UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

VINICIUS CESAR BRAÇALE

O ENSINO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA ATRAVÉS DE DIFERENTES ATIVIDADES PRÁTICAS ELABORADAS PARA O ENSINO MÉDIO

São Carlos/SP

2024

Vinicius Cesar Braçale

O ENSINO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA ATRAVÉS DE DIFERENTES ATIVIDADES PRÁTICAS ELABORADAS PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas (PPGECE) da Universidade Federal de São Carlos para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas.

Orientador: Prof. Dr. Renato José de Moura

São Carlos-SP

2024

Braçale, Vinicius Cesar

O ensino da função quadrática através de diferentes atividades práticas elaboradas para o ensino médio / Vinicius Cesar Braçale -- 2024.
109f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos
Orientador (a): Renato José de Moura
Banca Examinadora: Renato Jose de Moura, Érica Regina Filletti Nascimento, Wladimir Seixas
Bibliografia

1. Funções quadráticas . 2. Atividades práticas . 3. Ensino de matemática . I. Braçale, Vinicius Cesar. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Arildo Martins - CRB/8 7180

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Vinicius Cesar Braçale, realizada em 15/07/2024.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Renato Jose de Moura (UFSCar)

Profa. Dra. Érica Regina Filletti Nascimento (UNESP)

Prof. Dr. Wladimir Seixas (UFSCar)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas.

Dedico este trabalho a minha família, que em todos os momentos sempre busco forças para continuar.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela minha vida, por estar todo tempo ao meu lado, dando-me força para continuar e lutar mostrando o caminho da verdade e da sabedoria.

À minha mãe Maria, que sempre esteve presente em todas as fazes da minha vida, incentivou-me a acreditar nos meus sonhos, e me ensinou a lutar para conquistá-los.

À minha esposa Débora, que me apoiou e esteve ao meu lado, agradeço pela paciência, pelos conselhos quando eu achava que tudo estava difícil, por nunca permitir que eu desistisse das coisas que almejo.

Às minhas irmãs Patrícia e Alessandra, pelo carinho e dedicação, que tiveram comigo por todo esse tempo.

Ao meu professor orientador Prof. Dr. Renato José de Moura, pela paciência e pela dedicação, permitindo que o presente trabalho fosse realizado.

Agradeço à todos os professores que fizeram parte da minha vida acadêmica, pois todos têm um papel importante para que tudo isso se tornasse possível.

Nenhuma investigação humana pode realmente ser chamada de Ciência, se não pode ser demonstrada matematicamente

Leonardo da Vinci

Resumo

Utilizando-se de metodologias práticas em sala de aula, este trabalho apresenta um conjunto de três atividades para serem aplicadas em sala visando auxiliar no ensino de funções quadráticas na educação básica. Cada atividade tem a proposta de utilizar uma abordagem metodológica diferente, sendo a primeira a realização de um jogo construído no software GeoGebra, a segunda uma modelagem matemática sobre o lançamento oblíquo, e a última uma atividade prática propondo uma investigação da propriedade reflexiva da parábola através da construção de um experimento. O objetivo principal da sequência de atividades apresentadas aqui é construir um material que possa ser utilizado por professores de matemática para o ensino desse tema em diferentes realidades. O trabalho apresenta uma pesquisa bibliográfica a respeito do tema, abordando a teoria necessária para o entendimento do assunto, e também descreve a realização de uma pesquisa qualitativa sobre uma de suas atividades que foi aplicada em uma turma do terceiro ano do ensino médio de uma escola pública. Diante da análise dos resultados, pode-se evidenciar que a aplicação da atividade criou uma situação de aprendizagem em que os alunos puderam compreender a função quadrática aplicada a uma situação da realidade, nesse processo melhoraram habilidades de cooperação e trabalho em equipe, de raciocínio lógico, além de resgatarem os conceitos da função quadrática. Assim, foi possível perceber como atividades desenvolvidas por metodologias ativas podem construir diferentes situações de aprendizagem que estimulam o ensino da matemática.

Palavras-chave: Funções Quadráticas. Atividades Práticas. Ensino de Matemática.

Abstract

Using practical methodologies in the classroom, this work presents a set of three activities to be applied in the classroom to assist in teaching quadratic functions in basic education. Each activity proposes to use a different methodological approach, the first being the realization of a game built in the GeoGebra software, the second a mathematical modeling on the oblique launch, and the last a practical activity proposing an investigation of the reflective property of the parabola through of constructing an experiment. The main objective of the sequence of activities presented here is to build material that can be used by mathematics teachers to teach this topic in different realities. The work presents a bibliographical research on the topic, addressing the theory necessary to understand the subject, and also describes the carrying out of qualitative research on one of its activities that was applied to a third-year high school class at a public school. In view of the analysis of the results, it can be seen that the application of the activity created a learning situation in which students were able to understand the quadratic function applied to a real situation, in the process they improved cooperation and teamwork skills, logical reasoning, in addition to recovering the concepts of the quadratic function. Thus, it was possible to understand how activities developed by active methodologies can construct different learning situations that stimulate the teaching of mathematics.

Keywords: Quadratic Functions. Practical Activities. Teaching Mathematics.

Lista de ilustrações

Lista de Siglas

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
UFSCar	Universidade Federal de São Carlos

Sumário

1 INTRODUÇÃO

O ensino de Matemática dentro das escolas de educação básica tem sido alvo de discussões há algum tempo. Professores têm buscado por metodologias diferenciadas de ensino e fazendo adaptações em suas didáticas frente às realidades encontradas no ambiente escolar, uma vez que a aprendizagem da Matemática no ensino fundamental e médio não consegue atingir resultados satisfatórios. O desinteresse dos alunos por esta disciplina aliados a métodos pedagógicos pouco eficazes e pouco atraentes fazem com que parte dos jovens ao longo de sua jornada na educação básica se afaste desta disciplina e a veja como uma ciência entediante e cheia de regras para se memorizar.

Como professor, é comum ouvir dos alunos dentro da sala de aula que determinado conteúdo de matemática nunca terá uma utilidade em suas vidas, ou que certo assunto não possui um aproveitamento fora da sala de aula, mostrando assim, uma visão descontextualizada e mecanicista da matemática, e uma aversão por parte dos jovens à disciplina, criando consequentemente uma barreira em seu aprendizado.

Nesse contexto, os cursos de licenciaturas em matemática e os programas de mestrados profissionais têm um papel importante nessa discussão, já que os trabalhos de conclusão de cursos de licenciaturas em matemática e as dissertações de mestrados profissionais na área de ensino de Matemática e afins buscam apresentar atividades diferenciadas com metodologias de ensino alternativas que trazem a possibilidade de exibir a matemática em sala de aula de maneira diferente do método tradicional de ensino.

Dessa forma, essa dissertação propõe apresentar algumas atividades para o ensino de funções quadráticas no ambiente da sala de aula, tendo como objetivo principal de servir de material de apoio para professores de matemática que atuam na educação básica, mais especificamente no ensino médio. Espera-se que o conteúdo apresentado aqui seja utilizado como uma ferramenta que auxilie educadores na elaboração de suas aulas e atividades, além de servir de estimulo para que outros professores continuem a pesquisar e desenvolver novas propostas de atividades para este e outros temas. Esse material tem a proposta de criar atividades que estimulem a aprendizagem, sobre uma perspectiva das metodologias ativas, desenvolvam habilidade cognitivas e sociais, e contextualize o conteúdo ensinado por meio de situações reais que façam sentido para os jovens, pois de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC):

> Não é demais destacar que, também no Ensino Médio, os estudantes devem desenvolver e mobilizar habilidades que servirão para resolver problemas ao longo de sua vida – por isso, as situações propostas

> devem ter significado real para eles. Nesse sentido, os problemas cotidianos têm papel fundamental na escola para o aprendizado e a aplicação de conceitos matemáticos, considerando que o cotidiano não se refere apenas às atividades do dia a dia dos estudantes, mas também às questões da comunidade mais ampla e do mundo do trabalho (Brasil, 2018, p.535).

A presente dissertação tenta responder a seguinte pergunta: "**Será que é possível propor o ensino de funções quadráticas através de atividades que diferem dos modelos tradicionais de ensino?**" Para tentar responder essa questão o trabalho foi dividido em seis capítulos, que exploram desde a teoria necessária para fundamentar a pesquisa até a descrição e discussão de uma aplicação de uma das atividades propostas em uma escola pública da rede estadual de ensino. Cada capítulo será apresentado a seguir.

O segundo capítulo da dissertação tem o objetivo de apresentar a teoria e a metodologia necessárias para o completo entendimento das abordagens utilizadas nas atividades propostas. Inicialmente, introduz uma descrição sobre as metodologias ativas, apresenta o uso de tecnologias digitais em sala de aula, faz algumas discussões sobre as atividades práticas nos conceitos teóricos pedagógicos, e posteriormente apresenta a metodologia de ensino através da Investigação matemática.

O ensino de funções quadráticas no ensino básico é discutido no terceiro capítulo desta dissertação. Nesse momento, são apresentados alguns dos documentos oficiais que orientam o ensino desse tema na educação básica. Também são exibidas algumas habilidades da BNCC que tratam diretamente do assunto de funções quadráticas no ensino fundamental e no ensino médio, e como esses documentos orientam o desenvolvimento desse assunto nas duas etapas de ensino.

No quarto capítulo do trabalho é apresentado uma revisão sobre as propriedades matemáticas do objeto de estudo desta pesquisa, a função quadrática. Nele é mostrado, através de uma pesquisa sustentada na literatura especializada, a definição matemática de função quadrática, seus pontos de vértice, forma fatorada, sua equação canônica e outros tópicos pertinentes ao assunto.

A construção das atividades propostas é feita no quinto capítulo deste trabalho. Nessa etapa são apresentados os passos necessários para se construir as três atividades que foram trabalhadas nessa pesquisa. Também é exibida uma proposta de atividade para ser aplicada em sala de aula utilizando a metodologia de ensino através da investigação matemática.

O sexto capítulo é destinado a relatar e discutir sobre uma aplicação de uma das atividades realizada em uma escola da rede pública no interior do estado de São Paulo na cidade de Casa Branca. Nesse trecho é descrito pelo pesquisador como foi o desenvolvimento das aulas propostas, a duração de cada atividade, a reação dos alunos frente as atividades elaboras, apresentado suas principais dificuldades e facilidades. Esse capítulo levanta uma discussão e cria uma análise a respeito da validação das atividades, ajuda a perceber os pontos assertivos a da pesquisa, e mostra como a atividade elaborada pode ser utilizada em uma situação real. O trabalho visa realizar uma pesquisa de característica qualitativa sobre a aplicação das atividades em sala de aula. Desse modo, a coleta de dados foi feita através do levantamento das respostas dos alunos sobre cada tópico do tema respondido nas atividades, e a sua interação nas aulas durante as aplicação dos teste.

1.1 Justificativa do Trabalho

A primeira justificativa deste trabalho se dá pela relevância que o tema de funções possui durante a etapa do ensino médio. A Base Nacional Comum Curricular - BNCC estipula o ensino de funções desde o nono ano do ensino fundamental, dentro da unidade temática de álgebra. Já na etapa do ensino médio esse tema se solidifica e ganha intensidade e o documento apresenta em acordo com suas competências específicas de Matemática e suas tecnologias para o ensino médio diversas habilidades relacionadas a esse assunto que devem ser trabalhadas ao longo dessa formação. Mais especificamente, o ensino de funções quadráticas é um assunto de alta relevância para a educação básica, é através dele que o jovem aprofunda seu entendimento sobre os temas da matemática, amadurece seus conhecimentos sobre funções e fortalece suas bases teóricas para os próximos assuntos.

Uma outra justificativa deste tema é que, sobre uma perspectiva de dentro da sala de aula, e de maneira geral, os alunos apresentam grandes dificuldades quando são inseridos diante do assunto de funções quadráticas. Essas dificuldades tendem a aumentar à medida que os conceitos são aprofundados, surgindo até uma certa rejeição por parte deles ao conteúdo. Outro fato importante observado é que, parte dos jovens não enxergam uma utilidade prática para uma parcela de assuntos da matemática estudados durante o seu ensino médio, tendo a falsa impressão de que a matemática se trata apenas de uma ciência que possui conceitos abstratos com aplicações complicadas e longe da realidade cotidiana.

Essas observações muitas vezes se confirmam quando novamente retornamos ao tema de funções quadráticas, que não raramente são associadas pelos alunos exclusivamente a fórmula de Bhaskara, ou a relacionam a exercícios repetidos com processos memorizados para determinar seus zeros ou vértices, não conseguindo percebe-la em outros contextos que sejam diferentes daqueles unicamente matemáticos, assim perdendo a oportunidade de aplicá-la a diferentes situações e ambientes.

Ainda dentro da ótica do ensino de Matemática, percebe-se que atividades experimentais e de manipulação podem ter um papel ressignificativo no desenvolvimento e estimulo da aprendizagem. Observando os resultados encontrados na literatura com outros temas da matemática como no caso de Bugs *et al.* (2020), é possível concluir que o ensino mediado por atividades práticas, quando bem aplicado, pode oferecer resultados satisfatórios para o ensino, sendo capaz de propor uma nova perspectiva para os mesmos assuntos já abordados em sala de aula tornando a matemática mais atraente pra os jovens. Assim, esse trabalho é motivado por uma inquietação e procura por métodos alternativos para o ensino de matemática, mais especificamente no ensino de funções quadráticas.

Um outro ponto que motivou a utilização de atividades práticas para o ensino de matemática nesta dissertação foram as aulas que frequentei como aluno em uma das disciplinas do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas (PPGECE) oferecido pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) e ministrada pelo professor Pedro Luiz Malagutti, que no decorrer de suas aulas sempre apresentava diferentes estratégias para se abordar os temas da matemática em classe, apresentando ferramentas e atividades lúdicas que podem possibilitar uma maior motivação da aprendizagem em sala de aula, além de nos incentivar pela busca de métodos alternativos no ensino desta disciplina. Também fui motivado pela disciplina de Tecnologias da Informação para o Ensino de Ciências e Matemática ministrada pelo professor José Antônio Salvador, que em sua ementa propõe que os professores criem situações alternativas de aprendizagem utilizando para isso diferentes ferramentas e ambientes da tecnologia da informação e comunicação.

Diante do exposto, é natural que surja uma indagação relacionada ao ensino desse tema, como já foi apresentada na introdução deste trabalho. Assim o objetivo geral dessa dissertação passa a ser o de tentar responder aquela pergunta inicial.

Para desenvolver essa pesquisa, o trabalho faz um levantamento teórico apresentando algumas definições e argumentos de acordo com a literatura, posteriormente mostra a construção de algumas atividades de abordagem prática, discute uma aplicação de uma atividade realizada em sala de aula sobre uma perspectiva de ensino ativo, e propõe outra.

2 Referencial Teórico

Este capítulo tem como objetivo principal introduzir algumas teorias para o entendimento das abordagens aplicadas nas atividades propostas. Através de uma revisão bibliográfica na literatura busca-se formar uma estrutura sólida que direciona e sustenta as etapas de ensino e aprendizagem referidas por este trabalho.

Desse modo, nas próximas discussões serão apresentados argumentos e autores que defendem as metodologias empregadas por esta pesquisa. Serão ressaltados os principais pontos sobre metodologias ativas de aprendizagem, atividades práticas para o ensino da Matemática, e o uso de ferramentas digitais no ensino, e como a literatura específica sugere e propõe a sua manipulação e articulação em sala de aula.

2.1 Metodologias Ativas

É um fato que os métodos tradicionais de ensino apresentados e aplicados nas escolas durante anos são pouco eficientes para propor um ensino significativo e instigante para grande parte dos alunos. As aulas expositivas com longos diálogos, atividades escritas na lousa de maneira tradicional e o professor atuando como o centro da aula e o detentor único do saber são práticas ainda comuns em muitas escolas, mas que pouco atraem os jovens para dentro da sala de aula e os encorajam a explorar o mundo do conhecimento que a escola e educadores têm a oferecer. Outro fator importante que impacta diretamente nas escolas e na sala de aula são as modificações no perfil dos estudantes apresentadas ao longo dos anos, essas mudanças são causadas por alterações sociais, culturais e econômicas, mas principalmente, pelo surgimento de novas tecnologias que trouxeram novas formas de comunicação e de relacionamento, além de um acesso imediato a qualquer tipo de informação que esteja presente na internet.

De acordo com os autores Diesel, Baldez e Martins (2017, p.269):

> As transformações sociais, econômicas, políticas, culturais e tecnológicas das últimas décadas têm impactado de forma significativa a vida das pessoas, as relações estabelecidas entre elas, o mundo do trabalho e, por conseguinte, a escola. Esta última talvez seja a que mais tem sido “sacudida”, dada a solidez histórica de sua estrutura.

Segundo Santos e Castaman (2022, p.336) essas mudanças atuais podem alterar em alguns aspectos a relação que o jovem possui com a aprendizagem formal e tradicional oferecida pela escola, assim exigindo dos professores novas abordagens para ministrar os conteúdos, e estimulando docentes e educadores a procurarem diferentes metodologias de ensino para aplicarem em sala de aula que fogem dos modelos tradicionais de aprendizagem.

Ainda de acordo com Santos e Castaman (2022, p.339) entende-se como metodologias tradicionais de ensino a aula centrada na figura do professor, ou seja, o ensino, o conteúdo, e o processo de aprendizagem, são regidos pelo docente, e a principal ferramenta de transmissão de conhecimentos disponíveis para aula são o recorrido livro didático e a fala única do professor.

Nesse tipo de abordagem metodológica Leal *et al.* (2019, *apud* Moran, 2015) descrevem que o aluno se comporta como um agente inativo, assumindo quase sempre um papel secundário durante a aula, executando e repetindo ações limitantes que restringem o desenvolvimento de seu aprendizado, como apenas ouvir, anotar e memorizar as informações prontas e passadas pelo professor

Diesel, Baldez e Martins (2017, p.274) afirmam que o método de ensino tradicional é estruturado principalmente na transmissão de conteúdo, nessa abordagem o estudante recebe uma alta carga de informações que devem ser memorizadas, e a troca de experiências e saberes entre professor e aluno, ou entre alunos, é pouca, ou quase inexistente, não dando muitas oportunidades para o diálogo aberto e nem para uma profunda reflexão.

Para Leal *et al.* (2019, p.434), esse tipo de aula além de não estimular a autonomia do aluno fazendo com que ele fique restrito somente as informações entregue pelo professor no decorrer da aula, também pode gerar um sentimento negativo, de frustração, ou de incapacidade, pois faz com que o discente se torne passivo a novas descobertas, ligado e dependente das informações passadas apenas pelo professor.

Diante do cenário descrito, é natural que os profissionais da educação reavaliem suas práticas pedagógicas e abordagens aplicadas em sala de aula, uma vez que as demandas educacionais atuais exigem um novo perfil para este profissional, que vai muito além da simples transmissão da informação para o aluno. Nesse sentido, escolas e professores têm se empenhado na utilização e na adoção de metodologias ativas como meio de ressignificar e revitalizar suas abordagens educacionais, buscando estratégias que priorizem os alunos, o diálogo, a reflexão, e promovam o seu protagonismo nas etapas de ensino e aprendizagem. Assim, as metodologias ativas surgem como uma proposta diferenciada para o processo de aprendizagem, são embasadas pelas correntes teóricas de importantes autores como Jean Piaget, que elaborou uma perspectiva sobre as etapas do desenvolvimento cognitivo, e por Lev Vygotsky que destacou em sua obra a importância da interação social, ou seja, o relacionamento do discente com a família, professores, e outras crianças, é um fator determinante para seu desenvolvimento.

As metodologias ativas sugerem que os estudantes sejam encarados como agentes históricos, incentivam os jovens a desempenhar um papel ativo durante as etapas de aprendizagem, isso acontece pelo reconhecimento e valorização de suas experiências, saberes, perspectivas e opiniões frente as situações, os quais são considerados pontos essenciais para a construção e formação do seu próprio conhecimento (Diesel; Baldez; Martins, 2017).

Para os autores Santos e Castaman (2022), metodologias ativas são estratégias pedagógicas que buscam envolver os alunos de forma ativa, tornando-os protagonistas em seu processo de aprendizagem, são métodos que estimulam a participação reflexiva, a autonomia, o trabalho em equipe, a cooperação, e a inovação, possibilitando desenvolver habilidades diversificadas e tornar o aluno mais ativo e participativo dentro do contexto educacional. Nesse processo, o professor atua como um mediador, um facilitador, criando espaços com oportunidades que estimulam a participação e a colaboração dos seus alunos, projeta atividades instigantes e contextualizadas, motivando a aplicação prática do conhecimento transmitido.

Ainda complementando esse assunto, Nóbrega (2019) argumenta que as metodologias ativas são métodos de ensino e aprendizagem com o objetivo de propor uma abordagem que se distancia dos métodos tradicionais de ensino, que são centrados na figura do professor. Elas possuem características próprias que estimulam o ensino em sala de aula com base na descoberta, na investigação, e na resolução de problemas, interligando os conteúdos estudados entre as disciplinas e com as vivências e experiências dos alunos. Para esse autor as metodologias ativas se destacam dos modelos tradicionais, pois além das vantagens já mencionadas, elas ainda possibilitam uma aprendizagem significativa, uma vez que encaram o aluno como agente principal desse processo levando em consideração o seu conhecimento prévio e a sua realidade na construção de situações didáticas de aprendizagem. Sendo um sujeito ativo nas etapas de ensino, o aluno é levado a questionar e refletir sobre os diversos assuntos que são apresentados, permitindo-o desenvolver o pensamento crítico, criando argumentos sólidos, e que seja capaz de construir o seu próprio conhecimento.

Nesse cenário Araki (2020), apresenta a figura do professor como um agente em transformação, que seja capaz de se adaptar a novas propostas pedagógicas, e capaz de introduzir em suas abordagens de ensino estratégias que fortaleçam uma aprendizagem centrada em seus alunos.

Para Araki (2020, p.8):

> Observamos a queda da figura do professor enquanto elemento central no ensino e aprendizagem e a ascensão de um aluno enquanto agente ativo em sua aprendizagem. A ideia de um professor transmissor de conhecimentos desejados vem sendo deixada de lado, em prol de um ensino que considere aspectos sociais, culturais e humanos de cada

> aluno. E isso se reflete, também, no que diz respeito ao ensino de Matemática.

2.2 Atividades Práticas e Experimentais no Ensino da Matemática

Em muitas ocasiões da vida escolar a matemática é apresentada para os alunos como um conjunto de regras já previamente determinadas e imutáveis que servem unicamente para resolver problemas abstratos, que em muitos casos parecem não fazer parte da realidade dos estudantes. Professores e instituições de ensino têm buscado formas mais eficientes e produtivas de ensinar este tipo de conteúdo.

De acordo com o autor Araki (2020) um dos temas centrais no ensino de Matemática é a reflexão existente entre os educadores sobre o processo de ensino e aprendizagem, muitos profissionais têm dedicado seus esforços na busca de respostas para questões fundamentais da profissão, sobre como ensinar, quando ensinar, e qual é o perfil desejado para o aluno a ser formado. Essas perguntas surgem em um cenário em que educadores e instituições de ensino reconhecem que o ensino de matemática oferecido pelas escolas não consegue atender a demanda do jovem atual, o baixo desempenho dos alunos de maneira geral nessa disciplina, e a forte rejeição à matemática estimulam a busca entre educadores por diferentes estratégias e abordagens de ensino que possam atender as novas demandas, e também possam apresentar ou propor algum tipo de solução.

Ainda hoje, as aulas de matemática seguem um padrão quase sempre bem definido, caracterizado pela exposição teórica de conteúdo, utilização de poucos recursos didáticos, e possuindo as mesmas características de décadas passadas, os alunos fazendo a cópia de informações diretamente da lousa, e posteriormente resolvendo exercícios para a fixação do tema. Sendo uma aula pouco atraente para muitos os jovens, e que reforça o estereótipo que persegue a matemática, que ela é uma ciência destinada para poucas pessoas “especiais”, ou que seus conteúdos nunca serão aplicados na vida real. Assim, diferentes métodos de ensino sustentados pelas metodologias ativas têm ganhado destaque entre os educadores. Dentre essas diferentes abordagens as atividades práticas e experimentais surgem como ferramentas favoráveis para estimular o interesse dos alunos e promover uma compreensão mais profunda e aplicada dos conceitos científicos e matemáticos.

Andrade e Massabni (2011) defendem que uma alternativa para aprimorar o processo de ensino e aprendizagem em sala de aula seria a incorporação de atividades práticas que abordem os conceitos estudados de maneira lúdica, proporcionando uma aprendizagem mais significativa e instigante para os alunos, permitindo unir a teoria com a prática.

Nesse momento, é importante apresentar algumas definições sobre o conceito de atividades práticas e atividades experimentais existentes dentro de parte da literatura pedagógica e, mais especificamente, tentar apresentar essas definições sobre uma ótica da Educação Matemática.

De acordo com Costa, Nogueira e Cruz (2023), dentro da literatura existem diferentes definições para o termo Atividades Práticas. Sobre o contexto do ensino de ciências as autoras defendem que as atividades práticas se referem a qualquer atividade escolar que envolva a participação ativa do aluno e proporcione a oportunidade de vivenciar o método científico em suas etapas, seja pela manipulação de materiais e equipamentos, observação, ou pela interação direta com fenômenos naturais ou sociais apresentados.

Por outro lado os mesmos autores, Costa, Nogueira e Cruz (2023), apresentam uma outra visão, um pouco diferenciada e mais ampla para descrever atividades práticas, consideram como uma atividade prática qualquer atividade escolar em que o aluno esteja envolvido de forma ativa e participativa, mesmo que não envolvam um contato direto com os fenômenos. Nessa visão mais abrangente, o indispensável é que o aluno participe ativamente do processo de ensino e aprendizagem, construindo seu próprio conhecimento de forma protagonista, independentemente da abordagem escolhida e utilizada pelo professor.

Agostini e Trevisol (2014) definem atividades práticas como um conjunto de atividades elaboradas, seja no laboratório ou em sala de aula, abordando o uso de materiais alternativos com o objetivo de examinar um assunto específico ou testar as concepções que os alunos possuem sobre determinado conteúdo ou fenômeno. Assim, para essas autoras, até atividades fora do contexto laboratorial como a confecção de cartazes, maquetes, passeios a museus e parques são consideradas modelos de aulas práticas, pois o aluno se desenvolve de forma afetiva, cognitiva e psicomotora.

Andrade e Massabni (2011, p.840) definem atividades práticas como "aquelas tarefas educativas que requerem do estudante a experiência direta com o material presente fisicamente, com o fenômeno e/ou com dados brutos obtidos do mundo natural ou social".

Esses autores defendem que em uma de atividade prática o aluno deve interagir com a atividade proposta, seja de maneira manual na construção e na manipulação da atividade, ou tendo um contato direto com o fenômeno de estudo, como por exemplo analisando os dados ou observando o professor demonstrando um experimento.

Para se definir uma atividade experimental pode-se observar a definição encontrada na obra de Bugs *et al.* (2020), que explica que uma metodologia de ensino envolvendo uma atividade com experimentação é essencialmente um conjunto de práticas em que os alunos desempenham um papel ativo na realização e execução das atividades, na coleta de dados e na interpretação e discussão dos resultados. Essa abordagem dentro do ensino de matemática visa construir conceitos matemáticos de forma mais envolvente, significativa e participativa.

Ainda Bugs *et al.* (2020) defendem que a experimentação é definida por um processo de verificação que engloba a formulação de hipóteses para a comprovação de leis e resultados. Sendo assim uma atividade envolvendo um experimento é utilizada em sala de aula para a simular a prática científica, permitindo para os alunos a verificação, a analise e a comprovação de um fenômeno físico.

Diante das definições apresentadas até aqui, e analisando sobre o contexto da educação matemática, atividades práticas podem ser entendidas como atividades que envolvem a exploração e a experimentação de situações que incluem a presença de fenômenos matemáticos podendo existir a manipulação de materiais concretos, como encontrado em Freitas (2021) e Silva *et al.* (2022).

Apesar dos diferentes argumentos apresentados na literatura para se definir uma atividade prática ou uma atividade experimental, em todos eles encontra-se uma ênfase na importância da participação ativa dos alunos durante as atividades, no diálogo e uma preocupação dos autores de se construir uma aula diversificada que se afasta dos modelos tradicionais de ensino. Diante dessa perspectiva, pode-se unir atividades práticas e atividades experimentais para elaborar situações que tragam um significado com maior relevância para os conceitos científicos e matemáticos apresentados aos alunos.

Ainda dentro das referências consultadas para este trabalho, é unânime que todos os autores concordam que esse tipo de atividade tem grande importância pedagógica quando aplicado de forma planejada em sala de aula, seja pela sua função mediadora, que serve para conectar o aluno com o conteúdo previamente estudado. Seja em mostrar uma aplicação prática para a teoria abstrata, isto é, pela sua importância em criar um ambiente de discussão e reflexão, permitindo os discentes a trabalharem em grupos e desenvolver habilidades sociais e afetivas.

Por meio desse tipo de aula busca-se não apenas o compartilhamento do conhecimento, mas também encontrar estímulos para promover a motivação e a captação da atenção dos estudantes, aquecer a criatividade e aprimorar a capacidade de observação e interpretação de fatos e dados. Pretende-se promover uma experiência educativa envolvente capaz de instigar a curiosidade, tornando a matemática mais ativa e atraente, aproximando-a da realidade do aluno (Bugs *et al.*, 2020).

Andrade e Massabni (2011, p.837) acreditam que as atividades práticas e experimentais devem estar inseridas em um contexto que se desenvolvam tarefas de interpretação, reflexão e compreensão de fenômenos. Os alunos devem ser estimulados e encorajados a refletir sobre determinado assunto criando hipóteses, argumentos e propondo maneira para resolver os problemas que são apresentados. Para os autores, visando um ensino mais efetivo, o professor pode propor a participação dos alunos em todas as fases da atividade, passando pela escolha da atividade com a turma, o planejamento inicial, a confecção do experimento, compartilhando os materiais a serem utilizados, até a fase final da atividade com a discussão e apresentação dos resultados obtidos.

É importante ainda destacar que essa metodologia não se restringe a ensinar apenas uma disciplina específica (como nesse caso a matemática), mas abrange o conceito da interdisciplinaridade, atuando como uma importante ferramenta pedagógica que serve de ponte para unir e entrelaçar os diferentes conhecimentos estudados na escola, de forma a se relacionar com outras áreas, permitindo que a matemática, seja abordada de maneira simultânea com outras disciplinas como a física, a química, a biologia, ou outras áreas do conhecimento, como apresentado em Freitas (2021).

Esse elo proporcionado por essas metodologias fazem com que o aluno conecte de forma construtiva os diferentes conteúdos ensinados pelas disciplinas, possibilitando que ele reforce e assimile diferentes assuntos ao mesmo tempo, ou até revisite temas estudados em outros períodos de seu ensino. Assim uma mesma atividade, dependendo de como ela é planejada e elaborada, além de ser utilizada para trabalhar um determinado conteúdo e revisar outros, ela também pode ser utilizada por outros professores de outras áreas correlacionadas, feita algumas adaptações, para trabalhar temas diferentes em outros anos e turmas.

2.3 Tecnologias Digitais no Ensino da Matemática

O grande avanço da tecnologia trouxe para os dias atuais a presença e o uso generalizado de tecnologias digitais. Nunca antes na história da humanidade se consumiu tantos produtos e serviços baseados nesse tipo de tecnologia. As tecnologias digitais possuem um papel importante no atual cenário moderno, elas têm o objetivo de facilitar e auxiliar as funções cotidianas, ajudando os indivíduos no processo de comunicação, na realização de tarefas, no trabalho e no ensino, e também proporcionam momentos de lazer e de entretenimento. No ensino de matemática por sua vez não seria diferente. A presença de tecnologias digitais nas escolas se torna cada vez mais constante e diversificada, e quando utilizadas de maneira correta podem atuar como poderosas ferramentas apoiando professores e discentes na construção do ensino, apresentado bons resultados e sendo eficientes em criar diferentes situações de aprendizagens que estimulem e oportunizem o ensino da matemática de maneira diversificada.

Pereira (2021, p.30) nos lembra que a incorporação de recursos digitais na educação básica brasileira tem seu início com a discussão proposta pela Lei e Diretrizes Básicas da Educação Nacional de 1996, que enfatiza e propõe a reflexão e a compreensão da tecnologia na sociedade, orientando as instituições de ensino a abordarem em seus conteúdos as alterações provocadas pelos avanços digitais em seu meio social.

De acordo com Lima e Rocha (2022, p.731) o debate sobre a importância de se buscar formas didáticas alternativas de se ensinar a disciplina de matemática foi apresentado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) a partir de 1998. O documento faz referência sobre a importância da utilização em sala de aula de softwares de ensino e de jogos digitais como ferramentas de apoio a aprendizagem.

Outro documento importante que defende o uso de tecnologias digitais no contexto escolar é a BNCC, que em seu documento orienta e propõe uma aprendizagem formadora para a vida, e estimula a compreensão para temas fundamentais da sociedade como os avanços tecnológicos. Assim, o documento expõe a importância do uso dessas tecnologias digitais em sala de aula, seja para a elaboração de alternativas para solucionar problemas do cotidiano relacionados a sociedade, na interpretação de fenômenos naturais e sociais, ou até para exercer o diálogo, e a transmissão do conhecimento científico. Dessa forma desenvolvendo competências relacionadas a construção e inserção de uma cultura digital.

De acordo com a BNCC, em uma de suas as competências gerais, no que diz respeito as tecnologias digitais:

> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (Brasil, 2018, p.9).

Mais especificamente em relação ao ensino de matemática pode-se observar a ênfase que o mesmo documento apresenta sobre a utilização de tecnologias digitais para auxiliar na aprendizagem. Segundo a BNCC:

> [...] é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio – impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. Nesse contexto, destaca-se ainda a importância do recurso

> a tecnologias digitais e aplicativos tanto para a investigação matemática como para dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional, iniciado na etapa anterior (Brasil, 2018, p.528).

Para o desenvolvimento de habilidades matemáticas o documento propõe a utilização de softwares educacionais, calculadoras digitais e planilhas eletrônicas, estimulando e encorajando a manipulação de diferentes instrumentos que potencializem o ensino.

> [..] a BNCC propõe que os estudantes utilizem tecnologias, como calculadoras e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Tal valorização possibilita que, ao chegarem aos anos finais, eles possam ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional, por meio da interpretação e da elaboração de algoritmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas (Brasil, 2018, p.528).

Para o ensino de funções quadráticas pode-se encontrar a seguinte habilidade:

> (EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais (Brasil, 2018, p.541).

Para a habilidade apresentada, a BNCC propõe que o ensino de funções quadráticas aplicadas às diversas situações cotidianas podem ser auxiliadas por meios de tecnologias digitais, como por exemplo a utilização de softwares de geometria dinâmica, ou de calculadoras computacionais, que permitam a percepção do gráfico desse tipo de função e a análise de suas características como seus pontos de vértices. Esse é só um único exemplo de habilidade presente no documento que mostra a importância da inserção de tecnologias digitais de maneira planejada no ensino de matemática.

Segundo Pereira e Chagas (2016, p.3) as tecnologias digitais devem ser inseridas no ambiente escolar não apenas pelo fato de serem uma ferramenta prática e uma tendência atual de ensino, ou para tentarem facilitar o trabalho do professor em sala de aula, mas sim pelo fato de serem entendidas como uma nova linguagem para grande parte dos estudantes, uma linguagem em que o jovem está inserido e que faz parte de seu meio, e que quase tudo a sua volta está conectado a essas tecnologias. Assim, para esses autores, é papel da escola aceitar as constantes mudanças e incorporá-las em sua estrutura curricular, para que possa desenvolver em seus alunos habilidades para os tornarem capazes de compreender os avanços tecnológicos e interpretá-los em sua vida.

Nesse contexto, a escola passa a oferecer novas maneiras de propor o ensino, buscando métodos alternativos e consonantes com os tempos atuais, melhorando a relação entre alunos e professores, conseguindo introduzindo os meios digitais como forma de ampliar os saberes, interpretar a sociedade, e melhorar a interação social entre os envolvidos.

O trabalho de Nogueira (2021, p. 40) ajuda a entender a construção de significado que a escola pode propor para seus alunos quando procura soluções sustentadas por meios digitais:

> Ao trabalhar com as novas Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDICs), a escola estará promovendo a democratização do processo comunicativo (os alunos tornam-se sujeitos ativos de sua própria comunicação porque a produzem); a familiarização do aluno com as linguagens específicas de cada veículo social, provocando a compreensão da realidade, o intercâmbio de informação e comunicação, ampliando o conhecimento cultural e pedagógico dos alunos bem como a desmistificação da mídia

Ainda nesse contexto, Lima e Rocha (2022) defendem que as Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) possuem um papel importante no cenário educacional. Elas atuam como uma ferramenta pedagógica e podem proporcionar ganhos significativos na qualidade e na eficácia do ensino, já que permitem aos discentes novas maneiras de visualizar e explorar os conteúdos estudados, possibilitando também uma diferente abordagem dos temas por parte dos professores, além de auxiliar o docente em sua metodologia de ensino em sala de aula deixando com que as aulas se tornem mais atrativas e interessantes na perspectiva dos alunos e do professor.

No que diz respeito ao ensino de matemática, os mesmos autores, Lima e Rocha (2022), ainda destacam que as abordagens mediadas pelo uso das tecnologias digitais podem ser muito interessantes e vantajosas se bem aplicadas em sala, já que em temas como geometria, aritmética, ou funções, o uso de tecnologias digitais pode servir muito bem para o aluno conseguir visualizar um determinado conceito matemático ou uma propriedade que seja foco de estudo, como no caso de conseguir visualizar o gráfico de uma função, a área de um polígono ou de uma figura, ou até o valor de um ângulo interno de uma figura geométrica. Dessa forma, esses temas podem fazer muito mais sentido para os alunos e melhorar o seu entendimento, uma vez que conseguem enxergar algo concreto para um assunto que pode muitas vezes parecer mais abstrato.

Silva e Novello (2020, p. 4) também defendem o uso das tecnologias digitais nas aulas de matemática. Para eles os softwares educacionais e aplicativos se posicionam de maneira a permitir que determinados conteúdos matemáticos possam ser ensinados com maior facilidade, já que permitem uma maior interação com a matéria.

Ainda dentro da proposta da motivação do uso de tecnologias digitais, Andrade e Lacerda (2019) acreditam que as TICs podem possuir um papel motivador nas aulas de matemática do ensino básico. Atividades construídas com propostas da utilização de jogos digitais podem criar condições de entusiasmo para a turma, possibilitando que os alunos desenvolvam ou fortaleçam habilidades matemáticas específicas na resolução de problemas, e na busca por padrões e resultados.

Para Andrade e Lacerda (2019):

> [...] o uso de ferramentas lúdicas (e digitais) nas aulas tem papel de grande importância. O uso de jogos e ferramentas tecnológicas, como calculadoras, aplicativos, experimentos, tutoriais em vídeo, entre outros, servem para reforçar o conteúdo aplicado e, até mesmo, influenciar o aluno a entender a importância da matéria dada e, consequentemente, minimizar a rejeição da matemática pelos alunos.

Diante dessa reflexão sobre a utilização de tecnologias digitais como ferramentas de apoio ao ensino matemática, muitos autores têm destacado a importância do papel do professor, e também suas dificuldades frente a esse desafio.

Sant'Anna (2017, p. 33) enfatiza que:

> Além dos conhecimentos tecnológicos e matemáticos necessários, o professor, precisa, ainda, ser capaz de avaliar, analisar e escolher, a partir da disponibilidade encontrada no espaço escolar, em qual deles está inserido, o tipo de tecnologia que possibilite a elaboração de atividades que estimulem o desenvolvimento do raciocínio lógico, da curiosidade e da pesquisa, de forma a proporcionar a aprendizagem e, não, tão somente, a inserção da tecnologia.

Faria, Romanello e Domingues (2018, p.114) destacam que, embora muitos professores da rede básica de ensino queiram incorporar recursos digitais nas aulas de matemática, muitos se sentem inaptos a manusear tais tecnologias, ou mesmo apresentam dificuldades em elaborar as atividades em softwares matemáticos, pois acreditam que sua formação inicial não forneceu habilidades suficientes para esse meio, ou os conhecimentos que possuem já estão ultrapassadas pelos rápidos avanços tecnológicos.

Pereira e Chagas (2016) relatam que boa parte dos professores analisados em sua pesquisa possuem dificuldades na incorporação das TICs em suas metodologias de ensino, ou que quase nunca as utilizam em sala de aula e dizem:

> O professor vive um dilema, é preciso se adequar à contemporaneidade, utilizando-se de novas ferramentas tecnológicas em suas aulas, mas, ao mesmo tempo, encontra muitas barreiras para desenvolver atividades envolvendo as TIC.

Os trabalhos de Faria, Romanello e Domingues (2018), e Pereira e Chagas (2016), ainda chamam a atenção para um ponto muito importante nessa discussão, que é a formação continuada dos professores. Esses autores acreditam que boa parte da resistência sofrida na incorporação de tecnologias digitais em sala de aula vem da falta de preparo que professores apresentam sobre esse tema.

Para reforçar a discussão sobre esse assunto Fonseca e Silva (2018) defendem que:

> É necessário acrescentar ainda a importância da atualização do currículo do professor buscando na formação continuada a alfabetização tecnológica, para estar preparado para novas perspectivas, desafios e limitações desse novo modo de ensino que não exclui as potencialidades do professor, mas, implica novas competências.

2.4 O Ensino por meio da Investigação Matemática

A investigação e a exploração são atividade fundamentais para propor o desenvolvimento e o avanço da matemática como ciência. A indagação e a busca por novos conhecimentos são características essenciais que fazem os profissionais da matemática desenvolverem o conhecimento dessa área de maneira constante e gradativa. Nessa perspectiva, Jucá e Pironel (2022, p.8) acreditam que a metodologia de ensino baseada na investigação matemática, quando propostas em sala de aula, colocam os alunos no papel semelhante ao do matemático profissional, pois essa abordagem permite com que os alunos vivenciem a experimentação matemática, a formulação de conjecturas e hipóteses sobre determinados temas ou problemas, procurem padrões ou semelhanças entre objetos matemáticos, e possam ter a possibilidade de enxergar a matemática como uma ciência viva que deve ser investigada.

Silva (2020, p.21) acredita que essa metodologia se ressalta dos métodos tradicionais de ensino por colocar o aluno em uma postura ativa diante dos desafios, utilizando-se de uma abordagem investigativa pode-se oferecer ao aluno uma aprendizagem mais instigante e significativa já que a investigação possibilita a descoberta e a validação, e a prática no processo leva ao amadurecimento e a correção de erros. O mesmo autor ainda destaca que, em uma atividade é importante dar ao aluno a oportunidade da experimentação e da confirmação. Os alunos devem ser incentivados a aprenderem com seus próprios erros, devendo analisá-los, e reconhecendo que esse processo de validação e verificação faz parte da construção de seu conhecimento.

Para os autores Ferruzzi, Borssoi e Pessoa (2021, p.5) existem algumas características essenciais que fazem o ensino possuir uma abordagem com natureza realmente investigativa. A primeira delas é que exista um interesse por parte dos alunos pelo assunto apresentado. É necessário que os envolvidos estejam dispostos a pesquisar, testar e elaborar conjecturas, estejam engajados a procurar por novas descobertas e soluções. Para os autores, nesse momento é fundamental a atuação do professor, pois deve-se existir um planejamento cuidadoso na elaboração da aula, na escolha do tema proposto e no seu desenvolvimento em sala de aula, pois esses fatores podem afetar diretamente o interesse dos alunos.

Outras características fundamentais que devem existir em uma aula por investigação é que o problema, ou a situação apresentada para os alunos, deve ser instigante e passível de ser analisado e não deve possuir uma resposta pronta ou imediata, assim exigindo ao longo do processo uma postura ativa dos alunos na busca por respostas. A situação apresentada deve ser capaz de permitir o surgimento de novas perguntas e conjecturas, elaboração de teste de validação que permitam previsões e a formulação de modelos matemáticos.

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2019) as atividades de investigação matemática são aquelas que proporcionam atividades exploratórias, com caráter investigativo, estimulando a criação de questões e hipóteses que levam à experimentação contínua. Dessa maneira os argumentos iniciais sobre uma determinada situação exposta são colocados à prova e o refinamento das conjecturas vai acontecendo ao longo do processo, deixando apenas os argumentos que se mostram válidos e são capazes de sobreviver aos testes. Os autores ainda ressaltam que durante as fases de uma investigação é comum a formulação de novas perguntas que exigem a procura outras respostas, que vão se somando às conjecturas válidas anteriores, até que se possa obter uma prova matemática.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2019, p.18) descrevem que uma investigação matemática pode ser dividida em quatro momentos diferentes. No primeiro momento acontece a fase de exploração da situação apresentada. Nesse trecho deve-se reconhecer o assunto e analisá-lo de forma a elaborar questões coerentes ao problema. O próximo momento se inicia com a organização dos dados sobre o problema e a construção de conjecturas. O terceiro momento é caracterizado pelas validações das conjecturas. Nesse período são feitos os testes e as conjecturas são colocadas a prova. Se necessário passam por melhorias e aprofundamentos, ou podem ser simplesmente abandonadas e descartadas. O quarto momento da investigação é o período da justificação. É o momento de analisar o raciocínio utilizado durante todo o processo de construção das conjecturas. Esse é o momento do diálogo, da demonstração e da ponderação sobre o caminho que foi percorrido no processo da investigação. Nessa fase apresenta-se os resultados encontrados aos seus pares permitindo uma discussão e a validação dos resultados obtidos.

A Figura 1 apresenta os diferentes momentos na execução de uma Investigação Matemática como descrito nos trabalhos de Ponte, Brocardo e Oliveira (2019).

Figura 1 – Momentos na realização de uma Investigação Matemática

Exploração e formulação de questões	- Reconhecer uma situação problemática - Explorar a situação problemática - Formular questões
Conjecturas	- Organizar dados - Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Testes e reformulações	- Realizar testes - Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	- Justificar uma conjectura - Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Fonte: Ponte, Brocardo e Oliveira (2019, p.18)

Ainda Ponte, Brocardo e Oliveira (2019, p.21) argumentam que uma tarefa de investigação matemática quando aplicada em sala de aula deve conter três fases distintas, sendo a primeira fase a apresentação da atividade e suas propostas para os alunos, podendo ser feita pelo professor de maneira oral, deixando bem claro o que se deve fazer. A segunda fase sendo constituída pela investigação da atividade. Nela os autores defendem que os alunos devem construir seus próprios argumentos e suas conjecturas, podendo ser feita a investigação de forma individual ou em pequenos grupos. E a terceira fase que se identifica pela discussão e o compartilhamento do conhecimento adquirido ao longo da exploração. Nessa fase os alunos compartilham com os colegas as suas conclusões e análises, descrevem os passo que levaram a determinadas deduções.

Diante do referencial teórico e das discussões exibidas até o momento neste capítulo, percebe-se a importância da incorporação de metodologias diferenciadas para proporcionar o ensino da matemática em sala de aula de maneira mais atrativa para os jovens. Nesse cenário as metodologia ativas surgem como uma alternativa válida, apresentando diferentes abordagens que se divergem dos modelos tradicionais. Quando aplicadas, essas metodologias podem ser combinadas com uma variedade de ferramentas educacionais, como as atividades práticas e experimentais, ou com o uso das tecnologias digitais, sendo capazes de gerar resultados satisfatórios.

3 Funções Quadráticas no Ensino Básico

Este trabalho tem o interesse de ressaltar a importância dos estudos das funções quadráticas no ensino básico. Para isso, faz uma análise sobre alguns documentos oficiais e destaca alguns pontos que são pertinentes ao tema.

3.1 O Ensino de Funções Quadráticas no Ensino Fundamental de Acordo com a BNCC e o Currículo Paulista

De acordo com Cavalcante (2022, p.18) a BNCC propõe que o estudo de funções quadráticas deve ter seu início partir do 8° ano do ensino fundamental, dentro da unidade temática de Álgebra.

Nessa etapa de ensino os alunos são introduzidos aos estudos das equações polinomiais do segundo grau através de problemas que podem ser resolvidos e relacionados a este tipo de equação. Também nessa fase, segundo a BNCC (Brasil, 2018), deve-se expandir os conhecimentos sobre os processos de fatoração de expressões algébricas, com isso, aprender a reconhecer os produtos notáveis e utilizá-los na resolução de problemas que envolvam as expressões polinomiais do segundo grau, que estão aplicadas a diferentes contextos.

Para este tema, as habilidades da BNCC que devem ser desenvolvidas pelos alunos no ensino fundamental são:

> (EF08MA09) Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$ (Brasil, 2018, p.313).

> (EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau (Brasil, 2018, p.317).

Apesar do estudo das funções ter sua introdução no ensino fundamental e as equações quadráticas serem estudadas brevemente nessa etapa, é no ensino médio que esse tema ganha um maior destaque, apresentando uma continuidade significativa e maior aprofundamento e relevância.

3.2 O Ensino de Funções Quadráticas no Ensino Médio de Acordo com a BNCC e o Currículo Paulista

No ensino médio, a BNCC propõe que o Ensino da Matemática e suas tecnologias seja ampliado e aprofundado. Dessa forma são introduzidas em seu documento cinco novas competências específicas, que são vinculadas com as competências do ensino fundamental, e orientam a etapa de estudos para o ensino médio.

Nessa fase, a área da matemática e suas tecnologias tem como objetivo aproveitar todo o conhecimento já construído pelos estudantes nos anos anteriores do ensino fundamental, mostrando os conteúdos da matemática de modo mais elaborados e aprofundados que requerem dos alunos uma maior reflexão e autonomia, permitindo-os perceberem e encontrarem a matemática em diferentes contextos e situações. Isso significa que nessa etapa de ensino novos conhecimentos devem ser ensinados e desenvolvidos, propondo caminhos que sustentem o pensamento crítico e possibilitem os alunos a resolverem e elaborarem soluções para diferentes problemas, visando a união da matemática com a realidade.

De acordo com a BNCC:

> Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados (Brasil, 2018, p.529).

Dessa maneira, o documento ainda argumenta que a área de matemática e suas tecnologias, apresentada para o ensino médio, deve garantir ao aluno o desenvolvimento de competências específicas, que permitam não somente a ampliação do conhecimento proposto, mas também atitudes que reforcem a autoestima, o respeito às diferentes opiniões, a persistência na resolução de problemas, o ânimo para trabalho em grupo e para o diálogo com os colegas. Contudo, para cada uma das cinco competências específicas da área de matemática e suas tecnologias, para o ensino médio, existem diferentes habilidades relacionadas que devem ser alcançadas e desenvolvidas nessa fase de ensino.

Ainda analisando as competências específicas e as habilidades, Cavalcante (2022) destaca que o ensino médio é caracterizado pelo estudo das funções, e de modo geral, esse tema está intimamente relacionado ao desenvolvimento de todas as competências específicas da Matemática e suas tecnologias, uma vez que é um assunto vasto com muitas aplicabilidades em diferentes áreas da sociedade, permitindo diferentes abordagens, além de ser apresentado e explorado durante todos os anos do ensino médio.

Ao analisar as habilidades relacionadas a cada uma das competências específicas para o Ensino de Matemática no ensino médio, pode-se observar a existência de habilidades que abordam diretamente o tema de funções quadráticas, que é alvo deste trabalho. Nessa análise, destacam-se as seguintes habilidades:

> (EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais (Brasil, 2018, p.543).

> (EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais (Brasil, 2018, p.543).

> (EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$ (Brasil, 2018, p.543).

> (EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais (Brasil, 2018, p.543).

Essas habilidades também estão presentes e são trabalhadas no Currículo Paulista. Alinhado com a BNCC, o Currículo Paulista é um documento que propõe o desenvolvimento, o aprofundamento e a contextualização dessas habilidades de forma especifica. Dessa maneira pode-se também analisar cada habilidade relacionada a funções quadráticas proposta pela BNCC e apresentada por este trabalho sobre a ótica desse documento.

Segundo Almeida (2023, p.15) o Currículo Paulista, assim como a BNCC, traz em seu material o ensino de matemática pautado em desenvolver no aluno competências e habilidades para a construção de seu conhecimento. Dessa maneira, o documento estimula o ensino dessa disciplina por meio de atividades que incentivem a resolução de situações problematizadoras como forma de estimular essas habilidades e propor um ensino contextualizado.

Para a área de Matemática e suas tecnologias o Currículo Paulista apresenta uma estrutura organizada que faz o uso das mesmas habilidades que estão presentes na BNCC. Ele exibe uma ligação direta entre a habilidade a ser elaborada em sala de aula com a sua competência específica, além de separar as habilidades por unidades temáticas. E para cada habilidade também são apresentados os objetos de conhecimento que devem ser desenvolvidos em cada momento (São Paulo, 2020, p.120).

Um outro ponto a ser observado é que o Currículo Paulista na etapa do ensino médio organiza suas unidades temáticas de maneira similar as do Ensino Fundamental. Para o ensino médio pode-se encontrar as seguintes unidades temáticas: Números e Álgebra; Geometria e Medidas; Probabilidade e Estatística, que servem como referência para a organização do material. Todas as habilidades apresentadas anteriormente que abordam diretamente o tema de funções quadráticas estão organizadas dentro da unidade temática "Números e Álgebra".

Para um melhor entendimento do assunto e melhor compreensão das habilidades relacionadas ao tema de funções quadráticas, faz necessário apresentar as competências especificas relacionadas a área da Matemática e suas tecnologias para o ensino médio como descritas e enumeradas no documento da BNCC (Brasil, 2018, p.531):

> 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
>
> 2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
>
> 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
>
> 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
>
> 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas

Para o Currículo Paulista a habilidade (EM13MAT302) está vinculada com a competência específica de número três da BNCC. Essa habilidade apresenta o estudo das funções polinomiais do primeiro e do segundo graus, e tem como seus objetos de conhecimento as variações entre grandezas. De acordo com o Currículo Paulista (São Paulo, 2020, p.117) a competência específica de número três, está relacionada a ação de resolver situações-problemas. Ela destaca a importância de entender a matemática e como aplica-la em situações práticas do cotidiano, sendo o aluno capaz de interpretar seus resultados e explicar de forma clara o raciocínio adotado para chegar nas conclusões. O documento ainda faz referência a modelagem matemática, e a coloca como uma importante ferramenta para dar ênfase na ação de resolver problemas, descrevendo resultados mais elaborados e propondo diferentes estratégias.

A habilidade (EM13MAT402) está relacionada com a quarta competência específica de matemática e suas tecnologias para o ensino médio. Seus objetos de conhecimentos são as funções polinomiais do segundo grau, o estudo de seus gráficos a partir das transformações no plano, e de seus pontos de máximos e mínimos. O Currículo Paulista (São Paulo, 2020, p.118) ressalta que as habilidades relacionadas a essa competência específica são fundamentais para a complementação das demais competências, uma vez que enfatizam a comunicação por meio da linguagem matemática para um entendimento mais amplo dos conceitos, propondo diferentes representações para uma mesma situação, como por exemplo a simbólica, a algébrica, e a gráfica, possibilitando diferentes leituras que se complementam e juntas permitem diferentes estratégias para solucionar um mesmo problema.

As habilidades restantes (EM13MAT502) e (EM13MAT503) estão associadas a quinta competência específica do ensino médio para área de matemática e suas tecnologias apresentada pela BNCC. Seus objetos de conhecimento são as funções quadráticas juntamente com a análise de seus gráficos, determinação de seus zeros, análise de sua concavidade, e seus vértices, aplicadas e investigadas em diferentes situações ligadas a realidade e ao cotidiano. O Currículo Paulista discute que as habilidades relacionadas a essa quinta competência específica da BNCC direcionada para o ensino médio estimulam os alunos a reconhecer a matemática como uma ciência que possui características próprias fundamentada em métodos e etapas de validação baseados no raciocino lógico-dedutivo, incentivam a investigação, a formulação de hipóteses sobre as conjecturas e propriedades matemáticas, e reforçam a importância da tentativa na busca de suas validações (São Paulo, 2020, p.119).

Ainda é interessante comentar que esse documento reconhece que algumas habilidades propostas pela BNCC e relacionadas a essa quinta competência específica podem se mostrar desafiadoras para os jovens, já que seus conteúdos possuem pouca aplicabilidade na vida real dificultando uma possível contextualização, mas são essenciais para promoverem a exploração e uma compreensão mais profunda e madura dos conceitos matemáticos.

Com relação a análise das habilidades sobre o assunto de funções quadráticas, Júnior (2020, p.34) destaca que as habilidades relacionadas ao ensino fundamental estão mais direcionadas em desenvolver a parte algébrica, como a fatoração, dando sempre preferência ao uso de tecnologias para estimular o aprendizado, no ensino médio esse tema é apresentado de maneira mais completa, sendo trabalhado tanto a parte algébrica na busca de padrões quanto a parte gráfica projetada no plano cartesiano, e também sendo amplamente explorada em situações que abordam a interdisciplinaridade com outras áreas.

4 Definição Matemática da Função Quadrática

Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, tal que $f(x)=ax^2+bx+c$, com a, b e $c\in\mathbb{R}$ e $a\neq 0$, para todo $x\in\mathbb{R}$, é denominada função quadrática, ou ainda, uma função polinomial de grau 2.

Segundo Soares (2013) existem duas formas interessantes e diferentes de se representar a função quadrática. A primeira é entendida como a forma fatorada da função, e a outra é a forma canônica da função quadrática. As duas maneiras serão apresentadas a seguir.

4.1 Valor Máximo e Mínimo de uma Função Quadrática

Analisando a função $f(x)=ax^2+bx+c$, pode-se reescrevê-la da seguinte forma:

$$f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right).$$

Completando quadrados

$$\begin{aligned}
f(x)&=ax^2+bx+c\\
&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\
&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)\\
&=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b}{4a^2}+\frac{c}{a}\right).
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$f(x)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right). \tag{1}$$

Para Lima (2013, p.110) a equação (1) é conhecida como forma canônica da função quadrática.

Dante (2004, p.122), também apresenta em seu livro a função quadrática de forma canônica definindo alguns de seus elementos:

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Definindo

$$m = -\frac{b}{2a} \qquad \text{e} \qquad k = \frac{4ac - b^2}{4a},$$

obtém-se que

$$f(x) = a(x - m)^2 + k.$$

Observe que, da expressão acima,

$$f(m) = k.$$

Ou seja, o resultado da forma canônica da função quadrática permite a analisar o seu valor de máximo ou de mínimo, a depender do valor do coeficiente a.

Segundo Soares (2013, p.14) com os resultados já obtidos consegue-se apresentar a seguinte definição.

Definição: Dado $m \in \mathbb{R}$, chamamos $f(m)$ de valor máximo da função quadrática se para todo $x \in \mathbb{R}$ implica que $f(m) \geq f(x)$. E, analogamente, chamamos $f(m)$ de valor mínimo da função quadrática se para todo $x \in \mathbb{R}$ implica que $f(m) \leq f(x)$.

Analisando a equação da forma canônica da função quadrática, temos que a primeira parte da função $a(x - m)^2$ modifica seu valor a depender da variável x, e apresenta sempre um valor positivo quando $a > 0$, pois possui um expoente ao quadrado, já a segunda parcela da expressão $k = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ possui apenas valores fixos formados pelos coeficientes da função.

Dessa forma, supondo que $a > 0$ temos

$$a(x - m)^2 \geq 0 \implies a(x - m)^2 + k \geq k.$$

Ou seja,

$$f(x) \geq k.$$

Assim, $f(x) = k$ quando $(x - m)^2 = 0$, isto é, $x = m = -\dfrac{b}{2a}$, pela definição de m. Logo $f(x)$ terá seu valor mínimo em $x = m$ e, neste caso,

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Analogamente, supondo que $a < 0$ temos

$$a(x - m)^2 \leq 0.$$
$$a(x - m)^2 + k \leq k.$$
$$f(x) \leq k.$$

Assim novamente, $f(x) = k$ quando $(x-m)^2 = 0$, o que mostra que $x = m$.

Logo $f(x)$ terá seu valor máximo em

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

O ponto $x = -\dfrac{b}{2a}$, pertencente ao domínio da função quadrática, será o ponto que determina se a função quadrática terá valor de máximo ou de mínimo, a depender do valor do coeficiente a. Se $a > 0$ o ponto $\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$ será ponto de mínimo, e se $a < 0$ o ponto $\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$ será ponto de máximo.

4.2 Zeros da Função Quadrática

Chama-se de zero, ou de raiz, de uma função polinomial o valor x tal que $f(x) = 0$. Vamos analisar quando será possível encontrarmos o zero da função quadrática. Então

$$\begin{aligned} & f(x) = 0 \\ \iff \quad & a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) = 0 \\ \iff \quad & \left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) = 0 \\ \iff \quad & \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{4ac - b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \end{aligned}$$

Resumindo temos que

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \qquad (2)$$

Podemos observar, a partir desta igualdade, que como o lado esquerdo é sempre não negativo, para que tenhamos algum zero é necessário analisarmos o lado direito da igualdade, ou seja, o termo $b^2 - 4ac$. Definimos assim o que é conhecido na literatura como discriminante, isto é

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Desse modo, se $\Delta > 0$ então

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \iff x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$
$$\iff x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \iff x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Logo a função quadrática terá dois zeros, uma com o valor da raiz quadrada sendo somado no numerador, e o outro com o valor da raiz quadrada sendo subtraído no numerador,

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad e \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{3}$$

Quando $\Delta=0$, observa-se que a função mostra apena um zero real

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{0}}{2a}=-\frac{b}{2a}.$$

E finalmente quando $\Delta<0$ a função quadrática não apresenta zeros reais, pois o lado direito da equação (2) será negativo ao passo que o lado esquerdo é sempre não negativo.

Embora, neste caso, as soluções não existam no conjunto dos números reais elas fazem parte de outro conjunto de números, os Números Complexos, que não é o objeto de estudos deste trabalho. Mas também podemos denotar estes zeros como $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, mas neste caso como dois valores complexos.

4.3 Relação entre os Zeros da Função Quadrática e seus Coeficientes

Uma outra observação importante sobre esse assunto que dever ser mencionada são as relações existentes entre os coeficientes da função quadrática e os seus valores de zeros. Seja a função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$, com $a\neq 0$. Assumindo que tenhamos dois valores de zeros $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, efetuando a soma obtém-se

$$\begin{aligned} x_1+x_2&=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\ &=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\ &=-\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Agora, efetuando o produto entre os zeros da função tem-se

$$
\begin{aligned}
x_1 \cdot x_2 &= \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\cdot\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\\
&= \frac{b^2+b\sqrt{b^2-4ac}-b\sqrt{b^2-4ac}-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}\\
&= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.
\end{aligned}
$$

Assim resumidamente, chega-se as seguintes relações entre coeficientes e os valores de zeros da função quadrática

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 . x_2 = \frac{c}{a}.$$

Supondo-se então que $f(x)$ tenha dois zeros reais e diferentes, pode-se tirar a média aritmética desses dois valores

$$\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{-b}{2a}.$$

Com esse resultado percebe-se que a média aritmética dos zeros de uma função quadrática será o valor da coordenada x de seu vértice. Isso mostra que os zeros são equidistantes do ponto do vértice.

Quando $\Delta = 0$, tem-se $x_1 = x_2$ o que implica que $\dfrac{x_1+x_2}{2} = \dfrac{-b}{2a}$, o que mostra que o ponto do vértice e os zeros da função estão todos sobre o mesmo ponto.

Lima (2013, p.111), ainda argumenta que a forma canônica da função quadrática possui outra utilização muito importante. Dada uma função quadrática da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c números reais e $a \neq 0$, é possível encontrar os valores $x \neq x'$ de modo que $f(x) = f(x')$, ou seja, é possível encontrar os valores iguais na imagem da função quadrática para pontos diferentes em seu domínio.

Para isso utilizamos novamente a forma canônica da função

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Assim, $f(x) = f(x')$ se, e somente se;

$$
\begin{aligned}
a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a} &= a\left(x'+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}\\
\iff a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= a\left(x'+\frac{b}{2a}\right)^2
\end{aligned}
$$

$$\Longleftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x' + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Procuramos valores x e x' de modo que $x \neq x'$.

$$x + \frac{b}{2a} = -\left(x' + \frac{b}{2a}\right) = -x' - \frac{b}{2a}$$

$$\Longrightarrow x + x' = -\frac{b}{a} \Longrightarrow \frac{x + x'}{2} = -\frac{b}{2a}.$$

Logo, observa-se que uma função quadrática irá possuir o mesmo valor $f(x) = f(x')$ para $x \neq x'$ se, e somente se, a média aritmética $\frac{x + x'}{2} = -\frac{b}{2a}$, ou seja, os valores x e x' presentes no domínio da função são equidistantes do ponto $-\frac{b}{2a}$, que é o valor da coordenada x do vértice dessa função. Diante dessa análise, percebe-se que a função quadrática possuirá valores iguais em sua imagem para cada par de pontos pertencentes ao domínio equidistantes da coordenada x do vértice, o que já mostra que o gráfico desse tipo de função apresenta alguma simetria em relação ao ponto do vértice. Essa simetria será explorada um pouco mais adiante.

Proposição: Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções quadráticas da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ onde a, b e c são número reais e $a \neq 0$, e $g(x) = \hat{a}x^2 + \hat{b}x + \hat{c}$ em que $\hat{a}$, $\hat{b}$ e $\hat{c}$ também são número reais e $\hat{a} \neq 0$. Se $f(x_1) = g(x_1)$, $f(x_2) = g(x_2)$ e $f(x_3) = g(x_3)$, para valores distintos de x_1 ,x_2 e x_3 pertencentes aos $\mathbb{R}$, então tem-se que $f(x) = g(x)$.

Prova: Como por hipótese inicial $f(x_1) = g(x_1)$, $f(x_2) = g(x_2)$ e $f(x_3) = g(x_3)$, temos

$$0 = f(x_1) - g(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c - (\hat{a}x_1^2 + \hat{a}x_1 + \hat{c}) = x_1^2(a - \hat{a}) + x_1(b - \hat{b}) + (c - \hat{c}).$$

Assim como

$$0 = f(x_2) - g(x_2) = ax_2^2 + bx_2 + c - (\hat{a}x_2^2 + \hat{a}x_2 + \hat{c}) = x_2^2(a - \hat{a}) + x_2(b - \hat{b}) + (c - \hat{c}).$$

E também

$$0 = f(x_3) - g(x_3) = ax_3^2 + bx_3 + c - (\hat{a}x_3^2 + \hat{a}x_3 + \hat{c}) = x_3^2(a - \hat{a}) + x_3(b - \hat{b}) + (c - \hat{c}).$$

Denotando $A = (a - \hat{a})$, $B = (b - \hat{b})$, $C = (c - \hat{c})$, das igualdades acima obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} Ax_1^2 + Bx_1 + C = 0 \\ Ax_2^2 + Bx_2 + C = 0 \\ Ax_3^2 + Bx_3 + C = 0 \end{cases}$$

Agora, fazendo $Ax_1^2 + Bx_1 + C - (Ax_2^2 + Bx_2 + C)$, chega-se

$$A(x_1^2 - x_2^2) + B(x_1 - x_2) = 0 \implies$$
$$A(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + B(x_1 - x_2) = 0 \implies A(x_1 + x_2) + B = 0.$$

Sendo que usamos o fato de $x_1 \neq x_2$.

E analogamente, fazendo $Ax_1^2 + Bx_1 + C - (Ax_3^2 + Bx_3 + C)$ tem-se

$$A(x_1^2 - x_3^2) + B(x_1 - x_3) = 0 \implies$$
$$A(x_1 + x_3)(x_1 - x_3) + B(x_1 - x_3) = 0 \implies A(x_1 + x_3) + B = 0.$$

Efetuando a diferença entre essa duas equações

$$\begin{aligned} A(x_1 + x_2) + B - \Big(A(x_1 + x_3) + B\Big) &= 0 \\ A(x_1 + x_2) + B - A(x_1 + x_3) - B &= 0 \\ Ax_1 + Ax_2 - Ax_1 - Ax_3 &= 0 \\ A(x_2 - x_3) &= 0. \end{aligned}$$

Como x_1, x_2 e x_3 são números reais a diferentes entre si, conclui-se que $A = 0$, já que $(x_1 - x_3) \neq 0$. Portanto

$$A = 0 \implies (a - \hat{a}) = 0 \implies a = \hat{a}.$$

Desse modo concluímos de maneira análoga que

$$b = \hat{b} \qquad e \qquad c = \hat{c}.$$

Concluímos assim que, dados três pontos não colineares pertencentes ao plano, existe uma e somente uma função quadrática da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ que passa por esses pontos dados.

4.4 Forma Fatorada da Função Quadrática

Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, sendo que a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Caso $f(x)$ possua valores de zeros reais, e chamando de x_1 e x_2 os dois valores de zero dessa função, como já visto antes, e escrevendo $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ e $x_1.x_2 = \dfrac{c}{a}$, então

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a\Big(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\Big) \\
&= a\Big(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\Big) \\
&= a(x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1x_2) \\
&= a\Big(x(x - x_1) - x_2(x - x_1)\Big) \\
&= a\Big(x(x - x_1) - x_2(x - x_1)\Big) \\
&= a(x - x_1)(x - x_2).
\end{aligned}$$

Para Soares (2013, p.28) essa expressão é conhecida como forma fatorada da função quadrática, e ela ajuda a visualizar diretamente os valores de zeros desse tipo de função. Observando a expressão é possível fazer uma análise sobre o sinal da função. Como $a \neq 0$ sempre, e supondo $a > 0$, e também supondo sem perda de generalidade que $x_1 > x_2$, tem-se que $f(x) < 0$ quando $x \in (x_2, x_1)$, ou seja, $f(x)$ com coeficiente a positivo, será negativa quando $x_1 > x > x_2$, e se o coeficiente a da função for negativo ($a < 0$) observa-se que $f(x)$ terá seu valor positivo nesse intervalo.

Quando $x < x_2$ ou $x > x_1$ o valor da expressão $(x - x_1)(x - x_2)$ será sempre positivo, fazendo com que a função tenha o mesmo sinal do coeficiente a, ou seja, quando x não estiver entre os valores de zeros da função quadrática, $f(x)$ será negativa se, e somente se $a < 0$, ou $f(x)$ será positiva se, e somente se $a > 0$.

Quando os dois valores de zeros forem iguais, $x_1 = x_2$, tem-se que

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \implies f(x) = a(x - x_1)^2.$$

A função será zero em $x = x_1$, a expressão $(x-x_1)^2$ será sempre positiva graças ao expoente ao quadrado, o que faz com que $f(x)$ tenha o mesmo sinal do coeficiente a, $f(x) > 0$ se, e somente se $a > 0$, ou $f(x) < 0$ se, e somente se $a < 0$.

4.5 Um Breve Estudo Analítico do Gráfico da Função Quadrática

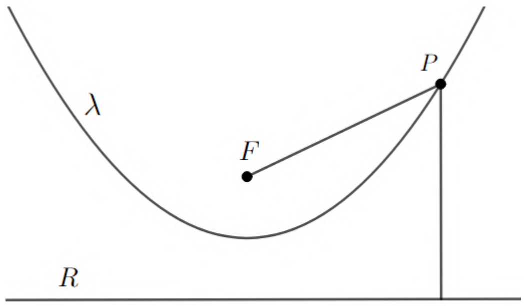
Como demonstram os autores Lima (2013) e Ribeiro (2013), o gráfico de uma função quadrática da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ com a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, é uma parábola.

Antes de iniciar a discussão propriamente sobre o gráfico desse tipo de função, é necessário definir precisamente o conceito de parábola existente na literatura matemática.

De acordo com os autores Delgado, Frensel e Crissaff (2017, p.146), dados um ponto F qualquer do plano euclidiano e uma reta R que não contém esse ponto, a parábola λ é definida como o conjunto de todos os pontos do plano que estão equidistantes do ponto F e da reta R. O ponto F é chamado de *foco* da parábola e a reta R é chamada de reta *diretriz* da parábola. A Figura 2 apresenta a parábola λ, sendo assim pela definição

$$\lambda = \{P \mid d(P, F) = d(P, R)\}$$

Figura 2 – Parábola



Fonte: Elaborada pelo autor.

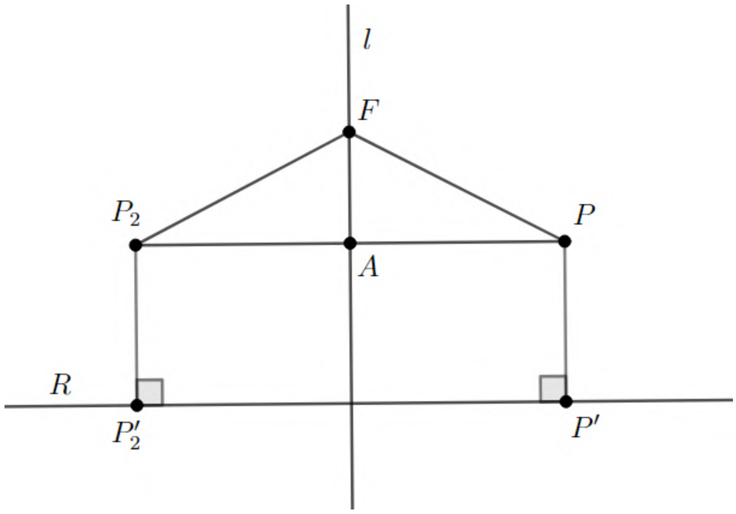
Ainda Segundo Delgado, Frensel e Crissaff (2017) chama-se de reta focal l da parábola a reta que é perpendicular à reta diretriz R dessa parábola e que passa pelo ponto de foco F. A reta focal além de conter o ponto de foco F, também contém o seu ponto de vértice V.

Uma característica importante da parábola é que, toda a parábola é simétrica em relação a reta focal.

Para demostrar tal fato faz-se o uso da seguinte construção:

Seja λ a parábola de foco F, reta diretriz R, reta focal l e vértice V. Agora, seja P um ponto pertencente a parábola λ, e seja o ponto P_2 um ponto simétrico a P em relação a reta focal l. Tome dois pontos P' e P_2' pertencentes a reta diretriz R de modo que P' e P_2' sejam projeções dos pontos P e P_2 em R respectivamente, como observado na Figura 3.

Figura 3 – Estudo da simetria do Ponto P em relação a reta focal.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O segmento de reta PP_2 é perpendicular a reta focal l e $PP_2 \cap l = \{A\}$, sendo A o ponto médio do segmento PP_2. Desse modo vemos que os triângulos PAF e P_2AF são congruentes pelo caso LAL (lado comum, ângulo, lado), uma vez que $d(P, A) = d(P_2, A)$, o segmento AF é comum a os dois triângulos e os ângulos $P\hat{A}F$ e $P_2\hat{A}F$ são retos, o que comprova o congruência. Diante disso observa-se que $d(P, F) = d(P_2, F)$.

Como a reta focal l é perpendicular a reta diretriz R, temos que os segmentos PP_2 e $P'P_2'$ são paralelos. Assim o quadrilátero $PP_2P'P_2'$ é um retângulo, isso mostra que $d(P, P') = d(P_2, P_2')$. Como o ponto P pertence a parábola λ e pela definição $d(P, F) = d(P, P')$, chega-se que $d(P_2, F) = d(P_2, P_2')$. O que mostra que o ponto P_2 pertence a parábola λ.

Logo, se P é um ponto pertencente a parábola λ o seu ponto simétrico P_2 em relação a reta focal l também pertencerá a λ.

Observação: Segundo Delgado, Frensel e Crissaff (2017) a distância entre o foco F e a reta diretriz R de uma parábola é chamada de parâmetro da parábola, e para esse comprimento é atribuído o valor de $2p$, ou seja, $2p = d(F, R)$. Assim, percebe-se, pela definição da parábola, que o ponto de vértice V fica equidistante do ponto de foco F e o ponto de intersecção da reta focal com a reta diretriz da parábola, o que faz com que $p = d(V, F) = d(V, R)$.

4.5.1 Parábola de Vértice $V = (0, 0)$ e Reta Focal sobre o eixo OY

O primeiro estudo apresentado será a parábola com vértice na origem e sua reta focal coincidente com o eixo OY.

Seja a parábola λ, com vértice V, foco F, reta focal l, e reta diretriz R. Para essa parábola o vértice será $V = (0,0)$, como $d(V,R) = d(F,V)$, o seu foco será o ponto $F = (0,p)$, e a equação da reta diretriz será $R : y = -p$. Desse modo, seja $P = (x,y)$ um ponto pertencente a essa parábola, e $P_2 = (x,-p)$ um ponto pertencente a reta R e baixado no pé de P, de modo que $d(P,F) = d(P,P_2)$. Pela definição da parábola temos

$$d(P,F) = d(P,P_2).$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(0-x)^2 + (p-y)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (-p-y)^2}\\
\iff\ &\sqrt{x^2 + (p-y)^2} = \sqrt{(p+y)^2}\\
\iff\ &\sqrt{x^2 + (p-y)^2} = |p+y|\,.
\end{aligned}$$

Elevando a equação ao quadrado obtemos que

$$\begin{gathered}
x^2 + (p-y)^2 = (p+y)^2 \implies\\
x^2 + p^2 - 2py + y^2 = p^2 + 2py + y^2 \implies\\
x^2 = 4py.
\end{gathered}$$

Isolando y na equação

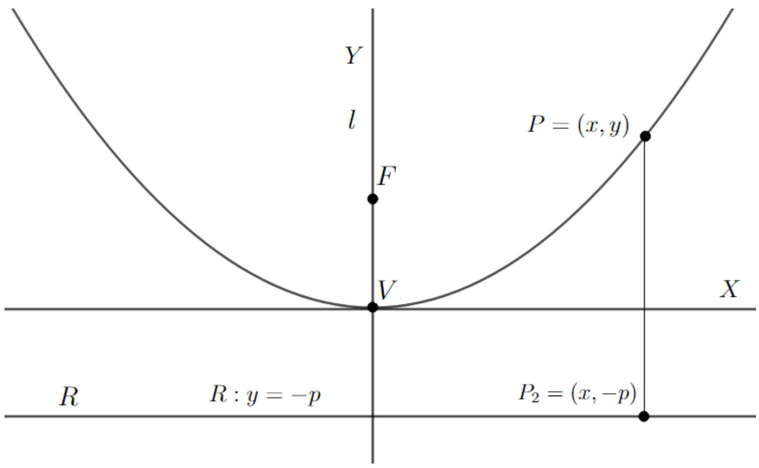
$$x^2 = 4py \Rightarrow y = \frac{x^2}{4p}.$$

Agora, chamando $y = f(x)$ e $a = \dfrac{1}{4p}$, tem-se

$$y = \frac{x^2}{4p} \implies f(x) = ax^2.$$

Por fim, conclui-se que os pontos do gráfico de $f(x) = ax^2$ estão sobre uma parábola, como indicado pela Figura 4.

Figura 4 – Parábola associada ao gráfico da função $f(x) = ax^2$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Se o ponto de foco da parábola for $F = (0, -p)$ e o ponto de vértice $V = (0, 0)$, e a reta diretriz $R : y = p$. Para um ponto qualquer $P = (x, y)$ pertencente a essa parábola teremos que

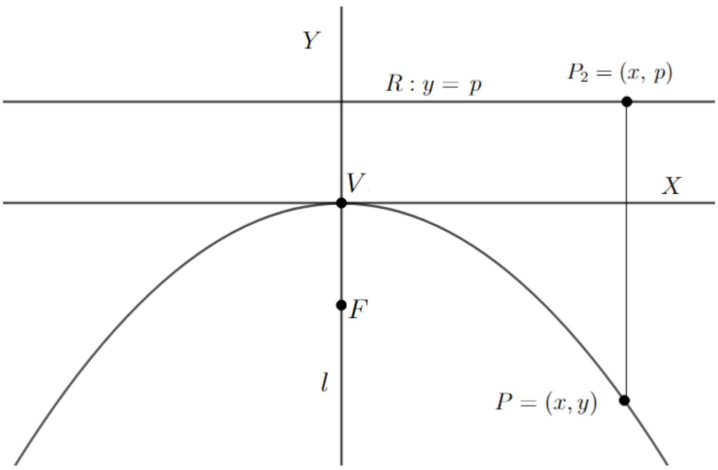
$$\begin{aligned} d(P,F) &= d(P,R) \\ \iff \sqrt{(0-x)^2 + (-p-y)^2} &= \sqrt{(x-x)^2 + (p-y)^2} \\ \iff \sqrt{x^2 + (p+y)^2} &= \sqrt{(p-y)^2} \\ \iff \sqrt{x^2 + (p+y)^2} &= |p-y| \\ \iff x^2 + (p+y)^2 &= (p-y)^2 \\ \iff x^2 + p^2 + 2py + y^2 &= p^2 - 2py + y^2 \\ \iff x^2 &= -4py. \end{aligned}$$

Isolando y na equação e novamente chamando $y = f(x)$ e $a = \dfrac{1}{4p}$, tem-se

$$y = -\frac{x^2}{4p} \implies f(x) = -ax^2.$$

Analogamente, conclui-se que os pontos do gráfico de $f(x) = -ax^2$ estão novamente sobre uma parábola (Figura 5).

Figura 5 – Parábola associada ao gráfico da função $f(x) = -ax^2$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Toda função quadrática da forma $f(x) = ax^2$ possuirá um gráfico em forma de parábola com vértice na origem, foco $F = (0, p)$ e reta focal l coincidindo sobre o eixo OY.

4.5.2 Parábola de Vértice $V = (0, y_0)$ e Reta Focal sobre o eixo OY

Agora, analisemos o gráfico da parábola sendo transladado sobre o eixo OY. Assim, seja a parábola λ deslocada sobre o eixo OY, com vértice $V = (0, y_0)$, foco

$F = (0, y_0 + p)$, reta focal l paralela a OX, e reta diretriz R, de equação $R : y = y_0 - p$. Seja o ponto $P = (x, y)$ um ponto pertencente a essa parábola, e seja $P_2 = (x, y_0 - p)$ um ponto pertencente a reta R, de modo que $d(P, F) = d(P, P_2)$, assim tem-se

$$\begin{aligned} & d(P,F) = d(P,R) \\ \iff & d(P,F) = d(P,P_2) \\ \iff & \sqrt{(0-x)^2 + (y_0 + p - y)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y - y_0 + p)^2} \\ \iff & \sqrt{x^2 + (y_0 + p - y)^2} = \sqrt{(y - y_0 + p)^2} \\ \iff & \sqrt{x^2 + (y_0 + p - y)^2} = |y - y_0 + p| \\ \iff & x^2 + (y_0 + p - y)^2 = (y - y_0 + p)^2 \\ \iff & x^2 + y_0^2 + p^2 + 2y_0p - 2yy_0 - 2py = y^2 + y_0^2 + p^2 - 2yy_0 - 2py_0 \\ \iff & x^2 = 4p(y - y_0). \end{aligned}$$

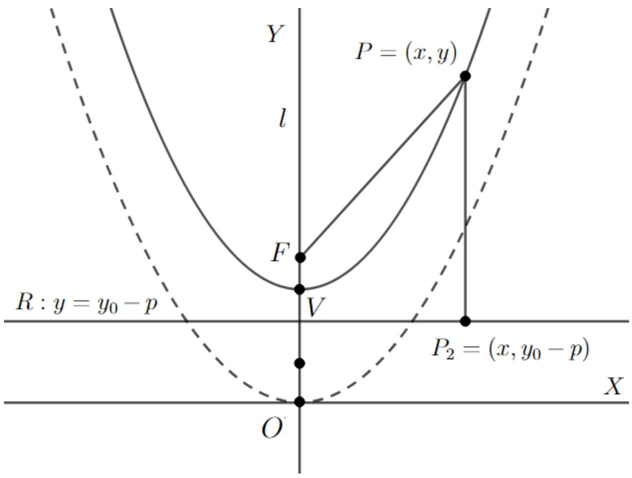
Ou reescrevendo

$$4py = x^2 + 4py_0 \implies y = \frac{x^2}{4p} + y_0.$$

Ou seja

$$y = ax^2 + y_0 \implies f(x) = ax^2 + y_0.$$

Figura 6 – Parábola associada ao gráfico da função $f(x) = ax^2 + y_0$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim, toda função quadrática da forma $f(x) = ax^2 + y_0$ possuirá um gráfico em forma de parábola com ponto de foco $F = (0, y_0 + p)$, vértice $V = (0, y_0)$ e reta focal coincidindo com o eixo OY (Figura 6).

4.5.3 Parábola de Vértice $V = (x_0, 0)$ e Reta Focal Paralela ao eixo OY

O próximo estudo será sobre o gráfico da parábola que translada sobre o eixo OX. Seja Λ uma parábola deslocada sobre o eixo OX, ela possui vértice $V = (x_0, 0)$, foco $F = (x_0, p)$, reta diretriz $R : y - p$, e reta focal $l : x - x_0$. Seja $P = (x, y)$ um ponto pertencente a parábola λ, e seja também $P_2 = (x, -p)$ um ponto pertencente a reta diretriz R, de modo que $d(P, F) = d(P, P_2)$. Assim pela definição de parábola tem-se

$$
\begin{aligned}
& d(P,F) = d(P,P_2) \\
\iff & \sqrt{(x_0 - x)^2 + (p - y)^2} = \sqrt{(x - x)^2 + (-p - y)^2} \\
\iff & \sqrt{(x_0 - x)^2 + (p - y)^2} = \sqrt{(p + y)^2} \\
\iff & \sqrt{(x_0 - x)^2 + (p - y)^2} = |p + y| \\
\iff & (x_0 - x)^2 + (p - y)^2 = (p + y)^2 \\
\iff & (x_0 - x)^2 + p^2 - 2py + y^2 = p^2 + 2py + y^2 \\
\iff & (x_0 - x)^2 = 4py \\
\iff & (x - x_0)^2 = 4py.
\end{aligned}
$$

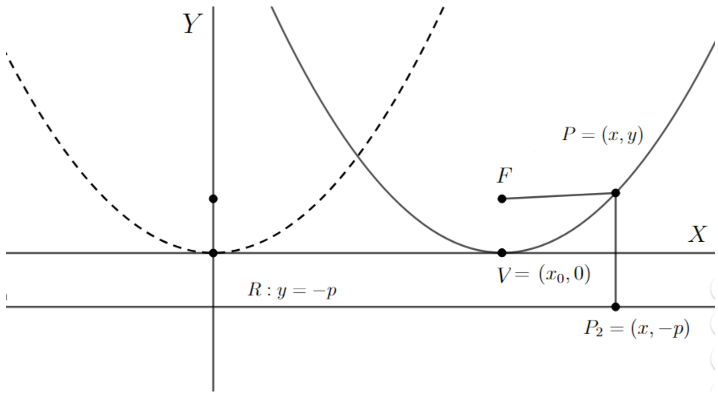
Como apresentado em Soares (2013, p.28), essa curva representa o gráfico de qualquer parábola que possui a sua reta focal l paralela com o eixo OY, pois

$$(x - x_0)^2 = 4py \implies y = \frac{1}{4p}(x - x_0)^2.$$

Como já foi visto anteriormente, chamando de $a = \dfrac{1}{4p}$ e $y = f(x)$ temos

$$f(x) = a(x - x_0)^2.$$

Figura 7 – Parábola associada ao gráfico da função $f(x) = a(x - x_0)^2$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Lima (2013, p.115), enfatiza que para afirmar o fato que o gráfico de uma função quadrática da forma $f(x) = a(x - x_0)^2$ é uma parábola de foco $F = (x_0, \frac{1}{4a})$ e reta diretriz horizontal $y = -\frac{1}{4a}$, basta observar que o gráfico de $f(x) = a(x - x_0)^2$ é obtido pelo gráfico da função $g(x) = ax^2$ com uma translação horizontal no eixo OX, de modo que $(x, y) \to (x + x_0, y)$.

Dessa forma, as funções quadráticas da forma $f(x) = a(x - x_0)^2$ apresentam um gráfico em forma de parábola com o ponto de foco $F = (x_0, p)$, vértice $V = (x_0, 0)$ e reta focal l paralela ao eixo OY (Figura 7).

4.5.4 Caso Geral da Parábola com Reta Focal Paralela ao eixo OY

Nesse caso a curva da parábola será transladada sobre os eixos OX e OY ao mesmo tempo, sendo o seu vértice o ponto $V = (x_0, y_0)$ e sua reta focal será paralela ao eixo OY.

Seja a parábola λ deslocada sobre o eixo Ox e OY, com vértice $V = (x_0, y_0)$, possuindo foco acima da reta diretriz R, $F = (x_0, y_0 + p)$, reta focal l paralela a OY, e reta diretriz R de equação $R : y = y_0 - p$. E seja o ponto $P = (x, y)$ um ponto pertencente a essa parábola λ, e seja $P_2 = (x, y_0 - p)$ um ponto pertencente a reta R, de modo que $d(P, F) = d(P, P_2)$, assim tem-se

$$
\begin{aligned}
& d(P,F) = d(P,P_2) \\
\iff & \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 + p - y)^2} = \sqrt{(x - x)^2 + (y_0 - p - y)^2} \\
\iff & \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 + p - y)^2} = \sqrt{(y_0 - p - y)^2} \\
\iff & \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 + p - y)^2} = |y_0 - p - y| \\
\iff & (x_0 - x)^2 + (y_0 + p - y)^2 = (y_0 - p - y)^2 \\
\iff & (x_0 - x)^2 + y^2 + y_0^2 + p^2 + 2y_0p - 2y_0y - 2yp = y^2 + y_0^2 + p^2 - 2y_0p - 2y_0y + 2py \\
\iff & (x_0 - x)^2 = 4py - 4y_0p \\
\iff & (x - x_0)^2 = 4p(y - y_0).
\end{aligned}
$$

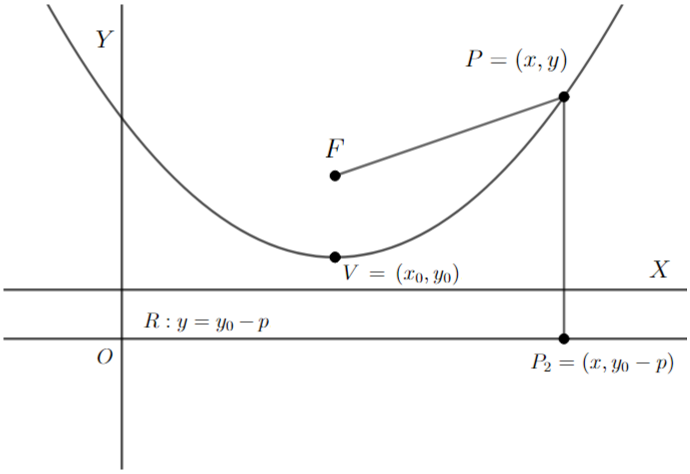
Reescrevendo

$$
\begin{aligned}
& (x - x_0)^2 = 4p(y - y_0) \implies (y - y_0) = \frac{1}{4p}(x - x_0)^2 \\
& \implies y = \frac{1}{4p}(x - x_0)^2 + y_0.
\end{aligned}
$$

Novamente, chamando de $a = \frac{1}{4p}$ e $f(x) = y$, tem-se

$$f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0.$$

Figura 8 – Parábola associada ao gráfico da função $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim, o gráfico de uma função quadrática da forma $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$ é a parábola de foco $F = (x_0, y_0 + p)$ e de reta diretriz horizontal $y = y_0 - p$. Esse fato pode ser confirmado uma vez que o gráfico da função $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$ é obtido a partir do gráfico da função $g(x) = a(x - x_0)^2$ realizando uma translação vertical $(x, y) \to (x + x_0, y)$, que leva a reta diretriz $y = -p$ na reta $y = y_0 - p$.

De modo geral, toda função quadrática da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ possui os pontos de seu gráfico sobre uma parábola, que contém o ponto de foco $F = (x_0, y_0 + p)$, reta diretriz $y = y_0 - p$ e reta focal paralela ao eixo OY. A Figura 8 apresenta esta situação.

4.6 A Propriedade de Reflexão da Parábola

A parábola é uma figura geométrica que é construída em um plano bidimensional, se essa figura plana for rotacionada em torno de um eixo fixo ela construirá uma superfície em três dimensões que recebe o nome de paraboloide de revolução. Sobre essa superfície gerada, é possível observar sua aplicação em diferentes situações do cotidiano, desde antenas parabólicas, fogões solares, espelhos esféricos, ou faróis de automóveis. O paraboloide de revolução, ou também chamado de superfície parabólica, é empregado devido à sua importante propriedade que diz que um raio quando incide na superfície parabólica, paralelamente ao eixo principal, é convergido para o foco dessa parábola. Para estudar de forma matemática a propriedade reflexiva desse paraboloide de revolução utiliza-se uma parábola que possui sua reta focal coincidente como o eixo de rotação do paraboloide.

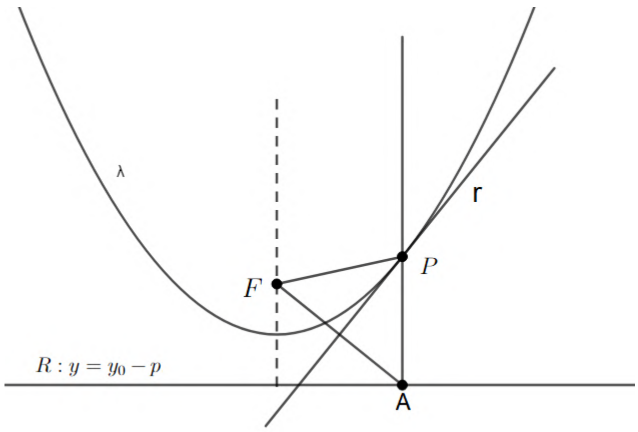
De acordo com Lima (2013) pode-se definir o ângulo entre uma reta e uma curva que possuem intersecção em um determinado ponto P, como sendo o ângulo entre essa reta e a reta que tangencia a curva no ponto P.

Utilizando o lema apresentado ainda por Lima (2013, p.124) e Araújo (2013, p.50) que diz o seguinte, as retas $y = ax + b$ e $y = a'x + b'$, com $a \neq 0$ e $a' \neq 0$ são perpendiculares se, e somente se, $a' = -\frac{1}{a}$.

Desse modo, seja uma parábola λ no plano cartesiano ordenado, de modo que sua reta focal seja paralela ao eixo OY. Seja F o ponto focal dessa parábola, e R a sua reta diretriz. Logo essa parábola representará o gráfico de uma alguma função quadrática.

Seja r a reta tangente a essa parábola no ponto $P = (x, y)$. Como já é conhecido nos cursos de Cálculo, a inclinação dessa reta tangente à parábola no ponto P é dada por $2x + b$. Assim, teremos o ponto A que será a projeção do ponto P sobre a reta R, ou seja, o segmento de reta AP é perpendicular a reta diretriz R. Essa construção é exibida pela Figura 9.

Figura 9 – Propriedade de Reflexão



Fonte: Araújo (2013, p.51).

Observa-se que o ponto $F = (-\frac{b}{2a}, y_0 + p)$, sendo y_0 o valor da ordenada do vértice da parábola, e o ponto $A = (x, y_0 - p)$, assim a inclinação do segmento de reta FA será dado por;

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_F}{x_A - x_F} = \frac{y_0 - p - y_0 - p}{x + \frac{b}{2a}}$$
$$= \frac{-2p}{x + \frac{b}{2a}} = -\frac{4pa}{2ax + b}.$$

Como $p = \frac{1}{4a}$, tem-se

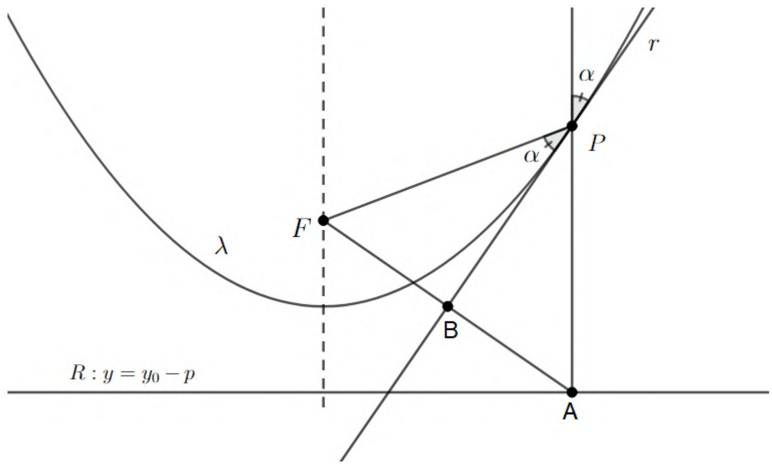
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{4pa}{2ax + b} = -\frac{4a\frac{1}{4a}}{2ax + b} = -\frac{1}{2ax + b}.$$

Assim, obtém que de acordo com o lema apresentado acima que o segmento de reta FA é perpendicular a reta tangente r que é tangente a parábola λ no ponto $P = (x, y)$.

Fazendo uma análise, como o ponto P pertence a parábola λ tem-se pela definição que $d(A, P) = d(P, F)$, o que afirma que o triângulo FPA é isósceles, logo os ângulos $A\hat{F}P$ e $F\hat{A}P$ são congruentes. Também, tem-se que como a reta tangente r é perpendicular ao segmento de reta FA, r contém a altura do triângulo referente ao vértice P, o que mostra que a reta r também é bissetriz do ângulo $F\hat{P}A$, o que implica que os ângulos $F\hat{P}B$ e $B\hat{P}A$ são iguais, e o ponto B sendo a intersecção da reta r com o segmento FA.

Esse resultado mostra que qualquer reta paralela à reta focal, quando intersecta a parábola em um ponto P faz ângulos iguais com a reta tangente à parábola nesse ponto P e com o segmento de reta que liga esse ponto P ao foco F (Figura 10).

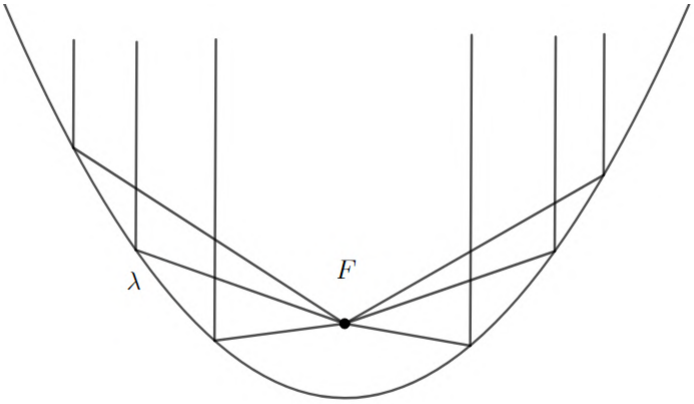
Figura 10 – O ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão



Fonte: Araújo (2013, p.52).

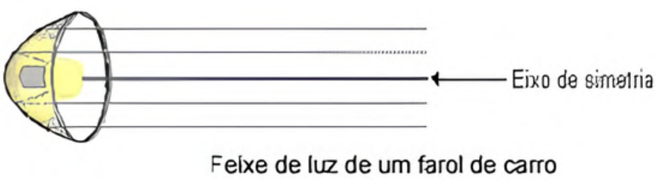
Como encontrado em Araújo (2013) e Ribeiro (2013) a propriedade de reflexão da parábola (Figura 11) possui diferentes aplicações no cotidiano. A capacidade de concentrar os raios de luz em um único ponto (foco) faz com que a parábola seja utilizada em antenas, holofotes, lanternas, faróis, espelhos e fogões solares, como é ilustrado pela Figura 12.

Figura 11 – Propriedade de Reflexão da Parábola



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 12 – Farol de um automóvel



Fonte: https://sites.unicentro.br/wp/petfisica/2016/03/30/parabolas-as-curvas-misteriosas/

5 Desenvolvimento das Atividades

A sequência de atividades apresentada a seguir tem o objetivo de responder à pergunta inicial “Será que é possível ensinar funções quadráticas através de atividades que fogem dos modelos tradicionais de ensino?” As atividades aqui propostas consideram em utilizar diferentes recursos didáticos, como uma atividades mediadas pelas Tecnologias Digitais com a utilização do software GeoGebra, uma atividade com modelagem matemática e uma atividade prática sobre a experimentação matemática. Todas as atividades elaboradas apresentam em suas construções materiais de baixo custo e de fácil acesso, sendo possível a aplicação em diferentes contextos escolares e a sua elaboração e adaptação em variadas situações.

Cada uma das três atividades tem a proposta de auxiliar o ensino de funções quadráticas em fases diferentes, ou seja, elas possuem objetivos e estratégias educacionais que permitem sua aplicação em momentos distintos da aprendizagem, sendo que cada uma delas pode trabalhar diferentes conceitos em sala de aula sobre o mesmo tema de funções quadráticas. Assim, elas podem ser aplicadas individualmente, em conjunto, ou unidas com outros recursos que os leitores julgarem necessários.

A primeira atividade possui o objetivo de ajudar na introdução do tema. Ela trabalha e busca desenvolver as primeiras noções do assunto, como por exemplo a análise de cada coeficiente da parábola e a direção de sua concavidade.

A segunda atividade tem a proposta de apresentar na prática uma aplicabilidade para as funções quadráticas através do lançamento oblíquo. Essa atividade explora assuntos variados sobre o tema como a análise do ponto de vértice, zero da função quadrática, e equações relacionadas do lançamento oblíquo.

A terceira atividade é elaborada com a finalidade de mostrar a parábola como um objeto geométrico que possui propriedades e características únicas que são interessantes e possíveis de serem amplamente exploradas no cotidiano.

5.1 Atividade 1 – O Jogo de Basquete

Objetivo

Desenvolver os conceitos iniciais de funções quadráticas, estudar seus coeficientes, vértices e zeros, além de propor a construção de seu gráfico.

Descrição

Essa atividade foi desenvolvida com o uso do software livre de geometria dinâmica GeoGebra, e tem como objetivo auxiliar os professores de matemática a introduzirem ou revisarem os conceitos fundamentais de funções quadráticas. Por meio de um jogo o aluno é levado a explorar e experimentar as funções quadráticas de forma lúdica e visual. Nessa abordagem o discente é convidado por meio do software a construir diferentes lançamentos para uma bola de basquete que deve acertar o seu alvo. Para isso acontecer, deve-se propor a manipulação dos valores dos coeficientes da função quadrática, variando cada parâmetro e consequentemente permitindo escolher a função que melhor represente o lançamento para conseguir atingir o objetivo.

Construção da Atividade "O Jogo de Baquete"

Para a construção dessa atividade utilizamos a versão clássica online do software GeoGebra que está disponível em <https://www.geogebra.org/classic?lang=pt_PT>. Para facilitar o entendimento da construção da atividade os ícones da barra de ferramenta do software GeoGebra foram nomeados de maneira alfabética como apresentada pela Figura 13.

Figura 13 – Painel do GeoGebra.

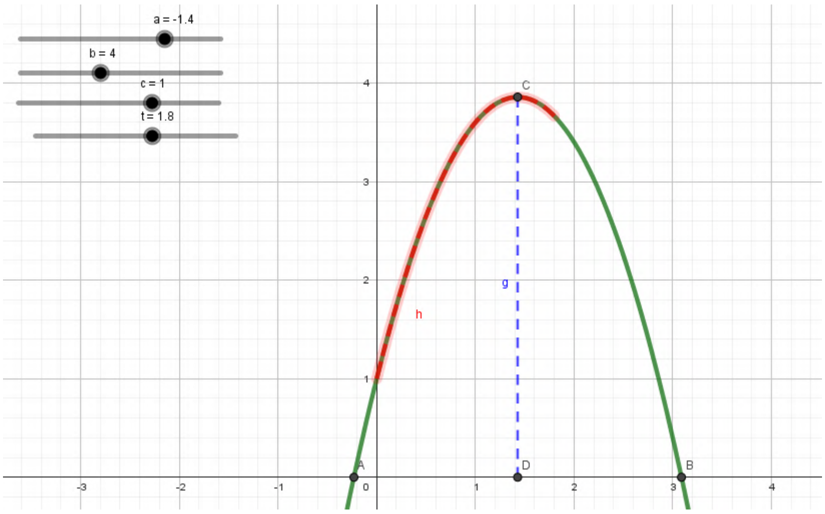
Fonte: Elaborada pelo autor.

O desenvolvimento da atividade segue as seguintes etapas:

- Clique no item J, depois em Controle Deslizante e crie os paramentos a, b e c. Clique com o botão direito sobre o parâmetro a clique em propriedades, controle deslizante e faça o parâmetro a variar de -5 até 0, com incrementos de 0.01. Analogamente faça o parâmetro b variar de 0 até 10 com incrementos de 0.1 e o parâmetro c variar de 0 até 1.5 também com incremento de 0.1.
- No campo de entrada crie a função: $f(x) = ax^2 + bx + c + 10$.
- Clique no item B e depois no ícone "interseção de dois objetos". Clique na função $f(x)$ e depois no e eixo OX. Na aba de visualização o resultado será os dois zeros de $f(x)$, assim criando os pontos A e B.

- Clique no item J, depois em Controle Deslizante e crie o paramento t, faça o parâmetro t variar de 0 até $x(B)$.
- Clique no item B e depois no item "Otimização", e logo em seguida clique na função $f(x)$, assim teremos o ponto de vértice C.
- Na aba de entrada crie o ponto D, de modo que $D = (x(C), 0)$.
- Clique no item C, e em seguida no ícone "Segmento", assim crie um segmento de reta de C até D. Clique com o botão direito sobre o segmento CD e clique em propriedades, clique em estilo, e mude o estilo da linha para pontilhado. Ainda no menu de configurações clique em avançado e na caixa "Condições para Exibir Objeto" escreva $t > x(C)$.
- Na aba de entrada digite "Função($f(x)$, 0 , t)", assim teremos uma outra função $h(x)$ que descreve a mesma curva que $f(x)$ mas apenas no intervalo da variável x entre zero e t (Figura 14). Percebe-se que a curva da função $h(x)$ aparece conforme t aumenta. Clique com o botão direito sobre a função $h(x)$ e depois clique em propriedades, clique em estilo, e mude o estilo da linha para pontilhado.

Figura 14 – Criando a atividade o Jogo de Basquete



Fonte: Elaborada pelo autor.

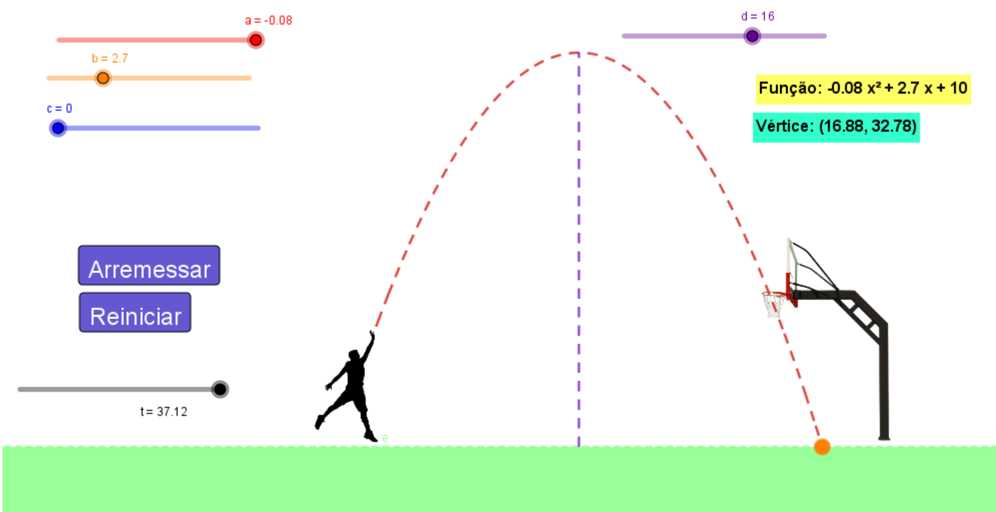
- Clique com o botão direito do mouse sobre a função $f(x)$, vá em propriedades, na aba básico desmarque a caixa "Exibir Objeto".
- Na caixa de entrada digite $P = (t, h(t))$.
- Na caixa de entrada digite *Círculo* $= (P, 0.5)$. Esse comando cria uma circunferência com centro no ponto P e raio com media de 0.5. Clique com o botão direito do mouse sobre esse círculo e na aba cor coloque transparência 100, e mude a cor para laranja.

- Clique no item J, e posteriormente clique na opção botão. Clique na janela de visualização, na legenda do Botão digite a palavra "Arremessar", e em seguida na janela de programação digite o seguinte texto “*IniciarAnimação*$(t, true)$”.
- Clique no item J, e clique em botão. Clique na janela de Visualização, na legenda do Botão digite “Reiniciar” e na janela de programação digite “*DefinirValor*$(t, 0)$”
- Sobre o parâmetro t, clique em propriedades, vá na aba “Controle Deslizante”, na caixa de “Animação” clique no item “Repetir” e escolha a opção “Crescente uma vez”. Na mesma caixa de animação mude a velocidade para 4.
- Clique em J, em seguida “inserir imagem” e coloque a “Figura 1”. Alinhe a imagem com o eixo x e de forma com que as mãos do jogador fiquem próximas a circunferência que será a bola de basquete. Serão introduzido dois pontos relacionados Figura 1, em cada um deles vá em propriedades na aba “básico”, na caixa “Valor” que indica a localização do ponto no plano, no valor da coordenada de y digite c. Assim a cada vez que o parâmetro c for modificado a imagem também será, dando a impressão que o jogador está pulando.
- Clique no item J e depois em “Controle Deslizante” e crie o paramento d, faça o parâmetro d variar de 0 até 25.
- Clique novamente em J, e em “inserir imagem” e coloque a “Figura 2”. Alinhe a imagem com o eixo x. Também serão introduzido dois pontos relacionados Figura 2, em cada um deles vá em propriedades na aba “básico” na caixa “Valor” que indica a localização do ponto no plano, coloque junto ao valor da coordenada x a expressão $+d$. Assim a cesta de basquete poderá se movimentar de acordo com o parâmetro d.
- Na caixa de entrada digite $y < 0$. Clique com o botão direito do mouse sobre $y < 0$ na janela de álgebra e vá em “Propriedades” depois “Cor”, escolha a cor verde, e na caixa de transparência coloque 100.
- Clique com o botão direito do mouse sobre a Janela de visualização e desmarque as opções “Eixos” e “Malhas”, assim o cenário ficará limpo possuindo apenas as imagens.
- Clique no item J, depois em “Texto”, digite na caixa de texto a palavra “Função:”, depois clique em “Objetos” e selecione a função $f(x)$.
- Clique no item J, depois em “Texto”, digite na caixa de texto a palavra “Vértice:”, depois clique em “Objetos” e selecione o ponto C.

- Clique com o botão direto do mouse sobre o ponto A e clique na opção propriedades, e na aba "Básico"desmarque a caixa "Exibir Objeto". Faça esse procedimento para os demais pontos que estão na tela.

Após a correta execução de todas as etapas o jogo apresentará uma forma como mostrada pela Figura 15.

Figura 15 – O Jogo de basquete pronto.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Essa atividade está publicada no site do GeoGebra online e pode ser acessada de maneira completa no endereço eletrônico <https://www.geogebra.org/m/tmwmuxtu>.

5.2 Atividade 2 – Lançamento com a Mini Catapulta

Objetivo

O objetivo dessa atividade é perceber a função quadrática em situações do cotidiano, reforçar o aprendizado sobre esse tema, e estudar e analisar o lançamento de objetos na superfície do planeta Terra.

Descrição

Essa atividade tem a proposta de servir de auxilio e motivação para propor e aprofundar o estudo do lançamento oblíquo. Através de uma atividade prática pode-se apresentar aos estudantes uma oportunidade de observarem uma aplicação real da função quadráticas e de todos os seus conceitos em uma situação do cotidiano. Nessa proposta os alunos são levados a vivenciarem a matemática como uma ferramenta que descreve o mundo físico.

A construção da mini catapulta serve para motivar o desenvolvimento de uma modelagem matemática que descreve o lançamento oblíquo na superfície do planeta Terra. Por meio dessa construção deve-se propor aos jovens situações de pesquisas e análises, como a coleta de dados sobre o tempo de lançamento e a distância percorria, a velocidade de lançamento do projétil, o ângulo de inclinação para o lançamento, e a construção de um modelo matemático que descreve a curva efetuado pelo projétil em um lançamento específico.

Construção da Atividade

Para a construção da base da mini catapulta, corte inicialmente dois palitos de artesanato com 8cm de comprimento. Assim construa um retângulo com quatro palitos de artesanato, de forma que dois lados de sua base tenha o comprimento de um palito comum, e a largura seja feita com os dois palitos cortados.

Sobre esse retângulo base, cole com cola quente outro palito de 8cm de comprimento de forma que este fique colocado aproximadamente no meio do retângulo e paralelo com as laterais como indicado pela Figura 16.

Sobre esta estrutura cole outros dois palitos sobre as laterais maiores do retângulo, de maneira que fique uma pequena abertura entre os palitos. Essa abertura será utilizada para passar o clipes de metal e ligar o braço da alavanca de lançamento.

Figura 16 – Construção da base da catapulta.

Fonte: Acervo do autor.

Para construir os pilares da catapulta cole dois palitos, um de cada lado nos lados maiores do retângulo base, esses palitos devem ter 7cm e devem ser colados perpendicularmente sobre a parte central da base, para isso utilize a ajuda de um esquadro ou de um transferidor. Estas colunas devem ser colocadas sobre as mesmas medidas, uma de cada lado, de forma que fiquem alinhadas (Figura 17). Também é necessário colar um pedaço de um palito na diagonal de cada coluna de forma a fortalecer a estrutura e evitar que a catapulta se quebre. Para isso, deve-se cortar dois palitos com 6cm cada um e colar uma ponta no meio do pilar e a outra ponta na base retangular.

Figura 17 – Construção das colunas da catapulta.

Fonte: Acervo do autor.

Após esses procedimentos, cole dois outros palitos na ponta dos palitos que estão perpendiculares a base, cole um na parte da “frente” e outro na parte de “traseira” das colunas. Assim existirá uma pequena abertura entre os dois palitos que foram colados, essa abertura servirá para encaixar as bordas do elástico.

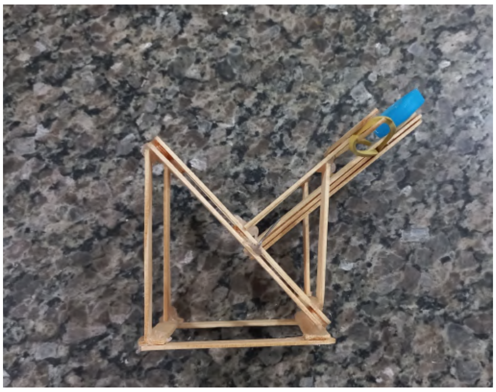
Para a construção da alavanca guia deve-se colar dois palitos um sobre o outro, mas entre eles é necessário que exista uma abertura na parte superior para possa ser passado o elástico. Essa abertura pode ser feita colando dois pedaços pequenos de palitos entre os outros dois. Na parte superior da alavanca deve-se colar a tampinha de refrigerante para servir como suporte de lançamento do projétil. Passe o clipes de metal entre a abertura na base e cole o seu meio na ponta inferior da alavanca.

Para se construir uma base de lançamento com inclinação basta construir um retângulo de maneira análoga ao construído anteriormente para a catapulta e colar a catapulta sobre ele com a inclinação de 45°. Ver Figuras 18 e 19.

Figura 18 – Catapulta pronta.

Fonte: Acervo do autor.

Figura 19 – Catapulta pronta 2.



Fonte: Acervo do autor.

5.3 Atividade 3 – Mesa de Sinuca Parabólica

Objetivos

Conhecer os principais pontos de uma parábola, analisar a parábola como um objeto geométrico próprio e investigar e explorar sua propriedade reflexiva.

Descrição

Essa próxima atividade tem por objetivo explorar de forma visual e lúdica a propriedade de reflexão da parábola. Ela propõe a construção de uma mini mesa de sinuca que apresentará a característica fundamental de qualquer parábola, que, todo objeto que incide sobre a curva da parábola paralelamente ao eixo focal será refletido no foco dessa parábola. Com essa atividade busca-se mostrar para os alunos uma aplicação prática das propriedades da parábola no cotidiano, fazendo-os refletirem sobre suas características fundamentais. A atividade proposta utiliza matérias concretos e manipuláveis que se enquadram na metodologia pedagógica de ensino através de atividades práticas, ou o ensino utilizando atividades com materiais lúdicos para a experimentação e análise de um fenômeno matemático. Essa atividade foi inicialmente pensada para durar três aulas, sendo a primeira aula destinada para desenvolver nos alunos o entendimento da parábola como um objeto geométrico próprio, apresentando-a separada das funções quadráticas, o que é um fator importante e as vezes pouco explorado por professores de matemática no ensino básico.

Materiais

A atividade utiliza matérias de fácil acesso e de custos baixos possibilitando que todo professor de matemática possa construí-la em sala de aula, ou mesmo propor que seus alunos a construam em casa ou na escola. Os materiais necessários para a elaboração da atividade são:

- Duas placas de isopor (uma de 1,0 cm e outra de 0,5 cm);
- Uma folha de cartolina ou papel EVA;
- lápis;
- Compasso;
- Folhas de papel;

- Tesoura;
- Régua;
- Cola de papel;
- Cola quente;
- Uma bolinha pequena.

A Construção da Parábola com Régua e Compasso

Em uma folha de papel construa uma reta r, e faça uma reta perpendicular à reta r, essa reta será a reta focal l da parábola.

Sobre a reta perpendicular determine um ponto F qualquer. O ponto F será o foco da parábola, e o ponto de intersecção da reta perpendicular com a reta r será o ponto O.

Com o compasso faça uma abertura maior que a metade do segmento FO, e com o compasso centrado em F marque um arco de circunferência, e com a mesma abertura, mas agora o compasso centrado em O marque outro arco de circunferência. A intersecção dos dois arcos serão os pontos A e B. Desse modo, a interseção do segmento AB com FO será o ponto V. O ponto V é o vértice da parábola.

Construa uma outra reta s que seja perpendicular à reta r, a reta s servirá como reta auxiliar para construir as retas paralelas.

Acima do ponto F marque um ponto qualquer P, e com o compasso centrado em P faça uma abertura correspondente a distância de P até a reta r, e transfira essa distância para a reta s, marcando o ponto P'. Construa a reta que passa por P e P', essa reta paralela a r.

Agora, com o compasso centrado no ponto F e com a mesma abertura anterior faça uma circunferência e marque a interseção dessa circunferência com a reta PP‘.

Faça esse procedimento para outros pontos, no final teremos várias retas paralela a reta r e cada uma dela possuindo dois pontos.

Assim, basta unir os pontos para ter uma curva próxima à curva de uma parábola.

A Construção da Atividade

Construa a parábola com régua e compasso em uma folha de sulfite padrão de formato A4, posteriormente utilizando uma tesoura recorte a curva da parábola, a folha de sulfite será separada em duas partes: uma contendo a curva da parábola e a reta diretriz e a outra parte contendo o foco.

Em seguida coloque a parte da folha de sulfite que contém o traço da parábola (a parte com a concavidade) sobre uma placa de isopor com o mesmo tamanho de uma folha de sulfite, e utilizando uma caneta de tinta grossa desenhe essa curva da parábola sobre a placa.

A placa de isopor que será contornada a curva da parábola deve possuir aproximadamente o diâmetro da bolinha que será utilizada na atividade, para essa atividade utilizou-se uma placa de isopor com espessura aproximada de 1cm.

Após marcar a curva da parábola sobre o isopor, faça o recorte dessa curva como indicado na Figura 20.

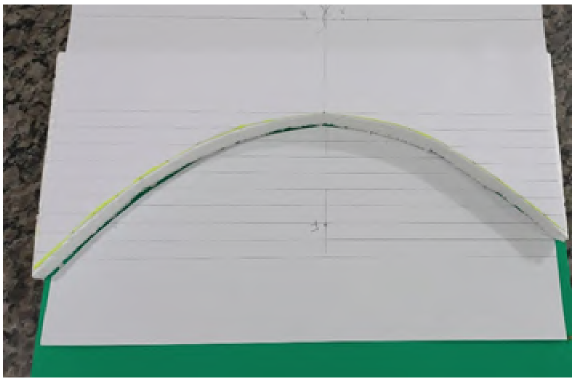
Figura 20 – Parábola cortada no isopor.

Fonte: Acervo do autor.

Corte uma outra placa de isopor com a mesma largura da curva da parábola, e cole a cartolina sobre essa placa. Essa segunda folha de isopor vai simular a superfície mesa de sinuca, logo ela terá que possuir a mesma largura da concavidade da parábola feita no primeiro isopor, e seu comprimento poderá ser maior.

Cole o isopor que contem a concavidade da parábola com cola quente sobre a segunda placa, posteriormente marque o foco da parábola sobre a superfície da mesa com a segunda parte da folha de sulfite que contém o foco da parábola (Figura 21).

Figura 21 – Construção da atividade 3



Fonte: Acervo do autor.

Utilizando um compasso centrado no ponto do foco que foi marcado sobre a mesa desenhe uma circunferência de diâmetro maior que a bolinha que irá ser utilizada na atividade. Corte essa circunferência com um estilete pequeno para que seja feito o buraco da mesa de sinuca.

Para a última etapa de construção da atividade, é necessário que cortemos tiras finas de isopor para colar nas laterais da mesa. Elas servirão para que quando a bolinha for arremessada não saia da superfície da mesa e continue no jogo. A Figura 22 apresenta a atividade pronta.

Figura 22 – Atividade 3 Pronta

Fonte: Acervo do autor.

5.4 Uma Proposta de Aplicação para as Atividades “Mesa de Sinuca Parabólica” e “O Jogo de Basquete”

Nesse momento será discutido uma possível aplicação em sala de aula para as atividades “Mesa de Sinuca Parabólica” e “O Jogo de Basquete”. A atividade “Lançamento com a Mini Catapulta” foi aplicada em uma escola de ensino básico da rede pública estadual de ensino e será apresentada e discutida no próximo capítulo.

Público Alvo

A sequência de aulas foi elaborada para uma turma do primeiro ano do ensino médio, e deve ser aplicada durante o desenvolvimento das habilidades do Currículo Paulista (EM13MAT502) e a (EM13MAT402) que propõe os estudos inicias sobre o tema de funções quadráticas, apresentando e desenvolvendo os temas de zeros das funções quadráticas, pontos de máximos e mínimos, vértices, sua representação gráfica no plano cartesiano e seu comportamento. Para aplicação dessa atividade serão necessárias um total de sete aulas que podem ser trabalhadas pelo professor de matemática e podem ser distribuídas ao longo da semana.

Objetivos e Metodologia

O objetivo principal dessa proposta de atividade é trazer uma ressignificação do tema de funções quadráticas para dentro da sala de aula, articular e expor o assunto sobre uma ótica das metodologias ativas, trazendo uma abordagem que seja instigante e desafiadora para os alunos. Nessa proposta, o objetivo geral da atividade ainda se estende em criar mecanismos e práticas para auxiliar o ensino do tema proposto em sala de aula pelo professor por meio de atividades práticas e lúdicas que complementam o material didático utilizado por este agente em sua jornada tradicional de ensino, uma vez que as atividades aqui apresentadas podem ser um forte material de apoio, que utilizam uma proposta diferenciada, e quando somadas a metodologia, a prática, e a experiência do docente podem trazer bons resultados para a sala de aula.

Desse modo, o propósito das aulas aqui apresentadas serão de, além de criar uma sequência de atividades embasadas nas metodologias ativas que auxiliam no ensino do tema de funções quadráticas, também serão o de permitirem que os alunos explorarem e descubram as propriedades das parábolas, percebendo suas diferentes aplicações no cotidiano em diferentes áreas, possibilitando um maior entendimento e aproveitamento do assunto.

Essa atividade utilizará como metodologia de ensino a investigação matemática, que de acordo com os autores Jucá e Pironel (2022), possui em sua abordagem uma ênfase na descoberta por parte do aluno, ela propõe que o discente construa e formule conjecturas e hipóteses, realize os devidos testes de validação, e confirme ou não um determinado padrão sobre algum problema que esteja sendo observado ou estudado, assim levando ao amadurecimento dos argumentos, melhorando e refinando as próximas conjecturas. Essa abordagem de ensino já foi analisada e discutida brevemente no capítulo dois.

Descrição da Atividade

O primeiro encontro com a turma terá o objetivo específico de introduzir e trabalhar os conceitos iniciais da função quadrática, mostrar seu gráfico e sua relação direta com os valores do coeficiente da função, e iniciar uma investigação sobre as propriedades das parábolas, para esse primeiro encontro serão necessárias duas aulas. A primeira aula da atividade se inicia com o professor relembrando para a turma os conceitos de função quadrática, posteriormente separa a turma em grupos de três alunos e apresenta para a eles a atividade “O Jogo de Basquete” construído no software livre GeoGebra. O professor projeta na lousa o jogo e pede para cada grupo tentar acertar a cesta de basquete, e a cada lance que o grupo faz deve-se prestar atenção nos parâmetros da função quadrática que são selecionados e modificados. Dessa forma, espera-se que os grupos percebam o que acontece com a trajetória da bola quando se modifica os coeficientes da função, percebam como cada coeficiente da função quadrática tem sua relação direta na construção do gráfico da parábola.

Deixado algum tempo para exploração e analise do jogo, o professor propõe para o grupo uma nova atividade. Ele apresenta para turma a atividade da “Mesa de Sinuca Parabólica”, e sem dar muitas explicações sobre o seu funcionamento, o docente estipula um desafio para a turma, pede para que cada aluno tente acertar a bolinha na caçapa da mesa, mas para isso deve-se obrigatoriamente lançar a bolinha sobre a curvatura da mesa de sinuca. Deixado um tempo para os alunos reconhecerem a atividade e experimentarem suas possibilidades, o professor pergunta para a turma; “Será que existe um padrão para lançar a bolinha na mesa de Sinuca?” Ou “Será que existe uma maneira de lançar a bolinha sobre a curva da mesa de sinuca de modo que ela sempre caia na caçapa?” Após essa indagação pede-se para que os grupos façam uma analise do experimento e realizem anotações propondo hipóteses e possíveis conjecturas. Na segunda aula desse primeiro encontro os alunos devem responder uma folha de atividades a respeito das analises e observações feitas por eles em relação as atividades apresentadas.

A primeira pergunta da Folha 1 de Atividades (Figura 23) tem o objetivo de propor que os alunos dissertem a respeito de suas observações referente a atividade "Mesa de Sinuca Parabólica", percebam a propriedade de reflexão da parábola, e analisem que quando a bolinha for arremessada paralelamente ao eixo focal ela será refletida diretamente para o foco da parábola, assim espera-se que cada grupo formule suas hipóteses e consiga descrever esse padrão.

Figura 23 – Pergunta 1 - Folha de Atividades 1

Folha de Atividades 1

PPGECE ufscar

1) No experimento da mesa de sinuca existe algum padrão que pode ser analisado?

Fonte: Elaborada pelo autor.

A segunda pergunta da atividade (Figura 24) tem o objetivo de tentar relacionar as duas atividades, "O Jogo de basquete" com a atividade "Mesa de Sinuca Parabólica", nela os alunos são estimulados a encontrarem um padrão entre a curva descrita pela bola de basquete quando apressada para a cesta e a curva encontrada na mesa de sinuca. Espera-se nessa pergunta que os alunos consigam perceber que as duas curvas são uma parábola, e que na primeira atividade a curva está associada a uma função quadrática, mas na outra atividade não está.

Figura 24 – Pergunta 2 - Folha de Atividades 1

2) Será que existe uma possível relação entre a curva descrita no lançamento da bola apresentada no jogo de basquete e o experimento mostrados pelo professor?

Fonte: Elaborada pelo autor.

A terceira pergunta (Figura 25) trata a respeito do ponto focal da parábola. Nessa pergunta os alunos devem observar que a caçapa da mesa de sinuca está em um local privilegiado, no ponto focal da parábola, e que esse ponto é único. Assim, espera-se que os grupos, através da observação, consigam responder essa pergunta com certa facilidade, e argumentem que caso a caçapa esteja em um ponto diferente do atual a bolinha não cairia na caçapa. Para responder corretamente a essa pergunta é necessário que os grupos tenham encontrado uma conjectura correta na primeira pergunta da atividade.

Figura 25 – Pergunta 3 - Folha de Atividades 1

3) A caçapa da mesa de sinuca aparenta estar em um lugar privilegiado, se fosse possível deslocá-lo de lugar a bolinha quando batesse na curva da mesa ainda cairia nele?

Fonte: Elaborada pelo autor.

A última pergunta da primeira folha de atividade (Figura 26) tem o intuito de analisar se os alunos conhecem os conceitos fundamentais para a construção de qualquer parábola, o ponto de foco e a reta diretriz de uma parábola. Essa pergunta visa observar se os alunos já foram expostos a esses conceitos em algum momento de sua vida escolar, e se o fato de já conhecer esses conceitos facilitou em formular as hipóteses do experimento.

Figura 26 – Pergunta 4 - Folha de Atividades 1

4) Nos seus estudos sobre parábolas você já ouviu falar sobre o conceito de foco e de reta diretriz?

Fonte: Elaborada pelo autor.

O segundo encontro tem o objetivo de discutir os resultados encontrados pelos grupos sobre as atividades apresentadas no encontro anterior, também possui a proposta de apresentar para os alunos a parábola como um objeto geométrico próprio que possui características geométricas únicas, e que é associado ao gráfico de uma função quadrática, mas pode muito bem ser estudado de forma individual. Esse segundo encontro deve ter duração de duas aulas, a primeira aula é destinada a discutir as observações que os alunos realizaram nas aulas passadas apresentando suas conjecturas, e como fizeram para testá-las e realizar melhorias em seus argumentos e hipóteses. Uma outra aula é destinada a estudar a parábola, apresentado suas propriedades, seu ponto e sua reta focal e sua reta diretriz. Nesse momento deve-se apresentar para a turma as aplicações da parábola em diferentes áreas, como suas aplicações em antenas, fogões solares e faróis, deixando bem claro sua utilização no cotidiano.

Nessa aula também será proposto a construção da parábola pelos alunos com régua e compasso, introduzindo e relembrando as noções das construções geométricas, essa construção da parábola será utilizada no próximo encontro quando será feita a construção da mesa de sinuca parabólica pelos grupos.

O terceiro e último encontro tem o objetivo de propor a construção da atividade “Mesa de Sinuca Parabólica” para a turma. Essa atividade deve ter duração de três aulas, sendo duas aulas para a construção da atividade, e uma aula para a discussão do experimento e responder de forma individual a segunda folha de atividades proposta. A proposta da construção do experimento tem a função de fortalecer o conhecimento apresentado aos alunos, propõe uma interação maior com o tema trabalhado estreitando a relação entre o discente e a matemática, e deixando a aula muito mais interessante, sendo possível desenvolver diferentes habilidades nos alunos.

A segunda folha de atividades tem o propósito de analisar de forma qualitativa o quanto a sequência de aulas foi significativa para os alunos, ela visa avaliar a qualidade das respostas que os alunos apresentaram sobre o tema trabalhado, auxiliando o professor no direcionamento das próximas aulas. Essa segunda folha de atividade é direcionada para esse terceiro encontro, e possui perguntas que abordam desde os conceitos inicias sobre a parábola, como o entendimento sobre o ponto de foco e a reta diretriz, sua propriedade de reflexão, e também sobre como foi a construção e analise do experimento por parte dos alunos, levando-os a refletirem sobre seus erros e acertos. A folha de atividades 2 está apresentada no Apêndice B.

6 Aplicação da Atividade Lançamento com a Mini Catapulta

Nesse momento o trabalho apresentará uma pesquisa qualitativa sobre uma das atividades elaboradas no capítulo anterior utilizada em sala de aula. Nessa etapa serão descritos e analisados os momentos de aplicação em sala junto com os alunos, mostrando suas principais dificuldades, erros, e acertos. Também será feita uma investigação a respeito da aplicabilidade da atividade, e seu potencial em tentar sanar as dificuldades da turma.

A pesquisa foi formada através da coleta de dados construída por meio de um teste diagnóstico inicial, e listas de atividades que foram apresentadas no decorrer dos encontros, além da observação do pesquisador, que descreveu a reação dos alunos durante o processo.

A atividade escolhida para essa etapa foi a atividade “Lançamento com a Mini Catapulta”. A turma analisada apresentava necessidades pedagógicas específicas e estava em uma etapa do ensino propício para realização desta atividade, uma vez que a atividade proposta possui a capacidade de trabalhar diferentes assuntos relacionados a funções quadráticas e pode atuar de forma multidisciplinar com temas da física.

6.1 O Público Alvo

A primeira aplicação de uma das atividades propostas aconteceu em uma escola pública no interior do estado de São Paulo, na cidade de Casa Branca. O local de aplicação foi a Escola Estadual Lauro de Araújo que se encontra no distrito de Lagoa Branca. A escola é de pequeno porte e atende uma comunidade inserida nas proximidades da zona rural, fortemente ligada as atividades de agropecuária. Possui turmas de ensino fundamental e de ensino médio, uma boa infraestrutura com laboratório de informática, biblioteca, quadra de futsal e vôlei, além de um amplo espaço físico.

A aplicação da atividade foi realizada em uma turma de terceiro ano de ensino médio, mais especificamente no período da manhã e contando inicialmente com a presença de 11 jovens que possuíam idades entre 16 a 18 anos.

A aplicação e o desenvolvimento da proposta aconteceram no segundo semestre do ano de 2023 durante o período de 31/10 à 05/12 possuindo cinco momentos de aplicação, totalizando um montante de nove aulas.

6.2 Objetivos e Metodologias

A sequência de atividade proposta deveria ter como objetivo principal resgatar os conceitos de funções quadráticas, mostrar uma aplicação prática para esse tema, e trazer a ressignificação desse conteúdo para a turma. Dessa forma, a atividade escolhida para essa ocasião foi a atividade “Lançamento com a Mini Catapulta”. Essa atividade tem a proposta de trabalhar o assunto de funções quadráticas sobre uma perspectiva prática. Através da modelagem matemática os alunos podem resolver problemas relacionados a realidade, resgatar conceitos fundamentais sobre funções quadráticas, desenvolver habilidades de pensamento crítico, reflexivo, e estimular a criatividade, além da possibilidade de trabalhar diferentes conceitos, assumindo um caráter interdisciplinar, relacionando a matemática com a física.

Como o conteúdo de funções é apresentado durante todo o ensino médio e as funções quadráticas são trabalhadas em diferentes momentos dessa etapa, os alunos da turma escolhida já tiveram um contato significativo com esse tema durante sua formação no ensino fundamental e médio. Logo, a atividade planejada além de tentar passar uma outra perspectiva para os alunos sobre os temas matemáticos, serviria também para reforçar e recuperar alguma lacuna educacional que eles poderiam apresentar.

Para um melhor direcionamento da atividade e pensando em trabalhar as dificuldades específicas e pontuais daquela turma, aplicou-se inicialmente uma atividade diagnóstica contendo alguns conteúdos básicos, em formato de perguntas, sobre o tema de funções quadráticas. O teste diagnóstico possibilitaria criar estratégias específicas e mais eficientes, além de um melhor direcionamento dos conteúdos e recursos, e também permitindo o professor a conhecer melhor as dificuldades de sua turma e de seus alunos de forma individual e coletiva, percebendo seus conhecimentos prévios a respeito do tema.

Para essa aplicação utilizou-se como metodologias ativas o ensino de matemática mediada por tecnologias digitais e a modelagem matemática. Em todos os momentos de aplicação procurou-se implementar aulas com atividades diferenciadas que buscavam a construção do conhecimento centrada no aluno, levando em consideração seus conhecimentos prévios sobre os temas estudados, suas experiências, e a realidade a qual eles estavam inseridos. Procurou-se criar ambientes que favorecessem a troca de saberes, o cooperativismo, e o fortalecimento entre professor e alunos, também procurou aplicar atividades que promovessem a autonomia, a reflexão e a perseverança na construção do conhecimento.

6.3 Apresentação e Aplicação do Teste Inicial

A primeira aplicação com os alunos ocorreu no dia 31/10/2023 e teve duração de duas aulas. A primeira aula teve a proposta de conversar com a turma sobre o desenvolvimento de uma atividade com a finalidade de trabalhar o tema de funções quadráticas naquela sala. O propósito daquela atividade que seria desenvolvida com eles era de buscar uma aplicação diferenciada para o tema de funções quadráticas, e utilizando para isso uma atividade prática. Assim, foi apresentado para a turma o problema de deveria ser trabalhado e resolvido **"Será que é possível determinar a trajetória de um corpo que é arremessado na superfície do Planeta Terra através de uma modelagem matemática?"**

Foi mostrada a ideia de tentar determinar a função que descreve o movimento de um objeto que é arremessado na superfície do nosso planeta, e que para isso seria utilizado como ferramenta de apoio uma mini catapulta que seria construída por eles. A conversa seguiu com o professor e os alunos acordando sobre as possíveis etapas do desenvolvimento do projeto, e determinando os objetivos a serem alcançados em cada uma delas.

A segunda aula foi utilizada para a realização do teste diagnóstico (Figura 27). Nesse momento foi entregue uma folha para cada aluno contendo algumas questões sobre o assunto proposto. A atividade diagnóstica foi aplicada em uma única aula e durante sua aplicação os alunos foram colocados em duplas ou trios para facilitar a troca de informações e de conhecimentos.

Após a aplicação, e diante da análise do teste diagnóstico ficou claro que parte da turma relembrava de alguns tópicos sobre o tema, mas também mostrou-se evidente que uma parte significativa da turma tinha dificuldades nos conceitos básicos de funções quadráticas, especialmente na construção e na interpretação do gráfico da parábola, sendo que durante a aula de aplicação do teste muitos alunos se queixaram por ter que tentar realizar essa tarefa, mostrando claramente uma grande dificuldade na construção do gráfico.

Desse modo, a atividade foi dividida em quatro momentos distintos, sendo eles:

• uma revisão dos conteúdos fundamentais sobre funções quadráticas;

• uma discussão sobre o lançamento oblíquo e uma pesquisa sobre a funcionamento de uma catapulta;

• a construção da mini catapulta e coleta de dados;

• a modelagem matemática e discussão dos resultados.

Figura 27 – Aplicação do teste diagnóstico.

Fonte: Acervo do autor.

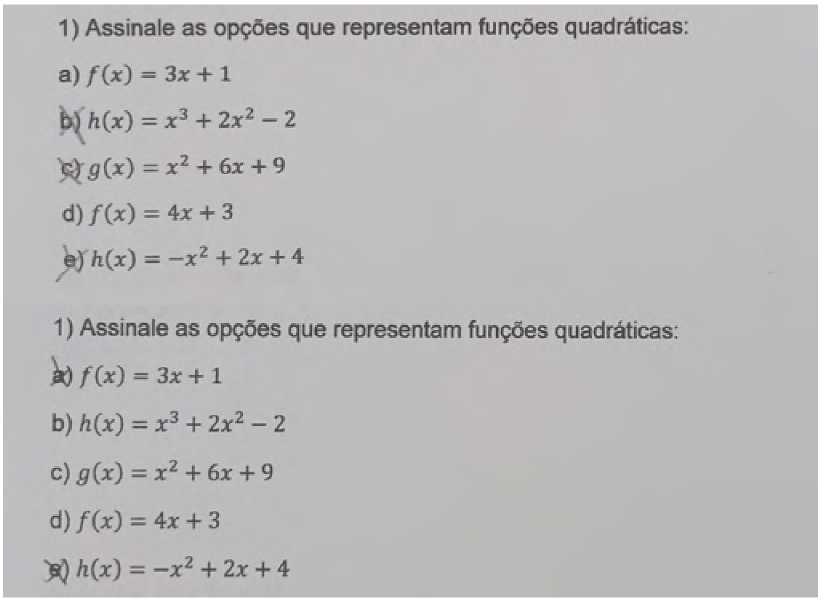
Uma revisão inicial sobre o tema mostrou-se necessária, pois muitos alunos não se lembravam dos conceitos de funções quadráticas, nem lembravam de como poderíamos analisar e modelar o movimento de um corpo que fosse arremessado por uma catapulta. Assim, para um completo entendimento do assunto e um maior aproveitamento da atividade foi preciso fazer essas investigações.

6.4 Análise do Teste Diagnóstico

O teste diagnóstico, como já mencionado anteriormente, serviu para determinar pontos importantes a serem recuperados em sala de aula, além de possibilitar que o professor conhecesse melhor sua turma. Essa atividade possuiu seis questões sobre o tema de funções quadráticas com assuntos que foram trabalhados durante o ensino médio, diante dos resultados alcançados pelos alunos foram possíveis direcionar as atividades, o ritmo de aplicação, e as abordagem a serem seguidas. Nesse momento faremos algumas considerações sobre essa atividade inicial e apresentaremos algumas conclusões.

A primeira pergunta do teste indicada pela Figura 28 tem como objetivo analisar se o aluno é capaz de reconhecer uma função quadrática. Nessa questão boa parte da turma respondeu de forma satisfatória, mas também existiram respostas erradas. Assim, percebe-se que alguns alunos dessa turma ainda possuem dificuldades em reconhecer uma função quadrática, ou no mínimo apresentam algumas dúvidas pontuais.

Figura 28 – Respostas da pergunta 1.


1) Assinale as opções que representam funções quadráticas:

a) $f(x) = 3x + 1$

b) $h(x) = x^3 + 2x^2 - 2$

c) $g(x) = x^2 + 6x + 9$

d) $f(x) = 4x + 3$

e) $h(x) = -x^2 + 2x + 4$

1) Assinale as opções que representam funções quadráticas:

a) $f(x) = 3x + 1$

b) $h(x) = x^3 + 2x^2 - 2$

c) $g(x) = x^2 + 6x + 9$

d) $f(x) = 4x + 3$

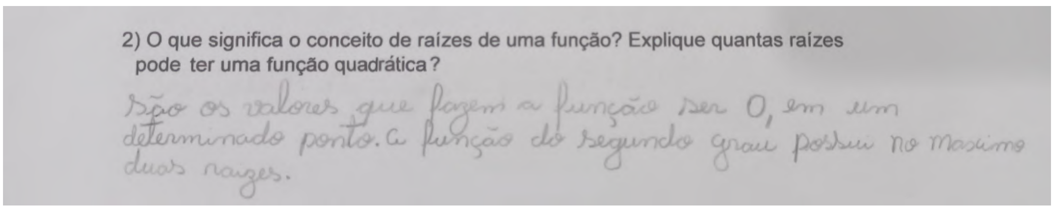
e) $h(x) = -x^2 + 2x + 4$

Fonte: Acervo do autor.

A segunda pergunta (Figura 29) possui o objetivo principal de analisar se os alunos estão familiarizados com o conceito de zero de uma função, ou seja, se eles são capazes de explicar com suas palavras o que significa o conceito de zero de uma função quadrática. Era esperado que os alunos argumentassem sobre o ponto que faz a função ser nula, ou o ponto que o gráfico da função faz intersecção com o eixo x, ou algo similar.

Essa questão apresentou respostas variadas, com alguns alunos respondendo corretamente, outros responderam errado, mas uma parte significante argumentou de maneira incompleta, apresentando uma resposta que pode ser considerada parcialmente correta. Assim foi possível notar que alguns alunos ainda apresentam dúvidas relevantes sobre os temas de função quadrática.

Figura 29 – Respostas da pergunta 2.

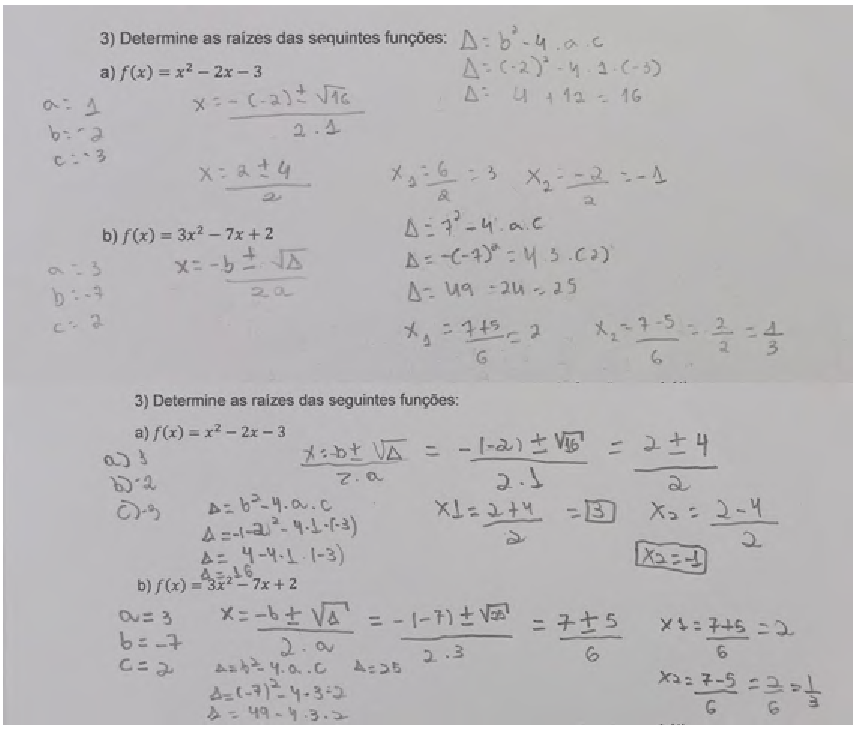

2) O que significa o conceito de raízes de uma função? Explique quantas raizes pode ter uma função quadrática?

São os valores que fazem a função ser 0, em um determinado ponto. a função do segundo grau possui no maximo duas raizes.

Fonte: Acervo do autor.

A terceira pergunta ainda abordava o assunto de zeros da função quadrática (Figura 30), mas dessa vez era pedido que os alunos encontrassem esses valores. Como essa questão se tratava de elaborar os cálculos, muitos alunos não lembravam da fórmula para determinar os zeros desse tipo de função (fórmula de Bhaskara), assim três alunos que tinham mais facilidade com a matemática ajudaram os outros.

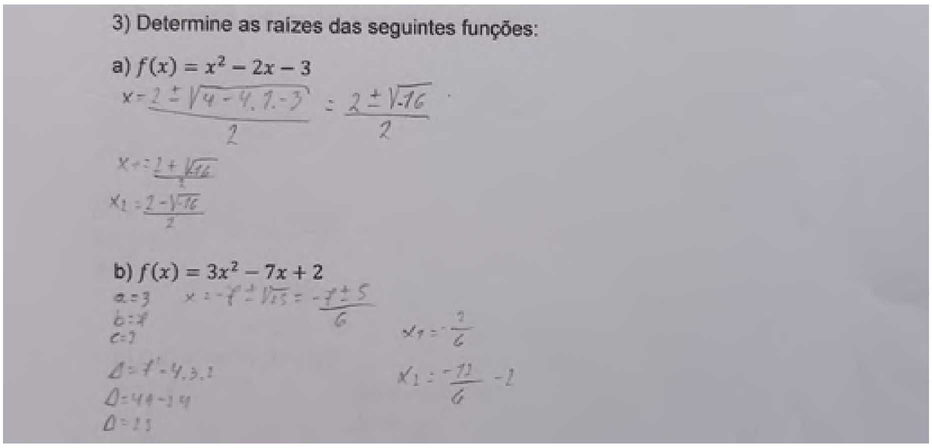
Figura 30 – Respostas da pergunta 3.



Fonte: Acervo do autor.

Na Figura 31 percebe-se que alguns alunos apresentam dificuldades com relação a essa pergunta, iniciando as contas, mas errando nos cálculos e não conseguindo apresentar o raciocínio completo para chegar a solução.

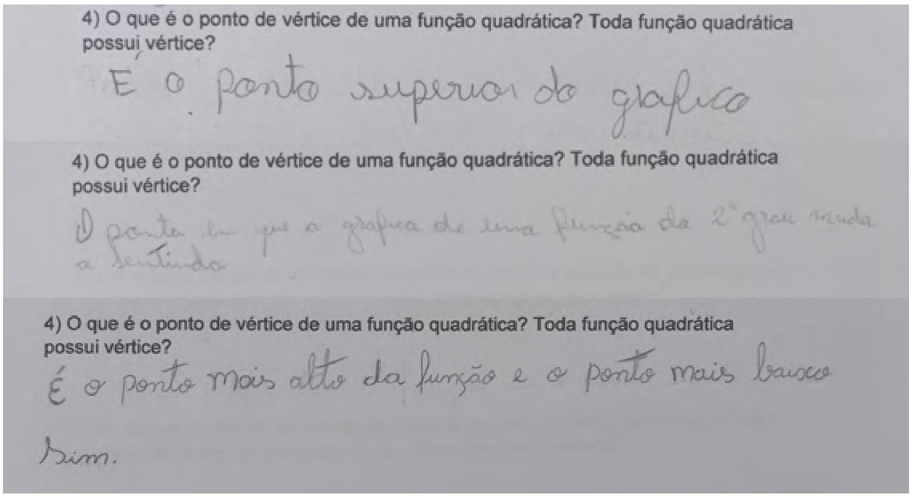
Figura 31 – Resposta errada da pergunta 3.



Fonte: Acervo do autor.

O ponto do vértice começa a ser trabalhado na quarta questão (Figura 32), que tem como objetivo analisar os conhecimentos prévios dos alunos sobre esse tema. A maior parte dos discentes respondeu essa questão de maneira satisfatória, mas ainda existiu algumas respostas que se apresentaram de forma incompleta.

Figura 32 – Respostas da pergunta 4.


4) O que é o ponto de vértice de uma função quadrática? Toda função quadrática possui vértice?

É o ponto superior do grafico

4) O que é o ponto de vértice de uma função quadrática? Toda função quadrática possui vértice?

O ponto em que o grafico de uma função do 2º grau muda o sentido

4) O que é o ponto de vértice de uma função quadrática? Toda função quadrática possui vértice?

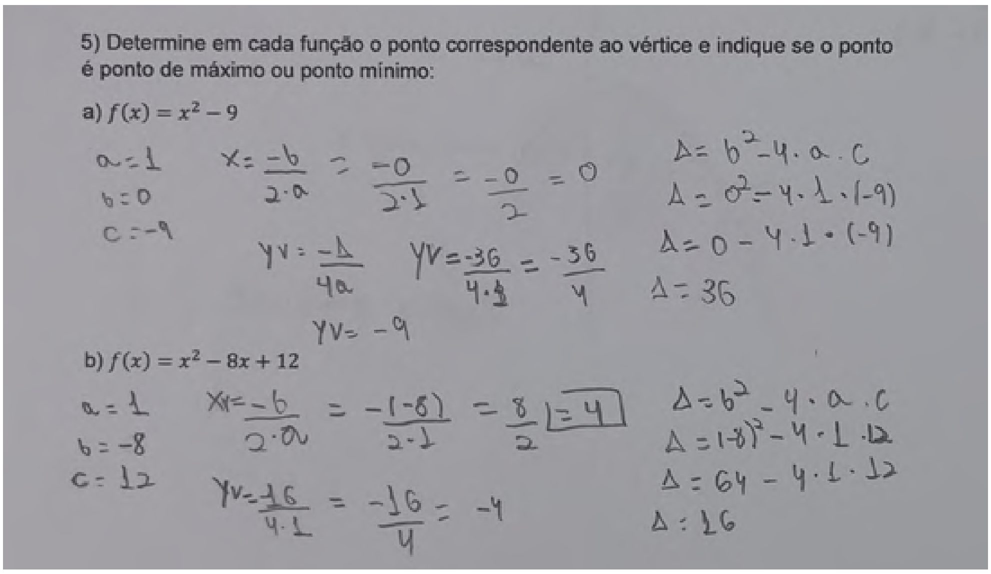
É o ponto mais alto da função e o ponto mais baixo

Sim.

Fonte: Acervo do autor.

Continuando a explorar os conhecimentos prévios dos alunos sobre o tema do vértice de uma função quadrática, a pergunta de número cinco (Figura 33) pede agora para os alunos encontrem as coordenadas do vértice em dois exemplos diferentes. O primeiro exemplo (letra a) era propositalmente considerado mais fácil, e esperava-se que os jovens respondessem a esse item sem grandes dificuldades, sendo o segundo um pouco mais elaborado e talvez gerasse algumas dúvidas. Percebeu-se, como na questão anterior de número três, que alguns dos alunos não lembravam as equações dos pontos do vértice da função quadrática, assim ocorrendo a troca de informações entre os alunos.

Figura 33 – Resposta da pergunta 5.


5) Determine em cada função o ponto correspondente ao vértice e indique se o ponto é ponto de máximo ou ponto mínimo:

a) $f(x) = x^2 - 9$

$a = 1$, $b = 0$, $c = -9$

$x = \frac{-b}{2 \cdot a} = \frac{-0}{2 \cdot 1} = \frac{-0}{2} = 0$

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9)$

$\Delta = 0 - 4 \cdot 1 \cdot (-9)$

$\Delta = 36$

$yv = \frac{-\Delta}{4a}$ $yv = \frac{-36}{4 \cdot 1} = \frac{-36}{4}$

$yv = -9$

b) $f(x) = x^2 - 8x + 12$

$a = 1$, $b = -8$, $c = 12$

$xv = \frac{-b}{2 \cdot a} = \frac{-(-8)}{2 \cdot 1} = \frac{8}{2} \boxed{= 4}$

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12$

$\Delta = 64 - 4 \cdot 1 \cdot 12$

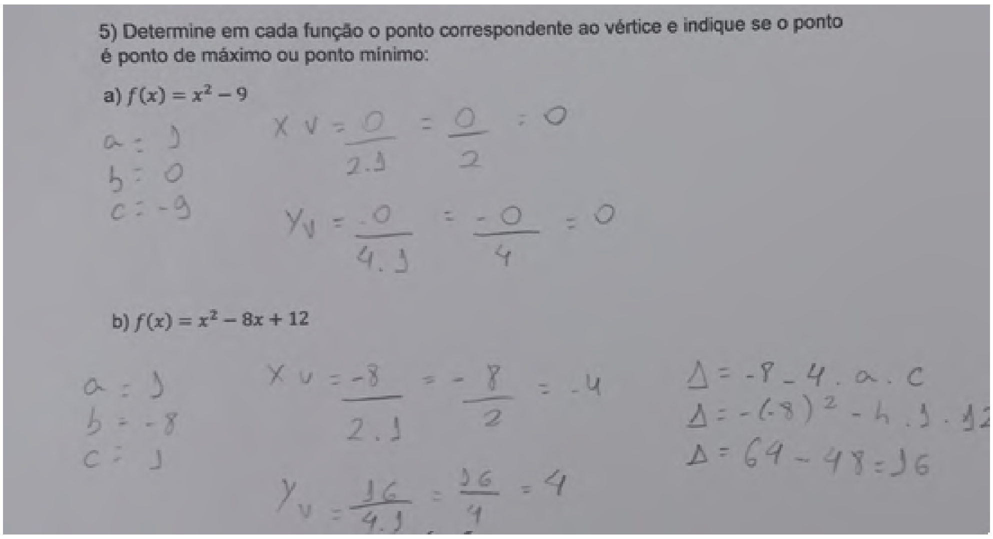
$\Delta = 16$

$yv = \frac{-16}{4 \cdot 1} = \frac{-16}{4} = -4$

Fonte: Acervo do autor.

Alguns alunos não conseguiram fazer a questão deixando os itens em branco, e outros alunos não conseguiram terminar os cálculos apresentando novamente grande dificuldade nesse assunto. Na Figura 34 observa-se que o aluno consegui identificar o formato geral da função quadrática, reconhecendo e atribuindo cada valor aos respectivos coeficientes, mas não consegui prosseguir e desenvolver as contas.

Figura 34 – Resposta errada da pergunta 5.


5) Determine em cada função o ponto correspondente ao vértice e indique se o ponto é ponto de máximo ou ponto mínimo:

a) $f(x) = x^2 - 9$

a : 1
b : 0
c : -9

$X_V = \frac{0}{2.1} = \frac{0}{2} = 0$

$Y_V = \frac{-0}{4.1} = \frac{-0}{4} = 0$

b) $f(x) = x^2 - 8x + 12$

a : 1
b = -8
c : 1

$X_V = \frac{-8}{2.1} = -\frac{8}{2} = -4$

$\Delta = -8 - 4 . a . c$
$\Delta = -(-8)^2 - 4 . 1 . 12$
$\Delta = 64 - 48 = 16$

$Y_V = \frac{16}{4.1} = \frac{16}{4} = 4$

Fonte: Acervo do autor.

A última pergunta era sobre a construção do gráfico de uma função quadrática. Nessa questão é pedido aos alunos que construam os gráficos em dois exemplos diferentes. Essa questão tenta relacionar todos os conhecimentos explorados anteriormente nas questões passadas em um único exemplo, pois para se esboçar o gráfico das funções com uma certa fidelidade será necessário encontrar os zeros e o ponto de vértice de cada função. Nessa questão foi percebido a dificuldade que os alunos apresentaram no item b, pois a questão traz uma função com o coeficiente da variável x ao quadrado com valor negativo o que trouxe dúvidas e muitos questionamentos por parte dos estudantes, sendo que muitos não lembravam que esse coeficiente indica o sentido da concavidade da parábola.

A maior dificuldade percebida foi a construção dos gráficos de cada item, nenhum aluno conseguiu esboçar os gráficos de maneira satisfatória, sendo que a maior parte dos alunos não realizou esse item, ou realizou de forma parcial sem esboçar o gráfico. Para a construção dos gráficos cada alunos recebeu uma folha de sulfite branca e de tamanho padrão.

Diante desse levantamento ficou evidente que para um melhor aproveitamento da atividade por parte da sala seria preciso introduzir uma revisão dos conteúdos, apresentar os fundamentos e propor algumas estratégias que melhorassem os entendimentos dos alunos. Assim, foi inserido na sequência de aulas duas aulas iniciais com o intuito de relembrar e sanar algumas dúvidas a respeito desse tema. As aulas foram no laboratório de informática da escola e contou com o apoio do software GeoGebra que possibilitou uma aula diferenciada e mediada pelo uso de tecnologias digitais.

6.5 Primeira Fase da Atividade

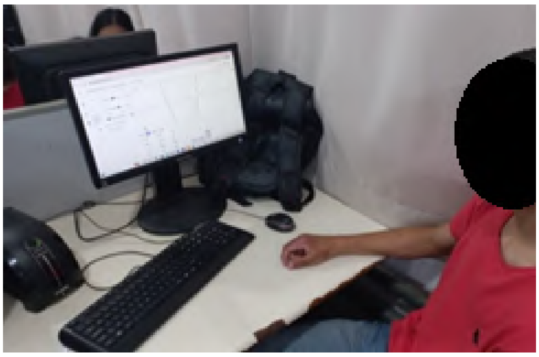
A execução da primeira fase aconteceu no dia 07/11/2023, e foi planejada para durar duas aulas, essa primeira etapa seria destinada a relembrar os conceitos fundamentais de funções quadráticas e dar fundamentação teórica necessária para a futura realização da modelagem. Para o desenvolvimento dessa etapa utilizou-se como ferramenta de apoio o software livre GeoGebra para auxiliar na construção e na manipulação dos gráficos das parábolas e também facilitar a sua visualização. A escolha de se utilizar o software GeoGebra se deu por tentar buscar métodos diferenciados para se trabalhar o tema, e pela grande capacidade que o software oferece na interação dos conceitos, fazendo os alunos terem uma participação e imersão mais profunda no assunto proposto.

Para a aplicação dessas aulas os alunos foram levados ao laboratório de informática da escola, foram apresentados ao software GeoGebra pelo professor que mostrou algumas de suas funcionalidades básicas e possibilidades. Os alunos foram organizados em grupos, e a aula se iniciou com o professor fazendo uma revisão de cada um dos parâmetros da função $f(x) = ax^2 + bx + c$. Nesse momento foram apresentados diferentes exemplos e os alunos analisaram a funcionalidade dos parâmetros da função quadrática em cada um deles.

Durante a aula foram distribuídos para cada um dos alunos uma folha com atividades para serem discutidas utilizando o recurso digital. Nesse dia houve a participação de oito alunos, e três alunos faltaram.

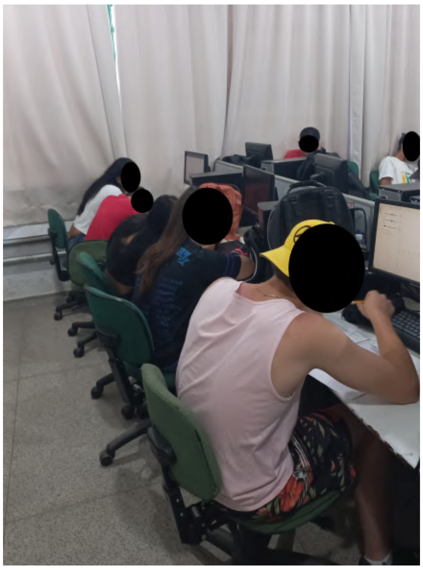
É importante ressaltar que durante esse processo de revisão proposto no laboratório de informática, os alunos apresentaram poucas dificuldades com a manipulação do software, apesar de todos eles nunca terem utilizado esse tipo de programa, nem com outro similar, eles apresentaram grande adaptação e aceitação ao recurso digital, mostrando algumas adversidades apenas nos momentos iniciais da aula. Essa etapa de realização da atividade no laboratório de informática pode ser vista na Figura 42 e na Figura 43.

Figura 35 – Aplicação da aula com o GeoGebra.



Fonte: Acervo do autor.

Figura 36 – Turma no laboratório de informática.



Fonte: Acervo do autor.

6.5.1 Análise da Primeira Fase

Para esta etapa foi aplicada uma atividade que tinha por objetivo resgatar os principais assuntos dentro do tema de funções quadráticas.

Os alunos foram separados em duplas e cada uma das duplas recebeu do professor pesquisador uma folha de atividade que possuía três itens que deveriam ser discutidos e analisados. Os itens dessa atividade propunham que os alunos realizassem algumas discussões sobre os diferentes parâmetros da função quadrática, como seus coeficientes, seus zeros, o valor do discriminante, e o seu ponto de vértice.

O primeiro item da atividade denominado de “**Analisando o Gráfico de uma Função Quadrática**” (Figura 37) propõe retomar o tema por meio de uma análise básica sobre a forma do gráfico da função quadrática, relacionando as variações no gráfico da função a cada coeficiente responsável. Através dessa atividade esperava-se que os alunos interagindo com os controles deslizantes do GeoGebra conseguissem compreender o papel de cada coeficiente da função quadrática, conseguissem diferenciar a sua curva das demais funções e percebesse suas características principais. Era esperado nesse primeiro item da atividade que os alunos investigassem cada coeficiente da função e percebessem alguma relação direta que eles possuem com o gráfico, além de perceberem uma simetria que a função possui em relação a reta focal.

Figura 37 – Atividade no GeoGebra - Item 1.

Atividade 1

1) Analisando o Gráfico de uma Função Quadrática

- No botão de ferramentas na parte lateral do GeoGebra, clique em controle deslizante, crie três parâmetros deslizantes $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$, e para o intervalo de variação desses parâmetros digite o valor 10 na caixa de máximo e o valor -10 na caixa para mínimo.

-Digite na aba de entrada do GeoGebra a função $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$;

Observe o que acontece com o gráfico da função quadrática quando se altera os valores dos coeficientes $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$, e discuta com seus colegas.

Fonte: Elaborada pelo autor.

O segundo item da atividade denominado de "**Analisando as Raízes de uma Função Quadrática**" (Figura 38) propõe criar uma situação onde os alunos podem perceber na prática a relação existente entre os coeficientes da função e suas raízes, podem visualizar o comportamento da função e sua interseção com o eixo x quando se variam os valores de cada parâmetro. Para essa atividade era esperado além da análise inicial sobre como encontrar os zeros da função, era esperado que os alunos investigassem o comportamento do discriminante e como o seu valor determina diretamente a quantidade de raízes e se a função estudada terá raízes Reais ou Complexas.

Figura 38 – Atividade no GeoGebra - Item 2.

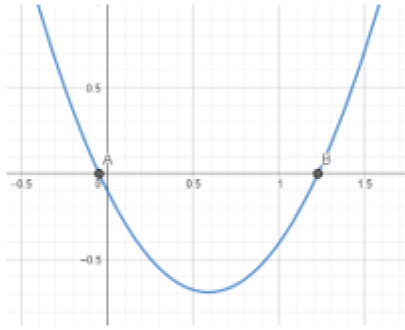
2) Analisando as Raízes de uma Função Quadrática

-Digite no campo de entrada do GeoGebra cada um dos seguintes comandos:

1) $Delta = b^2 - 4.a.c$

2) $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{Delta}}{2a}$

3) $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{Delta}}{2a}$



Discuta com seu colega o que acontece com os valores das raízes da função quando variamos os parâmetros $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$. Observe também o valor do Delta, e analise para quais valores de Delta a função passa pelo eixo x.

Fonte: Elaborada pelo autor.

O terceiro item da atividade denominado de “**Analisando o Vértice de uma Função Quadrática**” (Figura 39) propõe a discussão sobre os pontos de máximo ou de mínimo de uma função quadrática. Nessa atividade era esperado que após a execução dos comandos no GeoGebra e a interação com os controles deslizantes de cada coeficiente da função os alunos conseguissem perceber as mudanças apresentadas em cada coordenada desse ponto.

Figura 39 – Atividade no GeoGebra - Item 3.

PPGECE ufscar

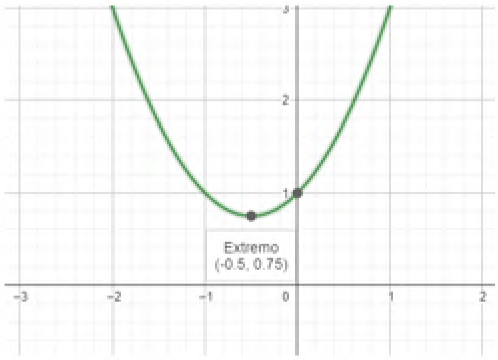
3) Analisando o Ponto de Vértice de uma Função Quadrática;

-Digite no campo de entrada do GeoGebra cada um dos seguintes comandos:

1) $C = (x_v, y_v)$

2) $x_v = -\frac{b}{2a}$

3) $y_v = -\frac{Delta}{4a}$



Discuta com seu colega o que acontece com o vértice da função quando variamos os parâmetros relacionados aos coeficientes $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para essa atividade os discentes não apresentaram grandes dificuldades na execução e nem no entendimento da atividade, conseguindo executar e realizar todas as discussões propostas de maneira esperada e satisfatória. Durante essa atividade o pesquisador atuou como um mediador, estimulando algumas reflexões e diálogos entres os alunos, mantendo o direcionamento da aula, e fazendo algumas intervenções quando necessário, como por exemplo ajudar os alunos a inserirem alguns comandos do GeoGebra.

Ainda nessa primeira fase, durante a aula, os alunos receberam uma outra folha de atividade contendo cinco perguntas relacionadas a cada item da atividade anterior e as discussões realizadas durante a aula. As respostas serão analisadas a seguir.

A primeira pergunta feita para as duplas foi: **O que significa o conceito de função?** Esperava-se nessa questão que os jovens relembrassem dos conceitos já estudados em anos passados, e que com a utilização do software GeoGebra eles pudessem ter uma facilidade maior para relembrar essas definições. Todos os alunos participantes responderam de algum modo que uma função é uma relação matemática que relaciona dois conjuntos, ou é uma relação que associa os valores da variável x com os valores do eixo y. Essa pergunta obteve as respostas:

Dupla 1: Uma função é uma relação entre dois conjuntos.

Dupla 2: É uma expressão matemática entre x e y.

Dupla 3: É uma relação entre dois conjuntos que faz corresponder a todo elemento do primeiro conjunto um único elemento do segundo.

Dupla 4: É uma regra matemática que quando variam os valores de x também variam os valores de y.

A segunda pergunta feita para as duplas era uma análise sobre cada coeficiente da função quadrática, sendo que essa segunda questão possui itens diferentes. E cada item da questão está relacionada a um coeficiente. Esperava-se nessa pergunta que os alunos conseguissem associar as mudanças no gráfico da função quadrática com cada coeficiente específico e desenvolvessem a habilidade de interpretar o gráfico.

De maneira geral, os alunos conseguiram resolver o primeiro item de maneira satisfatória. Conseguiram entender o papel de cada coeficiente da função quadrática e sua relação com o seu gráfico, dessa forma responderam essa questão sem grandes dificuldades.

Pergunta: 2) a) Ao se fazer variar o coeficiente a da função quadrática o que acontece com o seu gráfico?”

Essa pergunta obteve as respostas:

Dupla 1: A parábola muda de ponto máximo para ponto mínimo.

Dupla 2: Ao variar o coeficiente a da função quadrática a concavidade muda de direção.

Dupla 3: A abertura do gráfico muda e o ponto mais alto pode se transformar no ponto mais baixo.

Dupla 4: A parábola muda de direção ficando com a abertura para baixo ou para cima.

O próximo item da mesma pergunta era:

Pergunta: “2) b) Ao se fazer variar o coeficiente b da função quadrática o que acontece com o seu gráfico?”

Essa pergunta obteve as respostas:

Dupla 1: A parábola muda o seu lado em relação ao eixo y.

Dupla 2: Quando mudamos o coeficiente b a parábola sofre um deslocamento para direita ou para a esquerda.

Dupla 3: As raízes mudam de lugar e o ponto do vértice também.

Dupla 4: A parábola muda o seu lado no eixo y.

O último item da questão de número dois pergunta;

"Pergunta: 2) c) Ao se fazer variar o coeficiente c da função quadrática o que acontece com o seu gráfico?"

Dupla 1: O seu gráfico anda sobre o eixo y.

Dupla 2: Variando o coeficiente c sua altura se altera.

Dupla 3: É o ponto em que o gráfico da função passa pelo eixo y, a função sobe ou desce.

Dupla 4: O coeficiente c indica o valor em que o gráfico corta o eixo y.

A terceira questão foi sobre o vértice da função quadrática e ela perguntava **"O que representa o ponto do vértice da função quadrática? Qual coeficiente da função indica se ela terá ponto de máximo ou de mínimo?"**. Para essa questão esperava-se que os alunos investigassem os pontos de vértice com a ajuda do software GeoGebra, era esperado que eles associassem o valor coeficiente a da função a concavidade da parábola. Também esperava-se que os jovens percebesse que esse tipo de função possui apenas um ponto de vértice e que a partir dele a função mudava a sua direção.

Para essa pergunta todas as duplas responderam que o vértice representa o ponto de máximo ou de mínimo de uma função quadrática e que o valor do coeficiente a está diretamente relacionado se a parábola terá ponto de máximo ou de mínimo.

A quarta pergunta da atividade foi **"O que são os zeros de uma função?"** Com essa pergunta esperava-se que os alunos relembrassem da explicação dada pelo professor no início da aula, ou de momentos anteriores sobre os conceitos de zeros de uma função. Esperava-se que com a ajuda do GeoGebra os alunos conseguissem visualizar de maneira mais fácil a interseção que a curva da função faz com o eixo x.

Dando continuidade a esse assunto, a quinta pergunta faz referência aos zeros de uma função quadrática **"Toda função quadrática possui zeros reais? Explique"**. Esperava-se que os alunos associassem o zero de uma função polinomial do segundo grau com o valor do discriminante, deixando claro que quando o discriminante fosse negativo não existiria valores reais para os zeros dessa função, e que quando seu valor fosse nulo os dois zeros seriam iguais.

As quatro duplas conseguiram responder de forma satisfatória as duas perguntas, mostrando um entendimento esperado sobre o assunto.

6.6 Segunda Fase da Atividade

O terceiro encontro aconteceu no dia 14/11/2023 e teve a duração média de uma aula. Nesse dia o objetivo principal era discutir os resultados das pesquisas feitas pelos alunos na internet sobre a construção da catapulta e seu funcionamento, além de fazer algumas discussões e revisões sobre determinados conteúdos necessários para se modelar e descrever o lançamento oblíquo.

Inicialmente na aula foi feita uma conversa com os discentes em busca de seus conhecimentos prévios sobre o tema do lançamento oblíquo. Durante a conversa muitos alunos lembraram dos conceitos de física já estudados anteriormente, alguns tiveram facilidade com os tópicos apresentados, mostrando um bom entendimento da matéria. Nessa aula foram revisadas as equações de movimento retilíneo uniforme e movimento retilíneo uniformemente variado, os conceitos de vetores, e os conceitos referente ao lançamento oblíquo e suas equações.

A segunda parte dessa aula foi dedicada a discutir sobre a construção da mini catapulta. Os alunos fizeram vários levantamentos para a escolha da construção, levando em consideração o seu tamanho, a complexidade de sua montagem, o tempo necessário da execução do projeto, e o custo dos materiais para o desenvolvimento da atividade. Nesse momento, os jovens deram diferentes sugestões, e apresentaram algumas diferentes alternativas, descartando aquelas que não se enquadravam nos requisitos, até chegarem na melhor escolha. Assim, foi discutida a construção da atividade, e os alunos montaram os grupos e distribuíram as diferentes funções para cada membro.

6.7 Terceira Fase da Atividade

A terceira fase aconteceu no dia 21/11/2023 e teve como objetivo a construção da mini catapulta que serviria como ferramenta no lançamento de pequenos projeteis para modelar o lançamento oblíquo. Inicialmente nessa aula os alunos estavam divididos em grupos, dois grupos com três integrantes e uma dupla, cada grupo recebeu do professor os materiais necessários para o completo desenvolvimento da atividade. Os alunos ficaram livre no processo de elaboração da atividade, sendo permitidas alterações e modificações no roteiro inicial. Durante esse processo o professor atuou como o mediador, direcionando as etapas a serem executadas pelos grupos, sanando as dúvidas, e também ajudando quando necessário no processo de construção. Durante a aula cada grupo propôs melhorias em suas catapultas, os alunos discutiram maneiras diferentes de utilizar os materiais, argumentaram sobre o ângulo de inclinação da base, a melhor altura para colocar o elástico, e também refletiram sobe a massa que seria lançada, uma vez que a forma do projetil influenciaria no alcance final e na altura máxima do lançamento.

Durante o desenvolvimento dessa fase existiu uma grande participação e empenho por parte dos alunos, percebeu-se que ocorreu uma melhora considerável no foco, na independência, e na motivação desses estudante, sendo que todos interagiram de maneira muito satisfatória com a atividade sugerindo novas ideias, e procuraram solucionar os diferentes problemas e desafios que surgiram no decorrer das aulas, além de criarem um ambiente organizado possibilitando a empatia e a ajuda mútua entre os colegas. A Figura (40) apresenta alguns momentos da construção da atividade.

Figura 40 – Construção da mini catapulta.

Fonte: Acervo do autor.

Após a construção das catapultas a turma se dirigiu a quadra da escola para realizar os testes, nesse momento foram entregues para cada grupo vários pedaços de massinha de modelar todos com massas aproximadas para servirem de projéteis nos lançamentos. Assim, após alguns testes iniciais (Figuras 41), os alunos iniciaram a coleta de dados (Figura 42 e Figura 43).

Nesse momento os grupo deveria medir a distância final que o projetil alcançava da posição inicial do lançamento, e também o tempo final que levaria para o projetil sair da catapulta e tocar o solo. Cada grupo formulou uma pequena tabela e anotou os dados de cinco lançamentos, marcando a posição final e o tempo de percurso em cada arremesso.

Essa terceira fase foi a etapa mais longa dessa atividade e durou três aulas, nesse dia oito alunos participaram dessa atividade.

Figura 41 – Teste das catapultas.

Fonte: Acervo do autor.

Figura 42 – Coleta de dados.

Fonte: Acervo do autor.

Figura 43 – Análise e medições.

Fonte: Acervo do autor.

6.8 Quarta Fase da Atividade

O último dia de aplicação da atividade aconteceu no dia 05/12/2023, e teve o objetivo de analisar os resultados obtidos nas aulas anteriores e modelar aproximadamente as funções que descreveriam os lançamentos oblíquos. A última aplicação demorou um intervalo maior de tempo para acontecer devido ao agitado calendário escolar que nesse período de intervalo previa a aplicação de provas externas, e a revisão de conteúdos nas turmas para prepará-los para estas avaliações.

Nessa aula, inicialmente foram entregues aos alunos uma folha com a atividade planejada pedindo para eles calcularem através dos dados obtidos nos lançamentos as equações de movimento relacionadas a trajetória do projétil, e determinar a função que descreve o respectivo movimento (Figura 44). Nessa mesma folha havia as equações que determinavam o lançamento oblíquo, já relembradas nos encontros passados. Também foram entregues para eles uma folha quadriculada que serviria para construir os gráficos.

Figura 44 – Atividade do Lançamento Oblíquo.

Atividade – Lançamento Oblíquo

PPGECE ufscar

Através dos dados coletados no experimento construa a função que descreve o movimento do projétil no eixo y em função do tempo, a função que descreve o movimento do projétil em relação aos dois eixos y e x, determine o ponto de altura máxima e suas raízes.

Faça também um esboço dos gráficos das funções utilizando a folha quadriculada.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os alunos foram orientados a utilizarem nessa atividade os valores para o tempo e para a distância obtidos por uma média aritmética simples dos resultados anotados nos testes dos lançamentos. Foi falado nessa aula que a função quadrática que eles encontrariam seria uma aproximação para um lançamento médio relacionado as medições obtidas nas aulas passadas. Desse modo, foi mencionado a importância de se medir e coletar os dados corretamente, e que toda medida é passível de ser melhorada a fim de diminuir o erro e melhorar a precisão e a qualidade dos resultados.

O objetivo principal dessa atividade não era introduzir métodos matemáticos de aproximações, ou fazer uma análise qualitativa das funções estimando erros ou aproximações, mas sim fazer uma ressignificação de um conteúdo matemático que permeia o ensino médio e que muitos alunos apresentam grandes dificuldades. Assim, espera-se através desta simples modelagem mudar a abordagem para esse tema, e mostrar por meio de uma atividade lúdica que é possível explorar outras habilidades criativas e socioemocionais que os métodos tradicionais de ensino não fazem.

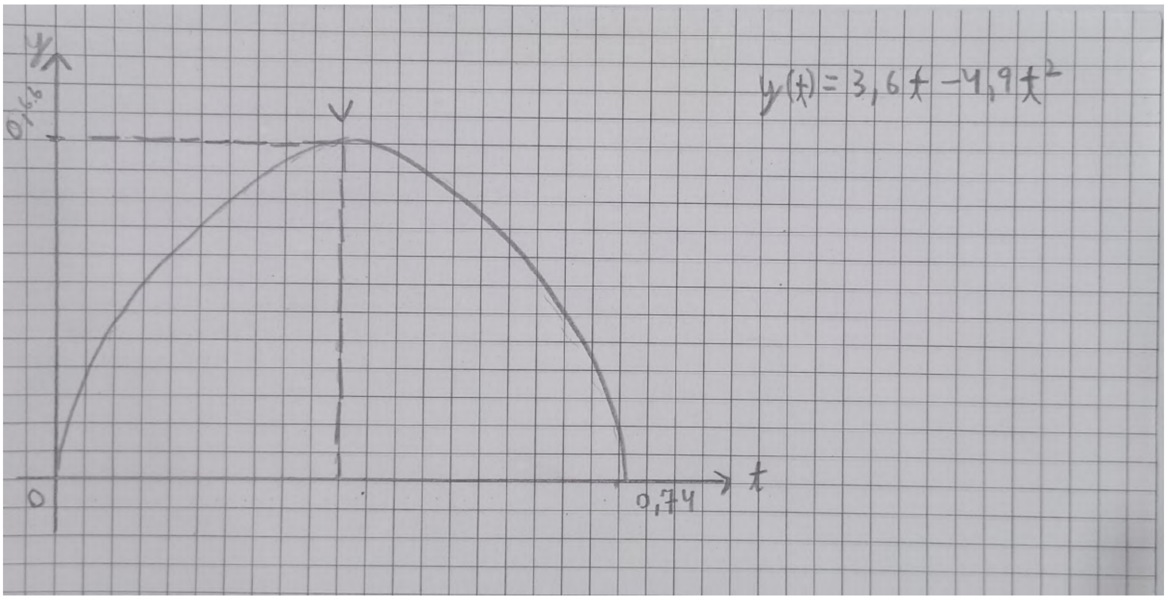
6.8.1 **Análise da Quarta Fase**

No decorrer da aula os alunos conseguiram efetuar os cálculos esperados e determinar as funções correspondentes a média dos dados obtidos. Também construíram na folha quadriculada a trajetória do projétil por meio da função quadrática e a função que descreve a altura em relação ao tempo. Para esses cálculos tivemos que desprezar a altura da catapulta, foi mostrado para eles que se sem essa consideração as equações ficariam mais complexas e complicadas e que fugiriam do tema principal da aula.

Foi observado pelo professor que durante o processo de aplicação das atividades os alunos apresentaram um grande comprometimento com as aulas e com as atividades apresentadas, possuíram determinação e trabalharam sempre em equipe compartilhando experiências e saberes, motivando uns aos outros. Nesse tempo compartilhado com eles foi possível utilizar diferentes estratégias de ensino visando uma abordagem diferenciada que fosse capaz de trazer uma nova experiência para os determinados temas da matemática.

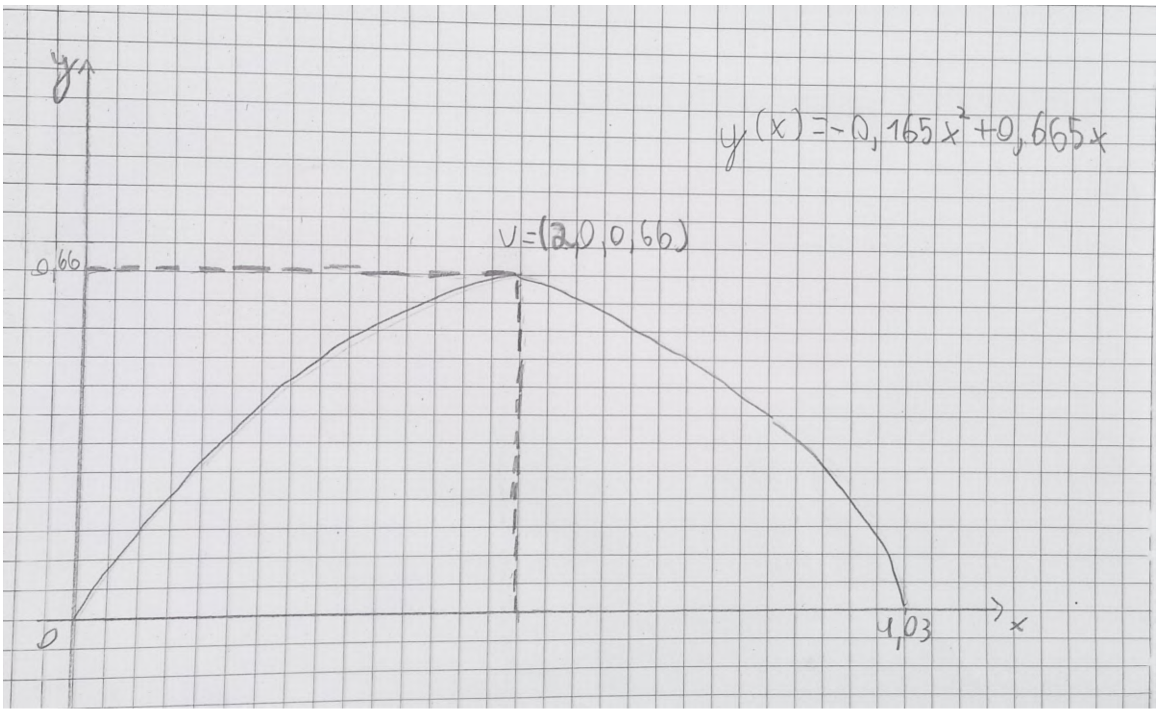
As Figuras 45 e 46 mostram as atividades que foram elaboradas por um dos grupos e representam as funções da posição do projétil no eixo y em relação ao tempo, e a função da posição do projétil em relação aos dois eixos x e y. Já a Figura 47 apresenta os cálculos feito pelo grupo para desenvolver a atividade. Durante essa etapa os alunos conseguiram efetuar corretamente os cálculos e principalmente projetar o gráfico das funções.

Figura 45 – Função $y(t)$ elaborada pelo grupo A



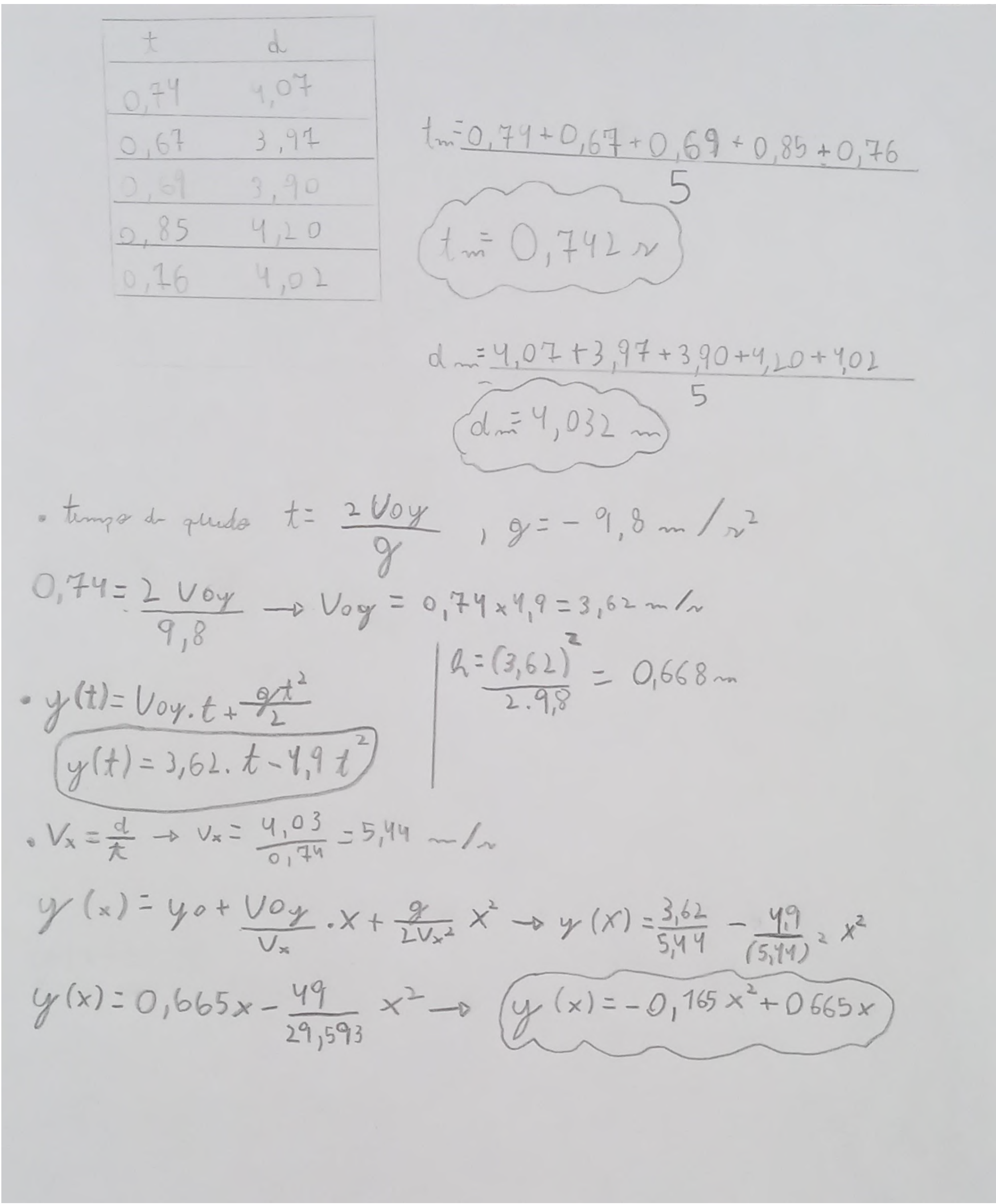
Fonte: Acervo do autor.

Figura 46 – Função $y(x)$ elaborada pelo grupo A



Fonte: Acervo do autor.

Figura 47 – Modelagem feita pelo grupo A.



t	d
0,74	4,07
0,67	3,97
0,69	3,90
0,85	4,20
0,76	4,02

$t_m = \frac{0,74+0,67+0,69+0,85+0,76}{5}$

$t_m = 0,742\ s$

$d_m = \frac{4,07+3,97+3,90+4,20+4,02}{5}$

$d_m = 4,032\ m$

• tempo de queda $t = \frac{2V_{oy}}{g}$, $g = -9,8\ m/s^2$

$0,74 = \frac{2V_{oy}}{9,8} \rightarrow V_{oy} = 0,74 \times 4,9 = 3,62\ m/s$

$h = \frac{(3,62)^2}{2.9,8} = 0,668\ m$

• $y(t) = V_{oy}.t + \frac{gt^2}{2}$

$y(t) = 3,62.t - 4,9t^2$

• $V_x = \frac{d}{t} \rightarrow V_x = \frac{4,03}{0,74} = 5,44\ m/s$

$y(x) = y_0 + \frac{V_{oy}}{V_x}.x + \frac{g}{2V_x^2}x^2 \rightarrow y(x) = \frac{3,62}{5,44} - \frac{4,9}{(5,44)^2}x^2$

$y(x) = 0,665x - \frac{49}{29,593}x^2 \rightarrow y(x) = -0,165x^2 + 0\,665x$

Fonte: Acervo do autor.

Após as discussões, as análises e a efetuação dos cálculos, foi perguntado a eles como poderíamos construir, do ponto de vista matemático, a melhor catapulta, ou seja, **"Existe alguma maneira de otimizar as catapultas, aumentando a distância de seus lançamentos?** As respostas obtidas foram:

Grupo 1: Aumentando o número de elásticos na catapulta.

Grupo 2: Diminuindo o comprimento do elástico.

Os alunos foram unanimes em dizer que a forma de conseguir esse feito seria aumentar o número de elásticos, o professor argumentou que essa atitude poderia quebrar a catapulta, e novamente perguntou se existe outra maneira de conseguir essa otimização. Surgiram outros argumentos, mas após alguns minutos de discussão chegou-se no ângulo de inclinação do lançamento.

Assim no restante da aula foi discutido com os alunos a respeito do ângulo de lançamento, mostrando que o melhor ângulo para o lançamento seria uma catapulta construída com 45° de inclinação em relação a sua base.

Nessa aula também estavam programados momentos para fazer as devidas readaptações e modificações nas catapultas colocando ângulos de 45° e executando novos lançamentos para comparar os resultados de antes e depois das modificações, mas a sequência de aulas programadas para esse dia já estava no fim e não seria possível de prosseguir a atividade como o inicialmente programado.

Dessa forma, uma parte considerável da aula foi destinado para os alunos explicarem sobre sua modelagem, cada grupo descreveu para a sala como foi seu processo de coleta de dados, as contas que fizeram nessa atividade, e apresentaram seus resultados mostrando a curva e as equações obtidas. Nesse momento cada aluno também relatou e refletiu sobre as diferentes abordagem propostas nas aulas, as atividade, e compartilharam suas experiências no decorrer desse processo. Após o término da aula aconteceu uma despedida, pois os alunos já estavam no período próximo de férias escolares e para muitos aquela seria a última semana.

Foi analisado pelo professor que durante o processo de aplicação das atividades os alunos apresentaram um comprometimento com as atividades apresentadas, possuíram determinação e trabalharam sempre em equipe compartilhando experiências e saberes, motivando uns aos outros. Durante o desenvolvimento da proposta deducional foi possível construir diferentes situações que estimulassem a reflexão e o debate sobre o tema estudado, variados ambientes educacionais foram apresentados ao discentes afim de potencializar suas habilidades cognitivas. Nesse percurso, percebeu-se uma melhora no raciocínio lógico dos alunos, um ganho significativo na capacidade de reconhecer padrões e utilizar as equações, um aumento na habilidade de resolver problemas, e um maior entendimento sobre o tema de funções quadráticas. Nesse tempo compartilhado com eles foi possível utilizar diferentes estratégias de ensino visando abordagens diferenciadas que fossem capazes de trazer uma nova experiência para determinados temas da matemática.

7 Considerações Finais

A presente dissertação apresentou uma sequência de atividades para auxiliar professores de matemática no ensino de funções quadrática no ensino básico. Utilizando das metodologias ativas respondeu à pergunta inicialmente apresentada na introdução deste trabalho, “Será que é possível propor o ensino de funções quadráticas através de atividades que diferem dos modelos tradicionais de ensino?".

Para responder a tal indagação, durante seu desenvolvimento, a dissertação apresentou um referencial teórico que serviu para esclarecer e fundamentar os conceitos que foram utilizados para sustentar a teoria aplicada, fez uma análise sobre o ensino de funções quadráticas nos anos finais do ensino fundamental e nos anos do ensino médio utilizando para isso os documentos oficias norteadores do ensino como a BNCC e o Currículo Paulista.

O trabalho exibiu uma revisão sobre os fundamentos matemáticos da função quadrática expondo suas propriedades e seus principais resultados. Discutiu sobre o gráfico desse tipo de função e sobre sua propriedade reflexiva. Em seguida, elaborou uma sequência de três atividades que utilizaram diferentes conceitos como ferramentas de ensino, para serem aplicadas no contexto escolar. Sendo uma atividade baseada no uso das tecnologias digitais no ensino da matemática, uma atividade com uso da modelagem matemática, e uma atividade prática que explora a propriedade reflexiva da parábola. Também apresentou uma proposta de atividade para ser aplicada em sala de aula, utilizando duas das atividades elaboradas. E finalmente, dissertou sobre a aplicação da atividade “Lançamento com a Mini Catapulta” aplicada em uma escola pública da rede estadual de ensino na cidade de Casa Branca. Desse modo, o trabalho realizou sobre o tema proposto uma pesquisa bibliográfica e uma pesquisa de campo de característica qualitativa, com o proposito de coletar informações sobre cada momento da aplicação, o que ocorreu através das respostas dos alunos nos testes empregados, na observação, e nos diálogos durante as aulas.

A aplicação da atividade “Lançamento com a Mini Catapulta” realizada em uma turma de ensino médio se deu em fases distintas, sendo que em cada fase foram feitas discussões relacionadas aos dados obtidos. Assim diante da realização em sala de aula, a atividade atendeu bem as necessidades da turma selecionada, propôs uma aplicação prática para o tema de funções quadráticas, levantou uma discussão com os alunos sobre o assunto do lançamento oblíquo, e através de uma proposta lúdica colocou os alunos em um ambiente de ressignificação do tema, estimulando habilidades sociais e cognitivas. Percebeu-se o empenho dos alunos durante o decorrer das aulas, especialmente no momento da construção da atividade e na coleta de informações para se modelar o experimento, o trabalho em equipe aconteceu durante todo o processo, e foi percebido que os alunos que possuíam maior facilidade ajudavam os outros colegas.

As propostas de atividades aqui apresentadas formam um material que pode apoiar o professor de matemática em sua jornada educacional, são capazes de servir de base ou de complemento para a elaboração de suas aulas, ou na construção de outras atividades sobre o mesmo tema. Também podem sofrer adaptações adequadas para propor o ensino de conteúdos relacionados combinados a metodologias de ensino diferentes e sendo modeladas as necessidades de cada sala de aula.

Referências

AGOSTINI, V. W.; TREVISOL, M. T. C. **A Experimentação Didática no Ensino de Ciências: Uma Proposta Construtivista para a Utilização do Laboratório Didático.** *Colóquio Internacional de Educação*, v. 2, n. 1, p. 753–762, 2014.

ALMEIDA, C. A. de. **Uma proposta Didática para o Estudo da Função Quadrática no Ensino Médio por meio da Modelagem Matemática de um Experimento**. 2023. 92 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos, 2023.

ANDRADE, G. de O.; LACERDA, K. K. de S. **O uso de jogos e ferramentas tecnológicas no ensino de matemática: um estudo de caso realizado na cidade de Bom Jesus-PI**. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, 2019.

ANDRADE, M. L. F. d.; MASSABNI, V. G. **O desenvolvimento de atividades práticas na escola: um desafio para os professores de ciências**. *Ciência & educação*, Graduação em Educação para a Ciência, v. 17, n. 04, p. 835–854, 2011.

ARAKI, P. H. H. **Atividades experimentais investigativas em contexto de aulas com Modelagem Matemática: uma análise semiótica**. 2020. 178 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2020.

ARAÚJO, A. C. G. **Função Quadrática: Caracterização e Aplicações**. 2013. 70 f. Monografia (Graduação em Licenciatura em Matemática) - Centro de Educação e Saúde, Universidade Federal de Campina Grande, Cuité - Paraiba, 2013.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular–BNCC**. Brasilia: MEC, 2018. Acessado em: 15 novembro de 2023. Disponível em: <https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf>.

BUGS, C. A.; MENEZES, G. d. L. de; NUNES, D. G.; ROCHA, J. M. da. **Do experimento à experimentação: metodologia ativa no ensino de trigonometria**. *Revista Monografias Ambientais*, p. e4–e4, 2020.

CAVALCANTE, V. R. D. S. **Atividades com o GeoGebra que contemplam habilidades da BNCC para o estudo de funções quadráticas no Ensino Médio**. 56 f. Monografia (Graduação em Licenciatura em Matemática) - Centro de Ciências Aplicadas e Educação, Universidade Federal da Paraíba, Rio Tinto, Paraíba, 2022.

COSTA, T. P. A.; NOGUEIRA, C. S. M.; CRUZ, A. F. **As atividades práticas no ensino de ciências: limites e possibilidades sobre o uso desse recurso didático no processo de ensino-aprendizagem**. *Revista Macambira*, v. 4, n. 2, p. e042006, jul. 2023.

DANTE, L. R. **Matemática: livro do aluno**. 1° edição. *Ática*, São Paulo, 2004.

DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. **Geometria Analítica**, 2° edição. *SBM*, Rio de Janeiro, 2017.

DIESEL, A.; BALDEZ, A. L. S.; MARTINS, S. N. **Os princípios das metodologias ativas de ensino: uma abordagem teórica**. *Revista Thema*, v. 14, n. 1, p. 268–288, 2017.

FARIA, R. W. S. de C.; ROMANELLO, L. A.; DOMINGUES, N. S. **Fases das tecnologias digitais na exploração matemática em sala de aula: das calculadoras gráficas aos celulares inteligentes**. *Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas*, v. 14, n. 30, p. 105–122, 2018.

FERRUZZI, E. C.; BORSSOI, A. H.; PESSOA, K. A. **Investigação matemática em foco: evidenciando possibilidades para a sala de aula**. *Revista de Educação, Ciências e Mathematics*, Revista de Educação, Ciências e Mathematics, v. 11, n. 3, p. 1–20, 2021.

FONSECA, L. da S. D.; SILVA, R. A. da. **Funções quadráticas através de aulas dinamizadas com software: uma proposta para o EJA**. *V Congresso Nacional de Educação*, Anais CONEDU, Olinda - PE, 2018.

FREITAS, P. J. de. **Atividades práticas de matemática aplicadas na topografia**. 2021. 88 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Três Lagoas, 2021.

JUCÁ, R. de S.; PIRONEL, M. **Investigação matemática: um caminho para o ensino da matemática: Mathematical Research a Pathway to Teaching Mathematics**. *Revista Cocar*, n. 14, 2022.

JÚNIOR, E. M. d. O. **Uma proposta hibrida de ensino para o estudo da função quadrática**. 2020. 114 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Centro de Educação, Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2020.

LEAL, N. de O.; FERREIRA, P. E. B.; MACEDO, M. A. B.; SOUZA, S. R. G. de. **Utilização de metodologias ativas no ensino médio brasileiro: realidade atual**. *Arquivos do MUDI*, v. 23, n. 3, p. 432–442, 2019.

LIMA, E. L. ***Números e Funções Reais***. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

LIMA, M. G.; ROCHA, A. A. S. da. **As Tecnologias Digitais no Ensino de Matemática**. *Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação*, v. 8, n. 5, p. 729–739, 2022.

NÓBREGA, M. R. A. **Ensino de matemática e aprendizagem baseada em problemas: entre concepções e práticas docentes**. 2019. 63 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas, Patos, 2019.

NOGUEIRA, M. A. **Ensino de matemática mediado pelas tecnologias digitais: uma experiência no 8º ano do ensino fundamental com o Teorema de Tales**. Universidade Federal de Viçosa, 2021.

PEREIRA, R. R. **Uso de Tecnologias Digitais como Ferramenta Didático-Pedagógica no Ensino de Matemática**. 2021. 114 f. Dissertação (Mestrado em Educação Profissional e Tecnológica) - Instituto Federal da Paraiba, João Pessoa, 2021.

PEREIRA, S. S.; CHAGAS, F. A. O. **Tecnologias na educação matemática: desafios da prática docente**. *Itinerarius Reflectionis*, v. 12, n. 1, 2016.

PONTE, J. P. da; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. ***Investigações matemáticas na sala de aula**. 4°ed.* Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2019.

RIBEIRO, D. M. A. de A. **Uma Abordagem Didática para Função Quadrática**. 2013. 58 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campo dos Goytacazes, 2013.

SANT'ANNA, S. R. d. **Tecnologias digitais como apoio ao ensino de matemática: potencialidades e desafios a partir da aprendizagem colaborativa**. 2017. 165 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática) - Instituto Federal do Espirito Santo, Vitória - ES, 2017.

SANTOS, D. F. A. dos; CASTAMAN, A. S. **Metodologias ativas: uma breve apresentação conceitual e de seus métodos**. *Revista Linhas*, v. 23, n. 51, p. 334–357, 2022.

SILVA, A. H. d. **Investigação Matemática: contribuições dessa metodologia para o ensino-aprendizagem da Divisibilidade dos números naturais**. 2020. 75 f. Monografia (Graduação em Licenciatura em Matemática) - Centro de Ciências Aplicadas e Educação, Universidade Federal da Paraíba, Rio Tinto, Paraiba, 2020.

SILVA, A. O. da; MIRANDA, G. R. de; FEITOSA, I. M.; SOUZA, J. F. d. S. de; SÁ, J. M. de; SOUZA, M. M. L. de. **Atividades experimentais: possibilidades para o aprendizado nas aulas de matemática Experimental activities: possibilities for learning in mathematics classes**. *Brazilian Journal of Development*, v. 8, n. 5, p. 33944–33957, 2022.

SILVA, R. S. da; NOVELLO, T. P. **O uso das tecnologias digitais no ensinar matemática: recursos, percepções e desafios**. *RELACult-Revista Latino-Americana de Estudos em Cultura e Sociedade*, v. 6, 2020.

SOARES, J. H. de S. **Funções Quadráticas**. 2013. 40 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2013.

SÃO PAULO. **Currículo Paulista**. SÃO PAULO, 2020. Acessado em: 25 novembro de 2023. Disponível em: <https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/wp-content/uploads/2023/02/CURR%C3%8DCULO-PAULISTA-etapa-Ensino-M%C3%A9dio_ISBN.pdf>.

APÊNDICE A – Folha de Atividades 1

Folha de Atividades 1

1) No experimento da mesa de sinuca existe algum padrão que pode ser analisado?

2) Será que existe uma possível relação entre a curva descrita no lançamento da bola apresentada no jogo de basquete e o experimento mostrados pelo professor?

3) A caçapa da mesa de sinuca aparenta estar em um lugar privilegiado, se fosse possível deslocá-lo de lugar a bolinha quando batesse na curva da mesa ainda cairia nele?

4) Nos seus estudos sobre parábolas você já ouviu falar sobre o conceito de foco e de reta diretriz?

APÊNDICE B – Folha de Atividades 2

Folha de Atividades 2

1) Em uma parábola, o que significa os conceitos Foco, reta focal e reta geratriz?

2) Para se construir uma parábola com régua e compasso precisamos de dois elementos da parábola, quais são eles?

3) Você já tinha visto alguma aplicação da parábola no cotidiano antes? Se sim, quais?

4) Qual é a principal propriedade analisada nesse experimento?

5) A observação no seu experimento está de acordo com o previsto na teoria? Se não, o que pode ter dado de errado?

6) Quais foram as suas principais dificuldades na elaboração da atividade da Mesa de Sinuca?

7) Você gostou desse modelo de aulas propondo atividades práticas? Conte um pouco dos pontos positivos e dos pontos negativos dessa atividade.

APÊNDICE C – Folha de Atividade Aplicada na Primeira Fase

Atividade 1

1) Analisando o Gráfico de uma Função Quadrática

- No botão de ferramentas na parte lateral do GeoGebra, clique em controle deslizante, crie três parâmetros deslizantes $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$, e para o intervalo de variação desses parâmetros digite o valor -10 na caixa de máximo e o valor 10 na caixa para mínimo.

-Digite na aba de entrada do GeoGebra a função $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$;

Observe o que acontece com o gráfico da função quadrática quando se altera os valores dos coeficientes $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$, e discuta com seus colegas.

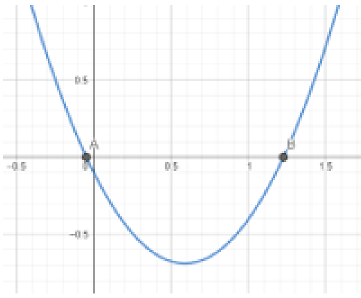
2) Analisando as Raízes de uma Função Quadrática

-Digite no campo de entrada do GeoGebra cada um dos seguintes comandos:

1) $Delta = b^2 - 4.a.c$

2) $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{Delta}}{2a}$

3) $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{Delta}}{2a}$



Discuta com seu colega o que acontece com os valores das raízes da função quando variamos os parâmetros $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$. Observe também o valor do Delta, e analise para quais valores de Delta a função passa pelo eixo x.

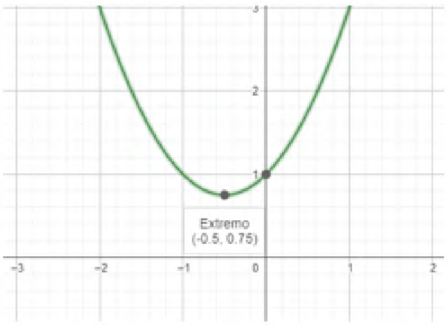
3) Analisando o Ponto de Vértice de uma Função Quadrática;

-Digite no campo de entrada do GeoGebra cada um dos seguintes comandos:

1) $C = (x_v, y_v)$

2) $x_v = -\frac{b}{2a}$

3) $y_v = -\frac{Delta}{4a}$



Discuta com seu colega o que acontece com o vértice da função quando variamos os parâmetros relacionados aos coeficientes $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$.

APÊNDICE D – Folha de Atividade Aplicada na Quarta Fase

Atividade – Lançamento Oblíquo

Através dos dados coletados no experimento construa a função que descreve o movimento do projétil no eixo y em função do tempo, a função que descreve o movimento do projétil em relação aos dois eixos y e x, determine o ponto de altura máxima e suas raízes.

Faça também um esboço dos gráficos das funções utilizando a folha quadriculada.

Utilize as seguintes informações:

- $v_x \text{ é } sempre\ constante$
- $x(t) = v_x . t$
- $y(t) = y_o + v_{oy}t - \frac{gt^2}{2}$
- $y_f = y_0 + \frac{v_{oy}}{v_x} . x - \frac{g}{2v_x^2} . x^2$
- $Altura\ máxima\colon\ h = \frac{v_{oy}^2}{2g}$
- $tempo\ de\ queda\colon t = \frac{2v_{oy}}{g}$
- $v_{ox} = v. \cos(\theta) \quad e \quad v_{oy} = v. sen(\theta)$

ANEXO A – Imagens para Atividade 1 – O Jogo de Basquete

Figura 1

Figura 2