UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

João Lorena de Jesus Gomes

TEOREMA DE PITÁGORAS: PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O TRABALHO COM DEMONSTRAÇÕES NO 9° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

SOROCABA/SP

2024

João Lorena de Jesus Gomes

TEOREMA DE PITÁGORAS: PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O TRABALHO COM DEMONSTRAÇÕES NO 9° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas (PPGECE), da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas, sob orientação do Prof. Dr. Sadao Massago.

SOROCABA/SP

2024

Gomes, João Lorena de Jesus

Teorema de Pitágoras: proposta de sequência didática para o trabalho com demonstrações no 9° ano do ensino fundamental / João Lorena de Jesus Gomes -- 2024.
65f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba
Orientador (a): Sadao Massago
Banca Examinadora: Sadao Massago, Haroldo Aleixo de Lima Junior, Antonio Luís Venezuela
Bibliografia

1. Teorema de Pitágoras. 2. Demonstração. 3. Base Nacional Comum Curricular. I. Gomes, João Lorena de Jesus. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Maria Aparecida de Lourdes Mariano - CRB/8 6979

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato João Lorena de Jesus Gomes, realizada em 26/07/2024.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Sadao Massago (UFSCar)

Prof. Dr. Haroldo Aleixo de Lima Junior (UNISO)

Prof. Dr. Antonio Luís Venezuela (UFSCar)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos os professores do PPGECE UFSCar Sorocaba, que de maneira direta ou indireta contribuíram para esse trabalho. Obrigado Ana Mereu, Antonio Venezuela, Silvia Carvalho, Paulo Oliveira, Magda Peixoto, Graciele Silveira e Rogério Pires.

Agradeço ao meu orientador, Sadao Massago, pela paciência em meus percalços e sugestões de melhoria deste trabalho. Agradeço também pelas aulas de Geometria, recheadas de demonstrações, nas quais foram produzidas as sementes dessa dissertação.

Finalmente agradeço aos amigos que deram apoio e contribuições para a realização desse trabalho. Obrigado Néder Soares Felipe, Márcio Perotti e Mário Biazzi.

RESUMO

Este trabalho aborda o papel das demonstrações em geometria nas aulas de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental. Para tanto, considera como ponto de partida a BNCC, que inclui a realização de demonstrações entre as habilidades que estudantes devem adquirir ao longo de sua escolarização. Aborda a demonstração como característica intrínseca à Matemática, como meio de validação e de avanços nas mais diversas áreas de estudo dessa ciência e apresenta a sugestão de três demonstrações do teorema de Pitágoras que podem ser realizadas de maneira conjunta com estudantes do 9° ano do Ensino Fundamental, de forma a responder a pergunta norteadora “De que forma é possível realizar demonstrações do teorema de Pitágoras no Ensino Fundamental?”

Palavras-chave: Teorema de Pitágoras. Demonstração. Base Nacional Comum Curricular.

ABSTRACT

This work adresses the role and importance of demonstrations in Mathematics classes for the final Years of Elementary Education. To this end, it considers as a starting point the BNCC, which includes the performance of demonstrations among the skills that students should acquire throughou their schooling. It discusses the demonstration as intrinsic characteristic of Mathematics, as a means of validation and advancement in the most diverse fields of study of this Science. It also presents he suggestion of three demonstration of the Pythagorean theorem that can be carried out together with 9th-grade students of Elementary Education, in order to answer the guiding question “How is it possible to perform demonstrations of the Pythagorean theorem in Elementary Education?”.

Keywords: Pythagorean theorem. Demonstrations. Common National Curriculum Base.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Organização da BNCC do Ensino Fundamental..............................16
Figura 2 – Conteúdo e habilidades de Matemática..17
Figura 3 – Organização da BNCC do Ensino Médio...18
Figura 4 – Representação de um triângulo retângulo.......................................39
Figura 5 – Representação de um triângulo retângulo com altura e projeções.....40
Figura 6 – Representação do triângulo retângulo ABC......................................41
Figura 7 – Representação do triângulo retângulo ABH......................................42
Figura 8 – Representação do triângulo retângulo AHC......................................42
Figura 9 – Representação dos triângulos retângulos ABC e HBA.......................43
Figura 10 – Representação dos triângulos retângulos ABC e HAC....................44
Figura 11 – Representação dos triângulos retângulos HBA e HAC....................45
Figura 12 – Representação de um triângulo retângulo com suas medidas e ângulo...48
Figura 13 – Representação do quadrado construído a partir dos quatro triângulos retângulos...49
Figura 14 – Representação do quadrado construído a partir dos quatro triângulos retângulos (2)...50
Figura 15 – Representação de um triângulo retângulo......................................53
Figura 16 – Representação da figura formada a partir de dois triângulos retângulos...53
Figura 17 – Representação de um trapézio...54
Figura 18 –Imagem apresentado no livro Teláris Essencial Matemática............55
Figura 19 – Atividade proposta no livro Teláris Essencial Matemática................56
Figura 20 – Trapézio apresentado no livro Teláris Essencial Matemática...........57
Figura 21 – Trapézio apresentado Matemática e Realidade..............................58
Figura 22 – Ilustração apresentada no livro SuperAção Matemática.................58

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
DCNs	Diretrizes Curriculares Nacionais
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
PNE	Plano Nacional de Educação
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Habilidades de demonstração propostas na BNCC do Ensino Fundamental...34
Quadro 2 – Habilidades mobilizadas na primeira demonstração proposta........38
Quadro 3 – Habilidades mobilizadas na segunda demonstração proposta.........47
Quadro 4 – Habilidades mobilizadas na terceira demonstração proposta..........51

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO..10

1 A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR COMO DOCUMENTO NORTEADOR NA ELABORAÇÃO DE CURRÍCULOS....................................12

1.1 Breve histórico da construção da base nacional comum curricular......12

1.2 A organização da base nacional comum curricular do ensino fundamental...15

1.3 A organização da base nacional comum curricular do ensino médio....17

1.4 A área de matemática na base nacional comum curricular.....................19

1.5 Mudanças em relação aos currículos tradicionais.................................21

2 O MÉTODO AXIOMÁTICO DA MATEMÁTICA..23

2.1 Aspectos históricos...23

2. 2 A matemática como um modelo axiomático...26

2. 3 Algumas estratégias de demonstração..28

2. 3. 1 Demonstração Direta..30

2. 3. 2 Demonstração por Absurdo..31

2. 3. 3 Demonstração por Indução Matemática Finita..32

2. 4 O papel da demonstração na BNCC...33

3 PROPOSTAS DE DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS.....36

3.1 Demonstração utilizando semelhança de triângulos.............................37

3. 2 Demonstração utilizando área do triângulo e do quadrado...................46

3. 3 Demonstração utilizando área do triângulo e do trapézio......................51

3.4 Análise das demonstrações apresentadas em livros didáticos 55

CONSIDERAÇÕES FINAIS..60

REFERÊNCIAS..61

INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem como objetivo propor uma sequência didática que apresente demonstrações do Teorema de Pitágoras que possam ser realizadas e, principalmente, compreendidas pelos estudantes do 9° ano do Ensino Fundamental. A educação brasileira, em especial, a proposição de novos documentos norteadores da elaboração de currículos e da organização dos sistemas e redes de ensino, tem passado por importantes transformações na última década, desde a criação do Plano Nacional de Educação (PNE) em 2014 que estabelece metas de acesso, permanência e qualidade nas diferentes etapas e modalidades de ensino, passando pela criação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), homologada em 2018 e as reformas do Ensino Médio de 2017 e 2024.

Dentre essas transformações, abordamos neste trabalho, as novas diretrizes propostas pela BNCC, em particular a importância dada por esse documento normativo ao papel das demonstrações nas aulas de Matemática. Antes da BNCC, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) para o ensino de Matemática não incluíram no processo de ensino-aprendizagem as provas de teoremas, propriedades e proposições matemáticas como parte inerente da criação de significado aos objetos de estudo e da caracterização e diferenciação da Matemática para as demais Ciências.

Utilizamos como referencial teórico nesse trabalho, Morais Filho (2018) que defende a realização de demonstrações matemáticas, sempre de acordo com o grau de escolaridade dos estudantes, como parte inerente ao processo de ensino-aprendizagem bem como o rigor matemático nessas demonstrações, e como referencial bibliográfico, consultamos a Base Nacional Comum Curricular e elencamos as habilidades que envolvem demonstrações propostas nesse documento.

No capítulo 1 caracterizamos o documento intitulado BNCC – Base Nacional Comum Curricular – apresentando um histórico sobre a sua construção, as legislações que a previam (Constituição Federal, Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional e Plano Nacional de Educação), sua organização e, em especial, a área de Matemática presente nesse documento normativo, tanto nos anos finais do Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio e apresentamos as competências específicas para esses níveis.

No capítulo 2 apresentamos a matemática como um sistema axiomático formal e discutimos o que diferencia a matemática das outras ciências. Tratamos também de termos matemáticos como definição, teorema, conjectura e alguns dos tipos mais comuns de demonstrações.

No capítulo 3 propomos uma sequência didática composta por três diferentes demonstrações do Teorema de Pitágoras, sendo que uma delas envolve a semelhança de triângulos, e as outras duas apresentam como conhecimento específico prévio o cálculo de área de triângulos e quadriláteros. Além das demonstrações selecionadas, elencamos as habilidades previstas na BNCC que são mobilizadas para cada uma dessas demonstrações. Também neste capítulo, analisamos três livros didáticos adotados por escolas públicas que abordam a demonstração do Teorema de Pitágoras.

A escolha dessa temática reflete o interesse do autor em compreender como inserir as demonstrações como parte das aulas de matemática, de modo a enriquecê-las, assim como o fazem a apresentação de aplicações (sejam internas ou externas à própria matemática) e a utilização da história da matemática de modo a propiciar um aprendizado significativo. Ainda nesse sentido, a realização desse trabalho permite que o autor desenvolva habilidades, conhecimentos e experiência sobre como conduzir demonstrações junto aos alunos dos anos finais do ensino fundamental.

1 A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR COMO DOCUMENTO NORTEADOR NA ELABORAÇÃO DE CURRÍCULOS

Este capítulo apresenta reflexões envolvendo a Base Nacional Comum Curricular – BNCC – com o propósito de explicitar os caminhos dados por tal documento para o ensino de Matemática.

1.1 Breve histórico da construção da base nacional comum curricular

O documento intitulado Base Nacional Comum Curricular – BNCC – tem um caráter normativo, isto é, obrigatório para todas as etapas e modalidades da educação básica nacional, previsto na Constituição Brasileira de 1988, que estabelece em seu artigo 210, que “serão fixados conteúdos mínimos para o ensino fundamental, de maneira a assegurar formação básica comum e respeito aos valores culturais e artísticos, nacionais e regionais”. Em 1996 a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDB - volta a destacar a necessidade de uma base nacional da educação que assegure por meio da colaboração de União, Estados, Municípios e o Distrito Federal, a fixação de conteúdos mínimos que subsidiem a elaboração dos currículos escolares.

A mesma LDB, por de meio da Lei 12.796 de 2013, esclarece, em seu artigo 26 que:

> [...] os currículos da educação infantil, do ensino fundamental e do ensino médio devem ter base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e em cada estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e dos educandos[...] (LDB, 1996, p. 12).

Em 2014, com o Plano Nacional de Educação – PNE – aprovado pela lei 13.005, de 25 de junho daquele ano, mais uma vez é reafirmada a necessidade da construção de uma base nacional comum para a educação nacional, para que se atinja a meta 2 deste documento, que versa sobre a universalização do ensino fundamental de nove anos. Nele é definida a estratégia em que a União, por meio do Ministério da Educação e em parceria com Estados, Distrito Federal e Municípios deveria implementar até 2016, segundo o PNE (2014), “elaborar e encaminhar ao Conselho Nacional de Educação, precedida de consulta pública nacional, proposta de direitos e objetivos de aprendizagem e desenvolvimento para os (as) alunos (as) do ensino fundamental”.

No Plano Nacional de Educação consta novamente a criação da Base Nacional Comum Curricular como estratégia para se atingir desta vez uma das metas, a que prevê que o Brasil alcance nota 6 no Índice de Desenvolvimento da Educação Básica, o IDEB, para os anos iniciais do ensino fundamental; 5,5 para os anos finais do ensino fundamental e 5,2 no Ensino Médio, índices esses que deveriam ser atingidos até 2021, por meio da melhoria do fluxo escolar que está relacionado às taxas de aprovação, evasão e distorção idade-série e a melhoria da aprendizagem. Para tanto a estratégia deste Plano Nacional de Educação indica que se deve:

> [...] estabelecer e implantar, mediante pactuação inter-federativa, diretrizes pedagógicas para a educação básica e a base nacional comum dos currículos, com direitos e objetivos de aprendizagem e desenvolvimento dos (as) alunos (as) para cada ano do ensino fundamental e médio, respeitada a diversidade regional, estadual e local. (BRASIL, 2014, p. 31)

Sendo assim, podemos sintetizar que a Base Nacional Comum Curricular era prevista em pelo menos três documentos ou textos de grande relevância nacional: a Constituição Federal de 1988, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) de 1996 e mais recentemente pelo Plano Nacional de Educação (PNE) de 2014. Finalmente, em abril de 2017, o Conselho Nacional de Educação recebeu do Ministério da Educação, a segunda versão da BNCC da educação infantil ao ensino fundamental que foi elaborada após consulta pública nacional. Nos meses de julho, agosto e setembro, o CNE promoveu audiências públicas que tinham por objetivo, receber propostas de melhorias desta versão da Base, em capitais das cincos regiões do Brasil, a saber: Manaus, Recife, Florianópolis, São Paulo e Brasília. Então, depois dessas audiências, o Conselho Nacional de Educação aprova no final de dezembro daquele mesmo ano, a terceira e versão definitiva da Base Nacional Comum Curricular do ensino infantil e fundamental que, posteriormente, veio a ser homologado pelo Ministério da Educação, em fevereiro de 2018. Já a Base do Ensino Médio, foi homologada pelo MEC apenas em dezembro de 2018, na qual passa a ser considerado um documento de caráter normativo e obrigatório da educação brasileira.

Com a aprovação e homologação da BNCC, imediatamente são definidos prazos e medidas em algumas vertentes da educação que estão diretamente ligadas à Base, como a formação de professores, a elaboração de material didático, as referências às matrizes de avaliação e principalmente a elaboração de currículos escolares pelos sistemas e redes de ensino. É evidente que todas essas ações devem estar atreladas ao que é definido pela Base.

Com relação à adequação das escolas, sistemas e redes de ensino ao que é previsto na Base, a resolução nº 2 de 2017, do CNE, define que até o ano letivo de 2020, todos os sistemas e redes de ensino e, por consequência, as escolas, devem ter (re)elaborado seus currículos para o ensino infantil e o ensino fundamental de acordo com a BNCC. Já as matrizes de referência de avaliação em larga escala, ou seja, o SAEB, Sistema de Avaliação da Educação Básica, e as avaliações regionais, como o caso do SARESP, no Estado de São Paulo, passam a ter como diretrizes, a orientação da Base Nacional Comum Curricular, a partir de 2019.

O Programa Nacional do Livro Didático - PNLD - também deve se adequar à Base, sendo que os autores e as editoras devem se atentar às habilidades previstas em cada ano ao longo dos ensinos infantil, fundamental e médio. Os cursos de formação de professores devem se orientar pelo documento normativo e os professores em exercício devem receber formação para que se alinhem à Base Nacional Comum Curricular. Tal formação deve ser oferecida pelas redes e sistemas de ensino com o apoio do Ministério da Educação (BRASIL 2018).

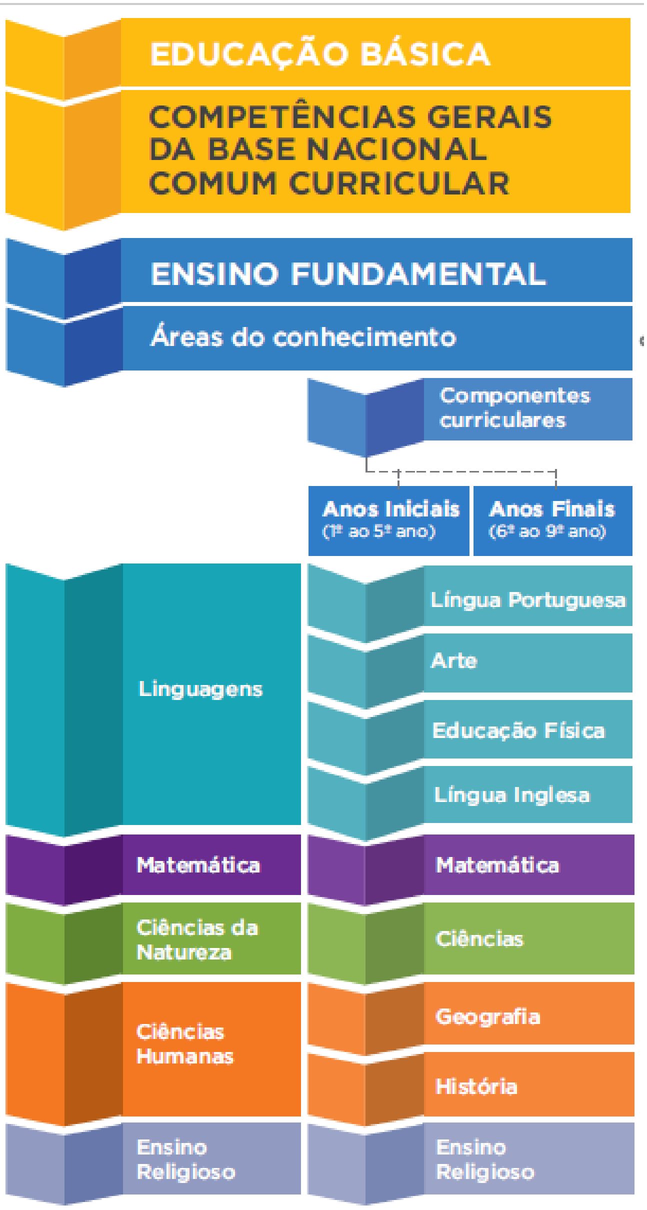
Vejamos a seguir como está organizado esse documento, lembrando que vamos utilizar BNCC quando nos referirmos ao documento intitulado Base Nacional Comum Curricular.

1.2 A organização da base nacional comum curricular do ensino fundamental

A etapa do Ensino Fundamental, dividido em dois ciclos – do 1º ao 5º ano são os anos iniciais e do 6º ao 9º ano são os anos finais – é organizada por áreas do conhecimento. Cada área constitui-se de um ou mais componentes curriculares. A área de Ciências Humanas compreende os componentes curriculares História e Geografia; a área de Matemática possui apenas o componente curricular Matemática, o mesmo ocorre para a área de Ciências; a área de Linguagens é composta por Língua Portuguesa, Língua Inglesa, Arte e Educação Física. Cada área do conhecimento e cada componente curricular possui competências específicas que devem ser desenvolvidas ao longo de todo o Ensino Fundamental. Tais competências específicas, cada qual em sua área, estão alinhadas as dez competências gerais da Base Nacional Comum Curricular que devem ser desenvolvidas ao longo de toda a escolaridade básica do estudante, isto é, do Ensino Infantil ao Ensino Médio. Como consta na BNCC (2017), competência é definida como "a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho."

A seguir apresentamos um diagrama (Fig. 1), que resume a organização do Ensino Fundamental na BNCC.

Figura 1 – Organização da BNCC do Ensino Fundamental.



Fonte: BNCC (2018, p. 27).

Para alcançar as competências específicas, cada componente curricular possui também unidades temáticas, nos quais são determinadas habilidades que devem ser desenvolvidas, em diferentes anos da escolarização dentro destas unidades temáticas, essas habilidades são organizadas por um código alfanumérico como mostra o exemplo a seguir (Fig. 2).

Figura 2 – Conteúdo e habilidades de Matemática.

Grandezas e medidas	Área de figuras planas Área do círculo e comprimento de sua circunferência
	Volume de cilindro reto Medidas de capacidade

(EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.
(EF08MA20) Reconhecer a relação entre um litro e um decímetro cúbico e a relação entre litro e metro cúbico, para resolver problemas de cálculo de capacidade de recipientes. **(EF08MA21)** Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo do volume de recipiente cujo formato é o de um bloco retangular.

Fonte: BNCC (2018, p. 313).

Nas imagens acima podemos identificar a unidade temática de Grandezas e Medidas e que, por exemplo, a habilidade (EF08MA21) diz respeito a 21ª habilidade do componente curricular Matemática, para o 8º ano do Ensino Fundamental. Voltamos a nossa atenção agora para a área de Matemática.

1.3 A organização da base nacional comum curricular do ensino médio

A BNCC do Ensino Médio propõe uma Formação Geral Básica e a criação de Itinerários Formativos. A Formação Geral Básica é composta pelos componentes curriculares tradicionais que, assim como a BNCC do Ensino Fundamental, estão organizados por área do conhecimento, a saber: a área de Linguagens e suas Tecnologias (Língua Portuguesa, Língua Inglesa, Arte e Educação Física), Matemática e suas Tecnologias (apenas o componente curricular Matemática), Ciências da Natureza e suas Tecnologias (Biologia, Física e Química) e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas (História, Geografia, Sociologia e Filosofia). Cada uma dessas áreas e desses componentes curriculares possui competências e habilidades específicas.

Os Itinerários formativos são suborganizações curriculares entre os componentes curriculares que permitem ao estudante do Ensino Médio escolher estudar áreas que são de seu maior interesse. Por exemplo, um Itinerário Formativo pode ser composto por um estudo, além das habilidades e competências já explicitadas na BNCC, de componentes curriculares das Ciências da Natureza e Matemática; outro Itinerário Formativo pode propiciar um estudo avançado de Linguagens e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, dentre outras organizações possíveis, além de Formação técnica e profissional, que também pode ser escolhida pelos estudantes (BRASIL 2017).

A Figura 3 resume a organização da Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio.

Figura 3 – Organização da BNCC do Ensino Médio.

Fonte: BNCC (2018, p. 469).

A BNCC do Ensino Médio está diretamente relacionada e integrada com a chamada Reforma do Ensino Médio (Lei 13.415/2017) que, dentre outras mudanças, propõe a organização curricular explicada acima, institui o aumento da carga horária anual para no mínimo de 1000 horas anuais (até então, eram mínimas de 800 horas anuais) e fixa em no máximo de 1800 horas para a

Formação Geral Básica dos estudantes, devendo o restante da carga horária pertencer a formação diversificada, isto é, os Itinerários Formativos.

No momento da conclusão dessa dissertação (julho de 2024) estão sendo discutidas novas mudanças na Reforma do Ensino Médio, sobretudo na fixação de diretrizes para os Itinerários Formativos e mudanças na carga horária destinada às formações geral e diversificada.

1.4 A área de matemática na base nacional comum curricular

A área de Matemática da BNCC do Ensino Fundamental está dividida em cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística. Ao compararmos o documento BNCC com os Parâmetros Curriculares Nacionais podemos perceber uma primeira grande mudança, a inserção de uma quinta unidade temática. Nos PCNs existiam os eixos temáticos Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação. O eixo temático Números e Operações dos PCNs desdobrou-se em duas unidades temáticas da Base - Números e Álgebra -, Espaço e Forma passou a ser denominado simplesmente por Geometria, manteve-se a unidade temática Grandezas e Medidas e, por fim, aquilo que era chamado de Tratamento da Informação nos Parâmetros Curriculares Nacionais passou a se chamar Probabilidade e Estatística na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018).

Com as cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística pretende-se desenvolver oito competências específicas para a área de Matemática do Ensino Fundamental, que mencionamos a seguir:

> 1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho;
> 2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo;
> 3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria,

> Estatística e Probabilidade) de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções;
> 4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes;
> 5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados;
> 6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados);
> 7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza;
> 8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensas dos colegas e aprendendo com eles. (BNCC, 2018, p. 267)

De acordo com a BNCC, o ensino desenvolvido ao longo do Ensino Fundamental deve ter em vista o desenvolvimento do Letramento Matemático, termo utilizado pelo PISA, definido como:

> [...] a capacidade individual de formular, empregar e interpretar a matemática em uma variedade de contextos. Isso inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e predizer fenômenos. Isso auxilia os indivíduos a reconhecer o papel que a matemática exerce no mundo e para que cidadãos construtivos, engajados e reflexivos possam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias. (BNCC, 2018, p. 266)

No que se refere ao contexto, salientamos que tal palavra não deve ser relacionada apenas aos contextos do cotidiano, mas também aos contextos de outras áreas do conhecimento e mesmo a contextos próprios da Matemática. Isso implica na necessidade de se utilizar contextos significativos, pois sem eles o processo de ensino-aprendizagem da Matemática pode se tornar pouco utilitário e perder seu sentido, pois segundo Machado (2009, p. 30), “quando os contextos são deixados de lado, os conteúdos estudados deslocam-se sutilmente da condição de meios para a de fins das ações docentes. E, sempre que aquilo que deveria ser apenas meio transmuta-se em fim, ocorre o fenômeno da mediocrização".

Sendo assim, com a clara percepção dos diversos contextos nos quais a Matemática é empregada, podemos caminhar rumo a um ensino de fato significativo, evitando o tecnicismo no processo de aprendizagem da disciplina. Passamos, a seguir, para as mudanças curriculares apresentadas pela BNCC.

Já a área de Matemática da BNCC do ensino médio está organizada em 5 competências específicas do componente curricular que estão descritas abaixo:

> 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral;
> 2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática;
> 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas de modo a construir argumentação consistente;
> 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas;
> 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BNCC, 2018, p. 531)

Cada uma dessas competências engloba habilidades das cinco unidades temáticas (números, álgebra, geometria, grandezas e medidas, e probabilidade e estatística).

1.5 Mudanças em relação aos currículos tradicionais

A área de Matemática da BNCC do Ensino Fundamental está organizada de modo a desenvolver ideias fundamentais da Matemática que promovam a articulação estre seus ramos. Sendo assim, as ideias de equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação permitem a articulação entre as unidades temáticas Número, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, e Probabilidade e Estatística.

A BNCC também apresenta mudanças em relação a então estrutura dos currículos das redes de ensino que estavam vigentes, como, por exemplo, o currículo do Estado de São Paulo. A unidade temática Álgebra, como exemplo, deve ser trabalhada desde 1º ano do Ensino Fundamental, isto é, já a partir do primeiro ciclo desta etapa de ensino. Neste sentido a Base (2018), nos orienta que devem ser enfatizadas ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades, porém sem o uso de letras, que é uma atribuição deixada para o professor especialista dos anos finais do Ensino Fundamental e não do professor polivalente dos anos iniciais.

Destacamos também a mudança do ano de abordagem de alguns conteúdos tradicionalmente comuns nos currículos, enquanto na atual conjuntura dos currículos escolares o estudo dos produtos notáveis e fatoração é feito no 8º ano, a Base Nacional Comum Curricular os insere no 9º ano, quando os estudantes já são capazes de entender com mais clareza as ideias abstratas presentes neste estudo. A Base também coloca a resolução de equações do 2º grau incompletas na forma $ax^2 = b$ para ser estudada no 8º ano e em nenhum momento cita o uso da fórmula resolutiva da equação do segundo grau.

Podemos destacar também a ênfase maior que é dada neste documento para a área de Estatística e Probabilidade, neste sentido os estudantes devem concluir o Ensino Fundamental com moderado conhecimento em medidas de tendência central (média, moda e mediana) e com capacidade de leitura e análise de gráficos e tabelas. Os alunos também devem ser encorajados a realizar pesquisas e experimentos para a obtenção da probabilidade de ocorrência de eventos aleatórios.

Por fim, destacamos que a Base procura promover a autonomia e a capacidade de criatividade dos alunos, o que se justifica pelo fato de que muitas das habilidades propostas na BNCC não citam apenas a resolução de problemas nos mais variados contextos, mas também a elaboração dessas situações-problema, caracterizando assim a relevância do caráter criativo dos alunos para a obtenção de uma aprendizagem significativa (BRASIL, 2018).

2 O MÉTODO AXIOMÁTICO DA MATEMÁTICA

Neste capítulo, apresentaremos o método axiomático da matemática, mas antes apresentamos aspectos históricos da matemática, passando da matemática praticada pelos egípcios, pelos hindus e pelos gregos.

2.1 Aspectos históricos

A Matemática surge da necessidade prática da contagem e da quantificação, e os primeiros indícios dessa necessidade datam de algo em torno de 35.000 a. C., inicialmente com apenas o que conhecemos hoje pelos algarismos 1 e 2. Em Razão Áurea, Lívio sugere que a concepção do número 2, por exemplo, se deve ao fato de os seres humanos possuírem duas mãos, dois olhos, dois ouvidos, e assim por diante. A partir disso, os povos antigos conseguiam ter a percepção dos números 3 e 4 pela combinação das ideias de 1 e 2. Fato semelhante ocorreu em diversos lugares do mundo.

> De modo semelhante, estudos etnográficos de 1890 sobre os nativos das ilhas de Estreito de Torres, entre a Austrália e Papua Nova Guiné, mostraram que eles usavam um sistema conhecido como dois-contagem. Eles usavam as palavras “*urapun*” pra “um” e “*okasa*” para “dois”, e depois combinações como “*okasa-urapun*” para “três e “*okasa-okasa*” para “quatro”. Para números maiores do que quatro, os habitantes da ilha usavam a palavra “*ras*” (muito). Formas quase idênticas de nomenclatura foram encontrados em outras populações indígenas do Brasil (os botocudos) à África do Sul (zulus). Os aranda da Austrália, por exemplo, tinham “*ninta*” para “um”, “*tara*” para “dois”, e depois “*tara mi ninta*” para “três” e “*tara ma tara*” para “quatro”, sendo todos os outros números expressos como “muitos”. (LIVIO, 2008, p. 25).

A partir de então a percepção acerca dos números passa a evoluir até que se chegue ao conceito de base numérica, isto é, o conjunto limitado de símbolos (algarismos) com o qual é possível escrever e representar quantidades, em diferentes contextos históricos. Conforme Lívio (2008), alguns povos usavam a base cinco, provavelmente pelo fato de termos cinco dedos em cada mão, outros povos adotaram a base 12, que pode ser em decorrência das doze divisões que as juntas dos dedos de nossas mãos formam. Há também a base 20, que ainda encontra vestígios em algumas línguas como o francês (80 em francês é *quatre-vingts*, que se traduz por quatro vintes) e a base 60, utilizada pelos

Mesopotâmios em 4000 a. C., que perdura até hoje, pela divisão do tempo em minutos e segundos, bem como o ciclo trigonométrico que é composto, em graus, por um múltiplo de 60.

Começam então os períodos de grande desenvolvimento da Matemática, primeiro com os Egípcios e os Babilônicos que possuíam uma cultura matemática bastante peculiar. Segundo Livio (2008), a matemática desses povos era voltada à resolução de problemas práticos e a sua resolução era dada na forma de receita, de modo que seguindo o passo a passo se pudesse encontrar a solução desejada. Tal maneira de se fazer matemática se restringia também a casos particulares, de modo que não se previa e, talvez nem se desejasse, uma generalização que mais tarde fora feita pelos gregos. Assim atribui-se aos egípcios, os primeiros conhecimentos de Geometria. Conta-se que o rei do Egito havia dividido a terra entre seus moradores de modo que cada um pagasse um tributo proporcional ao tamanho de sua propriedade. Mas, quando havia as cheias do Rio Nilo que acabavam por prejudicar as terras, o tributo deveria ser revisto por meio da verificação, feitas pelos medidores, do que havia sobrado do terreno original. Da natureza de problema práticos como este, a geometria foi fundada e desenvolvida entre os egípcios.

Na Grécia, uma nova concepção de Matemática começa a ser praticada, agora sem a mesma preocupação para a resolução de problemas de natureza prática como ocorria com os egípcios e babilônicos. Nesse sentido Machado (2009) justifica o desinteresse dos gregos pela acepção matemática-realidade e o gosto desse povo pelo puro deleite intelectual da Matemática:

> Já na sociedade grega, o trabalho dos escravos, fácil de obter e cujo rendimento não importava melhorar por meio de aperfeiçoamentos técnicos, permitia à elite dirigente um alheamento da realidade concreta. Esta estrutura social imprimiu um caráter original à Matemática grega, onde acentuado era o desdém pelas aplicações práticas. Não era de se estranhar que um grego da classe dirigente se inclinasse a especulações intelectuais e, motivado por razões estéticas, se locupletasse de abstrações.” (MACHADO, 2009, p. 11)

Os gregos, portanto, se interessavam pela Matemática por si só, sem vislumbrar onde tais conhecimentos seriam aplicados. Eles tinham uma preocupação puramente estética com as situações-problema da Matemática. Nesse sentido o matemático e engenheiro americano Richard Buckminter Fuller

(1895-1983) disse certa vez “quando estou trabalhando num problema, nunca penso a respeito de beleza. Eu penso apenas em como resolver o problema. Mas quando termino, se a solução não é bonita, eu sei que está errada.”.

Grandes nomes da Matemática, como Euclides, mostravam um certo desdém em relação a possível aplicabilidade da Matemática.

> A excelência grega em Matemática foi, em grande parte, consequência direta de sua paixão pelo conhecimento em si mesmo, e não simplesmente por motivos práticos. Há uma história que diz que, quando um estudante que aprendia com Euclides uma proposição geométrica perguntou “Mas o que eu ganho com isso?”, Euclides disse a seu escravo para dar ao garoto uma moeda, de modo que ele pudesse ver algum ganho concreto. (LIVIO, 2008, p. 80).

Ressaltamos que, embora os gregos tivessem grande apreço pela Geometria, eles também mostravam grande interesse pela Aritmética, sobretudo com Pitágoras e os pitagóricos, que atribuam aos números características bastante peculiares como, por exemplo, o número 2 era um número feminino, o número 3 um número masculino, e o número 5, (2 + 3), representava o casamento ou a união entre o homem e a mulher. Atribui-se aos pitagóricos também os chamados números perfeitos, como o número 6 (números perfeitos são aqueles que podem ser formados pela soma de seus divisores que são menores que o próprio número, 6 = 1 + 2 + 3, o próximo número perfeito é 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14).

Já a Álgebra surge com os árabes e os hindus. Esses últimos foram os responsáveis pela concepção do zero como um numeral de posição, fato esse, sem dúvida, indispensável para um acelerado desenvolvimento não só da Matemática, mas também da Ciência como um todo, principalmente no que se refere ao trabalho com simbolismo e a representação de grandes números.

Fizemos este resgate histórico da Matemática em diversas sociedades para tentar elucidar uma questão que talvez não seja tão clara em um primeiro momento: a universalidade da matemática não significa sua neutralidade. Segundo Machado (2009), embora nas Ciências ditas exatas essa afirmação pareça ser um fato, devemos considerar que todo tipo de produção e transmissão está sujeita e atrelada à conjectura político-social no momento de sua concepção. Sendo assim, se a matemática teve um viés mais prático e utilitário, como no Egito, isso ocorreu porque assim se fez necessário dadas as condições sociais e o contexto daquela época. De modo semelhante, os gregos puderam se “alienar” das aplicabilidades matemáticas e usufruir do esteticismo científico, porque a sociedade grega era concebida de tal maneira que assim pudesse ser tratada a Matemática. Ainda nas palavras de Machado (2009):

> Consideramos que somente a partir da percepção clara dos mecanismos que relacionam o conhecimento matemático com a realidade concreta historicamente situada, somente a partir da crítica dos pressupostos que a validade universal do conhecimento matemático determina a sua neutralidade, de que a Matemática se refere a entidades perfeitas de um mundo supratemporal e que “se aplica” ao real, ou o que é mais grave, “rege-o”, somente assim poder-se-ia repensar o ensino da Matemática em um sentido globalizante. Um sentido que transcenda os tecnicismos de todas as ordens, que possa inscrever tal ensino numa perspectiva de ação transformadora.” (MACHADO, 2009, p. 17).

Dados aspectos históricos, passamos a tratar o modo de apresentação da matemática, como um modelo axiomático.

2. 2 A matemática como um modelo axiomático

A primeira tentativa de se organizar o método matemático é conhecido como logicismo que tem como grandes expoentes no tema Leibniz (1646 – 1716) e Russell (1872 – 1970). Este método procura reduzir a Matemática à Lógica, para isso seria necessário deixar evidente que todo tipo de proposição matemática pode ser expresso na linguagem da lógica e que quando essas proposições são verdadeiras isso significa que são expressões de verdades lógicas. Segundo Pires (2017), “proposição é toda expressão sobre a qual faz sentido estabelecer seu valor verdade, ou seja, é qualquer expressão na qual se tenha sentido afirmar se seu conteúdo é verdadeiro ou falso”. Entretanto, os logicistas encontram problemas. Eles se deparam com alguns paradoxos que não podem ser expressos em linguagem lógica, como o paradoxo de Russell.

> Consideremos o conjunto cujos elementos são os catálogos de livros (indivíduos). Diremos que um catálogo é normal (atributo) se ele não se incluir entre os livros que cita; se ele se incluir, será anormal. Consideremos, agora, o conjunto de todos os catálogos normais e organizemos o catálogo de todos os catálogos normais (indivíduo?). Este catálogo será normal ou anormal? Se ele for normal, ele não se incluirá, por definição deste atributo e, portanto, deverá se incluir uma vez que é o catálogo de todos os catálogos normais, sendo consequentemente anormal. Se ele for anormal, ele se incluirá e,

> portanto, será normal, uma vez que só inclui os normais. (MACHADO, 2009, p. 27)

Em seguida, podemos caracterizar o formalismo, fundamentado por Kant, esta visão se opõe ao logicismo quando ao invés de considerar os axiomas princípios lógicos, ou consequências de tais princípios, sugere que estes - os axiomas - podem ser descritos com base na percepção sensível. É a visão do formalismo que indica a constituição da Matemática por meio de teorias formais.

Uma teoria formal, conforme Machado (2009), é a composição de termos primitivos (termos primitivos são ideias aceitas sem uma definição mas que são distinguidas claramente por meio da percepção, são termos primitivos, por exemplo: reta, plano, ponto) que são a base para as regras de formulação de fórmulas. Uma teoria formal também contém axiomas ou postulados (afirmações consideradas verdadeiras sem que seja necessária uma demonstração) e a partir dos postulados e pela aplicação das regras de inferência podem ser demonstrados os teoremas.

Adotamos os conceitos de termos primitivos e postulados conforme descritos por Machado, no entanto, reconhecemos que Euclides, em sua obra Os Elementos, apresenta os conceitos primitivos como definições. Por exemplo, Euclides define ponto como “aquilo de que nada é parte”.

A título de esclarecimento, apresentamos a seguir alguns exemplos de axiomas e teoremas, buscando elucidar a diferença entre esses.

Duas coisas iguais a uma terceira são iguais entre si, ou se parcelas iguais forem somadas a quantias iguais os resultados obtidos serão iguais são exemplos de axiomas, que são sentenças que, pela mera percepção, mostram-se verdadeiras e não precisam ser demonstradas. Axiomas não se demonstram, bem como definições.

O conhecido Teorema de Pitágoras que afirma que em um triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c é válida a igualdade $a^2 = b^2 + c^2$ é caracterizado por teorema justamente por ser passível de demonstração, utilizando-se as regras de inferências, bem como Teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo, por exemplo.

No meio matemático é comum ouvirmos o termo conjectura, que pode ser entendida como um candidato a teorema, isto porque enquanto um teorema é uma verdade demonstrada, uma conjectura é uma proposição que não possui uma demonstração, mas que também não possui um contraexemplo que possa refutá-la. Uma conjectura bastante conhecida é chamada conjectura do matemático prussiano Goldbach (1690 – 1764) que afirma que todo número par maior que 4 pode ser escrito como a soma de dois números primos, assim 10 = 3 + 7, 36 = 5 + 31, 100 = 3 + 97, podemos verificar infinitos casos que exemplificam a conjectura, entretanto não existe uma prova de que tal afirmação seja válida.

Ainda sobre a teoria formal na Matemática, conforme Ávila (2010):

> [...] devemos lembrar que um sistema axiomático deve satisfazer às três condições seguintes: ser consistente, quer dizer, os postulados não podem contradizer uns aos outros, por si mesmo ou por suas consequências; deve ser completo, no sentido de serem suficientes para provar verdadeiras ou falsas todas as proposições formuladas no contexto da teoria em questão; e, por fim, cada postulado deve ser independente dos demais, no sentido de que não é consequência deles, sob pena de ser supérfluo. Pois bem, Godel provou, dentre outras coisas, que a consistência de qualquer sistema matemático que englobe a Aritmética não pode ser estabelecido pelos princípios lógicos usuais. Isto ele prova como consequência deste seu outro resultado, conhecido como o teorema da incompletude: se uma teoria formal abrangendo a Aritmética for consistente, ela necessariamente será incompleta, o que significa dizer que haverá alguma proposição sobre os inteiros que a teoria será incapaz de decidir ser verdadeira ou falsa.

Essa última afirmação sobre a incompletude de uma teoria formal nos remete ao paradoxo de Russell, corroborando para a constatação da impossibilidade de se reduzir a Matemática à Lógica. Ávila esclarece que o matemático Hermann Weyl (1885 – 1955), disse que “Deus existe porque certamente a Matemática é consistente; e o demônio existe porque somos incapazes de provar essa consistência”.

2. 3 Algumas estratégias de demonstração

Existem diferentes formas de se fazer demonstrações, a escolha de cada uma delas depende das características do objeto de estudo. A seguir destacaremos alguns dos principais métodos de demonstração que são usualmente apresentados em livros didáticos.

Convém, antes de aprofundarmos nosso trabalho nas demonstrações, caracterizar alguns conceitos que aparecem com frequência em textos matemáticos que se propõe a justificar resultados através do método dedutivo, isto é, os passos utilizados, apoiados em axiomas e postulados, capazes de demonstrar a validades de proposições matemáticas método esse, inclusive, que é capaz de diferenciar a Matemática de outras ciências. Shoenfield (1967) chama atenção que um físico, por exemplo, compara resultados teóricos com a observação na validação de avanços na área, enquanto que para o matemático, pouco importa a observação de milhares de exemplos se não houver uma demonstração que valide o fato estudado.

Ao considerar o método dedutivo utilizado nas demonstrações matemáticas, compreendemos que a Matemática é construída e desenvolvida pelo acréscimo de novos conhecimentos que edificam e fortalecem cada vez mais esse grande campo de estudo enquanto as demais ciências por vezes evoluem por substituição. Na Química, por exemplo, a medida que as pesquisas evoluíam modelos atômicos, foram sendo substituídos por outros que melhor modelavam a realidade; na Astronomia já acreditamos que o a terra era o centro do universo e que nosso planeta era plano, agora, em Matemática, o Teorema de Pitágoras é tão válido agora (e continuará sendo) quanto era há alguns milhares de anos. Isso porque a natureza lógico-dedutiva desse campo não permite a construção de novos conhecimentos e descobertas sem que seja feita e validada a demonstração daquele fato, ou seja, não há substituições e sim acúmulo de novos teoremas.

Neste trabalho, tratamos do Teorema de Pitágoras, mas como já dissemos, convém diferenciar alguns termos matemáticos comuns. Segundo Morais Filho (2016), teorema é uma sentença matemática verdadeira, garantindo sua validade por meio de uma demonstração. Esse termo é utilizado algumas vezes como sinônimo de proposição, que pode ser compreendido como um teorema de menor importância dentro de um contexto ou campo de estudos ou ainda um teorema menos disruptivo.

Ainda segundo Morais Filho (2016), “lema é um teorema auxiliar ou preparatório, que será usado na demonstração de outro teorema” enquanto corolário é “um teorema obtido como consequência de outro recém-provado”.

Teorema, lema, corolário, proposição são todas sentenças matemáticas verdadeiras e que possuem demonstração e não devem ser confundidas com definição que é o ato de "dar nomes a objetos matemáticos, mediante determinadas propriedades interessantes que possuam e que os caracterizem".

A partir da compreensão de que, na Matemática, cada resultado apenas pode ser considerado válido por meio de uma demonstração, Ávila (2010) nos alerta de modo incisivo a respeito da importância de realizá-la no processo de ensino-aprendizagem da disciplina

> Sim, teoremas e demonstrações também são uma parte importante no ensino. É deplorável constatar que esses recursos tenham sido abandonados já há tantos anos! Como se pode falar em Matemática sem teorema e demonstrações?! Isso é essencial no ensino, não pode faltar! Como sabemos que existe uma infinidade de números primos? Por causa de uma demonstração! Como sabemos que não existe fração cujo quadrado seja 2? Por causa de uma demonstração! Como sabemos que a série harmônica diverge? Por causa de uma demonstração! Aliás, bem simples e inteligível a qualquer jovem de 12 ou 13 anos de idade. É um absurdo, um verdadeiro insulto à inteligência dos jovens apresentar-lhes resultados como esses "dogmaticamente", sem justificativa nenhuma, isso é inaceitável. Melhor, então, não ensinar. (ÁVILA, 2010, p. 11)

3. 3. 1 Demonstração Direta

A demonstração direta é a maneira mais simples e usual de se provar proposições em Matemática. Ela consiste, segundo Costa (2015) em representar adequadamente as premissas que serão utilizadas, em linguagem coerente e precisa. Esse tipo de demonstração está relacionada à operação condicional do cálculo proposicional, objeto de estudo da Lógica Matemática. Assim, por meio da consideração da veracidade da(s) hipótese(s) prova-se a tese. Como exemplo 1 consideremos a proposição: "se a e b são dois números ímpares então o produto ab é ímpar". Neste caso, devemos representar adequadamente os números ímpares a e b ($a = 2k + 1, b = 2c + 1$, por exemplo) e apenas multiplicá-los para chegar à conclusão de que a afirmação é de fato verdadeira.

Vamos demonstrar a proposição acima apenas como exemplo. Sejam $a = 2k + 1 \; e \; b = 2c + 1$ dois números primos quaisquer, queremos provar que o produto $a \cdot b$ também é um número ímpar. De fato, $a \cdot b = (2k + 1) \cdot (2c + 1) = 4kc + 2k + 2c + 1 = 2(2kc + k + c) + 1 = 2q + 1$, que é um número ímpar, como queríamos demonstrar.

Esse tipo de demonstração é um dos primeiros passos para se adquirir habilidades para a prova de proposições, isto é, sentenças matemáticas verdadeiras, visto que é bastante simples, bem como é uma maneira de familiarizar os estudantes com termos matemáticos, tais como conjectura e teorema, sabendo diferenciá-los adequadamente.

Considerando o exemplo 1 apresentado acima, podemos perguntar aos estudantes se a multiplicação de dois ímpares sempre resulta em um número ímpar e, em seguida, proceder com a demonstração. Para a prática desta modalidade de demonstração é conveniente solicitar aos estudantes, os resultados obtidos da multiplicação entre dois pares, e entre um número ímpar e um número par, entre outras possibilidades. Outros casos que podem ser provados por demonstração direta é soma dos ângulos internos de um triângulo, o Teorema de Pitágoras, a fórmula resolutiva da equação do segundo grau, etc.

2. 3. 2 Demonstração por Absurdo

De acordo com Costa (2015), a demonstração por absurdo consiste em considerar que a negação do que queremos provar é verdadeira e, assim, a partir de implicações lógicas, concluir uma contradição, de forma que a única alternativa que resta é considerar que o absurdo que supomos inicialmente de fato não é verdadeiro. Como exemplo 2, vejamos a prova de que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Demonstrar por absurdo que este número é de fato irracional consiste em supor (um absurdo) que $\sqrt{2}$ é racional. Assim procedendo com implicações lógicas concluiremos que $\sqrt{2}$ só pode ser um número irracional.

Inicialmente vamos provar que se a é par então a^2 também o é, isto é, a é par $\Rightarrow$ a^2 é par.

Consideremos o inteiro par $a = 2n$, fazendo a^2 obtemos $(2n)^2 = 2^2 \cdot n^2 = 4n^2 = 2 \cdot (2n^2) = 2k$, múltiplo de 2, portanto par.

Vamos demonstrar, por absurdo, a irracionalidade de $\sqrt{2}$

Consideremos, por absurdo, que $\sqrt{2}$ não seja um número irracional, ou seja, $\sqrt{2}$ é racional, e, portanto, pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com a, $b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq$

0, isto é, $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, sendo $\frac{a}{b}$ uma fração irredutível, a e b são primos entre si, ou seja, mdc (a, b) = 1. Como $b \neq 0$, multiplicando ambos os membros da igualdade por b, obtemos: $a = \sqrt{2} \cdot b \Rightarrow a^2 = (\sqrt{2} \cdot b)^2 \Rightarrow a^2 = (\sqrt{2})^2 \cdot b^2 \Rightarrow a^2 = 2b^2$ (I), concluímos então que a é um número par, e, portanto, pode ser escrito na forma $a = 2n$ (II). Substituindo (II) em (I), temos:

$(2n)^2 = 2b^2 \Rightarrow 2^2 \cdot n^2 = 2b^2 \Rightarrow 4n^2 = 2b^2$.

Dividindo-se ambos os membros da igualdade por 2, obtemos $2n^2 = b^2$, podemos então concluir que b é um número par e, portanto, pode ser escrito na forma $b = 2m$ (III), no entanto, comparando (II) e (III) percebemos que a e b são números pares, o que é um absurdo, pois inicialmente supúnhamos que a e b são primos entre si, pois a fração $\frac{a}{b}$ é irredutível. Logo, pelo absurdo verificado, descartamos a hipótese de que $\sqrt{2}$ é racional e então, só é possível admitir que $\sqrt{2}$ é um número irracional, como queríamos demonstrar.

2. 3. 3 Demonstração por Indução Matemática Finita

A demonstração por indução matemática consiste em considerar verdadeiras duas hipóteses para se provar a validade da tese. Este tipo de demonstração já não é mais encontrada em livros didáticos do Ensino Médio, com exceção de Dante (2012; 2014), para o 3º ano do Ensino Médio.

A demonstração por indução matemática tem passagens bastante sutis, que se apoiam nos Axiomas de Peano a respeito dos números naturais. Apresentamos esse método de demonstração por meio de um exemplo. Consideremos a proposição p(n): $1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$, onde n é um número natural qualquer. Esta proposição sugere que a soma dos n primeiros números ímpares naturais é da dada por n^2. Assim, devemos supor, por hipótese, que:

i) a proposição p(n) é válida para o primeiro n, isto é, $1 = 1^2$, o que de fato é verdade. Este é o chamado passo base da indução matemática.

ii) a proposição p(n) é válida para $n = k$, com $k > 1$, isto é: p(k): $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ... + (2k - 1) = k^2$ (I), esse é o chamado passo de indução.

Tendo essas duas hipóteses, e utilizando a segunda, devemos então provar que p(k + 1) é válida, isto é, se a proposição vale para um k qualquer, então também é válida para o sucessor de k, e assim está provado que p(n) é verdadeira para qualquer n natural.

De fato, se a proposição for válida então $p(k + 1) = (k + 1)^2$ (II).

Analogamente, adicionando o sucessor de 2k – 1 à ambos os membros de (I) temos: $1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2k – 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2 = p(k + 1)$. Portanto, está provado que a proposição p(n) é válida para todo n natural.

Para ilustrar essa situação alguns autores fazem uma analogia desse tipo de demonstração com uma carreira de dominós. Imagine uma sequência de peças de dominó, de tal forma que se uma peça é derrubada, a seguinte também e assim sucessivamente. Se a primeira peça do dominó dessa sequência for derrubada (passo base), então todos os outros também o serão. Considerando-se a veracidade do passo de indução, assim fica provado que esse efeito de uma dada proposição ser válida para o primeiro termo e para um termo qualquer acarreta que a proposição é válida para qualquer elemento do conjunto em questão.

Enfatizamos mais uma vez que este tipo de demonstração não é comum de ser vista no Ensino Médio. Acreditamos, no entanto, que sua utilização propicia, tal qual os outros dois métodos anteriormente apresentados, a apropriação da estrutura lógica e do formalismo da Matemática, além de ser importante para o escopo de nossa pesquisa.

2. 4 O papel da demonstração na BNCC

Voltemos a citar a Base Nacional Comum Curricular para analisar desta vez, o que o documento sugere em relação ao papel das demonstrações no processo de ensino-aprendizagem de Matemática.

É importante salientar que a área de Matemática da BNCC já ressalta e indica o uso das demonstrações nas aulas desde o 8º ano do Ensino Fundamental. A Base Nacional Comum Curricular (2018) prevê que alunos do

8º ano saibam demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos e que alunos do 9º ano consigam demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal e, ainda, demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos. Tais habilidades de demonstração, propostas por um documento de caráter normativo, ressaltam a importância de tal prática para tornar o aprendizado mais consistente e significativo. O quadro abaixo sintetiza as habilidades de demonstração previstas na BNCC do Ensino Fundamental:

Quadro 1 – Habilidades de demonstração propostas na BNCC do Ensino Fundamental

Habilidade (código)	Habilidade (descrição)
EF08MA14	Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.
EF09MA10	Demonstrar relações métricas simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.
EF09MA13	Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.

Fonte: Elaborado pelo autor

A BNCC do ensino médio também insere a demonstração como parte integrante para se atingir uma das competências específicas de Matemática do Ensino Médio, definida como a capacidade de:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjeturas (BNCC, 2018, p. 531).

E para atingir essa competência, conforme consta no BNCC (2018), faz-se necessária a habilidade de investigar propriedades de figuras geométricas, questionando suas conjecturas por meio da busca de contraexemplos, para refutá-las ou reconhecer a necessidade de sua demonstração para validação, como os teoremas relativos aos quadriláteros e triângulos, por exemplo.

A temática das demonstrações é citada em textos oficiais, o que reforça a ideia de que tal prática é bem-vinda no ensino de matemática. Isto porque, além da aplicabilidade e da relação com o cotidiano, possível de ser visível e praticável no ensino de matemática, ela pode ser vista como um sistema formal.

3 PROPOSTAS DE DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Este capítulo tem como finalidade, apresentar uma sequência didática que aborde a caracterização de um triângulo retângulo, o Teorema de Pitágoras e algumas de suas demonstrações.

É possível começar, antes mesmo de apresentar o Teorema de Pitágoras aos estudantes, questionando se é possível estabelecer alguma relação numérica entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo, buscando que os estudantes estabeleçam algumas conjecturas. Na sequência é possível fazer uma apresentação do Teorema e, inclusive, discutir aspectos históricos, tratando de aspectos históricos sobre a Escola Pitagórica, por exemplo.

Teorema (de Pitágoras): Se ABC é um triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c então $a^2 = b^2 + c^2$.

Salientemos que a recíproca do Teorema de Pitágoras também é verdadeira, isto é, se em um triângulo ABC $a^2 = b^2 + c^2$ então esse triângulo é reto em A. No entanto, neste trabalho, trataremos apenas da primeira forma apresentada.

Convém, nesse momento, uma análise matemática criteriosa acerca do significado de teorema e as partes que o formam.

Segundo Morais Filho (2018), teorema pode ser compreendido como uma sentença matemática cuja veracidade foi validada através de uma demonstração. Um teorema é composto duas partes: a hipótese e a tese. Conforme Morais Filho (2018):

> TESE: provém do Grego, significando proposição, conclusão mantida por raciocínio. Já a palavra HIPÓTESE é formada pelas palavras hipo+tese. Como já dissemos, o sufixo grego hipo transmite a ideia daquilo que está em posição inferior, debaixo de. Assim, etimologicamente, hipótese é aquilo que é inferior à tese, que está abaixo, ou melhor, que vem antes da tese, ou ainda aquilo que dá base a um argumento, a uma conclusão. Nada mais que do que o papel desempenhado pela hipótese, que é usada para concluir a tese. (CORDEIRO FILHO, 2017, p. 164)

Sendo assim, no Teorema de Pitágoras enunciado acima, a hipótese é o triângulo ABC ser retângulo de hipotenusa a e catetos b e c e a tese é a relação $a^2 = b^2 + c^2$ ser verdadeira.

Compreendidas as partes que formam o teorema estudado, devemos então definir de modo rigoroso e formal o que são os catetos e o que é a hipotenusa de um triângulo retângulo. Podemos fazer isso partindo da raiz etimológica das palavras cateto e hipotenusa, ainda segundo Morais Filho (2018), hipotenusa tem origem grega e significa linha estendida por baixo (lembremos que o sufixo hipo traz a ideia de posição inferior, debaixo de), a hipotenusa é, portanto, a linha que é estendida por baixo do ângulo reto. De fato, é comum principalmente nas demonstrações, utilizarmos a hipotenusa como a base do triângulo retângulo, de forma que esta fique inferior ao ângulo reto. Cateto por sua vez também possui origem grega e significa reta perpendicular, reta vertical (a outra).

A partir dessas definições, os estudantes poderão ser capazes de caracterizar e diferenciar esses elementos, compreendendo os catetos como os lados do triângulo que são adjacentes ao ângulo reto e a hipotenusa como sendo o lado do triângulo oposto a esse ângulo.

3.1 Demonstração utilizando semelhança de triângulos

Nesta primeira demonstração proposta do Teorema de Pitágoras, usaremos a semelhança de triângulos, obtendo algumas relações métricas entre os elementos de um triângulo retângulo, isto é, entre as medidas dos seus lados, projeções e altura, e chegando à principal delas: o Teorema de Pitágoras.

O quadro abaixo apresenta as habilidades propostas na BNCC que podem ser trabalhadas ou aprimoradas nessa demonstração.

Quadro 2 – Habilidades mobilizadas na primeira demonstração proposta

Unidade temática	Objeto do conhecimento	Habilidade
Grandezas e medidas	Ângulos: noção, usos e medida.	(EF06MA27) Determinar medidas da abertura de ângulos, por meio de transferidor e/ou tecnologias digitais.
Geometria	Triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos.	(EF07MA24) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.
Geometria	Semelhança de triângulos	(EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.
Geometria	Relações métricas no triângulo retângulo. Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração	(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.

Fonte: Elaborado pelo autor

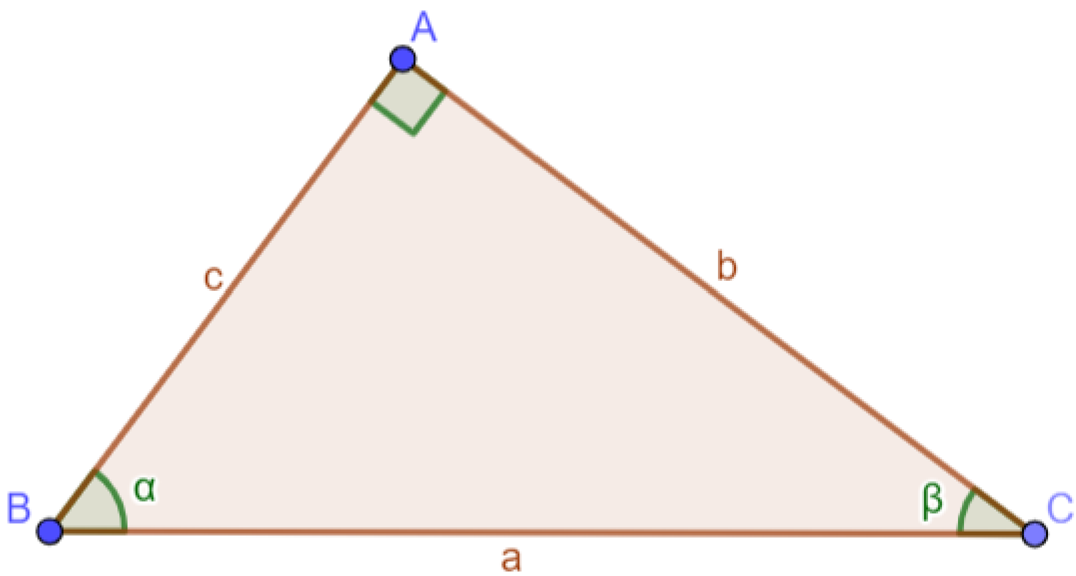
Notemos que a própria Base Nacional Comum Curricular sugere que, dentre as habilidades que os estudantes devem adquirir ao longo do Ensino Fundamental, uma delas é ser capaz de demonstrar o Teorema de Pitágoras através da semelhança de triângulos.

Nesta primeira demonstração usaremos a semelhança entre triângulos. Para tal, podemos sugerir que os estudantes construam um triângulo retângulo ABC, com hipotenusa a, conforme ilustra a Figura 4.

Para essa demonstração, os estudantes devem construir um triângulo retângulo de medidas arbitrárias, nomear os catetos por b e c e a hipotenusa por a. Também devem nomear os dois ângulos agudos do triângulo retângulo, chamemos então a medida do ângulo $A\hat{B}C$ de α e medida do ângulo $A\hat{C}B$ de β.

A construção desse primeiro triângulo pode ser feita com a utilização de régua e esquadro e os estudantes podem utilizar um transferidor para verificar a medida dos ângulos construídos.

Figura 4 – Representação de um triângulo retângulo.

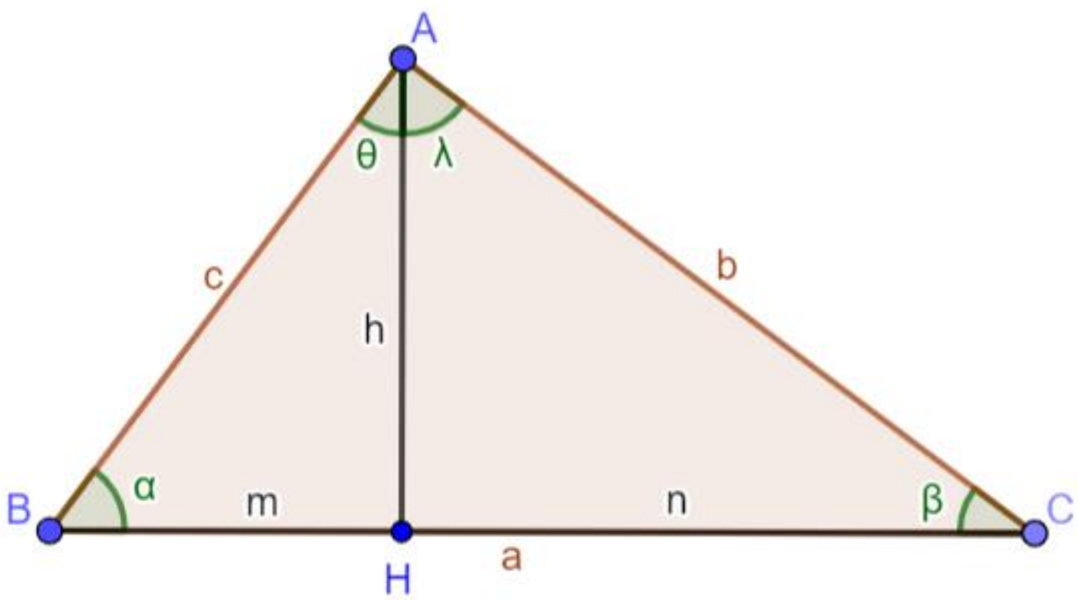


Fonte: Elaborado pelo autor.

Na sequência, os estudantes devem traçar a altura h relativa ao vértice A do triângulo construído, ou seja, o segmento AH de medida h, a Figura 5 apresenta a altura traçada. Devemos observar que, de modo a garantir que o segmento traçado é altura, este deve ser perpendicular à base do triângulo (neste caso a base é a), isto é, o ponto H é a projeção ortogonal do ponto A no segmento BC.

Traçada a altura h, chamaremos de m e n a medida dos dois segmentos originados partir do lado a do triângulo retângulo e de θ e λ os dois ângulos originados a partir do ângulo reto.

Figura 5 – Representação de um triângulo retângulo com altura e projeções.



Fonte: Elaborado pelo autor.

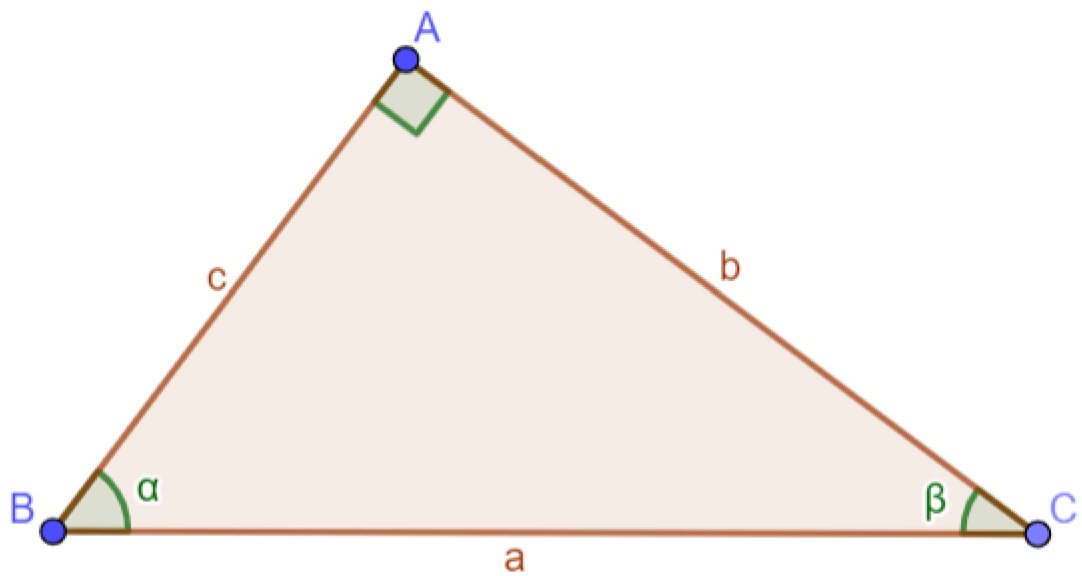
Nesse momento podem ser feitos alguns questionamentos:

- Analise o triângulo AHB. Qual é o valor de $\theta + \alpha + 90°$?
- Agora analise o triângulo AHC. Qual é o valor de $\lambda + \beta + 90°$?
- E analisando o triângulo ABC é correto afirmar que $\alpha + \beta + 90° = 180°$? Por quê?

- O que é possível concluir sobre θ e β? E sobre λ e α?

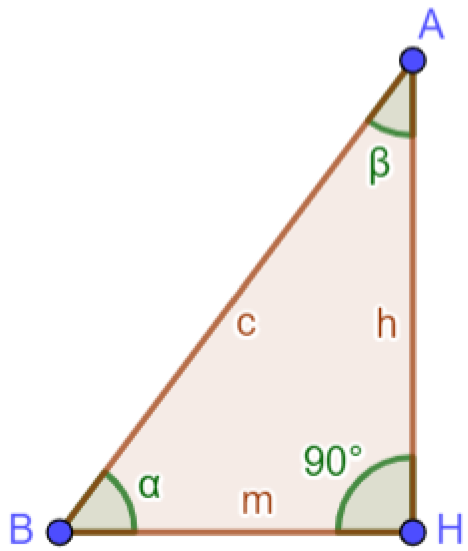
Essas perguntas e as discussões que surgirão a partir delas é importante para que os estudantes compreendam, de modo prático, que na Matemática é necessário justificar cada conclusão parcial obtida, isto é, não existe a possibilidade de avançar na demonstração se houver qualquer tipo de dúvida ou desconfiança acerca da validade das hipóteses, premissas ou conclusões parciais já obtidas. Após esses questionamentos, os estudantes deverão concluir que os três triângulos analisados são semelhantes entre si, já que possuem os mesmos ângulos internos, já que $\theta = \beta$ e $\lambda = \alpha$. Podemos então destacar os três triângulos estudados, que estão representados nas Figuras 6, 7 e 8:

Figura 6 – Representação do triângulo retângulo ABC.



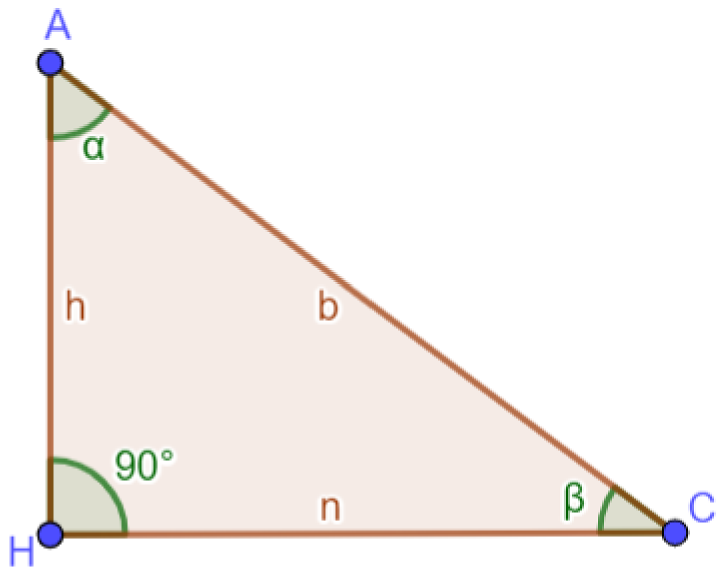
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 7 – Representação do triângulo retângulo ABH.



Fonte: Elaborado pelo autor.

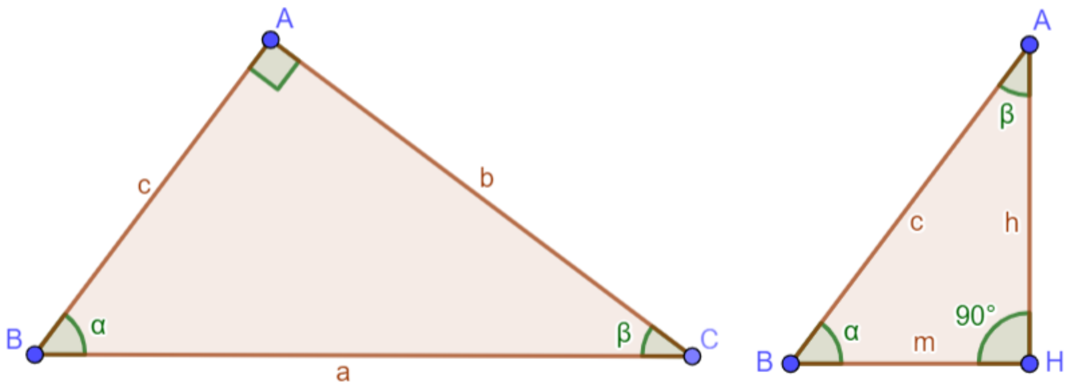
Figura 8 – Representação do triângulo retângulo AHC.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir desses três triângulos retângulos semelhantes, é possível estabelecer as razões de semelhança. Começaremos com os triângulos retângulos ABC e HBA que estão representados na Figura 9.

Figura 9 – Representação dos triângulos retângulos ABC e HBA.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Ao comparar os lados homólogos dos dois triângulos semelhantes acima, os estudantes devem chegar às seguintes razões:

$$\frac{a}{c}$$

$$\frac{b}{h}$$

$$\frac{c}{m}$$

Logo:

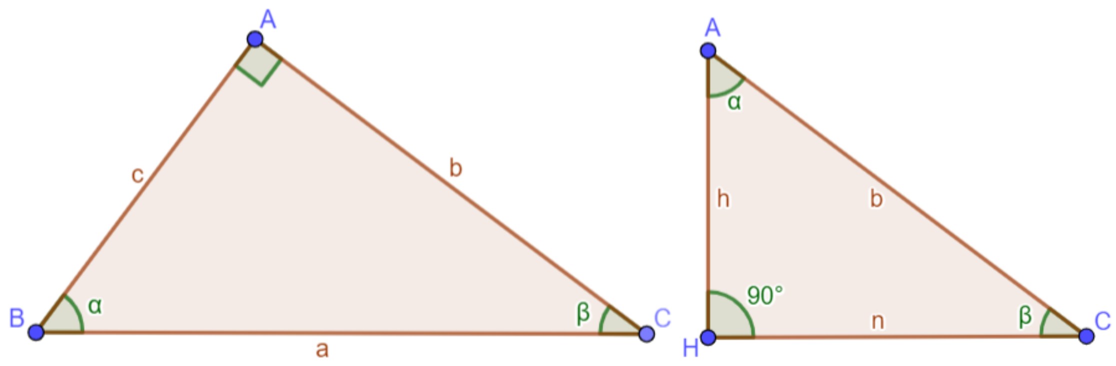
$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} \Rightarrow ah = bc$$

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow am = c^2$$

$$\frac{b}{h} = \frac{c}{m} \Rightarrow bm = ch$$

Na sequência, os estudantes devem realizar a comparação dos triângulos ABC e HAC destacados na Figura 10 a seguir:

Figura 10 – Representação dos triângulos retângulos ABC e HAC.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Chegando, desta forma, às seguintes razões:

$$\frac{a}{b}$$

$$\frac{b}{n}$$

$$\frac{c}{h}$$

E, portanto:

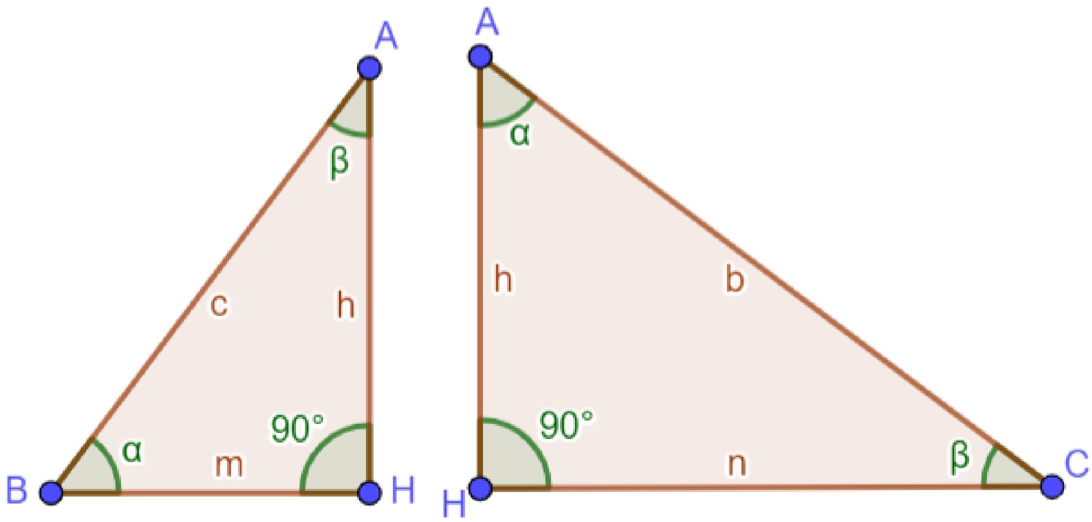
$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow an = b^2$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{h} \Rightarrow ah = bc$$

$$\frac{b}{n} = \frac{c}{h} \Rightarrow bh = cn$$

Finalmente, os estudantes deverão realizar o estudo do último par de triângulos semelhantes, ou seja, os triângulos HBA e HAC que estão na Figura 11

Figura 11 – Representação dos triângulos retângulos HBA e HAC.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Portanto, as razões que podem ser estabelecidas são:

$$\frac{c}{b}$$

$$\frac{h}{n}$$

$$\frac{m}{h}$$

Logo:

$$\frac{c}{b} = \frac{h}{n} \Rightarrow cn = bh$$

$$\frac{c}{b} = \frac{m}{h} \Rightarrow ch = bm$$

$$\frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Rightarrow h^2 = mn$$

Ao fazer essa análise, obtemos as seguintes relações métricas entre as medidas, alturas e projeções de um triângulo retângulo:

$$bm = ch$$

$$bh = cn$$

$$ah = bc$$

$$h^2 = mn$$

$$an = b^2$$

$$am = c^2$$

Como neste trabalho estamos interessados em abordar apenas a demonstração do teorema de Pitágoras, nos atentaremos somente às duas últimas relações métricas. Podemos questionar aos estudantes se é possível chegarmos à tese do Teorema de Pitágoras a partir dessas relações métricas, de modo que eles percebam que ao somar, membro a membro, $an = b^2$ e $am = c^2$, temos:

$$an + am = b^2 + c^2$$

$$a(n + m) = b^2 + c^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Portanto, demonstramos o teorema de Pitágoras usando semelhança de triângulos, conforme previsto na habilidade EF09MA13 da Base Nacional Comum Curricular.

3. 2 Demonstração utilizando área do triângulo e do quadrado

Nesta 2ª proposta de demonstração trabalharemos a equivalência entre áreas e a decomposição de figuras planas em quadriláteros e triângulos.

Abaixo apresentamos o quadro de habilidades presentes na BNCC que serão trabalhadas na condução desse processo de prova matemática.

Quadro 3 – Habilidades mobilizadas na segunda demonstração proposta

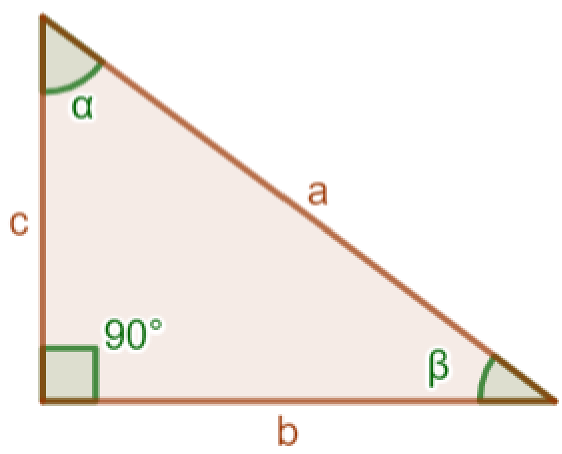
Unidade temática	Objeto do conhecimento	Habilidade
Grandezas e medidas	Equivalência de área de figuras planas: cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros	(EF07MA31) Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros. (EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.
Geometria	Relações métricas no triângulo retângulo. Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração	(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.
Geometria	Triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos.	(EF07MA24) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos

		internos de um triângulo é 180°.
Álgebra	Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis	(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2° grau.

Fonte: Elaborado pelo autor

Inicialmente, os estudantes deverão construir um triângulo retângulo de medidas arbitrárias e destacar a medida dos lados e dos ângulos internos desse triângulo. A Figura 12 apresenta a construção esperada.

Figura 12 – Representação de um triângulo retângulo com suas medidas e ângulos.



Fonte: Elaborado pelo autor.

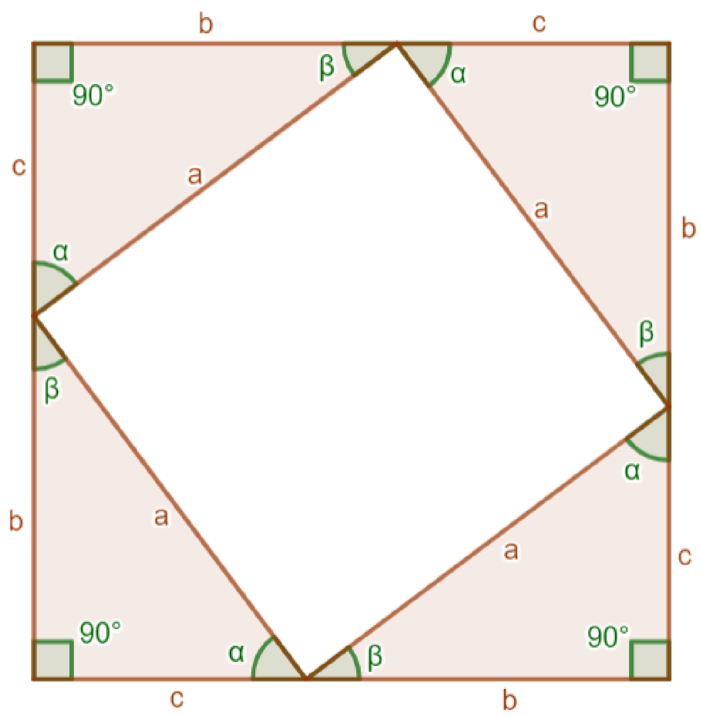
Nesse momento, os estudantes devem ser questionados sobre qual é o valor de $\alpha + \beta + 90°$, de modo a relembrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°, esse é um resultado parcial e já conhecido que precisaremos utilizar como argumento no decorrer de nossa demonstração.

Se necessário, o professor pode sugerir que os estudantes meçam, com o auxílio de um transferidor, cada um desses ângulos e, então, determinem a soma. Essa é uma maneira experimental, e que se opõe ao processo demonstrativo que será trabalhado em seguida, mas importante até mesmo para diferenciar o rigor matemático ao demonstrar teoremas e a análise empírica a partir das observações.

Após os estudantes concluírem que $\alpha + \beta + 90° = 180°$, eles devem construir outros três triângulos retângulos idênticos à primeira construção e, a partir dos quatro triângulos construídos, formar um quadrado.

Na Figura 13 abaixo temos a representação do quadrado que os estudantes deverão formar.

Figura 13 – Representação do quadrado construído a partir dos quatro triângulos retângulos.

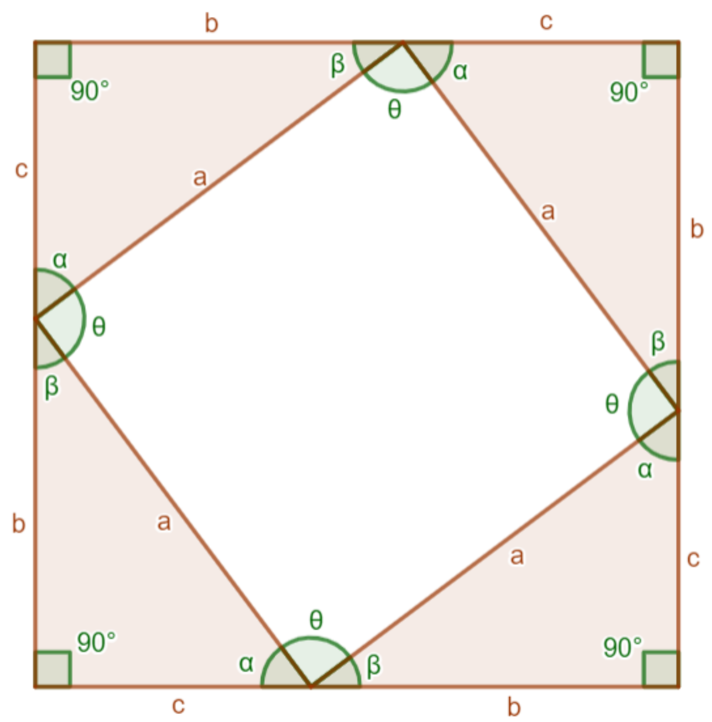


Fonte: Elaborado pelo autor.

Os estudantes devem, agora, determinar a medida de cada um dos ângulos internos do polígono central.

Os estudantes deverão notar que esse polígono central se assemelha a um quadrado, mas não é possível fazer essa afirmação sem argumentos, para que o polígono central de fato seja um quadrado é necessário que os seus quatro ângulos internos sejam retos. Chamemos, então, esse ângulo central de θ, conforme a Figura 14.

Figura 14 – Representação do quadrado construído a partir dos quatro triângulos retângulos (2).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Neste momento é possível realizar uma discussão com os estudantes. Podemos questionar:

- Qual é o valor de $\alpha + \beta$?
- Qual é o valor de $\alpha + \beta + \theta$? Por quê?
- Conhecendo-se o valor de $\alpha + \beta$ é possível determinar o valor de θ? Como?

O objetivo é que os estudantes percebam que $\theta = 90°$ e, portanto, a figura central de fato é um quadrado.

Agora, a área do quadrado de lado $b + c$ pode ser obtido de duas formas: fazendo $(b + c)^2$ ou ainda fazendo a soma das áreas dos 4 triângulos retângulos com a área do quadrado central, ou seja:

$$4 \cdot \frac{bc}{2} + a^2 = (b + c)^2$$

Desenvolvendo a expressão acima, obtemos:

$$2bc + a^2 = b^2 + c^2 + 2bc$$

Ou seja:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Acabamos de demonstrar o Teorema de Pitágoras, desta vez utilizando como conhecimento central o conceito de área.

3. 3 Demonstração utilizando área do triângulo e do trapézio

Nesta demonstração, também de apelo geométrico, atribuída ao ex-presidente americano James Abram Garfield, iremos comparar a área de um trapézio com a área de uma das partes que o forma.

No quadro abaixo apresentamos as habilidades mobilizadas nessa demonstração:

Quadro 4 – Habilidades mobilizadas na terceira demonstração proposta

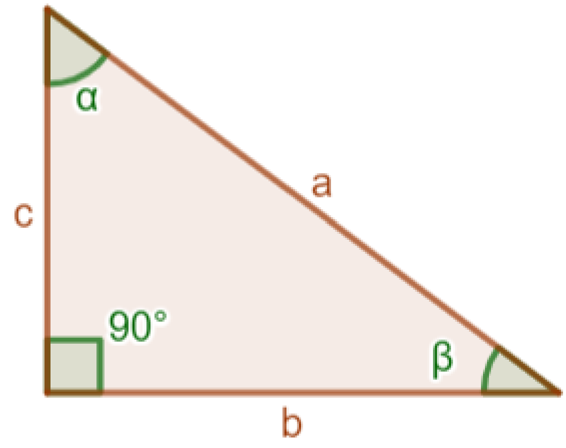
Unidade temática	Objeto do conhecimento	Habilidade
Geometria	Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros e softwares.	(EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e

		perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.
Grandezas e medidas	Equivalência de área de figuras planas: cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros	(EF07MA31) Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros. (EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.
Geometria	Relações métricas no triângulo retângulo. Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração	(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.

Fonte: Elaborado pelo autor

Essa última maneira de demonstrar o Teorema de Pitágoras tratada neste trabalho é semelhante à anterior, isto porque trabalharemos como conhecimento central a noção de área. É possível começar pedindo que os estudantes construam um triângulo retângulo de catetos b e c e hipotenusa a, ilustrado na Figura 15.

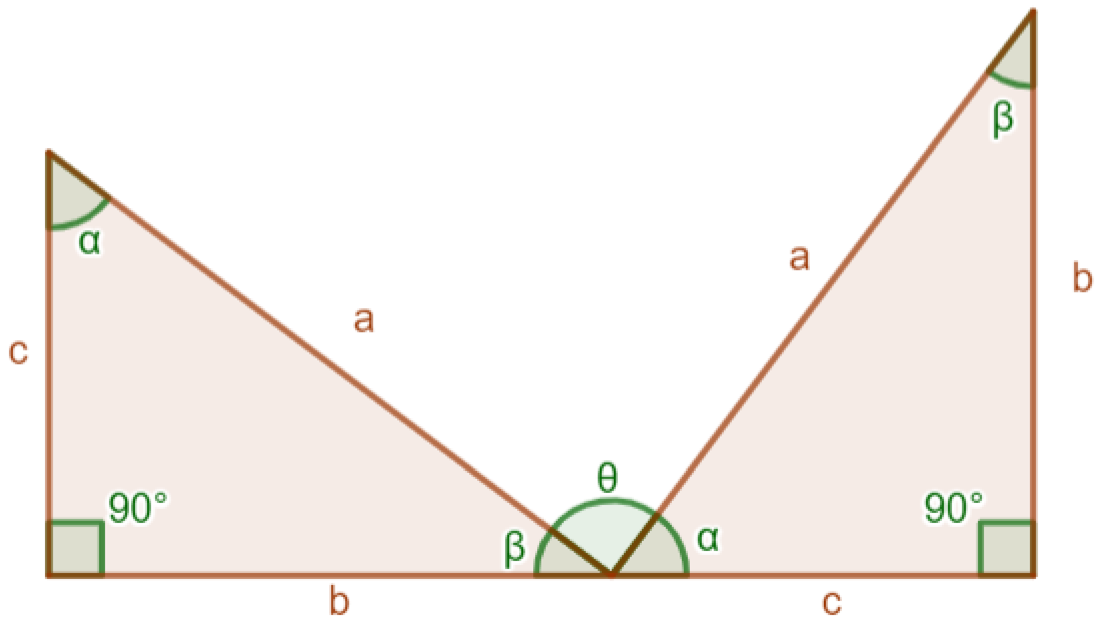
Figura 15 – Representação de um triângulo retângulo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Em seguida, os estudantes deverão construir outro triângulo retângulo idêntico a este e organizá-los como ilustra a Figura 16 :

Figura 16 – Representação da figura formada a partir de dois triângulos retângulos.

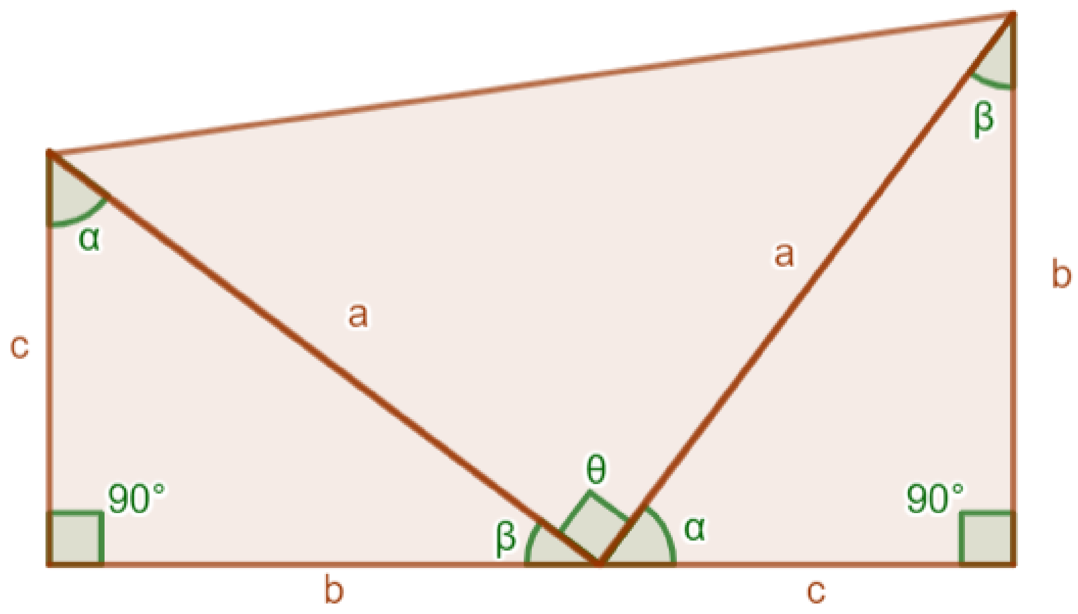


Fonte: Elaborado pelo autor.

De modo análogo a demonstração feita anteriormente, podemos deduzir que $\theta = 90°$.

Formaremos então um trapézio e determinaremos a sua área de dois modos, como está apresentado na Figura 17.

Figura 17 – Representação de um trapézio.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A área do trapézio acima de bases b e c e altura $b + c$ pode ser determinada aplicando-se a fórmula para o cálculo da área de um trapézio, ou seja:

$$(b + c) \cdot (b + c) \cdot \frac{1}{2}$$

$$(b + c)^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$(b^2 + c^2 + 2bc) \cdot \frac{1}{2}$$

Ou ainda como a soma das áreas dos três triângulos, isto é:

$$2 \cdot \frac{bc}{2} + \frac{a^2}{2}$$

$$bc + \frac{a^2}{2}$$

Igualando as expressões, obtemos:

$$bc + \frac{a^2}{2} = (b^2 + c^2 + 2bc) \cdot \frac{1}{2}$$

$$2bc + a^2 = b^2 + c^2 + 2bc$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

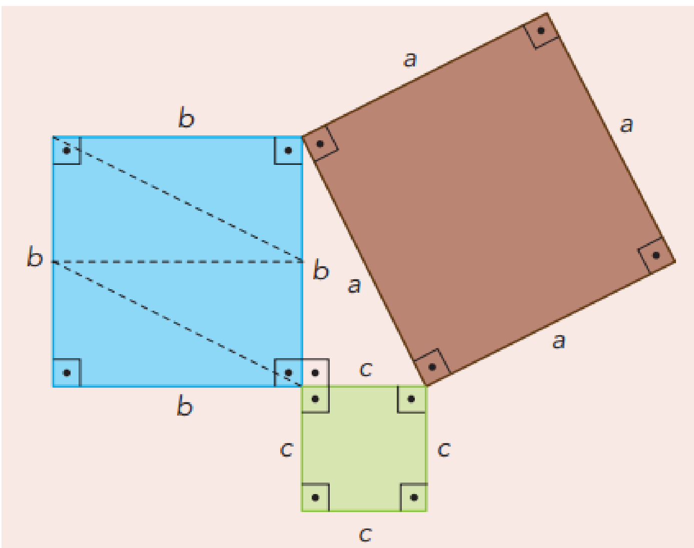
Que é, mais uma vez, o teorema de Pitágoras.

3.4 Análise das demonstrações apresentadas em livros didáticos

Apresentaremos aqui a abordagem de três livros didáticos acerca da demonstração do teorema de Pitágoras. Analisaremos três obras aprovadas pelo PNLD (Programa Nacional do Livro Didático) e que já estão disponíveis nas escolas públicas brasileiras desde o primeiro semestre de 2024.

No livro Teláris Essencial Matemática, de Luiz Roberto Dante e Fernando Viana, são propostas algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras em uma seção chamada “Explore para Descobrir”. A primeira proposta abordada nesta obra é apresentada na Figura 18 abaixo.

Figura 18 –Imagem apresentado no livro Teláris Essencial Matemática.



Fonte: (Dante, 2022, p. 172).

A obra propõe que os estudantes representem a Figura 18 em uma folha sulfite e, na sequência, realizem recortes e colagem de modo que o quadrado azul (decomposto em triângulos) e o quadrado verde cubram completamente o quadrado marrom, mostrando desta forma, usando o contexto de área, que $a^2 = b^2 + c^2$.

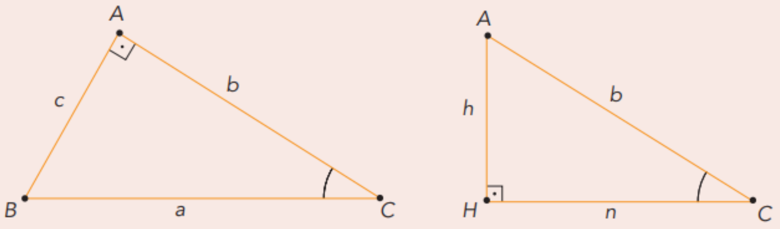
O livro de Luiz Roberto Dante e Fernando Viana também apresenta a demonstração do Teorema de Pitágoras por meio da semelhança entre triângulos (Figura 19), de modo que são dados os comandos que devem ser seguidos pelos estudantes.

Figura 19 – Atividade proposta no livro Teláris Essencial Matemática.

Explore para descobrir

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

De modo análogo ao que foi mostrado, vamos considerar agora os triângulos *ABC* e *HAC*.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

1. No caderno, represente os 2 triângulos na mesma posição, verifique e escreva qual caso de semelhança se aplica a eles. Os triângulos têm um ângulo reto e o ângulo $\hat{C}$ é comum; portanto, são semelhantes pelo caso AA.

2. Como os lados homólogos têm medidas de comprimento proporcionais, copie e complete no caderno as proporções a seguir.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} = \frac{c}{h}$$

3. Considerando as proporções que você completou, escreva no caderno as seguintes relações de igualdade:

$b^2 = an$ **(V)** $\quad bh = nc$ **(VI)** $\quad ah = bc$ **(VII)**

Adicionando os 2 membros das igualdades **II** e **V**, obtemos:

$$\left.\begin{aligned} b^2 &= an \\ c^2 &= am \end{aligned}\right\} b^2 + c^2 = an + am \Rightarrow b^2 + c^2 = a(m + n)$$

4. Utilize a relação **I** para substituir $(m + n)$ na equação anterior e completar:

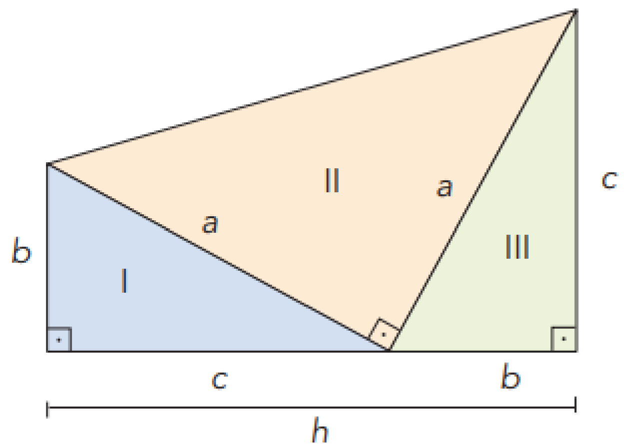
$$b^2 + c^2 = a \cdot a \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

Essa é uma das demonstrações do teorema de Pitágoras. Mas há muitas outras maneiras de provar que $a^2 = b^2 + c^2$.

Fonte: (Dante, 2022, p. 175).

Por fim, esse livro da coleção Teláris Essencial Matemática, apresenta um trapézio formado por triângulos retângulos (Figura 20) e mostra como é possível chegar ao Teorema de Pitágoras por meio do cálculo de áreas.

Figura 20 – Trapézio apresentado no livro Teláris Essencial Matemática.

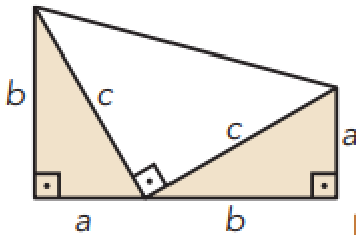


Fonte: (Dante, 2022, p. 176).

A obra Matemática e Realidade, de Gelson Iezzi, apresenta a demonstração do Teorema de Pitágoras por meio da semelhança entre triângulos. Diferentemente do livro Teláris Matemática em que essa demonstração é feita, de certa forma, de maneira conjunta com o estudante (conforme a Fig 19), em Matemática e Realidade a demonstração é apenas apresentada, de modo que cabe ao estudante realizar a leitura e compreensão do passo a passo utilizado na demonstração.

No entanto, na seção denominada “Na história” é proposto um exercício no qual o estudante deve demonstrar o Teorema de Pitágoras. Nesse exercício, é dito que essa demonstração é creditada ao ex-presidente americano James Garfield e a partir de uma imagem são feitos alguns questionamentos que levam o estudante a raciocinar com maior cautela. A imagem reproduzida no livro é a Figura 21 abaixo.

Figura 21 – Trapézio apresentado no livro Matemática e Realidade.



Fonte: (Iezzi, 2022, p. 157).

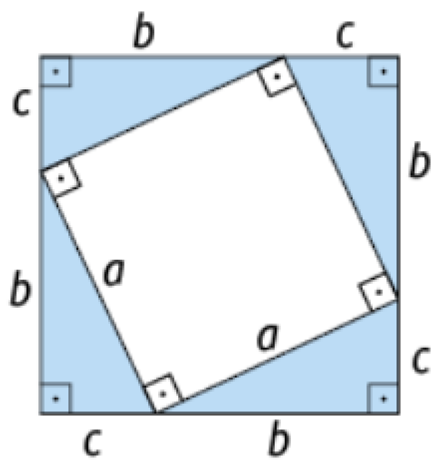
A obra solicita que o estudante justifique o fato de que o triângulo de catetos c é retângulo, na sequência propõe que o estudante calcule a área do trapézio, a área dos três triângulos e, a partir disso, demonstre o teorema de Pitágoras.

A terceira coleção analisada é denominada SuperAção Matemática (essa é a obra adotada na rede na qual o autor da dissertação atua). Essa coleção é uma obra coletiva da Editora Moderna, que possui Lilian Aparecida Teixeira como Editora Responsável.

Nessa obra são apresentadas (e demonstradas) as relações métricas do triângulo retângulo a partir da semelhança de triângulos, no entanto a partir dessas relações métricas não se conclui o Teorema de Pitágoras, fato único e isolado nas três coleções analisadas nessa pesquisa.

Essa obra apresenta uma demonstração do Teorema de Pitágoras a partir da Figura 22 seguinte.

Figura 22 – Ilustração apresentada no livro SuperAção Matemática.



Fonte: (Moderna, 2022, p. 123).

Ao analisar essas três obras é possível notar que os livros didáticos apresentam demonstrações do teorema de Pitágoras, de diferentes formas, porém na maioria dos casos essas provas não são conduzidas de maneira conjunta com os estudantes, ou seja, a demonstração é apenas apresentada.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente dissertação buscou apresentar sugestões de demonstrações que pudessem ser realizadas pelo professor com a participação ativa dos estudantes, motivo esse pelo qual consideramos importantes os questionamentos sugeridos para serem feitos aos estudantes que foram apresentados no capítulo 3. Não tivemos neste trabalho a pretensão ou audácia de elaborar um manual que deve ser seguido por professores para realizar tal prática em sala de aula, pelo contrário, buscamos apresentar um ponto de partida para a prática de demonstrações em sala de aula, que devido ao seu ambiente dinâmico requer adaptações do que fora aqui sugerido.

A realização de demonstrações nas aulas de Matemática, em especial nos anos finais do Ensino Fundamental, não é tão comum nas salas de aulas brasileiras pois sequer apareciam como habilidades em documentos curriculares precursores da BNCC. A partir do momento em que a Base insere três habilidades de demonstração no Ensino Fundamental, fica evidente o importante papel desempenhado por essa argumentação nas aulas de Matemática pois, ao considerá-las habilidades, isso significa que não é apenas o professor que deve realizá-las, mas também, e principalmente, os estudantes, visto que esse conhecimento pode ser abordado em provas e exames como SARESP e ENEM.

A realização dessa pesquisa agregou ao autor do trabalho conhecimentos e experiência na elaboração de sequências didáticas que envolvem as demonstrações matemáticas, de forma que essa prática possa ser inserida gradualmente na prática pedagógica do autor em diferentes contextos da Educação Básica.

A principal limitação do trabalho foi não ter sido possível aplicar a sequência didática sugerida e realizar uma análise qualitativa dos possíveis resultados, nesse sentido é possível realizar trabalhos futuros nos quais as demonstrações ora sugeridas (dentre outras possíveis) possam acontecer em salas de aula dos anos finais do Ensino Fundamental e, desta forma identificar possíveis pontos de melhoria.

REFERÊNCIAS

ANTUNES, Antonia Edvânia Fernandes. **Uma Análise do Teorema de Pitágoras em Livros Didáticos à Luz da BNCC**. 2023, 173 p. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Regional do Cariri, Juazeiro do Norte, 2023.

ÁVILA, Geraldo. **Várias Faces da Matemática**. 2. ed. São Paulo. Blucher, 2010.

BRASIL. **Constituição da República Federativa do Brasil de 1988**. Promulgada em 5 de outubro de 1988. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 5 out. 1988. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicao.htm. Acesso em: 4 de fevereiro de 2024.

BRASIL. **Lei n° 9.394, de 20 de dezembro de 1996**. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 23 dez. 1996. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm. Acesso em: 16 de abril de 2024

BRASIL. **Lei n° 13.415, de 16 de fevereiro de 2017**. Dispõe sobre a reforma do ensino médio brasileiro. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 17 fev. 2017. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2017/lei/l13415.htm. Acesso em: 2 de julho de 2024

BRASIL. **Lei n° 13.005, de 25 de junho de 2014**. Aprova o Plano Nacional de Educação – PNE e dá outras providências. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 26 jun. 2014. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2011-2014/2014/lei/l13005.htm. Acesso em: 25 de novembro de 2023

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília. MEC, 2018.

COSTA, Fabiano Amstrong Pinto. **Demonstrações Matemáticas**. 2015, 84 p. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2015.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Teláris Essecial: Matemática 9° ano**. 1. ed. São Paulo. Ática, 2022.

EVANGELISTA, Antônia Dinamária Gomes. **Regras Matemáticas e suas Justificativas: Breve Histórico sobre o Ensino de Matemática no Brasil e uma Reflexão Acerca da Inclusão de Demonstrações na Prática Docente**. 2014, 102 p. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte, 2014.

HELLMEISTER, Ana Catarina P. **Geometria em Sala de Aula**. 1. ed. Rio de Janeiro. Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO; Antonio. **Matemática e Realidade: 9° ano**. 10 ed. São Paulo. Saraiva Educação, 2022.

LIVIO, Mario. **Razão Áurea: A História de Fi, um número surpreendente**. 2. ed. São Paulo. Record, 2008.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e realidade**. 8. ed. São Paulo. Cortez, 2009.

MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro de. **Um Convite à Matemática: com técnicas de demonstração e notas históricas**. 3. ed. Rio de Janeiro. Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.

MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro de. **Manual de Redação Matemática: com um dicionário etimológico de palavras usadas na Matemática**. 2. ed. Rio de Janeiro. Sociedade Brasileira de Matemática, 2018.

PIRES, Augusto de Abreu. **Fundamentos Matemáticos para computação: lógica e álgebra**. 1. ed. Sorocaba. Eduniso, 2017.