UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CAMPUS SOROCABA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA

PRISCILA DANIELE LUCIANO

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: UMA JORNADA AOS NÚMEROS COMPLEXOS

SOROCABA

2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CAMPUS SOROCABA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA

PRISCILA DANIELE LUCIANO

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: UMA JORNADA AOS NÚMEROS COMPLEXOS

Monografia apresentada ao Departamento de Física, Química e Matemática da Universidade Federal de São Carlos – Campus Sorocaba, para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dra. Graciele P. Silveira.

SOROCABA
2024

Luciano, Priscila Daniele

História da Matemática: Uma jornada aos Números Complexos / Priscila Daniele Luciano -- 2024.
68f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba
Orientador (a): Prof.ª Dra. Graciele Paraguaia Silveira
Banca Examinadora: Profº.Dr.Sadao Massago, Profº. Dr. Raphael de Oliveira Garcia
Bibliografia

1. Matemática. 2. História. 3. Números Complexos. I. Luciano, Priscila Daniele. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Maria Aparecida de Lourdes Mariano - CRB/8 6979

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DE SOROCABA - CCML-So/CCTS

Rod. João Leme dos Santos km 110 - SP-264, s/n - Bairro Itinga, Sorocaba/SP, CEP 18052-780

Telefone: (15) 32298874 - http://www.ufscar.br

DP-TCC-FA nº 5/2024/CCML-So/CCTS

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

PRISCILA DANIELE LUCIANO

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: UMA JORNADA AOS NÚMEROS COMPLEXOS

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus Sorocaba

Sorocaba, 16 de fevereiro de 2024

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	**Nome Completo**
Orientadora	Profa. Dra. Graciele P. Silveira
Membro da Banca 1	Prof. Dr. Sadao Massago
Membro da Banca 2	Prof. Dr. Raphael de Oliveira Garcia gov.br Documento assinado digitalmente RAPHAEL DE OLIVEIRA GARCIA Data: 16/02/2024 17:30:06-0300 Verifique em https://validar.iti.gov.br

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Graciele Paraguaia Silveira**, **Docente**, em 16/02/2024, às 16:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6°, § 1°, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Sadao Massago**, **Docente**, em 16/02/2024, às 16:27, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6°, § 1°, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Referência: Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo nº 23112.040151/2022-52 SEI nº 1356081

Modelo de Documento: Grad: Defesa TCC: Folha Aprovação, versão de 02/Agosto/2019

AGRADECIMENTOS

Agradeço a toda minha família pois sem eles não teria chegado até aqui. Maria Ester Luciano (in memoriam) a minha joia preciosa que tanto me amou e me incentivou a não desistir, Mãe eu te amo. A meu pai Daniel Luciano meu tesouro, obrigado!

Ao meu esposo Gabriel Pedroso Barbosa, obrigada meu amor sem sua paciência e carinho eu teria desistido. A Minha sogra “Caliza”, aos meus irmãos e amigos, em especial a Luciana que sempre esteve comigo.

Aos meus mestres que caminhamos juntos todos esses anos, passamos por tantas coisas, vocês são iluminados. Em especial a minha orientadora Graciele P. Silveira, obrigada pelos ensinamentos e amizade!

E por último, mas não menos importante, a Deus pai criador que sem ele, nada disso faria sentido. Porque dele, por ele, para ele são todas as coisas! Obrigada, gratidão!

RESUMO

A História da Matemática é um campo de conhecimento de extrema relevância e apresenta uma riqueza que varia entre grandes descobertas cientificas e as contribuições culturais entre o oriente e o Ocidente. Muitas vezes esquecida no cotidiano escolar, pode servir de inspiração e motivação no processo de ensino aprendizagem de diferentes conteúdos. O presente Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) teve como propósito apresentar um pouco da jornada percorrida, desde o início da civilização até a descoberta dos números complexos (imaginários), compreendendo e resgatando a importância dos saberes matemáticos e seus pensadores.

Palavras-Chave: Matemática, História, Números Complexos.

ABSTRACT

The History of Mathematics is an extremely relevant field of knowledge and presents a wealth that varies between great scientific discoveries and cultural contributions between East and West. Often forgotten in everyday school life, it can serve as inspiration and motivation in the teaching-learning process of different content. The purpose of this Course Completion Work (TCC) was to present a little of the journey taken, from the beginning of civilization to the discovery of complex (imaginary) numbers, understanding and rescuing the importance of mathematical knowledge and its thinkers.

Keywords: Mathematics, History, Complex Numbers.

LISTAS DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A história é a investigação das realizações humanas no decorrer do tempo, para que assim haja compreensão de que o presente é fruto das ações passadas que geraram transformações na sociedade.

A matemática é uma entre milhares de realizações humanas no tempo, entretanto desempenha, ao lado de outras ciências, como a gramática – ou a escrita propriamente dita – um fator crucial na construção cultural de determinados povos que deram origem a parte da cultura ocidental e oriental.

Verificando os povos antigos, como os egípcios e mesopotâmicos, é perceptível que sem o conhecimento matemático esses não teriam tido êxito nas transformações culturais promovidas pelas construções de casas, palácios, templos e estradas. Para esses povos o aprofundamento do conhecimento era levado a sério, de modo que se debruçavam a compreender os cálculos mais simples e partiam para descobertas com o uso das equações, proporções e geometria.

Todas as descobertas e teorias ou teoremas, concebidos pelos povos do Crescente Fértil foram aprendidos e ensinados categoricamente pelos gregos oriundos da Ásia Menor, espalhando tais conhecimentos para quase todas as colônias gregas espalhadas pelo Mar Mediterrâneo.

Além de ensinar o que aprenderam, ainda deram certa contribuição ao estudo da matemática, como por exemplo, pensar a matemática sem a limitação de uma aplicação prática. Para os gregos a álgebra e a geometria não serviam apenas para uso nas construções ou medições territoriais, mas também para compreender formas infinitas de cálculos que a aplicação prática não poderia materializar.

Contribui também a matemática realizadas pelos árabes que sob influência da matemática Hindu aprofundaram os estudos em equações de 1º e 2º grau e de certa forma criaram a possibilidade de resolução de equação de 3º grau (IFRAH, 1997).

Sobre essa questão se encontra a parte central dessa pesquisa, pois através do conhecimento histórico da matemática se verificará como se deu a construção das teorias que embasaram a busca dos matemáticos na descoberta dos números complexos e como tal conjunto numérico foi usado para o desenvolvimento da matemática até os dias atuais.

Este trabalho possui como objetivos:

- Estudar as origens da matemática a partir das evidências históricas dos povos mesopotâmicos e do Egito Antigo.
- Demonstrar a contribuição das mais diversas culturas no desenvolvimento da matemática;
- Verificar historicamente a descoberta dos números complexos e a contribuição entre os conhecimentos dos povos árabes e os matemáticos do Renascimento na Europa, especificamente na Itália do século XVI.
- Analisar o uso dos números complexos e as descobertas realizadas após o Renascimento com os matemáticos de Euler (1707-1783), Gauss (1777-1855) e Cauchy(1789-1857)

O estudo das origens da matemática será evidenciado no Capítulo 2, com a apresentação da cultura egípcia de escrita numérica.

No Capítulo 3, dando seguimento ao estudo dos primórdios estão elencados os povos mesopotâmicos que contribuíram significativamente para a escrita numérica, cálculo e geometria.

O estudo do Capítulo 4 dispõe sobre a disseminação matemática no ocidente (especificamente nas regiões banhadas pelos mares Mediterrâneo, Jônico e Egeu) e tem como base os pensadores gregos Pitágoras de Samos, Tales de Mileto, Platão e Euclides de Alexandria, que além de propagarem os estudos de cálculo e geometria dos egípcios e mesopotâmicos nas colônias gregas ocidentais ainda contribuíram criando métodos científicos de estudo e usando a matemática para explicar teorias que tendiam ao imaginário, ainda que de maneira embrionária.

As contribuições matemáticas dos árabes e hindus estão elencadas no Capítulo 5, tratando dos avanços da álgebra, bem como do uso dos algarismos indo-arábicos que permitiram realizar os cálculos com maior rapidez e com menor complexidade que os algarismos romanos.

A descoberta dos números complexos a partir da resolução das equações de 3º grau no período renascentista europeu e seu desenvolvimento estão concentradas no Capítulo 6.

No último capítulo, o Capítulo 7, será tratado o estudo dos números complexos após o Renascimento, em suas especificidades a partir das descobertas de Euler (1707-1783), Gauss (1777-1855) e Cauchy(1789-1857), segundo SILVA (2011).

2. EGITO ANTIGO: AS PRIMEIRAS MANIFESTAÇÕES MATEMÁTICAS

O Egito foi formado pela mistura de diversos povos, a população egípcia era dividida em várias comunidades, essas funcionavam como se fossem pequenos Estados independentes. Por volta de 3500 A.C. as comunidades se uniram passando a formar dois reinos, posteriormente, em 3200 A.C., os dois reinos foram unificados por Menés, rei do alto Egito, que se tornou o primeiro faraó, criando a primeira dinastia que deu origem ao Estado egípcio. Assim começou um longo período de esplendor da civilização egípcia, também conhecida como a era dos grandes faraós. A civilização egípcia foi extremamente sofisticada e suas marcas estão entre nós até a atualidade (CARDOSO, 1982).

Os registros de escrita feitas pelo povo egípcio, foram encontrados antes do quarto milênio A.C, pelos vales da Mesopotâmia e no rio Nilo. Os registros pictográficos (desenho de imagens e símbolos numéricos) eram confeccionados em tabletas de barro escritas por estiletes, depois eram "queimadas em fornos ou ao sol". Esse tipo de escrita ficou conhecida como escrita cuneiforme (latim cuneus, cunha) e por passar por passar por esse processo de secagem tinham grande durabilidade.

Esses registros começaram a ser traduzidos por meio de um processo significativo de leitura promovido por Jean-François Champollion no século XVIII D.C. O novo processo de tradução se deu pela tradução dos escritos da Pedra de Roseta, encontrada pelos franceses, quando realizaram uma incursão no Egito. O texto da Pedra de Roseta se tratava de um decreto legislativo feito pela Dinastia Ptolemaica (século II e I A.C) escrito em demótico, grego e hieróglifos. Depois da tradução desse texto, outros puderam ser traduzidos usando o mesmo método de comparação com outras formas de escritas antigas (AZEVEDO; GEIGER, 2019).

Em 1799 a escrita egípcia foi decifrada apresentando símbolos na escala de dez, números grandes foram representados em pedras, madeira e outros materiais datam cerca de 5.000 anos atrás. As escritas egípcias provam as habilidades dos egípcios, os quais eram precisos em contar e medir, hábeis construtores que deixaram um legado para todos os povos (IFRAH,1997, pág.332):

> Na realidade, na alvorada do III milênio a.C, os egípcios encontravam-se também em condições iniciais psicológicas, sociais, econômicas semelhantes, perfeitamente favoráveis à invenção dos algarismos e da escrita.

> E, de fato, a civilização egípcia já estava muito avançada, fortemente urbanizada e em plena expansão nem antes de 3.000 A.C. Por razões, ditadas notadamente por necessidades de ordem administrativa e comercial, ela tomou consciência pouco a pouco dos limites das possibilidades do “homem-memória” e do desalento de sua cultura exclusivamente oral. Experimentando cada vez mais a necessidade de memorizar o pensamento e fala, bem como a necessidade de guardar duradouramente a lembrança de suas enumerações e inventários, compreendeu então que uma organização do trabalho inteiramente diversa se impunha. E como a necessidade cria órgão, chegou a superar a dificuldade criando uma escrita e uma notação numérica.

Figura 1 - Registro de escrita pictográfica.

Fonte: MOSER (2015)

2.1 A ESCRITA HIEROGLÍFICA EGÍPICIA

Diante da necessidade de manter sua cultura e estrutura social viva no tempo os egípicios, assim como outros povos do Crescente Fértil, desenvolveram uma forma de escrita muito criativa e alinhada a sua religião e meio ambiente: os hieróglifos.

Esse sistema fundamental de escrita é comumente encontrado em templos, palácios, obeliscos, tumbas, estelas funerárias, papiros, placas de cerâmica ou placas de calcário.

Os hieróglifos poderiam ser escritos em várias direções: da esquerda para direita, da direita para a esquerda, horizontal ou verticalmente. Nas viriações são encontradas em todos os tipos de hiróglifos, não existindo um padrão para o uso. Todos eram utilizados em todas as variações possiveis:

Figura 2 - Hieróglifos (horizontal)

Fonte: IFRAH (1997)

Ifrah (1997) traz uma aplicação mais concisa sobre a escrita egípcia, seu significado e sua importância:

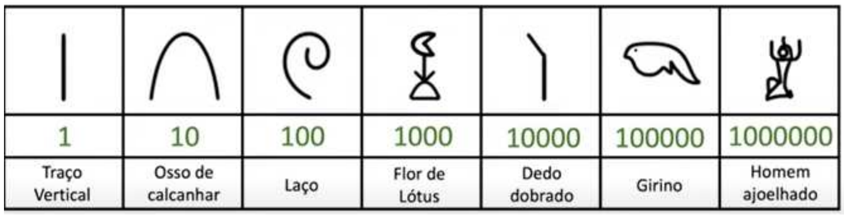
> Os hieróglifos podiam ser vistos como imagens-sinais com sentido completo: tinham por função significar o que representam visualmente. É o que se chama a pictografia: a escrita egípcia serviu-se disso correntemente em todas as épocas. Mas os hieróglifos, vistos por este ângulo, não se limitavam a sua significação visual completa: tinham um valor pictural mais extenso e podiam representar ideias vizinhas e ações. (IFRAH,1997, pág.333).

Os numerais (Figura 3) também eram escritos no formato dos hieróglifos que formalizavam uma maneira de contagem antiga muito conhecida nas terras do Nilo. O método consistia apenas no empilhamento ou alinhamento de matérias que representassem quantia necessária para contagem.

Os materiais para essa contagem – conchas, pedras, bolinhas, bastonetes, anéis, discos - eram diferentes pois cada material representava uma ordem nesse sistema numérico. Aspecto importante desse sistema é sua organização que desde seu início contava com representação das unidades até a contagem que ultrapassava o milhão.

Aponta-se que para cada representação existia uma simbologia diferente, por exemplo, as unidades eram representadas por traço vertical, as dezenas por osso de calcanhar , as centenas por uma corda enrolada , o milhar pela flor de Lótus, a dezena de mil por um dedo levantado levemente inclinado, a centena de mil por uma rã ou girino e um milhão ou mais por um homem ajoelhado com as mãos levantadas ao céu (talvez representando um deus).

Figura 3 – Algarismos escritos em hieróglifos



Fonte: Cesar (2023)

2.2 O PAPIRO MATEMÁTICO DE RHIND

O Papiro de Rhind, é um documento que contém a solução de 85 problemas de aritmética, frações, cálculos de área, volumes, progressões, repartições proporcionais, regra de três simples, equações lineares, trigonometria básica, e geometria. O documento foi adquirido por Alexander Henry Rhind em 1858 D.C., na cidade de Luxor, Egito. Mas se trata de uma cópia de um papiro mais antigo, feito pelo escriba egípcio Amósis em 1650 A.C.

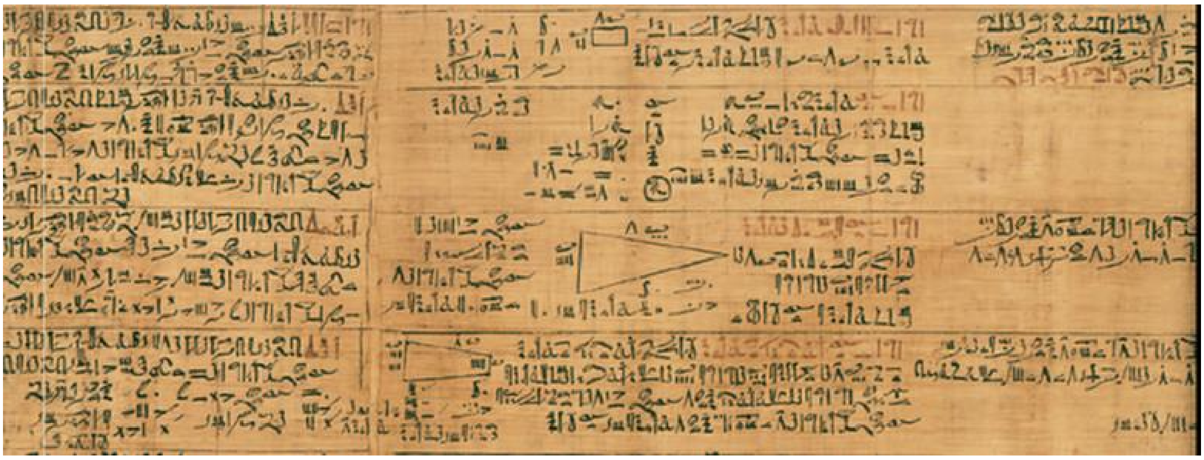
No Papiro de Rhind, vemos a linguagem matemática sendo aprimorada, alguns símbolos deixam de existir e passam a ser simplificados, o papiro data de cerca de três milênios e meio atrás, e suas contribuições à numeração é um dos fatores que faz do sistema eficaz em uso até hoje (BOYER, 1999)

No documento temos registros do uso de frações, apesar dos homens na Idade da Pedra não usarem os conhecimentos de frações, mas com advento de culturas mais avançadas na Idade do Bronze parece ter surgido a necessidade do conceito de frações, os registros mostram nas escritas hieroglíficas notações para fração unitárias, soma de frações e decomposição de fração.

A operação fundamental no Egito era a adição, as operações de multiplicação e divisão eram efetuadas por sucessivas “duplações”. Por exemplo uma multiplicação de 69 por 19, seria feita somando-o para obter 138, depois somando ele mesmo para obter 276 continua o processo até obter 1.104 que é 16 vezes 69, logo o resultado da multiplicação (“duplação”) de 19 é 1.104 + 138 + 69 isto é 1.311, eventualmente usavam a multiplicação por dez.

Para divisão, invertia o processo de duplicação, e o divisor é dobrado sucessivamente, os egípcios tinham alcançado grande virtuosidade na aplicação no processo de duplação e no conceito de fração unitária é evidenciada pelos cálculos dos problemas do Papiro de Rhind (BOYER, 1999).

Figura 4 – Papiro matemático de Rhind Ahmes



Fonte: TODÃO (2017)

Os problemas algébricos apresentados no papiro mostram características de um processo conhecido como “falsa posição”, onde um valor falso é assumido por uma incógnita “aha” e as operações são efetuadas, o resultado é comparado proporcionalmente até chegar na resposta correta. Problemas geométricos surgiram após as inundações do rio Nilo com a necessidade de demarcar a terra, então noções de perímetro e área de círculos e quadrados de certa forma, foram utilizadas na matemática egípcia, não há registros de teorema formal matemático, mas as aplicações nos problemas do cotidiano, comprovam as habilidades matemáticas da época.

3. MESOPOTÂMIA: MATEMÁTICA ENTRE RIOS

A Mesopotâmia era localizada entre dois rios Tigre e Eufrates, essa região foi bastante disputada ao longo da história pela sua localização cercada por montanhas, pelo Golfo Pérsico e pelo deserto da Síria. Os sumérios foram os primeiros povos a habitar nessa região, por volta de 3500 A.C., responsáveis pela invenção da escrita, fundaram as primeiras cidades onde construíram palácios e templos. Os sumérios eram um povo aplicado inventaram a escrita cuneiforme realizada com instrumentos em formato de colher ou concha com os quais eles marcavam a argila. Há registros de mais de 2000 símbolos (LEICK, 2003).

Figura 5 – Escrita cuneiforme, de origem Suméria.

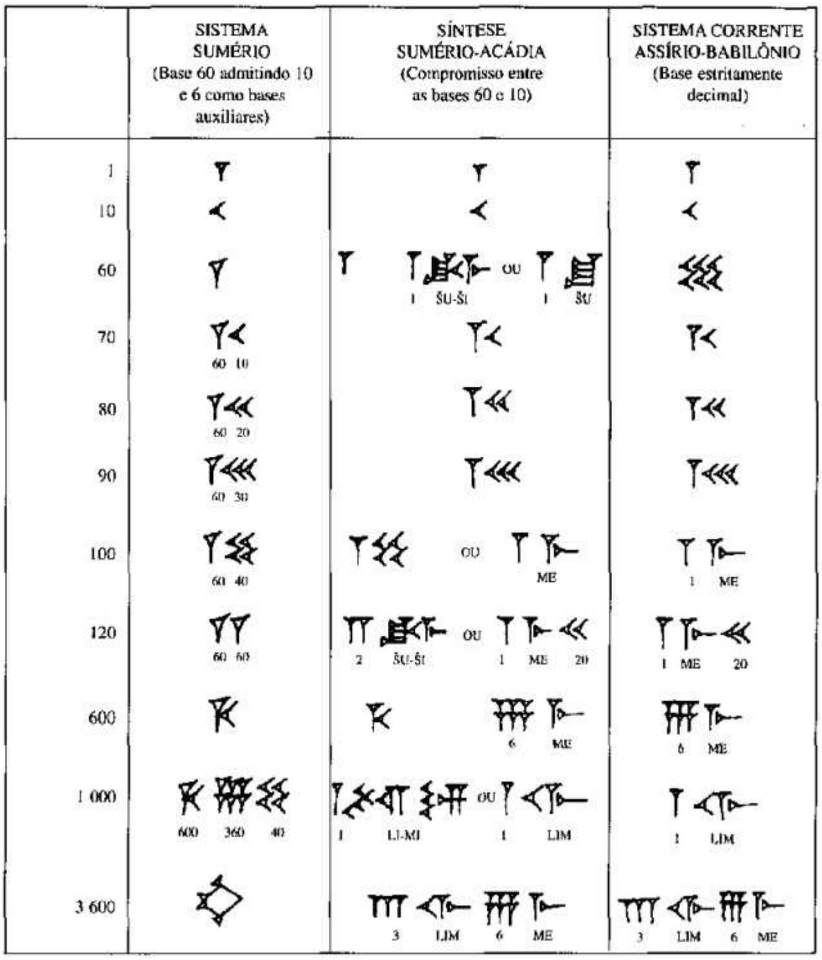
Fonte: LINS (2019)

A escrita cuneiforme contribuiu para economia, eles também fizeram os primeiros livros como o de química que tratava de questões do universo e os de registros de cálculos matemáticos, essa linguagem escrita foi adotada pelos povos seguintes.

3.1 OS SUMÉRIOS E O SISTEMA SEXAGESIMAL

Os sumérios fundaram grandes cidades como Ur e Uruk 3100 A.C. a 3000 A.C., porém as riquezas dos povos sumérios, deram origens as primeiras guerras por volta de 2500 A.C. a civilização começaram a ruir e os foram dominados pelos acádios fundando o primeiro império comandado por Sargão, assim se tornaram herdeiros de diversas invenções dos sumérios, principalmente da escrita e da língua. A região do Tigre e Eufrates foi palco de intensas disputas e batalhas devido a fertilidade do solo gerada pelas cheias dos dois rios que cortavam a região. Cada povo que dominou a Mesopotâmia deixou marcas em sua cultura, entretanto a escrita cuneiforme foi usada por todos esses povos e logicamente sofreu algumas mudanças, mas nada que a descaracterizasse a ponto de ser extinta por esses povos.

Figura 6 – A evolução da numeração popular mesopotâmica.



Fonte: IFRAH (1997)

Destaca-se a forma de contagem sexagesimal (tendo como base para escrita e contagem os números 10 e 60), com uma escrita cuneiforme, usada primeiramente pelos povos Sumérios e depois pelos povos Acádios, Assírios, Babilônicos, Caldeus e Medo-Persas. Essa forma de escrita e de contagem perdurou por 3000 anos aproximadamente.

De maneira superior a matemática egípcia, a matemática mesopotâmica conseguiu resolver cálculos complexos ligados a equações e a geometria muito antes dos pensadores gregos Tales de Mileto e Pitágoras de Samos.

Uma equação quadrática, por exemplo, era realizada facilmente, pois já tinham desenvolvido operações algébricas flexíveis que permitiam a resolução de tais exercícios, usando de adição, multiplicação e frações (BOYER, 1999, pág.23):

> A redução babilônia de uma equação quadrática da forma $ax^2+bx=c$ à forma normal $y^2+by=ac$ pela substituição $y=ax$ mostra o grau extraordinário de flexibilidade da álgebra mesopotâmica. Essa facilidade, junto a ideia de valor posicional, explica em grande parte a superioridade dos babilônios em matemática. Não há registro no Egito de resolução de uma equação cúbica, mas entre os babilônios há muitos exemplos.

Na geometria aponta-se o teorema que ficou conhecido como Teorema de Pitágoras, mas na verdade trata-se de um cálculo largamente usado pelos babilônicos.

E ainda superavam, pois seu conhecimento não se limitava ao caso do triangulo retângulo isósceles, antes traziam mais informações para resolução do problema matemático (BOYER, 1999).

A concepção de que um ângulo inscrito em um semicírculo forma um ângulo reto já era utilizada na Mesopotâmia há mais de mil anos antes desse teorema ter sido estudado por Tales de Mileto.

Compreendiam, assim como os egípcios que a altura do triângulo isósceles bissecta sua base, bem como sabiam que o comprimento de uma corda num círculo de raio conhecido, permitia encontrar a apótema.

Esses problemas de geometria eram tratados pelo mesopotâmicos como aritmética aplicada, contudo sua matemática era muito avançada para a época, não importando a nomenclatura utilizada.

4. GRÉCIA: A MATEMÁTICA NO OCIDENTE

A partir do oitavo século A.C. mudanças como a utilização do ferro, substituindo o bronze, ocasionaram o florescimento de várias culturas nas regiões banhadas pelo Mar Mediterrâneo, principalmente aquelas que tinham proximidade com as culturas egípcias e mesopotâmicas. Seja tal proximidade pela cultura ou geográfica, fato é que tais povos se destacariam no futuro como potências políticas e militares, como é visto no caso dos gregos.

A influência do oriente sobre a cultura grega já estava presente antes mesmo do oitavo século A.C., como percebe-se em seu alfabeto, que aparentemente, foi introduzido por meio trocas culturais com os povos fenícios e sofreu adaptações ao longo dos séculos.

Tais trocas culturais não se restringiam apenas aos fenícios, os mercadores que circunvizinhavam o Mar Mediterrâneo – bem como o Mar Jônio e o Egeu – traziam negociantes e estudiosos para o Egito e Babilônia, a fim de aprender e contribuir para o desenvolvimento de todas as formas de conhecimento, como dispõe Boyer (1999):

> Supõe-se que alguns rudimentos de cálculos viajaram pelas mesmas rotas, mas as partes mais exóticas da matemática sacerdotal podem ter permanecido restritas a seus domínios de origem. Logo, porém, mercadores, negociantes, e estudiosos gregos se dirigiam aos centros de cultura do Egito e Babilônia. Ali entraram em contato com a matemática pré-helênica, mas não estavam dispostos a apenas receber antigas tradições, e se apropriaram tão completamente do assunto que logo ele tomou forma drasticamente diferente. (BOYER,1999, pág.30).

Entre 800 A.C. e 600 A.C várias colônias gregas são fundadas em territórios esparsos dalém das terras isoladas pelos Mares Jônio e Egeu: no sul da Europa, norte da África e na Ásia Menor. Essas colônias são constituídas e carregam a cultura grega (pré-helênica e Helênica) tendo exímia contribuição para o desenvolvimento da matemática grega.

Nesse mesmo período a literatura grega (como as obras de Hesíodo e Homero) é desenvolvida e ganha notoriedade, pois as tradições literárias têm maior facilidade de transmissão oral e disseminação, dificultando sua perda ao longo do tempo.

Contudo, é na região da Ásia Menor, às margens do Egeu, que a matemática começa a ser desenvolvida. Entende-se que as colônias dessa região tinham maior proximidade com a Mesopotâmia e por consequência absorveram parte do conhecimento mesopotâmico e aprimoraram com êxito (BOYER,1999, pág.31):

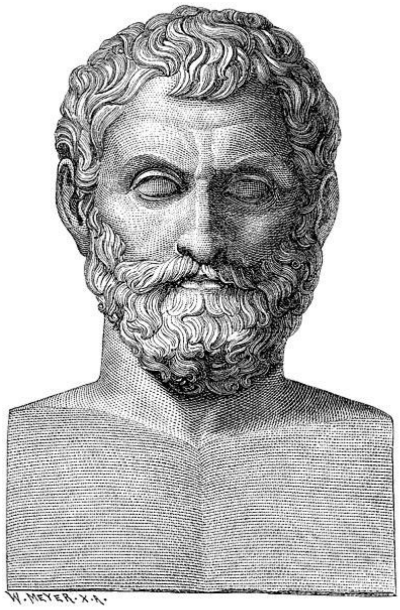
> Os gregos não hesitavam nada em absorver elementos de outras culturas, de outra forma não teriam aprendido tão depressa como passar à frente de seus predecessores; mas a tudo o que tocavam davam mais vida.

4.1 OS PRIMÓRDIOS: TALES DE MILETO E PITÁGORAS DE SAMOS

Entre o sétimo e sexto século A.C., nessa região, dois filósofos se destacam pelo modo que desenvolveram a matemática, são eles: Tales de Mileto (624-548 A.C. aproximadamente) e Pitágoras de Samos (600-580 A.C. aproximadamente).

A tradição relata grandes descobertas atribuídas aos dois pensadores, fato que pode ser explicado, pois diz a tradição que Tales e Pitágoras visitaram o Egito e aprenderam matemática, geometria e astronomia e ainda que Tales esteve na Babilônia de Nabucodonosor aprendendo sobre tabelas e instrumentos astronômicos.

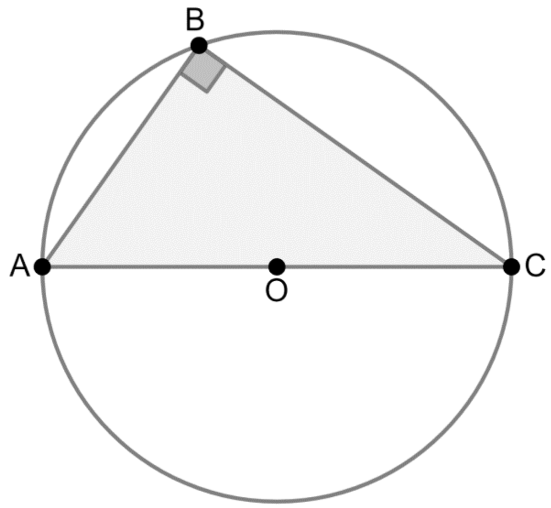
FIGURA 7: Tales de Mileto.



Fonte: WIKIPEDIA.COM (2024).

O Teorema de Tales (Figura 8), como ficou conhecido, consiste na compreensão de que um ângulo inscrito num semicírculo é um ângulo reto, tal entendimento provavelmente tem origem em seus estudos na Babilônia:

FIGURA 8 – Teorema de Tales



Fonte: GUZMAN, (2023)

Ainda são considerados obras de Tales outros teoremas, totalizando mais quatro teoremas. São esses teoremas: a) Um círculo é bissectado por um diâmetro; b) Os ângulos da base de um triângulo; c) Os pares de ângulos opostos formados por duas retas que se cortam são iguais; d) Se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado de um são iguais respectivamente a dois ângulos de um lado e de outro, então os triângulos são congruentes.

O filosofo e matemático Pitágoras de Samos, assim como Tales, estudou nas viagens que fez ao Egito e Babilônia, e, segundo a tradição, chegou a Índia também.

Seus estudos abordaram a matemática e a astronomia e de igual modo abarca seu pensamento a um pano de fundo religioso que o fez fundar uma sociedade secreta em Crotona (chamada de Magna Grécia, localizada na Itália).

Além das práticas religiosas, os pitagóricos, como ficaram conhecidos, tinham uma base de estudos matemáticos e filosóficos. Fator esse que influenciou o modo como concebiam suas descobertas: não atribuíram um integrante ou apenas a Pitágoras, mas a comunidade (BOYER1999, pág.33):

> Uma outra dificuldade para caracterizar claramente a figura de Pitágoras, provém do fato de que a ordem que ele fundou era comunitária, além de secreta. Conhecimento e propriedade eram comuns, por isso, a atribuição das descobertas não era feita a um membro específico da escola. É melhor, por isso, não falar na obra de Pitágoras, mas antes das contribuições dos pitagóricos, embora na antiguidade fosse usual dar todo o crédito ao mestre.

Os pitagóricos desenvolveram na matemática uma estrutura de pensamento que não era vista no Egito ou na Mesopotâmia. Nesses, os elementos de aritmética e geometria eram voltados para a prática cotidiana, como por exemplo, medir um terreno.

A estrutura intelectual formulada pela escola pitagórica permitiu pensar a matemática para além das necessidades cotidianas apontando um escopo filosófico de pensamento.

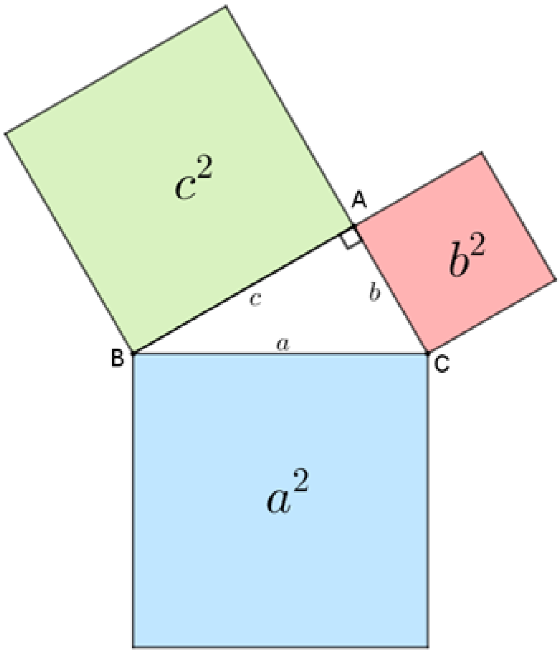
Os pitagóricos validavam o uso da matemática e de suas descobertas como parte de sua vida e vivência religiosa, considerando assim que tudo era passível de levantar conhecimento matemático, assim como os babilônios o faziam.

Até mesmo o Teorema de Pitágoras, desenvolvido pelos pitagóricos é de origem mesopotâmica, mas recebeu o nome do pensador por ser o primeiro a apresentar o teorema.

Observa-se que em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos. Uma demonstração desse teorema é feita construindo-se quadrados sobre cada um dos lados do triângulo para mostrarmos que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

A Figura 9 ilustra essa construção para um triângulo retângulo de hipotenusa com comprimento a e catetos com comprimentos b e c. Sendo assim o Teorema de Pitágoras garante que $a^2 = b^2 + c^2$, ou seja, a área do maior quadrado é a soma das áreas dos quadrados menores.

FIGURA 9 – Teorema de Pitágoras

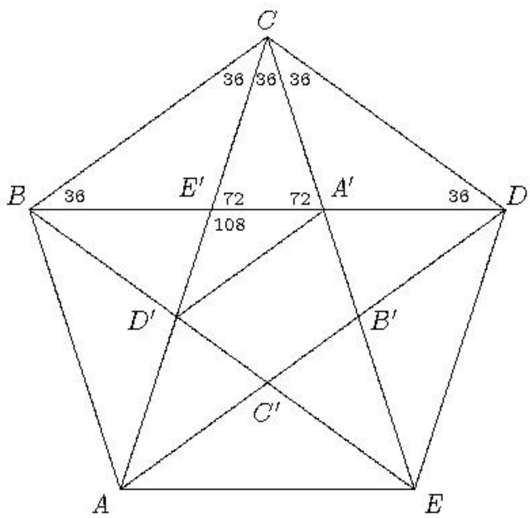


Fonte: VIEIRA, (2024)

O pentagrama estrelado (Figura 10), símbolo da escola pitagórica e da ligação entre a matemática pré-helênica e pitagórica, também era de origem babilônica, mas como uma expressão artística e não ligada a matemática (BOYER,1999).

A estrela de cinco pontas dentro de um pentagrama era baseada numa face pentagonal de um dodecaedro sendo tracejada por cinco diagonais.

FIGURA 10– Pentagrama Estrelado



Fonte: PATERLINI (2004)

O estudo da geometria pitagórica está contido nesse polígono, à medida que os pontos ABCDE são pontos de partida para as 5 diagonais que formam a estrela no lado interno do pentágono e por conseguinte constituem vários triângulos e outro pentágono.

Esses pontos dividem as diagonais em dois segmentos, de modo que a razão da diagonal toda para o maior é igual à deste para o menor. Posteriormente essa subdivisão das diagonais ficou conhecida como “secção áurea” de um segmento.

4.2 GRÉCIA: A IDADE HEROICA

Como já citado a origem da matemática grega não possui uma documentação ou fundamentação exata sobre sua gênese, mas sim escritos de autores posteriores, que são nomeados como tradição.

Dito isso, os relatos deixados pela tradição remontam a Tales de Mileto e a Pitágoras de Samos, como os primeiros estudiosos e fundadores das escolas matemáticas – sendo estas: a escola jônia e a pitagórica.

Somente com Platão no quarto século A.C. que essa situação toma rumos distintos e os pensadores começam a ter maior preocupação - bem como preservação - com os estudos matemáticos.

No entanto, um pouco antes, nas últimas décadas do século V A.C., é perceptível o aumento de estudiosos voltados aos temas mais complexos da época e formaram a base dos estudos mais avançados de geometria.

Por terem poucos recursos e travarem grandes esforços para realizar descobertas, esses matemáticos e o período em que atuaram são chamados de Heroicos.

Na idade heroica os pensadores não estavam concentrados em um único local, como no caso das escolas de Tales e Pitágoras, ambos na Ásia Menor, mas de quase todas as colônias gregas do Mar Mediterrâneo apareciam estudiosos. Se concentrando em Atenas, que devido as mudanças sociais, políticas e culturais promovidas por Péricles, agregava pensadores de todos os tipos e de todos os lugares.

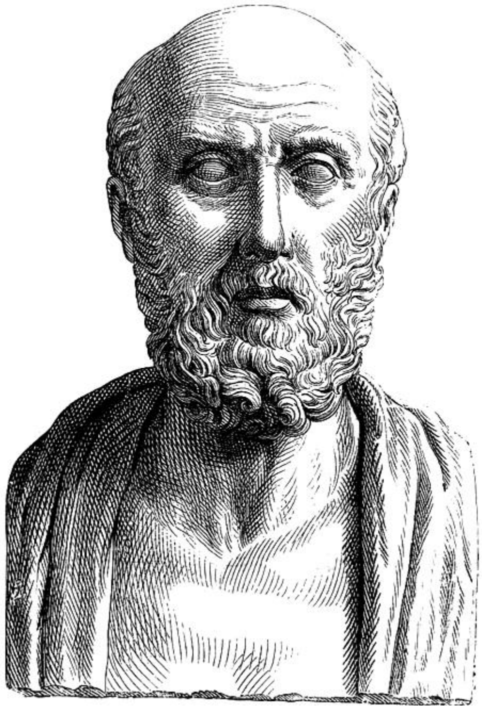
Anaxágoras de Clazomene, originário da Jônia e estudioso versado nas teses de Tales de Mileto, contribuiu significativamente para a época, realizando estudos sobre a natureza e até chegou a escrever e vender seus próprios livros como “Sobre a Natureza”. Com o tempo se tornou professor de Péricles (líder de Atenas entre as guerras contra a Pérsia e a guerra do Peloponeso).

Anaxágoras realizou estudos sobre geometria, na tentativa de quadrar um círculo. Esse estudo não tendia a questões práticas como a geometria usada pelo babilônicos. Os estudos de Anaxágoras estavam voltados a teoria e a ciência, fato construído pelos gregos, aproximando a matemática da filosofia (BOYER,1999, p.44):

> Não se trata de aplicação prática de uma ciência de números a um aspecto de experiencia comum, mas de uma questão teórica envolvendo uma distinção clara entre bom grau de aproximação e exatidão de pensamento. O problema matemático que Anaxágoras atacou era de tão pouco interesse para um tecnologista quanto os que ele levantou em relação à estrutura da matéria. No mundo grego a matemática era aparentada mais de perto à filosofia que a negócios práticos, e esse parentesco permaneceu até hoje.

Também oriundo da Jônia, Hipócrates de Chios (Figura 12), deixou sua terra natal em 430 A.C., e seguiu para Atenas. Seus estudos de Geometria, “Elementos de Geometria”, segundo Proclus, antecedem a obra “Os elementos” de Euclides com uma diferença temporal de um século.

FIGURA 11– Hipócrates de Chios

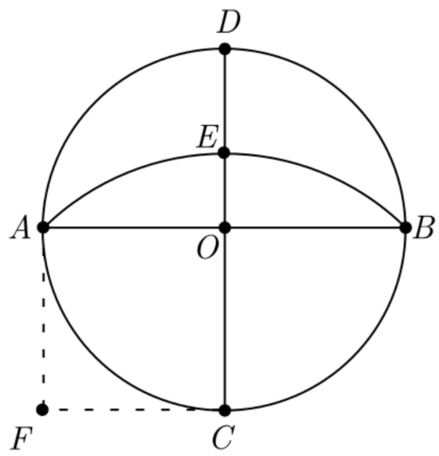


Fonte: WIKIPEDIA.COM (2024)

O estudo mais famoso de Hipócrates é a Quadratura de Lunas, no qual a luna é uma figura limitada por dois arcos circulares de raios diferentes, o problema de sua quadratura se originou da quadratura do círculo.

O pensador provou mostrando primeiro que as áreas dos círculos estão entre si como os quadrados dos diâmetros. Esse tratado é considerado o mais antigo enunciado sobre a mensuração curvilínea no mundo grego. Assim propõe o Teorema de Hipócrates, Quadratura das Lunas:

FIGURA 12 – Teorema de Hipócrates



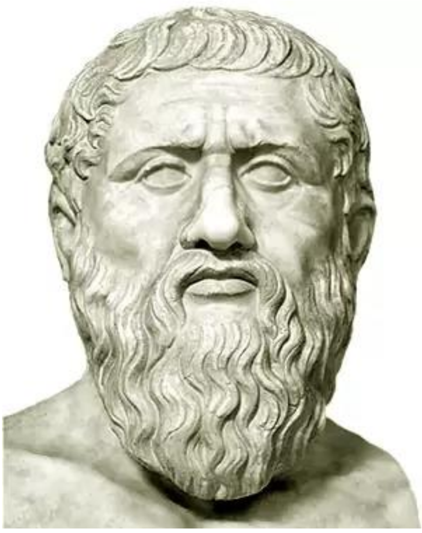
Fonte: KILHIAN (2022)

4.3 PLATÃO: O PROFESSOR DOS MATEMÁTICOS

O século IV A.C foi marcado por grandes avanços no campo da matemática e da filosofia grega. Em primeiro momento a precoce morte de Sócrates em 399 A.C aparenta o fim de uma era, mas na verdade abriu portas para que outros pensadores tivessem mais destaque, como seu discípulo Platão na cidade de Atenas. É do domínio dos todos que Sócrates não contribuiu significativamente para o desenvolvimento da matemática, pois seu objeto de estudo era diverso, se concentrando na ética, dialética e em sua própria teoria: a maiêutica.

Entretanto, seu discípulo Platão (Figura 13), mesmo não sendo um matemático brilhante, fez com que sua academia em Atenas ficasse conhecida por agregar grandes estudiosos de aritmética e geometria.

FIGURA 13 - Platão

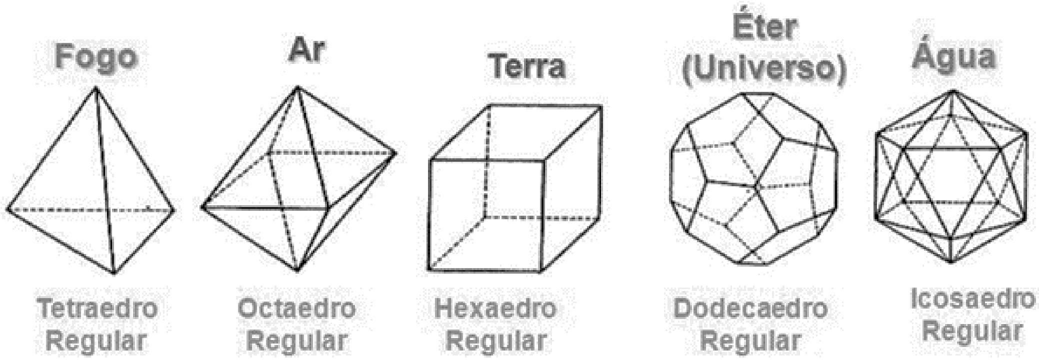


Fonte: OMINICIENTES.COM (2020)

Influenciado por Arquitas em 388 A.C, Platão iniciou seus estudos sobre os sólidos regulares, principalmente para compreender a associação feita por Empédocles entre os cinco sólidos regulares e os quatro elementos a eles associados.

O estudo de Platão sobre os sólidos regulares está em sua obra Timaneus, que possui forte influência dos pitagóricos. Esse tratado é a maior evidencia da relação que os matemáticos gregos faziam entre os sólidos regulares e os elementos, sendo que após a disseminação desse estudo os sólidos passaram a ser chamados de “corpos cósmicos” e/ou “sólidos platônicos”, conforme a Figura 14:

FIGURA 14 - Sólidos Platônicos



Fonte: GAMA (2020)

4.4 EUCLIDES DE ALEXANDRIA: *“OS ELEMENTOS”*

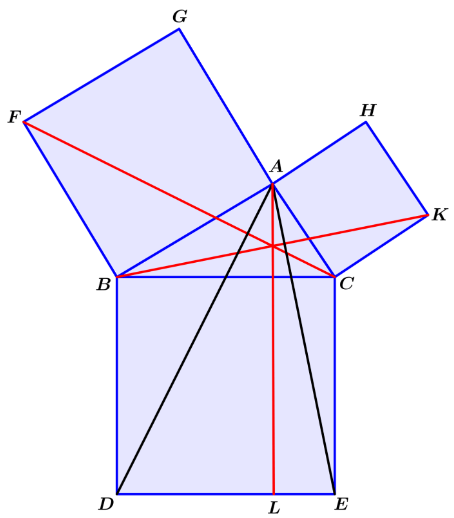
Sobre a vida, nascimento, entre outras informações de cunho particular, pouco se sabe sobre a vida de Euclides. Entretanto seu livro Os elementos, é a obra sobre matemática, mais completo e que permaneceu até os dias atuais sendo considerada uma obra de suma importância para os estudiosos de todos as épocas.

Euclides ficou conhecido como Euclides de Alexandria, pois lecionou na escola de Alexandria conhecida como Museu, que reunia os mais brilhantes estudiosos da Grécia do período, como é verificado (BOYER,1999, pág.71):

> A Universidade de Alexandria não diferia muito de instituições modernas de cultura superior. Parte dos professores provavelmente se notabilizava na pesquisa, outros eram como administradores e outros ainda eram conhecidos pela capacidade de ensinar. Pelos relatos que possuímos parece que Euclides definitivamente pertencia à última categoria. Nenhuma descoberta é atribuída a ele, mas ele era conhecido pela sua habilidade ao expor.

“Os elementos” possui 13 capítulos e tratam de temas variados como a geometria plana elementar, geometria no espaço, teoria dos números e sobre incomensuráveis. Nessa obra são postulados conceitos e teorias valiosas e proposições geométricas que versam até mesmo sobre assuntos debatidos por seus antecessores, os pitagóricos, de acordo com a Figura 15:

FIGURA 15 - Proposição I-47



Fonte: KILHIAN (2011)

A Obra de Euclides perpassa o tempo sendo a obra mais antiga sobre matemática grega. Foi preservada com o passar dos séculos e logicamente partes foram perdidas e outras foram alteradas, mas não a descaracterizaram a ponto de perder sua relevância histórica e matemática. Foi traduzida em várias línguas e somente no século XVI traduzida e sua versão impressa veio um pouco antes em 1482 em Veneza. Desde essa época “Os elementos” tiveram duas mil edições.

Dentre os ensinamentos da série de 13 livros de “Os Elementos”, temos 3 livros dedicados à teoria dos números, a obra de Euclides é caracterizada por sua sequência lógica e coerente, que atualmente chamamos de método axiomático, na prática estabelece 23 definições, 5 postulados e 9 noções comuns, a partir deles todas as proposições subsequentes são demostradas mediante a utilização das proposições primarias.

5. A MATEMÁTICA ENTRE OS POVOS ÁRABES

Com a queda do Império Romano por volta de 470 D.C., o nascimento de Maomé em 570 D.C. criou um império, com seus ensinamentos islâmicos, os mulçumanos conquistaram toda a península arábica e as regiões de fronteira da Síria. Em poucas décadas chegaram à fronteira da Espanha com a França e Índia.

Com a queda do Egito, os manuscritos da biblioteca de Alexandria também se perderam. Pela cultura árabe, os livros deveriam refletir apenas o que estava escrito no alcorão, além disso eram considerados supérfluos ou nocivos, assim muitos livros foram queimados e destruídos. Sobre esse episódio dispõe Garbi (2010):

> O conquistador árabe que decretou tão doloroso fim ao repositório da cultura clássica, o califa Omar, entendeu que os livros, ou repetiam os ensinamentos do Corão e eram supérfluos, ou os contrariavam e eram nocivos. Em ambos os casos deveriam ser queimados (GARBI, 2010, pág. 23).

Porém os sucessores de Maomé os califas, reconheceram a importância do saber e das artes e surpreendentemente tornaram Bagdá em uma nova Alexandria, trazendo estudiosos de vários povos para a “Casa da Sabedoria”.

5.1 ÁRABES E HINDUS: ENCONTRO DE CULTURAS

Em 773 D.C. estudiosos matemáticos, astrônomos hindus visitaram o califa Al-Mansur e mostraram a ele e seus sábios como trabalhar com o sistema indiano de numeração. Nessa época vários manuscritos gregos foram traduzidos para árabe inclusive obras de Euclides, Arquimedes entre outros gênios da antiguidade clássica, conforme Ifrah (1997):

> Al Qiftî, Ibn al Adamî e vários outros autores concordam com a data mencionada no texto acima, o ano 156 da Hégira, ou seja, 773 da nossa era. Essa data é muito plausível se nos dermos conta de certos acontecimentos da própria história da ciência árabe. Como explica A.-P. Youschkevitch, “se a chegada dos sábios indiano favoreceu, pela primeira vez, aos astrônomos de Bagdá a possibilidade de familiarizar-se com a astronomia dos siddhânta, o terreno propício para uma atividade astronômica já estava preparado e o interesse pela astronomia de outrora”. (IFRAH,1997, pág.366).

Abu-Abdullah Muham-Med Ibn-Musa Al-Khwarizmi escreveu tratados sobre aritmética, álgebra entre outros. Popularizou os nove símbolos indianos para representar os algarismos e um círculo para representar o zero, descreveu as quatro operações matemáticas e explica como fazer a extração da raíz quadrada.

Al-Khwarizmi relata em seu livro que o califa Al-Mamum o incentivou a escrever um pequeno trabalho sobre o cálculo de forma simples, para que qualquer pessoa compreendesse e que contribuísse com as necessidades. Como caso do povo, compra, venda, partilhas, a medição de terras, a escavação de canais, cálculos geométricos, e outros que envolviam cálculos matemáticos.

O método de "restauração" era usado para designar operações em que com equações do primeiro grau onde $x - 3 = 6$ passa para $x = 9$, significando a restauração. Parte desses saberes vem dos povos que viveram ao Norte da Índia e teriam um grande domínio nas técnicas Aritméticas e da Geométricas. Por volta do século V D.C., esse sistema de numeração hindu se consolidou e passou a fazer parte do mundo árabe.

A Índia produziu grandes matemáticos e astrônomos como Varahamihira (505 -585 D.C.), Brahmagupta (598-668 D.C.), Bhaskara (1.114 - 1.185 D.C.) apesar de seu nome fazer lembrar rapidamente da Fórmula de Bhaskara, essa fórmula foi deduzida pelo matemático hindu Sridhara (991 D.C.).

Para chegar na fórmula de Bhaskara, os hindus fundamentaram na ideia de reduzir o grau da equação do 2º grau para o 1º.

Seja a equação geral do 2ºgrau $ax^2 + bx + c = 0 \ com\ a \neq 0$

Portanto $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ ou $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

Somando dos dois lados da igualdade $\frac{b^2}{4a^2}$ pois $x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x + \frac{b^2}{4a^2}$ é um quadrado perfeito, tem-se que é permitido pela noção comum de Euclides:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \quad .$$

Como $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$ é o quadrado perfeito $(x + \frac{b}{2a})^2$, assim:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2} \quad ou \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \ .$$

Observando que sempre geram duas raízes alternativas uma com sinal + outra com sinal - , então:

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\pm\sqrt{\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \ .$$

Os babilônicos foram os primeiros a descobrir este fato. As equações são a chave de um problema clássico: encontrar dois números x e y, conhecendo sua soma S e seu produto P.

$$\begin{cases} x+y=S \\ xy=P \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=S-x \\ xy=P \end{cases}$$

Assim, $x(S-x)=P \ ou \ x^2-Sx+P=0$ e portanto,

$$x=\frac{-S\pm\sqrt{S^2-4\mathrm{P}}}{2} \qquad e$$

$$y=S-x=\frac{\mathrm{S}\mp\sqrt{S^2-4\mathrm{P}}}{2} \ .$$

Desse modo, verifica-se que:

i) Equações do 1° grau poderiam ter mais de uma solução.

ii) Aplicando a fórmula chega-se em alguns casos em uma raiz quadrada de número negativo.

Por exemplo, se aplicar a fórmula em $x^2 + 2x + 8 = 0$, temos $x = -1 + \sqrt{-7}$.

Logo temos uma raiz negativa. Quanto é $\sqrt{-7}$? Ninguém sabia de fato interpretar esse resultado na época. Quando uma equação do 2ºgrau resultava em raízes de números negativos, eram impossíveis serem resolvidas, simplesmente não tinham solução. Assim, começaram aparecer as raízes negativas e a fórmula de Bhaskara as traziam como resolução. Anos mais tarde, as equações do 2°grau, começam os estudos para resolver as equações do 3º grau.

6. MATEMÁTICA NA ITÁLIA: DA IDADE MÉDIA A RENASCENÇA

Gerbert d'Aurillac (950 – 1003 D.C) era um religioso francês e um amante das ciências exatas, viajante trouxe os conhecimentos da Espanha muçulmana para a Itália, incentivando os italianos ao usarem o sistema de numeração indiano. Todavia foi rejeitado porque os religiosos Cardeais acreditavam ser feitiçaria.

Apenas quando Aderlad de Bart (1075-1160 D.C) um estudioso inglês trouxe materiais científicos do mundo muçulmano (obras como de Euclides, tabelas astronômicas, obras do sistema indo-arábico de numeração), a Inglaterra entrou em contato com as facilidades do pouco conhecido sistema de numeração árabe.

Com os grandes acontecimentos na Europa por volta do século XII surge Leonardo de Pisa (1175-1250 D.C), mais conhecido como Leonardo Fibonacci. Nasceu em Gênova, viveu no norte da África e foi um grande explorador. Viajou pelo Egito, Grécia, Síria, Sul da França, entre outros destinos, o que lhe permitiu estudar vários dos sistemas aritméticos existentes e concluir que o método indo-arábico era o melhor de todos, então passou a dedicar seus esforços para transmiti-lo para seus conterrâneos. (GARBI, 2010).

Em 1202 publicou sua primeira obra, o Liber Abaci, onde descreveu o sistema numérico dos árabes e deu profunda atenção às questões aritméticas. Pela primeira vez um cristão discorreu sobre álgebra, dessa vez o sistema numérico foi aceito e começou a ser introduzido na Europa.

Leonardo deu algumas contribuições a escrita matemática. Antes as equações eram escritas utilizando muitas palavras, então Fibonacci passou a usar abreviações para representar os comandos matemáticos, como "radix" (raiz) para representar a incógnita, "census" para quadrado e "cubus" para cubo, entre outras contribuições.

Ficou muito conhecido por suas obras, sua reputação de grande matemático chamou a atenção do Imperador Frederico II, que promoveu uma competição para testar os conhecimentos de Fibonacci. Uma das questões propostas foi encontrar um segmento x que satisfizesse a equação cúbica $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$.

Leonardo resolveu o problema provando que não seria possível utilizar apenas régua e compasso, mas deu uma solução numérica, correta x= 1,3688081075, ai estava mais uma vez um desafio com equações do 3ºgrau. Fibonacci brilhantemente contribuiu com as futuras gerações e representou um marco na história da ciência ocidental (BOYER,1999).

Lucca Pacciolo (1445) foi um grande matemático que até hoje é considerado pai da contabilidade moderna. Em 1456 começaram a funcionar as prensas de impressão dos livros, assim se tornou possível a rápida multiplicação e divulgação dos livros. Era um momento histórico então coube a Lucca fazer uma síntese dos estudos da época, em sua obra que foi publicada em 1494, motivando inúmeros novos talentos no desenvolvimento da matemática.

6.1 EQUAÇÕES DO 3ºGRAU: GIROLAMO CARDANO

Girolamo Cardano (Figura 18) nascido em Paiva 1501, filho ilegítimo de Fazio Cardano e Chiara Micheria, estudou medicina na universidade de Pádua, era um aluno brilhante, porém altamente crítico. Jogador habilidoso usava a compreensão em probabilidade para aumentar suas finanças, porém mais adiante o jogo se tornaria um vício.

Terminou seu doutorado em medicina em 1525. Em 1531 casou-se com Lucia e teve dois filhos, tentou exercer medicina, mas não ganhava o suficiente para cuidar da sua família.

FIGURA 16 – Girolamo Cardano

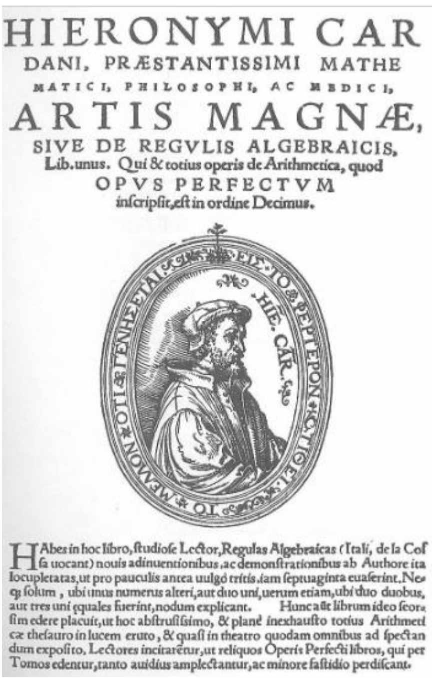
Fonte: GARBI (2010)

Assumiu o cargo como professor de matemática na fundação Piatti de Milão e então passou a se dedicar a matemática. Em 1537 publicou os dois primeiros livros de matemática. Este foi o início da carreira literária de Cardano, que escreveu também sobre uma diversidade de tópicos de medicina, filosofia, astronomia e teologia, além de matemática.

Cardano chegou a posteridade com um livro que na época certamente era o maior registro dedicado exclusivamente a álgebra, ARTIS MAGNAE SIVE DE REGULIS ALGEBRAICIS mais conhecida por Ars Magna (Figura 19) foi a primeira obra a conter métodos de resolução de equações de terceiro e quarto grau (GARBI,2010).

Em Ars Magna, encontrou-se registros de vários métodos para resolver equações, foi considerado um livro matemático mais importante do século XVI. Cardano antecipou a descoberta dos números complexos, demostrou que as soluções podem ser negativas, e que em alguns casos pode-se obter raízes quadradas de números negativos. Cardano também colaborou com estudo de mecânica, geologia, hidrodinâmica, probabilidade entre suas importantes contribuições algébricas.

Figura 17 – Ars Magna


HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cossa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neque solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aūt librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarentur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

Fonte: GARBI (2010)

6.2 NICOLÓ FONTANA TARTAGLIA

Conhecido como Tartaglia, Nicoló Fontana nasceu em 1499, na Brescia – Itália. Teve uma infância humilde após a morte de seu pai que foi assassinado, durante a ocupação francesa da Brescia. Nicoló também foi ferido na mandíbula por um soldado enquanto se refugiava em uma igreja, esse ferimento resultou em um problema de fala que o acompanharia por toda a vida, para esconder as grandes cicatrizes sempre usou barba em sua vida adulta.

Apesar da origem humildade, Tartaglia sempre demostrou amor pelos estudos, como sua família não pode custear seu aprendizado, começou a estudar por conta própria nos raros livros que conseguia obter. Segundo a história, Tartaglia visitava cemitérios a noite e escrevia com carvão sobre as lápides, pois não tinha dinheiro para comprar papel (BOYER, 1999).

Em 1535, começou a trabalhar como professor de ciência em Verona, além de professor Tartaglia era engenheiro e participava de competições matemáticas. Ao longo da vida publicou diversas obras e foi o primeiro antes de Galileu, a realizar cálculos na técnica de artilharia, mas o que colocou seu nome na história da matemática foram suas disputas com Cardano.

Figura 18 – Nicolò Fontana “Tartaglia”

Fonte: GARBI (2010)

Scipione del Ferro nascido em 06/02/1465 foi professor de Aritmética e Geometria na Universidade de Bolonha em1496. Foi um matemático italiano que primeiro descobriu um método para resolver a equação cúbica reduzida, porém ele não publicou, essa solução ficou desconhecida até seu aluno demostrar para Cardano, que publicou em seu livro Ars Magna.

6.3 CARDANO E TARTAGLIA E AS EQUAÇÕES DE 3ºGRAU

Naquela época era comum desafios entre sábios matemáticos. Os desafios consistiam em solucionar vários problemas propostos de um matemático para outro, assim ganhavam notoriedade no meio acadêmico matemático.

Em 1510, Spicione Del Ferro encontrou uma forma geral para resolver equações do tipo $x^3 + px + q = 0$. Apesar de não publicar suas descobertas matemáticas Del Ferro registrava seus manuscritos e após sua morte seu aluno Antonio Maria Fior, preparado com as anotações de seu mestre, desafia Tartaglia com questões que dependem da resolução de equação do 3º grau, o qual ele já guardava a solução.

Tartaglia aceitou o desafio, sem saber que Fior já detinha as resoluções, porém pouco antes do prazo do desafio, veio ao seu conhecimento que seu competidor estava preparado com as anotações de seu professor falecido Spione Del Ferro (GARBI,2010):

> Sentindo ameaçado, conforme mais tarde relatou o próprio Tartaglia, “mobilizei todo o entusiasmo, a aplicação e a arte de que fui capaz, objetivando encontrar uma regra para a solução daquelas equações, o que consegui a 10 de fevereiro de 1535”. (GARBI,2010, pág.37).

Porém Tartaglia exímio matemático como era, conseguiu ir além e não somente encontrou a resolução para equações do tipo $x^3 + px + q = 0$, mas também encontrou a fórmula geral para equações do tipo $x^3 + px^2 + q = 0$, desconhecidas por Maria Fior.

Cardano ao saber que Tartaglia encontrou a solução geral para equações de 3º grau, pediu-lhe a as resoluções com intenção de publicá-las em seu livro. Com a negativa de Tartaglia, Cardano o insultou e depois de um tempo traçou um plano para pedir as fórmulas pessoalmente, implorou e jurou segredo para obter as tão cobiçadas fórmulas. Enfim Tartaglia acabou cedendo, revelando a fórmula através de um poema.

Mesmo assim, sem compreender o poema, Cardano insistiu até que por fim Tartaglia acabou revelando seus estudos.

Em 1545, Cardano publicou em Ars Magna os conhecimentos da equação do 3º grau, quebrando a promessa feita anteriormente. Assim, a rivalidade entre Tartaglia e Cardano somente aumentou. Apesar do esforço de Tartaglia, a fórmula que ele deduzira e compartilhou com seu amigo inconfidente, acabou sendo conhecida como Fórmula de Cardano.

Mas como se resolveram as equações do 3º grau?

Lembre-se que Tartaglia solucionara tipos especiais

$x^3 + px + q = 0 \quad e \quad x^3 + px^2 + q = 0$

e não a equação geral $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$

Mas se fizermos $x = y + m$ e

calculando m de modo a anular o termo de 2º grau, reduzimos a equação completa em uma do tipo $y^3 + py + q = 0.$

Seja $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ e $x = y + m$, então:

$$a\,(y + m)\,3 + b\,(y + m)\,2 + c\,(y + m) + d = 0$$

ou

$$ay^3 + y^2\,(b + 3\,am) + y\,(3\,am^2 + 2bm + c) + (\,m^3a + bm^2 + cm + d) = 0$$

Fazendo $b + 3am = 0$

tem – se $m = \frac{-b}{3a}$

Portanto se resolvermos a equação $y^3 + py + q = 0$, acharemos x que é $y + m$. Tartaglia deu a resposta geral e não apenas particular, o que aumenta seu mérito.

No caso, a ideia de Tartaglia foi supor que a solução procurada é a soma de duas parcelas $x = A + B$.

Os dois lados da equação sendo iguais, seus cubos também serão iguais, portanto,

$$x^3 = (A + B)^3$$

$$x^3 = A^3 + B^3 + 3AB\,(A + B)$$

como:

$$A + B = x$$

$$x^3 = A^3 + B^3 + 3ABx$$

ou

$$x^3 - 3ABx - (A^3 + B^3) = 0$$

Mas, ao mesmo tempo

$$x^3 + px + q = 0$$

Portanto

$$p = -3AB \quad e \quad q = -\,(A^3 + B^3)$$

Ou

$$A3B3 = -\frac{p^3}{27} \; e \;\; A^3 + B^3 = -\,q.$$

Assim A^3 e B^3 são dois números dos quais conhecemos a soma e o produto e este é um problema clássico de equação de 2º grau.

$A^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$ e $B^3 = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$.

A rigor o caminho seguido por Tartaglia não foi exatamente este, mas equivale ao que está aqui exposto.

Como $x = A + B$, então

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Esta é a fórmula de Cardano, precisamos lembrar que a simbologia da época era totalmente diferente da simbologia atual, uma equação que como $2x^3 + 5x = 17$ seria escrita por Cardano como $2cub'p{:}\,5reb'ae\bar{q}lis17$.

Agora vejamos como funciona o método de Tartaglia/Cardano em um exemplo numérico:

Seja a equação $x3 - 6x - 9 = 0$, onde $p = -6 \ e \, q = -9$

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(-\frac{6}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(-\frac{6}{3}\right)^3}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{9+7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9-7}{2}}$$

$$= \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1}$$

$$x = 2 + 1 = 3.$$

Assim, tem-se a solução da equação pela fórmula de Cardano. Porém dúvidas começaram a surgir e problemas na aplicação do método de Tartaglia. Pode-se verificar a mais elementar dúvida que surge: se a fórmula de Bhaskara exibe duas raízes das equações de 2°grau, porque é que a de Cardano apresenta só uma, onde estariam as outras duas raízes? E os matemáticos se viram envoltos em questões que demorariam cerca de 200 anos para serem esclarecidas (GARBI, 2010, pág.41).

> Parecia que, ao invés de responder a simples pergunta “como resolver as equações de 3ºgrau”, Tartaglia havia mexido em um verdadeiro vespeiro, do qual saiam estranhíssimas e insondáveis questões.

6.4 LUDOVICO DE FERRARI

Ludovico de Ferrari italiano nascido em 02/02/1522, com apenas 15 anos, iniciou sua carreira como servo de Girolamo Cardano, um jovem talentoso logo foi promovido a secretário. Ferrari auxiliou nos desafios que recebeu de Cardano, colaborando com seus estudos para as resoluções de equações cúbicas e equações quadráticas. Ludovico foi o principal responsável pelo desenvolvimento da resolução das equações quárticas, publicadas por Cardano. Ferrari se formou professor de prestígio em Roma.

Dentro do costume dos desafios matemáticos, Cardano foi desafiado por Zuanne de Tonini da Coi a resolver uma equação do 4ºGrau. Após inúmeras tentativas sem sucesso, Cardano passou o desafio ao seu aprendiz Ludovico Ferrari, que encontrou o método geral para solução das equações de 4º grau.

Para resolver a equação do 4º grau Ferrari procurou reagrupar os termos de modo nos dois lados da igualdade houvesse polinômios com quadrados perfeitos, sendo possível extrair-se as raízes quadradas, assim resultando numa equação do 2ºgrau e o problema estaria resolvido.

A equação do 4º grau tem a forma: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$.

Tomando a equação geral, pode ser transformada em outra do tipo

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0,$$

fazendo $x = y + m$, calculando m de modo a anular o termo de 3º grau.

Assim como acontece com as equações do 3º grau, quem sabe resolver a equação incompleta, consegue resolver as equações do 4º grau.

Ferrari observou a equação:

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

Reagrupando seus termos de modo a fazer com que ambos os lados da igualdade houvesse polinômios quadrados perfeitos, se tal agrupamento fosse possível, seriam extraídas as raízes quadradas, cair-se-ia em equações do 2ºgrau e o problema estaria resolvido.

Com permissão da noção comum de Euclides, onde α e β são números a serem determinados de forma que os dois lados da igualdade sejam quadrados perfeitos.

$$x^4 + (p + \alpha)x^2 + (r + \beta) = \alpha x^2 - qx + \beta .$$

Para que sejam quadrados perfeitos os discriminantes dos dois trinômios, ao mesmo tempo são iguais a zero.

$$(p+\alpha)^2 - 4(r+\beta) = 0$$

e

$$q^2 - 4\alpha\beta = 0 \qquad \rightarrow \qquad \beta = \frac{q^2}{4\alpha}$$

$$(p+\alpha)^2 - 4\left(r + \frac{q}{4x}^2\right) = 0$$

$$(p+\alpha)^2 - 4r - \frac{q^2}{\alpha} = 0$$

Ou seja,

$$\alpha^3 + 2p\alpha^2 + (p^2 - 4r)\alpha - q^2 = 0$$

Encontra-se α, em seguida β e extraem-se as raízes quadradas

$$\sqrt{x^4(p+\alpha)x^2 + (r+\beta)} = \pm\sqrt{\alpha x^2 - qx = \beta}$$

Para cada alternativa de sinal + ou – tem uma equação do segundo grau, ambas com duas soluções, portanto para a equação 4º grau, o método fornece 4 raízes.

Exemplo do método. Seja a equação:

$x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0$

Aplicando o método de Ferrari, encontra-se $\alpha\ e\ \beta$

$x^4 - (15-\alpha)x^2 + (24+\beta) = \alpha x^2 + 10x = \beta$

Ambos os lados da igualdade quadrados perfeitos

$$(15-\alpha)^2 - 4(24+\beta) = 0$$

e

$$100 - 4\alpha\beta = 0 \ \rightarrow \beta = \frac{25}{\alpha}$$

O que leva à equação $\alpha^3 - 30\alpha^2 + 129\alpha - 100 = 0$

Essa equação, sendo do 3º grau, é resolúvel e suas raízes são $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 4, \alpha_3 = 25$. Para $\alpha_1 = 1,\ \beta_1 = 25$ e os dois lados da igualdade ficam

$x^4 - (15-1)x^2 + (24+25) = x^2 + 10x + 25$

$$x^4 - 14x^2 + 49 = x^2 + 10x + 25$$

$$(x^2 - 7)^2 = (x+5)^2$$

Assim,

$$(x^2 - 7) = (x+5) \therefore\ x^2 - x - 12 = 0 \ \rightarrow x_1 = 4 \ \ e\ \ x_2 = -3$$

Ou

$$(x^2 - 7) = -(x+5) \therefore\ x^2 + x - 2 = 0 \ \rightarrow x_3 = -2 \quad e\ x_4 = 1$$

Para $\alpha_2 = 4,\ \beta_2 = \frac{25}{4}$ tem – se,

$x^4 - (15-4)x^2 + \left(24 + \frac{25}{4}\right) = 4x^2 + 10x + \frac{25}{4}$

$x^4 - 11x^2 + \frac{121}{4} = 4x^2 + 10x + \frac{25}{4}$

Ou seja,

$(x^2 - \frac{11}{2})^2 = (2x - \frac{5}{2})^2$

Assim,

$\left(x^2 - \frac{11}{2}\right) = \left(2x + \frac{5}{2}\right) \quad \therefore\ x^2 - 2x - 8 = 0 \ \rightarrow x_1 = 4\, e\ x_2 = -2$ ou

$\left(x^2 - \frac{11}{2}\right) = -\left(2x + \frac{5}{2}\right) \quad \therefore\ x^2 + 2x + 3 = 0 \ \rightarrow x_3 = 1\, e\ x_4 = -3$

Para $\alpha_3 = 25,\ \beta_3 = 1\ e\ \ tem - se$

$x^4 - (15-25)x^2 + (24+1) = 25x^2 + 10x + 1$

$x^4 + 10x^2 + 25 = 25x^2 + 10x + 1$

$(x^2+5)^2 = (5x+1)^2$

Assim

$$(x^2+5) = (5x+1) \therefore\ x^2 - 5x + 4 = 0 \qquad \rightarrow\ x_1 = 4 \quad e \quad x_2 = 1$$

Ou $\qquad (x^2+5) = -(5x+1)\ \therefore\ x^2 + 5x + 6 = 0 \ \rightarrow\ x_3 = -3\ \ e\ \ x_4 = -2$

Ou seja, as raízes são sempre $-3, -2, 1, 4$.

O que existe de diferente são as 3 maneiras diferentes de se reagrupar os termos da equação, de modo a ter-se quadrados perfeitos em ambos os lados:

$(x^2 - 7)^2 = (x+5)^2$

$(x^2 - \frac{11}{2})^2 = (2x + \frac{5}{2})^2$

$(x^2+5)^2 = (5x+1)^2$

As 3 são equivalentes à equação original $x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0$.

6.5 RAFAEL BOMBELLI: INSUFICIÊNCIA DOS NÚMEROS REAIS

Rafael Bombelli nascido em 1526 Bologna, foi um matemático e engenheiro hidráulico italiano, autor de vários livros de álgebra e figura central na compreensão dos números imaginários.

Bombelli viveu exilado por um período com sua família, até que recuperaram seus bens e retornaram para Bologna, Filho de Antonio Mazzoli mudou seu sobrenome para Bombelli na tentativa de disfarçar sua descendência e retornar a sociedade, depois de várias atividades menores, passou a trabalhar para um nobre romano, Alessandro Rufini, futuro bispo de Melfi.

Bombelli interessou-se por matemática, aplicou seus estudos na solução das cúbicas e quárticas, tema que estava em evidência no momento, conheceu grandes matemáticos como Del Ferro, Fior, Tartaglia, Cardano e Ferrari.

Estudou matemática com um arquiteto-engenheiro chamado Pier Francesco Clementi. Realizou atividades ligadas a agrimensura, para demarcar fronteiras nas terras da região do Val di Chiana (1551-1555). Nesse período, enquanto aguardava o recomeço das demarcações, resolveu escrever um livro de álgebra, partindo dos estudos de Cardano e obteve sucesso conseguindo resolver o problema dos números imaginários. Deixou registrada sua conquista em seu livro de 1572, L'Algebra (GARBI, 2010).

Com a publicação de Cardano da resolução das equações cúbicas em problemas práticos, logo começou a apresentar resultados que desafiavam os matemáticos da época, a resolução da cúbica apresentava uma nova espécie de número (BOYER, 1999):

> Os números irracionais já tinham sido aceitos no tempo de Cardano, embora não tivessem base firme, pois eram aproximáveis por números reais. Os números negativos causaram dificuldades maiores porque não são aproximáveis por números positivos, mas a noção de sentido sobre uma reta tornou-os plausíveis. Cardano usou-os embora chamando-os de *"numeri ficti"*. (BOYER, 1997, pág.197).

Os algebristas da época poderiam evitar os imaginários, como na equação $x^2 + 1 = 0$ dizendo que não é resolúvel. Porém, com a resolução da cúbica, de Tartaglia – Cardano, tem -se sempre que as três raízes de uma equação cúbica são reais e diferentes de zero, leva inevitavelmente a raízes quadradas de números negativos.

Seja uma equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, tem-se as raízes

$x = 4\,, \quad -2 + \sqrt{3} \;\; e \;\; -2 - 3.$

Resolvendo pela Fórmula de Cardano segue que

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}\ .$$

Desse modo, não apenas extração de raízes quadrada de forma negativa, mas também extração de raízes cúbicas de números de natureza desconhecida.

Podemos generalizar o que acontecia na equação $x^3 - 15x - 4 = 0$.

Assim temos o produto de $(x-a)(x-b)(x-c)$, que se igualado a zero, resulta nas raízes $x = a,\ x = b,\ x = c,$ pois para qualquer destes três valores, o produto se anula.

Pesquisemos que relação deve haver entre a, b, c, para que o desenvolvimento conduza a uma equação do tipo $x^3 + px + q = 0$, para qual a Fórmula de Cardano é válida.

$(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x - abc.$

Para que inexista o termo do 2º grau, é necessário que

$a + b + c = 0$ ou $c = -(a+b)$.

Então, $(x-a)(x-b)(x+[a+b]) = 0$, tem por raízes a, b e $-(a+b)$

$x^3 + [ab - (a+b)^2]x + ab(a+b) = 0.$

Aplicando pela Fórmula de Cardano:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{ab(a+b)}{2} + \sqrt{\left(\frac{ab(a+b)}{2}\right)^2 + \left(\frac{ab-(a+b)^2}{3}\right)^3}}$$

$$+ \sqrt[3]{-\frac{ab(a+b)}{2} - \sqrt{\left(\frac{ab(a+b)}{2}\right)^2 + \left(\frac{ab-(a+b)^2}{3}\right)^3}}$$

Expressão esta que deve levar a $x = a, b\ e - (a+b)$.

Observemos a expressão sob o radical quadrático que chamaremos de Δ

$$\Delta = \left(\frac{ab\ (a+b)}{2}\right)^2 + \left(\frac{ab - \ (a+b)}{3}\right)^3$$

Efetuando as operações e simplificando -se os polinômios

$$\Delta = \frac{-4a^6 - 12a^5b + 3a^4b^2 + 26a^3b^3 + 3a^2b^4 - 12ab^5 - 4b^6}{108}$$

Obtém-se do numerador acima o produto;

$$-(a-b)^2(2a+b)^2\,(a+2b)^2$$

Assim temos que $a\ e\ b$ são reais, Δ nunca é positivo.

$$\Delta = -\frac{(a-b)^2\,(2a-b)^2\,(a-2b)^2}{108}$$

> Esta é uma constatação surpreendente pois, para que achemos a e b reais distintos pela Fórmula de Cardano, teremos que obrigatoriamente que trabalhar com raízes quadradas de números negativos, coisa que, por muito tempo, pensou-se ser impossível. A surpresa é ainda maior quando se recorda que, nas equações do segundo grau, as duas raízes somente são reais quando $\Delta \geq 0$. Para as de terceiro grau as três somente são reais quando $\Delta \leq 0$. (GARBI,.2010. pág.50).

Isso mostra que as descobertas de Tartaglia abririam novos rumos para o estudo dos números, indicando claramente que os números com que a matemática vinha trabalhando havia séculos, não eram mais suficientes para o estudo da álgebra.

Observando os resultados obtidos pela Fórmula de Cardano, Bombelli tentou conciliar o resultado para equação $x^3 - 15x - 4 = 0$,

$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ com raiz $x = 4$;

Segundo escreveu no livro *L'algebra parte Maggiore dell' Aritmetica* (1572), seu método baseou-se no "pensamento rude" segundo o qual $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}\ e\ \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ deveriam ser números da forma $a+\sqrt{-b}$ e $a-\sqrt{-b}$ assim supondo escreveu:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = a+\sqrt{-b}$$

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = a-\sqrt{-b}$$

Deduziu-se que $a = 2\ e\ b = 1$ pois

$$(2+\sqrt{-1)}^{3} = 2+\sqrt{-121}\ \ e$$

$$(2-\sqrt{-1)}^{3} = 2+\sqrt{-121}$$

Logo $x = (2+\sqrt{-1}) + \left(2-\sqrt{-\,1}\right) = 4$, resultado que se esperava obter.

Regras que Bombelli criou para trabalhar com números complexos

$$\left(\sqrt{-1}\right)\left(\sqrt{-1}\right) = -1$$

$$\left(-\sqrt{-1}\right)\left(\sqrt{-1}\right) = 1$$

$$\left(-\sqrt{-1}\right)\left(-\sqrt{-1}\right) = -1$$

$$(\pm 1)\left(\sqrt{-1}\right) = \pm\sqrt{-1}$$

$$(\pm 1)\left(-\sqrt{-1}\right) = \mp\sqrt{-1}$$

Criou também a regra para soma de dois números do tipo $m + n\sqrt{-1}$:

$$(a+b\sqrt{-1}) + \left(c + d\sqrt{-1}\,\right) = (a+c) + (b+d)\,\sqrt{-1}$$

Assim, foram construídas as bases para o desenvolvimento de um gigantesco ramo da Matemática, com infinitas aplicações práticas. Bombelli duvidou da validade desses resultados: "Foi uma ideia louca", de fato os nomes atribuídos para esses novos números refletem o desconforto que causaram, números “sofísticos”, “místicos”, "imaginários".

7. O IMAGINÁRIO TORNA-SE REAL

Os avanços nos estudos matemáticos durante o fim do século XVI e o primeiro quarto do século XVII, mostraram um grande progresso devido as contribuições dos trabalhos realizados pelos árabes. A Europa ocidental recuperou boa parte dos conhecimentos algébricos do passado, as resoluções das equações de 3ºgrau já eram conhecidas, mais uma geração de grandes matemáticos estava para nascer, marcando a era Moderna, desde o Renascimento até auge do pensamento Iluminista.

Nesse momento de transição, surge o matemático John Wallis (1616-1703), com novos apontamentos quanto a existência de quantidades imaginárias e negativas. Coincidentemente neste período o filósofo e matemático alemão Gottfried Wilhelm Von Leibniz (1646-1716), também teceu suas contribuições sobre números complexos, dentre elas a decomposição imaginária de um número real $\sqrt{6} = \sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}}$. Leibniz também obteve sucesso nos estudos que realizou e mais tarde se chamaria de Cálculo diferencial e Integral (SILVA, 2011).

7.1 LEONARD EULER

Nascido em Basileia, Suíça, Leonard Euler (1707-1783) foi um dos maiores matemáticos da história. Apesar de perder sua visão esquerda aos 28 anos, produziu mais de 800 obras desenvolvendo os mais diversos assuntos como Cálculo, Mecânica, Topologia, Teoria das Probabilidades, Teoria dos Números, Álgebra, Números Complexos, entre outros.

Euler era pai de 13 filhos, sua vida não era nada solitária ou silenciosa, porém sua compreensão ultrapassava a realidade, possibilitando desenvolver obras riquíssimas.

Euler foi a consolidador da simbologia moderna, dentre os conceitos temos o uso $\sum$ para somatória, para funções a notação $f(x)$ e o famoso “i” significando $\sqrt{-1}$, usado por ele apenas em 1777 e publicado apenas em 1794, conforme Garbi (2010):

> Embora existem muitos precursores importantes Euler são considerados o matemático que dominou os números complexos. (GARBI, 2010, pág.116)

Foi em meados do século XVIII, que Abraham de Moivre (1667-1754) evidencia a existência dos números complexos na Trigonometria, com a fórmula demostrada por Euler $(\cos\emptyset + isen\emptyset)^n = \cos(n\emptyset) + isen(n\emptyset)$, conhecida como Fórmula de Moivre (SILVA, 2010).

Se chamarmos $\cos\emptyset + isen\emptyset$ de $f(\theta)$, a fórmula citada pode ser reescrita

$$[f(\theta)]^n = f(n\theta)$$

Sabemos que esta propriedade das funções exponenciais pois por exemplo,

$$(a^b)^n = a^{nb} \quad ou\ seja\ \ [f(b)]^n = f(nb)$$

Isto pode ter levado Euler a conjecturar que $\cos\emptyset + isen\emptyset$ poderia ser algum tipo de função exponencial de uma variável complexa. Euler demostrou que $\cos\emptyset + isen\emptyset = e^{i\theta}$, onde e que nascera de um estudo de juros, apareceu numa relação entre potências imaginárias e funções trigonométricas. Fazendo $\theta = \pi$, temos

$$\cos\pi + isen\pi = e^{i\pi}$$

$$-1 + 0 = e^{i\pi}$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Esta fórmula une os 5 mais famosos números de toda Matemática: $zero, 1\ , \pi, e, e\ também\ \sqrt{-1}$.

7.2 JEAN LE ROND D´ALEMBERT

Jean Le Rond D´Alembert (1717-1783), matemático francês, teve uma infância desfavorável, sendo filho ilegítimo de um nobre francês, foi abandonado por sua mãe em uma igreja e adotado na infância por uma nova família. Onde dedicou-se a se tornar um homem inteligente e notável.

Aos 12 anos de idade começou estudar no Collège Mazarin, onde teve contato com o novo cálculo ministrado por Pierre Varignon (1654-1722).

D`Alembert e Euler tinham muitos interesses em comum, então trocavam escritos com vários assuntos como expressão $(a + bi)^{c+di}$, onde D`Alembert demostrou que a expressão pode ser escrita como um número complexo, enquanto Euler considerou a expressão como uma função, antecipando a teoria das variáveis complexas, estudadas no século XIX.

7.3 JOHAN KARL FRIEDRICH GAUSS

Em 1799 diante de todos os estudos sobre os números complexos, surge o Johan Karl Friedrich Gauss (1777-1855) matemático, astrônomo e físico que apresenta a representação geométrica dos números complexos no plano. Em sua tese de doutorado Gauss detalhou como os números complexos poderiam ser desenvolvidos segundo uma teoria exata, apoiada na representação desses números no plano cartesiano, foi também o inventor do termo “Números Complexos”, como o próprio matemático Gauss dispõe:

> Que este assunto [números imaginários] tenha até sido cercado por uma obscuridade misteriosa é atribuído, largamente, a uma notação mal adaptada. Se por exemplo +1, -1, e $\sqrt{-1}$, fossem chamados unidade direta, inversa, lateral em vez de positivo, negativo e imaginário (ou mesmo impossível), tal obscuridade estaria fora de questão. (apud GARBI, 2010, pág. 213).

O sistema de coordenadas retangulares onde marcamos o ponto P cujas coordenadas x e y com eixos real e imaginário, respectivamente então o número complexo x+iy será representado pelo ponto P(x,y) ou de modo equivalente , pelo segmento de linha (vetor) OP.

Pode-se então somar ou subtrair números complexos da mesma forma que fazemos com vetores, somando e subtraindo separadamente a componente real e imaginaria; por exemplo, $(1 + 3i) + (2 - 5i) = 3 - 2i$.

Esta representação gráfica foi sugerida, mais ou menos ao mesmo tempo por três cientistas em países diferentes: Caspar Wessel (1745-1818) um agrimensor norueguês em 1797, Jean Robert Argand (1768-1822) da França em 1806, e por Carl Friedrich Gauss.

Em 1835 William Rowan Hamilton matemático irlandês (1805-1865), formalizou a definição dos números complexos passando a tratá-los como pares ordenados de números reais, sujeito as operações matemáticas.

Um número complexo é definido como par ordenado (a, b), onde a, b são números reais.

Igualdade ocorre se dois pares (a, b) e (c, d) são iguais se e somente se, a = c e b = d.

A soma dos pares ordenados se dá tomando $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$. A subtração dos pares ordenados se dá da mesma forma da soma, subtraindo dois a dois $(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$. Multiplicação por escalar (propriedade distributiva): Ao multiplicar o par (a, b) por um número real k (um "escalar") produz- se o par (ka, kb), temos $k.(a, b)$= (ka, kb).

O produto é o par $(a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$. O significado da multiplicação é notado quando multiplicamos, $(0,1).(0,1) = (0.0 - 1.1, 0.1 + 1.0) = (-1,0)$.

Para identificarmos qualquer par (a, 0) com o número real a – podemos escrever um último resultado como $(0,1).(0,1) = -1$. Denotando o par (0,1) pela letra i então teremos $i\,.\,i = -1$, ou simplesmente $i^2 = -1$.

Agora podemos escrever qualquer par ordenado (a,b) como $(a, 0) + (0, b) = a(1,0) + b(0,1) = a.1 + b.1 = a + ib$, isto é um número complexo ordinário. Dispõe Maor (2004):

> Essa abordagem rigorosa de Hamilton marcou o início da álgebra axiomática: o desenvolvimento passo a passo de um assunto, a partir de pequenas definições (axiomas) e uma corrente de sequências logicas (teoremas) deles derivados. Os axiomas já eram utilizados para geometria desde os gregos, como uma disciplina matemática imortalizada no Elementos de Euclides (300a.C). Agora em meados de 1800 a álgebra seguia os caminhos da geometria. (MAOR, 2004, pág. 216)

Em 1799, Gauss comprovou em sua dissertação: um polinômio de grau n, o polinômio possui pelo menos uma raiz no domínio dos números complexos. Por exemplo, o polinômio $x^3 - 1$ possui 3 raízes, $1\,, (-1 + i\sqrt{3}\,)\,/2\ e\ (-1 - i\sqrt{3}\,)\,/2$. O teorema de Gauss é conhecido como Teorema Fundamental da Álgebra, mostra como resolver uma equação polinomial geral utilizando números complexos.

Ainda no século XIX o matemático francês Augustin-Los Cauchy (1789-1857) colaborou para avanço da matemática moderna, ao introduzir a análise matemática. Cauchy passou a representar números complexos em quatro dimensões, abstraiu a teoria das variáveis complexas, apoiando em conceitos bem definidos desenvolvendo a teoria de funções complexas (SILVA, 2011).

7.4 OS NÚMEROS COMPLEXOS NA ATUALIDADE

Atualmente os conceitos da teoria dos números complexos são aplicados em diversas áreas como no estudo da matemática, física como na mecânica quântica, circuitos elétricos, na equação de onda, que rege os movimentos dos elétrons, entre outras aplicações.

Temos uma das mais belas aplicações dos números complexos remonta a sua representação gráfica e não ao formalismo de equações rigorosas. Ao representarmos simples equações de números complexos, utilizando o princípio computacional da recorrência e a moderna Teoria dos Fractais, onde obtemos figuras belíssimas, que parecem reproduzir fenômenos da natureza, com todas as combinações possíveis entre simetrias e o caos.

Os avanços na matemática não param: com o desenvolvimento da tecnologia na segunda metade do século XX, o uso dos novos recursos gera infinitas possibilidades. Por exemplo: a utilização de equações complexas como geradores de fractais. Possivelmente este é apenas o começo das inúmeras descobertas que o futuro reserva quanto as aplicações desse fascinante conceito que permeou no imaginário de diversos matemáticos.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A matemática como ciência pode fascinar e ao mergulhar na sua história, compreende-se as ferramentas que fazem parte do nosso cotidiano, mas agora com sentido e completude.

A origem dos números surge das necessidades dos povos sumérios e egípcios em desenvolver sua agricultura, arquitetura e astronomia. Essa riqueza de saberes foi construída por milênios, em meio a guerras e pestes. É tão valioso olhar para o passado e ver as obras arquitetônica, como as pirâmides de Gizé, construídas em um momento em que não havia tecnologia e as ferramentas que dispomos hoje. Demonstrando toda sua inteligibilidade e sua capacidade organizacional.

A trajetória e o contexto de vida dos grandes estudiosos os gregos, que abriram as portas do conhecimento matemático para o ocidente, bem como a troca de saberes entre árabes e hindus, permitiu que a aritmética, álgebra e geometria fosse deveras estudada na Europa. Fato esse que se tornou evidente na Itália renascentistas, quando os primeiros matemáticos no século XVI passaram a usar os algarismos indo-arábicos em suas equações.

Os números imaginários, complexos, místicos, hora renegados na sua existência – apenas não é possível resolver ou não existe raiz real – causando estranheza e desconforto, agora passa a fazer parte da cronologia.

Olhar para história da matemática numa perspectiva investigativa, não é apenas sobre números, mas é conhecer a si mesmo, suas origens, o porquê das coisas, dar sentido as descobertas e a evolução do conhecimento algébrico, trazendo uma nova perspectiva às novas descobertas e desafios matemáticos que estão no presente e no futuro.

Através dessa pesquisa sobre a história dos números complexos, observou se como é importante o estudo dos números complexos para estudo da matemática. A resolução das equações cúbicas, a formalização dos conhecimentos e a estruturação da álgebra como objeto de estudo abstrato. A matemática é rica há muito ainda a se explorar, vemos a origem do Teorema fundamental da álgebra e a abertura de novos ramos de estudos, porém a aplicação dos números complexos e a novas tecnologias na atualidade é um assunto que ficara para os próximos ciclo de estudos.

9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AZEVEDO, Antônio Carlos do Amaral; GEIGER, Paulo. **Dicionário de nomes, termos e conceitos históricos**. 4ªed.Rio de Janeiro. Editora Lexikon. 2019.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2ª Ed. São Paulo: Ed. Edgard Blücher Ltda, 1999.

CARDOSO, Ciro Flamarion. **Egito antigo**. Coleção Tudo é história. São Paulo. Editora Brasiliense, 1982.

GAMA, Gabriel. **Poliedros de Platão**. 16/08/2020. Disponível em: <https://www.passeidireto.com/arquivo/81280482/um-pouco-de-historia-e-possivel-mostrar-que-existem-cinco-e-somente-cinco-polied>. Acesso 18/01/2024.

GARBI, Gilberto G. **O romance das equações algébricas**.4.ed rev. e ampl. São Paulo: Editora Livraria de Física, 2010.

GUZMAN, Jefferson Huera. **Teorema de Tales – Explicação, Prova e Exemplos**. 2023. Disponível em: < https://br.neurochispas.com/geometria/teorema-de-tales-explicacao-prova-e-exemplos/#2-teorema-de-tales-explicado>. Acesso em: 12/01/2024.

IFRAH, Georges. **História Universal dos Algarismos: A inteligência dos homens contada pelos números e cálculos**. Tomo 1. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

IFRAH, Georges. **História Universal dos Algarismos: A inteligência dos homens contada pelos números e cálculos**. Tomo 2. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

KILHIAN, Kleber. **A quadratura da lúnula de Hipócrates**. 2022. Disponível em: https://www.obaricentrodamente.com/2022/07/a-quadratura-da-lunula-de-hipocrates.html>. Acesso em 20/01/2024.

KILHIAN, Kleber**. O teorema de Pitágoras, segundo Euclides – A proposição I-47**. 13/04/2011. Disponível em: < https://www.obaricentrodamente.com/2011/04/o-teorema-de-pitagoras-segundo-euclides.html>. Acesso em: 20/01/2024.

LEICK, Gwendolyn. **Mesopotâmia: a invenção da cidade**. Rio de Janeiro. Editora Imago, 2003.

LINS, Lívia Carvalho Teixeira. **Deciframento, decodificação e Tradutore – a escrita e sua compreensão**. Revista Educação Pública, v. 19, nº 3, 5/02/2019. Disponível em: < https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/19/3/deciframento-decodificao-e-tradutore-a-escrita-e-sua-compreenso>. Acesso em 10/01/2024.

MAOR, Eli. ***e*: a história de um número**. 2ªed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

MENDES, Iran Abreu. **Investigação histórica no ensino da matemática**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2009.

MOSER, Jason. **A língua Suméria**. 2015. Disponível em: <https://apaixonadosporhistoria.com.br/artigo/87/a-lingua-sumeria>. Acesso em 26/01/2024.

OMINICIENTES.COM. **La vida y obra de Platón: el filósofo que marcó la história**. 2020. Disponível em: < https://www.omniscientes.com/biografias/la-vida-y-obra-de-platon-el-filosofo-que-marco-la-historia/>. Acesso em: 21/01/2024.

PATERLINI, Roberto Ribeiro. **O método da exaustão: pentágono, incomensurabilidade e o método da exaustão**. 11/03/2004. Disponível em: <https://www.dm.ufscar.br/hp/hp527/hp527001/hp5270018/hp5270018.html>.
Acesso em 18/01/2024.

SILVA, Marcio Antônio da**. Da teoria à prática: um a análise histórica do desenvolvimento conceitual dos números complexos e suas aplicações**. Revista Brasileira de História da Ciência, Rio de Janeiro, v.4, n.1, p.79-91, jan.2011.

TODÃO, Jefferson. **Os Papiros da Matemática Egípcia - O Papiro de Rhind ou Ahmes.** 2017. Disponível em: <https://www.matematicaefacil.com.br/2015/11/papiros-matematica-egipcia-papiro-rhind-ahmes.html>.Acesso em 10/01/2024.

VIEIRA, Marcelo Lopes. **O teorema de Pitágoras: enunciado, demonstrações e história** . 2024. Disponível em: https://matematicasimplificada.com/teorema-de-pitagoras/>. Acesso em 16/01/2024.

WIKIPEDIA.COM. **Tales de Mileto**. 2024. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Tales_de_Mileto>. Acesso em 12/01/2024.

WIKIPEDIA.COM**. Hipócrates de Chios**. 2024. Disponível em: < https://pt.wikipedia.org/wiki/Hip%C3%B3crates >. Acesso em 12/01/2024.

Cesar , Junior. Sistema de Numeração Egípcio . YouTube,17/02/2021. Disponível em: Ihttps://www.youtube.com/watch?v=LJ1Ofl3P7h4.