UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – CAMPUS SOROCABA

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA PARA SUSTENTABILIDADE

DEPARTAMENTO DE FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ANA LAURA IVANOV CARVALHO

O DESAFIO DAS OITO RAINHAS: UM ESTUDO SOBRE AS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS DO PROBLEMA

Sorocaba - SP

2024

Ana Laura Ivanov Carvalho

O DESAFIO DAS OITO RAINHAS: UM ESTUDO SOBRE AS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS DO PROBLEMA

Trabalho de conclusão de curso apresentada ao Departamento de Física, Química e Matemática da Universidade Federal de São Carlos, para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Graciele P. Silveira

Sorocaba - SP

2024

Carvalho, Ana Laura Ivanov

O desafio das oito rainhas: um estudo sobre as soluções fundamentais do problema / Ana Laura Ivanov Carvalho -- 2024.
61f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba
Orientador (a): Graciele Paraguaia Silveira
Banca Examinadora: Ana Cristina de Oliveira Mereu, Raphael de Oliveira Garcia
Bibliografia

1. Xadrez. 2. Análise combinatória. 3. Transformações lineares. I. Carvalho, Ana Laura Ivanov. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Maria Aparecida de Lourdes Mariano - CRB/8 6979

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DE SOROCABA - CCML-So/CCTS

Rod. João Leme dos Santos km 110 - SP-264, s/n - Bairro Itinga, Sorocaba/SP, CEP 18052-780

Telefone: (15) 32298874 - http://www.ufscar.br

DP-TCC-FA nº 6/2024/CCML-So/CCTS

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

ANA LAURA IVANOV CARVALHO

O DESAFIO DAS OITO RAINHAS: UM ESTUDO SOBRE AS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS DO PROBLEMA

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus Sorocaba

Sorocaba, 04 de julho de 2024

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	**Nome Completo**
Orientadora	Profa. Dra. Graciele P. Silveira
Membro da Banca 1	Profa. Dra. Ana Cristina de Oliveira Mereu
Membro da Banca 2	Prof. Dr. Raphael de Oliveira Garcia gov.br Documento assinado digitalmente RAPHAEL DE OLIVEIRA GARCIA Data: 04/07/2024 15:51:08-0300 Verifique em https://validar.iti.gov.br

Documento assinado eletronicamente por **Ana Cristina de Oliveira Mereu**, **Docente**, em 04/07/2024, às 14:46, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Graciele Paraguaia Silveira**, **Docente**, em 04/07/2024, às 14:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufscar.br/autenticacao, informando o código verificador **1483133** e o código CRC **9A4A3844**.

Referência: Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo nº 23112.017672/2024-78

SEI nº 1483133

Modelo de Documento: Grad: Defesa TCC: Folha Aprovação, versão de 02/Agosto/2019

DEDICATÓRIA

Dedico aos meus irmãos Matheus e Mariana, que são o motivo pelo qual eu tento ser melhor a cada dia.

AGRADECIMENTO

Primeiramente, agradeço a Deus, que sempre esteve ao meu lado e não me deixou desistir diante das dificuldades que surgiram pelo caminho.

Agradeço também a minha família, aos meus pais José e Cidinha, que me deram apoio e puxões de olheira, mas que também acreditaram e me ajudaram a não desistir nesses longos anos de graduação, aos meu irmãos Matheus e Mariana, pelo companheirismo e por serem o motivo de eu me esforçar para ser alguém melhor a cada dia, também a outros familiares que me apoiaram a seguir na carreira da docência, em especial à tia Denise e à prima Cátia.

Agradeço a todos os professores e professoras que tive em minha vida escolar desde a educação infantil até o ensino médio, sobre todos, professora Cristiane Maeda, professora Andreia Nascimento e professora Silvia Andreia.

Agradeço a todos os professores e funcionários da instituição de ensino UFSCar Sorocaba, principalmente minha orientadora, Prof.ª Dra. Graciele P. Silveira, por toda ajuda, disponibilidade e compreensão durante o processo de desenvolvimento deste trabalho e a secretária Rafaela Marie Arakaki, pelo seu trabalho essencial para o funcionamento do curso.

Aos meus amigos pelos puxões de orelha e momentos de companheirismo que tornaram mais leve esses anos da graduação, Karen, Regiane, Luis, Peron e em especial a Mayara que esteve comigo durante os primeiros anos da faculdade, compartilhando momentos e criando memórias que sempre ficarão guardados em meu coração.

“Ninguém nunca ganhou uma partida de xadrez abandonando.”
Savielly Tartakower

RESUMO

Um milhão de dólares para quem resolver o desafio enxadrístico: dispor mil rainhas em um tabuleiro de xadrez de dimensões 1000x1000, de maneira que nenhuma delas ataque outra rainha, é o prêmio oferecido pelo *Instituto Clay de Matemática*, que até hoje não teve ganhador. O desafio das oito rainhas é um problema clássico no xadrez, porém o desafio original consiste em posicionar “apenas” oito rainhas, em um tabuleiro de dimensões 8x8, sem que qualquer uma delas se ataquem mutuamente. O presente trabalho se propôs a investigar soluções para o desafio das oito rainhas no xadrez, empregando uma abordagem matemática baseada nos conceitos de isometria: rotação e reflexão aplicadas no tabuleiro, além de conceitos da análise combinatória: permutação, arranjo e combinação simples, aplicadas na disposição das peças. O objetivo é encontrar configurações que satisfaçam as restrições dos problemas e analisar se essas configurações são fundamentais, ou são soluções obtidas de uma já existente através das propriedades geométricas do tabuleiro de xadrez. Para isso, foi utilizada a estratégia de reduzir as oito rainhas para o menor número possível de rainhas que possibilite uma solução para o problema, então a análise se iniciou com quatro peças. Os resultados obtidos revelam novas perspectivas na resolução do desafio, identificando configurações simétricas que representam soluções equivalentes para o problema. Foi possível concluir que através da aplicação de simples conceitos matemáticos, explorou-se um antigo problema, comum da área da computação, que pode envolver uma abordagem de algoritmos mais complexa na busca de soluções, de uma maneira simples e compreensível para todos os leitores.

Palavras-chave: xadrez; desafio; oito rainhas; rotação e reflexão; análise combinatória.

ABSTRACT

A million dollars awaits the solver of the chess challenge: arranging a thousand queens on a 1000x1000 chessboard so that none of them attacks another queen. This prize is offered by the Clay Mathematics Institute and remains unclaimed to this day. But the classic chess problem involves "only" eight queens on an 8x8 board, this study aims to explore solutions to this challenge using a mathematical approach based on the concepts of isometry: rotation and reflection applied to the board, along with combinatorial analysis concepts such as permutation, arrangement, and simple combination applied to piece arrangement. The goal is to find configurations that meet the problem's constraints and analyze whether these configurations are fundamental or derived from existing ones through the geometric properties of the chessboard. To achieve this, the strategy involves reducing the eight queens to the smallest possible number that allows a solution to the problem, beginning with four pieces. The results reveal new perspectives in solving the challenge, identifying symmetrical configurations representing equivalent solutions. It can be concluded that by applying simple mathematical concepts, it was possible to explore an old, classic problem in the field of computing, which involves a more complex algorithmic approach, in a simple and understandable manner for all readers.

Keyword: chess; challenge; eight queens; rotation and reflection; combinatorial analysis.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O jogo de xadrez tem cativado e desafiado mentes por séculos, proporcionando uma rica fonte de estudo e pesquisa em diversas áreas, principalmente na matemática. Dentro deste campo de estudo, o problema das oito rainhas surgiu como um desafio clássico que atrai a atenção de matemáticos, cientistas da computação e entusiastas do jogo.

O problema das oito rainhas já foi citado em diversos estudos, e o desafio consiste em posicionar oito rainhas em um tabuleiro de xadrez de dimensões 8x8, de modo que nenhuma rainha possa atacar outra, como explicado por Campbell (1977). Em outras palavras, nenhuma rainha deve estar na mesma linha, coluna ou diagonal de outra. Embora sua formulação seja simples, a solução deste problema apresenta alta complexidade, devido a quantidade de diferentes disposições possíveis das peças no tabuleiro, exploradas pelos conceitos da análise combinatória.

Por meio desta pesquisa, buscou-se não apenas aprofundar o entendimento do problema das oito rainhas, mas também que seja despertada a curiosidade a respeito do jogo de xadrez e sua aplicação na área das ciências exatas, trazendo ao leitor um interesse por outras possíveis aplicações relacionadas com o jogo. Espera-se que seja possível estabelecer uma percepção da existência de interdisciplinaridade entre as áreas de matemática e computação através do desafio estudado. Porém o foco desse trabalho é abordar especificamente o campo matemático, deixando a área computacional para outros estudos. Vale ressaltar que o desafio não é tão estudado na área matemática como é na área computacional, como já explorado por Souza (2019), que apresentou um novo algoritmo para o problema, observando-o por outra perspectiva: a de validar soluções (ou conjuntos de dados) pré-existentes que podem ter as características de uma solução válida para o problema de n-rainhas, sendo n um número natural, podendo assumir um valor maior ou menor que oito.

Este trabalho se propôs a explorar o desafio das oito rainhas no contexto do xadrez, com os objetivos específicos:

- Apresentar ao leitor uma antiga instigação do xadrez: o desafio das oito rainhas.

- Explorar meios que mostrem quantas soluções existem para o problema em um grau de menor complexidade, utilizando conceitos da Análise Combinatória.

- Analisar as soluções existentes, relacionando com as isometrias de rotação e reflexão, analisando conceitos da Álgebra Linear.

No segundo capítulo foi apresentada uma abordagem histórica sobre o jogo de xadrez, investigando sua origem e disseminação pelo mundo e fazendo uma alusão dos jogos e das peças com a Idade Média. Em seguida o jogo foi relacionado com a matemática, mostrando as possíveis associações com diferentes conceitos e contando uma lenda sobre o estudo de crescimento exponencial. Foi apresentado o número de Shannon e também foi falado sobre a notação algébrica dos movimentos e das peças de uma partida de xadrez.

No terceiro capítulo foi introduzido o desafio das oito rainhas e como são dadas suas soluções, bem como os primeiros matemáticos e enxadristas que participaram da elaboração, publicação e resolução do desafio. Também foi brevemente apresentado uma maneira de resolver o problema usando algoritmo através de uma abordagem chamada de *backtracking*[1] na área da computação.

No quarto capítulo foram expostos todos os conceitos matemáticos usados na análise e exploração das soluções do problema: análise combinatória, plano cartesiano e isometrias.

No quinto capítulo, foram exploradas as soluções do problema, partindo de uma quantidade reduzida de rainhas, associando cada critério para ser uma solução válida com os conceitos da análise combinatória: combinação simples, arranjo e permutação, finalizando com a análise de uma das soluções fundamentais do problema com oito rainhas em um tabuleiro oito por oito, fazendo relações com o plano cartesiano e as isometrias de rotação e reflexão.

Resolver problemas e desafios é uma fonte de motivação para muitas pessoas, e o xadrez pode oferecer isso, desde problemas de matemática simples até outros mais complexos. A motivação para realização desse trabalho surgiu do desejo de explorar mais a fundo os aspectos teóricos e práticos do xadrez, como suas variantes, histórias e desafios.

---

[1] *Backtracking* é um algoritmo genérico que busca, por força bruta, soluções possíveis para problemas computacionais (tipicamente problemas de satisfações à restrições).

2 HISTÓRIA DO XADREZ

2.1 Origem do Xadrez

Considerado pela *SportAccord*[2], como um dos cinco esportes não físicos, o xadrez é um dos jogos de tabuleiro mais populares do mundo. Historicamente é classificado como um jogo de guerra, onde os dois jogadores utilizam estratégias para comandar suas dezesseis peças, que compõem inicialmente um exército de forças iguais para os adversários: oito peões, duas torres, dois cavalos, dois bispos, uma rainha e um rei. Essas estratégias garantem que o xadrez não é um jogo de "acaso", não é possível contar com a sorte para ganhar uma partida, ou culpar o azar por perder, é uma competição que exige muito raciocínio dos jogadores, sendo esse, o principal responsável pelos resultados. O tabuleiro de xadrez se torna o campo de batalha e a vitória cai sobre o time que utiliza as melhores técnicas e táticas, a fim de que todos os movimentos cumpram o objetivo final de capturar o rei adversário, dando o mate.

Sobre suas origens, ainda há muita indagação entre os historiadores do enxadrismo, mas a mais aceita, descrita por Murray (1913), é que o xadrez tenha se originado na Índia, na região do Ganges, entre o século XI e XII, na época o jogo foi chamado de *chaturanga*, sendo então disseminado primeiramente em todo o continente asiático, o que dá margem para alguns estudos também apontarem a China e a Pérsia como origem do jogo. A disseminação do xadrez pelo mundo ao longo dos séculos foi um processo complexo que envolveu migrações, conquistas, comércio e, em grande parte, a expansão do mundo islâmico e a interação entre culturas e civilizações. Por volta de 625, o xadrez foi introduzido na Pérsia (atual Irã) e sofreu modificações no nome e na movimentação das peças, sendo chamado de *shatranj*. Porém, logo após a conquista muçulmana na região (631 – 651), durante o período islâmico, o jogo foi difundido e popularizado. Apesar do islamismo proibir jogos de azar, o *shatranj* era considerado um jogo de guerra, portanto, permitido. Com

---

[2]organização global que reúne e representa diversas federações internacionais de esportes olímpicos e não olímpicos, bem como organizadores de eventos esportivos internacionais. The SportAccord World Mind Games. Disponível em: < http://www.worldbridge.org/competitions/the-international-events-partecipated-by-the-wbf/sportaccord-world-mind-games/>. Acesso em 19 jul. 2024

isso, vários califas[3] tornaram-se admiradores do jogo. Os melhores jogadores recebiam recompensa por jogar, ensinar e escrever livros sobre o xadrez.

Os registros escritos por Castro (1994), indicam que o jogo foi levado para a Rússia a partir do século IX e na Europa Ocidental entre os séculos VIII e X, por volta do ano 1000 o jogo já era reconhecido em boa parte do continente europeu. O xadrez sofreu mudanças significativas na Europa, especialmente durante o Renascimento. O jogo evoluiu para se tornar mais rápido e dinâmico, culminando nas regras modernas do xadrez por volta do século XV. A era das “Grandes Descobertas”[4] e as rotas de comércio marítimo também contribuíram para a disseminação do xadrez pelo mundo. O jogo tornou-se popular em várias regiões e culturas ao longo dos séculos, incluindo África, Ásia, América e Oceania.

Durante o século XIX aconteceu a popularização do xadrez como um esporte competitivo, com o estabelecimento de competições e campeonatos. O crescimento das competições internacionais e a organização de torneios contribuíram para a disseminação global do xadrez. Hoje, o xadrez é praticado em todo o mundo e é reconhecido como um jogo de tabuleiro intelectual e um esporte competitivo. O seu espalhamento ao longo da história reflete as interações culturais e a transmissão de conhecimento entre diferentes civilizações. Independentemente de sua origem, o xadrez se popularizou mundialmente, com sua difusão entre diversas culturas e civilizações.

Ao longo de todos esses séculos, o jogo foi ganhando adaptações e pequenas variações nas regras, de acordo com o local e a cultura em que era praticado. Por exemplo, quando o jogo chegou na Europa e se popularizou na Idade Média, as peças receberam os nomes pelos quais conhecemos hoje, refletindo a maneira que os povos viviam de acordo com a força e o poder que as peças tinham no jogo, como : a peça que se movimentava apenas uma casa e sempre para frente (com exceção apenas do primeiro movimento, que é permitido que a peça avance duas casas), recebeu o nome de peão; a que se movimentava em qualquer direção e por quantas casas quisesse, ficou conhecida como rainha, a peça mais poderosa do jogo; a peça que

[3] Califas exerciam o papel de chefes de Estado, de governo e, algumas vezes, religiosos da comunidade mulçumana.

[4] foi um período na história que abrangeu os séculos XV e XVI, os exploradores europeus realizaram viagens arriscadas que resultaram na expansão dos horizontes geográficos, culturais e comerciais da humanidade.

caso capturada, declara a perda da partida, foi nomeada como rei, pois nos tempos medievais, a rendição do rei significava a perda de todo o reino e assim com as outras peças, cavaleiros, bispos e torres, o xadrez pode ser interpretado como uma representação da hierarquia da Idade Média (Cordez, 2011).

2.2 Xadrez na Matemática

Na matemática, o xadrez possui inúmeras aplicações e essa conexão é uma das razões pelas quais o jogo é frequentemente usado como uma ferramenta educacional. É possível introduzi-lo no ensino desde os anos iniciais. Seu tabuleiro 8x8 permite explorar diversos conteúdos matemáticos, como área e perímetro, por possuir a forma de um quadrado; as coordenadas do tabuleiro podem ser uma maneira de introduzir as coordenadas cartesianas, fazendo uma analogia das casas do tabuleiro com os pontos de um plano cartesiano.

Também é possível estudar o reconhecimento de padrões e regularidades, o que está diretamente ligado à matemática, pois jogadores de xadrez frequentemente desenvolvem a capacidade de reconhecer configurações específicas das peças no tabuleiro, uma habilidade que também é valiosa em raciocínio matemático. Portanto a prática desse jogo serve como um estímulo e é capaz até de melhorar o desempenho escolar dos alunos, refletindo em suas notas nas provas de matemática, como citado no estudo feito por Rosholm, Mikkelsen e Gumede (2017). A probabilidade e análise combinatória são assuntos que também podem ser muito desenvolvidos através do xadrez e será mais explorado ao decorrer do trabalho.

A “Lenda de Sissa” é contada no livro Adventure of Chess de Lasker, (1972) e é uma curiosa abordagem para o assunto de potências e crescimento exponencial que pode ser explorado através do xadrez. A história de Sissa Ibn Dahir é uma lenda associada à origem do jogo, mas é importante observar que ela não possui base histórica sólida e é considerada uma lenda pois foi transmitida informalmente ao longo dos séculos.

De acordo com a lenda, Sissa Ibn Dahir era um nobre persa que viveu na corte do Rei Shirham, durante o século VI ou VII. Ele era conhecido por ser um homem muito inteligente e um dia, Sissa inventou um jogo para entreter o rei, que estava enfrentando momentos difíceis em seu reinado. Esse jogo era o xadrez, e Sissa explicou ao rei que o jogo poderia ajudá-lo a entender as complexidades e desafios de governar um reino, mais uma vez relacionando as peças com os papéis de cavaleiros, reis, rainhas, peões e bispos na realidade da época.

Ao apresentar o xadrez ao rei, Sissa explicou o papel de cada peça, suas movimentações e as regras do jogo. O rei ficou tão impressionado com o jogo que ofereceu a Sissa a oportunidade de escolher sua recompensa e Sissa fez um pedido, que aos olhos do rei, era muito simples de atender: um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, dois grãos de trigo pela segunda casa do tabuleiro, quatro grãos pela terceira casa, e assim por diante, sempre dobrando a quantidade de grãos para cada casa seguinte. O rei concordou prontamente, e pediu para que seus homens começassem a trazer os grãos de trigo. No entanto, a soma total de grãos de trigo acabou sendo enorme, ultrapassando a capacidade do reino de fornecer. Sissa, com seu pedido aparentemente simples, demonstrou a rapidez com que as quantidades podem aumentar exponencialmente. Essa história é muitas vezes usada para ilustrar conceitos de progressão geométrica e a capacidade humana de subestimar o poder do crescimento exponencial. Embora a lenda de Sissa Ibn Dahir não tenha fundamentos históricos sólidos, ela destaca a ligação simbólica entre o xadrez, a estratégia e a matemática, bem como a habilidade de Sissa em criar um jogo que oferece diversão e desafio.

Por ser um jogo de alta complexidade, através de suas partidas e jogadas, também é possível realizar estudos na área das ciências exatas em um âmbito mais teórico, envolvendo assuntos relacionados à análise combinatória e probabilidade, porém os números trabalhados são relativamente altos. Apenas nos quatro primeiros lances de uma partida de xadrez existem cerca de 72 mil diferentes posições geradas pelo movimento de uma única peça.

A complexidade de uma única partida desse jogo é estimada a partir do número de Shannon, calculado pela primeira vez por Claude Elwood Shannon, um matemático e engenheiro estadunidense, conhecido como o “pai da teoria da informação”, que chegou nessa descoberta quando estava programando um computador para jogar uma partida de xadrez na década de 50. De acordo com Shannon (1950), uma partida de xadrez tem em média quarenta lances[5], e cada movimento feito pelos enxadristas

[5] é considerado um lance completo a movimentação de uma das peças feita pelos dois jogadores.

é escolhido entre uma média de trinta movimentos, considerando uma partida típica. Sendo assim, para cada lance existem 30x30 possibilidades de movimentos, considerando a estimativa de 40 lances por partida, tem-se $(30x30)^{40}$, isso é 900^{40} partidas de xadrez diferente possíveis, o que é aproximadamente 10^{120}, uma estimativa teórica e grosseira, mas que evidencia a complexidade extraordinária do xadrez. Na prática, as partidas de xadrez raramente exploram uma fração significativa desse vasto espaço de possibilidades, mas a complexidade teórica destaca porque o xadrez continua sendo um jogo tão fascinante e estudado.

Além de tudo isso, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) também reconhece a importância do uso de jogos no ensino da matemática como uma ferramenta pedagógica importante. Os jogos são vistos como estratégias que podem facilitar a aprendizagem, promover a resolução de problemas, incentivar o pensamento crítico e criativo, além de tornar o processo de ensino-aprendizagem mais lúdico e motivador para os alunos.

Na prática, a BNCC sugere que os professores integrem jogos ao planejamento das aulas de matemática de forma intencional e alinhada aos objetivos de aprendizagem. O xadrez é um ótimo exemplo de jogo que pode ser utilizado como parte de um processo pedagógico bem estruturado e não apenas como atividades recreativas.

2.3 Notação Algébrica e Movimento das Peças

Conhecendo mais a fundo no tabuleiro do jogo, o movimento das peças e a linguagem algébrica do desenvolvimento do xadrez, tem-se que o tabuleiro é composto por 64 casas quadradas, organizadas em uma grade de 8x8. O jogo inicia-se com 32 peças, divididas em duas cores: brancas e pretas, cada jogador começa a partida controlando 16 peças e o jogador com as peças brancas inicia a partida com o primeiro movimento. As peças e suas movimentações estão descritas abaixo, cada peça é representada por um letra maiúscula (com exceção do peão), referente ao seu nome em inglês :

K - Rei (*King*): O rei move-se para qualquer casa adjacente (horizontal, vertical ou diagonal), movendo-se uma e apenas uma casa.

Q - Dama (*Queen*): A dama pode se mover em qualquer direção (horizontal, vertical ou diagonal) por quantas casas o jogador desejar.

R - Torre (*Rook*): A torre move-se na horizontal ou vertical, por quantas casas o jogador desejar.

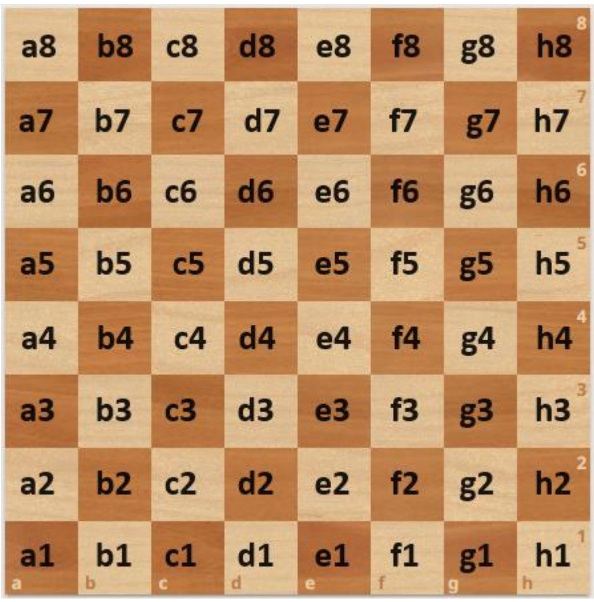
B - Bispo (*Bishop*): O bispo move-se na diagonal por quantas casas o jogador desejar também, até aqui pode-se perceber que os movimentos do bispo e da torre juntos, formam a movimentação da rainha, algumas vezes chamada de dama, a peça mais forte do jogo.

N - Cavalo (*Knight*): O cavalo tem um movimento especial em forma de "L", movendo-se duas casas em uma direção (horizontal ou vertical) e uma casa perpendicular a essa direção. O cavalo é a única peça do jogo que pode pular sobre outras peças.

Peão (*Pawn*): Os peões movem-se apenas para frente, se é o primeiro movimento desse peão, o jogador tem a opção de movê-lo uma ou duas casas para frente, os demais movimentos contam com apenas uma casa de deslocamento, porém a captura das peças inimigas é feita diagonalmente.

A linguagem algébrica é uma notação utilizada para representar os movimentos no xadrez. Cada casa é identificada por uma combinação de letra e número. As letras representam as colunas (de "a" até "h"), e os números representam as fileiras (de 1 até 8). Por exemplo, a casa no canto inferior esquerdo é a casa "a1", e a casa no canto superior direito é a casa "h8".

Figura 1: Notação algébrica das casas do tabuleiro



Fonte: Próprio do autor, 2024.

Essa notação algébrica no jogo tem como objetivo ser uma forma padronizada de registrar movimentos e partidas de xadrez. Ela é amplamente utilizada em torneios, livros de xadrez, revistas e outras formas de registro de partidas. A notação algébrica é uma maneira eficiente e universalmente compreendida de descrever as jogadas no tabuleiro de xadrez.

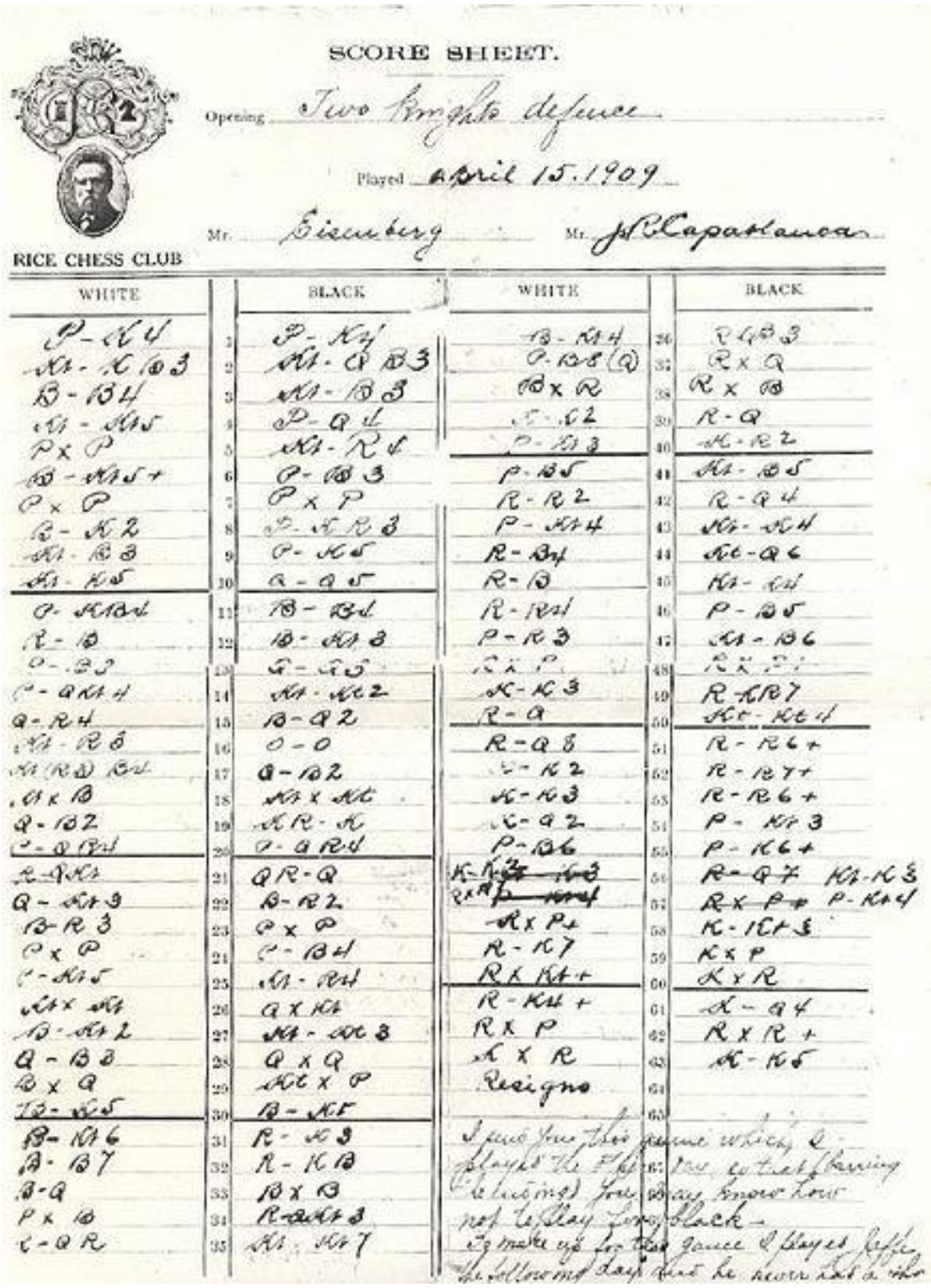
Além do registro de partidas, alguns dos propósitos principais da notação algébrica no xadrez são para a análise e estudo das partidas pelos jogadores, que investigam diferentes jogadas de “aberturas”, meio-jogo e finais, isso facilita a revisão e compreensão de um jogo, tanto para o próprio jogador quanto para outros interessados. Também é utilizada para o treinamento de novos jogadores, pois a linguagem é de compreensão universal, ela ajuda os jogadores a compreenderem melhor as estratégias, táticas e padrões no xadrez. Praticantes de diferentes países e línguas podem se comunicar efetivamente usando essa notação, o que também facilita na publicação e compartilhamento de documentos e arquivos que disseminam conhecimento sobre o xadrez.

Assim, a notação algébrica desempenha um papel essencial na documentação, análise e comunicação no mundo do xadrez, tornando mais fácil para os jogadores estudarem e compartilharem experiências de jogo.

Quando se fala em registrar partidas de xadrez, além da notação algébrica, a súmula é um elemento importante, uma ferramenta utilizada para registrar oficialmente todos os lances de uma partida de xadrez, de ambos os adversários, podendo ser em um papel impresso, ou uma planilha digital.

A Figura 2 mostra como eram as anotações de uma súmula real de uma partida de xadrez jogada em 1909 em um clube de xadrez em Nova Iorque.

Figura 2: Súmula de uma partida entre Louis Eisenberg e José Capablanca em 1909.



Fonte: <https://www.chess.com/pt-BR/terms/sumula-xadrez>

A figura não está com uma boa qualidade, portanto parte dela foi transcrita, traduzida e exemplificada na Tabela 1:

Tabela 1: Tradução da súmula da partida de xadrez da figura 1.

Score sheet (Folha de pontuação)	
Openning: Two knights defense (Jogada de abertura: Defesa dos dois cavalos)	
Played: April, 15. 1909 (Jogada em 15 de Abril de 1909)	
Mr. Eisenberg	*Mr. José Capablanca*
Rice Chess Club (Nome do clube de xadrez que ocorreu a partida)	
White (Movimento das peças brancas)	***Black*** (Movimento das peças pretas)
e4 (Peão se move para casa e4)	***c5*** (Peão na casa c5)
Nf3 (Cavalo se move para casa f3)	***g6*** (Peão na casa g6)
d4 (Peão na casa d4)	***cxd4*** (Peão da coluna c captura peça na casa d4)
Nxd4 (Cavalo captura peça na casa d4)	***Bg7*** (Bispo se move para casa g7)
Be3 (Bispo se move para casa e3)	***Rh6*** (Torre se move para casa h6)
Nxc6 (Cavalo captura peça na casa c6)	***bxc6*** (Peão da coluna b captura peça na casa c6)
Qc3 (Rainha se move para casa c3)	***Nf6*** (Cavalo se move para casa f6)

Fonte: Próprio do autor, 2024.

O xadrez é um jogo universal que ultrapassa fronteiras culturais, linguísticas e sociais, que tem como um dos objetivos explorar a diversidade de pensamento e estratégia entre seus jogadores que estão espalhados pelo mundo. Além do modo clássico do jogo, existem diversos desafios relacionados com ele, suas peças e seu tabuleiro. No capítulo seguinte será apresentado a origem de um deles: O desafio das oito rainhas.

3 DESAFIO DAS OITO RAINHAS

O desafio consiste em dispor oito rainhas em um tabuleiro de xadrez de dimensões *8x8*, de maneira que as peças não se ataquem entre si, levando em consideração o movimento da peça. Por ser a mais poderosa do jogo, ela pode se movimentar em todas as direções, horizontalmente, verticalmente e em diagonais, por quantas casas quiser e nos sentidos de ida e volta, ou seja, nenhuma rainha deve ficar em posição de ataque com qualquer outra, não podendo estarem em mesmas linhas, colunas ou diagonais do tabuleiro.

É considerado um clássico problema no campo da computação, pois é frequentemente utilizado como um desafio de programação e algoritmo. A solução envolve encontrar todas as configurações válidas de disposição no tabuleiro para as oito rainhas. Existem várias abordagens para resolver o problema, incluindo algoritmos de busca exaustiva[6], *backtracking* e otimizações para reduzir o número de verificações necessárias.

Uma maneira de resolver o problema das oito rainhas usando algoritmo é pela abordagem de *backtracking*, como mostra Souza (2019). Se trata de uma técnica de solução de problemas que se baseia na tentativa sistemática de explorar todas as possíveis soluções para um problema até encontrar aquela que satisfaz determinadas condições. É frequentemente utilizado para resolver problemas de otimização, combinatórios ou de decisão, onde é necessário encontrar uma solução dentre várias possibilidades. O algoritmo está descrito a seguir:

Inicialização: Colocar a primeira rainha em uma posição arbitrária no tabuleiro.

Movimento: Tentar colocar a próxima rainha em uma coluna diferente, evitando conflitos com as rainhas já colocadas.

Verificação: Verificar se a configuração atual é válida, ou seja, se as rainhas não estão em posição de ataque umas com as outras.

Recursão: Se a configuração atual for válida, repetir os passos de Movimento, Verificação e Recursão para a próxima rainha.

---

[6] tipo de algoritmo de uso geral que consiste em enumerar todos os possíveis candidatos de uma solução e verificar se cada um satisfaz o problema.

Backtrack: Se não for possível posicionar a próxima rainha em uma coluna sem conflitos, retroceder para a posição anterior e tentar uma nova configuração.

Terminação: Repetir esse processo até que todas as oito rainhas estejam colocadas ou todas as possibilidades tenham sido exploradas.

A resolução desse problema destaca a importância da recursão e do *backtracking* em algoritmos, porém a eficiência da solução pode ser otimizada através de outras técnicas de programação específicas. O problema das oito rainhas é um exemplo clássico que ilustra muitos conceitos em ciência da computação, incluindo programação recursiva, estruturas de dados e algoritmos de busca, mas além dessas aplicações, problema das oito rainhas pode ser explorado por meio de vertentes matemáticas, que foram estudadas no decorrer desse trabalho.

Esse desafio envolvendo oito rainhas e um tabuleiro surgiu em 1848, proposto pelo enxadrista Max Bezzel, como um desafio para os leitores da revista alemã de xadrez, *Schachzeitung*. Apenas duas soluções foram encontradas e publicadas nessa mesma revista pelos leitores em 1949. No entanto, o problema se tornou mais conhecido quando Franz Nauck, propôs novamente o desafio, publicando-o no Illustrirte Zeitung of Leipzig, um jornal ilustrado da região de Lípsia, na Alemanha, na sua edição de 1º de junho de 1850.

Nauck foi um jogador de xadrez alemão do século XIX e uma figura importante no desenvolvimento da teoria do xadrez. Ele nasceu em 27 de agosto de 1821 e faleceu em 24 de setembro de 1885 e é mais conhecido por suas contribuições e análises para a teoria das aberturas de xadrez. Além disso, Franz Nauck era um correspondente de xadrez prolífico[7] e escreveu para várias publicações sobre xadrez. Sua dedicação ao estudo teórico e à disseminação do conhecimento contribuiu significativamente para o desenvolvimento do xadrez como um jogo estratégico e intelectual. Nauck propôs novamente o problema, e adicionou um subproblema, desafiando quem conseguisse encontrar todas as soluções do desafio com duas rainhas já fixadas nas casas b4 e d5. No dia 29 de junho de 1850, Nauck publicou a solução encontrada por ele mesmo, considerando um total de 60 soluções, mas teve que se corrigir mais tarde.

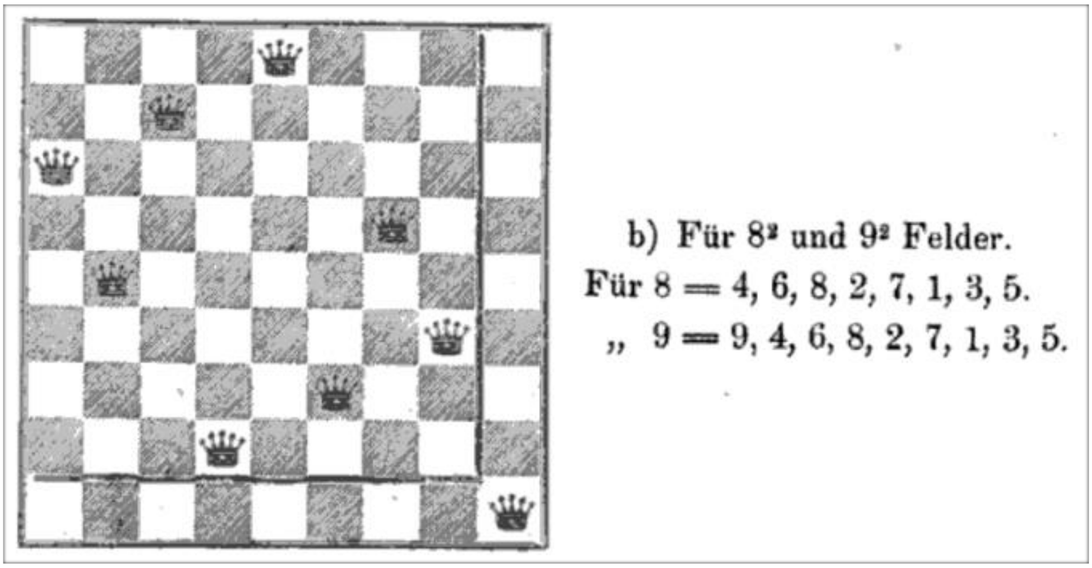
[7] o autor ou criador de muitas obras e coisas, que produz em grandes quantidades.

Muitos entusiastas tentaram resolver e alguns matemáticos conhecidos, como Friedrich Gauss, se envolveram com o problema, quando viu a publicação de Nauck no jornal, Gauss achou um desafio interessante, e através de cartas, mostrou ao seu amigo astrônomo H. C. Schumacher. Eles começaram então a trocar correspondências no período compreendido entre setembro e outubro de 1850 discutindo as soluções do desafio, Gauss primeiramente chegou a 76 soluções, depois corrigiu para 72, já Schumacher chegou a estimativas de 120 e 168 soluções.

No final de setembro desse mesmo ano, Nauck publicou na revista sua correção da quantidade de soluções para o desafio, confirmando então que seriam 92 soluções possíveis e essas seriam as únicas. Ele apresentou as 92 soluções existentes e ainda generalizou o problema, sugerindo uma quantidade n de rainhas, para um tabuleiro nxn, definindo uma nova alçada para o problema, que ficou conhecido como o “a completude das n-rainhas”. Em um grau de menor complexidade, com menos rainhas, algumas já eram pré-alocadas no tabuleiro e as restantes deviam ser completadas a fim de se obter uma solução existente, respondendo às perguntas “Existe solução possível com estas rainhas já colocadas? Se sim, quais são?”.

Em 1874, Emil Pauls, um farmacêutico alemão que escrevia artigos sobre ciências farmacêuticas, química e xadrez, apresenta através de dois artigos publicados num periódico de xadrez alemão, um conjunto de soluções para arranjos de *n*-rainhas para todos os valores de $n > 3$. Alguns exemplos do seu trabalho estão apresentados na Figura 3, e é possível observar que Pauls utiliza o fato de que duas rainhas posicionadas a uma distância equivalente a um movimento de cavalo são independentes uma da outra. Pauls também reafirmou a demonstração de que a lista de soluções apresentadas por Nauck estava completa, com todas as soluções possíveis (Bells e Stevens, 2008).

Figura 3: Uma solução para 9 rainhas proposta por E. Pauls em 1874.



Fonte: <https://sites.uab.edu/isc/traveling-queen-stem-2/>

A partir de então muitos trabalhos e pesquisas foram feitos sobre o problema, principalmente algoritmos na área da computação. Para esse projeto de pesquisa, o desafio das 8 rainhas foi escolhido como objeto de estudo, para trazer uma maior contribuição na área da matemática e por se tratar de um jogo popular, despertar a curiosidade do leitor e do estudante para descobrir como a matemática pode ser aplicada em diversos elementos do cotidiano.

4 CONCEITOS MATEMÁTICOS

Compreender os conceitos matemáticos por trás de um determinado assunto é essencial para o entendimento de qualquer trabalho relacionado com a área. Além de aproximar o leitor da própria matemática, a partir dos conceitos explicados, é possível fazer reflexões, análises e conclusões com mais precisão.

4.1 Análise combinatória

A análise combinatória é uma área da matemática que estuda a contagem e a organização de elementos de um conjunto ao qual pertencem esses elementos. Ela se concentra em problemas relacionados à contagem de arranjos, combinações e permutações. Esses três conceitos serão aplicados na análise das soluções do problema das oito rainhas, portanto se faz necessária uma descrição de cada um deles, baseada na teoria de Vasconcelos e Rocha, 2019.

A permutação refere-se a uma disposição ordenada de elementos distintos de um conjunto. Em outras palavras, é uma maneira específica de organizar os elementos de um conjunto em uma ordem particular e cada uma dessas ordens configura uma diferente permutação, pode ser entendido como fila, pois é uma organização que a principal característica é o fato da ordem dos elementos importar. A fórmula para calcular o número de permutações simples é dada por:

$$P(n) = n!.$$

onde $n!$ *("n fatorial")* é o produto de todos os números inteiros de 1 a n, $P(n) = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Para um conjunto $\{A, B, C\}$, as permutações simples são $ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$. Essa contagem é aplicada em uma variedade de situações práticas, como na organização de livros em uma prateleira e pessoas numa fila.

Imagine que você tem 4 livros diferentes e deseja organizá-los em uma prateleira. De quantas maneiras diferentes você pode fazer isso? Usando o cálculo de fatorial, tem- se $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ maneiras diferentes.

O arranjo refere-se a uma seleção ordenada de elementos distintos de um conjunto, porém, diferente de uma permutação, um arranjo envolve escolher apenas alguns dos elementos do conjunto e organizá-los em uma ordem específica. A notação comum para representar arranjos é $A(n,k)$, onde n é o número total de elementos e k é o número de elementos que estão sendo escolhidos e dispostos. A fórmula para calcular o número de arranjos é dada por:

$$A(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Por exemplo, se tivermos um conjunto $\{A,B,C\}$ e quisermos encontrar todos os arranjos de 2 elementos, as possíveis escolhas seriam AB, AC, BA, BC, CA, CB.

Imagine que você deseja formar uma senha usando 3 dígitos escolhidas a partir de um conjunto de dez algarismos. A ordem dos dígitos na senha importa. Utilizando a fórmula de arranjo de maneira simplificada, tem-se $10 \times 9 \times 8 = 720$ maneiras diferentes de criar essa senha.

Fazendo uma comparação com a permutação, a principal diferença é que os arranjos consideram apenas uma quantidade específica de elementos e não todos os elementos do conjunto. Isso faz com que o número de arranjos geralmente seja menor que o número de permutações de um mesmo conjunto, com a mesma quantidade de elementos. Arranjos são utilizados em diversas situações práticas, como na organização de eventos, escolhas de comissões, pódios de competições, entre outros contextos em que a ordem de seleção é relevante.

A combinação refere-se a uma escolha de elementos distintos de um determinado conjunto, mas sem levar em consideração a ordem em que eles são escolhidos, diferente da permutação e do arranjo que são montadas “filas”, nas combinações são montados “grupos”, ou seja, a ordem dos elementos não importa. O número de combinações é usado para calcular quantos subconjuntos diferentes podem ser formados a partir de um conjunto de elementos. A notação comum para representar combinações é $C(n,k)$, onde n é o número total de elementos e k é o número de elementos que estão sendo escolhidos. A fórmula para calcular o número de combinações é dada por:

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Por exemplo, se tivermos um conjunto $\{A,B,C\}$, e quisermos calcular todas as combinações de 2 elementos, as possíveis escolhas seriam apenas AB, AC, BC, pois o que importa são os elementos (letras) escolhidos, e não a ordem em que aparecem. Se quiséssemos calcular todas as combinações de 3 elementos, ela seria única.

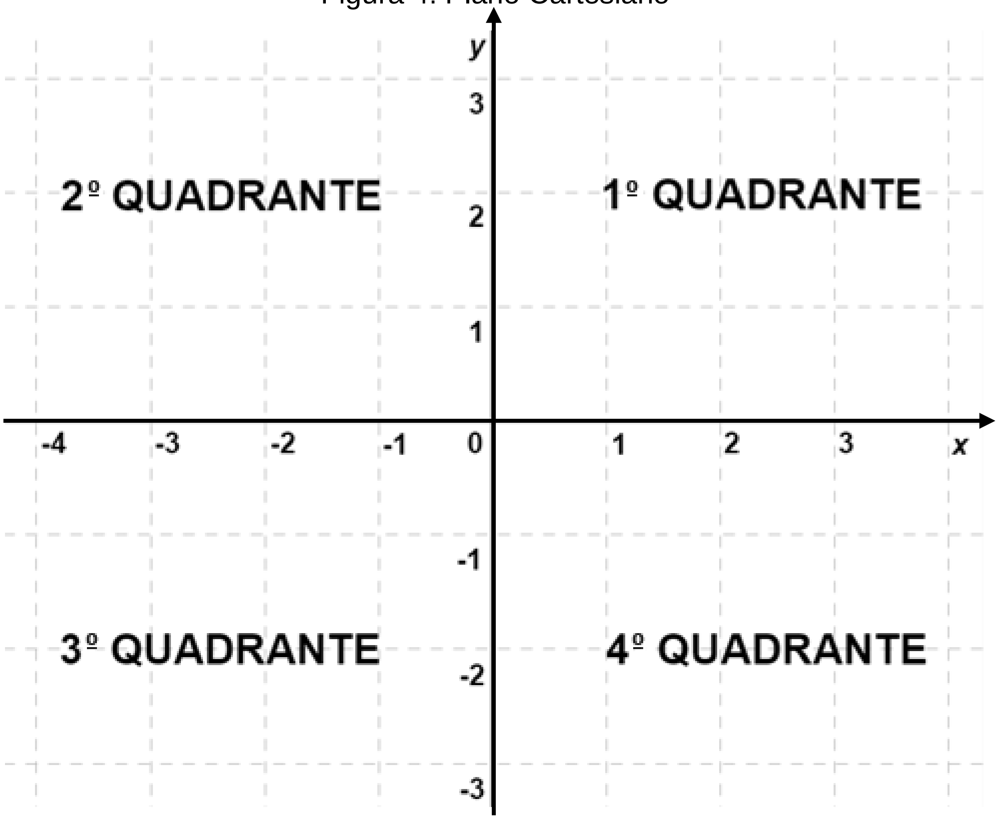
Um exemplo prático seria um grupo de 5 amigos: Alice, Bruno, Carla, Daniel e Elisa, e você quer formar uma equipe de 3 pessoas para participar de um jogo. A ordem em que você escolhe as pessoas não importa. Tem-se $5 \times 4 \times 3 = 60$ maneira de formar a equipe, porém considerando a ordem, para excluir os casos repetidos divide-se por $3! = 6$, resultando em 10 equipes distintas.

As combinações são usadas em situações onde a ordem dos elementos não é relevante, como na formação de comitês: calcular o número de maneiras de formar um comitê a partir de um grupo maior de pessoas, sem se preocupar com a ordem em que as pessoas são escolhidas; seleção de equipes: determinar quantas equipes diferentes podem ser formadas a partir de um grupo de jogadores, sem considerar a ordem de seleção dos jogadores; escolha de itens: calcular o número de maneiras de escolher um conjunto específico de itens de um menu, catálogo ou lista, independentemente da ordem em que são escolhidos; entre outros. Diferentemente das permutações, as combinações não consideram a ordem dos elementos escolhidos, o que as torna adequadas para situações em que apenas a escolha dos elementos é importante, não a ordem específica em que aparecem (Vasconcelos e Rocha, 2019).

4.2 Plano cartesiano

O plano cartesiano é um sistema de coordenadas com duas dimensões que utiliza duas retas perpendiculares, chamadas de eixos, para representar elementos geométricos através de pontos no espaço, ou os próprios pontos. Este sistema foi introduzido pelo matemático René Descartes e é fundamental no estudo da Geometria Analítica, que é um ramo da matemática que combina conceitos da Geometria com conceitos da Álgebra, especialmente Álgebra Linear. O plano cartesiano é muito versátil pois pode ser aplicado em outras áreas da matemática, física, estatística, entre outros.

Figura 4: Plano Cartesiano



Fonte: Próprio do autor, 2024.

O plano cartesiano possui os seguintes elementos importantes:

O ponto de interseção dos eixos que são ortogonais, geralmente denotado por $(0,0)$, é chamado de origem. Cada ponto no plano é identificado por um par ordenado de números (x, y), onde x é a coordenada horizontal e y é a coordenada vertical.

Eixo das abscissas $(eixo\ x)$: É a linha no sentido horizontal que se estende da esquerda para a direita. Os pontos que pertencem a esse eixo são denotados por coordenadas do tipo $(x, 0)$, onde o módulo de x é a distância do ponto até a origem ao longo do eixo x.

Eixo das ordenadas $(eixo\ y)$: É a linha no sentido vertical que se estende de baixo para cima. Os pontos que pertencem a esse eixo são denotados por coordenadas do tipo $(0, y)$, onde o módulo de y é a distância do ponto até a origem ao longo do eixo y.

A representação visual do plano cartesiano é frequentemente apresentada com quadrantes:

1º Quadrante: Ponto com abscissa e ordenada positivas tal que
$\{(x, y);\ x > 0\ e\ y > 0\}$.

2º Quadrante: Ponto com abscissa negativa e ordenada positiva tal que
$\{(x, y);\ x < 0\ e\ y > 0\}$.

3º Quadrante: Ponto com abscissa e ordenada negativas tal que
$\{(x, y);\ x < 0\ e\ y < 0\}$.

4º Quadrante: Ponto com abscissa positiva e ordenada negativa tal que
$\{(x, y);\ x > 0\ e\ y < 0\}$.

O plano cartesiano é uma ferramenta fundamental em Geometria Analítica, permitindo a descrição e análise de relações matemáticas, gráficos de funções, resolução de sistemas de equações, entre outras aplicações matemáticas.

4.3 Isometrias

Na Álgebra Linear, quando se trata de planos, existem alguns conceitos relacionados a transformações geométricas, que por sua vez, são aplicações que correspondem biunivocamente cada ponto do plano com algum outro ponto desse mesmo plano, ou seja, são transformações que se referem a mudanças na posição, forma, tamanho ou orientação de objetos geométricos. Se essas aplicações possuem determinadas características, dizemos que essa transformação geométrica é uma isometria do plano (Anton e Rorres, 2012).

A característica que determina uma isometria é a conservação das distâncias entre os pontos que são aplicados a transformação, em outras palavras, quando uma figura geométrica é submetida a uma isometria, a distância entre quaisquer dois pontos na figura original é a mesma que a distância entre os pontos correspondentes na figura transformada. De acordo com Jesus (2017), a definição de isometria, considerando $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{R}^2$ para se referir ao conjunto de pontos do plano euclidiano e $\boldsymbol{\alpha}$ para indicar uma isometria qualquer nesse plano, é:

Definição: Uma aplicação $\boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{E} \rightarrow \boldsymbol{E}$ que preserva distâncias, isto é, para quaisquer pontos $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q} \in \boldsymbol{E}$, pondo $\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{P})$ e $\boldsymbol{Q}' = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{Q})$, tem-se $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{P}', \boldsymbol{Q}') = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q})$. Dessa forma, figuras $\boldsymbol{F1}$ e $\boldsymbol{F2}$ contidas em $\boldsymbol{E}$, serão isométricas ou congruentes se, e somente se existir uma isometria $\boldsymbol{\alpha}$ que transforme $\boldsymbol{F1}$ em $\boldsymbol{F2}$, ou seja, $\boldsymbol{F2} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{F1})$.

Em álgebra linear, o termo "módulo" frequentemente se refere ao comprimento de um vetor $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2})$, o que é mais comumente chamado de norma do vetor. Esta norma representa a distância do vetor $\boldsymbol{v}$ à origem $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$ no espaço vetorial $\boldsymbol{R^2}$.

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2}}.$$

O conceito de módulo de um vetor e a distância entre dois pontos estão relacionados, mas não são exatamente a mesma coisa. A distância entre dois pontos $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{Q}$ em $\boldsymbol{R^2}$ é dada pela norma do vetor diferença $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{P}$. Se $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x_p}, \boldsymbol{y_p})$ e $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{x_q}, \boldsymbol{y_q})$, a distância é dada por:

$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}) = \|\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{P}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x_q} - \boldsymbol{x_p})^2 + (\boldsymbol{y_q} - \boldsymbol{y_p})^2}.$$

A princípio, alguns conceitos de isometria que foram usados no trabalho são os conceitos de reflexão e rotação. Em reflexão, sempre associamos a transformação geométrica a uma reta $\boldsymbol{r}$, onde para cada ponto $\boldsymbol{P}$ do plano, é associado o ponto $\boldsymbol{P}'$ e o segmento $\boldsymbol{PP}'$ deve ter como mediatriz essa reta $\boldsymbol{r}$, também pode-se dizer que $\boldsymbol{P}'$ é o simétrico de $\boldsymbol{P}$ em relação a reta $\boldsymbol{r}$.

Podemos definir a reflexão em relação ao eixo $\boldsymbol{x}$ como a transformação linear:

$$\boldsymbol{T}: \boldsymbol{R^2} \rightarrow \boldsymbol{R^2}$$
$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto \boldsymbol{T}\big((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\big) = (\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{y})$$

Podemos definir a reflexão em relação ao eixo $\boldsymbol{y}$ como a transformação linear:

$$\boldsymbol{T}: \boldsymbol{R^2} \rightarrow \boldsymbol{R^2}$$
$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto \boldsymbol{T}\big((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\big) = (-\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

Podemos definir a reflexão em relação em torno da reta $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ como a transformação linear:

$$\boldsymbol{T}: \boldsymbol{R^2} \rightarrow \boldsymbol{R^2}$$

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto \boldsymbol{T}((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$$

Podemos definir a reflexão em relação em torno da reta $\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{x}$ como a transformação linear:

$$\boldsymbol{T}: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$$

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto \boldsymbol{T}((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) = (-\boldsymbol{y}, -\boldsymbol{x})$$

Para definirmos a rotação, antes é necessário tomar conhecimento de ângulo e ângulo orientado. Quaisquer duas semirretas que partam de uma mesma origem, desde que esse seja o único ponto em comum entre elas, formam um ângulo. Se um ângulo é formado pelas semirretas $\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}$ e $\overrightarrow{\boldsymbol{OB}}$, isso significa que o ponto O, origem comum das duas semirretas, é o vértice do ângulo, e as próprias semirretas são os lados. E o ângulo orientado é aquele em que seu sentido de abertura é definido pela origem, indicando o lado inicial do ângulo e a extremidade indica o lado final.

Na álgebra linear, a rotação refere-se a uma transformação linear que gira um vetor em torno da origem de um sistema de coordenadas. Essa transformação pode ser descrita por uma matriz de rotação. Em duas e três dimensões, as matrizes de rotação são especialmente simples e úteis para muitos problemas de geometria e física.

Em duas dimensões, a rotação $\boldsymbol{R}$ de um vetor $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, em torno da origem por um ângulo $\boldsymbol{\theta}$ é dada pela matriz:

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \cos\boldsymbol{\theta} & -\boldsymbol{sen\theta} \\ \boldsymbol{sen\theta} & \boldsymbol{cos\theta} \end{bmatrix}$$

Ao multiplicar essa matriz por um vetor $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix}$, obtemos o vetor rotacionado $\boldsymbol{v}'$:

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \cos\boldsymbol{\theta} & -\boldsymbol{sen\theta} \\ \boldsymbol{sen\theta} & \boldsymbol{cos\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}\cos\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{y}\,\boldsymbol{sen\theta} \\ \boldsymbol{x}\,\boldsymbol{sen}\,\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{y}\,\boldsymbol{cos\theta} \end{bmatrix}$$

Portanto, podemos definir a rotação de um ângulo de centro $\boldsymbol{O}$ e ângulo $\boldsymbol{\theta}$, a partir de um ponto $\boldsymbol{O}$ em um plano α e $\boldsymbol{\theta}$ um ângulo orientado no sentido positivo (anti-horário), tal que $\boldsymbol{\theta}$ está entre $\boldsymbol{0}$ e $\boldsymbol{2\pi}$. A aplicação que tem $\boldsymbol{O}$ como ponto fixo e aplica todo ponto $\boldsymbol{P}$ diferente de $\boldsymbol{O}$ em $\boldsymbol{P}$', de maneira que o ângulo $\boldsymbol{P}\hat{\mathrm{O}}\boldsymbol{P}$' seja congruente a $\boldsymbol{\theta}$ e $|\boldsymbol{OP}| = |\boldsymbol{OP}'|$.

Com uma base sólida dos conceitos matemáticos apresentados, o leitor será capaz de melhor compreender o capítulo cinco do trabalho, onde serão apresentadas as soluções do problema exploradas numa menor complexidade usando as aplicações de Análise Combinatória mostrada neste capítulo. O plano cartesiano será aplicado no tabuleiro, para que possam ser feitas as isometrias da Álgebra Linear.

5 SOLUÇÕES DO PROBLEMA

O desafio das oito rainhas não possui uma solução única, mas sim diversas soluções válidas, 92 soluções mais precisamente, de modo que nenhuma rainha ataque qualquer outra. Desse total, apenas doze são consideradas “soluções fundamentais”, que seriam soluções originais, únicas, em que nenhuma delas pode ser obtida a partir de qualquer outra. As outras oitenta soluções são obtidas a partir das fundamentais, com rotações e reflexões no tabuleiro de xadrez.

No entanto, todas as soluções seguem a regra de que cada rainha está em uma linha e coluna diferente e que nenhuma rainha pode se ameaçar horizontalmente, verticalmente ou diagonalmente. Vale ressaltar que na diagonal não seriam apenas a diagonal principal e a secundária, mas quaisquer casas que estejam em alguma diagonal do tabuleiro. Além disso, é possível generalizar o problema para tabuleiros maiores ou menores, como o desafio das N rainhas, em tabuleiros NxN, onde N é um número natural maior ou menor que oito. Ou seja, a regra fundamental para que o desafio funcione é que a quantidade de rainhas a serem posicionadas seja o mesmo valor que a dimensão do tabuleiro em que elas serão dispostas.

Neste capítulo serão exploradas as soluções para esse problema que desafia entusiastas da matemática e do xadrez há quase dois séculos. Mas como dito anteriormente, ele não se restringe exclusivamente a oito rainhas, apesar de ser o desafio original. Iniciaremos a investigação com tabuleiros menores, antes de explorarmos o original mais detalhadamente.

Partiremos de um tabuleiro $2x2$, com duas rainhas. Nesse caso, o problema não tem solução, pois mesmo que as rainhas estejam em colunas e linhas diferentes, devido ao tamanho do tabuleiro, elas obrigatoriamente compartilhariam a mesma diagonal, como na Figura 5.

Figura 5: Exemplo de disposição no tabuleiro 2x2.

Fonte: Próprio do autor, 2024.

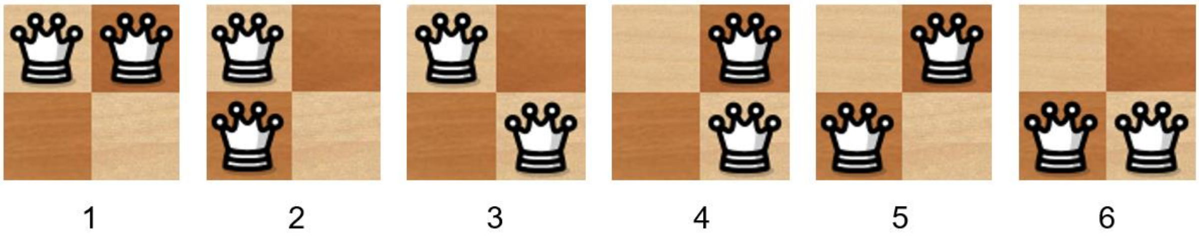
Mas para facilitar o entendimento e visualização dos conceitos de análise combinatória que serão aplicados para o estudo das soluções, será utilizado esse caso. Primeiramente, iniciamos com a pergunta genérica: “Quantas maneiras diferentes existem de dispor n damas em um tabuleiro nxn?”. Vale ressaltar que, nesse questionamento, não estamos nos limitando ao desafio das n rainhas, ainda, mas sim, toda e qualquer maneira de dispor essas peças no tabuleiro, sem necessariamente obedecer a algum critério. Essa análise é interessante, pois nos mostra o quão complexo e difícil é o desafio, por mais que não pareça. No problema original, temos um total 4.426.165.368 de maneiras de dispor oito damas em um tabuleiro 8x8, mas apenas 92 dessas maneiras definem as soluções, o que quer dizer que, dispondo de maneira aleatória, a chance do agrupamento ser uma solução é aproximadamente apenas 0,00000002%.

Voltando a pergunta inicial, para respondê-la, é necessário aplicar o conceito de combinação simples, um tipo de agrupamento da análise combinatória, onde conta-se a quantidade de subgrupos formados a partir de uma quantidade maior de elementos e a ordem desses elementos não é relevante, ou seja, uma alteração na ordem dos elementos não altera a quantidade de agrupamentos obtidos. No contexto, consideramos cada casa do tabuleiro de xadrez como se fosse um elemento, pois dessa maneira, responder à pergunta “De quantas maneiras diferentes podemos escolher n casas de um tabuleiro de xadrez nxn?” é a mesma que “Quantas maneiras diferentes existem de dispor n damas em um tabuleiro nxn?”

Usando a fórmula da combinação simples em um tabuleiro $2x2$, temos um total de quatro casas, e queremos saber de quantas maneiras diferentes podemos escolher apenas duas casas (que seriam dispostas as duas damas). Temos um total de seis maneiras diferentes, conforme mostra a Figura 6.

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = 6$$

Figura 6: Disposições no tabuleiro 2x2.



Fonte: Próprio do autor, 2024.

Generalizando para n damas, em um tabuleiro nxn, temos:

$$C_{p,n} = \frac{p!}{n!(p-n)!} \quad ,$$

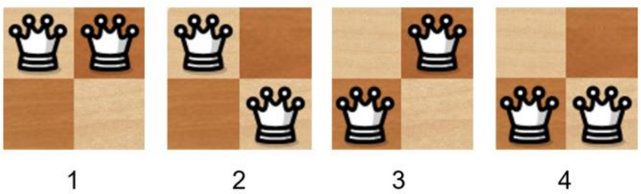
onde p é o total de casas do tabuleiro e n é a quantidade de casas que queremos preencher, ou damas que queremos dispor (lembrando que sempre devemos ter $n^2 = p$).

Agora, utilizando algumas restrições, é possível começar a limitar algumas posições para essas rainhas, para que a quantidade de soluções do desafio de dispô-las de maneira que não se ataquem, fique mais próxima. Para isso, serão utilizadas duas condições que especificam propriedades da solução. A primeira é que todas as damas devem ser dispostas em colunas diferentes, nesse momento então buscamos encontrar qual seria o conceito matemático e resposta que se aplica à pergunta “De quantas maneiras diferentes, podemos dispor n damas de maneira que fiquem em colunas diferentes?”.

Poderíamos usar o arranjo com repetição, pois como nesse caso, ainda não restringimos as linhas, as damas poderiam ocupar mesmas linhas (repetição das linhas). Temos duas damas, para distribuir em duas colunas diferentes, e essas duas damas, cada uma em sua respectiva coluna, pode ocupar qualquer uma das duas linhas, podendo estar em linhas iguais ou não. Logo, teríamos um total de combinações diferentes:

$$AR_{2,2} = 2^2 = 2 \cdot 2 = 4$$

Figura 7: Damas em colunas diferentes no tabuleiro 2x2.



Fonte: Próprio do autor, 2024.

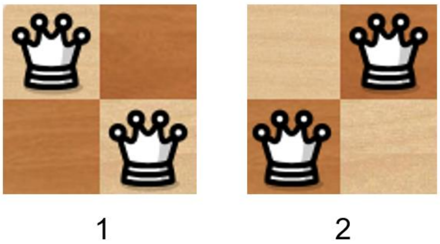
Generalizando para n damas, em um tabuleiro nxn, temos:

$$AR_{n,n} = n^n.$$

Por fim, a última restrição possível até o momento, utilizando de conceitos da Análise Combinatória, seria colocada para responder à pergunta "De quantas maneiras diferentes, podemos dispor n damas de maneira que fiquem em colunas e linhas diferentes?". É possível usar a permutação simples para responder essa pergunta, considerando primeiramente que cada rainha deve estar em coluna diferente, e se nessa coluna, uma dama já ocupou uma determinada linha, essa linha ocupada não estará mais disponível para as damas restantes. Dessa maneira temos um total de apenas duas opções, que são dadas pela fórmula:

$$P_2 = 2! = 2 \cdot 1 = 2$$

Figura 8: Damas em colunas e linhas diferentes no tabuleiro 2x2.



Fonte: Próprio do autor, 2024.

Generalizando para n damas, em um tabuleiro nxn, temos:

$$P_n = n!.$$

Como é possível ver na imagem da Figura 8, as duas únicas disposições possíveis ainda assim não seriam uma solução para o problema, pois as rainhas estão em movimento de ataque por estarem em mesmas diagonais, em ambos os casos, portanto o problema não tem solução em um tabuleiro $2x2$, com duas rainhas.

O mesmo acontece em um tabuleiro $3x3$ com três rainhas. Temos oitenta e quatro maneiras de dispor as peças, cada uma em uma casa, sem nenhuma restrição; vinte e sete maneiras de dispor as peças de modo que cada rainha fique em uma coluna diferente; e seis maneiras de dispor as peças de modo que cada rainha fique em uma coluna e uma linha diferente. Porém ainda não temos solução para o problema, pois em todas essas seis maneiras, as rainhas se atacam em alguma das diagonais do tabuleiro, como no exemplo apresentado na Figura 9.

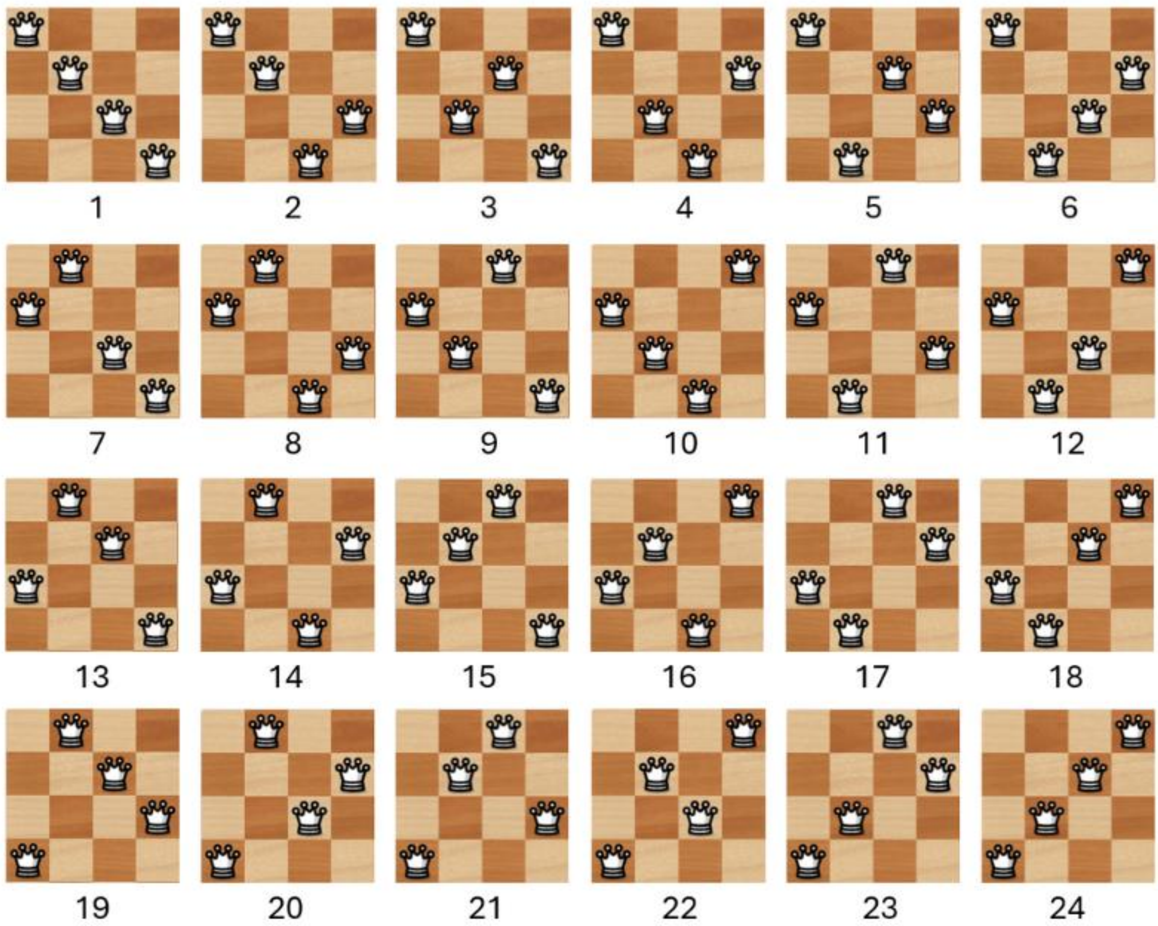
Figura 9: Exemplo de disposição no tabuleiro 3x3.

Fonte: Próprio do autor, 2024.

Logo, a análise de soluções será mais desenvolvida a partir de um tabuleiro $4x4$ com 4 rainhas, onde já é possível obter soluções favoráveis para o problema. Nessa situação, através da combinação simples, há um total de 1820 maneiras de dispor quatro damas em um tabuleiro 4x4, sem restrições, apenas com cada uma das quatro peças ocupando uma única casa. Aplicando a primeira restrição, com apenas uma dama por coluna, usando o arranjo simples, diminuímos para 256 maneiras, e por fim, com cada dama em uma coluna e linha diferente, usando a permutação simples, temos um total de $4! = 24$ maneiras.

Essas vinte e quatro maneiras foram montadas e analisadas, e serão apresentadas na Figura 10:

Figura 10: Damas em colunas e linhas diferentes no tabuleiro 4x4.



Fonte: Próprio do autor, 2024.

Observando cada um dos tabuleiros, pode-se concluir que de todas as vinte e quatro disposições, temos apenas duas soluções para o desafio: o tabuleiro 11 e o tabuleiro 14. Em todos os outros casos, apesar das rainhas estarem todas em linhas e colunas diferentes, há duas ou mais rainhas que compartilham a mesma diagonal, o que não define uma solução, pois essas peças estariam em posição de ataque entre si.

Comparando os tabuleiros, é possível notar algumas semelhanças entre eles, por exemplo, é fácil notar que o tabuleiro 1 e o tabuleiro 24 possuem algo em comum na distribuição das rainhas. Outro caso não tão visível assim, mas que também apresenta semelhança, seriam os tabuleiros 6, tabuleiro 10, tabuleiro 15 e tabuleiro 19, e até mesmo os tabuleiros que definem a solução parecem compartilhar a mesma característica. Mas qual seria essa propriedade que esses tabuleiros apresentam?

Respondendo à pergunta, das vinte e quatro maneiras diferentes de dispor as quatro damas em um tabuleiro, algumas apresentam isometrias entre si: rotações e reflexões. Portanto, desses vinte e quatro tabuleiros “diferentes”, temos apenas sete tabuleiros “originais” e os outros dezessete tabuleiros foram obtidos a partir de rotações e reflexões. As relações começarão a ser apresentadas na Tabela 2. Nesse momento vamos relacionar os tabuleiros através da rotação no sentido horário, mas posteriormente será mostrado que uma mesma relação pode ser obtida tanto pela rotação (sentido horário ou anti-horário) quanto pela reflexão.

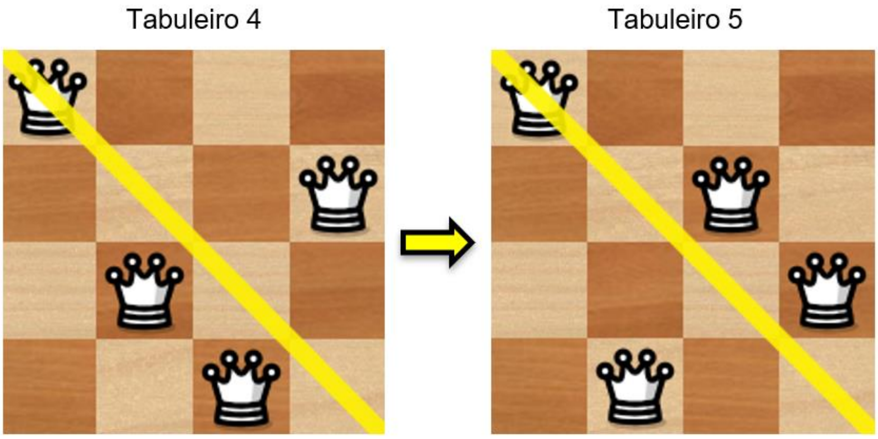
Tabela 2: Relação entre as isometrias aplicadas e os tabuleiros gerados.

Tabuleiro Original	**Tipo de Isometria**	**Tabuleiros Gerados**		
Tabuleiro 1	Rotação 90°	Tabuleiro 24	-	-
Tabuleiro 2	Rotação 180°/90°/270°	Tabuleiro 7	Tabuleiro 18	Tabuleiro 23
Tabuleiro 3	Rotação 90°	Tabuleiro 22	-	-
Tabuleiro 4	Rotação 180°/90°/270°	Tabuleiro 13	Tabuleiro 16	Tabuleiro 20
Tabuleiro 5	Rotação 180°/90°/270°	Tabuleiro 9	Tabuleiro 12	Tabuleiro 21
Tabuleiro 6	Rotação 90°/180°/270°	Tabuleiro 10	Tabuleiro 15	Tabuleiro 19
Tabuleiro 8	Rotação 90°	Tabuleiro 17	-	-
Tabuleiro 11	Reflexão	Tabuleiro 14	-	-

Fonte: Próprio do autor, 2024.

Algumas observações e análises sobre a tabela; primeiramente, a tabela mostra oito disposições originais (não necessariamente soluções), e não sete como citado anteriormente, porém isso se deve ao fato do tipo de agrupamento em relação a isometria considerada, na tabela consideramos apenas a rotação, (com exceção dos tabuleiros soluções 11 e 14, pois eles não se relacionam através da rotação de nenhuma maneira) porém os tabuleiros 4 e 5 e seus respectivos tabuleiros gerados, na verdade, são todos obtidos a partir de um único tabuleiro, se considerarmos a reflexão, por exemplo, num eixo diagonal que passa pelo centro do tabuleiro, como mostra a Figura 11.

Figura 11: Reflexão aplicada no tabuleiro 4 gerando o tabuleiro 5.

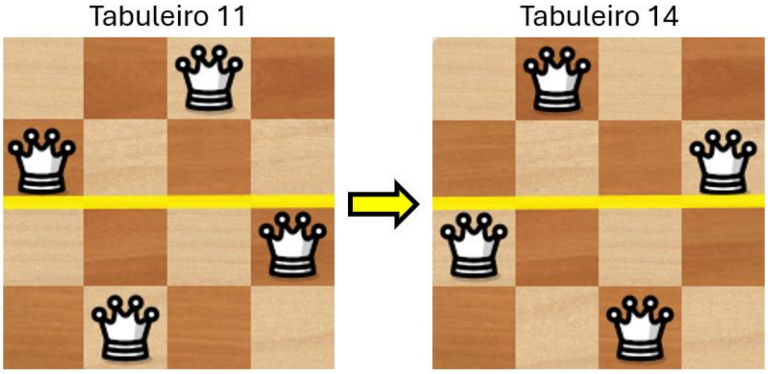


Fonte: Próprio do autor, 2024.

Se a partir do tabuleiro 4 é possível gerar o tabuleiro 5, consequentemente, a partir do tabuleiro 4 também será possível gerar todos os tabuleiros gerados pelo 5, com algumas transformações geométricas a mais. Dessa maneira, concluindo então que em um tabuleiro 4x4 realmente existem apenas sete maneiras “originais” de dispor as 4 damas, que geram um total de vinte e quatro disposições diferentes.

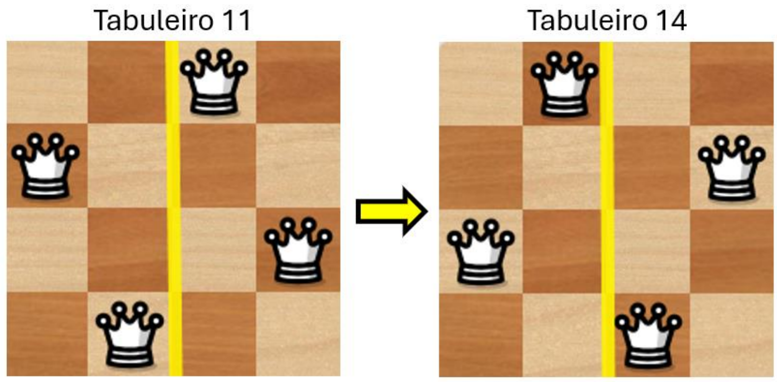
Outro ponto a ser analisado são os tabuleiros que definem a solução para o problema, é impossível obter um a partir do outro através da rotação, independente do sentido ou ângulo, eles se relacionam exclusivamente por reflexão, diferentemente de todos os outros tabuleiros 4x4. E essa reflexão funciona para qualquer um dos três eixos que passe pelo centro do tabuleiro: horizontal, vertical ou diagonais, como mostra na Figura 12, Figura 13, Figura 14 e Figura 15.

Figura 12: Reflexão no eixo horizontal aplicada no tabuleiro 11.



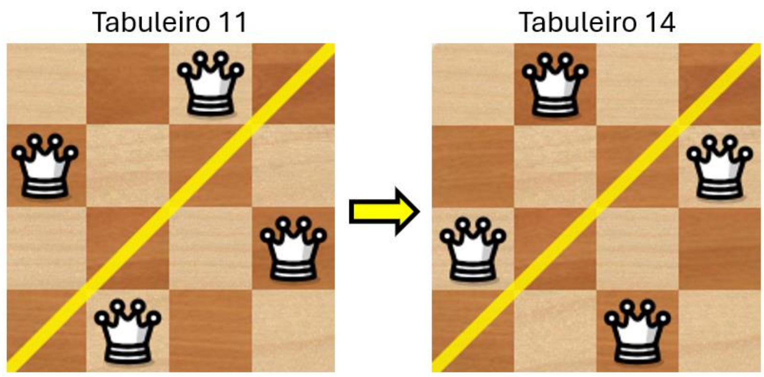
Fonte: Próprio do autor, 2024.

Figura 13: Reflexão no eixo vertical aplicada no tabuleiro 11.



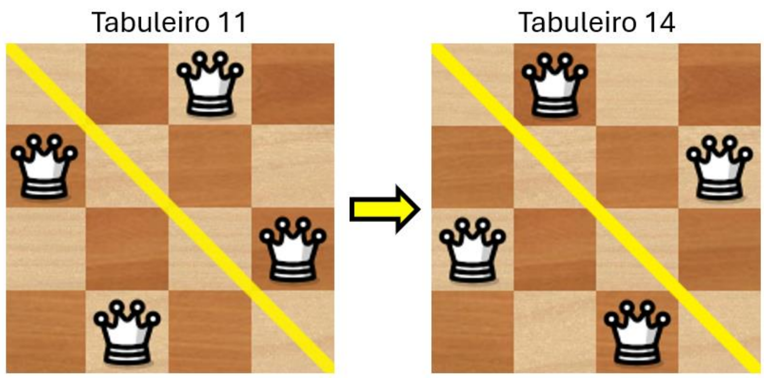
Fonte: Próprio do autor, 2024.

Figura 14: Reflexão no eixo diagonal crescente aplicada no tabuleiro 11.



Fonte: Próprio do autor, 2024.

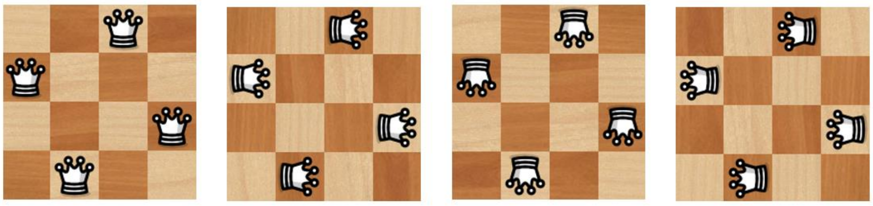
Figura 15: Reflexão no eixo diagonal crescente aplicada no tabuleiro 11.



Fonte: Próprio do autor, 2024.

Quando isso ocorre, dizemos que o tabuleiro é simétrico em relação ao centro, quando ele é rotacionado, independente do sentido ou ângulo, a posição que as rainhas ocupam no tabuleiro não se alteram, como é possível observar na Figura 16:

Figura 16: Tabuleiro simétrico em relação ao centro.



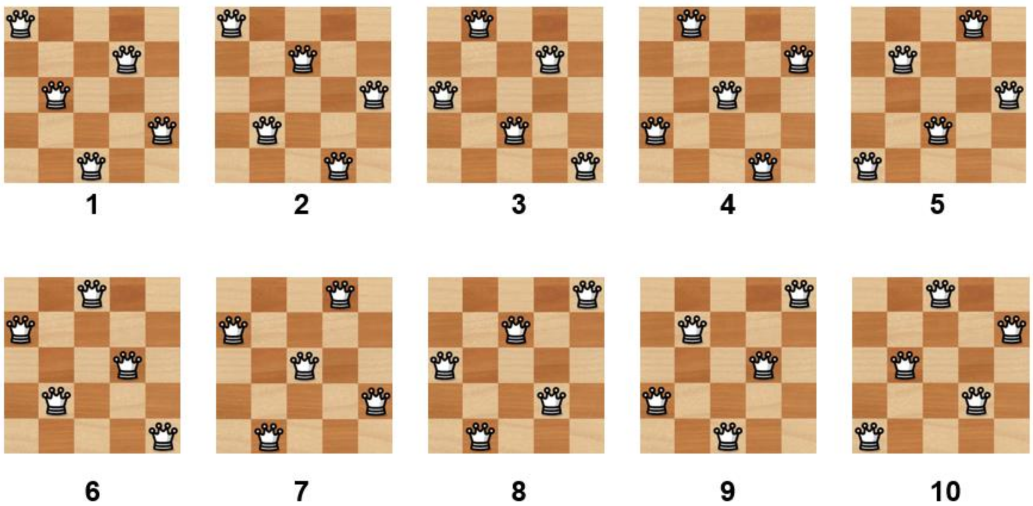
Fonte: Próprio do autor, 2024.

Independente da rotação do tabuleiro, as casas a3, b1, c4 e d3 estão sempre ocupadas, de acordo com a notação algébrica que já foi explorada no Capítulo 1.

Também é possível observar na Tabela 2 que alguns tabuleiros originais geram outros três tabuleiros diferentes, fazendo as três rotações de 90°, 180° e 270°, e outros tabuleiros originais geram apenas um tabuleiro diferente, fazendo apenas uma rotação de 90°.

Quando expandimos o problema para um tabuleiro $5x5$, existem 159.390 combinações para dispor as damas de qualquer maneira, colocando uma peça em cada casa; 3.125 arranjos, organizando as damas de maneira que cada uma esteja em uma coluna diferente das demais, sem levar em consideração estarem ou não em mesmas linhas e 120 permutações dispondo as damas de modo que cada uma delas esteja obrigatoriamente em uma coluna e uma linha diferente. Como é uma quantidade de possibilidades maior que em um tabuleiro $4x4$, serão apresentadas apenas as formações que configurem uma solução do desafio, que somam dez disposições apenas, de um total de 120, como mostra a Figura 17.

Figura 17: As dez soluções do desafio em um tabuleiro 5x5.

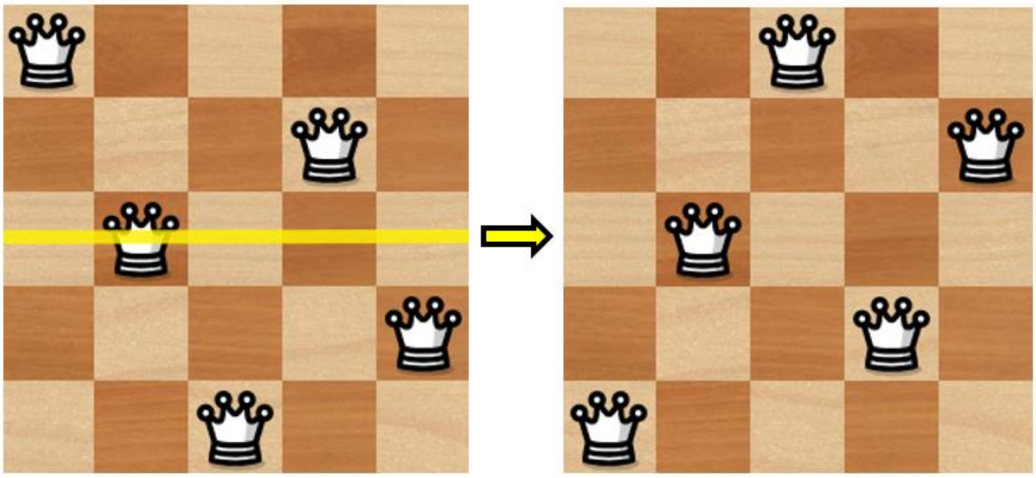


Fonte: Próprio do autor, 2024.

Dessas dez disposições das peças, tem-se que apenas duas são solução fundamentais e as outras oito configurações foram obtidas a partir de isometrias aplicadas no tabuleiro, do seguinte modo; considerando que o tabuleiro 1 seja uma das soluções originais para o caso $5x5$, tem-se:

A partir de uma reflexão horizontal, por uma reta que passa no meio do tabuleiro, obtém-se o tabuleiro 10.

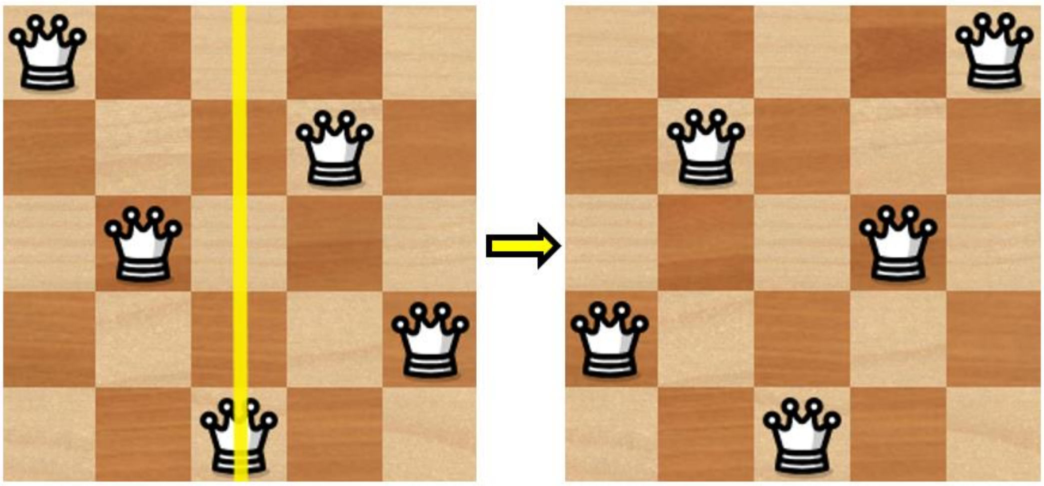
Figura 18: Reflexão horizontal no tabuleiro 1 de dimensões 5x5.



Fonte: Próprio do autor, 2024.

A partir de uma reflexão vertical, por uma reta que passa no meio do tabuleiro, obtém-se o tabuleiro 9.

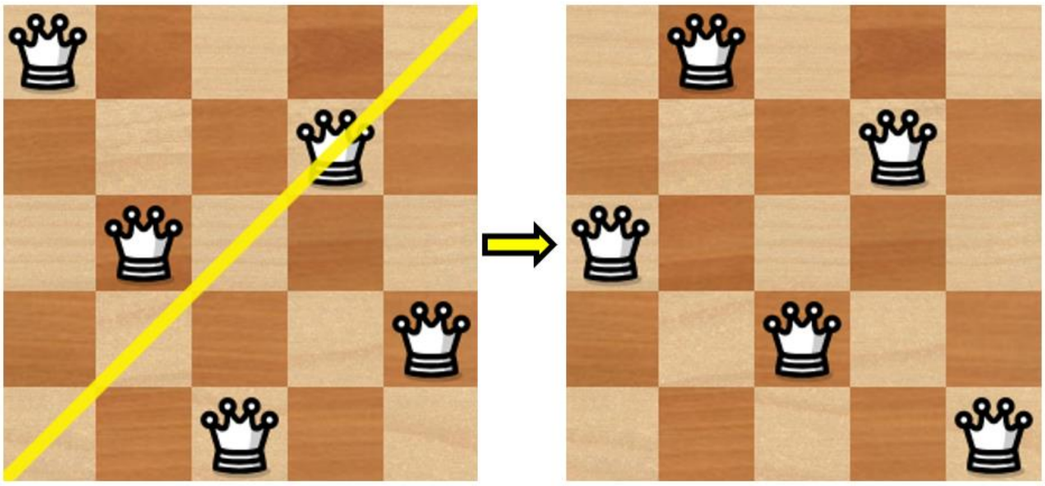
Figura 19: Reflexão vertical no tabuleiro 1 de dimensões 5x5.



Fonte: Próprio do autor, 2024.

A partir de uma reflexão diagonal, por uma reta “crescente” que vai do canto inferior esquerdo para o canto superior direito, obtém-se o tabuleiro 3.

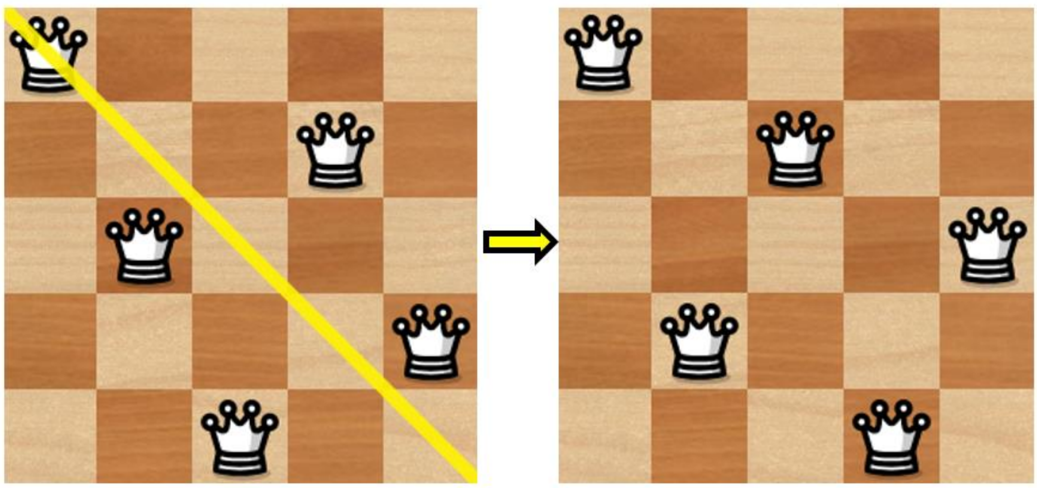
Figura 20: Reflexão diagonal crescente no tabuleiro 1 de dimensões 5x5.



Fonte: Próprio do autor, 2024.

A partir de uma reflexão diagonal, por uma reta “decrescente” que vai do canto superior esquerdo para o canto inferior direito, obtém-se o tabuleiro 2.

Figura 21: Reflexão diagonal decrescente no tabuleiro 1 dimensões 5x5.



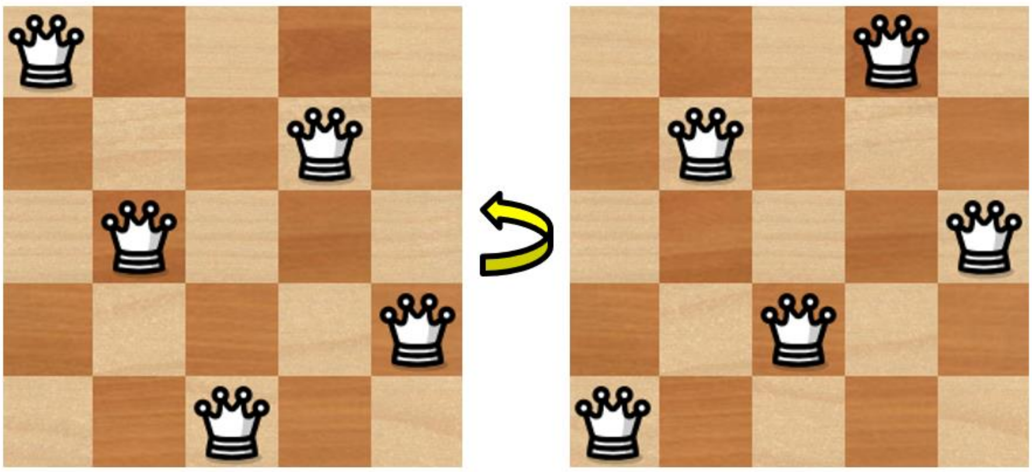
Fonte: Próprio do autor, 2024.

E essas são as quatro soluções diferentes que é possível obter com todas as reflexões aplicáveis na solução 1.

Agora, com outro tipo de isometria no tabuleiro 1, a rotação, obtém-se as seguintes soluções:

A partir de uma rotação de 90° no sentido anti-horário, obtém-se o tabuleiro 5.

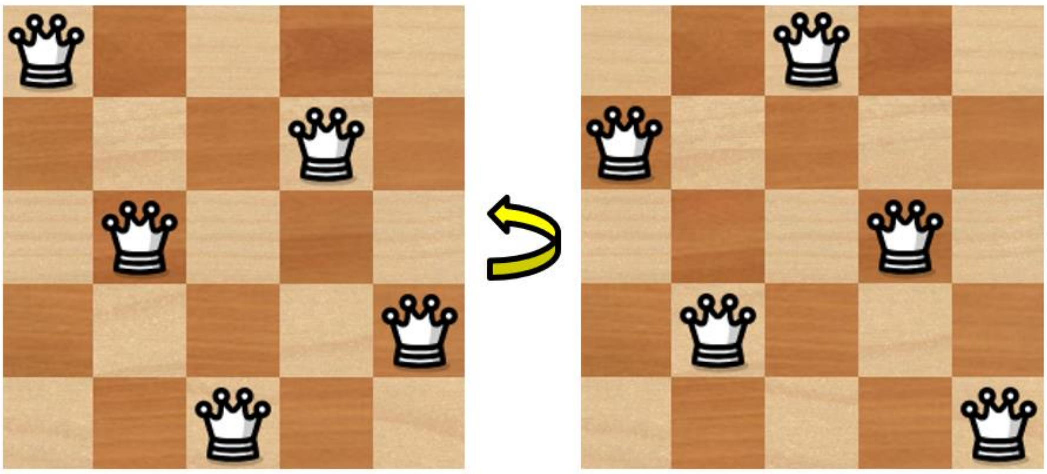
Figura 22: Rotação de 90º no sentido anti-horário no tabuleiro 1 de dimensão 5x5.



Fonte: Próprio do autor, 2024.

A partir de uma rotação de 180° no sentido anti-horário, obtém-se o tabuleiro 6.

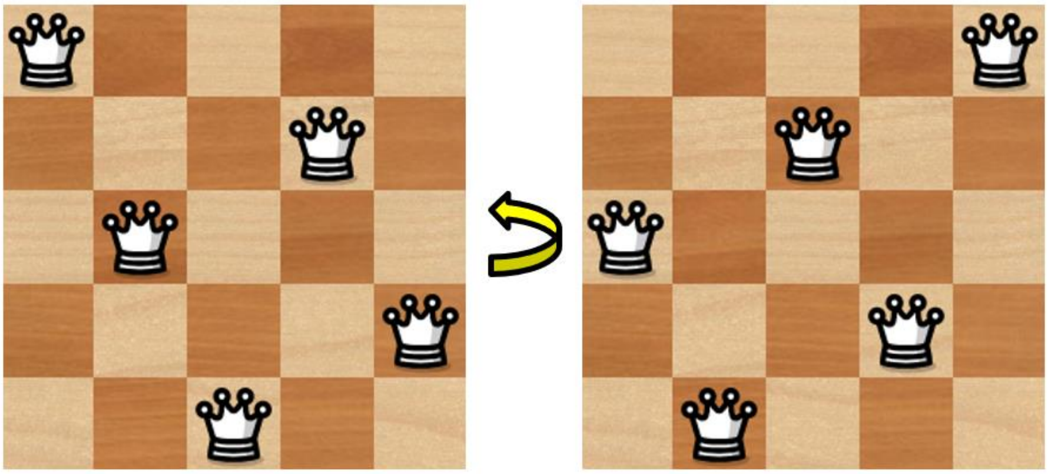
Figura 23: Rotação de 180º no sentido anti-horário no tabuleiro 1 de dimensão 5x5.



Fonte: Próprio do autor, 2024.

A partir de uma rotação de 270° no sentido anti-horário, obtém-se o tabuleiro 8.

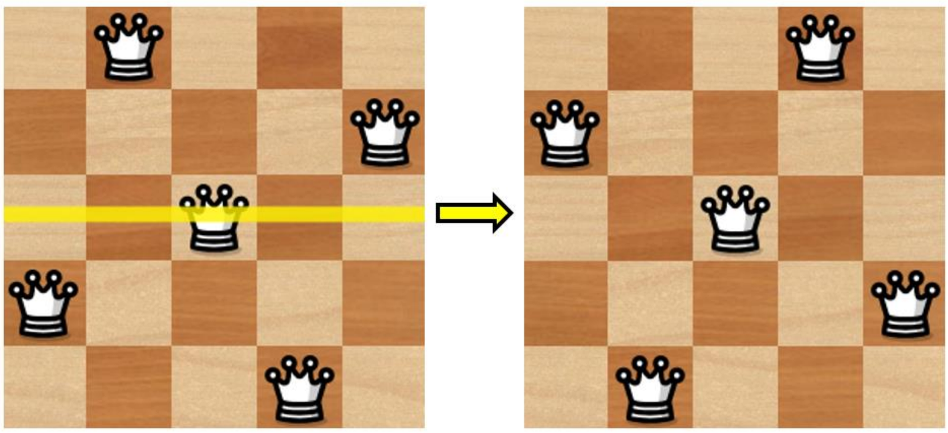
Figura 24: Rotação de 270º no sentido anti-horário no tabuleiro 1 de dimensão 5x5.



Fonte: Próprio do autor, 2024.

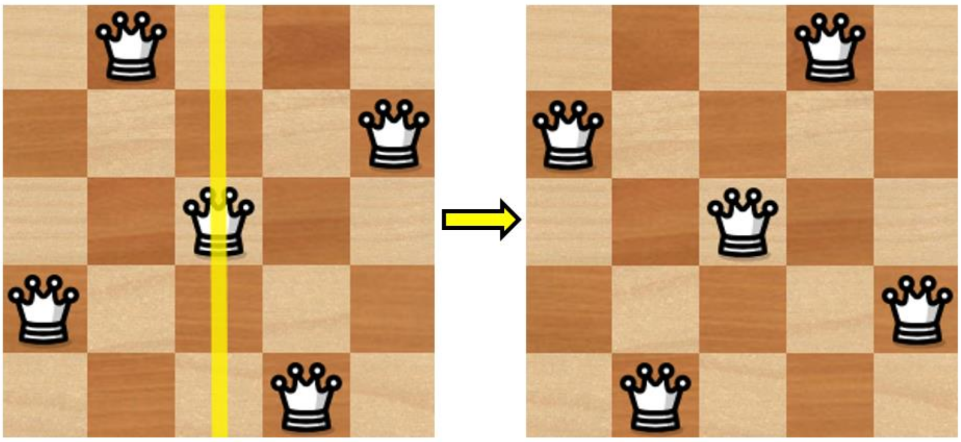
E essas são as três soluções diferentes que podem ser obtidas com todas as rotações aplicáveis na solução 1. Porém, ainda não foram representadas todas as disposições que satisfazem o desafio no tabuleiro de dimensões 5x5, faltam o tabuleiro 4 e o tabuleiro 7. Esse é um caso especial, pois um pode ser obtido através do outro, fazendo qualquer uma das movimentações citadas anteriormente, reflexões por qualquer eixo e rotações de qualquer angulação. Isso se deve ao fato do tabuleiro ser considerado simétrico em relação ao centro, como já aconteceu anteriormente neste trabalho, no tabuleiro 11 de dimensões 4x4.

Figura 25: Reflexão horizontal no tabuleiro 4 de dimensões 5x5.



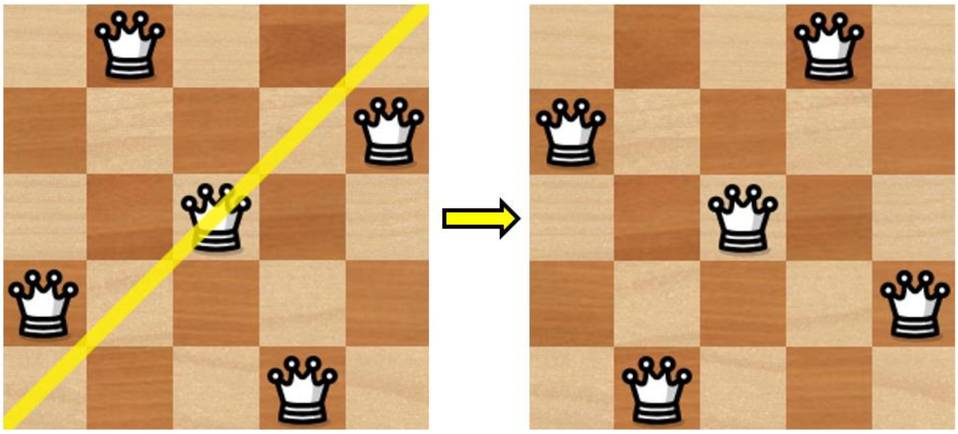
Fonte: Próprio do autor, 2024.

Figura 26: Reflexão vertical no tabuleiro 4 de dimensões 5x5.



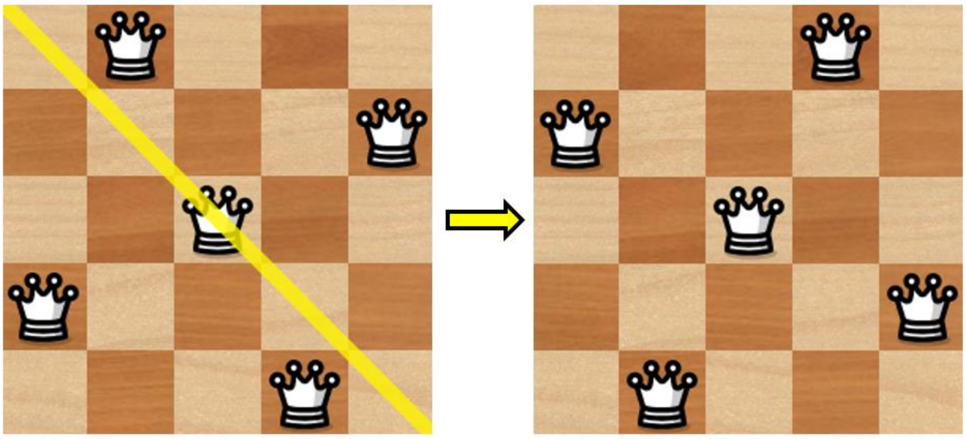
Fonte: Próprio do autor, 2024.

Figura 27: Reflexão diagonal crescente no tabuleiro 4 de dimensões 5x5.



Fonte: Próprio do autor, 2024.

Figura 28: Reflexão diagonal decrescente no tabuleiro 4 de dimensões 5x5.

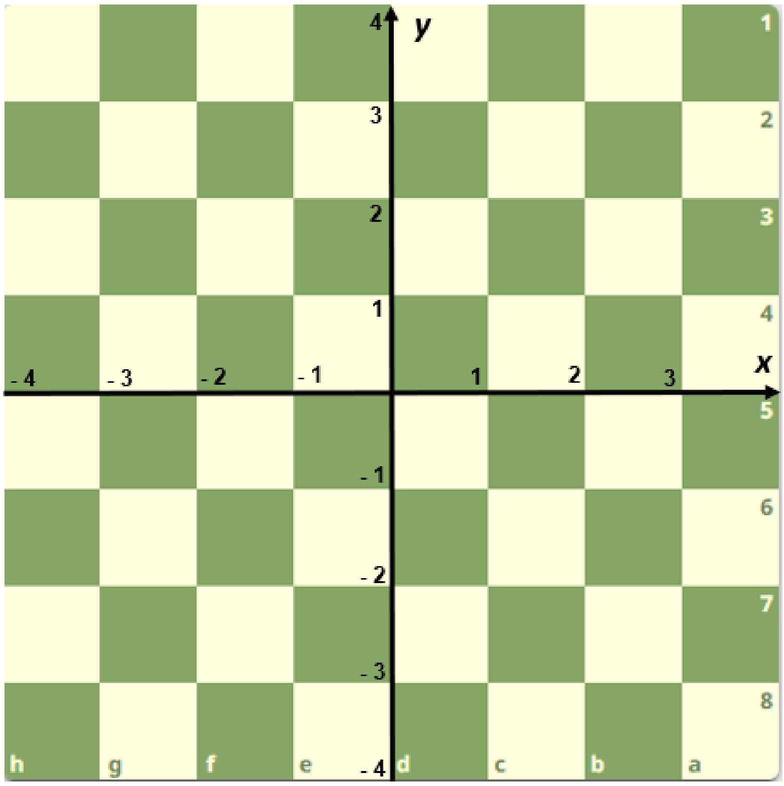


Fonte: Próprio do autor, 2024.

A partir desse momento, talvez tenha se tornado perceptível que a partir de uma única solução fundamental, é possível gerar outras sete soluções diferentes entre si; quatro delas a partir de movimentos de reflexão e outras três com movimentos de rotação, devido a esse fato que existem doze soluções fundamentais e um total de noventa e duas soluções gerais para um tabuleiro 8x8, do problema original. Porém, já foi possível notar também que não são todas as soluções que se comportam dessa maneira. Caso fossem, das doze soluções originais, deveria ter noventa e seis soluções gerais (doze fundamentais e mais oitenta e quatro soluções “repetidas” geradas pelos movimentos de isometria das soluções originais). Graças a algumas característica simétricas de um dos tabuleiros, isso não acontece.

A seguir, será apresentado o comportamento de uma das doze soluções fundamentais em um tabuleiro 8x8. Para isso, será definido um tabuleiro 8x8 e traçado nele duas retas perpendiculares formando os eixos de um plano cartesiano de maneira que a origem do plano coincida com o centro do tabuleiro.

Figura 29: Plano cartesiano aplicado no tabuleiro.

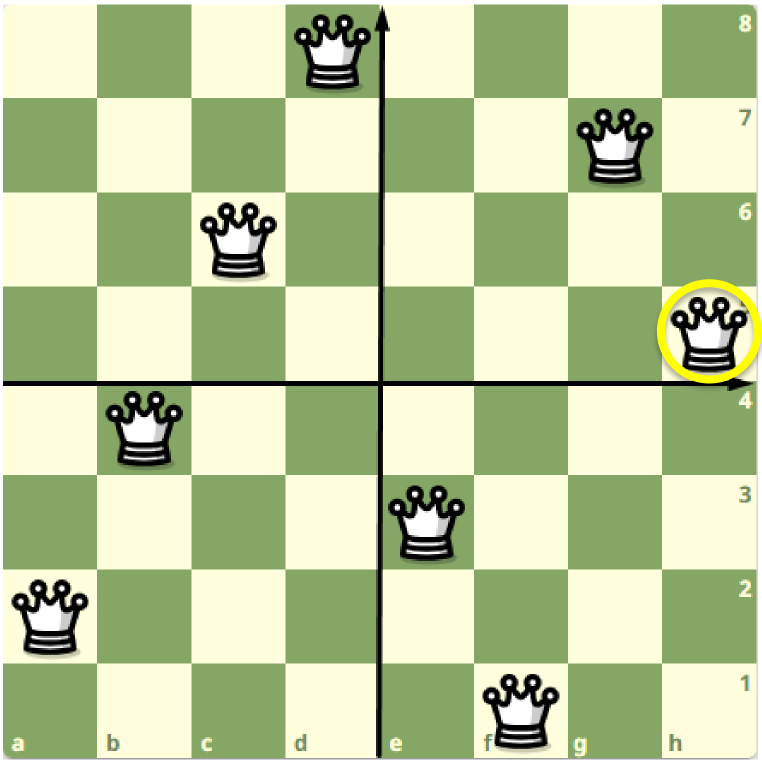


Fonte: Próprio do autor, 2024.

No tabuleiro, a posição de uma rainha é definida pelo ponto P, tal que $P(\frac{2n+1}{2};\frac{2m+1}{2})$, para valores de n e m pertencentes ao conjunto dos números inteiros.

Dispondo nesse tabuleiro umas das doze soluções fundamentais, como mostra a Figura 30. A rainha circulada na Figura 30 que está na casa do tabuleiro h5, corresponde ao ponto $P(3{,}5\ ;0{,}5)$, para valores de $n = 3$ e $m = 0$.

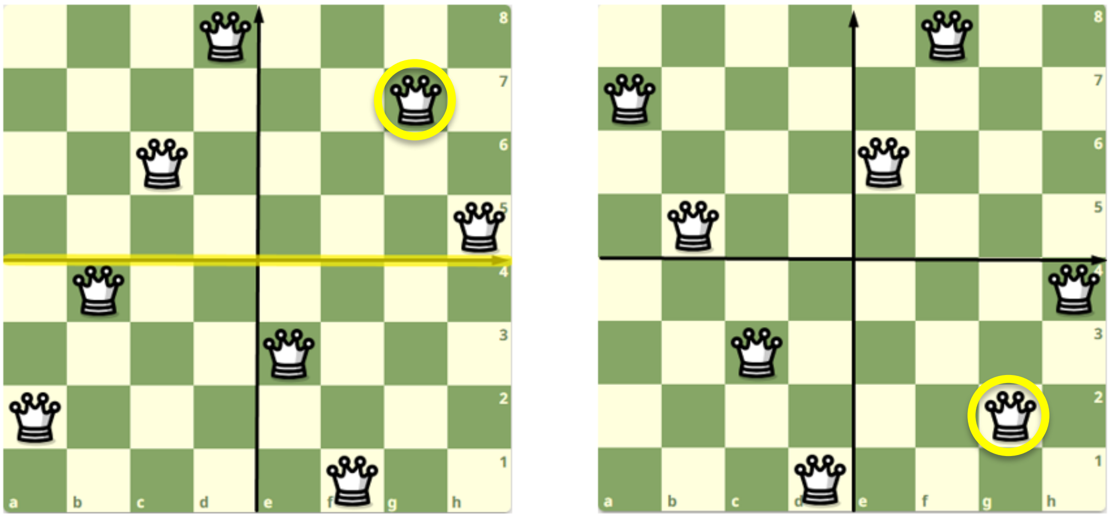
Figura 30: Uma das soluções fundamentais dispostas no tabuleiro 8x8.



Fonte: Próprio do autor, 2024.

Fazendo uma reflexão em relação ao eixo x nessa solução do lado esquerdo, que é a transformação linear de R^2 em R^2 definida por $(x;y) \mapsto T\big((x;y)\big) = (x;-y)$, obtém-se a nova disposição do lado direito, como mostra a Figura 31. Tomando como exemplo, a rainha que está na casa g7, definida pelo ponto $P(2{,}5\ ;\ 2{,}5)$ e aplicando a transformação linear $T\big((2{,}5;2{,}5)\big) = (2{,}5;-2{,}5)$, a posição ocupada passa a ser g2.

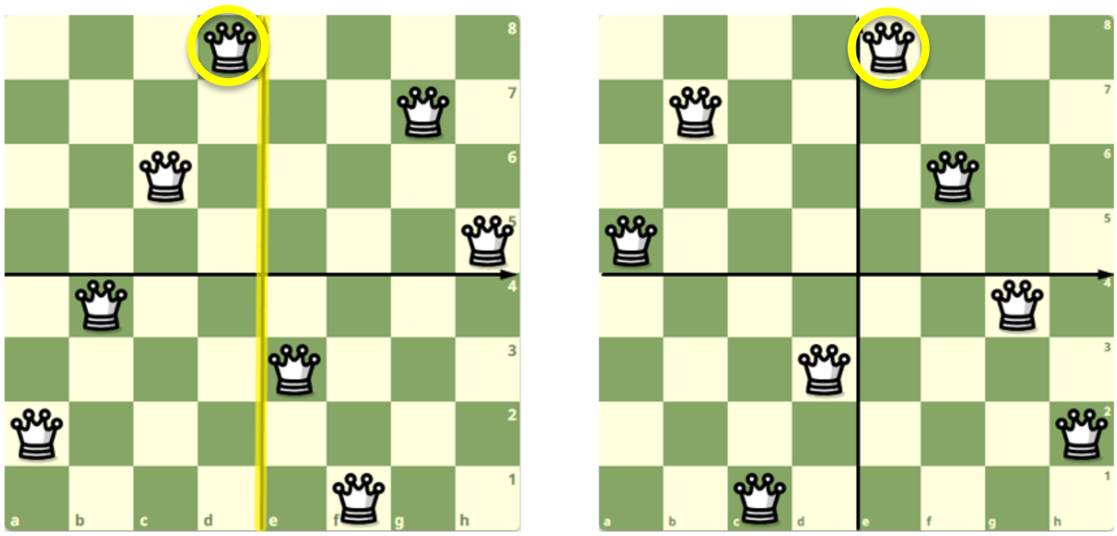
Figura 31: Reflexão em relação ao eixo x.



Fonte: Próprio do autor, 2024.

Fazendo uma reflexão em relação ao eixo y, que é a transformação linear de R^2 em R^2 definida por $(x;y) \mapsto T\big((x;y)\big) = (-x;y)$ obtém-se a nova disposição das peças no tabuleiro, como mostra a Figura 32. Tomando como exemplo, a rainha que está na casa d8, definida pelo ponto $P(-0{,}5\ ;\ 3{,}5)$ e aplicando a transformação linear $T\big((-05;3{,}5)\big) = (0{,}5;3{,}5)$, a posição ocupada passa a ser e8.

Figura 32: Reflexão em relação ao eixo y.

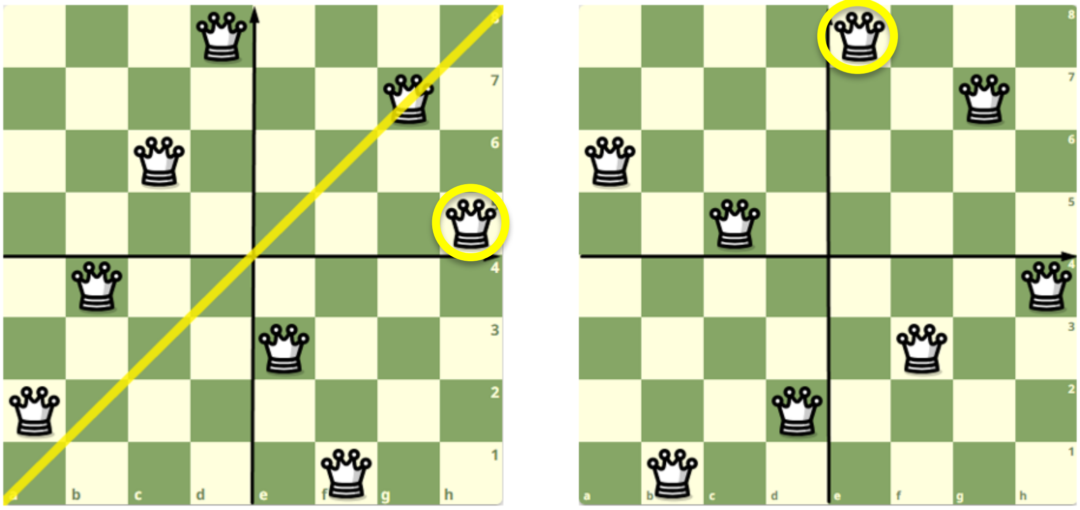


Fonte: Próprio do autor, 2024.

Fazendo uma reflexão em relação ao eixo definido pela diagonal secundária de equação $y = x$, que é a transformação linear de R^2 em R^2 definida por $(x;y) \mapsto T\big((x;y)\big) = (y;x)$ obtém-se a nova disposição das peças no tabuleiro, como mostra a Figura 33. Tomando como exemplo, a rainha que está na casa h5, definida pelo ponto

$P(3{,}5; 0{,}5)$ e aplicando a transformação linear $T\big((3{,}5; 0{,}5)\big) = (0{,}5; 3{,}5)$, a posição ocupada passa a ser e8.

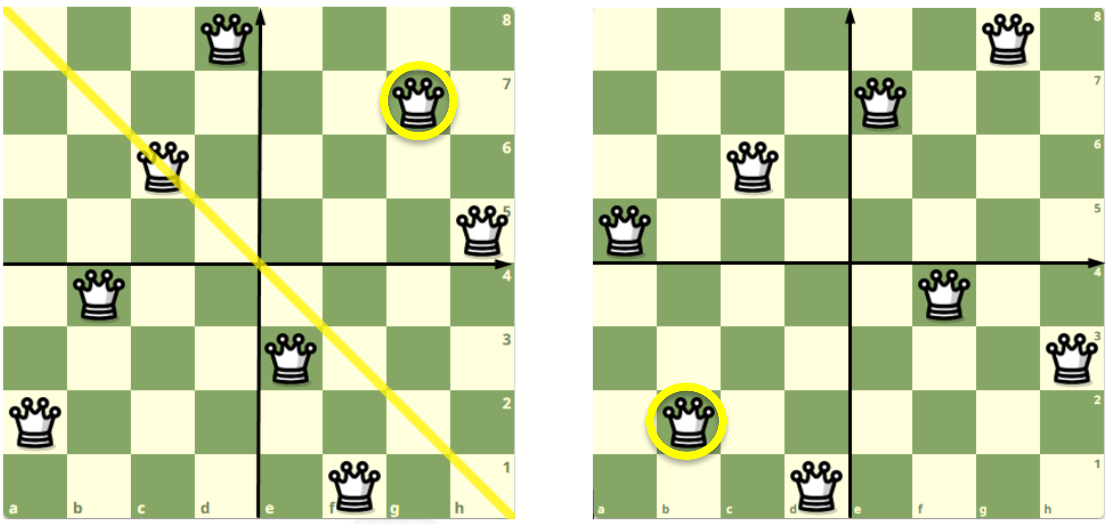
Figura 33: Reflexão em relação ao eixo definido por $y = x$.



Fonte: Próprio do autor, 2024.

Fazendo uma reflexão em relação ao eixo definido pela diagonal principal de equação $y = -x$, que é a transformação linear de R^2 em R^2 definida por $(x; y) \mapsto T\big((x; y)\big) = (-y; -x)$ obtém-se a nova disposição das peças no tabuleiro, como mostra a Figura 34. Tomando como exemplo, a rainha que está na casa g7, definida pelo ponto $P(2{,}5; 2{,}5)$ e aplicando a transformação linear $T\big((2{,}5; 2{,}5)\big) = (-2{,}5; -2{,}5)$, a posição ocupada passa a ser b2.

Figura 34: Reflexão em relação ao eixo definido por $y = -x$.



Fonte: Próprio do autor, 2024.

Fazendo uma rotação de 90º no sentido anti-horário em relação ao centro do tabuleiro, obtém-se a nova disposição das peças no tabuleiro conforme Figura 35, do lado direito. A transformação linear de R^2 em R^2 rotação é definida por:

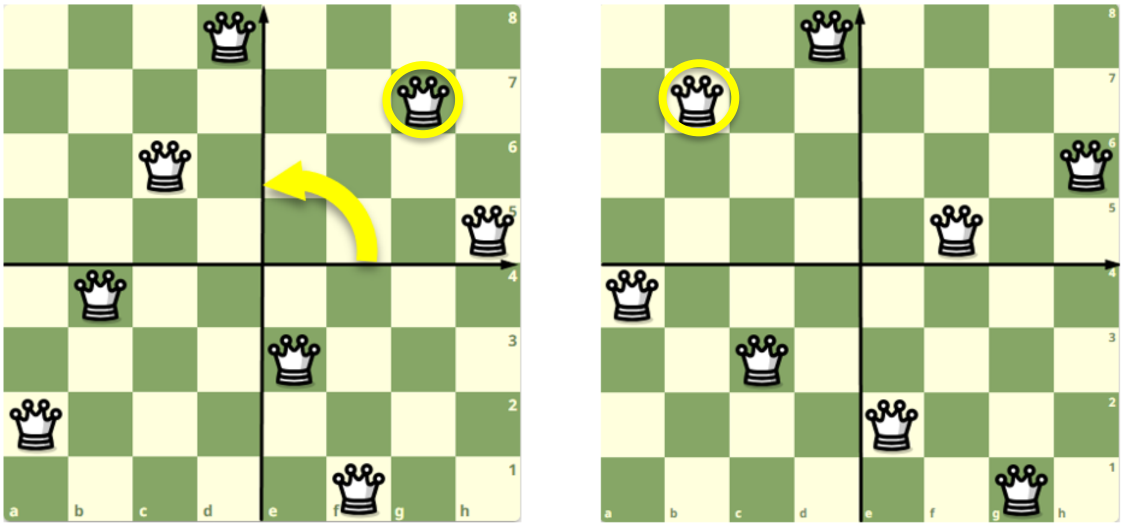
$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\ sen\theta \\ x\ sen\,\theta + y\ cos\theta \end{bmatrix}$$

Tomando como exemplo, a rainha que está na casa g7, definida pelo ponto $P(2{,}5; 2{,}5)$ e aplicando a transformação linear $R(90°)$, a posição ocupada passa a ser b7 no ponto definido por $P(-2{,}5; 2{,}5)$.

$$R(90°) = \begin{bmatrix} \cos 90° & -sen90° \\ sen90° & cos90° \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2{,}5 \\ 2{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}5\cos 90° - 2{,}5\ sen90° \\ 2{,}5\ sen\ 90° + 2{,}5\ cos90° \end{bmatrix}$$

$$R(90°) = \begin{bmatrix} 2{,}5.(0) - 2{,}5.(1) \\ 2{,}5.(1) + 2{,}5.(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2{,}5 \\ 2{,}5 \end{bmatrix}$$

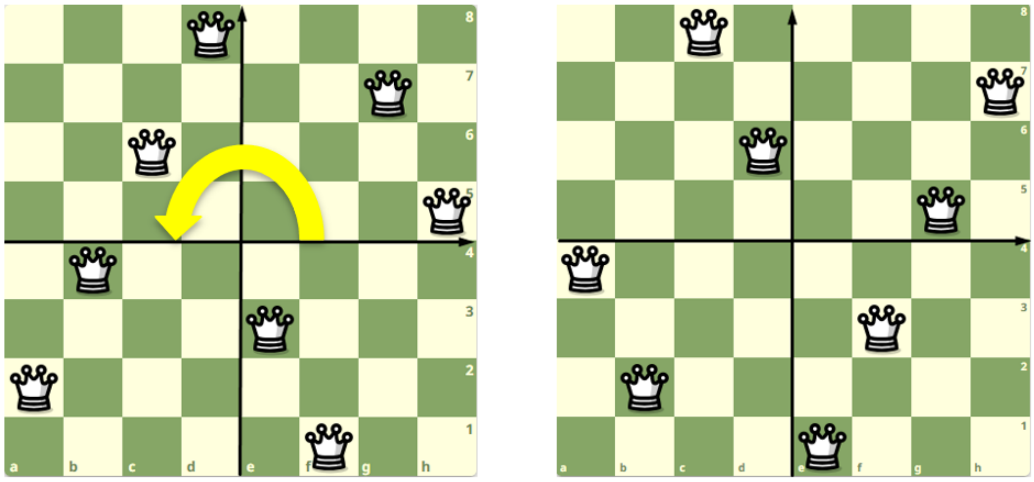
Figura 35: Rotação de 90º no sentido anti-horário.



Fonte: Próprio do autor, 2024.

Fazendo uma rotação de 180º no sentido anti-horário em relação ao centro do tabuleiro, obtém-se a nova disposição das peças no tabuleiro como mostra a Figura 36, do lado direito.

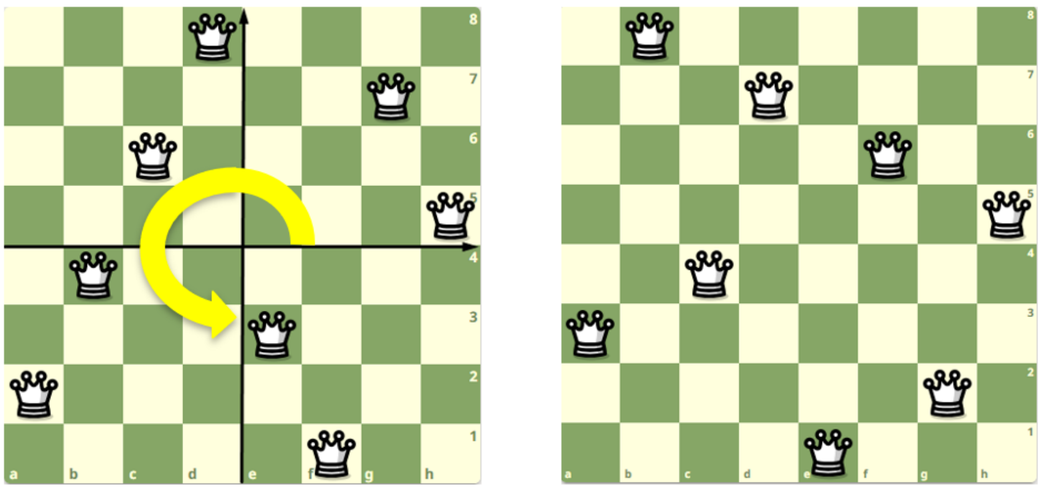
Figura 36: Rotação de 180º no sentido anti-horário.



Fonte: Próprio do autor, 2024.

Fazendo uma rotação de 270º no sentido anti-horário em relação ao centro do tabuleiro, obtém-se a nova disposição das peças no tabuleiro como mostra a Figura 37, do lado direito.

Figura 37: Rotação de 270º no sentido anti-horário.



Fonte: Próprio do autor, 2024.

Assim, foi demonstrado que uma das doze soluções fundamentais, gerou sete novas soluções para o desafio das oito rainhas. Dessas doze soluções fundamentais, onze se comportam da mesma maneira, gerando sete soluções novas, totalizando oitenta e oito soluções, a última solução gera três soluções diferentes, totalizando as 92 soluções do desafio.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nas considerações finais deste estudo, pode-se destacar a importância da abordagem matemática na resolução do desafio das oito rainhas do xadrez. Ao utilizar conceitos de rotação e reflexão do tabuleiro, foi possível explorar novas perspectivas na busca por soluções para o problema.

Foi evidenciado que a aplicação desses conceitos não apenas simplifica a análise do problema, mas também revela configurações simétricas que representam soluções equivalentes. Além disso, a combinação de técnicas matemáticas, como isometria e análise combinatória, permitiu uma compreensão mais profunda das propriedades geométricas do tabuleiro e das possíveis disposições das rainhas.

Portanto, é possível concluir que a abordagem matemática baseada em reduzir o problema para um de menor complexidade, iniciando a análise com quatro peças e aplicando as propriedades de rotação e reflexão do tabuleiro oferece uma estratégia interessante para resolver o desafio das oito rainhas. Este estudo representa um passo importante na direção de compreender e abordar problemas complexos por meio de uma perspectiva matemática, demonstrando a eficácia e a relevância desses métodos na solução de desafios práticos.

REFERÊNCIAS

[1] ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com Aplicações.** Tradução de Claus Ivo Doering. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012. 784 p.

[2] BELL, Jordan; STEVENS, Brett. A survey of known results and research areas for n-queens. **Sciencedirect**: Discrete Mathematics, Ottawa, v. 309, p. 1-31, 4 mar. 2008. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/journal/discrete-mathematics. Acesso em: 17 maio 2024.

[3] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/. Acesso em: 19 jul. 2024.

[4] CAMPBELL, Paul J.. Gauss And The Eight Queens Problem: a study in miniature of the propagation of historical error. **Historia Mathematica 4**, [*s. l*], v. 4, p. 397-404, abr. 1977.

[5] CASTRO, Celso. **Uma história cultural do xadrez.** Cadernos de Teoria da Comunicação, Rio de Janeiro, v.1, nº2, p.3-12,1994.

[6] CORDEZ, Philippe. O jogo de xadrez: imagem, poder e igreja (fim do século x - início do século xii). **Revista de História**, São Paulo, v. 165, p. 93-120, dez. 2011.

[7] JESUS, I. S. **Isometrias no Plano: Uma Abordagem Aplicável ao Ensino Básico**. 2017. 64 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) – Instituto de Matemática, Universidade Federal da Bahia, Salvador – BA. 2017

[8] LASKER, Edward. **Adventure of Chess**. New York: Dover Publications Inc, 1972. 296 p.

[9] MURRAY, H. J. R. **A History of Chess**. 1. ed. Oxford: Oxford University Press, 1913. 945 p.

[10] ROSHOLM, Michael; MIKKELSEN, Mai Bjørnskov; GUMEDE, Kamilla. Your move: the eect of chess on mathematics test scores. **Plos One**, Switzerland, p. 2-10, 11 maio 2017. Disponível em: https://doi.org/10.1371/journal.pone.0177257. Acesso em: 17 maio 2024.

[11] SHANNON, C. E. **Programming a Computer for Playing Chess. Philosophical Magazine**, Londres, Ser.7, Vol. 41, No. 314, p. 256-275. Março, 1950.

[12] SOUZA, H. M. F. **Algoritmo eficiente para validação de soluções para o problema das n-rainhas**. 2019. 43 f. Monografia (Bacharelado em Ciência da Computação) – Universidade Federal de Alagoas, Arapiraca – AL. 2019

[13] **The SportAccord World Mind Games.** Disponível em: < http://www.worldbridge.org/competitions/the-international-events-partecipated-by-the-wbf/sportaccord-world-mind-games/>. Acesso em 14 jun. 2021

[14] VASCONCELOS, Cleiton Batista; ROCHA, Manoel Americo. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 3. ed. Fortaleza: Eduece, 2019. 132 p.