta abordagem mais abrangente incorpora os quatro poliedros de Kepler-Poinsot juntamente com os cinco Poliedros de Platão.

Entretanto, para Garcia e Castilho (2006), e Lima et al. (2006), a definição mais prevalente na literatura se refere aos poliedros convexos regulares, que atendem a três condições específicas: (a) todas as faces são polígonos regulares com o mesmo número de lados, (b) um número idêntico de arestas concorre em todos os vértices, e (c) o poliedro deve ser convexo. Dolce e Pompeo (2005) e Dante (2010) reiteram essa visão, enquanto Eves (2011) sublinha a existência de apenas cinco poliedros regulares distintos. Os elementos de um poliedro não necessariamente regular são ilustrados na Figura 3.2.

Figura 3.2. Um poliedro de sete faces (três faces pentagonais e quatro triangulares), 14 arestas e nove vértices.



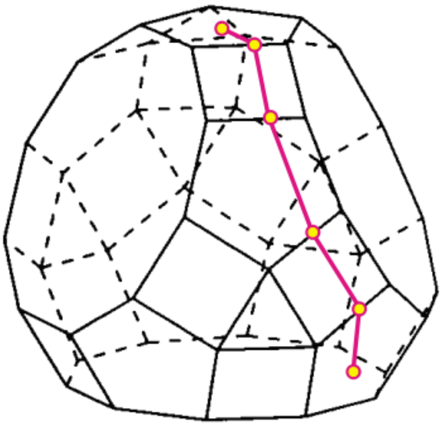
Fonte: Dias et al. (2013).

Segundo Dias et al. (2013), também destacam-se três condições fundamentais na classificação de poliedros: (P1) nenhuma dupla de faces adjacentes deve coexistir no mesmo plano; (P2) cada aresta deve ser comum a exatamente duas faces; e (P3) deve ser possível traçar um caminho poligonal na superfície do poliedro, de uma face a outra, sem cruzar nenhum dos vértices, como ilustrado na Figura 3.3. Essas regras são cruciais para a compreensão e classificação dos poliedros dentro da geometria.

Dentro da estrutura de um poliedro, é possível desenhar um caminho poligonal que se estenda de uma face a outra, evitando o cruzamento através de qualquer vértice.

Além disso, a condição P3 enfatiza a conexidade do poliedro como uma entidade contínua única. Na ausência desta condição, a junção de dois cubos distintos, como ilustrado na Figura

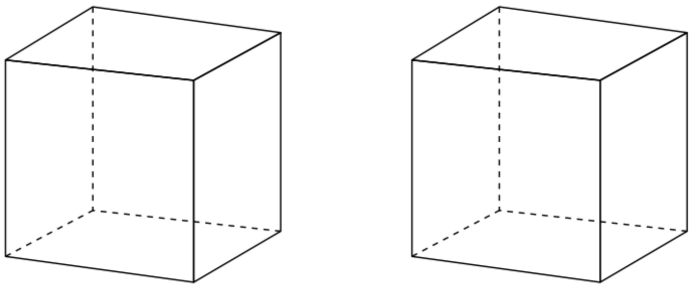
Figura 3.3. Dentro da estrutura de um poliedro.



Fonte: Dias et al. (2013).

3.4, poderia ser equivocadamente classificada como um poliedro, confundindo a interpretação tradicional desta forma geométrica.

Figura 3.4. A reunião de dois cubos separados satisfaz as condições P1 e P2 mas não a condição P3.



Fonte: Dias et al. (2013).

Portanto, a compreensão de poliedros regulares e sua classificação na geometria é multifacetada, dependendo da abordagem e definição adotada.

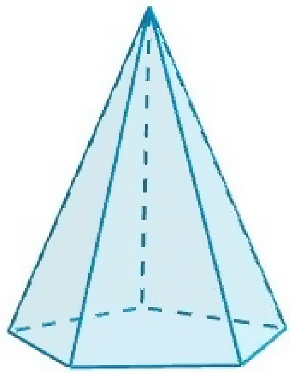
3.3 POLIEDROS IRREGULARES

Segundo Barison (2007), um poliedro irregular é caracterizado pela ausência de uma lei de geração específica que o defina de maneira precisa. Esses poliedros são categorizados em três grupos principais: pirâmides, prismas e antiprismas.

1. Pirâmides: São poliedros formados pela intersecção de um ângulo sólido com um

plano inclinado em relação às arestas. Alternativamente, podem ser vistos como o resultado da conexão dos vértices de um polígono a um ponto fora do plano deste polígono. Uma pirâmide é considerada regular se sua base é um polígono regular. Se a projeção ortogonal do vértice da pirâmide coincide com o centro da base, ela é classificada como reta; se não, é denominada oblíqua. Uma pirâmide de base pentagonal é ilustrada na Figura 3.5. Uma pirâmide regular com faces de triângulos equiláteros é um exemplo de pirâmide regular equilátera (BARISON, 2007).

Figura 3.5. Pirâmide.



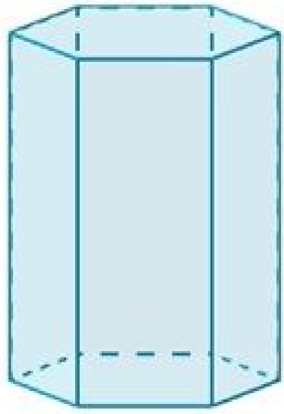
Fonte: https://www.universoformulas.com/matematicas/geometria/piramide-pentagonal/

2. Prismas: São definidos como sólidos geométricos resultantes do corte de um feixe de paralelas não coplanares por dois planos. Quando esses planos não são paralelos, a figura resultante é um tronco de prisma. Os planos são denominados bases e as paralelas, arestas laterais. Um prisma também pode ser gerado pelo deslocamento de um polígono ao longo de uma reta. Se a reta é perpendicular ao plano do polígono, o prisma é dito reto; se não, é considerado oblíquo (BARISON, 2007).

O prisma é convexo se o polígono da base for convexo, e suas faces laterais podem ser paralelogramos, retângulos ou quadrados. Prisma arquimediano é um termo específico para um prisma cuja base é um polígono regular e as faces são quadrados, sendo o cubo um exemplo deste tipo de prisma. Paralelepípedos, com bases e faces laterais retangulares e ângulos diedros retos, são um subtipo especial de prismas (BARISON, 2007). Um prisma hexagonal é ilustrado na Figura 3.6.

3. Antiprismas: São formados pela conexão dos vértices de dois polígonos não coplanares,

Figura 3.6. Prisma.



Fonte: https://www.universoformulas.com/matematicas/geometria/piramide-pentagonal/

criando triângulos entre eles, tal como ilustrado na Figura 3.7. Dependendo das características dos polígonos, segundo Barison (2007) podem ser classificados como:

Antiprismóides: Quando os polígonos não têm o mesmo número de lados.

Antipiramóides: Quando um dos polígonos é substituído por um segmento de reta.

Tronco-antiprismas: Quando os polígonos têm o mesmo número de lados, mas não estão em planos paralelos.

Antiprismas: Quando os polígonos têm o mesmo número de lados e estão em planos paralelos.

Figura 3.7. Exemplos de antiprismas.

Fonte: https://estudoemcasaapoia.dge.mec.pt/recurso/antiprismas-no-geogebra

Essa classificação oferecida por Barison (2007) fornece uma visão abrangente dos diferentes tipos de poliedros irregulares, elucidando suas estruturas e propriedades geométricas.

4

O ENSINO DE POLIEDROS COM MATERIAIS CONCRETOS

O ensino de poliedros regulares e não regulares, especialmente no contexto pós-pandêmico do COVID-19, tornou-se um desafio significativo, conforme observado por diversos educadores. Muitos alunos demonstraram lacunas no conhecimento de figuras geométricas espaciais, como prismas e pirâmides, devido às limitações ocorridas nas aulas remotas. Neste cenário, a importância de materiais concretos em sala de aula ganha destaque (LORENZATO, 2008a).

Sendo assim, Lorenzato (2008a) critica as abordagens tradicionais de ensino, onde o professor se limita ao quadro e às aulas expositivas, sem incorporar métodos que permitam aos alunos expressar suas opiniões e questionamentos. A pandemia, por sua vez, exacerbou a necessidade de inovação pedagógica, levando os educadores a aprimorar novos métodos de ensino. O referido autor ressalta a necessidade de estruturas de ensino organizadas que desenvolvam o pensamento matemático do aluno, promovendo um ambiente de aprendizado ativo e participativo.

Nesse sentido, a manipulação de materiais concretos se apresenta como uma ferramenta valiosa. Kaleff, Monteiro e Garcia (2005) defende o uso de materiais concretos de baixo custo, fáceis de construir, que permitem aos alunos uma experiência mais ampla e eficiente de aprendizagem. Esses recursos permitem que os alunos vivenciem os conteúdos de maneira dinâmica e objetiva, facilitando a compreensão de uma matemática mais próxima do cotidiano.

Para Pohl (1994) reforça que a melhor maneira de aprender a visualizar o espaço tridimensional é construindo objetos que demonstrem conceitos espaciais. A construção de poliedros permite aos alunos observar e usar relações espaciais de forma prática, estimulando o pensamento criativo. Lorenzato (2008a) destaca que o objetivo do ensino de geometria é levar a criança do espaço vivenciado ao espaço pensado, enfatizando a importância da transição do concreto para o abstrato.

A pandemia do novo coronavírus impulsionou mudanças metodológicas, exigindo dos professores maior dedicação e inovação. Nenhuma mudança significativa na educação ocorrerá sem o envolvimento dos educadores, e esta mudança de atitude se tornou essencial no contexto do ensino remoto. Fiorentini e Miorim (1990) destacam que a resistência ao uso de materiais concretos precisa ser superada, pois eles contribuem significativamente para o desenvolvimento do raciocínio lógico e construção do conhecimento.

Deste modo, Turrioni (2004) salientam que o material concreto facilita a observação, análise e desenvolve o raciocínio lógico e crítico, sendo um excelente auxílio na construção do conhecimento. No entanto, Lorenzato (2008b) adverte que o material didático, por melhor que seja, é apenas um meio auxiliar de ensino e não substitui a presença e a orientação do professor. O professor deve planejar cuidadosamente o uso desses materiais, incentivando a comunicação, a troca de ideias e o registro de atividades.

De acordo com Marques (2018) o uso de materiais manipuláveis promove a reflexão, a experimentação e a descoberta, contribuindo para o protagonismo e autonomia do aluno na construção de sua aprendizagem. A construção de aprendizagens significativas implica a conexão do conhecimento prévio do aluno com novos conhecimentos.

5

EXPERIÊNCIAS E APRENDIZADOS NA REDE ESTADUAL DE ENSINO

Em todo curso de licenciatura, a disciplina de estágio obrigatório é fundamental, pois ela oferece aos futuros educadores uma visão prática do sistema educacional. Na minha jornada como estudante de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), essa experiência não foi exceção. No entanto, a maior parte do meu estágio ocorreu durante a pandemia de COVID-19, em 2020, um período marcado pelo ensino à distância, que, embora desafiador, proporcionou uma visão única sobre a educação remota. Contudo, a interação direta em sala de aula com estudantes e professores foi limitada, alterando significativamente a experiência do estágio.

A oportunidade de aprofundar meu envolvimento com o sistema público de ensino surgiu em maio de 2022, quando participei do cadastro emergencial da Diretoria de Ensino de São Carlos. Esse processo de cadastro é adotado quando há necessidade de preenchimento de vagas decorrentes da ausência de professores. Através desse cadastro, tive a oportunidade de ministrar aulas de matemática e outras disciplinas integrantes do currículo paulista. Minha admissão como docente ocorreu após a validação do meu cadastro, uma conquista que marcaria o início de uma jornada enriquecedora.

Fui designada para lecionar em uma escola que participa do Programa de Ensino Integral (PEI), uma experiência que se revelou essencial tanto para minha vida profissional quanto acadêmica. Diferentemente do período de estágio, minha atuação como professora na Escola Estadual Dona Aracy Leite Pereira Lopes, localizada em São Carlos, São Paulo, durante os anos de 2022 e 2023, proporcionou uma imersão completa no ambiente escolar. A dedicação de 40 horas semanais na escola me permitiu vivenciar aspectos diversos da prática educativa que iam além do escopo do estágio tradicional.

Durante esse período, participei ativamente de reuniões pedagógicas com o corpo docente e a gestão escolar, enfrentei o desafio de lidar com a defasagem educacional agravada pela pandemia, explorei diversas abordagens para o ensino de conteúdos matemáticos e, talvez o mais significativo, aprendi a gerenciar questões pessoais dos alunos que impactavam diretamente no processo educativo.

Esta experiência na rede estadual, mais do que um complemento à minha formação acadêmica, foi uma verdadeira jornada de crescimento profissional e pessoal. Ela reforçou minha paixão pelo ensino e pela matemática, além de destacar a importância de uma abordagem educacional que seja sensível às necessidades individuais dos alunos e que esteja alinhada às demandas contemporâneas do ensino.

1º Momento: Implementação de Atividades Lúdicas na Semana da Matemática

Em novembro de 2022, na Escola Estadual onde leciono, tornou-se possível a realização de uma atividade inovadora durante a Semana da Matemática. O evento teve como objetivo central engajar os alunos com a disciplina de uma maneira lúdica e didática. A programação foi cuidadosamente planejada para capturar o interesse dos estudantes e mostrar-lhes uma perspectiva mais dinâmica e atraente da matemática.

Nossa equipe, composta por quatro professores de matemática, decidiu incorporar uma oficina especial para a construção de poliedros de Platão, inspirada em uma atividade semelhante que havíamos presenciado na SEMAT – Semana da Matemática da UFSCar, em 2018.

Naquela ocasião, a Professora Doutora Erica Regina Filletti Nascimento havia conduzido uma oficina empregando origamis e canudos plásticos para construir poliedros. Percebemos que essa seria uma excelente estratégia para introduzir o conceito de figuras geométricas (tanto planas quanto espaciais) aos alunos do ensino médio e relacioná-las com o cotidiano.

Para a realização desta oficina, investimos recursos próprios na compra de aproximadamente 2000 canudos, destinados a um grupo de 60 alunos. Além disso, adquirimos fitas adesivas transparentes e preparamos uma apresentação em PowerPoint para ilustrar e contextualizar o conteúdo abordado. No início da oficina, organizamos os alunos em grupos e turmas, iniciando com uma revisão dos conceitos fundamentais, como o significado, a definição e os tipos de poliedros. Também foi realizada uma revisão de termos essenciais como 'face' e 'polígonos regulares'.

O engajamento dos alunos durante a oficina foi notável. Observar a matemática ganhando vida através da construção prática desses modelos geométricos foi uma experiência gratificante tanto para eles quanto para nós, educadores. A atividade não apenas facilitou a compreensão dos conceitos matemáticos abstratos, mas também demonstrou como a matemática pode ser aplicada de maneira prática e interessante, estabelecendo uma conexão direta com o mundo ao redor dos estudantes.

Essa experiência reafirmou a importância de métodos de ensino que transcendem o tradicional, incentivando a criatividade, o trabalho em equipe e uma abordagem mais hands-on na aprendizagem da matemática. Além disso, a atividade reforçou a relevância de integrar conceitos matemáticos com aplicações práticas e cotidianas, um aspecto fundamental para despertar e manter o interesse dos alunos pela disciplina.

2º Momento: Implementação de Aulas de Recuperação de Conteúdos

Durante o ano de 2023, enfrentamos o desafio de abordar a defasagem educacional acentuada pelas aulas online durante a pandemia da COVID-19. Esta lacuna no aprendizado foi exacerbada, em grande parte, pela falta de recursos adequados para os alunos acompanharem as aulas remotamente. Diante dessa situação, em conjunto com a gestão escolar, decidimos que os professores de Português e Matemática deveriam promover aulas de recuperação focadas em conteúdos dos anos anteriores.

Para compreender melhor o nível de conhecimento dos estudantes e identificar as áreas mais críticas, aplicamos uma avaliação diagnóstica. Os resultados foram reveladores, especialmente em relação aos alunos do sexto ano. Observamos que eles apresentavam uma compreensão limitada sobre figuras geométricas espaciais, como os tipos de prismas e pirâmides, conteúdos que deveriam ter sido assimilados nos anos anteriores.

Confrontados com essa realidade, iniciamos um planejamento cuidadoso para estruturar as aulas de recuperação. Nosso objetivo era não apenas revisar os conteúdos, mas também garantir que os alunos compreendessem e aplicassem esses conceitos de forma eficaz. Essa abordagem exigia a elaboração de estratégias pedagógicas inovadoras e adaptativas, que pudessem atender às diversas necessidades dos alunos e estimular seu interesse e engajamento.

Uma das estratégias adotadas foi a utilização de materiais concretos e atividades práticas, que permitiram aos alunos visualizar e manipular as figuras geométricas. Essa metodologia prática demonstrou ser eficaz no reforço do aprendizado, tornando os conceitos matemáticos mais acessíveis e menos abstratos para os estudantes. Além disso, a interação direta e a resolução de problemas em grupos promoveram a colaboração entre os alunos, facilitando a troca de ideias e a construção coletiva do conhecimento.

Essa experiência ressaltou a importância de abordagens pedagógicas flexíveis e adaptáveis, especialmente em situações de recuperação de aprendizagem. O foco na aplicação prática dos conceitos, juntamente com a atenção às necessidades individuais dos alunos, provou ser essencial para superar os desafios impostos pelo período de ensino remoto e pela defasagem resultante. Essas aulas de recuperação não apenas ajudaram a preencher lacunas no conhecimento dos alunos, mas também reforçaram o papel do professor como facilitador do aprendizado, capaz de moldar as estratégias de ensino de acordo com as circunstâncias e necessidades dos estudantes.

3º Momento: Utilização de Materiais Concretos para o Ensino de Poliedros

Na minha jornada como educadora na rede estadual, um dos momentos mais significativos foi a implementação de atividades práticas para ensinar conceitos geométricos aos alunos do sexto ano. Essa fase do processo educativo visava consolidar o entendimento dos estudantes sobre prismas, pirâmides e poliedros regulares, utilizando abordagens pedagógicas que favorecessem a aprendizagem ativa.

Para introduzir os conceitos de prismas e pirâmides, recorri aos canudos plásticos remanescentes da oficina realizada no ano anterior. Essa atividade prática permitiu aos alunos do sexto ano explorar a estrutura dessas figuras geométricas de maneira tangível. O uso do material concreto foi fundamental para que compreendessem melhor a composição e terminologia das figuras planas que formam os sólidos geométricos. A manipulação direta dos canudos e a construção das figuras permitiram uma experiência de aprendizado mais envolvente e efetiva.

Posteriormente, ainda em 2023 e com os mesmos alunos, avançamos para o estudo dos Poliedros Regulares e dos Poliedros de Platão, abordando também suas planificações. Esta etapa estava alinhada ao conteúdo previsto na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e no Currículo Paulista para o 6º ano. Mais uma vez, optei por utilizar materiais concretos para facilitar a compreensão dos estudantes. Levando os canudos plásticos para a sala de aula, os alunos puderam construir modelos físicos dos poliedros, o que proporcionou uma compreensão mais aprofundada sobre as propriedades e características dessas formas geométricas.

Essa abordagem prática mostrou-se extremamente valiosa, não apenas no reforço do conteúdo teórico, mas também no desenvolvimento de habilidades essenciais, como o pensamento crítico, a resolução de problemas e a habilidade espacial. A experiência de manipular e construir os poliedros permitiu que os alunos visualizassem e compreendessem os conceitos de forma mais concreta, transformando a aprendizagem de um processo passivo em uma experiência ativa e significativa.

Essas atividades evidenciaram a importância de estratégias didáticas inovadoras e adaptativas na educação matemática. A utilização de materiais concretos em sala de aula provou ser uma ferramenta eficaz para superar desafios de aprendizagem, particularmente em áreas que requerem uma compreensão espacial e conceitual profunda. Essas experiências reforçam o papel do educador como um facilitador no processo de aprendizado, capaz de adaptar métodos de ensino para atender às necessidades individuais dos alunos e promover um ambiente de aprendizagem mais dinâmico e interativo.

5.1 Elaboração dos Poliedros de Platão com Canudos Plásticos

Na jornada de ensinar geometria espacial na rede estadual, uma das atividades mais significativas foi a construção dos Poliedros de Platão usando canudos plásticos. Esse processo didático não apenas consolidou o conhecimento teórico dos alunos sobre poliedros, mas também proporcionou uma experiência prática enriquecedora.

No início da atividade, fizemos uma revisão sobre os Poliedros de Platão, abordando aspectos como a definição, identificação dos diferentes tipos e a natureza das faces de cada poliedro. Para facilitar o acesso à informação e apoiar a construção, projetamos na TV da sala de aula um resumo contendo os nomes, número de faces e tipo de polígono das faces de cada poliedro.

Os alunos foram divididos em grupos, e cada um teve a liberdade de escolher qual ou quais poliedros construiriam. Uma etapa crucial do processo foi o cálculo da quantidade de canudos necessários para a construção dos poliedros escolhidos, integrando assim a matemática prática à atividade. A figura 5.1 ilustra os canudos utilizados na atividade.

A construção dos Poliedros de Platão, ou de qualquer outro sólido geométrico, é um processo simples e altamente didático, podendo ser adaptado conforme as necessidades e realidades dos alunos e professores. Para as atividades descritas, utilizei canudos plásticos coloridos e flexíveis. É recomendado que, nesse momento, o professor faça uma revisão dos conteúdos abordados anteriormente, propondo questionamentos sobre conceitos como faces, vértices e arestas. É importante também discutir os nomes das figuras geométricas planas que

Figura 5.1. Canudos flexíveis coloridos.

Fonte: Elaboração da autora.

compõem os sólidos e quantos lados cada figura possui, facilitando para os alunos a associação de que cada lado da figura plana requer um canudo plástico.

Uma estratégia eficaz é organizar os alunos em duplas, permitindo que um auxilie o outro na montagem dos poliedros. Utilizamos a parte flexível do canudo como "vértice". Ao dobrar esse "vértice", dividimos o canudo em duas partes, a menor e a maior. Na construção, encaixamos a parte menor dentro da maior, o que requer dobrar a parte menor. As figuras formadas pelos canudos são então unidas usando fita adesiva transparente.

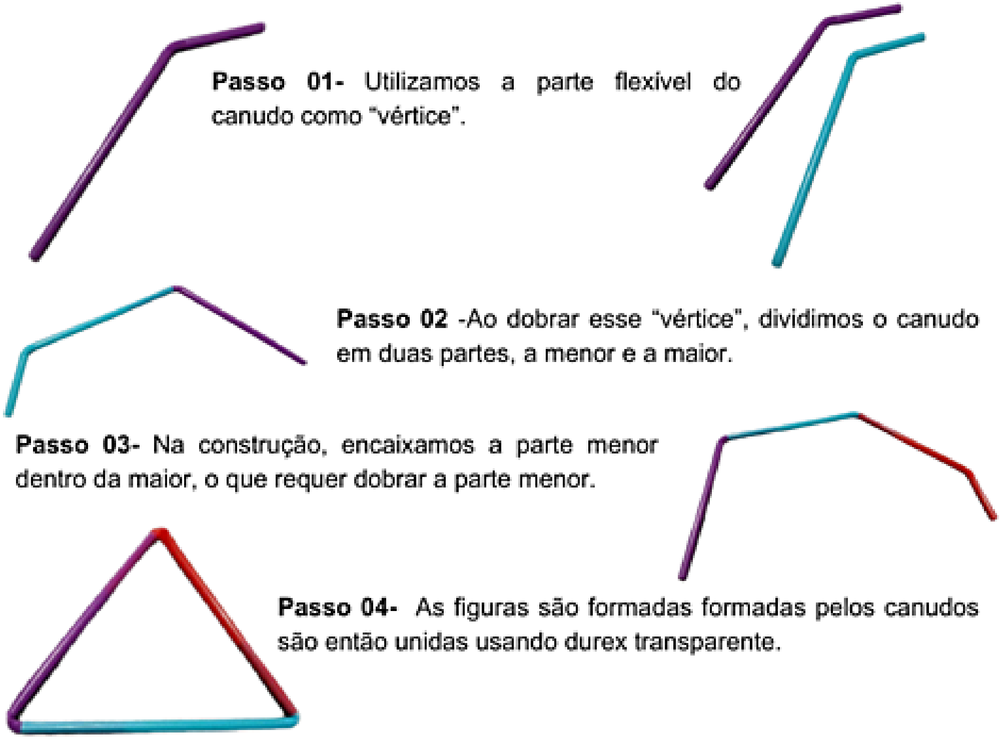
Na Figura 5.2, ilustramos a construção passo a passo de um modelo de uma face poligonal de um poliedro a ser construído.

Na figura 5.3, apresentamos um instantâneo da atividade dos alunos na construção dos modelos poliédricos que estavam sendo estudados.

Alguns dos poliedros de Platão construídos são ilustrados na Figura 5.4.

Na Tabela 5.1 temos um guia para separação adequada da quantidade de canudos para cada poliedro de Platão a ser construído. No Apêndice (capítulo 6, após bibliografia) deste trabalho são apresentadas tabelas como guias semelhantes para a construção do 13 poliedros arquimedianos, prismas e antiprismas.

Figura 5.2. Construção de uma face triangular de um poliedro em canudos.



Fonte: Elaboração da autora.

Tabela 5.1. Relação de canudos necessários para a construção de cada poliedro de Platão.

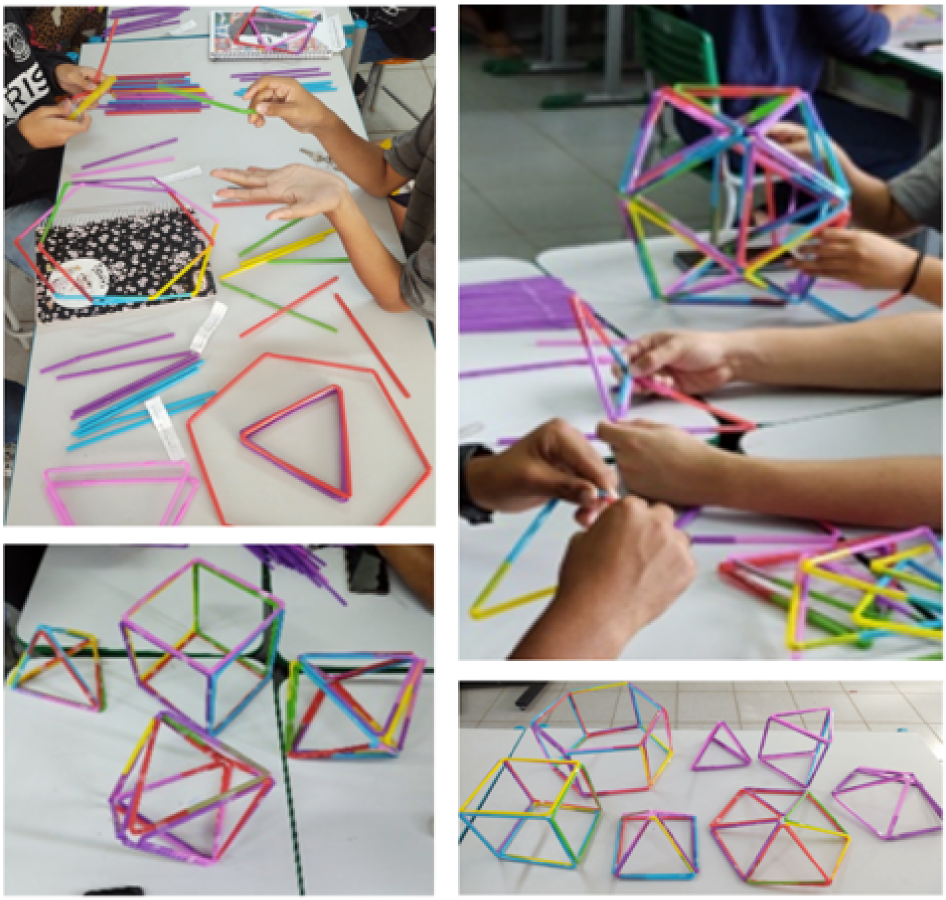
Poliedros de Platão		
Nome	Composição	Quantidade de canudos plásticos
Tetraedro	4 triângulos	12
Hexaedro	6 quadrados	24
Octaedro	8 triângulos	24
Icosaedro	20 triângulos	60
Dodecaedro	12 pentágonos	60

Fonte: Elaboração da autora.

Essa experiência com a montagem de Poliedros de Platão através de canudos plásticos provou ser uma ferramenta pedagógica valiosa. Não só reforçou o entendimento dos alunos sobre conceitos geométricos, mas também estimulou o desenvolvimento de habilidades práticas, como cálculo, planejamento e trabalho colaborativo.

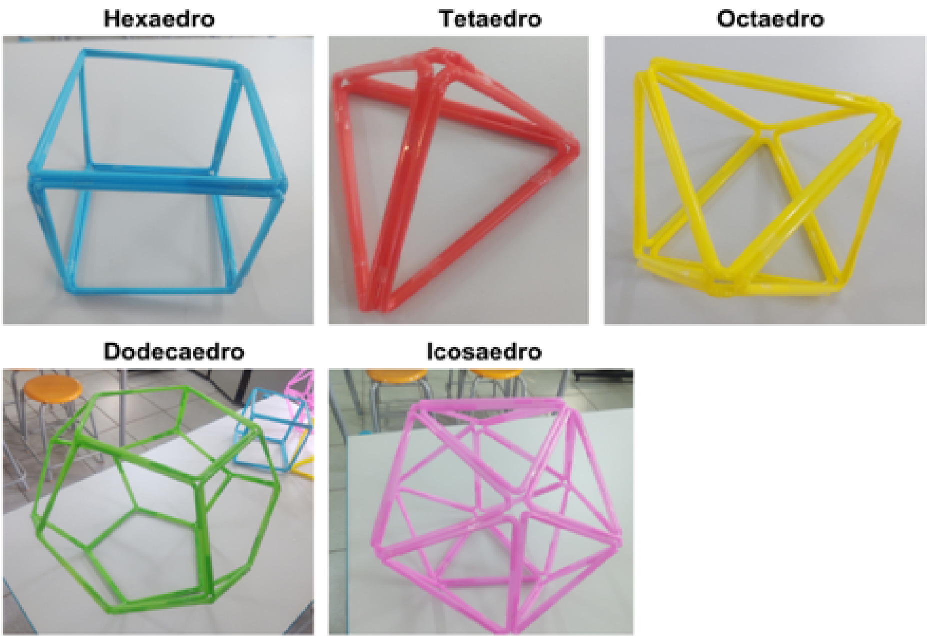
Ao final da atividade, os alunos foram capazes de visualizar e compreender de forma concreta os conceitos abstratos discutidos em sala de aula, evidenciando a eficácia de métodos de ensino interativos e práticos no aprendizado da matemática.

Figura 5.3. Alunos em atividade de construção de modelos dos poliedros.



Fonte: Elaboração da autora.

Figura 5.4. Modelos de poliedros de Platão construídos.



Fonte: Elaboração da autora.

Um instantâneo da turma de alunos participantes do projeto de construção de poliedros com canudos, reunidos com a professora autora, é apresentado na Figura 5.5.

Figura 5.5. Alunos e professores participantes na construção de modelos de Poliedros de Platão. Professora autora à direita na foto.

Fonte: Elaboração da autora.

6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho buscou explorar a importância e eficácia do uso de materiais concretos no ensino de poliedros regulares e não regulares, abordando desde as suas raízes históricas e filosóficas até as práticas contemporâneas de ensino. A pesquisa fundamentou-se em uma ampla revisão bibliográfica e foi enriquecida por relatos de experiências diretas na rede estadual de ensino. Essa abordagem multidimensional permitiu uma compreensão holística sobre o ensino de poliedros, destacando a relevância tanto de aspectos teóricos quanto práticos na educação matemática.

Ao longo dos capítulos, foi possível perceber que os poliedros não são apenas figuras geométricas de estudo dentro da matemática, mas também elementos que carregam significados históricos e filosóficos profundos. As contribuições de figuras históricas como Platão e Kepler revelaram a interconexão da matemática com outras áreas do conhecimento, mostrando que o estudo dos poliedros transcende a sua aplicação puramente geométrica.

A classificação dos poliedros, mostrou a complexidade e a diversidade dessas formas, que vão desde as mais simples e regulares até as mais complexas e irregulares. Essa compreensão aprofundada sobre os poliedros permitiu explorar estratégias didáticas mais eficazes no seu ensino, como foi discutido. A utilização de materiais concretos e manipuláveis demonstrou ser uma abordagem poderosa, promovendo um aprendizado mais significativo, envolvente e alinhado com as necessidades dos alunos no contexto contemporâneo, especialmente no desafiador cenário pós-pandêmico.

As experiências relatadas reforçaram a importância de abordagens pedagógicas inovadoras e adaptáveis. As atividades práticas realizadas com os alunos não só facilitaram a compreensão dos conceitos matemáticos, mas também ajudaram a desenvolver habilidades essenciais como o pensamento crítico, a resolução de problemas e a habilidade espacial. Essas experiências sublinharam o papel do educador como um facilitador no processo de aprendizagem, adaptando métodos de ensino às necessidades individuais dos alunos e promovendo um ambiente de aprendizagem mais interativo e dinâmico.

Contudo, este estudo demonstrou que a integração de materiais concretos no ensino de poliedros oferece uma via efetiva para aprimorar o aprendizado matemático. Esta abordagem não apenas facilita a compreensão dos conceitos geométricos, mas também contribui para o desenvolvimento integral dos alunos, preparando-os não só para o sucesso acadêmico, mas também para a aplicação prática do conhecimento matemático em suas vidas diárias. A necessidade de inovação pedagógica e a flexibilidade no ensino de matemática são imperativas, especialmente em um mundo que continua a evoluir rapidamente. O equilíbrio entre teoria e prática, entre o concreto e o abstrato, deve ser uma meta constante na jornada educacional.

Referências

BARISON, M. B. Poliedros irregulares em geometria descritiva. **Geométrica**, v. 2, n. 21a, 2007. Citado 4 vezes nas páginas 3, 11, 12 e 13.

CARVALHO, B. de. **Desenho geométrico**. Rio de Janeiro: Ao livro Técnico, 1982. 332 p. Citado na página 8.

CASTRUCCI, B. **Fundamentos de geometria: estudo axiomático do plano euclidiano**. São Paulo: Livros Técnicos e Científicos, 1978. 195 p. Citado na página 8.

COXETER, H. S. M. **Regular Polytopes**. Londres: Methuen & Co. Ltd, 1948. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 7.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações**. 1. ed. São Paulo: Editora Ática, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 3, 7, 9 e 10.

DANTE, L. R. **Teláris matemática, 6º ano: ensino fundamental, anos finais**. 3. ed. São Paulo: Editora Ática, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 4, 5 e 9.

DIAS, C. C. et al. **Geometria espacial: módulo II**. 3. ed. Cuiabá: Central de Texto, 2013. Citado 7 vezes nas páginas 3, 4, 5, 9, 10, 11 e 30.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar 9: Geometria Plana**. São Paulo: Atual Editora, 1993. 326 p. Citado na página 8.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar 10: Geometria Espacial**. São Paulo: Atual Editora, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 3, 8 e 10.

EVES, H. **Introdução à história da matemática; trad. Hygino H. Domingues**. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011. 326 p. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 10.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. Ângela. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da matemática. **Boletim da SBEM**, SBEM, v. 4, n. 7, 1990. Citado na página 15.

GARCIA, A. C. de A.; CASTILHO, J. C. A. **Matemática sem mistérios – geometria plana e espacial**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2006. Citado 4 vezes nas páginas 3, 6, 8 e 10.

IEZZI, G. et al. **Matemática: ciência e aplicações**. São Paulo: Editora Atual, 2010. v. 2. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 7.

KALEFF, A. M. M. R. R.; MONTEIRO, D.; GARCIA, S. dos S. **Quebra-cabeças geométricos e formas planas**. Niterói: EdUFF, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 14.

LIMA, E. L. et al. **Matemática do Ensino Médio, volume 2**. Rio de Janeiro: SBM, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 3, 7 e 10.

LORENZATO, S. **Educação infantil e percepção matemática**. 2. ed. Campinas: Autores Associados, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 3, 14 e 15.

LORENZATO, S. **Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis**. 2. ed. Campinas: Autores Associados, 2008. 3-38 p. Citado na página 15.

MARQUES, T. M. Sólidos geométricos por meio de material manipulável: um recurso para o ensino de geometria. **Revista Educação, Escola e Sociedade**, Montes Claros, v. 11, n. 13, julho-dezembro 2018. ISSN 2540-4002. Citado 3 vezes nas páginas 3, 9 e 15.

MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; JORGE, M. **Geometria 1**. Rio de Janeiro: Editora Francisco Alves, 1973. 138 p. Citado na página 8.

MUNARI, A. **Jean Piaget / Alberto Munari, trad. e org. Daniele Saheb**. Campinas: Editora Massangana, 2010. 156 p. ISBN 978-85-7019-546-3. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 2.

POHL, V. Visualizando o espaço tridimensional pela construção de poliedros. In: LINDQUIST, M.; SHULTE, A. (Ed.). **Aprendendo e ensinando geometria, trad. Hygino H. Domingues**. São Paulo: Editora Atual, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 15.

PONTE, R. et al. **Revisiting manipulatives in the learning of geometric figures**. 2023. Disponível em: <https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/feduc.2023.1217680/full>. Citado na página 1.

QUEIROZ, T. F. de. **Uso do material concreto nas aulas de geometria espacial na 3ª série do ensino médio**. Caicó, RN: [s.n.], 2022. Disponível em: <https://repositorio.ufrn.br/handle/123456789/49696>. Citado na página iv.

TURRIONI, A. M. S. **O Laboratório de Educação Matemática na formação inicial de professores**. Rio Claro: [s.n.], 2004. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/91124>. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 15.

VELOSO, E.; VIANA, J. P. **Geometria: temas actuais**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 9.

APÊNDICE

Relação de canudos necessários para construção de poliedros

Na Tabela 1, para cada poliedro listado, a segunda coluna refere-se à configuração cíclica de polígonos em torno de cada vértice, conforme descrição encontrada em Dias et al. (2013). Por exemplo, a configuração 3,6,6 descreve que, no Tetraedro Truncado, há três polígonos em torno de cada vértice, sendo eles, em ordem cíclica, um triângulo, um hexágono e um outro hexágono. A configuração 3,4,3,4, do Cuboctaedro, descreve que há quatro polígonos em torno de cada vértice, sendo eles, em ordem cíclica, um triângulo, um quadrado, outro triângulo e outro quadrado.

Tabela 1. Lista de poliedros arquimedianos e canudos necessários para a construção de cada um dos poliedros.

Poliedros Arquimedianos			
Nome	Configuração	Composição (em termos de faces)	Quantidade de canudos plásticos
Tetraedro Truncado	3,6,6	4 triângulos equiláteros e 4 hexágonos regulares	36
Cubo Truncado	3,8,8	8 triângulos equiláteros e 6 octógonos regulares	72
Cuboctaedro	3,4,3,4	8 triângulos equiláteros 6 quadrados	48
Octaedro Truncado	3,4,3,4	8 pentágonos e 6 quadrados	64
Cuboctaedro Truncado	4,6,8	12 quadrados, 6 octógonos regulares e 8 hexágonos regulares	144
Cubo Snub	3,3,3,3,4	6 quadrados e 32 triângulos equiláteros	120
Dodecaedro Truncado	3,10,10	20 triângulos equiláteros e 12 decágonos regulares	180
Icosaedro Truncado	5,6,6	12 pentágonos regulares e 20 hexágonos regulares	180
Icosidodecaedro	3,5,3,5	20 triângulos equiláteros e 12 pentágonos regulares	120
Rombicosidodecaedro	3,4,4,5	20 triângulos equiláteros 30 quadrados e 12 pentágonos regulares	240
Icosidodecaedro Truncado	4,6,10	30 quadrados, 20 hexágonos regulares e 12 decágonos regulares	360
Dodecaedro Snub	3,3,3,3,5	80 triângulos equiláteros 12 pentágonos regulares	300
Rombicuboctaedro	3,4,4,4	18 quadrados e 8 triângulos equiláteros	96

Tabela 2. Lista de poliedros de Platão e canudos necessários para a construção de cada um dos poliedros.

Poliedros de Platão			
Nome	Configuração	Composição	Quantidade de canudos plásticos
Tetraedro	3,3,3	4 triângulos	12
Hexaedro	4,4,4	6 quadrados	24
Octaedro	3,3,3,3	8 triângulos	24
Icosaedro	3,3,3,3,3	20 triângulos	60
Dodecaedro	5,5,5	12 pentágonos	60

Tabela 3. Lista de prismas semirregulares (isto é, com faces sendo polígonos regulares) e canudos necessários para a construção de cada um.

Prismas			
Nome	Configuração	Composição	Quantidade de canudos plásticos
Triangular	3,4,4	2 triângulos e 3 quadrados	18
Quadrangular	4,4,4	6 quadrados	24
Pentagonal	5,4,4	2 pentágonos e 5 quadrados	30
Hexagonal	6,4,4	2 hexágonos e 6 quadrados	36
Octogonal	8,4,4	2 octógonos e 8 quadrados	48
Decagonal	10,4,4	2 decágonos e 10 quadrados	60

Tabela 4. Lista de antiprismas semirregulares (isto é, com faces sendo polígonos regulares) e canudos necessários para a construção de cada um.

Antiprismas			
Nome	Configuração	Composição	Quantidade de canudos plásticos
Quadrado	4,3,3,3	2 quadrados e 8 triângulos	32
Pentagonal	5,3,3,3	2 pentágonos e 10 triângulos	40
Hexagonal	6,3,3,3	2 hexágonos e 12 triângulos	48
Octogonal	8,3,3,3	2 octógonos e 16 triângulos	64
Decagonal	10,3,3,3	2 decágonos e 20 triângulos	80