UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Comportamento Assintótico para Equações de Placa Fracionárias

Iago Aparecido da Silva Picolli

São Carlos-SP
Maio de 2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Comportamento Assintótico para Equações de Placa Fracionárias

Iago Aparecido da Silva Picolli

Orientador: Prof. Dr. Marcelo José Dias Nascimento

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Doutor em Matemática.

São Carlos-SP
Maio de 2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinatura dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado do candidato Iago Aparecido da Silva Picolli, realizada em 16/07/2024:

Prof(a). Dr(a). Marcelo José Dias Nascimento
UFSCar

Prof(a). Dr(a). Karina Schiabel
UFSCAR

Prof(a). Dr(a). Maurício Luciano Pelicer
UEM

Prof(a). Dr(a). Gleiciane da Silva Aragão
UFSCar

Prof(a). Dr(a). Vando Narciso
UEMS

Dedico este trabalho
à minha família e aos meus amigos.

Agradecimentos

Agradeço a toda minha família e principalmente aos meus pais que sempre me apoiaram e me incentivaram.

A todos os meus amigos, que sempre estiveram ao meu lado, me dando apoio.

Agradeço a todos os professores e funcionários do Departamento de Matemática, que contribuíram para minha formação. Aos Professores Maurício Luciano Pelicer e Vando Narciso pela ajuda na pesquisa e de maneira especial, agradeço ao Professor Marcelo José Dias Nascimento, que com paciência, sabedoria e incentivo me orientou.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Enfim, agradeço a todas as pessoas que acreditaram em mim e que, de alguma maneira, fazem parte da minha vida. Muito obrigado!

Resumo

Neste trabalho, consideramos equações de placa fracionárias semilineares de segunda ordem no tempo. Inicialmente, estudamos uma equação governada por um operador biharmônico, com condições de contorno fixadas em um domínio suave e limitado, essa equação modela estruturas de voo. Neste contexto, incorporamos um termo dissipativo que depende diretamente da energia do sistema. Em seguida introduzimos um termo de memória na equação, resultando em uma dissipação do sistema que leva em consideração tanto a energia quanto a memória passada. Em ambos os casos, estudamos a boa colocação local e global e provamos a existência de um atrator global compacto para o semigrupo de evolução associado. Além disso, mostramos que a família de atratores globais é semicontínua superiormente.

Palavras-chave: Atrator global, boa colocação local e global, problema semilinear, semicontinuidade superior.

Abstract

In this work, we consider two second-order fractional semilinear plate equations in time. In the first problem, we investigate an equation governed by a biharmonic operator, with clamped boundary conditions in a smooth bounded domain, modeling flight structures. In this context, we introduce a dissipative term that depends directly on the energy of the system. In the second problem, we add a memory term, resulting in a dissipative system that depends on energy and past memory. In both cases, we study local and global well-posedness and we prove the existence of a compact global attractor for the associated evolution semigroup. Additionally, we obtain the upper semicontinuity of the family of global attractors.

Keywords: Local and global well-posedness, semilinear problem, global attractor, upper semicontinuity.

Sumário

Lista de Símbolos

$\mathscr{C}(X)$: Conjuntos das funções contínuas de X em X;

$\mathscr{L}(X,Y)$: Conjunto dos operadores lineares contínuos de X em Y;

$\mathscr{L}(X)$: Conjunto dos operadores lineares contínuos de X em X;

$B_Y(a,r)$: Bola aberta de centro a e raio $r > 0$ em Y;

$\overline{A}$: Fecho do conjunto A;

$|\Omega|$: Medida do conjunto Ω;

X^* : Espaço dual de X;

$\partial\Omega$: Fronteira do conjunto Ω;

$supp(f)$: Suporte de uma função f.

Introdução

Nos últimos anos muitos pesquisadores estudaram equações não lineares de vigas com diferentes tipos de amortecimento e dissipação, ver [21, 22, 26, 28, 37]. Este tipo de problema tem aplicações físicas importantes, entre elas, vibrações de vigas e placas extensíveis.

É bem conhecido que no estudo do comportamento assintótico de soluções de equações diferenciais parciais a noção de atratores globais desempenha um papel crucial, porque este objeto captura o comportamento assintótico de sistemas autônomos. Em geral, um *atrator* é um conjunto compacto (mínimo) que satisfaz uma propriedade de invariância e que atrai todos os subconjuntos limitados do espaço de fase, ver Definição 1.44.

Em [21] os autores estudaram existência, unicidade e estabilidade de soluções para o modelo de viga com amortecimento não local

$$u_{tt} - \kappa\Delta u + \Delta^2 u - \gamma\Big[\int_\Omega (|\Delta u|^2 + |u_t|^2)\Big]^q \Delta u_t + f(u) = 0.$$

No tópico de atratores globais para equações de feixe extensível muitos resultados importantes foram obtidos nos últimos anos, veja por exemplo os artigos [22, 26, 37] e suas referências. Veja também os livros [2, 10, 19].

Recentemente, em [36], os autores estudaram uma classe de vigas extensíveis com amortecimento fraco não local da forma

$$u_{tt} + \Delta^2 u - m(\|\nabla u\|^2)\Delta u + k(\|u\|^2)u_t + f(u) = h,$$

com condições de contorno

$$u = \Delta u = 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Os autores provaram a existência de solução global e de atrator global em um espaço de fase apropriado. Veja também [37].

Para amortecimento fracionário não linear, em [22] os autores estudaram a equação

$$u_{tt} + \Delta^2 u - M(\|\nabla u\|^2)\Delta u + N(\|\nabla u\|^2)(-\Delta)^\theta u_t + f(u) = h,$$

e mostraram a existência de atrator global compacto e de atrator exponencial para este problema.

Podemos citar também [12] onde os autores estudaram resultados de boa colocação para equações viscoelásticas não lineares com memória na forma

$$|u_t|^\rho u_{tt} + (-\Delta)u_t t + \gamma(-\Delta)^\theta u_t + \alpha(-\Delta)u - \int_0^\infty \mu(s)(-\Delta)u(t-s)ds + f(u) = h,$$

com condições de fronteira de Dirichlet.

Mais recentemente, em [15], os autores estudaram a existência de atrator global para a equação de onda semilinear com memória dada por

$$u_{tt} - \Delta u_{tt} - \Delta u + \int_0^\infty \mu(s)\Delta u(t-s)ds + f(u) = h,$$

com condições de fronteira de Dirichlet.

Quando enfrentamos a tarefa de modelar matematicamente um problema da vida real, é comum que precisemos recorrer a aproximações. Essas aproximações podem ocorrer devido à falta de dados, ao uso de leis empíricas, simplificação do modelo ou ao emprego de discretizações para aplicação de métodos numéricos. Assim, o modelo matemático resultante é apenas uma aproximação ou uma perturbação do problema real.

Nesse sentido, é fundamental que sejamos capazes de obter resultados que nos permitam extrair algumas propriedades do problema original e aplicá-las ao problema real. Especificamente, nosso interesse é focar na robustez dos atratores globais para semigrupos. Em outras palavras, buscamos identificar condições nas quais, ao perturbar um semigrupo, o atrator global do novo semigrupo permanece próximo ao atrator global do semigrupo original. Em particular, estamos interessado na semicontinuidade superior, que garante que os atratores não explodem, ou seja, as soluções globais limitadas do semigrupo perturbado permanecem próximas as do semigrupo original.

No estudo da robustez de uma família de atratores, podemos citar [14], onde os autores estudaram propriedades de boa colocação, existência de atrator global e semicontinuidade superior de uma família de atratores do seguinte sistema de equações de ondas não lineares acopladas:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \alpha v + g_1(u_t) + f_1(u,v) = h_1(x) \text{ em } \Omega \times (0,\infty), \\ v_{tt} - \Delta v + \alpha u + g_2(v_t) + f_2(u,v) = h_2(x) \text{ em } \Omega \times (0,\infty), \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio limitado com fronteira limitada C^2, com condições de fronteira de Dirichlet.

Para o estudo da semicontinuidade superior para um problema não autônomo, citamos [3], onde os autores estudaram a existência, limitação uniforme, regularidade e semicontinuidade superior de uma família de atratores de *pullback* para o seguinte sistema de evolução:

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u + a\Delta\theta = f(u), \;\; t > \tau, \; x \in \Omega, \\ \theta_t - k(t)\Delta\theta - a\Delta u_t = 0, \;\; t > \tau, \; x \in \Omega, \end{cases}$$

sujeito às condições de fronteira

$$u = \Delta u = \theta = 0 \;\; t > \tau, \; x \in \partial\Omega.$$

Neste trabalho consideramos dois problemas de evolução semilineares. O primeiro problema consiste em uma equação dr onda, com o termo dissipativo dependendo diretamente da energia do sistema, dado da seguinte forma:

$$\begin{cases} u_{tt}+(-\Delta)^{\theta}u+\Delta^2u-\gamma\Big[E(u,u_t)\Big]^q\Delta u_t+f(u)=h(x), \quad t>0, x\in\Omega, \\ u(0,x)=u_0(x), \quad u_t(0,x)=u_1(x), \quad x\in\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde Ω é um domínio suave limitado em $\mathbb{R}^n$, $n\geq 1$, $\theta\in[0,2]$, $\gamma>0$, $q>0$ e E é um funcional definido no espaço de Hilbert $H_0^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$, dado por

$$E(u,v)=\frac{1}{2}\Big[\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u\|^2+\|\Delta u\|^2+\|v\|^2\Big]+\int_\Omega F(u)dx-\int_\Omega h(x)udx,$$

onde F é uma primitiva apropriada de f, ou seja

$$F(u)=\int_0^u f(s)ds+\mu, \tag{2}$$

para uma escolha apropriada de μ.

No segundo problema adicionamos um termo de memória, ou seja, consideramos o seguinte problema

$$\begin{cases} u_{tt}+(-\Delta)^{\theta}u+\Delta^2u-\gamma E(t)^q\Delta u_t-\int_0^\infty g(s)\Delta^2u(t-s)ds \\ +f(u)=h(x), \quad t>0, \\ u(x,0)=u_0(x) \quad u_t(x,0)=u_1(x), \quad x\in\Omega, \\ u(-s,x)=\varphi(s,x), \quad (s,x)\in[0,+\infty)\times\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

onde $E(t)$ é o funcional de energia associado ao problema (3) que será explicitado no decorrer do trabalho.

Consideramos ambos os problemas sujeitos à condição de contorno grampeada

$$u=\Delta u=0 \ \text{ em } \ \partial\Omega. \tag{4}$$

O objetivo deste trabalho é estudar as boas colocações local e global dos problemas (1) e (3). Adicionalmente, provamos que o sistema dinâmico (semigrupo) associado a cada um dos problemas (1) e (3) possuem um atrator global compacto. Para isso utilizaremos a teoria da função contrativa desenvolvida em [24] (ver também [8]) para obter a compacidade assintótica. Além disso, se considerarmos γ_ε, $\varepsilon\in[0,1]$ em vez de γ em (1) e em (3) (ver (2.87) e (3.109)), mostramos que os semigrupos associados a (1) e (3) são gradientes e as famílias de atratores globais associados a estes respectivos semigrupos são semicontínuas superiormente em $\varepsilon=0$.

Esta tese está organizada da seguinte forma. No Capítulo 1 apresentamos resultados preliminares necessários para o desenvolvimento do trabalho. O Capítulo 2 é organizado de forma que na Seção 2.1 apresentamos um problema de evolução semilinear com o termo dissipativo dependente da energia do sistema e suas hipóteses. A Seção 2.2 é dedicada a provar a existência, unicidade e dependência contínua dos dados iniciais do problema (1)-(4). Na Seção 2.3 provamos a existência de um atrator global compacto para o semigrupo associado. Finalmente, na Seção 2.4 mostramos a semicontinuidade superior em $\varepsilon=0$ da família de atratores globais associados a $(1)_{\gamma_\varepsilon}$ bem como que o semigrupo associado a este problema é gradiente. O Capítulo 3 foi estruturado de maneira a abordar um problema de evolução semilinear com termos dissipativos dependentes da energia do sistema e da memória passada e suas hipóteses na Seção 3.1. A Seção 3.2 se concentra em demonstrar a boa colocação do problema (3)-(4). Na Seção 3.3, estabelecemos a existência de um atrator global compacto para o semigrupo correspondente. Por fim, na Seção 3.4, mostramos a semicontinuidade superior, para $\varepsilon = 0$, da família de atratores globais associados a $(3)_{\gamma\varepsilon}$, assim como a propriedade de que o semigrupo associado a esse problema é gradiente.

CAPÍTULO 1

Preliminares

1.1 Distribuições e Espaços Funcionais

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $\varphi : \Omega \to \mathbb{K}$ (onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) que são infinitamente diferenciáveis em Ω e que tem suporte compacto, onde o suporte de φ é o fecho do conjunto $\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}$ em Ω, ou seja, $supp\,(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}^{\Omega}$.

Dados $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, representaremos por D^α o operador derivação de ordem α definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \partial {x_2}^{\alpha_2} \ldots \partial {x_n}^{\alpha_n}},$$

em que $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Se $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$, define-se $D^\alpha u = u$.

Dizemos que uma sequência $\{\varphi_\nu\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para zero, denotando $\varphi_\nu \to 0$, se, e somente se, existe um subconjunto compacto K de Ω, tal que:

i) $supp\,(\varphi_\nu) \subset K, \forall\, \nu \in \mathbb{N}$;

ii) $D^\alpha \varphi_\nu \to 0$ uniformemente sobre K, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Dizemos que uma sequência $\{\varphi_\nu\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para $\varphi \subset C_0^\infty(\Omega)$ quando a sequência $\{\varphi_\nu - \varphi\}$ converge para zero no sentido acima definido.

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, munido desta noção de convergência, é denominado espaço das funções testes, e denotado por $\mathscr{D}(\Omega)$.

Definimos como distribuição sobre Ω todo funcional linear e contínuo em $\mathscr{D}(\Omega)$. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é um espaço vetorial, representado por $\mathscr{D}'(\Omega)$, chamado espaço das distribuições sobre Ω, munido da seguinte noção de convergência: seja (T_ν) uma sequência em $\mathscr{D}'(\Omega)$ e $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Diremos que $T_\nu \to T$ em $\mathscr{D}'(\Omega)$ se a sequência numérica $\{\langle T_\nu, \varphi \rangle\}$ converge para $\langle T, \varphi \rangle$ em $\mathbb{R}$, para todo $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

Seja T uma distribuição sobre Ω e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A derivada de ordem α de T, no sentido das distribuições, é definida por:

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle; \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Verifica-se que $D^\alpha T$ é ainda uma distribuição e que o operador $D^\alpha : \mathscr{D}'(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega)$, tal que a cada T associa-se $D^\alpha T$, é linear e contínuo.

1.2 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Representaremos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis definidas em Ω com valores em $\mathbb{K}$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em Ω.

O espaço $L^p(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } 1 \leq p < +\infty$$

e

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \Omega} \operatorname{ess} |u(x)|, \text{ para } p = +\infty,$$

é um espaço de Banach.

No caso $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

Teorema 1.1. (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) - *Seja $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções integráveis num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, convergente quase sempre para uma função u. Se existir uma função $u_0 \in L^1(\Omega)$ tal que $|u_\nu| \leq u_0$ quase sempre, $\forall \nu \in \mathbb{N}$ então u é integrável e tem-se*

$$\int_\Omega u = \lim_{\nu \to \infty} \int_\Omega u_\nu.$$

Demonstração: Ver [27].

Teorema 1.2. (Lema de Fatou) - *Seja $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções integráveis e não negativas que converge quase sempre para uma função u. Se $\liminf_{\nu \to \infty} \int_\Omega u_\nu$ é finito, então u é integrável e tem-se*

$$\int_\Omega u \leq \liminf_{\nu \to \infty} \int_\Omega u_\nu.$$

Demonstração: Ver [27].

Proposição 1.3. - *Se $u \in L^1(\Omega)$ então as integrais indefinidas de u são funções absolutamente contínuas.*

Demonstração: Ver [27].

Proposição 1.4. (Desigualdade de Young) - *Sejam $1 < p, q < \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $a, b > 0$. Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração: Ver [4].

Proposição 1.5. (Desigualdade de Minkowski) - *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e f, g em $L^p(\Omega)$, então*

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [27].

Proposição 1.6. (Desigualdade de Hölder) - *Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $uv \in L^1(\Omega)$ e temos a desigualdade*

$$\int_\Omega |uv| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [4].

Observação 1.7. Em $L^2(\Omega)$ a Desigualdade de Hölder é conhecida como Desigualdade de Schwarz.

Segue como corolário da proposição anterior o seguinte resultado:

Corolário 1.8. (Desigualdade de Hölder generalizada) - *Sejam $f_1, f_2, \ldots, f_k$ funções, tais que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $p_i \geq 1$, $1 \leq i \leq k$, onde $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_k} = \frac{1}{p}$ e $\frac{1}{p} \leq 1$. Então o produto $f = f_1 f_2 \ldots f_k \in L^p(\Omega)$ e*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \cdots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Além dos resultados acima, temos:

i) $L^p(\Omega)$ é reflexivo para todo $1 < p < +\infty$;

ii) $L^p(\Omega)$ é separável para todo $1 \leq p < +\infty$;

iii) $\mathscr{D}(\Omega)$ tem imersão contínua e densa em $L^p(\Omega)$ para todo $1 \leq p < +\infty$;

iv) Se (f_n) é uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ são tais que $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ então existe uma subsequência (f_{n_k}) tal que $f_{n_k}(x) \to f(x)$ quase sempre em Ω.

Teorema 1.9. (Teorema da Representação de Riesz) - *Sejam $1 < p < +\infty$, $\varphi \in (L^p(\Omega))'$ com $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Então existe uma única $u \in L^q(\Omega)$, tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \ \forall v \in L^p(\Omega) \text{ e } \|u\|_{L^q(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}.$$

Demonstração: Ver [4].

Quando $p = \infty$, temos:

Proposição 1.10. *Seja $\varphi \in \left(L^1(\Omega)\right)'$, então existe uma única $u \in L^\infty(\Omega)$ tal que*

$$\langle \varphi, v\rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \ \forall v \in L^1(\Omega) \text{ e } \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\varphi\|_{\left(L^1(\Omega)\right)'}.$$

Demonstração: Ver [4].

Denotaremos por $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$ o espaço das (classes de) funções $u : \Omega \to \mathbb{K}$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue sobre cada compacto K de Ω munido da seguinte noção de convergência: Uma sequência u_ν converge para $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ se para cada compacto K de Ω tem-se:

$$p_K(u_\nu - u) = \left(\int_K |u_\nu(x) - u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \to 0.$$

Lema 1.11. (Lema de Du Bois Raymond) - *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω, onde T_u é a distribuição definida por*

$$\langle T_u, \varphi\rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx, \ \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Demonstração: Ver [6].

Deste lema tem-se que T_u fica univocamente determinada por $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, isto é, se $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ quase sempre em Ω.

Proposição 1.12. *Seja $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, tal que $u_\nu \to u$ em $L^p_{loc}(\Omega)$, então $u_\nu \to u$ em $\mathscr{D}'(\Omega)$.*

Demonstração: Ver [6].

Lema 1.13. (Lema de Gronwall) - *Sejam $f \in C([0,T])$ e $z \in L^1(0,T)$ tais que $z(t) \geq 0$, $f(t) \geq 0$ e seja c uma constante não negativa. Se*

$$f(t) \leq c + \int_0^t z(s)f(s)ds, \ \forall t \in [0,T],$$

então

$$f(t) \leq ce^{\int_0^t z(s)ds}, \ \forall t \in [0,T].$$

Demonstração: Ver [5].

Proposição 1.14. (Desigualdade de Jensen) *Seja B um hipercubo do $\mathbb{R}^n$, então para toda função côncava F e toda função integrável $h \in L^1(B)$ teremos*

$$F\Big(\frac{1}{\mu(B)}\int_B h(x)dx\Big) \geq \frac{1}{\mu(B)}\int_B F(h(x))dx.$$

Demonstração: Veja [35].

Lema 1.15. (Lema de Lions) - *Seja (u_ν) uma sequência de funções pertencentes a $L^q(Q)$ com $1 < q < \infty$. Se* *i)* $u_\nu \to u$ *quase sempre em* Q,

ii) $\|u_\nu\|_{L^q(Q)} \leq C$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$,

então, $u_\nu \rightharpoonup u$ *fraco em* $L^q(Q)$.

Demonstração: Ver [25].

Teorema 1.16. (Teorema da Média) - *Seja* $f : (a,b) \to X$, *onde* X *é um espaço de Banach, uma função contínua. Para todo* $t \in [a,b]$ *tem-se*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s)ds = f(t).$$

Demonstração: Ver [17].

Lema 1.17. (Aubin-Lions) *Seja* E_0, E *e* E_1 *espaços de Banach com* $E_0 \subset E \subset E_1$, E_0 *imerso compactamente em* E *e* E *imerso continuamente em* E_1. *Defina*

$$W = \{u \in L^2(0,T;E_0); u' \in L^2(0,T;E_1)\},$$

onde $1 \leq p,q \leq \infty$. *Então*

i) Se $p < \infty$, *então a imersão* $W \hookrightarrow L^p([0,T];E)$ *é compacta.*

ii) Se $p = \infty$ *e* $q > 1$, *então a imersão* $W \hookrightarrow C([0,T];E)$ *é compacta.*

Demonstração: [25].

1.3 Espaços de Sobolev

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq +\infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Representamos por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$, tais que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ pertence a $L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada no sentido das distribuições.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\Omega} \text{ess} |D^\alpha u(x)|, \text{ para } p = \infty$$

é um espaço de Banach.

Denotamos $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ devido a sua estrutura hilbertiana, ou seja, os espaços $H^m(\Omega)$ são espaços de Hilbert.

Sabemos que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, mas não é verdade que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $W^{m,p}(\Omega)$ para $m \geq 1$. Motivado por esta razão definamos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, isto é,

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega).$$

Suponha que $1 \leq p < \infty$ e $1 < q \leq \infty$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Representamos por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$. O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ será denotado por $H^{-m}(\Omega)$.

Proposição 1.18. *Sejam Ω um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, de classe C^m, com fronteira limitada e m um inteiro tal que $m \geq 1$, e $1 \leq p < \infty$. Então temos as seguintes imersões contínuas:*

1. *se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} > 0$ então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, onde $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}$,*
2. *se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} = 0$ então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [p, +\infty[$,*
3. *se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} < 0$ então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.*

Demonstração: Ver [6].

Teorema 1.19. (Teorema de Rellich Kondrachov) *Seja Ω um subconjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, Ω de classe C^1 e $1 \leq p \leq \infty$. Então*

1. *se $p < n$ então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*]$, onde $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$,*
2. *se $p = n$ então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty[$,*
3. *se $p = n$ então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega})$.*

Demonstração: Ver [6].

Notação: $\overset{c}{\hookrightarrow}$ indica imersão compacta.

A seguinte desigualdade será útil e pode ser encontrada em [4].

Proposição 1.20. *Sejam $1 \leq q \leq p \leq \infty$ e inteiros $m > n$. Então*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-a}\|u\|_{W^{1,m}(\Omega)}^a, \quad \forall u \in W^{1,m}(\Omega),$$

onde

$$a = \frac{\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p}}{\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{m}},$$

para alguma constante $C > 0$.

Como consequência da desigualdade anterior, temos o seguinte

Corolário 1.21. *Existe uma constante $C>0$ tal que para todo $w \in H^1(I)$, vale*

$$\|w\|_{L^\infty(I)} \leq C\|w\|_{L^2(I)} + C\|w\|_{L^2(I)}^{\frac{1}{2}}\|w_x\|_{L^2(I)}^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração. De fato, pela Proposição anterior, existe $C>0$ satisfazendo

$$\|w\|_{L^\infty(I)} \leq C\|w\|_{L^2(I)}^{\frac{1}{2}}\left(\|w\|_{L^2(I)}^2 + \|w_x\|_{L^2(I)}^2\right)^{\frac{1}{4}}, \quad \forall w \in H^1(I),$$

e com isso, resulta

$$\begin{aligned}
\|w\|_{L^\infty(I)} &\leq C\|w\|_{L^2(I)}^{\frac{1}{2}}\left(\|w\|_{L^2(I)}^2 + \|w_x\|_{L^2(I)}^2\right)^{\frac{1}{4}} \\
&\leq C\|w\|_{L^2(I)}^{\frac{1}{2}}\left(\|w\|_{L^2(I)} + \|w_x\|_{L^2(I)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\|w\|_{L^2(I)}^{\frac{1}{2}}\left(\|w\|_{L^2(I)}^{\frac{1}{2}} + \|w_x\|_{L^2(I)}^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= C\|w\|_{L^2(I)} + C\|w\|_{L^2(I)}^{\frac{1}{2}}\|w_x\|_{L^2(I)}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall w \in H^1(I).
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.22. *Para toda $u \in H_0^1(I)$, vale*

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq 2^{\frac{1}{2}}\|u\|_{L^2(I)}^{\frac{1}{2}}\|u_x\|_{L^2(I)}^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração. De fato, dados $0<x\leq L$ e $u \in H_0^1(I)$, temos

$$u^2(x) = u^2(x) - u^2(0) = \int_0^x \frac{d}{dt}u^2(t)dt = \int_0^x 2u(t)u_x(t)dt \leq 2\|u\|_{L^2(I)}\|u_x\|_{L^2(I)}.$$

□

1.4 Topologia Fraca - $\sigma(E,E')$ e Topologia Fraca $*$ -$\sigma(E',E)$

Seja E um espaço de Banach, E' o seu dual topológico e consideremos $f \in E'$. Designaremos por $\varphi_f : E \to \mathbb{R}$, a aplicação dada por $\varphi_f(x) = \langle f,x\rangle$, para todo $x \in E$. À medida que f percorre E', obtemos uma família $\{\varphi_f\}_{f\in E'}$ de aplicações de E em $\mathbb{R}$.

Definição 1.23. Seja E um espaço de Banach. A topologia fraca $\sigma(E,E')$ sobre E é a topologia menos fina sobre E para a qual são contínuas todas as aplicações φ_f, $f \in E'$.

Notação: Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de E convergente para x em E na topologia fraca $\sigma(E,E')$. Utilizamos, neste caso, a seguinte notação:

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } E.$$

Proposição 1.24. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em E, então:*

i) $x_n \rightharpoonup x$ *em E se, e somente se,* $\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$, $\forall f \in E'$.

ii) *Se* $x_n \to x$ *em E, então* $x_n \rightharpoonup x$ *em E.*

iii) *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *em E, então* $\|x_n\|_E$ *é limitada e* $\|x\|_E \leq \lim inf \|x_n\|_E$.

iv) *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *em E e* $f_n \to f$ *em* E'*, então* $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.

Demonstração: Ver [4].

Seja E um espaço de Banach e seja $x \in E$ fixo. Definamos $J_x : E' \to \mathbb{R}$ por

$$\langle J_x, f \rangle = \langle f, x \rangle.$$

As aplicações J_x são lineares e contínuas, portanto $J_x \in E''$, $\forall x \in E$.

Definamos, agora, $J : E \to E''$ tal que $J(x) = J_x$.

Definição 1.25. A topologia fraca $*$, também designada por $\sigma(E', E)$, é a topologia menos fina sobre E' que torna contínuas todas as aplicações J_x.

Proposição 1.26. *Seja* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *uma sequência em* E'*, então:*

i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* E' *se, e somente se,* $\langle f_n, x \rangle \to \langle f, x \rangle$, $\forall x \in E$.

ii) *Se* $f_n \to f$ *em* E'*, então* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* E'.

iii) *Se* $f_n \rightharpoonup f$ *em* E'*, então* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* E'.

iv) *Se* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* E'*, então* $\|f_n\|_{E'}$ *é limitada e* $\|f\|_{E'} \leq \liminf \|f_n\|_{E'}$.

Demonstração: Ver [4].

Lema 1.27. *Sejam E um espaço de Banach reflexivo e* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *uma sequência limitada de E, então existe uma subsequência* $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ *de* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *e* $x \in E$*, tal que*

$$x_{n_k} \rightharpoonup x \text{ em } E.$$

Demonstração: Ver [4].

Lema 1.28. *Sejam E um espaço de Banach separável e* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *uma sequência limitada de* E'*, então existe uma subsequência* $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ *e* $f \in E'$*, tal que*

$$f_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ em } E'.$$

Demonstração: Ver [4].

Teorema 1.29. *Sejam E e F espaços de Banach e T um operador linear e contínuo de E em F. Então, T é contínuo em E, munido da topologia fraca* $\sigma(E, E')$*, em F, munido da topologia fraca* $\sigma(F, F')$*. A recíproca também é verdadeira.*

Demonstração: Ver [4].

1.5 C_0 - Semigrupos

Durante esta seção, X denotará um espaço de Banach e $\mathscr{L}(X)$ o espaço dos operadores lineares limitados de X em X. Uma família de operadores $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é denominada um Semigrupo de Operadores Lineares quando satisfaz:

i) $S(0) = I$, onde I denota o operador identidade de X;

ii) $S(t+s) = S(t)S(s), \quad \forall t,s \in \mathbb{R}_+$.

O semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é denominado de classe C_0, ou C_0-semigrupo, quando satisfaz:

iii) $\lim\limits_{t\to 0^+} \|S(t)x - x\|_X = 0, \quad \forall x \in X$.

Proposição 1.30. *Se $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo, então $t \mapsto \|S(t)\|_X$ é uma função limitada em todo intervalo limitado* $[0,T]$.

Demonstração: Ver [32].

Resulta, da proposição anterior, que existem $M \geq 1$ e $\omega \geq 0$ tais que

$$\|S(t)\|_X \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

No caso em que $\omega = 0$ e $M = 1$, o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é denominado C_0-**semigrupo de contrações**.

Definição 1.31. O operador A definido por

$$D(A) = \left\{ x \in X; \quad \lim_{h\to 0} \frac{S(h)-I}{h} x \quad \text{existe} \right\};$$

$$Ax = \lim_{h\to 0} \frac{S(h)-I}{h} x, \quad \forall x \in D(A),$$

é dito gerador infinitesimal do semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ e $D(A)$ é o domínio de A.

Proposição 1.32. *$D(A)$ é um subespaço vetorial de X e A é um operador linear.*

Demonstração: Ver [17].

Proposição 1.33. *Sejam $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo e A seu gerador infinitesimal.*

i) Se $x \in D(A)$, então $S(t)x \in D(A)$, $\forall t \geq 0$ e

$$\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax;$$

ii) Se $x \in D(A)$ então

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\tau)x d\tau = \int_s^t S(\tau)Ax d\tau;$$

iii) Se $x \in X$, então $\int_0^t S(\tau)xd\tau \in D(A)$ e

$$S(t)x - x = A\int_0^t S(\tau)xd\tau.$$

iv) Para todo $x \in X$,

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)xd\tau = S(t)x.$$

Demonstração: Ver [32].

Proposição 1.34. *Valem as seguintes afirmações:*

i) O gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo é um operador linear fechado e seu domínio é denso em X;

ii) Um operador linear A, fechado e com domínio denso em X, é o gerador infinitesimal de, no máximo, um C_0-semigrupo .

Demonstração: Ver [32].

Definição 1.35. Seja X um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ com norma $\|.\|_X$ e seja $X' = \mathscr{L}(X,\mathbb{K})$ o seu dual topológico com a norma usual $\|.\|_{X^*}$ ($\|x^*\|_{X^*} = \sup\{\text{Re} < x^*, x >: \|x\|_X \leq 1\}$). A aplicação dualidade $j : X \to 2^{X^*}$ é uma função multívoca definida por

$$j(x) = \{x^* \in X^* : \text{Re} < x^*, x >= \|x\|_X^2,\ \|x^*\|_{X^*} = \|x\|_X\}.$$

Note que, $j(x) \neq \emptyset$, pelo Teorema de Hahn-Banach.

Definição 1.36. i) Diz-se que um operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ é dissipativo se, para alguma aplicação dualidade j,

$$\text{Re}\langle j(x), Ax\rangle \leq 0, \quad \forall x \in D(A).$$

No caso em que X é um espaço de Hilbert, equivalentemente, $A : D(A) \subset X \to X$ é dissipativo quando

$$(Ax,x)_X \leq 0, \quad \forall x \in D(A);$$

ii) Diz-se que A é m-dissipativo se for dissipativo e $Im(I\lambda - A) = X$ para algum $\lambda > 0$;
iii) Diz-se que A é acretivo (m-acretivo) se $-A$ for dissipativo (m-dissipativo).

Teorema 1.37 (Lumer-Phillips). *Se A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo S, onde $\|S(t)\| \leq 1$, então*

(i) A é dissipativo relativamente à qualquer aplicação dualidade.

(ii) $Im(\lambda I - A) = X$, para todo $\lambda > 0$. Reciprocamente, se

(iii) $D(A)$ *é denso em* X.

(iv) A *é dissipativo relativamente à alguma aplicação dualidade.*

(v) $Im(\lambda_0 I - A) = X$ *para algum* $\lambda_0 > 0$. *Então* A *é o gerador infinitesimal de um* C_0*-semigrupo, onde* $\|S(t)\| \leq 1$.

Demonstração: Ver [17].

Corolário 1.38. *Se* A *é m-dissipativo, então* $Im(\lambda I - A) = X$, *para todo* $\lambda > 0$.

Demonstração: Ver [17].

O Teorema de Lumer-Phillips pode ser reescrito da seguinte maneira:

Teorema 1.39 (Lumer-Phillips). *Um operador* A *é gerador de um* C_0-*semigrupo de contrações se, e somente se,* A *é m-dissipativo e densamente definido.*

Demonstração: Ver [17].

Tal versão do Teorema de Lumer-Phillips nos dá como consequência o seguinte corolário:

Corolário 1.40. *Seja* A *um operador linear fechado densamente definido. Se* A *e seu adjunto* A^* *são dissipativos, então* A *é gerador infinitesimal de um* C_0-*semigrupo de contrações.*

Demonstração: Ver [32].

1.6 Teorema de Carathéodory

Nesta seção enunciaremos o teorema de Carathéodory que será utilizado posteriormente. A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [11].

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um conjunto aberto cujos elementos são denotados por (t,Y), $t \in \mathbb{R}$, $Y \in \mathbb{R}^n$ e seja $H : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função.

Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} Y'(t) = H(t, Y(t)) \\ Y(t_0) = Y_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Dizemos que $H : \Omega \to \mathbb{R}^n$ satisfaz as condições de Carathéodory sobre Ω se:

(i) $H(t,Y)$ é mensurável em t para cada Y fixado;

(ii) $H(t,Y)$ é contínua em Y para quase todo t fixado;

(iii) para cada compacto $K \subset \Omega$, existe uma função real $m_k(t)$, integrável, tal que

$$\|H(t,Y)\|_{\mathbb{R}^n} \leq m_k(t), \ \ \forall (t,Y) \in K.$$

Teorema 1.41. *Seja $H : \Omega \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre Ω. Então existe uma solução absolutamente contínua $Y(t)$ de (1.1) sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta$, $\beta > 0$.*

Demonstração: Ver [11].

Corolário 1.42. *Sejam $\sum = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| \leq b\}$ com $b > 0$, $[0,T] \subset \mathbb{R}$ um intervalo fechado e $H : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre $[0,T] \times \Omega$. Suponhamos que $Y(t)$ é uma solução de (1.1) tal que $|Y_0| \leq b$ e que em qualquer intervalo I, onde $Y(t)$ está definida, se tenha $|Y(t)| \leq M$, para todo $t \in I$, M independente de I e $M < b$. Então $Y(t)$ possui um prolongamento em $[0,T]$.*

Demonstração: Ver [11].

1.7 Atrator Global

Nesta seção definimos atrator global e apresentamos alguns resultados básicos. As demonstrações podem ser encontradas em [8], [34] e [38].

Definição 1.43. Seja (X,d) um espaço métrico. Dados os subconjuntos A e B de X, o excesso ou semidistância de Hausdorff de A sobre B é definida por

$$d_H(A,B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a,b).$$

Com a convenção $d_H(A,\emptyset) = +\infty$ se $A \neq \emptyset$ e $d_H(\emptyset,B) = 0$.

Definição 1.44. Suponha que X é um espaço métrico completo, e $S(t)$ é um C_0-semigrupo de operadores não lineares definidos sobre X. Um conjunto $\mathscr{A} \subset X$ diz-se um atrator global se as seguintes propriedades são satisfeitas:

(i) $\mathscr{A}$ é invariante, isto é,

$$S(t)\mathscr{A} = \mathscr{A}, \ \ \forall t \geq 0.$$

(ii) $\mathscr{A}$ é compacto em X.

(iii) $\mathscr{A}$ atrai uniformemente todo limitado de X, isto é, para qualquer limitado $B \subset X$

$$d_H(S(t)B, \mathscr{A}) = \sup_{x \in S(t)B} \inf_{y \in \mathscr{A}} d(x,y) \to 0 \ \text{ com } \ t \to \infty.$$

Para estabelecer a existência de um atrator global, um passo crucial é mostrar a existência de um conjunto absorvente que definimos a seguir.

Definição 1.45. Um semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ possui um conjunto absorvente B_0 em um espaço métrico X, se para qualquer conjunto limitado $B \subset X$, existe $t_0 = t_0(B) \geq 0$ tal que

$$S(t)B \subset B_0 \ \ \forall t \geq t_0.$$

Definição 1.46. Seja $A \subset X$. Definimos o subconjunto de A, denotado por $\omega(A)$ da seguinte forma:

$$\omega(A) = \cap_{s\geq 0}\overline{\cup_{t\geq s} S(t)A}$$

onde o fecho é tomado em X. Equivalentemente, $\omega(A)$ pode ser definido como

$$\omega(A) = \{\phi : \exists t_n \to \infty \text{ e uma sequência } \phi_n \in A \text{ tal que } S(t_n)\phi_n \to \phi \text{ com } n \to \infty\}.$$

Podemos ver das definições de atrator global e conjunto absorvente para um C_0-semigrupo não linear $S(t)$, que a existência de um atrator global implica a existência de um conjunto absorvente. A reciproca nem sempre é válida, pois um conjunto absorvente não necessariamente é um conjunto invariante. Entretanto, temos o seguinte resultado que será fortemente usado nos próximos capítulos para provar existência de atrator global.

Teorema 1.47. *Suponha que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo não linear definido sobre um espaço de Banach X satisfazendo as seguintes condições:*

(i) Conjunto Absorvente: Existe um conjunto absorvente limitado B_0 para $S(t)$.

(ii) Compacidade Assintótica: Para qualquer sequência limitada $\{(y_n)\} \subset X$ e uma sequência numérica $t_n \to \infty$, existe uma subsequência $\{S(t_{n_k})(y_{n_k})\}$ de $\{S(t_n)(y_n)\}$ que é convergente em X.

Então $S(t)$ possui um atrator global $\mathscr{A} \subset X$, que é precisamente o conjunto $\omega(B_0)$.

Demonstração: Ver [2] e [34].

Por outro lado, para verificarmos a propriedade (ii) do Teorema 1.47, também conhecida como compacidade assintótica, utilizaremos uma abordagem mais recente, que pode ser encontrada em Khanmamedov [23] ou Lasiecka-Chueshov ([8], Capítulo 2, Proposição 2.10).

Lema 1.48. *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo sobre um espaço métrico (X,d) que possui um conjunto absorvente B_0. Além disso, assuma que para qualquer $\varepsilon \geq 0$ existe $T = T(B_0,\varepsilon)$ tal que*

$$d_H(S(T)y_1, S(T)y_2) \leq \varepsilon + \Phi_T(y_1,y_2), \quad \forall y_1,y_2 \in B_0$$

onde $\Phi_T(y_1,y_2)$ é uma função contrativa sobre $B_0 \times B_0$, no seguinte sentido, para qualquer sequência $\{y_n\} \subset B_0$,

$$\lim_{n\to\infty} \inf \lim_{m\to\infty} \sup \Phi_T(y_n,y_m) = 0.$$

Então, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é assintoticamente compacto em X, isto é, para qualquer sequência limitada $(y_n) \subset X$ e $t_n \to \infty$, $S(t_n)y_n$ é pré-compacto em X.

Demonstração: Ver [8] ou [23].

1.8 Dimensão fractal

O objetivo desta seção é apresentar resultados sobre existência e dimensão fractal de atratores. Para tal, vamos trabalhar com a definição de quasi-estabilidade. As definições e resultados podem ser encontrados em [9].

Definição 1.49. Seja A um subconjunto compacto de um espaço métrico $\mathscr{X}$. A dimensão fractal de A, denotada por $dim_f A$, é definida por

$$dim_f A = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup \frac{\ln n(A,\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)},$$

onde $n(A,\varepsilon)$ é o número mínimo de bolas fechadasde raio ε necessário para cobrir A.

Definição 1.50. Uma seminorma $n_{\mathscr{X}}(.)$ definida sobre um espaço de Banach $\mathscr{X}$ é compacta se $n_{\mathscr{X}}(x_j) \to 0$ para qualquer sequência $x_j \rightharpoonup 0$ em $\mathscr{X}$.

No que segue, vamos definir o conceito de quasi-estabilidade. Sejam $\mathscr{X}, Y, Z$ espaços de Banach reflexivos com $\mathscr{X} \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ e $H = \mathscr{X} \times Y \times Z$. Consideremos o sistema dinâmico $(H, S(t))$ dado pelo operador de evolução

$$S(t)z = (u(t), u_t(t), \xi_0^t), \quad z = (u_0, u_1, \xi_0) \in H, \tag{1.2}$$

e satisfazendo

$$u \in C(\mathbb{R}^+; \mathscr{X}) \cap C^1(\mathbb{R}^+; Z). \tag{1.3}$$

Definição 1.51. Dizemos que o sistema dinâmico $(H, S(t))$ definido por (1.2) é quasi-estável sobre um conjunto $B \subset H$ se existem uma seminorma compacta $n_{\mathscr{X}}(.)$ sobre $\mathscr{X}$ e funções não negativas $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ sobre $\mathbb{R}^+$ onde $a(t)$, $c(t)$ são localmente limitadas em $[0,\infty)$ e $b(t) \in L^1(\mathbb{R}^+)$ com $\lim_{t\to\infty} b(t) = 0$, tais que

$$\|S(t)z^1 - S(t)z^2\|_H^2 \leq a(t)\|z^1 - z^2\|_H^2 \tag{1.4}$$

e

$$\|S(t)z^1 - S(t)z^2\|_H^2 \leq b(t)\|z^1 - z^2\|_H^2 + c(t) \sup_{0\leq s\leq t} [n_{\mathscr{X}}(u^1(s) - u^2(s))]^2 \tag{1.5}$$

para $t > 0$ e $z^i \in B$, onde $z^i = (u_0^i, u_1^i, \xi_0^i)$, $i = 1,2$.

Teorema 1.52. *Seja $(H, S(t))$ um sistema dinâmico dado por (1.2) e satisfazendo a regularidade (1.3). Se $(H, S(t))$ possui um atrator global compacto A e é quasi-estável sobre A, então o atrator A possui dimensão fractal finita.*

1.9 Sistemas Gradientes e Semicontinuidade

Definição 1.53. Sejam (X,d) um espaço métrico e $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon\in[0,1]}$ uma família de subconjuntos de X.

i) Diremos que a família $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon\in[0,1]}$ é semicontínua inferiormente em $\varepsilon = 0$ quando

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} d_H(A_\varepsilon, A_0) = 0;$$

ii) Diremos que a família $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon\in[0,1]}$ é semicontínua superiormente em $\varepsilon = 0$ quando

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} d_H(A_0, A_\varepsilon) = 0;$$

iii) Diremos que a família $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon\in[0,1]}$ é contínua em $\varepsilon = 0$ quando for semicontínua inferiormente e semicontínua superiormente em $\varepsilon = 0$.

Definição 1.54. Dizemos que $y^* \in X$ é um ponto de equilíbrio (estacionário) para o semigrupo $\{S(t); t \geq 0\}$, se o conjunto $\{y^*\}$ é a órbita de uma solução global constante; isto é, $S(t)y^* = y^*$, para todo $t \geq 0$. Denotaremos por $\mathscr{N}$ o conjunto dos pontos de equilíbrio (estacionário) para o semigrupo $\{S(t); t \geq 0\}$, ou seja,

$$\mathscr{N} = \{y^* \in X;\ S(t)y^* = y^*,\ \forall t \geq 0\}.$$

Definição 1.55. Um semigrupo $\{S(t); t \geq 0\}$ é dito gradiente se tem uma função de Lyapunov, isto é, se existe uma função contínua $V : X \to \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:

(i) $t \to V(S(t)x)$ é não-crescente para cada $x \in X$;

(ii) Se x é tal que $V(S(t)x) = V(x)$ para todo $t \geq 0$, então $x \in \mathscr{N}$.

Lema 1.56. *Seja $\{S(t); t \geq 0\}$ um semigrupo gradiente que possui um atrator global $\mathscr{A}$, considere $\mathscr{N}$ o conjunto dos seus pontos de equilíbrio e V sua função de Lyapunov, então*

$$\sup_{u\in\mathscr{A}} V(u) \leq \sup_{u\in\mathscr{N}} V(u).$$

Demonstração: Ver [9]

CAPÍTULO 2

Atratores para uma Equação de Onda Semilinear

Este capítulo é dedicado ao estudo de uma equação de ondas semilinear governada pelo operador harmônico, onde a dissipação do sistema depende da energia. Vamos mostrar existência, unicidade e dependência contínua relativa aos dados iniciais usando o conhecido método de Faedo-Galerkin. Adicionalmente, vamos mostrar um resultado de existência de atrator global compacto para o semigrupo associado, para isso utilizaremos a teoria de função contrativa desenvolvida em [24]. O conteúdo desse capítulo faz parte do artigo [29].

2.1 Apresentação do Problema e Hipóteses

Estudaremos, nesta seção, a boa colocação para o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u_{tt}+(-\Delta)^{\theta}u+\Delta^2 u-\gamma\Big[E(u(t),u_t(t))\Big]^q\Delta u_t+f(u)=h(x), \quad t>0, \quad x\in\Omega \\ u(0,x)=u_0(x) \quad u_t(0,x)=u_1(x), \quad x\in\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde Ω é um domínio suave limitado em $\mathbb{R}^n$, $n\geq 1$, $\theta\in[0,2]$, $\gamma>0$, $q>0$ e E é um funcional definido no espaço de Hilbert $\mathscr{H}:=H_0^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$, dado por

$$E(u,v)=\frac{1}{2}\Big[\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u\|^2+\|\Delta u\|^2+\|v\|^2\Big]+\int_\Omega F(u)dx-\int_\Omega h(x)udx, \tag{2.2}$$

onde F é uma primitiva apropriada de f, isto é,

$$F(u)=\int_0^u f(s)ds+\mu, \tag{2.3}$$

para uma constante μ adequada. Consideramos o problema sujeito às condições de contorno

$$u=\Delta u=0 \ \text{ em } \ \partial\Omega. \tag{2.4}$$

Denote por $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ a norma usual em $L^p(\Omega)$, para $p \geq 1$. Em particular, denotaremos por $\|\cdot\|$ a norma em $L^2(\Omega)$ e por $(\cdot,\cdot) := \|\cdot\|^2$ o produto interno em $L^2(\Omega)$. Usaremos as seguintes notações:

$$X = L^2(\Omega), \quad X_1 = H_0^1(\Omega), \quad X_2 = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$

$$X_m = \{u \in H^m(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) : \Delta u|_{\partial\Omega} = 0\}, \text{ para } m = 3,4,$$

e

$$\mathscr{H} = X_2 \times X, \quad \mathscr{H}_1 = X_3 \times X_1, \quad \mathscr{H}_2 = X_4 \times X_2.$$

Considere $\mathscr{H}$ munido da norma $\|(w_1,w_2)\|_{\mathscr{H}}^2 = \|\Delta w_1\|^2 + \|w_2\|^2$ e escreva $(w,w)_{\mathscr{H}} := \|w\|_{\mathscr{H}}^2$, onde $w = (w_1,w_2) \in \mathscr{H}$, para designar o produto interno em $\mathscr{H}$. Denote por $L^p(0,T;Z)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço de todas as aplicações $u : (0,T) \to Z$ tais que $\int_0^T \|u(t)\|_Z^p dt < \infty$, onde Z é um espaço de Banach munido da norma $\|u(t)\|_Z$ e $L^\infty(0,T;Z)$ denota o espaço de todas as aplicações $u : (0,T) \to Z$ tais que $\sup\mathrm{ess}\|u(t)\|_Z < \infty$.

Denote por A o operador bi-laplaciano $(-\Delta)^2$ com condições de fronteira dadas em (2.4). É bem conhecido que A é um operador positivo auto-adjunto (Ver [7]) com domínio $D(A) = X_4$. Então podemos definir as potências fracionárias A^α $(\alpha > 0)$ associadas ao operador A. Denotamos por $X_\alpha = D(A^{\frac{\alpha}{4}})$ os espaços de potências fracionárias associados a A com a norma do gráfico (ver [1, 20]), ou seja,

$$(u,v)_{X_\alpha} = (A^{\frac{\alpha}{4}}u, A^{\frac{\alpha}{4}}v), \qquad \|u\|_{X_\alpha} = \|A^{\frac{\alpha}{4}}u\|, \quad u,v \in X_\alpha.$$

A seguinte estimativa é válida:

$$\|u\|^2 \leq \lambda_1^{-1}\|\Delta u\|^2, \tag{2.5}$$

onde $\lambda_1 > 0$ é o primeiro autovalor de A.

Neste trabalho, assumimos as seguintes hipóteses:

(a) A função h pertence ao espaço X.

(b) A não linearidade f satisfaz as seguintes condições:

  (i) $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $f(0) = 0$.

  (ii) Existe uma constante $C_{f'} > 0$ tal que

$$|f'(s)| \leq C_{f'}(1 + |s|^\rho), \quad s \in \mathbb{R},$$

  onde ρ satisfaz

$$\rho \geq 0, \quad \text{se} \quad n = 1,2,3,4 \quad \text{e} \quad 0 \leq \rho \leq \frac{4}{n-4}, \quad \text{se} \quad n \geq 5. \tag{2.6}$$

  (iii) Existe uma constante $\alpha \in [0,\lambda_1)$ tal que

$$-\frac{\alpha}{4}|u|^2 \leq \int_0^u f(s)ds \leq f(u)u, \ \ u \in \mathbb{R}. \tag{2.7}$$

(c) A constante μ em (2.3) satisfaz a seguinte desigualdade:

$$\mu > \frac{\lambda_1^{-1}}{|\Omega|}\|h\|^2. \tag{2.8}$$

Sob as hipóteses estabelecidas nesta seção, o funcional energia $E : \mathscr{H} \to \mathbb{R}$, dado em (2.2), está bem definido.

Por (2.3), com μ satisfazendo (2.8), segue de (2.7) que

$$-\frac{\alpha}{4}|u|^2 \leq F(u) - \mu \leq f(u)u, \quad u \in \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

Obtemos também, devido a (2.6), a seguinte cadeia de imersões:

$$X_2 \hookrightarrow L^{2(\rho+1)}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

2.2 Boa Colocação Global

No que segue usaremos as seguintes definições de soluções.

Definição 2.1. Uma função $u \in C([0,T];X_2) \cap C^1([0,T];X)$ possuindo as propriedades $u(0) = u_0$ e $u_t(0) = u_1$ é chamada

- *solução forte* para o problema (2.1)-(2.4) no intervalo $[0,T]$ se
  - $(u,u_t) \in L^\infty(0,T;\mathscr{H}_2)$, $u_{tt} \in L^\infty(0,T;X)$;
  - A equação $(2.1)_1$ é satisfeita em X para quase todo $t \in [0,T]$;
- *solução generalizada* para o problema (2.1)-(2.4) no intervalo $[0,T]$ se existe uma sequência de soluções fortes $\{u_n(t)\}$ para o problema (2.1)-(2.4) com dados iniciais (u_{0n}, u_{1n}) ao invés de (u_0,u_1) tal que
$$\lim_{n\to\infty} \max_{t\in[0,T]} \|U^n(t) - U(t)\|_{\mathscr{H}} = 0.$$

Sob as hipóteses da seção anterior, podemos mostrar a boa colocação global para o problema (2.1)-(2.4). Temos o seguinte resultado.

Teorema 2.2. *Sob as hipóteses* (a), (b) *e* (c), *temos*

(i) Se $(u_0,u_1) \in \mathscr{H}_2$, *então o problema (2.1)-(2.4) possui solução forte u satisfazendo*

$$(u,u_t) \in L^\infty(0,T;\mathscr{H}_2) \;\; e \;\; u_{tt} \in L^\infty(0,T;X), \;\; para\ todo\ \ T > 0. \tag{2.10}$$

(ii) Se $(u_0,u_1) \in \mathscr{H}$, *então o problema (2.1)-(2.4) possui solução generalizada u tal que* $(u,u_t) \in C([0,T];\mathscr{H})$.

(iii) *Se* $U^1 = (u^1(t), u_t^1(t))$ *e* $U^2 = (u^2(t), u_t^2(t))$ *são soluções fortes (ou generalizadas) de (2.1)-(2.4) correspondentes aos dados inciais* $U_0^1 = (u_0^1, u_1^1)$ *e* $U_0^2 = (u_0^2, u_1^2)$ *respectivamente, então existe uma constante positiva* $C = C(\|U_0\|_{\mathscr{H}}, \|U_1\|_{\mathscr{H}}) > 0$*, tal que*

$$\|U^1(t) - U^2(t)\|_{\mathscr{H}} \leq C\|U_0^1 - U_0^2\|_{\mathscr{H}}, \ \ t \in [0,T]. \tag{2.11}$$

(iv) *A energia dada em (2.2), definida sobre uma solução forte é não crescente. Precisamente, temos a seguinte identidade*

$$E(u(t), u_t(t)) + \gamma \int_s^t [E(u(\tau), u_t(\tau))]^q \|\nabla u_t(\tau)\|^2 d\tau = E(u(s), u_t(s)).$$

A prova do teorema baseia-se no método de Faedo-Galerkin, que em linhas gerais, é descrito em [25] por meio de vários exemplos.

2.2.1 Problema Aproximado

(i) Seja $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ o conjunto ortonormal completo de X_4 dado pelas autofunções de Δ^2 com condições de fronteira (2.4) e considere V_m o subespaço de X_4 gerado pelos primeiros m elementos de $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$, ou seja,

$$V_m = [w_1, w_2, ..., w_m].$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, construímos uma função u^m dada por

$$u^m(t) = \sum_{j=1}^{m} y_{jm}(t) w_j \in V_m, \ \ t \in [0, T_m],$$

onde (y_{jm}) é uma solução local em algum intervalo $[0, T_m]$ do seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} (u_{tt}^m(t), w_j) + ((-\Delta)^\theta u^m(t), w_j) + (\Delta u^m(t), \Delta w_j) - \gamma \Big[E(u^m(t), u_t^m(t))\Big]^q (\Delta u_t^m(t), w_j) \\ +(f(u^m(t)), w_j) = (h(x), w_j), \ \ t > 0, \quad x \in \Omega \\ u^m(0) = u_0^m \quad u_t^m(0) = u_1^m, \quad j = 1, ..., m, \end{cases} \tag{2.12}$$

onde

$$E(u^m, u_t^m) = \frac{1}{2}\Big[\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}} u^m\|^2 + \|\Delta u^m\|^2 + \|u_t^m\|^2\Big] + \int_\Omega F(u^m) dx - \int_\Omega h(x) u^m dx.$$

Antes de prosseguirmos, observamos que admitimos que o sistema (2.12) possui solução, provaremos tal afirmação. De fato, note que o sistema (2.12) pode ser reescrito na forma

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} (w_1,w_1) & (w_2,w_1) & \cdots & (w_m,w_1) \\ (w_1,w_2) & (w_2,w_2) & \cdots & (w_m,w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (w_1,w_m) & (w_2,w_m) & \cdots & (w_m,w_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y''_{1m}(t) \\ y''_{2m}(t) \\ \vdots \\ y''_{mm}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \int_\Omega h(x)w_1dx \\ \int_\Omega h(x)w_2dx \\ \vdots \\ \int_\Omega h(x)w_mdx \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} (\Delta w_1,\Delta w_1) & (\Delta w_2,\Delta w_1) & \cdots & (\Delta w_m,\Delta w_1) \\ (\Delta w_1,\Delta w_2) & (\Delta w_2,\Delta w_2) & \cdots & (\Delta w_m,\Delta w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\Delta w_1,\Delta w_m) & (\Delta w_2,\Delta w_m) & \cdots & (\Delta w_m,\Delta w_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1m}(t) \\ y_{2m}(t) \\ \vdots \\ y_{mm}(t) \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} ((-\Delta)^\theta w_1,w_1) & ((-\Delta)^\theta w_2,w_1) & \cdots & ((-\Delta)^\theta w_m,w_1) \\ ((-\Delta)^\theta w_1,w_2) & ((-\Delta)^\theta w_2,w_2) & \cdots & ((-\Delta)^\theta w_m,w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ((-\Delta)^\theta w_1,w_m) & ((-\Delta)^\theta w_2,w_m) & \cdots & ((-\Delta)^\theta w_m,w_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1m}(t) \\ y_{2m}(t) \\ \vdots \\ y_{mm}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_\Omega f(u^m(t))w_1dx \\ \int_\Omega f(u^m(t))w_2dx \\ \vdots \\ \int_\Omega f(u^m(t))w_mdx \end{bmatrix} \\
&- \gamma[E(u^m(t),u_t^m(t))]^q \begin{bmatrix} (\Delta w_1,w_1) & (\Delta w_2,w_1) & \cdots & (\Delta w_m,w_1) \\ (\Delta w_1,w_2) & (\Delta w_2,w_2) & \cdots & (\Delta w_m,w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\Delta w_1,w_m) & (\Delta w_2,w_m) & \cdots & (\Delta w_m,w_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'_{1m}(t) \\ y'_{2m}(t) \\ \vdots \\ y'_{mm}(t) \end{bmatrix} = 0.
\end{aligned}
$$

Chamando,

$$z(t) = \begin{bmatrix} y_{1m}(t) \\ y_{2m}(t) \\ \vdots \\ y_{mm}(t) \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} (\Delta w_1,\Delta w_1) & (\Delta w_2,\Delta w_1) & \cdots & (\Delta w_m,\Delta w_1) \\ (\Delta w_1,\Delta w_2) & (\Delta w_2,\Delta w_2) & \cdots & (\Delta w_m,\Delta w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\Delta w_1,\Delta w_m) & (\Delta w_2,\Delta w_m) & \cdots & (\Delta w_m,\Delta w_m) \end{bmatrix},$$

$$B(z) = -\gamma[E(u^m(t),u_t^m(t))]^q \begin{bmatrix} (\Delta w_1,w_1) & (\Delta w_2,w_1) & \cdots & (\Delta w_m,w_1) \\ (\Delta w_1,w_2) & (\Delta w_2,w_2) & \cdots & (\Delta w_m,w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\Delta w_1,w_m) & (\Delta w_2,w_m) & \cdots & (\Delta w_m,w_m) \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} (w_1,w_1) & (w_2,w_1) & \cdots & (w_m,w_1) \\ (w_1,w_2) & (w_2,w_2) & \cdots & (w_m,w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (w_1,w_m) & (w_2,w_m) & \cdots & (w_m,w_m) \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} ((-\Delta)^\theta w_1,w_1) & ((-\Delta)^\theta w_2,w_1) & \cdots & ((-\Delta)^\theta w_m,w_1) \\ ((-\Delta)^\theta w_1,w_2) & ((-\Delta)^\theta w_2,w_2) & \cdots & ((-\Delta)^\theta w_m,w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ((-\Delta)^\theta w_1,w_m) & ((-\Delta)^\theta w_2,w_m) & \cdots & ((-\Delta)^\theta w_m,w_m) \end{bmatrix},$$

$$\mathscr{F}(z) = \begin{bmatrix} \int_\Omega f(u^m(t))w_1 dx \\ \int_\Omega f(u^m(t))w_2 dx \\ \vdots \\ \int_\Omega f(u^m(t))w_m dx \end{bmatrix}$$

e

$$K = \begin{bmatrix} \int_\Omega h(x)w_1 dx \\ \int_\Omega h(x)w_2 dx \\ \vdots \\ \int_\Omega h(x)w_m dx, \end{bmatrix}$$

obtemos o seguinte sistema abstrato:

$$\begin{cases} Cz'' + B(z)z' + (A+D)z + \mathscr{F}(z) = K \\ z(0) = z^0, \quad z'(0) = z^1 \end{cases} \tag{2.13}$$

onde

$$z^0 = \begin{bmatrix} y_{1m}(0) \\ y_{2m}(0) \\ \vdots \\ y_{mm}(0) \end{bmatrix} \text{ e } z^1 = \begin{bmatrix} y'_{1m}(0) \\ y'_{2m}(0) \\ \vdots \\ y'_{mm}(0) \end{bmatrix}.$$

Sendo $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ um conjunto ortonormal em X_4, temos que $C = Id_{m\times m}$, onde $Id_{m\times m}$ denota a matriz identidade $m \times m$.

Assim, o sistema (2.13) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} z'' + B(z)z' + (A+D)z + \mathscr{F}(z) = K \\ z(0) = z^0, \quad z'(0) = z^1. \end{cases}$$

Defina

$$Y_1(t) = z(t),\ \ Y_2(t) = z'(t),\ \ Y(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix} \text{ e } Y^0 = \begin{bmatrix} z^0 \\ z^1 \end{bmatrix}.$$

Então,

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} Y_1'(t) \\ Y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z'(t) \\ z''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_2(t) \\ -B(z)Y_2(t) - (A+D)Y_1(t) - \mathscr{F}(Y_1(t)) + K \end{bmatrix}.$$

Logo, temos o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} Y'(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathscr{F}(Y_1(t)) + K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ -(A+D) & -B(Y) \end{bmatrix} Y(t) \\ \\ Y(0) = Y^0. \end{cases} \tag{2.14}$$

Provaremos a seguir que o problema acima possui solução local utilizando o Teorema 1.41. De fato, consideremos a seguinte aplicação $H : [0,T] \times \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}$, definida por

$$H(t,Y) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathscr{F}(Y_1(t)) + K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ -(A+D) & 0 \end{bmatrix} Y(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -B(Y) \end{bmatrix} Y(t).$$

Verifiquemos que a aplicação H satisfaz as condições de Carathéodory. Com efeito, seja $Y \in \mathbb{R}^{2m}$ fixado, a função H é mensurável como função de $t \in [0,T]$, uma vez que esta não depende de t.

Por outro lado, para cada $t \in [0,T]$, H é contínua como função de Y. De fato, note que a aplicação $N_1 : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}$ dada por

$$N_1(Y) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ (A+D) & 0 \end{bmatrix} Y$$

é linear e, consequentemente, contínua.

Além disso, seja $\{Y_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{2m}$ uma sequência tal que $Y_\nu \to Y$ em $\mathbb{R}^{2m}$, logo, se $Y_\nu = (Y_{1\nu}, Y_{2\nu})$ e $Y = (Y_1, Y_2)$ com $Y_{1\nu}, Y_{2\nu}, Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^m$, então

$$Y_{1\nu} \to Y_1 \text{ em } \mathbb{R}^m \text{ e } Y_{2\nu} \to Y_2 \text{ em } \mathbb{R}^m.$$

Mostremos que $\mathscr{F}(Y_{1\nu}) \to \mathscr{F}(Y_1)$. Efetivamente, como f é contínua segue que para quase todo $x \in \Omega$

$$f(Y_{1\nu}) \to f(Y_1) \text{ em } \mathbb{R}.$$

Então, para quase todo $x \in \Omega$

$$f(Y_{1\nu})w_j(x) \to f(Y_1)w_j(x) \text{ em } \mathbb{R}.$$

Além do mais, $\{Y_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ é limitada, pois é convergente. Logo, existe uma constante $M > 0$, tal que

$$||Y_\nu||_{\mathbb{R}^{2m}} \leq M$$

e, então

$$||Y_{1\nu}||_{\mathbb{R}^m} \leq M.$$

Obtemos de (2.7) e do Teorema do Valor médio, que

$$|f(Y_{1\nu})| \leq C_f(1 + ||Y_{1\nu}||^\rho_{\mathbb{R}^m})||Y_{1\nu}||_{\mathbb{R}^m} \leq C_f(1+M^\rho)M = C_0,$$

onde $C_0 \geq 0$. Portanto, como $\{w_j\}$ é ortonormal, temos que $|f(Y_{1\nu})w_j(x)| \leq C_0$ quase sempre em Ω, para todo $\nu \in \mathbb{N}$ e todo $j = 1,...,m$. Assim, pelo Teorema 1.1

$$\int_\Omega f(Y_{1\nu})w_j(x)dx \to \int_\Omega f(Y_1)w_j(x), \quad \forall j = 1,...,m,$$

ou seja,

$$\mathscr{F}(Y_{1\nu}) \to \mathscr{F}(Y_1) \text{ em } \mathbb{R}^m.$$

Logo,

$$K - \mathscr{F}(Y_{1\nu}) \to K - \mathscr{F}(Y_1) \text{ em } \mathbb{R}^m.$$

Agora, mostremos que a aplicação $N_2 : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}$, dada por

$$N_2(Y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C^{-1}B(Y) \end{bmatrix} Y$$

é contínua em relação à Y. Consideremos novamente $\{Y_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{2m}$ uma sequência tal que $Y_\nu \to Y$ em $\mathbb{R}^{2m}$, logo, se $Y_\nu = (Y_{1\nu}, Y_{2\nu})$ e $Y = (Y_1, Y_2)$ com $Y_{1\nu}, Y_{2\nu}, Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^m$, então

$$Y_{1\nu} \to Y_1 \text{ em } \mathbb{R}^m \text{ e } Y_{2\nu} \to Y_2 \text{ em } \mathbb{R}^m.$$

Observe que

$$B(Y_\nu) = -\gamma[E(Y_{1\nu}, Y_{2\nu})]^q \begin{bmatrix} (\Delta w_1, w_1) & (\Delta w_2, w_1) & \cdots & (\Delta w_m, w_1) \\ (\Delta w_1, w_2) & (\Delta w_2, w_2) & \cdots & (\Delta w_m, w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\Delta w_1, w_m) & (\Delta w_2, w_m) & \cdots & (\Delta w_m, w_m) \end{bmatrix}$$

onde

$$E(Y_{1\nu}, Y_{2\nu}) = \frac{1}{2}\Big[\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}} Y_{1\nu}\|^2 + \|\Delta Y_{1\nu}\|^2 + \|Y_{2\nu}\|^2\Big] + \int_\Omega F(Y_{1\nu})dx - \int_\Omega h(x) Y_{1\nu} dx.$$

Pela continuidade das normas e das hipóteses sobre f, temos que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\Big[\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}} Y_{1\nu}\|^2 + \|\Delta Y_{1\nu}\|^2 + \|Y_{2\nu}\|^2\Big] + \int_\Omega F(Y_{1\nu})dx \\ &\to \frac{1}{2}\Big[\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}} Y_1\|^2 + \|\Delta Y_1\|^2 + \|Y_2\|^2\Big] + \int_\Omega F(Y_1)dx. \end{aligned}$$

Além disso, como $h(x)$ está no dual de $X^1 = H_0^1(\Omega)$, segue do Teorema 1.1 que

$$-\int_\Omega h(x) Y_{1\nu} dx \to -\int_\Omega h(x) Y_1 dx.$$

Assim,

$$E(Y_{1\nu}, Y_{2\nu})^q \to E(Y_1, Y_2)^q \text{ em } \mathbb{R}^{2m},$$

o que implica que

$$B(Y_\nu) \to B(Y) \text{ em } \mathbb{R}^{2m}.$$

Portanto, H é contínua como função de Y.

Por fim, seja $K \subset [0,T] \times \mathbb{R}^{2m}$ um conjunto compacto. Existe uma função real $m_k(t)$ integrável, tal que

$$\|H(t,Y)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq m_k(t), \ \forall (t,Y) \in K.$$

De fato, temos

$$\|H(t,Y)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq \|K - \mathscr{F}(Y_1)\|_{\mathbb{R}^m} + \|(N_1 + N_2)(Y)\|_{\mathbb{R}^{2m}}. \tag{2.15}$$

Como visto anteriormente, $K - \mathscr{F}(Y_1)$ é contínuo em $\mathbb{R}^m$, portanto, é contínuo em qualquer compacto $K^* \subset \mathbb{R}^m$ e $N_1 + N_2$ é contínuo em $\mathbb{R}^{2m}$ e, então existe $M_k > 0$ tal que

$$\|K - \mathscr{F}(Y_1)\|_{\mathbb{R}^m} + \|(N_1 + N_2)(Y)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq M_k, \ \forall (t,Y) \in [0,T] \times K^*. \tag{2.16}$$

Tomando $m_k(t) = M_k$, para todo $t \in [0,T]$, segue de (2.15) e (2.16) que

$$\|H(t,Y)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq m_k(t), \ \forall (t,Y) \in K.$$

Assim, H satisfaz as hipóteses de Carathéodory e, como consequência do Teorema 1.41, existe solução $Y(t)$ do problema de valor inicial

$$\begin{cases} Y'(t) = H(t, Y(t)) \\ Y(0) = Y^0, \end{cases}$$

em algum intervalo $[0, T_m)$, com $0 < T_m < T$. Além disso, $Y(t)$ é absolutamente contínua e, portanto, derivável quase sempre em $[0, T_m)$. Resulta deste fato que $z(t)$ e $z'(t)$ são absolutamente contínuas em $[0, T_m)$ e $z'(t)$ existe em quase todo ponto do intervalo $[0, T_m)$.

Como os problemas (2.12) e (2.14) são equivalentes, existe uma solução $u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} y_{jm}(t) w_j$ para o problema aproximado (2.12) para cada $m \in \mathbb{N}$ fixo, como queríamos.

A primeira estimativa a priori nos permitirá estender a solução obtida a todo intervalo $[0, T]$.

2.2.2 Estimativa a Priori I

Daqui por diante, caso não haja confusão, denotaremos por C todas as constantes.

Multiplicando o sistema aproximado (2.12) por $y'_{jm}(t)$, utilizando a fórmula de Green e somando em j de 1 até m, obtemos

$$\frac{d}{dt}\big(E(u^m(t), u_t^m(t))\big) + \gamma [E(u^m(t), u_t^m(t))]^q \|\nabla u_t^m(t)\|^2 = 0. \tag{2.17}$$

Integrando (2.17) de $0 \leq s$ a $t \leq T_m$, temos

$$E(u^m(t), u_t^m(t)) + \gamma \int_s^t [E(u^m(\tau), u_t^m(\tau))]^q \|\nabla u_t^m(\tau)\|^2 d\tau = E(u^m(s), u_t^m(s)). \tag{2.18}$$

Em particular, tomando $s = 0$ em (2.18), temos que para todo $t \leq T_m$

$$E(u^m(t), u_t^m(t)) + \gamma \int_0^t [E(u^m(s), u_t^m(s))]^q \|\nabla u_t^m(s)\|^2 ds = E(u^m(0), u_t^m(0)). \tag{2.19}$$

Por (2.5) e a desigualdade de Young, obtemos

$$-\int_\Omega h(x) u^m(t) dx \geq -\frac{1}{\lambda_1}\|h\|^2 - \frac{1}{4}\|\Delta u^m(t)\|^2. \tag{2.20}$$

Por outro lado, de (2.5) e (2.9), temos

$$\int_\Omega F(u^m) dx \geq -\frac{\alpha}{4\lambda_1}\|\Delta u^m(t)\|^2 + \mu|\Omega|. \tag{2.21}$$

Segue de (2.20) e (2.21)) que

$$\begin{aligned} E(u^m(t), u_t^m(t)) \geq & \frac{1}{2}\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}} u^m(t)\|^2 + \Big(\frac{1}{4} - \frac{\alpha}{4\lambda_1}\Big)\|\Delta u^m(t)\|^2 \\ & + \frac{1}{2}\|u_t^m(t)\|^2 + \mu|\Omega| - \frac{1}{\lambda_1}\|h\|^2. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Por $(b)(ii)$, (c) e (2.22), obtemos que

$$E(u^m(t), u_t^m(t)) \geq \mu|\Omega| - \frac{1}{\lambda_1}\|h\|^2 > 0, \tag{2.23}$$

e

$$E(u^m(t),u_t^m(t)) \geq C_\alpha \|(u^m(t),u_t^m(t))\|_{\mathscr{H}}^2, \tag{2.24}$$

onde $C_\alpha = \min\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{4\lambda_1}\}$.

Substituindo (2.24) em (2.19), concluímos que

$$\|(u^m(t),u_t^m(t))\|_{\mathscr{H}}^2 + \int_0^t [E(u^m(s),u_t^m(s))]^q \|\nabla u_t^m(s)\|^2 ds \leq \frac{E(u^m(0),u_t^m(0))}{\min\{C_\alpha,\gamma\}}, \ \ t \leq T_m. \tag{2.25}$$

De (2.23), segue que

$$\int_0^t E(u^m(s),u_t^m(s))^q \|\nabla u_t^m(s)\|^2 ds \geq 0, \ \ t \leq T_m. \tag{2.26}$$

Assim, (2.25) nos permite estender a solução local do problema aproximado para todo intervalo $[0,T]$, para qualquer $T>0$ e observamos também que as estimativas (2.17)-(2.25) permanecem válidas para todo $t \in [0,T]$. Assim, para cada m,

$$(u^m,u_t^m) \in L^\infty(0,T;\mathscr{H}) \ \text{ e } \ u_t^m \in L^2(0,T;X_1),$$

e, usando (2.23), concluímos que

$$u_t^m \ \text{ é limitado em } \ L^2(0,T;X_1). \tag{2.27}$$

2.2.3 Estimativa a Priori II

Considere o problema aproximado (2.12) e note que

$$(u_0^m,u_1^m) \to (u_0,u_1) \ \text{ forte em } \ \mathscr{H}_2. \tag{2.28}$$

Diferenciando (2.12) com respeito à t, multiplicando por $y''_{jm}(t)$ e somando em j de 1 até m, obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u_t^m(t)\|^2 + \|\Delta u_t^m(t)\|^2 + \|u_{tt}^m(t)\|^2\right] \\ &\qquad + \gamma[E(u^m(t),u_t^m(t))]^q \|\nabla u_{tt}^m(t)\|^2 = I_1 + I_2, \end{aligned} \tag{2.29}$$

onde, usando (2.17), obtemos

$$\begin{aligned} I_1 &= \gamma \frac{d}{dt}\left([E(u^m(t),u_t^m(t))]^q\right) \int_\Omega \Delta u_t^m(t) u_{tt}^m(t) dx \\ &= -\gamma^2 q [E(u^m(t),u_t^m(t))]^{2q-1} \|\nabla u_t^m(t)\|^2 \int_\Omega \Delta u_t^m(t) u_{tt}^m(t) dx, \end{aligned}$$

e

$$I_2 = -\int_\Omega f'(u^m) u_t^m(t) u_{tt}^m(t) dx.$$

Vamos estimar os termos do lado direito de (2.29).

Para $q \geqslant \frac{1}{2}$, usando as desigualdades de Hölder e Young, segue de (2.19) e (2.26) que

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \frac{\gamma^2 q}{2}[E(u^m(t),u_t^m(t))]^{2q-1}\|\nabla u_t^m(t)\|^2\Big(\|\Delta u_t^m(t)\|^2+\|u_{tt}^m(t)\|^2\Big) \\ &\leq \frac{\gamma^2 q}{2}[E(u^m(0),u_t^m(0))]^{2q-1}\|\nabla u_t^m(t)\|^2\Big(\|\Delta u_t^m(t)\|^2+\|u_{tt}^m(t)\|^2\Big). \end{aligned} \tag{2.30}$$

Para $0<q<\frac{1}{2}$, obtemos uma estimativa similar a (2.30) com $E(u^m(0),u_t^m(0))$ representado por $(\mu|\Omega|-\frac{1}{\lambda_1}\|h\|^2)^{-1}$ (ver (2.23)).

Por outro lado, utilizando as desigualdades de Hölder e Young, a imersão $X_2 \hookrightarrow L^{2(\rho+1)}(\Omega)$ e (2.25), obtemos que

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq C_{f'}\int_\Omega [1+|u^m(t)|^\rho]|u_t^m(t)||u_{tt}^m(t)|dx \\ &\leq C_{f'}\int_\Omega |u_t^m(t)||u_{tt}^m(t)|dx + C_{f'}\int_\Omega |u^m(t)|^\rho|u_t^m(t)||u_{tt}^m(t)|dx \\ &\leq \frac{C_{f'}}{2}\left(\|\Delta u_t^m(t)\|^2+\|u_{tt}^m(t)\|^2\right) \\ &\quad + \frac{C_{f'}}{2}\|u^m(t)\|^\rho_{L^{2(\rho+1)}(\Omega)}\left(\|u_t^m(t)\|^2_{L^{2(\rho+1)}(\Omega)}+\|u_{tt}^m(t)\|^2\right) \\ &\leq \frac{C_{f'}}{2}\left(1+\|\Delta u^m(t)\|^\rho\right)\left(\|\Delta u_t^m(t)\|^2+\|u_{tt}^m(t)\|^2\right) \\ &\leq \frac{C_{f'}}{2}\left\{1+\left[\frac{E(u^m(0),u_t^m(0))}{\min\{C_\alpha,\gamma\}}\right]^{\frac{\rho}{2}}\right\}\left(\|\Delta u_t^m(t)\|^2+\|u_{tt}^m(t)\|^2\right) \\ &\leq \frac{C_{f'}}{2}C_{m,\alpha,\gamma,\rho}\left(\|\Delta u_t^m(t)\|^2+\|u_{tt}^m(t)\|^2\right), \end{aligned} \tag{2.31}$$

onde $C_{m,\alpha,\gamma,\rho}=1+\left[\frac{E(u^m(0),u_t^m(0))}{\min\{C_\alpha,\gamma\}}\right]^{\frac{\rho}{2}}$.

Substituindo (2.28), (2.30) e (2.31) em (2.29), temos que existem constantes $C_1>0$ e $C_2\geq 0$ independentes de m e t tal que

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left[\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u_t^m(t)\|^2+\|\Delta u_t^m(t)\|^2+\|u_{tt}^m(t)\|^2\right]+\gamma[E(u^m(t),u_t^m(t))]^q\|\nabla u_{tt}^m(t)\|^2 \\ &\leq \left(C_1+C_2\|\nabla u_t^m(t)\|^2\right)\left[\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u_t^m(t)\|^2+\|\Delta u_t^m(t)\|^2+\|u_{tt}^m(t)\|^2\right], \end{aligned} \tag{2.32}$$

para todo $t\in[0,T]$.

Por (2.32),

$$\begin{aligned} &\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u_t^m(t)\|^2+\|\Delta u_t^m(t)\|^2+\|u_{tt}^m(t)\|^2+\gamma\int_0^t[E(u^m(s),u_t^m(s))]^q\|\nabla u_{tt}^m(s)\|^2\,ds \\ &\leq \left(\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u_t^m(0)\|^2+\|\Delta u_t^m(0)\|^2+\|u_{tt}^m(0)\|^2\right)e^{\int_0^t(C_1+C_2\|\nabla u_t^m(s)\|^2)\,ds}, \end{aligned} \tag{2.33}$$

para todo $t\in[0,T]$.

Agora, devido a (2.23), (2.25), (2.33) e a convergência em (2.28), concluímos que existe uma constante positiva C independente de m e t tal que

$$
\begin{aligned}
&\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u_t^m(t)\|^2+\|\Delta u_t^m(t)\|^2+\|u_{tt}^m(t)\|^2+\gamma\int_0^t[E(u^m(s),u_t^m(s))]^q\|\nabla u_{tt}^m(s)\|^2\,ds\\
&\le e^{CT}\left(\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u_t^m(0)\|^2+\|\Delta u_t^m(0)\|^2+\|u_{tt}^m(0)\|^2\right)\\
&\le e^{CT}\left(\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u_1^m\|^2+\|\Delta u_1^m\|^2+\|u_{tt}^m(0)\|^2\right),
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

para todo $t\in[0,T]$.

Na sequência estamos interessados em estabelecer uma estimativa para $\|u_{tt}^m(0)\|^2$ que aparece no lado direito de (2.34) que garanta um limite uniforme. Para este fim, de forma semelhante ao feito em (2.17), multiplicamos (2.12) por $y''_{jm}(t)$ e somamos em j de 1 até m (e tomamos $t=0$) para obter

$$
\begin{aligned}
&(u_{tt}^m(0),u_{tt}^m(0))+(\Delta^2u_0^m,u_{tt}^m(0))+((-\Delta)^\theta u_0^m,u_{tt}^m(0))\\
&-\gamma[E(u_0^m,u_1^m)]^q(\Delta u_1^m,u_{tt}^m(0))+(f(u_0^m),u_{tt}^m(0))-(h(x),u_{tt}^m(0))=0.
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade de Hölder, temos

$$
\begin{aligned}
\|u_{tt}^m(0)\|^2\le{}&\|\Delta^2u_0^m\|\|u_{tt}^m(0)\|+\|(-\Delta)^\theta u_0^m\|\|u_{tt}^m(0)\|\\
&+\gamma[E(u_0^m,u_1^m)]^q\|\Delta u_1^m\|\|u_{tt}^m(0)\|+\|f(u_0^m)\|\|u_{tt}^m(0)\|+\|h\|\|u_{tt}^m(0)\|,
\end{aligned}
$$

e então

$$
\|u_{tt}^m(0)\|^2\le\left[\|\Delta^2u_0^m\|+\|(-\Delta)^\theta u_0^m\|+\gamma[E(u_0^m,u_1^m)]^q\|\Delta u_1^m\|+\|f(u_0^m)\|+\|h\|\right]\|u_{tt}^m(0)\|.
$$

Existe uma constante positiva C independente de m e t tal que

$$
\begin{aligned}
\|u_{tt}^m(0)\|&\le\|\Delta^2u_0^m\|+\|(-\Delta)^\theta u_0^m\|\\
&\qquad+\gamma[E(u_0^m,u_1^m)]^q\|\Delta u_1^m\|+\|f(u_0^m)\|+\|h\|\\
&\le C,
\end{aligned}
\tag{2.35}
$$

onde usamos (b) e (2.28).

De (2.34) e (2.35), existe uma constante positiva C independente de m e t tal que

$$
\begin{aligned}
&\|u_{tt}^m(t)\|^2+\|\Delta u_t^m(t)\|^2+\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u_t^m(t)\|^2\\
&+\int_0^t[E(u^m(s),u_t^m(s))]^q\|\nabla u_{tt}^m(s)\|^2ds\le C,
\end{aligned}
$$

para todo $t\in[0,T]$, o que nos permite concluir que

$$\{u_t^m\}\ \text{ é limitado em }\ L^\infty(0,T;X_2),\tag{2.36}$$

$$\{u_{tt}^m\}\ \text{ é limitado em }\ L^\infty(0,T;X)\tag{2.37}$$

e

$$\{u_{tt}^m\}\ \text{ é limitado em }\ L^2(0,T;X_1).\tag{2.38}$$

Além disso, multiplicando (2.12) por $\Delta^2 y_{jm}(t)$ e somando em j de 1 até m, obtemos

$$\begin{aligned}\|\Delta^2 u^m(t)\| &\leq \|u^m_{tt}(t)\| + \|(-\Delta)^\theta u^m(t)\| \\ &\quad + \gamma[E(u^m(t), u^m_t(t))]^q \|\Delta u^m_t(t)\| + \|f(u^m(t))\| + \|h(x)\| \\ &\leq C,\end{aligned}$$

para todo $t \in [0,T]$, onde C é uma constante positiva independente de m e t. Agora, segue de (b) que

$$\{f(u^m)\} \text{ é limitado em } L^\infty(0,T;X).$$

Portanto,

$$\{u^m\} \text{ é limitado em } L^\infty(0,T;X_4). \tag{2.39}$$

2.2.4 Passagem ao Limite

De (2.36), (2.37), (2.38) e (2.39), passando para subsequências se necessário, temos que

$$u^m \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty(0,T;X_4) \text{ [também em } L^\infty(0,T;X)], \tag{2.40}$$

$$u^m_t \overset{*}{\rightharpoonup} u_t \text{ em } L^\infty(0,T;X_2) \text{ [também em } L^\infty(0,T;X)], \tag{2.41}$$

$$u^m_{tt} \overset{*}{\rightharpoonup} u_{tt} \text{ em } L^\infty(0,T;X), \tag{2.42}$$

$$u^m_{tt} \overset{*}{\rightharpoonup} u_{tt} \text{ em } L^2(0,T;X_1). \tag{2.43}$$

Como as imersões $X_4 \hookrightarrow X_2 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow X$ são compactas, pelo Lema 1.17 e (2.40)-(2.43), existe uma subsequência, que ainda denotamos por $\{u^m\}$, tal que

$$u^m \to u \text{ em } C([0,T];X_2) \tag{2.44}$$

e

$$u^m_t \to u_t \text{ em } C([0,T];X_1). \tag{2.45}$$

Usando (b), (2.44) e (2.45), obtemos

$$f(u^m) \to f(u) \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;X) \tag{2.46}$$

e

$$E(u^m(t), u^m_t(t)) \to E(u(t), u_t(t)) \quad \text{quando} \quad m \to \infty, \tag{2.47}$$

uniformemente em $[0,T]$. Agora, por (2.23) e (2.47) concluímos que

$$E(u(t), u_t(t)) \geq \mu|\Omega| - \frac{1}{\lambda_1}\|h\|^2 > 0. \tag{2.48}$$

Mais ainda,

$$E(u(t), u_t(t)) + \gamma \int_\tau^t [E(u(\tau), u_t(\tau))]^q \|\nabla u_t(\tau)\|^2 d\tau = E(u(s), u_t(s)),$$

para todo $t \geq s \geq 0$. Em particular,

$$E(u(t),u_t(t)) + \gamma \int_0^t [E(u(s),u_t(s))]^q \|\nabla u_t(s)\|^2 ds = E(u_0,u_1). \tag{2.49}$$

Considerando os limites em (2.40)-(2.46), podemos passar ao limite no problema aproximado (2.12) e provar que u satisfaz a equação

$$u_{tt} + (-\Delta)^\theta u + \Delta^2 u - \gamma[E(u,u_t)]^q \Delta u_t + f(u) = h(x) \ \text{ em } \ L^\infty(0,T;X).$$

De fato, com este propósito e para simplificar a notação, definimos

$$G_u^{m,q}(t) = [E(u^m(t),u_t^m(t))]^q \quad \text{e} \quad G_u^q(t) = [E(u(t),u_t(t))]^q, \quad \forall t \in (0,T), \forall q > 0.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_0^T G_u^{m,q}(\tau)(\Delta u_t^m(\tau),\omega)\delta(\tau)d\tau - \int_0^T G_u^q(\tau)(\Delta u_t(\tau),\omega)\delta(\tau)d\tau\Big| \\
&\leq \Big|\int_0^T G_u^{m,q}(\tau)(\Delta u_t^m(\tau) - \Delta u_t(\tau),\omega)\delta(\tau)d\tau\Big| \\
&\quad + \Big|\int_0^T \big(G_u^{m,q}(\tau) - G_u^q(\tau)\big)(\Delta u_t(\tau),\omega)\delta(\tau)d\tau\Big|,
\end{aligned} \tag{2.50}$$

para todo $\omega \in X$ e todo $\delta \in C_0^\infty(0,T)$. Agora, podemos mostrar que cada termo do lado direito de (2.50) tende para zero. Por (2.19), (2.28), a fórmula de Green e a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_0^T G_u^{m,q}(\tau)(\Delta u_t^m(\tau) - \Delta u_t(\tau),\omega)\delta(\tau)d\tau\Big| \\
&\qquad \leq C\int_0^T |(\Delta u_t^m(\tau) - \Delta u_t(\tau),\omega)\delta(\tau)|\,d\tau \\
&\qquad \leq C\int_0^T \int_\Omega |(\Delta u_t^m(\tau) - \Delta u_t(\tau))|\,|\omega|\,|\delta(\tau)|\,dx\,d\tau \\
&\qquad \leq C\int_0^T \|\Delta u_t^m(\tau) - \Delta u_t(\tau)\|\,\|\omega\|\,|\delta(\tau)|d\tau \\
&\qquad \leq C \max_{0\leq\tau\leq T}\{\|\Delta u_t^m(\tau) - \Delta u_t(\tau)\|\}\|\omega\| \int_0^T |\delta(\tau)|d\tau.
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Usando (2.19), (2.28), (2.48), (2.49), desigualdade de Hölder e o Teorema do Valor Médio, temos

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_0^T \big(G_u^{m,q}(\tau) - G_u^q(\tau)\big)(\Delta u_t(\tau),\omega)\delta(\tau)\,d\tau\Big| \\
&\leq q\int_0^T |G_u^{m,1}(\tau) + G_u^1(\tau)|^{q-1}\,|G_u^{m,1}(\tau) - G_u^1(\tau)|\,\|\Delta u_t(\tau)\|\,\|\omega\|\,|\delta(\tau)|\,d\tau \\
&\leq C\left[\int_0^T |G_u^{m,1}(\tau) - G_u^1(\tau)|\,|\delta(\tau)|\,d\tau\right]\|\omega\|.
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Finalmente, de (2.44), (2.51), (2.52) e (2.47) concluímos que

$$\gamma[E(u^m(t),u_t^m(t))]^q \Delta u_t^m \overset{*}{\rightharpoonup} \gamma[E(u^m(t),u_t^m(t))]^q \Delta u_t \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;X).$$

A convergência dos outros termos em (2.12) é uma consequência direta de (2.40)-(2.43), (2.44), (2.45) e (2.46).

Portanto, o problema (2.1)-(2.4) tem solução u na classe

$$(u,u_t) \in L^\infty(0,T;\mathscr{H}_2) \cap C([0,T];\mathscr{H}) \qquad \text{e} \qquad u_{tt} \in L^\infty(0,T;X) \cap L^2(0,T;X_1),$$

o que prova o item (i) do Teorema 2.2.

2.2.5 Existência de Solução Generalizada

Consideremos o dado inicial $U_0 \in \mathscr{H}$. Usando a imersão compacta de $\mathscr{H}_2$ em $\mathscr{H}$, existe uma sequência de dados iniciais $\{U_0\}^\nu_{\nu\in\mathbb{N}} = (u_0^\nu, u_1^\nu))\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{H}_2$, tal que

$$\|U_0^\nu - U_0\|_{\mathscr{H}} \to 0, \quad \text{quando} \quad \nu \to +\infty. \tag{2.53}$$

Para cada $\nu \in \mathbb{N}$, pelo Teorema 2.2(i), existe uma solução forte u^ν do problema (2.1)-(2.4) na classe (2.10) verificando

$$\begin{cases} u_{tt}^\nu + (-\Delta)^\theta u^\nu + \Delta^2 u^\nu - \gamma\Big[E(u^\nu(t),u_t^\nu(t))\Big]^q \Delta u_t^\nu + f(u^\nu) = h(x), & t>0, \\ u^\nu(0,x) = u_0^\nu(x) \to u_0 \in X_2 \quad u_t^\nu(0,x) = u_1^\nu(x) \to u_1 \in X, & x \in \Omega. \end{cases} \tag{2.54}$$

Agora, sejam $U^\nu = (u^\nu, u_t^\nu)$ e $U^\sigma = (u^\sigma, u_t^\sigma)$ duas soluções de (2.54) com condições iniciais $U_0^\nu = (u_0^\nu, u_1^\nu)$ e $U_0^\sigma = (u_0^\sigma, u_1^\sigma)$. Definimos $w = u^\nu - u^\sigma$, $w_0 = u_0^\nu - u_0^\sigma$, $w_1 = u_1^\nu - u_1^\sigma$ e $\Pi(t) = [E(u^\nu(t), u_t^\nu(t))]^q - [E(u^\sigma(t), u_t^\sigma(t))]^q$. Então a diferença $U^\nu - U^\sigma = (w, w_t)$ é uma solução do seguinte problema:

$$\begin{cases} w_{tt}(t) + (-\Delta)^\theta w(t) + \Delta^2 w(t) - \gamma[E(u^\nu(t),u_t^\nu(t))]^q \Delta w_t(t) \\ \quad + \gamma\Pi(t)\Delta u_t^\sigma(t) + f(u^\nu) - f(u^\sigma) = 0, \\ w(0) = w_0, \quad w_t(0) = w_1. \end{cases} \tag{2.55}$$

Multiplicando a equação (2.55) por w_t e integrando em Ω, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big[\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}} w(t)\|^2 + \|\Delta w(t)\|^2 + \|w_t(t)\|^2\Big] + \gamma[E(u^\nu(t),u_t^\nu(t))]^q \|\nabla w_t(t)\|^2 = \mathbb{I}_1 + \mathbb{I}_2,$$

onde

$$\mathbb{I}_1 = \int_\Omega (f(u^\sigma) - f(u^\nu)) w_t(t)\,dx,$$

$$\mathbb{I}_2 = \gamma\Pi(t) \int_\Omega \nabla u_t^\sigma(t) \nabla w_t(t)\,dx.$$

Usando (2.48), temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big[\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}} w(t)\|^2 + \|\Delta w(t)\|^2 + \|w_t(t)\|^2\Big] + C\|\nabla w_t(t)\|^2 \le \mathbb{I}_1 + \mathbb{I}_2, \tag{2.56}$$

onde $C = \gamma(\mu|\Omega| - \frac{1}{\lambda_1}\|h\|^2) > 0$.

Estimaremos os termos $\mathbb{I}_1$ e $\mathbb{I}_2$. Pela hipótese (b) obtemos

$$|f(u^\sigma) - f(u^\nu)| \le C|u^\nu - u^\sigma|(1 + |u^\nu| + |u^\sigma|)^\rho. \tag{2.57}$$

Usando (2.57) e a desigualdade de Hölder generalizada com $\frac{\rho}{2(\rho+1)}+\frac{1}{2(\rho+1)}+\frac{1}{2}=1$, temos

$$\begin{aligned}|\mathbb{I}_1| &\leq C\int_\Omega (1+|u^\nu(t)|+|u^\sigma(t)|)^\rho\,|w(t)|\,|w_t(t)|\,dx\\ &\leq C\|1+|u^\nu(t)|+|u^\sigma(t)|\|^\rho_{L^{2(\rho+1)}(\Omega)}\|w(t)\|_{L^{2(\rho+1)}(\Omega)}\|w_t(t)\|\\ &\leq C\|\Delta w(t)\|\|w_t(t)\|\\ &\leq C(\|\Delta w(t)\|^2+\|w_t(t)\|^2),\end{aligned}\tag{2.58}$$

onde C é uma constante positiva independente de t.

Por outro lado, note que

$$\begin{aligned}&|E(u^\nu,u^\nu_t)-E(u^\sigma,u^\sigma_t)|\\ &=\Big|\frac{1}{2}\big[\|u^\nu_t(t)\|^2+\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u^\nu\|^2+\|\Delta u^\nu\|^2-\|u^\sigma_t(t)\|^2-\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u^\sigma\|^2-\|\Delta u^\sigma\|^2\big]\\ &\quad+\int_\Omega F(u^\nu)-F(u^\sigma)dx-\int_\Omega h(x)(u^\nu-u^\sigma)dx\Big|\\ &=\Big|\frac{1}{2}[(\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u^\nu\|+\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u^\sigma\|)(\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u^\nu\|-\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u^\sigma\|)]\\ &\quad+(\|\Delta u^\nu\|+\|\Delta u^\sigma\|)(\|\Delta u^\nu\|-\|\Delta u^\sigma\|)+(\|u^\nu_t\|+\|u^\sigma_t\|)(\|u^\nu_t\|-\|u^\sigma_t\|)\\ &\quad+\int_\Omega F(u^\nu)-F(u^\sigma)dx-\int_\Omega h(x)(u^\nu-u^\sigma)dx\Big|.\end{aligned}$$

Como (u^ν,u^ν_t), (u^σ,u^σ_t) são limitadas em $\mathscr{H}$ e $\theta\leq 2$, de (2.40)-(2.42) segue que os termos $\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u^\nu\|+\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u^\sigma\|$, $\|\Delta u^\nu\|+\|\Delta u^\sigma\|$ e $\|u^\nu_t\|+\|u^\sigma_t\|$ são limitados e utilizando que a diferença das normas é menor ou igual que a norma da diferença, segue que

$$\begin{aligned}|E(u^\nu,u^\nu_t)-E(u^\sigma,u^\sigma_t)|\leq& C\big[\|w_t\|+\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}w\|+\|\Delta w\|\big]\\ &+\int_\Omega|F(u^\nu)-F(u^\sigma)|dx+\int_\Omega|h(x)(w)|dx.\end{aligned}\tag{2.59}$$

Observamos que, pela desigualdade de Hölder, segue que

$$\int_\Omega|h(x)(u^\nu-u^\sigma)|dx\leq\|h\|\|w\|\leq C\|w\|\leq C\|\Delta w\|.\tag{2.60}$$

Além disso, pelo Teorema do Valor Médio e usando (c), a desigualdade de Hölder, a imersão $L^{2(\rho+1)}(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ e (2.40)-(2.42) que implicam que (u^ν,u^ν_t), (u^σ,u^σ_t) são limitadas em $\mathscr{H}$, temos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega|F(u^\nu)-F(u^\sigma)|dx&\leq\int_\Omega|f(u^\nu)+f(u^\sigma)||w|dx\\ &\leq\|f(u^\nu)+f(u^\sigma)\|\|w\|\\ &\leq C(\|u^\nu\|+\|(u^\nu)^{\rho+1}\|+\|u^\sigma\|+\|(u^\sigma)^{\rho+1}\|)\|w\|\\ &=C\big(\|u^\nu\|+\|(u^\nu)\|^{\frac{2(\rho+1)}{2}}_{L^{2(\rho+1)}(\Omega)}+\|u^2\|^{\frac{2(\rho+1)}{2}}_{L^{2(\rho+1)}(\Omega)}+\|(u^\sigma)^{\rho+1}\|\big)\|w\|\\ &\leq C\|\Delta w\|.\end{aligned}\tag{2.61}$$

Assim, substituindo (2.61) e (2.60) em (2.59), temos

$$|E(u^\nu,u^\nu_t)-E(u^\sigma,u^\sigma_t)|\leq C\big[\|w_t(t)\|+\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}w(t)\|+\|\Delta w(t)\|\big]$$

e, consequentemente,

$$|E(u^\nu,u_t^\nu)-E(u^\sigma,u_t^\sigma)|^2 \leq C\big[\|w_t(t)\|^2+\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}w(t)\|^2+\|\Delta w(t)\|^2\big]. \tag{2.62}$$

Assim, usando (2.62), (2.48) e (2.49), existe uma constante positiva C independente de t tal que

$$\begin{aligned}|\Pi(t)| &\leq q\vartheta^{q-1}|E(u^\nu(t),u_t^\nu(t))-E(u^\sigma(t),u_t^\sigma(t))|\\ &\leq C|E(u^\nu(t),u_t^\nu(t))-E(u^\sigma(t),u_t^\sigma(t))|\\ &\leq C\big(\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}w(t)\|+\|\Delta w(t)\|+\|w_t(t)\|\big)\\ &\leq C\big(\|\Delta w(t)\|+\|w_t(t)\|\big),\end{aligned} \tag{2.63}$$

onde $\vartheta=(\mu|\Omega|-\frac{1}{\lambda_1}\|h\|^2)^{-1}$ se $q<1$ ou $\vartheta=\max\{E(u_0^\nu,u_1^\nu),E(u_0^\sigma,u_1^\sigma)\}$ se $q\geq 1$.

Assim, usando a desigualdade de Young generalizada, (2.41), temos

$$\begin{aligned}|\mathbb{I}_2| &\leq \gamma|\Pi(t)|\int_\Omega |\nabla u_t^\sigma(t)|\,|\nabla w_t(t)|\,dx\\ &\leq C\big(\|\Delta w(t)\|+\|w_t(t)\|\big)\|\nabla u_t^\sigma(t)\|\|\nabla w_t(t)\|\\ &\leq C\|\nabla u_t^\sigma(t)\|^2\big(\|\Delta w(t)\|^2+\|w_t(t)\|^2\big)+\varepsilon\|\nabla w_t(t)\|^2,\end{aligned} \tag{2.64}$$

onde $C=C(\varepsilon,\|U_0\|_{\mathscr{H}})$.

Substituindo (2.58) e (2.64) em (2.56), obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big[\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}w(t)\|^2+\|\Delta w(t)\|^2\|w_t(t)\|^2\Big]+C_\varepsilon\|\nabla w_t(t)\|^2\\ &\leq C\big(1+\|\nabla u_t^\sigma(t)\|^2\big)\big(\|\Delta w(t)\|^2+\|w_t(t)\|^2\big),\end{aligned}$$

e usando o Lema de Gronwall e a limitação (2.27) obtemos

$$\|U^\nu(t)-U^\sigma(t)\|_{\mathscr{H}}^2 \leq C_1 e^{C\int_0^t\left(1+\|\nabla u_t^\nu(s)\|^2\right)ds}\|U_0^\nu-U_0^\sigma\|_{\mathscr{H}}^2 \leq C\|U_0^\nu-U_0^\sigma\|_{\mathscr{H}}^2. \tag{2.65}$$

Usando a convergência (2.53) resulta que

$$\|U^\nu(t)-U^\sigma(t)\|_{\mathscr{H}}^2 \leq C\|U_0^\nu-U_0^\sigma\|_{\mathscr{H}}^2 \to 0, \quad \text{quando} \quad \nu,\sigma\to+\infty. \tag{2.66}$$

Isto prova que $\{U^\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $C([0,T];\mathscr{H})$. Assim, existe uma função $U\in C([0,T];\mathscr{H})$ tal que $U^\nu\to U$ em $C([0,T];\mathscr{H})$, isto é,

$$\lim_{\nu\to+\infty}\max_{\tau\in[0,T]}||U^\nu(\tau)-U(\tau)||_{\mathscr{H}}^2=0. \tag{2.67}$$

Segue de (2.67) que $U^\nu(0)\to U(0)$ em $\mathscr{H}$, combinado com (2.54) que

$$U(0)=(u(0),u_t(0))=(u_0,u_1).$$

O que mostra que U é uma solução generalizada para o problema (2.1)-(2.4). Portanto, o Teorema 2.2 (ii) fica provado.

2.2.6 Dependência Contínua em Relação aos Dados Iniciais e Unicidade

Sejam U^1 e U^2 duas soluções fortes (ou generalizadas) do problema (2.1)-(2.4) com dados iniciais $U^1(0) = (u^1(0), u_t^1(0)) = (u_0^1, u_1^1)$ e $U^2(0) = (u^2(0), u_t^2(0)) = (u_0^2, u_1^2)$, respectivamente, e seja $w = u^1 - u^2$. Procedendo analogamente como na prova do item (ii) do Teorema 2.2, usando u^1 no lugar de u^ν e u^2 no lugar de u^σ, obtemos a seguinte desigualdade, similar a desigualdade (2.65)

$$||U^1(t) - U^2(t)||_{\mathscr{H}}^2 \leq Ce^{Kt}||U^1(0) - U^2(0)||_{\mathscr{H}}^2$$

que mostra que as soluções dependem continuamente dos dados iniciais. Em particular, para $U_0^1 = U_0^2$, o problema (2.1)-(2.4) possui uma única solução forte (ou generalizada). Isto prova (iii).

A prova do item (iv) é obtida diretamente por multiplicar a equação (2.1) por u_t e integrar em $\Omega \times (s,t)$, $t \geq s \geq 0$. Isso encerra a prova do Teorema 2.2. $\square$

2.3 Existência de Atrator Global

Nesta seção provaremos a existência de atratores globais para o problema (2.1) em $\mathscr{H}$ para o qual utilizaremos o Teorema 1.47.

Utilizando o Teorema 2.2 é possível definir um C_0-semigrupo $S(t) : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ formado pelas soluções generalizadas do problema (2.1)-(2.4).

2.3.1 Existência de um Conjunto Absorvente Limitado

Seja $S(t) : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ o C_0-semigrupo associado à solução $(u(t), u_t(t))$ do problema (2.1)-(2.4) com dados iniciais $(u_0, u_1) \in \mathscr{H}$, ou seja, para cada $t \geq 0$,

$$S(t)(u_0, u_1) = (u(t), u_t(t)).$$

A existência de um conjunto absorvente em $\mathscr{H}$ é assegurada pelo seguinte Lema.

Lema 2.3. *Sob as hipóteses do Teorema 2.2, o semigrupo não-linear $S(t) : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ dada por*

$$S(t)(u_0, u_1) = (u(t), u_t(t))$$

possui um conjunto absorvente limitado B_0 em $\mathscr{H}$.

Demonstração. Fixemos um conjunto arbitrário $B \subset \mathscr{H}$ e consideremos a solução do problema (2.1)-(2.4) dada por $(u(t), u_t(t)) = S(t)(u_0, u_1)$ com $(u_0, u_1) \in B$.

Vamos denotar a energia do problema (2.1) $E(u(t), u_t(t))$ simplesmente por $E(t)$, ficando implícita a sua dependência de u e u_t. Recorde que

$$E(t) = \frac{1}{2}\left[\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2 + \|u_t(t)\|^2\right] + \int_\Omega F(u(t))dx - \int_\Omega h(x)u(t)dx.$$

Multiplicando a equação (2.1) por u_t e integrando em Ω, obtemos

$$\frac{d}{dt}E(t)+\gamma E(t)^q\|\nabla u_t\|^2=0. \tag{2.68}$$

Agora, defina o funcional

$$E_\varepsilon(t)=E(t)+\varepsilon\Psi(t), \quad \text{onde} \quad \Psi(t)=\int_\Omega |u(t)u_t(t)|^2dx.$$

Derivando E_ε em relação a t e usando (2.68), encontramos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E_\varepsilon(t) &= \frac{d}{dt}E(t)+\varepsilon\int_\Omega u_{tt}udx+\varepsilon\|u_t\|^2\\
&= \frac{d}{dt}E(t)+\varepsilon\int_\Omega(-(-\Delta)^\theta u-\Delta^2u+\gamma E(t)^q\Delta u_t-f(u)+h)udx+\varepsilon\|u_t\|^2\\
&= -\gamma E(t)^q\|\nabla u_t\|^2-\varepsilon\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u\|^2-\varepsilon\|\Delta u\|^2+\varepsilon\gamma E(t)^q\int_\Omega\Delta u_tudx+\varepsilon\int_\Omega f(u)udx\\
&\quad +\varepsilon\int_\Omega hudx+\varepsilon\|u_t\|^2\\
&= -\frac{\varepsilon}{2}E(t)-\gamma E(t)^q\|\nabla u_t\|^2-\frac{\varepsilon}{2}\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u\|^2-\frac{\varepsilon}{2}\|\Delta u\|^2+\varepsilon\gamma E(t)^q\int_\Omega\Delta u_tudx\\
&\quad +\varepsilon\int_\Omega(F(u)-f(u)u)dx+\frac{3}{2}\varepsilon\|u_t\|^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}E_\varepsilon(t)+\frac{\varepsilon}{2}E(t)+\gamma E(t)^q\|\nabla u_t\|^2+\frac{\varepsilon}{2}\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u\|^2+\frac{\varepsilon}{2}\|\Delta u\|^2\\
&=\mathbb{I}_1+\mathbb{I}_2+\frac{3}{2}\varepsilon\|u_t\|^2,
\end{aligned} \tag{2.69}$$

onde

$$\mathbb{I}_1=\varepsilon\int_\Omega(F(u)-f(u)u)dx$$

e

$$\mathbb{I}_2=\varepsilon\gamma E(t)^q\int_\Omega\nabla u_t\nabla udx.$$

Vamos estimar os termos do lado direito de (2.69). De fato, usando (2.9), temos que

$$\mathbb{I}_1\leq\varepsilon\mu|\Omega|. \tag{2.70}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_2 &\leq \varepsilon\gamma E(t)^q\|\nabla u_t\|\|\nabla u\|\\
&\leq \frac{\gamma}{2}E(t)^q\|\nabla u_t\|^2+\frac{\varepsilon^2\gamma}{2}E(t)^q\|\nabla u\|^2\\
&\leq \frac{\gamma}{2}E(t)^q\|\nabla u_t\|^2+\frac{\varepsilon^2\gamma}{2\lambda_1}E(0)^q\|\Delta u\|^2.
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Substituindo (2.70) e (2.71) em (2.69), obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}E_\varepsilon(t)+\frac{\varepsilon}{2}E(t)+\frac{\gamma}{2}E(t)^q\|\nabla u_t\|^2+\frac{\varepsilon}{2}\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u\|^2+\frac{1}{2}(1-\frac{\varepsilon\gamma}{\lambda_1}E(0)^q)\|\Delta u\|^2\\
&\leq\varepsilon\mu|\Omega|+\frac{3}{2}\varepsilon\|u_t\|^2.
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Além disso, temos de (2.23) que

$$\frac{\gamma}{2}E(t)^q\|\nabla u_t\|^2 \geq C_\mu\|\nabla u_t\|^2 \geq \tilde{C}_\mu\|u_t\|^2,$$

substituindo em (2.72), temos

$$\frac{d}{dt}E_\varepsilon(t)+\frac{\varepsilon}{2}E(t)+(\tilde{C}_\mu-\frac{3}{2}\varepsilon)\|u_t\|^2+\frac{\varepsilon}{2}\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u\|^2+\frac{1}{2}(1-\frac{\varepsilon\gamma}{\lambda_1}E(0)^q)\|\Delta u\|^2 \leq \varepsilon\mu|\Omega|. \quad (2.73)$$

Escolhendo $\varepsilon > 0$ de maneira que

$$(\tilde{C}_\mu-\frac{3}{2}\varepsilon) \geq 0 \quad \text{e} \quad (1-\frac{\varepsilon\gamma}{\lambda_1}E(0)^q) \geq 0,$$

obtemos de (2.73) que

$$\frac{d}{dt}E_\varepsilon(t)+\frac{\varepsilon}{2}E(t) \leq \varepsilon\mu|\Omega|. \quad (2.74)$$

Utilizando a desigualdade de Young, a imersão $X_2 \hookrightarrow X$ e (2.24), temos

$$|E_\varepsilon(t)-E(t)| \leq \varepsilon\|u_t\|\|u\| \leq \frac{\varepsilon}{\lambda_1^{\frac{1}{2}}}C_0E(t),$$

o que implica que

$$-\varepsilon CE(t)+E(t) \leq E_\varepsilon(t) \leq \varepsilon CE(t)+E(t),$$

escolhendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, obtemos

$$\frac{1}{2}E(t) \leq E_\varepsilon(t) \leq \frac{3}{2}E(t). \quad (2.75)$$

Substituindo (2.75) em (2.74), temos

$$\frac{d}{dt}E_\varepsilon(t)+\frac{\varepsilon}{3}E_\varepsilon(t) \leq \varepsilon\mu|\Omega|. \quad (2.76)$$

Multiplicando (2.76) pelo fator integrante $e^{\frac{\varepsilon}{3}t}$, obtemos

$$\frac{d}{dt}(E_\varepsilon(t)e^{\frac{\varepsilon}{3}t}) \leq \varepsilon\mu|\Omega|e^{\frac{\varepsilon}{3}t},$$

integrando de 0 a t, obtemos

$$E_\varepsilon(t)e^{\frac{\varepsilon}{3}t}-E_\varepsilon(0) \leq \varepsilon\mu|\Omega|\int_0^t e^{\frac{\varepsilon}{3}s}ds = 3\mu|\Omega|e^{\frac{\varepsilon}{3}t},$$

portanto, temos

$$E_\varepsilon(t) \leq e^{-\frac{\varepsilon}{3}t}E_\varepsilon(0)+3\mu|\Omega|,$$

usando novamente (2.75), obtemos

$$E(t) \leq 2e^{\frac{-\varepsilon}{3}t}E(0)+6\mu|\Omega|. \quad (2.77)$$

De (2.77), podemos tomar $R > 2(6\mu|\Omega|)^{\frac{1}{2}}$ e concluímos que a bola centrada em 0 e raio R contida em $\mathscr{H}$, isto é, $B(0;R) \subset \mathscr{H}$ é um conjunto absorvente.

□

2.3.2 Compacidade Assintótica

Nesta seção mostraremos que o semigrupo $S(t)$ associado ao problema (2.1)-(2.4) possui um atrator global em $\mathscr{H}$. Para isso, estabelecemos o seguinte resultado.

Lema 2.4. (Desigualdade de Estabilidade). *Considere o problema com as hipóteses do Teorema 2.2. Seja B um conjunto limitado invariante em $\mathscr{H}$ e $U_0^1 = (u_0^1, u_1^1)$ e $U_0^2 = (u_0^2, u_1^2)$ dados iniciais em B. Então, existem $\nu > 0$ e $C_B > 0$ (independentes de t) tais que*

$$\|U^1(t) - U^2(t)\|_{\mathscr{H}}^2 \leq C_0 \|U_0^1 - U_0^2\|_{\mathscr{H}}^2 e^{-\frac{2\varepsilon}{3}t} + C_1 \int_0^t e^{-\frac{2\varepsilon}{3}(t-s)} \left[\|\nabla w(s)\|^2 + \|w(s)\|_{2(\rho+1)}^2 \right] ds,$$

para todo $t \geq 0$, onde u^1 e u^2 são soluções generalizadas correspondentes aos dados inicias U_0^1 e U_0^2, respectivamente.

Demonstração. Definimos o funcional

$$V^\varepsilon(t) = V(t) + \varepsilon\Phi(t), \quad \varepsilon > 0, \tag{2.78}$$

onde $\Phi(t) = \int_\Omega w_t w dx$ e

$$V(t) = \frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}} w(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|\Delta w(t)\|^2.$$

Derivando V^ε em relação a t, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V^\varepsilon(t) &= \frac{d}{dt}V(t) + \varepsilon\|w_t(t)\|^2 - \varepsilon\|(-\Delta)^{\theta/2} w(t)\|^2 - \varepsilon\|\Delta w(t)\|_2^2 - \varepsilon\sum_{i=1}^3 \mathscr{L}_i \\ &= \frac{d}{dt}V(t) + 2\varepsilon\|w_t(t)\|^2 - 2\varepsilon V(t) + \varepsilon\sum_{i=1}^3 \mathscr{L}_i, \end{aligned} \tag{2.79}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_1 &= \gamma[E(U^1(t))]^q \int_\Omega \nabla w_t(t) \nabla w(t) dx, \\ \mathscr{L}_2 &= \gamma\Pi(t) \int_\Omega \nabla u_t^2(t) \nabla w(t) dx, \\ \mathscr{L}_3 &= \int_\Omega (f(u^1) - f(u^2)) w dx. \end{aligned}$$

Para simplificar, a seguir usaremos C para denotar diversas constantes que dependem de B. Procedendo como na prova do Teorema 2.2, a diferença $U^1 - U^2 = (w, w_t)$ satisfaz o problema (2.55) e a seguinte desigualdade

$$\frac{d}{dt}V(t) \leq -C_\mu \|\nabla w_t(t)\|^2 + C\|w(t)\|_{2(\rho+1)}^2 + C\|\nabla u_t^2(t)\|^2 V(t), \tag{2.80}$$

Por outro lado, os termos $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$ e $\mathscr{L}_3$ podem ser estimados da seguinte forma

$$\mathscr{L}_1 \leq \gamma[E(U^1(t))]^q \|\nabla w_t(t)\| \|\nabla w(t)\| \leq \frac{C_\mu}{2}\|\nabla w_t(t)\|^2 + C\|\nabla w(t)\|^2,$$

$$\mathscr{L}_2 \leq C\|\nabla u_t^2(t)\|^2 V(t) + C\|\nabla w(t)\|^2.$$

e

$$\mathscr{L}_3 \leq C\|w(t)\|_{2(\rho+1)}\|\nabla w_t\| \leq C_\varepsilon \|w(t)\|^2_{2(\rho+1)} + \varepsilon\|\nabla w_t\|^2.$$

Substituindo (2.80), $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$ e $\mathscr{L}_3$ em (2.79), e usando $\|w_t\|^2 \leq C\|\nabla w_t\|^2$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V^\varepsilon(t) &\leq -\left[\frac{C_\mu}{2} - \varepsilon(2C+1)\right]\|\nabla w_t(t)\|^2 - 2\varepsilon V(t) \\ &\quad + C\|\nabla u_t^2(t)\|^2 V(t) + C\left[\|\nabla w(t)\|^2 + \|w(t)\|^2_{2(\rho+1)}\right]. \end{aligned}$$

Escolhendo ε pequeno tal que $\frac{C_\mu}{2} - \varepsilon(2C+1) \geq 0$, obtemos que

$$\frac{d}{dt}V^\varepsilon(t) \leq -\left\{2\varepsilon - C\|\nabla u_t^2(t)\|^2\right\}V(t) + C\left[\|\nabla w(t)\|^2 + \|w(t)\|^2_{2(\rho+1)}\right]. \tag{2.81}$$

De (2.78), usando a imersão $X_2 \hookrightarrow X$ e a desigualdade de Young, temos

$$|V^\varepsilon(t) - V(t)| \leq \varepsilon\|w_t(t)\|\|w(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{\lambda_1^{1/2}}\|w_t(t)\|\|\Delta w(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{\lambda_1^{1/2}}V(t).$$

Para $\varepsilon > 0$ pequeno e apropriadamente escolhido, obtemos

$$\frac{1}{2}V(t) \leq V^\varepsilon(t) \leq \frac{3}{2}V(t). \tag{2.82}$$

Usando (2.82) em (2.81), obtemos

$$\frac{d}{dt}V^\varepsilon(t) + \Theta_\varepsilon V^\varepsilon(t) \leq C\left[\|\nabla w(t)\|^2 + \|w(t)\|^2_{2(\rho+1)}\right], \tag{2.83}$$

onde

$$\Theta_\varepsilon := \frac{4\varepsilon}{3} - \frac{2}{3}C\|\nabla u_t^2(t)\|^2.$$

De (2.83), temos

$$\frac{d}{dt}\left[V^\varepsilon(t)e^{\int_0^t \Theta_\varepsilon(s)ds}\right] \leq Ce^{\int_0^t \Theta_\varepsilon(s)ds}\left[\|\nabla w(t)\|^2 + \|w(t)\|^2_{2(\rho+1)}\right],$$

integrando em $(0,t)$, deduzimos que

$$V^\varepsilon(t) \leq V^\varepsilon(0)e^{-\int_0^t \Theta_\varepsilon(s)ds} + C\int_0^t e^{-\int_s^t \Theta_\varepsilon(\tau)d\tau}\left[\|\nabla w(s)\|^2 + \|w(s)\|^2_{2(\rho+1)}\right]ds. \tag{2.84}$$

Por outro lado, usando que $\|\nabla u_t^1\|^2 + \|\nabla u_t^2\|^2 \in L^1(0,T)$, existe $C > 0$, tal que

$$-\int_s^t \Theta_\varepsilon(\tau)d\tau = -\left[\frac{4\varepsilon}{3}\tau\right]_s^t + C\int_s^t \|\nabla u_t^2(\tau)\|^2 d\tau \leq -\frac{2\varepsilon}{3}(t-s) + C. \tag{2.85}$$

Substituindo (2.85) em (2.84), obtemos

$$V^\varepsilon(t) \leq V^\varepsilon(0)e^{-\frac{2}{3}\varepsilon t} + C\int_0^t e^{-\frac{2\varepsilon}{3}(t-s)}\left[\|\nabla w(s)\|_2^2 + \|w(s)\|^2_{2(\rho+1)}\right]ds.$$

Novamente usando (2.82), temos

$$V(t) \leq CV(0)e^{-\frac{2\varepsilon}{3}t} + C\int_0^t e^{-\frac{2\varepsilon}{3}(t-s)}\left[\|\nabla w(s)\|_2^2 + \|w(s)\|^2_{2(\rho+1)}\right]ds. \tag{2.86}$$

Portanto, de (2.86), obtemos o desejado. □

Lema 2.5. *Sob as hipóteses do Teorema 2.2, o C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ correspondente ao problema* (2.1)-(2.4) *é quasi-estável em qualquer subconjunto limitado e positivamente invariante $B \subset \mathscr{H}$.*

Demonstração. De fato, seja $\mathscr{X} = X_2$, $Y = X$. Então como $S(t)$ é o operador solução do problema (2.1)-(2.4), as condições (1.4) e (1.5) são satisfeitas, devido ao item (iii) do Teorema 2.2 e ao Lema 2.4, respectivamente. □

Agora, segue imediatamente do Teorema 1.52 o seguinte resultado

Teorema 2.6. *Sob as hipóteses do Teorema 2.2, o C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ correspondente ao problema* (2.1)-(2.4) *tem um atrator global $\mathscr{A} \subset \mathscr{H}$ e, além disso, a dimensão fractal de $\mathscr{A}$ é finita.*

2.4 Sistema Gradiente e Semicontinuidade Superior

Consideremos uma família $\{\gamma_\varepsilon\}_{\varepsilon\in[0,1]}$ onde para cada $\varepsilon \in [0,1]$, $\gamma_\varepsilon > 0$ e existem constantes (independentes de ε) $\gamma_1 \geq \gamma_0 > 0$, tais que, $\gamma_0 \leq \gamma_\varepsilon \leq \gamma_1$.

Fixe $\varepsilon \geq 0$. Consideremos a seguinte equação

$$u_{tt} + (-\Delta)^\theta u + \Delta^2 u - \gamma_\varepsilon \Big[E(u(t),u_t(t))\Big]^q \Delta u_t + f(u) = h(x). \tag{2.87}$$

Com as condições impostas sobre (2.1), a equação (2.87) possui um semigrupo $\{S_\varepsilon(t);t\geq 0\}$ associado e o mesmo admite atrator global $\mathscr{A}_\varepsilon$.

O propósito desta seção consiste em demonstrar que o semigrupo $\{S_\varepsilon(t);t\geq 0\}$ é gradiente. Usamos o Lema 1.56 para mostrar uma limitação uniforme da família de atratores induzida pela perturbação e, por fim, provamos a semicontinuidade superior da família de atratores globais.

2.4.1 Sistema Gradiente

Lema 2.7. *O sistema dinâmico $(\mathscr{H},S_\varepsilon(t))$ associado à equação (2.87), com as mesmas condições impostas sobre (2.1), é gradiente.*

Demonstração. Mostraremos que o funcional de energia E definido em (2.2) é uma função de Lyapunov para o C_0-semigrupo

$$S_\varepsilon(t)(u_0,u_1) = (u^{(\varepsilon)}(t),u_t^{(\varepsilon)}(t)), \quad (u_0,u_1)\in\mathscr{H}.$$

De fato, multiplicando a equação (2.87) por $u_t^{(\varepsilon)}(t,x)$ e integrando sobre Ω, obtemos

$$\frac{d}{dt}E(u^{(\varepsilon)}(t),u_t^{(\varepsilon)}(t)) = -\gamma_\varepsilon[E(u^{(\varepsilon)}(t),u_t^{(\varepsilon)}(t))]^q\|\nabla u_t^{(\varepsilon)}(t)\|^2. \tag{2.88}$$

Assim, E satisfaz a condição (i) da Definição 1.55. Além disso, (2.88) fornece que

$$\begin{aligned} E(u^{(\varepsilon)}(t),u_t^{(\varepsilon)}(t)) - E(u_0,u_1) &= \int_0^t \frac{d}{ds}E(u^{(\varepsilon)}(s),u_t^{(\varepsilon)}(s))ds \\ &= -\gamma_\varepsilon\int_0^t [E(u^{(\varepsilon)}(s),u_t^{(\varepsilon)}(s))]^q\|\nabla u_t^{(\varepsilon)}(s)\|^2 ds. \end{aligned} \tag{2.89}$$

Por (2.89), se $E(u^{(\varepsilon)}(t),u_t^{(\varepsilon)}(t))=E(u_0,u_1)$ então, como $E(u^{(\varepsilon)}(t),u_t^{(\varepsilon)}(t))>0$, $\|\nabla u_t^{(\varepsilon)}(t)\|^2=0$ e, consequentemente,

$$u_t^{(\varepsilon)}(t)=0 \quad \text{e} \quad u^{(\varepsilon)}(t)=u_0, \quad \forall t\geq 0.$$

Logo, concluímos que E satisfaz a condição (ii) da Definição 1.55. Portanto, $(\mathscr{H},S_\varepsilon(t))$ é um sistema gradiente. $\square$

2.4.2 Semicontinuidade Superior

Nesta subseção mostraremos a semicontinuidade superior para a família de atratores globais da equação (3.4), com as mesmas condições impostas sobre (2.1).

Lema 2.8. *O conjunto dos pontos de equilíbrio associados à equação (3.4), com as mesmas condições impostas sobre (2.1), é uniformemente limitado em relação a ε.*

Demonstração. Denote por $\mathscr{N}_\varepsilon$ o conjunto dos pontos de equilíbrio de (3.4). Logo,

$$\begin{aligned}\mathscr{N}_\varepsilon &= \{(u,v)\in\mathscr{H};\ S_\varepsilon(t)(u,v)=(u,v),\ \forall t\geq 0\}\\ &= \{(u^{(\varepsilon)},0)\in\mathscr{H};\ (-\Delta)^\theta u^{(\varepsilon)}+\Delta^2u^{(\varepsilon)}+f(u^{(\varepsilon)})-h(x)=0\}.\end{aligned}$$

Assim, se $(u^{(\varepsilon)},0)\in\mathscr{N}_\varepsilon$, então, satisfaz o seguinte problema elíptico

$$(-\Delta)^\theta u^{(\varepsilon)}+\Delta^2u^{(\varepsilon)}+f(u^{(\varepsilon)})-h(x)=0. \tag{2.90}$$

Multiplicando (2.90) por $u^{(\varepsilon)}$ e integrando em Ω, obtemos

$$\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u^{(\varepsilon)}\|^2+\|\Delta u^{(\varepsilon)}\|^2+\int_\Omega f(u^{(\varepsilon)})u^{(\varepsilon)}dx-\int_\Omega h(x)u^{(\varepsilon)}dx=0.$$

Segue de (2.7) que

$$\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u^{(\varepsilon)}\|^2+\|\Delta u^{(\varepsilon)}\|^2+\int_\Omega F(u^{(\varepsilon)})dx-\int_\Omega h(x)u^{(\varepsilon)}dx\leq\mu|\Omega|.$$

Assim,

$$E(u^{(\varepsilon)}(t),0)\leq\mu|\Omega|. \tag{2.91}$$

Portanto, utilizando (2.24), podemos concluir que $\mathscr{N}_\varepsilon$ é limitado uniformemente em relação a ε. $\square$

Agora, o Lema 1.56 nos leva à seguinte conclusão:

Corolário 2.9. *A família de atratores globais $\{\mathscr{A}_\varepsilon\}_{\varepsilon\in[0,1]}$ é uniformemente limitada com respeito a ε.*

Lema 2.10. *Seja B um subconjunto limitado de $\mathscr{H}$. Suponhamos que $|\gamma_\varepsilon-\gamma_0|\to 0$, quando $\varepsilon\to 0^+$. Então,*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\sup_{t\in[0,T]}\sup_{(u,v)\in B}\|S_\varepsilon(t)(u,v)-S_0(u,v)\|=0, \tag{2.92}$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$.

Demonstração. Seja B um subconjunto limitado de $\mathscr{H}$. Para cada $(u_0,u_1)\in B$, definimos

$$(u^{(\varepsilon)}(t),u_t^{(\varepsilon)}(t))=S_\varepsilon(t)(u_0,u_1),\quad \forall\varepsilon\in[0,1],\ \forall t\geq 0,$$

$E^{(\varepsilon)}(t)=E(u^{(\varepsilon)}(t),u_t^{(\varepsilon)}(t))$, $u=u^{(\varepsilon)}-u^{(0)}$ e $u_t=u_t^{(\varepsilon)}-u_t^{(0)}$. Então

$$u_{tt}+(-\Delta)^\theta u+\Delta^2u-\mathbb{J}+f(u^{(\varepsilon)})-f(u^{(0)})=0, \tag{2.93}$$

onde

$$\mathbb{J}=\left[\gamma_\varepsilon[E^{(\varepsilon)}(t)]^q\Delta u_t^{(\varepsilon)}-\gamma_0[E^{(0)}(t)]^q\Delta u_t^{(0)}\right].$$

Observamos que podemos escrever $\mathbb{J}$ da seguinte forma

$$\mathbb{J}=\frac{1}{2}\{\gamma_\varepsilon[E^{(\varepsilon)}(t)]^q+\gamma_0[E^{(0)}(t)]^q\}\Delta u_t+\frac{1}{2}\{\gamma_\varepsilon[E^{(\varepsilon)}(t)]^q-\gamma_0[E^{(0)}(t)]^q\}(\Delta u_t^{(\varepsilon)}+\Delta u_t^{(0)}) \tag{2.94}$$

Substituindo (2.94) em (2.93), multiplicando por $u_t(t,x)$ e integrando sobre Ω, temos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u(t)\|^2+\|\Delta u(t)\|^2+\|u_t(t)\|^2\right]+\frac{1}{2}\{\gamma_\varepsilon[E^{(\varepsilon)}(t)]^q+\gamma_0[E^{(0)}(t)]^q\}\|\nabla u_t\|^2\\&=-\int_\Omega(f(u^{(\varepsilon)})-f(u^{(0)}))u_t(t)dx\\&\quad-\frac{1}{2}\{\gamma_\varepsilon[E^{(\varepsilon)}(t)]^q-\gamma_0[E^{(0)}(t)]^q\}\int_\Omega(\nabla u_t^{(\varepsilon)}+\nabla u_t^{(0)})\nabla u_t dx.\end{aligned} \tag{2.95}$$

Vamos majorar os termos ao lado direito de (2.95). Primeiramente podemos observar que de (2.58) concluímos que existe uma constante positiva C_1 independente de ε e (u_0,u_1) em B, tal que

$$\left|\int_\Omega(f(u^{(\varepsilon)})-f(u^{(0)}))u_t(t)dx\right|\leq C_1\|(u^{(\varepsilon)}(t),u_t^{(\varepsilon)}(t))\|^2_{\mathscr{H}}. \tag{2.96}$$

Por outro lado, escrevendo

$$\gamma_\varepsilon[E^{(\varepsilon)}(t)]^q-\gamma_0[E^{(0)}(t)]^q=\left[\gamma_\varepsilon^{\frac{1}{2}}[E^{(\varepsilon)}(t)]^{\frac{q}{2}}+\gamma_0^{\frac{1}{2}}[E^{(0)}(t)]^{\frac{q}{2}}\right]\left[\gamma_\varepsilon^{\frac{1}{2}}[E^{(\varepsilon)}(t)]^{\frac{q}{2}}-\gamma_0^{\frac{1}{2}}[E^{(0)}(t)]^{\frac{q}{2}}\right]. \tag{2.97}$$

Utilizando (2.97), desigualdade de Hölder e a desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\{\gamma_\varepsilon[E^{(\varepsilon)}(t)]^q-\gamma_0[E^{(0)}(t)]^q\}\int_\Omega(\nabla u_t^{(\varepsilon)}+\nabla u_t^{(0)})\nabla u_t dx\\&\leq\left[\gamma_\varepsilon^{\frac{1}{2}}[E^{(\varepsilon)}(t)]^{\frac{q}{2}}+\gamma_0^{\frac{1}{2}}[E^{(0)}(t)]^{\frac{q}{2}}\right]\left[\gamma_\varepsilon^{\frac{1}{2}}[E^{(\varepsilon)}(t)]^{\frac{q}{2}}-\gamma_0^{\frac{1}{2}}[E^{(0)}(t)]^{\frac{q}{2}}\right]\left[\|\nabla u_t^{(\varepsilon)}+\nabla u_t^{(0)}\|\right]\|\nabla u_t\|\\&\leq\frac{1}{4}\left[\gamma_\varepsilon^{\frac{1}{2}}[E^{(\varepsilon)}(t)]^{\frac{q}{2}}+\gamma_0^{\frac{1}{2}}[E^{(0)}(t)]^{\frac{q}{2}}\right]^2\|\nabla u_t\|^2\\&\quad+\frac{1}{4}\left[\gamma_\varepsilon^{\frac{1}{2}}[E^{(\varepsilon)}(t)]^{\frac{q}{2}}-\gamma_0^{\frac{1}{2}}[E^{(0)}(t)]^{\frac{q}{2}}\right]^2\left[\|\nabla u_t^{(\varepsilon)}\|+\|\nabla u_t^{(0)}\|\right]^2\\&\leq\frac{1}{2}\left[\gamma_\varepsilon[E^{(\varepsilon)}(t)]^q+\gamma_0[E^{(0)}(t)]^q\right]\|\nabla u_t\|^2\\&\quad+\frac{1}{2}\left[\gamma_\varepsilon^{\frac{1}{2}}[E^{(\varepsilon)}(t)]^{\frac{q}{2}}-\gamma_0^{\frac{1}{2}}[E^{(0)}(t)]^{\frac{q}{2}}\right]^2\left[\|\nabla u_t^{(\varepsilon)}\|^2+\|\nabla u_t^{(0)}\|^2\right].\end{aligned} \tag{2.98}$$

Substituindo (2.96) e (2.98) em (2.95), temos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big[\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u(t)\|^2+\|\Delta u(t)\|^2+\|u_t(t)\|^2\Big]\\
&\leq C_2\Big[\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u(t)\|^2+\|\Delta u(t)\|^2+\|u_t(t)\|^2\Big]+\frac{1}{2}\Pi(t)^2\big[\|\nabla u_t^{(\varepsilon)}\|^2+\|\nabla u_t^{(0)}\|^2\big],
\end{aligned}\tag{2.99}$$

onde

$$\Pi(t)=\big[\gamma_\varepsilon^{\frac{1}{2}}[E^{(\varepsilon)}(t)]^{\frac{q}{2}}-\gamma_0^{\frac{1}{2}}[E^{(0)}(t)]^{\frac{q}{2}}\big].$$

Como $E^{(\varepsilon)}(0)=E^{(0)}(0)$ para todo $\varepsilon\in[0,1]$ e $E^{(0)}(0)$ é uniformemente limitado em B, temos

$$\begin{aligned}
|\Pi(t)|&=|(\gamma_\varepsilon^{\frac{1}{2}}-\gamma_0^{\frac{1}{2}})[E^{(\varepsilon)}(t)]^{\frac{q}{2}}+\gamma_0^{\frac{1}{2}}\{[E^{(\varepsilon)}(t)]^{\frac{q}{2}}-[E^{(0)}(t)]^{\frac{q}{2}}\}|\\
&\leq|\gamma_\varepsilon^{\frac{1}{2}}-\gamma_0^{\frac{1}{2}}|[E^{(\varepsilon)}(t)]^{\frac{q}{2}}+\gamma_0^{\frac{1}{2}}\frac{q}{2}\vartheta^{\frac{q}{2}-1}|E^{(\varepsilon)}(t)-E^{(0)}(t)|\\
&\leq|\gamma_\varepsilon^{\frac{1}{2}}-\gamma_0^{\frac{1}{2}}|[E^{(\varepsilon)}(t)]^{\frac{q}{2}}+C_2\|(u^{(\varepsilon)}(t),u_t^{(\varepsilon)}(t))\|_{\mathscr{H}},
\end{aligned}\tag{2.100}$$

onde $\vartheta=(\mu|\Omega|-\frac{1}{\lambda_1}\|h\|^2)^{-1}$ se $q<2$ ou $\vartheta=\max\{E(u_0^\nu,u_1^\nu),E(u_0^\sigma,u_1^\sigma)\}$ se $q\geq 2$ e $C_2>0$ independe de (u_0,u_1) e ε.

Assim, por (2.100), inferimos que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Pi(t)^2\big[\|\nabla u_t^{(\varepsilon)}\|^2+\|\nabla u_t^{(0)}\|^2\big]\\
&\leq\Big\{|\gamma_\varepsilon^{\frac{1}{2}}-\gamma_0^{\frac{1}{2}}|^2[E^{(\varepsilon)}(t)]^q+C_3\|(u^{(\varepsilon)}(t),u_t^{(\varepsilon)}(t))\|_{\mathscr{H}}^2\Big\}\big[\|\nabla u_t^{(\varepsilon)}\|^2+\|\nabla u_t^{(0)}\|^2\big].
\end{aligned}\tag{2.101}$$

Logo, substituindo (2.101) em (2.99), concluímos que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big[\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u(t)\|^2+\|\Delta u(t)\|^2+\|u_t(t)\|^2\Big]\\
&\leq C_3\Big(1+\|\nabla u_t^{(\varepsilon)}\|^2+\|\nabla u_t^{(0)}\Big)\Big[\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u(t)\|^2+\|\Delta u(t)\|^2+\|u_t(t)\|^2\Big]\\
&\quad+C_3|\gamma_\varepsilon^{\frac{1}{2}}-\gamma_0^{\frac{1}{2}}|^2\big[\|\nabla u_t^{(\varepsilon)}\|^2+\|\nabla u_t^{(0)}\|^2\big],
\end{aligned}\tag{2.102}$$

onde $C_3>0$ é uma constante independente de ε e (u_0,u_1).

Aplicando o Lema de Gronwall em (2.102) e utilizando (2.27), existe uma constante positiva C independente de ε e (u_0,u_1) em B, de tal modo que

$$\|(u(t),u_t(t))\|_{\mathscr{H}}^2\leq Ce^{Ct}|\gamma_\varepsilon^{\frac{1}{2}}-\gamma_0^{\frac{1}{2}}|.\tag{2.103}$$

Assim (2.92) é uma consequência de (2.103). A prova do Lema 2.10 está completa. □

Enfim, apresentamos o resultado principal desta subseção.

Teorema 2.11. *Seja $\varepsilon\in[0,1]$. A família de atratores globais $\{\mathscr{A}_\varepsilon\}_{\varepsilon\in[0,1]}$ é semicontínua superiormente em $\varepsilon=0$, ou seja,*

$$dist_{\mathscr{H}}(\mathscr{A}_\varepsilon,\mathscr{A}_0)\to 0\ \ quando\ \ \varepsilon\to 0^+.$$

Demonstração. Segue do Corolário 2.9 que existe um subconjunto limitado $D \subset \mathscr{H}$ tal que $\mathscr{A}_\varepsilon \subset D$, para todo $\varepsilon \geq 0$. Dado $\delta > 0$, existe um tempo $T_0 = T_0(\delta, D)$ tal que

$$dist_{\mathscr{H}}(S(t)D, \mathscr{A}_0) < \frac{\delta}{2}, \quad \forall t \geq T_0. \tag{2.104}$$

Aplicando o Lema 2.10, existe um $0 < \varepsilon_0 \leq 1$ tal que

$$dist_{\mathscr{H}}(S_\varepsilon(t)\mathscr{A}_\varepsilon, S_0(t)\mathscr{A}_\varepsilon) < \frac{\delta}{2}, \quad \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]. \tag{2.105}$$

Finalmente, (2.104) e (2.105) levam a concluir que

$$\begin{aligned} dist_{\mathscr{H}}(\mathscr{A}_\varepsilon, \mathscr{A}_0) &= dist_{\mathscr{H}}(S_\varepsilon(t)\mathscr{A}_\varepsilon, \mathscr{A}_0) \\ &\leq dist_{\mathscr{H}}(S_\varepsilon(t)\mathscr{A}_\varepsilon, S_0(t)\mathscr{A}_\varepsilon) + dist_{\mathscr{H}}(S_0(t)\mathscr{A}_\varepsilon, \mathscr{A}_0) \\ &\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta, \end{aligned}$$

sempre que $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ e $t \geq T_0$. Portanto, está provada a semicontinuidade superior da família de atratores globais.

□

CAPÍTULO 3

Atratores para uma Equação de Placa Semilinear com Memória

Neste capítulo estudaremos a boa colocação global, existência de atrator global e a semicontinuidade superior da família de atratores gerada por uma perturbação de uma equação de onda semilinear governada pelo operador bi-harmônico, onde como no Capítulo 2 o termo dissipativo da equação depende diretamente da energia do sistema, porém, agora adicionamos um termo de memória, assim, a dissipação da energia também depende deste termo adicional. Para a prova de boa colocação e existência de atrator global seguiremos as ideias de [13] e [15]. Os resultados deste capítulo fazem parte do artigo [30].

3.1 Equação de placa com memória

Considere o problema de evolução

$$\begin{cases} u_{tt}(t)+(-\Delta)^{\theta}u(t)+\Delta^2u(t)-\gamma\Big[E(u(t),u_t(t),\eta^t)\Big]^q\Delta u_t(t)-\displaystyle\int_0^{\infty}g(s)\Delta^2u(t-s)ds \\ +f(u(t))=h(x), \quad t>0, \quad x\in\Omega, \\ u(0,x)=u_0(x), \quad u_t(0,x)=u_1(x), \quad x\in\Omega, \\ u(-s,x)=\varphi(s,x), \quad (s,x)\in[0,+\infty)\times\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde Ω é um domínio suave e limitado em $\mathbb{R}^n$, $n\geq 1$, $\theta\in[0,2]$, $\gamma>0$, $q>0$, $\varphi:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ e $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ são funções apropriadas, $\eta^t(s,x)=u(t,x)-u(t-s,x)$ para todo $s,t\geq 0$ e $x\in\Omega$. Além disso, E é um funcional energia associado ao sistema que será definido posteriormente.

Consideramos o problema (3.1) sujeito à condição de fronteira

$$u=\Delta u=0 \ \text{ em } \ \partial\Omega. \tag{3.2}$$

Denotemos por $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ a norma usual em $L^p(\Omega)$, para $p\geq 1$, ou simplesmente $\|\cdot\|_p$. Em $L^2(\Omega)$, usaremos $\|\cdot\|$ em vez de $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ e denotamos por $(\cdot,\cdot):=\|\cdot\|^2$ o produto interno nesse espaço. Vamos usar as notações estabelecidas em [25]:

Se Z é um espaço de Banach munido da norma $\|u(t)\|_Z$, denotaremos por $L^p(0,T;Z)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço das aplicações $u : (0,T) \to Z$ tal que $\int_0^T \|u(t)\|_Z^p dt < \infty$. Se Z é um espaço de Banach munido da norma $\|u(t)\|_Z$, denotaremos por $L^\infty(0,T;Z)$, o espaço das aplicações $u : (0,T) \to Z$ tal que $\sup \mathrm{ess} \|u(t)\|_Z < \infty$.

Usaremos as seguintes notações:

$$X = X_0 = L^2(\Omega),\ X_1 = H_0^1(\Omega),\ X_2 = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$

$$X_4 = \{u \in H^4(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) : \Delta u|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Seja $g : \mathbb{R}^+ \to [0,\infty)$ e defina

$$\mathscr{M}_n = L_g^2(\mathbb{R}^+, X_n), \quad n = 0,1,2,4,$$

munido da norma e do produto interno

$$\|\eta\|_{L^2(\mathbb{R}^+,X_n)} = (\eta,\eta)_{L^2(\mathbb{R}^+,X_n)}^{\frac{1}{2}}, \quad (\eta,\xi)_{L^2(\mathbb{R}^+,X_n)} = \int_0^\infty g(s)(\eta(s),\xi(s))_{X_n} ds,$$

respectivamente. Com o produto interno acima, $\mathscr{M}_n$ é um espaço de Hilbert separável para cada $n = 0,1,2,4$ (ver [12] ou [15]).

Além disso,

$$\|\eta\|_{\mathscr{M}_n} = \|\eta\|_{L^2(\mathbb{R}^+,X_n)} \text{ e } (\eta,\xi)_{\mathscr{M}_n} = (\eta,\xi)_{L^2(\mathbb{R}^+,X_n)},$$

para todo $n = 0,1,2,4$ (see [15]).

Considere o operador linear $\mathscr{T} : D(\mathscr{T}) \subset \mathscr{M}_2 \to \mathscr{M}_2$ definido por

$$\mathscr{T}\eta = -\eta', \tag{3.3}$$

onde $D(\mathscr{T}) = \{\eta \in \mathscr{M}_2;\ \eta' \in \mathscr{M}_2;\ \eta(0) = 0\}$, e $\eta'(t) = \frac{\partial\eta}{\partial s}$ no sentido de distribuições e $\eta(0) = \lim_{s\to 0} \eta(s)$.

O operador $\mathscr{T}$ definido acima é o gerador infinitesimal do semigrupo de translação à direita $\sum(t)$ em $\mathscr{M}_2$ definido da seguinte forma

$$[\Sigma(t)\eta](s) = \begin{cases} 0 & 0 \leq s < t \\ \eta(s-t) & s \geq t, \end{cases}$$

e

$$(\mathscr{T}\eta,\eta)_{\mathscr{M}_2} \leq 0, \quad \forall \eta \in D(\mathscr{T}).$$

Para mais detalhes, veja [18, 31].

Considere os espaços de Hilbert $\mathscr{H} = X_2 \times X \times \mathscr{M}_2$, $\mathscr{H}_2 = X_4 \times X_2 \times \mathscr{M}_2$ e $\mathscr{H}_4 = X_4 \times X_2 \times \mathscr{M}_4$ munidos das normas definidas por $\|\cdot\|_{\mathscr{H}} = (\cdot,\cdot)_{\mathscr{H}}^{\frac{1}{2}}$, $\|\cdot\|_{\mathscr{H}_2} = (\cdot,\cdot)_{\mathscr{H}_2}^{\frac{1}{2}}$ e $\|\cdot\|_{\mathscr{H}_4} = (\cdot,\cdot)_{\mathscr{H}_4}^{\frac{1}{2}}$, onde

$$((u_1,v_1,\eta_1),(u_2,v_2,\eta_2))_{\mathscr{H}} = (u_1,u_2)_{X_2} + (v_1,v_2) + (\eta_1,\eta_2)_{\mathscr{M}_2},$$

$$((u_1,v_1,\eta_1),(u_2,v_2,\eta_2))_{\mathscr{H}_2} = (u_1,u_2)_{X_4} + (v_1,v_2)_{X_2} + (\eta_1,\eta_2)_{\mathscr{M}_2}$$

e

$$((u_1,v_1,\eta_1),(u_2,v_2,\eta_2))_{\mathscr{H}_4} = (u_1,u_2)_{X_4} + (v_1,v_2)_{X_2} + (\eta_1,\eta_2)_{\mathscr{M}_4}.$$

Defina o funcional de energia $E : \mathscr{H} \to \mathbb{R}$ por

$$E(u,v,\eta) = \frac{1}{2}[\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u\|^2 + l\|\Delta u\|^2 + \|v\|^2 + \|\eta\|^2_{\mathscr{M}_2}] + \int_\Omega \left[F(u(x)) - h(x)u(x)\right] dx, \tag{3.4}$$

onde $l = 1 - \int_0^\infty g(\tau)d\tau$. Aqui, F é uma primitiva apropriada de f, ou seja,

$$F(u) = \int_0^u f(s)ds + \mu, \tag{3.5}$$

onde μ será explicitada posteriormente (ver **(H.3)**).

Note que $A := \Delta^2$ onde $D(A) = X_4$ satisfazendo a condição de fronteira (2.4) é um operador positivo auto-adjunto. Então podemos definir as potências fracionárias A^α ($\alpha > 0$) associadas ao operador A. Denote por $X_\alpha = D(A^{\frac{\alpha}{4}})$ o espaço de potências fracionárias associadas a A munido da norma do gráfico (veja [1, 20]), ou seja,

$$(u,v)_{X_\alpha} = (A^{\frac{\alpha}{4}}u, A^{\frac{\alpha}{4}}v), \qquad \|u\|_{X_\alpha} = \|A^{\frac{\alpha}{4}}u\|, \quad u,v \in X_\alpha.$$

Além disso,

$$\|u\|^2 \leq \lambda_1^{-1}\|\Delta u\|^2, \tag{3.6}$$

onde $\lambda_1 > 0$ é o primeiro autovalor de A.

Seguindo as ideias de [13], definimos a nova variável

$$\eta = \eta^t(s,x) = u(t,x) - u(t-s,x), \quad (s,x) \in [0,+\infty) \times \Omega, \quad t \geq 0. \tag{3.7}$$

Por (3.3) e (3.7),

$$\eta_t = \mathscr{T}\eta + u_t. \tag{3.8}$$

e

$$-\int_0^\infty g(s)\Delta^2 u(t-s)ds = -\Delta^2 u(t)\int_0^\infty g(s)ds + \int_0^\infty g(s)\Delta^2\eta^t(s)ds. \tag{3.9}$$

Usando (3.8) e (3.9), podemos reescrever (3.1), como

$$\begin{cases} u_{tt} + A^{\frac{\theta}{2}}u + lAu - \gamma\Big[E(u,u_t,\eta)\Big]^q A^{\frac{1}{2}}u_t + \displaystyle\int_0^\infty g(s)A\eta(s)ds + f(u) = h(x), \quad t > 0, \\ \eta_t = \mathscr{T}\eta + u_t, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \\ \eta^0(s,x) = \eta_0(s,x), \qquad (s,x) \in [0,+\infty) \times \Omega, \end{cases} \tag{3.10}$$

onde $\eta_0(s,x) = u_0(x) - \varphi(s,x)$.

Assumimos as seguintes hipóteses:

(H.1) $h \in X_2$;

(H.2) A não linearidade f satisfaz as seguintes condições:

(H.2)(a) $f \in C^2(\mathbb{R})$ e $f(0) = 0$;

(H.2)(b) Existem constantes $C_{f_i} > 0$, $i = 1,2$, tais que

$$|f^{(i)}(s)| \leq C_{f_i}(1 + |s|^{\rho}), \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

onde $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$ e ρ é um número real que satisfaz

$$\rho \geq 0, \quad \text{se} \quad n = 1,2,3,4 \qquad \text{e} \qquad 0 \leq \rho \leq \frac{4}{n-4}, \quad \text{se} \quad n \geq 5;$$

(H.2)(c) Existe uma constante $\alpha \in [0, \lambda_1)$ tal que

$$-\frac{\alpha}{8}|u|^2 \leq \int_0^u f(s)ds \leq f(u)u, \;\; u \in \mathbb{R};$$

(H.3) A constante μ em (3.5) satisfaz a seguinte desigualdade:

$$\mu > \frac{2\lambda_1^{-1}}{|\Omega|}\|h\|^2;$$

(H.4) $\varphi \in C([0,+\infty), \mathscr{M}_2)$, $\varphi(0) = u_0$ e $\varphi'(0) = -u_1$.

Com relação a função g, vamos supor as seguintes condições:

(a) $g \in C^1(\mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R})$;

(b) $g(s) \geq 0$, para todo $s \in \mathbb{R}^+$;

(c) $g'(s) \leq -\alpha g(s)$, $\alpha > 0$, para todo $s \in \mathbb{R}^+$;

(d) $\int_0^\infty g(s)\,ds \leq \frac{1}{2}$.

Observação 3.1. Note que a função g dada por

$$g(s) = \frac{ke^{-\alpha s}}{s^{1-\beta}}, \quad \forall s \in \mathbb{R}^+,$$

com constantes $0 < \beta \leq 1$, $\alpha > 0$ e $0 < k \leq 4(\alpha + \beta)$ satisfaz as condições (a)-(d) acima.

Observação 3.2. Segue de **(H.2)(b)** e **(H.2)(c)** que

$$-\frac{\alpha}{8}|u|^2 \leq F(u) - \mu \leq f(u)u, \;\; u \in \mathbb{R}. \tag{3.11}$$

e

$$X_4 \hookrightarrow X_2 \hookrightarrow L^{2(\rho+1)}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega). \tag{3.12}$$

3.2 Boa Colocação Global

Nesta seção, provaremos a boa colocação global para o problema (3.10)-(3.2). Para isso, assim como no Capítulo 2, usaremos o método de Faedo-Galerkin, seguindo as ideias de [25]. Usaremos as seguintes definições de soluções.

Definição 3.3. Uma função $(u(t), u_t(t), \eta^t) \in C([0,T]; \mathscr{H})$ possuindo as propriedades $u(0) = u_0$, $u_t(0) = u_1$ e $\eta^0 = \eta_0$ é chamada

- *solução forte* para o problema (3.10)-(3.2) no intervalo $[0,T]$ se
  - $(u, u_t, \eta) \in L^\infty(0,T; \mathscr{H}_2)$, $u_{tt} \in L^\infty(0,T; X)$;
  - equação (3.10) é satisfeita em X para quase todo $t \in [0,T]$;
- *solução generalizada* para o problema (3.10)-(3.2) no intervalo $[0,T]$ se existe uma sequência de soluções fortes $\{(u_n(t), u_{tn}, \eta_n^t)\}$ para o problema (3.10)-(3.2) com dados iniciais $(u_{0n}, u_{1n}, \eta_{0n})$ ao invés de (u_0, u_1, η_0) tal que

$$\lim_{n\to\infty} \max_{t\in[0,T]} \|U^n(t) - U(t)\|_{\mathscr{H}} = 0.$$

Temos o seguinte resultado.

Teorema 3.4. *Suponha que as condições* **(H.1)**-**(H.4)** *estão satisfeitas. Então:*

(i) Se $(u_0, u_1, \eta_0) \in X_4 \times X_2 \times D(\mathscr{T})$*, então o problema* (3.10)-(3.2) *possui uma solução forte* (u, u_t, η) *satisfazendo*

$$(u, u_t, \eta) \in L^\infty(0,T; \mathscr{H}) \cap C([0,T]; \mathscr{H}) \quad e \quad u_{tt} \in L^\infty(0,T; X), \tag{3.13}$$

para todo $T > 0$.

(ii) Se $(u_0, u_1, \eta_0) \in \mathscr{H}$*, então o problema (3.10)-(3.2) possui solução generalizada* (u, u_t, η) *tal que* $(u, u_t\eta) \in C([0,T]; \mathscr{H})$.

(iii) Se $U^1 = (u^1(t), u_t^1(t), \eta^{1,t})$ *e* $U^2 = (u^2(t), u_t^2(t), \eta^{2,t})$ *são soluções fortes (ou generalizadas) de* (3.10)-(3.2) *correspondentes aos dados iniciais* $U_0^1 = (u_0^1, u_1^1, \eta_0^1)$ *e* $U_0^2 = (u_0^2, u_1^2, \eta_0^2)$*, respectivamente, então existe uma constante positiva* $C > 0$ *tal que*

$$\|U^1(t) - U^2(t)\|_{\mathscr{H}} \leq C\|U_0^1 - U_0^2\|_{\mathscr{H}}, \ \ t \in [0,T].$$

Além disso, sobre soluções, a energia dada em (3.4) *é não crescente. Mais precisamente, satisfaz a identidade*

$$E(u(t), u_t(t), \eta^t) + \gamma \int_\tau^t [E(u(\sigma), u_t(\sigma), \eta^\sigma)]^q \|\nabla u_t(\sigma)\|^2 d\sigma \leq E(u(\tau), u_t(\tau), \eta^\tau),$$

para todo $\tau \geq t \geq 0$.

A prova será feita em etapas. Parte dos cálculos são similares aos apresentados no Capítulo 2 e serão incluídos aqui por completude.

3.2.1 Etapa 1: Problema Aproximado

Seja $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma base de autofunções de Δ^2 com condições de fronteira (3.2) e $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma base ortonormal de $L^2_g(\mathbb{R}^+)$ contida em $\mathscr{D}(\mathbb{R}^+)$. Seguindo as ideias contidas em [16], obtemos uma base ortonormal $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ para $\mathscr{M}_2$ onde cada ξ_i pertence ao conjunto $\{l_k w_j : k,j=1,2,\ldots,n,\ldots\}$. Além disso, $\xi_i \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^+, X_2)$, para todo $i\in\mathbb{N}$.

Agora, para cada $m\in\mathbb{N}$, considere o subespaço de X_4 gerado pelos primeiros m elementos de $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$, ou seja,

$$U_m := [w_1,...,w_m] \subset X_4$$

e o subespaço de $\mathscr{M}_2$ gerado pelos primeiros m elementos de $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$, isto é,

$$V_m := [\xi_1,...,\xi_m] \subset \mathscr{M}_2.$$

Para cada $m\in\mathbb{N}$, construímos um par ordenado de funções $(u^m(t),\eta^{t,m}) \subset U_m\times V_m$,

$$u^m(t) = \sum_{j=1}^{m} y_{jm}(t)w_j \quad \text{e} \quad \eta^{t,m} = \sum_{j=1}^{m} z_{jm}(t)\xi_j, \quad t\in[0,t_m],$$

onde (y_{jm}, z_{jm}) é uma solução local em algum intervalo $[0,t_m]$ do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} (u^m_{tt}(t),w_j) + ((-\Delta)^{\theta}u^m(t),w_j) + l((-\Delta)^2u^m(t),w_j) - \gamma[E^m(t)]^q(\Delta u^m_t(t),w_j) \\ + \displaystyle\int_0^{\infty} g(s)((-\Delta)^2\eta^{t,m}(s),w_j)ds + (f(u^m(t)),w_j) = (h(x),w_j), \\ (\eta^{t,m}_t,\xi_j)_{\mathscr{M}_2} = (\mathscr{T}\eta^{t,m},\xi_j)_{\mathscr{M}_2} + (u^m_t(t),\xi_j)_{\mathscr{M}_2}, \\ u^m(0)=u^m_0, \quad u^m_t(0)=u^m_1, \quad \eta^{0,m}=\eta^m_0, \end{cases} \tag{3.14}$$

para $1\le j\le m$, onde $(u^m_0,u^m_1,\eta^m_0)\in X_4\times X_2\times D(\mathscr{T})$, $\eta^m_0=\xi^m_0$ para todo $m\in\mathbb{N}$, $\{\xi^m_0\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma sequência na base de $\mathscr{M}_2$ tal que

$$\xi^m_0 \to \eta_0 \quad \text{fortemente em} \quad \mathscr{M}_2$$

e

$$(\xi^m_0)' \to (\eta_0)' \quad \text{fortemente em} \quad \mathscr{M}_2. \tag{3.15}$$

Denote por $E^m(t)$ o funcional $E(u^m(t),u^m_t(t),\eta^{t,m})$ associado a (3.14) definido por

$$\begin{aligned} E(u^m(t),u^m_t(t),\eta^{t,m}) = {}& \frac{1}{2}[\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u^m(t)\|^2 + l\|\Delta u^m(t)\|^2 + \|u^m_t(t)\|^2 + \|\eta^{t,m}\|^2_{\mathscr{M}_2}] \\ & + \int_{\Omega}\left[F(u^m(t,x)) - h(x)u^m(t,x)\right]dx, \end{aligned} \tag{3.16}$$

onde l é dado por

$$l = 1 - \int_0^{\infty} g(\tau)d\tau.$$

A existência de solução local para o sistema (3.14) é garantida pelo Teorema de Caratheodory, a prova é feita de maneira análoga a feita no Capítulo 2.

3.2.2 Etapa 2: Uma Estimativa a Priori I

A primeira estimativa a priori nos permitirá estender a solução local obtida na Etapa 1, ao intervalo $[0,T]$, para todo $T>0$. Seja $(u_0^m, u_1^m, \eta_0^m) \in \mathscr{H}$ tal que

$$(u_0^m, u_1^m, \eta_0^m) \to (u_0, u_1, \eta_0) \quad \text{fortemente em} \quad \mathscr{H}. \tag{3.17}$$

Multiplicando a primeira equação de (3.14) por $y'_{jm}(t)$, usando a fórmula de Green e somando em j de 1 até m obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big[\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u^m\|^2 + l\|\Delta u^m\|^2 + \|u_t^m\|^2 + 2\int_\Omega [F(u^m(x)) - h(x)u^m(x)]dx\Big]\\ &= -\gamma[E(u^m(t), u_t^m(t), \eta^{t,m})]^q\|\nabla u_t^m\|^2 - (\eta^{t,m}, u_t^m(t))_{\mathscr{M}_2}.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Por outro lado, multiplicando a segunda equação de (3.14) por $z_{jm}(t)$ e somando em j de 1 até m, obtemos

$$(\eta_t^{t,m}, \eta^{t,m})_{\mathscr{M}_2} = (\mathscr{T}\eta^{t,m}, \eta^{t,m})_{\mathscr{M}_2} + (\eta^{t,m}, u_t^m(t))_{\mathscr{M}_2}. \tag{3.19}$$

Substituindo (3.18) em (3.19), obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big[\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u^m\|^2 + l\|\Delta u^m\|^2 + \|u_t^m\|^2 + 2\int_\Omega [F(u^m(x)) - h(x)u^m(x)]dx\Big] + (\eta_t^{t,m}, \eta^{t,m})_{\mathscr{M}_2}\\ &= -\gamma[E(u^m(t), u_t^m(t), \eta^{t,m})]^q\|\nabla u_t^m\|^2 + (\mathscr{T}\eta^{t,m}, \eta^{t,m})_{\mathscr{M}_2},\end{aligned}$$

observando que $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\eta^{t,m}\|^2_{\mathscr{M}_2} = (\eta_t^{t,m}, \eta^{t,m})_{\mathscr{M}_2}$ e como $(\mathscr{T}\eta^{t,m}, \eta^{t,m})_{\mathscr{M}_2} \le 0$, integrando de τ até t, $0 \le \tau \le t \le t_m$, temos que

$$\begin{aligned}&E(u^m(t), u_t^m(t), \eta^{t,m}) + \int_\tau^t [E(u^m(\sigma), u_t^m(\sigma), \eta^{t,m}(\sigma))]^q\|\nabla u_t^m(\sigma)\|^2 d\sigma\\ &-\int_\tau^t (\mathscr{T}\eta^{\sigma,m}, \eta^{\sigma,m})_{\mathscr{M}_2} d\sigma = E(u^m(\tau), u_t^m(\tau), \eta^{\tau,m}),\ \ t \in [0, t_m),\end{aligned} \tag{3.20}$$

em particular, tomando $\tau = 0$ em (3.20), obtemos

$$\begin{aligned}&E(u^m(t), u_t^m(t), \eta^{t,m}) + \int_0^t [E(u^m(\sigma), u_t^m(\sigma), \eta^{t,m}(\sigma))]^q\|\nabla u_t^m(\sigma)\|^2 d\sigma\\ &-\int_0^t (\mathscr{T}\eta^{\sigma,m}, \eta^{\sigma,m})_{\mathscr{M}_2} d\sigma = E(u_0^m, u_1^m, \eta_0^m),\ \ t \in [0, t_m),\end{aligned} \tag{3.21}$$

Agora, com um cálculo análogo ao feito em (2.20), porém, ajustando a desigualdade de Young com $\varepsilon = \frac{4}{\lambda_1}$, onde λ_1 é o primeiro autovalor do operador bi-harmônico com condições de contorno (3.2) e utilizando (2.5), temos

$$-\int_\Omega h(x)u^m(t,x)dx \ge -\frac{2}{\lambda_1}\|h\|^2 - \frac{1}{8}\|\Delta u^m(t)\|^2. \tag{3.22}$$

Por outro lado, usando (2.5) e (3.11), temos

$$\int_\Omega F(u^m(t,x))dx \ge -\frac{\alpha}{8\lambda_1}\|\Delta u^m(t)\|^2 + \mu|\Omega|. \tag{3.23}$$

Usando (3.16), (3.22), (3.23), (d) e **(H.3)**, segue que

$$\begin{aligned} E(u^m(t),u_t^m(t),\eta^{t,m}) &> \frac{1}{2}\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u^m(t)\|^2 + \Big(\frac{l}{2}-\frac{1}{8}-\frac{\alpha}{8\lambda_1}\Big)\|\Delta u^m(t)\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\|u_t^m(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|\eta^{t,m}\|^2_{\mathscr{M}_2} + \mu|\Omega| - \frac{2}{\lambda_1}\|h\|^2 \\ &\geq \mu|\Omega| - \frac{2}{\lambda_1}\|h\|^2 \\ &> 0. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Portanto,

$$E(u^m(t),u_t^m(t),\eta^{t,m}) \geq C_{l,\alpha,\lambda_1}\|(u^m(t),u_t^m(t),\eta^{t,m})\|^2_{\mathscr{H}}, \tag{3.25}$$

onde $C_{l,\alpha} = \frac{l}{2}-\frac{1}{8}-\frac{\alpha}{8\lambda_1} > 0$.

Substituindo (3.25) em (3.21), concluímos que

$$\begin{aligned} &\|(u^m(t),u_t^m(t),\eta^{t,m})\|^2_{\mathscr{H}} + \int_0^t E(u^m(\tau),u_t^m(\tau),\eta^{\tau,m})\|\nabla u_t^m(\tau)\|^2 d\tau \\ &\leq \frac{E(u_0^m,u_1^m,\eta_0^m)}{\min\{C_{l,\alpha,\lambda_1},\gamma\}}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Agora, devido as hipóteses **(H.2)(a)** e **(H.2)(b)** temos

$$|F(r)-F(s)| \leq 2C_{f_1}(1+|r|+|s|)^{\rho}(|r|+|s|)|r-s|, \quad \forall r,s\in\mathbb{R}, \tag{3.27}$$

então

$$\begin{aligned} &\Big|\int_\Omega [F(u_0^m(x))-F(u_0(x))]\,dx\Big| \leq \int_\Omega |F(u_0^m(x))-F(u_0(x))|\,dx \\ &\leq 2C_{f_1}\int_\Omega \big[1+|u_0^m(x)|+|u_0(x)|\big]^{\rho}\big[|u_0^m(x)|+|u_0(x)|\big]|u_0^m(x)-u_0(x)|\,dx \\ &\leq 2C_{f_1}\big[1+\|u_0^m\|_{2(\rho+1)}+\|u_0\|_{2(\rho+1)}\big]^{\rho}\big[\|u_0^m\|_{2(\rho+1)}+\|u_0\|_{2(\rho+1)}\big]\|u_0^m-u_0\|. \end{aligned}$$

Levando em consideração as imersões (3.12) e a convergência (3.17), concluímos que

$$E(u_0^m,u_1^m,\eta_0^m) \to E(u_0,u_1,\eta_0) \quad \text{quando} \quad m\to+\infty. \tag{3.28}$$

Observe que, de (2.11), (3.26) e (3.28)

$$\{(u^m,u_t^m,\eta^m)\}_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{é uniformemente limitado em} \quad L^\infty(0,T;\mathscr{H}) \tag{3.29}$$

e

$$\{u_t^m\} \quad \text{é uniformemente limitado em} \quad L^2(0,T;X_1) \tag{3.30}$$

para todo $T>0$, e, por (3.12) e (3.29) [ver [33]],

$$\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{é compacto em} \quad C([0,T];X).$$

Além disso, todas as relações de (3.20) a (3.26) são válidas para $[0,T]$.

3.2.3 Etapa 3: Estimativa a Priori II

Vamos considerar o problema aproximado (3.14) com condições iniciais $(u_0^m, u_1^m, \eta_0^m) \in X_4 \times X_2 \times D(\mathscr{T})$ tais que

$$(u_0^m, u_1^m, \eta_0^m) \to (u_0, u_1, \eta_0) \quad \text{fortemente em} \quad \mathscr{H}_2. \tag{3.31}$$

Seja $\upsilon^{t,m} = -\Delta\eta^{t,m}$. Então $\upsilon^{t,m} \in D(\mathscr{T})$ e

$$(\upsilon_t^{t,m}, \xi_j)_{\mathscr{M}_2} = (\mathscr{T}\upsilon^{t,m}, \xi_j)_{\mathscr{M}_2} - (\Delta u_t^m, \xi_j)_{\mathscr{M}_2} \tag{3.32}$$

para todo $j = 1, \dots, m$. Agora, multiplique (3.32) por $-\lambda_j^{\frac{1}{2}} z_{jm}(t)$ e então adicione as equações resultantes em j, $j = 1, \dots, m$. Este processo fornece a seguinte equação

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\eta^{t,m}\|_{\mathscr{M}_4}^2 = (\mathscr{T}\upsilon^{t,m}, \upsilon^{t,m})_{\mathscr{M}_2} + (\eta^{t,m}, u_t^m(t))_{\mathscr{M}_4}. \tag{3.33}$$

Na sequência, multiplicamos a primeira equação em (3.14) por $\lambda_j y'_{jm}(t)$ e a segunda equação por $\lambda_j z_{jm}(t)$ e então adicionamos as equações resultantes em j, $j = 1, \dots, m$, para obter

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}[\tilde{\Psi}^m(t)] + \gamma[E^m(t)]^q \|(-\Delta)^{\frac{3}{2}} u_t^m(t)\|^2 \\ &= (h, u_t^m(t))_{X_2} + (div\nabla f(u^m(t,x)), \Delta u^m(t)) - (\eta^{t,m}, u_t^m(t))_{\mathscr{M}_4}, \end{aligned} \tag{3.34}$$

onde

$$\tilde{\Psi}^m(t) = \frac{1}{2}\|\Delta u_t^m(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|(-\Delta)^{\frac{\theta+1}{2}} u^m(t)\|^2 + \frac{l}{2}\|\Delta^2 u^m(t)\|^2.$$

Usando (3.33) e (3.34) temos

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}[\Psi^m(t)] + \gamma[E^m(t)]^q \|(-\Delta)^{\frac{3}{2}} u_t^m(t)\|^2 \\ &= (h, u_t^m(t))_{X_2} + (div\nabla f(u^m(t,\cdot)), \Delta u^m(t)) + (\mathscr{T}\upsilon^{t,m}, \upsilon^{t,m})_{\mathscr{M}_2}, \end{aligned} \tag{3.35}$$

onde

$$\Psi^m(t) = \frac{1}{2}\|\Delta u_t^m(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|(-\Delta)^{\frac{\theta+1}{2}} u^m(t)\|^2 + \frac{l}{2}\|\Delta^2 u^m(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|\eta^{t,m}\|_{\mathscr{M}_4}^2.$$

Como

$$\begin{aligned} (div\nabla f(u^m(t,\cdot)), \Delta u^m(t)) &= \int_\Omega f''(u^m(t,x))|\nabla u^m(t,x)|^2 \Delta u^m(t,x)\, dx \\ &\quad + \int_\Omega f'(u^m(t,x))|\Delta u^m(t,x)|^2\, dx, \end{aligned}$$

segue de **(H.2)(b)**, (3.12) e (3.29) que

$$(div\nabla f(u^m(t,x)), \Delta u^m(t)) \leq C\Psi^m(t), \tag{3.36}$$

onde C é uma constante positiva independente de m e t.

Como $(\mathscr{T}\upsilon^{t,m}, \upsilon^{t,m})_{\mathscr{M}_2} \leq 0$, usando as desigualdades de Hölder e Young, (3.35) e (3.36), concluímos que

$$\frac{d}{dt}[\Psi^m(t)] + \gamma[E^m(t)]^q \|(-\Delta)^{\frac{3}{2}} u_t^m(t)\|^2 \leq C(1 + \Psi^m(t)),$$

onde C é uma constante positiva independente de m e t. Agora, segue do Lema de Gronwall que

$$\Psi^m(t)+\gamma\int_0^t [E^m(s)]^q\|(-\Delta)^{\frac{3}{2}}u_t^m(s)\|^2\,ds \le (1+\Psi^m(0))e^{CT}. \tag{3.37}$$

Além disso, de (3.31) e (3.37) concluímos que

$$\{(u^m,u_t^m,\eta^m)\}_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{é uniformemente limitado em} \quad L^\infty(0,T;\mathscr{H}_4) \tag{3.38}$$

e

$$\{u_t^m\}_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{é uniformemente limitado em} \quad L^2(0,T;X_{\frac{3}{4}})$$

para cada $T>0$. Então, por (3.12) e (3.38) [ver [33]],

$$\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{é compacto em} \quad C([0,T];X_2).$$

3.2.4 Etapa 4: Consequências das Etapas 1 e 2

De acordo com a Etapa 2, a sequência de soluções $\{(u^m,u_t^m,\eta^m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ do problema aproximado (3.14) é uniformemente limitada em $L^\infty(0,T;\mathscr{H}_2)$ quando consideramos os dados iniciais $\{(u_0^m,u_1^m,\eta_0^m)\}_{m\in\mathbb{N}}\subset X_4\times X_2\times D(\mathscr{T})$ satisfazendo (3.31). Sob as hipóteses **(H.2)(a)** e **(H.2)(b)**, obtemos para tais soluções (u^m,u_t^m,η^m),

$$\begin{aligned}
|(f(u^m(t,\cdot)),v)| &= \left|\int_\Omega f(u^m(t,x))v(x)\,dx\right| \\
&\le \int_\Omega |f(u^m(t,x))|\,|v(x)|\,dx \\
&\le C_{f_1}\int_\Omega (1+|u^m(t,x)|^\rho)\,|u^m(t,x)|\,|v(x)|\,dx \\
&\le C_{f_1}\|u^m(t)\|\,\|v\|+C_{f_1}\|u^m(t)\|_{2(\rho+1)}^\rho\|u^m(t)\|_{2(\rho+1)}\|v\| \\
&\le C_{f_1}\left(\|u^m(t)\|+\|u^m(t)\|_{2(\rho+1)}^{\rho+1}\right)\|v\| \\
&\le C\left(\|\Delta u^m(t)\|+\|\Delta u^m(t)\|^{\rho+1}\right)\|v\|,
\end{aligned} \tag{3.39}$$

para todo $v\in X$, onde C é uma constante positiva independente de m e t. De (3.29) e (3.39) obtemos que

$$\{f(u^m)\}_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{é uniformemente limitado em} \quad L^\infty(0,T;X). \tag{3.40}$$

Além disso, da desigualdade de Hölder, (3.21), (3.28) e (3.38),

$$\begin{gathered}
\left\{-\left[A^{\frac{\theta}{2}}+lAu^m+\gamma(E^m(t))^qA^{\frac{1}{2}}\right]u^m-A\eta^m+h\right\}_{m\in\mathbb{N}} \\
\text{é uniformemente limitado em} \quad L^\infty(0,T;X).
\end{gathered} \tag{3.41}$$

Portanto, de (3.40), (3.41) e da primeira equação em (3.14), segue que

$$\{u_{tt}^m\}_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{é uniformemente limitado em} \quad L^\infty(0,T;X),$$

que associado à (3.38) [ver [33]] nos permite concluir que

$$\{u_t^m\}_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{é compacto em} \quad C([0,T];X_2).$$

Agora, diferenciando em relação à t a primeira equação em (3.14), obtemos

$$\begin{aligned}(u_{ttt}^m(t),w_j) = &-((-\Delta)^\theta u_t^m(t),w_j)+l(\Delta u_t^m(t),\lambda_j^{\frac{1}{2}}w_j)+\gamma[E^m(t)]^q(\Delta u_{tt}^m(t),w_j)\\ &+\gamma q[E^m(t)]^{q-1}(E^m)'(t)(\Delta u_t^m(t),w_j)+(\Delta\eta_t^{t,m},\lambda_j^{\frac{1}{2}}w_j)_{\mathscr{M}_2}\\ &-(f'(u^m(t,\cdot))u_t^m(t),w_j),\end{aligned} \tag{3.42}$$

para todo $j=1,\dots,m$, onde $(E^m)'(t)$ denota a derivada em relação à t do funcional $E(u^m(t),u_t^m(t),\eta^{t,m})$ dado em (3.18). Assim, de (3.18) e (3.42)

$$\begin{aligned}(u_{ttt}^m(t),w_j) = &-((-\Delta)^\theta u_t^m(t),w_j)+l(\Delta u_t^m(t),\lambda_j^{\frac{1}{2}}w_j)\\ &+\gamma[E^m(t)]^q(\Delta u_{tt}^m(t),w_j)-\gamma^2q[E^m(t)]^{2q-1}\|\nabla u_t^m(t)\|^2(\Delta u_t^m(t),w_j)\\ &+\gamma q[E^m(t)]^{q-1}(\mathscr{T}\eta^{t,m},\eta^{t,m})_{\mathscr{M}_2}(\Delta u_t^m(t),w_j)+(\Delta\eta_t^{t,m},\lambda_j^{\frac{1}{2}}w_j)_{\mathscr{M}_2}\\ &-(f'(u^m(t,\cdot))u_t^m(t),w_j),\end{aligned} \tag{3.43}$$

para todo $j=1,\dots,m$.

De acordo com [12], segue que

$$\eta^{t,m}(s)=\begin{cases}u^m(t)-u^m(t-s),\ 0\le s\le t;\\ u^m(t)+\xi_0^m(s-t)-u_0^m,\ s>t.\end{cases} \tag{3.44}$$

Conectando (3.38) e (3.44), obtemos que

$$\begin{aligned}&\{\eta_t^m\}_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{é uniformemente limitado em} \quad L^\infty(0,T;\mathscr{M}_2),\\ &\{\eta_t^m\}_{m\in\mathbb{N}}\subset C([0,T];\mathscr{M}_2).\end{aligned} \tag{3.45}$$

Na sequência, estabelecemos uma estimativa para $|(\mathscr{T}\eta^{t,m},\eta^{t,m})_{\mathscr{M}_2}|$. Como $\|(I+\mathscr{T})\eta^{t,m}\|^2_{\mathscr{M}_2}\ge 0$ obtemos que

$$(-\mathscr{T}\eta^{t,m},\eta^{t,m})_{\mathscr{M}_2}\le\frac{1}{2}\|\eta^{t,m}\|^2_{\mathscr{M}_2}+\frac{1}{2}\|\mathscr{T}\eta^{t,m}\|^2_{\mathscr{M}_2}, \quad \forall m\in\mathbb{N},,\forall t\ge 0. \tag{3.46}$$

Segue que

$$\begin{aligned}\|\mathscr{T}\eta^{t,m}\|^2_{\mathscr{M}_2} &= \int_0^\infty g(s)\|\mathscr{T}\eta^{t,m}(s)\|^2_{X_2}\,ds\\ &=\int_0^t g(s)\|\mathscr{T}\eta^{t,m}(s)\|^2_{X_2}\,ds+\int_t^\infty g(s)\|\mathscr{T}\eta^{t,m}(s)\|^2_{X_2}\,ds\\ &=\int_0^t g(s)\|u_t^m(t-s)\|^2_{X_2}\,ds+\int_t^\infty g(s)\|(\xi_0^m)'(s-t)\|^2_{X_2}\,ds\\ &\le C+\|(\xi_0^m)'\|^2_{\mathscr{M}_2},\end{aligned} \tag{3.47}$$

onde C é uma constante positiva independente de m e t. Para todo $t\ge 0$, segue de (3.15), (3.38), (3.46) e (3.47),

$$|(\mathscr{T}\eta^{t,m},\eta^{t,m})_{\mathscr{M}_2}|\le C, \quad \forall m\in\mathbb{N}, \tag{3.48}$$

onde C é uma constante positiva independente de m e t.

Portanto, usando **(H.2)(b)**, (3.26), (3.28), (3.38), (3.43), (3.45) e (3.48), concluímos que

$$\{u_{ttt}^m\}_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{é uniformemente limitado em} \quad L^\infty(0,T;X_2'). \tag{3.49}$$

Segue de (3.38) e (3.49) [ver [33]], que

$$\{u_{tt}^m\}_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{é compacto em} \quad C([0,T];X). \tag{3.50}$$

3.2.5 Etapa 5: Passagem ao limite

Considerando os cálculos das Etapas 3 e 4 numerados de (3.31) a (3.50) e usando, se necessário, subsequências de $\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}}$, que ainda denotamos por $\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}}$, existe u tal que

$$u^m \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;X_4), \tag{3.51}$$

$$u_t^m \overset{*}{\rightharpoonup} u_t \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;X_2), \tag{3.52}$$

$$u_{tt}^m \overset{*}{\rightharpoonup} u_{tt} \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;X), \tag{3.53}$$

$$u_{ttt}^m \overset{*}{\rightharpoonup} u_{ttt} \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;X_2'), \tag{3.54}$$

$$\eta^m \overset{*}{\rightharpoonup} \eta \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;\mathscr{M}_4), \tag{3.55}$$

e

$$\eta_t^m \overset{*}{\rightharpoonup} \eta_t \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;\mathscr{M}_2), \tag{3.56}$$

Agora, observe que as imersões $X_4 \hookrightarrow X_2 \hookrightarrow X$ são compactas. Portanto, de (3.51)-(3.56),

$$u^m \to u \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;X_2), \tag{3.57}$$

$$u^m \to u \quad \text{em} \quad C([0,T];X_2), \tag{3.58}$$

$$u_t^m \to u_t \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;X), \tag{3.59}$$

$$u_t^m \to u_t \quad \text{em} \quad C([0,T];X), \tag{3.60}$$

$$\eta^m \to \eta \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;\mathscr{M}_2), \tag{3.61}$$

e

$$\eta^m \to \eta \quad \text{em} \quad C([0,T];\mathscr{M}_2). \tag{3.62}$$

Além disso, usando (3.58), (3.62) e (3.44), temos

$$\eta(s) = \eta^t(s) = \begin{cases} u(t) - u(t-s), \ 0 \le s \le t; \\ u(t) - \varphi(s-t), \ s > t. \end{cases}$$

Segue de **(H.2)(a)**, **(H.2)(b)** e (3.58) que

$$f(u^m) \to f(u) \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;X_2). \tag{3.63}$$

Finalmente, segue de (3.14) e (3.51)-(3.63) que

$$\begin{cases} u_{tt} + A^{\frac{\theta}{2}} u + lAu + \gamma \Big[E(u, u_t, \eta) \Big]^q A^{\frac{1}{2}} u_t + \displaystyle\int_0^\infty g(s) A\eta(s) ds \\ + f(u) = h(x) \quad [\text{em} \quad L^\infty(0,T;X)], \\ \eta_t = \mathscr{T}\eta + u_t \quad [\text{em} \quad L^\infty(0,T;\mathscr{M}_2)], \\ u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1, \quad \eta^0 = \eta_0. \end{cases}$$

3.2.6 Etapa 6: Existência de soluções generalizadas

Considere $U_0 \in \mathscr{H}$. Usando a imersão compacta de $X_4 \times X_2 \times D(\mathscr{T})$ em $\mathscr{H}$, existe uma sequência de dados iniciais$\{U_0^\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} = (u_0^\nu, u_1^\nu, \eta_0^\nu) \in X_4 \times X_2 \times D(\mathscr{T})$, tal que

$$\|U_0^\nu - U_0\|_{\mathscr{H}} \to 0, \quad \text{quando} \quad \nu \to +\infty, \tag{3.64}$$

para cada $\nu \in \mathbb{N}$, pelo Teorema 3.4(i), existe uma solução forte $(u^\nu, u_t^\nu, \eta^\nu)$ do problema (3.1)-(3.2) na classe (3.13) satisfazendo

$$\begin{cases} u_{tt}^\nu + A^{\frac{\theta}{2}} u^\nu + lAu^\nu - \gamma \Big[E(u^\nu, u_t^\nu, \eta^\nu) \Big]^q A^{\frac{1}{2}} u_t^\nu + \displaystyle\int_0^\infty g(s) A\eta^\nu(s) ds + f(u^\nu) = h(x), \quad t > 0, \\ \eta_t^\nu = \mathscr{T}\eta^\nu + u_t^\nu, \\ u^\nu(0,x) \to u_0(x) \in X_2, \quad u_t^\nu(0,x) \to u_1(x) \in X, \quad x \in \Omega, \\ \eta^{0,\nu}(s,x) \to \eta_0(s,x) \in \mathscr{M}_2, \qquad (s,x) \in [0,+\infty) \times \Omega, \end{cases}$$

onde $\eta_0(s,x) = u_0(x) - \varphi(s,x)$. Agora, sejam $U^\nu = (u^\nu, u_t^\nu, \eta^\nu)$ e $U^\sigma = (u^\sigma, u_t^\sigma, \eta^\sigma)$ duas soluções da equação acima, definindo

$$w_0 = u_0^\nu - u_0^\sigma, \quad w_1 = u_1^\nu - u_1^\sigma \quad \text{e} \quad \upsilon_0 = \eta_0^\nu - \eta_0^\sigma,$$

e

$$w = u^\nu - u^\sigma, \quad w_t = u_t^\nu - u_t^\sigma \quad \text{e} \quad \upsilon = \eta^\nu - \eta^\sigma,$$

obtemos que $U^\nu - U^\sigma = (w, w_t, \upsilon)$ é uma solução do problema

$$\begin{cases} w_{tt}(t) + A^{\frac{\theta}{2}} w(t) + lAw(t) + \gamma [E(u^\nu(t), u_t^\nu(t), \eta^{\nu,t})]^q A^{\frac{1}{2}} w_t(t) \\ + \gamma \Pi(t) A^{\frac{1}{2}} u_t^\sigma(t) + \displaystyle\int_0^\infty g(s) A\upsilon^t(s) ds + f(u^\nu(t)) - f(u^\sigma(t)) = 0, \\ \upsilon_t^t = \mathscr{T}\upsilon^t + w_t, \\ w(0) = w_0, \quad w_t(0) = w_1, \quad \upsilon^0 = \upsilon_0, \end{cases} \tag{3.65}$$

onde

$$\Pi(t) = [E(u^\nu(t), u_t^\nu(t), \eta^{\nu,t})]^q - [E(u^\sigma(t), u_t^\sigma(t), \eta^{\sigma,t})]^q.$$

A primeira equação do problema (3.65) fornece a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} &(w_{tt}(t), w_t(t)) + (A^{\frac{\theta}{2}} w(t), w_t(t)) + l(Aw(t), w_t(t)) \\ &+ \gamma [E(u^\nu(t), u_t^\nu(t), \eta^{\nu,t})]^q (A^{\frac{1}{2}} w_t(t), w_t(t)) \\ &= J_1(t) + J_2(t) - (\upsilon^t, w_t(t))_{\mathscr{M}_2}, \end{aligned} \tag{3.66}$$

onde

$$J_1(t) = \int_\Omega [f(u^\sigma(t,x)) - f(u^\nu(t,x))]w_t(t,x)\,dx,$$
$$J_2(t) = \gamma\Pi(t)\int_\Omega \Delta u_t^\sigma(t,x)w_t(t,x)\,dx.$$

Note que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}w(t)\|^2 + l\|\Delta w(t)\|^2 + \|w_t(t)\|^2\right] + \gamma[E(u^\nu(t),u_t^\nu(t),\eta^{\nu,t})]^q\|\nabla w_t(t)\|^2\\ &= J_1(t)+J_2(t) - (\upsilon^t, w_t(t))_{\mathscr{M}_2},\end{aligned} \tag{3.67}$$

onde usamos (3.66). A segunda equação em (3.65) fornece

$$(\upsilon_t^t,\upsilon^t)_{\mathscr{M}_2} = (\mathscr{T}\upsilon^t,\upsilon^t)_{\mathscr{M}_2} + (\upsilon^t, w_t(t))_{\mathscr{M}_2},$$

isto é,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\|\upsilon^t\|^2_{\mathscr{M}_2}] = (\mathscr{T}\upsilon^t,\upsilon^t)_{\mathscr{M}_2} + (\upsilon^t, w_t(t))_{\mathscr{M}_2}. \tag{3.68}$$

Usando (3.67) e (3.68) temos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}w(t)\|^2 + l\|\Delta w(t)\|^2 + \|w_t(t)\|^2 + \|\upsilon^t\|^2_{\mathscr{M}_2}\right]\\ &+\gamma[E(u^\nu(t),u_t^\nu(t),\eta^{\nu,t})]^q\|\nabla w_t(t)\|^2 = J_1(t)+J_2(t)+(\mathscr{T}\upsilon^t,\upsilon^t)_{\mathscr{M}_2}.\end{aligned} \tag{3.69}$$

Como $(\mathscr{T}\upsilon^t,\upsilon^t)_{\mathscr{M}_2} \le 0$, segue de (3.69) que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}w(t)\|^2 + l\|\Delta w(t)\|^2 + \|w_t(t)\|^2 + \|\upsilon^t\|^2_{\mathscr{M}_2}\right]\\ &+C\|\nabla w_t(t)\|^2 \le J_1(t)+J_2(t),\end{aligned} \tag{3.70}$$

onde $C>0$ é uma constante independente de t.

Vamos estimar os termos $J_1(t)$ e $J_2(t)$ em (3.70). Lembre que

$$|f(r)-f(s)| \le 2C_{f_1}(1+|r|+|s|)^\rho|r-s|, \quad \forall r,s\in\mathbb{R}. \tag{3.71}$$

Como $l \ge \frac{1}{2}$, usando (3.71) e as desigualdades de Hölder e Young, obtemos

$$\begin{aligned}|J_1(t)| &\le 2C_{f_1}\int_\Omega (1+|u^\nu(t,x)|+|u^\sigma(t,x)|)^\rho\,|w(t,x)|\,|w_t(t,x)|\,dx\\ &\le 2C_{f_1}\|1+|u^\nu(t)|+|u^\sigma(t)|\|^\rho_{2(\rho+1)}\|w(t)\|_{2(\rho+1)}\|w_t(t)\|\\ &\le C\|\Delta w(t)\|\|w_t(t)\|\\ &\le C(l\|\Delta w(t)\|^2 + \|w_t(t)\|^2),\end{aligned} \tag{3.72}$$

onde C é uma constante positiva independente de t. Agora, vamos estimar o termo $J_2(t)$. O Teorema do Valor Médio, (3.21), (2.11) e (3.27), resulta que

$$\begin{aligned}|\Pi(t)| &\le qM^{q-1}|E(u^\nu(t),u_t^\nu(t),\eta^{\nu,t}) - E(u^\sigma(t),u_t^\sigma(t),\eta^{\sigma,t})|\\ &\le C|E(u^\nu(t),u_t^\nu(t),\eta^{\nu,t}) - E(u^\sigma(t),u_t^\sigma(t),\eta^{\sigma,t})|\\ &\le C\big(\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}w(t)\| + l\|\Delta w(t)\| + \|w_t(t)\| + \|\upsilon^t\|_{\mathscr{M}_2}\big)\\ &\le C\big(l\|\Delta w(t)\| + \|w_t(t)\| + \|\upsilon^t\|_{\mathscr{M}_2}\big),\end{aligned} \tag{3.73}$$

onde C é uma constante positiva que não depende de t, $M = (\mu|\Omega| - \frac{2}{\lambda_1}\|h\|^2)^{-1}$ se $q < 1$ ou $M = \max\{E(u_0^\nu, u_1^\nu, \eta_0^\nu), E(u_0^\sigma, u_1^\sigma, \eta_0^\sigma)\}$ se $q \geq 1$. Logo,

$$\begin{aligned}|J_2(t)| &\leq \gamma|\Pi(t)| \int_\Omega |\Delta u_t^\sigma(t)|\,|w_t(t)|\,dx \\ &\leq C\big(l\|\Delta w(t)\| + \|w_t(t)\| + \|\upsilon^t\|_{\mathcal{M}_2}\big)\|\nabla u_t^\sigma(t)\|\|\nabla w_t(t)\| \\ &\leq C\|\nabla u_t^\sigma(t)\|^2\big(l\|\Delta w(t)\| + \|w_t(t)\| + \|\upsilon^t\|_{\mathcal{M}_2}\big) + \varepsilon\|\nabla w_t(t)\|,\end{aligned} \tag{3.74}$$

onde C é uma constante positiva independente de t.

Consequentemente, de (3.70), (3.72) e (3.74),

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big[\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}w(t)\|^2 + l\|\Delta w(t)\|^2 + \|w_t(t)\|^2 + \|\upsilon^t\|_{\mathcal{M}_2}^2\Big] + C_\varepsilon\|\nabla w_t(t)\|^2 \\ &\leq C(1 + \|\nabla u_t^\sigma(t)\|^2)\big(l\|\Delta w(t)\|^2 + \|w_t(t)\|^2 + \|\upsilon^t\|_{\mathcal{M}_2}^2\big).\end{aligned} \tag{3.75}$$

Portanto, usando o Lema de Gronwall e a limitação (3.30) obtemos

$$\|U^\nu(t) - U^\sigma(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_1 e^{\int_0^t (1+\|\nabla u_t^\sigma(s)\|^2)ds}\|U_0^\nu - U_0^\sigma\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C\|U_0^\nu - U_0^\sigma\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall t \in [0,T],$$

onde C e C_1 são constantes positivas independentes de t. Usando a convergência (3.64) resulta que

$$\|U^\nu(t) - U^\sigma(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C\|U_0^\nu - U_0^\sigma\|_{\mathcal{H}}^2 \to 0, \quad \text{quando} \quad \nu, \sigma \to +\infty. \tag{3.76}$$

Isto prova que $\{U^\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $C([0,T];\mathcal{H})$ tal que $U^\nu \to U$ em $C([0,T];\mathcal{H})$, isto é

$$\lim_{\nu\to+\infty} \max_{\tau\in[0,T]} \|U^\nu(\tau) - U(\tau)\|_{\mathcal{H}}^2 = 0. \tag{3.77}$$

Segue de (3.77) que $U^\nu(0) \to U(0)$ em $\mathcal{H}$, logo

$$U(0) = (u(0), u_t(0), \eta^0) = (u_0, u_1, \eta_0).$$

O que mostra que U é uma solução generalizada para o problema (3.1)-(3.2). Portanto fica provado o item (ii) do Teorema 3.4.

3.2.7 Dependência Contínua em Relação aos Dados Iniciais e Unicidade

Sejam U^1 e U^2 duas soluções fortes (ou generalizadas) do problema (3.1)-(3.2) com dados iniciais $U^1(0) = (u^1(0), u_t^1(0), \eta^{0,1}) = (u_0^1, u_1^1, \eta_0^1)$ e $U^2(0) = (u^2(0), u_t^2(0), \eta^{0,2}) = (u_0^2, u_1^2, \eta_0^2)$, respectivamente, e seja $w = u^1 - u^2$ e $\upsilon = \eta^1 - \eta^2$. Procedendo analogamente como na prova do item (ii) do Teorema 3.4, usando u^1 no lugar de u^ν, u^2 no lugar de u^σ, η^1 no lugar de η^ν e η^2 no lugar de η^σ, obtemos a seguinte desigualdade, similar a desigualdade (2.65)

$$||U^1(t) - U^2(t)||_{\mathcal{H}}^2 \leq Ce^{Kt}||U^1(0) - U^2(0)||_{\mathcal{H}}^2$$

que mostra que as soluções dependem continuamente dos dados iniciais. Em particular, para $U_0^1 = U_0^2$, o problema (2.1)-(2.4) possui uma única solução forte (ou generalizada). O que encerra a prova do Teorema 3.4. □

3.3 Existência de Atrator Global

Na presente seção, usando o Teorema 1.47 mostraremos a existência de atrator global associado ao problema (3.1) em $\mathscr{H}$. Considerando o Teorema 3.4, onde obtemos a boa colocação do problema, podemos definir um C_0-semigrupo $S(t) : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$.

Seja $S(t) : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ o C_0-semigrupo associado à solução do problema (3.10) com dados iniciais $(u_0, u_1, \eta_0) \in \mathscr{H}$, ou seja, para cada $t \geq 0$,

$$S(t)(u_0, u_1, \eta_0) = (u(t), u_t(t), \eta^t). \tag{3.78}$$

3.3.1 Existência de um Conjunto Absorvente Limitado

Nesta subseção iremos mostrar a existência de um conjunto absorvente para o C_0-semigrupo $S(t)$. Para isso, denotemos

$$E(t) = E(u(t), u_t(t), \eta^t), \quad \forall t \geq 0.$$

Usando (3.10) não é difícil ver que

$$\frac{d}{dt}E(t) + \gamma[E(t)]^q \|\nabla u_t(t)\|^2 = (\mathscr{T}\eta^t, \eta^t)_{\mathscr{M}_2}. \tag{3.79}$$

Além disso, notemos que

$$\begin{aligned}
-(\mathscr{T}\eta^t, \eta^t)_{\mathscr{M}_2} &= (\partial_s \eta^t, \eta^t)_{\mathscr{M}_2} \\
&= \int_0^\infty g(s)(\partial_s(\Delta\eta^t(s)), \Delta\eta^t(s))ds \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty \partial_s[g(s)\|\Delta\eta^t(s)\|^2]ds - \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\|\Delta\eta^t(s)\|^2 ds \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\|\Delta\eta^t(s)\|^2 ds \\
&\geq \frac{\alpha}{2}\int_0^\infty g(s)\|\Delta\eta^t(s)\|^2 ds \\
&= \frac{\alpha}{2}\|\eta^t\|^2_{\mathscr{M}_2},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$(\mathscr{T}\eta^t, \eta^t)_{\mathscr{M}_2} \leq -\frac{\alpha}{2}\|\eta^t\|^2_{\mathscr{M}_2}. \tag{3.80}$$

Portanto, substituindo (3.80) em (3.79), obtemos

$$\frac{d}{dt}E(t) + \gamma[E(t)]^q \|\nabla u_t(t)\|^2 \leq -\frac{\alpha}{2}\|\eta^t\|^2_{\mathscr{M}_2}. \tag{3.81}$$

Com essas informações estamos em condições de enunciar e provar o seguinte lema.

Lema 3.5. *Seja $S(t)$ o C_0-semigrupo definido em (3.78). Então, $(\mathscr{H}, S(t))$ possui um conjunto absorvente limitado.*

Demonstração. De fato, defina o funcional

$$E_\varepsilon(t) = E(t) + \varepsilon\Psi(t) \quad \text{onde} \quad \Psi(t) = \int_\Omega u(t)u_t(t)dx,$$

Derivando E_ε em relação a t e usando (3.81), encontramos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E_\varepsilon(t) &= \frac{d}{dt}E(t) + \varepsilon\int_\Omega u_{tt}udx + \varepsilon\|u_t\|^2 \\
&\leq -\gamma E(t)^q\|\nabla u_t\|^2 - \varepsilon\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u\|^2 - \varepsilon l\|\Delta u\|^2 + \varepsilon\gamma E(t)^q\int_\Omega \Delta u_t u dx - \varepsilon\int_\Omega f(u)udx \\
&\quad + \varepsilon\int_\Omega hudx + \varepsilon\|u_t\|^2 - \varepsilon(\eta,u)_{\mathscr{M}_2} - \frac{\alpha}{2}\|\eta\|^2_{\mathscr{M}_2} \\
&\leq -\varepsilon E(t) - \gamma E(t)^q\|\nabla u_t\|^2 - \frac{\varepsilon}{2}\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u\|^2 - \frac{\varepsilon l}{2}\|\Delta u\|^2 + \varepsilon\gamma E(t)^q\int_\Omega \Delta u_t u dx \\
&\quad + \varepsilon\int_\Omega (F(u) - f(u)u)dx + \frac{3}{2}\varepsilon\|u_t\|^2 - \varepsilon(\eta,u)_{\mathscr{M}_2} + \frac{\varepsilon}{2}\|\eta\|^2_{\mathscr{M}_2} - \frac{\alpha}{2}\|\eta\|^2_{\mathscr{M}_2},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}E_\varepsilon(t) + \varepsilon E(t) + \gamma E(t)^q\|\nabla u_t\|^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u\|^2 + \frac{\varepsilon l}{2}\|\Delta u\|^2 + \frac{\alpha}{2}\|\eta\|^2_{\mathscr{M}_2} \\
&\leq \mathbb{I}_1 + \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_3 + \frac{3}{2}\varepsilon\|u_t\|^2,
\end{aligned} \tag{3.82}$$

onde

$$\mathbb{I}_1 = \varepsilon\int_\Omega (F(u) - f(u)u)dx,$$

$$\mathbb{I}_2 = -\varepsilon\gamma E(t)^q\int_\Omega \nabla u_t \nabla u dx$$

e

$$\mathbb{I}_3 = -\varepsilon(\eta,u)_{\mathscr{M}_2} + \frac{\varepsilon}{2}\|\eta\|^2_{\mathscr{M}_2}.$$

Vamos estimar os termos do lado direito de (3.82). De fato, usando (3.11), temos que

$$\mathbb{I}_1 \leq \varepsilon\mu|\Omega|. \tag{3.83}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_2 &\leq \varepsilon\gamma E(t)^q\|\nabla u_t\|\|\nabla u\| \\
&\leq \frac{\gamma}{2}E(t)^q\|\nabla u_t\|^2 + \frac{\varepsilon^2\gamma}{2}E(t)^q\|\nabla u\|^2 \\
&\leq \frac{\gamma}{2}E(t)^q\|\nabla u_t\|^2 + \frac{\varepsilon^2\gamma}{2\lambda_1}E(0)^q\|\Delta u\|^2.
\end{aligned} \tag{3.84}$$

Mais ainda, utilizando a desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_3 &\leq \varepsilon\int_0^\infty g(s)\big(\frac{1}{2}\|\Delta\eta(s)\|^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u(t)\|^2\big)ds + \frac{\varepsilon}{2}\|\eta\|^2_{\mathscr{M}_2} \\
&= \varepsilon\|\Delta u\|^2\int_0^\infty g(s)ds + \varepsilon\frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)\|\Delta\eta(s)\|^2 ds + \frac{\varepsilon}{2}\|\eta\|^2_{\mathscr{M}_2} \\
&\leq \varepsilon\frac{1}{4}\|\Delta u\|^2 + \varepsilon\|\eta\|^2_{\mathscr{M}_2}.
\end{aligned} \tag{3.85}$$

Substituindo (3.83), (3.84) e (3.85) em (3.82), obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}E_\varepsilon(t)+\varepsilon E(t)+\frac{\gamma}{2}E(t)^q\|\nabla u_t\|^2+\frac{\varepsilon}{2}\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u\|^2+\frac{1}{2}(l-\frac{\varepsilon\gamma}{\lambda_1}E(0)^q-\frac{\varepsilon}{4})\|\Delta u\|^2\\&+\big(\frac{\alpha}{2}-\varepsilon\big)\|\eta\|^2_{\mathscr{M}_2}\leq\varepsilon\mu|\Omega|+\frac{3}{2}\varepsilon\|u_t\|^2.\end{aligned}\tag{3.86}$$

Além disso, temos de (3.86) que

$$\frac{\gamma}{2}E(t)^q\|\nabla u_t\|^2\geq C_\mu\|\nabla u_t\|^2\geq\tilde{C}_\mu\|u_t\|^2,$$

substituindo em (3.86), temos

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}E_\varepsilon(t)+\varepsilon E(t)+(\tilde{C}_\mu-\frac{3}{2}\varepsilon)\|u_t\|^2+\frac{\varepsilon}{2}\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u\|^2+\frac{1}{2}(1-\frac{\varepsilon\gamma}{\lambda_1}E(0)^q-\frac{\varepsilon}{4})\|\Delta u\|^2\\&+\big(\frac{\alpha}{2}-\varepsilon\big)\|\eta\|^2_{\mathscr{M}_2}\leq\varepsilon\mu|\Omega|.\end{aligned}\tag{3.87}$$

Escolhendo $\varepsilon>0$ em (3.87) de maneira que

$$(\tilde{C}_\mu-\frac{3}{2}\varepsilon)\geq 0,\quad (1-\frac{\varepsilon\gamma}{\lambda_1}E(0)^q-\frac{\varepsilon}{4})\geq 0\quad \text{e}\quad (\frac{\alpha}{2}-\varepsilon)\geq 0,$$

obtemos

$$\frac{d}{dt}E_\varepsilon(t)+\varepsilon E(t)\leq\varepsilon\mu|\Omega|.\tag{3.88}$$

Utilizando a desigualdade de Young, a imersão $X_2\hookrightarrow X$ e (3.25), temos

$$|E_\varepsilon(t)-E(t)|\leq\varepsilon\|u_t\|\|u\|\leq\frac{\varepsilon}{\lambda_1^{\frac{1}{2}}}C_0E(t),$$

o que implica que

$$-\varepsilon CE(t)+E(t)\leq E_\varepsilon(t)\leq\varepsilon CE(t)+E(t),$$

escolhendo $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno, obtemos

$$\frac{1}{2}E(t)\leq E_\varepsilon(t)\leq\frac{3}{2}E(t).\tag{3.89}$$

Substituindo (3.89) em (3.88), temos

$$\frac{d}{dt}E_\varepsilon(t)+\frac{2\varepsilon}{3}E_\varepsilon(t)\leq\varepsilon\mu|\Omega|.\tag{3.90}$$

Multiplicando (3.90) pelo fator integrante $e^{\frac{2\varepsilon}{3}t}$, obtemos

$$\frac{d}{dt}(E_\varepsilon(t)e^{\frac{2\varepsilon}{3}t})\leq\varepsilon\mu|\Omega|e^{\frac{2\varepsilon}{3}t},$$

integrando de 0 a t, obtemos

$$E_\varepsilon(t)e^{\frac{2\varepsilon}{3}t}-E_\varepsilon(0)\leq\varepsilon\mu|\Omega|\int_0^t e^{\frac{2\varepsilon}{3}s}ds=\frac{3}{2}\mu|\Omega|e^{\frac{2\varepsilon}{3}t},$$

portanto, temos

$$E_\varepsilon(t)\leq e^{-\frac{2\varepsilon}{3}t}E_\varepsilon(0)+\frac{3}{2}\mu|\Omega|,$$

usando novamente (2.75), obtemos

$$E(t)\leq 2e^{\frac{-\varepsilon}{3}t}E(0)+3\mu|\Omega|.\tag{3.91}$$

De (3.91), podemos tomar $R>2(3\mu|\Omega|)^{\frac{1}{2}}$ e concluímos que a bola centrada em 0 e raio R contida em $\mathscr{H}$, isto é, $B(0;R)\subset\mathscr{H}$ é um conjunto absorvente. $\square$

3.3.2 Compacidade Assintótica

Nesta subseção mostraremos que o C_0-semigrupo definido em (3.78) possui um atrator global em $\mathscr{H}$. Para tanto, estabelecemos o seguinte resultado.

Lema 3.6. *Seja B um conjunto invariante limitado em $\mathscr{H}$ e $z, \tilde{z} \in B$, ou seja,*

$$z = (u_0, u_1, \eta_0) \quad e \quad \tilde{z} = (\tilde{u_0}, \tilde{u_1}, \tilde{\eta_0}).$$

Então, existem constantes $\sigma > 0$ e $C_B > 0$, ambas independentes de t, tais que

$$\|S(t)z - S(t)\tilde{z}\|^2_{\mathscr{H}} \leq C_B e^{-\sigma t} + C_B \int_0^t e^{-\sigma(t-\tau)}(\|\nabla w\|^2 + \|w\|^2_{2(\rho+1)})d\tau,$$

onde (u, u_t, η) e $(\tilde{u}, \tilde{u}_t, \tilde{\eta})$ são soluções de (3.10) associadas aos dados iniciais z e $\tilde{z}$, respectivamente, $w = u - \tilde{u}$ e $\upsilon = \eta - \tilde{\eta}$.

Demonstração. Seja

$$\Pi(t) = [E(u(t), u_t(t), \eta^t)]^q - [E(\tilde{u}(t), \tilde{u}_t(t), \tilde{\eta}^t)]^q, \quad \forall t \geq 0.$$

Então, (w, w_t, υ^t) é uma solução para o seguinte problema:

$$\begin{cases} w_{tt}(t) + (-\Delta)^{\theta} w(t) + l\Delta^2 w(t) + \gamma[E(u(t), u_t(t), \eta^t)]^q \Delta w_t(t) \\ \quad + \gamma\Pi(t)\Delta\tilde{u}_t(t) + \displaystyle\int_0^{\infty} g(s)\Delta^2 \upsilon^t(s)ds + f(u(t)) - f(\tilde{u}(t)) = 0, \\ \upsilon_t = \mathscr{T}\upsilon + w_t \\ w(0) = w_0, \quad w_t(0) = w_1, \quad \upsilon^0 = \upsilon_0, \end{cases}$$

onde

$$w_0 = u(0) - \tilde{u}(0), \quad w_1 = u_t(0) - \tilde{u}_t(0) \quad \text{e} \quad \upsilon_0 = \eta^0 - \tilde{\eta}^0.$$

Agora, seja $Z(t)$ o funcional definido por

$$Z(t) = \frac{1}{2}\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}} w(t)\|^2 + \frac{l}{2}\|\Delta w(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|\upsilon^t\|^2_{\mathscr{M}_2}.$$

Na prova denotaremos por $C > 0$ constantes diversas que independem de t.

Com cálculos análogos aos feitos em (3.69) e (3.70), obtemos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\frac{d}{dt}Z(t) + C_1\|\nabla w_t(t)\|^2 \leq \sum_{i=1}^{3} J_i, \tag{3.92}$$

onde

$$J_1 = \int_\Omega (f(u(t)) - f(\tilde{u}(t)))w_t(t)dx,$$

$$J_2 = \gamma\Pi(t)\int_\Omega \nabla\tilde{u}_t(t)\nabla w_t(t)dx$$

e

$$J_3 = (\mathscr{T}\upsilon, \upsilon)_{\mathscr{M}_2}.$$

Vamos majorar os termos do lado direito em (3.92). Com cálculos análogos ao do Capítulo 2 e utilizando a desigualdade de Young generalizada, para $\delta > 0$ escolhido posteriormente, obtemos

$$J_1 \leq C\|w\|^2_{2(\rho+1)} + \delta\|\nabla w_t\|^2, \tag{3.93}$$

$$J_2 \leq C\|\nabla \tilde{u}_t\|^2 Z(t) + C\|\nabla w\|^2 \tag{3.94}$$

e, por (3.80) temos

$$J_3 \leq -\frac{\alpha}{2}\|\upsilon\|^2_{\mathscr{M}_2}. \tag{3.95}$$

Assim, substituindo (3.93), (3.94) e (3.95) em (3.92), obtemos

$$\frac{d}{dt}Z(t) \leq -(C_1-\delta)\|w_t\|^2 - \frac{\alpha}{2}\|\upsilon\|^2_{\mathscr{M}_2} + C\|\nabla \tilde{u}_t\|^2 Z(t) + C(\|\nabla w\|^2 + \|w\|^2_{2(\rho+1)}),$$

tomando $\delta > 0$ de maneira que $(C_1 - \delta) > 0$, temos

$$\frac{d}{dt}Z(t) \leq -C_2\|w_t\|^2 - \frac{\alpha}{2}\|\upsilon\|^2_{\mathscr{M}_2} + C\|\nabla \tilde{u}_t\|^2 Z(t) + C(\|\nabla w\|^2 + \|w\|^2_{2(\rho+1)}), \tag{3.96}$$

onde $C_2 > 0$. Defina,

$$Z_\varepsilon(t) = Z(t) + \varepsilon\phi(t), \quad \text{com} \quad \phi(t) = \int_\Omega w_t(t)w(t)dx.$$

Por outro lado, utilizando as desigualdades de Hölder e de Young, temos

$$|Z_\varepsilon(t) - Z(t)| \leq \varepsilon\|w_t\|\|w\| \leq \varepsilon C Z(t), \tag{3.97}$$

onde $C > 0$.

Calculemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\phi(t) &= (w_{tt}, w) + \|w_t\|^2 \\
&= -\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}w\|^2 - l\|\Delta w\|^2 - \gamma E(U^1)^q(\nabla w_t, \nabla w) - \gamma\Pi(t)(\nabla\tilde{u}_t, \nabla w) \\
&\quad + (f(u) - f(\tilde{u}), w) - (\upsilon, w)_{\mathscr{M}_2} + \|w_t\|^2 \\
&\leq -Z(t) + \frac{1}{2}\|\upsilon\|^2_{\mathscr{M}_2} + \frac{3}{2}\|w_t\|^2 - \frac{l}{2}\|\Delta w\|^2 + \sum_{j=1}^{4}\mathscr{L}_j,
\end{aligned} \tag{3.98}$$

onde

$$\mathscr{L}_1 = -(\upsilon, w(t))_{\mathscr{M}_2},$$

$$\mathscr{L}_2 = \gamma\Pi(t)(\nabla\tilde{u}_t(t), \nabla w(t)),$$

$$\mathscr{L}_3 = (f(u(t)) - f(\tilde{u}(t)), w(t)),$$

e

$$\mathscr{L}_4 = \gamma E(U^1)^q(\nabla w_t(t), \nabla w(t))$$

Vamos majorar os termos a direita de (3.98). Primeiramente utilizando a desigualdade de Young generalizada para $2\beta > 0$ apropriado que será escolhido posteriormente, obtemos que

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_1 &\leq \int_0^\infty g(s)\big(C_\beta\|\Delta\upsilon(s)\|^2 + 2\beta\|\Delta w(t)\|^2\big)ds \\
&= 2\beta\|\Delta w\|^2\int_0^\infty g(s)ds + C_\beta\int_0^\infty g(s)\|\Delta\upsilon(s)\|^2 ds \\
&\leq \beta\|\Delta w\|^2 + C\|\upsilon\|^2_{\mathscr{M}_2}.
\end{aligned} \tag{3.99}$$

Por outro lado, analogamente a (3.93) e (3.94), obtemos as seguintes desigualdades:

$$|\mathscr{L}_2| \leq C\|\nabla\tilde{u}_t\|^2 + C\|\nabla w\|^2 \tag{3.100}$$

e

$$|\mathscr{L}_3| \leq C\|\nabla w_t\|^2 + C\|w\|^2_{2(\rho+1)}. \tag{3.101}$$

Por fim, utilizando a limitação da energia e desigualdade de Young, obtemos

$$|\mathscr{L}_4| \leq C\|\nabla w_t\|^2 + C\|w\|^2_{2(\rho+1)}. \tag{3.102}$$

Substituindo (3.99), (3.100), (3.101) e (3.102) em (3.98), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\phi(t) \leq& -Z(t) + C\|\upsilon\|^2_{\mathscr{M}_2} + C\|w_t\|^2 - (\frac{l}{2}-\beta)\|\Delta w\|^2 \\
&+ C(\|\nabla w\|^2 + \|w\|^2_{2(\rho+1)}) + C\|\nabla\tilde{u}_t\|^2 Z(t),
\end{aligned}$$

escolhendo $\beta > 0$ de maneira que $(\frac{l}{2} - \beta) \geq 0$, concluímos

$$\frac{d}{dt}\phi(t) \leq -Z(t) + C_4\|\upsilon\|^2_{\mathscr{M}_2} + C_3\|w_t\|^2 + C(\|\nabla w\|^2 + \|w\|^2_{2(\rho+1)}) + C\|\nabla\tilde{u}_t\|^2 Z(t). \tag{3.103}$$

Utilizando (3.96) e (3.103), temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}Z_\varepsilon(t) \leq& -(C_2 - \varepsilon C_3)\|\nabla w_t\|^2 - (\frac{\alpha}{2} - \varepsilon C_4)\|\upsilon\|^2_{\mathscr{M}_2} \\
&+ (C\|\nabla\tilde{u}_t\|^2 - \varepsilon)Z(t) + C(\|\nabla w\|^2 + \|w\|^2_{2(\rho+1)}),
\end{aligned}$$

tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de maneira que

$$(C_2 - \varepsilon C_3) \geq 0 \quad \text{e} \quad (\frac{\alpha}{2} - \varepsilon C_4) \geq 0,$$

podemos concluir que

$$\frac{d}{dt}Z_\varepsilon(t) \leq -(\varepsilon - C\|\nabla\tilde{u}_t\|^2)Z(t) + C(\|\nabla w\|^2 + \|w\|^2_{2(\rho+1)}). \tag{3.104}$$

Além disso, escolhendo $\varepsilon > 0$ pequeno em (3.97), obtemos

$$\frac{1}{2}Z(t) \leq Z_\varepsilon(t) \leq \frac{3}{2}Z(t). \tag{3.105}$$

Substituindo (3.105) em (3.104), temos

$$\frac{d}{dt}Z_\varepsilon(t)+\Theta_\varepsilon Z_\varepsilon(t)\leq C(\|\nabla w\|^2+\|w\|_{2(\rho+1)}^2), \tag{3.106}$$

onde

$$\Theta_\varepsilon=\frac{2\varepsilon}{3}-\frac{2}{3}C\|\nabla\tilde{u}_t\|^2.$$

Aplicando o Lema de Grönwall em (3.106), obtemos que

$$Z_\varepsilon(t)\leq Z_\varepsilon(0)e^{-\int_0^t\Theta_\varepsilon(s)ds}+C\int_0^t e^{-\int_s^t\Theta_\varepsilon(\tau)d\tau}(\|\nabla w(s)\|^2+\|w(s)\|_{2(\rho+1)}^2)ds. \tag{3.107}$$

Por outro lado, utilizando (3.30), obtemos

$$-\int_s^t\Theta_\varepsilon(\tau)d\tau\leq-\frac{2}{3}\varepsilon(t-s)+C. \tag{3.108}$$

Assim, de (3.107) e (3.108) concluímos a prova. □

Lema 3.7. *Sob as hipóteses do Teorema 3.4, o C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq0}$ correspondente ao problema* (3.10)-(3.2) *é quase-estável em qualquer subconjunto limitado e positivamente invariante $B\subset\mathscr{H}$.*

Demonstração. De fato, seja $\mathscr{X}=X_2$, $Y=X$. Então como $S(t)$ é o operador solução do problema (3.10)-(3.2), as condições (1.4) e (1.5) são satisfeitas, devido ao item (iii) do Teorema 3.4 e ao Lema 3.6, respectivamente. □

Agora, segue imediatamente do Teorema 1.52 o seguinte resultado

Teorema 3.8. *Sob as hipóteses do Teorema 3.4, o C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq0}$ correspondente ao problema* (3.10)-(3.2) *tem um atrator global $\mathscr{A}\subset\mathscr{H}$ e, além disso, a dimensão fractal de $\mathscr{A}$ é finita.*

3.4 Sistema Gradiente e Semicontinuidade Superior

Seja $\mathbb{K}$ o intervalo fechado $[0,1]$ e $\{\gamma_\varepsilon\}_{\varepsilon\in\mathbb{K}}$ uma sequência de números reais tais que

$$0<\gamma_0\leq\gamma_\varepsilon\leq\gamma_1,$$

onde γ_0 e γ_1 são constantes positivas independentes de ε. Associado à sequência $\{\gamma_\varepsilon\}_{\varepsilon\in\mathbb{K}}$, consideramos a família de problemas abstratos

$$\begin{cases} u_{tt}+A^{\frac{\theta}{2}}u+lAu+\gamma_\varepsilon\Big[E(u(t),u_t(t),\eta^t)\Big]^qA^{\frac{1}{2}}u_t\\ +\displaystyle\int_0^\infty g(s)A\eta(s)ds+f(u)=h(x),\\ \eta_t=\mathscr{T}\eta+u_t,\\ u(0,x)=u_0(x),\quad u_t(0,x)=u_1(x),\quad x\in\Omega,\\ \eta^0(s,x)=u_0(x)-\varphi(s,x),\quad (s,x)\in[0,\infty)\times\Omega, \end{cases} \tag{3.109}$$

e denotamos por $\{S_\varepsilon(t)\}_{\varepsilon\in\mathbb{K}}$ a família de C_0-semigrupos associados a (3.109) e $\{\mathscr{A}_\varepsilon\}_{\varepsilon\in\mathbb{K}}$ a família de atratores globais de $\{S_\varepsilon(t)\}_{\varepsilon\in\mathbb{K}}$.

Na teoria de sistemas dinâmicos, $y^* \in \mathscr{H}$ é dito um ponto de equilíbrio para o semigrupo $S(t) : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ se o conjunto $\{y^*\}$ é a órbita de uma solução global constante, ou seja, $S(t)y^* = y^*$, para todo $t \geq 0$. Denotamos por $\mathscr{N}$ o conjunto de pontos de equilíbrio para o semigrupo $S(t) : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$, ou seja,

$$\mathscr{N} = \{y^* \in \mathscr{H} :\ S(t)y^* = y^*,\ \forall t \geq 0\}.$$

3.4.1 Sistema Gradiente

Nesta seção provamos que o C_0-semigrupo $S_\varepsilon(t)$ associado a (3.109) é gradiente. Temos o seguinte teorema.

Teorema 3.9. *O sistema dinâmico* $(\mathscr{H}, S_\varepsilon(t))$ *associado a* (3.109) *é gradiente.*

Demonstração. Afirmamos que o funcional energia E definido em (3.4) é uma função de Lyapunov para o C_0-semigrupo

$$S_\varepsilon(t)(u_0,u_1,\eta_0) = (u^\varepsilon(t), u_t^\varepsilon(t), \eta^{t,\varepsilon}), \quad (u_0,u_1,\eta_0) \in \mathscr{H}.$$

De fato, usando o Teorema 3.4 concluímos que

$$E(u^\varepsilon(t), u_t^\varepsilon(t), \eta^{t,\varepsilon}) \quad \text{é não crescente para todo} \quad (u_0,u_1,\eta_0) \in \mathscr{H}. \tag{3.110}$$

Além disso, segue de (3.109) a seguinte identidade

$$\frac{d}{dt}\Big[E(u^\varepsilon(t), u_t^\varepsilon(t), \eta^{t,\varepsilon})\Big] + \gamma_\varepsilon[E(u^\varepsilon(t), u_t^\varepsilon(t), \eta^{t,\varepsilon})]^q \|\nabla u_t^\varepsilon(t)\|^2 = (\mathscr{T}\eta^{t,\varepsilon}, \eta^{t,\varepsilon})_{\mathscr{M}_2}. \tag{3.111}$$

Suponha que

$$E(u^\varepsilon(t), u_t^\varepsilon(t), \eta^{t,\varepsilon}) = E(u_0,u_1,\eta_0), \quad \forall t \geq 0. \tag{3.112}$$

Então

$$0 = E(u^\varepsilon(t), u_t^\varepsilon(t), \eta^{t,\varepsilon}) - E(u_0,u_1,\eta_0) = \int_0^t \frac{d}{ds}[E(u^\varepsilon(s), u_t^\varepsilon(s), \eta^{s,\varepsilon})]\, ds.$$

Combinando a estimativa acima com (3.111) e (3.112) obtemos

$$\gamma_\varepsilon[E(u_0,u_1,\eta_0)]^q \int_0^t \|\nabla u_t^\varepsilon(s)\|^2\, ds = \int_0^t (\mathscr{T}\eta^{s,\varepsilon}, \eta^{s,\varepsilon})_{\mathscr{M}_2}\, ds, \quad \forall t \geq 0.$$

Como $(\mathscr{T}\eta^{t,\varepsilon}, \eta^{t,\varepsilon})_{\mathscr{M}_2} \leq 0$ e $\gamma_\varepsilon[E(u_0,u_1,\eta_0)]^q \|\nabla u_t^\varepsilon(t)\|^2 \geq 0$ para todo $t \geq 0$, segue da estimativa acima que

$$\|\nabla u_t^\varepsilon(t)\|^2 = 0, \quad \forall t \geq 0, \tag{3.113}$$

e consequentemente,

$$u_t^\varepsilon(t) = 0 \quad \text{e} \quad u^\varepsilon(t) = u_0, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.114}$$

Combinando (3.111), (3.112) e (3.113), obtemos

$$(\mathscr{T}\eta^{t,\varepsilon},\eta^{t,\varepsilon})_{\mathscr{M}_2}=0,\quad \forall t\geq 0. \tag{3.115}$$

Agora, usando (3.114) e (3.115) com a segunda equação em (3.109) concluímos que

$$\eta^{t,\varepsilon}=\eta_0,\quad \forall t\geq 0.$$

Finalmente, usando (3.110) e (3.114) obtemos que o funcional energia E satisfaz (i) e (ii) da Definição 1.55. Portanto, $(\mathscr{H},S_\varepsilon(t))$ é um sistema gradiente. □

3.4.2 Semicontinuidade Superior

O objetivo desta seção será a prova da semicontinuidade superior para a família de atratores globais $\{\mathscr{A}_\varepsilon\}_{\varepsilon\in\mathbb{K}}$ associados a (3.109).

Para cada $\varepsilon\in\mathbb{K}$ fixo, denotamos por $\mathscr{N}_\varepsilon$ o conjunto dos pontos de equilíbrio para o problema (3.109). Em outras palavras,

$$\mathscr{N}_\varepsilon=\{(u^\varepsilon,0,\eta^\varepsilon)\in\mathscr{H}:\ A^{\frac{\theta}{2}}u^\varepsilon+lAu^\varepsilon+\int_0^\infty g(s)A\eta^\varepsilon(s)\,ds+f(u^\varepsilon)-h(x)=0\}.$$

A família dos pontos de equilíbrios do problema (3.109) será denotada por $\{\mathscr{N}_\varepsilon\}_{\varepsilon\in\mathbb{K}}$.

Lema 3.10. *A família $\{\mathscr{N}_\varepsilon\}_{\varepsilon\in\mathbb{K}}$ é uniformemente limitada em relação à ε.*

Demonstração. Seja $(u^\varepsilon,0,\eta^\varepsilon)\in\mathscr{N}_\varepsilon$. Então $(u^\varepsilon,0,\eta^\varepsilon)$ satisfaz a seguinte equação elíptica:

$$(-\Delta)^\theta u^\varepsilon+l\Delta^2u^\varepsilon+\int_0^\infty g(s)\Delta^2\eta^\varepsilon(s)\,ds+f(u^\varepsilon)-h(x)=0.$$

Multiplicando esta equação por u^ε e integrando sobre Ω, obtemos

$$\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u^\varepsilon\|^2+l\|\Delta u^\varepsilon\|^2+(u^\varepsilon,\eta^\varepsilon)_{\mathscr{M}_2}+\int_\Omega f(u^\varepsilon)u^\varepsilon dx-\int_\Omega h(x)u^\varepsilon dx=0.$$

Com esta última equação e (3.11) concluímos que

$$\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u^\varepsilon\|^2+l\|\Delta u^\varepsilon\|^2+(u^\varepsilon,\eta^\varepsilon)_{\mathscr{M}_2}+\int_\Omega F(u^\varepsilon)dx-\int_\Omega h(x)u^\varepsilon dx\leq\mu|\Omega|. \tag{3.116}$$

Note que,

$$\begin{aligned}
(u^\varepsilon,\eta^\varepsilon)_{\mathscr{M}_2}&=(u^\varepsilon,u^\varepsilon-\varphi)_{\mathscr{M}_2}\\
&=\|u^\varepsilon\|^2_{\mathscr{M}_2}-(u^\varepsilon,\varphi)_{\mathscr{M}_2}\\
&=(1-l)\|\Delta u^\varepsilon\|^2-(u^\varepsilon,\varphi)_{\mathscr{M}_2}\\
&=(1-l)\|\Delta u^\varepsilon\|^2+\frac{1}{2}\|\eta^\varepsilon\|^2_{\mathscr{M}_2}-\frac{1-l}{2}\|\Delta u^\varepsilon\|^2+\frac{1}{2}\|\varphi\|^2_{\mathscr{M}_2}\\
&=\frac{1-l}{2}\|\Delta u^\varepsilon\|^2+\frac{1}{2}\|\eta^\varepsilon\|^2_{\mathscr{M}_2}+\frac{1}{2}\|\varphi\|^2_{\mathscr{M}_2}\\
&\geq\frac{1-l}{2}\|\Delta u^\varepsilon\|^2+\frac{1}{2}\|\eta^\varepsilon\|^2_{\mathscr{M}_2}.
\end{aligned}$$

Combinando isso com (3.116), obtemos

$$\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u^{\varepsilon}\|^2+\frac{1+l}{2}\|\Delta u^{\varepsilon}\|^2+\frac{1}{2}\|\eta^{\varepsilon}\|^2_{\mathscr{M}_2}+\int_{\Omega}F(u^{\varepsilon})dx-\int_{\Omega}h(x)u^{\varepsilon}dx\leq\mu|\Omega|,$$

o que implica

$$E(u^{\varepsilon},0,\eta^{\varepsilon})\leq\mu|\Omega|,$$

e, finalmente, utilizando (3.25), concluímos que

$$\|(u^{\varepsilon},0,\eta^{\varepsilon})\|_{\mathscr{H}}\leq\sqrt{\frac{\mu|\Omega|}{C_{l,\alpha,\lambda_1}}}.$$

□

Como consequência do Lema 3.10 e do Lema 1.56 obtemos o seguinte resultado:

Corolário 3.11. *A família* $\{\mathscr{A}_{\varepsilon}\}_{\varepsilon\in\mathbb{K}}$ *é uniformemente limitada em relação à* ε.

Quanto à convergência da família dos C_0-semigrupos $S_{\varepsilon}(t)$, temos

Lema 3.12. *Seja* B *um conjunto limitado em* $\mathscr{H}$ *e*

$$\|S_{\varepsilon}(t)-S_0(t)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{H})}=\sup_{z\in B}\|\big(S_{\varepsilon}(t)-S_0(t)\big)z\|_{\mathscr{H}}$$

para cada $t\geq 0$. *Suponha que*

$$|\gamma_{\varepsilon}-\gamma_0|\to 0\quad quando\quad \varepsilon\to 0^+.$$

Então,

$$\|S_{\varepsilon}(t)-S_0(t)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{H})}\to 0\quad quando\quad \varepsilon\to 0^+,$$

uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$.

Demonstração. Para cada $(u_0,u_1,\eta_0)\in B$, definimos

$$(u^{\varepsilon}(t),u_t^{\varepsilon}(t),\eta^{t,\varepsilon})=S_{\varepsilon}(t)(u_0,u_1,\eta_0),\quad \forall\varepsilon\in\mathbb{K},\forall t\in[0,+\infty).$$

Denote por $E^{\varepsilon}(t)=E(u^{\varepsilon}(t),u_t^{\varepsilon}(t),\eta^{t,\varepsilon})$ e

$$u=u^{\varepsilon}-u^0,\quad u_t=u_t^{\varepsilon}-u_t^0\quad \text{e}\quad \eta=\eta^{\varepsilon}-\eta^0.$$

Podemos escrever (3.109) da seguinte forma:

$$\begin{cases} u_{tt}+A^{\frac{\theta}{2}}u+lAu+\gamma_{\varepsilon}[E^{\varepsilon}(t)]^qA^{\frac{1}{2}}u_t+\Pi(t)A^{\frac{1}{2}}u_t^0\\ +\displaystyle\int_0^{\infty}g(s)A\eta^t(s)ds+f(u^{\varepsilon})-f(u^0)=0,\\ \eta_t=\mathscr{T}\eta+u_t,\\ u(0)=0,\quad u_t(0)=0,\quad \eta^0=0,\end{cases}$$

onde $\Pi(t) = \gamma_\varepsilon[E^\varepsilon(t)]^q - \gamma_0[E^0(t)]^q$. Este problema fornece

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u(t)\|^2 + l\|\Delta u(t)\|^2 + \|u_t(t)\|^2 + \|\eta^t\|^2_{\mathcal{M}_2}\right] + \gamma_\varepsilon[E^{(\varepsilon)}(t)]^q\|\nabla u_t(t)\|^2\\ &= G_1(t) + G_2(t) + (\mathscr{T}\eta^t, \eta^t)_{\mathcal{M}_2},\end{aligned} \tag{3.117}$$

onde

$$G_1(t) = \Pi(t)\int_\Omega \Delta u_t^0(t,x)u_t(t,x)\,dx, \quad t \geq 0,$$

e

$$G_2(t) = -\int_\Omega [f(u^\varepsilon(t,x)) - f(u^0(t,x))]u_t(t,x)\,dx, \quad t \geq 0.$$

Além disso, como $E^{(\varepsilon)}(t) \geq \mu|\Omega| - \frac{2}{\lambda_1}\|h\|^2$ e $0 < \gamma \leq \gamma_\varepsilon$, para todo $\varepsilon \in [0,1]$, (3.117) implica que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u(t)\|^2 + l\|\Delta u(t)\|^2 + \|u_t(t)\|^2 + \|\eta^t\|^2_{\mathcal{M}_2}\right] + C_{\mu,|\Omega|,\gamma_0,\lambda_1}\|\nabla u_t(t)\|^2\\ &= G_1(t) + G_2(t) + (\mathscr{T}\eta^t, \eta^t)_{\mathcal{M}_2},\end{aligned} \tag{3.118}$$

onde $C_{\mu,|\Omega|,\gamma_0,\lambda_1} = \gamma_0[\mu|\Omega| - \frac{2}{\lambda_1}\|h\|^2]^q > 0$.

Agora, como $E^\varepsilon(0) = E^0(0) = E(u_0, u_1, \eta_0)$, para todo $\varepsilon \in \mathbb{K}$, e $E(u_0,u_1,\eta_0)$ é uniformemente limitado em B [ver (3.25)], temos

$$\|(u^\varepsilon(t), u_t^\varepsilon(t), \eta^{t,\varepsilon})\|^2_{\mathscr{H}} \leq C^{-1}_{l,\alpha,\lambda_1}E^\varepsilon(t) \leq C^{-1}_{l,\alpha,\lambda_1}E^0(0), \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{K},$$

e consequentemente,

$$\begin{aligned}|\Pi(t)| &= |(\gamma_\varepsilon - \gamma_0)[E^\varepsilon(t)]^q + \gamma_0\{[E^\varepsilon(t)]^q - [E^0(t)]^q\}|\\ &\leq |\gamma_\varepsilon - \gamma_0|[E^\varepsilon(t)]^q + \gamma_0 qM^{q-1}|E^\varepsilon(t) - E^0(t)|\\ &\leq |\gamma_\varepsilon - \gamma_0|[E^0(0)]^q + \gamma_0 qM^{q-1}C\|(u(t),u_t(t),\eta^t)\|_{\mathscr{H}}\\ &\leq C\{|\gamma_\varepsilon - \gamma_0| + \|(u(t),u_t(t),\eta^t)\|_{\mathscr{H}}\},\end{aligned} \tag{3.119}$$

onde $M = (\mu|\Omega| - \frac{2}{\lambda_1}\|h\|^2)^{-1}$ se $q < 1$ ou $M = E^{(0)}(0)$ se $q \geq 1$ e C é uma constante positiva independente de ε. Utilizando (3.119) e a desigualdade de Young generalizada para $\delta > 0$ conveniente que será explicito a frente, temos que

$$|G_1(t)| \leq C_\delta\{|\gamma_\varepsilon - \gamma_0|^2 + \|(u(t),u_t(t),\eta^t)\|^2_{\mathscr{H}}\}\|\nabla u_t^{(0)}\|^2 + \delta\|\nabla u_t\|^2, \tag{3.120}$$

onde C é uma constante positiva independente de ε.

Agora, adotando as mesmas técnicas usadas na Etapa 6 [ver (3.72)], obtemos a seguinte estimativa:

$$|G_2(t)| \leq C\|(u(t),u_t(t),\eta^t)\|^2_{\mathscr{H}}, \tag{3.121}$$

onde C é uma constante positiva independente de ε.

Como $(\mathscr{T}\eta^t,\eta^t)_{\mathcal{M}_2} \leq 0$, com base em (3.118), (3.120) e (3.121) verificamos que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u(t)\|^2 + l\|\Delta u(t)\|^2 + \|u_t(t)\|^2 + \|\eta^t\|^2_{\mathcal{M}_2}\right] + (C_{\mu,|\Omega|,\gamma_0,\lambda_1} - \delta)\|\nabla u_t(t)\|^2\\ &\leq C\{|\gamma_\varepsilon - \gamma_0|^2 + C_1\|(u(t),u_t(t),\eta^t)\|^2_{\mathscr{H}}\}\|\nabla u_t^0\|^2,\end{aligned}$$

onde C e C_1 são constantes positivas independentes de ε. Escolhendo $\delta \leq C_{\mu,|\Omega|,\gamma_0,\lambda_1}$, obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big[\|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}u(t)\|^2 + l\|\Delta u(t)\|^2 + \|u_t(t)\|^2 + \|\eta^t\|^2_{\mathscr{M}_2}\Big] \\ &\leq C\{|\gamma_\varepsilon - \gamma_0|^2 + C_1\|(u(t),u_t(t),\eta^t)\|^2_{\mathscr{H}}\}\|\nabla u_t^0\|^2.\end{aligned} \tag{3.122}$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall e utilizando o fato que $u_t^0 \in L^2([0,T];X_1)$, obtemos

$$\|(u(t),u_t(t),\eta^t)\|^2_{\mathscr{H}} \leq C_3 e^{C_2 t}|\gamma_\varepsilon - \gamma_0|^2,$$

onde C_2 e C_3 são constantes positivas independentes de ε, e a prova está completa. $\square$

Como consequência dos resultados obtidos acima, obtemos a semicontinuidade superior da família de atratores globais $\{\mathscr{A}_\varepsilon\}_{\varepsilon\in\mathbb{K}}$ em $\varepsilon = 0$. A prova segue como a prova do Teorema 2.11.

Teorema 3.13. *A família de atratores globais $\{\mathscr{A}_\varepsilon\}_{\varepsilon\in\mathbb{K}}$ é semicontínua superiormente em $\varepsilon = 0$, ou seja,*

$$dist_{\mathscr{H}}(\mathscr{A}_\varepsilon, \mathscr{A}_0) \to 0 \ \ quando \ \ \varepsilon \to 0^+.$$

Referências Bibliográficas

[1] H. Amann, Linear and Quasilinear Parabolic Problems. Volume I: Abstract Linear Theory, Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.

[2] A. V. Babin and M. I. Vishik, Attractors of Evolution Equations, Studies in Mathematics and its Applications, 25, New York, 1992.

[3] F. D. M. Bezerra, V. L. Carbone, M. J. D. Nascimento and K. Schiabel, Regularity and upper semicontinuity of pullback attractors for a class of nonautonomous thermoelastic plate systems. Pacific J. Math. **301** (2) (2019), 395-419.

[4] H. Brézis, Analyse Fonctionnelle: Théorie et Applications, Paris: Masson, 1987.

[5] H. Brézis, Operateurs Maximaux Monotones et Semigroups de Contractions dans les Spaces de Hilbert, Amsterdam: North Holland Publishing Co., 1973.

[6] M. M. Cavalcanti e V. N. D. Cavalcanti, Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev, Maringá: Eduem, 2009.

[7] J. W. Cholewa and T. Dlotko, Global Attractors in Abstract Parabolic Problems, London Mathematical Society Lecture Note Series Book 278, 2000.

[8] I. Chueshov and I. Lasiecka, Long-time Behavior of Second Order Evolution Equations with Nonlinear Damping. Mem. Amer. Math. Soc. 195, Number 912, Providence, 2008.

[9] I. Chueshov and I. Lasiecka, Von Karman evolution equations: Well-posedness and long time dynamics, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2010.

[10] V. V. Chepyzhov and M. I. Vishik, Attractors for Equations of Mathematical Physics, American Mathematical Society, Colloquium Publications, 49. American Mathematical Society, Providence, 2002.

[11] E. Coddington and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations. McGraw-Hill, New York-Toronto-London, 1955.

[12] M. Conti, E. M. Marchini and V. Pata, A well posedness result for nonlinear viscoelastic equations with memory. Nonlinear Anal., **94** (2014), 206-216.

[13] C. M. Dafermos, Asymptotic stability in viscoelasticity. Arch. Ration. Mech. Anal., **37** (1970), 297-308.

[14] M. J. Dos Santos, M. M. Freitas, A. J. A. Ramos and D. S. Almeida Júnior, Asymptotic analysis and upper semicontinuity to a system of coupled nonlinear wave equations. Dynamical Systems, **37** (1) (2021), 29-55.

[15] B. Feng, M. L. Pelicer and D. Andrade, Long-time behavior of a semilinear wave equation with memory. Bound. Value Probl., **2016**, 37 (2016).

[16] C. Giorgi, V. Pata and A. Marzocchi, Asymptotic behavior of a semilinear problem in heat conduction with memory, NoDEA, Nonlinear Differ. Equ. Appl., **5** (1998), 333-354.

[17] A. M. Gomes, Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução, 2 ed. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 2000.

[18] M. Grasselli and V. Pata, Uniform attractors of nonautonomous dynamical systems with memory, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications **50** (2002), 155-178.

[19] J. K. Hale, Asymptotic Behavior of Dissipative Systems, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1988.

[20] D. Henry, Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Lecture Notes in Mathematics 840, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[21] M. A. Jorge-Silva, V. Narciso and A. Vicente, On a bean model related to flight structures with nonlocal energy damping. Disc. Cont. Dynam. Syst., B, **24** (7) (2019), 3281-3298.

[22] M. A. Jorge-Silva and V. Narciso, Attractors and their properties for a class of nonlocal extensible beams, Disc. Cont. Dynam. Syst., B, **35** (3) (2015), 985-1008.

[23] A. KH. Khanmamedov, Global attractors for the plate equation with a localized damping and critical in an unbounded domain. J. Differential Equations, **225** (2006), 528-548.

[24] A. Kh. Khanmamedov, Global attractors for von Karman equations with nonlinear interior dissipation, J. Math. Anal. Appl., **318** (2006), 92-101.

[25] J. L. Lions, Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes Aux Limites Non Linéaires. Dunod, Gauthier-Villars, 1969.

[26] T. F. Ma and V. Narciso, Global attractor for a model of extensible beam with nonlinear damping and source terms, Nonlinear Anal., **73** (10) (2010), 3402-3412.

[27] L. A. Medeiros e E. A. Mello, A Integral de Lebesgue, 6 ed. Rio de Janeiro: UFRJ, IM, 2008.

[28] V. Narciso, F. Ekinci and E. Pişkin, On a beam model with degenerate nonlocal nonlinear damping, Evol. Equ. Control Theory, **12** (2) (2023), 732-751.

[29] M. J. D. Nascimento, M. L. Pelicer and I. A. S. Picolli, Long-time behavior for fractional wave equations governed by bi-harmonic operator, Disc. Cont. Dynam. Syst. B, **29** (6) (2024), 2749-2768.

[30] M. J. D. Nascimento, M. L. Pelicer and I. A. S. Picolli, Asymptotic behavior for fractional second ordem equations with memory damping, 2024. Submitted.

[31] V. Pata and A. Zucchi, Attractors for damped hyperbolic equation with linear memory, Adv. Math. Sci. Appl., **11** (2001), 505-529.

[32] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1983.

[33] J. Simon, Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$. Ann. Mat. Pura Appl., **146** (4) (1986), 65-96.

[34] R. Teman, Infinite Dimensional Dynamic System in Mechanics and Physics. Springer-Verlag, New York, 1988.

[35] R. L. Wheeden and A. Zygmund, Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis, Marcel Dekker, 1977.

[36] C. Zhao, S. Ma and C. Zhong, Long-time behavior for a class of extensible beams with nonlocal weak damping and critical nonlinearity, J. Math. Phys., **61** 032701 (2020).

[37] C. Zhao, F. Meng and C. Zhong, The well-posedness and attractor on an extensible beam equation with nonlocal weak damping, Disc. Cont. Dynam. Syst., B, **28** (5) (2023), 2884-2910.

[38] S. Zheng, Nonlinear Evolution Equations, Chapman e Hall/CRC, Boca Raton, 2004.