UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia

Departamento de Matemática

Construção dos números reais: Embasamento teórico e experiências na escola

Aluno: Beatriz Andrade Rodrigues

Curso: Licenciatura em Matemática

RA: 770602

beatrizrodrigues@estudante.ufscar.br

(14)998813665

Orientador: Prof. Dr. Francisco Braun

franciscobraun@ufscar.br

(16) 33519183

Curso: Matemática

Disciplina: Trabalho de Conclusão de Curso I

São Carlos - SP

2023/1

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

BEATRIZ ANDRADE RODRIGUES

Construção dos números reais: Embasamento teórico e experiências na escola

Projeto de pesquisa apresentado à disciplina: Trabalhos de Conclusão de Curso I e II. Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Braun

São Carlos - SP

2023/2

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - CCM/CCET

Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905
Telefone: (16) 33518221 - http://www.ufscar.br

DP-TCC-FA nº 17/2024/CCM/CCET

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

BEATRIZ ANDRADE RODRIGUES

CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS: EMBASAMENTO TEÓRICO E EXPERIÊNCIAS NA ESCOLA

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos

São Carlos, 08 de fevereiro de 2024

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	Francisco Braun
Membro da Banca 1	José Nazareno Vieira Gomes
Membro da Banca 2	Adilson Eduardo Presoto

Documento assinado eletronicamente por **Francisco Braun**, **Professor(a) do Ensino Superior**, em 11/03/2024, às 16:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Jose Nazareno Vieira Gomes**, **Professor(a) do Ensino Superior**, em 02/07/2024, às 16:54, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Adilson Eduardo Presoto**, **Professor(a) do Ensino Superior**, em 02/07/2024, às 22:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Referência: Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo nº 23112.004415/2024-76

SEI nº 1367106

Modelo de Documento: Grad: Defesa TCC: Folha Aprovação, versão de 02/Agosto/2019

Agradecimentos

Aos meus pais, Jucimeire e Edson, pelo apoio e acolhimento incondicional durante toda minha trajetória.

A minha família, pelo suporte e incentivo.

Ao meu orientador, professor Doutor Francisco Braun, pela paciência, clareza e orientação para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores presentes em minha trajetória pela dedicação e compreensão. Em especial às professoras Doutora Maria do Carmo de Sousa e Doutora Denise Vilela, por me encantarem com suas visões sobre o ensino e me guiarem nos desafios da licenciatura e aos professores Doutor Jean Piton e Doutora Thaís Maria Dalbelo, por compartilharem suas experiências e pelas aulas e materiais cativantes.

Aos meus colegas pela parceria e apoio durante todo o curso. Em especial, agradeço aos meus amigos Abner, Relissa, Sabrina, Lucas, Keren e João Vitor pelas dores e conquistas compartilhadas nesse período.

Por fim, agradeço a todos que contribuíram direta ou indiretamente nessa jornada.

Sumário

Lista de Figuras

Resumo

A pesquisa apresentada terá como tema de estudo a construção dos números reais ($\mathbb{R}$) via cortes de Dedekind e seu uso no ensino, com experiências em turmas do ensino médio de uma escola pública de São Carlos. O objetivo geral da pesquisa será fundamentar o tema a partir das bases teóricas e utilizar alguns resultados na elaboração e aplicação de planos de ensino na sala de aula. A metodologia a ser utilizada faz uso da pesquisa bibliográfica e pesquisa de campo com registro em diário sobre as experiências escolares. Desta forma, espera-se após a análise e registro das experiências explicitar a teoria existente na temática e sua aplicabilidade no ensino de matemática na educação básica.
Palavras Chave: Matemática. Números Reais. Cortes de Dedekind. Análise no Ensino.

Abstract

The presented research will focus on the construction of real numbers ($\mathbb{R}$) through Dedekind cuts its use in education, with experiences in high school classes at a public school in São Carlos. The overall objective of the research is to establish the topic based on theoretical foundations and apply some results in the development and implementation of lesson plans in the classroom. The methodology to be employed includes bibliographical research and field research with diary recording of school experiences. Consequently, it is expected that, after the analysis and documentation of the experiences, the mathematics in basic education.

Keywords: Math. Real Numbers. Dedekind Cuts. Analysis in Education.

Introdução

Este trabalho é dedicado ao estudo dos números reais com foco na construção do conjunto a partir dos números racionais, via cortes de Dedekind, com posterior prática em sala de aula e relato das experiências na escola.

A temática desta pesquisa surgiu a partir das primeiras experiências em sala de aula como residente pedagógica e como aluna do curso da disciplina de Análise para Licenciandos, em que pude perceber a dificuldade dos alunos do ensino médio na caracterização e identificação de um número real em exercícios e situações problemas.

Conforme destacado por Boff (2006) a abordagem dos números irracionais e reais nos materiais didáticos aprovados pelo MEC para o ensino fundamental muitas vezes ficam restritos aos números com radicais, em especial os números $\sqrt{2}$ e π. Analisando o atual Currículo em Ação (SÃO PAULO, 2019) do ensino fundamental, por exemplo, a abordagem é ainda mais rasa: trabalha-se com a constante π através das medidas da circunferência e diâmetro no quarto bimestre do 7º ano, e logo no terceiro bimestre do 8º ano trabalha-se com sistemas lineares com incógnitas reais. Ou seja, os números reais são trabalhados sem estabelecer uma relação com os números já conhecidos (números racionais, por exemplo). Apenas mais adiante no material os números reais passam a ser trabalhados no primeiro e segundo bimestre do 9º ano, estabelecendo na sua existência na reta numérica, conforme consta no Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019, p. 14).

O presente trabalho buscará, deste modo, embasar teoricamente a construção dos números reais a partir da teoria de Dedekind e aplicar resultados desta construção no ensino de números reais na educação básica. Para isso, além de utilizar Rudin (1953) na fundamentação teórica a pesquisa buscará, de modo qualitativo, compreender os fenômenos envolvendo os indivíduos (GODOY, 1995) na construção dos números reais em sala de aula.

Capítulo 1

Embasamento Teórico

O sistema de números racionais ($\mathbb{Q}$) é "incompleto". O fator que leva a incompletude do conjunto dos racionais é a ausência de *supremo* em alguns conjuntos limitados superiormente, elemento definido a seguir.

Definição 1.0.1. *Chama-se de supremo de um conjunto C a menor de suas cotas superiores, ou seja, é o número s que satisfaz as seguintes condições:*

(1) $c \leq s, \forall c \in C$;

(2) Dado um número qualquer $\epsilon > 0$, existe um elemento $c \in C$ tal que $s - \epsilon < c$.

Denotamos o supremo de um conjunto C como $\sup C$.

Observação 1.0.1. *Evidentemente, se o conjunto C tem supremo ele é limitado superiormente.*

Exemplo 1.0.1. *Dado o conjunto*

$$L = \{1 - \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$$

Prove que $\sup L = 1$

Demonstração. Queremos mostrar que $\sup L = 1$. Note que:

(1) 1 é limitante superior pois

$$1 - \frac{1}{n} < 1$$

(2) Se $c < 1$, tome $n_0 \in \mathbb{N}$, pela Propriedade Arquimediana, tal que $n_0 > \dfrac{1}{1-c}$. Como $1 - c > 0$ então $1 - \dfrac{1}{n_0} > c$, logo, c não é limitante superior. Portanto, $\sup L = 1$. □

Como veremos, nem todo conjunto limitado superiormente nos racionais possui um supremo. Por conta disso, iremos embasar teoricamente a construção dos números reais, partindo da equação $p^2 = 2$ e realizando a construção via cortes de Dedekind.

1.1 A equação $p^2 = 2$

Tomemos um caso particular que ilustra a incompletude dos $\mathbb{Q}$.

Exemplo 1.1.1. *Vamos mostrar que a equação*

$$p^2 = 2 \tag{1.1}$$

não é satisfeita por um racional p.

Demonstração. Vamos supor que $p \in \mathbb{Q}$. Isso significa que podemos escrever $p = \dfrac{m}{n}$ onde m e n são inteiros e primos entre si, com $n \neq 0$. Por (1) teríamos que:

$$m^2 = 2n^2. \tag{1.2}$$

De (2) obtemos que m^2 é par, de fato, m também é par, pois se $m = 2k \Rightarrow m^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$, então o quadrado e um par é par. Note que como m é par, então m^2 é divisível por 4, assim como o lado direito da igualdade (2), que significa que n^2 é par, portanto, n é par.

Desta forma, não existe $p \in \mathbb{Q}$ que satisfaça a equação. $\square$

Tomemos agora A sendo o conjunto de todos os racionais positivos p tais que $p^2 < 2$ e B o conjunto de todos os racionais positivos p tais que $p^2 > 2$. Queremos mostrar que em A não existe racional máximo e tampouco racional mínimo em B. Isso em particular nos mostrará que não existe supremo racional para A, pois os elementos de B são todas cotas superiores de A.

Vamos supor, primeiramente, $p \in A$. Logo, $p^2 < 2$. Tomemos um racional q tal que $0 < q < 1$ onde q é o menor número entre 1 e $\dfrac{2-p^2}{2p+1}$, logo,

$$q < \frac{2-p^2}{2p+1}.$$

Seja $k = p + q$. Teremos então que $k > p$ e, além disso, que

$$k^2 = p^2 + (2p+q)q < p^2 + (2p+1)q < p^2 + (2-p^2) = 2$$

de modo que $k \in A$, ou seja, provamos que dado qualquer $p \in A$ sempre podemos construir um $k > p$ tal que $k \in A$. Portanto, não existe máximo em A.

Agora, tomemos $p \in B$, ou seja, $p^2 > 2$. Seja

$$q = p - \frac{p^2-2}{2p}$$

Deste modo, temos $q < p$ e, além disso,

$$p - \frac{p^2 - 2}{2p} = \frac{p}{2} + \frac{1}{p}$$

então $q > 0$. Portanto,

$$q^2 = p^2 - (p^2 - 2) + \left(\frac{p^2 - 2}{2p}\right) > p^2 - (p^2 - 2) = 2.$$

Segue então que $q \in B$, portanto, B não possui mínimo.

Logo, o conjunto não possui supremo.

Por outro lado, veremos que $p^2 = 2$ tem solução em $\mathbb{R}$, exatamente o supremo de A.

1.2 Cortes de Dedekind

Nos cursos de graduação, a construção dos números reais é feita pelo "processo de Dedekind ou pelo processo de Cantor (sequências de Cauchy) [...]"(BOFF, 2006, p. 9) durante a disciplina de Análise. Tais construções realizadas a partir do conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$) toma este como subconjunto de $\mathbb{R}$. Rudin (1953) estabelece a noção de corte logo nas páginas iniciais.

Definição 1.2.1. *Um corte é um subconjunto dos racionais $\alpha \subset \mathbb{Q}$ tal que:*

(1) $\alpha \neq \emptyset$ e $\alpha \neq \mathbb{Q}$.

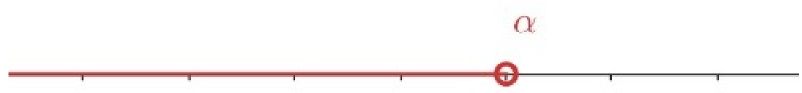
(2) Se $q \in \alpha$ então $\forall r < q \Rightarrow r \in \alpha$.

(3) Se $q \in \alpha$ então $\exists r > q$ tal que $r \in \alpha$.

Exemplo 1.2.1. *Prove que todo corte é limitado superiormente.*

Demonstração. Dado $\alpha \subset \mathbb{Q}$ um corte, por (1) temos que $\exists q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \notin \alpha$ e que $\forall x \in \alpha$ vale que $x < q$ pois caso contrário, teríamos que $\exists x \in \alpha$ tal que $x > q$, que por (2) implicaria em $q \in \alpha$. $\square$

Figura 1.1: Corte: Representação Gráfica



Acervo pessoal da autora. GeoGebra. 2023.

Um corte pode ser visualizado como uma semirreta de números racionais que tende a $-\infty$.

Teorema 1.2.1. *Seja α um corte. Dado $p \in \alpha$ e $q \notin \alpha$, então $p < q$.*

Demonstração. Se $p \in \alpha$ e $q \leq p$, Pelo segundo item da definição 1.2.1 teríamos que $q \in \alpha$, o que é uma contradição. □

Definição 1.2.2. *Sejam α e β cortes. Definimos $\alpha = \beta$ pela igualdade de conjuntos, ou seja, se $p \in \alpha$ então $p \in \beta$ e de que $q \in \beta$ resulta em $q \in \alpha$, implicando em dois conjuntos idênticos. Caso contrário, teremos que $\alpha \neq \beta$*

Definição 1.2.3. *Sejam α e β cortes, onde $\alpha \neq \beta$. Definimos $\alpha < \beta$ (respectivamente, $\beta < \alpha$) se existe um racional p tal que $p \in \alpha$ e $p \notin \beta$ (respectivamente, $p \in \beta$ e $p \notin \alpha$).*

Definição 1.2.4. *Tomemos R como o conjunto de todos os cortes:*

$$R = \{\alpha \subset \mathbb{Q} | \alpha \text{ é um corte}\}$$

Agora veremos que R é um corpo ordenado e que possui supremo.

Propriedade 1.2.1. *Dado $\alpha \subset R$ e $\beta \subset R$ temos que uma, e apenas uma, das condições abaixo é satisfeita:*

(i) $\alpha = \beta$

(ii) $\alpha < \beta$

(iii) $\alpha > \beta$

Demonstração. Para (i) segue diretamente das definições 1.2.2 e 1.2.3 que se $\alpha = \beta$ então nenhuma das outras duas relações é válida, Analisemos agora os casos onde $\alpha \neq \beta$. Para mostra que $\alpha < \beta$ e $\alpha > \beta$ se excluem mutuamente, vamos supor que ambas as relações sejam válidas. Deste modo, teremos que dado $\alpha < \beta$ existe um $p \in \mathbb{Q}$ tal que:

$$p \in \beta \Rightarrow p \notin \alpha.$$

Simultaneamente temos que $\alpha > \beta$, portanto existe um $q \in \mathbb{Q}$ tal que

$$q \in \alpha \Rightarrow q \notin \beta.$$

Pelo Teorema 1.2.1 teremos que se $p \in \beta$ e $q \notin \beta$ então $p < q$ e que se $q \in alpha$ e $p \notin \alpha$ então $q < p$, o que seria uma contradição dado que $p, q \in \mathbb{Q}$. □

Propriedade 1.2.2. *Sejam α, β, γ cortes. Se $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$ então $\alpha < \gamma$*

Demonstração. Como $\alpha < \beta$ então existe $p \in \mathbb{Q}$ tal que

$$p \in \beta \text{ e } p \notin \alpha.$$

Além disso, temos que que $\beta < \gamma$, portanto existe um $q \in \mathbb{Q}$ tal que

$$q \in \gamma \Rightarrow q \notin \beta.$$

Por fim, como $p \in \beta$ e $q \notin \beta$ então $p < q$ por $p \notin \alpha$, logo, $q \notin \alpha$ então

$$q \in \gamma, q \notin \alpha.$$

Portanto, $\alpha < \gamma$. □

A partir das propriedades demonstradas acima temos que R é um conjunto ordenado. A seguir, mostraremos que este conjunto possui supremo.

Propriedade 1.2.3. *Dado $A \subset R$ limitado superiormente e $A \neq \emptyset$ então existe $\sup A \in R$.*

Demonstração. Dado $A \neq \emptyset$ onde $A \subset R$, vamos assumir que $\beta \in R$ é um limitante superior de A. Sendo $\gamma = \cup\alpha$ tal que $\alpha \in A$ teremos que $p \in \gamma \Leftrightarrow p \in \alpha$ para algum $\alpha \in A$. Vamos mostrar que $\gamma \in R$ e que $\gamma = \sup A$.

Como A é não vazio então existe um corte $\alpha' \in A$. Pela hipótese, temos que $\alpha' \subset \gamma$ portanto $\gamma \neq \emptyset$. Além disso, $\gamma \subset \beta$ já que $\alpha \subset \beta$, $\forall \alpha \in A$, e também temos que

$\gamma \neq \mathbb{Q}$, logo γ satisfaz a propriedade (1) da Definição 1.2.1. A seguir, demonstraremos as propriedades (2) e (3) da mesma definição.

Dado um $p \in \gamma$ teremos que $p \in \alpha''$ para algum $\alpha'' \in A$. Se $q < p$ então $q \in \alpha''$, portanto $q \in \gamma$, satisfazendo a propriedade (2). Além disso, como α'' é um corte, então $\exists r \in \alpha''$ onde $r > p$ então $r \in \gamma$ pois $\alpha'' \subset \gamma$, satisfazendo a propriedade (3).

Deste forma, temos que $\gamma \in R$.

Agora, vamos mostrar que $\gamma = \sup A$.

É trivial que $\alpha \leq \gamma$ para todo $\alpha \in A$.

Seja δ um corte tal $\delta < \gamma$. Então existe um $s \in \gamma$ tal que $s \notin \delta$. Como $s \in \gamma \Rightarrow s \in \alpha$ para algum $\alpha \in A$. Logo, $\delta < \alpha$, então δ não é uma cota superior de A.

Pela demonstração realizada acima obtemos então que $\gamma = \sup A$. □

Segue que R é um conjunto ordenado que satisfaz a propriedade do supremo. iremos definir a aritmética no conjunto dos cortes.

Teorema 1.2.2. *Sejam α e β cortes. Seja γ o conjunto de todos os $r \in \mathbb{Q}$ tais que $r = p + q$ onde $p \in \alpha$ e $q \in \beta$. Então, γ é um corte.*

Demonstração. É trivial que $\gamma \neq \emptyset$ pois $\alpha \neq \emptyset$ e $\beta \neq \emptyset$. Tomemos $s, t \in \mathbb{Q}$ onde $s \notin \alpha$ e $t \notin \beta$. Então para todo $p \in \alpha$ e $q \in \beta$ $s > p$ e $t > q$. Pelo Teorema 1.2.1 temos que $s + t > p + q$ para todo $p \in \alpha$ e $q \in \beta$, então $s + t \notin \gamma$. Portanto, $\gamma \neq \mathbb{Q}$, satisfazendo a propriedade (1) de cortes.

Para provar (2), vamos supor $r \in \gamma$ tal que $s < r$, $s \in \mathbb{Q}$. Deste modo temos que $r = p + q$ com $p \in \alpha$ e $q \in \beta$. Dado $t \in \mathbb{Q}$ tal que $s = t + q$ temos então $t < p$ portanto $t \in \alpha$ e, consequentemente, $s \in \gamma$.

Por fim, para mostrar que a propriedade (3) também é satisfeita, tomemos $r \in \gamma$. Portanto $r = p + q$ com $p \in \alpha$ e $q \in \beta$. Temos que $\exists s \in \mathbb{Q}$ tal que $s = p + \dfrac{p+a}{2}$ e $s \in \alpha$, logo, $s + q \in \gamma$ e $s + q > r$, logo r não é o maior racional em γ. □

Definição 1.2.5. *O conjunto $0^* \in R$ é um corte dado por:*

$$0^* = \{q \in \mathbb{Q} | q < 0\}.$$

Demonstração. Vamos mostrar que 0^* é um corte.

De fato, $0^* \neq \emptyset$, pois existe pelo menos um elemento $q \in 0^*$ onde $q < 0$ já que $q \in \mathbb{Q}$. Além disso, $0^* \neq \mathbb{Q}$ pois 1 não está lá, provando a condição (1) da Definição 1.2.1.

Para provar (2), tomemos um $r \in 0^*$ tal que $r < q$ para algum $q \in 0^*$. Por definição, se $q \in 0^*$ então $r < 0$, logo, $r < q < 0 \Rightarrow r < 0$, portanto, $r \in 0^*$.

Por fim, vamos mostrar que existe um $r \in 0^*$ onde $r > q$ para algum $q \in 0^*$. De fato, basta tomar $r = q + \dfrac{q}{2}$ teremos que $q < r = q + \dfrac{q}{2} < 0 \Rightarrow r < 0$, satisfazendo também a condição (3).

Logo, 0^* é um corte. $\square$

Agora, vamos definir a aritmética da soma do conjunto R.

Definição 1.2.6. *O conjunto R satisfaz os seguintes axiomas da soma:*

(A1) Se $\alpha \subset R$ e $\beta \subset R$, então $\alpha + \beta \in R$.

(A2) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, $\forall \alpha, \beta \in R$.

(A3) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in R$.

(A4) O corte 0^* é tal que $\alpha + 0^* = \alpha$, $\forall \alpha \in R$.

(A5) Para todo $\alpha \in R$ existe um único β tal que $\alpha + \beta = 0^*$. Denotaremos β como $-\alpha$.

Demonstração. A demonstração de (A1) segue do Teorema 1.2.2.

Para (A2), sabemos que $\alpha + \beta$ é o conjunto de todos $p + q$, com $p \in \alpha$ e $q \in \beta$. Pela mesma definição, temos que $\beta + \alpha$ é o conjunto de todos os $q + p$, Como $p + q = q + p$ $\forall p, q \in \mathbb{Q}$, então $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

A demonstração de (A3) segue da validade da lei associativa em $\mathbb{Q}$.

Para demonstrarmos (A4) temos que :

$\Rightarrow$ Se $p \in \alpha$ e $q \in 0^*$, então $p + q < p \Rightarrow p + q \in \alpha$. Logo, $a + 0^* \subset \alpha$.

$\Leftarrow$ Dado um $r \in \alpha$ e $p \in \alpha$ com $p > r$. Logo $r - p \in 0^*$ com $r = p + (r - p) \in \alpha + 0^*$.

Logo, $\alpha \subset \alpha + 0^*$.

Sendo assim, $\alpha + 0^* = \alpha$.

Por fim, (A5) é válido pois:

(Unicidade) Se $\alpha + \beta_1 = \alpha + \beta_2 = 0$ teríamos que:

$$\beta_2 = 0^* + \beta_2 = (\alpha + \beta_1) + \beta_2 = \beta_1 + (\alpha + \beta_2) = \beta_1 + 0^* = \beta_1.$$

Logo, o elemento inverso é único.

A existência de β seguirá do lema seguinte. $\square$

Definição 1.2.7. *O inverso de um corte α será dado por*

$$\beta = \{p \in \mathbb{Q} | \exists r > 0 \ \textit{tal que} \ -p - r \notin \alpha\}$$

.

Agora vamos mostrar que o β é um corte.

Lema 1.2.1. *Sejam α, β definidos acima, então $\alpha + \beta = 0^*$.*

Demonstração. Se um elemento $s \notin \alpha$ e se $p = -s-1$ então $-p-1 \notin \alpha$ tal que $p \in \beta$, logo $\beta \neq \emptyset$. Além disso, se um elemento $q \in \alpha$ então $-q \notin \beta$, portanto $\alpha \neq \mathbb{Q}$, satisfazendo a propriedade (1).

Além disso, se $p \in \beta$ e $q < p$ com $q \in \mathbb{Q}$, então $-p \notin \alpha$ e $-q > -p$ onde $-q$ representa um número superior de α, mas não o supremo. Logo, $q \in \beta$, provando a propriedade (2).

Por fim, se $p \in \beta$, então $-p$ é um número superior de α mas não seu supremo. Deste modo, existe um $q \in \mathbb{Q}$ tal que $-q < -p$ e $-q \notin \alpha$, ou seja, dado um $r = \dfrac{p+q}{2}$ teremos $-q < -r < -p$ de modo que $-r$ é um superior de α mas não seu mínimo. Sendo assim, existe um $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r > p$ onde $r \in \beta$, provando a propriedade (3).

Provamos então que β é um corte.

Agora, vamos mostrar que $\alpha + \beta = 0^*$.

Vamos supor que $p \in \alpha + \beta$. Sendo assim, $p = q + r$ onde $q \in \alpha$ e $r \in \beta$, deste modo, $-r \notin \alpha$, portanto $-r > q$, ou seja $p = q + r \leq 0$. Mostramos então que $\alpha + \beta \subset 0^*$.

Por fim, vamos mostrar que $0^* \subset \alpha + \beta$.

Suponhamos $p \in 0^*$, ou seja, $p < 0$. Tomemos um $w = -\dfrac{p}{2} > 0$. Dado o conjunto

$$B = \{n \in \mathbb{Z} | nw \in \alpha\}$$

temos que o mesmo é limitado superiormente pela Propriedade Arquimediana e, portanto, possui um máximo n_0 pelo Princípio da Boa Ordem. Sendo assim, temos que $nw \in \alpha$ e $(n_0+1)w \notin \alpha$. Além disso, $l = -(n_0+2)w \in \beta$ pois $-l-w = (n_0+2)w-w = (n_0+1)w \notin \alpha$. Sendo assim $0^* \subset \alpha + \beta$. $\square$

Definição 1.2.8. *Para o inverso β de um corte α utilizaremos a notação $-\alpha$.*

Temos que os axiomas da adição são satisfeitos, logo, temos que a seguinte proposição também é válida:

Proposição 1.2.1. *Os axiomas da adição implicam nas seguintes sentenças:*

(a) Se $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ então $\beta = \gamma$;

(b) Se $\alpha + \beta = \alpha$ então $\beta = 0$;

(c) Se $\alpha + \beta = 0$ então $\beta = -\alpha$;

(d) $-(-\alpha) = \alpha$. *[7]*

Demonstração. Para R, teremos que:

(a) Dados os cortes α, β e γ, teremos que se $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ vale que:

$\beta \overset{A4}{=} 0^* + \beta \overset{A5}{=} (-\alpha + \alpha) + \beta \overset{A3}{=} -\alpha + (\alpha + \beta) = -\alpha + (\alpha + \gamma) \overset{A3}{=} (-\alpha + \alpha) + \gamma \overset{A5}{=} 0^* + \gamma \overset{A4}{=} \gamma$

Logo, $\beta = \gamma$.

(b) Queremos mostrar que se $\alpha + \beta = \alpha$ então $\beta = 0^*$. Teremos então que

$\beta \overset{A4}{=} 0^* + \beta \overset{A5}{=} (-\alpha + \alpha) + \beta \overset{A3}{=} -\alpha + (\alpha + \beta) = -\alpha + \alpha \overset{A5}{=} 0^*$

Logo, $\beta = 0^*$.

(c) Agora, se tomarmos $\alpha + \beta = 0$ vamos mostrar que $\beta = -\alpha$.

$\beta \overset{A4}{=} 0^* + \beta \overset{A5}{=} (-\alpha + \alpha) + \beta \overset{A3}{=} -\alpha + (\alpha + \beta) = -\alpha + 0^* \overset{A5}{=} -\alpha$

(d) Pelo item anterior temos que $\alpha - \alpha = 0$. Para $-(-\alpha) = \alpha$ vamos mostrar que $-\alpha + \beta = 0^*$

$\beta \overset{A4}{=} \beta + 0^* \overset{A5}{=} \beta + (-\alpha + \alpha) \overset{A3}{=} (\beta - \alpha) + \alpha = 0^* + \alpha \overset{4}{=} \alpha$

Logo, $-(-\alpha) = \alpha$. □

Vamos mostrar que a proposição abaixo também é válida:

Proposição 1.2.2. *Se $\alpha, \beta, \gamma \in R$ e $\beta < \gamma$, então $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$*

Demonstração. Pela definição da propriedade da soma em R temos que dados $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$ então $\alpha + \beta \subset \alpha + \gamma$. Se $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$, pela proposição 1.2.1 (a), denotada lei do cancelamento, teríamos que $\beta = \gamma$, logo, $\beta < \gamma$. □

Agora, vamos definir e demonstrar que a operação de multiplicação é fechada e tem suas propriedades satisfeitas no conjunto dos cortes maiores que 0^* denotado como R^+.

Definição 1.2.9. *Dado $\alpha \in R^+$ e $\beta \in R^+$ o produto dos cortes $\alpha\beta$ será dado por*

$$\alpha\beta = \{p \in \mathbb{Q} | p \leq rs \text{ onde } r \in \alpha, s \in \beta\}$$

Proposição 1.2.3. *O produto $\alpha\beta$ para quaisquer $\alpha, \beta \in R^+$ é um corte de R^+.*

Demonstração. Dado $p \in \alpha\beta$ onde $p < rs$ para $r \in \alpha$ e $s \in \beta$ temos que $\alpha\beta \neq \emptyset$, já que pela definição 1.2.9 $0^* \subset \alpha\beta$. Além disso, tomando um $r' \notin \alpha$ e um $s' \notin \beta$ então $r > r$ e $s' > s$ logo, $r's' > rs$ então $r's' \notin \alpha\beta \Rightarrow \alpha\beta \neq \mathbb{Q}$. Sendo assim, $\alpha\beta$ satisfaz a propriedade (1) da definição 1.2.1.

Agora vamos mostrar que a propriedade (2) também é válida. Tomemos um $p \in \alpha\beta$ e um q menor que p. Teremos então que

$q < p < rs \Rightarrow q < rs$

Logo, se $q < rs$ então $q \in \alpha\beta$.

Por fim, vamos mostrar que a propriedade (3) é válida. Tomemos um $p \in \alpha\beta$ tal que $p = r's'$ onde $r' \in \alpha$ e $s' \in \beta$ com $r', s' > 0$. Dado $q = \dfrac{r'+r}{2}s$ temos então que $r's' < q < rs \Rightarrow q > p$ e $q \in \alpha\beta$, como queríamos demonstrar. $\square$

Definição 1.2.10. *Dado $r \in \mathbb{Q}$ o conjunto r^* é definido por*

$$r^* = \{q \in \mathbb{Q} | q < r\}$$

Proposição 1.2.4. *O conjunto r^* é um corte*

Demonstração. A demonstração é análoga à feita logo após a Definição 1.2.5. $\square$

Definição 1.2.11. *Dado $\alpha \in R^+$ existe um corte $\dfrac{1}{\alpha}$ tal que:*

$$\frac{1}{\alpha} = \{l \in \mathbb{Q}^+ | q \leq l \text{ onde } \exists r > 0 \text{ tal que } \frac{1}{l} - r \notin \alpha\}$$

Demonstração. De fato, vale que $\dfrac{1}{\alpha} \neq \emptyset$ pois $\alpha \neq \mathbb{Q}$ e $\dfrac{1}{\alpha} \neq \mathbb{Q}$ é válido pois $\exists b \in \alpha$ tal que $b > 0$ onde $a = \dfrac{1}{b}$, então, $\dfrac{1}{a} - r = b - r \in \alpha$, logo, $\dfrac{1}{b} \notin \dfrac{1}{\alpha}$, valendo a propriedade (1).

Para (2), queremos mostrar que dado $q \in \dfrac{1}{\alpha}$ então se $s < q \Rightarrow s \in \dfrac{1}{\alpha}$. De fato, $s < q \leq l$, portanto, $s < l$. Se $s < l$ então $\exists r > 0$ tal que $\dfrac{1}{l} - r \notin \alpha$. Como $s < l$ $\dfrac{1}{s} - r$ também não está em α, pois $\dfrac{1}{l} - r < \dfrac{1}{s} - r$, logo $s \in \dfrac{1}{\alpha}$.

Por fim, queremos mostrar que existe um $a > l$ tal que $a \in \dfrac{1}{\alpha}$. Dado $p \geq 0$ temos que existe um $l \in \mathbb{Q}$ onde $\dfrac{1}{l} - r \notin \alpha$. Tomemos um $a = \dfrac{p+l}{2}$. Deste modo, $\dfrac{1}{a} - r < \dfrac{1}{l} - r \Rightarrow \dfrac{1}{a} - r \notin \alpha$, portanto, $a \in \dfrac{1}{\alpha}$, mostrando que (3) também é válido. $\square$

Dados os cortes α, β, γ, vamos mostrar que a aritmética da multiplicação é válida para as seguintes propriedades.

Definição 1.2.12. *O conjunto R^+ satisfaz os seguintes axiomas da multiplicação.*

(M1) Se $\alpha \in R^+$ e $\beta \in R^+$, então $\alpha\beta \in R^+$

(M2) $\alpha\beta = \beta\alpha$ $\forall \alpha\beta \in R^+$

(M3) $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ $\forall \alpha, \beta, \gamma \in R^+$

(M4) 1^* é tal que $1^*\alpha = \alpha$ $\forall \alpha \in R^+$

(M5) Se $\alpha \in R^+$ e $\alpha \neq 0^*$ então existe $\dfrac{1}{\alpha}^*$ $\in R^+$ tal que

$$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}^* = 1^*$$

Demonstração. O item (M1) segue diretamente da proposição 1.2.9.

Para mostrar (M2), dados $r, s > 0$ temos que $\alpha\beta = \{t\mathbb{Q}|t < rs,$ onde $r \in \alpha, r \in \beta\}$ e $\beta\alpha = \{k \in \mathbb{Q}|k < sr$ onde $r \in \alpha, r \in \beta\}$. Dado $t \in \alpha\beta$, como r, s são números racionais e, portanto, satisfazem a igualdades $rs = sr$ temos que $t < rs = sr \Rightarrow t < sr$ e $k < sr = rs \Rightarrow k < rs$, Logo, $\alpha\beta = \beta\alpha$.

Em (M3), de modo análogo, temos o corte $(\alpha\beta)\gamma = \{x \in \mathbb{Q}|x < (rs)j$ onde $r \in \alpha, s \in \beta, j \in \gamma\}$ e o corte $\alpha(\beta\gamma) = \{y \in \mathbb{Q}|y < r(sj)$ onde $r \in \alpha, s \in \beta, j \in \gamma\}$ será dado por todos os $y < r(sj)$. Pelas propriedades de $\mathbb{Q}$ sabe-se que $(rs)j = r(sj)$, logo $x < (rs)j \Rightarrow x < r(sj)$ e $y < r(sj) \Rightarrow y < (rs)j$. Portanto $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

Para mostrar (M4) temos que $1^*\alpha = \{p \leq rs|r < 1, 0 < s$ e $s \in \alpha\}$. Logo:

$rs < 1 \cdot s = s$

$\Rightarrow p \leq s$

$\Rightarrow p \in \alpha$

Portanto, $1^*\alpha = \alpha$

Por fim, vamos mostrar que (M5) é válida. Queremos mostrar que $\alpha \cdot \dfrac{1}{\alpha} = 1^*$.

(1) $\alpha \cdot \dfrac{1}{\alpha} \subset 1^*$

Se $p \in \alpha \cdot \dfrac{1}{\alpha}$ temos dois casos:

Caso 1: Se $p \leq 0 \Rightarrow p \in 1^*$

Caso 2: $0 < p < ab$ em que $a \in \alpha, b \in \dfrac{1}{\alpha}$. Sendo assim, dado $l \in \dfrac{1}{\alpha} \Rightarrow \exists r > 0|\dfrac{1}{b} - r \notin \alpha$ portanto, $\dfrac{1}{b} \notin \alpha$, logo, $\dfrac{1}{b} > a \Rightarrow 1 > ab$. Sendo assim, $p \in 1^*$.

(2) $1^* \subset \alpha \cdot \dfrac{1}{\alpha}$

Se $p \in 1^*$ então $p < 1$

Caso 1: Se $p \in 1^*$ e $p < 0$.

É evidente que $p \in \alpha \cdot \dfrac{1}{\alpha}$ pois $p < ab$ dado que $a > 0$ e $b > 0$, com $a \in \alpha$ e $b \in \beta$.

Caso 2: Se $0 < p < 1$.

Sabe-se que $(p+1)^n > np$ pois $(p+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{1} p^i > \binom{n}{1} p = np$.

Tome $p < h < 1 \Rightarrow 1 < h \cdot \dfrac{1}{p} < \dfrac{1}{p}$ e defina $w = h\dfrac{1}{p}$. Então $w = s + 1, s > 0$. Além disso, vale que $w^N \geq ns$. Tomemos o conjunto:

$T = \{n \in \mathbb{Z}|w^n \notin \alpha\}$.

Seja $n_0 = \min T$. Então $w^{n_0} \notin \alpha$ e $w^{n_0-1} \in \frac{1}{\alpha}$. Podemos escrever $w^{n_0}p = hw^{-1} = w^{-n_0} \cdot hw^{n_0-1} \cdot w^{-}n_0 = w^{n_0-1}(hw^{-n_0})$. Observe que $p = h \cdot w^{-1} = w^{n_0-1}(h \cdot w^{-n_0})$. Agora, basta verificar que $h \cdot w^{-n_0} \in \frac{1}{\alpha}$. Temos que:

$$\frac{1}{h}w^{n_0} - \underbrace{\left(\frac{1}{h} - 1\right) w^{n_0}}_{r>0} = w^{n_0} \notin \alpha$$

Como queríamos demonstrar.

Sendo assim, $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1^*$ □

Proposição 1.2.5. *O conjunto R^+ satisfaz a lei da distributividade, onde para $\alpha, \beta, \gamma \in R^+$ segue que:*

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

Demonstração. Assumimos que $\alpha, \beta, \gamma > 0^*$. Para provarmos a igualdade, vamos mostrar que são válidas as seguintes afirmações:

i) $\alpha(\beta + \gamma) \subset \alpha\beta + \alpha\gamma$

Tomemos um $p \in \alpha(\beta + \gamma)$. Se $p \leq 0$ teremos que $p \in \alpha\beta + \alpha\gamma$ pois $0^* \subset \alpha\beta + \alpha\gamma$. Se $p > 0$ então $p = r(s + q)$ onde $s + q \in \beta + \gamma$, $r \in \alpha$, $s \in \beta$ e $q \in \gamma$. Aplicando a propriedade distributiva dos racionais, teremos que $p = rs + rq$ onde $rs \in \alpha\beta$ e $rq \in \alpha\gamma$, logo, $p \in \alpha\beta + \alpha\gamma$.

ii) $\alpha\beta + \alpha\gamma \subset \alpha(\beta + \gamma)$

Dado $w \in \alpha\beta + \alpha\gamma$, se $w \leq 0$ então $w \in \alpha(\beta + \gamma)$ pois $0^* \subset \alpha(\beta + \gamma)$. Se $w > 0$ então teremos que $w = pq + sr$ onde $pq \in \alpha\beta$ e $sr \in \alpha\gamma$ os $p, r \in \alpha$, $q \in \beta$ e $s \in \gamma$. Se $p \leq r$ então $p\bar{r} < 1$, além disso, $(p\bar{r})q < q$ como $q \in \beta$ então $(p\bar{r})q \in \beta$. podemos então escrever $w = ((p\bar{r})s)r$, onde $(p\bar{r})q \in \beta$, $r \in \alpha$ e $s \in \gamma$. Deste modo, temos $w \in \alpha(\beta+\gamma)$. Suponhamos agora $r \leq p$ então $r\bar{p} < 1$ e $(p\bar{r})s < s$, ou seja, $(p\bar{r})s \in \alpha$. Logo, podemos escreve $w = p(q + (p\bar{r})s$ onde $p \in \beta$, $q \in \gamma$ e $(p\bar{r})s \in \alpha$. Sendo assim $w \in \alpha(\beta + \gamma)$.

Portando, $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$. □

Acima, definimos a multiplicação em R^+. Para R, definimos:

Definição 1.2.13. *Dados $\alpha, \beta \in R$ segue que:*

$$\alpha\beta = \begin{cases} 0^*, \ \textit{se } \alpha = 0^* \textit{ ou } \beta = 0^* \\ (-\alpha)(-\beta), \ \textit{se } \alpha < 0^*, \beta < 0^* \\ -[(-\alpha)\beta], \ \textit{se } \alpha < 0^*, \beta > 0^* \\ -[\alpha(-\beta)], \ \textit{se } \alpha > 0^*, \beta < 0^* \end{cases}$$

Vamos mostrar que os axiomas da Definição 1.2.12 e que a Definição 1.2.5 são satisfeitos.

Demonstração. Para (M1), tomemos os seguintes casos:

i) $\alpha = 0^*$ ou $\beta = 0^*$

De fato, se $\alpha = 0^*$ ou $\beta = 0^*$ temos pela Definição 1.2.13 que $\alpha\beta = 0^*$. Na Definição 1.2.5 provamos que 0^* é um corte, portanto, o produto $\alpha\beta \in R$.

ii) $\alpha < 0^*, \beta > 0^*$

Vamos mostrar que $\alpha\beta$ é um corte para $\alpha < 0$ e $\beta > 0$. Temos, pela Definição 1.2.13 que $\alpha\beta = -[(-\alpha)\beta]$. Note que $\alpha < 0^* \Rightarrow -\alpha > 0^*$, portanto, o produto $-\alpha\beta > 0^*$. Já provamos na Definição 1.2.9 que este produto pertence a R, portanto, $-[(-\alpha)\beta]$ também está em R.

iii) $\alpha > 0^*, \beta < 0^*$

Segue de modo análogo a demonstração anterior.

iv) $\alpha < 0, \beta < 0$

Temos pela Definição 1.2.13 que o produto de $\alpha\beta$ para $\alpha < 0^*$ e $\beta < 0^*$ será dado por $(-\alpha)(-\beta)$. Se $\alpha < 0^* \Rightarrow -\alpha > 0$ e se $\beta < 0^* \Rightarrow -\beta > 0^*$. Sendo assim, o produto $\alpha\beta > 0^*$ e temos provados pela Definição 1.2.9 que este produto está em R.

Logo, (M1) é válida para todos os casos.

Para (M2), tomemos novamente os casos acima.

i) $\alpha = 0^*$ ou $\beta = 0^*$

Tomemos, sem perda de generalidade, que $\alpha = 0$. Por definição, temos que:

$\alpha\beta = 0^*\beta = 0^* = \beta 0^* = \beta\alpha.$

Para $\beta = 0^*$ prova-se de modo análogo ao anterior.

ii) $\alpha < 0^*, \beta > 0^*$

Temos pela Definição 1.2.13 que

$\alpha\beta = -[(-\alpha)\beta]$ pela Definição 1.2.9 teremos que:

$\alpha\beta = -[\beta(-\alpha)]$ logo,

$\alpha\beta = \beta\alpha.$

iii) $\alpha > 0^*, \beta < 0^*$

Temos pela Definição 1.2.13 que

$\alpha\beta = -[\alpha(-\beta)]$ pela Definição 1.2.9 teremos que:

$\alpha\beta = -[(-\beta)\alpha]$ logo,

$\alpha\beta = \beta\alpha.$

iv) $\alpha < 0, \beta < 0$ Temos pela Definição 1.2.13 que

$\alpha\beta = (-\alpha)(-\beta)$ pela Definição 1.2.9 teremos que:

$\alpha\beta = (-\beta)(-\alpha)$ logo,

$\alpha\beta = \beta\alpha.$

Para (M3), teremos os seguintes casos:

i) $\alpha = 0^*, \beta > 0^*, \gamma < 0^*$

Por definição, teremos que

$(\alpha\beta)\gamma = (0^*\beta)\gamma = 0^*\gamma = 0^* = 0^*(\beta\gamma) = \alpha(\beta\gamma)$

ii) $\alpha < 0^*, \beta < 0^*, \gamma < 0^*$

Por definição, temos que

$\alpha\beta = (-\alpha)(-\beta) > 0^*$ como $\gamma < 0^*$ teremos que

$(\alpha\beta)\gamma = -[((-\alpha)(-\beta))(-\gamma)]$

$(\alpha\beta)\gamma = -[(-\alpha)((-\beta)(-\gamma))]$ pela Definição 1.2.9 teremos que:

$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$

como queríamos demonstrar.

iii) $\alpha > 0^*, \beta > 0^*, \gamma < 0^*$

Pela definição, temos que

$(\alpha\beta)\gamma = -[(\alpha\beta)(-\gamma)]$ pela Definição 1.2.12 temos que

$(\alpha\beta)\gamma = -[\alpha(\beta(-\gamma))]$ que, por definição, nos dá que

$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$

como queríamos demonstrar.

Para (M4), teremos

i) $\alpha < 0$ Pela Definição 1.2.9 temos que

$\alpha 1^* = -[(-\alpha)1^*]$

$\alpha 1^* = -(-\alpha)$

$\alpha 1^* = \alpha.$

ii) $\alpha = 0^*$

Por definição, teremos que

$\alpha 1^* = 0^* 1^* = 0^* = \alpha$

Logo, para todo corte α temos que $\alpha 1^* = \alpha$.

Para (M5), por fim, vamos mostrar que para qualquer corte $\beta < 0$ temos que $\beta \cdot \beta^1 = 1$.
De fato, teremos que $\beta \cdot \beta^{-1} = \beta \cdot (-(-\beta)^{-1})$
$= \beta \cdot ((-1) \cdot (-\beta)^{-}1)$
$= (\beta \cdot (-1)) \cdot (-\beta)^{-1}$
$= (-\beta) \cdot (-\beta)^{-1} = 1$ □

Agora, vamos mostrar que a Definição 1.2.5 também é válida para os casos abaixo.

Demonstração. Queremos provar que

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

para os seguintes casos:

i) $\alpha > 0^*, \beta < 0^*, \gamma > 0^*$ onde $\beta + \gamma > 0^*$

Teremos que

$\alpha\gamma = \alpha[(\beta + \gamma) + (-\beta)]$ pela Definição 1.2.5 temos:

$\alpha\gamma = \alpha(\beta + \gamma) + \alpha(-\beta)$

$\alpha\gamma = \alpha(\beta + \gamma) - \alpha\beta$

$\alpha\gamma + \alpha\beta = \alpha(\beta + \gamma)$

Como queríamos demonstrar.

ii) $\alpha > 0^*, \beta < 0^*, \gamma > 0^*$ onde $\beta + \gamma < 0^*$

Teremos que

$\alpha(-\beta) = \alpha[\gamma + (-(\beta + \gamma))]$ pela Definição 1.2.5 temos que:

$\alpha(-\beta) = \alpha\gamma + \alpha(-(\beta + \gamma))$

$-\alpha\beta = \alpha\gamma - \alpha(\beta + \gamma)$

$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\gamma + \alpha\beta.$

Os casos onde $\alpha > 0^*, \beta > 0^*, \gamma < 0^*$, $\alpha < 0^*, \beta < 0^*, \gamma < 0^*$ e $\alpha < 0^*, \beta < 0^*, \gamma < 0^*$ possuem prova similar ao modo demonstrado acima, utilizando as Definições 1.2.9 e 1.2.13. □

Teorema 1.2.3. *Para quaisquer racionais p e q temos:*

(a) $p^* + q^* = (p + q)^*$

(b) $p^*q^* = (pq)^*$

(c) $p^* < q^*$, *se, e somente se,* $p < q$

Demonstração. Se $r \in p^* + q^*$ então $r = s + t$ onde $s < p$ e $t < q$ que implica em $r < p + q$, portanto, $r \in (p + q)^*$.

Se $r \in (p + q)^*$ temos que $r < p + q$. Sejam $h = p + q - r, s = p - \dfrac{h}{2}$ e $t = q - \dfrac{h}{2}$. Teremos então que $s \in p^*$ e $t \in q^*$ onde $r = s + t \Rightarrow r \in p^* + q^*$, mostrando que (a) é válido.

A demonstração de (b) é análoga a de (a).

Para (c), temos que se $p < q$ então $p \in q^*$, mas $p \notin p^*$, que implica em $p^* < q^*$. Se $p^* < q^*$, então existe um $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r \in q^*$ e $r \notin p^*$, sendo $p \leq r < q \Rightarrow p < q$. □

Neste capítulo, ao considerar os conjuntos racionais denotados de cortes, mostramos que este é um corpo ordenado pois satisfaz uma relação de ordem e as operações da adição e multiplicação, que foram definidas e demonstradas.

Além disso, pelo Teorema 1.2 vimos que a substituição de um número racional qualquer r por um corte r^* correspondente preserva as propriedades da soma, produto e ordem, logo, o corpo ordenado de todos os números racionais é isomorfo ao corpo ordenado de todos os cortes racionais.

Por fim, definiremos o que entendemos por número real.

Definição 1.2.14. *Os cortes serão chamados de números reais, onde cortes racionais serão identificados com números racionais enquanto os demais serão chamados de números irracionais. Denotaremos o conjunto dos números reais por $\mathbb{R}$.*

1.3 Aplicações da Construção dos Reais

Um dos resultados que podemos destacar após a construção dos reais é a existência e unicidade da raiz n-ésima para todo $x > 0$ onde $x \in \mathbb{R}$. A seguir, esse resultado será enunciado e demonstrado.

Teorema 1.3.1. *Para cada $x > 0$ onde $x \in \mathbb{R}$ e cada $n > 0$, $n \in \mathbb{Z}$, existe um único número real $y > 0$ tal que $y^n = x$.*

Demonstração. (Unicidade) Se existe um y, então ele é único, pois se $0 < y_1 \neq y_2$ tais que $y_1^n = y_2^n = x$. Pela lei da tricotomia temos que ou $y_1 < y_2$ ou $y_2 < y_1$.

Sendo assim, caso $y_1 < y_2$. Teremos então que $y_1 y_1 < y_2 y_1 < y_2 y_2$, portanto, $y_1^2 < y_2^2 \Rightarrow y_1^n < y_2^n \Rightarrow x < x$, uma contradição.

Analogamente, verificamos o mesmo para o caso onde $y_2 < y_1$.

Logo y é único.

(Existência) Além disso, seja $E = \{t > 0 | t^n < x\}$ temos que E é diferente de vazio, pois seja $t = x/(1 + x)$, então $t < 1$ e $t < x$. Logo, $t^2 < t$ que implica $t^n < t^{n-1} < \ldots < t < x$. Portanto, há um $t \in E$.

Vamos mostrar agora que E é limitado superiormente. Seja $t > 1 + x > 1$. Logo

$\Rightarrow t > 1$

$\Rightarrow t^n > ... > t > x$

$\Rightarrow t^n > t > x$

$\Rightarrow t \notin E$

Por contrapositiva, para todo $t \in E$ temos $t < 1 + x$.

Logo, existe $\sup E = y$.

Por fim, vamos mostrar então que $y^n = x$

Observação 1.3.1. $b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + ... + ba^{n-2} + ba^{n-1})$

Se $0 < a < b$ *então* $b^n - a^n < (b-a)nb^{n-1}$.

Vamos supor $y^n < x$, então, podemos tomar $0 < h < 1$ tal que $h < \dfrac{x - y^n}{n(y+1)^{n-1}}$. Se $a = y$ e $b = y + h$, pela Observação 1.3.1 então vale que $(y+h)^n - y^n < hn(y+h)^{n-1} < x - y^n$

$\Rightarrow (y+h)^n < x \Rightarrow y + h \in E$.

Absurdo! Pois $y = \sup E$.

Agora, tomemos $y^n > x$.

Dado $k = \dfrac{y^n - x}{ny^{n-1}} > 0$ temos que $k < y$, pois $k = \dfrac{y^n}{ny^{n-1}} - \dfrac{x}{ny^{n-1}} \Rightarrow k < \dfrac{y}{n} < y \Rightarrow 0 < k < y$.

Tomemos $a = y - k$ e $b = y$. Pela Observação 1.3.1 temos que $y^n - (y-k)^n < (y - (y-k))ny^{n-1} = kny^{n-1} = y^n - x$.

Ou seja, $x < (y-k)^n$.

Assim, dado $t \geq y - k$ segue que $x < t^n \Rightarrow t \notin E$,

Logo, pela contrapositiva, $\forall t \in E$ então $t \leq y - k$, Absurdo! Pois se não $y - k$ seria cota superior de E. $\square$

1.4 Não-enumerabilidade dos Reais

Anteriormente, foram destacadas algumas das diferenças encontradas entre o conjunto de números racionais e números reais, sendo elas a existência do *Supremo* e a de algumas raízes. Além disso, a seguir será demonstrada outra diferença.

Definição 1.4.1. *Seja* A *um conjunto.*

i) A *é finito se existe um subconjunto limitado de naturais da forma* $B_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$ *e uma bijeção* $f : B_n \to A$.

ii) A *é infinito caso contrário.*

iii) A *é enumerável (ou contável) se existe bijeção* $f : \mathbb{N} \to A$.

iv) A *é não-enumerável se for infinito e não enumerável.*

Ou seja, se um conjunto A é enumerável então seus elementos podem ser organizados em uma sequência $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos distintos.

Proposição 1.4.1. *Se A é um conjunto enumerável e B é um conjunto finito, então $A \cup B$ é enumerável.*

Demonstração. Seja $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, ...b_j\}$. $A \cup B$ pode ser descrito como a sequência $\{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_j, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots\}$. Alguns b_i podem estar em A. Neste caso, devemos apagá-los. Mais precisamente, tomemos a sequência $C = \{b_{k1}, b_{k2}, \ldots, b_{kl}, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots\}$ onde $\{b_{k1}, b_{k2}, \ldots, b_{kl}\} = B|A$.

Logo, a sequência C possui elementos distintos e descreve $A \cup B$, portanto, $A \cup B$ é enumerável. □

Proposição 1.4.2. *Se A e B são conjuntos enumeráveis, então $A \cup B$ é enumerável.*

Demonstração. Seja $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, b_{n+1}, \ldots\}$. Note que é possível organizar $A \cup B$ na sequência $\{a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots\}$. No entanto, caso hajam elementos repetidos é preciso não colocá-los na sequência. Para isso, consideremos:

$$C_n = \begin{cases} a_{\frac{i+1}{2}} & \text{, se i é ímpar} \\ b_{\frac{i}{2}} & \text{, se i é par} \end{cases}$$

Onde $C_n = \{c_1, c_2, c_3, \ldots\}$ que pode possuir elementos repetidos. Tomemos $n_1 = 1$. Desta forma, n_2 é o menor natural maior que n_1 tal que $c_{n_2} \neq c_{n_1}$. Com esta ideia podemos escolher $n_3 < n_4 < \ldots$ indutivamente da seguinte forma:

Escolhido k números $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ tais que $c_{n_i} \neq c_{n_j}$ se $i \neq j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ e $\forall i < k$, n_{i+1} é o menor número $n > n_i$ tal que $c_n \neq c_{n_j}$ onde $j = 1, 2, \ldots, k$. Escolha n_{k+1} como sendo o menor dentre os números $n > n_k$ tal que $c_n \neq c_{n_j}$, $j = 1, 2, \ldots, k$.

Com isso, a sequência $C_n = \{c_{n_1}, c_{n_2}, \ldots\}$ possui elementos distintos e descreve $A \cup B$, logo, $A \cup B$ é enumerável. □

Exemplo 1.4.1. *O conjunto $\mathbb{Q}$ é enumerável.*

Demonstração. Vamos tomar primeiro o conjunto de número racionais positivos. Para isso, utilizaremos o método de diagonalização de Cantor. Primeiramente, iremos organizar os números racionais em uma matriz de modo que as colunas organizem os numeradores e as linhas os denominadores do número racional em questão, ou seja:

$$
\begin{tikzcd}
\frac{1}{1} \arrow[d] & \frac{2}{1} \arrow[r] & \frac{3}{1} \arrow[dl] & \frac{4}{1} \arrow[d] & \cdots \\
\frac{1}{2} \arrow[ur] & \frac{2}{2} \arrow[dl] & \frac{3}{2} \arrow[ur] & \frac{4}{2} \arrow[dl] & \cdots \\
\frac{1}{3} \arrow[d] & \frac{2}{3} \arrow[ur] & \frac{3}{3} \arrow[dl] & \frac{4}{3} & \cdots \\
\frac{1}{4} \arrow[ur] & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{tikzcd}
$$

Note que, seguindo as setas, temos a fração $\frac{1}{1}$ associada ao número natural 1, a fração $\frac{1}{2}$ associada ao número natural 2 e assim sucessivamente. É possível notar também que alguns números se repetem, visto que as frações não estão em sua forma irredutível. Logo, para associar um número racional a um número natural, será associado apenas o primeiro número que se repete a um número natural. Ou seja, teríamos a sequência $\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$. Ao considerarmos a matriz completa, temos uma bijeção dos naturais com os racionais positivos, portanto, o conjunto de racionais positivos $\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} | x > 0\}$ é enumerável.

De modo análogo, o mesmo vale para o conjunto de racionais negativos $\mathbb{Q}^- = \{x \in \mathbb{Q} | x < 0\}$.

Deste modo, sabendo que $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$, pelas proposições 1.4.1 e 1.4.2 $\mathbb{Q}$ é enumerável, pois a união de dois conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável $(\mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-)$ e a união de um conjunto enumerável com um conjunto finito também é enumerável $(\mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\})$. $\square$

Por fim, vamos mostrar que a seguinte proposição é válida.

Proposição 1.4.3. *O conjunto $\mathbb{R}$ é não-enumerável.*

Demonstração. Suponhamos que $\mathbb{R}$ é enumerável, isto é, existe bijeção entre $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Sabemos que existe uma bijeção $g : \mathbb{R} \to (0, 1)$ onde $g(x) = \frac{1}{2} + \arctan x$. Segue que $h = g \circ f$ é bijeção entre $\mathbb{N}$ e $(0, 1)$. Adiante, veremos que todo número $x \in (0, 1)$ se escreve de forma decimal. Ou seja, para qualquer número $x \in (0, 1)$ de forma $h(n)$ por algum $n \in \mathbb{N}$ temos

$h(1) = 0, a_1^1 a_2^1 a_3^1 \dots$

$h(2) = 0, a_1^2 a_2^2 a_3^2 \dots$

$h(3) = 0, a_1^3 a_2^3 a_3^3 \dots$

Observação 1.4.1. *: Todo número real* $x \in (0, 1)$ *se escreve como* $0, x_1 x_2 x_3 \dots$ *onde* $x_1, x_2, x_3, ... \in 0, 1, 2, ...9$

Seja

$$b_i = \begin{cases} a_i^i - 1 & \text{, se } a_i^i > 0 \\ a_i^i + 1 & \text{, se } a_i^i = 0 \end{cases}$$

Sendo assim, existe um número $0, b_1 b_2 b_3 \dots \in (0, 1)$ que não está na lista definida. Absurdo! Logo, $\mathbb{R}$ é não-enumerável. $\square$

Capítulo 2

Experiências na Escola

2.1 Planejamento e estudo

A aula será elaborada para turmas do 7º e 9º ano do Ensino Fundamental, e terá como objetivo trabalhar a seguinte habilidade da BNCC:

(EF09MA01) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade).

Inicialmente, pretende-se construir com a turma um número irracional. Para isso, é preciso fazer com que os alunos compreendam que um número é racional se, e somente se, sua representação decimal é finita ou é uma dízima periódica infinita. Abaixo, isso será demonstrado através de alguns resultados apresentados por Kirilov e Linck (2018). Primeiramente, vamos trabalhar com o número decimal finito.

Teorema 2.1.1. *[6] Um número racional possui representação decimal finita se, e somente se, quando escrito em sua forma irredutível, a decomposição em fatores primos de seu denominador possui apenas os fatores 2 ou 5.*

Demonstração. Seja x um número com casas decimais finitas, ou seja:

$$x = r + 0, a_1 a_2 \ldots a_n$$

Onde $r \in \mathbb{Z}$ é a parte inteira e cada a_i com $i = 1, 2, \ldots, n$ é uma casa decimal de x. Desta forma, temos que cada a_i é um número natural entre 0 e 9, agora vamos provar que x tem representação em forma de fração onde seu denominador é da forma $2^p 5^q$ para algum $p, q \in \mathbb{N}$. Analisemos os dois casos abaixo:

i) Todas as casas decimais são nulas: Neste caso, temos $x = r$ que é um número inteiro. Podemos escrevê-lo na forma fracionária

$$x = \frac{x}{2^0 5^0}$$

ii) Pelo menos uma casa decimal diferente de 0: temos então que $a_n \neq 0$, ou seja,

$$0, a_1 a_2 \dots a_n \times 10^n = a_1 a_2 \dots a_n \Rightarrow 0, a_1 a_2 \dots a_n = \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{10^n}$$

portanto,

$$x = r + 0, a_1 a_2 \dots a_n = r + \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{10^n} = \frac{r \times 10^n + a_1 a_2 \dots a_n}{2^n 5^n}$$

Observação 2.1.1. *[6] É possível que em alguns casos se faça necessário simplificar a fração para obter sua forma irredutível, porém no denominador restarão apenas potências dos fatores 2 ou 5.*

Reciprocamente, dado $\frac{b}{c}$ uma fração irredutível onde $b \in \mathbb{Z}$ e $c = 2^p 5^q$ onde $p, q \in \mathbb{N}$, ao supor $p \geq q$ temos

$$\frac{b}{c} = \frac{b}{2^p 5^q} = \frac{b}{2^p 5^q} \cdot \frac{5^{p-q}}{5^{p-q}} = \frac{b \times 5^{p-q}}{10^p}$$

que nos leva a conclusão que $\frac{b}{c}$ tem p casas decimais. Analogamente temos o mesmo para $p < q$. □

Do Teorema 2.1.1, obtemos o seguinte resultado de sua negação:

Corolário 2.1.1. *Um número racional possui representação decimal infinita se, e somente se, quando escrito na forma irredutível sua decomposição em fatores primos do denominador possuir algum fator primo diferente de 2 e 5.*

Agora, basta mostrarmos que esse número decimal infinito é uma dízima periódica e que sua recíproca também é válida.

Teorema 2.1.2. *[6] Seja $\frac{a}{b}$ a forma irredutível de um número racional. Se a decomposição de b em fatores primos contém fatores diferentes de 2 e 5, então sua representação decimal é uma dízima periódica infinita. Além disso, seu período possui $b - 1$ algarismos.*

Demonstração. Pelo Corolário 2.1.1 temos que a representação de $\frac{a}{b}$ é infinita. Agora, basta mostrar que ela é periódica.

Seja r_1 o resto da divisão de a por b. Sabe-se que $r_1 \neq 0$, portanto, $1 \leq r_1 \leq b-1$. Pelo algoritmo da divisão, é preciso dividir $r_1 \cdot 10^k$ por b, sendo k o menor número natural tal que $r_1 \cdot 10^k > b$. Aqui, obtém-se um novo resto r_2 tal que $1 \leq r_2 \leq b-1$.

Ao continuar com o processo acima, obtemos a sequência de restos de $\frac{a}{b}$.

$$r_1, r_2, \ldots, r_{b-1}, r_b \text{ onde } 1 \leq r_i \leq b-1 \text{ para todo } i = 1, 2, \ldots, b.$$

Dado que existem apenas $b-1$ possibilidades de restos distintos para esta divisão, então o resto r_b já apareceu pelo menos uma vez na sequência de restos dada. Isso garante um ciclo de repetição, além de mostra que o comprimento do período é de no máximos $b-1$ casas decimais. □

Por fim, basta mostrar que a recíproca também é válida.

Teorema 2.1.3. *[6] Toda dízima periódica infinita é um número racional.*

Demonstração. Seja

$$x = 0, a_1 a_2 \ldots a_s \overline{b_1 b_2 \ldots b_t}$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_s$ representam os s dígitos consecutivos da parte não periódica e $b_1, b_2, \ldots, b_t$ são os t dígitos consecutivos do período. Ao multiplicar x por 10^{s+t} e 10^s obtemos

$$10^{s+t} x = a_1 a_2 \ldots a_s b_1 b_2 \ldots b_t + 0, \overline{b_1 b_2 \ldots b_t} \tag{2.1}$$

$$10^s x = a_1 a_2 \ldots a_s + 0, \overline{b_1 b_2 \ldots b_t} \tag{2.2}$$

Subtraindo a Equação 2.1 da Equação 2.2 obtemos

$$(10^{s+t} - 10^s)x = a_1 a_2 \ldots a_s b_1 b_2 \ldots b_t - a_1 a_2 \ldots a_s \Rightarrow x = \frac{a_1 a_2 \ldots a_s b_1 b_2 \ldots b_t - a_1 a_2 \ldots a_s}{10^{s+t} - 10^s}$$

que é uma divisão de dois números inteiros, portanto, é um número racional. □

Com esses resultados caracteriza-se todas as representações decimais de um número racional, fazendo valer o que queríamos mostrar inicialmente e que agora é possível enunciar.

Teorema 2.1.4. *[6] Um número é racional se, e somente se, sua representação decimal é finita ou infinita periódica.*

Ora, sabendo que um número racional possui apenas as duas representação do Teorema 2.1.4 podemos mostrar que é possível construir números que não obedecam a essa norma. Por exemplo:

$$0, 122333444455555\ldots$$

Nota-se que no exemplo acima temos um número decimal infinito descrito por uma sequência não periódica, que chamaremos de dízima infinita não periódica. Esse tipo de dízima é um número *irracional*.

Com o estudo sobre números racionais finalizados, iniciou-se o planejamento da regência que seria aplicada em sala de aula. Para isso, foi criado o seguinte plano de aula:

Plano de Aula
Residente: Beatriz Andrade Rodrigues
Disciplina: Matemática
Turma: 9º ano E. F.

Conteúdo

- Números racionais;
- Números irracionais.

Objetivos

- Compreender quais são as representações decimais de números racionais;
- Compreender a existência dos números irracionais e problemas relacionados.

Habilidades

(EF09MA01) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade).

Desenvolvimento

Introdução

Que número é esse? (15 min)

Escrever na lousa: Conforme visto anteriormente, número racionais podem ser representados como uma fração a/b, com $a, b \in \mathbb{Z}$. Além disso, os números racionais possuem representação decimal, sendo ela de dois tipos:

- Representação decimal finita;

- Representação decimal infinita periódica.

Exemplo 1: $\frac{1}{4} = 0,25$

$\frac{2}{5} = 0,4$

$\frac{6}{5} = 1,2$

Acima temos a representação de números racionais que são decimais finitos.

Exemplo 2:

$\frac{2}{3} = 0,666666\ldots$ (fazer a divisão)

$\frac{5}{33} = 0,151515\ldots$ (fazer a divisão)

O professor deverá também transformar uma dízima infinita periódica em uma fração, explicando o processo.

Indagar os alunos: Será que é possível construir um número decimal diferente destes dois exemplos? Vamos tentar!

Fazer dinâmica de sorteio de números por aluno. Vamos supor que foi obtido o seguinte número:

$$0,122333444455555\ldots$$

Comentar com os alunos: Se continuarmos sorteando os números infinitas vezes, iremos obter um número decimal infinito não periódico (pois ele não possui padrão de repetição). Ora, esse número não é um número racional, tampouco um número natural ou inteiro. Esse número, na verdade, é um número irracional.

Os irracionais na reta numérica (20 min)

Comentar com os alunos ou escrever na lousa: Segundo Guillen(1987), a reta numérica primitiva não era contínua, pois ela era composta apenas por números inteiros.

(construir reta primitiva)

Foram os Gregos Antigos que construíram a primeira reta dita contínua, onde entre os inteiros existiam subdivisões, os chamados números fraccionários. Denominou-se a reta como linha numerada racional.

(construir reta racional)

Indagar os alunos: E o número construído?

(utilizando o zoom na reta numérica, mostrar que esse número estaria entre um intervalo de números racionais, mas não seria contemplado na reta anterior)

Comentar com os alunos: Para incluir os números irracionais na reta numérica foi criada a linha numerada real.

A seguir, o professor poderá entregar uma folha contendo a seguinte história:

Uma fofoca irracional

Para Pitágoras de Samos, a linha numerada racional representava o modelo ideal de continuidade e, por sua religiosidade, a considerava divina. Para os pitagóricos, tudo no universo seria explicado através de números racionais. (Guillen, 1987)

Um dia, segundo uma lenda, o matemático Hípaso de Metaponto contemplava as estrelas em um barco e, assim, teria descoberto que não era possível encontrar a raiz de 2 através de uma razão entre dois números inteiros.

Os pitagóricos, estando no mesmo barco, ao descobrirem sobre a nova descoberta de Hípaso ficaram tão transtornados com a informação que o teriam afogado. Há até quem chegue ao ponto de colocar o próprio Pitágoras, "para sua grande vergonha", a condenar à morte o pobre Hípaso pela sua herética descoberta.(Cachetas, 2021).

Indagar os alunos: Verificamos que podemos construir um número irracional e que ele está contido na reta real. Mas será que existe um exemplo onde conseguimos encontrar esse número em alguma situação real?

O quadrado unitário (10 min)

Escrever essa sessão na lousa: Vamos construir um quadrado de lado 1

(construir o quadrado)

Qual a medida da diagonal do quadrado?

Utilizando Pitágoras, podemos construir um triângulo retângulo com catetos iguais a 1^2 e a diagonal sendo a sua hipotenusa, ou seja:

$1^2 + 1^2 = d^2$

$1 + 1 = d^2$

$2 = d^2$

Neste caso, não existe nenhum número racional que vezes ele mesmo seja igual a 2, então a medida da diagonal do quadrado é um número irracional, no caso $\sqrt{2}$.

Encerramento: Mapa conceitual (40 minutos)

Os alunos poderão pesquisar no celular ou netbooks (se disponíveis). Escreva na lousa Com base no que estudamos hoje, construa um mapa conceitual que responda às seguintes perguntas:

1) O que é um número racional?

2) O que é um número irracional?

3) Que tipos de números decimais existem?

4) Como podemos representar os números irracionais?

5) Curiosidades e problemas envolvendo números irracionais

Ficha de avaliação (5 minutos)

Por fim, para finalizar a aula será entregue a seguinte ficha de avaliação aos alunos:

Critério	**Abaixo do esperado**	**Dentro do esperado**	**Acima do Esperado**
Conteúdo da aula			
Minha participação na aula			
Entendimento do conteúdo			
Método de avaliação			

Comentários:

2.2 Relato de experiência

As aulas foram realizadas no dia 14/11 para as turmas do 9º ano C e 9º ano D da Escola Estadual Jesuíno de Arruda sob a supervisão da professora Katia Nielsen Casimiro da Silva, onde estavam presentes 25 e 16 alunos, respectivamente. Na data, as temperaturas estavam elevadas[1], o que gerou desconforto térmico nas turmas visto que as salas contavam apenas com dois ventiladores. Tal desconforto impacta diretamente no desempenho dos estudantes, pois conforme relatado por Schneider (2002) além da configuração espacial,

[1] São Paulo registra segunda maior temperatura desde 1943. **Terra**. 2023. Disponível em: `https://www.terra.com.br/noticias/previsao-do-tempo/sao-paulo-registra-segunda-maior-temperatura-desde-1943,20abca071a5fe583e605d6ad0eda6b4amf574qn6.html`. Acesso em: 24 nov. 2023.

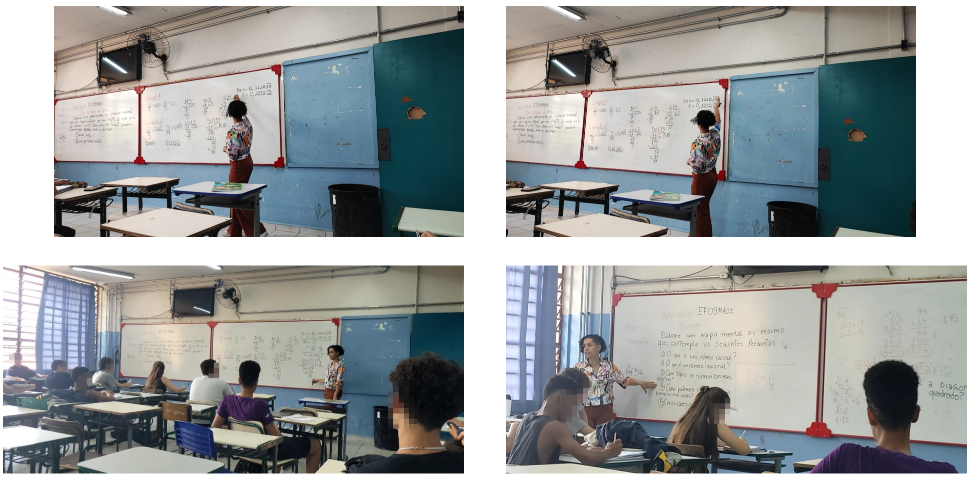
o ruído, calor, frio, luz e qualidade do ar também interferem diretamente no processo de aprendizagem dos alunos. Isso explica, em partes, a baixa participação dos alunos, relatada pelos mesmos na ficha de avaliação da aula.

Figura 2.1: Registros da Aula - 9º ano D.

Acervo pessoal da autora. 2023.

Em ambas as regências foi seguido o roteiro estabelecido no plano de aula, com algumas adaptações. A turma do 9º ano D teve a regência realizada nas duas primeiras aulas, das 7h00 às 8h30, e a participação dos alunos foi muito baixa. Já para a turma do 9º ano C, a regência foi realizada nas duas últimas aulas, entre 12h30 e 14h00, onde os alunos se mostraram mais atentos e participativos.

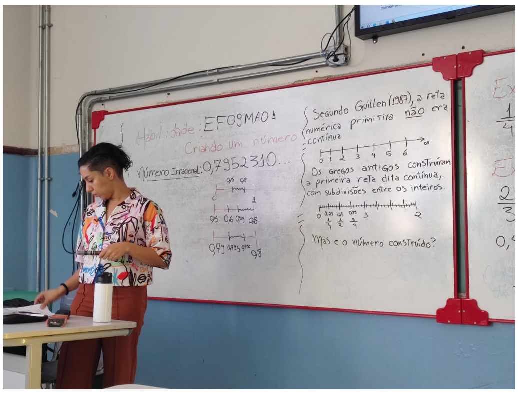
Figura 2.2: Registros da Aula - 9º ano C.



Acervo pessoal da autora. 2023.

Notei, durante a primeira aplicação, que devido ao atraso característico do primeiro horário de aula e dispersão dos alunos, o excesso de escrita na lousa lesou a dinâmica e o tempo previsto no plano. Por conta disso, durante a segunda aplicação reduzi a quantidade de escrita, principalmente no segundo momento da aula (Os irracionais na reta numérica) onde realizei a contextualização de maneira oral, recorrendo a lousa apenas para desenhar a reta numérica para ilustrar minha fala.

Figura 2.3: Segundo momento escrito - 9º ano D.



Acervo pessoal da autora. 2023.

No 9º ano D não foram entregues as fichas pois a aula não estava prevista para a turma, portanto, não possuía o material impresso. Já no 9º ano C, foram entregues as fichas de avaliação para a turma ao final da aula. No total, 23 dos 25 alunos presentes entregaram as fichas preenchidas e abaixo encontra-se a tabulação dessas respostas:

Tabela 2.1: Tabulação das Avaliações - 9º ano C.

Critério	**Abaixo do esperado**	**Dentro do esperado**	**Acima do Esperado**
Conteúdo da aula	0	11	12
Minha participação na aula	11	9	3
Entendimento do conteúdo	2	11	10
Método de avaliação	0	8	15

Comentários:

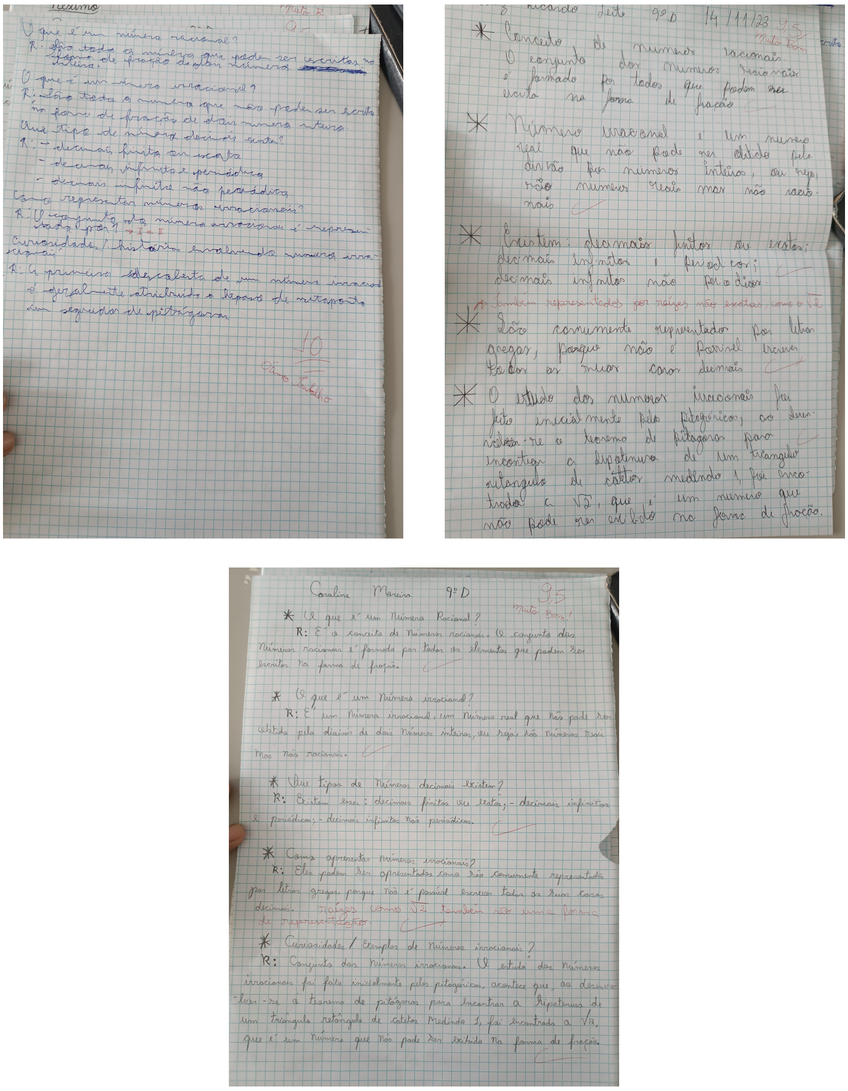
1) Boa aula.

2) Ótima aula.

3) Gostei da aula, a professora explica muito bem.

Com base nas fichas de autoavaliação considero satisfatória a execução da regência. O conteúdo da aula foi considerado satisfatório, visto que 52% dos alunos o consideraram acima do esperado e nenhum estudante classificou o conteúdo da aula como abaixo do esperado. Além disso, apesar de 48% dos alunos classificaram a própria participação como abaixo da esperada, 91% dos alunos afirmam que o entendimento do conteúdo ficou dentro ou acima do esperado. Isso pode ser explicado pelo caráter expositivo da aula, que possuía interações pontuais. Por fim, nenhum aluno classificou a avaliação (mapa mental/resumo) como abaixo do esperado, no entanto, apenas 2 alunos do 9º ano C e 3 alunos do 9º ano D entregaram a atividade. Abaixo constam as atividades entregues.

Figura 2.4: Atividades avaliativas - 9º ano D

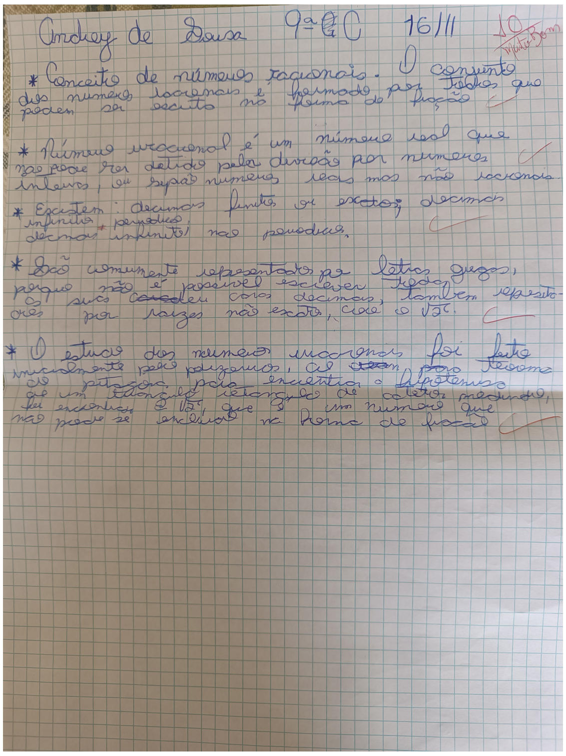


Acervo pessoal da autora. 2023.

Acima constam as atividades de 3 alunos dos 16 presentes da turma do 9º ano D. Os três apresentam respostas similares, indicando também o uso de pesquisa para responder as questões. Um dos alunos utiliza o símbolo do conjunto de números irracionais ($\mathbb{I}$) para responder a pergunta 4, enquanto os demais destacam as representações por letras gregas.

Abaixo, constam as atividades entregues por 2 alunos do 9º ano C.

Figura 2.5: Atividades avaliativas - 9º ano C



Andrey de Sousa 9º C 16/11 10 Muito Bom

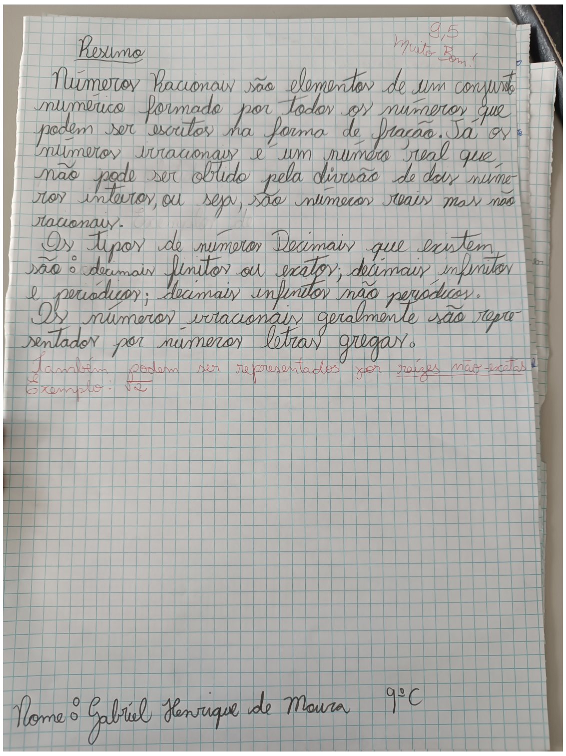
* Conceito de números racionais. O conjunto dos números racionais é formado por todos que podem ser escrito na forma de fração

* Número irracional é um número real que não pode ser obtido pela divisão por números inteiros, ou seja são números reais mas não racionais.

* Existem: decimais finitos ou exatos; decimais infinitos periódicos, decimais infinitos não periódicos.

* São comumente representados por letras gregas, porque não é possível escrever todas as suas ~~casas~~ casas decimais, também representados por raízes não exatas, como o $\sqrt{2}$.

* O estudo dos números irracionais foi feito inicialmente pelos pitagóricos, ao ~~[illegible]~~ usar o teorema de pitágoras para encontrar a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos medindo 1, foi encontrado o $\sqrt{2}$, que é um número que não pode ser escrito na forma de fração



9,5 Muito Bom!

Resumo

Números Racionais são elementos de um conjunto numérico formado por todos os números que podem ser escritos na forma de fração. Já os números irracionais é um número real que não pode ser obtido pela divisão de dois números inteiros, ou seja, são números reais mas não racionais.

Os tipos de números Decimais que existem são: decimais finitos ou exatos; decimais infinitos e periódicos; decimais infinitos não periódicos.

Os números irracionais geralmente são representados por números letras gregas.

Também podem ser representados por raízes não-exatas

Exemplo: $\sqrt{2}$

Nome: Gabriel Henrique de Moura 9ºC

Acervo pessoal da autora. 2023.

Um dos alunos optou por escrever um resumo contemplando as 5 perguntas norteadoras, onde complementei a escrita sobre à representação de números irracionais por raízes não exatas, como o $\sqrt{2}$. O segundo aluno, por outro lado, respondeu todas as perguntas de modo satisfatório e completo.

Por fim, a partir dos registros é possível concluir que as regências ocorreram sem muitos problemas, fora o calor excessivo. Através das atividades e fichas de avaliação entregues pelos alunos, é possível concluir que a aula cumpriu com os objetivos estabelecidos no plano.

Considerações Finais

A construção dos números reais via cortes de Dedekind busca identificar um "número" real como um subconjunto dos números racionais, definindo operações algébricas via operações entre subconjuntos. Esse processo já foi utilizado de forma análoga (e mais intuitiva) na passagem de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Q}$: neste caso, um número racional é uma classe de equivalência de pares ordenados de inteiros. Neste trabalho, observa-se que o conjunto dos números reais atendem particularidades não contempladas pelo conjunto dos números racionais, sendo elas: existência do *supremo*, existência de raíz n-ésima e e não-enumerabilidade do conjunto.

Além da construção realizada via Cortes de Dedekind, também foi preciso entender os tipos de representação decimais encontrados no conjunto dos racionais. Para isso, utiliza-se de Kirilov e Linck (2018) de modo a definir a representação decimal dos racionais em dois tipos: decimal finita e dízima periódica infinita. Com isso, temos que ao encontrar um número que seja ou contenha uma parte decimal infinita não periódica, o mesmo não faz parte dos conjuntos numéricos já conhecidos. Por isso, o denominamos número irracional.

A parte prática realizada focou em destacar a existência de números irracionais e conseguiu cumprir com os objetivos estabelecidos da aula.

Referências Bibliográficas

[1] BOFF, Daiane Scopel. **A construção dos números reais na escola básica**. 2006. Dissertação (Mestrado profissional) - Ensino em Matemática - UFRGS, Rio Grande do Sul, 2006. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/11188>. Acesso em: 21 abr. 2023.

[2] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018

[3] CACHETAS, Henrique. Uma história Irracional dos Números Irracionais – parte 1. Matemática
para filósofos. 2021. Disponível em: https://www.matematicaparafilosofos.pt/uma-historia-irracional-dos-numeros-irracionais-parte-1/. Acesso em: 28 out. 2023.

[4] GODOY, A. S. Pesquisa qualitativa: tipos fundamentais. **Revista de Administração de Empresas**, São Paulo, v. 35, n.3, p. 20-29, 1995.

[5] GUILLEN, Michael. **Pontes para o Infinito: O lado humano das matemáticas**. 1 ed. Lisboa: Gradiva, 1987.

[6] KIRILOV, Alexandre; LINCK, Elen Messias. **Representação decimal dos números racionais**. 2018.

[7] RUDIN, Walter. **Principles of Mathematical Analysis**. 3 ed. Nova Iorque: McGrall Hill. 1953.

[8] SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. **Currículo Paulista**, SEDUC/Undime SP. São Paulo: SEDUC/SP, 2019.

[9] SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. **Currículo em ação**, SEDUC/Undime SP. São Paulo: SEDUC/SP, 2019.

[10] SCHNEIDER, Mark. Do school facilities affect academic outcomes? **National Cleringhouse for Educacional Facilities**, v. 1, n. 1, p. 1 - 25, Washington, DC, novembro, 2002. Disponível em: https://eric.ed.gov/?id=ED470979. Acesso em: 25 nov. 2023.