



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCAR
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**MINIMALIDADE DE COINCIDÊNCIAS DO TIPO BORSUK-ULAM EM
SUPERFÍCIES UTILIZANDO TRANÇAS**

CAIO LIMA SILVA

São Carlos - SP

Julho de 2024



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCAR
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MINIMALIDADE DE COINCIDÊNCIAS DO TIPO BORSUK-ULAM EM SUPERFÍCIES UTILIZANDO TRANÇAS

CAIO LIMA SILVA

Orientador: Prof. Dr. Daniel Vendruscolo

Coorientador: Prof. Dr. Vinicius Casteluber Laass

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Doutor em Matemática.

São Carlos - SP

Julho de 2024



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Tese de Doutorado do candidato Caio Lima Silva, realizada em 18/07/2024.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Daniel Vandrúscolo (UFSCar)

Prof. Dr. Vinicius Casteluber Laass (UFBA)

Profa. Dra. Carolina de Miranda e Pereiro (UFES)

Prof. Dr. Weslem Liberato Silva (UESC)

Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi (UNESP)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

À minha mãe, familiares e amigos.

Agradecimentos

E nos acréscimos da entrega da tese, estou aqui, colocando uma música para me inspirar e me apoiar neste momento de escrita dessa parte que é tão importante. É um momento único que faz com que eu volte no tempo e relembre diversas situações vividas e escolhas feitas as quais tenho que vir nesse espaço compartilhar.

Quando a palavra era doutorado, via como algo muito distante, fora da minha realidade. Era um ideal chamar uma pessoa de doutora ou doutor, um sonho que acreditava que não era pra mim.

Recordo, após morar uns anos no interior do Paraná, que ao retornar e encontrar uma tia avó, ela olhou as minhas mãos e falou: “Nossa! Suas mãos parecem mãos de doutor.”. Interpolei a perguntar qual seria este doutor e ela disse que não sabia, mas respondeu que possivelmente um cirurgião. No todo ela não estava equivocada. Talvez, o doutor que ela queria fazer menção era o médico responsável por cirurgia em pessoas. Entretanto, o cuidado e as operações feitas foram outros.

Acho que, para começar formalmente a seção de agradecimentos, quero começar valorizando a grande classe dos professores. Um bom professor pode te estimular ou então fazer com que você repense seus caminhos. Na minha curta e longa jornada, tive vários bons professores. Uns me deram exemplos, outros contraexemplos, outros conselhos e até uma boa conversa ou fofoca. Eles marcaram de diversas formas. Aqui quero agradecer em particular aos professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) e da Universidade Federal da Bahia (UFBA), que me moldaram como pessoa e como matemático. Agradeço a professora Dra. Rita de Cássia que desde o início da graduação acreditou no meu potencial e sempre me estimulou a voar mais longe do que eu planejava. Agradeço ao meu eterno orientador do mestrado, professor Dr. Oscar Ocampo, que sempre me colocou contra a parede para que eu pudesse crescer mesmo nas dificuldades. Desejo uma rápida recuperação, reafirmando o quanto continuo te admirando e que tenho vontade de poder trabalhar com você.

“Eu me encho de esperança, de algo novo que aconteça” e assim foi quando recebi a notícia que tinha passado no doutorado na UFSCar. Mas, ao mesmo tempo que foi uma esperança, surgiram vários questionamentos: “Será que você sabe que no fundo eu tenho medo, de correr e não alcançar?”. Temos o mal (nem sempre é tão ruim) de sermos o nosso próprio impostor. No momento que recebi tal ligação do coordenador em exercício do programa da pós-graduação em matemática, professor Dr. Edivaldo Lopes - o qual já agradeço a paciência para lidar com uma pessoa confusa e pela insistência em me querer no programa, estava a poucos meses empregado no Instituto Federal da Bahia (IFBa)

como professor substituto. Não sabia se largava esse emprego momentâneo e certo ou se iria me aventurar em outro estado e viver essa nova experiência. Aqui, tenho que agradecer a algumas pessoas que me pediram pra eu não ficar, pedindo pra eu voar, que estariam aqui no meu retorno. Destaco Amanda Stadinik, que através da sua alegria me fez, por muito, sentir presente, mesmo a milhares de quilômetros de distância. Muito do aceite também foi em virtude da bolsa. Agradeço, portanto, a CAPES pelo apoio financeiro com esse trabalho.

Fui para São Carlos com uma mochila (duas malas gigantes) e meus sonhos. Uma das minhas felicidades era de compartilhar esse momento com um ser que surgiu no final da minha graduação e foi fundamental para esse processo. Uma amiga, que por vezes some, mas sei que estará por mim (mesmo eu ficando chateado com ela). Agradeço a sua presença na minha vida, minha eterna cuidadora de malas, Raquel Magalhães. Sempre ficarei feliz em contar com você e sempre direi que estarei na frente de uma das melhores matemáticas que conheço. Você é maravilhosa.

Vivi um semestre muito duro, onde encararia, assim como todos os alunos, as qualificações. Lá encontrei algumas pessoas que me deram suporte e os quais agradeço, como o Marco Aurélio Carmo, o Telmo Acosta e o Victor Biliatto, além do famigerado Renato Diniz, que fizeram que esse tempo fosse um pouco mais suave do que realmente foi.

“No samba sei que samba, e o que será que faz chorar?”... e sambei, mas também sofri, até que pude retornar a Salvador a passeio, tentando me reenergizar para poder voltar no semestre seguinte, só não sabia que ficaria um bom tempo novamente em Salvador por um motivo mundial: a pandemia. A COVID-19 tomou conta do mundo e, naturalmente, tomou conta do meu processo de doutoramento. No dia que retornaria à São Carlos, foi decretado o lockdown e passamos a ter que viver as incertezas desse novo aspecto de vida. Ao final desse processo, talvez tenha que, em parte, agradecer a pandemia, pois foi ela que me deu forças a continuar após um primeiro semestre que foi um baque mentalmente. Obviamente, a pandemia não trouxe apenas esse semblante. Mundialmente ela foi terrível e, na minha vida, ela tirou meu avô. Vou lembrá-lo, mas antes, gostaria de agradecer a minha família por parte de meu pai - ao próprio Cláudio Silva, como também a minha avó Suely Silva. Meu avô, Aquilino Silva, também foi uma figura muito marcante para mim. Com seu jeito duro e ao mesmo tempo mole. Com seu jeito espontâneo, com suas falas marcantes, ele sempre foi uma pessoa que colocava pra frente, me incentivava. Obrigado.

Aproveito esse momento para também agradecer as pessoas que passaram pela minha vida, deram alguma contribuição e que, por algum motivo, já não pertencem mais, ou por vida, ou por não estarem mais encarnados, como, um outro exemplo de pessoa que foi meu outro avô, Ernesto Lima. Assim como agradeço a alguns outros amigos, como o pessoal do Sartre e pessoas da UFBA, como Enathielle Andrade, Felipe Aragão (migles) e Susana Quirino, vocês são incríveis.

Deixei, portanto, minhas malas com Raquel e fiquei em Salvador. Foi aqui que vi minha vida se transformar de vez. Posso culpar o retorno de Saturno, Raquel? Enfim, muitas coisas aconteceram após o falecimento de meu avô que fizeram eu ficar mentalmente destruído. E aqui acho que vai ser

o melhor momento de te agradecer, Adson Santana, você foi a pessoa que me ouviu, que me tirou desse poço, que fez eu me recompor só sendo você, meu amigo. Desde antes já te admirava muito, mas você se tornou o melhor. Obrigado por ser você, Ad.

Nessa mesma toada, fui abraçado por meus irmãos acadêmicos da UFBA - Paulo Santos e Ênio Leite. Minha família acadêmica, obrigado por fazer parte da minha vida e vibrar pelas nossas conquistas. E nessa família, o agradecimento se estende a Cleidiane Araújo - saudade, amiga. Antes que eu encerre essa parte, Orla, obrigado por se aproximar mais e ser quem você é.

Foi nesse período de caos que também tive a conquista do firmamento da orientação com o professor Dr. Daniel Vandrúscolo. Quando fui aprovado na UFSCar, foi o nome de Daniel que passou na minha cabeça e agradeço que essa vontade se concretizou. Tu não foi apenas um simples orientador, mas se mostrou um ser humano maravilhoso. Sei que a orientação, com quase sua totalidade à distância, foi complicada por diversos aspectos, então peço perdão, se em algum momento falhei como aluno e orientando, mas foi uma realização trabalhar com você e espero que venham outros trabalhos juntos. Além disso, você propiciou trabalhar com uma outra pessoa, professor Dr. Vinicius Casteluber.

Quando o Vinicius chegou na UFBA, eu já estava e ele me impressionou por vários aspectos, como sua facilidade de conversar e explicar, como sua ternura e cuidado com seus alunos, tirando o matemático incrível que percebi. No momento que o conheci um pouco mais, soube um recorte de sua história, passei a admirá-lo mais ainda. Não tive a oportunidade na graduação de ser seu aluno, mas fiz de tudo para que no mestrado essa vontade se concretizasse - enchi o saco. E foi nessa matéria que tomei uma das lições de vida dadas por ele.

Cortando para o doutorado, Daniel me propôs o nome de Vinicius como coorientador, o que aceitei sem pestanejar. Era uma chance de converter essa lição e mostrar para o próprio Vinicius que eu podia ser melhor, assim como ele mesmo acreditava - mais do que a mim mesmo. Me esforcei, saio feliz com o trabalho e espero que tenha sido para você, assim como foi para mim. Caso não tenha sido, peço perdão. Fico feliz de ter trabalhado junto com você e, caso assim queira, desejo continuar esse e outros trabalhos contigo.

No decorrer da escrita da tese, mais loucuras. Aprovação no processo seletivo para professor substituto da UFBA, voltando as minhas origens. Aprovação no concurso da Secretaria de Educação como professor do Estado. Daqui, tenho algumas pessoas a agradecer. A meus colegas de trabalho da UFBA - Leydiane Campos, Sávio Santana e Yure Carneiro - e ao meu chefe de departamento da UFBA professor Dr. Darllan Pinto. Aos meus colegas professores, aos funcionários, a coordenação e a gestão da Escola Professor Roberto Santos. Muito obrigado.

Tive a felicidade de, ao diminuir os casos de COVID-19, começarmos a retomar a vida em sociedade e a vida de estudos e eventos matemáticos. Agradeço a todos os amigos professores que fiz e faço nesses encontros, em particular, os membros da banca, professora Dra. Carolina Pereira, professor Dr. Weslem Liberato e a professora Dra. Alice Libardi, tanto pela presença na banca, como

também com as contribuições feitas para que o trabalho evoluísse ainda mais.

Em um evento em Uberlândia, me aproximei mais de uma criatura e pelas poucas (ou não) conversas essa aproximação se transformou em amizade. Gustavo Oliveira, obrigado, amigo. Por sua causa dei maravilhosas risadas e foi por sua causa também que as figuras da tese, além de saírem, ficaram lindas. Você se dispôs a me ensinar a rabiscar meus desenhos.

Falando em rabisco e voltando a Liniker que tanto me inspirou, “Você já decorou quantas tatuagens tenho? Se eu ligo pra cartoon ou rabisco os meus desenhos?”, poucas pessoas tiveram e tem acesso a saber um pouco mais sobre minha vida particular. Para alguns, tenho que fazer um agradecimento a parte. Para a família por parte de minha mãe, temos nossas confusões, mas agradeço a cada um, em especial minha avô, Margarida Lima, e meu padrasto, Cristiam Falconeres.

Tem gente que entra na nossa vida para muito mais do que simplesmente somar. Não questiono a forma, mas agradeço por você estar e fazer parte dessa nova construção de mim mesmo. Você é uma pessoa que posso contar, me apoiar e contribuir mutualmente. Você ajudou a salvar meus domingos. Você é especial. Obrigado, Marcos Paranhos.

Por fim e não menos importante, minha rainha. Tudo por você e para você. Agradeço a pessoa que sempre me incentivou e ainda o faz. A pessoa que está comigo em todos os aspectos, da bebedeira até o momento de resenha, dos momentos mais introspectivos aos mais risonhos, da tristeza até a alegria. Cláudia Lima, “Deixa eu ficar na tua vida, morar dentro da sua concha, do teu abraço não quero largar... E se não der pé, eu não vou desistir”, sei que você não me larga e não me deixa desistir. Meu alicerce, meu porto seguro, “porque amor pra mim é tudo” e é isso que você é - tudo pra mim. Obrigado por ser, mãe. Te amo.

Agradeço a Deus, aos espíritos bons, aos meus guias e toda a fé que carreguei e carrego comigo. Axé.

Por muito sou redundante e prolixo, mas tenho que agradecer a todas essas pessoas e preciso agradecer a mais uma - a mim mesmo. Em vários momentos e por muitos problemas, quis desistir. Obviamente, ouvi muita gente boa, o que me fazia juntar forças, às vezes de onde não tinha, e levantar a cabeça. Todos têm participação nessa conquista, mas quero agradecer a minha força, a minha luta e a minha vontade de não me deixar arriar. Você pode e você conseguiu.

Resumo

Dados dois espaços topológicos M e N , M equipado de uma involução livre τ , e uma aplicação $f: M \rightarrow N$, definimos o conjunto de Borsuk-Ulam coincidências como

$$\text{BUCoin}(f; \tau) = \{\{x, \tau(x)\} \mid f(x) = f(\tau(x))\}.$$

Nesse trabalho, queremos exibir $g: M \rightarrow N$ homotópica a f tal que minimize a cardinalidade do conjunto de coincidências do tipo Borsuk-Ulam. No caso onde os espaços forem superfícies, mostraremos uma técnica algébrica envolvendo o grupo de tranças de superfícies que é útil para estudar tal problema. Essa técnica também exibe o índice de cada Borsuk-Ulam coincidência, visto como classes de coincidências. Daremos uma resposta explícita ao problema quando ambos os espaços forem garrafas de Klein.

Palavras-chave: MINIMALIDADE, COINCIDÊNCIAS BORSUK-ULAM, NIELSEN-BORSUK-ULAM, GRUPO DE TRANÇAS, SUPERFÍCIES.

Abstract

Given topological spaces M and N , with M equipped with a free involution τ , we define the set of Borsuk-Ulam coincidences as

$$\text{BUCoin}(f; \tau) = \{\{x, \tau(x)\} \mid f(x) = f(\tau(x))\}.$$

In this work, we want to exhibit $g: M \rightarrow N$ homotopic to f such that it minimizes the cardinality of set of Borsuk-Ulam coincidences. In the cases where spaces are surfaces, we will show an algebraic technique involving braid groups of surface that is useful to study such a problem. This technique also displays the index of each Borsuk-Ulam coincidence, seen as coincidences classes. We will give an explicit answer to the problem when both spaces are Klein bottles.

Keywords: MINIMALITY, BORSUK-ULAM COINCIDENCES, NIELSEN-BORSUK-ULAM, BRAID GROUPS, SURFACES.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	7
1.1 Aspectos básicos da teoria de Nielsen-Borsuk-Ulam	7
1.2 Aspectos básicos de tranças	14
2 Generalidades	23
2.1 Pré-requisitos	23
2.2 Técnica algébrica: conexão entre teorias	27
3 Garrafa de Klein	37
3.1 A estrutura $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ e o grupo fundamental de K^2	37
3.2 Descrição de $[K^2, K^2]$	41
3.3 A involução τ em K^2	43
3.4 Os grupos de tranças total e puras de K^2	45
3.5 Outros grupos e homomorfismos do Diagrama 2.9 para M e N sendo iguais a K^2	48
3.6 Aplicação em K^2	51
Referências Bibliográficas	54
Índice Remissivo	57

Lista de Figuras

1 Stanislaw Ulam.	1
2 Karol Borsuk.	1
3 Ilustração relativa ao Teorema 0.1 - Retirado de [32].	2
4 Emil Artin.	3
5 Ralph Hartzler Fox.	3
6 Lee Neuwirth.	3
1.1 Trança sobre M	14
1.2 Exemplos e contraexemplo de tranças.	15
1.3 Produto de tranças β e β'	16
1.4 Exemplos de tranças na esfera e no toro.	17
1.5 Projeção de tranças.	18
1.6 Cruzamentos.	18
1.7 Trança após a projeção e identificação.	18
1.8 Divisão de uma trança em planos de nível.	19
1.9 Trança σ_i em $B_n(\mathbb{D})$	19
1.10 Trança σ_i^{-1} em $B_n(\mathbb{D})$	19
1.11 $\sigma_i \sigma_k = \sigma_k \sigma_i$	20
1.12 $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$	20
2.1 Os a_j e a ideia geométrica intuitiva da homotopia entre ∂D e $\prod_{j=1}^k a_j \partial D_j a_j^{-1}$	29
2.2 Uma possível visão geométrica de M e definição geométrica dos a_j	30
2.3 Uma possível visão geométrica de N destacando a imagem dos elementos pela g	31
2.4 Uma possível visão geométrica de N destacando a Borsuk-Ulam coincidência x_1	32
2.5 Definição geométrica de $g(x_t)$ e $g(y_t)$	34
2.6 Visualização da trança em $D_0 \subset N$	35
3.1 Garrafa de Klein K^2	40
3.2 Isomorfismo entre $\pi_1(K^2)$ e $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$	41
3.3 Involução livre τ	43
3.4 Quociente pela involução τ	44

3.5	Identificação de $\pi_1\left(\frac{K^2-\tilde{D}}{\tau}\right)$ por $F(c_1, c_2)$.	45
3.6	K^2 visto como $\mathbb{R}P^2\#\mathbb{R}P^2$.	45
3.7	Gerador a_1 para a apresentação de $B_2(K^2)$ por [4].	46
3.8	Gerador a_2 para a apresentação de $B_2(K^2)$ por [4].	46
3.9	Gerador σ para a apresentação de $B_2(K^2)$ por [4].	46

Introdução

Dados X um espaço topológico e $f: X \rightarrow X$ uma autoaplicação, desde o início do próprio estudo da área de topologia, questiona-se sobre a solução de uma equação específica: $f(x) = x$. Tal pergunta se mostra bastante significativa, pois é vista com muito interesse em diversos outros ramos da matemática, além da própria topologia.

Ao adicionarmos Y , um espaço topológico, e tomarmos $f, g: X \rightarrow Y$ aplicações, é factível uma pergunta similar a feita anteriormente agora perante a equação: $f(x) = g(x)$.

Os questionamentos descritos nos parágrafos supracitados fizeram com que parte dos matemáticos se debruçassem sobre essas perguntas, as quais são generalizadas como problemas de ponto fixo e coincidências, como por exemplo os bem conhecidos números de Lefschetz e de Nielsen, os quais podem ser visitados de forma mais completa através de [14, 15, 26, 29].



Figura 1: Stanislaw Ulam.



Figura 2: Karol Borsuk.

Em paralelo com o desenvolvimento dessa área da matemática, o pesquisador polonês chamado Stanislaw Ulam, visto na Figura 1, conjecturou o Teorema 0.1.

Teorema 0.1. *Seja $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua, onde \mathbb{S}^n é a esfera n -dimensional. Então, existe $x \in \mathbb{S}^n$ tal que $f(x) = f(\tau(x))$, para $\tau: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ a aplicação antipodal.*

Uma interpretação geométrica do Teorema 0.1 quando $n = 2$ pode ser visualizada através da Figura 3.

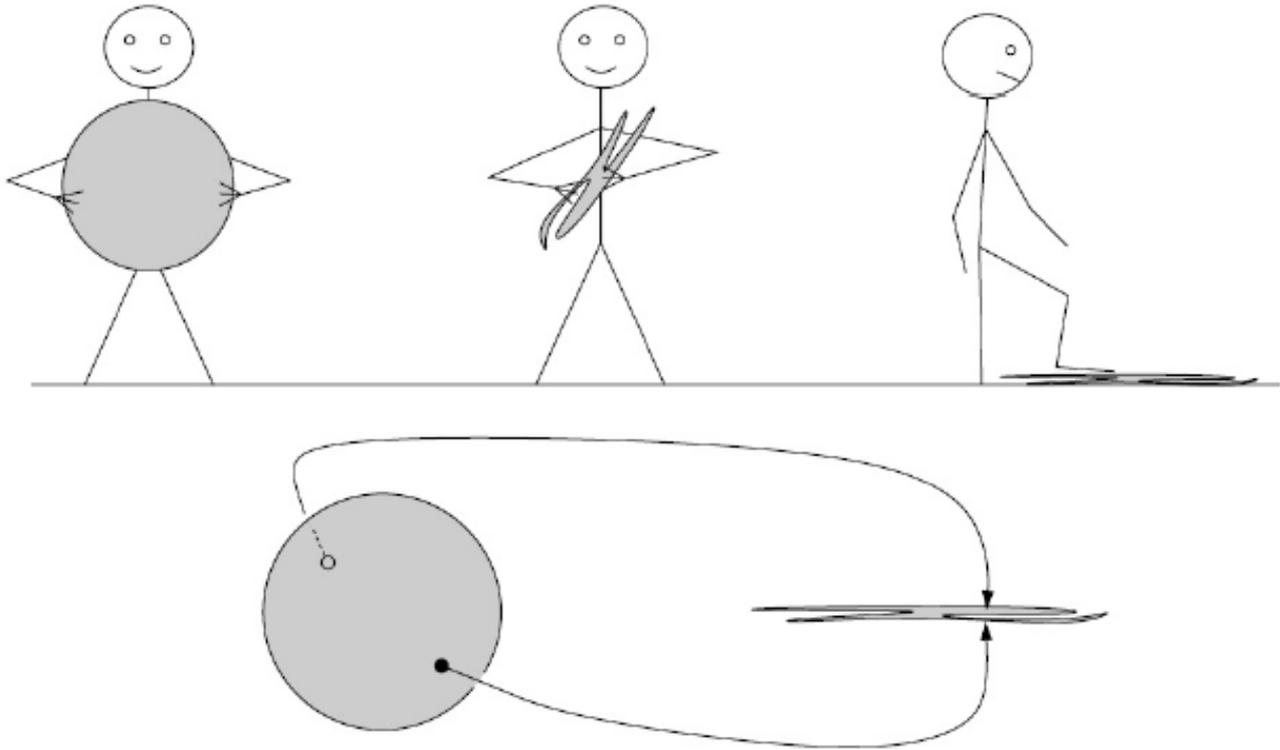


Figura 3: Ilustração relativa ao Teorema 0.1 - Retirado de [32].

Entretanto, apenas em 1933, outro polonês, Karol Borsuk, visto na Figura 2, conseguiu provar essa conjectura. Mais ainda, eles abriram espaço para uma categoria de perguntas relativamente relacionadas, por exemplo a generalização a partir da troca da aplicação antipodal por uma involução livre. Esta teoria ficou chamada de Teoremas do tipo Borsuk-Ulam, que podem ser vistos de maneira mais completa através de [32].

Se tomarmos g supramencionado no conceito de coincidências e a função $f \circ \tau$ referente ao Teorema 0.1, de forma que elas sejam iguais, observamos que ambos os momentos nos questionamos quais valores de $x \in X$ tal que a seguinte equação seja válida: $f(x) = f(\tau(x))$. Esses valores são definidos de forma mais precisa como a seguir.

Definição 0.2. *Sejam X e Y espaços topológicos, $\tau: X \rightarrow X$ uma involução livre, isto é, $\tau^2 = \text{id}_X$ e $\tau(x) \neq x$, para todo $x \in X$, e $f: X \rightarrow Y$ uma função contínua. Um ponto $x \in X$ é dito uma **Borsuk-Ulam coincidência** se $f(x) = f(\tau(x))$.*

A partir da Definição 0.2, podemos definir uma propriedade que classifica as classes de homotopia de certas aplicações perante a características relacionadas a Borsuk-Ulam coincidências. Esta

definição pode ser encontrada com mais detalhamento através da Definição [1.4] contida na Seção [1.1] do Capítulo [1].

Definição 0.3. *Dada a tripla (X, τ, Y) , com X e Y espaços topológicos e $\tau: X \rightarrow X$ involução livre, dizemos que $\kappa \in [X, Y]$ tem a propriedade de Borsuk-Ulam, se para cada $f \in \kappa$, existe $x \in X$ tal que $f(\tau(x)) = f(x)$.*

Alguns trabalhos recentes tiveram bastante relevância na direção de classificar as funções para superfícies com a propriedade de Borsuk-Ulam como [15, 16]. Não obstante, no intuito de classificar $[T^2, T^2]$, $[K^2, K^2]$ e $[T^2, K^2]$, para T^2 o toro e K^2 a garrafa de Klein, em relação a propriedade de Borsuk-Ulam, os trabalhos [17, 18, 19] conseguem tal objetivo e são artigos amplamente citados nesta tese.

Um dos critérios utilizados em vários desses artigos envolvem grupos fundamentais do espaço X e do espaço de órbitas de X em relação a involução τ , além dos grupos de tranças totais e puras relacionadas ao espaço Y . Dessa maneira, é factível comentarmos sobre tranças em uma determinada superfície.

Os grupos de tranças de Artin foram introduzidos e ganharam o sobrenome de seu criador, Emil Artin, retratado na Figura 4, em 1925, de forma geométrica e intuitiva. Após o período de guerra, ele foi obrigado a migrar para os Estados Unidos e lá, teve várias contribuições, vistas em [1, 2, 3], como verificar que, de fato, formam um grupo e conseguir uma apresentação para eles.

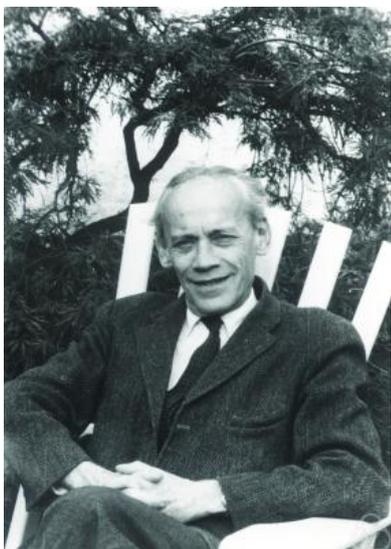


Figura 4: Emil Artin.



Figura 5: Ralph Hartzler Fox.



Figura 6: Lee Neuwirth.

A partir da mudança da superfície em que os pontos da trança são baseados, também obtemos grupos, apresentações e caracterizações geométricas. Além disso, em 1962, os matemáticos Ralph Hartzler Fox e Lee Neuwirth, vistos respectivamente nas Figuras [5] e [6], definiram os grupos de tranças em uma superfície através da utilização de grupos fundamentais de certos espaços de configuração e

retratando que os grupos de tranças de Artin seriam um caso particular quando a superfície fosse o disco \mathbb{D}^2 .

Por motivos de ter papel importante em diversas áreas da matemática, como topologia, geometria, álgebra, sistemas dinâmicos e física, há alguns artigos recentes que utilizam as tranças como ferramenta para diversas aplicações, como por exemplo na teoria de homotopia, invariantes topológicos, nós e enlaçamentos, assim como na criptografia, biologia, grupos cristalográficos e nas teorias que envolvem ponto fixo, coincidências e Teoremas do tipo Borsuk-Ulam, como faremos nesta tese. Deixamos a seguir algumas outras referências [4, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 20, 22, 28, 36].

Retomando a investigação sobre classes de homotopias de aplicações $f: X \rightarrow Y$, trabalhos mais atuais como [10, 11], utilizando uma vertente de ideias relacionadas ao número de Nielsen de pontos fixos e coincidências, definiram classes de Nielsen-Borsuk-Ulam e seu respectivo número, $\text{NBU}(f, \tau)$, para determinadas variedades com propriedades específicas. Essa linha de estudo é caracterizada como Teoria de Nielsen-Borsuk-Ulam, a qual relaciona a teoria de pontos fixos e coincidências com a teoria de Borsuk-Ulam, assim como feito na Definição 0.3.

Uma das perguntas que surgem em decorrência do estudo perante ao número de Nielsen-Borsuk-Ulam é sobre a sua minimalidade. O trabalho [33] traz uma perspectiva sobre essa pergunta, desenvolvendo uma técnica, respondendo tal questionamento para quando as superfícies são orientáveis e explicitando para quando as superfícies são os toros T^n de dimensão baixa, isto é, $n \leq 3$. Entretanto, a questão sobre a sua minimalidade do número de Nielsen-Borsuk-Ulam para quando as superfícies fossem não orientáveis continuava em aberto. Dessa maneira, a proposta dessa tese é construir uma técnica que englobe também superfícies não orientáveis e, ao utilizarmos os trabalhos [16, 17, 18, 19], conseguimos relacionar as teorias acima mencionadas com a teoria de tranças, dando possibilidade deste estudo mais geral. Ainda aliado com [17], conseguimos obter de maneira mais detalhada o problema de autoaplicações da garrafa de Klein K^2 .

O Capítulo 1 deste texto engloba um compilado de definições e resultados preliminares que darão suporte para resolver a questão referente a minimalidade supracitada. Dessa forma, na Seção 1.1 é exposta definições referentes a teoria de ponto fixo, coincidências e coincidências do tipo Borsuk-Ulam, como as de índice, número de Nielsen, conjunto de Borsuk-Ulam coincidências, número de Nielsen-Borsuk-Ulam e as propriedades que as relacionam. Já na Seção 1.2, é tratado um pouco mais sobre a teoria de tranças. Destacamos a definição geométrica de uma trança sob uma superfície M , salientando a apresentação deste grupo para quando a superfície for o disco, visto que seus geradores estão presentes nas apresentações de grupos de tranças de outras superfícies. Por fim, enunciaremos a conexão que relaciona o grupo de tranças com o grupo fundamental do espaço de configuração.

O Capítulo 2 traz uma construção semelhante a feita em [16]. Na Seção 2.1, denotaremos as aplicações e diagramas que culminam na Seção 2.2 no Teorema 2.7, que tem por inspiração o enunciado e demonstração do [27, Teorema 1.1] e tem sua prévia vista na sequência.

Teorema 0.4. *Sejam a tripla (M, τ, N) como descrita no Lema 2.6, uma aplicação $f: M \rightarrow N$, $k \geq 0$*

e $i_1, i_2, \dots, i_k \in \mathbb{Z}$. Então, as seguintes condições são equivalentes.

i) Existe uma aplicação $g \simeq f$ tal que o conjunto de Borsuk-Ulam coincidências seja $\text{BUCoin}(g; \tau) = \{\{x_1, \tau(x_1)\}; \dots; \{x_k, \tau(x_k)\}\}$ com $\text{ind}(g, g \circ \tau; x_j) = i_j$ (ou índice local $\pm i_j$ no caso não orientável);

ii) Existem um homomorfismo $\phi: \pi_1\left(\frac{M-\tilde{D}}{\tau}\right) \rightarrow \pi_1\left(\frac{(N \times N)-\Delta}{\sigma}\right)$ e elementos $v_j \in P_2(N)$, com $j \in \{1, \dots, k\}$, tais que o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{Z}_2 & \\
 \theta_\tau \nearrow & & \nwarrow \pi \\
 \pi_1\left(\frac{M-\tilde{D}}{\tau}\right) & \overset{\phi}{\dashrightarrow} & \pi_1\left(\frac{(N \times N)-\Delta}{\sigma}\right) \\
 (i_1)_\# \downarrow & & \downarrow (i_2)_\# \\
 \pi_1\left(\frac{M}{\tau}\right) & \xrightarrow{\bar{f}_\#} & \pi_1\left(\frac{N \times N}{\sigma}\right)
 \end{array} \tag{1}$$

é comutativo e satisfaz

$$\phi([\partial D]) = v_1 B^{i_1} v_1^{-1} \dots v_k B^{i_k} v_k^{-1}. \tag{2}$$

O Teorema 2.7 conecta a existência e a quantidade de Borsuk-Ulam coincidências, além de seus respectivos índices com uma forma distinta de equação no grupo de tranças $B_2(N)$ e o Diagrama 2.9 que envolve o grupo fundamental do espaço M retirando \tilde{D} e quocientando por uma involução, $\pi_1\left(\frac{M-\tilde{D}}{\tau}\right)$, o grupo fundamental do espaço M , quocientado pela mesma involução, $\pi_1\left(\frac{M}{\tau}\right)$, o grupo de tranças de N , $B_2(N)$, visto como $\pi_1\left(\frac{(N \times N)-\Delta}{\sigma}\right)$, o primeiro grupo de homologia de N , $H_1(N)$, visto por $\pi_1\left(\frac{N \times N}{\sigma}\right)$, \mathbb{Z}_2 e seus respectivos homomorfismos. Ressaltamos que o resultado abrange as superfícies não orientáveis, assim como abraça o problema para outras superfícies orientáveis.

O Capítulo 3 tem o intuito aplicar o Teorema 2.7 para quando as superfícies em questão sejam a garrafa de Klein, representando um exemplo de uma superfície não orientável. Com isso, obtemos um estudo completo dessa superfície neste capítulo visando nosso objetivo. Na Seção 3.1, vemos a estrutura do grupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e como se associa com o grupo fundamental de K^2 . Na Seção 3.2, descrevemos $[K^2, K^2]$, separando-a em duas famílias de homomorfismos: as que se levantam para o toro T^2 , que chamamos de Tipo B, e as demais, as quais chamaremos de Tipo A. A Seção 3.3 estuda um pouco sobre as involuções da garrafa de Klein, estuda o espaço de órbitas desse espaço pela involução τ , observa que $\pi_1\left(\frac{M-\tilde{D}}{\tau}\right) = F(c_1, c_2)$, um grupo livre de dois geradores, e acaba concluindo com um resultado que descreve os homomorfismos que partem de $F(c_1, c_2)$ e chegam em \mathbb{Z}_2 e em $\pi_1\left(\frac{K^2}{\tau}\right)$. Já a Seção 3.4 visa o estudo dos grupos de tranças totais e puras da garrafa de Klein, contribuindo também na descrição dos homomorfismos que envolvem estes grupos. A seguir, a verificação feita

na Seção 3.5 é relacionada ao primeiro grupo de homologia da garrafa de Klein e descrição do homomorfismo entre o $B_2(K^2)$ e $H_1(K^2)$ direcionando o estudo que culmina na Seção 3.6, a qual traz consigo uma condição sobre o homomorfismo entre $\pi_1\left(\frac{K^2}{\tau}\right)$ e $H_1(K^2)$ completando o diagrama de forma que o mesmo comute e permitindo com que possamos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 0.5. *Seja $\tau: K^2 \rightarrow K^2$ uma involução livre. Dada uma aplicação $f: K^2 \rightarrow K^2$, temos*

- i) *Existe $g \simeq f$ tal que g não têm coincidências Borsuk-Ulam se, e somente se, f não se levanta para o toro T^2 .*
- ii) *Se f se levanta para o toro T^2 , então existe $g \simeq f$ tal que g tem apenas um par de coincidências do tipo Borsuk-Ulam. Além disso, cada ponto de coincidência desse par tem índice local igual a ± 1 .*

O teorema imediatamente acima traz consigo a resposta para mensuração da quantidade de coincidências do tipo Borsuk-Ulam de autoaplicações da garrafa de Klein. Ele pode ser visto com mais detalhes através do Teorema 3.13, sendo, naturalmente, uma aplicação do Teorema 2.7, concluindo nossos resultados e, assim, a tese.

Ressaltamos que as fotos dos matemáticos, que na introdução foram utilizadas, estão disponíveis em páginas virtuais de livre pesquisa, bem como em diversos sítios eletrônicos. Entretanto, as demais figuras foram confeccionadas pelo autor desta tese ou referenciadas na sua descrição.

Ademais, há pretensão de publicarmos o artigo que está relacionado a este texto e que possui pré-print ([21]).

Preliminares

Este capítulo tem o intuito de organizar as preliminares que estruturam a tese incluindo notações, definições e alguns resultados. A primeira seção destaca considerações sobre a teoria de Nielsen-Borsuk-Ulam, introduzindo-a mediante conceitos mais básicos. Na seção posterior, mencionaremos aspectos introdutórios da teoria de tranças em superfícies de forma geométrica e de forma algébrica. Consideraremos em todo o texto que $I = [0, 1]$.

1.1 Aspectos básicos da teoria de Nielsen-Borsuk-Ulam

A ideia desta primeira seção é tratar alguns aspectos básicos voltados ao estudo de pontos fixos, de coincidências e coincidências do tipo Borsuk-Ulam, como por exemplo, as definições de involuções livres e índices de uma coincidência. Tais conceitos guiam para definição do conjunto de Borsuk-Ulam coincidências, estudados nos trabalhos [10, 11] e sobre o qual comentaremos algumas propriedades como, por exemplo e com destaque, a minimalidade.

Dado X um espaço topológico, diremos que $f: X \rightarrow X$ é uma **autoaplicação** se a mesma for contínua. Também diremos que uma autoaplicação admite **ponto fixo** se existe $x \in X$ tal que $f(x) = x$. Denotaremos por $\text{Fix}(f)$ o **conjunto de pontos fixos de f** .

Trabalharemos também com um tipo de aplicação específica chamada involução. Uma **involução** é uma autoaplicação $\tau: X \rightarrow X$ que satisfaz que $\tau^2(x) = \tau(\tau(x)) = x$, para todo $x \in X$. Ainda diremos que ela é uma **involução livre** se $\text{Fix}(\tau) = \emptyset$. Dizemos também que duas involuções livres $\tau_1, \tau_2: X \rightarrow X$ são **equivalentes** se existe um homeomorfismo $\eta: X \rightarrow X$ tal que $\eta \circ \tau_1 = \tau_2 \circ \eta$. De maneira equivalente, duas involuções livres são equivalentes se o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\tau_1} & X \\
 \eta \downarrow & & \downarrow \eta \\
 X & \xrightarrow{\tau_2} & X.
 \end{array} \tag{1.1}$$

Além dos conceitos supracitados, no decorrer do trabalho, será necessário utilizar o conceito de homotopia, o qual é apresentado a seguir. Sejam $f, g: X \rightarrow Y$ aplicações com X e Y espaços topológicos. Dizemos que f é **homotópica a** g , que denotaremos por $f \simeq g$, se existe uma aplicação $H: X \times I \rightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$. Chamamos a função H de **homotopia**. Note que “ser homotópica” é uma relação de equivalência no conjunto das funções contínuas de X e Y . O quociente das funções contínuas por essa relação é denotado por $[X, Y]$. Para $f, g: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ aplicações pontuadas, isto é, $f(x_0) = y_0 = g(x_0)$, dizemos que f é **homotópica a g relativamente ao ponto** x_0 , que denotaremos por $f \simeq g \text{ rel } x_0$, se existe $H: X \times I \rightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$, e $H(x_0, t) = y_0$, para todo $t \in I$. Chamamos a função H de **homotopia pontuada**. Também observamos que “ser homotópica relativamente ao ponto x_0 ” é uma relação de equivalência no conjunto das funções contínuas pontuadas de (X, x_0) e (Y, y_0) . O quociente das funções contínuas pontuadas por essa relação é denotado por $[X, x_0; Y, y_0]$.

Caminhando lado a lado com o que foi abordado, para X e Y espaços topológicos e dadas $f, g: X \rightarrow Y$ aplicações, dizemos que $x \in X$ é um ponto de coincidência, ou simplesmente **coincidência**, se $f(x) = g(x)$. Denotaremos por $\text{Coin}(f, g)$ o **conjunto de coincidências de f e g** . Observemos que, quando tomamos em particular $Y = X$ e g como a aplicação identidade $\text{id}: X \rightarrow X$, retornamos ao caso dos pontos fixos, tornando-o um caso particular das coincidências.

Dados dois pontos $x_0, x_1 \in \text{Coin}(f, g)$, dizemos que eles são **equivalentes em relação a coincidências**, se existe um caminho γ em X tal que $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$ e $f \circ \gamma \simeq g \circ \gamma$ com pontos extremos fixados, isto é, uma homotopia pontuada relativa aos pontos $0, 1 \in I$, referência para os pontos inicial e final dos caminhos $f \circ \gamma$ e $g \circ \gamma$. Tal relação é uma relação de equivalência que divide o conjunto $\text{Coin}(f, g)$ por classes C chamadas de **classes de coincidências (usuais)**.

Inspirado por [25, 37, 38], para X e Y espaços que são realizações geométricas de poliedros conexos n -dimensionais, com Y homogêneo - isto é, todos os simplexes que são maximais possuem mesma dimensão - e para f e g aplicações simpliciais entre esses espaços, em [38] e reproduzido em [9, Teorema 3.2.2] é provado que existem f' e g' homotópicas e arbitrariamente próximas de f e g , respectivamente, tais que $\text{Coin}(f', g')$ é finito e seus pontos de coincidência estão localizados na realização geométrica de um simplexo maximal distinto. Sem perda da generalidade, podemos supor que o conjunto de coincidências $\text{Coin}(f, g)$ é finito e formado pelo que chamamos de coincidências isoladas.

Sejam X e Y n -variedades orientáveis. Dadas as aplicações $f, g: X \rightarrow Y$ e x_0 um ponto de coincidência de f e g , dizemos que $x_0 \in X$ é uma **coincidência isolada**, se existem cartas $\xi_X: D^n \rightarrow X$ e $\xi_Y: D^n \rightarrow Y$ tais que $x_0 \in \xi_X(\text{int}(D^n))$ e as aplicações $\xi_f = \xi_Y^{-1} \circ f \circ \xi_X$ e $\xi_g = \xi_Y^{-1} \circ g \circ \xi_X$ têm somente $\xi_X^{-1}(x_0)$ como coincidência. Esse conceito pode ser acompanhado utilizando o Diagrama

1.2, o qual é comutativo.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & Y \\
 \xi_X \uparrow & & \uparrow \xi_Y \\
 D^n & \begin{array}{c} \xrightarrow{\xi_f} \\ \xrightarrow{\xi_g} \end{array} & D^n.
 \end{array} \tag{1.2}$$

Como ξ_f e ξ_g não possuem coincidências em $\partial D^n = S^{n-1}$, então a aplicação $h: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ dada por $h(x) = \frac{\xi_f(x) - \xi_g(x)}{\|\xi_f(x) - \xi_g(x)\|}$ está bem definida.

Uma definição que utilizaremos com constância nesse material é a definição de índice de uma coincidência isolada. Para isso, relembremos a definição de grau de uma aplicação.

Para uma aplicação $f: S^n \rightarrow S^n$, podemos considerar o homomorfismo induzido $f_*: H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$ no n -ésimo grupo de homologia. Considerando que $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$, obtemos que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $f_*(x) = mx$ para todo $x \in \mathbb{Z}$. Definimos m como sendo o **grau da aplicação** f , o qual denotamos por $\text{deg}(f)$.

Definição 1.1. Definimos o **índice de uma coincidência isolada** x_0 , ou simplesmente **índice**, o qual denotaremos por $\text{ind}(f, g, x_0)$, como

$$\text{ind}(f, g, x_0) = \text{deg}(h),$$

onde $\text{deg}(h)$ representa o grau da aplicação $h: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ definida por $h(x) = \frac{\xi_f(x) - \xi_g(x)}{\|\xi_f(x) - \xi_g(x)\|}$, como feito anteriormente.

Então, dadas duas n -variedades orientáveis, estabelecemos uma noção de índice de uma coincidência atrelando a uma propriedade local. Para tal feito, é necessária uma escolha das cartas ξ_X e ξ_Y as quais têm orientações locais que podem ser tomadas a partir da orientação global e, por causa disso, fixamos este índice por um número $i \in \mathbb{Z}$. Entretanto, podemos estender a noção de índice para n -variedades não orientáveis novamente fazendo escolhas para as orientações das cartas, que dessa vez não poderá ser fixada globalmente e denotamos esses índices locais por $\pm i$ com $i \in \mathbb{N}$.

Concentrando nosso foco para n -variedades orientáveis, dada uma classe de coincidências C , podemos calcular o que chamamos de índice da classe de coincidências que é dado por

$$\text{ind}(f, g, C) = \sum_{x_0 \in C} \text{ind}(f, g, x_0),$$

com x_0 coincidência isolada em C . Com isso, conseguimos trazer a definição de essencialidade de uma classe.

Definição 1.2. Uma classe de coincidências C é chamada de **essencial** se $\text{ind}(f, g, C) \neq 0$. Caso contrário, ela é dita **não essencial**.

Com a Definição [1.2], temos o que precisamos para definir o famoso número de Nielsen.

Definição 1.3. *O número de Nielsen do par (f, g) é o número de classes essenciais. Em outras palavras e denotando por $N(f, g)$,*

$$N(f, g) = \#\{C : \text{ind}(f, g, C) \neq 0\},$$

onde C representa as classes de coincidências.

Inspirados no Teorema [0.1], como visto na Introdução, conseguimos relacionar esse estudo com o contexto de aplicações homotópicas, o qual pode ser visto através da seguinte definição.

Definição 1.4. *Dada a tripla (X, τ, Y) , com X e Y espaços topológicos e $\tau: X \rightarrow X$ involução livre, dizemos que $\kappa \in [X, Y]$ tem a propriedade de Borsuk-Ulam, se para cada $f \in \kappa$, existe $x \in X$ tal que $f(\tau(x)) = f(x)$.*

Percebemos que satisfazer o Teorema [0.1] é um caso particular de possuir a propriedade de Borsuk-Ulam quando tomamos $X = \mathbb{S}^n$, $Y = \mathbb{R}^n$ e para a involução $\tau: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ definida por $\tau(x) = -x$, chamada de involução antipodal que é livre de pontos fixos.

Em [17, Proposição 8] foi estudado se duas involuções equivalentes mantinham essa propriedade e foi visto que a resposta é afirmativa, conforme enunciada na seguinte proposição.

Proposição 1.5. *Sejam X e Y espaços topológicos, $\tau_1, \tau_2: X \rightarrow X$ involuções livres equivalentes e $\eta: X \rightarrow X$ o homeomorfismo de equivalência que satisfaz o Diagrama [1.1]. Então, a aplicação $\mathcal{H}: [X, Y] \rightarrow [X, Y]$ definida por $\mathcal{H}([f]) = [f \circ \eta^{-1}]$ é uma bijeção. Mais ainda, se $\kappa \in [X, Y]$ é uma classe de homotopia, então κ satisfaz a propriedade de Borsuk-Ulam com respeito a τ_1 se, e somente se, $\mathcal{H}(\kappa)$ satisfaz a propriedade de Borsuk-Ulam com respeito a τ_2 .*

Nessa mesma direção, o trabalho feito em [17] conseguiu explorar e classificar as classes de $[X, X]$ que têm a propriedade de Borsuk-Ulam, quando X é o toro ou a garrafa de Klein, assim como explicado na Introdução e que será melhor desenvolvido na Seção [3.2] do Capítulo [3].

Ainda motivado pelo Teorema [0.1] e em paralelo ao estudo sobre possuir a propriedade de Borsuk-Ulam, o estudo para coincidências de pares de funções do tipo $(f, f \circ \tau)$ começou a ser explorado pelos professores Fabiana Santos Cotrim e Daniel Ventrúscolo, unificando e dando início ao que chamamos de teoria de Nielsen-Borsuk-Ulam. Portanto, os próximos resultados são baseados nos trabalhos [10, 11] e em suas ramificações, como por exemplo em [33].

Inspirado em [9, Teorema 3.2.2], novamente no contexto de complexos simpliciais e para f uma aplicação entre esses espaços, com $g = f \circ \tau$, [10, Teorema 2.1] mostra que existe f' homotópica a f tal que o conjunto de coincidências do par $(f', f' \circ \tau)$, $\text{Coin}(f', f' \circ \tau)$, é finito. Nessa direção e sem perda da generalidade, podemos supor que $\text{Coin}(f, f \circ \tau)$ é finito e assim podemos enunciar a definição de conjunto de Borsuk-Ulam coincidências.

Definição 1.6. *Seja a tripla (X, τ, Y) , com X e Y complexos simpliciais n -dimensionais, e $\tau: X \rightarrow X$ involução livre. Para a aplicação $f: X \rightarrow Y$, com conjunto de pontos de coincidência dado por $\text{Coin}(f, f \circ \tau) = \{x_1, \tau(x_1), \dots, x_m, \tau(x_m)\}$, definimos o **conjunto de Borsuk-Ulam coincidências para o par** (f, τ) como sendo o conjunto de pares*

$$\text{BUCoin}(f; \tau) = \{\{x_1, \tau(x_1)\}; \dots; \{x_m, \tau(x_m)\}\}.$$

*Além disso, dizemos que dois pares $\{x_i, \tau(x_i)\}$ e $\{x_j, \tau(x_j)\}$ estão na mesma **classe de coincidências do tipo Borsuk-Ulam**, denotada por \tilde{C} , se existe um caminho $\tilde{\gamma}$ de um ponto de $\{x_i, \tau(x_i)\}$ até um ponto de $\{x_j, \tau(x_j)\}$ de modo que $f \circ \tilde{\gamma}$ é homotópica a $f \circ \tau \circ \tilde{\gamma}$ com pontos extremos fixados.*

Para x_0 e x_1 coincidências usuais entre f e $f \circ \tau$, notamos que, se existe γ caminho em X tal que $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$ e $f \circ \gamma \simeq f \circ \tau \circ \gamma$ com extremos fixados, podemos dizer que x_0 e x_1 estão numa mesma classe de coincidências usual C . Observe também que $\tau(x_0)$ e $\tau(x_1)$ são coincidências usuais entre f e $f \circ \tau$ que estão em uma mesma classe C' , bastando tomar o caminho $\tau \circ \gamma$. Por outro lado, podemos perceber que $\{x_0, \tau(x_0)\}$ e $\{x_1, \tau(x_1)\}$ são coincidências do tipo Borsuk-Ulam e, ainda que, se existir $\tilde{\gamma}$ caminho em X tal que $\tilde{\gamma}(0) = x_0$ ou $\tilde{\gamma}(0) = \tau(x_0)$, $\tilde{\gamma}(1) = x_1$ ou $\tilde{\gamma}(1) = \tau(x_1)$ e $f \circ \tilde{\gamma} \simeq f \circ \tau \circ \tilde{\gamma}$ com extremos fixados, conseguimos dizer que $\{x_0, \tau(x_0)\}$ e $\{x_1, \tau(x_1)\}$ pertencem a mesma classe \tilde{C} de coincidências Borsuk-Ulam. Com isso, é possível relacionar elementos das classes de coincidências usuais com elementos das classes de coincidências Borsuk-Ulam.

Dada $\tilde{C} \subset \text{BUCoin}(f; \tau)$ uma classe de coincidências do tipo Borsuk-Ulam para $\text{BUCoin}(f; \tau)$, como definido anteriormente, então existe $C \subset \text{Coin}(f; f \circ \tau)$ uma classe de coincidências usual de $\text{Coin}(f; f \circ \tau)$ com a seguinte propriedade: se $x \in C$, então $\{x, \tau(x)\} \in \tilde{C}$. Chamaremos essa condição de **propriedade entre classes de coincidências usuais e classes de coincidências do tipo Borsuk-Ulam** e, quando ela acontecer, cometeremos o abuso de linguagem de dizer que $C \subset \tilde{C}$. Diremos que uma classe de coincidências do tipo Borsuk-Ulam \tilde{C} é composta por apenas uma classe de coincidências usual C_1 se não existir outra classe de coincidências usual C_2 tal que esta seja a imagem C_1 pela involução τ , ou seja, para um ponto $x \in C_1$, então $\tau(x) \in C_1$. À vista disto, cometeremos o abuso de linguagem de dizer que $\tilde{C} = C_1$. Caso contrário, o abuso de linguagem feito será através de $\tilde{C} = C_1 \cup C_2$, isto é, dada uma classe C_1 , as imagens pela τ das suas coincidências são separadas para uma classe C_2 .

Posto isso, nos próximos tópicos podemos classificar as classes \tilde{C} de coincidências Borsuk-Ulam em simples e duplas e verificar que tal classificação decorre da existência da classe C_2 vista no parágrafo anterior.

Definição 1.7. *Uma classe de coincidências Borsuk-Ulam \tilde{C} é dita uma classe de coincidências Borsuk-Ulam simples se para cada par $\{x, \tau(x)\} \in \tilde{C}$ existe um caminho $\bar{\gamma}$ de x para $\tau(x)$ tal que $f \circ \bar{\gamma} \simeq f \circ \tau \circ \bar{\gamma}$ com pontos extremos fixados.*

Proposição 1.8. *Se C é uma classe de coincidências usual para o par $(f, f \circ \tau)$, então existe uma classe de coincidências Borsuk-Ulam \tilde{C} do par (f, τ) tal que $C \subset \tilde{C}$.*

Proposição 1.9. *Uma classe de coincidências Borsuk-Ulam \tilde{C} é simples se, e somente se, é composta de apenas uma classe de coincidências usual do par $(f, f \circ \tau)$. Se \tilde{C} não for simples, chamada de classe de coincidências Borsuk-Ulam dupla, então possuirá as seguintes propriedades:*

i) $\tilde{C} = \{\{x_1, \tau(x_1)\}, \dots, \{x_m, \tau(x_m)\}\}$.

ii) *A menos de uma renomeação por troca de elementos x_i por elementos $\tau(x_i)$, temos que $C_1 = \{x_1, \dots, x_m\}$ e $C_2 = \{\tau(x_1), \dots, \tau(x_m)\}$.*

iii) $\tilde{C} = C_1 \cup C_2$, onde C_1 e C_2 são classes de coincidências usuais do par $(f, f \circ \tau)$.

O próximo passo é definir uma ferramenta similar ao índice para a teoria de Nielsen-Borsuk-Ulam, antes, porém, podemos observar uma relação importante entre o índice de coincidência entre os pontos x e $\tau(x)$, que pode ser descrita por

$$\text{ind}(f, f \circ \tau; x) = \begin{cases} (-1)^n \text{ind}(f, f \circ \tau; \tau(x)), & \text{se } \tau \text{ preserva orientação,} \\ (-1)^{n-1} \text{ind}(f, f \circ \tau; \tau(x)), & \text{se } \tau \text{ reverte orientação,} \end{cases} \quad (1.3)$$

em que n é a dimensão de X e Y . Essa relação contribuiu para a definição do que chamamos de pseudo-índice.

Definição 1.10. *Sejam X e Y n -variedades compactas, conexas, orientáveis, triangularizáveis e sem bordo, uma involução livre $\tau: X \rightarrow X$ e uma aplicação $f: X \rightarrow Y$ tal que $\text{BUCoin}(f; \tau)$ é finito. Se $\tilde{C} = \{\{x_1, \tau(x_1)\}, \dots, \{x_k, \tau(x_k)\}\}$ é uma classe de coincidências Borsuk-Ulam, definimos o pseudo-índice de \tilde{C} , o qual denotamos por $|\text{ind}|(f, \tau; \tilde{C})$, por*

$$|\text{ind}|(f, \tau; \tilde{C}) = \begin{cases} \sum_{x_j \in \tilde{C}} \text{ind}(f, f \circ \tau; x_j) \bmod 2, & \text{se } \begin{cases} \tau \text{ reverte orientação} \\ \text{e } n \text{ é par} \end{cases} \\ \frac{\text{ind}(f, f \circ \tau; \tilde{C})}{2}, & \text{se } \begin{cases} \tau \text{ preserva orientação} \\ \text{e } n \text{ é ímpar,} \end{cases} \end{cases}$$

se \tilde{C} for simples ou, definimos por

$$|\text{ind}|(f, \tau; \tilde{C}) = \begin{cases} |\text{ind}(f, f \circ \tau; C_1)|, & \text{se } \begin{cases} \tau \text{ reverte orientação} \\ e n \text{ é par} \\ \text{ou} \\ \tau \text{ preserva orientação} \\ e n \text{ é ímpar,} \end{cases} \\ \text{ind}(f, f \circ \tau; C_1), & \text{se } \begin{cases} \tau \text{ preserva orientação} \\ e n \text{ é par} \\ \text{ou} \\ \tau \text{ reverte orientação} \\ e n \text{ é ímpar,} \end{cases} \end{cases}$$

se \tilde{C} for dupla e $\tilde{C} = C_1 \cup C_2$, para C_1 e C_2 duas classes de coincidências usuais do par $(f, f \circ \tau)$ distintas.

Destacaremos agora uma propriedade em relação ao pseudo-índice que pode ser vista em [11, Lema 3.1].

Proposição 1.11. *Sejam X e Y n -variedades compactas, conexas e triangularizáveis, $\tau: X \rightarrow X$ uma involução livre e uma aplicação $f: X \rightarrow Y$. Para $\{x_0, \tau(x_0)\} \in \text{BUCoin}(f; \tau)$ tal que x_0 é uma coincidência isolada com $\text{ind}(f, f \circ \tau; x_0) = 0$, então existe $g \simeq f$ tal que $\text{BUCoin}(g; \tau) = \text{BUCoin}(f; \tau) - \{\{x_0, \tau(x_0)\}\}$.*

A Proposição [1.11] nos diz que, para pares de coincidências que possuem pseudo-índice igual a zero, o que acontece por conta da hipótese do índice, podemos desfazer tais coincidências Borsuk-Ulam através de homotopias. Mais ainda, os autores ainda provam em [10, Teorema 3.5, Corolário 3.8 e Corolário 3.9] que o pseudo-índice é um invariante homotópico, no sentido que as classes coincidências do tipo Borsuk-Ulam, a menos de homotopia, produzem mesmo pseudo-índice.

Assim como fizemos para coincidência, torna-se natural definirmos o que seria uma classe essencial de Borsuk-Ulam e, por consequência, o que chamamos de número de Nielsen-Borsuk-Ulam.

Definição 1.12. *Seja \tilde{C} uma classe de coincidências Borsuk-Ulam. Dizemos que \tilde{C} é uma classe essencial de Borsuk-Ulam se $|\text{ind}|(f, \tau; \tilde{C}) \neq 0$.*

Definição 1.13. *O número de Nielsen-Borsuk-Ulam do par (f, τ) é o número de classes essenciais em $\text{BUCoin}(f; \tau)$, o qual é denotado por $\text{NBU}(f, \tau)$. Em outras palavras,*

$$\text{NBU}(f, \tau) = \#\{\tilde{C} : |\text{ind}|(f, g, \tilde{C}) \neq 0\},$$

onde \tilde{C} representa as classes de coincidências Borsuk-Ulam.

Por fim, destacamos o resultado visto em [11, Proposição 2.7] que retrata que o número de Nielsen-Borsuk-Ulam satisfaz uma propriedade quando tivermos aplicações homotópicas.

Proposição 1.14. *Se g é homotópica a f , então g possui pelo menos $\text{NBU}(f, \tau)$ pares de coincidência do tipo Borsuk-Ulam.*

Em suma, o número Nielsen-Borsuk-Ulam contorna a questão de que certas coincidências do tipo Borsuk-Ulam conseguem ser desfeitas por meio de homotopia e ainda enumera as coincidências Borsuk-Ulam que não desaparecem. Disso, é factível nos questionarmos sobre a minimalidade desse conjunto e, como mencionado na Introdução, é um dos propósitos desta tese.

1.2 Aspectos básicos de tranças

A técnica que desenvolveremos no escopo deste trabalho envolve os grupos de tranças de uma superfície, portanto esta seção tem o caráter introdutório de forma a nortear o leitor sobre tais conceitos. Ainda traremos a relação entre o grupo de tranças de cada superfície com o grupo fundamental do espaço de configuração não ordenado dessa mesma superfície. Esta teoria está feita de forma mais detalhada em [28, 36].

Sejam M uma superfície conexa e n um inteiro positivo. Considere o conjunto de pontos de M , $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$, dois a dois distintos. Defina $A_i = P_i \times \{1\}$ em $M \times \{1\}$ e $B_i = P_i \times \{0\}$ em $M \times \{0\}$, para $i = 1, 2, \dots, n$.

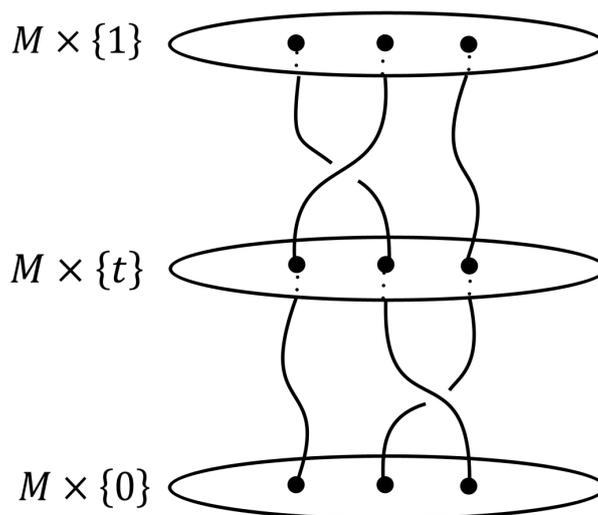


Figura 1.1: Trança sobre M .

Definição 1.15. Uma n -trança sobre M baseada em $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ é uma n -úpla $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ de caminhos $\beta_i: I \rightarrow M \times I$, definidos por $\beta_i(t) = (b_i(t), 1 - t)$, com $b_i: I \rightarrow M$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, que satisfazem as seguintes condições:

- i) Para todo $1 \leq i \leq n$, temos $\beta_i(0) = A_i$ e $\beta_i(1) = B_j$, para algum $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.
- ii) Para qualquer parâmetro $t \in I$, existem exatamente n pontos de interseção entre o conjunto $\{\beta_1(t), \beta_2(t), \dots, \beta_n(t)\}$ e cada superfície de nível $M \times \{t\}$.

Cada caminho β_i é chamado de **corda de β** .

Vimos na Figura 1.1 o comportamento de uma trança. Poderemos, por momentos, identificar a trança β como a imagem de suas cordas. De forma que o conceito de tranças fique mais claro, iremos trazer alguns exemplos e contraexemplos.

Exemplo 1.16. Para M um disco topológico (homeomorfo a um quadrado), temos exemplos de tranças com 2 cordas e 4 cordas na Figura 1.2 em (a) e (b), respectivamente. Já a configuração descrita na Figura 1.2 (c) não é uma trança, visto que não satisfaz a Definição 1.15.

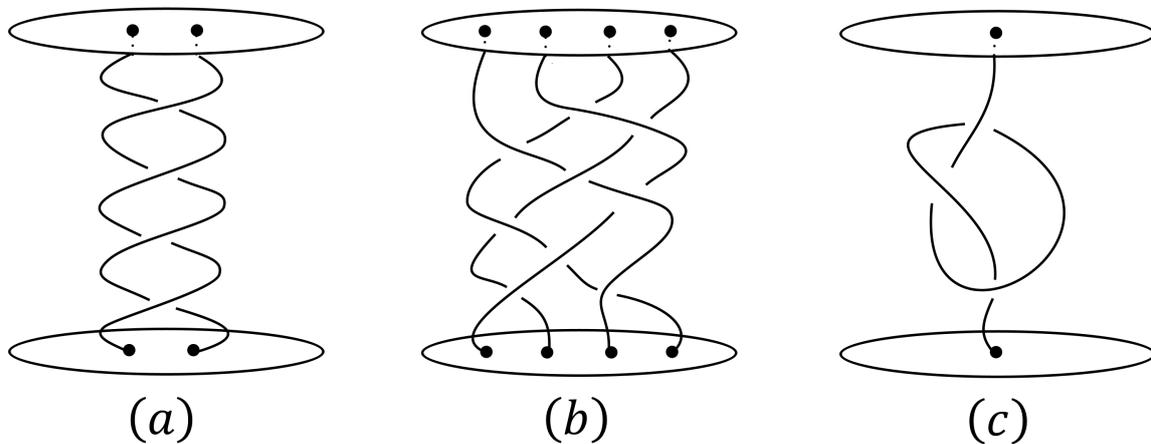


Figura 1.2: Exemplos e contraexemplo de tranças.

Denotaremos por $\mathcal{B}_n(M)$ o conjunto de todas as n -tranças de M . Nesse conjunto, podemos definir uma operação binária, através da concatenação, que do viés geométrico é bastante natural. Este produto é feito da seguinte forma: dadas duas n -tranças β e β' , o resultado da operação $\beta\beta'$, que chamamos de **produto de tranças**, junta os pontos da parte inferior da trança β com os pontos da parte superior da trança β' , visualizado a seguir através da Figura 1.3.

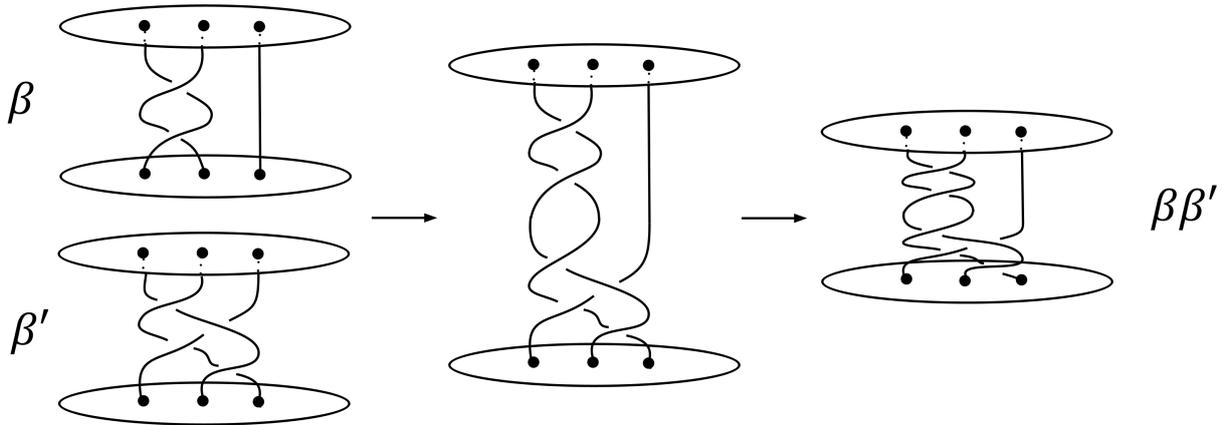


Figura 1.3: Produto de tranças β e β' .

Iremos agora descrever quando duas tranças são equivalentes. Tal processo perpassa pela seguinte definição.

Definição 1.17. *Sejam $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\beta' = (\beta'_1, \dots, \beta'_n)$ duas n -tranças em M . Elas são ditas **homotópicas** ou **equivalentes** se existem uma família contínua de caminhos $\beta_1^s, \dots, \beta_n^s: I \rightarrow M \times I$, $s \in I$ tais que $\beta_i^0 = \beta_i$, $\beta_i^1 = \beta'_i$ e $(\beta_1^s, \beta_2^s, \dots, \beta_n^s)$ é uma trança para cada $s \in I$. Denotamos por $\beta \sim \beta'$ quando houver essa equivalência.*

De maneira intuitiva, duas tranças são consideradas equivalentes se conseguimos deformar uma na outra através de uma homotopia. É bem conhecido na literatura que a Definição 1.17 é equivalente a outras definições como, por exemplo, a de **movimentos elementares** vista em [36, Capítulo 1, Definição 3.1] e as de isotopias ambiente e forte que podem ser vistas em [36, Capítulo 6, Seção 1]. Na mesma seção que são definidas as isotopias, podemos encontrar as equivalências entre esses conceitos.

As relações acima citadas, em particular a de homotopia entre n -tranças, são de fato relações de equivalência em $\mathcal{B}_n(M)$. Denotamos seu quociente por $B_n(M) = \mathcal{B}_n(M)/\sim$. Mais ainda, o produto de tranças induz uma operação bem definida em $B_n(M)$, cuja importância é dada pelo seguinte resultado, provado em [36, Capítulo 2, Teorema 1.5].

Teorema 1.18. *O conjunto $B_n(M) = \{\bar{\beta} : \beta \in \mathcal{B}_n(M)\}$ munido da operação induzida pelo produto de tranças é um grupo, chamado de **grupo de n -tranças de M** , também chamado de grupo de tranças com n cordas.*

Quando não houver risco de confusão, não faremos distinção entre a trança β e sua classe de equivalência $\bar{\beta}$. Vemos na Figura 1.4 mais alguns exemplos de tranças em outras superfícies.

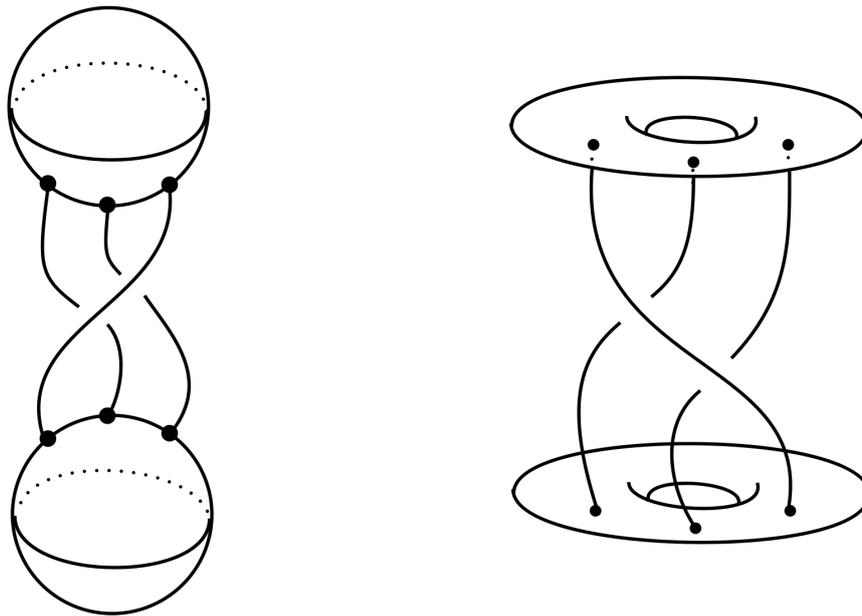


Figura 1.4: Exemplos de tranças na esfera e no toro.

Sejam β uma n -trança e $j: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ a bijeção tal que a corda β_i de β conecta A_i a $B_{j(i)}$, para $i = 1, \dots, n$. Definamos $\pi: B_n(M) \rightarrow S_n$ por

$$\pi(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j(1) & j(2) & \dots & j(n) \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Temos que π é um epimorfismo, chamado de **permutação de tranças** ou permutação associada à trança.

Definição 1.19. Diremos que uma trança em B_n é uma **trança pura** se sua permutação associada é a trivial. Dessa forma, denotaremos por $P_n(M) = \text{Ker}(\pi)$ o subgrupo das n -tranças puras.

A Definição 1.19 pode ser vista através de seguinte sequência exata curta

$$1 \longrightarrow P_n(M) \xrightarrow{\iota} B_n(M) \xrightarrow{\pi} S_n \longrightarrow 1, \tag{1.5}$$

onde ι é a inclusão natural do grupo das n -tranças puras no grupo de n -tranças.

Uma maneira que visa simplificar o jeito de ver uma trança é através do processo de projeção que tem como ideia permitir a visualização da mesma como um objeto bidimensional facilitando assim o desenho, contudo, há uma perda de informação que é saber qual corda passa pela frente ou por trás de uma outra. Sendo assim, existe um método prático que ajuda nessa percepção que quando a corda passa pela frente, manteremos a linha cheia, e, caso contrário, faremos um tracejado na linha no local da interseção, o que pode ser visto através da Figuras 1.5 e 1.6.

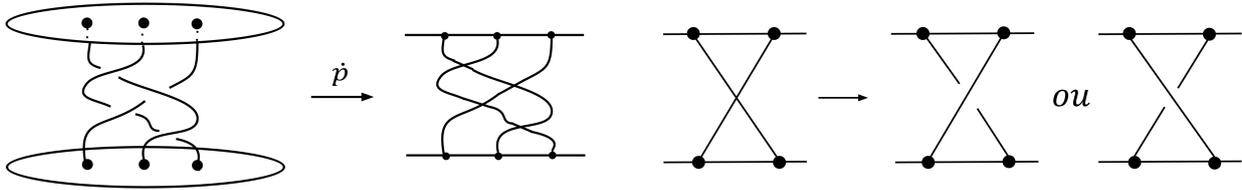


Figura 1.5: Projeção de tranças.

Figura 1.6: Cruzamentos.

Para \hat{p} tal projeção dada, notamos que esse jeito de observar a curva acarreta algumas condições que podem ser encontradas em [36, Capítulo 1, Seção 4].

Exemplo 1.20. Veremos pela Figura 1.7 como podemos observar a trança da Figura 1.5 através da projeção, sem haver perda de informação dos cruzamentos.

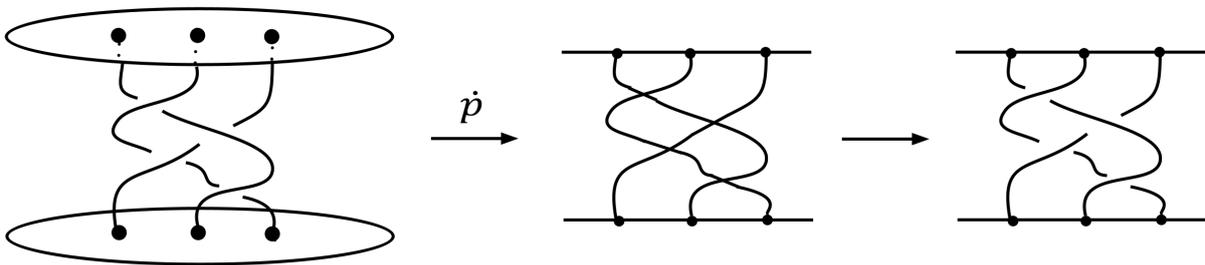


Figura 1.7: Trança após a projeção e identificação.

No intuito de fornecer uma descrição algébrica para o grupo de tranças e visto que é um processo específico, exporemos aqui quando a superfície M for um disco \mathbb{D}^2 . Iremos elucidar algumas propriedades que irão compor a apresentação desse grupo, mostrando como podemos decompor qualquer n -trança, explicitando o conjunto dos geradores, chamados de geradores de Artin, e o conjunto das relações. Para isso, analisemos uma trança e façamos sua projeção. É fácil particionar essa projeção por planos de nível tal que entre dois planos consecutivos a trança possua apenas um cruzamento entre duas cordas e as demais desçam verticalmente. Ilustramos isto na Figura 1.8.

Definamos σ_i e σ_i^{-1} como as tranças retratadas nas Figuras 1.9 e 1.10. Temos então o seguinte resultado.

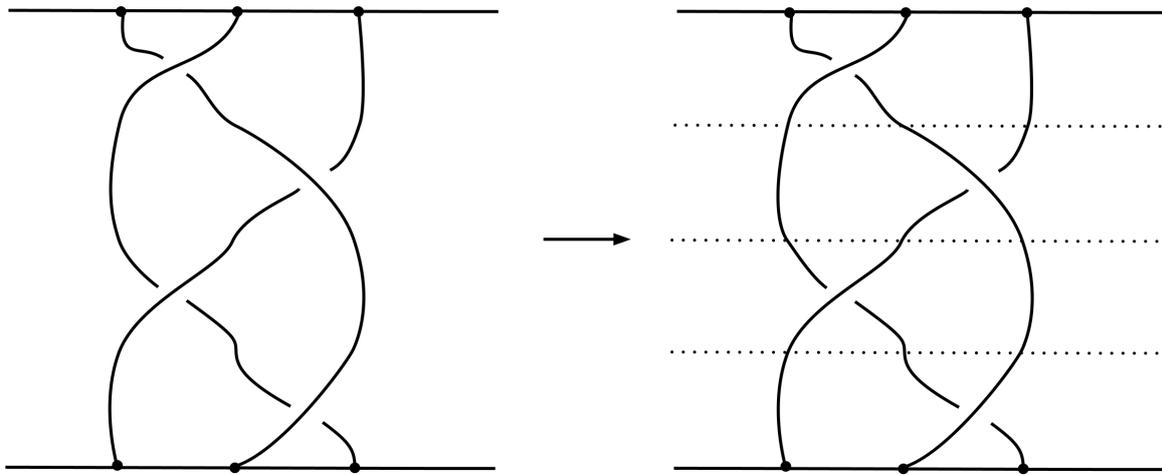


Figura 1.8: Divisão de uma trança em planos de nível.

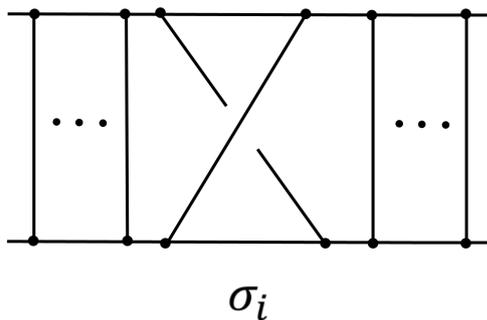


Figura 1.9: Trança σ_i em $B_n(\mathbb{D})$.

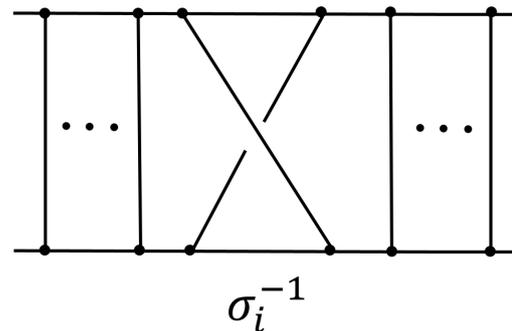


Figura 1.10: Trança σ_i^{-1} em $B_n(\mathbb{D})$.

Proposição 1.21. *Qualquer n -trança pode ser escrita por produtos de elementos do conjunto $\{\sigma_i^{\pm 1}\}$, para $1 \leq i \leq n - 1$, ou seja, $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ geram $B_n(\mathbb{D}^2)$.*

Verifiquemos agora o conjunto de relações e logo após enunciaremos o Teorema 1.22 com a apresentação completa do grupo de tranças do disco. Tal prova pode ser encontrada de forma completa em [30, Teorema 1.24].

A primeira propriedade é que os geradores comutam se estiverem distantes o suficiente. Mais precisamente $\sigma_i \sigma_k = \sigma_k \sigma_i$ para $|i - k| \geq 2$. Vejamos a Figura 1.11.

Para provar essa propriedade, basta deslocarmos os cruzamentos de forma independente. Já a segunda propriedade será provada para um caso específico através de homotopia entre tranças, contudo pode ser generalizada para todo $1 \leq i \leq n - 1$, visto que podemos acrescentar cordas que descem triviais à direita e à esquerda. Teremos que $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$, para $1 \leq i \leq n - 2$. Ilustraremos

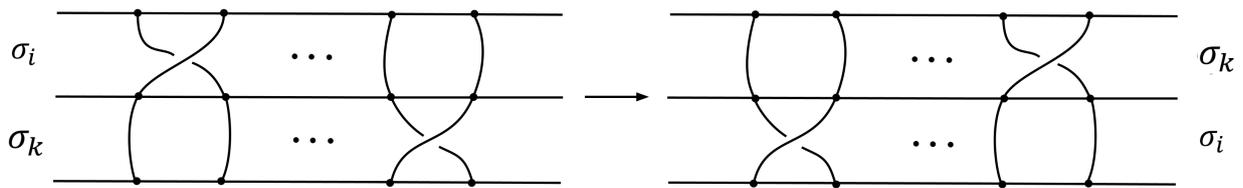


Figura 1.11: $\sigma_i \sigma_k = \sigma_k \sigma_i$.

a validade para o caso $i = 1$ numa 3-trança dada na Figura [1.12](#).

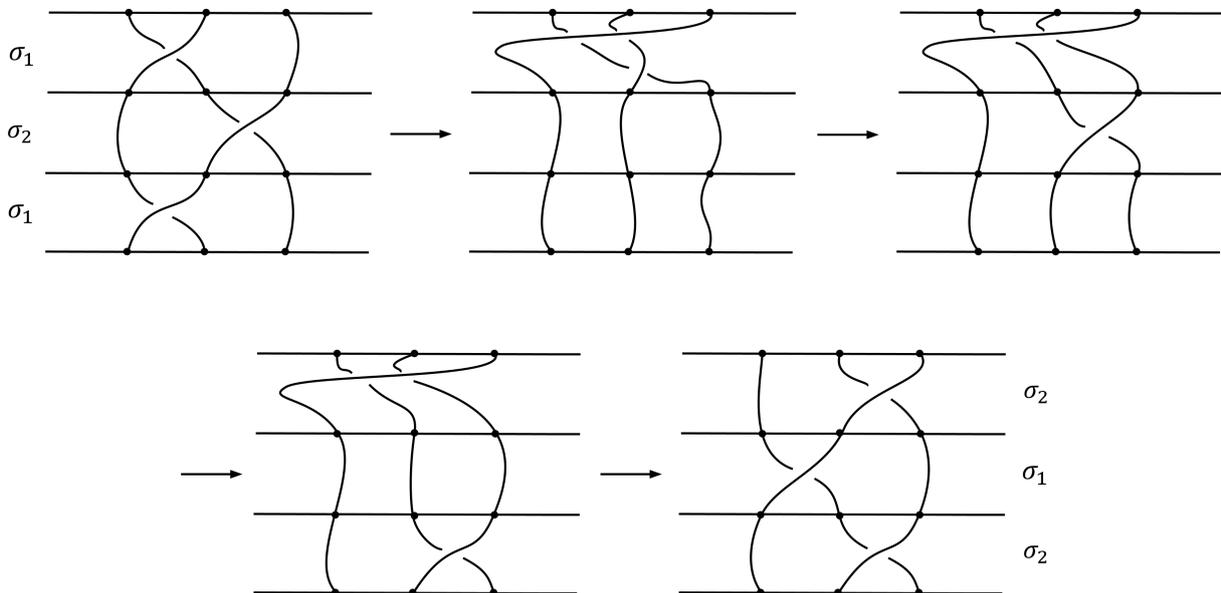


Figura 1.12: $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$.

Teorema 1.22. *O grupo de tranças $B_n(\mathbb{D}^2)$ é descrito algebricamente através da seguinte apresentação*

$$B_n(\mathbb{D}^2) = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \text{ para } 1 \leq i \leq n-2; \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \text{ para } |i-j| \geq 2 \end{array} \right\rangle. \quad (1.6)$$

Quando for necessário explicitar uma apresentação de algum grupo de tranças específico, trataremos de maneira resumida e referenciando o texto em que determinada demonstração pode ser encontrada. Todavia, a escolha de expor geradores e relações quando a superfície é o disco \mathbb{D}^2 foi feita porque existe um homomorfismo injetor entre $B_n(\mathbb{D}^2)$ e $B_n(M)$, para M uma superfície compacta diferente de \mathbb{S}^2 e $\mathbb{R}P^2$, estando estes geradores presentes nas apresentações dos grupos de tranças de M . Tal resultado pode ser conferido em [\[6, Teorema 1.6, Teorema 1.7\]](#).

Destacamos um elemento que será importante no nosso trabalho. Para $n = 2$, seja σ_1 o gerador de Artin clássico. Definimos

$$B = \sigma_1^2. \quad (1.7)$$

Existe uma outra maneira de definir grupo de tranças. Para tanto, introduziremos o que chamamos de espaço de configuração.

Definição 1.23. Para X um espaço topológico qualquer, o conjunto

$$F_n(X) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X \times X \cdots X; x_i \neq x_j, \text{ se } i \neq j\},$$

munido da topologia induzida de X^n , é chamado de **espaço de configuração de n pontos ordenados de X** . Além disso, notemos que o grupo das permutações com n elementos, S_n , age livremente, permutando as coordenadas, em $F_n(X)$ e o quociente $D_n(X) = F_n(X)/S_n$ é chamado de **espaço de configuração de n pontos não ordenados de X** .

Para M superfície compacta, conexa e sem bordo, podemos enunciar um teorema bastante conhecido e que pode ser encontrado em [13, 23].

Teorema 1.24. Seja $\bar{x}^0 = \overline{(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)}$ um elemento de $D_n(M)$. Então, o grupo fundamental $\pi_1(D_n(M), \bar{x}^0)$ e $B_n(M)$ são isomorfos, sendo $B_n(M)$ o grupo de n -tranças de M baseado nos pontos $\{x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\}$. Ademais, $\pi_1(F_n(M), x^0)$ e $P_n(M)$ são isomorfos, sendo $P_n(M)$ o grupo de n -tranças puras de M baseado nos pontos $\{x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\}$.

Ver os grupos de tranças de M através do grupo fundamental dos espaços de configuração não ordenado de M é uma das maneiras as quais este texto utilizará na sua extensão. Contudo, na literatura, ainda existem outras formas de definir o grupo de tranças de uma superfície como, por exemplo, através da definição de mapping class group. Por motivos de fuga do escopo do texto, deixamos como referência os textos [6, 12, 34] para maiores detalhes.

Generalidades

Esse capítulo tem o objetivo de expor algumas generalidades que culminam em uma técnica algébrica a qual envolve a teoria de Nielsen-Borsuk-Ulam, como exposto na Seção 1.1 do Capítulo 1, e que utiliza a teoria de tranças, vista na Seção 1.2 também do capítulo anterior, como uma ferramenta. Para tal feito, será necessária a recuperação de alguns conceitos vistos no Capítulo 1 e de construções de alguns diagramas que nos guiarão nesse processo.

2.1 Pré-requisitos

Nessa seção, perpassaremos por algumas construções advindas da teoria de Nielsen-Borsuk-Ulam, além de alguns outros comentários algébricos e topológicos. Começaremos com alguns resultados de conhecimento geral que podem ser encontrados em [24, 35, 40], como por exemplo o fato de aplicações contínuas induzirem homomorfismos no grupo fundamental.

Sejam X e Y espaços topológicos com pontos base $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$. Para uma aplicação $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ tal que $f(x_0) = y_0$, podemos construir $f_\#: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$, definida por $f_\#(\bar{\alpha}) = \overline{f(\alpha)}$, para $\bar{\alpha} \in \pi_1(X, x_0)$ e onde α é um laço com ponto base x_0 . Chamamos $f_\#$ de **homomorfismo induzido da f nos grupos fundamentais**. Sabemos que todo elemento $\rho \in \bar{\alpha}$ é um laço com ponto base x_0 , isto é, $\rho: I \rightarrow X$ caminho tal que $\rho(0) = \rho(1) = x_0$ e homotópico a α . Dessa forma, se tomarmos duas aplicações $f, g: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ homotópicas, então os homomorfismos $f_\#, g_\#: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ induzidos respectivamente de f e g são iguais. É natural também pensarmos se e sob quais condições um dado homomorfismo poderia advir de uma aplicação, funcionando como recíproca dessa construção acima. Para tanto, enunciaremos a próxima definição.

Definição 2.1. *Um espaço topológico X conexo por caminhos cujo grupo fundamental é isomorfo a um dado grupo G e que tem um recobrimento universal contrátil é chamado um **espaço Eilenberg-MacLane para $n = 1$** , ou simplesmente, $K(G, 1)$, onde o 1 é referente ao π_1 .*

A Definição 2.1 pode ser vista de forma equivalente com $\pi_n(X) = 0$, para todo $n \geq 2$. Dessa

forma, adicionando essa hipótese, conseguimos uma espécie de recíproca questionada e resumida no teorema a seguir.

Teorema 2.2. *Sejam X um espaço CW-complexo conexo e Y um espaço de Eilenberg-MacLane com $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$. Então todo homomorfismo $\phi: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ é induzido por uma única aplicação $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, isto é $f_\# = \phi$, sendo que f é única a menos de homotopia com x_0 fixado.*

Essa condição nos dá suporte na construção de certos passos da nossa técnica algébrica e, para consulta do leitor para demonstração do Teorema [2.2], deixamos como referência [24, Proposição 1B.9].

Uma definição que vale a pena ser ressaltada aqui é quando dois homomorfismos são conjugados.

Definição 2.3. *Sejam $\phi_1, \phi_2: G \rightarrow H$ homomorfismos entre grupos. Dizemos que ϕ_1 e ϕ_2 são conjugados se existe $v \in H$ tal que*

$$\phi_1(u) = v\phi_2(u)v^{-1}, \text{ para todo } u \in G.$$

Se ϕ_1 e ϕ_2 são conjugados, então escrevemos $\phi_1 \sim \phi_2$.

Note que a conjugação é uma relação de equivalência. De fato, para a reflexibilidade basta tomarmos $v = e_H$, com e_H o elemento neutro do grupo H . Para a simetria, existe $v' \in H$ tal que $\phi_1(u) = v'\phi_2(u)v'^{-1}$, para todo $u \in G$. Basta tomarmos $v = v'^{-1}$ e obteremos que $\phi_2(u) = v\phi_1(u)v^{-1}$. Por fim, para a transitividade, existem $v', v'' \in H$ tais que $\phi_1(u) = v'\phi_2(u)v'^{-1}$ e $\phi_2(u) = v''\phi_3(u)v''^{-1}$. Por H ser grupo, $v = v'v''$ também é elemento, então, obtemos

$$\begin{aligned} \phi_1(u) &= v'\phi_2(u)v'^{-1} \\ &= v'v''\phi_3(u)v''^{-1}v'^{-1} \\ &= (v'v'')\phi_3(u)(v'v'')^{-1} \\ &= v\phi_3(u)v^{-1}. \end{aligned}$$

Portanto, em particular, a conjugação é um relação de equivalência em $\text{Hom}(\pi_1(X, x_0), \pi_1(Y, y_0))$, que denotaremos seu quociente por $\frac{\text{Hom}(\pi_1(X, x_0), \pi_1(Y, y_0))}{\sim}$.

É de conhecimento geral e pode ser vista por exemplo em [40, Capítulo 5] que existe uma relação direta entre o quociente $[X, x_0; Y, y_0]$ com $\text{Hom}(\pi_1(X, x_0), \pi_1(Y, y_0))$. Em [17, Teorema 4] foi enunciado um resultado que relaciona o quociente $[X, Y]$ com $\frac{\text{Hom}(\pi_1(X, x_0), \pi_1(Y, y_0))}{\sim}$, o qual pode ser visto na sequência.

Teorema 2.4. *Sejam (X, x_0) e (Y, y_0) CW-complexos com Y um espaço Eilenberg-MacLane. Seja $\Gamma_{X, Y}: [X, x_0; Y, y_0] \rightarrow \text{Hom}(\pi_1(X, x_0), \pi_1(Y, y_0))$ a aplicação definida por $\Gamma_{X, Y}(\alpha) = \alpha_\#$ para toda classe de homotopia pontuada $\alpha \in [X, x_0; Y, y_0]$, onde $\alpha_\# = f_\#$ e $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ é um representante de classe de α . Seja também $\Lambda_{X, Y}: [X, x_0; Y, y_0] \rightarrow [X, Y]$ a aplicação definida por $\Lambda_{X, Y}(\alpha) =$*

$\alpha_{\mathcal{F}}$, onde $\alpha_{\mathcal{F}}$ é a classe de homotopia atrelada a classe de homotopia pontuada α a partir da escolha de um representante de classe $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ e observando a classe de homotopia da aplicação $f: X \rightarrow Y$. Então, existe uma aplicação $\Delta_{X,Y}: [X, Y] \rightarrow \frac{\text{Hom}(\pi_1(X, x_0), \pi_1(Y, y_0))}{\sim}$ tal que o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} [X, x_0; Y, y_0] & \xrightarrow{\Gamma_{X,Y}} & \text{Hom}(\pi_1(X, x_0), \pi_1(Y, y_0)) \\ \Lambda_{X,Y} \downarrow & & \downarrow \Upsilon_{X,Y} \\ [X, Y] & \xrightarrow{\Delta_{X,Y}} & \frac{\text{Hom}(\pi_1(X, x_0), \pi_1(Y, y_0))}{\sim} \end{array} \quad (2.1)$$

é comutativo, onde $\Upsilon_{X,Y}: \text{Hom}(\pi_1(X, x_0), \pi_1(Y, y_0)) \rightarrow \frac{\text{Hom}(\pi_1(X, x_0), \pi_1(Y, y_0))}{\sim}$ é a projeção canônica associada a relação \sim vista na Definição 2.3. Ademais, $\Gamma_{X,Y}$ e $\Delta_{X,Y}$ são bijeções e $\Lambda_{X,Y}$ e $\Upsilon_{X,Y}$ são sobrejeções.

O fato de $\Gamma_{X,Y}$ ser uma bijeção pode ser encontrado em [40, Capítulo 5, Teorema 4.3]. Já a sobrejeção de $\Lambda_{X,Y}$ segue de [40, Capítulo 3, Seção 1, 1.13] e a existência e bijeção de $\Delta_{X,Y}$ são consequências de [40, Capítulo 5, Corolário 4.4]. Dada uma classe de homotopia $\beta \in [X, Y]$, denotaremos a classe do homomorfismo $\Delta_{X,Y}(\beta)$ por $\beta_{\#}$.

O Teorema 2.4 nos garante classificar uma determinada propriedade para funções homotópicas através de uma caracterização dos homomorfismos induzidos nos grupos fundamentais a menos de conjugação. Essa mudança de perspectiva pode ser vista aplicada a garrafa de Klein no Capítulo 3.

Localizando para o nosso problema principal, sejam M e N duas superfícies compactas, conexas e sem bordo. Fixada uma involução livre $\tau: M \rightarrow M$ e dada uma aplicação $f: M \rightarrow N$, pela Definição 1.6, podemos atribuir o que chamamos de conjunto de coincidências Borsuk-Ulam e nos questionar sobre características desse conjunto.

Pelo que foi feito no final da Seção 1.1, podemos verificar que existe g homotópica a f tal que $\text{BUCoin}(g; \tau) = \{\{x_1, \tau(x_1)\}; \dots; \{x_m, \tau(x_m)\}\}$, ou seja, existe e é finito. Observe que o conjunto $\text{BUCoin}(g; \tau)$ pode ser vazio, contudo, para o estudo sobre minimalidades, esse caso não é tão interessante, visto que ele já será o próprio conjunto mínimo. Mais ainda, existe também um disco topológico D em M de forma que $\{x_1, \dots, x_m\} \subset \text{int}(D)$ e tal que $\{\tau(x_1), \dots, \tau(x_m)\} \subset \text{int}(\tau(D))$, com $D \cap \tau(D) = \emptyset$. Notemos que se $x_0 \in \partial D$, então $g(x_0) \neq g \circ \tau(x_0)$.

Faremos a partir de agora uma construção semelhante a feita em [16]. Chamamos $\hat{f}: M \rightarrow N \times N$ a aplicação definida por $\hat{f}(x) = (f(x), f(\tau(x)))$. Note que $N \times N$ admite uma involução σ dada por $\sigma(x, y) = (y, x)$. De fato, temos

$$\begin{aligned} \sigma^2(x, y) &= \sigma(\sigma(x, y)) \\ &= \sigma(y, x) \\ &= (x, y). \end{aligned}$$

Observe também que \hat{f} é \mathbb{Z}_2 -equivariante em relação às ações de τ e σ em M e $N \times N$, respectivamente. Com efeito,

$$\begin{aligned}\hat{f}(\tau(x)) &= (f(\tau(x)), f(\tau(\tau(x)))) \\ &= (f(\tau(x)), f(x)) \\ &= \sigma((f(x), f(\tau(x)))) \\ &= \sigma(\hat{f}(x)).\end{aligned}$$

Denotamos, respectivamente, por p_τ e p_σ as projeções naturais $M \rightarrow \frac{M}{\tau}$ e $(N \times N) \rightarrow \frac{(N \times N)}{\sigma}$, onde apenas o primeiro é um recobrimento duplo. Ademais, \hat{f} induz uma aplicação $\bar{f}: \frac{M}{\tau} \rightarrow \frac{(N \times N)}{\sigma}$, definida por $\bar{f}(\bar{x}) = p_\sigma(f(x), f(\tau(x)))$ para algum $x \in p_\tau^{-1}(\bar{x})$, o qual pode ser visto no seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\hat{f}} & N \times N \\ p_\tau \downarrow & & \downarrow p_\sigma \\ \frac{M}{\tau} & \xrightarrow{\bar{f}} & \frac{N \times N}{\sigma} \end{array} \quad (2.2)$$

Observe que se $\{x, \tau(x)\} \in \text{BUCoin}(f; \tau)$, então temos que $\hat{f}(x) = (f(x), f(\tau(x))) \in \Delta$, onde $\Delta = \{(a, a) \in N \times N : a \in N\}$ é chamada de **diagonal do conjunto** $N \times N$.

Considerando $\tilde{D} = \text{int}(D) \cup \text{int}(\tau(D))$ e ι, ι_1 e ι_2 as respectivas inclusões naturais, podemos ampliar o Diagrama 2.2 da seguinte forma.

$$\begin{array}{ccc} \frac{M - \tilde{D}}{\tau} & \xrightarrow{\bar{f}|_{\frac{M - \tilde{D}}{\tau}}} & \frac{(N \times N) - \Delta}{\sigma} \\ \uparrow p_\tau|_{M - \tilde{D}} & & \uparrow p_\sigma|_{(N \times N) - \Delta} \\ M - \tilde{D} & \xrightarrow{\hat{f}|_{M - \tilde{D}}} & (N \times N) - \Delta \\ \downarrow \iota & & \downarrow \iota \\ M & \xrightarrow{\hat{f}} & N \times N \\ p_\tau \downarrow & & \downarrow p_\sigma \\ \frac{M}{\tau} & \xrightarrow{\bar{f}} & \frac{N \times N}{\sigma} \end{array} \quad (2.3)$$

ι_1 ι_2

Induzindo as respectivas aplicações para os homomorfismos nos grupos fundamentais com ponto base $x_0 \in \partial D$ e com $y_0 = (f(x_0), f(\tau(x_0)))$, obtemos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{\pi_1\left(\frac{M-\tilde{D}}{\tau}, p_\tau(x_0)\right)}{(p_\tau|_{M-\tilde{D}})_\#(\pi_1(M-\tilde{D}, p_\tau(x_0)))} \cong \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{Id} & \mathbb{Z}_2 \cong \frac{\pi_1\left(\frac{(N \times N)-\Delta}{\sigma}, p_\sigma(y_0)\right)}{(p_\sigma|_{(N \times N)-\Delta})_\#(\pi_1((N \times N)-\Delta, y_0))} \\
 \uparrow \theta_\tau & & \uparrow \pi \\
 \pi_1\left(\frac{M-\tilde{D}}{\tau}, p_\tau(x_0)\right) & \xrightarrow{\left(\bar{f}|_{\frac{M-\tilde{D}}{\tau}}\right)_\#} & \pi_1\left(\frac{(N \times N)-\Delta}{\sigma}, p_\sigma(y_0)\right) \\
 \uparrow (p_\tau|_{M-\tilde{D}})_\# & & \uparrow (p_\sigma|_{(N \times N)-\Delta})_\# \\
 \pi_1(M-\tilde{D}, x_0) & \xrightarrow{(\hat{f}|_{M-\tilde{D}})_\#} & \pi_1((N \times N)-\Delta, y_0) \\
 \downarrow \iota_\# & & \downarrow \iota_\# \\
 \pi_1(M, x_0) & \xrightarrow{\hat{f}_\#} & \pi_1(N \times N, y_0) \\
 \downarrow (p_\tau)_\# & & \downarrow (p_\sigma)_\# \\
 \pi_1\left(\frac{M}{\tau}, p_\tau(x_0)\right) & \xrightarrow{\bar{f}_\#} & \pi_1\left(\frac{(N \times N)}{\sigma}, p_\sigma(y_0)\right),
 \end{array}
 \tag{2.4}$$

sendo θ_τ e π as respectivas projeções naturais nos grupos quocientes.

Ao recordarmos o Teorema 1.24, temos que $\pi_1\left(\frac{(N \times N)-\Delta}{\sigma}, p_\sigma(y_0)\right) \cong B_2(N)$ e $\pi_1((N \times N)-\Delta, y_0) \cong P_2(N)$. Mais ainda, em comparação com a sequência vista em (1.5), vemos que π é o homomorfismo permutação.

Em consonância com o Diagrama 2.4 e de forma a obter o melhor entendimento do mesmo, podemos explicitar a seguinte informação sobre certos grupos por meio do próximo teorema:

Teorema 2.5. *Os grupos $\pi_1\left(\frac{(N \times N)}{\sigma}, p_\sigma(y_0)\right)$ e $H_1(N)$ são isomorfos.*

A demonstração do Teorema 2.5 pode ser encontrada em [39, Página 527, Teorema]. Contudo, voltaremos a enunciar esse teorema de forma específica para quando os espaços em questão forem a garrafa de Klein através da Proposição 3.10.

2.2 Técnica algébrica: conexão entre teorias

Tendo a construção feita na Seção 2.1, recordando alguns conceitos e adicionando algumas hipóteses, partiremos nesta seção para expor a técnica algébrica que nos permite responder ao questionamento em relação a quantidade de coincidências do tipo Borsuk-Ulam. Para tanto, iremos enunciar um lema que nos ajudará na demonstração da referida técnica. Contudo, lembremos as hipóteses que precisaremos. Sejam M e N superfícies compactas, conexas e sem bordo, onde N é um espaço Eilenberg-MacLane, em particular $\pi_2(N) = 0$, $\tau: M \rightarrow M$ uma involução livre e $f: M \rightarrow N$ uma aplicação. Em decorrência de [10, Teorema 2.1], existe f' homotópica a aplicação f tal que possua o conjunto $\text{BUCoin}(f'; \tau)$ finito. Por abuso de linguagem, consideraremos que $\text{BUCoin}(f; \tau)$ seja dado por $\text{BUCoin}(f; \tau) = \{\{x_1, \tau(x_1)\}; \dots; \{x_k, \tau(x_k)\}\}$. Ainda por [10, Teorema 2.1], podemos escolher

um disco $D \subset M$ com $x_0 \in \partial D$ e $\{x_1, \dots, x_k\} \subset \text{int}(D)$ tal que $D \cap \tau(D) = \emptyset$. Observe que, essencialmente, as hipóteses da construção do Diagrama 2.4 se mantêm, sendo apenas acrescido a informação que o Y é um espaço de Eilenberg-MacLane. Lembrando que $\tilde{D} = \text{int}(D) \cup \text{int}(\tau(D))$ e omitindo os pontos bases daqui em diante, temos o seguinte lema:

Lema 2.6. *Sejam a tripla (M, τ, N) , onde M e N são superfícies compactas, conexas, sem bordo, com $\pi_2(N) = 0$ e $\tau: M \rightarrow M$ uma involução livre. Sejam ainda uma aplicação $f: M \rightarrow N$, $k \geq 0$, $i_1, i_2, \dots, i_k \in \mathbb{Z}$ e $v_1, v_2, \dots, v_k \in P_2(N)$. Então, para $B = \sigma_1^2$, as seguintes condições são equivalentes.*

i) *Existe um homomorfismo $\phi: \pi_1\left(\frac{M-\tilde{D}}{\tau}\right) \rightarrow \pi_1\left(\frac{(N \times N)-\Delta}{\sigma}\right)$ tal que o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{Z}_2 & \\ \theta_\tau \nearrow & & \nwarrow \pi \\ \pi_1\left(\frac{M-\tilde{D}}{\tau}\right) & \xrightarrow{\phi} & \pi_1\left(\frac{(N \times N)-\Delta}{\sigma}\right) \end{array} \quad (2.5)$$

é comutativo e satisfaz

$$\phi([\partial D]) = v_1 B^{i_1} v_1^{-1} \dots v_k B^{i_k} v_k^{-1}. \quad (2.6)$$

ii) *Existe um homomorfismo $\psi: \pi_1\left(\frac{M-\bigcup_{j=1}^k (\text{int}(D_j) \cup \text{int}(\tau(D_j)))}{\tau}\right) \rightarrow \pi_1\left(\frac{(N \times N)-\Delta}{\sigma}\right)$, com discos $D_j \subset \text{int}(D)$ que contém x_j , tal que o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{Z}_2 & \\ \theta_\tau \nearrow & & \nwarrow \pi \\ \pi_1\left(\frac{M-\bigcup_{j=1}^k (\text{int}(D_j) \cup \text{int}(\tau(D_j)))}{\tau}\right) & \xrightarrow{\psi} & \pi_1\left(\frac{(N \times N)-\Delta}{\sigma}\right) \end{array} \quad (2.7)$$

é comutativo e satisfaz

$$\psi\left(\left[\prod_{j=1}^k a_j \partial D_j a_j^{-1}\right]\right) = v_1 B^{i_1} v_1^{-1} \dots v_k B^{i_k} v_k^{-1}, \quad (2.8)$$

onde a_j é um caminho que liga x_0 com um dado ponto $x'_j \in \partial D_j$.

Demonstração. Para essa demonstração, basta observarmos que ∂D e $\prod_{j=1}^k a_j \partial D_j a_j^{-1}$ são homotópicos, para tanto, observemos a Figura 2.1 a seguir.

□

Portanto, agora temos todos os requisitos para poder enunciar e demonstrar a técnica algébrica que possibilitará resolver algumas questões de minimalidade como exposto na Introdução.

Teorema 2.7. *Sejam a tripla (M, τ, N) como descrita no Lema 2.6, uma aplicação $f: M \rightarrow N$, $k \geq 0$ e $i_1, i_2, \dots, i_k \in \mathbb{Z}$. Então, as seguintes condições são equivalentes.*

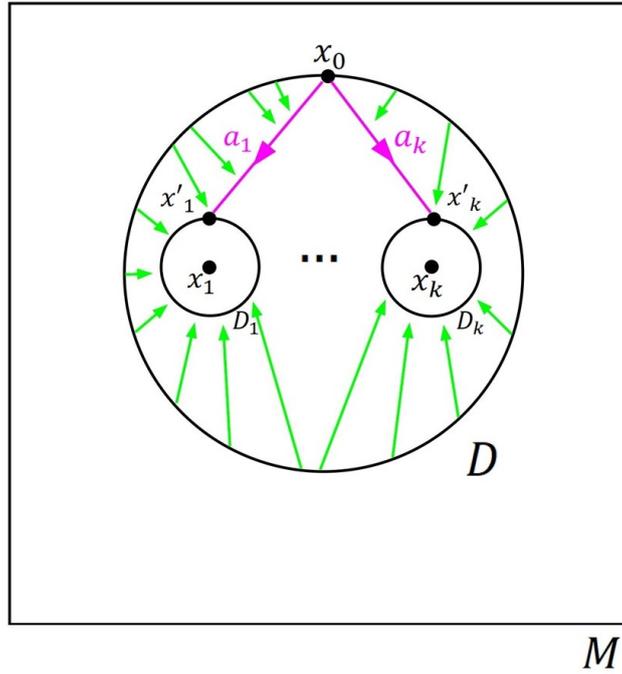


Figura 2.1: Os a_j e a ideia geométrica intuitiva da homotopia entre ∂D e $\prod_{j=1}^k a_j \partial D_j a_j^{-1}$.

i) Existe uma aplicação $g \simeq f$ tal que o conjunto de Borsuk-Ulam coincidências seja $\text{BUCoin}(g; \tau) = \{\{x_1, \tau(x_1)\}; \dots; \{x_k, \tau(x_k)\}\}$ com $\text{ind}(g, g \circ \tau; x_j) = i_j$ (ou índice local $\pm i_j$ no caso não orientável);

ii) Existem um homomorfismo $\phi: \pi_1\left(\frac{M-\bar{D}}{\tau}\right) \rightarrow \pi_1\left(\frac{(N \times N)-\Delta}{\sigma}\right)$ e elementos $v_j \in P_2(N)$, com $j \in \{1, \dots, k\}$, tais que o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{Z}_2 & \\
 \theta_\tau \nearrow & & \nwarrow \pi \\
 \pi_1\left(\frac{M-\bar{D}}{\tau}\right) & \overset{\phi}{\dashrightarrow} & \pi_1\left(\frac{(N \times N)-\Delta}{\sigma}\right) \\
 (i_1)_\# \downarrow & & \downarrow (i_2)_\# \\
 \pi_1\left(\frac{M}{\tau}\right) & \xrightarrow{\bar{f}_\#} & \pi_1\left(\frac{N \times N}{\sigma}\right)
 \end{array} \tag{2.9}$$

é comutativo e satisfaz

$$\phi([\partial D]) = v_1 B^{i_1} v_1^{-1} \dots v_k B^{i_k} v_k^{-1}. \tag{2.10}$$

Demonstração. $i) \Rightarrow ii)$ Suponhamos que existe $g: M \rightarrow N$ homotópica a f tal que $\text{BUCoin}(g; \tau) = \{\{x_1, \tau(x_1)\}; \dots; \{x_k, \tau(x_k)\}\}$ com $\text{ind}(g, g \circ \tau; x_j) = i_j$ ($\pm i_j$ no caso não orientável), e $x_j \in \text{int}(D)$, para $1 \leq j \leq k$ (ver [10], Teorema 2.1).

Tome $\phi = \left(\bar{g} \Big|_{\left(\frac{M-\bar{D}}{\tau} \right)_{\#}} \right) : \pi_1 \left(\frac{M-\bar{D}}{\tau} \right) \rightarrow \pi_1 \left(\frac{(N \times N) - \Delta}{\sigma} \right)$. Note que ϕ tomado desta forma faz com que o Diagrama 2.9 do Teorema 2.7 seja comutativo. Como estamos lidando com superfícies, podemos fixar discos fechados $D_j \subset \text{int}(D)$ disjuntos com $x_j \in \text{int}(D_j)$, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, e assumamos que $g(x_0), g(\tau(x_0)), g(D_j) \in \text{int}(U) \subset N$, também para cada $j \in \{1, \dots, k\}$ e onde $U \subset N$ é um disco aberto.

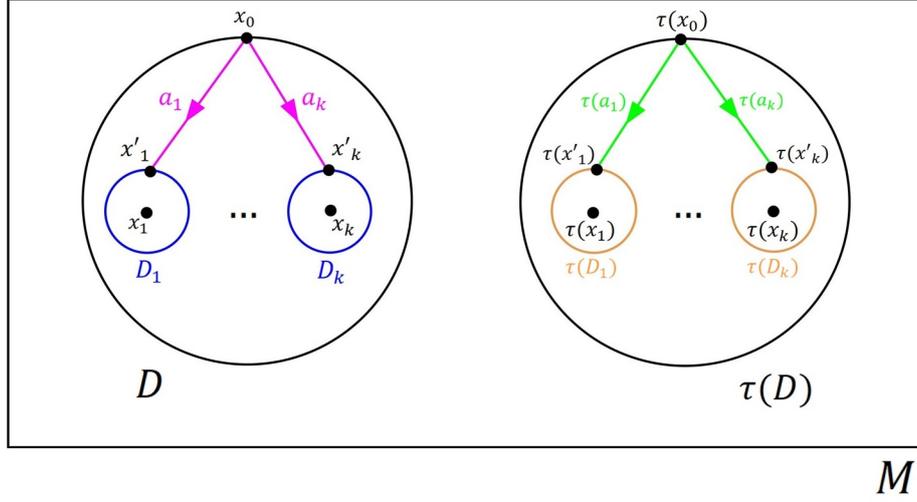


Figura 2.2: Uma possível visão geométrica de M e definição geométrica dos a_j .

Sejam $a_j \subset D$ caminhos que ligam x_0 a $x'_j \in \partial D_j$ de modo que ∂D seja homotópico ao laço $a_1 \partial D_1 a_1^{-1} \cdots a_k \partial D_k a_k^{-1}$ com ponto base x_0 e caminhos $\lambda_{1,j}, \lambda_{2,j}$ em N que ligam $g(x_0)$ e $g(\tau(x_0))$ com $g'(x_j)$ e $g'(\tau(x_j))$, respectivamente (ver Figuras 2.2 e 2.3).

Portanto, temos

$$\begin{aligned} g(\partial D) &\simeq g(a_1 \partial D_1 a_1^{-1} \cdots a_k \partial D_k a_k^{-1}) \\ &\simeq g(a_1) g(\partial D_1) g(a_1^{-1}) \cdots g(a_k) g(\partial D_k) g(a_k^{-1}) \\ &\simeq g(a_1) \lambda_{1,1}^{-1} \lambda_{1,1} g(\partial D_1) \lambda_{1,1}^{-1} \lambda_{1,1} g(a_1^{-1}) \cdots g(a_k) \lambda_{1,k}^{-1} \lambda_{1,k} g(\partial D_k) \lambda_{1,k}^{-1} \lambda_{1,k} g(a_k^{-1}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g(\partial \tau(D)) &\simeq g \circ \tau(a_1 \partial D_1 a_1^{-1} \cdots a_k \partial D_k a_k^{-1}) \\ &\simeq g \circ \tau(a_1) g \circ \tau(\partial D_1) g \circ \tau(a_1^{-1}) \cdots g \circ \tau(a_k) g \circ \tau(\partial D_k) g \circ \tau(a_k^{-1}) \\ &\simeq g \circ \tau(a_1) \lambda_{2,1}^{-1} \lambda_{2,1} g \circ \tau(\partial D_1) \lambda_{2,1}^{-1} \lambda_{2,1} g \circ \tau(a_1^{-1}) \cdots g \circ \tau(a_k) \lambda_{2,k}^{-1} \lambda_{2,k} g \circ \tau(\partial D_k) \\ &\quad \lambda_{2,k}^{-1} \lambda_{2,k} g \circ \tau(a_k^{-1}). \end{aligned}$$

Agora, se olharmos para a imagem de $[\partial D]$ pelo homomorfismo $\phi : \pi_1 \left(\frac{M-\bar{D}}{\tau} \right) \rightarrow \pi_1 \left(\frac{(N \times N) - \Delta}{\sigma} \right)$, temos

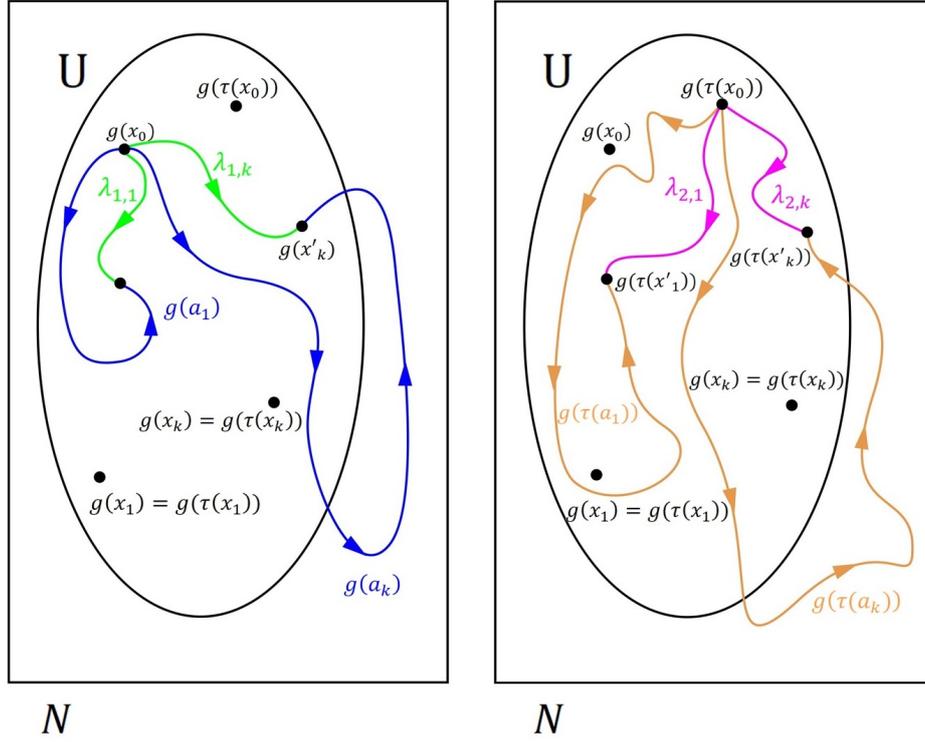


Figura 2.3: Uma possível visão geométrica de N destacando a imagem dos elementos pela g .

$$\begin{aligned}
\phi([\partial D]) &= \left(\bar{g} \Big|_{\left(\frac{M-\bar{D}}{\tau} \right)} \right)_{\#}([\partial D]) \\
&= [(g(a_1)\lambda_{1,1}^{-1}\lambda_{1,1}g(\partial D_1)\lambda_{1,1}^{-1}\lambda_{1,1}g(a_1^{-1}) \cdots g(a_k)\lambda_{1,k}^{-1}\lambda_{1,k}g(\partial D_k)\lambda_{1,k}^{-1}\lambda_{1,k} \\
&\quad g(a_k^{-1}), g \circ \tau(a_1)\lambda_{2,1}^{-1}\lambda_{2,1}g \circ \tau(\partial D_1)\lambda_{2,1}^{-1}\lambda_{2,1}g \circ \tau(a_1^{-1}) \cdots g \circ \tau(a_k) \\
&\quad \lambda_{2,k}^{-1}\lambda_{2,k}g \circ \tau(\partial D_k)\lambda_{2,k}^{-1}\lambda_{2,k}g \circ \tau(a_k^{-1}))] \tag{2.11} \\
&= [\prod_{j=1}^k (g(a_j)\lambda_{1,j}^{-1}, g \circ \tau(a_j)\lambda_{2,j}^{-1})(\lambda_{1,j}g(\partial D_j)\lambda_{1,j}^{-1}, \lambda_{2,j}g \circ \tau(\partial D_j)\lambda_{2,j}^{-1}) \\
&\quad (\lambda_{1,j}g(a_j^{-1}), \lambda_{2,j}g \circ \tau(a_j^{-1}))] \\
&= \prod_{j=1}^k [(g(a_j)\lambda_{1,j}^{-1}, g \circ \tau(a_j)\lambda_{2,j}^{-1})][(\lambda_{1,j}g(\partial D_j)\lambda_{1,j}^{-1}, \lambda_{2,j}g \circ \tau(\partial D_j)\lambda_{2,j}^{-1})] \\
&\quad [(\lambda_{1,j}g(a_j^{-1}), \lambda_{2,j}g \circ \tau(a_j^{-1}))].
\end{aligned}$$

Defina $v_j := [(g(a_j)\lambda_{1,j}^{-1}, g \circ \tau(a_j)\lambda_{2,j}^{-1})]$. Observe que v_j é um laço em $\frac{(N \times N) - \Delta}{\sigma}$ com ponto base $[(g(x_0), g(\tau(x_0)))]$. Mais ainda, observando a Figura 2.4, percebemos que $v_j \in P_2(N)$.

Além disso, observamos que $[(\lambda_{1,j}g(\partial D_j)\lambda_{1,j}^{-1}, \lambda_{2,j}g \circ \tau(\partial D_j)\lambda_{2,j}^{-1})]$ está no grupo de tranças com duas cordas no disco aberto U que é isomorfo a \mathbb{Z} gerado por B . Tal fato segue por conseguirmos uma fibração localmente trivial dada por $U - \{x_0\} \hookrightarrow (U \times U) - \Delta \rightarrow U$ justificada pelo [6, Teorema 1.2], quando $M = U$, $m = 0$, $n = 2$ e $t = 1$. Com isso e pela sequência longa de homotopias, obtemos que há um isomorfismo entre $\pi_1(U - \{x_0\}, x_1)$ e $\pi_1((U \times U) - \Delta, (x_0, x_1)) \cong P_2(U)$, o que basta, pois, por U ser homeomorfo a \mathbb{R}^2 , B pode ser visto como o laço que gera $\pi_1(U - \{x_0\}, x_1) \cong \mathbb{Z}$. Outra referência que traz esse fato provado acima é o [27, Teorema 1.1].

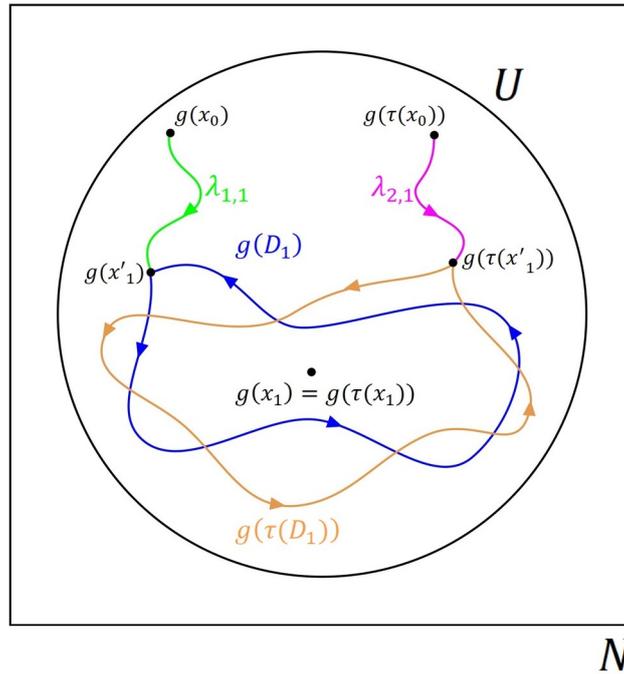


Figura 2.4: Uma possível visão geométrica de N destacando a Borsuk-Ulam coincidência x_1 .

Por causa dessas duas observações, temos que (2.11) implica que $\phi([\partial D]) = v_1 B^{i_1} v_1^{-1} \cdots v_k B^{i_k} v_k^{-1}$ como queríamos, já observando o aparecimento do índice como expoente de cada B .

Ademais, temos que $g(\partial \tau(D)) = g \circ \tau(\partial D)$ e $g \circ \tau(\partial \tau(D)) = g \circ \tau \circ \tau(\partial D) = g(\partial D)$. Por isso, olhemos a imagem de $[\partial \tau(D)]$ pelo homomorfismo ϕ . Temos,

$$\begin{aligned}
\phi([\partial \tau(D)]) &= \left(\bar{g}_{\left(\frac{M-D}{\tau} \right)} \right)_{\#} ([\partial \tau(D)]) \\
&= \left(\bar{g}_{\left(\frac{M-D}{\tau} \right)} \right)_{\#} \circ \tau_{\#} (\partial D) \\
&= \left(\bar{g}_{\left(\frac{M-D}{\tau} \right)} \circ \tau \right)_{\#} ([\partial D]) \\
&= [(g \circ \tau(a_1) \lambda_{2,1}^{-1} \lambda_{2,1} g \circ \tau(\partial D_1) \lambda_{2,1}^{-1} \lambda_{2,1} g \circ \tau(a_1^{-1}) \cdots g \circ \tau(a_k) \lambda_{2,k}^{-1} \lambda_{2,k} \\
&\quad g \circ \tau(\partial D_k) \lambda_{2,k}^{-1} \lambda_{2,k} g \circ \tau(a_k^{-1}), g(a_1) \lambda_{1,1}^{-1} \lambda_{1,1} g(\partial D_1) \lambda_{1,1}^{-1} \lambda_{1,1} g(a_1^{-1}) \cdots \\
&\quad g(a_k) \lambda_{1,k}^{-1} \lambda_{1,k} g(\partial D_k) \lambda_{1,k}^{-1} \lambda_{1,k} g(a_k^{-1}))] \\
&= [\prod_{j=1}^k (g \circ \tau(a_j) \lambda_{2,j}^{-1}, g(a_j) \lambda_{1,j}^{-1}) (\lambda_{2,j} g \circ \tau(\partial D_j) \lambda_{2,j}^{-1}, \lambda_{1,j} g(\partial D_j) \lambda_{1,j}^{-1}) \\
&\quad (\lambda_{2,j} g \circ \tau(a_j^{-1}), \lambda_{1,j} g(a_j^{-1}))]. \\
&= \prod_{j=1}^k [(g \circ \tau(a_j) \lambda_{2,j}^{-1}, g(a_j) \lambda_{1,j}^{-1}) [(\lambda_{2,j} g \circ \tau(\partial D_j) \lambda_{2,j}^{-1}, \lambda_{1,j} g(\partial D_j) \lambda_{1,j}^{-1})] \\
&\quad [(\lambda_{2,j} g \circ \tau(a_j^{-1}), \lambda_{1,j} g(a_j^{-1}))]]. \\
&= \prod_{j=1}^k [(g(a_j) \lambda_{1,j}^{-1}, g \circ \tau(a_j) \lambda_{2,j}^{-1}) [(\lambda_{1,j} g(\partial D_j) \lambda_{1,j}^{-1}, \lambda_{2,j} g \circ \tau(\partial D_j) \lambda_{2,j}^{-1})] \\
&\quad [(\lambda_{1,j} g(a_j^{-1}), \lambda_{2,j} g \circ \tau(a_j^{-1}))]]. \\
&= v_1 B^{i_1} v_1^{-1} \cdots v_k B^{i_k} v_k^{-1}.
\end{aligned}$$

Para terminar a demonstração dessa direção, basta fazermos considerações perante a orientabilidade. Se M, N são orientáveis e τ preserva a orientação, os sinais dos i_j são definidos da escolha da orientação sobre M e N . Já no caso não orientável, nós podemos “escolher” o sinal dos índices fixando a orientabilidade para $D \subset M$ e $U \subset N$.

ii) \Rightarrow i) Reciprocamente, existem $\phi: \pi_1\left(\frac{M-\tilde{D}}{\tau}\right) \rightarrow \pi_1\left(\frac{(N \times N)-\Delta}{\sigma}\right)$ e elementos $v_1, v_2, \dots, v_k \in P_2(N) \cong \pi_1((N \times N) - \Delta)$ tais que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{Z}_2 & \\ \theta_\tau \nearrow & & \nwarrow \pi \\ \pi_1\left(\frac{M-\tilde{D}}{\tau}\right) & \xrightarrow{\phi} & \pi_1\left(\frac{(N \times N)-\Delta}{\sigma}\right) \cong B_2(N) \\ (i_1)_\# \downarrow & & \downarrow (i_2)_\# \\ \pi_1\left(\frac{M}{\tau}\right) & \xrightarrow{\bar{f}_\#} & \pi_1\left(\frac{N \times N}{\sigma}\right) \cong H_1(N) \end{array}$$

comute e satisfaça a equação em tranças

$$\phi([\partial D]) = v_1 B^{i_1} v_1^{-1} \dots v_k B^{i_k} v_k^{-1}.$$

No entanto, pelo Lema 2.6, esta hipótese significa que há $\psi: \pi_1\left(\frac{M - \bigcup_{j=1}^k (\text{int}(D_j) \cup \text{int}(\tau(D_j)))}{\tau}\right) \rightarrow \pi_1\left(\frac{(N \times N) - \Delta}{\sigma}\right)$, com discos $D_j \subset \text{int}(D)$ contendo x_j , e elementos $v_1, v_2, \dots, v_k \in P_2(N) \cong \pi_1((N \times N) - \Delta)$ tais que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{Z}_2 & \\ \theta_\tau \nearrow & & \nwarrow \pi \\ \pi_1\left(\frac{M - \bigcup_{j=1}^k (\text{int}(D_j) \cup \text{int}(\tau(D_j)))}{\tau}\right) & \xrightarrow{\psi} & \pi_1\left(\frac{(N \times N) - \Delta}{\sigma}\right) \cong B_2(N) \\ (i_1)_\# \downarrow & & \downarrow (i_2)_\# \\ \pi_1\left(\frac{M}{\tau}\right) & \xrightarrow{\bar{f}_\#} & \pi_1\left(\frac{N \times N}{\sigma}\right) \cong H_1(N) \end{array}$$

comute e satisfaça a equação em tranças

$$\psi\left(\left[\prod_{j=1}^k a_j \partial D_j a_j^{-1}\right]\right) = v_1 B^{i_1} v_1^{-1} \dots v_k B^{i_k} v_k^{-1}.$$

Note que o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{Z}_2 & \\ \theta_\tau \nearrow & & \nwarrow \pi \\ \pi_1\left(\frac{M - \bigcup_{j=1}^k (\text{int}(D_j) \cup \text{int}(\tau(D_j)))}{\tau}\right) & \xrightarrow{\psi} & \pi_1\left(\frac{(N \times N) - \Delta}{\sigma}\right) \\ (p_1)_\# \uparrow & & \uparrow (p_2)_\# \\ \pi_1\left(M - \bigcup_{j=1}^k (\text{int}(D_j) \cup \text{int}(\tau(D_j)))\right) & \xrightarrow{(\check{f})_\#} & \pi_1((N \times N) - \Delta) \end{array}$$

é comutativo, em que $\check{f} = \hat{f}|_{M - \bigcup_{j=1}^k (\text{int}(D_j) \cup \text{int}(\tau(D_j)))}$ e p_1 e p_2 são as respectivas passagens ao quociente. Por [17, Lema 5], existe uma aplicação equivariante $g_1 : M - \bigcup_{j=1}^k (\text{int}(D_j) \cup \text{int}(\tau(D_j))) \rightarrow (N \times N) - \Delta$, definida por $x \mapsto (g(x), g'(\tau(x)))$ para aplicações $g, g' : M - \bigcup_{j=1}^k (\text{int}(D_j) \cup \text{int}(\tau(D_j))) \rightarrow N$ e tal que $(g_1)_\# = (\check{f})_\#$. A partir daí, podemos dizer que

$$\begin{aligned} (g(\tau(x)), g'(\tau(x))) &= g_1(\tau(x)) \\ &= \sigma(g_1(x)) \\ &= \sigma(g(x), g'(\tau(x))) \\ &= (g'(\tau(x)), g(\tau(x))). \end{aligned}$$

Em particular, temos que $g'(\tau(x)) = g(x)$, ou seja, $g_1(x) = (g(x), g(\tau(x)))$. Mais ainda, por $(g_1)_\# = (\check{f})_\#$ e pelo Teorema 2.2, temos $g_1 \simeq \check{f}$, o que significa particularmente que $g \simeq f$.

Note também que a imagem pela g_1 está em $(N \times N) - \Delta$, logo $g(x) \neq g(\tau(x))$ para todo $x \in M - \bigcup_{j=1}^k (\text{int}(D_j) \cup \text{int}(\tau(D_j)))$. Portanto, nesse domínio, não existe pontos de coincidência do tipo Borsuk-Ulam.

Por g ser definida sem pontos de Borsuk-Ulam coincidências em $M - \bigcup_{j=1}^k (\text{int}(D_j) \cup \text{int}(\tau(D_j)))$, podemos nos debruçar sobre $g(x_0), g(\tau(x_0)) \in N$ e partir para definir g nos pontos em $\bigcup_{j=1}^k (\text{int}(D_j) \cup \text{int}(\tau(D_j)))$. Note que podemos tomar $g(x_0), g(\tau(x_0)) \in N$ próximos de forma a estarem contidos em um disco D_0 . Defina $g(x_j) = g(\tau(x_j)) = g(x_0)$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. Tal construção implica que obteremos k pares de conjuntos que representam as Borsuk-Ulam coincidências, os $\{x_j, \tau(x_j)\}$.

Seja $\bar{x} \in \partial D_j$, defina o ponto $x_t \in [x_j, \bar{x}]$ no segmento com pontos finais x_j e \bar{x} por $x_t = t\bar{x} + (1-t)x_j$, com $t \in [0, 1]$. Desta forma, definimos a imagem dos pontos $x_t \in D_j$ pela aplicação g como $g(x_t) = tg(\bar{x}) + (1-t)g(x_j)$ (ver Figura 2.5).

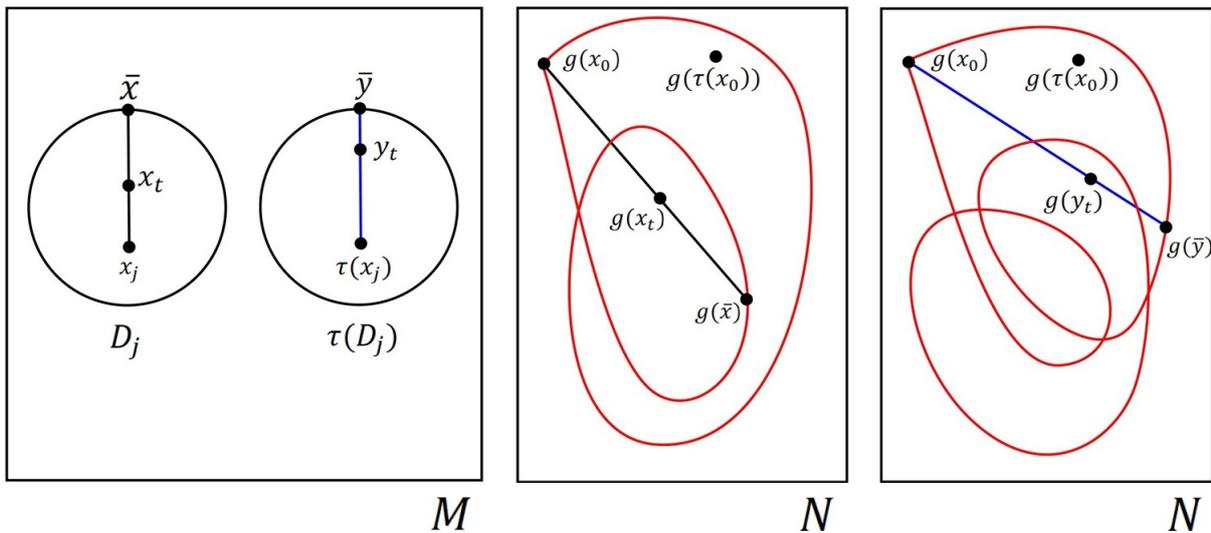


Figura 2.5: Definição geométrica de $g(x_t)$ e $g(y_t)$.

De forma similar, para $\bar{y} \in \partial \tau(D_j)$, defina o ponto $y_t \in [\tau(x_j), \bar{y}]$ no segmento com pontos finais

$\tau(x_j)$ e \bar{y} por $y_t = t\bar{y} + (1-t)\tau(x_j)$, com $t \in [0, 1]$. Definimos $g(y_t) = tg(\bar{y}) + (1-t)g(\tau(x_j))$ (ver Figura 2.5).

Com esta definição, obtemos $g \simeq f|_{M-(\text{int}(D) \cup \text{int}(\tau(D)))} \simeq f$ tais que x_j são coincidências do tipo Borsuk-Ulam com índices i_j , como queríamos.

Observe ainda a trança $(g(a_j \partial D_j a_j^{-1}), g \circ \tau(a_j \partial D_j a_j^{-1})) \in (N \times N) - \Delta$, em que os a_j são os mesmos vistos nas Figuras 2.1 e 2.2, que conta o número de vezes que a primeira corda envolve a segunda, realizando o elemento B com seus respectivos índices, já que a primeira corda dá i_j voltas em torno da outra, e, portanto, pela definição de índice local, realizáveis nos inteiros fixados. (ver Figura 2.6).

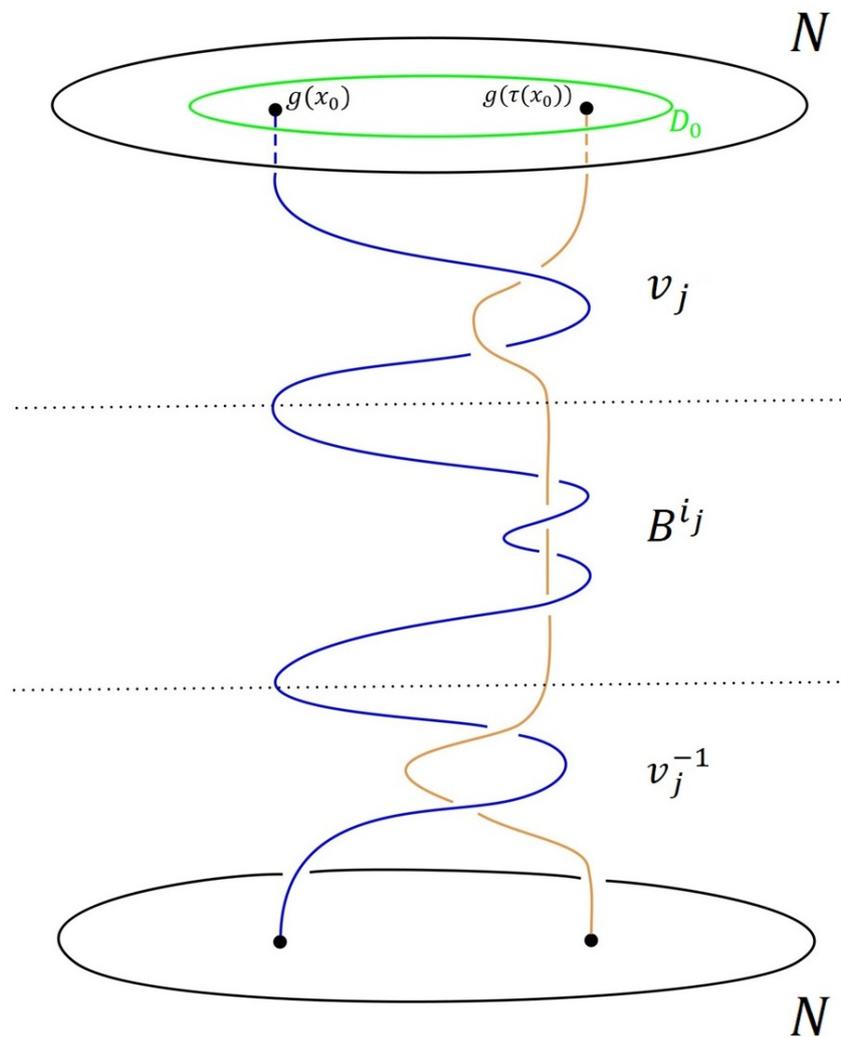


Figura 2.6: Visualização da trança em $D_0 \subset N$.

Ademais, para o caso não orientável, o índice deve ser visto como índice local no sentido que não existe uma definição de índice global para coincidências.

□

Garrafa de Klein

Em decorrência do que foi dito anteriormente, principalmente na Introdução e no Capítulo [1](#), sabemos que algumas Borsuk-Ulam coincidências podem ser desfeitas, sendo assim factível o questionamento sobre a minimalidade desses pontos. O trabalho feito em [\[33\]](#) responde tal pergunta para autoaplicações do toro de dimensão 1, 2 e 3, através da utilização dos grupos de homologia. Entretanto, ao nos apoiarmos na teoria de tranças, conseguimos abranger tal questionamento sobre tal minimalidade destes pontos, incluindo as demais superfícies orientáveis e as superfícies não orientáveis através do Teorema [2.7](#).

Com intuito de ilustrarmos através de uma aplicação deste teorema obtido no Capítulo [2](#), estudamos com mais proximidade a garrafa de Klein, destacando algumas propriedades topológicas e algébricas. Assim, veremos no Teorema [3.13](#) uma classificação das autoaplicações da garrafa de Klein em relação a quantidade de coincidências do tipo Borsuk-Ulam e, por consequência, obteremos resultados sobre os índices e a minimalidade desses pontos.

3.1 A estrutura $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ e o grupo fundamental de K^2

A garrafa de Klein, denotada por K^2 , é uma variedade bidimensional não orientável. Podemos destacar também que K^2 é compacta, conexa e sem bordo. Iremos relembrar como podemos construí-la, entretanto, para isso, iremos destacar um conjunto em particular e equipado com uma estrutura de grupo. Tais destaques nos ajudarão nas contas que desenvolveremos mais à frente.

Proposição 3.1. *No produto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definimos a seguinte operação*

$$\begin{aligned} (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) &\rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ ((r, s), (c, d)) &\mapsto (r + \varepsilon_s c, s + d), \end{aligned} \tag{3.1}$$

com

$$\varepsilon_n = (-1)^n. \tag{3.2}$$

Então, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, munido da operação acima, é um grupo com

i) $(0,0)$ o elemento neutro desse grupo;

ii) $(r,s)^{-1} = (\varepsilon_{s+1}r, -s)$ o elemento inverso do elemento (r,s) .

Mais ainda, para $r,s,c,d \in \mathbb{Z}$, o conjugado de um elemento é dado por

$$(c,d)(r,s)(c,d)^{-1} = (c + \varepsilon_{s+1}c + \varepsilon_d r, s) \quad (3.3)$$

e as potências são dadas por

$$(r,s)^t = \begin{cases} (tr, ts), & \text{se } s \text{ é par} \\ (\delta_t r, ts), & \text{se } s \text{ é ímpar,} \end{cases} \quad (3.4)$$

onde

$$\delta_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ 1 & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases} \quad (3.5)$$

Ademais, $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ é gerado por $\{(1,0), (0,1)\}$.

Em virtude do entendimento das demonstrações da Proposição 3.4, da Proposição 3.9 e da Proposição 3.11, iremos desenvolver a demonstração da Proposição 3.1. Entretanto, antes de fazê-la, definiremos de maneira mais formal este grupo.

Definição 3.2. O grupo formado pelo conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ munido da operação vista em (3.1) é chamado de produto semidireto de \mathbb{Z} com \mathbb{Z} e denotado por $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$.

Demonstração - Proposição 3.1. Dados $(r,s), (c,d), (a,b) \in \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ e a operação

$$(r,s)(c,d) = (r + \varepsilon_s c, s + d),$$

onde $\varepsilon_n = (-1)^n$, vamos verificar que $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$, munido com essa operação, é um grupo.

A associatividade é dada por

$$\begin{aligned} ((r,s)(c,d))(a,b) &= (r + \varepsilon_s c, s + d)(a,b) \\ &= (r + \varepsilon_s c + \varepsilon_{s+d} a, s + d + b) \\ &= (r + \varepsilon_s (c + \varepsilon_d a), s + (d + b)) \\ &= (r,s)(c + \varepsilon_d a, d + b) \\ &= (r,s)((c,d)(a,b)). \end{aligned}$$

Já o elemento neutro é verificado por

$$\begin{aligned} (r,s)(0,0) &= (r + \varepsilon_s 0, s + 0) & (0,0)(r,s) &= (0 + \varepsilon_0 r, 0 + s) \\ &= (r + 0, s + 0) & &= (0 + r, 0 + s) \\ &= (r,s). & &= (r,s). \end{aligned}$$

Resta calcularmos o elemento inverso para assegurarmos que é, de fato, um grupo.

$$\begin{aligned}
 (r, s)(r, s)^{-1} &= (r, s)(\varepsilon_{s+1}r, -s) & (r, s)^{-1}(r, s) &= (\varepsilon_{s+1}r, -s)(r, s) \\
 &= (r + \varepsilon_s(\varepsilon_{s+1}r), s + (-s)) & &= (\varepsilon_{s+1}r + \varepsilon_{-s}r, (-s) + s) \\
 &= (r + \varepsilon_{2s+1}r, s + (-s)) & &= ((\varepsilon_{s+1} + \varepsilon_s)r, (-s) + s) \\
 &= (r - r, s - s) & &= (0r, -s + s) \\
 &= (0, 0). & &= (0, 0).
 \end{aligned}$$

Mais ainda, toda conjugação da forma $(c, d)(r, s)(c, d)^{-1}$ é expressa por

$$\begin{aligned}
 (c, d)(r, s)(c, d)^{-1} &= (c + \varepsilon_d r, d + s)(\varepsilon_{d+1}c, -d) \\
 &= (c + \varepsilon_d r + \varepsilon_{d+s}\varepsilon_{d+1}c, d + s - d) \\
 &= (c + \varepsilon_d r + \varepsilon_{2d+s+1}c, s) \\
 &= (c + \varepsilon_{s+1}c + \varepsilon_d r, s).
 \end{aligned}$$

Já, para calcular as potências $(r, s)^t$, para $t \in \mathbb{Z}$, será necessário dividir em casos. Quando s é par, temos uma fácil computação do resultado, visto que $\varepsilon_s r = r$. Observe que,

$$\begin{aligned}
 (r, s)^2 &= (r, s)(r, s) \\
 &= (r + \varepsilon_s r, s + s) \\
 &= (r + r, s + s) \\
 &= (2r, 2s).
 \end{aligned}$$

Ao proceder esse argumento recursivamente, obtemos que $(r, s)^t = (tr, ts)$. Por outro lado, quando s é ímpar, temos que dividir em casos conforme a paridade de t .

- Se t for par, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $t = 2k$: • Se t for ímpar, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $t = 2k + 1$:

$$\begin{aligned}
 (r, s)^t &= (r, s)^{2k} & (r, s)^t &= (r, s)^{2k+1} \\
 &= ((r, s)^2)^k & &= (r, s)^{2k}(r, s) \\
 &= ((r, s)(r, s))^k & &= (0, 2ks)(r, s) \\
 &= (r + \varepsilon_s r, s + s)^k & &= (\varepsilon_{2ks}r, 2ks + s) \\
 &= (r - r, s + s)^k & &= (r, (2k + 1)s) \\
 &= (0, 2s)^k & &= (1r, ts) \\
 &= (0, 2ks) & &= (\delta_t r, ts). \\
 &= (0r, ts) \\
 &= (\delta_t r, ts).
 \end{aligned}$$

Ademais, resta mostrar que $\{(1, 0), (0, 1)\}$ gera o produto semidireto de \mathbb{Z} com \mathbb{Z} . Para tanto, seja

$(r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ um elemento qualquer. Ao utilizar as potências verificadas acima, temos que

$$\begin{aligned} (r, s) &= (r + 0, 0 + s) \\ &= (r + \varepsilon_0 0, 0 + s) \\ &= (r, 0)(0, s) \\ &= (r1, r0)(\delta_s)0, s1) \\ &= (1, 0)^r (0, 1)^s, \end{aligned}$$

concluindo o desejado. □

Após definirmos o grupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, podemos voltar a entender como construir K^2 . Sabemos que a garrafa de Klein pode ser obtida do quociente de \mathbb{R}^2 pela seguinte ação $\zeta: (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida nos geradores por $\zeta((1, 0); (x, y)) = (x + 1, y)$ e $\zeta((0, 1); (x, y)) = (1 - x, y + 1)$. Por conta dessa construção, podemos identificar K^2 através de um quadrado (tomaremos o quadrado $I \times I$) com seus lados identificados conforme a Figura 3.1.

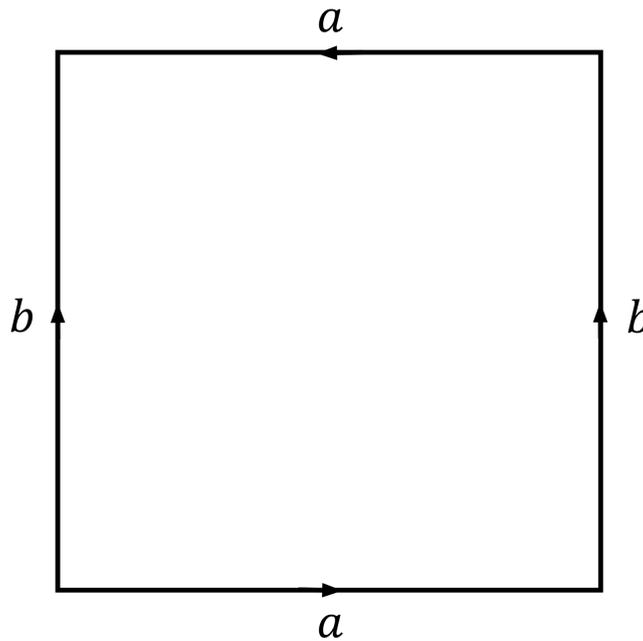


Figura 3.1: Garrafa de Klein K^2 .

Em decorrência dessa construção, observamos que a garrafa de Klein pode ser recoberta por \mathbb{R}^2 e que seu grupo fundamental tem a seguinte apresentação

$$\pi_1(K^2) = \langle a, b \mid abab^{-1} = 1 \rangle. \quad (3.6)$$

Por causa desses fatos anteriores, temos um isomorfismo entre $\pi_1(K^2)$ e $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definido por

$$\begin{cases} a & \mapsto (1, 0) \\ b & \mapsto (0, 1), \end{cases}$$

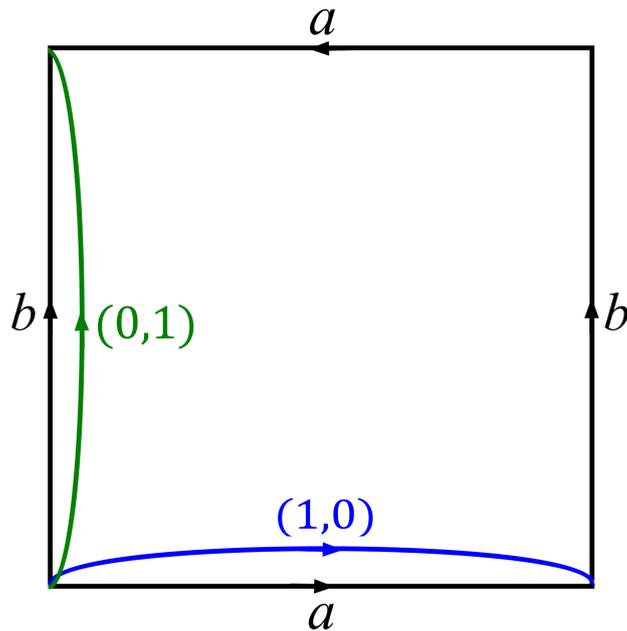


Figura 3.2: Isomorfismo entre $\pi_1(K^2)$ e $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$.

o qual pode ser explicitado através da Figura 3.2.

Observamos que, daqui em diante, não iremos distinguir um ponto de \mathbb{R}^2 e um ponto de K^2 .

3.2 Descrição de $[K^2, K^2]$

Podemos agora dar uma caracterização algébrica para o conjunto $[K^2, K^2]$. Utilizando o Teorema 2.4, faremos tal caracterização observando as classes de $\frac{\text{Hom}(\pi_1(K^2), \pi_1(K^2))}{\sim}$. Para tanto, identificamos o $\pi_1(K^2)$ do domínio por $\langle a, b \mid abab^{-1} = 1 \rangle$ e $\pi_1(K^2)$ do contradomínio por $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$.

Proposição 3.3. *Seja $h: \pi_1(K^2) = \langle a, b \mid abab^{-1} = 1 \rangle \rightarrow \pi_1(K^2) = \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ uma aplicação dada nos geradores por*

$$h: \begin{cases} a & \mapsto (r, s) \\ b & \mapsto (p, q), \end{cases}$$

para $r, s, p, q \in \mathbb{Z}$. Então, h é um homomorfismo se, e somente se, $s = 0$ e ocorre pelo menos uma das seguintes condições:

i) $r = 0$.

ii) q é ímpar.

Demonstração. Seja $h: \langle a, b \mid abab^{-1} = 1 \rangle \rightarrow \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ definido como na hipótese da Proposição 3.3. Sabemos que h é um homomorfismo se, e somente se, satisfaz $[h(a), h(b)]' = h(a)h(b)h(a)h(b)^{-1} = (0, 0)$, o que reflete em algumas condições em $r, s, p, q \in \mathbb{Z}$, como mostramos a seguir

$$\begin{aligned}
(0,0) &= h(a)h(b)h(a)h(b)^{-1} \\
&= (r,s)(p,q)(r,s)(p,q)^{-1} \\
&= (r,s)(p,q)(r,s)(\varepsilon_{q+1}p,-q) \\
&= (r+\varepsilon_s p, s+q)(r,s)(\varepsilon_{q+1}p,-q) \\
&= (r+\varepsilon_s p + \varepsilon_{s+q}r, 2s+q)(\varepsilon_{q+1}p,-q) \\
&= (r+\varepsilon_s p + \varepsilon_{s+q}r + \varepsilon_{2s+q}\varepsilon_{q+1}p, 2s) \\
&= (r+\varepsilon_s p + \varepsilon_{s+q}r + \varepsilon_{2(s+q)+1}p, 2s) \\
&= ((1+\varepsilon_{s+q})r + (\varepsilon_s + \varepsilon_{2(s+q)+1})p, 2s).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Contudo, a equação vista em (3.7) é satisfeita se, e somente se, ambas as úplas são zeradas, o que, em particular, significa que $s = 0$ e

$$\begin{aligned}
(1+\varepsilon_{s+q})r + (\varepsilon_s + \varepsilon_{2(s+q)+1})p = 0 &\Leftrightarrow (1+\varepsilon_q)r + p - p = 0 \\
&\Leftrightarrow (1+\varepsilon_q)r = 0.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Entretanto, a validade para a equação vista em (3.8) é satisfeita se, e somente se, $r = 0$ ou q é ímpar, obtendo o desejado. \square

Com tal caracterização dos homomorfismos $h: \pi_1(K^2) \cong \langle a, b \mid abab^{-1} = 1 \rangle \rightarrow \pi_1(K^2) \cong \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$, percebemos que podemos classificá-los e descrevê-los em tipos distintos, ao qual veremos na Proposição 3.4. Tal demonstração desta proposição pode ser verificada por [17, Teorema 4, Diagrama (24), Proposição 20 e Proposição 24].

Proposição 3.4. *No conjunto $\text{Hom}(\langle a, b \mid abab^{-1} = 1 \rangle, \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z})$ considere o subconjunto Q cujos elementos são:*

$$\begin{array}{ccc}
\text{Tipo A} & & \text{Tipo B} \\
\left\{ \begin{array}{l} a \rightarrow (r,0) \\ b \mapsto (i, 2s+1), \\ r, s \in \mathbb{Z}, r \geq 0, i \in \{0,1\} \end{array} \right. & e & \left\{ \begin{array}{l} a \rightarrow (0,0) \\ b \mapsto (r,s), \\ r, s \in \mathbb{Z}, r \geq 0. \end{array} \right.
\end{array}$$

Então, dada uma aplicação $f: K^2 \rightarrow K^2$, existe uma aplicação homotópica $f': K^2 \rightarrow K^2$ que preserva o ponto base x_0 e tal que $(f')_{\#}: \pi_1(K^2) \cong \langle a, b \mid abab^{-1} = 1 \rangle \rightarrow \pi_1(K^2) \cong \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ é um elemento de Q . Mais ainda, está bem definida $\mu: [K^2, K^2] \rightarrow Q$ dada por $\mu([f]) = (f')_{\#}$, a qual é uma bijeção.

Dada uma aplicação $f: K^2 \rightarrow K^2$, dizemos que $[f]$ **se levanta para o toro** T^2 se existe $\tilde{f}: K^2 \rightarrow T^2$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$. Isto é, existe \tilde{f} tal que o diagrama a seguir

$$\begin{array}{ccc}
& & T^2 \\
& \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\
K^2 & \xrightarrow{f} & K^2,
\end{array}$$

é comutativo, sendo p um recobrimento duplo.

Uma caracterização dessa definição é dada por: dada uma aplicação $f: K^2 \rightarrow K^2$, dizemos que $[f]$ se levanta para o toro T^2 se existe f' homotópica a f tal que preserva o ponto base e que sua imagem por $(f')_\#$, homomorfismo induzido no grupo fundamental, está contido no subgrupo gerado por $\{(1,0), (0,2)\}$, sendo $(1,0)$ e $(0,1)^2 = (0,2)$ potências dos geradores de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ vistos anteriormente.

À luz do parágrafo imediatamente acima, da Proposição 3.4 e dos resultados dados em [17, Teorema 3, Proposição 32] conseguimos enunciar a seguinte proposição.

Proposição 3.5. *Dada a tripla (K^2, τ, K^2) , com $\tau: K^2 \rightarrow K^2$ involução livre. Sejam $f: K^2 \rightarrow K^2$ e $\mu: [K^2, K^2] \rightarrow Q$ aplicação e bijeção respectivamente dadas na Proposição 3.4. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) A classe $[f]$ tem a propriedade de Borsuk-Ulam.
- ii) A classe $[f]$ se levanta para T^2 .
- iii) A imagem $\mu([f])$ da classe $[f]$ é um elemento da família de homomorfismos do Tipo B.

3.3 A involução τ em K^2

Para a continuidade, precisaremos apresentar uma involução na garrafa de Klein. Defina $\tau: K^2 \rightarrow K^2$ por $\tau(x, y) = (x + \frac{1}{2}, y)$. A autoaplicação τ é uma involução livre representada pela Figura 3.3.

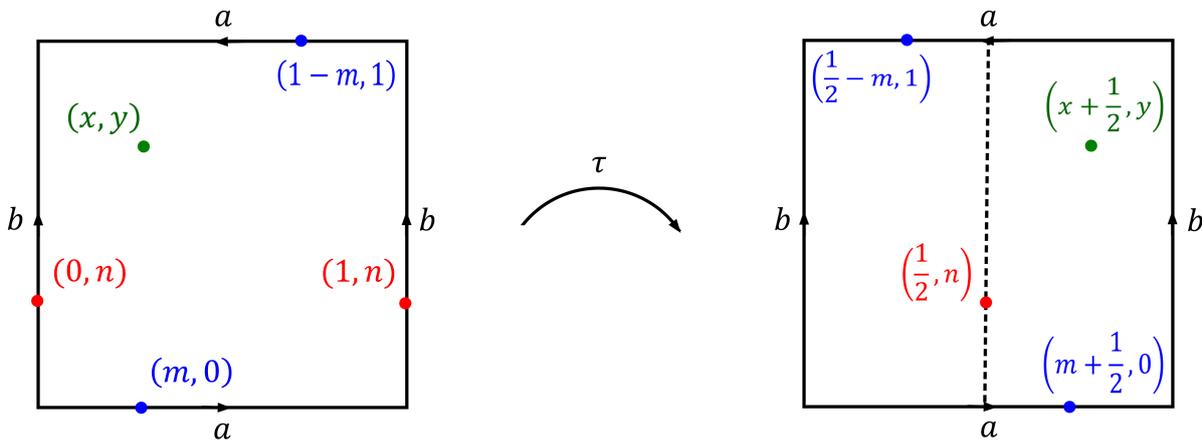


Figura 3.3: Involução livre τ .

De fato, τ é uma involução livre, pois

$$\begin{aligned} \tau^2(x, y) &= \tau(\tau(x, y)) \\ &= \tau(x + \frac{1}{2}, y) \\ &= (x + 1, y) \\ &\sim (x, y). \end{aligned}$$

Em [17, Proposição 27], os autores verificam que, essencialmente, só precisaremos trabalhar com essa involução τ . Este resultado será enunciado a seguir e tem prova na mesma referência supracitada.

Proposição 3.6. *Seja $\tau_1: K^2 \rightarrow K^2$ uma involução livre. Então, τ_1 é equivalente a τ , definida imediatamente antes da Figura 3.3 e representada pela mesma imagem.*

Em virtude da Proposição 1.5 e da Proposição 3.6, a involução τ definida imediatamente antes da Figura 3.3 e representada pela mesma imagem será a involução que estudaremos neste trabalho.

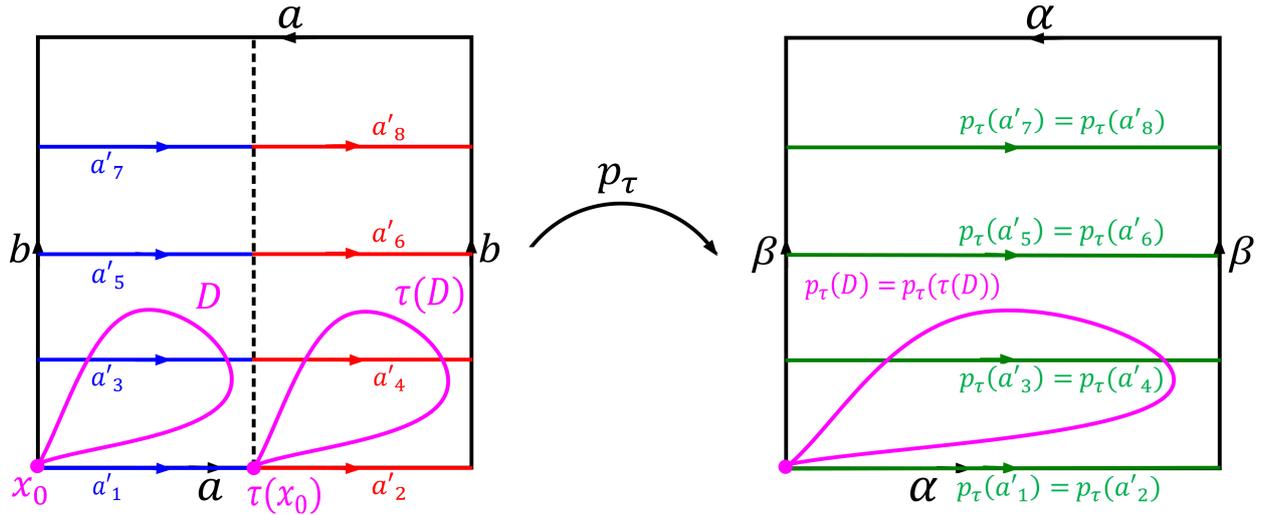


Figura 3.4: Quociente pela involução τ .

O quociente de K^2 por essa involução é também uma garrafa de Klein e a sua projeção natural, que denotamos por $p_\tau: K^2 \rightarrow \frac{K^2}{\tau} \cong K^2$, pode ser vista geometricamente pela Figura 3.4. Para o grupo fundamental da garrafa de Klein, advinda do quociente, escreveremos sua apresentação por

$$\pi_1 \left(\frac{K^2}{\tau} \right) = \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta\alpha\beta^{-1} = 1 \rangle. \quad (3.9)$$

Sejam D um disco topológico em K^2 e $\tilde{D} = \text{int}(D) \cup \text{int}(\tau(D))$. Se retirarmos \tilde{D} de K^2 e projetarmos no quociente pela τ , obtemos que $\pi_1 \left(\frac{K^2 - \tilde{D}}{\tau} \right)$ é um grupo livre de rank igual a 2, assim como mostra a Figura 3.5.

Com intuito de resumir o que falamos nos últimos parágrafos, enunciaremos um lema que sintetiza e traz mais algumas informações.

Lema 3.7. *Seja $\tau: K^2 \rightarrow K^2$ involução livre definida por $\tau(x, y) = (x + \frac{1}{2}, y)$. Com respeito a discussão prévia, podemos identificar $\pi_1 \left(\frac{K^2 - \tilde{D}}{\tau} \right) = F(c_1, c_2)$ e $\pi_1 \left(\frac{K^2}{\tau} \right) = \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta\alpha\beta^{-1} = 1 \rangle$. Ademais, os homomorfismos $\theta_\tau: \pi_1 \left(\frac{K^2 - \tilde{D}}{\tau} \right) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ e $(\iota_1)_\#: \pi_1 \left(\frac{K^2 - \tilde{D}}{\tau} \right) \rightarrow \pi_1 \left(\frac{K^2}{\tau} \right)$, definidos no Diagrama 2.4 satisfazem, respectivamente,*

$$\theta_\tau: \begin{cases} c_1 \mapsto \bar{1} \\ c_2 \mapsto \bar{0} \end{cases} \quad e \quad (\iota_1)_\#: \begin{cases} c_1 \mapsto \alpha \\ c_2 \mapsto \beta \end{cases}.$$

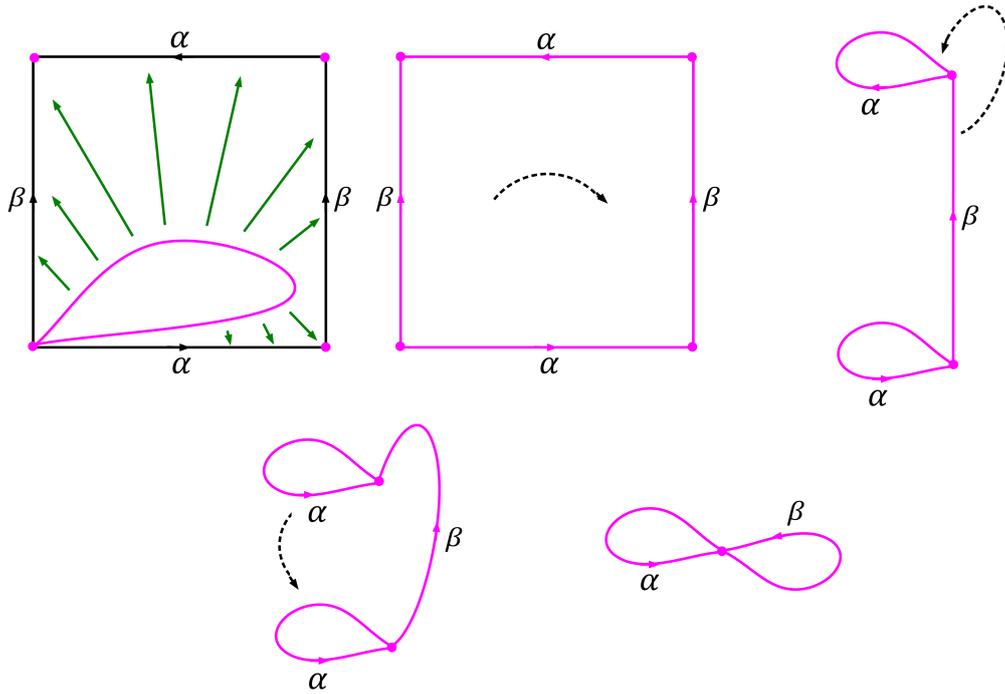


Figura 3.5: Identificação de $\pi_1\left(\frac{K^2 - \tilde{D}}{\tau}\right)$ por $F(c_1, c_2)$.

3.4 Os grupos de tranças total e puras de K^2

Em alguns materiais é encontrado que K^2 pode ser vista como a soma direta de dois planos projetivos, $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$, ou seja, que esses dois espaços são homeomorfos.

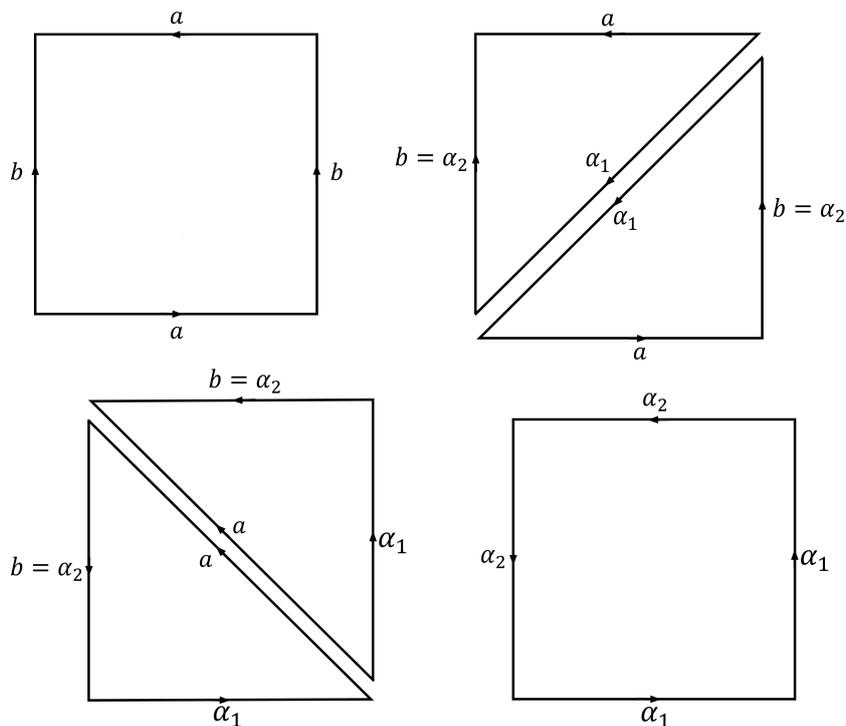


Figura 3.6: K^2 visto como $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$.

O fato enunciado no parágrafo acima pode ser visto, por exemplo, em [31], Capítulo 1, Exemplo 4.3] e através da sequência de imagens da Figura 3.6.

Utilizando esse homeomorfismo descrito imediatamente acima da Figura 3.6, em [4, Teorema A.3], pode ser vista uma descrição algébrica do grupo de tranças em K^2 dada através de uma apresentação como temos a seguir.

Teorema 3.8. *Uma apresentação para $B_2(K^2)$ é dada por*

$$B_2(K^2) = \left\langle a_1, a_2, \sigma_1 \left| \begin{array}{l} \sigma_1^{-1} a_r \sigma_1^{-1} a_r = a_r \sigma_1^{-1} a_r \sigma_1, \quad r \in \{1, 2\} \\ \sigma_1^{-1} a_1 \sigma_1 a_2 = a_2 \sigma_1^{-1} a_1 \sigma_1 \\ a_1^2 a_2^2 = \sigma_1^2 \end{array} \right. \right\rangle.$$

Geometricamente, os geradores a_1 , a_2 e σ_1 estão descritos pela Figuras 3.7, 3.8 e 3.9

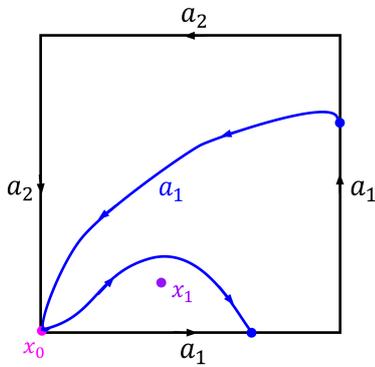


Figura 3.7: Gerador a_1 para a apresentação de $B_2(K^2)$ por [4].

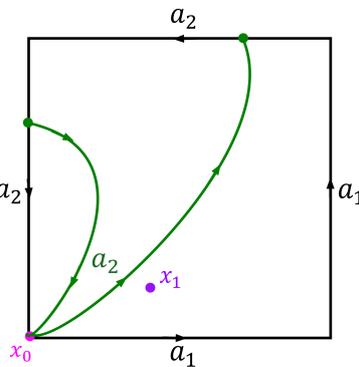


Figura 3.8: Gerador a_2 para a apresentação de $B_2(K^2)$ por [4].

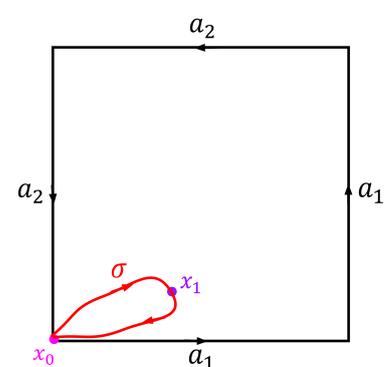


Figura 3.9: Gerador σ para a apresentação de $B_2(K^2)$ por [4].

Note que as Figuras 3.7, 3.8 e 3.9 do Teorema 3.8 representam tranças através de uma visualização distinta da que apresentamos até então. Agora, tais tranças podem ser observadas de um outro ângulo, sendo uma referência relativa a parte de cima da superfície. Com tal maneira de ver e tomando a trança como um objeto concreto, o observador passa a olhar da parte superior e perceber que os caminhos formados ainda são as cordas, contudo, como por exemplo nas Figuras 3.7 e 3.8 os caminhos que partem e chegam em x_1 são triviais, ou seja, a corda que parte e chega de x_1 é a corda que desce trivialmente como um segmento de reta.

A partir daí e com base em [18, Proposição 3.1, Observação 3.2 e Proposição 3.5], reunimos na Proposição 3.9 uma coletânea de resultados referentes ao grupo de tranças da garrafa de Klein.

Proposição 3.9. *O homomorfismo $\pi: B_2(K^2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ é dado por*

$$\pi(b) = \begin{cases} \bar{0}, & \text{se } b \in P_2(K^2) \\ \bar{1}, & \text{se } b \notin P_2(K^2). \end{cases}$$

Ademais, dado um elemento $b \in B_2(K^2) - P_2(K^2)$, existe um único elemento $b_1 \in P_2(K^2)$ tal que

$$b = b_1 \sigma_1, \quad (3.10)$$

onde $\sigma_1 \in B_2(K^2)$ é o gerador de Artin. Existe um isomorfismo $I: P_2(K^2) \rightarrow F(u, v) \rtimes_{\theta} (\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z})$ tal que $I(B = \sigma_1^2) = (uvuv^{-1}; 0, 0)$. Por abuso de notação, também escreveremos $B = uvuv^{-1}$. A ação $\theta: \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(F(u, v))$ satisfaz:

$$\theta(m, n) : \begin{cases} u \mapsto B^{m-\delta_n} u^{\varepsilon_n} B^{-m+\delta_n} \\ v \mapsto B^m v u^{-2m} B^{-m+\delta_n} \\ B \mapsto B^{\varepsilon_n}, \end{cases}$$

onde

$$\delta_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ 1 & \text{se } n \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

$\varepsilon_n = (-1)^n$. Com respeito a esse isomorfismo, seguem as seguintes propriedades.

- i) O gerador de Artin $\sigma_1 \in B_2(K^2)$ satisfaz $\sigma_1^2 = (B; 0, 0)$.
- ii) O conjunto $\tilde{G} = \{(u; 0, 0), (0, v, 0), (\mathbf{I}; 1, 0), (\mathbf{I}; 0, 1), (B; 0, 0)\}$ gera $F(u, v) \rtimes_{\theta} (\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}) \cong P_2(K^2)$, onde \mathbf{I} representa o elemento identidade de $F(u, v)$. Ademais, por (3.10), $\tilde{G} \cup \{\sigma_1\}$ gera $B_2(K^2)$.
- iii) Se $l_{\sigma_1}: P_2(K^2) \cong F(u, v) \rtimes_{\theta} (\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}) \rightarrow P_2(K^2) \cong F(u, v) \rtimes_{\theta} (\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z})$ é o homomorfismo definido por $l_{\sigma_1}(b) = \sigma_1 b \sigma_1^{-1}$ para todo $b \in P_2(K^2)$, então:

$$\begin{aligned} l_{\sigma_1}(u^r; 0, 0) &= ((Bu^{-1})^r B^{-r}; r, 0) & l_{\sigma_1}(\mathbf{I}; m, 0) &= (\mathbf{I}; m, 0) \\ l_{\sigma_1}(v^s; 0, 0) &= ((uv)^{-s} (uB)^{\delta_s}; 0, s) & l_{\sigma_1}(\mathbf{I}; 0, n) &= (B^{\delta_n}; 0, n) \\ l_{\sigma_1}(B; 0, 0) &= (B; 0, 0), \end{aligned}$$

para todo $m, n, r, s \in \mathbb{Z}$, onde o terno $(a; b, c) \in F(u, v) \rtimes_{\theta} (\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z})$ e o símbolo \mathbf{I} denota o elemento trivial em $F(u, v)$.

- iv) Se $p_1: F_2(K^2) \rightarrow K^2$ é a aplicação definida por $p_1(x, y) = x$, então o homomorfismo induzido no grupo fundamental $(p_1)_{\#}: P_2(K^2) \rightarrow \pi_1(K^2) = \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ satisfaz $(p_1)_{\#}(w; r, s) = (r, s)$.

Considere as seguintes aplicações

$$\iota: \begin{cases} F(u, v) \rightarrow P_2(K^2) \\ w \mapsto (w; 0, 0), \end{cases} \quad p_F: \begin{cases} P_2(K^2) \rightarrow F(u, v) \\ (w; m, n) \mapsto w \end{cases} \quad e \quad \rho: \begin{cases} F(u, v) \rightarrow F(u, v) \\ \rho = p_F \circ l_{\sigma_1} \circ \iota \end{cases}$$

Dado um elemento $w \in F(u, v)$, seja $\rho(w) \in F(u, v)$ e $g(w) \in \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ tal que $l_{\sigma_1}(w; 0, 0) = (\rho(w), g(w))$, então $g: F(u, v) \rightarrow \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ é o homomorfismo definido na base $\{u, v\}$ por:

$$\begin{cases} g(u) = (1, 0) \\ g(v) = (0, 1). \end{cases}$$

Seja $\overline{\langle \sigma_1^2 \rangle}$ o fecho normal do elemento $\sigma_1^2 = (B; 0, 0)$ em $P_2(K^2)$. A menos de isomorfismo, $\overline{\langle \sigma_1^2 \rangle}$ pode ser identificado com o grupo $\text{Ker}(g)$ que é um grupo livre de rank infinito no conjunto $\{B_{k,l}\}_{k,l \in \mathbb{Z}}$, onde $B_{k,l} = v^k u^l B u^{-l} v^{-k}$, para todo $k, l \in \mathbb{Z}$. Com respeito com essa descrição, a ação $\theta: \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut} F(u, v)$ e a aplicação ρ induzem os homomorfismos $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\langle \sigma_1^2 \rangle}$ e $\overline{\langle \sigma_1^2 \rangle} \rightarrow \overline{\langle \sigma_1^2 \rangle}$, respectivamente, que também denotaremos por θ e ρ , respectivamente. Sejam $w \in F(u, v)$ e $g(w) = (r, s)$. Então existe um único elemento $x \in \overline{\langle \sigma_1^2 \rangle}$ tal que $w = u^r v^s x$.

3.5 Outros grupos e homomorfismos do Diagrama 2.9 para M e N sendo iguais a K^2

Com o intuito de completar o Diagrama 2.9 com as devidas apresentações dos grupos envolvidos quando M e N são iguais a K^2 , basta estudarmos o $H_1(K^2)$ e os homomorfismos que estão relacionados a ele no diagrama supracitado. Como falado no Teorema 2.5 e utilizando o [39, Página 527, Teorema], vamos descrever o isomorfismo entre $\pi_1 \left(\frac{K^2 \times K^2}{\sigma}, \overline{(x_0, x_0)} \right)$ e $H_1(K^2)$.

Proposição 3.10. *Seja α um laço em $\frac{K^2 \times K^2}{\sigma}$ com ponto base em $\overline{(x_0, x_0)}$. Então, existem laços α_1 e α_2 em K^2 com ponto base em x_0 tais que $\alpha(t) = \overline{(\alpha_1(t), \alpha_2(t))}$. A função*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1 \left(\frac{K^2 \times K^2}{\sigma}, \overline{(x_0, x_0)} \right) & \longrightarrow & \pi_1 (K^2, x_0)_{Ab} \cong H_1(K^2) \\ [\alpha] & \longmapsto & [\alpha_1] + [\alpha_2] \end{array}$$

é um isomorfismo.

Se escolhermos um ponto base $\overline{(x_0, x_1)} \in \frac{K^2 \times K^2}{\sigma}$ tal que $x_0 \neq x_1$, diferentemente do grupo de tranças, em $\pi_1 \left(\frac{K^2 \times K^2}{\sigma}, \overline{(x_0, x_1)} \right)$, podemos pensar um elemento deste grupo como uma configuração com 2 cordas tais que estas cordas podem se cruzar ou até, eventualmente, coincidir. Assim, dado um elemento $b \in B_2(K^2)$ com b_1 e b_2 suas cordas, na realização geométrica de $(\iota_2)_\#(b)$, a menos de homotopia, não distinguimos se b_1 passa pela frente ou por trás de b_2 .

Dessa forma, podemos então descrever algebricamente o homomorfismo $(\iota_2)_\#: B_2(K^2) \rightarrow \pi_1 \left(\frac{K^2 \times K^2}{\sigma} \right) \cong H_1(K^2)$.

Proposição 3.11. *Os grupos $\pi_1 \left(\frac{K^2 \times K^2}{\sigma}, \overline{(x_0, x_1)} \right)$ e $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ são isomorfos. Utilizando a descrição algébrica de $B_2(K^2)$ dada na Proposição 3.9, temos que o homomorfismo $(\iota_2)_\#: B_2(K^2) \rightarrow \pi_1 \left(\frac{K^2 \times K^2}{\sigma}, \overline{(x_0, x_1)} \right) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ satisfaz:*

$$(\iota_2)_\#: \begin{cases} (u; 0, 0) \mapsto (0, \bar{1}); \\ (v; 0, 0) \mapsto (-1, \bar{0}); \\ (I; 1, 0) \mapsto (0, \bar{0}); \\ (I; 0, 1) \mapsto (-2, \bar{0}); \\ \sigma_1 \mapsto (0, \bar{0}); \\ (B; 0, 0) \mapsto (0, \bar{0}). \end{cases}$$

Demonstração. Sejam $a_1, a_2, \sigma_1 \in B_2(K^2)$ como nas Figuras 3.7, 3.8 e 3.9. Como, pela Proposição 3.9, vemos um conjunto gerador para $B_2(K^2)$, o primeiro passo para entender esta demonstração é observar como podemos representar os geradores de $P_2(K^2)$ através da apresentação vista no Teorema 3.8. Por [17, Teorema 13, Teorema 19], obtemos a equivalência desses elementos descrita abaixo.

$$\begin{cases} (u; 0, 0) = \sigma_1 a_1 a_2 \sigma_1^{-1}; \\ (v; 0, 0) = \sigma_1 a_2^{-1} \sigma_1^{-1}; \\ (\mathbf{1}; 1, 0) = \sigma_1 a_1 \sigma_1^{-1} a_1 \sigma_1 a_2 \sigma_1^{-1} a_2; \\ (\mathbf{1}; 0, 1) = a_2^{-1} \sigma_1 a_2^{-1} \sigma_1^{-1}; \\ (B; 0, 0) = \sigma_1^2. \end{cases} \quad (3.11)$$

Para uma melhor precisão da demonstração, não vamos considerar grupos isomorfos como o mesmo grupo. Mais precisamente, faremos uso do seguinte diagrama, onde, cada homomorfismo, será explicado na sequência.

$$\begin{array}{ccc} B_2(K^2) = \pi_1 \left(\frac{(K^2 \times K^2) - \Delta}{\sigma}, \overline{(x_0, x_1)} \right) & \xrightarrow{(i_2)_\#} & \pi_1 \left(\frac{K^2 \times K^2}{\sigma}, \overline{(x_0, x_1)} \right) \\ & \searrow^{(\tilde{i}_2)_\#} & \downarrow \omega_\gamma \\ & & \pi_1 \left(\frac{K^2 \times K^2}{\sigma}, \overline{(x_0, x_0)} \right) \\ & & \downarrow \omega' \\ & & \langle \alpha_1 \alpha_2 \mid \alpha_1^2 \alpha_2^2 = 1 \rangle_{Ab} \\ & & \downarrow \kappa_{Ab} \\ & & \langle a, b \mid abab^{-1} = 1 \rangle_{Ab} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2. \end{array}$$

Seja γ_1 o caminho constante em $x_0 \in K^2$ e seja γ_2 o caminho em K^2 cuja imagem é um pequeno segmento de reta do ponto x_1 a x_0 . Então o caminho γ em $\frac{K^2 \times K^2}{\sigma}$ dado por $\gamma(t) = \overline{(\gamma_1(t), \gamma_2(t))}$, $t \in I$, induz um isomorfismo $\omega_\gamma: \pi_1 \left(\frac{K^2 \times K^2}{\sigma}, \overline{(x_0, x_1)} \right) \rightarrow \pi_1 \left(\frac{K^2 \times K^2}{\sigma}, \overline{(x_0, x_0)} \right)$. Seja ω' o isomorfismo de $\pi_1 \left(\frac{K^2 \times K^2}{\sigma}, \overline{(x_0, x_0)} \right)$ para a abelianização do grupo $\langle \alpha_1 \alpha_2 \mid \alpha_1^2 \alpha_2^2 = 1 \rangle$, visto na Proposição 3.10. Lembrando que a aplicação $\kappa: \langle \alpha_1 \alpha_2 \mid \alpha_1^2 \alpha_2^2 = 1 \rangle \rightarrow \langle a, b \mid abab^{-1} = 1 \rangle$ definido nos geradores por $\kappa(\alpha_1) = ab$ e $\kappa(\alpha_2) = b^{-1}$ é um isomorfismo cuja inversa é dada nos geradores por $\kappa^{-1}(a) = \alpha_1 \alpha_2^{-1}$ e $\kappa^{-1}(b) = \alpha_2^{-1}$. Sejam κ_{Ab} e κ_{Ab}^{-1} os isomorfismos correspondentes nos grupos abelianizados. Considerando que, pela Proposição 3.9 e para toda trança $b \in B_2(K^2)$, ela pode ser escrita por $b_1 \sigma_1^\varepsilon$, com $b_1 \in P_2(K^2)$ e $\varepsilon \in \{0, 1\}$, e pelo isomorfismo $P_2(K^2) \cong F(u, v) \times_\theta (\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z})$, temos que $(\tilde{i}_2)_\# = \kappa_{Ab} \circ \omega' \circ \omega_\gamma \circ (i_2)_\#$. Assim, usando as Figuras 3.7, 3.8 e 3.9, temos

$$(\tilde{i}_2)_\#(a_1) = \kappa_{Ab} \circ \omega' \circ \omega_\gamma \circ (i_2)_\#(a_1) = \kappa_{Ab}(-\alpha_1) = -a - b = (-1, \bar{1}) \quad (3.12)$$

$$(\tilde{i}_2)_\#(a_2) = \kappa_{Ab} \circ \omega' \circ \omega_\gamma \circ (i_2)_\#(a_2) = \kappa_{Ab}(-\alpha_2) = b = (1, \bar{0}) \quad (3.13)$$

$$(\tilde{i}_2)_\#(\sigma_1) = \kappa_{Ab} \circ \omega' \circ \omega_\gamma \circ (i_2)_\#(\sigma_1) = \kappa_{Ab}(0) = 0 = (0, \bar{0}) \quad (3.14)$$

Após toda a construção feita acima e como não há mais perigo de confusão, iremos denotar $(\tilde{t}_2)_\#$ também por $(t_2)_\#$. A descrição $(t_2)_\#$ dada no enunciado segue usando (3.11), (3.12), (3.13) e (3.14) as quais são feitas a partir das contas abaixo:

$$\begin{aligned} \bullet (t_2)_\#(\sigma_1 a_1 a_2 \sigma_1^{-1}) &= (0, \bar{0})(-1, \bar{1})(1, \bar{0})(0, \bar{0})^{-1} \\ &= (0, \bar{0})(-1, \bar{1})(1, \bar{0})(0, \bar{0}) \\ &= (0, \bar{1}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet (t_2)_\#(\sigma_1 a_2^{-1} \sigma_1^{-1}) &= (0, \bar{0})(1, \bar{0})^{-1}(0, \bar{0})^{-1} \\ &= (0, \bar{0})(-1, \bar{0})(0, \bar{0}) \\ &= (-1, \bar{0}). \end{aligned}$$

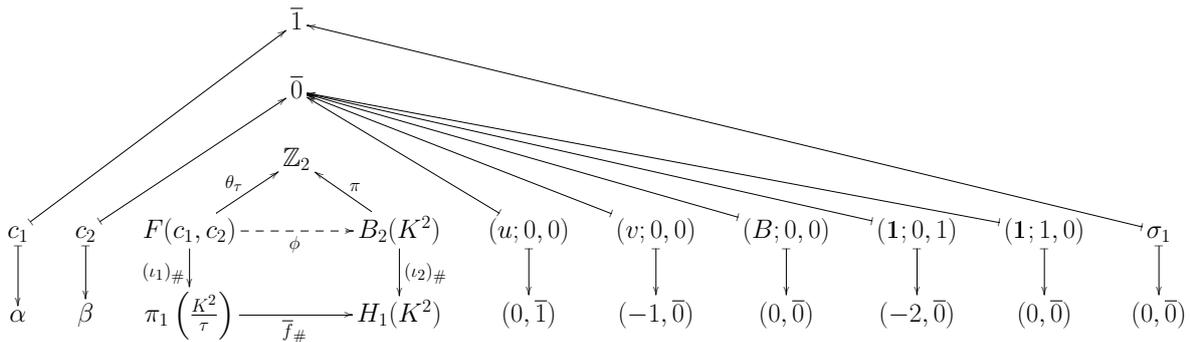
$$\begin{aligned} \bullet (t_2)_\#(\sigma_1 a_1 \sigma_1^{-1} a_1 \sigma_1 a_2 \sigma_1^{-1} a_2) &= (0, \bar{0})(-1, \bar{1})(0, \bar{0})^{-1}(-1, \bar{1})(0, \bar{0})(1, \bar{0})(0, \bar{0})^{-1}(1, \bar{0}) \\ &= (0, \bar{0})(-1, \bar{1})(0, \bar{0})(-1, \bar{1})(0, \bar{0})(1, \bar{0})(0, \bar{0})(1, \bar{0}) \\ &= (0, \bar{0}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet (t_2)_\#(a_2^{-1} \sigma_1 a_2^{-1} \sigma_1^{-1}) &= (1, \bar{0})^{-1}(0, \bar{0})(1, \bar{0})^{-1}(0, \bar{0})^{-1} \\ &= (-1, \bar{0})(0, \bar{0})(-1, \bar{0})(0, \bar{0}) \\ &= (-2, \bar{0}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet (t_2)_\#(\sigma_1^2) &= (0, \bar{0})(0, \bar{0}) \\ &= (0, \bar{0}). \end{aligned}$$

□

Conseguimos, assim, sintetizar as descrições algébricas dos homomorfismos através do seguinte diagrama.



3.6 Aplicação em K^2

Após as construções feitas nos primeiros capítulos e agora nas seções anteriores, reunimos toda a maquinária para enunciarmos uma aplicação do Teorema 2.7. Para isso, retomemos a Proposição 3.4, a Proposição 3.10 e a Proposição 3.11 para enunciarmos uma proposição antes da aplicação propriamente dita.

Proposição 3.12. *Dada uma aplicação $f: K^2 \rightarrow K^2$ tal que $\mu([f])$ é do Tipo B, como definidos nas proposições supracitadas. Então, o homomorfismo*

$$\bar{f}_\#: \pi_1 \left(\frac{K^2}{\tau} \right) = \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta\alpha\beta^{-1} = 1 \rangle \rightarrow \pi_1 \left(\frac{K^2 \times K^2}{\sigma} \right) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$$

satisfaz

$$\bar{f}_\#: \begin{cases} \alpha \rightarrow (0, \bar{0}) \\ \beta \rightarrow (4s, \bar{0}), \end{cases}$$

para algum $s \in \mathbb{Z}_+$.

Demonstração. Para um ponto $(x, y) \in K^2$, a involução $\tau: K^2 \rightarrow K^2$ é definida por $\tau(x, y) = (x + \frac{1}{2}, y)$, o que implica que τ é homotópico a aplicação identidade. Lembramos também que pela aplicação $\hat{f}: K^2 \rightarrow K^2 \times K^2$, definida por $\hat{f}(x) = (f(x), f(\tau(x)))$, a menos da homotopia mencionada anteriormente, podemos considerar o homomorfismo induzido de \hat{f} nos grupos fundamentais dado por $\hat{f}_\# = (f_\#, f_\#)$. Segue da Proposição 3.4 e da hipótese que $\mu([f])$ é do Tipo B que

$$\hat{f}_\#(a) = ((0, 0), (0, 0)) \quad \text{e} \quad \hat{f}_\#(b) = ((r, 2s), (r, 2s)).$$

Pela Figura 3.4, temos que $(p_\tau)_\#: \pi_1(K^2) \rightarrow \pi_1 \left(\frac{K^2}{\tau} \right)$ satisfaz $(p_\tau)_\#(a) = \alpha^2$ e $(p_\tau)_\#(b) = \beta$. Então, usando o Diagrama 2.4, a Proposição 3.10 e a Proposição 3.11 temos

$$\bar{f}_\#(\alpha^2) = (0, \bar{0}) \quad \text{e} \quad \bar{f}_\#(\beta) = (2s, \bar{r}) + (2s, \bar{r}) = (4s, \bar{0}),$$

Da primeira equação dada imediatamente acima, concluímos que $\bar{f}_\#(\alpha) = (0, \bar{\delta})$ para algum $\delta \in \{0, 1\}$. Argumentaremos por contradição com objetivo de concluir que $\delta = 0$. Então, suponhamos que $\bar{f}_\#(\alpha) = (0, \bar{1})$. Pelo [10, Teorema 2.1], existe uma aplicação $g: K^2 \rightarrow K^2$ tal que g é homotópica de f e $\text{BUCoin}(g; \tau)$ é finito. Assim, pelo Teorema 2.7, existe o homomorfismo $\phi: \pi_1 \left(\frac{K^2 - \bar{D}}{\tau} \right) \rightarrow \pi_1 \left(\frac{(K^2 \times K^2) - \Delta}{\sigma} \right)$ tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{Z}_2 & \\ \theta_\tau \nearrow & & \nwarrow \pi \\ \pi_1 \left(\frac{K^2 - \bar{D}}{\tau} \right) & \xrightarrow{\phi} & \pi_1 \left(\frac{(K^2 \times K^2) - \Delta}{\sigma} \right) \\ (i_1)_\# \downarrow & & \downarrow (i_2)_\# \\ \pi_1 \left(\frac{K^2}{\tau} \right) & \xrightarrow{\bar{f}_\#} & \pi_1 \left(\frac{K^2 \times K^2}{\sigma} \right) \end{array}$$

e $\phi([\partial D])$ é o produto de conjugados de B . Utilizando o Lema 3.7 e a Proposição 3.9, para cada $i \in \{1, 2\}$, temos $\phi(c_i) = (u^{r_i} v^{s_i} l_i; m_i, n_i) \sigma_1^{2-i}$, onde $r_i, s_i, m_i, n_i \in \mathbb{Z}$ e $l_i \in \langle \sigma_1^2 \rangle$. Novamente, pela Proposição 3.4 temos

$$\begin{aligned} (\iota_2)_\#(\phi(c_i)) &= (\iota_2)_\#((u^{r_i} v^{s_i} l_i; m_i, n_i) \sigma_1^{2-i}) \\ &= (\iota_2)_\#((u; 0, 0)^{r_i} (v; 0, 0)^{s_i} (l_i; 0, 0) (\mathbf{1}; 1, 0)^{m_i} (\mathbf{1}; 0, 1)^{n_i} (\sigma_1)^{2-i}) \\ &= (-s_i - 2n_i, \bar{r}_i). \end{aligned}$$

Então, novamente pela comutatividade do diagrama acima, temos que

$$\begin{cases} (0, \bar{1}) = (-s_1 - 2n_1, \bar{r}_1) \\ (4s, \bar{0}) = (-s_2 - 2n_2, \bar{r}_2). \end{cases} \quad (3.15)$$

Note que, por (3.15), podemos concluir que r_1 é ímpar e r_2 e s_1 são pares.

Como $\phi([\partial D])$ é o produto de conjugados de B e pela Proposição 3.9, temos $\phi([\partial D]) = (w; 0, 0)$, onde $w \in \langle \sigma_1^2 \rangle$ e este último grupo é identificado como o grupo livre de rank enumerável gerado por $\{B_{k,l}\}$. Pela Figura 3.4 e pelo Lema 3.7, concluimos que $\phi([\partial D]) = \phi(c_1 c_2 c_1 c_2^{-1})$. Assim, temos a seguinte igualdade no grupo $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} (0, 0) &= (p_1)_\#(w; 0, 0) \\ &= (p_1)_\#(\phi(c_1 c_2 c_1 c_2^{-1})) \\ &= (p_1)_\#((u^{r_1} v^{s_1} l_1; m_1, n_1) \sigma_1 (u^{r_2} v^{s_2} l_2; m_2, n_2) (u^{r_1} v^{s_1} l_1; m_1, n_1) \sigma_1 (u^{r_2} v^{s_2} l_2; m_2, n_2)^{-1}) \\ &= (p_1)_\#((u^{r_1} v^{s_1} l_1; m_1, n_1) l_{\sigma_1} ((u^{r_2} v^{s_2} l_2; m_2, n_2) (u^{r_1} v^{s_1} l_1; m_1, n_1)) \sigma_1^2 (u^{r_2} v^{s_2} l_2; m_2, n_2)^{-1}) \\ &= (p_1)_\#((u^{r_1} v^{s_1} l_1; m_1, n_1) l_{\sigma_1} ((u^{r_2}; 0, 0) (v^{s_2}; 0, 0) (l_2; 0, 0) (\mathbf{1}; m_2, 0) (\mathbf{1}; 0, n_2) (u^{r_1}; 0, 0) (v^{s_1}; 0, 0) \\ &\quad (l_1; 0, 0) (\mathbf{1}; m_1, 0) (\mathbf{1}; 0, n_1)) \sigma_1^2 (u^{r_2} v^{s_2} l_2; m_2, n_2)^{-1}) \\ &= (m_1, n_1) (r_2, 0) (0, s_2) (m_2, 0) (0, n_2) (r_1, 0) (0, s_1) (m_1, 0) (0, n_1) (m_2, n_2)^{-1} \\ &= (m_1, n_1) (r_2, s_2) (m_2, n_2) (r_1, s_1) (m_1, n_1) (m_2, n_2)^{-1} \\ &= (m_1 + \varepsilon_{n_1} r_2 + \varepsilon_{n_1} m_2 + \varepsilon_{n_1} r_1 + \varepsilon_{n_1} m_1 - m_2, n_1 + s_2 + n_2 + s_1 + n_1 - n_2) \\ &= (m_1 + \varepsilon_{n_1} r_2 + \varepsilon_{n_1} m_2 + \varepsilon_{n_1} r_1 + \varepsilon_{n_1} m_1 - m_2, 2n_1 + s_2 + s_1). \end{aligned}$$

A segunda coordenada e (3.15) implica que $s_2 = 0$. Então n_2 é par. Já, da primeira coordenada obtemos

$$\begin{cases} 0 = 2m_1 + r_1 + r_2, & \text{se } n_1 \text{ é par} \\ 0 = -2m_2 - r_1 - r_2, & \text{se } n_1 \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

o que é um absurdo, porque r_1 é ímpar e r_2 é par. Assim, δ tem de ser zero e temos que

$$\bar{f}_\#(\alpha) = (0, \bar{0}) \quad \text{e} \quad \bar{f}_\#(\beta) = (2s, \bar{r}) + (2s, \bar{r}) = (4s, \bar{0}).$$

□

Agora temos todos os requisitos estabelecidos para enunciar e demonstrar o resultado principal desta seção e o qual encerra o capítulo e, portanto, essa tese.

Teorema 3.13. *Seja $\tau: K^2 \rightarrow K^2$ uma involução livre. Dada uma aplicação $f: K^2 \rightarrow K^2$, temos*

- i) *Existe $g \simeq f$ tal que g não têm coincidências Borsuk-Ulam se, e somente se, f não se levanta para o toro T^2 .*
- ii) *Se f se levanta para o toro T^2 , então existe $g \simeq f$ tal que g tem apenas um par de coincidências do tipo Borsuk-Ulam. Além disso, cada ponto de coincidência desse par tem índice local igual a ± 1 .*

Demonstração. O item **i)** segue diretamente da Proposição **3.5**. Demonstraremos, portanto, o item **ii)**.

Seja $f: K^2 \rightarrow K^2$ tal que $\mu([f])$ seja do Tipo B . O objetivo da prova desse teorema é encontrar uma aplicação $g: K^2 \rightarrow K^2$ homotópica a aplicação f tal que g tem uma Borsuk-Ulam coincidência. De acordo com a Proposição **3.12**, existe $s \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\bar{f}_\# : \begin{cases} \alpha \rightarrow (0, \bar{0}) \\ \beta \rightarrow (4s, \bar{0}), \end{cases}$$

Defina $\phi: \pi_1 \left(\frac{K^2 - \bar{D}}{\tau} \right) \rightarrow \pi_1 \left(\frac{(K^2 \times K^2) - \Delta}{\sigma} \right)$ nos geradores livres por

$$\phi : \begin{cases} c_1 \mapsto \sigma_1 \\ c_2 \mapsto (\mathbf{1}; 0, 1)^{-2s}. \end{cases}$$

Observe que ϕ definida dessa maneira faz o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{Z}_2 & \\ \theta_\tau \nearrow & & \nwarrow \pi \\ \pi_1 \left(\frac{K^2 - \bar{D}}{\tau} \right) & \xrightarrow{\phi} & \pi_1 \left(\frac{(K^2 \times K^2) - \Delta}{\sigma} \right) \\ (\iota_1)_\# \downarrow & & \downarrow (\iota_2)_\# \\ \pi_1 \left(\frac{K^2}{\tau} \right) & \xrightarrow{\bar{f}_\#} & \pi_1 \left(\frac{K^2 \times K^2}{\sigma} \right) \end{array}$$

comutar. De fato,

$$\begin{aligned} (\iota_2)_\# \circ \phi(c_1) &= (\iota_2)_\#(\phi(c_1)) \\ &= (\iota_2)_\#(\sigma_1) \\ &= (0, \bar{0}) \\ &= (\bar{f})_\#(\alpha) \\ &= (\bar{f})_\#((\iota_1)_\#(c_1)) \\ &= (\bar{f})_\# \circ (\iota_1)_\#(c_1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\iota_2)_\# \circ \phi(c_2) &= (\iota_2)_\#(\phi(c_2)) \\ &= (\iota_2)_\#(\sigma_1) \\ &= (4s, \bar{0}) \\ &= (\bar{f})_\#(\beta) \\ &= (\bar{f})_\#((\iota_1)_\#(c_2)) \\ &= (\bar{f})_\# \circ (\iota_1)_\#(c_2). \end{aligned}$$

Resta verificarmos que a imagem de $[\partial D]$ pela ϕ resulta em um conjugado de B e, sendo verdadeira essa afirmação, observamos o seu expoente, o qual revela o índice atrelado a esta coincidência. Temos,

$$\begin{aligned}
\phi([\partial D]) &= \phi(c_1 c_2 c_1 c_2^{-1}) \\
&= \sigma_1(\mathbf{1}; 0, 1)^{-2s} \sigma_1(\mathbf{1}; 0, 1)^{2s} \\
&= \sigma_1(\mathbf{1}; 0, 1)^{-2s} \sigma_1^{-1} \sigma_1^2(\mathbf{1}; 0, 1)^{2s} \\
&= [\sigma_1(\mathbf{1}; 0, 1)^2 \sigma_1^{-1}]^{-s} \sigma_1^2(\mathbf{1}; 0, 1)^{2s} \\
&= [l_{\sigma_1}((\mathbf{1}; 0, 1)^2)]^{-s} \sigma_1^2(\mathbf{1}; 0, 1)^{2s} \\
&= [(\mathbf{1}; 0, 2)]^{-s} \sigma_1^2(\mathbf{1}; 0, 1)^{2s} \\
&= (\mathbf{1}; 0, -2s) \sigma_1^2(\mathbf{1}; 0, 2s) \\
&= \sigma_1^2 \\
&= B.
\end{aligned}$$

Para $\mathbb{1} \in P_2(K^2)$ e por haver apenas um conjugado de $B = \mathbb{1} B \mathbb{1}^{-1}$, temos que essa aplicação possui apenas uma coincidência do tipo Borsuk-Ulam e, mais ainda, possui índice local ± 1 em decorrência do seu expoente. \square

Referências Bibliográficas

- [1] ARTIN, E. *Theorie der Zöpfe*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **4** (1925), 47–72.
- [2] ARTIN, E. *Braids and permutations*, Ann. Math. **48** (1947), 643–649.
- [3] ARTIN, E. *Theory of Braids*, Ann. Math. **48** (1947), 101–126.
- [4] BELLINGERI, P. *On presentations of surface braid groups*, Journal of Algebra **274** (2004), 543–563.
- [5] BERRICK, A. J., COHEN, F., HANBURY, E., WONG, Y. L., WU, J., Eds. *Braids-Introductory lectures on braids, configurations and their applications*, vol. 19 of IMS Lecture Notes. World Scientific, Singapore, 2009.
- [6] BIRMAN, J. S. *Braids, links and mapping class groups*, Annals of Mathematics Studies 82, Princeton, **1974**.
- [7] CERQUEIRA DOS SANTOS JÚNIOR, P. C., OCAMPO, O., *The conjugacy problem and virtually cyclic subgroups in the Artin braid group quotient $\frac{B_n}{[P_n, P_n]}$* , Topology and its App. **293** (2021), 107564.
- [8] CERQUEIRA DOS SANTOS JÚNIOR, P. C., OCAMPO, O., *Virtual braid groups, virtual twin groups and crystallographic groups*, Journal of Algebra **632** (2023), 567–601.
- [9] COTRIM, F. S., *Homotopias finitamente fixadas e pares de homotopias finitamente coincidentes*. Dissertação de Mestrado (Mestrado em matemática), UFSCar, 2011.
- [10] COTRIM, F. S., VENDRÚSCOLO, D., *Nielsen coincidence theory applied to Borsuk-Ulam geometric problems*, Topology and its App. **159** (2012), 3738–3745.
- [11] COTRIM, F. S., VENDRÚSCOLO, D., *Nielsen Borsuk-Ulam number and its realization*, Bulletin of the Belgian Math. Society-Simon Stevin **24** (2017), 613–619.
- [12] FARB, B., MARGALIT, D., *A Primer on Mapping Class Groups*. Princeton University Press, **2011**.
- [13] FOX, R. H., NEUWIRTH, L., *The braid groups*, Math. Scand. **10** (1962), 119–126.
- [14] GONÇALVES, D. L., *Handbook of Topological Fixed Point, Chapter I: Homological methods in fixed point theory, Section 1: Coincidence theory*, Springer, Netherlands, 2005.
- [15] GONÇALVES, D. L., *The Borsuk-Ulam theorem for surfaces*, Quaestiones Mathematicae, 29:1, 117-123 (2006).

- [16] GONÇALVES, D. L., GUASCHI, J., *The Borsuk-Ulam theorem for maps into surface*, Topology Appl. **157** (2010), no. 10-11, 1742–1759.
- [17] GONÇALVES, D. L., GUASCHI, J., LAASS, V. C., *The Borsuk-Ulam property for homotopy classes of selfmaps of surfaces of Euler characteristic zero*, J. Fixed Point Theory Appl. **21** (2019), 425–440.
- [18] GONÇALVES, D. L., GUASCHI, J., LAASS, V., *The Borsuk-Ulam property for homotopy classes of maps from the torus to the Klein bottle*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **56** (2019), 529–558.
- [19] GONÇALVES, D. L., GUASCHI, J., LAASS, V., *The Borsuk-Ulam property for homotopy classes of maps from the torus to the Klein bottle - part 2*, Topol. Methods Nonlinear Anal. (2022), 1–26.
- [20] GONÇALVES, D. L., GUASCHI, J., OCAMPO, O., *A quotient of the Artin braid groups related to crystallographic groups*. Journal of Algebra **474** (2017), 393-423.
- [21] GUASCHI, J., LAASS, V., LIMA, C., VENDRÚSCOLO, D., *The minimal number of Borsuk-Ulam coincidences on surfaces*, Preprint.
- [22] GUASCHI, J., JUAN-PINEDA, D., *A survey of surface braid groups and the lower algebraic K-theory of their group rings*. L. Ji, A. Papadopoulos and S. T. Yau. Handbook of Group Actions, Volume II, **32**, International Press of Boston Inc. Advanced Lectures in Mathematics (2015), 23–76.
- [23] HANSEN, V. L., *Braids and Coverings: selected topics*. Cambridge University Press, 1989.
- [24] HATCHER, A., *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [25] HOPF, H., *Über die algebraische Anzahl von Fixpunkten*. Math. Zeitschr., 1929.
- [26] JIANG, B., *Lectures on Nielsen Fixed Point Theory*. American Mathematical Society, Rhode Island, 1983.
- [27] JIANG, B., *Surface Maps and Braid Equations I*. Differential Geometry and Topology. Lectures Notes in Mathematics, 1369. Springer-Verlag, Tianjin, 1987.
- [28] KASSEL, C., TURAEV, V., *Braid groups. With the graphical assistance of Olivier Dodane*. Springer-Verlag, New York, 2008.
- [29] LEE, J. B., *Topological Fixed Point Theory*. Asia Pacific Math. Newsletter (Basel) **3** (2013), 1–5.
- [30] LIMA, C., *Representações lineares dos grupos de tranças*. Dissertação de Mestrado (Mestrado em matemática), UFBA, 2019.
- [31] MASSEY, W. S., *Algebraic topology: An introduction*. Springer-Verlag, New York, 1967.
- [32] MATOUŠEK, J., *Using Borsuk-Ulam Theorem*. Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [33] MELO, G. D., VENDRÚSCOLO, D., *Nielsen-Borsuk-Ulam number for maps between tori*, J. Fixed Point Theory Appl. **25**, 61 (2023).

-
- [34] MINSKY, Y. N., *A brief introduction to mapping class groups (Lecture notes)*. Park City Mathematics Series, 20, **2011**.
- [35] MUNKRES, J. R., *Topology*, 2nd ed. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2000.
- [36] MURASUGI, K., KURPITA, B., *A study of braids*, vol. 484 of Mathematics and its Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.
- [37] SCHIRMER, H., *Fix-Finite Homotopies*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. **83**, No. 2 (1979), 531–542.
- [38] SCHIRMER, H., *Mindestzahlen von Koinzidenzpunkten*, Journal für die reine und angewandte Math. , Vol. **1995**, No. 194 (1955), 21–39.
- [39] SMITH, P. A., *Manifolds with abelian fundamental groups*, Annals of Math. **37** (1936), 526–533.
- [40] WHITEHEAD, G. W., *Elements of Homotopy Theory*, Springer-Verlag, New York, 1978.