

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –
PPGECE**

GUILHERME AUGUSTO SILVESTRE DE CAMPOS

**ANÁLISE DO ENSINO-APRENDIZAGEM DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO
USANDO A SEQUÊNCIA DIDÁTICA “OS PASSEIOS ALEATÓRIOS DO HOMEM
DE FERRO”**

São Carlos

2024

GUILHERME AUGUSTO SILVESTRE DE CAMPOS

**ANÁLISE DO ENSINO-APRENDIZAGEM DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO
USANDO A SEQUÊNCIA DIDÁTICA “OS PASSEIOS ALEATÓRIOS DO HOMEM
DE FERRO”**

Dissertação elaborada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos para obtenção do título de mestre em Ensino de Ciências Exatas.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Luís Venezuela.

São Carlos

2024

Campos, Guilherme Augusto Silvestre de

Análise do ensino-aprendizagem de alunos do ensino médio usando a sequência didática "Os passeios aleatórios do Homem de Ferro" / Guilherme Augusto Silvestre de Campos -- 2024.
65f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba

Orientador (a): Antônio Luís Venezuela

Banca Examinadora: Antônio Luís Venezuela, Érica Regina Filletti Nascimento, Sadao Massago

Bibliografia

1. Sequência didática. 2. Probabilidade. 3. Teste de hipótese. I. Campos, Guilherme Augusto Silvestre de. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Maria Aparecida de Lourdes Mariano -
CRB/8 6979



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Guilherme Augusto Silvestre de Campos, realizada em 30/07/2024.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Antonio Luís Venezuela (UFSCar)



Documento assinado digitalmente
ANTONIO LUIS VENEZUELA
Data: 30/07/2024 16:00:42-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Érica Regina Filletti Nascimento (UNESP)



Documento assinado digitalmente
ERICA REGINA FILLETTI NASCIMENTO
Data: 30/07/2024 16:11:57-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Sadao Massago (UFSCar)



Documento assinado digitalmente
SADAO MASSAGO
Data: 31/07/2024 09:54:09-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer a minha família que me apoia em todas as minhas decisões, ao Vinicius Ferrão que vivenciou toda minha trajetória até aqui, aos professores que trabalham comigo que me ajudaram sempre que possível, melhorando e ampliando os conhecimentos adquiridos durante o percurso. Aos meus alunos que se dedicaram e fazem parte de todo esse processo por que sem eles não seria capaz de ter feito metade dessa dissertação. A direção da escola que me permitiu utilizar o espaço e minhas aulas para realizar essa pesquisa e engrandecer ainda mais o espaço. E ao meu coordenador Nelson Gonçalves que me ajudou em tudo que precisei, desde as correções ortográficas até a momentos de aula necessários para o processo acontecer.

Não posso deixar de falar do meu orientador Antonio Luís Venezuela, que diante de todas as alternâncias de meu humor e de estudo esteve presente e sempre disposto a ajudar para que a realização dessa dissertação acontecesse. Digo que foi orientador paciente, pois tinha horas que nada acontecia, mas ele soube orientar e direcionar sempre para o melhor caminho.

RESUMO

Neste trabalho por meio do Teste de McNemar e pelo teste de proficiência mostramos o nível de aprendizagem do aluno através de uma sequência didática baseada nos “Passeios aleatórios da Mônica” que para nós foi adaptada para “Passeios aleatórios do Homem de Ferro” com alunos do ensino médio de uma escola pública na cidade de Sorocaba. A proposta da sequência didática foi desenvolvida pela fundamentação teórica da engenharia didática, na qual as etapas trabalhadas durante o processo foram divididas em experimentações teóricas e práticas, onde os alunos tiveram que responder dois questionários de nove perguntas antes e depois da sequência didática, que foram tabelados e analisados pelo teste de McNemar. O teste trouxe para mim uma mensuração da aprendizagem do aluno, que poderia ser, não se aplica ou se aplica, porém ele deixa uma certa dúvida, pois não considerava baixas variações, por este motivo criamos um teste de proficiência de porcentagem para que fosse possível uma visualização por segmentos e assim tenhamos mais dados e informações para realizar as comparações necessárias. Sendo assim, conseguiria medir através das comparações propostas tanto pelo teste de McNemar e o de proficiência o quanto o aluno foi ou não foi capaz de aprender os conceitos preestabelecido nessa proposta.

Palavras-chaves: Ensino médio; Probabilidade; Teste de McNemar; Passeios aleatórios da Mônica; Sequência Didática.

ABSTRACT

In this work, through the McNemar Test and the proficiency test, we show the student's level of learning through a didactic sequence based on “Mônica's Random Walks” which for us was adapted to “Iron Man's Random Walks” with students from high school at a public school in the city of Sorocaba. The proposal for the didactic sequence was developed based on the theoretical foundation of didactic engineering, in which the working steps during the process were divided into theoretical and practical experiments, where students had to answer two nine-question questionnaires before and after the didactic sequence, which were tabulated and analyzed using the McNemar test. The test brought us a measurement of the student's learning, which could be, does not apply or applies, but it leaves a certain doubt, as it did not consider low variations, for this reason we created a percentage proficiency test so that it was possible a visualization by segments and thus have more data and information to carry out the necessary comparisons. Therefore, we would be able to measure through the comparisons proposed by both the McNemar test and the proficiency test how much the student was or was not able to learn the pre-established concepts in this proposal.

Keywords: High school; Probability; McNemar test; Monica's random walks; Following teaching

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Passeios Aleatórios da Mônica	17
Figura 2 - Quantidade de presentes em um congresso	33
Figura 3 - Aluna realizando Pré - Teste.....	34
Figura 4 - Aluno realizando Pré – Teste.....	34
Figura 5 - Quantidade de presentes em um congresso	36
Figura 6 - Caminhos possíveis do experimento aleatorio.....	37
Figura 7 - Grupos realizando a sequência didática.....	38
Figura 8 - Grupos realizando a sequência didática.....	38
Figura 9 - Escala de Proficiência de Acertos.....	43

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Habilidades BNCC	15
Quadro 2 – Engenharias de 1º e 2º geração, objetivos e aspectos centrais	24
Quadro 3 – Comparando EDI e EDD.	26
Quadro 4 – Formulário para o experimento aleatorio	39
Quadro 5 – Tabela de Distribuição de frequ~encia/probabilidade.....	39
Quadro 6 – Árvore de possibilidades	40
Quadro 7 – Tabela de Distribuição de frequênci/probabilidade	40
Quadro 8 – Tabela de Distribuição de frequênci/probabilidade	42
Quadro 9 – Valores de referencia de Proficiência	43
Quadro 10 – Resultados, relativo à questão 1	44
Quadro 11 – Acertos e erros antes e depois do teste referente a questão 1	45
Quadro 12 – Resultados, relativo à questão 2.	46
Quadro 13 – Acertos e erros antes e depois do teste referente à questão 2	46
Quadro 14 – Resultados, relativo à questão 3.	48
Quadro 15 – Acertos e erros antes e depois do teste referente à questão 3	48
Quadro 16 – Resultados, relativo à questão 4.	49
Quadro 17 – Acertos e erros antes e depois do teste referente a questão 4	49
Quadro 18 – Resultados, relativo à questão 5.	50
Quadro 19 – Acertos e erros antes e depois do teste referente à questão 5	51
Quadro 20 – Resultados, relativo à questão 6.	52
Quadro 21 – Acertos e erros antes e depois do teste referente à questão 6	52
Quadro 22 – Resultados, relativo à questão 7.	53
Quadro 23 – Acertos e erros antes e depois do teste referente à questão 7	53
Quadro 24 – Resultados, relativo à questão 8.	55
Quadro 25 – Acertos e erros antes e depois do teste referente à questão 8	55
Quadro 26 – Resultados, relativo à questão 9	56
Quadro 27 – Acertos e erros antes e depois do teste referente à questão 9	56

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AVALE	Ambiente Virtual de Apoio ao Letramento Estatístico
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
EJA	Ensino de Jovens e Adultos
EDD	Engenharia Didática de Desenvolvimento
EDI	Engenharia Didática para a Investigação
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
TAD	Teoria Antropológica do Didático
TDF	Tabela de Distribuição de Frequência

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	12
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	14
2.1 Base Nacional Comum Curricular.....	14
2.2 Passeios aleatórios da Mônica	15
2.3 Probabilidade	18
2.3.1 História da probabilidade.....	19
2.4 Teste de McNemar	20
3 METODOLOGIA.....	22
3.1 Organização inicial das atividades	22
3.2 Engenharia didática	23
3.3 Contrato didático	28
3.4 Sequência didática	30
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES	32
4.1 Sequência didática – Passeios aleatórios	35
4.1.1 Atividade introdutória, Pré-Teste - Sondagem.....	35
4.1.2 Atividade introdutória, Sequência Didática.....	37
4.1.3 Atividade introdutória, Pós Teste	41
4.2 Resultados.....	42
4.3 Análise de dados.....	44
4.3.1 Questão 1	44
Teste de McNemar	44
Discussão dos resultados	45
4.3.2 Questão 2	45
Escala de aprendizado	46

Discussão dos resultados	46
4.3.3 Questão 3	47
Escala de aprendizado	47
Discussão dos resultados	48
4.3.4 Questão 4	48
Escala de aprendizado	49
4.3.5 Questão 5	50
Escala de aprendizado	50
Discussão dos resultados	51
4.3.6 Questão 6	51
Escala de aprendizado	52
Discussão dos resultados	52
4.3.7 Questão 7	53
Escala de aprendizado	53
Discussão dos resultados	54
4.3.8 Questão 8	54
Escala de aprendizado	54
Discussão dos resultados	55
4.3.9 Questão 9	55
Escala de aprendizado	56
Discussão dos resultados	56
4.4 ANÁLISE GERAL	58
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	59
REFERÊNCIAS	61

1 INTRODUÇÃO

Diante do cenário atual da educação, observa-se uma quantidade exacerbada de plataformas educacionais que tornam os alunos passivos a todo processo. Diante deste quadro o trabalho pretende mensurar o aprendizado, baseando-se em uma sequência didática ilustrativa e temática para desafiar os alunos na construção do raciocínio matemático de determinado conceito e conseguir compreender de forma prática e experimental.

Analisando a trajetória do aluno, o autor deste trabalho questiona que tipo de professor deveria ser, pois é notório que a pandemia desencadeou uma defasagem no processo de ensino e aprendizagem, desencadeando o imediatismo. Sendo assim, vimos a necessidade de desafiar a fazer algo diferente para compreender o que o aluno do século XXI pretende.

Não podemos esquecer de destacar que o processo educacional para se desenvolver precisa da dualidade: “aluno protagonista e professor mediador”, pois a educação parte do pressuposto que o aluno e o professor precisam caminhar juntos, para tanto o ensino precisa ser atraente para melhorar o engajamento dos alunos no desenvolvimento das atividades propostas.

Os alunos de hoje precisam de incentivos para despertar o interesse pelas matérias oferecidas, com isso, as utilizações de práticas concretas tornam o aluno protagonista no processo de aprendizagem e ajuda na organização do pensamento, podendo ser um instrumento a mais para interpretar o mundo em que vive.

A fundamentação teórica da pesquisa, baseou-se no conceito de que um aluno de ensino médio carrega consigo o tratamento de informações, probabilidade e análise combinatória, desde os anos iniciais e que faz parte das matrizes curriculares de ensino e está presente nos principais vestibulares e situações cotidianas.

A base deste estudo é a sequência didática: “Passeios Aleatórios da Mônica” que foi proposta por Fernandez e Fernandez (1999), para o estudo da distribuição Binomial no Ensino Superior, que posteriormente foi adaptada por Cazorla e Santana (2006), para o ensino de Probabilidade na Educação Básica, seguindo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, 1997, 1998, 2002, 2006). A partir da aplicação dessa sequência podemos estudar diversos conceitos pertencentes ao vocabulário de um aluno, que são eles: o experimento determinístico e aleatório, eventos, espaço amostral, probabilidade de eventos simples e compostos; tabela de distribuição de frequência (TDF), gráfico de colunas; probabilidade frequentista (frequência relativa); o estudo da árvore de possibilidades, padrões e tantos outros.

Diante dessas variedades de conceitos, vamos enfatizar no processo de ensino e aprendizagem o estudo probabilístico observando os eventos determinísticos e aleatórios e comprovando o processo prático com o teórico.

O principal objetivo deste trabalho é analisar, via questionários, a aprendizagem dos alunos por meio de uma sequência didática denominada “Passeios Aleatórios do Homem de Ferro” na turma da 2º Série do Ensino Médio da Escola Estadual Professor Aggêo Pereira do Amaral.

No capítulo 2, estão referenciados os aspectos teóricos que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) aborda, os Passeios Aleatórios da Mônica, onde temos diversas análises e estudos relacionados ao seu desenvolvimento que fazemos referência e análise para o estudo da probabilidade.

No capítulo 3 estamos apresentando o referencial metodológico da pesquisa, a Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996). E como será realizado esse procedimento no projeto de pesquisa.

No capítulo 4, está descrito como serão obtidos os resultados e discussões dessa pesquisa para que se alcance os seus objetivos e considerações finais.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo mostramos a BNCC, a sequência didática “Os Passeios Aleatórios da Mônica”, noções de probabilidade e Teste de McNemar.

2.1 Base Nacional Comum Curricular

A BNCC com os seus aperfeiçoamentos e buscando melhorar o tratamento de informações distribuiu a uma unidade temática para o estudo de probabilidade e estatística que começa desde o ensino fundamental até o ensino médio para poder abordar os conceitos e fatos da realidade de seus estudantes de uma forma conjunta com um processo experimental e tecnológico para desenvolver habilidades específicas para o seu conhecimento e poder utilizá-los para explicar e desenvolver conceitos específicos de dados estatístico.

De acordo com a BNCC, o estudo de noções de probabilidade, a finalidade, no Ensino Fundamental – Anos Iniciais, é promover a compreensão de que nem todos os fenômenos são determinísticos. Para isso, o início da proposta de trabalho com probabilidade está centrado no desenvolvimento da noção de aleatoriedade, de modo que os alunos compreendam que há eventos certos, eventos impossíveis e eventos prováveis. É muito comum que pessoas julguem impossíveis eventos que nunca viram acontecer. Nessa fase, é importante que os alunos verbalizem, em eventos que envolvem o acaso, os resultados que poderiam ter acontecido em oposição ao que realmente aconteceu, iniciando a construção do espaço amostral. No Ensino Fundamental – Anos Finais, o estudo deve ser ampliado e aprofundado, por meio de atividades nas quais os alunos façam experimentos aleatórios e simulações para confrontar os resultados obtidos com a probabilidade teórica – probabilidade frequentista. A progressão dos conhecimentos se faz pelo aprimoramento da capacidade de enumeração dos elementos do espaço amostral, que está associada, também, aos problemas de contagem.

Com relação à estatística, os primeiros passos envolvem o trabalho com a coleta e a organização de dados de uma pesquisa de interesse dos alunos. O planejamento de como fazer a pesquisa ajuda a compreender o papel da estatística no cotidiano dos alunos. Assim, a leitura, a interpretação e a construção de tabelas e gráficos têm papel fundamental, bem como a forma de produção de texto escrito para a comunicação de dados, pois é preciso compreender que o texto deve sintetizar ou justificar as conclusões.

Em continuidade a essas aprendizagens, no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos.

Conseqüentemente, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio – impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. Nesse contexto, destaca-se ainda a importância do recurso a tecnologias digitais e aplicativos tanto para a investigação matemática como para dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional, iniciado na etapa anterior.

Pode -se trabalhar com os assuntos abordados as seguintes habilidades propostas pela Base Nacional Curricular para que o jovem possa desenvolver as habilidades necessárias para sua aprendizagem e conhecimento específico, aqui selecionamos 3 habilidades a serem trabalhadas da melhor forma possível, segue no quadro abaixo.

Quadro 1 – Habilidades BNCC

(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).
(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

Fonte: Brasil (2018).

2.2 Passeios aleatórios da Mônica

A sequência didática Os Passeios Aleatórios da Mônica já foi analisada por diversos pesquisadores. Por exemplo, Gusmão e Cazorla (2009) analisaram com a utilização da teoria Ontossemiótica (Godino, 2002). Essas autoras concluíram que a sequência didática era viável para ensinar conceitos básicos de probabilidade, contudo observaram a presença de diversos conflitos semióticos devido, principalmente, ao pouco conhecimento dos professores desses conceitos.

Gusmão e Kataoka (2011) utilizaram a mesma teoria (Ontossemótica), e concluíram também que a sequência didática é viável por possibilitar a apropriação de diferentes conceitos probabilísticos, bem como formas diferentes de atribuir probabilidades.

Nagamine, Henriques e Cazorla (2010) avaliaram os Passeios Aleatórios da Mônica utilizando a teoria Antropológica do Didático (TAD) (Chevallard, 1992), mais especificamente

a vertente praxe lógica e perceberam que explicitando a técnica (que é uma maneira de fazer ou realizar uma tarefa) e a tecnologia (que é um discurso racional que tem por objetivo justificar a técnica), foi possível identificar conflitos na solicitação de algumas tarefas.

Na pesquisa de Nagamine *et al.* (2011), utilizando também a TAD,

[...] a análise revelou que essa sequência permite destacar uma organização praxeológica completa (Tarefa/Técnica/Tecnologia/Teoria) e inverte a praxeologia praticada pela maioria dos professores, uma vez que parte de uma situação-problema, da qual emergem as concepções intuitivas de probabilidade, a probabilidade frequentista, decorrente da experimentação aleatória, e a probabilidade clássica ou laplaciana, proveniente da modelagem matemática, por meio do diagrama de possibilidades (Nagamine *et al.*, 2011, p. 1).

Hernandez, Kataoka e Oliveira (2010) analisaram que os alunos compreenderam as diferenças entre experimento determinístico e aleatório, bem como a probabilidade laplaciana e frequentista, e que a atividade era viável para abordar tópicos de Probabilidade.

Vita (2012) adaptou os Passeios Aleatórios da Mônica para a aplicação com alunos deficientes visuais. Denominada “Os Passeios Aleatórios do Jefferson”, essa nova versão da sequência foi testada com quatro alunos cegos do Ensino de Jovens e Adultos (EJA). Na aplicação a autora buscou identificar a potencialidade deste material didático para a aprendizagem dos referidos alunos em conceitos básicos de Probabilidade abordados sob a ótica do modelo de letramento probabilístico proposto por Gal (2005).

Ferreira (2011) aplicou os Passeios Aleatórios de Carlinha com sete alunos do 3º ano do ensino médio de uma escola pública estadual, tanto no ambiente de aprendizagem papel e lápis como no computacional (com software R) sob a perspectiva do letramento probabilístico de Gal (2005) e do construcionismo de Papert (1980). Esse autor conclui que a sequência didática é viável para a aprendizagem de diversos conceitos probabilísticos nos dois ambientes de aprendizagem, ressaltando que a possibilidade de confronto entre a probabilidade frequentista e a laplaciana, potencializada pelo experimento, bem como pelo uso do software R, proporcionou aos alunos novas reflexões em torno dos conceitos probabilísticos.

A visão clássica ou Laplaciana é definida por Dantas (2004) da seguinte maneira:

Consideremos um espaço amostral S com N eventos simples, que suporemos igualmente possíveis. Seja A um evento de S composto de m eventos simples. A probabilidade de A , que denotaremos por $P(A)$, é definida por:

$$P(A) = \frac{m}{N}$$

(DANTAS, 2004, p.25).

Por outro lado, a visão frequentista ou estatística é definida por Rényi e Coutinho (2001) da seguinte maneira:

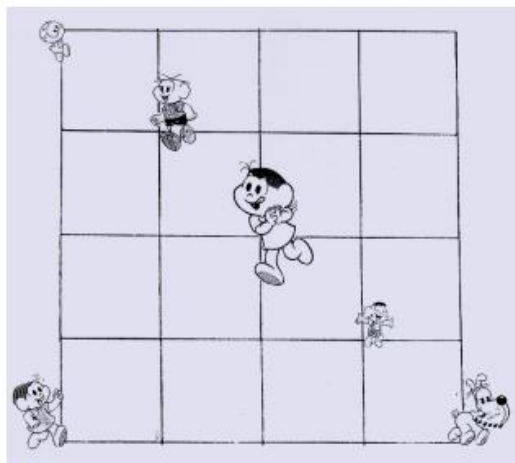
Chamaremos probabilidade de um evento o número ao redor do qual oscila a frequência relativa do evento considerado [...]. Consideramos então a probabilidade como um valor independente do observador, que indique aproximadamente com qual frequência o evento considerado se produzirá ao longo de uma série de repetições do experimento. (RÉNYI, 1996, p. 25-26, COUTINHO, 2001, p.38).

A análise dessa sequência por diferentes referenciais teóricos nessas pesquisas tem possibilitado o aperfeiçoamento da mesma, por conseguinte, contribuindo para o processo de validação nos dois ambientes de aprendizagem, com alunos cegos e videntes do ensino médio, professores, estudantes de graduação e de pós-graduação.

Moraes (2017) utilizou a atividade os Passeios Aleatórios da Mônica sob a visão da semiótica onde constataram que nessas atividades os alunos utilizaram diferentes registros de representação semiótica na resolução das tarefas onde possibilitou o estudo, com êxito, de probabilidade interligado ao pensamento combinatório e estatístico. Notaram que essas atividades podem favorecer no aprimoramento de leitura e interpretação crítica das informações probabilísticas dos alunos.

O jogo Passeios Aleatórios da Rute teve raízes nos Passeios Aleatórios da Mônica. De acordo com Nagamine *et al.* (2011), a atividade “Os Passeios Aleatórios da Mônica”, foi proposta inicialmente por Fernandez e Fernandez (1999), numa pesquisa envolvendo estudantes do Ensino Superior sobre a distribuição binomial, conforme a Figura 1, exemplificando sua distribuição pelos caminhos possíveis. Posteriormente, o jogo foi adaptado por Cazorla e Santana (2006) para o ensino de Probabilidade na Educação Básica

Figura 1 - Passeios Aleatórios da Mônica



Fonte: Nagamine *et al.* (2011).

Na atividade, Mônica e seus amigos moram no mesmo bairro. Mônica visita cada um deles (Horácio, Cebolinha, Magali, Cascão e Bidu) de acordo com uma ordem pré-estabelecida, considerando os dias da semana: Horácio na segunda-feira, Cebolinha na terça-feira, Magali na quarta-feira, Cascão na quinta-feira e Bidu na sexta-feira. A distância da casa da Mônica para a casa de cada um dos amigos é sempre de quatro quarteirões.

A turma combinou um jogo para tornar os encontros mais emocionantes, de forma que a “sorte” escolhesse o amigo a ser visitado pela Mônica. Para tal, foi estabelecido que ao sair de sua casa e a cada cruzamento do quarteirão, Mônica deveria lançar uma moeda para o alto; se saísse cara, ela andaria um quarteirão para o Norte, se saísse coroa, ela andaria um quarteirão para o Leste. Para chegar a qualquer um dos amigos, Mônica deveria jogar a moeda quatro vezes. Antes de ocorrer o lançamento questionamos os alunos: todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?

Há uma versão denominada “Passeios Aleatórios da Carlinha” que foi adaptada para o ambiente virtual e elaborada no Ambiente Virtual de Apoio ao Letramento Estatístico (AVALE) da Universidade Estadual de Santa Cruz, sob orientação de Cazorla, Kataoka e Nagamine (2011). Nesta nova versão, que também toma como referência a Turma da Mônica, as personagens chamam-se Carlinha (Mônica), Luiz (Horácio), Felipe (Cebolinha), Fernanda (Magali), Alex (Cascão) e Paula (Bidu).

2.3 Probabilidade

Para Bryant e Nunes (2012), a probabilidade é um conceito muito complexo que envolve o desenvolvimento de quatro exigências cognitivas necessárias à sua compreensão. Segundo esses autores, as exigências cognitivas da probabilidade são:

- a) Compreender a natureza e as consequências da aleatoriedade, bem como seu uso cotidiano;
- b) Formar e categorizar espaços amostrais, necessários não só para o cálculo de probabilidade, como essencial à compreensão da natureza da probabilidade;
- c) Comparar e quantificar probabilidades;
- d) Entender correlações (relações entre eventos).

Viali (2008) defende que problemas de probabilidade dizem respeito a um conjunto de eventos incertos que ocorrem de forma aleatória, assim “a probabilidade é o ramo da matemática que pretende modelar fenômenos não determinísticos, isto é, aqueles fenômenos em que o ‘acaso’ representa um papel preponderante”.

2.3.1 História da probabilidade

A história da teoria das probabilidades é muito interessante e rica e tem raízes na antiguidade. A seguir temos alguns pontos importantes a serem recordados:

- a) **Jogos de Azar Antigos:** Os primeiros registros de conceitos relacionados à probabilidade estão associados a jogos de azar na Grécia Antiga e Roma, onde as pessoas começaram a analisar e calcular as chances de eventos ocorrerem em jogos como dados e moedas;
- b) **Correspondência de Pascal e Fermat:** No século XVII, Blaise Pascal e Pierre de Fermat trocaram correspondências sobre problemas de jogos de azar, que levaram ao desenvolvimento da teoria das probabilidades. Pascal é conhecido por sua contribuição à teoria das probabilidades através do triângulo de Pascal, usado para calcular coeficientes binomiais;
- c) **Lei dos Grandes Números:** No século XVIII, matemáticos como Jacob Bernoulli desenvolveram a Lei dos Grandes Números, que descreve o comportamento de médias de grandes conjuntos de dados, mostrando que elas tendem a se estabilizar em valores previsíveis à medida que o número de experimentos aumenta;
- d) **Distribuição Normal:** No início do século XIX, o matemático Carl Friedrich Gauss contribuiu significativamente para a teoria das probabilidades ao desenvolver a distribuição normal, também conhecida como a curva em forma de sino, que descreve muitos fenômenos naturais;
- e) **Teoria Axiomática de Probabilidade:** No século XX, matemáticos como Kolmogorov estabeleceram uma base sólida para a teoria das probabilidades através da formulação da teoria axiomática da probabilidade, que fornece um conjunto preciso de regras matemáticas para calcular probabilidades;
- f) **Aplicações em Ciência e Tecnologia:** A teoria das probabilidades encontrou uma ampla gama de aplicações em campos como estatística, engenharia, física, economia, biologia e muito mais, desempenhando um papel fundamental em análises de risco, tomada de decisões e modelagem de fenômenos complexos.

2.4 Teste de McNemar

Quinn McNemar (1900–1986), foi professor emérito de Psicologia, Estatística e Educação na Universidade de Stanford e desenvolveu o teste que leva o seu nome. O teste de McNemar é usado para analisar a eficiência de determinada técnica, a qual pode ser relacionada à psicologia ou não. O objetivo desse teste é avaliar a eficiência de situações “antes” e “depois”, em que cada indivíduo é utilizado como o seu próprio controle, onde se utiliza a medição em escala nominal para avaliar alterações da situação “posterior” em relação a situação “anterior”

Para comprovar a significância de qualquer mudança observada por esse método, em determinada técnica, constrói-se uma tabela de frequência de quatro células para representar o primeiro e segundo conjunto de reações de mesmos indivíduos. Os sinais de “+” e “-” são utilizados para indicar diferentes reações.

Tabela 1 - Tabela bivariada contendo as quantidades de indivíduos que sentiram, “+”, ou não, “-”, o efeito da aplicação da técnica

		Depois	
		-	+
Antes	-	A	B
	+	C	D

Fonte: o autor.

De acordo com a Tabela 1, as células *A* e *D* acusam modificações entre a primeira e segunda reação, isto é, um indivíduo localizado na célula *A* passou de “+” para “-” e um indivíduo localizado na célula *D* passou de “-” para “+”. Na ausência de modificação, o indivíduo é classificado na célula *B* ou célula *C*. Desta forma, as células *A* e *D* são consideradas células de mudança, enquanto as células *B* e *C* são células que não mudam de estado. O total de indivíduos que acusam mudanças após aplicação da técnica é $A + D$.

Se as frequências esperadas (Tabela 1) são inferiores a 5, emprega-se a prova binomial em substituição ao teste de McNemar. Caso se verifique que tais frequências não são inferiores a 5, McNemar propôs como estatística de teste o valor qui-quadrado, ou seja, $\chi_0^2 = \frac{(A-D)^2}{A+D}$. Uma correção dessa estatística é necessária para ajustar as frequências discretas, dadas na Tabela 1, para as frequências contínuas, dadas pela estatística qui-quadrado. Assim, foi proposta a estatística **qui-quadrado observado** (χ_0^2):

$$x_0^2 = \frac{(|A - D| - 1)^2}{A + D} \quad (1)$$

A qual será comparada com o valor **do qui-quadrado crítico (ou tabelado)** [x^2], com grau de liberdade igual a 1 e nível de significância $\alpha = 0,05$.

Para realizar o teste de hipótese, utilizamos a hipótese da nulidade e hipótese alternativa, respectivamente, sendo:

H_0 : Se $x_0^2 \leq x^2$, então “não existe diferença antes e depois da aplicação da técnica”,

H_1 : Se $x_0^2 > x^2$, então “existe diferença antes e depois da aplicação da técnica”.

3 METODOLOGIA

Neste capítulo, mostraremos como as atividades propostas aos alunos (introdução, formulários, pré-teste e pós-teste e sequência didática) foram distribuídas conforme o planejamento de aulas e estruturadas de acordo com as etapas da engenharia didática.

3.1 Organização inicial das atividades

As atividades tanto de familiarização do conteúdo e conceito, o formulário do pré-teste, a sequência didática adaptada como “Passeios aleatórios do Homem de Ferro” e o pós-teste, a serem desenvolvidas com os alunos, serão esquematizadas da seguinte forma:

1ª Parte - Duas aulas de 45 min – para a introdução dos assuntos a serem trabalhados com os alunos durante a aplicação da sequência didática a ser estudada e analisada. Nesta aula, trabalhamos com a inserção de vídeos, exemplos e situações, cujo objetivo era estimular o aluno a pensar e se conectar com a proposta, de forma determinística, aleatória, frequentista, sorte, azar e todas as possibilidades possíveis que os mesmos já conheciam;

2ª Parte - Apresentação do pré-teste – Duas aulas de 45 min – Onde avaliamos os conhecimentos dos alunos sem desenvolver a atividade prática, somente com as vivências e situações dialogadas em sala para saber a visão que os mesmos tinham do assunto, questões abertas e algumas mais determinadas com cálculos para podermos realizar uma comparação ao final;

3ª Parte - 2 a 4 aulas de 45 min – Realização da sequência didática com os alunos, nesta etapa o foco foi trabalhar o protagonismo dele na ação aplicada, podendo desenvolver com os colegas as melhores estratégias e situações possíveis. Na sequência realizaram todos os passos e anotações para seguir, onde cada grupo apresentou estratégias distintas conforme seus conhecimentos prévios.

4ª - Parte – 2 aulas de 45 min – Discutir e exemplificar o que foi vivenciado com situações teóricas cobradas em livros e vestibulares, para que eles possam tentar observar a abertura que uma situação concreta ajuda a pensar no abstrato nas situações problemas apresentados;

5ª Parte - 2 aulas de 45 min – Realização do pós-teste – Questões dissertativas e questões objetivas que estimulam o aluno no processo desenvolvido para verificar uma evolução real do processo de raciocínio e desenvolvimento de habilidades.

3.2 Engenharia didática

A metodologia do estudo foi desenvolvida usando a Engenharia Didática, ela auxiliou a elaboração, organização e aplicação da investigação didático-pedagógica, além de tornar possível realizar as análises e validações propostas dos objetivos, uma vez que essa visa pesquisas que estudam os processos de aprendizagem de um dado objeto matemático, favorecendo uma ligação entre a pesquisa e a ação pedagógica. A metodologia de trabalho com experimentos aqui apresentada segue a tendência construtivista do ensino de matemática, isto é, “a preocupação é com a construção do conceito pela criança, estando esta ativa nesta construção. O professor é o mediador e facilitador na aprendizagem do aluno, intervindo e problematizando” (Grando, 2007, p. 47).

Partindo do pressuposto que a sequência didática dá sentido aos conteúdos aplicados em sala de aula, como diz Biembengut (2009, p. 18), o uso desta metodologia pode “ir além das simples resoluções de questões matemáticas e levá-lo a adquirir uma melhor compreensão tanto da teoria quanto da natureza do problema a ser estudado”. Diante dessa citação, observo que a utilização da engenharia didática neste projeto, fará com que tanto o professor como o aluno possam refletir a melhor forma de se ter o aprendizado.

Segundo Machado (1999), baseado nos estudos de Artigue (1996), a Engenharia Didática, construída pela Didática da Matemática possui uma dupla função, podendo ser compreendida como uma metodologia de pesquisa (resultante de uma análise a priori) e também como uma produção para o ensino de algum conteúdo específico, ou seja, uma sequência de aula(s), concebida(s), organizada(s) e articulada(s) no tempo, de maneira coerente, por um professor.

O termo é análogo ao trabalho de um engenheiro, só que aqui trabalha-se com o educador, o qual, prepara um projeto que será desenvolvido em sala de aula. Por se tratar de uma analogia, temos aqui umas etapas a serem seguidas: planejar, observar, executar, adaptar. Sendo um trabalho dinâmico onde o professor é o grande pesquisador.

A Engenharia Didática foi inicialmente concebida como uma forma de concretizar os ideais e pressupostos de investigação da escola da Didática da Matemática Francesa. Ela possui duas funções: ser utilizada como metodologia qualitativa de pesquisa na área de Matemática e ser utilizada para a elaboração de situações didáticas que configurem um quadro de aprendizagem significativa em sala de aula. Utilizaremos neste trabalho, essas duas funções.

Como metodologia qualitativa de nossa pesquisa e também prover o professor de referencial propício e motivador para conceber, aplicar e posteriormente analisar algumas tarefas didáticas.

As duas funções assumidas pela Engenharia Didática são denominadas por Chevallard (2009) como: “engenharia didática de 1º geração”, que é aquela voltada para o uso em sala de aula, onde o pesquisador tem que descrever e analisar os resultados da aplicação e "engenharia didática de 2º geração", sendo esta voltada para a pesquisa e conhecimento a respeito das metodologias e recursos que conduzem a um melhor ensino e aprendizagem, ou seja, está ligada à formação do professor. No Quadro 2, algumas características dessas engenharias são apresentadas.

Quadro 2 – Engenharias de 1º e 2º geração, objetivos e aspectos centrais.

	Objetivo(s)	Aspectos centrais
ED 1ª geração	Elaborar e estudar propostas de transposição didática para o ensino.	Metodologia de pesquisa e produto
ED 2ª geração	Determinar os princípios que comandam a engenharia que se quer transformar em recurso para o ensino regular, e estudar as condições de sua divulgação.	Três funções não independentes: a investigação, o desenvolvimento e a formação de professores por meio da análise. Necessita de vários níveis de construção.

Fonte: Almouloud e Silva (2010, p. 46).

Segundo Souza (2013), podemos dividir a Engenharia Didática em quatro fases metodológicas: primeira fase é a das análises prévias, a segunda é a da concepção e análise a priori, a terceira é a da experimentação e quarta é a da análise a posteriori e validação da experiência.

Segundo Artigue (1996), cada uma dessas fases é retomada e aprofundada ao longo do trabalho de pesquisa, em função das necessidades emergentes.

a) 1ª fase: de análises prévias:

Segundo Artigue (1996, p. 198), a primeira fase compreende as análises preliminares com as seguintes vertentes:

- Análise epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino;
- Análise do ensino habitual e dos seus efeitos;
- Análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que marcam a sua evolução;
- Análise do campo de constrangimento no qual virá a situar-se a realização didática efetiva;
- e, naturalmente, tendo em conta os objetivos específicos da investigação.

b) 2ª fase: de concepção e da análise a priori:

Segundo Artigue (1996, p. 202) descreve que para facilitar a análise dessa fase da engenharia é necessário distinguir dois tipos de variáveis de comando:

- as variáveis macro didáticas ou globais, que dizem respeito à organização global da engenharia;
- e as variáveis micro didáticas ou locais, que dizem respeito à organização local da engenharia, isto é, à organização de uma sessão ou de uma fase, podendo umas e outras ser, por sua vez, variáveis de ordem geral ou variáveis dependentes do conteúdo didático cujo ensino é visado.

Esses dois tipos de variáveis podem ser de ordem geral ou dependente do conteúdo matemático estudado e suas análises serão realizadas em três dimensões:

- a dimensão epistemológica (associada às características do saber),
- a dimensão cognitiva (associada às dimensões cognitivas dos alunos sujeitos da aprendizagem)
- a dimensão didática (associada às características do sistema de ensino, no qual os sujeitos estão inseridos).

Portanto, seu objetivo é:

[...] determinar de que forma permitem as escolhas efetuadas controlar os comportamentos dos alunos e o sentido desses comportamentos. Para isso, ela funda-se em hipóteses; será a validação destas hipóteses que estará, em princípio, indiretamente em jogo no confronto, operado na quarta fase, entre a análise a priori e a análise a posteriori. (Artigue, 1996, p. 205).

c) 3ª fase: de experimentação:

Nesta fase a sequência didática se caracteriza por esquema experimental (certificar os resultados com a análise teórica).

d) 4ª fase: de análise a posteriori e validação:

Fase onde analisa a produção do aluno em relação ao desenvolvimento da sequência didática no decorrer da experimentação e confronta as duas análises para ser validada.

Contemplam-se, nesta fase, as expectativas declaradas na análise a priori. Confrontam-se análise a priori e análise a posteriori, validando, ou não, a hipótese da pesquisa. No confronto dessas duas análises é que se emprega indispensavelmente a validação das hipóteses envolvidas na investigação (Artigue, 1996).

Ao se referir à engenharia didática de segunda geração, Perrin-Glorian (2009) afirma que o seu primeiro objetivo é o desenvolvimento de recursos para o ensino regular, ou a formação de professores. Sendo assim, necessita de vários níveis de construção. Podendo-se distinguir dois tipos de engenharias didáticas em função da pergunta inicial de investigação: Engenharia Didática para a Investigação (EDI) e Engenharia Didática de Desenvolvimento (EDD).

Para distinguirmos uma da outra, vejamos o Quadro 3 a seguir.

Quadro 3 – Comparando EDI e EDD.

Engenharias Didáticas 1º e 2º geração	
EDI	EDD
<ul style="list-style-type: none"> • Faz emergir fenômenos didáticos para estuda-los; • Visa um avanço no resultado de investigação, fazendo uso de experimentações montadas em função da questão de pesquisa; • Não há a preocupação imediata em divulgar as situações utilizadas. 	<ul style="list-style-type: none"> • Produzir recursos para professores ou para a formação de professores; • Liberdade de ação para o professor; • Aa investigação continua ser essencial, mas, as questões de investigação não são motivadas, em primeiro lugar, pela ampliação dos quadros teóricos; • Baseia-se na engenharia de 1º geração

Fonte: Almouloud e Silva (2010, p. 46).

Chevallard (2009) entende que a EDD será uma engenharia didática para uso, enquanto que a EDI servirá com engenharia didática para o conhecimento.

Para Brousseau (1996), o modelo de pesquisa da Engenharia Didática requer do pesquisador/professor a participação e análise das situações didáticas. Um elemento essencial da situação didática é sua intencionalidade de ser construída para a aprendizagem do estudante.

O estudo da Didática da Matemática estabelece que cabe ao professor fazer um duplo papel cíclico: procurar situações de aprendizagem onde os estudantes possam dar sentido ao conhecimento, através da contextualização e personalização do saber, num movimento de vivenciar o conhecimento pela ação do próprio estudante; ajudar os estudantes no sentido inverso, ou seja, descontextualizando e despersonalizando os conhecimentos, de modo análogo como fazem os matemáticos, o que conduz a tornar as produções dos estudantes fatos universais e reutilizáveis em outras situações e contextos.

O papel do professor é oferecer um conjunto de boas situações de ensino, de modo a aperfeiçoar a autonomia do estudante. Estas sequências de atividades devem permitir que o estudante atue sobre a situação, com a mínima interferência explícita ou condução do professor.

"Se uma situação leva o aluno à solução como um trem em seus trilhos, qual é a sua liberdade de construir seu conhecimento? Nenhuma" (Brousseau, 1996, p. 54).

No que se refere ao estudante, Brousseau (1996) afirma que inicialmente ele se defronta com situações intencionalmente elaboradas pelo professor, situadas em um ambiente propício de jogos e problemas, contexto este que deve propiciar o estímulo necessário e convidar os estudantes a tomar a iniciativa para a busca do conhecimento. Porém, os estudantes inicialmente não devem perceber os pressupostos didáticos envolvidos no objeto de estudo, a não ser pelo êxito de uma tarefa.

A seguir, temos o processo metodológico que o projeto visa trabalhar de acordo com a ótica da Engenharia Didática em cada uma de suas etapas ofertadas:

1° Etapa: Na Engenharia Didática sua primeira fase, está no processo de estudo do ambiente que irá se trabalhar, do conhecer a turma, e observar o que e quanto quero chegar. Nesse primeiro momento, irei realizar um pré-teste de conhecimentos prévios com os alunos em que eu seja capaz de obter e investigar o que o aluno sabe a respeito do assunto da atividade. Vamos objetivar as concepções, a percepção de aluno junto a matemática;

2° Etapa: Construir e adaptar a sequência didática a ser realizada com os alunos;

3° Etapa: Aplicar a sequência didática com os alunos diante do tema do Ensino de Probabilidade, pois é um assunto referente ao aprendizado dos alunos da 2° Série do Ensino Médio, onde pode-se trabalhar os experimentos determinísticos e aleatórios, eventos, árvore de possibilidades e análise combinatória. Discutir e experimentar possíveis estratégias de resoluções, momento de ver o quanto dominam e compreendem do assunto e inseri-los na aprendizagem através das etapas em que serão inseridos para a realização da atividade;

4° Etapa: Nesta etapa, faremos uma comparação, uma documentação sobre como foi a aprendizagem desses alunos, das ações realizadas com os professores para que possa avaliar a evolução e aprendizagem do aluno com feedbacks e relatos de como foi a realização da sequência e realizar um pós-teste para observar o que os alunos acharam e compreenderam do processo dessa atividade.

3.3 Contrato didático

Zabala (1998), a quem tomamos como referência em relação aos aspectos pedagógicos para a elaboração da Sequência Didática defende que professores e estudantes têm papéis muito ativos durante a realização da atividade pedagógica. Afirma que as relações interativas em sala de aula devem permear as situações didáticas. Mais ainda, indica que o estudante deve elaborar representações pessoais sobre o conteúdo objeto de aprendizagem e que com isso ele construirá uma interpretação pessoal e subjetiva do que está sendo tratado; já ao se referir ao professor, orienta que este deve estabelecer uma série de relações que conduzam o estudante a isso.

No que e se refere à Engenharia Didática, foi possível notar que estudantes também assumem constantemente um papel ativo na construção do seu conhecimento, ou seja, estão na centralidade do processo de ensino e aprendizagem.

Zabala (1998), Oliveira (2013) e Brousseau (1996) trabalham com a Sequência Didática de maneiras análogas. Possuem suas diferenças nos pormenores, mas não há a negação do cerne da proposta, que é colocar o estudante como um ator importante no processo de ensino e aprendizagem. Entretanto, para que isso se efetive, é necessário que os papéis do professor e dos estudantes fiquem estabelecidos previamente. É nesse contexto que precisamos nos remeter ao contrato didático.

O que é Contrato Didático?

Chama-se contrato didático o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor. [...] Esse contrato é o conjunto de regras que determinam uma pequena parte explicitamente, mas sobretudo implicitamente, do que cada parceiro da relação didática deverá gerir e daquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro (Brousseau, 1986 e Silva, 2008, p. 50).

Embora o contrato didático tenha a maior parte do seu funcionamento sendo dada implicitamente, ele é responsável pelas relações entre professores e estudantes na sala de aula, definindo os papéis de cada um. Sendo possível observar que, segundo Brousseau (1996), essas relações se fundamentam em três polos: professor, aluno e saber. O elo entre esses três polos é construído a partir do contrato didático.

Em relação ao contrato didático, temos a descrição de três modelos de referência: normativo, indicativo e aproximativo.

No modelo normativo, o centro do processo está no conteúdo e pode ser caracterizado como uma sequência de exposição seguida de atividades a serem realizadas pelos estudantes.

Aqui cabe ao professor, intermediário do saber, fornecer o conhecimento acabado, explicando, dando exemplos e mostrando as noções que o estudante, sendo um sujeito receptivo e pouco participativo, deve escutar com atenção e depois aplicar o que lhe foi ensinado.

Em relação a esse tipo de comportamento de professores e estudantes, Silva (2008) afirma que:

[...] a prática pedagógica mais comum utilizada em Matemática parece ser aquela em que o professor cumpre seu contrato dando aulas expositivas e passando exercícios aos alunos [...]. O aluno por sua vez, cumpre seu contrato se ele bem ou mal compreendeu a aula dada e consegue resolver corretamente ou não os exercícios [...]. (Silva, 2008, p. 52).

Silva (2008) defende que os efeitos desse tipo de prática são: resolver a questão no lugar do estudante, quando este encontra alguma dificuldade; acreditar que os estudantes darão, naturalmente, a resposta esperada; substituir o estudo de uma noção complexa por uma analogia; interpretar um comportamento banal do estudante como uma manifestação de um saber culto; tomar como objeto de estudo uma técnica que se presume seja útil na resolução de um determinado problema, perdendo de vista o verdadeiro saber matemático a ser desenvolvido.

O modelo indicativo é centrado no estudante. Nele, o professor atende as demandas do estudante, ouvindo-o, detectando seus interesses, ajudando a utilizar fontes de informações. O estudante por sua vez, estuda, busca informação, organiza informações, aprende. O saber responde aos interesses do estudante, às suas necessidades, à sua vida cotidiana, ficando a estrutura do saber em segundo plano.

Aquele que tem sua centralidade voltada para a construção do saber por parte do estudante é o modelo aproximativo. Nesse modelo, o professor é responsável por propor e organizar sequências de situações que apresentem obstáculos aos estudantes, sugerir elementos convencionais do saber e organizar a comunicação da aula. Ao estudante, cabe o dever de ensaiar, buscar, propor situações. Sendo assim, este constrói esquemas de conhecimento cada vez mais ajustados à natureza do conteúdo, interagindo de maneiras diferentes. Para esse modelo, o ponto de partida é o conhecimento que os estudantes já possuem a respeito do saber, não para o estudante se tornar a peça principal, como no segundo modelo, mas para fazer as intervenções necessárias na situação didática de maneira que a construção do conhecimento seja garantida da maneira mais ampla possível.

Para Silva (2008), a estratégia pedagógica mais utilizada é aquela que se aproxima da tradicional, qual o professor ensina como fazer e o estudante exercita até aprender. Entretanto,

ele acredita que é necessária uma ruptura da negociação para que haja avanço na aprendizagem. Nessa perspectiva, defende que os estudantes, com a orientação e o auxílio do professor, devem criar suas próprias estratégias de aprendizagem.

Para Brousseau (1996), o mais importante não é explicitar e tornar extremamente claras todas as regras do contrato, até porque nele consta, além das condições explícitas pelas normas, interpretações subjetivas que não são totalmente previsíveis. Logo, o necessário é delinear os seus possíveis pontos de ruptura.

Neste trabalho optaremos pelo modelo aproximativo, uma vez que foi proposto o desenvolvimento de atividades que são obstáculos e desafios ao estudante, conduzindo-o a construção de seu conhecimento e o auxiliando sempre que necessário. O professor será um mediador entre o saber e o estudante. Além disso, será um motivador, um incentivador, aquele que orienta no caminho que conduzirá à aprendizagem. Por outro lado, o estudante será o sujeito que tem um histórico de conhecimento que será aproveitado e aprimorado.

3.4 Sequência didática

A proposta dessa sequência didática foi pensada e baseada em “Os Passeios Aleatórios da Mônica”, para ser desenvolvida juntamente com os alunos da 2ª Série do Ensino Médio e analisada sob as considerações das orientações metodológicas da Engenharia Didática. As atividades a serem realizadas contam com análises preliminares, que foram feitas considerando o conhecimento prévio do aluno a respeito à experimentos aleatórios, probabilidade e pensando em suas dificuldades. Nelas constam também a concepção e a análise a priori de cada uma das situações didáticas, onde delimitamos as escolhas feitas e as características de cada tarefa, tentando prever certos comportamentos dos estudantes, tentando demonstrar como é possível controlar seus significados. Há também os preparativos para a experimentação e análise a priori e validação, tendo todo o processo de formulação e montagem de acordo com o contrato didático aproximativo com o aluno, incentivando e desafiando para novos conhecimentos.

A sequência didática foi construída, considerando três fases: a primeira consiste de um diagnóstico com o objetivo de verificar o que os estudantes sabem sobre probabilidade, via questionário, esta parte sendo a de concepção e da análise a priori da Engenharia Didática; a segunda se caracteriza pelo desenvolvimento de atividades com vistas à conceitualização e contextualização de uma situação problema (experimentação); ao concluir o trabalho propõe-se a realização de uma avaliação das aprendizagens, via questionários (de análise a posteriori e validação).

Tanto a primeira fase quanto a terceira fase serão a base para a realização do nosso teste e poder medir o aprendizado desenvolvido pelos alunos.

Para orientar na análise das tarefas, foi proposta nove questões, onde em cada uma faremos uma análise para observar os conhecimentos e/ou dificuldades que os estudantes podem apresentar no processo de resolução. A Segunda fase, será o desenvolvimento da sequência didática “Os Passeios aleatórios da Mônica” que foi reorganizada como “Passeios aleatórios do Homem de Ferro” onde indicaremos os caminhos metodológicos e os processos experimentais para os alunos desenvolverem suas atividades.

A primeira parte contém nove questões para serem resolvidas e entregues ao professor que serão parametrizadas pelo professor em uma planilha de análise.

A segunda atividade será desenvolvida em grupos de, no máximo quatro pessoas, cujas as tarefas exigem paciência, atenção, colaboração, cooperação e anotações. Todo o material e processos a serem utilizados será descrito no processo experimental.

A terceira parte contém novamente, nove questões para serem respondidas individualmente e entregues para que o professor possa analisar e parametrizar as informações e discutir a pergunta introdutória de sua tese.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Quando apresentamos a ideia da sequência didática aos estudantes, tivemos o empenho e a dedicação dos mesmos em realizar da melhor forma possível. Eles foram informados que não era necessário saber tudo, que estava realizando um estudo que seria desenvolvido em três fases e que cada fase seria avaliada o desenvolvimento e aprendizagem para que houvesse uma discussão de uma melhor forma para os resultados analisados.

A aplicação das atividades do pré-teste, em sala de aula, foi pensada em uma habilidade específica para que cada questão e analisarmos o processo de aprendizagem do aluno.

Na primeira e na segunda questão era esperado que o aluno tivesse um conhecimento semântico das palavras aleatórios e determinístico para relacionar com a Matemática, o seu significado no desenvolvimento da resolução e do assunto que buscava trabalhar. Para essa questão, o aluno tinha a base do texto que já o auxiliava no significado esperado da resposta.

Questão 1 e 2 – Pré-teste:

- 1) O lançamento de uma moeda é um experimento aleatório ou determinístico? Justifique.
- 2) Uma panela com água para ferver e anotarmos a temperatura de ebulição da água é um experimento aleatório ou determinístico? Justifique.

Na terceira e na quarta questão o aluno precisava analisar o espaço amostral da situação, seja da situação ilustrada no texto e na imagem e fazer a análise das possibilidades de algo vir a acontecer, todas as possibilidades e o evento esperado. O aluno podia fazer diretamente por cálculo ou ilustrar as situações caso a caso.

Questão 3 e 4 – Pré-teste:

- 3) Em uma urna há 5 bolas identificadas pelas letras {A, B, C, D, E}. Sorteiam-se duas bolas, uma após a outra com reposição, e anota-se a configuração formada. Determine o espaço amostral possível.
- 4) Qual a chance ao lançar um dado de sair par? E ímpar?

Na quinta e na sexta questão convidamos os alunos a terem uma maior vivência com a situação que será estudada e contestarmos os seus conhecimentos e aprendizados seja por observação ou por habilidades já desenvolvidas a respeito das chances de algo a vir acontecer,

o aluno precisava saber e entender quantos caminhos era necessário para chegar ao herói e a partir disso analisar suas respostas.

Questão 5 e 6 – Pré-teste:

- 3) De quantas maneiras o Homem de Ferro pode visitar os Heróis? Justifique.
- 4) Todos os Heróis tem a mesma chance de serem visitados? Por que você acha isso?

Na sétima questão espero que o aluno relacione uma nova situação com o dado que daria a mesma chance de ocorrer, como com a situação apresentada.

Questão 7 – Pré-teste:

- 5) Que outra situação com o dado poderíamos pensar sem que alterasse as possibilidades?

Na oitava e nona questão o aluno é convidado a pensar pelas ideias de probabilidade e calcular as probabilidades de algo acontecer.

Questão 8 e 9 – Pré-teste:

- 8) (ENEM- adaptada) Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso. Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?
- 9) Em um congresso compareceram oftalmologistas, ortopedistas e odontologistas, conforme apresentado na Figura 2:

Figura 2 - Quantidade de presentes em um congresso

	Homem	Mulher	Total
Oftalmologistas	17	14	31
Ortopedistas	12	18	30
Odontologistas	13	11	24
Total	42	43	85

Fonte: Magalhães e Lima (p. 52).

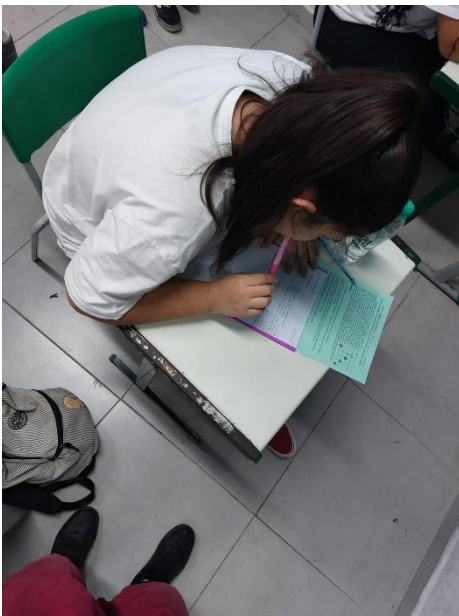
Ao final do congresso, houve o sorteio de um prêmio entre os participantes. Calcule a probabilidade de o profissional sorteado ser ortopedistas.

Conforme a realização de toda atividade os dados coletados foram para ser analisados pelo teste de McNemar e assim ser desenvolvida a sequência didática, pois para que estudantes aprendam, não basta apresentar-lhes o conteúdo. Segundo Zabala (1998):

[...] é necessário que, diante destes, possam atualizar seus esquemas de conhecimento, compará-los com o que é novo, identificar semelhanças e diferenças e integrá-las em seus esquemas, comprovar que o resultado tem certa coerência. Quando isso acontece, o estudante se depara com uma aprendizagem significativa. (Zabala, 1998, p. 37).

Aprendizagem significativa é o processo por meio do qual uma nova informação (um novo conhecimento) se relaciona de maneira não arbitrária à estrutura cognitiva do estudante. Para Ausubel (1963, p. 58), “a aprendizagem significativa é o mecanismo humano, por excelência, para adquirir e armazenar a vasta quantidade de ideias e informações representadas em qualquer campo de conhecimento”. Para que o mecanismo seja acionado, é preciso que o aprendiz já possua algum conhecimento prévio, ou seja, já deve existir uma estrutura cognitiva em funcionamento, como observamos a aluna e o aluno realizando uma das etapas da nossa sequência, conforme Figura 3 e Figura 4. Para falar em aprendizagem significativa, pensemos primeiro na relação entre a informação que se pretende transmitir e a assimilação desta informação pelo estudante.

Figura 3 - Aluna realizando Pré-Teste



Fonte: o autor.

Figura 4 - Aluno realizando Pré-Teste



Fonte: o autor.

4.1 Sequência didática – Passeios aleatórios

Neste tópico, mostraremos como foi desenvolvida as atividades propostas aos alunos, com as questões do pré-teste, o desenvolvimento da sequência didática e as questões do pós - teste.

4.1.1 Atividade introdutória, Pré-Teste - Sondagem

Inicialmente, os alunos foram convidados a conhecer a atividade introdutória através de uma história temática, que trabalhava com a ideia de possibilidades para o desenvolvimento de todas as nossas etapas.

TODOS OS HEROIS TÊM A MESMA CHANCE DE SER VISITADOS PELO HOMEM DE FERRO?

O HOMEM DE FERRO e outros heróis moram no mesmo bairro. A distância da casa do Homem de Ferro para a casa de THOR, HULK, CAPITÃO AMÉRICA, PANTERA NEGRA e HOMEM ARANHA é de quatro quarteirões, conforme o tabuleiro que está na sua mesa. O HOMEM DE FERRO costumava se reunir com os heróis individualmente para criarem estratégias para destruir Thanos durante os dias da semana em uma ordem pré-estabelecida: segunda-feira, Thor; terça-feira, Hulk; quarta-feira, Capitão América; quinta-feira, Pantera Negra e sexta-feira, Homem Aranha. Para tornar mais emocionantes as reuniões, os Vingadores combinaram que só iriam decidir o caminho que o Homem de Ferro deveria tomar de acordo com o jogo que havia criado. Para isso, na saída de sua casa e a cada cruzamento, o Homem de Ferro deve jogar um dado; se sair par (P), andará um quarteirão para o Norte, se sair ímpar (I), um quarteirão para o Leste. Cada jogada representa um quarteirão de percurso. O Homem de Ferro deve jogar o dado quatro vezes para poder chegar à casa dos heróis.

O primeiro teste a ser realizado com os alunos será uma atividade diagnóstica que constitui -se com 9 questões dissertativas onde será avaliado certo ou errado do aluno, as quais procuram determinar o que o aluno sabe sendo a base para a análise do ganho de aprendizado que será posteriormente realizado, as questões tem a ver com o a situação proposta a ser desenvolvida e com conhecimentos prévios que os alunos possam ter.

Pré-teste:

- 1.O lançamento de uma moeda é um experimento aleatório ou determinístico? Justifique.
- 2.Uma panela com água para ferver e anotarmos a temperatura de ebulição da água é um experimento aleatório ou determinístico? Justifique.
3. Em uma urna há 5 bolas identificadas pelas letras {A, B, C, D, E}. Sorteiam-se duas bolas, uma após a outra com reposição, e anota-se a configuração formada. Determine o espaço amostral possível.
- 4.Qual a chance ao lançar um dado de sair par? E ímpar?
- 5.De quantas maneiras o Homem de Ferro pode visitar os Heróis? Justifique.
- 6.Todos os Heróis tem a mesma chance de serem visitados? Por que você acha isso?
7. Que outra situação com o dado poderíamos pensar sem que alterasse as possibilidades?
8. (ENEM- adaptada) Em uma central de atendimento, com pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso. Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?
9. Em um congresso compareceram oftalmologistas, ortopedistas e odontologistas, conforme apresentado na Figura 5:

Figura 4 - Quantidade de presentes em um congresso

	Homem	Mulher	Total
Oftalmologistas	17	14	31
Ortopedistas	12	18	30
Odontologistas	13	11	24
Total	42	43	85

Fonte: Magalhães e Lima (p. 52).

Ao final do congresso, houve o sorteio de um prêmio entre os participantes. Calcule a probabilidade de o profissional sorteado ser ortopedistas.

4.1.2 Atividade introdutória, Sequência Didática

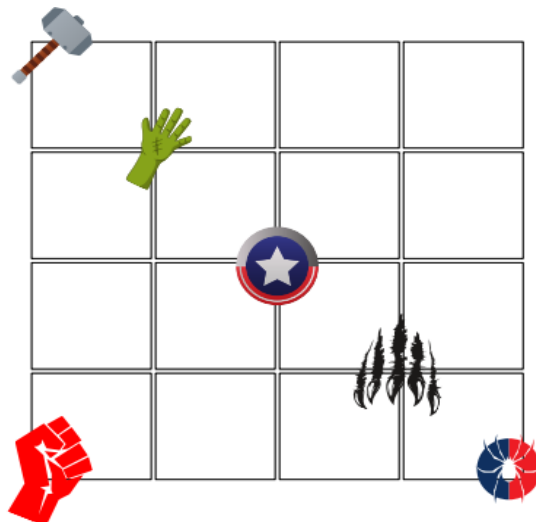
EXPERIMENTAÇÃO EM GRUPO **SEQUÊNCIA DIDÁTICA – PASSEIOS ALEATÓRIOS DO HOMEM DE FERRO**

Esse experimento é baseado em “Passeios Aleatórios da Mônica” e foi realizado com os alunos da 2º Série do Ensino Médio.

TODOS OS HEROIS TÊM A MESMA CHANCE DE SER VISITADOS PELO HOMEM DE FERRO?

O HOMEM DE FERRO e outros heróis moram no mesmo bairro. A distância da casa do Homem de Ferro para a casa de THOR, HULK, CAPITÃO AMÉRICA, PANTERA NEGRA e HOMEM ARANHA é de quatro quarteirões, conforme o tabuleiro que está na sua mesa. O HOMEM DE FERRO costumava se reunir com os heróis individualmente para criarem estratégias para destruir Thanos durante os dias da semana em uma ordem pré-estabelecida: segunda-feira, Thor; terça-feira, Hulk; quarta-feira, Capitão América; quinta-feira, Pantera Negra e sexta-feira, Homem Aranha. Para tornar mais emocionantes as reuniões, os Vingadores combinaram que só iria decidir o caminho que o Homem de Ferro deverá tomar de acordo com um jogo que criou. Para isso, na saída de sua casa e a cada cruzamento, o Homem de Ferro deve jogar um dado; se sair par(P), andará um quarteirão para o Norte, se sair ímpar(I), um quarteirão para o Leste. Cada jogada representa um quarteirão de percurso. O Homem de Ferro deve jogar o dado quatro vezes para poder chegar à casa dos heróis.

Figura 5 - Caminhos possíveis do experimento aleatório.



Fonte: o autor.

EXPERIMENTAÇÃO EM GRUPO

Cada grupo terá um tabuleiro e os personagens para que possam realizar o processo na prática, com as movimentações e anotações necessárias.

- **1º Passo:** Vocês devem lançar o dado quatro vezes, se sair par (P), o Homem de Ferro andará um quarteirão para o Norte, se sair ímpar (I), um quarteirão para o Leste;
- **2º Passo:** Repetir o experimento 30 vezes. E anotar em uma tabela, conforme o exemplo a seguir.

A seguir, temos os alunos resolvendo as atividades propostas pela sequência didática, conforme as Figura 7 e Figura 8.

Figura 6 - Grupos realizando a sequência didática



Fonte: o autor.

Figura 7 - Grupos realizando a sequência didática



Fonte: o autor.

Quadro 4 – Formulário para o experimento aleatório

REPETIÇÃO	SEQUÊNCIA	HERÓI VISITADO
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		
6.		
7.		
8.		
9.		
10.		
11.		
12.		
13.		
14.		
15.		
16.		
17.		
18.		
19.		
20.		
21.		
22.		
23.		
24.		
25.		
26.		
27.		
28.		
29.		
30.		

Fonte: o autor.

– **3º Passo:** Após a realização experimental e de acordo com o seu experimento:

COMPLETE O QUADRO:

Quadro 5 – Tabela de Distribuição de frequência/probabilidade

HERÓI	NÚMERO DE VEZES QUE FOI VISITADO	PROBABILIDADE
THOR		
HULK		
CAPITÃO AMERICA		
PANTERA NEGRA		
HOMEM ARANHA		
TOTAL	30	$30/30 = 1 = 1*100 = 100\%$

Fonte: o autor.

$$PROBABILIDADE = \frac{NÚMERO DE RESULTADOS DE UM EVENTO}{NÚMERO TOTAL DE RESULTADOS POSSÍVEIS}$$

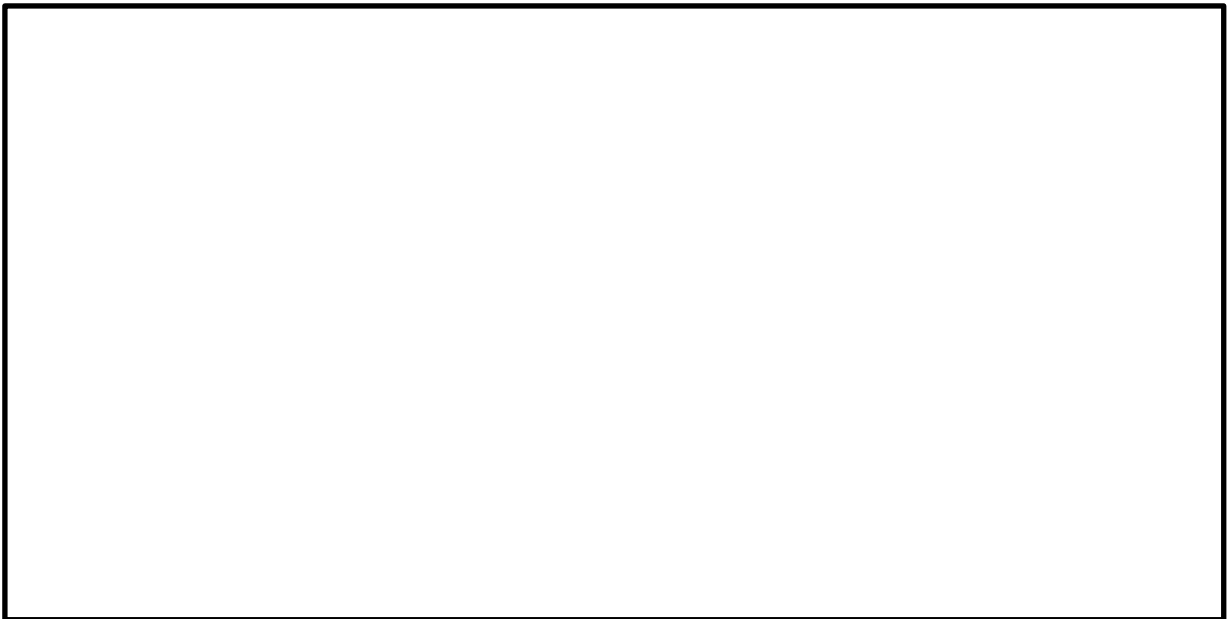
- a) Quem tem mais chance de ser visitado? Justifique?
- b) Existe a chance de algum herói não ser visitado? Justifique?
- c) Todos os amigos tem a mesma chance de ser visitado? Por que?

– **4º Passo:** Construir a árvore de possibilidades – Configuração do que se espera.

Anotar a sequência sorteada par(P) Norte e ímpar(I) Leste, o nº de pares e o amigo visitado, segue o exemplo: PIIP – 2 PARES – CAPITÃO AMERICA.

ÁRVORE DE POSSIBILIDADES:

Quadro 6 – Árvore de possibilidades



Fonte: o autor.

– **5º Passo:** Após a construção da árvore de possibilidades:

COMPLETE O QUADRO

Quadro 7 – Tabela de Distribuição de frequência/probabilidade

HERÓI	NÚMERO DE VEZES QUE FOI VISITADO	PROBABILIDADE
THOR		
HULK		
CAPITÃO AMERICA		
PANTERA NEGRA		
HOMEM ARANHA		
TOTAL	16	$16/16 = 1 = 1*100 = 100\%$

Fonte: o autor.

$$PROBABILIDADE = \frac{NÚMERO DE RESULTADOS DE UM EVENTO}{NÚMERO TOTAL DE RESULTADOS POSSÍVEIS}$$

- a) Quem tem mais chance de ser visitado? Justifique?
- b) Existe a chance de algum herói não ser visitado? Justifique?
- c) Todos os amigos tem a mesma chance de ser visitado? Por que?

– **6º Passo:** Comparação

Diante dos dois procedimentos realizados, quais os comentários, observações que o grupo pode dizer a respeito do que vivenciou. Faça uma comparação entre o experimental e o que se espera referente as probabilidades encontradas.

4.1.3 Atividade introdutória, Pós - Teste

Após a realização das atividades propostas, agora vamos avaliar o quanto o processo ajuda no desenvolvimento de raciocínio e habilidades desenvolvidas por vocês. A seguir teremos algumas questões a serem respondidas de acordo com a atividade e outras para exemplificar sua aplicação em livros, vestibulares.

RESPONDA:

- 1) Condições climáticas do próximo domingo é um fenômeno aleatório ou determinístico? Justifique.
- 2) Se tomarmos uma barra de ouro, esquentando-a, sob condições normais, entrará em fusão a 1.064°C. Isso é um fenômeno aleatório ou determinístico?
- 3) Quais caminhos possíveis para o Homem de Ferro chegar ao Capitão América? Liste o espaço amostral.
- 4) Em uma gaveta existem 1 par de meias pretas e 1 par de meias brancas. Liste o espaço amostral se eu retirar ao acaso 2 meias com reposição.
- 5) De um grupo de seis pessoas (A, B, C, D, E, F), sorteiam-se duas, uma após a outra, com reposição. Determine o número de possibilidades possíveis disso acontecer.
- 6) Se eu lançar um dado primeiro e você lançar depois, quem tem a maior chance de tirar par: eu ou você? Por quê?

- 7) Crie uma situação que envolva um experimento aleatório e determine o espaço amostral e um evento para a situação proposta.
- 8) As bolas usadas no bingo são enumeradas 1, 2, 3, ..., 75, se uma dessas bolas é extraída ao acaso, qual é a probabilidade de: ser um número par;
- 9) O Quadro 8, a seguir, apresenta informações de alunos de uma universidade quanto as variáveis: Período, Sexo e Opinião sobre a Reforma Agrária. Determine a probabilidade de escolhermos: Uma mulher contrária a reforma agrária.

Quadro 8 – Tabela de Distribuição de frequência/probabilidade

Período	Sexo	Reforma Agrária		
		Contra	A Favor	Sem Opinião
Diurno	Feminino	2	8	2
	Masculino	8	9	8
Noturno	Feminino	4	8	2
	Masculino	12	10	1

Fonte: Heliezer Santos.

4.2 Resultados

Nesta subseção temos os resultados tabelados de todas as questões realizadas na pesquisa. Os resultados foram analisados pelo teste de McNemar (ver a Seção 2) e construímos as tabelas 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 11. A partir dessas tabelas obtemos o valor do qui-quadrado observado e vamos compará-lo com a estatística do qui-quadrado crítico (tabelado), o qual é igual a $\chi^2 = 3,84$, com grau de liberdade igual a 1 e nível de significância $\alpha = 0,05$. Porém devido sua análise ser bem específica, utilizamos também uma escala de aprendizagem gama (γ), conforme a Figura 9, construída para mostrar algumas situações que o aprendizado ocorreu, mesmo sendo uma quantidade baixa (através de dados quantitativos, provas ao leitor que, qualquer informação relevante a mudança de aprendizado é válida para a análise que está sendo realizada) mas que não podemos deixar de avaliar no processo de aprendizagem. Discussões adicionais de escalas correlatas à utilizada neste trabalho, podem ser encontradas no trabalho de Pereira (2004).

Tabela 2 - Tabela bivariada contendo as quantidades de indivíduos que sentiram, “+”, ou não, “-”, o efeito da aplicação da técnica

		Depois	
		-	+
Antes	-	A	B
	+	C	D

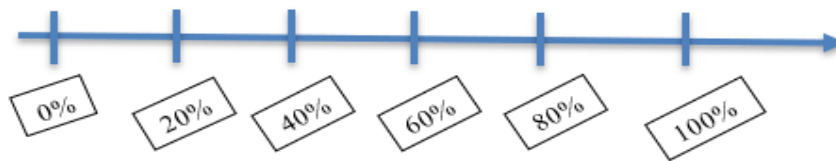
Fonte: o autor.

A escala gama (γ) para análise antes/depois, mas somente para questões corretas, é dada por:

$$\gamma = 1 - \frac{AC}{DC} \quad (2)$$

onde, AC e DC são, respectivamente, acertos antes e acertos depois.

Figura 8 - Escala de Proficiência de Acertos



Fonte: o autor.

No Quadro 9, temos os intervalos percentuais relativos às proficiências de aprendizagem do aluno, vinculados à escala gama, que se refere à porcentagem de acertos, antes e depois. Nesses intervalos, a aprendizagem do aluno será observada por uma análise de proficiência: muito pouco, pouco, regular, bom e muito bom para serem comparadas com os dados do teste de McNemar.

Quadro 9 – Valores de referência de Proficiência	
INTERVALO	PROFICIÊNCIA
0 A 20%	MUITO POUCO
20 A 40%	POUCO
40 A 60%	REGULAR
60 A 80%	BOM
80% A 100%	MUITO BOM

Fonte: o autor.

4.3 Análise de dados

Nesta seção iremos analisar as questões de 1 até 9, inserindo tabelas para utilização do teste de McNemar e escala gama (Quadro 9).

4.3.1 Questão 1

Teste de McNemar

Na Tabela 3 temos as quantidades de indivíduos que sentiram, “+”, ou não, “-”, o efeito da aplicação da técnica, a qual realizaremos o teste de McNemar. Neste caso, o qui-quadrado observado é $\chi_0^2 = 0,17$. Como $\chi_0^2 < \chi^2$ o teste de hipótese nos informa que não devemos recusar a hipótese nula, assim, temos que não ocorreu mudança no aprendizado do aluno.

Tabela 3 - Tabela bivariada relativa à questão 1

		Depois	
		-	+
Antes	-	15	2
	+	4	1

Fonte: o autor.

Escala de aprendizado

No Quadro 10 temos as quantidades de alunos que responderam corretamente, antes, 17, e depois, 19, e da quantidade de alunos que responderam incorretamente, antes, 5, e depois, 3. Verificamos que está de acordo com o resultado trazido pelo teste de hipótese. No Quadro 11, trazemos os valores separados antes e depois dos testes em valor percentual para análise do índice gama subsequente e para uma visualização melhor do que estamos querendo analisar.

Quadro 10 – Resultados, relativo à questão 1

	Antes	Depois
Correto	17	19
Incorreto	5	3

Fonte: o autor.

Quadro 11 – Acertos e erros antes e depois do teste referente a questão 1

Q1 - PRE-TESTE		Q1 - PÓS TESTE	
Acertos	Erros	Acertos	Erros
17	5	19	3
77%	23%	86%	14%

Fonte: o autor.

Discussão dos resultados

Após o experimento prático, esperava-se que o aluno tivesse percebido que, como realizou lançamentos de dados e em cada situação estava dando uma combinação possível de caminhos para o Homem de Ferro, essa pergunta poderia ter 100% de acerto após o teste. Como tivemos já no pré-teste um número alto de acertos essa questão ao ser analisada pelo Teste de McNemar gerou uma resposta de análise muito baixa, o que acabou não ocorrendo uma mudança de aprendizado, pois se olharmos percentualmente, foi um aumento mínimo o que faz pelo teste de hipótese dizer que não houve mudança. O teste de McNemar diz que devemos “não rejeitar hipótese nula”, assim não ocorre mudança no aprendizado ao se aplicar a sequência didática.

Nessa questão a escala gama é $\gamma = 10,5\%$, pelo Quadro 9, podemos observar que o aprendizado que buscamos avaliar foi considerado “muito pouco”, porém podemos observar que mesmo sendo pequena é importante para nossa análise e se tivéssemos somente com o teste de McNemar, seria uma questão que iremos considerar descartada em nossa análise de aprendizagem, por não ter tido um qui-quadrado superior ao esperado para considerar mudança de aprendizado.

4.3.2 Questão 2

Na Tabela 4 temos as quantidades de indivíduos que sentiram, “+”, ou não, “-”, o efeito da aplicação da técnica, a qual realizaremos o teste de McNemar. Neste caso, o qui-quadrado observado é $X_0^2 = 0$. Como $X_0^2 < X^2$, o teste de hipótese nos informa que não devemos recusar a hipótese nula, assim, temos que não ocorreu mudança no aprendizado do aluno.

Tabela 4 - Tabela bivariada relativa à questão 2.

		Depois	
		-	+
Antes	-	21	1
	+	0	0

Fonte: o autor.

Escala de aprendizado

No Quadro 12 temos as quantidades de alunos que responderam corretamente, antes, 22, e depois, 21, e da quantidade de alunos que responderam incorretamente, antes, 0, e depois, 1. Verificamos que está de acordo com o resultado trazido pelo teste de hipótese. No Quadro 13 trazemos os valores separados antes e depois dos testes em valor percentual para análise do índice gama subsequente e para uma visualização melhor do que estamos querendo analisar.

Quadro 12 – Resultados, relativo à questão 2.

	Antes	Depois
Correto	22	21
Incorreto	0	1

Fonte: o autor.

Quadro 13 – Acertos e erros antes e depois do teste referente à questão 2

Q2 - PRE-TESTE		Q2 - PÓS TESTE	
Acertos	Erros	Acertos	Erros
22	0	21	1
100%	0%	95%	5%

Fonte: o autor.

Discussão dos resultados

Essa questão traz a mesma temática de análise da questão 1, porém a primeira tínhamos um experimento aleatório, agora temos uma situação determinística que já é predeterminado e sabemos que nenhuma sorte ou situação altera o que já está comprovado. Então, pela vivência do processo prático, enfatizar para o aluno essa diferença de situações que estão comparando.

Ao olharmos para o teste de hipótese, ocorre que no pré-teste tivemos apenas 1 erro, então partimos do princípio de que o aluno já tem isso predeterminado em sua aprendizagem.

Então quando se realizou o pós – teste, observa-se um erro, atingindo aquele aluno que pode ter ‘chutado’ inicialmente sua resposta e após a experiência comprovou-se que estava errado em sua resposta. Então novamente ao avaliarmos o teste de hipótese não tivemos mudança no processo de aprendizagem do aluno. Assim, podemos dizer que os seus conhecimentos só foram salientados com mais informações a respeito do que para eles era correto. O teste de McNemar traz que devemos “não rejeitar hipótese nula”, assim não ocorreu mudança no aprendizado ao se aplicar a sequência didática.

Na Questão 2 temos a escala gama = - 4,75%. O sinal negativo significa que o número de acertos “antes” é maior que o número de acertos “depois” e, com isso, podemos utilizar o Quadro 9, concluindo que ocorreu muito pouca proficiência no aprendizado, estando de acordo com o teste de McNemar, para qui-quadrado = 0. Dessa forma, intuir que alguns alunos tinham suas dúvidas, e eles “chutaram” uma resposta para uma questão com duas opções.

4.3.3 Questão 3

Na Tabela 5 temos as quantidades de indivíduos que sentiram, “+”, ou não, “-”, o efeito da aplicação da técnica, a qual realizaremos o teste de McNemar. Neste caso, o qui-quadrado observado é $X_0^2 = 4,90$. Como $X_0^2 > X^2$ o teste de hipótese nos informa que devemos recusar a hipótese nula, assim, temos que ocorreu mudança no aprendizado do aluno.

Tabela 5 - Tabela bivariada relativa à questão 3.

		Depois	
		-	+
Antes	-	6	1
	+	9	6

Fonte: o autor.

Escala de aprendizado

No Quadro 14 temos as quantidades de alunos que responderam corretamente, antes, 7, e depois, 15, e da quantidade de alunos que responderam incorretamente, antes, 22, e depois, 7. Verificamos que está de acordo com o resultado trazido pelo teste de hipótese. No Quadro 15 trazemos os valores separados antes e depois dos testes em valor percentual para análise do índice gama subsequente e para uma visualização melhor do que estamos querendo analisar.

Quadro 14 – Resultados, relativo à questão 3.

	Antes	Depois
Correto	7	15
Incorreto	15	7

Fonte: o autor.

Quadro 15 – Acertos e erros antes e depois do teste referente à questão 3

Q3 - PRE-TESTE		Q3 - POS-TESTE	
Acertos	Erros	Acertos	Erros
7	15	15	7
32%	68%	68%	32%

Fonte: o autor.

Discussão dos resultados

Tanto no pré como no pós-teste falou sobre a ideia de espaço amostral, sobre todas as possibilidades. A nossa parte prática do experimento deixou bem claro com a realização deles que estavam observando todas as ocorrências possíveis de um evento acontecer. Então experimentalmente viram que havia uma combinação possível que chegava em cada super herói e viram na parte teórica pela árvore de possibilidades que isso era limitado a uma quantidade exata. Nesta questão tivemos a ocorrência de aprendizado após o uso da “técnica” do Teste de McNemar, que o aluno consegue relacionar o que vivenciou com a questão proposta e eles puderem demonstrar isso de diversas formas em suas respostas. Aqui rejeitamos a hipótese nula e observamos uma enorme evolução do aprendizado.

Nessa questão a escala gama $\gamma = 53,5\%$, podemos observar que o aprendizado que buscamos avaliar foi considerado “regular” pela escala construída pelo autor. O que se for comparado com o resultado obtido pelo teste de McNemar, temos uma equivalência de resultados positivos pela mudança de aprendizado esperado.

4.3.4 Questão 4

Na Tabela 6 temos as quantidades de indivíduos que sentiram, “+”, ou não, “-”, o efeito da aplicação da técnica, a qual realizaremos o teste de McNemar. Neste caso, o qui-quadrado observado é $X_0^2 = 0$. Como $X_0^2 < X^2$ o teste de hipótese nos informa que não devemos recusar a hipótese nula, assim, temos que não ocorreu mudança no aprendizado do aluno.

Tabela 6 - Tabela bivariada relativa à questão 4.

		Depois	
		-	+
Antes	-	12	3
	+	4	3

Fonte: o autor.

Escala de aprendizado

No Quadro 16 temos as quantidades de alunos que responderam corretamente, antes, 15, e depois, 16, e da quantidade de alunos que responderam incorretamente, antes, 7, e depois, 6. Verificamos que está de acordo com o resultado trazido pelo teste de hipótese. No Quadro 17 trazemos os valores separados antes e depois dos testes em valor percentual para análise do índice gama subsequente e para uma visualização melhor do que estamos querendo analisar.

Quadro 16 – Resultados, relativo à questão 4.

	Antes	Depois
Correto	15	16
Incorreto	7	6

Fonte: o autor.

Quadro 17 – Acertos e erros antes e depois do teste referente a questão 4

Q4 - PRE-TESTE		Q4 - PRE-TESTE	
Acertos	Erros	Acertos	Erros
15	7	16	6
68%	32%	72%	28%

Fonte: o autor.

Discussão dos resultados

Essa questão buscava do aluno inicialmente uma intuição do que convive desde criança, já é comum conhecer e saber os lados possíveis da moeda que são duas e que a possibilidade de cada seria 50%, então se esperava um domínio sobre essa relação juntando com a ideia de espaço amostral que seria as possibilidades de cair ao lançar e poder visualizar isso na prática com a teoria. No pós - teste, a situação proposta era a mesma, só que com a ideia de pares de meia onde esse aluno precisaria entender as possibilidades que temos e como seria as possíveis combinações. Esperava-se que montasse o espaço amostral e além de tudo que existia a

reposição. O teste de McNemar traz que devemos “não rejeitar hipótese nula”, assim não ocorre mudança no aprendizado ao se aplicar a sequência didática.

Nessa questão, a escala gama é $\gamma = 6,25\%$. O nosso gama encontrado traduz um pouco o que o teste de McNemar avaliou e temos aqui, uma pequena parcela de aprendizado que levamos em consideração de acordo com a nossa escala de proficiência que consideramos “muito pouco”. Porém um valor que no quantitativo final nos faz ver que temos uma pequena mudança em algum aluno.

4.3.5 Questão 5

Na Tabela 7 temos as quantidades de indivíduos que sentiram, “+”, ou não, “-”, o efeito da aplicação da técnica, a qual realizaremos o teste de McNemar. Neste caso, o qui-quadrado observado é $\chi_0^2 = 10,3$. Como $\chi_0^2 > \chi^2$ o teste de hipótese nos informa que devemos recusar a hipótese nula, assim, temos que ocorreu mudança no aprendizado do aluno.

Tabela 7 - Tabela bivariada relativa à questão 5.

		Depois	
		-	+
Antes	-	2	0
	+	12	8

Fonte: o autor.

Escala de aprendizado

No Quadro 18 temos as quantidades de alunos que responderam corretamente, antes, 2, e depois, 14, e da quantidade de alunos que responderam incorretamente, antes, 20, e depois, 8. Verificamos que está de acordo com o resultado trazido pelo teste de hipótese. No Quadro 19 trazemos os valores separados antes e depois dos testes em valor percentual para análise do índice gama subsequente e para uma visualização melhor do que estamos querendo analisar.

Quadro 18 – Resultados, relativo à questão 5.

	Antes	Depois
Correto	2	14
Incorreto	20	8

Fonte: o autor.

Quadro 19 – Acertos e erros antes e depois do teste referente à questão 5

Q5 - PRE-TESTE		Q5 - PÓS-TESTE	
Acertos	Erros	Acertos	Erros
2	20	14	8
9%	91%	64%	36%

Fonte: o autor.

Discussão dos resultados

Essa questão trouxe a análise numérica do espaço amostral ao aluno, foi para avaliar se conseguia assimilar a questão com o processo prático de uma forma mais rápida do que todo o processo da árvore, foi pensada na ideia do princípio multiplicativo.

O teste de hipótese nos mostrou que ocorreu sim a mudança de aprendizado, o aluno foi capaz de entender a ideia e interpretar a questão sem precisar realizar a primeira parte experimental e ir direto para o cálculo de possibilidades. O teste de McNemar diz que devemos “rejeitar hipótese nula”, assim ocorreu mudança no aprendizado ao se aplicar a sequência didática.

Nessa questão, a escala gama é $\gamma = 85,7\%$ pelo Quadro 9 na qual podemos observar que o aprendizado que buscamos avaliar foi considerado “muito bom” pela escala criada pelo autor. Que comparado com o teste de McNemar temos uma análise perfeita do ocorrido pelos dois testes.

4.3.6 Questão 6

Na Tabela 8 temos as quantidades de indivíduos que sentiram, “+”, ou não, “-”, o efeito da aplicação da técnica, a qual realizaremos o teste de McNemar. Neste caso, o qui-quadrado observado é $X_0^2 = 13,06$. Como $X_0^2 > X^2$ o teste de hipótese nos informa que devemos recusar a hipótese nula, assim, temos que ocorreu mudança no aprendizado do aluno.

Tabela 8 - Tabela bivariada relativa à questão 6.

		Depois	
		-	+
Antes	-	3	0
	+	15	4

Fonte: o autor.

Escala de aprendizado

No Quadro 20 temos as quantidades de alunos que responderam corretamente, antes, 3, e depois, 18, e da quantidade de alunos que responderam incorretamente, antes, 19, e depois, 4. Verificamos que está de acordo com o resultado trazido pelo teste de hipótese. No Quadro 21, trazemos os valores separados antes e depois dos testes em valor percentual para análise do índice gama subsequente e para uma visualização melhor do que estamos querendo analisar.

Quadro 20 – Resultados, relativo à questão 6.

	Antes	Depois
Correto	3	18
Incorreto	19	4

Fonte: o autor.

Quadro 21 – Acertos e erros antes e depois do teste referente à questão 6

Q6 - PRE-TESTE		Q6 - PÓS-TESTE	
Acertos	Erros	Acertos	Erros
3	19	18	4
14%	86%	81%	19%

Fonte: o autor.

Discussão dos resultados

Mostrou pelo teste de hipótese, como pode mudar o aprendizado de um aluno quando realizado juntamente com o processo prático, como os alunos vivenciaram uma situação em que dependia da sorte, do acaso. Eles puderam perceber nessa situação que não existe uma certeza do que ocorrerá e sim que tudo depende do experimento aleatório. Nessa situação tivemos uma alta porcentagem de acertos após a realização da atividade, comprovando que existe sim a ocorrência de mudança no aprendizado. O teste de McNemar recomenda que devemos “rejeitar hipótese nula”, indicando que ocorreu mudança no aprendizado ao se aplicar a sequência didática.

Nessa questão, a escala gama é $\gamma = 83,3\%$. Pelo Quadro 9, podemos observar que o aprendizado que buscamos avaliar foi considerado “muito bom” pela escala criada pelo autor. Deixando evidente neste caso que ocorreu uma mudança de aprendizado significativa durante o processo de ensino e aprendizagem.

4.3.7 Questão 7

Na Tabela 9 temos as quantidades de indivíduos que sentiram, “+”, ou não, “-”, o efeito da aplicação da técnica, a qual realizaremos o teste de McNemar. Neste caso, o qui-quadrado observado é $X_0^2 = 5,82$. Como $X_0^2 > X^2$ o teste de hipótese nos informa que devemos recusar a hipótese nula, assim, temos que ocorreu mudança no aprendizado do aluno.

Tabela 9 - Tabela bivariada relativa à questão 7.

		Depois	
		-	+
Antes	-	1	1
	+	10	10

Fonte: o autor.

Escala de aprendizado

No Quadro 22, temos as quantidades de alunos que responderam corretamente, antes, 2, e depois, 11, e da quantidade de alunos que responderam incorretamente, antes, 20, e depois, 11. Verificamos que está de acordo com o resultado indicado pelo teste de hipótese. No Quadro 23, trazemos os valores separados antes e depois dos testes em valor percentual para análise do índice gama subsequente e para uma visualização melhor do que estamos querendo analisar.

Quadro 22 – Resultados, relativo à questão 7.

	Antes	Depois
Correto	2	11
Incorreto	20	11

Fonte: o autor.

Quadro 23 – Acertos e erros antes e depois do teste referente à questão 7

Q7 - PRE-TESTE		Q7 - POS-TESTE	
Acertos	Erros	Acertos	Erros
2	20	11	11
9%	91%	50%	50%

Fonte: o autor.

Discussão dos resultados

Pode-se observar que o aluno conseguiu assimilar todo o trabalho realizado em grupo e individual, essa questão trazia todo o conteúdo trabalhado pelo processo experimental e o aluno precisava criar uma situação, montar o espaço amostral e dizer a quantidade de possibilidades. Como vivenciaram, conheceram o processo aleatório, eles foram capazes de criar suas situações e montar seus casos para um estudo. O Teste de Hipótese mostrou que ocorreu uma mudança no aprendizado, confirmando que a aprendizagem significativa ocorre quando existe um propósito. Uma questão que envolvia todo o trabalho e que pode ser desenvolvida pela maioria da melhor forma possível. O teste de McNemar recomenda que devemos “rejeitar hipótese nula”, assim ocorreu mudança no aprendizado ao se aplicar a sequência didática.

Nessa questão a escala gama é $\gamma = 83,3\%$. Pelo Quadro 9 podemos observar que o aprendizado que buscamos foi considerado “muito bom” pela escala criada pelo autor, confirmando o teste de hipótese.

4.3.8 Questão 8

Na Tabela 10 temos as quantidades de indivíduos que sentiram, “+”, ou não, “-”, o efeito da aplicação da técnica, a qual realizaremos o teste de McNemar. Neste caso, o qui-quadrado observado é $X_0^2 = 0$. Como $X_0^2 < X^2$, o teste de hipótese nos informa que não devemos recusar a hipótese nula, assim, temos que não ocorreu mudança no aprendizado do aluno.

Tabela 10 - Tabela bivariada relativa à questão 8.

		Depois	
		-	+
Antes	-	6	6
	+	5	5

Fonte: o autor.

Escala de aprendizado

No Quadro 24 temos as quantidades de alunos que responderam corretamente, antes, 12, e depois, 11, e da quantidade de alunos que responderam incorretamente, antes, 10, e depois, 11. Verificamos que está de acordo com o resultado trazido pelo teste de hipótese. No Quadro

25, trazemos os valores separados antes e depois dos testes em valor percentual para análise do índice gama subsequente e para uma visualização melhor do que estamos querendo analisar.

Quadro 24 – Resultados, relativo à questão 8.

	Antes	Depois
Correto	12	11
Incorreto	10	11

Fonte: o autor.

Quadro 25 – Acertos e erros antes e depois do teste referente à questão 8

Q8 - PRE-TESTE		Q8 - POS-TESTE	
Acertos	Erros	Acertos	Erros
12	10	11	11
54%	46%	50%	50%

Fonte: o autor.

Discussão dos resultados

Aplica-se o cálculo da probabilidade simples enfatizando a ideia do espaço amostral e o evento que se espera. Nesta questão, ao olharmos aluno por aluno manteve-se igual os que realizaram corretamente no pré teste e no pós-teste. Então pelo teste de Hipótese não tivemos uma mudança de aprendizado esperado. Sendo que durante todo o processo experimental vivenciamos os cálculos, as comparações para que pudesse calcular corretamente e interpretar corretamente a questão. O teste de McNemar recomenda que devemos “não rejeitar hipótese nula”, assim não ocorreu mudança no aprendizado ao se aplicar a sequência didática.

Nessa questão a escala gama é $\gamma = -9\%$. O sinal negativo significa que o número de acertos “antes” é maior que o número de acertos “depois” e, com isso, podemos utilizar O Quadro 9, concluindo que ocorreu muito pouca proficiência no aprendizado, estando de acordo com o teste de McNemar, para qui-quadrado = 0. Além disso, observa-se que não teve uma evolução no aprendizado, estamos com uma análise abaixo de zero, o que se pode analisar que alguns alunos tinham suas dúvidas e tiveram uma questão de sorte.

4.3.9 Questão 9

Na Tabela 11 temos as quantidades de indivíduos que sentiram, “+”, ou não, “-”, o efeito da aplicação da técnica, a qual realizaremos o teste de McNemar. Neste caso, o qui-quadrado observado é $X_0^2 = 0,8$. Como $X_0^2 < X^2$ o teste de hipótese nos informa que não

devemos recusar a hipótese nula, assim, temos que não ocorreu mudança no aprendizado do aluno.

Tabela 11 - Tabela bivariada relativa à questão 9.

		Depois	
		-	+
Antes	-	3	1
	+	4	14

Fonte: o autor.

Escala de aprendizado

No Quadro 26 temos as quantidades de alunos que responderam corretamente, antes, 12, e depois, 11, e da quantidade de alunos que responderam incorretamente, antes, 10, e depois, 11. Verificamos que está de acordo com o resultado trazido pelo teste de hipótese. No Quadro 27, trazemos os valores separados antes e depois dos testes em valor percentual para análise do índice gama subsequente e para uma visualização melhor do que estamos querendo analisar.

Quadro 26 – Resultados, relativo à questão 9

	Antes	Depois
Correto	4	7
Incorreto	18	15

Fonte: o autor.

Quadro 27 – Acertos e erros antes e depois do teste referente à questão 9

Q9 - PRE-TESTE		Q9 - POS-TESTE	
Acertos	Erros	Acertos	Erros
4	18	7	15
18%	82%	32%	68%

Fonte: o autor.

Discussão dos resultados.

Essa questão era uma de maior dificuldade se comparada às demais, ela tinha um nível de complexidade interpretativa, pois os alunos necessitavam analisar e compreender as informações da tabela com o questionamento esperado da questão. O aluno até compreende a ideia principal do cálculo de probabilidade, porém quando é obrigado a analisar as informações

não consegue relacionar e obter os dados corretos. Assim, pelo teste de hipótese observamos que não ocorreu mudança de aprendizado na amostragem. Porém se olhar separadamente tivemos um crescimento de 3 alunos que acertaram mais do que erraram em relação ao pré-teste. O teste de McNemar recomenda que devemos “não rejeitar hipótese nula”, assim não ocorre mudança no aprendizado ao se aplicar a sequência didática.

Nessa questão a escala gama é $\gamma = 42,8\%$. Pelo Quadro 9 podemos observar que o aprendizado que buscamos foi considerado “regular”, o que quando comparado com o McNemar, diz que não houve aprendizado, mas podemos observar que houve uma crescente no aprendizado do aluno quando olhamos para as questões corretas.

4.4 Análise Geral

Esta subsecção apresenta uma análise geral da pesquisa, onde é apresentado uma comparativa entre os dados obtidos no teste realizado com as questões feitas.

O teste de McNemar foi realizado com vinte e dois alunos, onde analisamos se houve ou não uma aprendizagem significativa após a realização da sequência didática. O teste foi dividido em duas partes, contendo nove questões, abrangendo a mesma habilidade que o aluno precisava resolver, desta forma foi possível mensurar o desenvolvimento do aluno no processo avaliado.

No teste, foi observado mudança apenas em quatro questões. Como observado, alguns dados relativos ao teste acabavam sendo desconsiderados durante a análise. Desta forma foi necessário utilizar a escala elaborada de proficiência para considerar o que para muitos poderia ser relativamente baixo, mas para nós seria de grande importância.

Nosso objetivo era observar a aprendizagem significativa do aluno após uma sequência didática, utilizando a escala de proficiência criada para mostrar que existe sim em algumas questões, um aprendizado, o qual não foi observado durante a aplicação do Teste de McNemar, mas ao realizarmos um contraponto com os dados analisados, observa-se uma pequena ocorrência, colaborando para a análise de estudo em dados percentuais. Confirmando os dados em que o qui-quadrado dava zero e pelos dados percentuais teríamos informações negativas que para nossa análise seria desconsiderada.

Os dois testes realizados possibilitaram compreender o quanto algumas questões quando bem trabalhadas de forma prática, auxilia o aluno no processo de aprendizagem ativa, pois as questões com maior evolução são as que foram elaboradas em grupo, onde as perguntas feitas estavam relacionadas ao conceito desenvolvido por todos. Desta forma, unindo as duas análises foi possível considerar que sete questões promoveram mudanças significativas no aprendizado, indicando uma evolução e amadurecendo, com certeza assimilada da melhor forma pelo aluno, tendo uma aprendizagem significativa.

Incentivando o processo investigativo e científico, transformamos o aluno em protagonista do seu aprendizado sendo capaz de entender que muitas situações propostas se aproximam das situações cotidianas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho objetivou analisar, via questionários, a aprendizagem dos alunos por meio de uma sequência didática denominada “Passeios Aleatórios do Homem de Ferro” na turma da 2ª série do Ensino Médio, mensurando esta aprendizagem através do teste de hipótese, antes e depois da sequência que foi adaptada para uma versão mais contemporânea. Partimos do pressuposto que o estudo de probabilidade e aleatoriedade sempre fez parte da vida acadêmica do aluno desde o ensino básico.

Os alunos foram desafiados durante todo processo para sabermos se isso estava sendo conectado com os aprendizados de outras séries e para reconhecer o conhecimento prévio que é denominado por Ausebel de subsunçor. Nossa análise foi efetuada com vinte e dois alunos com realidades diferentes de conhecimento acadêmico.

A primeira atividade visava investigar se os saberes adquiridos poderiam ser considerados e entender se os mesmos saberiam do que estávamos falando, pois seria abordado durante todo o processo. A etapa apresentou basicamente, conceitos, conteúdos e exercícios de fixação para investigar de que forma ocorreu este aprendizado em suas vidas, assim foi possível observar e analisar o grau de conhecimento referente as questões para que após a sequência realizar o teste de McNemar o que possibilitaria realizar as nossas conclusões.

Na segunda etapa, aplicamos a parte prática da sequência didática do Homem de Ferro, os mesmos realizaram a experimentação para compreenderem a relação da probabilidade frequentista. Por meio da experimentação foram conduzidos a uma situação problema onde precisavam observar, pensar e raciocinar a respeito do que poderia acontecer do fenômeno aleatório ou determinístico, com isso os alunos poderiam começar a perceber as relações existentes através das observações e anotações que foram sendo realizadas para que pudessem comparar no final com a parte prática da situação. Nesse processo, eles vivenciaram todas etapas, desde os lançamentos dos dados, das combinações possíveis, dos cálculos necessários até a montagem da árvore de possibilidades para que as comparações fossem feitas e analisadas da melhor forma possível. Todos os registros foram feitos e compilados pelos mesmo para que tivessem o máximo de confiabilidade e certeza das análises.

Na terceira etapa foi aplicado o pós-teste, onde teríamos todos os dados necessários para o teste McNemar ser realizado, um novo questionário foi elaborado para os alunos responderem com as questões anteriormente trabalhadas, cobradas inicialmente para que fosse possível realizar nossa análise. Era esperado que após uma imersão de saberes de fazer parte do processo

de ensino e aprendizagem houvesse um maior engajamento e uma maior conectividade de conhecimento adquirido.

Diante de todo esse processo, o teste realizado com as nove questões, apontava que quatro delas ocorria mudança de aprendizado, considerado satisfatório, porém o teste realizava uma análise muito superficial desse aprendizado, pois se a diferença fosse um ou dois alunos, não seria considerado uma mudança, então criamos uma escala de proficiência de porcentagens onde também era possível observar a mudança de aprendizagem.

As situações descritas foram executadas, estudadas, discutidas e mensuradas o que permitiu concluir que é necessária uma maior atenção principalmente quando o objeto de estudo é o “aprendizado” para não obter conclusões superficiais.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. Fundamentos da didática da Matemática. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

ARTIGUE, Michelle. Engenharia didática. In: BRUN, Jean (Org.). **Didática das matemáticas**. Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217.

AUSUBEL, D.P. (1963). The psychology of meaningful verbal learning. New York, Grune and Stratton.

BIAJOTI, Emerson Donizeti. **Experimentos Probabilísticos: Noções de Probabilidade no Ensino Fundamental II**. 2013. 109f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). São Carlos: Universidade Federal de São Carlos, 2013.

BIEMBENGUT, M. S. **30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais**. In: ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v.2, n.2, p.7-32, jul. 2009.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem Matemática na Formação de Professores: Possibilidades e Limitações** – In: IX Congresso Nacional de Educação/III Encontro Sul Brasileiro de Psicopedagogia de 26 a 29 de outubro de 2009.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no ensino**-In: 5º ed. São Paulo: Contexto. 2009.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PCN Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação/ Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2002. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 10 mar.2023

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: educação é a base**. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 21 mar. 2023.

BRASIL, Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2000

BROUSSEAU, Guy. Fondements et méthodes en Didactique des mathématiques. Recherches en Didactique des mathématiques, Grenoble, v.7, n. 2, p. 35-115, 1986. Disponível em: <https://revue-rdm.com/1986/fondements-et-methodes-de-la/>. Acesso em 18 ago. 2023.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino**. São Paulo: Ática, 2008.

BRYANT, Peter; NUNES, Terezinha. Children's understanding of probability. A literature review (full report). Londres: Nuffield Foundation, 2012.

CAZORLA, I. M.; SANTANA, E. R. S. **Tratamento da Informação para o Ensino Fundamental e Médio**. Itabuna, BA: Via Litterarum, 2006.

CAZORLA, I.; KATAOKA, V. Y.; NAGAMINE, C. M. L. **Os passeios aleatórios da Carlinha**. In: Tutorial do AVALE, 2010. Disponível em: <http://avale.uesc.br>. Acesso em: 20 jun. 2023

CAZORLA, I; GUSMÃO, T. **Uma análise semiótica dos passeios aleatórios da Mônica: atividade para ensinar conceitos básicos de Probabilidade**. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4., 2009, Taguatinga-DF. Anais Taguatinga-DF: UCB, 2009. p. 1–19

CHEVALLARD, Y. concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportees par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, v. 12, n.1, p. 73-111, 1992.

CHEVALLARD. Y. La TAD face au professeur de mathématiques. 2009a.

CUSTÓDIO, Leandro Aparecido Alves. **Letramento probabilístico: um olhar sobre as situações de aprendizagem do caderno do professor**. 2016. 64p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas). Sorocaba: Universidade Federal de São Carlos, 2016.

COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. **Introdução ao conceito de probabilidade por uma visão frequentista**. 1994. 151p. Dissertação (Mestrado em Matemática) . São Paulo: Pontifícia Universidade Católica, 1994.

DANTAS, C. A. B. Probabilidade: um curso introdutório. 2. ed. São Paulo: EDUSP, 2004.

FERNANDEZ, D.; FERNANDEZ, D. X. **O prazer de aprender probabilidade através de jogos: descobrindo a distribuição Binomial**. In: CONFERÊNCIA INTERNACIONAL “EXPERIÊNCIAS E EXPECTATIVAS DO ENSINO DE ESTATÍSTICA – DESAFIOS PARA O SÉCULO XXI”, 1999, Florianópolis. Anais..., Florianópolis, SC: UFSC, 1999. p. 104-111.

FERREIRA, R. S. (2011). **Ensino de probabilidade com o uso do programa estatístico R numa perspectiva construcionista**. Dissertação de Mestrado, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, Brasil

GAL, I. (2005). Towards “Probability Literacy” for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 39–63). New York, NY: Springer.

GODINO, J. D. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en didactique des Mathématiques*, Paris, v. 22, n. 2,3, p. 237-284, 2002

GRANDO, R.C. (2007). O Conhecimento Matemático e o uso de Jogos na sala de Aula. Tese de Doutorado. Campinas. Faculdade de Educação, UNICAMP.

HERNANDEZ T., H. M., KATAOKA, V. Y., & OLIVEIRA, M. S. de. (2010). Random walks in teaching probability at the high school. In C. Reading (Ed.), Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics — ICOTS8. Ljubljana, Slovenia: International Association for Statistical Education. On line: <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications>. Acesso em: 25 agosto de 2023.

MACHADO, S. D. A. **Engenharia didática**. 2. ed. São Paulo: Educ, 2002.

NAGAMINE, C. L., HENRIQUES, A., & CAZORLA, I. M. (2010). **Análise a priori dos Passeios Aleatórios da Mônica**. In X Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador, Bahia, Brasil.

NAGANIME, C. M. L., HENRIQUES, A., & UTSUMI, M. (2010). **Praxiological Analysis of The random Walks of Mônica**. In C. Reading (Ed.), Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics — ICOTS8. Ljubljana, Slovenia: International Association for Statistical Education. On line: <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications>. Acesso em: 3 setembro de 2023.

NAGANIME, C. M. L., HENRIQUES, A., UTSUMI, M., & CAZORLA, I. M. (2011). **Análise Praxeológica dos “Passeios Aleatórios da Mônica”**. *Bolema*, 24(39), 451–472.

OLIVEIRA, Maria Marly. **Sequência didática interativa no processo de formação de professores**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2013.

PEREIRA, J. C. R. **Análise de Dados Qualitativos – estratégias metodológicas para as ciências da saúde, humanas e sociais**. Editora – Edusp. São Paulo, 2004

PERRIN-GLORIAN, M. J. L’ingénierie didactique a l’interface de la recherche avec l’enseignement. Développement des ressources et formação des enseignants. in Margolinas et all.(org.): En amont et en aval des ingénieries didactiques, XV^a École d’Été de Didactique des Mathématiques – Clermont-Ferrand (PUY-de-Dôme). Recherches em Didactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage, v. 1, p. 57-78, 2009.

SAARNI, C. **The development of emotional competence**. Odessa: Guilford Press, 1999.

SILVA, Ângela Carrancho da. **Educação e tecnologia: entre o discurso e a prática**. Ensaio. Rio de Janeiro, v. 19, n. 72, p. 532, 2011.

SOUZA, J. P. V.; BARBOSA, N. M. Uma experimentação com metodologia ativa: sala de aula invertida como modelo para o ensino de probabilidade. **Revista Eletrônica de Educação Matemática: REVEMAT**, Florianópolis, v. 15, p. 1-23, 2020. DOI: <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2020.e76290>. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/76290>. Acesso em: 3 abr. 2023.

VIALI, Lori; CURY, Helena. Análise de erros em probabilidade: uma pesquisa com professores em formação continuada. *Educação Matemática em Pesquisa*. v.11, n.2, pp.373-391, 2009.

VIALI, Lori; OLIVEIRA, Paulo. **Uma Análise de Conteúdos de Probabilidade em Livros Didáticos do Ensino Médio.** In: LOPES, Celi; COUTINHO, Cileda; ALMOULOUD, Saddo Ag (Orgs.). Estudos e Reflexões em Educação Estatística. São Paulo: Mercado de Letras, 2010. p. 85-103.

VITA, A. C. (2012). **Análise Instrumental de uma maquete tátil para aprendizagem de Probabilidade por alunos cegos.** Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.

ZABALA, Antoni. A Prática Educativa. Como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998. 224 p.