

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

MARCELO CERCHI RIBEIRO FILHO

**MODELAGEM E ANÁLISE DE FREQUÊNCIAS DE  
MANIPULADORES PARALELOS ACIONADOS POR CABOS**

SÃO CARLOS  
2024

MARCELO CERCHI RIBEIRO FILHO

**MODELAGEM E ANÁLISE DE FREQUÊNCIAS DE  
MANIPULADORES PARALELOS ACIONADOS POR CABOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de São Carlos, para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. João Vitor de Carvalho Fontes

SÃO CARLOS  
2024



FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

COORDENAÇÃO DO CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA - CCEMec/CCET

Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905

Telefone: (16) 33519703 - <http://www.ufscar.br>

DP-TCC-FA nº 24/2024/CCEMec/CCET

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

MARCELO CERCHI RIBEIRO FILHO

MODELAGEM E ANÁLISE DE FREQUÊNCIAS DE MANIPULADORES PARALELOS ACIONADOS POR CABOS

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos

São Carlos, 26 de julho de 2024

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	João Vitor de Carvalho Fontes
Membro da Banca 1	Luis Antonio Oliveira Araujo
Membro da Banca 2	João Gustavo Pereira da Silva



Documento assinado eletronicamente por **Joao Vitor de Carvalho Fontes, Docente**, em 26/07/2024, às 17:16, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Joao Gustavo Pereira da Silva, Docente**, em 26/07/2024, às 17:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Luis Antonio Oliveira Araujo, Docente**, em 26/07/2024, às 17:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufscar.br/autenticacao>, informando o código verificador **1519433** e o código CRC **F816645A**.

Referência: Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo nº 23112.021674/2024-61

SEI nº 1519433

Modelo de Documento: Grad: Defesa TCC: Folha Aprovação, versão de 02/Agosto/2019

Criado por 709935, versão 2 por 709935 em 23/07/2024 14:50:03.

Aos meus queridos pais e irmãos.

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pela minha vida e por me guiar durante toda a minha jornada com graças e bênçãos junto à intercessão de Nossa Senhora.

Ao meu seio familiar, meu mais profundo agradecimento. Ao meu pai Marcelo, à minha mãe Sandra, que sempre proporcionaram as melhores condições possíveis para que eu pudesse evoluir pessoalmente, academicamente e profissionalmente. Agradeço também pelas orações constantes e pela fé que sempre depositaram em mim. Ao meu irmão Eduardo e à minha irmã Ana Clara, por todo o amor, apoio e incentivo incondicional. Agradeço também à Joelma pelo carinho e suporte ao longo dessa jornada. Vocês são a base de tudo e sua presença foi fundamental para que eu alcançasse esta conquista.

Agradeço ainda à minha avó Aída, cujo apoio e exemplo foram sempre uma fonte de inspiração e força para mim.

Aos meus amigos Cícero, Lucas, Felipe, Vinícius, Thales e Cauê, sou grato pelo companheirismo e pelas memórias inesquecíveis. Nossa amizade, construída ao longo de muitos anos, foi um pilar de suporte e alegria. Vocês estiveram presentes nos momentos de descontração e também nos desafios, e cada um de vocês contribuiu de maneira especial para que eu pudesse alcançar meus objetivos. Sou imensamente grato pelas risadas, conselhos e pela lealdade de sempre.

À minha namorada Vitória, agradeço pela companhia constante, pelo amor incondicional e por sempre acreditar em mim, mesmo nos momentos em que até eu mesmo duvidei. Sua motivação, carinho e capacidade de me fazer encontrar a minha melhor versão em tudo que faço foram inestimáveis. Você é meu porto seguro e seu apoio foi essencial para que eu superasse cada desafio.

Aos colegas da república Fifinha, obrigado pelos anos morando juntos. A convivência com vocês foi uma experiência única e enriquecedora.

Ao Prof. Dr. João Vitor de Carvalho Fontes, minha profunda gratidão pela orientação sempre presente e pela disponibilidade durante todos os desafios desta jornada. Sua orientação foi crucial para o sucesso deste trabalho.

Sou imensamente grato à Universidade Federal de São Carlos e, em especial, ao corpo docente do Departamento de Engenharia Mecânica. A infraestrutura e o ensino oferecidos com tanta dedicação e qualidade foram fundamentais para minha formação.

Agradeço também aos membros da Engrenar Jr., com quem tive o prazer de trabalhar de 2018 a 2021. Esta experiência incrível contribuiu imensamente para o meu desenvolvimento profissional.

Minha gratidão também se estende ao GEMC (Grupo de Estudos em Mecânica Computacional), que proporcionou um ambiente enriquecedor e desafiador, essencial para minha formação acadêmica e profissional.

Por fim, não poderia deixar de expressar minha gratidão ao povo brasileiro, cujo esforço e contribuição, através dos impostos, tornaram possível meu acesso a uma educação de alta qualidade. A cada um que contribuiu, tenha a certeza que eu retornarei o investimento com meu trabalho e dedicação.

A todos, o meu mais sincero e profundo agradecimento.

## RESUMO

Os manipuladores paralelos acionados por cabos (RPACs) são uma classe inovadora de robôs que utilizam cabos em vez de elos rígidos, oferecendo alta dinâmica, capacidade de carga e flexibilidade. Este trabalho aborda a modelagem e análise das frequências naturais de RPACs, com o objetivo de evitar problemas de ressonância que podem comprometer a precisão e a eficiência operacional desses sistemas. A metodologia desenvolvida inclui a modelagem matemática dos RPACs e a análise das frequências naturais com variação da tração nos cabos e da posição do efetuador. Os resultados indicam que a rigidez do sistema, e consequentemente as frequências naturais, são altamente influenciadas pela tensão nos cabos, especialmente em modos de vibração superiores, que mostraram maior sensibilidade às mudanças de posição que os inferiores. A pesquisa demonstrou que aumentar a tração mínima nos cabos pode reduzir o risco de ressonância, proporcionando maior estabilidade ao sistema. Este estudo contribui para uma melhor compreensão das dinâmicas dos RPACs e sugere estratégias de controle para aplicações seguras e eficientes em áreas como astronomia, logística e reabilitação médica.

**Palavras-chave:** Manipuladores Paralelos Acionados por Cabos. Frequências Naturais. Modelagem Matemática.

## ABSTRACT

Cable-Driven Parallel Manipulators (CDPRs) are an innovative class of robots that use cables instead of rigid links, offering high dynamics, load capacity, and flexibility. This work addresses the modeling and analysis of the natural frequencies of CDPRs, aiming to prevent resonance issues that can compromise the precision and operational efficiency of these systems. The developed methodology includes the mathematical modeling of CDPRs and the analysis of natural frequencies with variations in cable tension and end-effector position. The results indicate that system rigidity, and consequently the natural frequencies, are highly influenced by cable tension, especially in higher vibration modes, which showed greater sensitivity to positional changes compared to lower modes. The research demonstrated that increasing the minimum tension in the cables can reduce the risk of resonance, providing greater stability to the system. This study contributes to a better understanding of the dynamics of CDPRs and suggests control strategies for safe and efficient applications in fields such as astronomy, logistics, and medical rehabilitation.

**Keywords:** Cable-Driven Parallel Manipulators. Natural Frequencies. Mathematical Modeling.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Manipulador paralelo acionado por cabos. . . . .	14
Figura 2 – Telescópio FAST. . . . .	15
Figura 3 – CAREX. . . . .	16
Figura 4 – Exemplo de robô serial e robô paralelo. . . . .	16
Figura 5 – Robô Hephaestus. . . . .	17
Figura 6 – Skycam. . . . .	19
Figura 7 – Malha de Elementos Finitos. . . . .	22
Figura 8 – Talha elétrica. . . . .	23
Figura 9 – Simulação estrutural em elementos finitos de uma talha elétrica. . . . .	23
Figura 10 – Classificação dos RPACs por padrão de movimentação. . . . .	25
Figura 11 – Esquema geral de um RPAC. . . . .	26
Figura 12 – Diagrama do RPAC planar. . . . .	28
Figura 13 – Exemplo de Treliça Plana. . . . .	29
Figura 14 – Modelagem do cabo como um elemento de treliça. . . . .	33
Figura 15 – Evolução da frequência natural por modo de vibrar com a variação da tração mínima. . . . .	37
Figura 16 – Pontos de cálculo das frequências naturais. . . . .	39
Figura 17 – Variação das frequências máximas e mínimas de cada modo. . . . .	40
Figura 18 – Evolução das frequências dos modos de vibrar mediante variação dos pontos. . . . .	41
Figura 19 – Evolução das frequências dos modos de vibrar mediante variação dos pontos - Continuação. . . . .	42
Figura 20 – Evolução das frequências dos modos de vibrar mediante variação dos pontos - Continuação 2. . . . .	43

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tabela de parâmetros iniciais. . . . .	29
Tabela 2 – Frequências dos modos de vibrar para $T_{\min} = 40$ N. . . . .	36

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

RPAC	Manipuladores paralelos acionados por cabos
FAST	<i>Five-hundred-meter Aperture Spherical radio Telescope</i>
IRPM	<i>Incompletely restrained positioning mechanisms</i>
CRPM	<i>Completely restrained positioning mechanisms</i>
RRPM	<i>Redundantly restrained positioning mechanisms</i>
MEF	Método dos elementos finitos

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\omega$	Letra grega Omega
$\lambda$	Letra grega Lambda
$\gamma$	Letra grega Gama
$\theta$	Letra grega Theta
$\tau$	Letra grega Tau

## SUMÁRIO

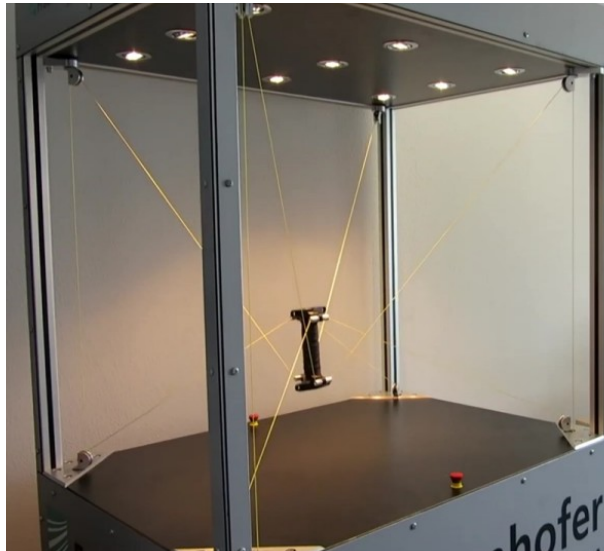
<b>1 – INTRODUÇÃO</b>	<b>14</b>
1.1 Objetivos	20
1.2 Estrutura do Texto	21
<b>2 – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>22</b>
2.1 Método dos Elementos Finitos	22
2.2 Designs de Configuração e Classificações dos RPACs	23
2.3 Distribuição das Forças nos Cabos e no Efetuador	25
<b>3 – METODOLOGIA</b>	<b>28</b>
3.1 Aplicação para um RPAC plano	28
3.2 Resolução do problema de tensões - Cinemática	30
3.3 Resolução do problema de frequências	32
<b>4 – RESULTADOS</b>	<b>36</b>
4.1 Frequências naturais com a variação da tensão aplicada	36
4.2 Frequências naturais com a variação da posição do efetuador	38
<b>5 – CONCLUSÃO</b>	<b>44</b>
5.1 Trabalhos Futuros	44
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>46</b>
<b>Apêndices</b>	<b>49</b>
<b>APÊNDICE A – Código desenvolvido em Octave</b>	<b>50</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Os manipuladores paralelos acionados por cabos (RPACs), como o mostrado na Figura 1, representam uma classe inovadora de robôs de alto desempenho, destacando-se pela alta precisão de posicionamento, velocidade e capacidade de carga. Eles integram cadeias cinemáticas acionadas por cabos com a teoria dos mecanismos paralelos, resultando em sistemas que oferecem essas vantagens dinâmicas herdadas dos mecanismos paralelos tradicionais. Sendo possível considerá-los um tipo especial de robô paralelo onde cabos substituem os elos rígidos. Alternativamente, um RPAC pode ser visto como uma máquina de elevação hábil que usa vários cabos para evitar, pelo menos parcialmente, o balanço da carga. Geralmente, os RPACs consistem em uma estrutura de suporte, sistemas de acionamento por guinchos com tambor que controlam o comprimento dos cabos e uma carga (plataforma móvel) onde eles estão fixados, como relatado por Gouttefarde e Bruckmann (2022).

Além dessas características, Zhang et al. (2022) discorre que os RPACs destacam-se por melhorar significativamente o espaço de trabalho, o custo e a eficiência energética, atributos que os tornam superiores em diversas aplicações industriais e tecnológicas, como as descritas a seguir.

Figura 1 – Manipulador paralelo acionado por cabos.



Fonte: Fraunhofer IPA (2024).

Na astronomia, o *Five-hundred-meter Aperture Spherical radio Telescope* (FAST), o maior telescópio do mundo, mostrado na Figura 2, utiliza um sistema de suporte de alimentação com seis cabos RPACs. Segundo NAN et al. (2011), este sistema permite ajustes precisos da posição do receptor em um espaço de 500 metros, essencial para a

captação de sinais de rádio de regiões distantes do universo. A grande capacidade de carga e o espaço de trabalho extensivo dos RPACs são ideais para suportar a infraestrutura massiva necessária em projetos astronômicos como o FAST.

Figura 2 – Telescópio FAST.



Fonte: Revista Galileu (2018).

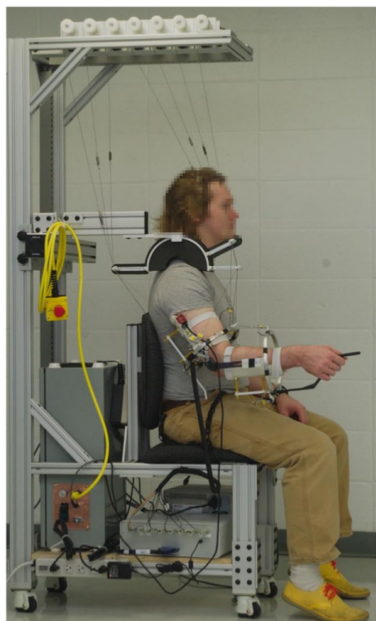
No campo da logística e armazenamento, o sistema CABLAR, conforme Bruckmann et al. (2013), exemplifica a eficiência dos RPACs na movimentação de materiais dentro de armazéns. Este sistema utiliza cabos para manuseio e recuperação de materiais, oferecendo flexibilidade e precisão na organização do espaço de armazenamento. A capacidade dos RPACs de operar em grandes espaços com alta reconfigurabilidade os torna soluções ideais para ambientes de armazenamento dinâmicos.

Além dessas aplicações, os RPACs têm sido aplicados em reabilitação médica, no qual o seu uso permite a criação de dispositivos como o CAREX, um exoesqueleto desenvolvido para a reabilitação dos membros superiores, discutido em Mao et al. (2015). Pesquisadores da Universidade de Columbia criaram este sistema para ajudar na recuperação de movimentos em pacientes com deficiências motoras (Figura 3). A precisão e a capacidade de adaptação dos RPACs fazem deles uma escolha excelente para aplicações em reabilitação, proporcionando movimentos controlados e seguros para os pacientes durante os exercícios terapêuticos.

Essas aplicações são evidências de como as características únicas dos RPACs se tornam vantagens em relação a outros tipos de robôs, como seriais e paralelos, especialmente em contextos específicos.

O processo de seleção do tipo de robô para uma automação industrial específica é crucial para o seu sucesso. Nesse momento, é importante entender os pontos positivos e negativos de cada categoria e escolher a que melhor atende às necessidades da aplicação. De modo geral, as principais opções disponíveis serão os robôs seriais e paralelos (Figura 4) ou RPACs (Figura 1).

Figura 3 – CAREX.



Fonte: Laboratório ROAR (2020).

Figura 4 – Exemplo de robô serial e robô paralelo.



Fonte: Adaptado de ABB.

Dentre as vantagens dos RPACs, destaca-se o seu abrangente espaço de trabalho. Ao contrário dos robôs seriais e paralelos, que possuem links rígidos e limitam o espaço de trabalho a faixas menores, os RPACs superam significativamente esses limites. Por exemplo, no FAST, mostrado na Figura 2, a necessidade de um grande espaço de trabalho é crucial, dado os seus 500 metros de diâmetro. Robôs seriais e paralelos possuem links rígidos, o que impossibilita a criação de modelos com espaços de trabalho fora da faixa de até 10 metros. Além disso, devido à estrutura de loop aberto dos robôs seriais, a sua rigidez e precisão em espaços maiores são limitadas. Em contraste, de acordo com Qian et al. (2018) além dos RPACs oferecerem um espaço de trabalho maior, mantêm sua alta capacidade de carga, permitindo que sistemas de suporte de mecanismos como o FAST



ajustem a posição do receptor em uma grande área com precisão.

A capacidade de carga é um dos principais pontos positivos dos RPACs. A estrutura flexível e a possibilidade de distribuir forças através de múltiplos cabos permitem que esses robôs manuseiem cargas pesadas de maneira eficiente. Enquanto os robôs seriais possuem uma capacidade de carga limitada devido à sua estrutura rígida e os robôs paralelos, embora rígidos, não conseguem operar eficientemente em grandes espaços dinâmicos, os RPACs destacam-se por sua alta razão de carga-peso, conforme sugerido em Zhang et al. (2022). Significando que os RPACs podem carregar cargas pesadas em relação ao seu próprio peso, tornando-os ideais para aplicações que exigem o transporte e a manipulação de grandes objetos. Em setores como a construção civil, no qual é necessário mover e posicionar grandes cargas, os RPACs demonstram-se altamente eficazes. Essa oportunidade foi identificada pela equipe de pesquisadores liderada por Kepa Iturralde. No estudo Iturralde et al. (2022), há a descrição do robô Hephaestus, mostrado na Figura 5, um RPAC desenvolvido especificamente para a instalação e posicionamento de módulos de fachada cortina. Este sistema é composto por painéis montados em uma estrutura de alumínio, comumente utilizado em arranha-céus.

Figura 5 – Robô Hephaestus.



Fonte: Revista Inovation Origins (2021).

Os RPACs também se destacam significativamente por sua alta velocidade e aceleração, atributos que são diretamente beneficiados pela sua alta dinâmica e baixa inércia. Ao utilizar cabos em vez de elos rígidos, os RPACs reduzem a inércia de movimento, permitindo que alcancem altas velocidades e acelerações rapidamente. Essa característica é particularmente vantajosa em aplicações que exigem movimentos rápidos e precisos, como simuladores de movimento. Por exemplo, o *CableRobot Simulator*, desenvolvido em Miermeister et al. (2016), utiliza RPACs para criar experiências de simulação imersivas e precisas, beneficiando tanto o treinamento profissional quanto as aplicações recreativas. A leveza dos cabos em comparação com os componentes rígidos dos robôs seriais e paralelos

permite uma resposta dinâmica superior, essencial para a criação de simuladores com uma alta fidelidade.

Além dessas vantagens, os RPACs são reconhecidos por sua flexibilidade e reconfigurabilidade, permitindo ajustes para diferentes tarefas e ambientes, aumentando sua versatilidade e aplicabilidade em diversos campos, como construção e logística. O custo relativamente baixo e a estrutura simples dos RPACs facilitam sua implementação e manutenção em várias indústrias, comparados a outros tipos de robôs.

Dentre os pontos negativos dos RPACs, destacam-se a vida útil, a retenção de precisão e o controle de vibrações. Os cabos do sistema desgastam e quebram facilmente durante a operação, o que dificulta a garantia de um funcionamento sustentável e confiável. Além disso, de acordo com Zhang et al. (2022), essa questão, assim como a detecção de desgaste nas cordas e as especificações de substituição, não é suficientemente explorada nas pesquisas sobre a durabilidade dos RPACs.

Outro fator que contribui para a vida útil imprevisível, relativamente, e curta dos RPACs é a deformação não linear dos cabos e a fluência, frequentes devido à constante reconfiguração de posição. Esses fatores também causam problemas na retenção da precisão do robô, o que pode ser especialmente prejudicial em aplicações industriais que necessitam de processos padronizados ao longo do tempo. Ainda, segundo Qian et al. (2018), a degradação da precisão impacta negativamente a eficiência e a qualidade do trabalho, adicionando um nível de incerteza não presente em robôs seriais ou paralelos, que utilizam componentes mais duráveis e previsíveis.

Outro ponto negativo importante é a falta de rigidez nos links (cabos), que limita as aplicações devido à característica unidirecional das forças das cordas, que só podem ser tensionadas. Além disso, a baixa rigidez gera uma sensibilidade intrínseca do sistema a distúrbios externos, especialmente em configurações que usam a gravidade como um "link virtual". Em aplicações com baixa ou nenhuma exigência de precisão milimétrica, como as *Skycams* em eventos esportivos, mostrada na Figura 6, isso não é necessariamente um problema, podendo ser contornado com um estabilizador de câmera. No entanto, essa limitação pode impactar profundamente processos industriais que exigem alta precisão.

Por fim, é importante destacar a questão das vibrações, novamente relacionada à baixa rigidez e à flexibilidade dos cabos, que os tornam suscetíveis a oscilações. Tais oscilações afetam a precisão do robô. Embora sistemas de supressão de vibrações possam mitigar esses problemas, eles possuem um custo elevado e não são padronizados entre todos os RPACs. Dada essa ausência de padronização, há a demanda para estudos que indiquem o impacto dessas vibrações e encontrem alternativas para contorná-las, tendo essas questões pensadas em formato universal.

Como é fato que o controle de vibrações é uma dor reconhecida em RPACs, é fundamental que esse problema não seja agravado por episódios de ressonância. Sendo assim, a análise de frequências naturais em RPACs é importante para garantir a integridade

Figura 6 – Skycam.



Fonte: Revista How Stuff Works (2014).

estrutural e a eficiência operacional do sistema. As frequências naturais de um sistema mecânico são aquelas em que ele tende a vibrar quando perturbado. Se a frequência de operação do RPAC coincidir com uma dessas frequências naturais, pode ocorrer a ressonância. A ressonância causa amplificação das vibrações, resultando em diversos problemas, tais como:

- Redução da precisão do RPAC e o aumento do tempo de estabilização. (DU; DUAN; QIU, 2015)
- Desgaste prematuro dos componentes, reduzindo a vida útil do sistema.
- Danos aos motores e outros componentes mecânicos devido às vibrações excessivas (KARDILE; AUTI, 2023).

Estudos como Kardile e Auti (2023) destacam a importância de compreender o impacto das vibrações nos motores BLDC (*Brushless Direct Current*) utilizados em RPACs. Esses motores são preferidos por sua alta eficiência e design compacto, mas a presença de vibrações pode afetar significativamente seu desempenho e eficiência energética. Já Du, Duan e Qiu (2015) observa que em RPACs, as vibrações reduzem a precisão e aumentam o tempo de estabilização do efetuator e demonstra que esse comportamento é agravado na medida em que a velocidade de operação aumenta ou em mudanças não suaves no comprimento dos cabos.

Portanto, é crucial identificar e evitar operar o RPAC em suas frequências naturais de modo a não agravar os já existentes problemas de vibração que esses sistemas enfrentam.

Tendo isso em vista, este trabalho traz uma modelagem de vibrações e frequências naturais dentro do contexto da análise de forças e trajetórias desenvolvido em Fontes (2019) e otimizado em Costa (2022). A análise das frequências naturais proposta neste estudo visa calcular essas frequências para que, futuramente, o código de otimização da trajetória evite ressonâncias durante a operação dos RPACs, contribuindo assim para a

durabilidade e segurança do sistema. Estudos já citados indicam que a consideração do impacto das vibrações é essencial para a operação segura e eficiente de sistemas mecânicos complexos, e sua inclusão na otimização de trajetória representa um avanço significativo no campo dos RPACs.

Também é importante destacar que será realizada a análise das frequências naturais em RPACs utilizando a simplificação do sistema para um modelo de treliça espacial. Esta abordagem baseia-se na analogia entre a estrutura dos cabos do RPAC e os elementos de uma treliça, na qual os cabos são considerados elementos que resistem exclusivamente à tração. A simplificação para um modelo de treliça permite a utilização de métodos de análise estruturais tradicionais, facilitando o cálculo das tensões e das frequências naturais do sistema.

A análise das frequências naturais é realizada através da montagem da matriz de rigidez do sistema, seguida pela resolução das equações de movimento. Este processo é crucial para determinar as frequências em que o sistema pode vibrar naturalmente e, assim, evitar a operação nessas frequências.

Este estudo busca validar os resultados obtidos por meio de comparação com dados da literatura, assegurando que a modelagem e os métodos de cálculo aplicados estão corretos e alinhados com as metodologias consolidadas.

A introdução ao tema se baseia em trabalhos como Nguyen-Van e Gwak (2022), que exploram a utilização de RPACs equipados com múltiplos bicos para otimizar a impressão 3D na construção civil, e Bishay (2020), que aborda a utilização de ferramentas computacionais para modelar e analisar treliças 3D. Esses estudos demonstram a versatilidade dos RPACs e a importância da análise estrutural para garantir a eficiência e a segurança desses sistemas.

## 1.1 Objetivos

O presente trabalho tem como objetivo principal analisar o comportamento da vibração em RPACs, considerando a variação da posição e a tração nos cabos. Para alcançar esse objetivo, foram definidos os seguintes objetivos específicos:

- **Modelagem em Octave:** Desenvolver um modelo matemático em Octave para a análise das frequências naturais de RPACs. Este modelo deve permitir a simulação da variação das frequências naturais em função da posição e tração nos cabos, proporcionando uma ferramenta robusta para a investigação do comportamento dinâmico desses sistemas
- **Análise da Frequência com Variação da Força nos Cabos:** Investigar a influência da força aplicada nos cabos sobre as frequências naturais dos RPACs. Esta análise busca compreender como diferentes níveis de tração afetam a dinâmica do sistema,

fornecendo insights para otimização e controle dos manipuladores.

- **Análise da Frequência com Variação da Posição:** Estudar como as frequências naturais dos RPACs variam em relação à posição do efetuador. Esta análise visa identificar padrões e comportamentos específicos que possam impactar a estabilidade e desempenho do sistema em diferentes configurações de posicionamento.

Esses objetivos específicos visam garantir uma abordagem sistemática e rigorosa na análise das frequências naturais em RPACs, contribuindo para a segurança e eficiência desses sistemas em suas diversas aplicações.

## 1.2 Estrutura do Texto

Esta monografia está organizada da seguinte forma:

- **Capítulo 2: Conceituação**

Este capítulo apresenta a revisão da literatura sobre os conceitos fundamentais de RPACs, fornecendo uma base teórica para o entendimento do cálculo de frequências naturais nesses sistemas.

- **Capítulo 3: Metodologia**

Neste capítulo, é detalhada a metodologia escolhida para o cálculo das frequências naturais em RPACs. A implementação dessa metodologia em código Octave é explicada passo a passo, incluindo as técnicas e ferramentas utilizadas.

- **Capítulo 4: Aplicação da Metodologia e Apresentação dos Resultados**

Apresenta os resultados obtidos com a aplicação do código no problema definido pelo professor orientador, demonstrando a eficácia da metodologia proposta em um caso prático.

- **Capítulo 5: Conclusões e Trabalhos Futuros**

Contém as conclusões do trabalho realizado e sugestões de possíveis direções para pesquisas futuras na área de análise de frequências naturais em RPACs.

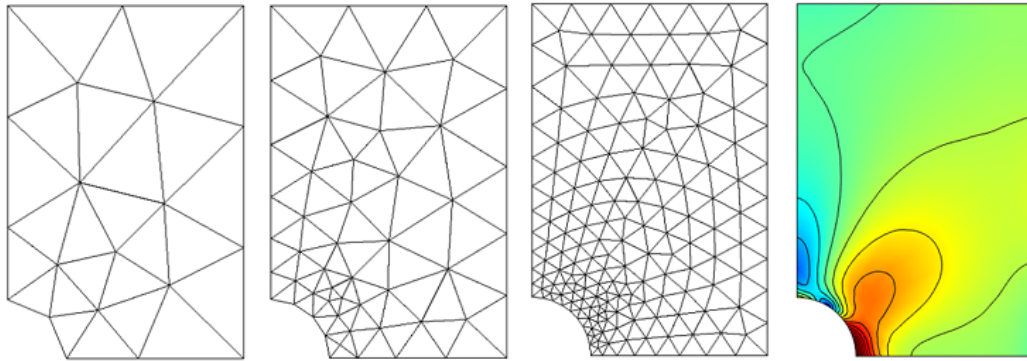
## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma técnica numérica amplamente utilizada na engenharia para resolver problemas de mecânica estrutural, mecânica dos fluidos, transferência de calor e outros campos. De acordo com Azevedo (2003), o principal objetivo do MEF é "[...] a determinação do estado de tensão e de deformação de um sólido de geometria arbitrária sujeito a ações exteriores". Este método é especialmente útil para analisar estruturas complexas como edifícios, pontes e barragens.

O MEF baseia-se na subdivisão de um domínio contínuo em elementos finitos de geometria simples, também conhecida como malha, como triângulos, quadriláteros e tetraedros (Figura 7). Cada elemento é definido por nós, que são pontos de interseção entre os elementos. A aproximação da solução do problema é obtida assumindo uma forma de solução dentro de cada elemento e depois combinando estas soluções para formar uma solução global, como detalhado por Felippa (2004).

Figura 7 – Malha de Elementos Finitos.



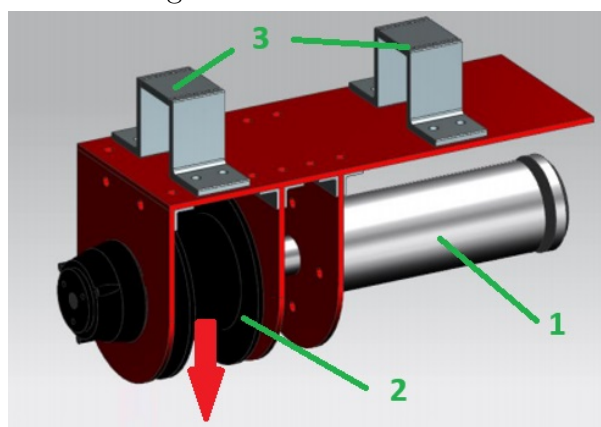
Fonte: COMSOL (2013).

Uma das principais vantagens do MEF é a sua versatilidade e precisão na análise de problemas complexos. Segundo Zienkiewicz, Taylor e Zhu (2005), com o desenvolvimento de programas de computador com cada vez mais capacidade operacional em hardware e interfaces mais intuitivas, o MEF tornou-se acessível a uma ampla gama de engenheiros e projetistas. Hoje, a maioria dos utilizadores do MEF utiliza softwares especializados para realizar análises estruturais, sem a necessidade de conhecer em detalhe a programação por trás do método.

À título de exemplo, considere a análise de uma talha elétrica sujeita a uma carga gerada pela tração no cabo enrolado ao seu tambor. Como mostrado na Figura 8, temos o motor referenciado como peça 1, em 2 o tambor e em 3 os suportes em que a viga na qual

o sistema será instalado passará entre. A seta indica a direção e o sentido do carregamento.

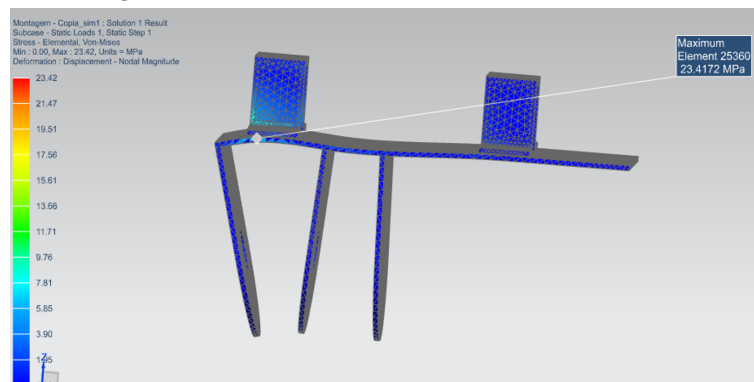
Figura 8 – Talha elétrica.



Fonte: Autor.

Utilizando o MEF, a estrutura é modelada com uma malha de elementos finitos quadriláteros. Após a análise, obtêm-se os valores aproximados dos deslocamentos e das tensões na estrutura. A visualização dos resultados (Figura 9) permite identificar regiões de maior tensão e compreender melhor o seu comportamento estrutural.

Figura 9 – Simulação estrutural em elementos finitos de uma talha elétrica.



Fonte: Autor.

Após a simulação, desenvolvida pelo autor e seus colegas na Engrenar Jr., visualizou-se os resultados de tensão e deformação. Mais especificamente, se as tensões encontradas ultrapassavam o limite de escoamento do material designado para as peças no projeto e os deslocamentos na região de acoplamento entre o tambor e o eixo.

## 2.2 Designs de Configuração e Classificações dos RPACs

Uma etapa fundamental para o entendimento do RPACs é a classificação dos diferentes modelos, baseada em variados critérios. Costa (2022) destacou as principais classificações, originalmente definidas em POTT (2018), Ming e Higuchi (1994) e Verhoeven

(2004). As principais categorias incluem a cinética, a espacial e a baseada no padrão de movimentação.

A classificação cinética é baseada no número de cabos ( $m$ ) em relação aos graus de liberdade do efetuador final ( $n$ ):

- Mecanismos de posicionamento incompletamente restringidos ( $m < n$ ). Em inglês é definido como IRPM.
- Mecanismos incompletamente restringidos ( $m = n$ ). Se considerarmos a gravidade como um cabo virtual, um RPAC incompletamente restringidos pode ser visto como um RPAC completamente restringidos com aceleração limitada.
- Mecanismos de posicionamento completamente restringidos ( $m = n+1$ ). Em inglês é definido como CRPM.
- Mecanismos de posicionamento redundantemente restringidos ( $m > n+1$ ). Como há mais graus de liberdade do que restrições cinemáticas, é necessário um cálculo diferenciado para a definição das forças. Em inglês é definido como RRPM.

Os RPACs também podem ser classificados com base no seu espaço de trabalho, definidos como:

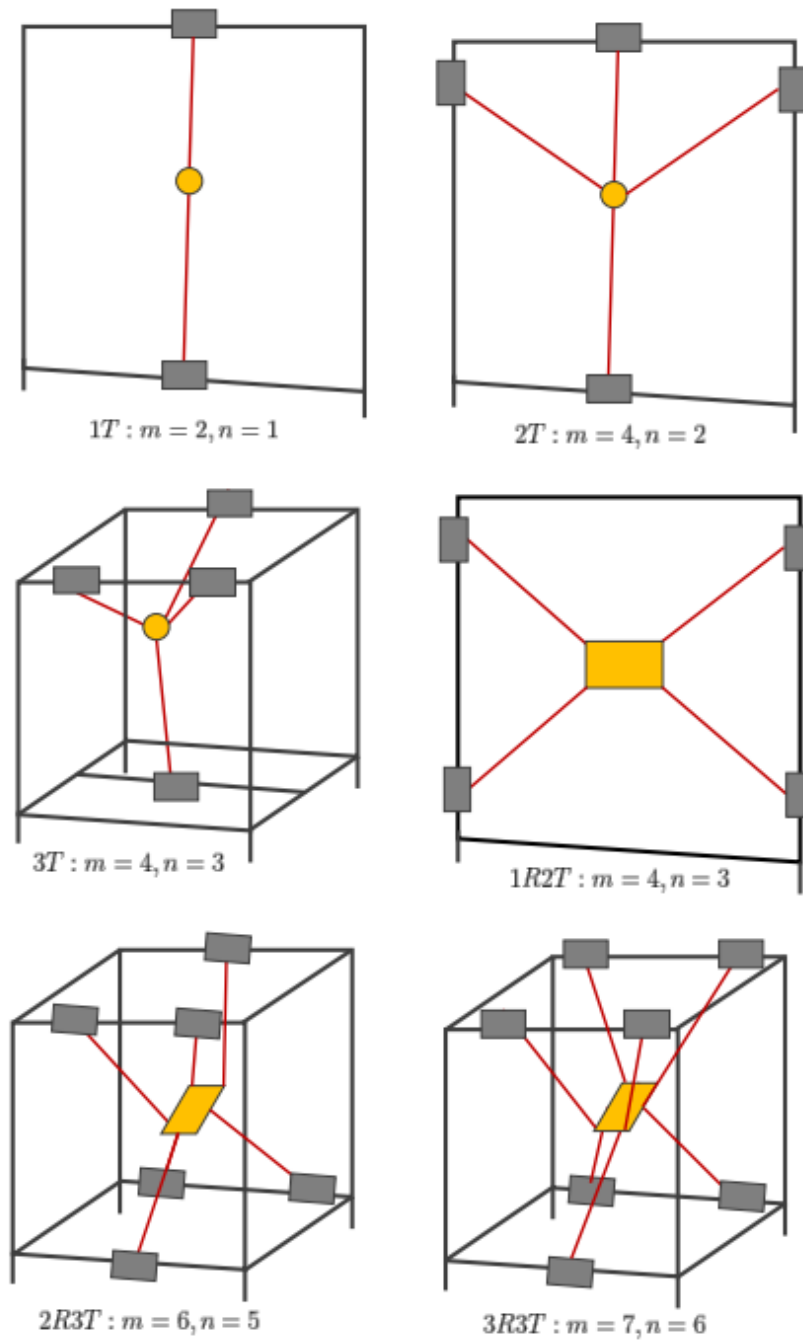
- RPACs Planares: Operam em um plano bidimensional. O efetuador final se move dentro de uma área plana, o que simplifica o cálculo das variáveis de modelagem.
- RPACs Espaciais: Operam em um espaço tridimensional, permitindo movimentos em todas as direções. Isso aumenta a complexidade do sistema, tanto em termos de modelagem quanto de controle, devido ao número maior de variáveis envolvidas.

Outra classificação importante dos RPACs é baseada no padrão de movimentação, representado pela notação  $(nR)R(nT)T$ , em que  $nR$  indica os graus de liberdade de rotação e  $nT$  designa os graus de liberdade translacionais (Figura 10).

Além disso, a configuração de RPACs pode incluir elementos de tensionamento passivo, como molas e cilindros, para manter os cabos sob tensão constante e otimizar o consumo de energia durante a operação, permitindo que esses robôs se adaptem rapidamente às mudanças nas condições de operação e às necessidades específicas dos ambientes de funcionamento, conforme apontado em Yuan et al. (2017). Esses elementos inovadores ajudam a reduzir o número de atuações e a dificuldade de controle, mantendo, ao mesmo tempo, as restrições completas. A utilização de cabos leves e flexíveis, combinada com a capacidade de alta reconfigurabilidade, expande os espaços de trabalho dos RPACs e melhora a eficiência energética durante a operação.



Figura 10 – Classificação dos RPACs por padrão de movimentação.



Fonte: Costa (2022).

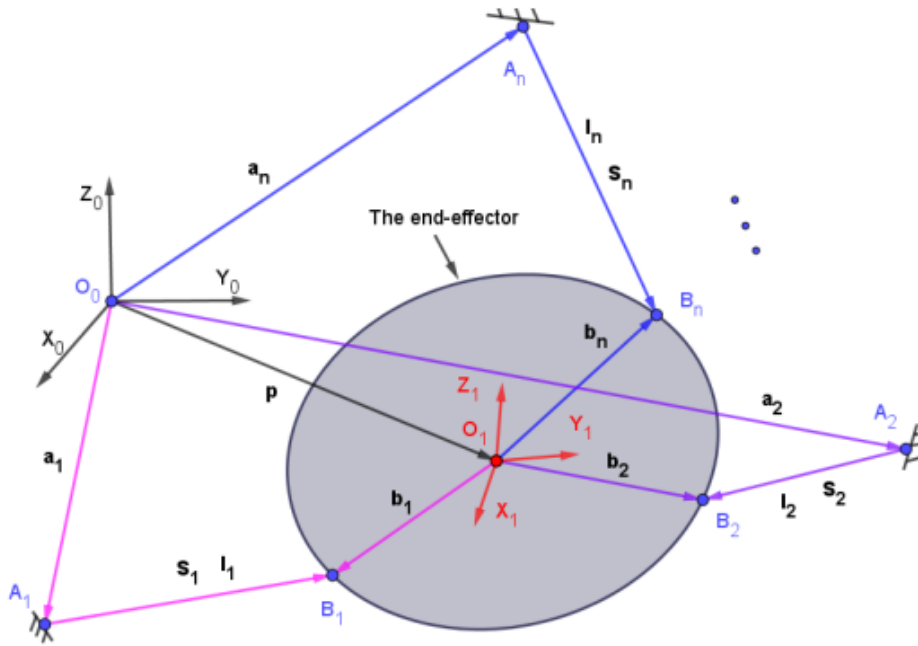
### 2.3 Distribuição das Forças nos Cabos e no Efetuador

A determinação das forças nos cabos de robôs completamente ou redundantemente restringidos das classes CRPM e RRPM e a garantia que elas estejam dentro dos limites permitidos é uma questão inerente aos robôs a cabo quando se deseja controlar completamente o movimento. Assegurando, dessa forma, a estabilidade e a operação segura do robô. A distribuição de forças é crítica para determinar como as trações nos cabos são ajustadas para gerar as forças necessárias para manter o equilíbrio estático e realizar

movimentos desejados.

Nesse contexto, POTT (2018) define uma metodologia para determinar as forças nos cabos que garantam o equilíbrio na posição desejada. O primeiro passo é considerar um sistema RPAC com  $n$  cabos, como na Figura 11. Cada cabo  $i$  é fixado nos pontos  $A_i$  na base e  $B_i$  no efetuador. O vetor de posição do ponto  $A_i$  é  $a_i$ , o vetor de posição do ponto  $B_i$  é  $b_i$  e o do efetuador e  $p$ .

Figura 11 – Esquema geral de um RPAC.



Fonte: Khosravi e Taghirad (2014).

$$l_i = p + b_i - a_i \quad (1)$$

Dessa forma, a partir da Equação 1, é possível relacionar as velocidades dos cabos com a velocidade do efetuador e montar a matriz Jacobiana  $J$ .

$$J = \begin{bmatrix} s_1 & b_1 \times s_1 \\ s_2 & b_2 \times s_2 \\ \vdots & \vdots \\ s_n & b_n \times s_n \end{bmatrix} \quad (2)$$

em que  $s_i = \frac{l_i}{\|l_i\|}$  é o vetor unitário ao longo do cabo  $i$ .

As forças nos cabos  $\mathbf{T}$  devem equilibrar as forças e torques externos  $\mathbf{w}$  aplicados na plataforma.

$$\mathbf{J}^T \mathbf{T} = \mathbf{w} \quad (3)$$

Sendo  $\mathbf{w}$  definido como:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -m\mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_e \\ \boldsymbol{\tau}_e \end{bmatrix} \quad (4)$$

Para encontrar as forças  $\mathbf{T}$  que satisfazem a condição de equilíbrio, usamos a programação linear ou quadrática, assegurando que  $T_{min} \leq T_i \leq T_{max}$  para cada cabo  $i$ . Sendo  $T_{min}$ ,  $T_{max}$ ,  $f_e$  e  $\tau_e$  as tensões mínima e máxima permitidas no sistema, as forças externas (além da gravidade) e os torques externos, respectivamente. A formulação de programação quadrática é a seguinte, usando  $\mathbf{C} = I$  e  $\mathbf{c} = 0$ , como descrito em Nguyen-Van et al. (2020):

$$\min_{\mathbf{T}} \frac{1}{2} \mathbf{T}^\top \mathbf{C} \mathbf{T} + \mathbf{c}^\top \mathbf{T} \quad (5)$$

sujeita a:

$$T_{min} \leq \mathbf{T}_i \leq T_{max} \quad (6)$$

$$\mathbf{J}^\top \mathbf{T} = \mathbf{w} \quad (7)$$

Por fim, é necessário resolver o problema de otimização usando métodos numéricos para obter as forças  $\mathbf{T}$  que garantem o equilíbrio da posição.

### 3 METODOLOGIA

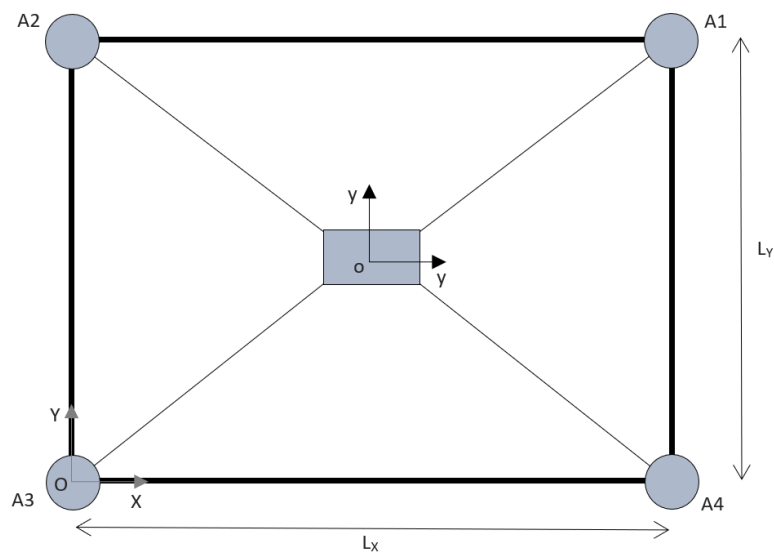
#### 3.1 Aplicação para um RPAC plano

A configuração específica de RPAC em que esse trabalho é focado é mostrada na Figura 12. Dentre as classificações mostradas, ele se encaixa como mecanismo de posicionamento redundantemente restringido ( $m > n+1$ ), planar e 2T. Em (12) é possível ver um diagrama exemplificando, no qual X e Y representa o eixo de coordenadas global e x e y o eixo local do efetuador.

Além disso, é importante destacar as hipóteses simplificadoras assumidas durante a modelagem e os cálculos:

- Massa do efetuador final: Considera-se que a massa do efetuador final é uma massa pontual localizada no centróide do efetuador final.
- Conexão dos cabos: Todos os cabos estão conectados ao centróide do efetuador final.
- Desconsideração do atrito: O atrito nos redutores e nas polias dos RPACs é negligenciado. Ignorar o atrito permite focar na análise das forças e movimentos principais sem a interferência de perdas de energia devido ao atrito, que poderiam complicar a modelagem e desviar a atenção dos efeitos de vibração desejados.
- Material dos cabos é isotrópico: Assume-se que os materiais dos cabos são isotrópicos, o que implica que as propriedades materiais (como rigidez e resistência) são uniformes em todas as direções.

Figura 12 – Diagrama do RPAC planar.



Fonte: Autor.

Como descrito em Gambhir e Batchelor (1979) e em Gambhir e Batchelor (1977), o método numérico usado para a simplificação da estrutura de cabos pré-tensionados os

Tabela 1 – Tabela de parâmetros iniciais.

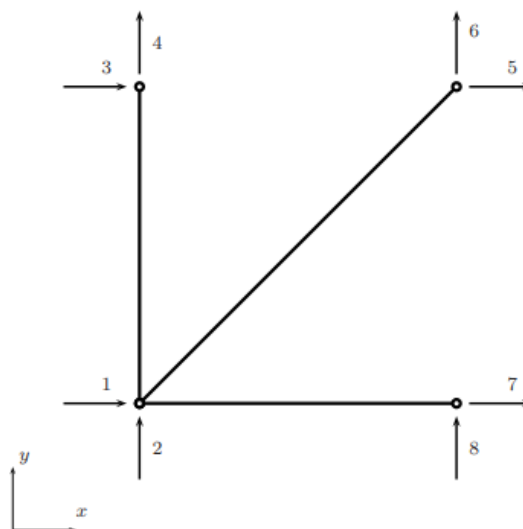
Parâmetros (unidade)	Valor
Massa do Efetuador $m$ (kg)	1
Área de seção transversal dos cabos $A$ (m <sup>2</sup> )	$50.265 \times 10^{-6}$
$L_x$ (m)	2
$L_y$ (m)	2
Posição inicial do efetuador $x,y$ (m)	[0; 0]
Módulo de Elasticidade $E$ (N/m <sup>2</sup> )	$2.01 \times 10^{10}$
Massa por unidade de comprimento $\gamma$ (N/m)	0.251
Forças de tração mínima $T_{\min}$ (N)	[1 : 200]
Forças de tração máxima $T_{\max}$ (N)	1000
Número de elementos (-)	40

Fonte: Autor.

representa como uma série de elementos com comprimentos finitos, possuindo propriedades lineares elásticas e zero rigidez à flexão. Dessa forma, os elementos se tornam incapazes de resistir a carregamentos compressivos. Para o RPAC plano, tema desse trabalho, os nós dos elementos se conectam formando uma rede em duas dimensões, com dois graus de liberdade cada, definidos nas direções dos dois eixos ortogonais.

Portanto, como interpretado em Nguyen-Van et al. (2020), podemos simplificar o problema para um modelo de treliça plana. Essa transformação baseia-se na analogia entre a estrutura da série de elementos com comprimentos finitos e os elementos de uma treliça. Nesse contexto, obedecendo as premissas de Gambhir e Batchelor (1979), os cabos do RPAC resistirão exclusivamente à tração originada de forças externas, como a gravidade atuando sobre o efetuador.

Figura 13 – Exemplo de Treliça Plana.



Fonte: Ferreira e Fantuzzi (2020).

Uma treliça plana é uma estrutura bidimensional composta por membros retos conectados em juntas, formando uma rede de elementos triangulares e outras formas geométricas, como ilustrado na Figura 13. Esses membros são sujeitos apenas a forças de tração ou compressão, e as cargas são aplicadas somente nas juntas. No exemplo citado, os vetores numerados (1 a 8) representam as componentes das forças aplicadas em cada nó nas direções  $x$  e  $y$ . A resolução de uma treliça plana envolve determinar as forças em cada membro da estrutura, garantindo que cada nó e a estrutura como um todo estejam em equilíbrio estático. O equilíbrio é alcançado quando a soma das forças em qualquer direção e a soma dos momentos em qualquer nó são iguais a zero, conforme representado pelos vetores. Estas condições podem ser expressas pelas equações de equilíbrio em duas dimensões, onde cada vetor indica uma direção específica da força aplicada.

Cada membro da treliça pode ser representado por um vetor que define a sua direção, a mesma na qual a força em cada membro atuará. Essas forças são determinadas a partir da resolução do sistema de equações lineares que representam as condições de equilíbrio em cada nó. Para cada nó  $i$  da treliça, as forças atuando ao longo dos membros conectados a ele podem ser expressas como nas equações a seguir:

$$\sum F_x = 0 \quad (8)$$

$$\sum F_y = 0 \quad (9)$$

Para um nó  $i$  da treliça, as forças atuando ao longo dos membros conectados ao nó podem ser expressas como:

$$\sum F_i \cos(\theta_{ix}) = 0 \quad (10)$$

$$\sum F_i \cos(\theta_{iy}) = 0 \quad (11)$$

em que  $F_i$  é a força no membro  $i$  e  $\theta_{ix}, \theta_{iy}$  são os ângulos do membro em relação aos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente.

### 3.2 Resolução do problema de tensões - Cinemática

A implementação do cálculo das tensões nos cabos em Octave segue várias etapas. Primeiramente, definem-se as coordenadas dos pontos de ancoragem dos cabos e a posição do efetuador. No exemplo considerado, os pontos de ancoragem são  $A1, A2, A3$ , e  $A4$ . A posição do efetuador é determinada pelas suas coordenadas no plano bidimensional.

Para cada ponto de ancoragem, calcula-se um vetor que liga o efetuador ao ponto correspondente. Estes vetores são obtidos subtraindo a posição do efetuador da posição do ponto de ancoragem:

$$V1 = A1 - E \quad (12)$$

em que  $E$  é o vetor posição do efetuator ( $Ax, Ay$ ). Procede-se da mesma forma para os demais pontos.

Os vetores de ligação são então normalizados para obter vetores unitários que indicam as direções dos cabos. A normalização é realizada dividindo cada vetor pela sua norma. Por exemplo, para o vetor  $V1$ , o vetor unitário  $OR1$  correspondente pode ser descrito como:

$$OR1 = \frac{V1}{\|V1\|} \quad (13)$$

Este processo é repetido para todos os vetores de ligação.

Os vetores unitários são combinados na matriz Jacobiana  $J$ , definida na Equação 2 em que cada coluna representa a direção de um dos cabos.

As forças atuantes no efetuator são expressas na forma de um vetor  $\mathbf{w}$ , que inclui a força peso. No contexto deste projeto, considera-se a força peso  $mass \times g$  atuando na direção negativa do eixo  $y$ , em que  $g$  é a aceleração da gravidade.  $\mathbf{w}$  é definido na Equação 14 como a soma do vetor em que a força peso está contido e outro vetor com demais forças e momentos externos. No entanto, para o presente trabalho,  $\mathbf{f}_e$  e  $\tau_e$  serão iguais a 0, visto que a única força atuando no sistema RPAC planar, além da tração nos cabos, é a força peso do efetuator.

$$\mathbf{w} = [0, mass \times g]^T \quad (14)$$

Os limites de tensão dos cabos são definidos para garantir que as tensões permaneçam dentro dos valores permitidos. Estes limites são especificados pelos valores mínimos e máximos de forças,  $Tmin$  e  $Tmax$ , respectivamente.

A função `quadprog` do Octave é utilizada para resolver o sistema de equações lineares e encontrar as forças  $\mathbf{T}$  que minimizam a função objetivo e satisfazem as restrições de equilíbrio e limites de força. Este cálculo é essencial para garantir que o sistema esteja em equilíbrio e que as forças geradas pelos cabos sejam suficientes para suportar a força peso do efetuator.

O problema de otimização é formulado para minimizar a soma das forças nos cabos ao quadrado, sujeita a restrições de igualdade que representam as condições de equilíbrio e aos limites de tensão impostos.

A função objetivo é:

$$\frac{1}{2}T^T HT + a^T T \quad (15)$$

onde:

- $T$  é o vetor de forças nos cabos.
- $H$  é a matriz identidade  $4 \times 4$ .
- $a$  é um vetor nulo de tamanho 4.

As restrições de igualdade garantem o equilíbrio das forças resultantes no efetuador e são definidas pela matriz  $J$  e pelo vetor  $w$ :

$$J^T T = w \quad (16)$$

No qual:

- $J$  é a matriz de direções dos cabos, calculada a partir dos vetores normalizados que representam as direções dos cabos do efetuador até os pontos de ancoragem do sistema.
- $T$  é o vetor de forças resultantes.

Os limites de tensão nos cabos são especificados pelos vetores  $lb$  e  $ub$ :

$$lb = T_{min} \times \mathbf{1}_4 \quad (17)$$

$$ub = T_{max} \times \mathbf{1}_4 \quad (18)$$

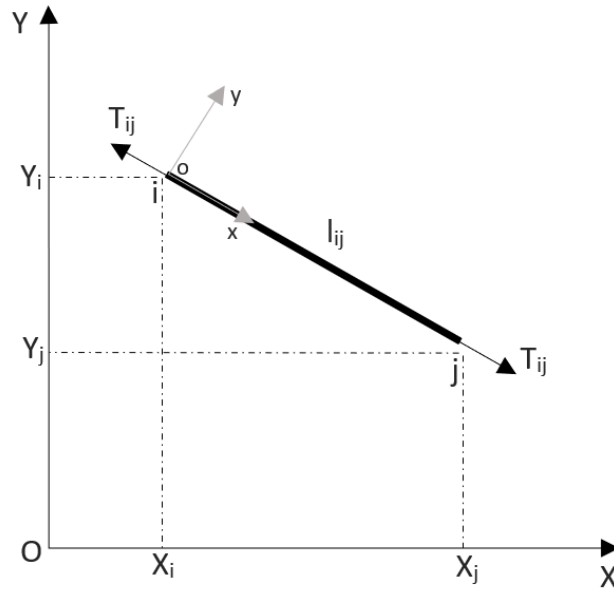
em que  $T_{min}$  e  $T_{max}$  são as tensões mínimas e máximas permitidas nos cabos, respectivamente, e  $\mathbf{1}_4$  é um vetor de uns de tamanho 4. No código, as matrizes de restrições de desigualdade são vazias, pois não há restrições de desigualdade no problema em questão. A função `quadprog` resolve o problema de otimização quadrática e retorna o vetor de tensões  $T$  que minimiza a função objetivo, respeitando as restrições de igualdade e os limites de tensão.

### 3.3 Resolução do problema de frequências

No contexto da análise de vibrações em RPACs, a formulação do MEF é fundamental para compreender o comportamento dinâmico desses sistemas complexos. Conforme detalhado em Nguyen-Van et al. (2020), a metodologia adotada envolve a divisão dos cabos dos RPACs em elementos finitos, cada um com dois nós, identificados como  $i$  e  $j$ , e comprimento  $l_{ij}$  e tensão aplicada  $T_{ij}$ . Embora essa abordagem compartilhe princípios do método dos elementos finitos, ela se concentra especificamente na discretização dos cabos. Esse enfoque na divisão dos cabos é a chave para a análise das respostas dinâmicas do sistema, permitindo capturar características importantes para o desenvolvimento de robôs eficientes e seguros. Na Figura 14, o cabo do robô é representado como um elemento de uma treliça plana, com os eixos  $X$  e  $Y$  globais e  $x$  e  $y$  locais.



Figura 14 – Modelagem do cabo como um elemento de treliça.



Fonte: Autor.

A equação geral de movimento do elemento de cabo é dada por:

$$M + (K_L + K_G)u = 0 \quad (19)$$

Na qual  $M$  é a matriz de massa,  $u$  é o vetor de deslocamento,  $K_L$  é a matriz de rigidez convencional e  $K_G$  é a matriz de rigidez geométrica. O vetor de deslocamento  $u$  é dado por:

$$\mathbf{u} = [u_{xi} \quad u_{yi} \quad u_{zi} \quad u_{xj} \quad u_{yj} \quad u_{zj}]^T \quad (20)$$

A matriz de rigidez convencional  $K_L$  e a matriz de rigidez geométrica  $K_G$  são expressas em termos das propriedades do cabo e de sua geometria, como o módulo de elasticidade, a área de seção transversal e o comprimento. Também, consideram a atuação das tensões axiais e a aplicação da matriz  $G$ , também chamada de matriz transformação das coordenadas locais para as globais. As expressões dessas matrizes são mostradas nas Equações 21 e 22.

$$\mathbf{K}_L = \frac{EA - T_{ij}}{l_{ij}} \begin{bmatrix} G & -G \\ -G & G \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\mathbf{K}_G = \frac{T_{ij}}{l_{ij}} \begin{bmatrix} I & -I \\ -I & I \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} l^2 & ml & nl \\ ml & m^2 & nm \\ nl & nm & n^2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Sendo  $l$ ,  $m$  e  $n$  definidos a seguir:

$$l = \frac{(x_j - x_i)}{l_{ij}} \quad (24)$$

$$m = \frac{(y_j - y_i)}{l_{ij}} \quad (25)$$

$$n = \frac{(z_j - z_i)}{l_{ij}} \quad (26)$$

A matriz de massas é definida como mostrado a seguir, sendo  $\gamma$  a massa por unidade de comprimento e  $I$  a matriz identidade de dimensão 2.

$$\mathbf{M} = \frac{\gamma l_{ij}}{6g} \begin{bmatrix} 2I & I \\ I & 2I \end{bmatrix} \quad (27)$$

Uma vez obtidas as matrizes locais transformadas para todos os elementos do sistema, elas são então agregadas para formar as matrizes globais de rigidez ( $K_{global}$ ) e de massa ( $M_{global}$ ). A agregação é feita posicionando as matrizes locais transformadas nas posições corretas dentro das matrizes globais, conforme determinado pela conectividade dos nós no sistema discretizado.

A matriz global de rigidez é montada somando as contribuições de todos os elementos para cada par de nós conectados:

$$\mathbf{K}_{global} = \sum_{e=1}^n \mathbf{T}^T \mathbf{K}_{local}^{(e)} \mathbf{T} \quad (28)$$

A matriz global de massa é montada de forma similar:

$$\mathbf{M}_{global} = \sum_{e=1}^n \mathbf{T}^T \mathbf{M}_{local}^{(e)} \mathbf{T} \quad (29)$$

Para resolver a equação dinâmica, assume-se uma solução harmônica para os deslocamentos  $u$ :

$$u(t) = U e^{i\omega t} \quad (30)$$

onde:

- $U$  é o vetor de amplitudes dos deslocamentos,
- $\omega$  é a frequência angular das vibrações,
- $t$  é o tempo.

Substituindo esta solução na equação dinâmica original, obtemos:

$$M(-\omega^2 U) + (K_g + K_l)U = 0 \quad (31)$$

ou, reescrevendo:

$$[(K_g + K_l) - \omega^2 M] U = 0 \quad (32)$$

A Equação 32 é do tipo problema de autovalores, em que busca-se os valores de  $\omega^2$  (autovalores) e os vetores  $U$  (autovetores) que a satisfazem. Os autovalores  $\omega^2$  representam as frequências naturais ao quadrado do sistema, enquanto os autovetores  $U$  correspondem às formas modais das vibrações.

Para encontrar os autovalores e autovetores, utilizam-se métodos numéricos de resolução de problemas de autovalores. Em Octave, por exemplo, a função `eig` pode ser usada.

A função `eig` em Octave é projetada para calcular os autovalores e autovetores de uma matriz quadrada. Quando aplicada a uma matriz  $\mathbf{A}$ , a função retorna um vetor contendo os autovalores e uma matriz cujas colunas são os autovetores correspondentes. No contexto da Equação 32,  $\mathbf{A}$  representa a matriz  $(K_g + K_l) - \omega^2 M$ . A função `eig` resolve o problema característico  $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ , em que  $\mathbf{A}$  é a matriz do sistema,  $\lambda$  são os autovalores e  $\mathbf{v}$  são os autovetores. O uso de ferramentas computacionais como o Octave ou outra linguagem de programação é crucial para resolver sistemas de grande dimensão, típicos em análises de RPACs devido ao grande número de cabos e à complexidade das matrizes envolvidas.

As matrizes de rigidez  $K_g$  e  $K_l$  são fundamentais para descrever como o sistema reage a perturbações externas. A matriz  $K_g$  reflete como a configuração geométrica do sistema influencia sua rigidez. Enquanto isso,  $K_l$  reflete as propriedades materiais dos cabos. A combinação dessas matrizes fornece uma descrição completa da rigidez do sistema e é essencial para prever corretamente as frequências naturais e modos de vibração do RPAC.

## 4 RESULTADOS

Após uma série de testes e iterações, determinou-se que dividir cada cabo em 40 elementos finitos é a abordagem ideal. Este número foi escolhido com base em uma análise de convergência, em que se observou que a diferença no valor da frequência natural encontrada cai para menos de 1% entre a iteração com  $n$  elementos e a iteração com  $n - 1$  elementos. Em outras palavras, a partir de 40 elementos, a variação nas frequências naturais se torna insignificante, indicando que o modelo atingiu uma precisão aceitável para as análises subsequentes.

Essa escolha assegura um equilíbrio entre a precisão do modelo e a eficiência computacional, permitindo que as simulações sejam realizadas de maneira eficaz sem comprometer a qualidade dos resultados obtidos. Assim, a divisão dos cabos em 40 elementos finitos constitui um parâmetro chave na abordagem para a análise das frequências naturais no RPAC.

### 4.1 Frequências naturais com a variação da tensão aplicada

As análises descritas como objetivos são o estudo do comportamento das frequências naturais do sistema a partir da variação da força aplicada nos cabos e, em seguida, esse mesmo estudo mediante a variação da posição inicial do efetuador.

Antes de iniciar a análise variando a força e a posição inicial, na Tabela 2 é mostrado o resultado das frequências naturais por modo de vibrar para uma simulação com  $T_{min} = 40$  N e a posição inicial do efetuador no centro do espaço de trabalho.

Tabela 2 – Frequências dos modos de vibrar para  $T_{min} = 40$  N.

<b>Modo de Vibrar</b>	<b>Hz</b>
1	19.24
2	19.24
3	22.33
4	22.33
5	38.51
6	38.51
7	44.69
8	44.69
9	57.83
10	57.83

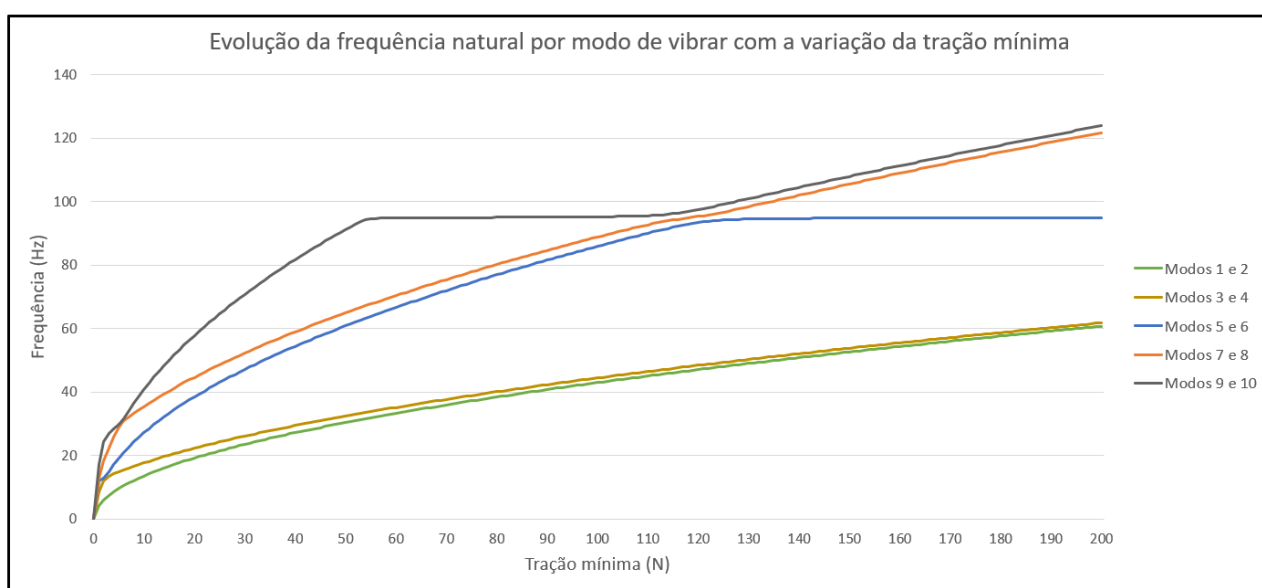
Fonte: Autor.

Em sistemas simétricos, os modos de vibração podem ser ortogonais. Isso significa que eles podem ser decompostos em componentes que vibram independentemente, mas com as mesmas frequências naturais. Por exemplo, modos de vibração que envolvem

movimentos em direções perpendiculares (eixos x e y) ou combinações de rotações e translações simétricas. Ao resolver as equações diferenciais que governam o movimento do RPAC, os modos naturais (autovalores) frequentemente aparecem em pares devido às propriedades matemáticas dessas equações. Esses pares de autovalores correspondem a frequências naturais iguais, refletindo a simetria e as características dinâmicas do sistema.

No próximo passo manteve-se o efetuador na posição inicial (0,0) e variou-se a força de tração mínima aplicada nos cabos de 1 a 200 N, os resultados são mostrados na Figura 15.

Figura 15 – Evolução da frequência natural por modo de vibrar com a variação da tração mínima.



Fonte: Autor.

Inicialmente (até 10 N), observa-se um rápido aumento nas frequências naturais para todos os modos de vibração, sugerindo que a rigidez do sistema é altamente dependente da tensão aplicada nos cabos. Esse rápido aumento ocorre através de uma curva semelhante a uma sigmoideal que converge para curvas com comportamento linear nos modos 1 e 2, 3 e 4 e 7 e 8.

Para os modos 1 e 2, representados pela curva verde, há um crescimento acentuado das frequências naturais até cerca de 50 N, seguido por um comportamento mais linear. Os modos 3 e 4 (amarelo) seguem um padrão semelhante, mas com frequências ligeiramente mais altas, e uma estabilização que ocorre gradualmente.

Nos modos 5 e 6 (azul), o aumento inicial é evidente, e a estabilização das frequências ocorre em torno de 100 N. Já os modos 7 e 8 (laranja) apresentam frequências ainda mais elevadas, com uma estabilização que acontece mais cedo, indicando maior rigidez estrutural. Por fim, os modos 9 e 10 (cinza) têm as frequências naturais mais altas do gráfico, estabilizando-se por volta de 80 N e mantendo-se praticamente constantes a

partir desse ponto.

Além dos pontos mencionados, é importante destacar que, a partir do quinto modo de vibrar, as frequências em torno de 95 Hz tornam-se inevitáveis para trações superiores a 110 N. Essa tendência indica uma estabilização dos modos de vibrar superiores, refletindo a sensibilidade da frequência natural à variação da tração mínima aplicada.

Os resultados apresentados na Figura 15 sugerem que, inicialmente, o aumento da tração mínima nos cabos contribui de forma significativa para a rigidez do sistema, refletida no aumento das frequências naturais, como já citado. Esse comportamento é evidente nas regiões onde as curvas apresentam crescimento acentuado. Contudo, após certo ponto de tração, observa-se uma estabilização nas frequências, indicando que a rigidez adicional do sistema se torna menos sensível a incrementos subsequentes na força trativa mínima aplicada.

Ao analisar as frequências naturais para todos os modos de vibrar com trações mínimas de até 10 N, verifica-se um agrupamento das frequências em torno de 25 Hz. Isso sugere que excitações externas nesta faixa de frequência têm uma alta probabilidade de coincidir com as frequências de ressonância de um ou mais modos de vibrar do sistema. Esse fenômeno ressalta a necessidade de um sistema de controle robusto que preveja essas frequências antes de definir a trajetória do efetuador, de modo a evitar que o sistema entre em ressonância.

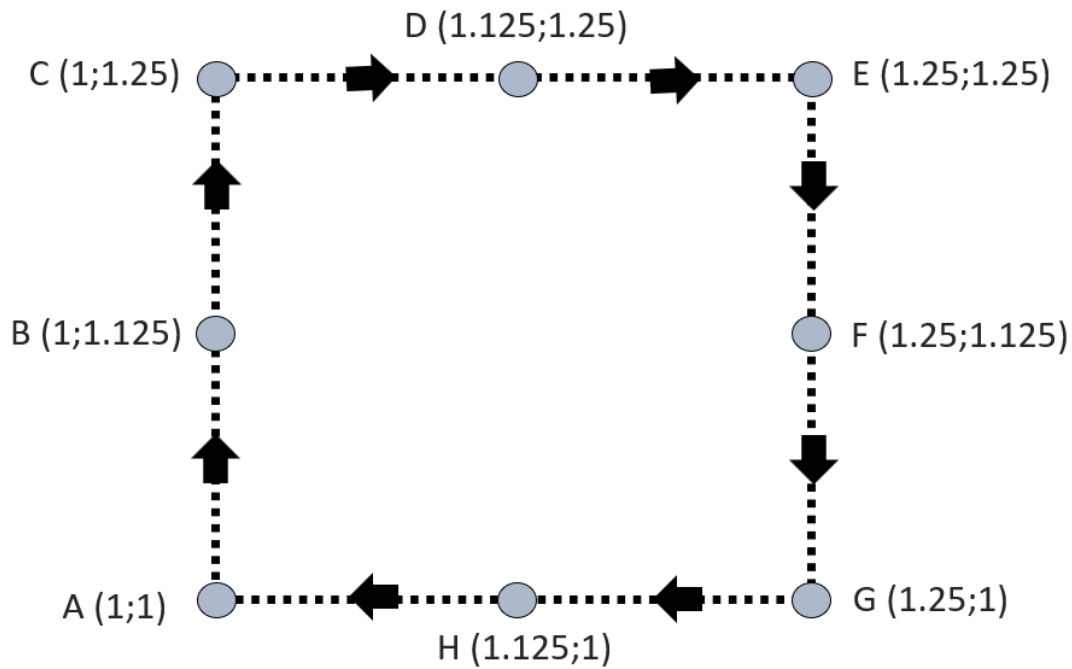
Portanto, trabalhar com trações mínimas mais elevadas contribui para a estabilidade do sistema, pois reduz a probabilidade de excitação das frequências naturais. No entanto, a análise mostra que há pontos críticos onde as frequências de diferentes modos convergem, como observado próximo a 95 Hz com uma tração de aproximadamente 110 N. Esses pontos de convergência são particularmente importantes, pois representam condições onde múltiplos modos podem ser excitados simultaneamente, exigindo atenção especial na definição das condições operacionais do robô.

## 4.2 Frequências naturais com a variação da posição do efetuador

O próximo passo descrito como objetivo é variar a posição do efetuador. Para isso, foram escolhidos os pontos da trajetória descrita em Costa (2022) e somados mais quatro, mostrados na Figura 16. Também, o valor de  $T_{min} = 40$  N foi selecionado arbitrariamente para a próxima etapa da análise. Além disso, é importante destacar que os resultados encontrados não descrevem a evolução das frequências naturais ao longo de uma trajetória, mas sim a evolução caso o efetuador esteja parado nas em cada um das posições selecionadas.

Analogamente a um sistema com apenas um grau de liberdade, a frequência natural ( $\omega_n$ ) é a frequência na qual o sistema tende a vibrar quando perturbado e deixado livre para oscilar. A rigidez ( $k$ ) é uma medida da resistência à deformação sob a aplicação de uma força.

Figura 16 – Pontos de cálculo das frequências naturais.



Fonte: Autor.

A relação matemática entre frequência natural e rigidez, para sistemas simples como um oscilador massa-mola, é dada por:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (33)$$

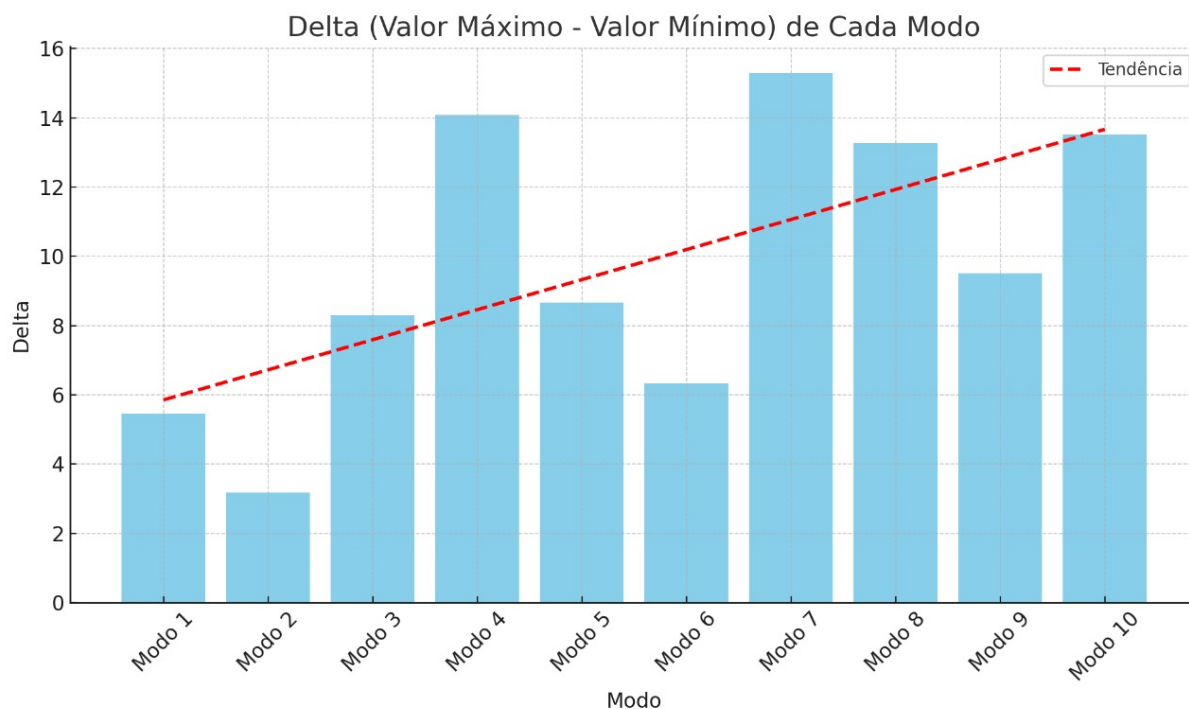
Onde:

- $\omega_n$  é a frequência natural (em radianos por segundo).
- $k$  é a constante de rigidez do sistema.
- $m$  é a massa do sistema.

Dessa forma, com a massa constante, um aumento na rigidez  $k$  resulta em um aumento na frequência natural  $\omega_n$ , enquanto uma diminuição na rigidez resulta em uma diminuição na frequência natural. No caso do RPAC, a rigidez do sistema é influenciada pela força trativa nos cabos e pela posição do efetuador. Quando o efetuador altera a sua posição no plano, há também uma variação na massa do sistema devido à variação no comprimento dos cabos. Conforme a posição do efetuador muda, os cabos se estendem ou se contraem, alterando a massa efetiva do sistema, o que também impacta a frequência natural.

Os gráficos 3D apresentados nas Figuras 18, 19 e 20 mostram a evolução das frequências naturais dos modos de vibração (1 a 10) ao longo da trajetória definida pelas posições A, B, C, D, E, F, G e H na Figura 16.

Figura 17 – Variação das frequências máximas e mínimas de cada modo.



Fonte: Autor.

Para os modos de vibração 1 e 2, as frequências naturais variam de 22 a 27 Hz e de 24 a 27 Hz, respectivamente, indicando que pequenas mudanças na posição do efetuator não afetam drasticamente a rigidez do sistema, resultando em frequências naturais  $\omega_n$  estáveis. Essas variações são ilustradas na Figura 17.

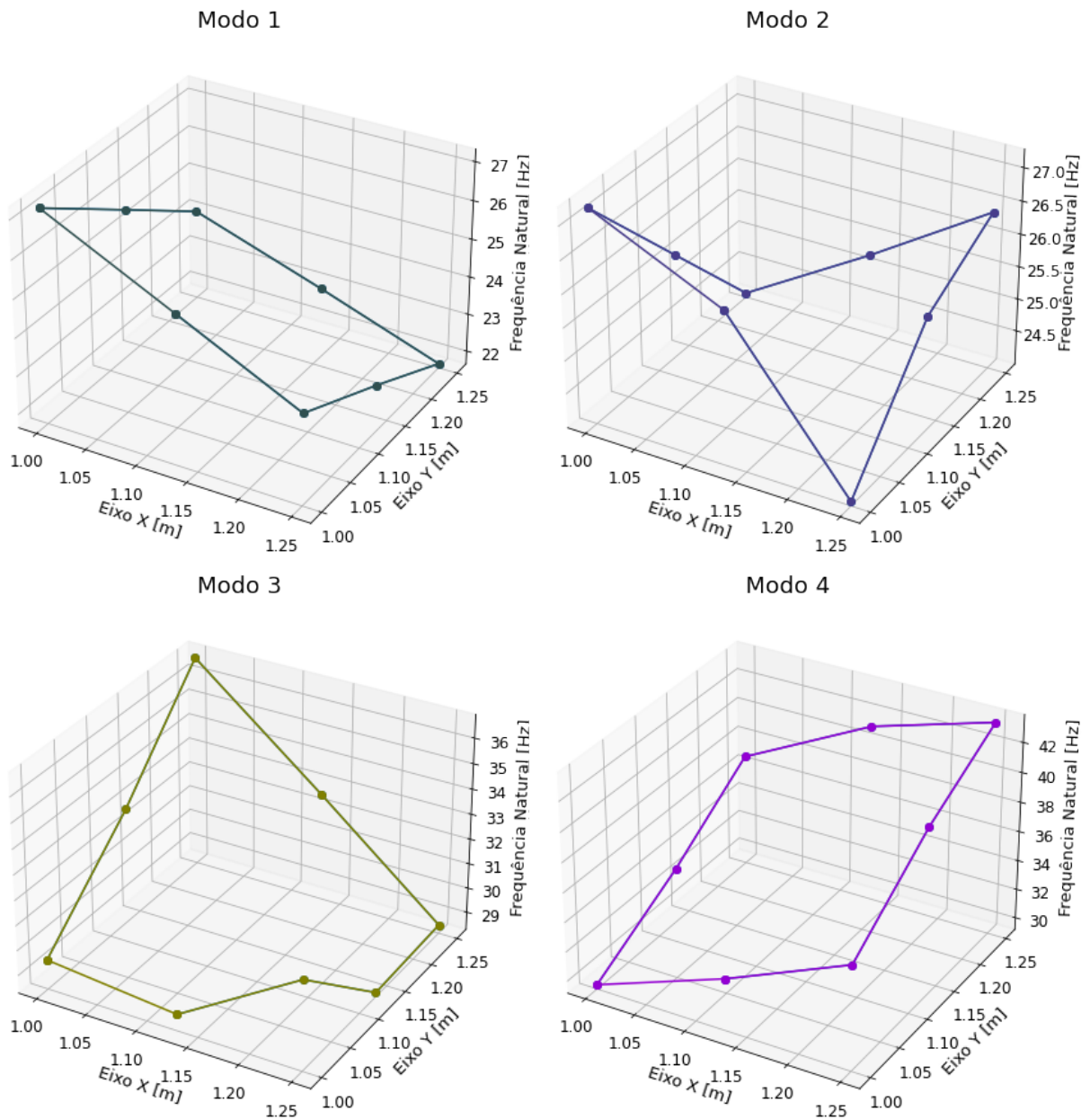
Nos modos 3 e 4, as frequências variam de 28 a 36 Hz e de 30 a 44 Hz, respectivamente, mostrando que a rigidez aumenta conforme o efetuator se afasta do centro. Essa tendência de aumento continua em modos superiores. No entanto, como mostra a Figura 17, o modo 4 apresenta uma variação significativa, a segunda maior entre os dez modos, indicando que a tendência de crescimento da variação é interrompida entre os modos 4, 5 e 6.

Contudo, a linha de tendência revela que, em geral, a rigidez  $k$  é maior nas posições mais extremas, resultando em frequências naturais  $\omega_n$  mais altas. Os modos de vibração 7, 8, 9 e 10 exibem as maiores variações, indicando alta sensibilidade à posição do efetuator, com as posições mais afastadas do centro aumentando significativamente a rigidez e refletindo nas frequências naturais mais elevadas em comparação aos demais modos.

De modo geral, os modos de vibração mais baixos (1 a 4) apresentam frequências mais estáveis ao longo das diferentes posições do efetuator, indicando que esses modos são menos sensíveis às pequenas mudanças. Os modos de vibração mais altos (5 a 10) apresentam variações mais significativas, especialmente nas posições mais extremas, sugerindo maior sensibilidade à posição do efetuator.



Figura 18 – Evolução das frequências dos modos de vibrar mediante variação dos pontos.

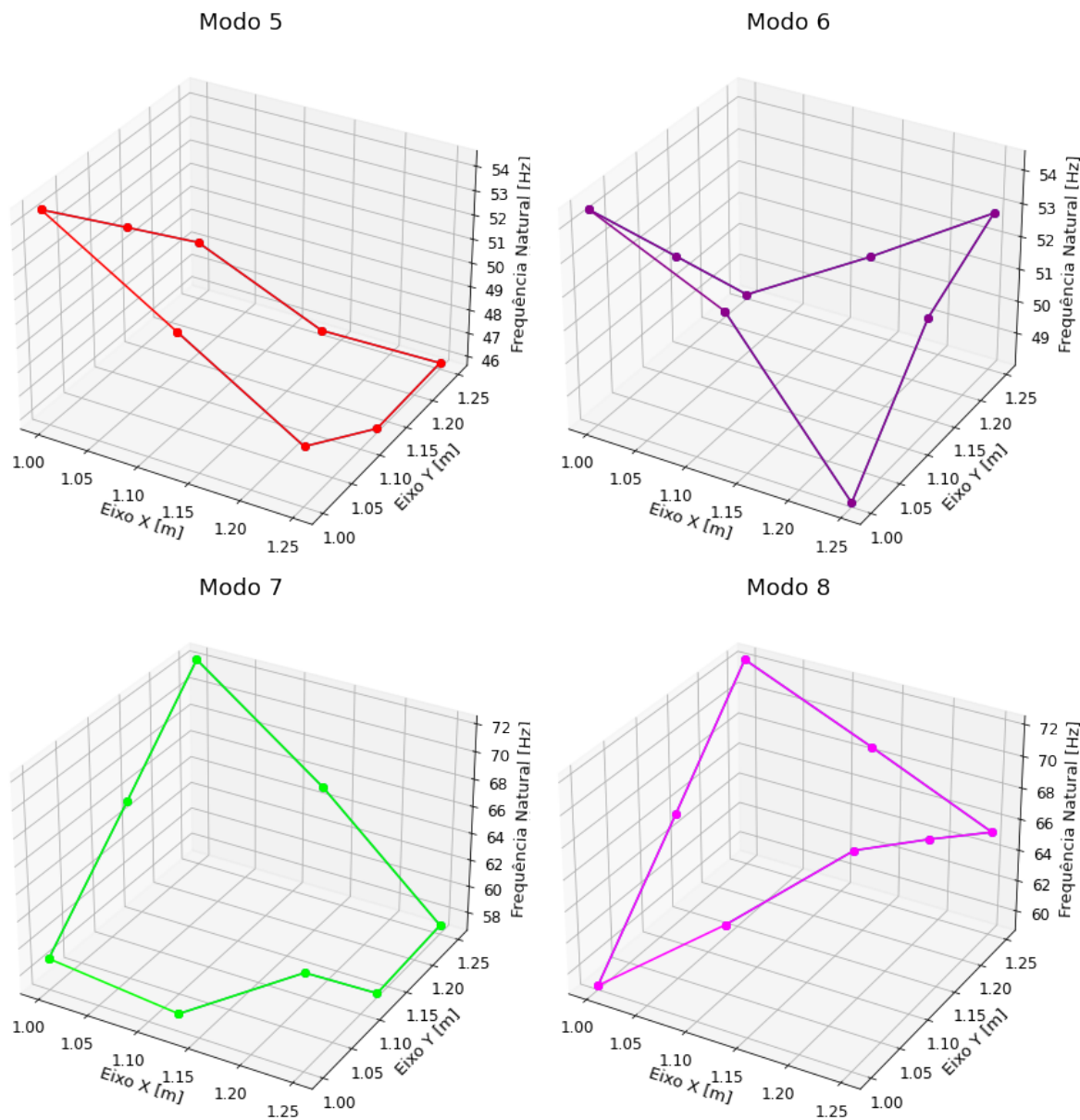


Fonte: Autor.

A rigidez do sistema aumenta quando o efetador está mais distante do centro de massa, como observado nas posições mais extremas. As menores frequências naturais nas posições centrais indicam que essas configurações têm menor rigidez. Portanto, para aplicações que requerem alta rigidez, posicionar o efetador mais distante do centro pode ser benéfico. Mantê-lo próximo ao centro pode ser vantajoso em situações onde uma maior flexibilidade é desejável.

É interessante observar a semelhança entre os modos de vibrar 2, 6 e 10. Apesar das diferenças nas frequências naturais absolutas, esses modos apresentam padrões de variação semelhantes ao longo das diferentes posições do efetador.

Figura 19 – Evolução das frequências dos modos de vibrar mediante variação dos pontos - Continuação.

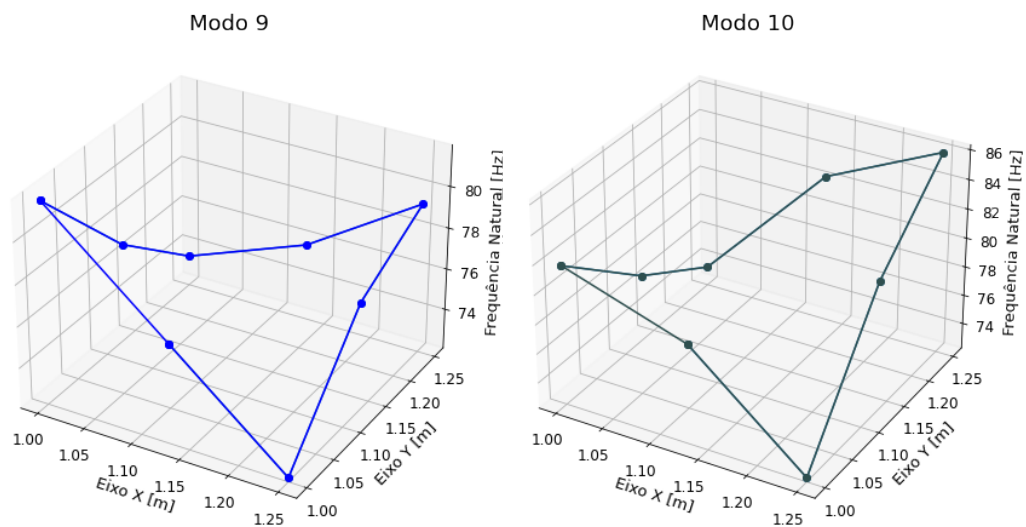


Fonte: Autor.

Essa semelhança sugere que esses modos compartilham características estruturais e dinâmicas semelhantes, o que pode ser atribuído à simetria do sistema e à distribuição uniforme das forças trativas nos cabos. Tal comportamento reforça a ideia de que a rigidez do sistema é influenciada de maneira consistente pelas mudanças na posição no plano do efetuador.

De maneira similar, os modos de vibrar 1, 5 e 9 também mostram um comportamento parecido ao longo das posições analisadas. Esses modos, embora tenham frequências naturais diferentes, respondem de forma similar às variações na posição do efetuador, indicando que a distribuição de rigidez no sistema afeta esses modos de maneira análoga.

Figura 20 – Evolução das frequências dos modos de vibrar mediante variação dos pontos -  
 Continuação 2.



Fonte: Autor.

A identificação dessas semelhanças é crucial para entender melhor a dinâmica do RPAC e otimizar seu desempenho, permitindo ajustes precisos na posição do efetuator para controlar a rigidez e evitar ressonâncias indesejadas.

## 5 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou um estudo detalhado da modelagem e análise das frequências naturais em RPACs. O principal objetivo foi analisar como a variação da tração nos cabos e da posição do efetuator afetam as frequências naturais dos RPACs, utilizando um modelo matemático implementado em Octave para simulações.

Os resultados indicaram que a rigidez do sistema, e conseqüentemente as frequências naturais, são significativamente influenciadas tanto pela tração aplicada nos cabos quanto pela posição do efetuator. Em particular, observou-se que, com trações mínimas de até 10 N, as frequências naturais dos modos de vibrar se concentraram em uma faixa de até 25 Hz, sugerindo uma potencial vulnerabilidade à ressonância com excitações externas nessa faixa. À medida que a tração nos cabos aumenta, as frequências naturais também se elevam, mas esse efeito tende a estabilizar após certo ponto, indicando que ganhos adicionais de rigidez se tornam marginais.

Os objetivos específicos de desenvolver um modelo em Octave para a análise das frequências naturais e investigar a influência da força e posição foram alcançados. A modelagem demonstrou ser eficaz para prever as frequências críticas que devem ser evitadas durante a operação dos RPACs, contribuindo para o planejamento de trajetórias que minimizem o risco de ressonância. Além disso, o estudo destacou que modos de vibração mais baixos apresentaram frequências mais estáveis ao longo de diferentes posições do efetuator, enquanto modos mais altos foram mais sensíveis a essas variações.

A partir das análises realizadas, conclui-se que trabalhar com trações mais altas pode aumentar a estabilidade do sistema, mas é necessário um equilíbrio entre a rigidez adicional e os desafios operacionais associados ao aumento das tensões nos cabos. Essa compreensão é fundamental para o desenvolvimento de estratégias de controle que assegurem a segurança e eficiência dos RPACs em aplicações práticas, como na astronomia, logística e reabilitação médica.

### 5.1 Trabalhos Futuros

Embora este trabalho tenha fornecido uma base sólida para a análise de frequências naturais, várias áreas podem ser exploradas em pesquisas futuras:

- **Desenvolvimento de Algoritmos de Controle:** Implementar algoritmos de controle avançados que possam ajustar automaticamente as tensões nos cabos para evitar ressonâncias durante a operação.
- **Otimização Multiobjetivo:** Explorar técnicas de otimização multiobjetivo que considerem não apenas a minimização da energia e a evitação de ressonâncias, mas

também outros critérios, como o tempo de operação e a precisão do posicionamento.

- **Simulações em Tempo Real:** Desenvolver simulações em tempo real que possam ser usadas em sistemas de controle para prever e corrigir possíveis problemas de ressonância durante a operação dos RPACs.

Essas direções de pesquisa podem contribuir para o avanço do conhecimento e o aprimoramento dos RPACs, ampliando suas aplicações e melhorando seu desempenho em diversas áreas.

## REFERÊNCIAS

- AZEVEDO Álvaro. **MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**. [S.l.]: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto Portugal, 2003.
- BISHAY, P. L. Teaching the finite element method fundamentals to undergraduate students through truss builder and truss analyzer computational tools and student-generated assignments mini-projects. **Computer Applications in Engineering Education**, v. 28, n. 4, p. 1007–1027, 2020. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/cae.22281>>.
- BRUCKMANN, T. et al. An energy-efficient wire-based storage and retrieval system. In: **2013 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics**. [S.l.: s.n.], 2013. p. 631–636.
- COSTA, A. **OTIMIZAÇÃO DO DESEMPENHO DINÂMICO DE ROBÔS ACIONADOS POR CABOS COM REDUNDÂNCIA CINEMÁTICA**. Tese (Tese) — Universidade Federal de São CARLOS, 2022.
- DU, J.; DUAN, X.; QIU, Y. Dynamic analysis and vibration attenuation of cable-driven parallel manipulators for large workspace applications. **Advances in Mechanical Engineering**, v. 2013, p. 1–6, 01 2015.
- FELIPPA, C. A. **Introduction to Finite Element Methods**. [S.l.]: Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures, University of Colorado at Boulder, 2004. Material assembled from Lecture Notes for the course Introduction to Finite Elements Methods (ASEN 5007).
- FERREIRA, A.; FANTUZZI, N. **MATLAB Codes for Finite Element Analysis**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2020.
- FONTES, J. V. de C. **Controle de um manipulador planar paralelo com redundância cinemática**. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019. Acesso em: 2024-07-17.
- GAMBHIR, M.; BATCHELOR, B. Finite element study of the free vibration of 3-d cable networks. **International Journal of Solids and Structures**, v. 15, n. 2, p. 127–136, 1979. ISSN 0020-7683. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020768379900179>>.
- GAMBHIR, M. L.; BATCHELOR, B. de V. A finite element for 3-d prestressed cable networks. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 11, n. 11, p. 1699–1718, 1977. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.1620111106>>.
- GOUTTEFARDE, M.; BRUCKMANN, T. Cable-driven parallel robots. In: **Encyclopedia of Robotics**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2022. p. 1–14.
- ITURRALDE, K. et al. Cable-driven parallel robot for curtain wall module installation. **Automation in Construction**, Elsevier, v. 138, p. 104235, jun. 2022. ISSN 0926-5805. Publisher Copyright: © 2021.

- KARDILE, B. A.; AUTI, A. B. Power and energy analysis of bldc motors: Impact of vibration on performance. **Research Square**, November 2023. Preprint (Version 1). Disponível em: <<https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-3641712/v1>>.
- KHOSRAVI, M. A.; TAGHIRAD, H. D. Robust pid control of fully-constrained cable driven parallel robots. **Mechatronics**, v. 24, n. 2, p. 87–97, 2014. ISSN 0957-4158. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957415813002353>>.
- MAO, Y. et al. Human movement training with a cable driven arm exoskeleton (carex). **IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering**, v. 23, n. 1, p. 84–92, 2015.
- MIERMEISTER, P. et al. The cablerobot simulator large scale motion platform based on cable robot technology. In: **2016 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)**. [S.l.: s.n.], 2016. p. 3024–3029.
- MING, A.; HIGUCHI, T. Study on multiple degree-of-freedom positioning mechanism using wires. ii: Development of a planar completely restrained positioning mechanism. **International Journal of The Japan Society for Precision Engineering**, v. 28, p. 235–242, 1994. Disponível em: <<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:114844531>>.
- NAN, R. et al. The five-hundred-meter aperture spherical radio telescope (fast) project. **International Journal of Modern Physics D**, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 20, n. 06, p. 989–1024, jun. 2011. ISSN 1793-6594. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1142/S0218271811019335>>.
- NGUYEN-VAN, S.; GWAK, K.-W. A two-nozzle cable-driven parallel robot for 3d printing building construction: path optimization and vibration analysis. **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 120, p. 1–14, 05 2022.
- NGUYEN-VAN, S. et al. A novel modified analytical method and finite element method for vibration analysis of cable-driven parallel robots. **Journal of Mechanical Science and Technology**, 2020. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/s12206-020-0809-9>>.
- POTT, A. **Cable-Driven Parallel Robots**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2018.
- QIAN, S. et al. A review on cable-driven parallel robots. **Chinese Journal of Mechanical Engineering**, 2018. Disponível em: <<https://cjme.springeropen.com/articles/10.1186/s10033-018-0267-9#citeas>>.
- VERHOEVEN, R. Analysis of the workspace of tendon-based stewart platforms. In: . [s.n.], 2004. Disponível em: <<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:108926598>>.
- YUAN, H. et al. Vibration analysis of cable-driven parallel robots based on the dynamic stiffness matrix method. **Journal of Sound and Vibration**, v. 394, p. 527–544, 2017. ISSN 0022-460X. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X17300950>>.
- ZHANG, Z. et al. State-of-the-art on theories and applications of cable-driven parallel robots. **Frontiers of Mechanical Engineering**, v. 17, n. 3, p. 37, Sep 2022. ISSN 2095-0241. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11465-022-0693-3>>.

---

ZIENKIEWICZ, O.; TAYLOR, R.; ZHU, J. **The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals**. 6th. ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2005. ISBN 0750663200.



## Apêndices

## APÊNDICE A – Código desenvolvido em Octave

Algoritmo A.1 – Função para cálculo das coordenadas dos nós

```

1 function nodeCoordinates=Coordinates_calculation(a,Ax,Ay,n)
2   % Preallocate nodeCoordinates array
3   nodeCoordinates = [];
4
5   % Generate coordinates for each path
6   % Path from (a, a) to (Ax, Ay)
7   x1 = (a:-:(a-Ax)/n:a+((n-1)*-(a-Ax)/n));
8   y1 = (a:-:(a-Ay)/n:a+((n-1)*-(a-Ay)/n));
9   path1 = [x1, y1];
10
11  % Path from (-a, a) to (Ax, Ay)
12  x2 = (-a:-:(-a-Ax)/n:-a+((n-1)*-(-a-Ax)/n);
13  y2 = (a:-:(a-Ay)/n:a+((n-1)*-(a-Ay)/n));
14  path2 = [x2, y2];
15
16  % Path from (-a, -a) to (Ax, Ay)
17  x3 = (-a:-:(-a-Ax)/n:-a+((n-1)*-(-a-Ax)/n));
18  y3 = (-a:-:(-a-Ay)/n:-a+((n-1)*-(-a-Ay)/n));
19  path3 = [x3, y3];
20
21  % Path from (a, -a) to (Ax, Ay)
22  x4 = (a:-:(a-Ax)/n:a+((n-1)*-(a-Ax)/n));
23  y4 = (-a:-:(-a-Ay)/n:-a+((n-1)*-(-a-Ay)/n));
24  path4 = [x4, y4];
25
26  % Combine all paths
27  nodeCoordinates = [path1; path2; path3; path4];
28
29  % Add end-effector position
30  nodeCoordinates = [nodeCoordinates; Ax, Ay];
31 end

```

Fonte: Autor.

## Algoritmo A.2 – Função para cálculo da tensão nos cabos

```

1 function T=Tension_Calculation(Tmin,Tmax,Ax,Ay,a,mass,b)
2   g = 9.81; % gravity
3   a = 1.25; % half the dimension of the robot along x and y axes
4
5   % Define attachment points in 2D (z component is ignored)
6   B1 = [a, a];
7   B2 = [-a, a];
8   B3 = [-a, -a];
9   B4 = [a, -a];
10  E = [Ax, Ay];
11
12  % Calculate vectors from the end-effector to the attachment
13     points
14  VV1 = B1 - E;
15  VV2 = B2 - E;
16  VV3 = B3 - E;
17  VV4 = B4 - E;
18
19  % Normalize the vectors
20  ORR1 = VV1 / norm(VV1);
21  ORR2 = VV2 / norm(VV2);
22  ORR3 = VV3 / norm(VV3);
23  ORR4 = VV4 / norm(VV4);
24
25  % Construct the R matrix for 2D
26  R = [ORR1, ORR2, ORR3, ORR4];
27
28  % Set up quadratic programming problem
29  H = eye(4);
30  f = zeros(4, 1);
31  lb = Tmin * ones(4, 1);
32  ub = Tmax * ones(4, 1);
33
34  % Only need to balance forces in the x and y directions
35  Beq = [0, mass * g];
36
37  % Solve the quadratic programming problem
38  T = quadprog(H, f, [], [], R, Beq, lb, ub);
39
40  % Print the results
41  fprintf('Tensions in the cables:\n');
42  for i = 1:length(T)
43     fprintf('Cable %d: %.2f N\n', i, T(i));
44  end

```

Fonte: Autor.

## Algoritmo A.3 – Código completo com variação de forças

```

1  clc;clear all;close all
2  pkg load optim
3  pkg load io
4
5  # Define the number of force iterations
6  iteracoes = 10
7  results = zeros(10, iteracoes);
8  for Tmin = 1:iteracoes
9
10     E=2e10;% [Pa]
11     A=12.56*10^-6;% [m^2]
12     w=0.067; % kg/m
13     n=40;
14     mass = massa_efetuator = 1;
15     Tmax=250; % upper limit of Tension N
16     ##Tmin=40; % lower limit of Tension N
17     a=1;% x y dimentions of cable robot m
18     b=0;
19     g = 9.81;% [m/s^2]
20
21     Ax = 0;
22     Ay = 0;
23
24     % Tension problem resolution
25     T=Tension_Calculation(Tmin,Tmax,Ax,Ay,a,mass,b);
26
27     % Coordinates_calculation
28     nodeCoordinates = Coordinates_calculation(a,Ax,Ay,n);
29
30     % Create the element node matrix
31     l = size(nodeCoordinates, 1);
32     m = size(nodeCoordinates, 1) - 1;
33     elementNodes = zeros(m, 2);
34
35     % Define element connectivity
36     for i = 1:m
37         elementNodes(i, :) = [i i+1];
38         if (n == i || (2*n) == i || (3*n) == i)
39             elementNodes(i, 2) = 1;
40         end
41     end
42     elementNumbers = size(elementNodes, 1);
43     nodeNumbers = size(nodeCoordinates, 1);
44
45     % Define degrees of freedom (Dof), displacement vector (U), and
46     force vector
47     Dof = 2 * nodeNumbers;
48     U = zeros(Dof, 1);
49     force = zeros(Dof, 1);

```

## Algoritmo A.4 – Código completo com variação de forças - Continuação

```

1  % Initialize stiffness and mass matrices
2  stiffness = zeros(Dof);
3  mass = zeros(Dof);
4  % Identity matrix for use in stiffness/mass matrix calculations
5  I = eye(2, 2);
6  % Loop through each element to compute stiffness and mass
   matrices
7  for e = 1:elementNumbers
8      % Element degrees of freedom (Dof)
9      element_index = elementNodes(e, :);
10     elementDof = [2 * element_index(1) - 1, 2 * element_index(1)
11                 , 2 * element_index(2) - 1, 2 * element_index(2)];
12     % Node coordinates for the element
13     x1 = nodeCoordinates(element_index(1), 1);
14     y1 = nodeCoordinates(element_index(1), 2);
15     x2 = nodeCoordinates(element_index(2), 1);
16     y2 = nodeCoordinates(element_index(2), 2);
17     % Length and direction G_Matrixes of the element
18     L = sqrt((x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2);
19     Coordinate_X = (x2 - x1) / L; Coordinate_Y = (y2 - y1) / L;
20     % G matrix
21     G_Matrix = [Coordinate_X * Coordinate_X, Coordinate_X *
22                Coordinate_Y; Coordinate_Y * Coordinate_X, Coordinate_Y *
23                Coordinate_Y];
24     % Compute stiffness matrix contribution for the element
25     if e <= n
26         stiffness(elementDof, elementDof) = stiffness(elementDof
27             , elementDof) + ((E * A - T(1)) / L) * [G_Matrix, -
28             G_Matrix; -G_Matrix, G_Matrix] + (T(1) / L) * [I, -I;
29             -I, I];
30     elseif (n + 1 <= e && e <= 2 * n)
31         stiffness(elementDof, elementDof) = stiffness(elementDof
32             , elementDof) + ((E * A - T(2)) / L) * [G_Matrix, -
33             G_Matrix; -G_Matrix, G_Matrix] + (T(2) / L) * [I, -I;
34             -I, I];
35     elseif (2 * n + 1 <= e && e <= 3 * n)
36         stiffness(elementDof, elementDof) = stiffness(elementDof
37             , elementDof) + ((E * A - T(3)) / L) * [G_Matrix, -
38             G_Matrix; -G_Matrix, G_Matrix] + (T(3) / L) * [I, -I;
39             -I, I];
40     else
41         stiffness(elementDof, elementDof) = stiffness(elementDof
42             , elementDof) + ((E * A - T(4)) / L) * [G_Matrix, -
43             G_Matrix; -G_Matrix, G_Matrix] + (T(4) / L) * [I, -I;
44             -I, I];
45     end
46
47     % Compute mass matrix contribution for the element
48     mass(elementDof, elementDof) = mass(elementDof, elementDof)
49         + (w * L / (6 * g)) * [2 * I, I; I, 2 * I];
50 end

```

## Algoritmo A.5 – Código completo com variação de forças - Continuação 2

```

1  % Add end-effector mass to the global mass matrix
2  mass(end,end) = mass(end,end) + massa_efetuador;
3  mass(end-1,end-1) = mass(end-1,end-1) + massa_efetuador;
4
5  % Define fixed and free degrees of freedom
6  fix = [1, n + 1, 2 * n + 1, 3 * n + 1];
7  all = 1:nodeNumbers;
8  free = setdiff(all, fix);
9  k = size(free, 2) * 2;
10 Fdof = zeros(1, k);
11
12 for i = 1:k / 2
13     Fdof(2 * i - 1) = 2 * free(i) - 1;
14     Fdof(2 * i) = 2 * free(i);
15 end
16 M = mass;
17 K = stiffness;
18
19 % Criacao da matrix de rigidz e de massas apenas com os graus de
20   liberdade livres
21 % Extract reduced mass and stiffness matrices for free degrees
22   of freedom
23
24 M1 = M(Fdof, Fdof);
25 K1 = K(Fdof, Fdof);
26
27 % Compute the dynamic matrix and its eigenvalues
28 D = inv(M1) * K1;
29 w = eig(D);
30
31 % Compute natural frequencys
32 f2 = sort(sqrt(w)) * 0.16;
33
34 disp(f2(1:10))
35
36 results(:, Tmin) = f2(1:10);
37
38 end
39
40 % Convert the results matrix to a cell array
41 results_cell = num2cell(results);
42
43 % Create column names
44 column_names = cell(1, iteracoes);
45 for i = 1:iteracoes
46     column_names{i} = ['Iteration_' num2str(i)];
47 end
48
49 % Write the results matrix to an Excel file
50 filename = 'output.xlsx'; % Name of the Excel file
51 xlswrite(filename, results, 'Sheet1', 'A1'); % Writing data to '
52   Sheet1' starting from cell 'A1'

```