

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

Thaís Santos Moreno

**TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA DA GEOMETRIA
DIFERENCIAL LIGADA À CARTOGRAFIA: APOIO AO
PROFESSOR DE MATEMÁTICA**

Sorocaba - SP

2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Pró-Reitoria de Extensão

Thaís Santos Moreno

TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA DA GEOMETRIA DIFERENCIAL LIGADA À
CARTOGRAFIA: APOIO AO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de
Pós-Graduação em Ensino de Ciências
Exatas (PPGECE) para obtenção do título
de Mestre em Ensino de Ciências Exatas.

Orientação: Prof. Dr. Antônio Luís
Venezuela

Sorocaba - SP

2024

Moreno, Thaís Santos

**Transposição Didática da Geometria Diferencial ligada à
Cartografia: apoio ao professor de Matemática / Thaís
Santos Moreno -- 2024.
132f.**

**Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de
São Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba
Orientador (a): Antônio Luís Venezuela
Banca Examinadora: Antônio Luís Venezuela, Ana
Cristina de Oliveira Mereu, Érica Regina Filetti
Nascimento
Bibliografia**

**1. Geometria Diferencial. 2. Cartografia. 3. Transposição
Didática. I. Moreno, Thaís Santos. II. Título.**

**Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de
Informática(SIn)**

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

**Bibliotecário responsável: Maria Aparecida de Lourdes Mariano -
CRB/8 6979**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Thais Santos Moreno, realizada em 25/06/2024.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Antonio Luís Venezuela (UFSCar)

Documento assinado digitalmente
gov.br ANTONIO LUIS VENEZUELA
Data: 25/06/2024 21:02:39-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Érica Regina Filletti Nascimento (UNESP)

Documento assinado digitalmente
gov.br ERICA REGINA FILLETTI NASCIMENTO
Data: 26/06/2024 08:14:53-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Ana Cristina de Oliveira Mereu (UFSCar)

Documento assinado digitalmente
gov.br ANA CRISTINA DE OLIVEIRA MEREU
Data: 26/06/2024 08:39:24-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas.

Este trabalho é dedicado aos professores de matemática que demonstram constante esforço e dedicação em sua prática educativa.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos a todos que contribuíram para a realização deste trabalho.

Primeiramente, agradeço a Deus pela sabedoria e força concedidas.

À minha família, expresso minha profunda gratidão por acreditarem no meu potencial, por sempre me apoiarem e incentivarem em todos os momentos.

Ao meu orientador, Antônio Luís Venezuela, expresso meu agradecimento pela orientação, paciência e valiosas instruções fornecidas. Sua orientação foi essencial para o desenvolvimento e aprimoramento deste trabalho.

Aos amigos do mestrado, por serem uma turma tão colaborativa e inspiradora. Suas contribuições e trocas de experiências enriqueceram minha jornada acadêmica.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para este projeto, meu mais profundo agradecimento.

RESUMO

Fundamentada teoricamente na Geometria Diferencial, o trabalho destaca a relevância desse campo matemático complexo e seu potencial para enriquecer o ensino e aprendizagem da Matemática, especialmente em níveis mais avançados. Ao estudar Geometria Diferencial, foi possível estabelecer uma conexão entre esse conteúdo e o Ensino Básico, sobretudo no estudo da Cartografia, cuja habilidade está contemplada na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). A relação entre a Geometria Diferencial e a Cartografia visa fornecer um suporte teórico mais amplo e contextualizado ao professor. A Transposição Didática é explorada como uma estratégia importante para essa integração. Por meio dela, é possível traduzir os conceitos abstratos da Geometria Diferencial em uma linguagem acessível aos estudantes, tornando o processo educativo mais significativo. O plano de aula desenvolvido oferece ideias para aprimorar a prática pedagógica, destacando o papel expressivo do professor no momento do preparo de suas aulas, não apenas como transmissor de conhecimento, mas como facilitador do processo de aprendizagem, promovendo conexões interdisciplinares e estimulando o pensamento crítico e criativo dos alunos.

Palavras-chave: Geometria Diferencial. Cartografia. Plano de Aula. Transposição Didática.

ABSTRACT

Theoretically based on Differential Geometry, this writing highlights the relevance of this complex mathematical area and its potential to enrich the Mathematics teaching and learning, especially at more advanced levels. By studying Differential Geometry, it was possible to establish a connection between this content and elementary education, especially in the cartography study, whose skill is included in the National Common Curricular Base (BNCC). Connection between Differential Geometry and Cartography aims to provide broader and more contextualized theoretical support to the teacher. Didactic Transposition is explored as an important strategy for this integration. Through it, it is possible to translate the abstract concepts of Differential Geometry into a language accessible to students, making the educational process more meaningful. The developed class plan offers ideas to improve pedagogical practice, highlighting the expressive role of the teacher when preparing their classes, not only as a transmitter of knowledge, but as a learning process facilitator, promoting interdisciplinary connections and stimulating critical thinking and creativity of students.

Keywords: Differential Geometry. Cartography. Class Plan. Didactic Transposition.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Tangentes horizontais.....	15
Figura 2. Representação de tangentes em uma curva suave.....	21
Figura 3. Curvas coordenadas e vetores tangentes.....	23
Figura 4. Traço de uma circunferência.	25
Figura 5. Traço de uma curva modular.....	26
Figura 6. Curva parametrizada diferenciável e não regular.....	26
Figura 7. Linha poligonal inscrita na curva.	27
Figura 8. Reparametrização de α por h	28
Figura 9. Referencial de Frenet.	29
Figura 10. Curva em \mathbb{R}^3	35
Figura 11. Triedro de Frenet da curva α em s	40
Figura 12. Vetores tangentes às curvas coordenadas.	53
Figura 13. Esfera centrada na origem.	53
Figura 14. Hemisférios da esfera; com centro em $(0, 0, 0)$ e raio a	55
Figura 15. Vetor e plano tangente à superfície.....	56
Figura 16. Plano tangente gerado por X_u e X_v	58
Figura 17. Aplicação normal de Gauss.....	59
Figura 18. Projeções cartográficas; a) Projeção Plana ou Azimutal e Projeção Plana Polar; b) Projeção Cônica; c) Projeção Cilíndrica e Projeção Cilíndrica de Peters....	80
Figura 19. Tipos de projeções.....	81
Figura 20. Projeções Azimutais.	82
Figura 21. Funcionamento didático.....	103
Figura 22. Sistema de Ensino segundo Chevallard.....	104
Figura 23. Distância Brasília e Bahia, via Google Maps.....	114
Figura 24. Elementos de um mapa.....	117
Figura 25. Distorções para cada projeção.....	121
Figura 26. Comparação entre diferentes tipos de projeções.....	121

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	14
2.1	UMA BREVE HISTÓRIA SOBRE GEOMETRIA DIFERENCIAL	14
2.2	INTRODUÇÃO À GEOMETRIA DIFERENCIAL	24
2.2.1	Curvas Planas (\mathbb{R}^2)	25
2.2.2	Curvas no Espaço (\mathbb{R}^3)	35
2.2.3	Teoria Local de Superfícies	50
3	INTRODUÇÃO À CARTOGRAFIA	76
3.1	UMA BREVE HISTÓRIA DA CARTOGRAFIA	76
3.2	APLICAÇÕES DA GEOMETRIA DIFERENCIAL EM CARTOGRAFIA	84
4	SUPORTE AO PROFESSOR	90
4.1	BNCC	95
4.2	TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA	100
4.3	O PLANO DE AULA	107
4.4	REALIZAÇÃO DO PLANO DE AULA VOLTADO À CARTOGRAFIA	109
4.4.1	Introdução à cartografia	110
4.4.2	Explorando os elementos de um mapa	115
4.4.3	Projeções cartográficas	119
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	124
	BIBLIOGRAFIA	126

1 INTRODUÇÃO

A Matemática é essencial para a formação dos indivíduos, pois está presente em todos os níveis educacionais. Contudo, uma parcela considerável de discentes possuem dificuldades expressivas de compreender e se engajar com os conceitos matemáticos, especialmente quando se trata de áreas mais abstratas e complexas. Sendo assim, torna-se oportuno buscar estratégias e demais recursos didáticos que tornem estes conhecimentos mais acessíveis para os alunos (LIBÂNEO, 2006).

A motivação deste trabalho surge da convicção de que o professor desempenha um papel fundamental na promoção de um impacto positivo e significativo na sala de aula. Assim, ao elaborar o planejamento das aulas considerando as necessidades dos alunos, os objetivos educacionais e os recursos disponíveis, os professores têm a capacidade de desenvolver experiências de aprendizagem eficazes.

O planejamento de aula é uma etapa essencial do trabalho docente, permitindo ao professor antecipar situações de ensino-aprendizagem e tomar decisões fundamentadas para alcançar os objetivos educacionais (Libâneo, 2006, p.115).

Shulman (1986) afirma que ao ensinar algum conteúdo, o professor precisa não apenas compreender que algo é assim, ele deve entender porque é assim.

No contexto do ensino de Matemática, a Transposição Didática surge como uma abordagem pedagógica que visa adaptar os conceitos complexos de uma disciplina, tornando-os compreensíveis e aplicáveis para os alunos. No caso específico da Geometria Diferencial, área da Matemática que estuda as propriedades geométricas de curvas e superfícies no espaço euclidiano, a Transposição Didática se mostra desafiadora, requerendo estratégias criativas para facilitar a compreensão dos conceitos envolvidos (D'AMBRÓSIO, 2009; HAYDT, 2011).

Chevallard (1991) constrói o conceito de Transposição Didática referindo-se a uma apropriação e transformação de um objeto de ensino.

Um conteúdo de saber que tenha sido definido como saber a ensinar, sofre, a partir de então, um conjunto de transformações adaptativas que irão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os objetos de ensino. O 'trabalho' que faz de um objeto de saber a ensinar, um objeto de ensino, é chamado de Transposição Didática (Chevallard, 1991, p.39).

Uma abordagem que pode tornar a Geometria Diferencial mais acessível é explorar sua relação com a Cartografia, disciplina que se dedica à representação gráfica da superfície terrestre, unindo ciência e arte. Por meio da Transposição Didática da Geometria Diferencial associada à Cartografia, é viável estabelecer uma conexão direta entre os conceitos matemáticos abstratos e a aplicação prática em mapas e outras representações visuais (CHEVALLARD, 1991; BAKKER, 1965).

O objetivo geral deste trabalho consiste no apoio ao professor de Matemática, apresentando uma proposta que conecta a Geometria Diferencial à Cartografia. Esta abordagem visa estimular os docentes a promoverem um aprendizado mais profundo e contextualizado para seus alunos, reforçando, ao mesmo tempo, conceitos oriundos da graduação.

Para alcançar o objetivo geral mencionado no parágrafo anterior, foram estabelecidos objetivos específicos que norteiam a pesquisa. Esses objetivos incluem: identificar habilidades na Base Nacional Comum Curricular (BNCC); estudar curvas no plano, no espaço e superfícies por meio da Geometria Diferencial; analisar o Teorema Egregium de Gauss; explorar a história e o conteúdo teórico da Cartografia; e, por fim, elaborar um plano de aula.

As curvas no plano e no espaço são estudadas por meio da Geometria Diferencial, com a finalidade de compreender seus conceitos e propriedades fundamentais. Além disso, o estudo das superfícies no espaço, também utilizando a Geometria Diferencial, é abordado para a assimilação das características e propriedades dessas estruturas geométricas. Essa fundamentação teórica tem como referência o trabalho de Tenenblat (2008).

Um aspecto importante a explorar é o Teorema Egregium de Gauss, que estabelece uma relação entre a curvatura intrínseca de uma superfície e suas propriedades geométricas. O estudo desse teorema visa a compreensão e aplicação na prática da Cartografia.

Para complementar o trabalho, realiza-se uma análise da história e do conteúdo teórico relacionados à Cartografia, compreendendo as técnicas e representações utilizadas na construção de mapas. Essa investigação busca identificar os pontos de interseção entre a Cartografia e a Geometria Diferencial, fornecendo subsídios para a Transposição Didática desses conceitos.

Com base nos estudos teóricos e na análise dos conteúdos curriculares por meio da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), elabora-se um plano de aula que

integra de forma coerente a Geometria Diferencial aplicada à Cartografia. Esse plano de aula tem como desígnio proporcionar aos alunos um ambiente de aprendizagem envolvente e expressivo, explorando as relações entre os conceitos matemáticos e as representações cartográficas.

Desenvolvem-se também atividades práticas alinhadas ao plano de aula elaborado. Essas atividades visam estimular a participação ativa dos alunos, promovendo a aplicação dos conceitos estudados e o desenvolvimento de habilidades cognitivas e práticas. Por meio dessas atividades, o professor tem a oportunidade de vivenciar a conexão entre a Geometria Diferencial e a Cartografia, compreendendo a importância e a relevância desses conhecimentos.

Ao final da pesquisa, espera-se que as estruturas e estratégias desenvolvidas deem apoio ao professor de Matemática no processo da Transposição Didática da Geometria Diferencial relacionada à Cartografia, contribuindo para uma prática pedagógica mais estimulante. Mediante esse trabalho, busca-se fornecer recursos teóricos e práticos que capacitem os professores a abordarem esses conteúdos de maneira mais acessível, promovendo o interesse e o aprendizado dos alunos. Além disso, espera-se que o docente adquira a percepção de que existe uma relação intrínseca entre os conteúdos mais avançados, frequentemente encontrados no âmbito acadêmico, e aqueles ensinados nas escolas.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, busca-se grafar a fundamentação teórica do trabalho. Deste modo, para tal propósito, retrata-se um conciso contexto histórico sobre a Geometria Diferencial, proferindo importantes personalidades que contribuíram para o avanço da Matemática, assim como a Geometria Diferencial teórica, desde as curvas planas, as curvas no espaço, a teoria local das curvas com a Primeira e a Segunda Forma Quadrática e, por fim, o Teorema Egregium de Gauss que pode ser relacionado com a Cartografia.

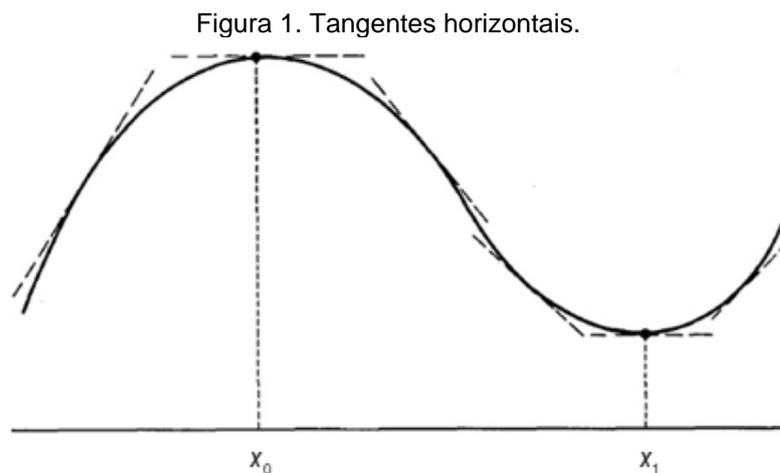
O apreço pela Geometria Diferencial ocorreu a partir do contato da autora deste trabalho com a disciplina ao longo da graduação e, apesar de ser um assunto mais específico, é importante destacar, ao professor, que é exequível transmutar um conteúdo de graduação para o ambiente escolar. Assim, espera-se que o docente se aproprie da dissertação como forma de estímulo e suporte para seu trabalho de modo que reconheça as possibilidades e versatilidades que há no exercício da docência.

Para uma compreensão mais sólida do material que será abordado adiante, é vantajoso que o leitor esteja familiarizado com alguns princípios do Cálculo Diferencial e Integral.

2.1 UMA BREVE HISTÓRIA SOBRE GEOMETRIA DIFERENCIAL

Pierre Fermat (1601 - 1665) foi um proeminente nome na abordagem das derivadas, devido ao seu interesse em um método para encontrar os valores máximos e mínimos de uma função, o que constitui uma parte substancial do campo do cálculo conhecido como Cálculo Diferencial. É notório que tanto Isaac Newton (1643 – 1727) quanto Gottfried Leibniz (1646 – 1716), de maneira independente, contribuíram para o desenvolvimento das ideias do Cálculo Diferencial. A partir de suas contribuições, uma significativa conexão foi estabelecida entre os conceitos de primitiva e derivada.

O cerne do estudo da derivada está na tentativa de calcular a reta tangente a uma curva em um ponto específico. No século XVII, o matemático Pierre de Fermat solucionou esse desafio geométrico. Sua busca visava encontrar os valores máximos e mínimos de funções especiais particulares. Nesse contexto, Fermat observou que a curva apresentava tangentes horizontais nos pontos de máximo e mínimo, como pode ser observado na Figura 1.



Fonte: Apostol (1969).

Nos valores de x_0 e x_1 , ao longo do segmento horizontal da Figura 1, encontram-se os pontos onde a função atinge seus respectivos valores de máximo e mínimo. Fermat adota uma abordagem que simplifica o problema em determinar os pontos de máximo e mínimo de uma função f , de forma que seja preciso encontrar as tangentes horizontais para isso.

À primeira vista, não é evidente uma relação clara ou intuitiva que possa conectar o desafio de calcular a área sob uma curva com a concepção de encontrar a tangente em um ponto específico ao longo da curva. Apostol afirma (1967, p.157)

[...] a primeira pessoa a perceber que essas duas ideias aparentemente sem relação são, na verdade, intimamente relacionadas, parece ter sido o professor Isaac Newton (1630-1677). No entanto, Newton e Leibniz, foram os primeiros a compreenderem a importância real dessa relação.

A tentativa de estabelecer uma ligação entre o cálculo de áreas e a determinação de tangentes em pontos ao longo de curvas marca o surgimento de um novo ramo na Matemática, denominado Cálculo Diferencial. À medida que a pesquisa mencionada acima progrediu, surgiu a noção de derivada, que inicialmente foi empregada como uma ferramenta para identificar tangentes horizontais. Todavia, logo se percebeu que essa ferramenta não apenas permitia calcular a velocidade de objetos em movimento, mas também tinha uma aplicação mais abrangente: determinar a taxa de mudança de uma função específica, contanto que a função fosse diferenciável, na qual marca o ponto de partida para uma exploração mais profunda desse conceito (BOYER, MERZBACH, 2011; TENENBLAT, 2008).

Como anteriormente destacado, Fermat desempenhou um papel pioneiro na formação do campo do Cálculo Diferencial ao abordar a definição de máximos e

mínimos de funções. No entanto, as contribuições de Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) também merecem reconhecimento, pois seus estudos sobre a derivada e a formulação da noção clássica da diferencial foram importantes. É a partir dessa definição de derivada que se desdobra um entendimento mais aprofundado das relações diferenciais.

A derivada é um elemento matemático que expressa a taxa de variação instantânea de uma função em relação a sua variável independente, medindo como uma função muda em um ponto específico e fornece informações sobre a inclinação da tangente à curva nesse ponto.

Para calcular a derivada de uma função, recorre-se ao conceito de limite, considerando dois pontos próximos na curva da função, e, diminuindo gradualmente a distância entre eles, a derivada é encontrada quando essa distância se aproxima de zero. A derivada pode ser positiva, negativa ou igual a zero, dependendo se a função está crescendo, decrescendo ou alcançou um ponto crítico, respectivamente (ANTON, BIVENS, DAVIS, 2007).

A derivada possui algumas interpretações e grande variedade de aplicações, podendo representar taxas de crescimento ou decrescimento de uma quantidade, ao exemplo da velocidade de um objeto em movimento, bem como é ferramental matemático fundamental para se determinar pontos de máximo e mínimo de funções, conseqüentemente, sendo crucial para auxiliar na solução de problemas de otimização (ANTON, BIVENS, DAVIS, 2007).

No contexto de gráficos de funções, a derivada indica a taxa de mudança instantânea da inclinação da curva, na qual valores crescentes da derivada significam que a inclinação está aumentando, enquanto valores decrescentes indicam uma diminuição na inclinação, sendo possível traçar gráficos precisos das funções (ANTON, BIVENS, DAVIS, 2007).

De um modo geral, sem aprofundar muito nos instrumentos matemáticos acerca do entendimento de limite e ademais, a definição a seguir traz uma abordagem contemporânea sobre derivada, observando o caso em que uma função de fato é derivável, sendo assim, tem-se:

Definição 1. Uma função $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável em um ponto $x_0 \in I$, se o limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existir.}$$

Para o caso de o limite existir (Definição 1), imediatamente é possível afirmar que a função f em questão de fato é derivável em x_0 , e a existência desse limite aponta que x tende ao ponto x_0 . Contudo, é oportuno destacar ainda que essa aproximação pode ser realizada de algumas maneiras, na reta, pelas laterais, criando algumas perspectivas matemáticas frente a aproximações, pois x_0 pode estar no interior de um intervalo ou ser o elemento máximo, o que deixaria a aproximação ser apenas por uma das extremidades (APOSTOL, 1969).

Se x_0 pertencer ao intervalo e os limites dados pelas Equações (1) e (2) existirem, ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0) \quad (1)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0), \quad (2)$$

então o limite vai existir.

Se em ambos os limites existirem e forem iguais, é possível dizer que a função é contínua e derivável em x_0 , tais limites também são conhecidos como derivadas laterais de f em x_0 .

Tendo em vista as Equações (1) e (2), se uma função possui derivadas em todos os pontos do intervalo I , então ela é derivável em todos pontos pertencentes a esse intervalo. Assim, fazendo a seguinte troca de variável, $h = x - x_0$, obtém-se:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'_+(x_0) \quad (3)$$

e

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'_-(x_0). \quad (4)$$

As Equações (3) e (4) são as notações mais utilizadas nos livros que tratam sobre o tema, inclusive os de cunho didático, de certa forma unificando as notações e deixando o entendimento do tema mais homogêneo, facilitando a identificação e também a comparação dos termos.

Em face do conhecimento intuitivo sobre diferenciais, tem-se ainda o estudo acerca da geometria deste ferramental matemático, como ilustrado na Figura 1, foi possível perceber a relação entre curvas, pontos e tangentes, todos estes elementos correlacionados pelos saberes de derivação. A Geometria Diferencial, trata exatamente destes elementos, compreendendo o comportamento sobre retas, planos e pontos.

Conforme Filho (2012) e Santos (2021), em seu núcleo, a Geometria Diferencial se baseia no cálculo diferencial e integral, ao qual emprega técnicas e métodos matemáticos para investigar as propriedades geométricas que são invariantes sob transformações isométricas, onde essas propriedades são estudadas independentemente da maneira como as curvas e superfícies estão imersas no espaço.

A Geometria Diferencial é uma disciplina matemática que surgiu no século XIX como uma extensão da geometria clássica. Com o advento do cálculo diferencial e integral, os matemáticos passaram a explorar as propriedades geométricas de curvas e superfícies no espaço euclidiano. Essa ciência se dedica ao estudo das características intrínsecas desses objetos, tais como curvatura, torção, métrica e propriedades geométricas que são preservadas sob transformações isométricas (FILHO, 2012).

Seguindo a concepção do parágrafo anterior, Boldrini *et al.* (1986) elucidam que o ramo possui uma abordagem criteriosa no que tange aos teoremas, corolários e demais consequências da Geometria Diferencial, apresentando em expressões as características procuradas nos entes estudados, entre alguns, vetores tangentes, derivadas direcionais, espaços tangentes e curvas parametrizadas, sendo então

possível uma compreensão mais profunda das estruturas geométricas presentes na natureza e em diversas áreas do conhecimento.

A Geometria Diferencial possui diversas aplicações em outros segmentos, entre alguns exemplos é possível mencionar na Física, com a Teoria da Relatividade tanto geral como restrita, bem como nas engenharias, ciências da computação, entre outros. Na física, a Geometria Diferencial é usada para descrever a geometria do espaço-tempo curvo e estudar a gravidade. Na engenharia, ela é aplicada na modelagem e análise de estruturas complexas, como pontes e superfícies curvas em arquitetura. Na ciência da computação, a Geometria Diferencial é utilizada em algoritmos de processamento de imagens, reconhecimento de padrões e análise de formas (O' NEIL, 1966; SANTOS, 2016; ANTON, 2007).

A história da Geometria Diferencial remonta a séculos atrás, quando os matemáticos começaram a explorar as propriedades das curvas e superfícies no espaço euclidiano. O estudo dessas formas geométricas evoluiu ao longo do tempo, impulsionado pelas contribuições de matemáticos visionários (BOYER, MERZBACH, 2011).

Um dos primeiros avanços significativos na Geometria Diferencial ocorreu no século XVIII, com a contribuição da matemática italiana Maria Agnesi (1718 - 1799). Em sua obra "Analytical Institutions" de 1748, Agnesi apresentou a curva cúbica conhecida como a "bruxa de Agnesi". Embora seu trabalho não tenha utilizado explicitamente o cálculo diferencial, essa curva se tornou famosa e é estudada até hoje. A contribuição de Agnesi marcou o início do interesse na investigação de curvas e superfícies (BOYER, MERZBACH, 2011).

Todavia, foi no século XIX que a Geometria Diferencial começou a ser desenvolvida de forma mais sistemática, com importantes avanços proporcionados por matemáticos como Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), ao qual desempenhou um papel fundamental na fundação da geometria diferencial e é considerado um dos pioneiros nesse campo. Em sua obra "Disquisitiones Generales Circa Superfícies Curvas" de 1827, Gauss introduziu o conceito de curvatura e estabeleceu as bases teóricas para o estudo das propriedades das superfícies curvas (BOYER, MERZBACH, 2011).

Uma das contribuições mais significativas de Gauss foi o teorema do "Theorema Egregium" (que significa, do latim, "teorema notável") ou "Teorema Fundamental da Geometria Diferencial". Esse teorema estabelece que a curvatura de

uma superfície é uma propriedade intrínseca, ou seja, independe da maneira como a superfície está imersa no espaço, isto é, a curvatura de uma superfície permanece a mesma, independentemente das deformações que ela possa sofrer. Essa descoberta revolucionou a compreensão da Geometria Diferencial, fornecendo uma base sólida para o estudo das características inerentes das curvas e superfícies (BOYER, MERZBACH, 2011).

Além de Gauss, há outros matemáticos de grande relevância que contribuíram para o desenvolvimento da Geometria Diferencial ao longo do século XIX. Destacam-se nomes como Bernhard Riemann (1826 – 1866), que introduziu a noção de variedade diferenciável e desenvolveu a métrica riemanniana, permitindo a medida de distâncias em espaços curvos. A obra de Riemann, intitulada "Habilitationvortrag" de 1854, teve um impacto profundo na Geometria Diferencial moderna (BOYER, MERZBACH, 2011).

Os avanços destes pesquisadores, citados nos parágrafos anteriores, estabeleceram as bases para a Geometria Diferencial e abriram caminho para uma compreensão mais profunda das propriedades geométricas de curvas e superfícies.

Ao longo do século XX, a Geometria Diferencial continuou a se desenvolver e se expandir, com contribuições de matemáticos como Élie Cartan (1869 – 1951), Henri Poincaré (1854 – 1912), Marcel Berger (1927 – 2016) e muitos outros. O campo da Geometria Diferencial continua a evoluir, abrindo portas para novas descobertas e aplicações interdisciplinares em áreas como física, engenharia, ciência da computação, biologia e outros (BOYER, MERZBACH, 2011).

Hodiernamente, a Geometria Diferencial continua a ser um campo ativo de pesquisa e aplicação. Com o advento da computação e técnicas avançadas, como a análise complexa e a teoria de Lie (1842 - 1899), uma ferramenta para estudar equações diferenciais, novas abordagens e aplicações estão sendo exploradas, tendo um impacto significativo em diversas áreas das ciências (ANTON, 2007; CARMO, 2005).

Um dos teoremas essenciais na Geometria Diferencial decerto é o teorema fundamental das curvas planas, ao qual estabelece a relação entre curvas planas suaves e linhas retas em um sistema de coordenadas apropriado. Esse teorema é amplamente utilizado no estudo e na análise das propriedades geométricas das curvas (ANTON, 2007; CARMO, 2005), onde é ilustrado adiante.

Figura 2. Representação de tangentes em uma curva suave.



Fonte: autora.

Como evidenciado na Figura 2, é possível perceber que uma curva plana suave é uma curva cujas derivadas são contínuas em todos os pontos. Com efeito, o teorema fundamental das curvas planas afirma que, para qualquer ponto pertencente a uma curva plana suave, existe uma vizinhança suficientemente pequena ao redor desse ponto em que a curva pode ser representada por uma linha reta em um sistema de coordenadas adequado.

Localmente, é possível aproximar uma curva plana suave por uma linha reta em um sistema de coordenadas bem escolhido. Essa propriedade simplifica a análise e o estudo das curvas, uma vez que a geometria das linhas retas é bem compreendida e estudada.

Outro teorema, o teorema da existência e unicidade das curvas, vinculado às equações diferenciais, estabelece que dado um problema de valor inicial, para uma equação diferencial ordinária, existe uma única solução local. De maneira mais precisa, se a função que define a equação diferencial e a função que define a condição inicial são contínuas e atendem a determinadas condições de suavidade, então há uma solução única em uma região próxima ao ponto inicial.

Em continuidade com o parágrafo anterior, esse teorema é fundamental para o estudo das curvas e superfícies, pois permite analisar e descrever as trajetórias possíveis dentro de um contexto geométrico mais amplo. Deste modo, segue o enunciado do teorema conforme Yartey e Ribeiro (2017); é importante destacar que o presente teorema não será demonstrado neste trabalho.

Teorema 1 (Teorema da Existência e Unicidade). Seja o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x). \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1. \end{cases}$$

Sejam $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ funções contínuas num intervalo $[a, b]$. Se $x_0 \in [a, b]$ e se $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$, então a equação $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ tem uma e somente uma solução $y(x)$ no intervalo $[a, b]$.

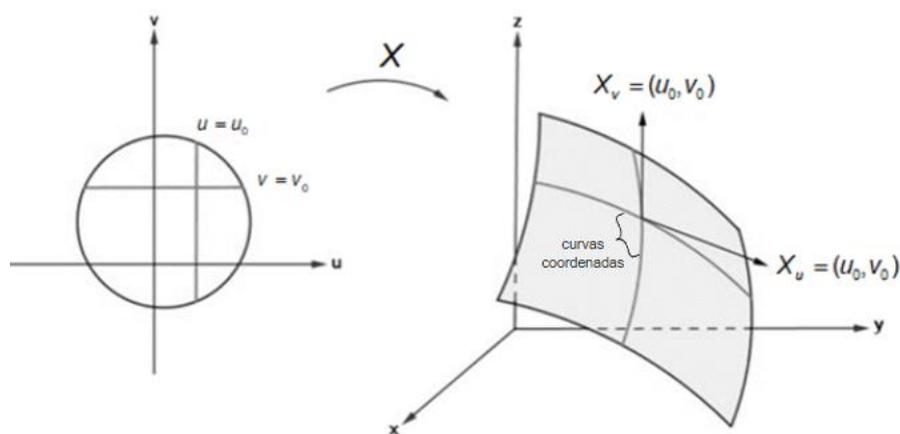
Exemplo 1. Seja o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'' + \frac{1}{x}y' + xy = \frac{1}{x^2}. \\ y(2) = 0 \\ y'(2) = -1, \end{cases}$$

onde as funções $p(x) = \frac{1}{x}$, $q(x) = x$ e $r(x) = \frac{1}{x^2}$ estão definidas no intervalo $[1, 5]$. Então, como essas funções são contínuas no seu domínio e $2 \in [1, 5]$, o teorema de existência e unicidade garante que existe uma e somente uma solução $y(x)$ do problema de valor inicial (YARTEY; RIBEIRO, 2017).

Curvas coordenadas são trajetórias em uma variedade diferenciável que seguem os vetores de um sistema de coordenadas $X(u, v)$. Para cada coordenada u ou v , há uma curva que mantém uma das variáveis fixa enquanto a outra varia. O teorema de existência e unicidade garante que, dado um ponto inicial, $X(u, v)$ existe de forma única, assegurando que o sistema de coordenadas seja bem definido. A Figura 3 apresenta um exemplo utilizando curvas coordenadas em $X(u_0, v_0)$.

Figura 3. Curvas coordenadas e vetores tangentes.



Fonte: Silva (2022).

Para compreender o teorema da existência e unicidade, é fundamental considerar as condições necessária para sua aplicação, como a continuidade e diferenciabilidade da superfície e da curva, bem como um ponto inicial e uma direção inicial. Quando essas condições são satisfeitas, o teorema assegura que existe uma curva suave que passa pelo ponto inicial e segue a direção inicial em uma superfície suave. Além disso, essa curva é única, o que significa que não há outra curva suave que atenda às mesmas condições (TENENBLAT, 2008; SILVA, 2022).

O resultado citado anteriormente é elementar para a Geometria Diferencial, uma vez que permite estudar as propriedades das curvas em relação às superfícies em que estão contidas. Por exemplo, é possível investigar a curvatura da curva em diferentes pontos da superfície ou analisar a maneira como a curva se move ao longo da superfície, sendo um conhecimento utilizado em diversos segmentos, dentre alguns, na modelagem de trajetórias de partículas em campos gravitacionais ou na análise de fluxo de fluidos em superfícies (SILVA, 2022; SANTOS, 2021).

O teorema (da existência e unicidade) fornece ferramentas matemáticas poderosas para descrever, analisar e comparar as formas e trajetórias presentes em diferentes contextos geométricos, sendo considerado como um dos pilares fundamentais sobre os quais se constrói o estudo da Geometria Diferencial.

Em conformidade com o que explica Venezuela (2021) e Santos (2016), é tanto oportuno como necessário considerar a interdisciplinaridade dos conhecimentos, de modo que a Geometria Diferencial também está inserida neste contexto, conectando-se com diversos segmentos como a Física, Biologia, Economia, Geografia, entre outros. No âmbito da Geografia, a Geometria Diferencial é aplicada na cartografia e

no estudo de superfícies terrestres, como a modelagem de curvas de nível em mapas topográficos.

Dessarte, outro aspecto de relevância da Geometria Diferencial dar-se na compreensão da geometria não euclidiana. Enquanto a geometria euclidiana é a geometria do espaço plano e tridimensional que estamos familiarizados, a Geometria Diferencial permite o estudo de espaços curvos e não planos, ao qual é aplicada na descrição de fenômenos em que a geometria do espaço é afetada, como no estudo da gravidade ou em espaços cosmológicos (BOLDRINI, 1986; CARMO, 2005).

Na próxima seção, aborda-se a introdução à Geometria Diferencial, um campo de grande importância para este trabalho. Nesse contexto, examina-se os fundamentos que sustentam a compreensão das geometrias complexas e a topologia dos espaços. Esta exploração prevê um caminho enriquecedor, proporcionando informações importantes sobre a Geometria Diferencial e suas aplicações.

2.2 INTRODUÇÃO À GEOMETRIA DIFERENCIAL

À luz dos tópicos aludidos anteriormente, torna-se adequado conceituar os assuntos sobre a Geometria Diferencial de forma mais teórica. Posto isto, o trabalho é pautado em diversas pesquisas bibliográficas, com a finalidade de estruturar o embasamento científico.

É pertinente esclarecer aos estimados leitores que a presente dissertação adota a abordagem de apresentar a teoria com a finalidade de ampliar o espectro de conhecimento sobre o tema em questão. Cada conceito, princípio e análise é apresentado com a intenção explícita de contribuir para uma compreensão mais abrangente e aprofundada. Tal escolha metodológica visa não apenas fornecer informações relevantes, mas também promover uma reflexão crítica e uma expansão do conhecimento dentro deste domínio específico.

A teoria construída nas subseções é realizada, sobretudo, a partir da obra de Tenenblat (2008) e considera-se, como pré-requisitos, o conhecimento sobre Cálculo Vetorial e Cálculo Diferencial no Espaço Euclidiano por parte do leitor.

2.2.1 Curvas Planas (\mathbb{R}^2)

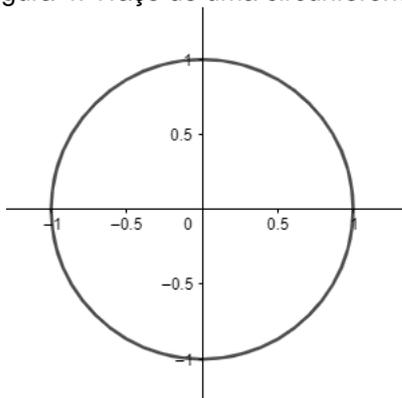
Nesta seção, desenvolve-se a teoria local das curvas no plano \mathbb{R}^2 com conceitos básicos para curvas bidimensionais, do referencial de Frenet (1816 – 1900) até o Teorema Fundamental das Curvas Planas.

Definição 2. Uma *curva parametrizada diferenciável* do plano é uma função $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ que para cada t associa $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, onde as funções x e y são diferenciáveis de classe C^∞ , isto é, possuem derivadas contínuas em todas as ordens.

Definição 3. Seja $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ é uma curva parametrizada diferenciável. Tem-se que a variável t , $\forall t \in I \subset \mathbb{R}$, é chamada de *parâmetro da curva* e o subconjunto de \mathbb{R}^2 dos pontos $\alpha(t) \in \mathbb{R}^2$, $\forall t \in I$, é dita *traço* dessa curva α .

Exemplo 2. A função definida por $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$ é uma curva parametrizada diferenciável chamada de circunferência de centro em $(0,0)$ e raio 1, cujo traço é mostrado na Figura 4.

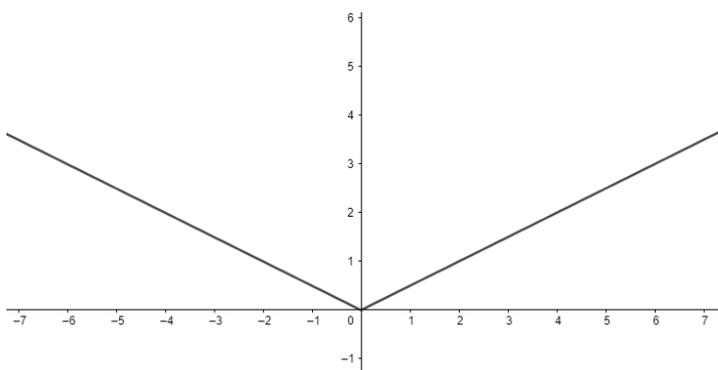
Figura 4. Traço de uma circunferência.



Fonte: autora.

Exemplo 3. A função definida por $\alpha(t) = (2t, |t|)$, chamada de curva modular cujo traço é mostrado na Figura 5, não é uma curva parametrizada diferenciável, uma vez que $|t|$ não é diferenciável em $t=0$.

Figura 5. Traço de uma curva modular.

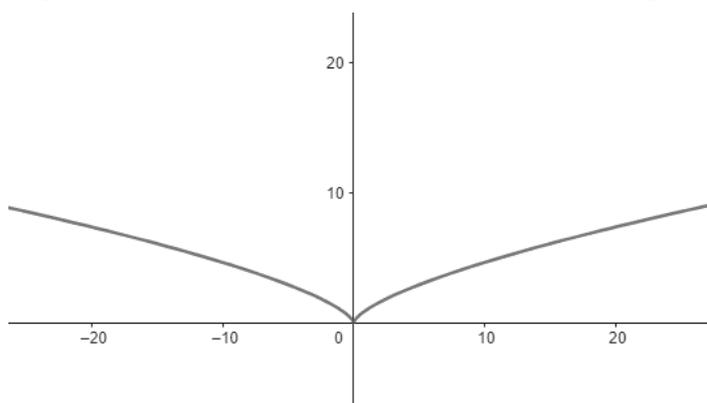


Fonte: autora.

Definição 4. Seja a função $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ diferenciável de classe C^∞ que define uma curva plana. Diz-se que α é regular se $\frac{d\alpha}{dt}(t) = \alpha'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$, e o vetor tangente (ou vetor velocidade) a curva de α em t é definido por $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$.

Exemplo 4. A função definida por $\alpha(t) = (t^3, t^2)$, cujo traço é representado na Figura 6, representa uma curva parametrizada diferenciável, porém não é regular, uma vez que $\alpha'(0) = \vec{0}$.

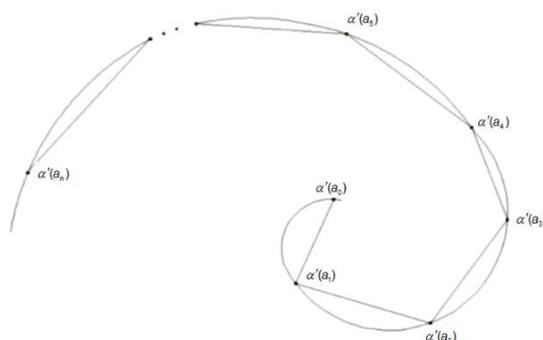
Figura 6. Curva parametrizada diferenciável e não regular.



Fonte: autora (realizada no Geogebra).

Para calcular o comprimento de arco de uma curva, $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dado um intervalo $[t_0, t_1]$, é possível traçar uma linha poligonal inscrita na curva a partir de subdivisões realizadas no intervalo fixado, $t_0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = t_1$, entre os pontos a_0, \dots, a_n . Quanto menores possíveis forem os intervalos entre os pontos, o comprimento da linha poligonal inscrita representará o arco da curva no intervalo.

Figura 7. Linha poligonal inscrita na curva.



Fonte: Alves (2013).

Adiante, tem-se uma noção geométrica que é definida como *comprimento de arco*.

Definição 5. Sejam $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada e $t_0 \in I$. A *função comprimento de arco* de α a partir de t_0 é a função $s: I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(r)| dr.$$

Como $\alpha'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$ então $s(t)$ é diferenciável de classe C^∞ e $s'(t) = |\alpha'(t)| > 0$, isto é, s é uma função estritamente crescente.

Dado o intervalo $I = [t_0, t_1]$, o *comprimento de arco* da curva de t_0 a t_1 é o número não negativo:

$$\ell(\alpha([t_0, t_1])) = \int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt.$$

Prosseguindo, uma curva regular $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está *parametrizada pelo comprimento de arco* se

$$\ell(\alpha([t_0, t])) = \int_{t_0}^t |\alpha'(\mu)| d\mu = t - t_0,$$

ou seja, $t - t_0$ representa o comprimento do arco da curva α de t_0 a t .

Para compreender melhor a Definição 6, é importante saber que um vetor unitário é um vetor cujo comprimento é igual a um.

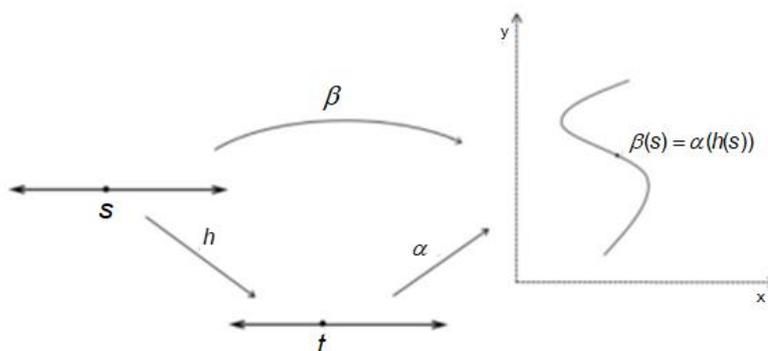
Definição 6. A função $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é parametrizada por comprimento de arco se, e somente se, $|\alpha'(s)|=1, \forall s \in I$, ou seja, o vetor velocidade tem módulo constante e unitário, pois a partir de uma certa origem, o parâmetro de uma curva coincide com seu comprimento de arco.

De fato, se $|\alpha'(s)|=1, \forall t \in I$, então $\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(\mu)| d\mu = \int_{t_0}^{t_1} 1 d\mu = t_1 - t_0$, para quaisquer $t_0, t_1 \in I$. Em contrapartida, seja $t_0 \in I$ fixo e a função $s: I \rightarrow \mathbb{R}$ comprimento de arco a partir de t_0 , então, se $t \geq t_0$, tem-se $s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(\mu)| d\mu = t - t_0$, assim como, se $t \leq t_0$, tem-se $s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(\mu)| d\mu = -\int_t^{t_0} |\alpha'(\mu)| d\mu = -(t_0 - t) = t - t_0$. Assim, $s(t) = t - t_0, \forall t \in I$, logo $s'(t) = |\alpha'(t)| = 1$.

Dada uma curva parametrizada diferenciável regular, é possível obter outras curvas parametrizadas diferenciáveis regulares que têm o mesmo traço. Observe a definição a seguir.

Definição 7. Sejam I e J intervalos abertos de \mathbb{R} , $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e $h: J \rightarrow I$ uma função diferenciável (C^∞) tal que $h(J) = I$, sendo $h'(s) \neq 0, \forall s \in J$. Então a função $\beta = \alpha \circ h: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva diferenciável regular que tem o mesmo traço de α , denominada *reparametrização de α por h* . E a função h é denominada *mudança de parâmetro*.

Figura 8. Reparametrização de α por h .



Fonte: Tenenblat (2008, p.37).

Definição 8. Seja $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de modo que a curva $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ é parametrizada pelo comprimento de arco. Para cada $s \in I$, $\alpha'(s)$ é um vetor unitário que pode ser representado por:

$$t(s) = (x'(s), y'(s)), \quad (5)$$

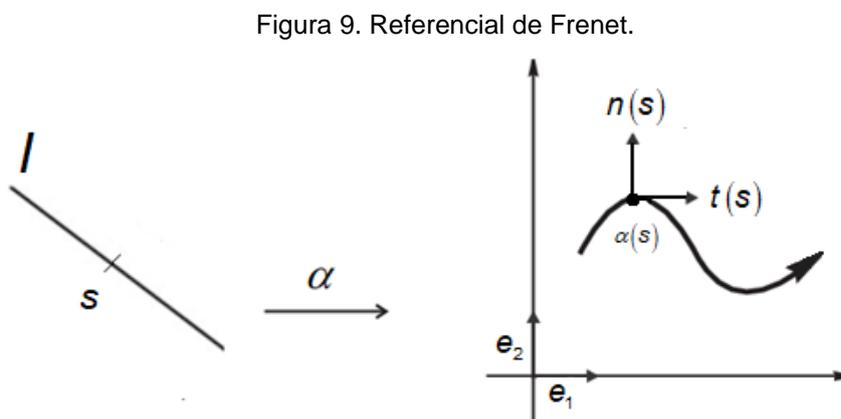
e o vetor unitário ortogonal à $t(s)$ é dado por

$$n(s) = (-y'(s), x'(s)), \quad (6)$$

de modo que a base ortogonal de \mathbb{R}^2 formada por $t(s)$ e $n(s)$ tem a mesma orientação que a base canônica de \mathbb{R}^2 .

O conjunto de vetores tangente (Equação (5)) e normal (Equação (6)) são chamados de *Referencial de Frenet* da curva α em s , representados na

Figura 9.



Fonte: Tenenblat (2018, p.42).

Como $t(s)$ é unitário, isto é, $\langle t(s), t(s) \rangle = 1$, tem-se que $t'(s)$ é ortogonal a $t(s)$, $\langle t'(s), t(s) \rangle = 0$ e, por isso, $t'(s)$ é proporcional a $n(s)$. Essa proporcionalidade tem um fator denominado *curvatura* α em s e representado por

$$t'(s) = k(s)n(s). \quad (7)$$

Definição 9. A *curvatura* de $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, tal que $|\alpha'(s)| = 1$ $\forall s \in I$ é a função:

$$k(s) = \langle \alpha''(s), n(s) \rangle, \quad (8)$$

de modo que $\alpha''(s) = t'(s)$.

Tem-se, portanto, da (Equação (8)), uma vez que $\alpha'' = (x''(s), y''(s))$ e $n(s) = (-y'(s), x'(s))$:

$$k(s) = -x''(s)y'(s) + y''(s)x'(s). \quad (9)$$

A curvatura mede o quanto que $\alpha(s)$ se afasta de estar contida numa reta; e o sinal da curvatura depende da orientação da curva.

Analogamente, sabendo que $t'(s)$ é proporcional a $n(s)$ e $t(s)$ é proporcional a $n'(s)$, uma vez que $n'(s) = -(y''(s), x''(s))$ e $t(s) = (x'(s), y'(s))$, tem-se

$$\langle n'(s), t(s) \rangle = -x'(s)y''(s) + x''(s)y'(s). \quad (10)$$

Logo, da Equação (10), conclui-se que

$$n'(s) = -k(s)t(s). \quad (11)$$

De modo geral, se função $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva regular parametrizada por comprimento de arco s , então o referencial de Frenet $n(s)$ e $t(s)$ satisfaz a Equação (7) e a Equação (11).

Assim,

$$\begin{cases} t'(s) = k(s)n(s) \\ n'(s) = -k(s)t(s) \end{cases}.$$

As equações do sistema anterior são denominadas *fórmulas de Frenet* de uma curva plana.

A função $|k(s)| = |\alpha''(s)|$ representa a velocidade com que as retas tangentes mudam de direção.

Analisando o referencial de Frenet e a curvatura de uma curva regular com parâmetro qualquer, observa-se:

Sejam $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular de parâmetro qualquer, $r \in I$ e $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma reparametrização de α pelo comprimento de arco s , ou seja, $\beta(s(r)) = \alpha(s)$. Se $t(s)$, $n(s)$ é o referencial de Frenet de $\beta(s)$ e $k(s)$ sua curvatura, então tem-se que $t(r) = t(s(r))$, $n(r) = n(s(r))$ é o referencial de Frenet de α , e $k(r) = k(s(r))$.

Proposição 1. Seja $\alpha(r) = (x(r), y(r))$, $\forall r \in I$ uma curva regular. Então, tem-se:

$$t(r) = \frac{(x', y')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}};$$

$$n(r) = \frac{(-y', x')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}};$$

$$k(r) = \frac{-x''y' + x'y''}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}.$$

Demonstração. Seja $\beta(s)$ uma reparametrização de α pelo comprimento de arco s , isto é, $\beta(s(r)) = \alpha(r)$, derivando essa igualdade, tem-se:

$$\frac{d\beta}{ds} \frac{ds}{dr} = \alpha'(r) \quad (12)$$

e

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} \left(\frac{ds}{dr}\right)^2 + \frac{d\beta}{ds} \frac{d^2s}{dr^2} = \alpha''(r), \quad (13)$$

em que

$$\frac{ds}{dr} = |\alpha'(r)|. \quad (14)$$

E, assim,

$$\frac{d^2s}{dr^2} = \frac{\langle \alpha'(r), \alpha''(r) \rangle}{|\alpha'(r)|}. \quad (15)$$

Considerando que $\alpha(r) = (x(r), y(r))$, tem-se da Equação (12) e da Equação (14) que

$$t(r) = \frac{(x', y')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}.$$

A partir da definição de vetor normal, tem-se:

$$n(r) = \frac{(-y', x')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}.$$

Como

$$k(s(r)) = \left\langle \frac{d^2\beta}{ds^2}(s(r)), n(r) \right\rangle,$$

então, da Equação (12) e da Equação (15), conclui-se:

$$k(r) = \frac{-x''y' + x'y''}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}. \quad \blacksquare$$

O teorema a seguir é importante para o estudo das curvas planas e indica que se duas curvas têm a mesma curvatura, elas são iguais a não ser por um movimento rígido, preservada sua orientação.

Teorema 2 (Teorema Fundamental das Curvas Planas). Dada uma função diferenciável $k(s)$, $s \in I \subset \mathbb{R}$, então existe uma curva regular parametrizada por comprimento de arco s , $\alpha(s)$, tal que sua curvatura é $k(s)$. Essa curva $\alpha(s)$ é única quando fixados $\alpha(s_0) = p_0$ e $\alpha'(s_0) = v_0$, em que v_0 é um vetor unitário de \mathbb{R}^2 . Além disso, se duas curvas $\alpha(s)$ e $\beta(s)$ possuem a mesma curvatura, então existe um movimento rígido representado por uma rotação L e uma translação T no plano de modo que

$$\alpha(s) = (L \circ T)(\beta(s)).$$

Demonstração. Seja $\theta(s) = \int_{s_0}^s k(s) ds$, fixado $s_0 \in I$.

Define-se $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ por

$$x(s) = x_0 + \int_{s_0}^s \cos(\theta(s) + \lambda) ds,$$

$$y(s) = y_0 + \int_{s_0}^s \text{sen}(\theta(s) + \lambda) ds.$$

Sendo $p_0 = (x_0, y_0)$ um ponto de \mathbb{R}^2 e $\lambda \in \mathbb{R}$.

O próximo passo consiste em verificar que a curva α está parametrizada por comprimento de arco s e sua curvatura é $k(s)$.

O referencial de Frenet desta curva é dado por

$$t(s) = \alpha'(s) = (\cos(\theta(s) + \lambda), \operatorname{sen}(\theta(s) + \lambda)),$$

$$n(s) = (-\operatorname{sen}(\theta(s) + \lambda), \cos(\theta(s) + \lambda)).$$

Assim, tem-se que $|\alpha'(s)| = 1$ e a curvatura de α é

$$\langle t'(s), n(s) \rangle = \theta'(s) = k(s).$$

Dada a curva $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ parametrizada por comprimento de arco s cuja curvatura é $k(s)$. Das equações de Frenet, tem-se:

$$(x'', y'') = k(-y', x'),$$

isto é,

$$x'' = -ky',$$

$$y'' = kx'.$$

Portanto, pelo teorema de unicidade de solução do sistema de equações diferenciais que, fixados $\alpha(s_0) = p_0$ e $\alpha'(s_0) = v_0$, a curva α é única.

Sejam α e β duas curvas de mesma curvatura.

Fixado s_0 , existe uma rotação L e uma translação T de \mathbb{R}^2 tal que a curva $\bar{\alpha} = L \circ T \circ \beta$ satisfaz $\bar{\alpha}(s_0) = \alpha(s_0)$ e $\bar{\alpha}'(s_0) = \alpha'(s_0)$; segue que $\bar{\alpha} \equiv \alpha$. Portanto, $\alpha = L \circ T \circ \beta$. ■

Ao concluir a exposição sobre curvas planas, solidifica-se uma compreensão genérica das propriedades e características que delineiam essas trajetórias no plano euclidiano. Contudo, este estágio inicial representa apenas um ponto de partida para uma investigação mais abrangente. Na próxima seção, almeja-se alargar a análise para abarcar curvas no espaço \mathbb{R}^3 . Empregam-se os mesmos princípios e técnicas,

porém em um contexto tridimensional. Com este propósito em mente, inicia-se mais uma seção de investigação matemática.

2.2.2 Curvas no Espaço (\mathbb{R}^3)

Nesta seção, desenvolve-se a teoria de curvas no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 com conceitos básicos para curvas no espaço, assim como se desenvolveu a teoria das curvas no plano.

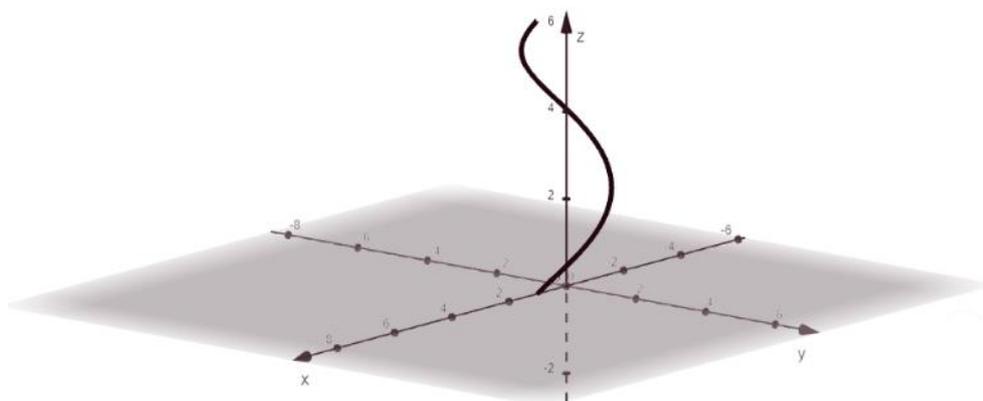
Definição 10. Uma curva parametrizada diferenciável de \mathbb{R}^3 é uma função $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciável de classe C^∞ em que $t \in I$ é o parâmetro da curva e $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ é o traço dessa curva, onde x , y e z são funções, do parâmetro t , diferenciáveis de classe C^∞ .

A função comprimento de arco da curva α , dado o intervalo $I = [t_0, t]$, é definida por

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(\mu)| d\mu.$$

Exemplo 5. A função $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ que $\forall t \in I$ associa $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ é uma curva de \mathbb{R}^3 .

Figura 10. Curva em \mathbb{R}^3 .



Fonte: autora.

Definição 11. Uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é *plana* se existe um plano de \mathbb{R}^3 que contém $\alpha(I)$.

Exemplo 6. A função $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ que $\forall t \in I$ associa $\alpha(t) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$ com $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, representa uma curva parametrizada diferenciável plana, cujo traço é uma linha reta que passa por (x_0, y_0, z_0) e paralela ao vetor (a, b, c) .

As ideias de vetor tangente, curva regular e mudança de parâmetro para curvas no espaço são fundamentadas pelas mesmas considerações mencionadas em curvas planas.

Definição 12. Seja $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, uma curva parametrizada diferenciável. O *vetor tangente* a α em $t \in I$ é o vetor

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

Definição 13. Seja $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, uma curva parametrizada diferenciável. A curva α é *regular* se $\alpha'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$. E a *reta tangente* à curva regular α em $t_0 \in I$ é a reta que passa por $\alpha(t_0)$ na direção de $\alpha'(t_0)$, ou seja, a reta representada pela função $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por:

$$g(r) = \alpha(t_0) + r\alpha'(t_0).$$

Definição 14. Sejam I e J intervalos abertos de \mathbb{R} , $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular e $h : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função diferenciável de classe C^∞ , cuja derivada de primeira ordem é não nula em todos os pontos pertencentes a J e tal que $h(J) = I$. Então a função

$$\beta = \alpha \circ h: J \rightarrow \mathbb{R}^3$$

é uma curva regular cujo traço é o mesmo que α , denominada *reparametrização de α por h* . A função h é a *mudança de parâmetro*. Quando h é a inversa da função comprimento de arco, então a curva está parametrizada pelo comprimento de arco.

Nota-se que se β é uma reparametrização de α por h , então α é uma reparametrização de β por h^{-1} . A *orientação* de uma curva regular α é o sentido de percurso do traço de α . Uma reparametrização β de α tem orientação igual à de α se a mudança de parâmetro é estritamente decrescente.

Proposição 2. Uma curva regular $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ está parametrizada pelo comprimento de arco, se, e somente se, $\forall t \in I$,

$$|\alpha'(t)| = 1.$$

Toda curva regular no espaço, assim como no plano, admite uma reparametrização pelo parâmetro comprimento de arco.

Proposição 3. Sejam $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular e $s: I \rightarrow s(I) \subset \mathbb{R}$ a função comprimento de arco de α a partir de t_0 . Então, existe a função inversa h de s , definida no intervalo aberto $J = s(I)$, e $\beta = \alpha \circ h$ é uma reparametrização de α , onde β está parametrizada pelo comprimento de arco.

A função β é denominada reparametrização α pelo comprimento de arco.

As demonstrações das duas proposições anteriores se encontram em Tenenblat (2008).

Definição 15. Se $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, então a curvatura de α em $s \in I$ é o número real

$$k(s) = |\alpha''(s)|.$$

Proposição 4. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Então, $\alpha(I)$ é um segmento de reta se, e somente se, $k(s) = 0$, $\forall s \in I$.

Demonstração.

(\Rightarrow) Se $\alpha(I)$ é um segmento de reta, então $\alpha(s) = p + vs$, onde $p, v \in \mathbb{R}^3$, sendo v um vetor unitário de \mathbb{R}^3 . Portanto, $\forall s \in I$, $\alpha'(s) = \vec{v}$ e $\alpha''(s) = \vec{0}$, em que $k(s) = |\alpha''(s)| = 0$.

(\Leftarrow) Se $k(s) = |\alpha''(s)| = 0$, $\forall s \in I$, então $\alpha''(s) = \vec{0}$. Integrando, tem-se que $\alpha'(s) = \vec{v}$ e $|\vec{v}| = 1$. Integrando novamente, obtém-se $\alpha(s) = p + vs$, cujo traço é um segmento de reta. ■

Definição 16. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco tal que $k(s) > 0$. Então, o vetor

$$n(s) = \frac{\alpha''(s)}{k(s)}.$$

é denominado *vetor normal* de α em s .

A *reta normal* de α em $s_0 \in I$ é a reta que passa por $\alpha(s_0)$ na direção do vetor normal $n(s_0)$.

Denotando por $t(s)$ o vetor unitário $\alpha'(s)$, tem-se que $t(s)$ e $n(s)$ são vetores ortonormais (isto é, quando dois vetores, em um Espaço Vetorial de produto interno, são ortogonais e unitários) e

$$t'(s) = k(s)n(s).$$

Como a curvatura não é suficiente para caracterizar as curvas no espaço, pois existem curvas que não são planas, então surge a necessidade de mais uma variante que é o vetor binormal.

Definição 17. Seja $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco tal que $k(s) > 0$. O vetor binormal a α em s é dado por:

$$b(s) = t(s) \times n(s).$$

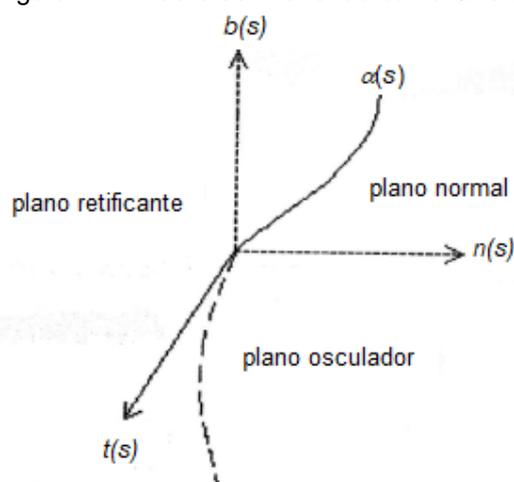
O referencial ortonormal $t(s)$, $n(s)$ e $b(s)$ é designado *triedro de Frenet* da curva α em que cada par de vetores determina um plano. Observe as relações a seguir.

$t(s)$ e $n(s)$: *plano osculador*;

$b(s)$ e $t(s)$: *plano retificante*;

$b(s)$ e $n(s)$: *plano normal*.

Figura 11. Triedro de Frenet da curva α em s .



Fonte: Tenenblat (2008).

Acerca do triedro de Frenet (Figura 11), outras observações podem ser realizadas. Como $b(s)$ é ortogonal a $n(s)$, então $b'(s)$ é paralelo a $n(s)$. De fato,

$$b(s) = t(s) \times n(s) \Rightarrow b'(s) = t'(s) \times n(s) + t(s) \times n'(s) = t(s) \times n'(s).$$

Logo, $b'(s)$ é ortogonal a $t(s)$ e como $|b(s)| = 1$, tem-se que $b'(s)$ é ortogonal a $b(s)$. Dado isso, conclui-se que $b'(s)$ é paralelo a $n(s)$, ou seja, $b'(s)$ é igual ao produto de um número real por $n(s)$.

Definição 18. O número real $\tau(s)$, de modo que $b'(s) = \tau(s)n(s)$, é chamado *torção* da curva em s .

Se $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco e $k(s) > 0$, $\forall s \in I$, então o triedro de Frenet de α em s é um referencial ortonormal de \mathbb{R}^3 . Assim, é possível obter os vetores $t'(s)$, $n'(s)$ e $b'(s)$ como combinação linear de $t(s)$, $n(s)$ e $b(s)$:

$$t'(s) = k(s)n(s),$$

$$b'(s) = \tau(s)n(s),$$

$$n'(s) = -k(s)t(s) - \tau(s)b(s),$$

que são denominadas *fórmulas de Frenet*.

Proposição 5. Seja $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular de parâmetro t e $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma reparametrização de α pelo comprimento de arco, ou seja, $\beta(s(t)) = \alpha(t)$, $\forall t \in I$.

Sejam $k(s) > 0$ e $\tau(s)$ a curvatura e a torção de β em $s \in J$, respectivamente, então

$$k(s(t)) = \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3},$$

$$\tau(s(t)) = \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha'''(t), \alpha''(t) \rangle}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2}.$$

Demonstração. Derivando $\beta(s(t)) = \alpha(t)$ em relação a t , obtém-se:

$$\frac{d\beta}{ds} \frac{ds}{dt} = \alpha'(t), \quad (16)$$

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{d\beta}{ds} \frac{d^2s}{dt^2} = \alpha''(t). \quad (17)$$

Como

$$\frac{ds}{dt} = |\alpha'(t)|, \quad (18)$$

então, tem-se

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle}{|\alpha'(t)|}. \quad (19)$$

Tem-se da Equação (16) e da Equação (19):

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 \frac{d\beta}{ds} \times \frac{d^2\beta}{ds^2}.$$

Assim,

$$|\alpha'(t) \times \alpha''(t)| = \left| \frac{ds}{dt} \right|^3 \left| \frac{d^2\beta}{ds^2} \right|,$$

sendo que β está parametrizada pelo comprimento de arco e, então, $\frac{d\beta}{ds}$ é ortogonal a $\frac{d^2\beta}{ds^2}$. Conclui-se, a partir da Equação (18) que:

$$k(s(t)) = \left| \frac{d^2\beta}{ds^2} \right| = \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}.$$

Utiliza-se os vetores normal $\left(n(s(t)) = \frac{1}{k(s(t))} \frac{d^2\beta}{ds^2} \right)$ e binormal

$\left(b(s(t)) = \frac{d\beta}{ds} \times n(s(t)) \right)$ de β , para obter a expressão da torção.

Assim, substituindo a Equação (18) e a Equação (19) na Equação (16) e na Equação (17), tem-se

$$n(s(t)) = \frac{\alpha''(t) |\alpha'(t)|^2 - \alpha'(t) \langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle}{|\alpha'(t)| |\alpha'(t) \times \alpha''(t)|},$$

$$b(s(t)) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}.$$

Derivando $b(s(t))$ em relação a t , obtém-se

$$\frac{db}{ds}(s(t)) = \frac{\alpha' \times \alpha''}{|\alpha' \times \alpha''|} - \frac{\langle \alpha' \times \alpha''', \alpha' \times \alpha'' \rangle \alpha' \times \alpha''}{|\alpha' \times \alpha''|^3}.$$

Como

$$\tau(s(t)) = \left\langle \frac{db}{ds}(s(t)), n(s(t)) \right\rangle,$$

conclui- que

$$\tau(s(t)) = \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha'''(t), \alpha''(t) \rangle}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2}.$$

Logo, $k(s(t))$ e $\tau(s(t))$ são as respectivas curvatura e torção de α em t .



A seguir, incluem-se algumas aplicações das fórmulas de Frenet.

Lema 1. Seja $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular de curvatura não nula. Se α é uma curva plana, então o plano osculador de α não depende do parâmetro e é o plano que contém o traço de α .

Demonstração. Supondo que $\alpha(s)$ é parametrizada pelo comprimento de arco. Como, por hipótese, α é uma curva plana, então existe um plano de \mathbb{R}^3 que contém $\alpha(I)$. Seja \vec{v} um vetor não nulo ortogonal a este plano. Será provado que \vec{v} é paralelo a $b(s)$, $\forall s \in I$. Fixado $s_0 \in I$, então $\forall s \in I$,

$$\langle \alpha(s) - \alpha(s_0), \vec{v} \rangle = 0.$$

Ao derivar, tem-se

$$\langle \alpha'(s), \vec{v} \rangle = 0, \quad \langle \alpha''(s), \vec{v} \rangle = 0,$$

portanto,

$$\langle t(s), \vec{v} \rangle = 0, \quad k(s) \langle n(s), \vec{v} \rangle = 0.$$

Como $k(s) > 0$, então \vec{v} é ortogonal a $t(s)$ e $n(s)$. Logo, \vec{v} é paralelo a $b(s)$, $\forall s \in I$, ou seja, o plano osculador de α não depende do parâmetro e contém $\alpha(I)$.

■

A proposição a seguir é uma consequência do Lema 1.

Proposição 6. Seja $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular, de curvatura não nula. Então α é uma curva plana se, e somente se, $\tau \equiv 0$.

Demonstração. (\Rightarrow) Seja α parametrizada pelo comprimento de arco. Por hipótese, α é uma curva plana, então pelo Lema 1, $b(s)$ é constante e, portanto, $b'(s) = \vec{0}$, $\forall s \in I$. Logo, $\tau(s) = \langle b'(s), n(s) \rangle = 0$, $\forall s \in I$.

(\Leftarrow) Se $\tau(s) = 0$, $\forall s \in I$, então $b'(s) \equiv \vec{0}$ e $b(s) = b$ é constante. Fixado $s_0 \in I$, seja a função $f(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), b \rangle$, será provado que $f(s) \equiv 0$. Derivando a função, obtém-se $f'(s) = \langle \alpha'(s), b \rangle = \langle t(s), b \rangle = 0$, portanto, $f(s)$ é constante. Como $f(s_0) = 0$, conclui-se que $f(s) \equiv 0$, ou seja, $\alpha(I)$ está contido no plano que contém $\alpha(s_0)$ e é ortogonal ao vetor binormal (b).

■

Adiante, verifica-se que a curvatura e a torção determinam uma curva de \mathbb{R}^3 a menos de sua posição no espaço. Para isso, considera-se inicialmente a noção de isometria.

Definição 19. Uma função $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma isometria de \mathbb{R}^3 se preserva as distâncias, isto é,

$$|F(p) - F(q)| = |p - q|.$$

Exemplo 7. Seja $a \in \mathbb{R}^3$. A função $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que, para cada $p \in \mathbb{R}^3$ associa

$$T(p) = a + p.$$

é uma isometria de \mathbb{R}^3 , denominada translação por a .

A proposição seguinte é formada por cinco itens relacionados à isometria.

Proposição 7. a) Se F e G são isometrias de \mathbb{R}^3 , então $F \circ G$ é uma isometria.

b) Se F e G são translações, então $F \circ G = G \circ F$ é uma translação.

c) Se T é uma translação por a , então T é inversível e T^{-1} é uma translação por $-a$.

d) Dados dois pontos p e $q \in \mathbb{R}^3$, existe uma única translação T tal que $T(p) = q$.

Demonstração. a) Sejam $p, q \in \mathbb{R}^3$, então $|(F \circ G)(p) - (F \circ G)(q)| = |G(p) - G(q)| = |p - q|$, logo $F \circ G$ é uma isometria.

b) Se $F(p) = p + a$ e $G(p) = p + b$, $\forall p \in \mathbb{R}^3$, então $F \circ G(p) = (p + b) + a = (p + a) + b = G \circ F(p)$, logo $F \circ G(p) = G \circ F(p) = p + (a + b)$, $\forall p \in \mathbb{R}^3$.

c) Seja $T(p) = p + a$ e $G(p) = p - a$. Então $T \circ G(p) = G \circ T(p) = p$, $\forall p \in \mathbb{R}^3$. Logo, $G = T^{-1}$.

d) Seja T a translação por $q - p$, isto é, $T(\eta) = \eta + (q - p)$, $\forall \eta \in \mathbb{R}^3$. Então $T(p) = p + (q - p) = q$.

Provando a unicidade: sejam duas translações T uma translação por a e \bar{T} uma translação por \bar{a} . De modo que $T(p) = \bar{T}(p) = q$, então $T(p) = p + a = p + \bar{a} = \bar{T}(p)$, assim $a = \bar{a}$. Logo, $T = \bar{T}$.



Corolário 1. Se F é uma isometria de \mathbb{R}^3 , então $\forall p \in \mathbb{R}^3$, dF_p preserva o produto interno, ou seja,

$$\langle dF_p(v), dF_p(w) \rangle = \langle v, w \rangle, \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^3.$$

Do Corolário 1, segue que se $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma isometria, então a diferencial de F em $p \in \mathbb{R}^3$ leva uma base ortonormal v_1, v_2, v_3 de \mathbb{R}^3 em outra base ortonormal $dF_p(v_1), dF_p(v_2), dF_p(v_3)$.

Diz-se que a isometria F preserva a orientação se as duas bases têm mesma orientação, ou seja,

$$\langle dF_p(v_1) \times dF_p(v_2) \times dF_p(v_3) \rangle = \langle v_1 \times v_2 \times v_3 \rangle.$$

Diz-se que a isometria F inverte a orientação se as duas bases têm orientação oposta, ou seja,

$$\langle dF_p(v_1) \times dF_p(v_2) \times dF_p(v_3) \rangle = -\langle v_1 \times v_2 \times v_3 \rangle.$$

Conforme as informações anteriores, pode-se concluir que F preserva a orientação se, e somente se, o determinante da matriz associada a dF_p é igual a 1; e F inverte a orientação se, e somente se, o determinante da matriz associada a dF_p é igual a -1.

Em continuidade, a seguinte definição indica que dadas uma curva regular α e uma isometria F de \mathbb{R}^3 , então $F \circ \alpha$ é uma curva regular que difere de α apenas pela sua posição no espaço.

Definição 20. Duas curvas regulares $\alpha, \beta: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ são *congruentes* se existe isometria F de \mathbb{R}^3 , tal que $\beta = F \circ \alpha$.

Proposição 8. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, tal que a curvatura $k(s) > 0$, $\forall s \in I$. Seja F uma isometria de \mathbb{R}^3 e $\bar{\alpha} = F \circ \alpha$ então $\bar{\alpha}$ é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco e $\forall s \in I$,

$$\bar{k}(s) = k(s),$$

$$\bar{\tau}(s) = \pm \tau(s),$$

$$\bar{t}(s) = dF_{\alpha(s)}(t(s)),$$

$$\bar{n}(s) = dF_{\alpha(s)}(n(s)),$$

$$\bar{b}(s) = \pm dF_{\alpha(s)}(b(s)).$$

em que \bar{k} , $\bar{\tau}$, \bar{t} , \bar{n} e \bar{b} são, respectivamente, a curvatura, torção, tangente, normal e binormal de $\bar{\alpha}$. Além disso, o sinal é positivo se a isometria F preserva a orientação e negativo caso a orientação seja invertida.

Demonstração. A curva $\bar{\alpha} = F \circ \alpha$ é diferenciável, pois F e α são diferenciáveis. Ademais, da definição de diferencial de F em $\alpha(s)$, tem-se

$$\bar{\alpha}'(s) = dF_{\alpha(s)}(\alpha'(s)), \tag{20}$$

logo,

$$|\bar{\alpha}'(s)| = |dF_{\alpha(s)}(\alpha'(s))| = |\alpha'(s)| = 1,$$

onde a segunda igualdade procedo do *Corolário 1*. Portanto, $\bar{\alpha}$ é parametrizada pelo comprimento de arco.

Será demonstrado o caso onde F preserva a orientação. A demonstração do caso onde F não preserva orientação é análogo e será omitida. De (20) tem-se que

$$\bar{t}'(s) = dF_{\alpha(s)}(t'(s)), \quad (21)$$

daí

$$\bar{t}'(s) = dF_{\alpha(s)}(t'(s)).$$

Como $dF_{\alpha(s)}$ preserva o produto interno, tem-se que

$$\bar{k} = |\bar{\alpha}''(s)| = |\bar{t}'(s)| = |dF_{\alpha(s)}(t'(s))| = |t'(s)| = k(s),$$

e

$$\bar{n}(s) = \frac{\bar{\alpha}''(s)}{\bar{k}(s)} = \frac{dF_{\alpha(s)}(\alpha''(s))}{k(s)} = dF_{\alpha(s)}\left(\frac{\alpha''(s)}{k(s)}\right) = dF_{\alpha(s)}(n(s)). \quad (22)$$

Como F preserva a orientação, então

$$\begin{aligned} \langle dF_{\alpha(s)}(t(s)) \times dF_{\alpha(s)}(n(s)), dF_{\alpha(s)}(b(s)) \rangle &= \langle t(s) \times n(s), b(s) \rangle \\ &= \langle dF_{\alpha(s)}(t(s) \times n(s)), dF_{\alpha(s)}(b(s)) \rangle, \end{aligned}$$

logo obtém-se

$$dF_{\alpha(s)}(t(s)) \times dF_{\alpha(s)}(n(s)) = dF_{\alpha(s)}(t(s) \times n(s)). \quad (23)$$

Segue-se da Equação (21), Equação (22) e Equação (23) que

$$\bar{b}(s) = \bar{t}(s) \times \bar{n}(s) = dF_{\alpha(s)}(b(s)).$$

E, finalmente,

$$\begin{aligned} \bar{\tau}(s) &= \langle \bar{b}(s), \bar{n}(s) \rangle = \langle dF_{\alpha(s)}(b'(s)), dF_{\alpha(s)}(n(s)) \rangle = \\ &= \langle b'(s), n(s) \rangle = \tau(s). \end{aligned}$$

Analogamente, demonstra-se o caso em que F inverte a orientação, observando que a Equação (23) passa a ser

$$dF_{\alpha(s)}(t(s)) \times dF_{\alpha(s)}(n(s)) = -dF_{\alpha(s)}(t(s) \times n(s)).$$

■

A proposição anterior assegura que duas curvas congruentes possuem a mesma curvatura e torção (a menos de sinal). O teorema fundamental das curvas mostra que esta propriedade caracteriza as curvas congruentes.

Teorema 3 (Teorema fundamental das curvas). a) Dadas duas funções diferenciáveis, $k(s) > 0$ e $\tau(s)$, $s \in I$, existe uma curva regular $\alpha(s)$ parametrizada pelo comprimento de arco, tal que $k(s)$ é a curvatura e $\tau(s)$ é a torção de α em s .

b) A curva $\alpha(s)$ é única se fixar um ponto $\alpha(s_0) = p_0 \in \mathbb{R}^3$, $\alpha'(s_0) = v_1$, $\alpha''(s_0) = k(s_0)v_2$, onde v_1 e v_2 são vetores ortonormais de \mathbb{R}^3 .

c) Se duas curvas $\alpha(s)$ e $\beta(s)$ têm a mesma curvatura e torção (a menos do sinal), então α e β são congruentes.

O teorema fundamental das curvas desempenha um papel crucial na conclusão desta seção dedicada às curvas no espaço tridimensional e sua demonstração pode ser encontrada em Tenenblat (2008). Sua importância reside na capacidade de que dadas duas funções diferenciáveis quaisquer, sendo uma delas positiva, existe uma curva regular em \mathbb{R}^3 que admite essas funções como curvatura e torção, oferecendo uma base sólida para análises posteriores e aplicações em diversas áreas, desde geometria diferencial até física e engenharia. Assim, ao encerrar esta seção com o teorema fundamental das curvas, consolida-se uma estrutura conceitual para explorar e compreender a natureza das curvas em \mathbb{R}^3 .

2.2.3 Teoria Local de Superfícies

Nesta seção, investiga-se as propriedades geométricas locais de superfícies no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , assumindo o sistema de coordenadas cartesianas x , y e z em \mathbb{R}^3 e considerando uma função

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

de duas variáveis u , v que variam em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Para cada $(u, v) \in U$, $X(u, v)$ determina um ponto de \mathbb{R}^3 . Denota-se por S o subconjunto de \mathbb{R}^3 formado pelos pontos $X(u, v)$.

Definição 21. Uma *superfície parametrizada regular* (ou superfície) é uma função $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde U é um aberto de \mathbb{R}^2 de modo que X é uma aplicação diferenciável de classe C^∞ e para todo $q = (u, v) \in U$, a diferencial de X em q , $dX_q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, é injetora.

As variáveis u , v são os parâmetros da superfície e o subconjunto S de \mathbb{R}^3 obtido pela imagem da função X é denominado *traço* de X .

A função $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ é diferenciável de classe C^∞ quando as funções x, y, z têm derivadas parciais de todas as ordens contínuas. Além disso, há um plano tangente em cada ponto da superfície. Para mostrar esse fato, usa-se como ferramenta o cálculo diferencial no espaço euclidiano. Sejam e_1 e e_2 a base canônica de \mathbb{R}^2 e \bar{e}_1, \bar{e}_2 e \bar{e}_3 a base canônica de \mathbb{R}^3 . Para cada $q = (u_0, v_0)$, sabe-se que a matriz jacobiana associada a dX_q nas bases canônicas é

$$J(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix},$$

pois

$$dX_q(e_1) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right), \quad (24)$$

$$dX_q(e_2) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right). \quad (25)$$

Denotando os vetores das Equação (24) e Equação (25), respectivamente, por $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$, observa-se que as propriedades abaixo são equivalentes.

- a) dX_q é injetora;
- b) a matriz $J(u_0, v_0)$ tem posto 2, isto é, pelo menos um dos determinantes jacobianos deve ser não nulo em $q = (u, v)$, a seguir estão os determinantes jacobianos.

$$\frac{\partial(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} & \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \\ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial u} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(\mathbf{y}, \mathbf{z})}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial u} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial v} \\ \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial u} & \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{e}$$

$$\frac{\partial(\mathbf{x}, \mathbf{z})}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} & \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \\ \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial u} & \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial v} \end{vmatrix}$$

- c) os vetores $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$ são linearmente independentes;
 d) $X_u(u_0, v_0) \times X_v(u_0, v_0) \neq \vec{0}$.

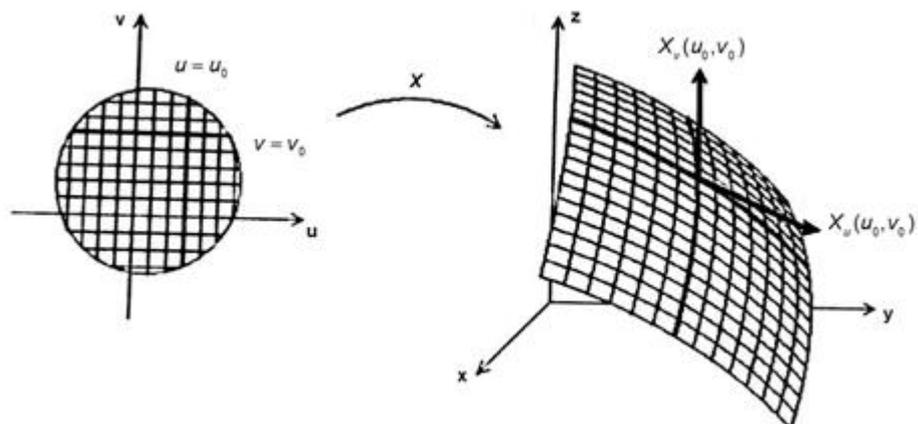
Se $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma superfície parametrizada, então, fixado um ponto $(u_0, v_0) \in U$, as curvas

$$u \mapsto X(u, v_0),$$

$$v \mapsto X(u_0, v)$$

são denominadas *curvas coordenadas* de X em $(u_0, v_0) \in U$; e os vetores $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$ são os vetores tangentes às curvas coordenadas.

Figura 12. Vetores tangentes às curvas coordenadas.



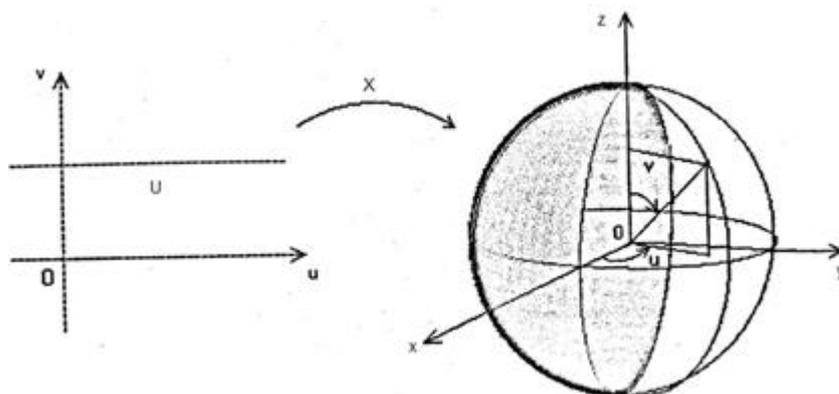
Fonte: Tenenblat (2008).

Exemplo 8. Seja a função $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$X(u, v) = (a \operatorname{sen}(v) \cos(u), a \operatorname{sen}(v) \operatorname{sen}(u), a \cos(v)),$$

onde $a > 0$ e $U = \mathbb{R} \times (0, \pi) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < v < \pi\}$ (Figura 13).

Figura 13. Esfera centrada na origem.



Fonte: Tenenblat (2008).

A função X é diferenciável e os vetores

$$X_u = (-a \operatorname{sen}(v) \operatorname{sen}(u), a \operatorname{sen}(v) \cos(u), 0),$$

$$X_v = (a \cos(v) \cos(u), a \cos(v) \operatorname{sen}(u), -a \operatorname{sen}(v)).$$

são linearmente independentes, para todo $(u, v) \in U$. De fato,

$$|X_u \times X_v| = a^2 \operatorname{sen}(v) \neq 0,$$

uma vez que $v \in (0, \pi)$. A imagem de X é a esfera centrada na origem de raio a (menos os dois polos). As curvas coordenadas são os meridianos e paralelos da esfera.

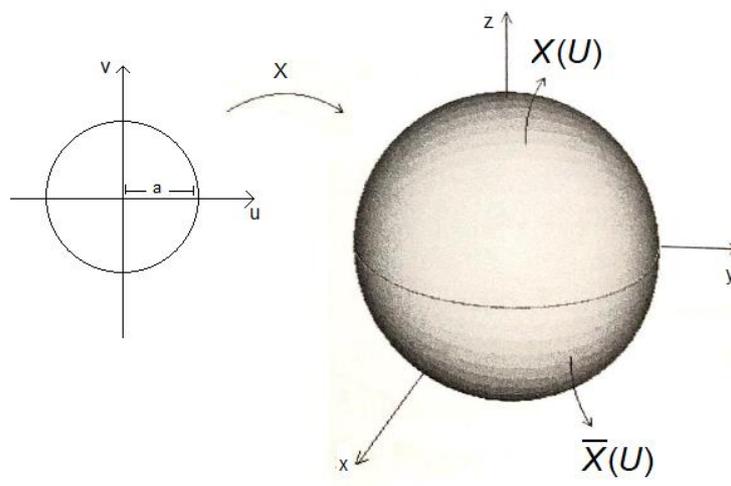
Exemplo 9. As funções

$$X(u, v) = (u, v, \sqrt{a^2 - u^2 - v^2}),$$

$$\bar{X}(u, v) = (u, v, -\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}).$$

onde $a > 0$ e (u, v) varia em $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u^2 + v^2 < a^2\}$ são superfícies parametrizadas regulares cujas imagens são os dois hemisférios da esfera, centrada na origem e de raio a .

Figura 14. Hemisférios da esfera; com centro em $(0, 0, 0)$ e raio a .



Fonte: Tenenblat (2008).

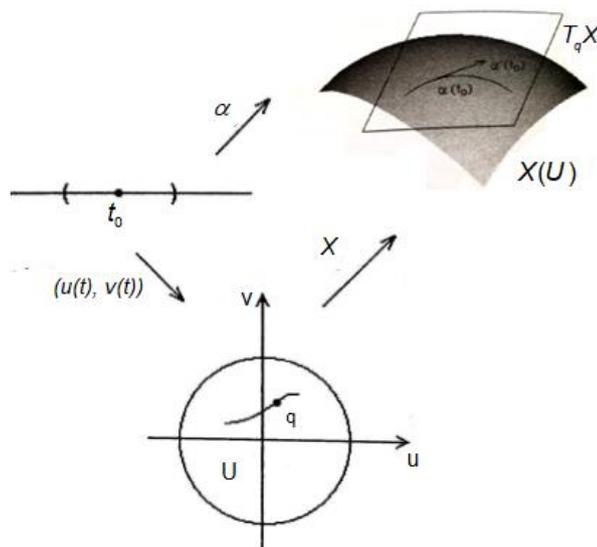
Proposição 9. Se $f(u, v)$ é uma função real diferenciável, onde $(u, v) \in U$, um aberto de \mathbb{R}^2 , então a função $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ é uma superfície parametrizada regular, que descreve o gráfico da função f .

A demonstração da Proposição 9 pode ser encontrada no livro de Tenenblat (2008).

Seja $X(u, v)$, $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$, uma superfície parametrizada regular. Considerando u e v como funções diferenciáveis de um parâmetro t , $t \in I \subset \mathbb{R}$, obtém-se uma curva diferenciável $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ cujo traço está contido na superfície descrita por X . Diz-se que α é uma curva da superfície. Com essas informações, a seguir, define-se um vetor tangente à superfície como sendo o vetor tangente a uma curva da superfície.

Definição 22. Se $X(u, v)$ é uma superfície parametrizada regular, diz-se que um vetor w de \mathbb{R}^3 é um *vetor tangente* a X em $q = (u_0, v_0)$ se $w = \alpha'(t_0)$, onde $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma curva da superfície, tal que $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$ (Figura 15).

Figura 15. Vetor e plano tangente à superfície.



Fonte: Tenenblat (2008).

Os vetores $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$ são vetores tangentes a X em (u_0, v_0) , uma vez que são tangentes às curvas coordenadas de X .

Definição 23. O *plano tangente* a X em (u_0, v_0) é o conjunto de todos os vetores tangentes a X em (u_0, v_0) , denota-se por $T_q X$, onde $q = (u_0, v_0)$ (Figura 15).

É importante observar que os conceitos de vetor tangente e plano tangente são definidos em um ponto (u_0, v_0) do domínio de X e não no ponto $p = X(u_0, v_0)$, já que a superfície parametrizada X pode ter autointerseção.

A proposição a seguir indica que plano tangente $T_q X$ é o plano de \mathbb{R}^3 gerado por $X_u(q)$ e $X_v(q)$.

Proposição 10. Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular e $q = (u_0, v_0)$. Então, $T_q X$ é o conjunto de vetores obtidos como combinação linear de $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$.

Demonstração. Se $w \in T_q X$, então $w = \alpha'(t_0)$, onde $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ e $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$. Portanto,

$$\begin{aligned} w = \alpha'(t_0) &= \left. \frac{d}{dt} (X(u(t), v(t))) \right|_{t=t_0} = \\ &= X_u(u_0, v_0)u'(t_0) + X_v(u_0, v_0)v'(t_0), \end{aligned}$$

isto é, w é uma combinação linear dos vetores X_u e X_v em (u_0, v_0) .

Reciprocamente, supondo que

$$w = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0),$$

então existe uma curva $\alpha(t)$ da superfície tal que $(u'(0), v'(0)) = (u_0, v_0)$ e $\alpha'(0) = w$.

De fato, considera-se

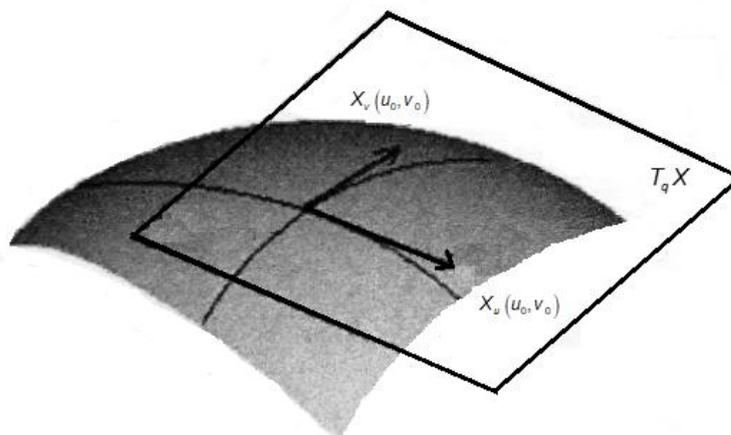
$$\alpha(t) = X(u(t), v(t)),$$

onde $u(t) = u_0 + at$ e $v(t) = v_0 + bt$.

■

Pela definição de superfície parametrizada regular, X_u e X_v são vetores linearmente independentes. Portanto, segue-se da Proposição 10 que $T_q X$ é um plano de \mathbb{R}^3 , gerado por X_u e X_v , Figura 16, de modo que, em geral, X_u e X_v não são ortogonais, nem unitários.

Figura 16. Plano tangente gerado por X_u e X_v .



Fonte: Tenenblat (2008).

Definição 24. Se $X(u, v)$ é uma superfície e $q = (u_0, v_0)$, dizemos que um vetor de \mathbb{R}^3 é *normal* a X em q se é ortogonal a $T_q X$, ou seja, é ortogonal a todos os vetores tangentes a X em q .

Dado um plano tangente $T_q X$, existe uma única direção normal a este plano e, por tanto, há exatamente dois vetores unitários normais a X em q . Assim, será fixado o vetor unitário normal a X em q como sendo o vetor

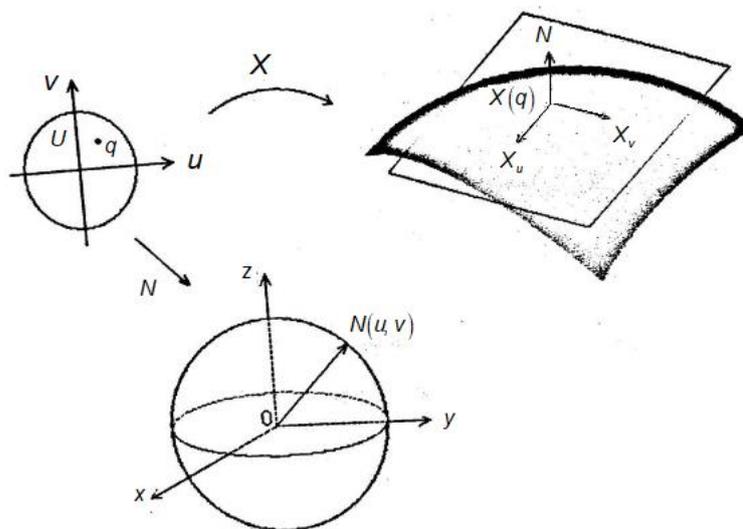
$$N(q) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(q).$$

Se o domínio da superfície X é um intervalo aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, então variando $(u, v) \in U$, tem-se uma função diferenciável $N: U \rightarrow \mathbb{R}^3$, denominada *aplicação normal de Gauss*, definida por

$$N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(u, v),$$

cuja imagem está contida na esfera unitária centrada na origem, como mostra a figura a seguir.

Figura 17. Aplicação normal de Gauss.



Fonte: Tenenblat (2008).

Exemplo 10. Se $X(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, então o plano tangente a X em (u, v) é gerado pelos vetores $X_u = (1, 0, 2u)$ e $X_v = (0, 1, 2v)$, e

$$N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(u, v) = \frac{(-2u, -2v, 1)}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}.$$

Para avançar na construção da teoria local das superfícies, serão apresentadas duas formas quadráticas distintas. A primeira está associada aos comprimentos das curvas na superfície, ao ângulo entre os vetores tangentes e às áreas das regiões na superfície. Já a segunda forma está ligada à curvatura das curvas que compõem as superfícies. Ambas as formas quadráticas determinam, localmente, uma superfície, exceto pela sua posição no espaço.

Definição 25. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular, $\forall q \in U$, a função

$$I_q : T_q X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$w \mapsto I_q(w) = \langle w, w \rangle = |w|^2$$

é denominada a *primeira forma quadrática* de X em q .

Considera-se uma superfície dada por $X(u, v)$ e um ponto $q = (u_0, v_0)$. Então, um vetor $w \in T_q X$ é da forma

$$w = a X_u(u_0, v_0) + b X_v(u_0, v_0),$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$. Deste modo,

$$I_q(w) = a^2 \langle X_u, X_u \rangle(u_0, v_0) + 2ab \langle X_u, X_v \rangle(u_0, v_0) +$$

$$+ b^2 \langle X_v, X_v \rangle(u_0, v_0).$$

Usando a notação a seguir

$$E(u_0, v_0) = \langle X_u, X_u \rangle(u_0, v_0),$$

$$F(u_0, v_0) = \langle X_u, X_v \rangle(u_0, v_0),$$

$$G(u_0, v_0) = \langle X_v, X_v \rangle(u_0, v_0),$$

tem-se

$$I_q(w) = a^2 E(u_0, v_0) + 2abF(u_0, v_0) + b^2 G(u_0, v_0).$$

Variando (u, v) , tem-se as funções $E(u, v)$, $F(u, v)$ e $G(u, v)$ diferenciáveis, que são denominadas *coeficientes da primeira forma quadrática*. As funções, E , F e G satisfazem as seguintes propriedades:

- a) $E(u, v) > 0$ e $G(u, v) > 0$ para todo (u, v) , pois os vetores X_u e X_v são nulos;
- b) $E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v) > 0$. De fato, como

$$|X_u \times X_v|^2 + \langle X_u, X_v \rangle^2 = |X_u|^2 + |X_v|^2,$$

tem-se que

$$EG - F^2 = |X_u|^2 |X_v|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2 = |X_u \times X_v|^2 > 0.$$

Uma região D do plano é um subconjunto de \mathbb{R}^2 fechado e limitado, cujo interior é homeomorfo a uma bola aberta de \mathbb{R}^2 e cujo bordo, homeomorfo a uma circunferência, é formado por um número finito de traços de curvas regulares.

Se $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma superfície parametrizada regular e $D \subset U$ é uma região de \mathbb{R}^2 , então $X(D)$ é uma região da superfície X .

Definição 26. Seja $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular e $D \subset U$ uma região de \mathbb{R}^2 , tal que X restrita ao interior de D é injetiva. A *área* da região $X(D)$ é dada por

$$A(X(D)) = \iint_D \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv,$$

onde E , F e G são os coeficientes da primeira forma quadrática de X .

Exemplo 11. Seja uma esfera de raio r definida por

$$X(\alpha, \beta) = (r \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\beta), r \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta), r \cos(\alpha))$$

com $0 < \alpha < \pi$ e $0 < \beta < 2\pi$.

Com base na Definição 26, a área da esfera em consideração pode ser expressa da seguinte maneira.

$$\begin{aligned} A(X(\alpha, \beta)) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{EG - F^2} \, d\alpha \, d\beta = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \operatorname{sen}(\alpha) \, d\alpha \, d\beta = r^2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \operatorname{sen}(\alpha) \, d\alpha \right) d\beta \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} \left(-\cos(\alpha) \Big|_0^\pi \right) d\beta = r^2 \int_0^{2\pi} 2 \, d\beta = r^2 \left(2\beta \Big|_0^{2\pi} \right) = r^2 (4\pi) = 4\pi r^2. \end{aligned}$$

No âmbito deste estudo, propõe-se uma incursão na segunda forma quadrática, fundamental que desempenha um papel crucial na geometria diferencial.

Definição 27: Seja $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Fixado $q = (u_0, v_0) \in U$, a *Segunda Forma Quadrática* de X em q é uma aplicação $\Pi_q = T_q X \rightarrow \mathbb{R}$ que para cada vetor $w \in T_q X$ associa $\Pi_q(w)$ da seguinte forma: se $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma curva diferenciável da superfície, tal que $(u(t_0), v(t_0)) = q$ e $\alpha'(t_0) = w$, então se define $\Pi_q(w) = \langle \alpha''(t), N(u_0, v_0) \rangle$, em que N é o vetor normal a X .

Após a segunda forma quadrática ser estabelecida, mostra-se que ela é independente da curva escolhida.

Seja $w = a X_u(u_0, v_0) + b X_v(u_0, v_0)$, e considera-se uma curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ de modo que $(u(t_0), v(t_0)) = q$ e $\alpha'(t_0) = w$, ou seja,

$$(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0), (u'(t_0), v'(t_0)) = (a, b).$$

Como

$$\alpha'(t) = u'(t) X_u(u(t), v(t)) + v'(t) X_v(u(t), v(t))$$

e

$$\begin{aligned} \alpha''(t) &= u''(t) X_u(u(t), v(t)) + (u'(t))^2 X_{uu}(u(t), v(t)) + \\ &+ 2u'(t)v'(t) X_{uv}(u(t), v(t)) + (v'(t))^2 X_{vv}(u(t), v(t)) + \\ &+ v''(t) X_v(u(t), v(t)), \end{aligned}$$

tem-se que

$$\begin{aligned} \Pi_q(w) &= \langle \alpha''(t), N(u_0, v_0) \rangle = a^2 \langle X_{uu}, N \rangle(u_0, v_0) + 2ab \langle X_{uv}, N \rangle(u_0, v_0) + \\ &+ b^2 \langle X_{vv}, N \rangle(u_0, v_0), \end{aligned}$$

onde a última expressão não depende da curva α .

Usando a notação

$$e(u_0, v_0) = \langle X_{uu}, N \rangle(u_0, v_0),$$

$$f(u_0, v_0) = \langle X_{uv}, N \rangle(u_0, v_0),$$

$$g(u_0, v_0) = \langle X_{vv}, N \rangle(u_0, v_0),$$

tem-se

$$\Pi_q(w) = a^2 e(u_0, v_0) + 2abf(u_0, v_0) + b^2 g(u_0, v_0)$$

Variando (u, v) , tem-se funções diferenciáveis, $e(u, v)$, $f(u, v)$, $g(u, v)$, que são denominadas *coeficientes da segunda forma quadrática* da superfície parametrizada X .

Definição 28. Sejam $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular e $q = (u_0, v_0)$. A *função curvatura normal* em q é uma aplicação $k_n : T_q X - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ que, para cada vetor $w \in T_q X$ não nulo, associa

$$k_n(w) = \frac{\Pi_q(w)}{I_q(w)}.$$

Se $w \in T_q X$, $w \neq 0$, então $k_n(\lambda w) = k_n(w)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$. De fato, seja $w = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0)$, onde $(a, b) \neq (0, 0)$. Denotando por e_0 , f_0 e g_0 os coeficientes da segunda forma quadrática em (u_0, v_0) , tem-se

$$\begin{aligned} k_n(w) &= \frac{\Pi_q(\lambda w)}{I_q(\lambda w)} = \frac{\lambda^2 a^2 e_0 + 2\lambda^2 abf_0 + \lambda^2 b^2 g_0}{\lambda^2 \langle w, w \rangle} = \\ &= \frac{a^2 e_0 + 2abf_0 + b^2 g_0}{\langle w, w \rangle} = \frac{\Pi_q(w)}{I_q(w)} = k_n(w). \end{aligned}$$

Sejam w um vetor unitário de $T_q X$ e $\alpha(s) = X(u(s), v(s))$ uma curva regular da superfície, parametrizada pelo comprimento de arco, tal que $(u(s_0), v(s_0)) = q$ e $\alpha'(s_0) = w$. Se a curvatura de α em s_0 , $k(s_0) \neq 0$, então

$$\begin{aligned}
k_n(w) &= \Pi_q(w) = \langle \alpha''(s_0), N(u(s_0), v(s_0)) \rangle = \\
&= k(s_0) \langle n(s_0), N(u(s_0), v(s_0)) \rangle = \\
&= k(s_0) \cos(\theta),
\end{aligned}$$

em que $n(s_0)$ é o vetor normal a α em s_0 e θ é o ângulo formado pelo vetores $n(s_0)$ e $N(u(s_0), v(s_0))$, ou seja, $\theta = \arccos\left(\frac{\langle n, N \rangle}{|n||N|}\right)$.

Exemplo 12. Seja a superfície a seguir.

$$X(u, v) = (a \operatorname{sen}(v) \cos(u), a \operatorname{sen}(v) \operatorname{sen}(u), a \cos(v)),$$

com $a > 0$, $u \in \mathbb{R}$, $0 < v < \pi$, que descreve a esfera de raio a . Como todas as seções normais são circunferências de raio a , e o vetor normal

$$N(u, v) = (-\operatorname{sen}(v) \cos(u), -\operatorname{sen}(v) \operatorname{sen}(u), -\cos(v)),$$

aponta para o interior da esfera, conclui-se que a curvatura normal é constante igual a $\frac{1}{a}$ e a segunda forma quadrática $\Pi_q(w)$ é igual a $\frac{|w|^2}{a}$, para todo $q = (u, v)$ e $w \in T_q X$.

A partir deste ponto, demonstraremos que os valores máximos e mínimos da função curvatura normal em um ponto q serão denominados de curvaturas principais.

Denota-se por E_0 , F_0 , G_0 , e_0 , f_0 e g_0 os coeficientes da primeira e segunda formas quadráticas de uma superfície parametrizada regular $X(u, v)$ em um ponto $q = (u_0, v_0)$.

Proposição 11. Sejam $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular e k_n a função curvatura normal de X em $q = (u_0, v_0)$. Então, existem vetores unitários e ortogonais $w_1, w_2 \in T_q X$, tais que $k_1 = k_n(w_1)$ e $k_2 = k_n(w_2)$ são os valores mínimo e máximos da função k_n .

Demonstração. Se k_n é uma função constante, então quaisquer dois vetores unitários e ortogonais de $T_q X$ satisfazem as condições da proposição.

Supondo que k_n não é constante. Considera-se a função $k_n : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$k_n(a, b) = k_n(aX_u(q) + bX_v(q)), \quad (a, b) \neq (0, 0),$$

isto é,

$$k_n(a, b) = \frac{a^2 e_0 + 2abf_0 + b^2 g_0}{a^2 E_0 + 2abF_0 + b^2 G_0}.$$

Esta função é diferenciável uma vez que $(a, b) \neq (0, 0)$. Além disso, para todo $\lambda \neq 0$, $k_n(\lambda a, \lambda b) = k_n(a, b)$. Portanto, para obter os valores mínimo e máximo da função k_n , basta restringir k_n à circunferência C de \mathbb{R}^2 de raio 1 dada por $a^2 + b^2 = 1$.

Como k_n é contínua, então existem pontos (a_1, b_1) e (a_2, b_2) de C tais que

$$k_1 = k_n(a_1, b_1) \text{ e } k_2 = k_n(a_2, b_2) \quad (26)$$

são, respectivamente, o mínimo e o máximo da função k_n restrita a C . Portanto,

$$k_1 \leq k_n(a, b) \leq k_2$$

para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Além disso, como k_n não é constante, $k_1 < k_2$.

Considera-se agora os vetores de $T_q X$

$$\begin{aligned} \bar{w}_1 &= a_1 X_u(q) + b_1 X_v(q), \\ \bar{w}_2 &= a_2 X_u(q) + b_2 X_v(q). \end{aligned}$$

Pela definição de k_n , tem-se que para todo $w \in T_q X \setminus 0$,

$$k_1 = k_n(\bar{w}_1) \leq k_n(w) \leq k_n(\bar{w}_2) = k_2.$$

Prova-se agora que os vetores \bar{w}_1 e \bar{w}_2 são ortogonais. Como (a_1, b_1) e (a_2, b_2) dão o mínimo e o máximo de k_n , respectivamente, então as derivadas parciais da função k_n são nulas nestes pontos. Calculando essas derivadas parciais, usando a Equação (26), obtém-se:

$$(e_0 - k_1 E_0) a_1 + (f_0 - k_1 F_0) b_1 = 0, \quad (27)$$

$$(e_0 - k_2 E_0) a_2 + (f_0 - k_2 F_0) b_2 = 0, \quad (28)$$

$$(f_0 - k_1 F_0) a_1 + (g_0 - k_1 G_0) b_1 = 0, \quad (29)$$

$$(f_0 - k_2 F_0) a_2 + (g_0 - k_2 G_0) b_2 = 0. \quad (30)$$

Se a_1, b_1, a_2 e b_2 são não nulos, então subtraindo a Equação (27) multiplicada por a_2 da Equação (28) multiplicada por a_1 , em seguida, subtrai-se a Equação (29)

multiplicada por b_2 da Equação (30) multiplicada por b_1 . Finalmente, somando as equações obtidas, tem-se

$$(k_1 - k_2)(a_1 a_2 E_0 + a_1 b_2 F_0 + a_2 b_1 F_0 + b_1 b_2 G_0) = 0.$$

Como $k_1 \neq k_2$, conclui-se que

$$\langle \bar{w}_1, \bar{w}_2 \rangle = a_1 a_2 E_0 + a_1 b_2 F_0 + a_2 b_1 F_0 + b_1 b_2 G_0 = 0.$$

De modo análogo, prova-se que \bar{w}_1 e \bar{w}_2 são ortogonais quando algum dos números a_1 , b_1 , a_2 , b_2 se anula. Observa-se que se obteve dois vetores ortogonais \bar{w}_1 , \bar{w}_2 , não necessariamente unitários que dão o mínimo e o máximo da função k_n . Considerando

$$w_1 = \frac{\bar{w}_1}{|\bar{w}_1|} \text{ e } w_2 = \frac{\bar{w}_2}{|\bar{w}_2|},$$

como $k_n(\lambda w) = k_n(w)$, $\forall \lambda \neq 0$, conclui-se que w_1 e w_2 satisfazem a proposição. ■

Na proposição seguinte, obtém-se a curvatura média $H(q)$ e a curvatura gaussiana $K(q)$ a partir dos coeficientes da primeira e segunda formas quadráticas.

Proposição 12. Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular. Se $q = (u_0, v_0)$ então

$$H(q) = \frac{1}{2} \frac{e_0 g_0 - 2f_0 F_0 + E_0 g_0}{E_0 G_0 - F_0^2},$$

$$K(q) = \frac{e_0 g_0 - f_0^2}{E_0 G_0 - F_0^2}.$$

Demonstração. Se um número real k_0 é uma curvatura principal em q , na direção de $w = a_0 X_u(q) + b_0 X_v(q)$, então

$$\begin{cases} (e_0 - k_0 E_0) a_0 + (f_0 - k_0 F_0) b_0 = 0 \\ (f_0 - k_0 F_0) a_0 + (g_0 - k_0 G_0) b_0 = 0 \end{cases} \quad (31)$$

De fato, como k_0 é o valor máximo ou mínimo da função

$$\frac{a^2 e_0 + 2abf_0 + b^2 g_0}{a^2 E_0 + 2abF_0 + b^2 G_0}, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad (32)$$

em (a_0, b_0) , obtém-se o sistema de Equações (31) calculando as derivadas parciais da função (32) em (a_0, b_0) .

Segue-se do fato de que (a_0, b_0) é uma solução não trivial do sistema que o determinante

$$\begin{vmatrix} e_0 - k_0 E_0 & f_0 - k_0 F_0 \\ f_0 - k_0 F_0 & g_0 - k_0 G_0 \end{vmatrix} = 0,$$

isto é, k_0 satisfaz a equação

$$x^2 - \frac{e_0 G_0 - 2f_0 F_0 + E_0 g_0}{E_0 G_0 - F_0^2} x + \frac{e_0 g_0 - f_0^2}{E_0 G_0 - F_0^2} = 0.$$

Pela relação entre os coeficientes de uma equação do segundo grau e as raízes da equação, conclui-se que

$$H(q) = \frac{1}{2} \frac{e_0 G_0 - 2f_0 F_0 + E_0 g_0}{E_0 G_0 - F_0^2},$$

$$K(q) = \frac{e_0 g_0 - f_0^2}{E_0 G_0 - F_0^2}.$$



Exemplo 13. A esfera unitária, parametrizada por

$$X(u, v) = (\text{sen}(v) \cos(u), \text{sen}(v) \text{sen}(u), \cos(v)),$$

com $0 < u < 2\pi$ e $0 < v < \pi$, possui curvatura gaussiana constante, $K = 1$.

Seja uma superfície regular parametrizada $X(u, v)$, $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$. Como para cada $(u, v) \in U$ os vetores X_{uu} , X_{uv} , X_{vv} , N_u e N_v podem ser expressos como combinação linear de X_u , X_v e N que estão apresentados no bloco a seguir.

É importante destacar que algumas expressões serão dadas por blocos de Equações, visando uma melhor organização do trabalho.

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + \mathbf{a}_{11} N, \\ X_{uv} &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + \mathbf{a}_{12} N, \\ X_{vv} &= \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + \mathbf{a}_{22} N, \\ N_u &= \mathbf{b}_{11} X_u + \mathbf{b}_{12} X_v, \\ N_v &= \mathbf{b}_{21} X_u + \mathbf{b}_{22} X_v, \end{aligned} \tag{33}$$

onde os coeficientes Γ_{ij}^k , a_{ij} , b_{ij} devem ser determinados. Nas duas últimas igualdades, usa-se o fato de que N_u e N_v são vetores tangentes à superfície. Os coeficientes Γ_{ij}^k são chamados *símbolos de Christoffel* da superfície X .

Considerando o produto interno das três primeiras relações do bloco de Equações (33) com N , obtém-se

$$\begin{aligned} a_{11} &= e, \\ a_{12} &= f, \\ a_{22} &= g. \end{aligned} \tag{34}$$

Para determinar os outros coeficientes, considera-se o produto interno de cada uma das relações do bloco de Equações (33) com X_u e X_v , obtém-se as expressões no bloco adiante.

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F &= \langle X_{uu}, X_u \rangle = \frac{1}{2} E_u, \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G &= \langle X_{uu}, X_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v, \\ \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F &= \langle X_{uv}, X_u \rangle = \frac{1}{2} E_v, \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G &= \langle X_{uv}, X_v \rangle = \frac{1}{2} G_u, \\ \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F &= \langle X_{vv}, X_u \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u, \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G &= \langle X_{vv}, X_v \rangle = \frac{1}{2} G_v, \\ b_{11} E + b_{12} F &= \langle N_u, X_u \rangle = -e, \\ b_{11} F + b_{12} G &= \langle N_u, X_v \rangle = -f, \\ b_{21} E + b_{22} F &= \langle N_v, X_u \rangle = -f, \\ b_{21} F + b_{22} G &= \langle N_v, X_v \rangle = -g, \end{aligned} \tag{35}$$

Resolvendo as duas primeiras equações do bloco de Equações (35) para Γ_{11}^1 e Γ_{11}^2 , as duas seguintes para Γ_{12}^1 e Γ_{12}^2 e assim sucessivamente, obtém-se os seguintes blocos de Equações:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - 2EE_v + FE_u}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u + FG_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)},\end{aligned}\tag{36}$$

$$\begin{aligned}b_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}, & b_{11} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \\ b_{21} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}, & b_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}.\end{aligned}\tag{37}$$

Com base no desenvolvimento realizado, é possível explorar um dos teoremas mais significativos neste trabalho: o Teorema de Egregium de Gauss, que figura como um dos pilares fundamentais da teoria das superfícies. Assim, ao explorar o teorema, este trabalho amplia nosso entendimento sobre a complexidade e a beleza intrínseca das superfícies.

Recordando que se $X(u, v)$ é uma superfície e N é a aplicação normal de Gauss, então, como visto anteriormente, X_{uu} , X_{uv} , X_{vv} são combinações lineares de X_u , X_v e N . Além disso, N_u e N_v , por serem tangentes à superfície, são combinações lineares de X_u e X_v . Os coeficientes destas combinações lineares, que foram obtidas nos blocos de Equações (36) e (37), não são independentes, pois devem satisfazer as relações do bloco:

$$\begin{aligned}
(X_{uu})_v &= (X_{uv})_u, \\
(X_{vv})_u &= (X_{uv})_v, \\
N_{uv} &= N_{vu}.
\end{aligned} \tag{38}$$

Substituindo o bloco de Equações (33) no bloco de Equações (38), cada equação do bloco de Equações (38) se reduz uma combinação linear de X_u , X_v e N . Como esses vetores são linearmente independentes de \mathbb{R}^3 , anulando os coeficientes dessas combinações lineares, obtém-se nove relações, das quais se destaca as seguintes:

$$-EK = (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 (\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2, \tag{39}$$

onde K é a curvatura gaussiana e

$$e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2, \tag{40}$$

$$f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2. \tag{41}$$

As outras seis relações são formas equivalentes dessas três relações. A Equação (39) é dita *equação de Gauss*, e a Equação (40) e a Equação (41) são chamadas *equações de Codazzi-Mainardi*. As equações de Gauss e Codazzi-Mainardi são ditas *equações de compatibilidade*.

A seguir, tem-se, com detalhes, as relações que resultam da primeira equação do bloco de Equações (38).

Substituindo as equações do bloco de Equações (33) e as Equações do bloco (34) em Γ_{11}^1 (primeira Equação do bloco (36)), tem-se que:

$$\frac{\partial}{\partial v}(\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN) = \frac{\partial}{\partial u}(\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN).$$

Efetuada essas derivadas parciais e substituindo X_{uu} , X_{uv} , X_{vv} , N_u e N_v em função de X_u , X_v e N pelas relações do bloco de Equações (33), obtém-se as seguintes equações após a substituição dos coeficientes b_{ij} de N_u e N_v pelas equações do bloco de Equações (37):

$$\begin{aligned} F \frac{eg - f^2}{EG - F^2} &= (\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1, \\ -E \frac{eg - f^2}{EG - F^2} &= (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2, \\ e_v - f_u &= e \Gamma_{12}^1 + f (\Gamma_{12}^2 \Gamma_{11}^1) - g \Gamma_{11}^2. \end{aligned}$$

As duas últimas equações são precisamente a Equação (39) e Equação (40).

De modo análogo, considerando os coeficientes de X_u , X_v e N das duas últimas equações do bloco de Equações (38), obtém-se outras seis relações. Em particular, o coeficiente de N da segunda equação de do bloco de Equações (38) fornece a Equação (41).

Como os símbolos de Christoffel só dependem da primeira forma quadrática, da equação de Gauss, a Equação (39) se obtém o seguinte resultado, que é um dos teoremas mais importantes da teoria das superfícies.

Teorema 4 (Teorema de Egregium de Gauss). A curvatura gaussiana só depende da primeira forma quadrática.

Demonstração. O intuito é provar que diante de uma isometria $\omega: S \rightarrow \bar{S}$, então $K(q) = K(\omega(q))$, $\forall q \in S$.

Sejam $X:U \rightarrow S$, com $U \subset \mathbb{R}^2$ e $S \subset \mathbb{R}^3$, uma parametrização de S em q e uma isometria $\omega:W \subset S \rightarrow \bar{S}$, então $\bar{X} = \omega \circ X$ é uma parametrização de \bar{S} em q .

Assim, tem-se

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = \langle d_{\omega(q)}(X_u), d_{\omega(q)}(X_u) \rangle = \langle \bar{X}_u, \bar{X}_u \rangle = \bar{E},$$

$$G = \langle X_u, X_v \rangle = \langle d_{\omega(q)}(X_u), d_{\omega(q)}(X_v) \rangle = \langle \bar{X}_u, \bar{X}_v \rangle = \bar{G},$$

$$F = \langle X_v, X_v \rangle = \langle d_{\omega(q)}(X_v), d_{\omega(q)}(X_v) \rangle = \langle \bar{X}_v, \bar{X}_v \rangle = \bar{F}.$$

Como $\Gamma_{ij}^k(u, v) = \bar{\Gamma}_{ij}^k(u, v)$, $\forall (u, v) \in U$, deste modo,

$$K(q) = K(X(u, v)) = \bar{K}(\bar{X}(u, v)) = K(\omega(q)).$$

■

Como consequência desse teorema, tem-se que superfícies isométricas têm a mesma curvatura gaussiana em pontos correspondentes. É importante ressaltar que a recíproca não é verdadeira.

No próximo capítulo, adentra-se na introdução à cartografia e técnicas fundamentais dessa disciplina milenar, explorando os princípios básicos da representação cartográfica, como os sistemas de projeção, e seu contexto histórico. Esse estudo pretende promover uma compreensão sólida dos fundamentos cartográficos necessários para estabelecer um elo com a Geometria Diferencial, revelando assim novas perspectivas e aplicações em ambas as áreas do conhecimento.

3 INTRODUÇÃO À CARTOGRAFIA

Neste capítulo, explora-se a introdução ao desenvolvimento da Cartografia por um contexto histórico e algumas projeções existentes. Ademais, trata-se da relação entre a Cartografia e a Geometria Diferencial.

3.1 UMA BREVE HISTÓRIA DA CARTOGRAFIA

A cartografia é um segmento da ciência que estuda técnicas de representações gráficas de superfícies terrestres, ao qual inclui suas características terrestres e demais informações pertinentes, onde comumente são utilizadas por intermédio de mapas, cartas e outros tipos de representações geográficas. Essa área trata na compreensão e na comunicação de informações espaciais, sendo amplamente utilizada em diversas áreas, como geografia, planejamento urbano, engenharia, navegação, agricultura e meio ambiente (ROCHA, 2008; HIGA, 2021).

Em conformidade com Higa (2021), os primeiros registros cartográficos conhecidos originaram-se no Oriente, sendo mais frequentemente encontrados na região sul da Mesopotâmia. Um exemplo notável de mapa antigo, que sobreviveu ao longo do tempo, foi identificado durante escavações nas ruínas da cidade de Ga Sur, localizada ao norte da Babilônia, onde o período estimado é por volta de 2500 a.C, e, atualmente preservado na Universidade Harvard.

O mapa mencionado no parágrafo anterior é uma placa feita de argila cozida que retrata a região do vale do rio Eufrates, na qual são representadas montanhas nas margens do rio, destacadas através de formas que se assemelham a escamas de peixe. Outro registro cartográfico provém do período do antigo reino acadiano, que surgiu cerca de cinco séculos após o desenvolvimento da escrita cuneiforme (entre 2350 a.C. e 2150 a.C.). Durante esse período, foram descobertos não apenas um mapa regional, mas também sete representações cartográficas detalhadas de plantas (CARVALHO, ARAÚJO, 2008).

Em diante, começaram a surgir representações cartográficas da Babilônia antiga, abrangendo o período entre 2000 a.C. e 1600 a.C., bem como da cidade de Nipur, que existiu entre 1600 a.C. e 1000 a.C. Um achado notável é o único mapa-múndi conhecido da Antiguidade, um fragmento de argila com inscrições cuneiformes datado do período do Império Babilônico, entre 626 a.C. e 593 a.C., que atualmente

está preservado no Museu Britânico, em Londres (FILHO, 2008; CARVALHO, ARAÚJO, 2008).

Os primeiros indícios de empreendimentos cartográficos surgiram em lugares como Egito, Assíria, Fenícia e China. Os mapas primitivos eram geralmente simples, frequentemente enfocando aspectos culturais de comunidades específicas, rotas, itinerários e pontos de referência cruciais para caçadores e aventureiros. Algumas civilizações antigas tinham uma tendência a retratar seus territórios imperiais de forma exagerada, sempre os colocando como o epicentro do mundo conforme o conheciam, como os egípcios, chineses e romanos (FILHO, 2008; CARVALHO, ARAÚJO, 2008). Parte considerável destes mapas antigos eram elaborados com base em mitos e lendas transmitidos por aventureiros, enquanto outros eram influenciados por princípios religiosos.

De fato, é célebre que os primeiros cartógrafos tenham feito uso de conceitos matemáticos, especialmente da geometria, ao passo que é relevante ressaltar que nessa época não havia uma ênfase significativa na precisão, ou, na relação direta entre as medidas representadas nos mapas e as medidas reais do mundo, tendo em vista que o principal objetivo era registrar as novas descobertas e os acontecimentos do mundo conhecido até então (CARVALHO, ARAÚJO, 2008).

Os gregos antigos, profundamente influenciados pelas contribuições dos babilônios, alcançaram um importante nível de conhecimento na Antiguidade, que perdurou até o início do século XVI, reconheceram a esfericidade da Terra, com seus polos, equador e trópicos, e introduziram sistemas de coordenadas como latitude e longitude. Além disso, desenvolveram as primeiras projeções cartográficas e calcularam as dimensões aproximadas do nosso planeta (CARVALHO, ARAÚJO, 2008).

Os gregos estabeleceram os fundamentos iniciais da Geografia e das normas cartográficas, e essas contribuições continuam a ser a base do sistema cartográfico atual. Assim, teve início uma nova era na aventura cartográfica conhecida como "Cartografia Matemática," na qual os mapas passaram a ser construídos com base em princípios matemáticos sólidos (CARVALHO, ARAÚJO, 2008).

Filho (2008) observa que os gregos antigos tinham uma inclinação por representar as características geográficas de um país utilizando métodos geométricos, entre outras abordagens. Registros nos escritos de Estrabão, que viveu entre 63 a.C. e 26 d.C., e em outros documentos antigos, oferecem algumas dessas

descrições intrigantes. Por exemplo, o Peloponeso era comparado a uma folha de plátano, enquanto a Sicília era representada como um triângulo, onde essas analogias lembram a forma como hoje associamos a Itália a uma "bota".

Nesse contexto, destacam-se figuras notáveis da época, como Anaximandro de Mileto, do século VI a.C., que construiu um instrumento conhecido como quadrante solar e possuía um mapa-múndi gravado em pedra. Hecateu de Mileto retratou a Terra em um disco metálico. Hiparco de Nicéia propôs um sistema de coordenadas com meridianos e paralelos igualmente espaçados. Êudoxo de Cnido construiu um globo, enquanto Dicearco de Messênia desenhou um mapa-múndi usando uma projeção plana-quadrada. No século III a.C., Eratóstenes de Cirene, que supervisionou a famosa biblioteca de Alexandria, elaborou um mapa-múndi com linhas de latitude e longitude, além de calcular a circunferência da Terra com notável precisão, considerando as limitações tecnológicas da época (FILHO, 2008).

Contudo, o auge da cartografia grega é frequentemente associado a Claudio Ptolomeu de Alexandria, que viveu no século II d.C., na qual era astrônomo, geógrafo e cartógrafo, e estabeleceu os fundamentos da Geografia Matemática e da Cartografia em sua obra famosa, a "Geografia." Além disso, Ptolomeu contribuiu significativamente para a Astronomia com sua obra "Almagesto," posteriormente chamada assim pelos árabes, que serviu como um manual abrangente para essa disciplina (FILHO, 2008; CARVALHO, ARAÚJO, 2008).

A partir desse momento, a Cartografia, como muitas outras áreas do conhecimento, entrou em um longo período de estabilidade que se estendeu por quase mil anos. Foi um período caracterizado pela supremacia da Igreja Católica Romana no Ocidente, durante o qual novos avanços e descobertas científicas eram restritos a princípios religiosos. Durante esse período, a Igreja proibiu o uso da Geografia de Ptolomeu. Com efeito, os mapas produzidos nesse período eram bastante rudimentares (RAIZ, 1969).

Os mapas mais comuns desse período eram conhecidos como "Orbis Terrarum" ou mapas em forma de "T" dentro do "O", na qual retratavam o mundo conhecido na época, o chamado "ecúmeno" pelos gregos. Estes mapas representavam a Terra de forma simbólica, dividida em três partes, refletindo a Trindade cristã. Neles, eram representados dois braços de mar, com a Europa à esquerda, a África à direita e a Ásia acima, considerada como o local do paraíso terrestre (FILHO, 2008; RAIZ, 1969).

É importante destacar os "portulanos" ou cartas portulanos, que eram mapas mais científicos e utilitários, servindo como guias de navegação valiosos para a época. No entanto, foi somente durante a era dos grandes descobrimentos, impulsionada pelas viagens de exploração de novas terras, que os navegadores começaram a sentir a necessidade de mapas cada vez mais atualizados e precisos. No final do século XV e no início do século XVI, a Cartografia experimentou um ressurgimento significativo de avanços científicos, marcando o início da chamada "era de ouro" da Cartografia. Esse período foi caracterizado por um renascimento no estudo e aperfeiçoamento dos mapas, impulsionado pela exploração de novas terras e a demanda por mapas mais precisos e detalhados (FILHO, 2008; RAIZ, 1969).

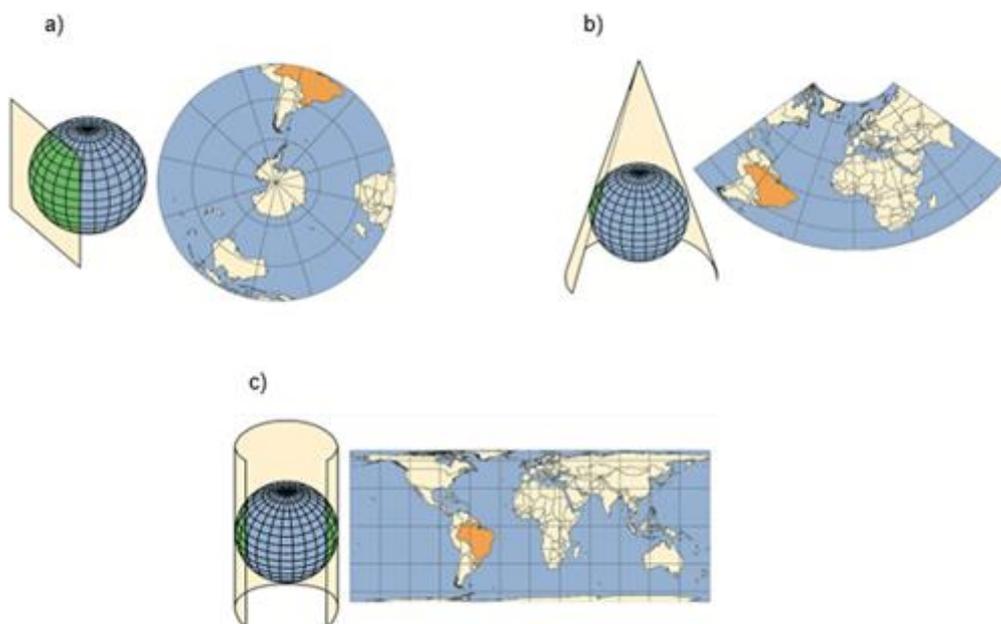
É evidente que tentar representar a Terra em uma superfície plana é um desafio complexo que está sujeito a imprecisões. Ao longo da história, cartógrafos têm se dedicado a explorar as formas e dimensões da Terra, bem como a encontrar maneiras de representá-la em um plano. Ao criar um mapa, o objetivo ideal seria que cada ponto na superfície da Terra correspondesse a um ponto no mapa. Para alcançar essa correspondência, foram desenvolvidos sistemas de projeções cartográficas (RAIZ, 1969).

Conforme Raiz (1969), uma projeção cartográfica pode ser entendida como uma correspondência matemática entre as coordenadas retangulares planas de um mapa e as coordenadas esféricas da Terra. Embora a base matemática subjacente a essa projeção seja complexa, a ideia fundamental por trás dela é relativamente simples.

Imagine uma esfera oca com linhas representando os meridianos e paralelos em sua superfície. Agora, colocando uma fonte de luz dentro dessa esfera e posicione uma folha de papel próxima, quando a luz brilha na esfera, as linhas dos meridianos e paralelos serão projetadas sobre o papel. A disposição das linhas projetadas dependerá da forma como o papel é posicionado em relação à esfera.

Com isso, se o papel for moldado desenhados em um cilindro em torno da esfera, obtém-se o que é conhecido como projeção cilíndrica. Se o papel assumir a forma de um cone próximo à esfera, tem-se a projeção cônica. Por fim, se o papel for colocado plano, tem-se a projeção plana. Os princípios básicos por trás das projeções cilíndricas, cônicas e planas podem ser visualizados na figura a seguir.

Figura 18. Projeções cartográficas; a) Projeção Plana ou Azimutal e Projeção Plana Polar; b) Projeção Cônica; c) Projeção Cilíndrica e Projeção Cilíndrica de Peters.



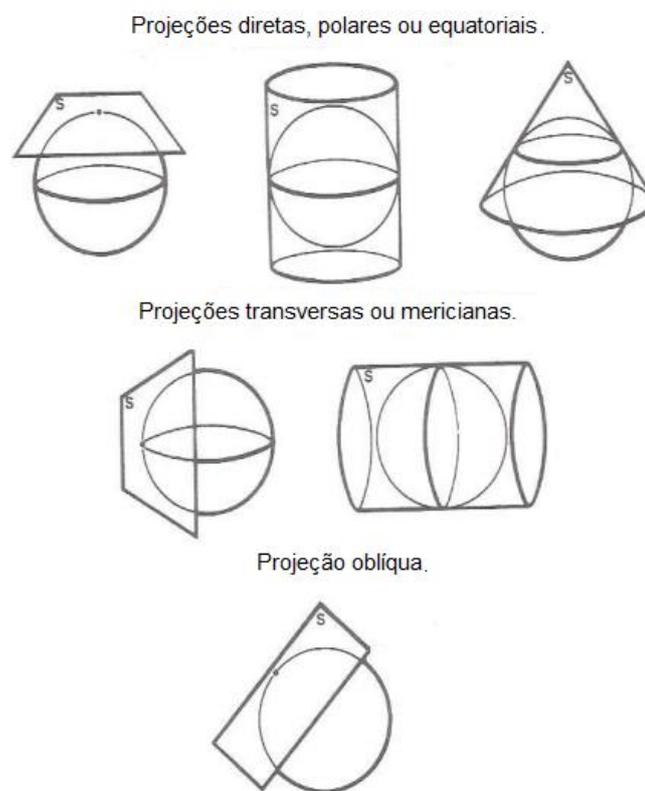
Fonte: Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).

Ao criar um mapa ou carta, a geometria das projeções traz algumas deformações características, onde são alterações no tamanho relativo das regiões (equivalência), na forma das regiões (conformidade) e na proporção entre as distâncias representadas no mapa e as distâncias reais na esfera (equidistância) (FILHO, 2008).

A escolha da posição da superfície de projeção em relação à esfera deve ser feita de modo a minimizar essas deformações para cada região considerada. Existem diferentes tipos de projeções cartográficas, dependendo de como a superfície de projeção é posicionada em relação à esfera.

Se a superfície de projeção estiver centrada nos polos ou for paralela ao plano equatorial, a projeção é chamada de polar, equatorial ou direta. Se estiver centrada em um ponto do equador ou for paralela a um meridiano, é conhecida como transversal ou meridiana. Quando a superfície de projeção está centrada em qualquer ponto ou círculo da esfera, é denominada oblíqua. Essas diferentes abordagens são ilustradas na figura a seguir (FILHO, 2008).

Figura 19. Tipos de projeções.



Fonte: Joly (1997).

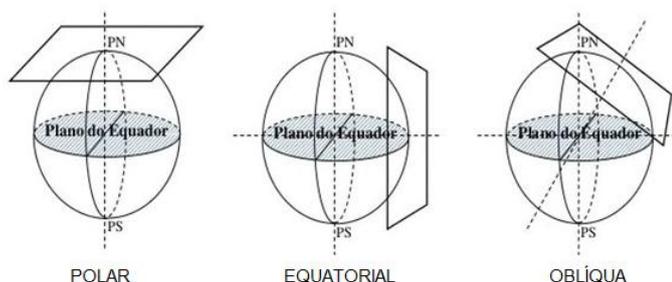
Há mais de duzentas abordagens diferentes para resolver o desafio das projeções cartográficas, mas apenas cerca de trinta delas são amplamente aceitas e aplicadas de forma apropriada. Entre as técnicas mais comuns estão as projeções semelhantes ou conformes, que mantêm a fidelidade na representação das formas da superfície de projeção em relação à esfera, e as projeções equivalentes, que preservam a relação entre as áreas das superfícies (FILHO, 2008; RAIZ, 1969).

Dentre os diversos sistemas de projeção, é possível destacar alguns - Projeções Azimutais (Zenitais): essas projeções ocorrem em um plano tangente ou secante em relação à esfera terrestre. As mais comuns incluem, Projeção Central (Gnomônica) em que o ponto de vista está localizado no centro da Terra. Ela é frequentemente usada para representar áreas específicas com alta precisão, como rotas de voo.

Projeção Estereográfica: esta projeção é baseada em um ponto de vista nos antípodas (oposto diametral) do ponto central. É útil para mapear regiões polares.

Projeção Ortográfica: nessa projeção, o ponto de vista está no infinito, o que resulta em uma perspectiva similar à vista de um observador a uma grande distância da Terra.

Figura 20. Projeções Azimutais.



Fonte: Filho (2008).

Existem também as projeções cônicas, basicamente é uma projeção da superfície da Terra em um cone secante ou tangente. Duas projeções cônicas amplamente utilizadas são - Projeção Cônica Perspectiva ou Central: Nesse caso, a projeção é criada a partir do centro da esfera, é comumente aplicada para representar áreas latitudinais médias. Projeção Cônica de Lambert: Esta projeção, mencionada anteriormente, é construída de forma a minimizar distorções em áreas específicas, sendo especialmente útil para mapear regiões de médias e baixas latitudes (FILHO, 2008; RAIZ, 1969).

De modo geral, estas projeções são fundamentais para com a representação da superfície curva da Terra para mapas planos, onde cada uma possui suas respectivas peculiaridades e também aplicações específicas, sendo necessário observância para com as necessidades frente a sua utilização.

Conforme Oliveira (2004), a importância da cartografia remonta à antiguidade, quando os seres humanos começaram a explorar e mapear o mundo ao seu redor. Ao longo da história, diferentes culturas desenvolveram suas próprias técnicas e representações cartográficas. Um exemplo notável é o mapa de Piri Reis, criado em 1513 pelo almirante turco otomano Piri Reis, que mostra uma parte significativa do mundo conhecido na época.

Rosa (2004) disserta que o ramo em questão evoluiu com o avanço da tecnologia e a aplicação de métodos científicos, onde se baseia em princípios matemáticos, topográficos e geodésicos para obter uma representação precisa e detalhada da superfície terrestre. Com o uso de técnicas de sensoriamento remoto, como satélites e drones, e o uso de sistemas de informações geográficas (SIG), os

cartógrafos têm acesso a uma variedade de dados e ferramentas para a criação de mapas precisos e atualizados.

Um dos principais objetivos da cartografia é fornecer uma representação visual e compreensível do espaço geográfico, na qual envolve a seleção de elementos relevantes a serem representados, como relevo, hidrografia, vegetação, estradas e cidades. A simbologia é um aspecto fundamental da cartografia, pois permite a interpretação e a comunicação das informações representadas. Cores, símbolos, linhas e escalas são usados para transmitir dados geográficos de maneira clara e eficaz (HIGA, 2021).

Em conformidade com Oliveira (2004), a cartografia fornece informações e demais dados relevantes para a tomada de decisões em várias áreas. No planejamento urbano, os mapas são utilizados para delimitar zonas residenciais, áreas comerciais e espaços verdes, auxiliando no desenvolvimento sustentável das cidades, ao passo que na engenharia civil, os mapas topográficos são essenciais para o planejamento e a construção de infraestruturas, como estradas, pontes e sistemas de saneamento básico.

Meneguette (2012) disserta que a cartografia auxilia na navegação e no transporte, permitindo a criação de mapas marítimos e aéreos que garantem a segurança e a eficiência dos deslocamentos. Na agricultura, os mapas de solo e vegetação auxiliam no monitoramento das condições agrícolas, no planejamento de plantio e no uso adequado de recursos, onde também é vital na gestão de desastres naturais, fornecendo informações cruciais para prever e responder a eventos como enchentes, terremotos e incêndios florestais (GIOTTO *et al*, 2013).

Para Sampaio e Brandalize (2018), existem outras perspectivas pertinentes a serem mencionadas para a cartografia, ao qual está relacionada com a preservação da história e também da cultura. Mapas antigos são registros valiosos que ajudam a reconstruir e preservar o conhecimento do passado, fornecendo insights sobre as fronteiras, rotas comerciais e paisagens de épocas passadas, revelam as percepções e crenças de diferentes sociedades em relação ao mundo ao seu redor.

Com o avanço da tecnologia, a Cartografia tem evoluído constantemente. Em tempos contemporâneos, os mapas digitais e interativos estão se tornando cada vez mais populares, permitindo a visualização e a manipulação de dados geográficos em tempo real. Essas tecnologias abrem novas possibilidades para a exploração e a análise do espaço, proporcionando uma experiência mais imersiva e dinâmica.

Portanto, percebe-se sucintamente as contribuições da Cartografia, que em conformidade com outras áreas da ciência, também está interligada com outros conhecimentos, onde a interdisciplinaridade é um atributo presente, relacionando-se com conhecimentos ligados à geografia, à ciência da computação, à estatística e à visualização de dados.

3.2 APLICAÇÕES DA GEOMETRIA DIFERENCIAL EM CARTOGRAFIA

Desde o início da Cartografia, a Matemática, particularmente a Geometria, é fundamental na construção desse campo do conhecimento. Para criar mapas ou cartas, que são os produtos mais significativos da Cartografia, os cartógrafos dependem fortemente do conhecimento matemático, isto ocorre porque a representação gráfica em um mapa é essencialmente uma conversão dos dados esféricos da Terra, que existem no mundo real, para um plano bidimensional (NOEL FILHO, 2012).

Ao considerar a Terra como uma esfera, embora mais tarde se reconheça que sua forma se assemelha a um elipsoide com pequenas diferenças entre seus semieixos, os cartógrafos enfrentam o desafio das distorções resultantes da representação plana. A partir do século XVI, eles iniciam a busca por avanços matemáticos que os ajudem a encontrar uma projeção ideal. Essa projeção ideal deve preservar ângulos, manter a proporção entre as distâncias e as áreas o máximo possível, ou se aproximar ao máximo da representação fiel da realidade geográfica (NOEL FILHO, 2012).

Para Filho (2008) e Oliveira (2004), uma das contribuições mais notáveis de Mercator à Cartografia é a projeção cartográfica que leva seu nome. Essa projeção envolve a representação da superfície esférica da Terra (que, até então, era considerada uma esfera perfeita) em um cilindro infinito, com meridianos retos igualmente espaçados e paralelos também retos, porém cada vez mais afastados uns dos outros em direção aos polos.

De uma forma superficial, o processo consiste em envolver a esfera terrestre com um cilindro tangente à direção do equador e, em seguida, desdobrá-lo. O resultado é que o equador é representado em escala real, enquanto o aumento da separação entre os paralelos na direção dos polos é compensado por um aumento

proporcional nas distâncias entre os meridianos, usando uma fração chamada de "variável de Mercator" ou "variável das latitudes crescentes".

Apesar da existência dessa variável de Mercator, essa projeção é mais amplamente usada em mapas marítimos, pois preserva a linearidade e a ortogonalidade dos meridianos e paralelos, sendo especialmente útil em regiões intertropicais, onde as deformações são mínimas. Devido à sua genialidade na área da Cartografia, Mercator foi frequentemente comparado a Ptolomeu em sua época. Mesmo com algumas discordâncias em relação às ideias de Ptolomeu, o trabalho de Mercator continua a ser fundamental na navegação até os dias de hoje (NOEL FILHO, 2012).

No século XVIII, Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777) contribuiu significativamente para o campo da Cartografia com seu trabalho cartográfico, desenvolvendo uma projeção cônica que era particularmente adequada para representar áreas de médias latitudes. Nessa projeção, os meridianos são linhas retas e os paralelos são curvos e se intersectam de forma a preservar a semelhança entre as áreas representadas. Para mapas em grande escala, Lambert sugeriu o uso de um cone secante ou dividir a região a ser mapeada em zonas troncônicas delimitadas por dois paralelos extremos, cada uma associada a um cone tangente ao paralelo médio (projeção policônica). Além disso, Lambert introduziu uma projeção cônica equivalente, que estava entre as projeções azimutais equivalentes e as cilíndricas equivalentes em termos de características cartográficas (NOEL FILHO, 2012; ROSA, 2004).

Outros avanços importantes na Cartografia a partir do século XVII foram influenciados pelos estudos no Cálculo Diferencial e Integral conduzidos por figuras como Fermat (1601 – 1665), Descartes (1596 – 1650), Newton (1643 – 1727), Leibniz (1646 – 1716), Euler (1707 – 1783) e Cauchy (1789 – 1857), entre outros. Nesse ínterim, o final do século XVIII viu o surgimento das geometrias não-euclidianas, com contribuições notáveis de Lobachevsky (1792 - 1856) e Bolyai (1802 - 1860) (ROSA, 2004).

Esses avanços na Geometria e no Cálculo Diferencial e Integral, particularmente através das pesquisas de Monge (1746 – 1818), Euler, Gauss e Riemann, deram origem a um novo ramo da Matemática conhecido como Geometria Diferencial. Esse campo contribuiu de forma significativa para com o desenvolvimento

da Cartografia, introduzindo novas perspectivas e métodos que influenciaram significativamente a disciplina cartográfica (SANTOS, 2016).

Conforme aponta Santos (2016), a Geometria Diferencial teve seu surgimento na primeira metade do século XVIII, graças aos estudos de Euler e Monge. A primeira apresentação formal da teoria das superfícies foi realizada por Monge em seu trabalho intitulado "Aplicações da Análise à Geometria" em 1795. Posteriormente, em 1827, Gauss publicou sua obra "Estudo Geral sobre Superfícies Curvas", que se tornou o alicerce fundamental para a teoria das superfícies.

Gauss é considerado uma figura central nesse desenvolvimento e seu trabalho marcou o nascimento da Geometria Diferencial como uma disciplina autônoma. Especificamente, o estudo das superfícies esféricas foi fundamental no desenvolvimento da teoria geral das superfícies. Esse desenvolvimento alcançou seu ápice com as contribuições de Riemann, que generalizou esses conceitos para o caso de variedades de n dimensões, na qual a Geometria Diferencial surgiu como um campo independente com os trabalhos pioneiros de Euler, Monge e Gauss, e continuou a se expandir sob a generalização posterior de Riemann (SANTOS, 2016; SILVA, 2022).

A resolução do desafio das projeções cartográficas e a aplicação de teorias matemáticas para aprimorá-las ganharam maior solidez no século XIX, graças à formalização da Geometria Diferencial, ao qual é um ramo da matemática que utiliza princípios do cálculo diferencial para abordar diversos conceitos e aplicações relacionados à geometria não-euclidiana, implica que a Geometria Diferencial se concentra no estudo de superfícies curvas e suas variações, fornecendo uma estrutura matemática sólida para entender e melhorar as projeções (SANTOS, 2016; NOEL FILHO, 2012).

Para Noelho Filho (2012), as contribuições de Gauss são cruciais para com o desenvolvimento da Geometria Diferencial, uma vez que se dedicou aproximadamente três décadas de sua vida a uma análise de pesquisa, resultando em descobertas sobre superfícies e suas características, bem como uma análise matemática das superfícies curvas. Durante esse período, Gauss também se interessou pela astronomia e se tornou diretor de um observatório astronômico, levando-o a aprofundar seus estudos sobre geodésicos e a desenvolver um interesse significativo pelas propriedades gerais das superfícies em diferentes contextos.

Gauss publicou várias obras notáveis, incluindo uma generalização da projeção cartográfica de Mercator, na qual refinou técnicas de projeção inicialmente concebidas por esse matemático. No entanto, nosso foco aqui é seu trabalho mais importante, intitulado "Disquisitiones Generales Circa Superfícies Curvas," no qual ele aplicou os princípios da Geometria Diferencial para aprimorar o estudo das curvas em superfícies, contribuindo assim de forma significativa para esse campo da matemática.

Na publicação citada anteriormente, aborda-se o estudo das propriedades intrínsecas das superfícies, que são aquelas características que dependem exclusivamente das medidas feitas na própria superfície, independentemente do espaço em que ela está inserida. Por outro lado, é impossível criar um mapa em um plano que tenha as mesmas dimensões que o globo terrestre, na qual isso ocorre porque as projeções planas da Terra até então utilizadas distorciam principalmente as regiões distantes do equador (SANTOS, 2016; NOEL FILHO, 2012).

À medida que nos aproximamos dos polos, a distorção aumenta e, como resultado, a forma dos continentes fica alterada. No entanto, é importante reconhecer que os mapas são representações aproximadas da realidade. Pode-se fazer projeções conformes de regiões da esfera em regiões planas, mas, em concordância com Santos (2016), não é possível preservar todas as distâncias e ângulos exatamente nessas projeções. Com efeito, os mapas cartográficos baseados em projeções conformes serão mais precisos ao representar regiões menores, mas não podem ser totalmente fiéis à realidade em todas as áreas.

A relação entre o Teorema de Egregium de Gauss e a Cartografia é profundamente enraizada no entroncamento entre a Geometria Diferencial e a representação precisa da superfície da Terra. Desenvolvido por Carl Friedrich Gauss no século XIX, o Teorema de Egregium revela uma propriedade surpreendente das curvaturas de uma superfície, que desempenha um papel fundamental na cartografia moderna.

Tanto a Geometria Diferencial quanto a Cartografia permeiam uma ampla gama de aplicações práticas. A Cartografia é fundamental para a navegação terrestre e marítima, bem como para o sensoriamento remoto e o monitoramento ambiental. A Geometria Diferencial, por sua vez, fornece os fundamentos matemáticos necessários para entender a forma e a estrutura da Terra, permitindo uma representação precisa e uma análise mais profunda do nosso mundo físico. Em conjunto, esses campos

contribuem para o desenvolvimento de soluções em diversas áreas, como o planejamento urbano.

Segundo Rocha (2008), o estudo das projeções geográficas torna-se elemento importante para se trabalhar a Matemática, uma vez que é consenso entre os cartógrafos que o maior drama por eles vivido é transferir tudo o que existe numa superfície curva, que é a Terra, para uma superfície plana que é o mapa. Assim, mostra-se a conexão entre esses dois campos aparentemente distintos e como o Teorema de Egregium influencia significativamente a representação cartográfica do planeta Terra.

De acordo com Quintero (2018), o processo de projetar a superfície terrestre em um plano requer a transformação de coordenadas de uma superfície para outra e, por esta razão, preliminares de topologia e geometria diferencial têm sido utilizadas.

O Teorema de Egregium afirma que a curvatura gaussiana de uma superfície, que é uma medida intrínseca da curvatura da superfície em si, é invariante sob transformações isométricas. Em outras palavras, se duas superfícies podem ser transformadas uma na outra (sem distorção local), então elas têm a mesma curvatura gaussiana em cada ponto correspondente. Isso implica que a curvatura intrínseca de uma superfície, como a esfera, por exemplo, permanece a mesma independentemente de como ela é deformada no espaço tridimensional.

O Teorema de Egregium é crucial na Geometria Diferencial, pois fornece uma maneira de caracterizar a geometria de uma superfície apenas em termos de suas propriedades intrínsecas, sem depender de sua imersão em um espaço ambiente mais amplo. Em cartografia, por exemplo, é utilizado para entender e minimizar as distorções que ocorrem ao representar a superfície curva da Terra em mapas planos.

Segundo Tenenblat (2008), não existe uma transformação isométrica que preserve o comprimento de curvas, entre uma região do plano e uma região esférica (ou que se aproxima da forma de uma esfera, como a Terra). Isso implica que qualquer tentativa de representar a superfície da Terra em um plano resultará em distorções inevitáveis, como é o caso dos mapas de projeção utilizados em Cartografia. Portanto, a impossibilidade de preservar todos os aspectos geométricos ao transformar a superfície terrestre em um plano é uma limitação intrínseca à natureza esférica do nosso planeta.

Em consonância com Aguirre e Filho (2009), não é possível elaborar mapas que conservem simultaneamente: áreas, ângulos e distâncias. Portanto, deve-se selecionar uma projeção, de acordo com o objetivo da representação gráfica, estabelecendo quais as deformações a serem admitidas, que terão de ser eliminadas e que propriedades deverão ser conservadas.

Torna-se importante considerar cuidadosamente a escolha do mapa a ser utilizado, tendo em mente que todas as projeções cartográficas inevitavelmente incorrem em distorções. Diferentes projeções privilegiam a preservação de diferentes características. Consequentemente, a seleção do mapa adequado deve levar em conta o propósito específico para o qual será utilizado, seja para navegação marítima, estudos geográficos, planejamento urbano ou análises climáticas.

Compreender as distorções inerentes a cada projeção e suas implicações é crucial para interpretar corretamente as informações cartográficas e evitar equívocos na interpretação dos dados geoespaciais.

Em suma, o Teorema de Egregium de Gauss desempenha um papel importante na cartografia moderna, fornecendo uma compreensão profunda das propriedades geométricas das superfícies e influenciando diretamente as técnicas de representação da Terra em mapas e modelos digitais. Ao compreender como as curvaturas intrínsecas de uma superfície afetam sua representação cartográfica, os cartógrafos podem criar mapas mais precisos e úteis.

4 SUPORTE AO PROFESSOR

Após estabelecer uma sólida base que integra a Geometria Diferencial com a Cartografia, o trabalho direciona seu foco para o aprimoramento do apoio ao professor. Este desdobramento representa um passo essencial na aplicação prática dos conceitos teóricos explorados, visando a facilitação do ensino e o fortalecimento da compreensão dos alunos. Ao destacar estratégias específicas e recursos didáticos que podem ser utilizados em sala de aula, a pesquisa busca promover uma abordagem mais eficaz e acessível ao ensino desses temas complexos. Dessa forma, a dissertação não apenas contribui para o avanço do conhecimento acadêmico, mas também oferece ferramentas concretas para aprimorar a prática pedagógica e potencializar a aprendizagem dos estudantes.

O planejamento é uma prática coletiva que permeia uma variedade de contextos e disciplinas nas vidas das pessoas. Seja na gestão de negócios, na educação, na organização de eventos, ou até mesmo em atividades do dia-a-dia, o planejamento desempenha um papel fundamental em orientar a ação e alcançar objetivos desejados de forma eficiente. Este evento também é evidente na escola, principalmente para um professor.

Embora seja verdade que nem sempre tudo o que se planeja é cumprido, especialmente no contexto da sala de aula, onde os imprevistos são comuns, é crucial para o professor traçar estratégias para contornar esses obstáculos. A flexibilidade e a capacidade de adaptação são habilidades essenciais nesse processo. Apesar dos desafios que podem surgir, é imprescindível estabelecer um plano sólido, pois a ausência de um planejamento adequado pode resultar em aulas caóticas e pouco produtivas. Assim, ao elaborar um plano de aula, o professor não apenas define objetivos e conteúdos, mas também antecipa possíveis contratempos e desenvolve alternativas para lidar com eles de forma eficaz, garantindo um ambiente de aprendizado mais organizado e propício ao sucesso dos alunos.

Segundo Libâneo (2006) aula é toda situação didática na qual se põem objetivos, conhecimentos, problemas, desafios com fins instrutivos e formativos, que incitam as crianças e jovens a aprender. Por isso, o planejamento de aula é uma ação de organizar o ensino e reflete significativamente no processo da aprendizagem.

Alcançar os resultados traçados depende de diversos fatores, mas perante este trabalho, destaca-se a preparação de aulas como prática essencial ao professor de matemática.

A fase de preparação de um plano de aula inclui a definição de objetivos de aprendizagem para a(s) turma(s), a seleção de tarefas que contribuirão para atingir esses objetivos traçados diante da resolução e, posteriormente, o diagnóstico de cada discente a partir de uma análise.

Conforme Venezuela (2021) ao planejar e propor um plano de aula, os professores determinam os tópicos a serem abordados durante a aula, as metodologias e recursos a serem utilizados, assim como as atividades que serão alicerce à aprendizagem. O autor enfatiza dois momentos diante do plano de aula: o primeiro tem relação ao conteúdo teórico com exemplos e atividades preparados antes da aula e o segundo momento refere-se às atividades de ensino e aprendizagem em sala de aula. Notamos que os dois momentos estão intrinsecamente ligados e quanto maior o comprometimento do professor no primeiro momento, maior é a efetividade da aprendizagem do aluno na segunda etapa do processo.

Em conformidade ao parágrafo anterior, Libâneo (2006) indica que o planejamento escolar é uma tarefa docente que inclui tanto a previsão das atividades didáticas em termos da sua organização e coordenação em face dos objetivos propostos, quanto a sua revisão e adequação no decorrer do processo de ensino, assim o planejamento é um meio para se programar as ações docentes.

À luz do Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2020), é esperado que todas as instituições escolares, por meio de suas Propostas Pedagógicas, encontrem respostas eficazes para atender às necessidades, possibilidades e interesses individuais dos estudantes. Nesse sentido, as decisões relativas ao currículo e à prática pedagógica adotadas pelas diferentes redes de ensino, assim como o planejamento anual das atividades escolares e as rotinas diárias, devem ser orientadas pela necessidade de superar as disparidades educacionais. Para alcançar essa superação de forma efetiva, é imprescindível que o planejamento mantenha o foco na equidade, garantindo que todos os alunos tenham acesso a oportunidades educacionais justas e inclusivas.

Conforme destacado por Médici (2016), um plano de aula, etapa subsequente do processo de planejamento, revela aspectos fundamentais das condições de ensino

dentro do contexto de uma aula, sendo que as informações nele contidas podem variar conforme a finalidade específica do plano em questão. Dessa forma, o plano de aula se configura como uma ferramenta indispensável para registrar e organizar as práticas pedagógicas, possibilitando, assim, um contínuo aprimoramento dessas práticas ao longo do tempo.

Considerando os impactos do planejamento, é inegável que o professor desempenha um papel fundamental ao estruturar o ensino de maneira pedagogicamente eficaz, buscando tornar a aprendizagem não apenas gratificante e facilitada, mas também aplicável fora do ambiente escolar, em situações reais. O docente atua como agente catalisador, utilizando métodos e estratégias que promovam o envolvimento ativo dos alunos, estimulando sua curiosidade e criatividade, e capacitando-os a transferir o conhecimento adquirido para diversas esferas da vida cotidiana. Essa abordagem holística visa não apenas ao desenvolvimento acadêmico, mas também à formação integral do indivíduo, preparando-o para os desafios e demandas do mundo.

Planejar é examinar sobre uma específica realidade, ponderar as condições existentes, e prever as formas alternativas de ação para superar as dificuldades, ou alcançar os objetivos desejados. Portanto, o planejamento é um processo mental que envolve análise, reflexão e previsão. Já o plano é o resultado do processo mental de planejamento. O plano, confeccionado pelo professor é apenas um roteiro, um instrumento de referência e é esquemático. Ele deve ser personificado pelo professor, que o enriquece e lhe confere sua dinâmica (VENEZUELA, 2021).

A pandemia de COVID-19 deixou um impacto significativo no campo da educação, exigindo adaptações contínuas ao longo de um período desafiador que se estendeu por cerca de três anos. Com o aumento do ensino à distância, da aprendizagem online e das mudanças na interação social, além de novas abordagens de avaliação, surgiram diversas lacunas socioeducacionais que agora se tornam evidentes à medida que os alunos retornam aos espaços físicos das escolas. Nesse contexto, a preocupação em relação ao ensino e aprendizagem da matemática no nível básico torna-se ainda mais premente. Entretanto, vale ressaltar que a atenção ao processo de aprendizagem e compreensão da matemática não é uma questão nova. Há muito tempo, o domínio dessa disciplina, especialmente nos níveis fundamental e médio, tem sido reconhecido como um desafio pela comunidade acadêmica (BALL, 1990).

A aprendizagem é um processo intrincado, influenciado por uma série de fatores interconectados. Entre esses elementos, destaca-se o envolvimento dos pais e responsáveis como parte integrante da comunidade escolar, a criação de um ambiente familiar propício ao aprendizado e o estímulo ao desenvolvimento das habilidades cognitivas e sociais, todos essenciais para o desempenho acadêmico em todas as etapas do ensino básico. Além disso, o ambiente físico no qual a aprendizagem ocorre também desempenha um papel crucial. Um ambiente bem estruturado, dotado de recursos adequados e uma atmosfera positiva, pode facilitar a concentração e a absorção de informações, promovendo assim um processo de aprendizagem mais eficaz e gratificante para os estudantes.

Outrossim, ações governamentais em esfera federal, estadual e municipal são imprescindíveis, sobretudo por meio de políticas públicas educacionais que se caracterizam por um conjunto de diretrizes que se destinam a estruturar, gerir e melhorar a educação brasileira em todos os níveis e modalidades de ensino. Inclui estrutura física, pedagógica, corpo docente e discente, programas educativos diversos etc. (RICHIT, 2012).

De fato, há uma gama de agentes que corroboram com a eficácia da educação, porém como este trabalho tem caráter de apoio ao professor de matemática, destaca-se que para uma educação eficaz o papel desempenhado pelo docente é fulcral para a garantia da aprendizagem e o conhecimento matemático dos professores sensibilizam suas práticas de ensino. Os professores de matemática são responsáveis por organizar as experiências de aprendizagem do aluno (PONTE, 2015).

Individualmente ou em conjunto com os colegas, compete ao professor adequar aos seus alunos e ao contexto escolar, às orientações curriculares, diagnosticando problemas, criando soluções, regulando a sua prática (PONTE, 2015).

Segundo Lorenzato e Rabelo (1994), para pensar numa mudança é preciso antes de tudo ter coragem, é preciso ousar, criar e experimentar; é preciso buscar uma mudança de paradigmas para testar e avaliar o potencial dos alunos e vê-los sob uma perspectiva de competência, mas isso significa, antes de tudo, um teste e avaliação de nós mesmos enquanto profissionais.

Para que o professor possa “driblar” os desafios enfrentados em seu ofício, visando sempre a conquista de uma aprendizagem significativa da matemática, há

uma série de conhecimentos necessários para que seja desenvolvido um trabalho de qualidade.

Como a essência deste trabalho é trazer a Geometria Diferencial para o ambiente escolar, dando suporte ao professor, é importante ressaltar que a distância entre o saber científico e o saber ensinado não representa uma hierarquia de saberes, mas uma transformação de saberes que ocorre nas diferentes práticas sociais, em função da diversidade dos gêneros discursivos e dos interlocutores aí envolvidos (POLIDORO, STIGAR, 2010). Esse processo de transformação do conhecimento se dá porque os funcionamentos didático e científico do conhecimento não são os mesmos.

O autor enfatiza que o impacto de cada fator pode variar dependendo do indivíduo e do contexto em que ocorre a aprendizagem. Além disso, esses fatores não atuam isoladamente, mas interatuam entre si.

De acordo com Shulman (1986), os diversos conhecimentos do professor podem ser categorizados em diferentes áreas. Em primeiro lugar, destaca-se o conhecimento do conteúdo, fundamental para a construção de uma base sólida em matemática, exigindo paciência, prática e uma mentalidade de crescimento. Um professor experiente, com domínio consistente do assunto, é capaz de comunicar informações de forma clara e concisa, além de responder eficientemente às dúvidas dos alunos. Além disso, os conhecimentos pedagógicos gerais estão relacionados aos princípios e estratégias mais amplos de gerenciamento e organização da sala de aula, que vão além da área disciplinar específica.

Em continuidade, conhecimento do currículo, incluindo materiais e programas de apoio ao professor, é crucial, assim como o conhecimento pedagógico do conteúdo, que representa uma compreensão especializada voltada para a pedagogia da educação. O conhecimento dos alunos e suas características individuais é fundamental para fornecer suporte e instrução adaptada às suas necessidades. Além disso, o conhecimento do contexto educacional, desde a organização das salas de aula até a administração e financiamento do sistema educativo, assim como as características da comunidade e sua cultura, é essencial. Por fim, o conhecimento das metas, objetivos e valores da educação, juntamente com seus fundamentos históricos e filosóficos, completa o conjunto de conhecimentos necessários para um professor eficaz.

Sabendo da importância do planejamento na prática docente, é relevante que o professor domine a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). A BNCC oferece diretrizes claras e abrangentes para o ensino em todas as etapas da educação básica, definindo os conhecimentos, competências e habilidades essenciais que os alunos devem desenvolver ao longo de sua jornada educacional. Ao compreender e aplicar os princípios e objetivos da BNCC em seu planejamento de aulas e atividades educativas, o professor assegura que seu trabalho esteja alinhado com as expectativas educacionais nacionais e contribua efetivamente para o desenvolvimento integral dos estudantes.

4.1 BNCC

A Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018) - é um documento normativo para as instituições públicas e privadas das redes de ensino, fazendo-se referência obrigatória para elaboração dos currículos escolares e propostas pedagógicas para a Educação Básica nacional.

No sistema educacional do Brasil, antes, a temática acerca de Projeções Cartográficas era um segmento exclusivamente ministrado na disciplina de Geografia, ao passo que em 2018, existiu uma mudança nessa corrente, de modo que no Currículo Acadêmico, foram adicionados paradigmas de interdisciplinaridade, e, com isso, a Matemática também passou a abordar o tema segundo o que é direcionado a Base Nacional Comum, daqui em diante BNCC (BNCC, 2018b).

De acordo com a BNCC, inicialmente, é recomendado introduzir o conceito de Projeções Cartográficas no Ensino Fundamental, na disciplina de Geografia, como indicado pela habilidade "Identificar e interpretar imagens bidimensionais e tridimensionais em diferentes tipos de representação cartográfica" (BRASIL, 2018).

Na direção do parágrafo anterior, já no que se refere ao Ensino Médio, a BNCC destaca, na disciplina de Matemática, a habilidade "Investigar a distorção de ângulos e áreas causada pelas diferentes projeções utilizadas em Cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem o auxílio de tecnologia digital" (BRASIL, 2018; PINHEIRO, 2022).

A BNCC foi desenvolvida com a contribuição de especialistas de diversas áreas do conhecimento envolvidas na educação. Contudo, apesar de ter passado por esse processo de construção em colaboração, o documento não é universalmente aceito

entre os profissionais da educação e tem sido alvo de críticas significativas. Algumas críticas apontam para sua abordagem tecnicista e para a influência marcante de ideias neoliberais em sua concepção (COSTA, 2020).

Existem literatos que realizam a defesa da atual BNCC, ao qual disserta sobre a necessidade e oportunidade assegurar a coerência dos currículos locais e das propostas pedagógicas das escolas, tanto públicas quanto privadas, com o intuito de garantir que todos os estudantes brasileiros tenham acesso a um conjunto essencial de aprendizagens e promover seu desenvolvimento integral através das dez competências gerais estabelecidas para a Educação Básica (COSTA, 2020). Além disso, afirmam que, no contexto do ensino fundamental, a BNCC oferece conteúdos e habilidades que são pertinentes à realidade da educação básica. O ponto importante é que é necessário compreender e estudar a BNCC, uma vez que todo o sistema educacional brasileiro deve se ajustar a essa nova diretriz (PINHEIRO, 2022; COSTA, 2020).

Fica evidente que a BNCC impõe uma revisão nos currículos da educação básica em todas as esferas - federal, estadual e municipal - tanto nas redes privadas quanto públicas, onde as escolas precisam se ajustar ao conteúdo do documento. Por esse motivo, já estão surgindo diversos estudos em nível nacional com o objetivo de entender os elementos teóricos, metodológicos, práticos e políticos que compõem essa diretriz (PINHEIRO, 2022).

A BNCC tem como princípio pedagógico a promoção de competências. Tal atributo é baseado em sistemas utilizados em avaliações internacionais, como o Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA). Segundo a BNCC (2018), competência é a capacidade de aplicar conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para lidar com situações complexas da vida cotidiana, exercer plenamente a cidadania e se inserir no mercado de trabalho. Assim, a BNCC enfatiza que as decisões curriculares devem ser voltadas para o desenvolvimento dessas competências.

Na Educação Básica, o objetivo é que as aprendizagens fundamentais definidas na BNCC (2018) contribuam para garantir aos estudantes o desenvolvimento de competências, que são consideradas os direitos essenciais de aprendizagem e desenvolvimento no contexto educacional.

É importante destacar que essas competências gerais da Educação Básica estão interligadas e se manifestam de forma prática nas três fases da Educação

Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio), influenciando a construção do conhecimento, o aprimoramento de habilidades e a formação de atitudes e valores, conforme estipulado pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB).

No que diz respeito à disciplina de Geografia, a capacidade de compreender e usar a linguagem cartográfica é destacada como uma das habilidades essenciais, que abrange aspectos práticos, cognitivos e socioemocionais, como mencionado anteriormente. Conforme a BNCC (2018) destaca, o estudo da Geografia proporciona uma oportunidade para entender o mundo em que vivemos, uma vez que esse componente curricular explora as atividades humanas desenvolvidas nas diferentes sociedades ao redor do planeta.

Em concordância com o contexto, é elementar incentivar o pensamento espacial entre os alunos da educação, ou seja, promover o uso do raciocínio geográfico ao aplicar os conceitos de análise espacial da disciplina geográfica. Para que seja possível alcançar esse objetivo, uma qualidade relevante é que as práticas pedagógicas passem por constantes formulações e refinamentos, estimulando o raciocínio geográfico, a participação cidadã, bem como outros paradigmas para que os discentes compreendam o espaço ao seu redor (BNCC, 2018).

A interdisciplinaridade entre Matemática e Geografia, especialmente no contexto da cartografia, oferece uma perspectiva única e enriquecedora para o ensino e aprendizado. A cartografia, como campo de estudo que mapeia e representa graficamente informações geográficas, é intrinsecamente ligada à Matemática por meio de conceitos como coordenadas, escalas, projeções e geometria. Ao integrar esses conhecimentos matemáticos com os princípios da Geografia, os alunos têm a oportunidade de compreender melhor o mundo ao seu redor.

Por exemplo, ao estudar mapas, os alunos podem explorar conceitos matemáticos como proporção e escala, entendendo como esses elementos influenciam a representação de distâncias e áreas geográficas. Além disso, a análise de coordenadas e sistemas de referência espacial permite aos estudantes entenderem como localizar e descrever pontos específicos na superfície terrestre.

Essa interdisciplinaridade na cartografia não apenas enriquece a compreensão dos alunos sobre ambos os assuntos, mas também promove habilidades críticas de pensamento espacial, análise quantitativa e resolução de problemas. Ao integrar essas disciplinas, os educadores podem criar experiências de aprendizagem mais

holísticas e significativas, preparando os alunos para entender e enfrentar os desafios complexos do mundo contemporâneo.

O professor atua como mediador no processo de ensino e aprendizagem, enquanto o aluno desempenha um papel ativo como protagonista desse processo. Dessa forma, "a abordagem dessas unidades temáticas deve ser realizada de forma integrada, pois a situação geográfica não se limita apenas a uma porção de território, mas é um conjunto de relações" (BRASIL, 2018, p. 36). Portanto, compreender a concepção de linguagem cartográfica presente no documento é essencial para o ensino de Geografia, pelo fato de que é por meio da linguagem cartográfica que se desenvolve o pensamento espacial, utilizando os conceitos de análise espacial (BNCC, 2018).

Um currículo escolar refere-se ao conjunto de disciplinas e atividades planejadas para serem ensinadas em uma instituição educacional. O currículo é projetado, a partir dos princípios da BNCC, para fornecer uma estrutura educacional abrangente e abordar as necessidades de desenvolvimento dos alunos.

A proposta pedagógica é um documento que orienta e define as diretrizes educacionais de uma instituição de ensino. Ela serve como um guia para os professores, alunos, pais e demais membros da comunidade escolar, delineando os princípios, objetivos, metodologias e estratégias que norteiam o processo de ensino e aprendizagem.

A análise acerca da BNCC (BRASIL, 2018) é relevante ao trabalho para localização de habilidades que sejam coerentes com os objetivos propostos, principalmente no auxílio ao docente para a elaboração de um plano de aula a partir de uma de uma adaptação da Geometria Diferencial, transformando o conhecimento científico para o conhecimento a ser ensinado em sala de aula.

[...] a BNCC indica que as decisões pedagógicas devem estar orientadas para o desenvolvimento de competências. Por meio da indicação clara do que os alunos devem "saber" (considerando a constituição de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores) e, sobretudo, do que devem "saber fazer" (considerando a mobilização desses conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho), a explicitação das competências oferece referências para o fortalecimento de ações que assegurem as aprendizagens essenciais definidas na BNCC (BRASIL, 2018, p. 13).

Dada a relevância deste documento, busca-se examinar as competências e habilidades potenciais associadas à Geometria Diferencial, particularmente no

contexto do Ensino Médio, etapa final da Educação Básica. As habilidades delineadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) desempenham um papel crucial ao orientar a educação no Brasil, oferecendo uma estrutura sólida para o progresso dos alunos e para a formação de uma sociedade mais equitativa e capacitada a enfrentar os desafios do século XXI.

A BNCC (BRASIL, 2018) na área de Matemática e suas Tecnologias visa expandir e aprofundar as aprendizagens fundamentais estabelecidas no Ensino Fundamental, garantindo que todos os alunos tenham acesso às oportunidades de desenvolver habilidades essenciais, independentemente de suas origens. Em consonância com as competências gerais da Educação Básica e aquelas específicas da Matemática no Ensino Fundamental, a área de Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio tem como objetivo garantir que os estudantes adquiram competências específicas. Cada uma dessas competências é acompanhada pela indicação de habilidades a serem alcançadas, garantindo um desenvolvimento abrangente e coerente ao longo da trajetória educacional.

Segundo a BNCC (BRASIL, 2018) há cinco competências específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio, em que se destaca a quinta competência específica: investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

O desenvolvimento dessa competência pressupõe um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos que podem emergir de experiências empíricas. Além disso, conforme a BNCC (BRASIL, 2018) essa competência específica “caracteriza a atividade matemática como atividade humana, sujeita a acertos e erros, como um processo de buscas, questionamentos, conjecturas, contraexemplos, refutações, aplicações e de comunicação”.

A habilidade específica de investigar a deformação de ângulos e áreas causada pelas diferentes projeções cartográficas, como a cilíndrica e a cônica (EM13MAT509), desempenha um papel crucial na compreensão das limitações e das potenciais distorções presentes em mapas, constituindo uma parte essencial do estudo da cartografia e da representação espacial. As projeções cartográficas são técnicas

matemáticas empregadas para representar a superfície curva da Terra em um plano, ou seja, em um mapa. Contudo, é importante reconhecer que tais projeções inevitavelmente introduzem algum tipo de distorção, uma vez que é impossível representar com precisão uma superfície curva em um plano sem incorrer em distorções.

Após ter sido embasado pelo documento da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), desenvolve-se, a seguir, uma teoria que capacita o professor a compreender o processo de adaptação de um conteúdo de nível superior para o contexto escolar do Ensino Médio. Essa teoria fornece ferramentas que permitam uma transição efetiva, garantindo que os conceitos mais profundos sejam apresentados de forma atingível e adequada ao nível de compreensão dos estudantes da Educação Básica.

4.2 TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

O termo "Transposição Didática" foi cunhado pelo sociólogo francês Michel Verret (1927 – 2017) em 1975, mas foi a partir da década de 80 que esse conceito começou a ganhar relevância no contexto educacional, especialmente ao focalizar a epistemologia escolar. Vale ressaltar que a epistemologia matemática constitui um ramo da filosofia dedicado ao estudo dos fundamentos, da natureza e do alcance do conhecimento matemático. Essa interseção entre a transposição didática e a epistemologia matemática tem proporcionado uma compreensão mais profunda sobre como os conhecimentos matemáticos são adaptados e transmitidos no ambiente escolar.

Yves Chevallard, nascido em 1946 na França, reexaminou o conceito de Transposição Didática em seu livro "La Transposition Didatique" (1991), oferecendo uma análise detalhada das transformações que o conhecimento sofre ao ser transferido do campo científico para o contexto escolar. Essa obra destaca a importância de compreender esse processo para os profissionais envolvidos no ensino de disciplinas científicas, evidenciando as nuances e desafios que surgem ao adaptar conteúdos complexos para uma linguagem acessível e adequada aos estudantes.

Chevallard define a Transposição Didática como o trabalho de transformar um objeto de conhecimento produzido pelo "sábio" (cientista) em um objeto de ensino. Seu estudo se destaca pela riqueza teórica expressa na elaboração e discussão de

conceitos, como Transposição Didática e noosfera, gerando debates entre especialistas de diversas disciplinas sobre a construção dos saberes escolares no âmbito epistemológico (CHEVALLARD, 1991).

Para Chevallard (1991), a Transposição Didática é um processo no qual um conteúdo de saber designado para ser ensinado passa por transformações adaptativas, tornando-se adequado para integrar os objetos de ensino, ressaltando o poder de sedução desse processo, reconhecendo suas ambiguidades e ambivalências. Surge a necessidade de investigar as condições de sua instalação e os discursos que influenciam seu funcionamento e prática.

Santos, Wisniewski e Nonenmacher (2017) tratam a Transposição Didática como um conjunto de transformações que um conteúdo de conhecimento sofre ao ser designado como "saber a ensinar", tornando-se apto a ser incorporado nos materiais de ensino. Portanto, ao analisar questões curriculares, é crucial reconhecer como um conhecimento é moldado e adaptado para se tornar um objeto de ensino, considerando as diferentes maneiras pelas quais essa transição ocorre.

Segundo Grando (2017), Chevallard destaca que quando um conhecimento científico é designado como "saber a ensinar", passa por transformações para se adequar ao ambiente de ensino, uma vez que a dinâmica do ensino difere da lógica do conhecimento científico. Há, portanto, dois regimes de conhecimento inter-relacionados, mas distintos: o conhecimento científico propriamente dito e o conhecimento adaptado ao ensino.

Chevallard e Johsua (1991) argumentam que essa adaptação do conhecimento científico é inevitável, uma vez que, sem ela, o processo de ensino-aprendizagem de um determinado conceito se torna inviável. A Transposição Didática pode ser dividida em duas etapas: uma externa ao contexto escolar, relacionada à seleção dos conteúdos de "saber a ensinar" antes de chegar à escola; e outra interna, referente à incorporação desse conteúdo pela escola até o discente.

Chevallard critica o modelo doutrinário das concepções políticas, alertando para os desafios de enfrentar a resistência de "maus sujeitos" que incluem docentes conformistas, administração burocrática, sucessivos governos e ministros. A Didática opõe-se a esse sistema, acreditando na existência de um objeto pré-existente e independente, dotado de uma necessidade e determinismo próprios, caracterizando-o como um "objeto tecno-cultural" cuja formação se inscreve na história e requer

explicação de seus mecanismos e relações com o mundo exterior (CHEVALLARD, 1991).

Ao ter observância para com o objeto tecno-cultural e refletir sobre sua realidade, a didática propõe uma relação triangular entre professores, alunos e o conhecimento, assim ao fazer essa correlação, torna-se possível discutir sobre o próprio conhecimento, frequentemente negligenciado, ao qual levanta questões controversas sobre seu verdadeiro interesse (SANTOS, 2017).

Para Chevallard (1991), a preparação de atividades ao qual o docente está diretamente relacionado a transposição didática, de forma a construir e transpor o conhecimento, uma vez que é necessário redigir as atividades, os textos, propor experimentações, ou seja, ter uma matriz com variantes que moldam a forma do trabalho. O professor assume o controle por meio das variáveis que possui, especialmente em torno do seu conhecimento. Nessa direção, a transposição didática, em sentido restrito, refere-se à transformação do conhecimento acadêmico em conhecimento ensinado. Essa abordagem permite a integração da análise epistemológica com a análise didática (SANTOS, 2017).

O conhecimento acadêmico é relevante para a Transposição Didática, visto que certas demandas na preparação didática são influenciadas pela constituição desse conhecimento, ou pelo menos pela formulação discursiva desse saber. Há evidência na exigência de despersonalização, em que esse processo ocorre no movimento do ensino, começando na comunidade acadêmica. Esse processo se relaciona ao desligamento do saber que está sendo produzido do investigador e do contexto em que está inserido, o conhecimento ensinado é profundamente transformado pela descontextualização que ocorre (SANTOS, 2017).

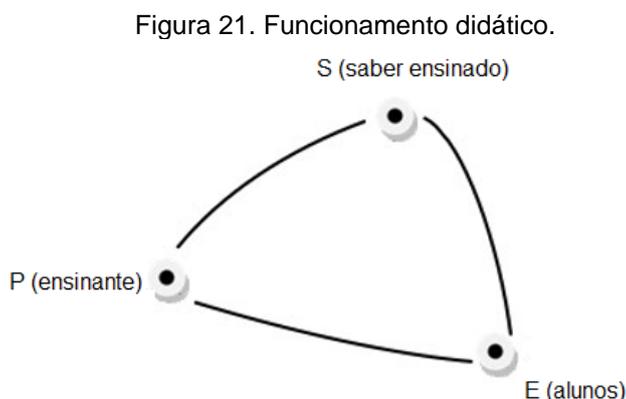
De acordo com Chevallard (1991), o processo de exposição do conhecimento tem como primeira etapa a difusão, seguida pela produção social do conhecimento. Porém, em um estágio posterior, no funcionamento interno do ensino, ele assume uma função completamente diferente: a de reprodução e representação do conhecimento, sem estar sujeito às mesmas exigências de produtividade, na qual o jogo do conhecimento assume, assim, uma perspectiva totalmente diferente.

Chevallard (1991) esclarece que há mais de uma maneira pela qual uma concepção pode perder seu caráter incisivo, indicando que os tratamentos que demonstram sua força explicativa e validade epistemológica são essenciais.

Simplesmente afirmar a existência da Transposição Didática não é suficiente; é necessário realizar reflexões mais aprofundadas.

A Transposição Didática é considerada importante em face do funcionamento didático do conhecimento difere do funcionamento acadêmico. Existem dois regimes de conhecimento inter-relacionados, mas não sobrepostos. A Transposição Didática ocorre quando elementos do conhecimento são transferidos para o conhecimento ensinado. Contudo, o conhecimento ensinado pode existir de maneira autônoma, protegido pela "clausura da consciência didática" (CHEVALLARD, 1991).

No sentido do parágrafo anterior, o funcionamento didático consegue atender às suas próprias necessidades como conhecimento que será ensinado. Apesar desse funcionamento aparentemente harmonioso, ocorrem crises. Chevallard utiliza um esquema teórico com três ícones representando o professor (P), os estudantes (E) e o conhecimento ensinado (S) para explorar as inter-relações entre eles e tentar explicar as crises que surgem.

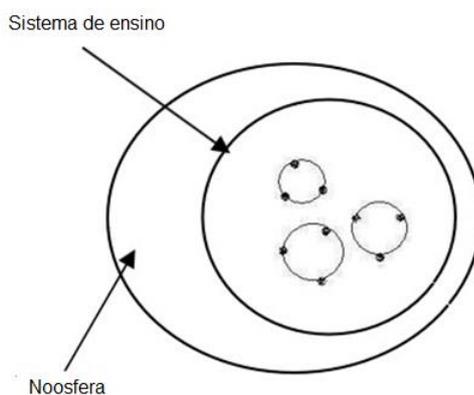


Fonte: Chevallard (1991).

Para compreender os três ícones citados, é necessário organizar o ambiente em que se atua, o seu "entorno". Ao redor de um determinado conhecimento, surge um acordo didático que transforma esse conhecimento em um objeto de um projeto educacional, envolvendo tanto o ensino quanto a aprendizagem, e reunindo professores e alunos em um mesmo contexto (CHEVALLARD, 1991). O ambiente imediato de um sistema educacional é inicialmente formado pelo sistema de ensino, que engloba uma série de sistemas didáticos e é acompanhado por uma variedade de dispositivos estruturais que possibilitam o funcionamento educacional, intervindo em vários níveis (MENEZES, 2006).

Nessa discussão sobre Transposição Didática, é oportuno ainda tratar sobre o conceito de *noosfera*. De uma forma geral, a noosfera pode ser compreendida como o filtro entre o conhecimento acadêmico e o conhecimento ministrado durante as aulas, de forma a ser um paradigma elementar no “saber a ser ensinado”, considerando estratégias de ensino e as dificuldades dos alunos, ao qual são exemplificadas genericamente abaixo.

Figura 22. Sistema de Ensino segundo Chevallard.



Fonte: Chevallard (1991).

Dentro da noosfera, as competências são cuidadosamente delineadas, e a interação da noosfera ocorre entre os representantes do sistema educacional e os representantes da sociedade, ao qual conta com professores e outros envolvidos no sistema de ensino, que se encontram direta ou indiretamente com representantes da sociedade, como pais de alunos, especialistas na disciplina que advogam por seu ensino e representantes de órgãos políticos.

A função da noosfera, como uma interface, é garantir a compatibilidade entre o sistema educacional e seu ambiente social, especialmente no "plano do saber", onde essa compatibilidade deve ser alcançada em diversos níveis (CHEVALLARD, 1991).

Para discutir esse processo, Chevallard propõe um modelo de interpretação: o conhecimento ensinado, tratado internamente no sistema, deve ser percebido pelos acadêmicos como suficientemente próximo do conhecimento acadêmico para não deslegitimar os pesquisadores e minar a legitimidade do processo social, ao passo que o conhecimento ensinado deve parecer suficientemente distante do senso comum para não ser "banalizado" perante a sociedade, sendo acessível às famílias dos estudantes sem a necessidade de mediação escolar (CHEVALLARD, 1991; MENEZES, 2003).

Para os professores e membros da noosfera, a reforma educacional é amplamente reconhecida como uma resposta oportuna e indispensável para lidar com a "crise no ensino" e abordar os desafios enfrentados no processo de aprendizagem. Nesse contexto, surge a necessidade premente de estimular a motivação dos estudantes em seu percurso educativo. Conforme destacado por Chevallard, essa busca pela motivação intrínseca dos alunos revela uma intrincada interconexão entre as demandas educacionais, a estrutura do sistema de ensino e as dinâmicas sociais subjacentes.

Com sensatez, a noosfera é colocada como essencial, uma vez que a noosfera mantém sua autonomia do funcionamento educacional, onde se em face de alguma necessidade, os docentes podem fazer alterações no ensino, agindo em observância para com as oportunidades (recursos, espaços e demandas), reestabelecendo a compatibilidade entre o sistema educacional e seu entorno (MENEZES, 2006; SANTO, LUZ, 2013; CHEVALLARD, 1991).

Segundo Chevallard (1991), tradicionalmente, as ações são divididas entre métodos e conteúdos. Porém, os conteúdos (o saber), são mais facilmente controláveis, permitindo resultados ótimos com custos menores, e o regime político tem controle através de programas e manuais. Em contrapartida, os métodos são menos eficazes, com mudanças acontecendo de maneira pontual e local, sem grandes perturbações no sistema educacional, na qual o saber recebe um privilégio funcional expresso pela divisão da noosfera em diferentes saberes ensinados.

Com relação ao parágrafo anterior, a noosfera atua como o centro operacional do processo de transposição, selecionando e realizando o trabalho de transposição didática nos conteúdos de saber escolhidos, buscando restabelecer a compatibilidade mencionada pelo autor. Contudo, há um desequilíbrio observado entre o sistema de ensino e a sociedade, bem como uma dualidade entre alunos e o saber ensinado, ao passo que Chevallard levanta questionamentos sobre como uma modificação no conhecimento ensinado pode realmente superar as dificuldades de aprendizagem (BROCKINGTON, PIETROCOLA, 2005; MENEZES, 2006).

Buscando mitigar os desafios, a prática destacada é fundamental para os professores, pois implica na habilidade de traduzir conhecimentos complexos em conteúdos acessíveis aos alunos, facilitando assim a compreensão e o processo de aprendizagem. Ao promover essa conexão mais potente entre o ensino e a compreensão do aluno, os professores desempenham um papel crucial no

desenvolvimento acadêmico e intelectual de seus alunos. Além disso, a adaptação didática permite personalizar os conteúdos de acordo com as necessidades específicas da turma, fomentando uma educação mais inclusiva e eficaz, que reconhece e valoriza a diversidade de habilidades e estilos de aprendizagem dos estudantes.

Ao adaptar a linguagem, utilizar exemplos práticos e conectar os conceitos ao cotidiano, os educandos conseguem assimilar mais facilmente o conhecimento, promovendo uma aprendizagem mais duradoura. Essa abordagem facilita a construção de pontes entre o que é ensinado e a experiência do aluno, tornando o processo educacional mais significativo.

A Transposição Didática no contexto da Geometria Diferencial relacionada à Cartografia, no Ensino Médio, é necessária para tornar conteúdos cognoscíveis aos alunos, permitindo que o professor traduza os princípios abstratos da Geometria Diferencial, como curvas e superfícies, em aplicações práticas da cartografia. Este reposicionamento permite ao professor conectar conceitos geométricos às representações gráficas dos mapas e explicar como as curvas e superfícies afetam a representação do terreno e das características geográficas. Desta forma, os alunos compreenderão melhor como os princípios da geometria diferencial são importantes na criação de mapas geográficos.

A abordagem prática, citada no parágrafo anterior, não só facilita a compreensão de conceitos, mas também enfatiza a importância da Geometria Diferencial num contexto do mundo real, promovendo uma aprendizagem mais significativa e estimulando o interesse dos alunos na aplicação da matemática à cartografia.

A Transposição Didática é fundamental para compreender a eficácia do trabalho de Venezuela (2021) em seu estágio inicial. Este primeiro momento do trabalho consiste na importante etapa de transpor o conhecimento teórico para um formato coerente aos alunos, por meio da seleção, organização e adaptação do conteúdo.

Ao antecipar possíveis dificuldades de aprendizado e desenvolver atividades que direcionam a atenção dos alunos para os aspectos essenciais do conteúdo teórico, Venezuela (2021) exemplifica a aplicação prática da teoria da Transposição Didática. Além disso, ao fornecer exemplos relevantes e desafios que conectam a teoria à prática, ele estimula a reflexão crítica e a construção ativa do conhecimento, promovendo assim um ambiente de aprendizado significativo e engajador. Essa

abordagem evidencia a importância da mediação do professor no processo educacional, especialmente ao lidar com conteúdos substanciais.

A prática metodológica ressalta a relevância do saber do professor e de sua capacidade de entender que existe um processo de transformar um assunto profundo acessível aos educandos.

Adiante, explora-se a importância do plano de aula dentro do planejamento educacional, destacando sua influência na organização de estratégias de ensino. O plano de aula é valioso para criar um ambiente de aprendizado aprazível, estimulando a participação dos alunos e facilitando o desenvolvimento de habilidades e conhecimentos essenciais.

4.3 O PLANO DE AULA

Em observância para com um importante segmento educacional, certamente é o planejamento de aula, ao qual está atrelado ao planejamento escolar, o que é fixado pelas diretrizes educacionais brasileiras, bem como a própria necessidade e oportunidade de cada escola. Nóvoa (1992) disserta sobre a necessidade de não ter qualidades puramente estáticas, na qual professores devem estar em um processo constante de evolução, ressaltando a dinâmica social que influencia o ambiente, bem como a própria percepção do indivíduo sobre si mesmo e a realidade.

Para Nóvoa (1992), construir identidades é um processo de muita complexidade, ao qual está ligado com a apropriação da historicidade do indivíduo, e, se tratando da interação entre docentes, discentes e instituição escolar, tem-se (no mínimo), três corpos que estão influenciando uns aos outros, onde aqui se considera um pensamento diante da ciência de sistemas dinâmicos.

Pensar em uma perspectiva de sistemas dinâmicos leva a analisar muitas variáveis, aos quais o mínimo de variação poderá (e comumente leva), a grandes mudanças no estado futuro de um sistema. Trazendo esse pensamento para o âmbito educacional, para este trabalho, apesar do planejamento educativo direcionar as atividades em sala de aula, somente no momento da interação que é possível perceber as reais necessidades e oportunidades de cada atividade, cada aluno é um universo, cada mente, sala de aula, bem como o próprio docente também é (GANDIN, 1994).

Em concordância com o parágrafo anterior, o plano de aula é o que de fato dever ser, um planejamento. Portanto, não uma imposição ao portar dos alunos, das atividades ou do professor. Libâneo (1992) já apontava para essa questão, mas olhando para a didática do professor, um planejamento prévio de certo é importante, contudo, em considerável parcela dos casos há necessidades ocultas nos alunos, e, portanto, um olhar individualizado, dinâmico e contínuo são alguns atributos relevantes.

Libâneo (1992) ainda elabora sobre a necessidade de desenvolver os elementos educacionais de forma compartilhada, buscando diferentes perspectivas para melhor elucidar os problemas, considerando a economia, política, administração, e também a educação. Educação busca adquirir e transmitir conhecimentos, crenças, habilidades, hábitos e valores, conhecidos como "conteúdo", que conduzem à formação cultural, na qual é um processo contínuo de atualização, no qual o planejamento desempenha um papel crucial na organização.

Torna-se oportuno destacar o papel do planejamento educacional, elemento a ser considerado no plano de aula, uma vez que o planejamento educacional busca definir os princípios fundamentais da educação do país, destacando os valores individuais e institucionais na comunidade. Além disso, busca aplicar uma análise lógica no desenvolvimento da educação, visando torná-la mais humanizada, atendendo as necessidades e metas da sociedade (GANDIN, 1994).

É notável que a sistematização da educação e do planejamento esteve intimamente ligada ao surgimento do mercado de produção, especialmente durante a Revolução Industrial. Frederick Taylor foi pioneiro na separação das tarefas de planejamento e execução, estabelecendo que o poder de decisão e controle pertencia aos especialistas, não aos executores, ao qual marcou o surgimento do planejamento tecnocrático (VASCONCELLOS, 1995; GANDIN, 1994).

No século XX, o planejamento experimentou um grande avanço em todos os setores da sociedade, indo além da organização interna das empresas. Segundo Vasconcellos (1995), basicamente existem três grandes abordagens de planejamento no contexto atual: gestão da qualidade total, planejamento estratégico e planejamento participativo.

A gestão da qualidade total implica em uma nova visão da empresa em relação à sociedade, enfatizando a necessidade de equilíbrio e colaboração mútua. É um sistema no qual todas as pessoas em uma organização, independentemente de nível

ou departamento, se envolvem ativamente no controle de qualidade, por meio de métodos e técnicas específicas (VASCONCELLOS, 1995).

Em conformidade com Libâneo (1992), um plano é um registro de decisões sobre o que fazer, como fazer, quando fazer, com que fazer e com quem fazer. Para criar um plano, é necessário discutir os propósitos e objetivos, culminando na sua definição, pois somente assim é possível responder às perguntas mencionadas anteriormente.

O plano de aula está intimamente ligado ao planejamento, pois envolve a definição do que será ensinado em um determinado período, como isso será feito e como será avaliado. Esse planejamento, por sua vez, é baseado na proposta pedagógica da escola, que determina sua atuação na comunidade, incluindo sua abordagem educacional e objetivos gerais (VASCONCELLOS, 1995).

O plano de aula é o último passo em uma sequência de trabalhos, onde essa conexão permite uma prática educativa consistente e bem fundamentada, pois o plano de aula deve estabelecer claramente o tema, os objetivos e os métodos de avaliação (GANDIN, 1994).

Libâneo (1992) sugere que, antes de elaborar o plano de aula, é importante dividir o planejamento em etapas para um determinado período, como um bimestre ou quadrimestre, onde proporciona uma visão geral que facilita a preparação do plano de acordo com o tempo disponível. Não existem modelos fixos de planos de aula, pois eles variam de acordo com as prioridades do planejamento, os objetivos do professor e as necessidades dos alunos.

De acordo com Libâneo (1992), o planejamento oferece uma vantagem ao permitir que o professor antecipe possíveis desdobramentos durante a aula. Dessa forma, o professor se prepara para diferentes direções que a atividade pode tomar, embora não seja necessário prever cada minuto da aula de antemão, portanto, os planos de aula vão sendo ajustados ao longo do processo, conforme o professor percebe o que aconteceu nas etapas anteriores.

4.4 REALIZAÇÃO DO PLANO DE AULA VOLTADO À CARTOGRAFIA

O plano de aula elaborado, baseando-se nas necessidades de aprendizagem no segmento da Cartografia para o terceiro ano do Ensino Médio, é composto por três aulas, cada uma com seu tempo adequado de duração em horas-aula. Cada aula é

dividida em momentos específicos, conforme resumido na Tabela 1, com o conteúdo sendo desenvolvido de forma gradativa de uma aula para a outra. É importante ressaltar que o tempo utilizado para cada aula deve ser adaptado ao cenário de cada turma, deixando claro que o plano é flexível para atender às necessidades de cada realidade, sempre visando o bem-estar dos alunos.

Os momentos de cada aula são estruturados de maneira sequencial, oferecendo ao professor um guia que facilita o processo de ensino. Esse passo a passo permeia o desenvolvimento do conhecimento dos alunos, pois possibilita que cada etapa da aprendizagem seja abordada de forma ordenada e integrada. A organização cuidadosa de cada momento da aula permite que o conteúdo seja apresentado de maneira progressiva. Assim, cada etapa do ensino se conecta e contribui para a construção de um saber mais contextualizado.

Tabela 1. Organização das aulas presentes no plano.

Aula	Título	Horas/aula	Momentos
Aula 1	Explorando a Cartografia com tecnologia.	2h/a	Três
Aula 2	Explorando os elementos de um mapa.	2h/a	Dois
Aula 3	Explorando as projeções cartográfica.	3h/a	Quatro

Fonte: autora.

O plano de aula visa colocar o aluno em primeiro plano, reconhecendo-o como o participante elementar no desenvolvimento do conhecimento. Neste contexto, o professor é um facilitador do processo de aprendizagem e incentiva a autonomia dos alunos. Ao valorizar a participação ativa dos estudantes, o plano de aula promove um ambiente educativo onde o diálogo, a colaboração e a construção coletiva do saber são centrais.

4.4.1 Introdução à cartografia

Aula 1: Explorando a Cartografia com tecnologia

A escolha do uso da tecnologia surge da necessidade de integrar ferramentas modernas no processo educativo, refletindo a crescente importância dessa exploração na educação. Incorporar tecnologias digitais em sala de aula não apenas enriquece o

ambiente de aprendizagem, mas também prepara os alunos para as demandas do mundo contemporâneo, onde a fluência tecnológica é indispensável.

Conforme Pimenta *et al* (2022), inúmeros são os recursos tecnológicos que podem facilitar o processo de aprendizagem da Cartografia na educação básica, tornando uma aula mais fácil e agradável.

Esta aula está estruturada em três momentos. O primeiro momento consiste na contextualização dos alunos sobre o conceito de Cartografia, acompanhado por um breve contexto histórico que ilustra a evolução dessa ciência. O segundo momento foca no uso de programas online para mapeamento, apresentando ferramentas digitais que facilitam tanto a criação quanto a interpretação de mapas. O terceiro momento envolve uma atividade prática, na qual os alunos exploram mapas utilizando programas como o Google Maps, aplicando na prática os conhecimentos teóricos adquiridos. Ao final, a aula é concluída com uma revisão dos conteúdos abordados e a proposição de atividades extraclasse para a consolidação do aprendizado.

Os objetivos de aprendizagem dessa aula consistem em:

- Compreender o conceito de cartografia e sua importância.
- Explorar o uso de tecnologia na criação e interpretação de mapas.
- Aplicar o conhecimento adquirido para criar um mapa interativo.

Esta aula está planejada para um total de 2 horas/aulas de duração, fazendo uso dos seguintes recursos.

Quadro 1 – Recursos didáticos

Descrição
Computadores ou dispositivos móveis com acesso à internet.
Acesso a um programa de mapeamento online, como o Google Maps.
Lousa.
Projektor ou tela para demonstrações em grupo (opcional).

Fonte: Autora.

Momento 1: procedimentos e estratégias de ensino

- Iniciar a aula perguntando aos alunos o que eles já sabem sobre Cartografia e qual a sua importância. É fundamental explorar o conhecimento prévio do educando, pois facilita a conexão com novos conteúdos, promove um

aprendizado mais significativo e valoriza as experiências individuais, tornando o ensino mais personalizado.

- Explicar que nesta aula os discentes irão explorar como a tecnologia é usada na Cartografia.
- Explicar brevemente um pouco da evolução da Cartografia ao longo da história, destacando os recursos e demais instrumentos.

Pode-se afirmar que a Cartografia é uma das formas de comunicação gráfica mais antigas utilizadas desde os primórdios da humanidade. O mapa mais antigo conhecido tem origem babilônica e foi encontrado em um tablete de argila cozido. Esse mapa representava duas cadeias de montanhas e um rio no centro, provavelmente o Eufrates. Estima-se que ele tenha sido criado entre 2.400 e 2.200 anos antes da era cristã. Nesse interim, outros exemplos semelhantes foram encontrados algumas décadas atrás em um penhasco no Norte da Itália, no Vale do Pó, onde há numerosas imagens rupestres que se assemelham a mapas e apresentam detalhes topográficos ricos (SILVA, BRITO, 2015).

Esses mapas representavam de forma clara a organização social de um povo com conhecimentos agrícolas avançados, onde sugere que os egípcios foram os pioneiros na elaboração de mapas cartográficos. Heródoto atribui aos egípcios a invenção de um método para medir campos, permitindo-lhes medir suas terras e as mudanças causadas pelas inundações anuais do rio Nilo (SILVA, BRITO, 2015).

Os gregos, com seu senso crítico- científico, criaram mapas cartográficos de tal precisão e excelência que levaram mais de 14 séculos para serem superados. Vale ressaltar ainda que durante a Idade Média houve um retrocesso em todo o processo iniciado pelos gregos, com todas as conquistas científicas sendo deixadas de lado em favor de conceitos puramente religiosos (SILVA, BRITO, 2015). Nesse período, os mapas frequentemente representavam as novas terras conquistadas, incluindo figuras monstruosas de povos recém-descobertos, envoltos em mitos e lendas. O misticismo dominava a visão de mundo e sua representação (DUQUE, 2002).

Considerando a importância da Cartografia e seu impacto nas disciplinas de Geografia e Matemática, as práticas a seguir visam integrar atividades em sala de aula, especialmente através do uso de tecnologias contemporâneas, incluindo o Google Maps.

Momento 2: demonstração tecnológica (Google Maps)

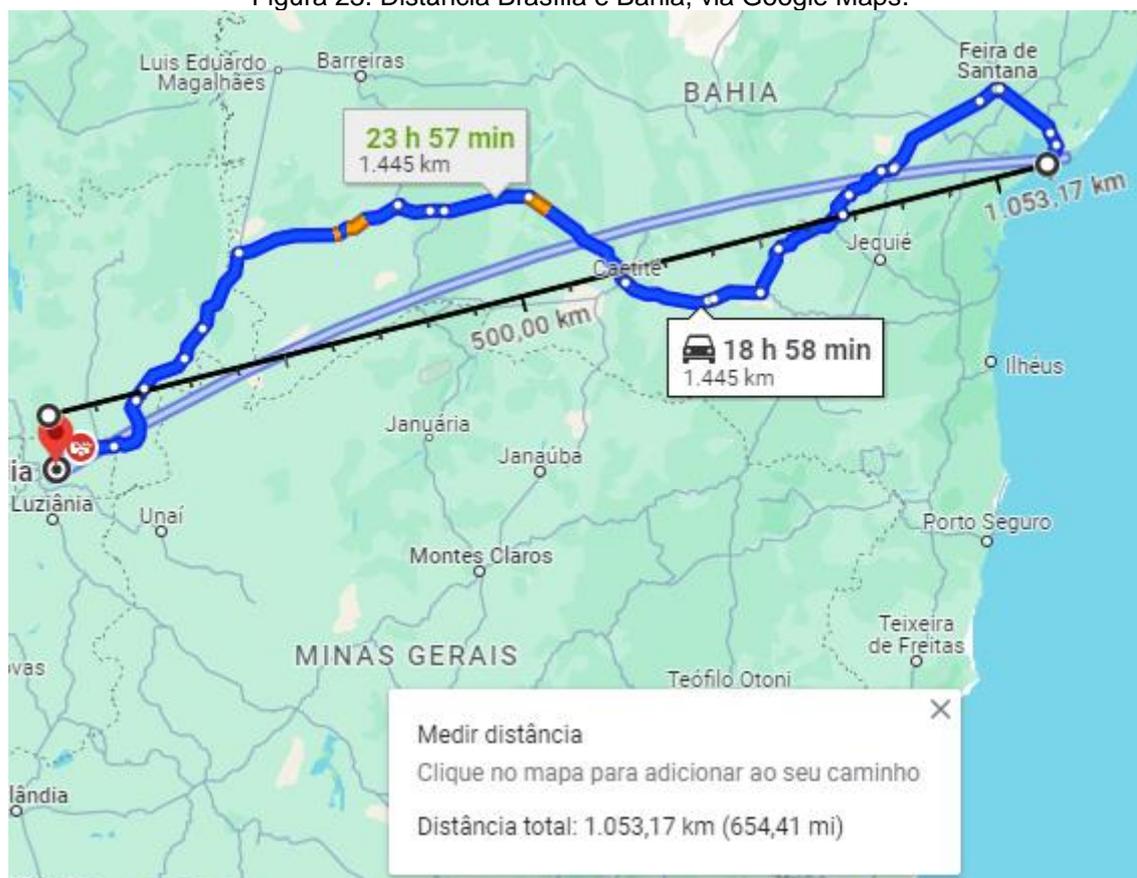
- Demonstrar aos alunos como utilizar um programa de mapeamento online, como o Google Maps, de forma a abrir novas perspectivas em sua compreensão cartográfica.
- Fazer uma demonstração prática sobre como localizar lugares e calcular distâncias, exemplificando com distâncias entre diferentes pontos do Brasil, como Brasília (DF) e Salvador (BA), totalizando 1.053,17 km (Figura 23), proporcionando uma compreensão tangível da cartografia em ação.

Ao selecionar as localidades no Google Maps e clicar com o botão direito do mouse, uma opção é apresentada para medir a distância entre elas.

- Abordar a integração da tecnologia GPS à Cartografia, explicando como ela é empregada para rastrear e mapear objetos em tempo real, promovendo uma compreensão abrangente do papel da tecnologia na prática cartográfica contemporânea.

Segundo Correia e Martins (2008), vários programas têm sido desenvolvidos com o objetivo de viabilizar a utilização dos produtos resultantes das novas tecnologias de captação e processamento da informação espacial, como é o caso das imagens de satélites, dos dados obtidos por levantamentos com GPS. Graças às novas possibilidades oferecidas por estes produtos digitais, pode-se constatar significativas renovações nos métodos cartográficos atuais.

Figura 23. Distância Brasília e Bahia, via Google Maps.



Fonte: autora, via Google Maps.

Momento 3: atividade prática com mapas online

Esta prática visa promover uma atividade interativa que explora distâncias em diferentes escalas ao redor do mundo, desde longas distâncias até pequenos deslocamentos. Por isso, é fundamental envolver os alunos na exploração do mapa, incentivando a visita virtual a locais históricos tanto em outras cidades quanto em suas próprias localidades. Além disso, é importante encorajar os alunos a contribuir com ideias, permitindo que meçam e comparem distâncias entre diferentes pontos, promovendo assim uma participação ativa e enriquecedora no debate.

Encerramento

Após as discussões em sala de aula, traz-se uma discussão acerca das descobertas e dúvidas dos alunos, de maneira a deixar um espaço para que os alunos façam suas devidas contribuições, bem como dúvidas acerca dos procedimentos

intrínsecos da tecnologia utilizada, ou seja, como encontrar o recurso e realizar suas próprias medições e observações.

Atividade extraclasse

Solicitar aos alunos que criem um pequeno mapa, podendo fazê-lo utilizando tecnologia de mapeamento ou de maneira manual, onde descreverão trajetos e distâncias que despertem seu interesse, como o caminho e a distância entre a escola e suas residências.

4.4.2 Explorando os elementos de um mapa

Aula 2: Explorando os elementos de um mapa

Slocum *et al* (2008) enfatizam que os elementos de um mapa desempenham um papel fundamental na comunicação de informações geoespaciais de maneira clara e precisa. Eles fornecem uma representação visual do mundo real, permitindo que as pessoas compreendam a distribuição espacial de diferentes fenômenos, como características físicas, políticas, sociais e ambientais de um lugar (MONMONIER, 2018).

Esta aula tem como propósito explorar os elementos fundamentais de um mapa e está dividida em dois momentos. O primeiro momento da aula busca investigar o conhecimento prévio dos alunos sobre a composição de um mapa, adotando uma abordagem que os coloca como protagonistas de seu aprendizado. Essa abordagem não apenas oferece uma direção clara ao professor, mas também permite uma exploração gradual dos elementos do mapa, promovendo a construção e complementação progressiva do conhecimento dos alunos. No segundo momento, é promovido o trabalho em grupo para a identificação dos elementos de um mapa fornecido, preferencialmente relacionado a uma localidade que os alunos conheçam, como a cidade ou estado onde residem. Por fim, a aula encerra-se com um debate para consolidar os aprendizados.

Os objetivos de aprendizagem consistem em:

- Compreender os cinco elementos essenciais de um mapa: título, legenda, escala, orientação e projeção cartográfica.
- Reconhecer a importância de cada elemento na interpretação de um mapa.
- Praticar a análise de mapas reais para identificar esses elementos e sua função.

A aula está planejada para um total de 2 horas/aulas de duração, fazendo uso dos seguintes recursos.

Quadro 2 – Recursos didáticos

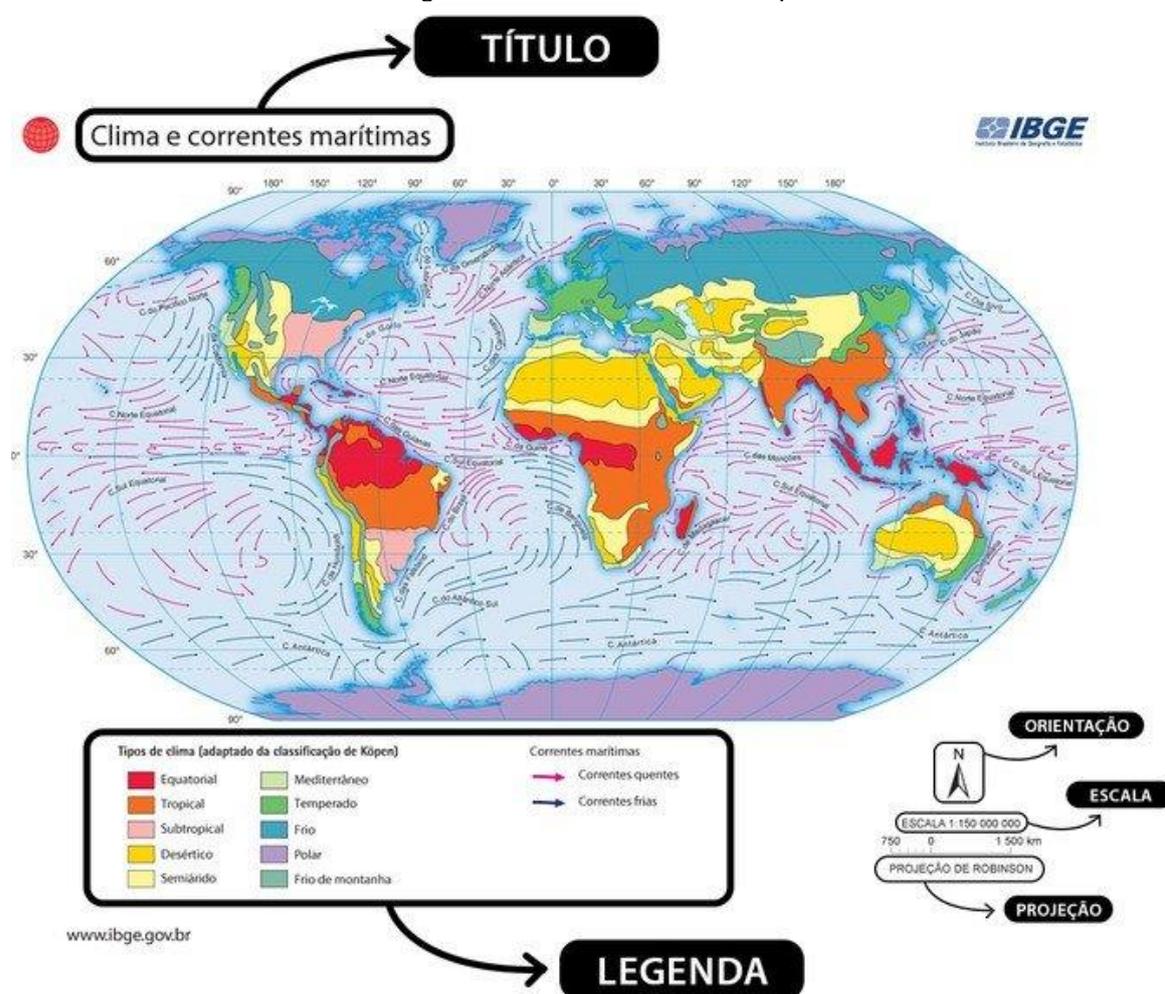
Descrição
Lousa.
Cópias impressas de mapas.
Projetor ou tela para demonstrações em grupo (opcional).

Fonte: Autor (2023).

Momento 1: introdução

- Iniciar a aula realizando questionamentos aos alunos para avaliar o conhecimento prévio deles sobre mapas e seus elementos.
- Realizar uma apresentação sobre a definição dos cinco elementos fundamentais de um mapa: título, legenda, escala, orientação e projeção Cartográfica, utilizando o texto de referência, imagens (como a Figura 24) ou fornecendo explicações verbais detalhadas.

Figura 24. Elementos de um mapa.



Fonte: IBGE.

A seguir, detalham-se os elementos do mapa que podem ser utilizados na aula.

- **Título:** o título de um mapa é a primeira informação que encontramos quando o olhamos, faz parte da comunicação da finalidade e do conteúdo do mapa. O título fornece uma breve descrição do que o mapa representa e pode incluir informações adicionais, como datas, períodos históricos e unidades de medida.
- **Legenda:** a legenda de um mapa é como um dicionário visual que decodifica os símbolos e cores usados no mapa. Os mapas frequentemente usam símbolos e cores para representar características geográficas, como rios, montanhas, estradas e cidades. A legenda explica o que cada símbolo ou cor representa, tornando possível entender a informação apresentada no mapa.
- **Escala:** a escala de um mapa é a relação entre as dimensões do mapa e as dimensões reais do espaço que o mapa representa. Em outras palavras, a escala nos diz quanto o mundo real foi reduzido para caber no mapa. A escala

pode ser expressa de duas maneiras: gráfica e numérica. A escala gráfica é uma linha graduada desenhada no mapa que mostra as distâncias reais em relação às distâncias no mapa. A escala numérica é uma razão que indica quantas vezes a medida no mapa é menor do que a medida no mundo real.

- **Orientação:** a orientação de um mapa indica a direção dos pontos cardeais, como Norte, Sul, Leste e Oeste, ao qual auxilia a situar o leitor e a entender a posição das características no mapa em relação à geografia real. Normalmente, a orientação é indicada por meio de uma seta que aponta para o Norte geográfico, ajudando a evitar confusões e permite que as pessoas usem o mapa para navegação ou para identificar a direção de certos lugares em relação a outros.
- **Projeção Cartográfica:** a projeção cartográfica é o método utilizado para representar uma superfície curva (a Terra) em um plano (o mapa). Como a Terra é tridimensional e os mapas são bidimensionais, a projeção cartográfica envolve distorções inevitáveis, como alongamento, encurtamento ou deformação de áreas e formas. Existem várias projeções cartográficas, cada uma com suas próprias vantagens e limitações. A escolha da projeção depende da finalidade do mapa e da área que está sendo representada (NOGUEIRA, 2008).

Momento 2: dinâmica em grupo

Quanto à atividade em grupo, é recomendável dividir as turmas em grupos com o mesmo número de alunos e distribuir mapas reais para cada equipe. Dessa forma, cada grupo será responsável por identificar os elementos presentes nos mapas e fornecer suas próprias definições sobre o título do mapa, escala, orientação e projeção utilizada, explicando o contexto do mapa e suas possíveis aplicações.

Encerramento

Com os resultados obtidos no segundo momento, o professor deve conduzir um debate sobre os conceitos apresentados pelos alunos, esclarecendo dúvidas e promovendo uma discussão em sala de aula. Além disso, é importante proporcionar

espaço para possíveis novas contribuições e ideias dos alunos, enriquecendo ainda mais a discussão.

4.4.3 Projeções cartográficas

Aula 3: Explorando as projeções cartográficas

Uma projeção cartográfica é caracterizada como um relacionamento matemático que descreve a correspondência entre posições referentes a uma superfície terrestre modelada e posições referentes a uma superfície plana ou a uma superfície desenvolvível no plano (VIEIRA, 2004). A importância das projeções cartográficas consiste na necessidade de representar a superfície curva da Terra em um plano, o que permite a criação de mapas úteis para variados fins.

Nesta atividade, o propósito é esclarecer sobre os tipos de projeções cartográficas, com o intuito de abordar as oportunidades e as "dificuldades" inerentes a cada tipo de projeção. Assim, os objetivos desta aprendizagem são:

- Compreender o conceito de projeções cartográficas e as distorções que elas implicam.
- Identificar as principais projeções cartográficas e suas aplicações.
- Utilizar ferramentas tecnológicas para visualizar e comparar diferentes projeções.

A última aula é estruturada em quatro momentos. No primeiro momento, introduz-se os conceitos iniciais sobre projeções cartográficas e os desafios encontrados ao tentar representar a forma da Terra em um mapa plano. No segundo momento, são abordadas as distorções inerentes às projeções cartográficas. O terceiro momento foca na exposição das diferentes projeções e suas características distintivas. Por fim, o quarto momento culmina na produção de um mapa mental que sintetiza todas as considerações finais discutidas ao longo da aula.

Esta aula está planejada para um total de 3 horas/aulas de duração, fazendo uso dos seguintes recursos.

Quadro 3 – Recursos didáticos (sugestão).

Descrição
Lousa e marcadores.
Computador ou tablet
Projektor ou tela para demonstrações em grupo.
Material de apoio impresso sobre projeções cartográficas.

Fonte: Autor (2023).

Momento 1: introdução

- Iniciar a aula fazendo perguntas aos alunos sobre o que eles entendem por projeções cartográficas e quais as suas importâncias.
- Abrir espaço para a discussão em sala de aula e anotar as respostas no quadro.
- Explicar o conceito de projeções cartográficas, destacando que elas são uma representação bidimensional da superfície curva da Terra.
- Discutir as razões pelas quais as projeções cartográficas são necessárias, incluindo as distorções que ocorrem ao transformar uma esfera em um plano.

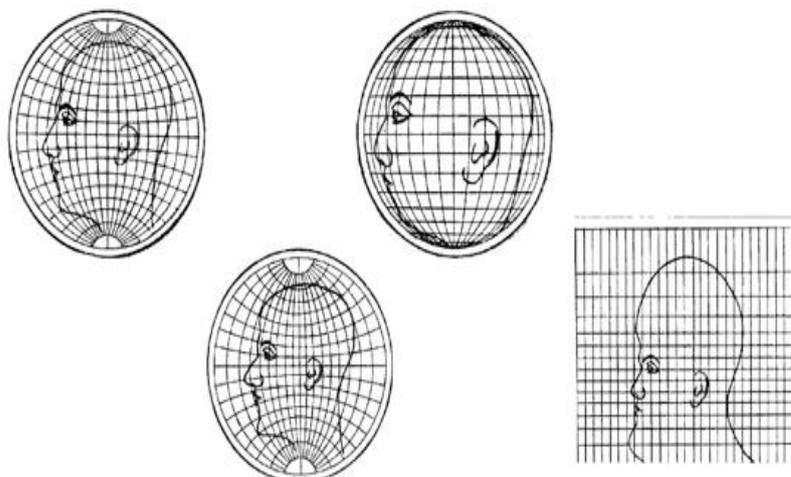
Momento 2: distorções

- Apresentar as principais distorções que ocorrem em projeções cartográficas: distorção de forma, distorção de área, distorção de distância e distorção de direção.

Segundo Silva e Kaercher (2013), identificar os processos de como se dá a distorção da realidade, assim como quem pode controlar essa distorção, tornam-se a justificativa para assinalar a conveniência no uso dos mapas.

- Baseando-se na Figura 25, solicitar aos alunos que identifiquem as distorções presentes. A ilustração exemplifica como diferentes sistemas de projeção podem alterar a aparência de um objeto, como é o caso de um rosto.

Figura 25. Distorções para cada projeção.



Fonte: e-disciplinas USP.

Momento 3: principais projeções cartográficas

- Expor as projeções quanto às superfícies de projeções: cônica, plana e cilíndrica.

Figura 26. Comparação entre diferentes tipos de projeções.



Fonte: D'alge, 2001.

- Solicitar aos alunos, em grupo, que descrevam as principais características dessas projeções cartográficas.

Segundo D'alge (2001), é impossível representar a superfície curva da Terra sobre uma superfície plana sem que haja deformações. Por isso, deve-se escolher que características devem ser conservadas e quais podem ser alteradas.

Momento 4: debate e encerramento

- Explorar as aplicações práticas das projeções cartográficas em diversas áreas, como navegação, planejamento urbano e análise ambiental.
- Solicitar aos alunos o registro, por meio de um mapa mental, do entendimento sobre as projeções cartográficas.
- Indicar atividades, conforme Tabela 2, abordando temas de cartografia no Ensino Médio, incluindo questões típicas de vestibulares ou do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio).

Tabela 2. Atividades relacionadas à cartografia.

Atividade	Endereço de acesso
ENEM (2016) 1º dia (caderno azul) QUESTÃO 17	https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2016/2016_PV_impresso_D1_CD1.pdf
FUVEST (2021) 1ª fase (grupo V) QUESTÃO 14	https://acervo.fuvest.br/fuvest/2021/fuvest_2021_primeira_fase.pdf
FUVEST (2011) 1ª fase (grupo V) QUESTÃO 68	https://acervo.fuvest.br/fuvest/2011/fuv2011_1fase_prova_V.pdf
UNICAMP (2012) 1ª fase (prova Q e P) QUESTÃO 47	https://www.comvest.unicamp.br/vest2012/F1/f12012QZ.pdf

Fonte: autora.

O professor pode elucidar aos alunos a existência de um teorema (uma proposição que pode ser demonstrada por meio de um processo lógico), mais especificamente, o Teorema de Egregium de Gauss. Este teorema, desenvolvido pelo matemático Carl Friedrich Gauss, revela a impossibilidade de planificar a Terra sem que ocorram deformações, mostrando assim a importância da Matemática para a Cartografia. Ao ensinar sobre Gauss, o professor pode também entrelaçar a história da matemática, contando como Gauss, conhecido como o "Príncipe dos Matemáticos", fez contribuições fundamentais em diversas áreas. Através dessa narrativa, os alunos podem compreender que a Matemática não é apenas uma série de cálculos abstratos, mas uma disciplina rica em história e aplicação prática.

A explicação de que qualquer tentativa de planificar a superfície terrestre inevitavelmente resultará em distorções ilustra como os princípios matemáticos são essenciais na construção e interpretação de mapas, destacando a interconexão profunda entre a Geometria e a representação geográfica. Esta abordagem não só esclarece conceitos complexos, mas também inspira os alunos ao mostrar a beleza e a relevância da Matemática através dos séculos.

Em síntese, o trabalho se encerra com a apresentação do plano de aula como um reflexo direto das teorias e análises discutidas. Este plano não apenas incorpora os fundamentos teóricos abordados, mas também reflete uma abordagem prática e aplicável ao ensino. Por meio deste, os conceitos e métodos discutidos são traduzidos em atividades tangíveis e estratégias educacionais, delineando uma trajetória clara para a implementação da abordagem proposta. Ademais, as considerações finais oferecem uma reflexão sobre todo o processo do trabalho.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho visou, antes de tudo, apoiar o professor, oferecendo-lhe um incentivo significativo para que inspire e aprimore sua prática docente. Ao destacar a interseção entre a Geometria Diferencial, a história da Cartografia e sua aplicação no ensino, procurou-se fornecer ferramentas que enriqueçam o conteúdo educacional, e estimulem a criatividade e a inovação na sala de aula. Ao apresentar, aos professores, conhecimentos sólidos e estratégias pedagógicas, espera-se um estímulo para que promovam uma experiência de ensino mais envolvente e enriquecedora para os alunos.

Evidenciou-se que, mesmo ao lidar com temas complexos, como a Geometria Diferencial aplicada à Cartografia, é possível encontrar meios adequados para um desenvolvimento coerente do conteúdo dentro de um nível de ensino escolar.

O trabalho revelou a existência de uma teoria matemática subjacente ao conceito geográfico de planificação da Terra para a elaboração de mapas, o Teorema de Egregium. Essa teoria demonstra a importância da aplicação de princípios matemáticos na representação cartográfica do globo terrestre em superfícies planas, visando facilitar a compreensão e a análise das informações geográficas. Ao reconhecer essa base teórica, torna-se evidente que a criação de mapas não é apenas um processo prático, mas também envolve uma sólida fundamentação matemática.

Ao abordar um tema específico, a Geometria Diferencial em conjunto com a Cartografia, ressalta-se a versatilidade dessa abordagem para diferentes áreas da Matemática.

A Transposição Didática desempenhou um papel fundamental ao viabilizar a passagem do conteúdo de nível superior para a escola. Por meio desse processo de adaptação e tradução dos conhecimentos complexos, como aqueles encontrados na Geometria Diferencial e na história da Cartografia, os professores conseguem tornar esses conceitos acessíveis e relevantes para os alunos do Ensino Básico. Assim, a Transposição Didática não apenas facilita a compreensão e assimilação do conteúdo, mas também enriquece o currículo escolar, proporcionando aos estudantes uma base sólida para sua jornada educacional.

Complementarmente, é essencial enfatizar que o presente trabalho se beneficiou do respaldo fornecido pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), garantindo a sua aderência aos padrões educacionais estabelecidos. A integração da

BNCC assegura que os temas abordados estejam alinhados com as expectativas de aprendizado definidas para cada fase do ensino.

Conclusivamente, este trabalho ampliou o entendimento sobre Geometria Diferencial e Cartografia, e ofereceu ferramentas para o aprimoramento contínuo do ensino, incentivando os professores a buscarem constantemente novas maneiras de enriquecer seu trabalho diante da experiência educacional de seus alunos.

Futuros trabalhos que podem ser desenvolvidos a partir deste estudo, que interliga a Geometria Diferencial e a Cartografia, incluem diversas linhas de pesquisa e aplicações pedagógicas. Primeiramente, pode-se explorar o desenvolvimento de materiais didáticos inovadores que utilizem tecnologias digitais e simulações interativas para ensinar conceitos de Geometria Diferencial aplicados à Cartografia. Além disso, estudos podem ser realizados para investigar a eficácia dessas abordagens no ensino de outros conceitos matemáticos complexos, verificando como a integração de disciplinas pode melhorar a compreensão e o engajamento dos alunos.

Adicionalmente, pode-se aprofundar a pesquisa histórica sobre as contribuições de matemáticos como Gauss para a Cartografia, produzindo trabalhos que contextualizem suas descobertas no cenário educacional contemporâneo. Por fim, a elaboração de cursos de formação continuada para professores, focados na Transposição Didática desses conteúdos, pode capacitar ainda mais os docentes para aplicar essas estratégias em sala de aula, contribuindo para uma educação matemática mais rica e interdisciplinar.

BIBLIOGRAFIA

AGUIRRE, Argentino José; FILHO, José Américo de Mello. Introdução à cartografia. **Santa Maria: UFSM**. Departamento de Engenharia Rural, 2.ed, p. 80, 2009.

ALVES, Marcelo da Silva. **Geometria Diferencial das Curvas e a Reparametrização pelo Comprimento de Arco**. 2013. 41 f. Monografia (Licenciatura em matemática) - Universidade Federal do Pará - Faculdade de Matemática, Marabá, 2013.

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo-Volume I**. v. 8. Bookman, 2007.

APOSTOL, Tom M. **One-variable calculus, with an introduction to linear algebra**. v.1 Waltham, Toronto, London: Blaisdell, 1969.

ARAÚJO, Paulo Ventura. **Geometria Diferencial**. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, p. 224. 1998.

BAKKER, Mucio Piragibe Ribeiro de. **Cartografia: Noções Básicas**. Rio de Janeiro: DHN, 1965.

BALL, Deborah Loewenberg. Breaking with experience in learning to teach mathematics: The role of a preservice methods course. **For the learning of mathematics**, v. 10, n. 2, p. 10-16, 1990.

BOLDRINI, Luis José; COSTA, Sueli I. Rodrigues; FIGUEIREDO, Vera Lúcia; WETZLER, Henry G. **Álgebra Linear**. 3 ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1986.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. **A history of mathematics**. John Wiley & Sons, 2011.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 03 mai. 2022.

BROCKINGTON, Guilherme; PIETROCOLA, Maurício. Serão as regras da transposição didática aplicáveis aos conceitos de Física Moderna. **Investigações em Ensino de Ciências**, v.10, n. 3, p. 387-404, 2005.

CARMO, Manfredo Perdigão. **Geometria diferencial de curvas e superfícies**. 2.ed, SBM, Rio de Janeiro, 2005.

CARMO, Manfredo Perdigão do. **Cartografia e Geometria Diferencial**. Artigo. Rio de Janeiro: IMPA, 1982.

CARVALHO, Edilson Alves de; ARAÚJO, Paulo César de. Leituras cartográficas e interpretações estatísticas I: geografia. **Natal, RN: Edufrn**, v. 248, 2008.

CHEVALLARD, Yves. **La Transposition Didactique**. Grenoble: La Pensée sauvage, 1991.

CHEVALLARD, Yves.; JOSHUA, Mary-Alberte . **La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné**. Paris, La pensée sauvage, 1991

CORREIA, Antônio Henrique; MARTINS, Ronald Alexandre. Fundamentos de Cartografia e GPS. **Universidade de Brasília. Instituto de Geociências. Curso de Especialização em Geoprocessamento**, 2008.

COSTA, Hugo Heleno Camilo. “SERÍAMOS A POLÍTICA QUE CRITICAMOS?”: a interlocução do povo da Geografia na produção da BNCC. **Revista Brasileira de Educação em Geografia**, v. 10, n. 19, p. 125-152, 2020.

D'ALGE, Júlio César Lima. Cartografia para geoprocessamento. **Introdução à ciência da geoinformação**. São José dos Campos: INPE, p. 32, 2001.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: da teoria à prática**. Papirus Editora, 2009.

DOERING, Claus Ivo; LOPES, Artur Oscar. **Equações Diferenciais Ordinárias**, IMPA, 6 ed., 2016.

DUARTE, Paulo Araújo. Fundamentos de Cartografia. Florianópolis. Ed. UFSC. 2002.

Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM 2016. INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2016/2016_PV_impresso_D1_CD1.pdf. Acesso em: 28 jul. 2024.

FILHO, Antônio Noel. A relação cartografia e Geometria Diferencial de Mercator a Gauss. 2012. Tese de Doutorado (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012.

FONSECA, J. Antonio de Oliveira; PINHEIRO, J. P. dos Santos; FONSECA, P. Pereira Mota. O PAPEL DA CARTOGRAFIA NO ENSINO DA GEOGRAFIA. 2012. Disponível em: <<https://ri.ufs.br/bitstream/riufs/10180/8/7.pdf>>. Acesso em: 24 out 2023.

FUNDAÇÃO UNIVERSITÁRIA PARA O VESTIBULAR. *Prova do Vestibular FUVEST 2011 - 1ª fase*. São Paulo: FUVEST, 2011. Disponível em: https://acervo.fuvest.br/fuvest/2011/fuv2011_1fase_prova_V.pdf. Acesso em: 28 jul. 2024.. 2024.

FUNDAÇÃO UNIVERSITÁRIA PARA O VESTIBULAR. *Prova do Vestibular FUVEST 2021 - 1ª fase*. São Paulo: FUVEST, 2021. Disponível em: https://acervo.fuvest.br/fuvest/2021/fuvest_2021_primeira_fase.pdf. Acesso em: 28 jul. 2024.

GANDIN, Danilo. **Planejamento como prática educativa**. 7. ed. São Paulo: Loyola, 1994.

GIOTTO, Enio; CARDOSO, Claire Delfini Viana; SEBEM, Elódio. Projeto CR Campeiro: fundamentos de Cartografia e de GPS aplicados a Agricultura de Precisão. Santa Maria: UFSM – Laboratório de Geomática, 2013

HAYDT, Regina Célia Cazaux. **Curso de Didática Geral**. 1.ed. São Paulo: Ática, 2011.

HIGA, Tereza Souza. **Cartografia Básica**. UFMT em Rede, 2021. Disponível em: <https://setec.ufmt.br/ri/bitstream/1/92/3/Cartografia_Basica_2021.pdf>

JOLY, Fernand. **A Cartografia**. Tradução: Tânia Pellegrini, Papirus, 1997.

LIBÂNEO, José Carlos. **Didática**. São Paulo: Cortez Editora, 2006

LIBÂNEO, José Carlos. Os significados da educação, modalidades de prática educativa e a organização do sistema educacional. **Revista Inter-Ação**, v. 16, n. 1/2, p. 67-90, 1992.

MÉDICI, Arthur Damião. Ensino programado para o planejamento de aulas de matemática de ensino fundamental. 2016. Dissertação (Mestrado Acadêmico do Programa de Pós-graduação em Psicologia), Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2016.

MENEGUETTE, Arlete Aparecida Correia. Cartografia no século 21: revisitando conceitos e definições. **Geografia e Pesquisa**, v. 6, n. 1, 2012.

MONMONIER, Marcos. **Como mentir com mapas**. Imprensa da Universidade de Chicago, 2018.

NOEL FILHO, Antônio. A relação cartografia e geometria diferencial de Mercator a Gauss. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, 2012.

NÓVOA, António. **Formação de professores e profissão docente**. Lisboa: Dom Quixote, 1992.

NOGUEIRA, Ruth E. **Cartografia: representação, comunicação e visualização de dados espaciais**. Ed. UFSC, 2008.

OLIVEIRA, Ivanilton José de. A linguagem dos mapas: utilizando a cartografia para comunicar. **Revista Uniciências**. 2004. Artigo disponível em: http://portais.ufg.br/up/215/o/OLIVEIRA__Ivanilton_Jose_linguagem_dos_mapas.pdf

O' NEILL, B. **Elementary Differential Geometry**. Academy Press, ed. 2, 1966.

PIMENTA, Keityane Da Costa; SAMPAIO, Antônio Carlos Freire; NUNES, Elivonete Pereira De Sousa. Percepções sobre o uso das novas tecnologias no ensino da cartografia na educação básica. in: **debates sobre formação de professores: práticas pedagógicas, saberes, experiências e tendências**. Editora Científica Digital, 2022, p. 147-160.

POLIDORO, Lurdes de Fátima; STIGAR, Robson. A Transposição Didática: a passagem do saber científico para o saber escolar. **Revista de Teologia e Cultura**. ANO VI, n. 27, p.7, 2010.

PONTE, João Pedro da. Práticas profissionais dos professores de matemática. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014. (Encontros de educação). ISBN 978-989-8753-06-9

PONTE, João Pedro da; QUARESMA, Marisa; PEREIRA, Joana Mata. É mesmo necessário fazer planos de aula?. **Educação e Matemática**, n. 133, p. 26-35, 2015.

PONTE, João Pedro da et al. O estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional de professores de matemática. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 30, p. 868-891, 2016.

QUEIROZ, José Carlos S. OS SABERES DOCENTES NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA. Encontro Internacional de Formação de Professores e Fórum Permanente de Inovação Educacional, v. 9, n. 9, 2016. Disponível em: <https://eventos.set.edu.br/enfope/article/view/2433>. Acesso em: 2 abr. 2022.

QUINTERO, Laura Alexandra Zea. Cartografía matemática y sus aplicaciones. Facultad de Ciências Departamento de Matemáticas Universidad de los Andes Bogotá D.C., Colombia, 2018.

RABELO, Edmar H.; LORENZATO, Sérgio A. Ensino da matemática: reflexões para uma aprendizagem significativa. **Zetetike**, v. 2, n. 1, p. 37-46, 1994.

RAIZ, Erwin. Cartografia Geral. Rio de Janeiro: Científica, 1969.

RICHIT, Adriana. Políticas públicas educacionais e a formação do cidadão na perspectiva da Educação Matemática. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 1, n. 1, p. 111-130, 2012.

ROCHA, Maria Lúcia Pessoa Chaves; SODRÉ, Leila Telma Lopes. O uso das representações cartográficas da superfície da terra no ensino de Matemática. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 11, 2015, Natal. p. 1-7.

ROCHA, Maria Lúcia Pessoa Chaves. Os fundamentos matemáticos da Cartografia. **REMATEC**, v. 3, n. 4, p. 40-44, 2008.

RODRIGUES, Maria Isabel Ferreira. Projeções cartográficas: Estudo Matemático das Representações Planas de uma Esfera. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade do Minho, Portugal, 2011.

ROSA, Roberto. **Cartografia básica**. Laboratório de Geoprocessamento, Instituto de Geografia, Universidade Federal de Uberlândia, Minas Gerais, 2004.

SANTOS, Neiva Glacimar Almeida dos; WISNIEWSKI, Rudião Rafael; NONENMACHER, Sandra Elisabet Bazana. Física, Literatura e cotidiano: transposição didática da física dos físicos à da sala de aula. **Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas**, n. Extra, p. 1147-1152, 2017.

SANTOS, José Adriano Fernandes dos. Matemática aplicada à Geografia. 2016. Dissertação (Mestrado em Rede Nacional), Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2016.

SANTOS, Túlio Jose de Souza. Um breve estudo sobre a geometria diferencial de superfícies em R3. 2021. Disponível em:<https://repository.ufrpe.br/bitstream/123456789/3648/1/tcc_tuliojosedesouzasantos.pdf>

SAMPAIO, Tony Vinicius Moreira; BRANDALIZE, Maria Cecília Bonato. **Cartografia geral, digital e temática**. Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 2018.

Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. União dos Dirigentes Municipais de Educação do Estado de São Paulo. **Currículo Paulista**. São Paulo: SEE-SP/UNDIME-SP, 2020.

SHULMAN, Lee S. Aqueles que entendem: Crescimento do conhecimento no ensino. **Pesquisador educacional**, v. 15, n. 2, pág. 4-14, 1986.

SILVA, Jorge Luiz Barcellos da; KAERCHER, Nestor André. O mapa do Brasil não é o Brasil. **Geograficidade**, v. 3, n. 1, p. 71-79, 2013.

SILVA, Laurienny Gondim. CURVAS E SUPERFÍCIES REGULARES: Um estudo sobre curvaturas. 2022. Disponível em:<https://repositorio.ifgoiano.edu.br/bitstream/prefix/2368/1/tcc_Laurienny%20Gondim%20Silva.pdf>

SLOCUM, T. A.; MCMASTER, R. M.; KESSLER, F. C.; HOWARD, H. H., & Mc Master, R. B. **Thematic Cartography and Geographic Visualization**. Prentice Hall, ed. 3, 2008.

TAKAHASHI, Regina Toshie; FERNANDES, Maria de Fátima Prado. Plano de aula: conceitos e metodologia. **Acta Paul**, São Paulo, v. 17, n.1, p.114-8, 2004.

TENENBLAT, Keti. **Introdução à Geometria Diferencial**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2008. 269 p.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS. *Prova do Vestibular Unicamp 2012 - 1ª fase*. Campinas: COMVEST, 2012. Disponível em: <https://www.comvest.unicamp.br/vest2012/F1/f12012QZ.pdf>. Acesso em: 28 jul. 2024.

VASCONCELLOS, Celso dos Santos. Planejamento: projeto de ensino-aprendizagem e projetos políticos pedagógicos. **São Paulo: Libertad**, 1995.

VENEZUELA, Antonio Luís. Análise combinatória: metodologia de apoio ao professor. **REAMEC – Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**. Cuiabá, v. 9, n. 1, e21015, janeiro-abril, 2021. DOI: 10.26571/reamec.v9i1.10440.

VIEIRA, Antônio José Berutti; SLUTER, Claudia Robbi; FIRKOWSKI, Henrique; DELAZARI, Luciene Stamato. **Cartografia**. Curitiba/PR: UFPR, 2004.

XAVIER, Matheus Silva; GOULART, Claudiano. CURVATURAS DE UMA SUPERFÍCIE REGULAR. **Anais dos Seminários de Iniciação Científica**, n. 26, 2022.

YARTEY, Joseph Nee Anyah; RIBEIRO, Simone Sousa. Equações diferenciais. Salvador, BA: UFBA, Instituto de Matemática e Estatística; Superintendência de Educação a Distância, 2017. 174 p.