



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Confinamento quântico:
influência geométrica na análise espectral**

Diana Carolina Suarez Bello

São Carlos-SP
Agosto de 2024



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Confinamento quântico: influência geométrica na análise espectral

Diana Carolina Suarez Bello

Orientador(a): Prof(a). Dr(a). Alessandra Aparecida Verri

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Doutora em Ciências.

“VERSÃO REVISADA APÓS A DEFESA”

Data da defesa: 30/08/2024

Visto do(a) orientador(a):

São Carlos-SP
Agosto de 2024



Folha de Aprovação

Defesa de Tese de Doutorado da candidata Diana Carolina Suarez Bello, realizada em 30/08/2024.

Comissão Julgadora:

Profa. Dra. Alessandra Aparecida Verri (UFSCar)

Profa. Dra. Vera Lucia Carbone (UFSCar)

Prof. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki (UFSCar)

Prof. Dr. Maria Rosario Astudillo Rojas (UFPR)

Prof. Dr. Marcus Antonio Mendonça Marrocos (UFAM)

*Dedico este trabalho
a Graciela Bello Castillo e ao Miller Albeiro Guayara Bueno
meus pais.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que me deu o dom da vida e me abençoa todos os dias.

Aos meus pais Graciela e Miller, às minhas irmãs Paola e Mileidy e a meu tio Julio pelo apoio, incentivo e confiança em mim.

Aos professores e técnicos do Departamento de Matemática da UFSCar, pela ajuda com a minha formação durante o doutorado.

A todos os amigos que fiz no caminho, pelo constante apoio e incentivo.

À minha amiga e orientadora Professora Alessandra Aparecida Verri pela guia, dedicação e paciência a este trabalho.

Aos membros da banca examinadora pela presença na defesa e pelas correções, sugestões e contribuições propostas.

Finalmente, à CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Seja Ω_β um domínio em \mathbb{R}^3 . Considere $-\Delta_{\Omega_\beta}^D$ o operador Laplaciano de Dirichlet em Ω_β . Neste trabalho, apresentamos uma análise detalhada das propriedades espectrais de $-\Delta_{\Omega_\beta}^D$ nos casos em que Ω_β é uma guia de onda com canto, uma guia de onda com canto variando e no caso de uma guia de onda reta, esticada e localmente torcida. Em particular, obtemos informações sobre o espectro essencial e discreto do operador, em que cada um dos resultados obtidos são influenciados pela respectiva geometria de Ω_β . Além disso, apresentamos uma análise espectral do operador Laplaciano em uma superfície em forma de uma guia de onda.

Palavras-chave: Laplaciano de Dirichlet, guias de onda, espectro essencial, espectro discreto.

Abstract

Let Ω be a domain in \mathbb{R}^3 . Consider $-\Delta_{\Omega_\beta}^D$ the Dirichlet Laplacian operator in Ω_β . In this work, we performed a detailed analysis of the spectral properties of $-\Delta_{\Omega_\beta}^D$ in case that Ω_β is a waveguide with corner, a waveguide with varying corner and in the case of a straight, stretched and locally twisted waveguide. In particular, we find information about the essential and discrete spectrum of the operator, in which each one of the results obtained are influenced by the respective geometry of Ω_β . Furthermore, we realized a spectral analysis of the Laplacian operator on a surface shaped like a waveguide

Keywords: Dirichlet Laplacian, waveguides, Essential spectrum, Discrete spectrum.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	7
1.1 O resolvente e o espectro de um operador	7
1.2 Operadores autoadjuntos	8
1.3 Operadores compactos	11
1.4 Formas sesquilineares	11
1.5 Operadores associados à formas quadráticas	14
1.6 O princípio Max-Min	15
1.7 Os quocientes de Rayleigh	16
1.8 Partição da unidade e a fórmula de localização IMS	16
2 Laplaciano de Dirichlet em guias de onda com canto	17
2.1 Geometria da guia de onda	18
2.2 Espectro essencial	18
2.3 Espectro discreto	20
2.3.1 Problema auxiliar	20
2.3.2 Mudança de variáveis	22
2.3.3 Existência e finitude do espectro discreto	23
2.4 Número de autovalores discretos	28
2.5 Conjectura: espectro discreto	33
2.6 Guias de onda com mais de um canto	34
2.7 Análise numérica	37
3 Laplaciano de Dirichlet em guias de onda com canto variando	43
3.1 Geometria da guia de onda e espectro essencial	44
3.2 Espectro discreto	45
3.2.1 Mudança de variáveis	45
3.2.2 Existência do espectro discreto	46
3.3 Geometria e espectro de uma guia de onda retangular	48

3.3.1	Mudança de variáveis	49
3.4	Número de autovalores discretos	50
3.5	Acumulação de autovalores	52
4	Laplaciano de Dirichlet em uma guia de onda reta, esticada e localmente torcida	57
4.1	Geometria da guia de onda e espectro essencial	57
4.2	Espectro discreto	59
4.2.1	Mudança de variáveis	59
4.2.2	Existência do espectro discreto	60
4.3	Análise numérica	62
5	Análises espectral em superfícies	65
5.1	Geometria da superfície	65
5.2	Mudança de variáveis	66
5.3	Espectro essencial	68
5.4	Espectro discreto	73
A	Autovalores e autofunções do Operador Laplaciano	77
A.1	Caso unidimensional	77
A.2	Caso 2-dimensional	80
A.3	Caso 3-dimensional	82
B	Lista de códigos	85
	Referências Bibliográficas	92

Lista de Figuras

1	Guias de onda com canto Ω_β , com $\beta = 0.9$	2
2	Guia de onda reta, esticada e localmente torcida Ω_β , com $\beta = 0.9$ e $\alpha(x) = (\tanh(x) + \pi)/2$	4
2.1	Guias de onda com canto que não depende do parâmetro de abertura β	17
2.2	Guia de onda com canto Ω_β , com $\beta = 0.5$	18
2.3	Guia de onda reta $\tilde{\Omega}_\beta$, com $\beta = 0.5$	19
2.4	Guia de onda retangular com canto Ω_β , com $\beta = 0.7$	28
2.5	Guias de onda isométricas, com $\beta = 0.7$	29
2.6	Semi-guia de onda retangular $\hat{\Omega}$	29
2.7	Fatia W com condições de Dirichlet-Neumann.	31
2.8	Semi-guia de onda Ω_β^+ , com $\beta = 4$, em que $\tilde{s}_1(\eta - 1) = \mathcal{L}_\beta(x_1(\eta - 1), (a + b)/2 - 1, d)$ e $\tilde{s}_2(\eta + 1) = \mathcal{L}_\beta(x_2(\eta + 1), (a + b)/2 + 1, c)$	34
2.9	Guia de onda com dois cantos $\Omega_{\beta, M}^2$, com $\beta = 0.7$ e $M = 2.25$	35
2.10	Guia de onda com três cantos $\Omega_{\beta, M}^3$, com $\beta = 0.7$ e $M = 2.25$	36
2.11	Guia de onda com quatro cantos $\Omega_{\beta, M}^4$, com $\beta = 0.7$ e $M = 2.25$	37
2.12	Relação entre o número de autovalores discretos $\#\lambda$ e β	38
2.13	Autovalores discretos do operador Laplaciano de Dirichlet em guias de onda retangulares com dois cantos $\Omega_{\beta, M}^2$	39
2.14	Autovalores discretos do operador Laplaciano de Dirichlet em Guias de onda retangulares com três cantos $\Omega_{\beta, M}^3$	40
2.15	Autovalores discretos do operador Laplaciano de Dirichlet em Guias de onda retangulares com três cantos $\Omega_{\beta, M}^4$	41
2.16	Guias de onda retangulares com mais de um canto $\Omega_{\beta, M}^n$, para $n = 2, 3, 4$, $\beta = 0.7$ e $M = 2.25$	42
3.1	Guias de onda com canto variando com relação ao parâmetro de abertura β	43
3.2	Guia de onda com canto variando Ω_β , seção transversal inclinada S e $\beta = 0.7$	44
3.3	Guia de onda Γ_β , com $\beta = 0.7$	48
3.4	Guias de onda retangulares isométricas, com $\beta = 0.7$	49
3.5	Fatia W com condições de Dirichlet-Neumann.	50

3.6	Paralelepípedo P_β com condições de Dirichlet contido em Γ_β , com $\beta = 4$ e $\alpha = 3$. . .	53
3.7	Relação entre o valor dos autovalores discretos λ do operador $-\Delta_{\Gamma_\beta}^D$ e β	55
4.1	Guia de onda reta, esticada e localmente torcida, com $\beta = 0.9$ e $\alpha(x) = (\tanh(x) + \pi)/2$. . .	58
4.2	Guia de onda retangular, reta, esticada e localmente torcida, com $\beta = 0.9$ e $\alpha(x) =$ $(\tanh(x) + \pi)/2$	62
4.3	Relação da constante c e autovalores discretos do operador $-\Delta_{\Gamma_\beta}^D$, para $\beta = 1.5$	63
4.4	Gráfico da função $V(x)$, para $\alpha(x) = (\tanh(x) + \pi)/2$, para alguns valores de β	64
5.1	Superfície em forma de uma guia de onda.	66

Lista de Símbolos

\mathcal{B}	Espaço de Banach.
\mathcal{H}	Espaço de Hilbert.
$Y \subseteq X$	Y é um subconjunto denso de X .
$\mathbf{1}$	Operador identidade.
$\text{Im } T$	A imagem de uma transformação T .
$\text{dom } T$	O domínio de uma transformação T .
$\text{N}(T)$	O núcleo de uma transformação T .
$B(\mathcal{B})$	Conjunto de operadores lineares limitados de \mathcal{B} em \mathcal{B} .
$C.S$	Desigualdade de Cauchy-Schwarz. $ \langle \xi, \eta \rangle \leq \ \xi\ \ \eta\ , \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}$.
$L^\infty(X)$	$\{\psi : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável} : \exists 0 < M < \infty, \text{ com } \psi(x) < M \text{ q.t.p } x\}$.
$L^p(X)$	$\{\psi : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável} : \ \psi\ _p^p := \int_X \psi ^p d\mu < \infty, 1 \leq p < \infty\}$.
$\nabla \psi$	O gradiente de Ψ nas coordenadas usuais em \mathbb{R}^n .
$\mathcal{H}^m(\Omega)$	$\{\psi \in L^2(\Omega) : \partial^\alpha \psi \in L^2(\Omega), \alpha \leq m\}$.

Introdução

O espectro do operador Laplaciano de Dirichlet em domínios ilimitados tem sido extensivamente estudado nos últimos anos. De fato, a existência de autovalores discretos é um problema não trivial e depende da geometria da região [1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 18, 19, 22, 23, 24, 25, 27, 29, 30, 31, 32, 33, 36]. Este tópico desempenha um protagonismo relevante na mecânica quântica, pois a procura de estados ligados do hamiltoniano de uma partícula em guias de ondas quânticas permitem descrever a probabilidade de que um sistema (por exemplo, um elétron ou um átomo) se localize em uma determinada região do espaço, tais estados são bem conhecidos na matemática como autovalores e estes representam as energias admissíveis do sistema.

Seja Ω uma capa cônica em \mathbb{R}^2 (resp. \mathbb{R}^3), isto é, uma região infinita em \mathbb{R}^2 (resp. \mathbb{R}^3) limitada por duas superfícies cônicas idênticas. Denote por $-\Delta_{\Omega}^D$ o operador Laplaciano de Dirichlet em Ω . Neste caso, mesmo a região possuindo uma geometria simples, o operador possui importantes propriedades espectrais; [1, 8, 11, 12, 13, 22, 23, 33]. Nos próximos parágrafos, apresentaremos com mais detalhes alguns dos modelos e resultados.

Suponha que Ω é suficientemente suave no sentido que a superfície referencial cônica é suave, excepto no seu vértice. Em particular, para o caso 2-dimensional, para cada $\theta \in (0, \pi/2)$, considere Ω como sendo

$$V_{\theta} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \tan \theta < |y| < \left(x + \frac{\pi}{\sin \theta} \right) \tan \theta \right\}; \quad (1)$$

V_{θ} é também chamada de faixa com canto. Em [22] os autores investigaram o caso $\theta = \pi/4$ e provaram que o operador $-\Delta_{V_{\theta}}^D$ tem um único autovalor discreto o qual é igual a 0,93. Em [1] verificou-se que $-\Delta_{V_{\theta}}^D$ tem pelo menos um autovalor discreto, para cada $\theta \in (0, \pi/2)$, e mais que um para qualquer ângulo suficientemente pequeno. Além disso, em [12] os autores provaram que o número de autovalores discretos do operador $-\Delta_{V_{\theta}}^D$ é sempre finito, para cada $\theta \in (0, \pi/2)$, e este número tende para infinito quando θ aproxima-se a zero. Em [33] os autores provaram a existência de um ângulo crítico α^* de modo que, para todo $\theta \in (\alpha^*, \pi/2)$, a multiplicidade total do espectro discreto é um; também foi encontrado um limite inferior assintótico para a multiplicidade quando θ se aproxima de zero.

Modelos 3-dimensionais foram estudados em [8, 11, 13, 19, 23]. Como exemplo, para cada $\theta \in (0, \pi/2)$, considere a capa cônica Σ_{θ} em \mathbb{R}^3 dada pela rotação da região plana

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \in ((0, \pi \cot \theta) \times (0, x \tan \theta]) \cup ((\pi \cot \theta, \infty) \times (0, \pi))\},$$

ao longo do eixo $y = x \tan \theta$ em \mathbb{R}^3 . Os resultados de [8, 19] mostram que o espectro discreto de $-\Delta_{\Sigma_\theta}^D$ é não vazio e que a sua cardinalidade pode exceder qualquer número inteiro fixo para θ suficientemente pequeno. Mais tarde, em [23], os autores observaram que as demonstrações de [8, 19] podem ser usadas para garantir que o operador possui uma sequência infinita de autovalores discretos. Em [13] os autores também analisaram a infinitude dos autovalores discretos no caso em que θ é suficientemente pequeno. Em particular, como o domínio meridiano de Σ_θ é uma faixa como em (1), os autores discutiram como se pode passar de um número finito de estados ligados para um número infinito adicionando uma dimensão.

Em [11] os autores estudaram o Laplaciano de Dirichlet com uma capa cônica não suave. Nesse trabalho, a região pode ser vista como um octante do qual outro octante “paralelo” é removido. Eles mostraram que o espectro discreto do operador é não vazio e finito. Sobre a questão da finitude ou infinitude do espectro discreto, esse trabalho apresenta diferenças significativa entre as capas cônicas suaves, como as estudadas em [13, 34, 23], e as capas cônicas não-suaves em \mathbb{R}^3 .

Motivados pelos trabalhos dos parágrafos anteriores, uma das nossas principais contribuições ao tema é apresentado em [2], resultados que mostramos com detalhes no Capítulo 2. No entanto, apresentamos brevemente o modelo e alguns dos resultados abaixo.

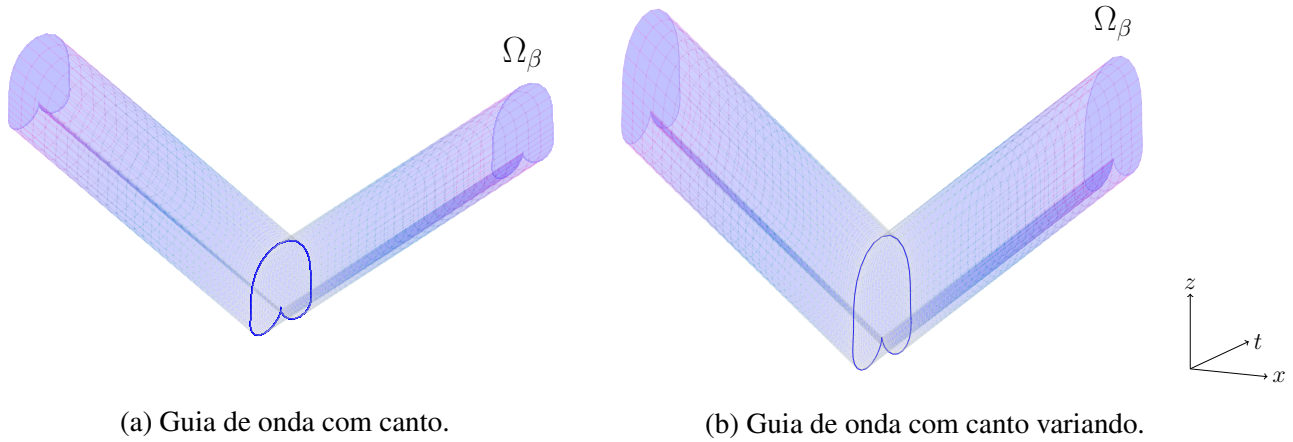


Figura 1: Guias de onda com canto Ω_β , com $\beta = 0.9$.

Seja $S \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto aberto, conexo e limitado. Considere a curva espacial $r_\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $r_\beta(x) := (x, 0, f(x)) = (x, 0, \beta|x|)$, com $\beta \in (0, \infty)$. Definimos a “guia de onda com canto”

$$\Omega_\beta := \{r_\beta(x) + y_1 e_2 + y_2 e_3 : (x, y_1, y_2) \in \mathbb{R} \times S\};$$

e_1, e_2 denotam os vetores $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$, respectivamente. Denote por $-\Delta_{\Omega_\beta}^D$ o operador Laplaciano de Dirichlet em Ω_β . O objetivo do Capítulo 2 é estudar o espectro deste operador. No contexto deste modelo, β denota um parâmetro de “abertura” da guia de onda com canto; veja Figura 1a

Considere o operador bidimensional

$$T(\beta) := -\partial_{y_1}^2 - (1 + \beta^2)\partial_{y_2}^2, \quad (2)$$

$$\text{dom } T(\beta) := \{v \in \mathcal{H}_0^1(S) : T(\beta)v \in L^2(S)\};$$

denote por $E_1(\beta)$ o primeiro autovalor de $T(\beta)$.

Nosso primeiro resultado (veja Proposição 2.1) mostra que o espectro essencial do operador $-\Delta_{\Omega_\beta}^D$ é o intervalo $[E_1(\beta), \infty)$. Em seguida mostramos a existência de elementos no seu espectro discreto (veja Proposição 2.4). Além disso, mostramos que o número de autovalores discretos de $-\Delta_{\Omega_\beta}^D$ é sempre finito (veja Proposição 2.5). Assim, podemos observar que de fato a existência de um canto na geometria da guia de onda, dada pela curva espacial $r_\beta(x)$, afeta a estrutura do espectro do operador.

No Capítulo 2 também podemos encontrar alguns resultados interessantes no caso particular de uma guia de onda retangular com canto; isto é, no caso em que S é um retângulo. Uma questão natural na hora de estudar este tipo de regiões é saber o que acontece como espectro do operador quando o domínio possui mais de um canto. Esse tema também é abordado neste capítulo, onde respondemos esta pergunta.

Por outro lado, no Capítulo 3 estudamos o espectro do operador $-\Delta_{\Omega_\beta}^D$, no caso em que Ω_β é uma “guia de onda com canto variando”; veja Figura 1b. Neste capítulo mostramos que este domínio, ainda tendo uma geometria semelhante ao domínio definido no Capítulo 2, implica propriedades espectrais interessantes para o operador. Nosso primeiro resultado (ver Proposição 3.1) mostra que o espectro essencial do operador $-\Delta_{\Omega_\beta}^D$ é o intervalo $[E_1, \infty)$, em que E_1 denota o primeiro autovalor discreto do operador Laplaciano de Dirichlet em S . Além disso, mostramos a existência do espectro discreto do operador (ver Proposição 3.2). Por outro lado, mostramos propriedades espectrais interessantes no caso particular de uma guia de onda retangular com canto variando.

Agora, não sendo menos importante, existem estudos relacionados a tipos de geometria que implicam a inexistência de autovalores discretos no operador Laplaciano. Por exemplo, seja Γ é uma linha reta. Considere a região tubular construída pela rotação de uma seção transversal não circular ao longo de Γ . Nesta situação, em [21] os autores mostraram que um efeito de torção local não produz autovalores discretos. Baseado neste modelos, mostramos que uma deformação apropriada pode garantir a existência de elementos no espectro discreto. Os detalhes são apresentados abaixo.

Novamente, seja $S \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto aberto, conexo, limitado e não invariante por rotações (com relação ao origem em \mathbb{R}^2). Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \beta x$, uma função contínua e localmente Lipschitz, com $\beta \in (0, \infty)$, diferenciável em quase todo ponto e com $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Considere também $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 com $\alpha' \in L^\infty(\mathbb{R})$. A partir destas funções, definimos a função rotação

$$\mathcal{R}_\alpha(x, y_1, y_2) = (0, y_1 \cos(\alpha(x)) - y_2 \sin(\alpha(x)), y_1 \sin(\alpha(x)) + y_2 \cos(\alpha(x))),$$

e a curva espacial $r_\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $r_\beta(x) := (x, 0, f(x)) = (x, 0, \beta x)$. Finalmente, definimos a região

$$\Omega_\beta := \{r_\beta(x) + \mathcal{R}_\alpha(x, y_1, y_2) : (x, y_1, y_2) \in \mathbb{R} \times S\},$$

a qual chamamos de “guia de onda reta, esticada e localmente torcida”; veja Figura 2. Denote por $-\Delta_{\Omega_\beta}^D$ o operador Laplaciano de Dirichlet em Ω_β . O objetivo do Capítulo 4 é estudar o espectro

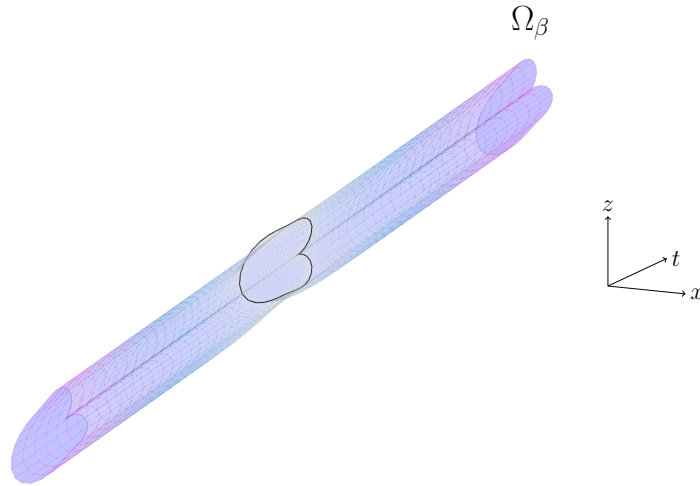


Figura 2: Guia de onda reta, esticada e localmente torcida Ω_β , com $\beta = 0.9$ e $\alpha(x) = (\tanh(x) + \pi)/2$.

deste operador. No contexto deste capítulo, β denota um parâmetro de deformação dado por um “estiramento” da guia de onda reta e localmente torcida.

Como uma hipótese natural, vamos assumir que

$$\alpha'(x) \approx 0, \quad |x| \rightarrow \infty;$$

assim Ω_β é assintoticamente reta “no infinito”.

Nosso primeiro resultado (veja Proposição 4.1) mostra que o espectro essencial do operador $-\Delta_{\Omega_\beta}^D$ é o intervalo $[E_1(\beta), \infty)$, em que $E_1(\beta)$ denota o primeiro autovalor do operador $T(\beta)$ definido em (2). Em seguida estudamos sob quais condições o espectro discreto é não vazio. Em particular, mostramos que a condição $\int_{\mathbb{R}} V(x) dx < 0$ pode gerar autovalores discretos para o operador (veja Proposição 4.2), em que

$$V(x) := (A_1 + B_1 - 2C_1)(\alpha'(x))^2 + 2(C_3 - A_2)\beta\alpha'(x)\sin(\alpha(x)) + 2(B_2 - C_2)\beta\alpha'(x)\cos(\alpha(x)) \\ + (A_3 - B_3)\beta^2(\sin(\alpha(x)))^2 + 2C_4\beta^2\sin(\alpha(x))\cos(\alpha(x)).$$

para $x \in \mathbb{R}$. As constantes $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$ e C_4 dependem das características da região S e estão definidas na Seção 4.2. Assim, podemos observar que de fato a geometria da guia de onda reta, dada pelo parâmetro de deformação β e a função rotação \mathcal{R}_α , afeta a estrutura do espectro do operador no sentido de produzir autovalores discretos.

Nos Capítulos 2, 3 e 4, na descrição dos respectivos conjuntos do espectro essencial do operador Laplaciano de Dirichlet em Ω_β , é usado fortemente a Proposição 2 em [38], em que o autor mostra que o espectro essencial do operador $-\Delta_{\Omega_\beta}^D$ depende basicamente da geometria da região apenas no infinito.

Para finalizar, seja $\xi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva fechada de classe C^2 , parametrizada pelo comprimento de arco t , $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$. Considere também $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções localmente Lipschitz

contínuas, diferenciáveis em quase todo ponto e com $f', g' \in L^\infty(\mathbb{R})$. A partir destas funções, definiremos a curva espacial $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $r(x) = (x, f(x), g(x))$. Finalmente, definiremos a superfície

$$\mathcal{S} := \{r(x) + \xi_1(t)e_2 + \xi_2(t)e_3 : x \in \mathbb{R} \text{ e } t \in [0, 1]\}.$$

Denote por $-\Delta_{\mathcal{S}}$ o operador Laplaciano em \mathcal{S} . O objetivo do Capítulo 5 é estudar o espectro deste operador. Um ponto interessante neste caso é que o operador Laplaciano não está sujeito a condições de contorno no domínio.

Como uma hipótese natural, vamos assumir que

$$f'(x) \approx \beta_1 \quad \text{e} \quad g'(x) \approx \beta_2, \quad |x| \rightarrow \infty;$$

assim \mathcal{S} é uma superfície tubular reta “no infinito”.

Considere o operador 2-dimensional

$$T_{\beta_1, \beta_2} := -\frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{1 + \beta_1^2 + \beta_2^2}{h_{\beta_1, \beta_2}^2} \right) \partial_t \right] + (1 + \beta_1^2 + \beta_2^2) \left[\left(\frac{(h_{\beta_1, \beta_2}^2)'}{4h_{\beta_1, \beta_2}^4} \right)' + \left(\frac{(h_{\beta_1, \beta_2}^2)'}{4h_{\beta_1, \beta_2}^3} \right)^2 \right],$$

$$\text{dom } T_{\beta_1, \beta_2} := \{v \in \mathcal{H}^1(\mathcal{C}) : T_{\beta_1, \beta_2} v \in L^2(\mathcal{C}), v'(0) = v'(1)\},$$

em que $h_{\beta_1, \beta_2}^2 := 1 + (\beta_1 \xi_2' - \beta_2 \xi_1')^2$. Denote por $E_1(0)$ o primeiro autovalor discreto de T_{β_1, β_2} .

Nosso primeiro resultado (veja Proposição 5.4) mostra que o espectro essencial do operador $-\Delta_{\mathcal{S}}$ é o intervalo $[E_1(0), \infty)$. Em seguida estudamos sob quais condições o espectro discreto é não vazio. Em particular, mostramos que a condição $\int_{\mathbb{R}} V(x) dx \leq 0$ pode gerar autovalores discretos para o operador (veja Proposição 5.5), em que

$$V(x) := C(x) + (1 + (f')^2 + (g')^2)D(x) - (1 + \beta_1^2 + \beta_2^2)E, \quad x \in \mathbb{R}.$$

As funções $C(x)$, $D(x)$ e a constante E também dependem das características de Ω_{β} e estão definidas na Seção 5.4. Assim, fica claro como a geometria da superfície, dada pela definição das curvas $\xi(t)$ e $r(x)$, influencia no comportamento do espectro do operador Laplaciano.

Resumindo, este trabalho está dividido em cinco capítulos. No Capítulo 1, apresentamos as definições e resultados usados ao longo do trabalho. O Capítulo 2 é dedicado ao estudo do operador Laplaciano de Dirichlet $-\Delta_{\Omega_{\beta}}^D$ em guias de onda com canto, este capítulo é dividido em sete seções. Na Seção 2.1, apresentamos a geometria da guia de onda com canto, Ω_{β} . Na Seção 2.2 estudamos o espectro essencial do operador Laplaciano de Dirichlet em Ω_{β} . Na seção 2.3, demonstramos a existência do espectro discreto do operador $-\Delta_{\Omega_{\beta}}^D$ e o fato deste conjunto ser finito. Nesta seção, primeiramente definimos um problema auxiliar com o fim de mostrar como a simetria da região influencia no espectro do operador. Em seguida, realizamos uma mudança de variáveis a fim de trabalhar com uma guia de onda reta. Na Seção 2.4, trabalhamos com uma guia de onda retangular com canto, para este caso achamos um intervalo de variação de β no qual o espectro discreto do operador Laplaciano de Dirichlet possui um único autovalor. Na Seção 2.5, mostramos uma conjectura sobre o

comportamento do espectro do operador $-\Delta_{\Omega_\beta}^D$ quando β tende a infinito. Na Seção 2.6, é mostrada a existência do espectro discreto do operador Laplaciano de Dirichlet, no caso em que a guia de onda possui mais de um canto. Na Seção 2.7, exemplificamos de forma numérica os resultados mostrados no capítulo.

O Capítulo 3 é dedicado ao estudo do operador Laplaciano de Dirichlet $-\Delta_{\Omega_\beta}^D$ em guias de onda com canto que depende de β , este capítulo está dividido em cinco seções. Na Seção 3.1, apresentamos a geometria da guia de onda com canto que depende do parâmetro de abertura β , Ω_β , e encontramos o espectro essencial do operador $-\Delta_{\Omega_\beta}^D$. Na seção 3.2, realizamos uma mudança de variáveis a fim de trabalhar com uma guia de onda reta e demonstramos a existência do espectro discreto do operador. Na seção 3.3, descrevemos a geometria de uma guia de onda retangular e neste caso definimos uma outra forma quadrática. Na Seção 3.4, mostramos a existência de um intervalo de variação de β de modo que o espectro discreto do operador $-\Delta_{\Omega_\beta}^D$ possui um único autovalor. Na Seção 3.5, mostramos o comportamento dos autovalores discretos quando β tende a infinito.

O Capítulo 4 é dedicado ao estudo do operador Laplaciano de Dirichlet $-\Delta_{\Omega_\beta}^D$ em guias de onda retas esticadas localmente torcidas, este capítulo está dividido em três seções. Na Seção 4.1, apresentamos a geometria da guia de onda reta, esticada e localmente torcida, Ω_β , e encontramos o espectro essencial do operador $-\Delta_{\Omega_\beta}^D$. Na seção 4.2, realizamos uma mudança de variáveis a fim de tirar a dependência de β do domínio e mostramos condições suficientes que gerem elementos no espectro discreto do operador Ω_β . Na seção 4.3, mediante um exemplo numérico para o caso de uma guia de onda retangular, reta, esticada e localmente torcida, analisamos o comportamento dos elementos no espectro discreto do operador $-\Delta_{\Omega_\beta}^D$.

Por último, o Capítulo 5 é dedicado ao estudo do operador Laplaciano $-\Delta_S$ em superfícies em formas de guias de onda, este capítulo está dividido em quatro seções. Na Seção 5.1, apresentamos a geometria da superfície de uma guia de onda, S . Na Seção 5.2, realizamos duas mudanças de variáveis a fim de trabalhar com uma superfície de uma guia de onda reta. A Seção 5.3, é dedicada às demonstrações de alguns resultados principais relacionados ao espectro essencial do operador $-\Delta_S$. Na Seção 5.4, mostramos a existência de elementos no espectro discreto do operador Laplaciano em S .

No final do texto apresentamos um apêndice com resultados que foram usados ao longo do trabalho. Além disso, apresentamos os códigos usados nos exemplos numéricos.

Preliminares

Neste capítulo vamos apresentar alguns resultados básicos, além de notações, que utilizaremos ao longo do trabalho. Iniciamos com algumas definições e resultados da teoria de operadores autoadjuntos e operadores compactos. Em seguida, vamos apresentar alguns tópicos relacionados aos operadores que são definidos por formas quadráticas. Por último, apresentaremos o Princípio Max-Min que será uma ferramenta bastante útil ao longo do trabalho.

Neste capítulo, \mathcal{B} sempre denota um espaço de Banach, \mathcal{H} um espaço de Hilbert, $B(\mathcal{B})$ o conjunto de operadores lineares $T : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ limitados. Além disso, a notação $Y \sqsubseteq X$ indica que Y é um subconjunto denso em X . Devido ao caráter introdutório, a maioria das demonstrações serão omitidas.

1.1 O resolvente e o espectro de um operador

Definição 1.1. Seja $T : \text{dom} T \subset \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ um operador linear no espaço de Banach complexo $\mathcal{B} \neq \{0\}$. O conjunto resolvente de T , denotado por $\rho(T)$, é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais o operador resolvente de T em λ ,

$$R_\lambda(T) : \mathcal{B} \rightarrow \text{dom} T, \quad R_\lambda(T) := (T - \lambda \mathbf{1})^{-1},$$

existe e é limitado, isto é, $R_\lambda(T) \in B(\mathcal{B})$. O espectro de T é o conjunto $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$.

Observemos que $\sigma(T)$ contém todos os *autovalores* do operador T , isto é, todos os números λ para os quais a equação $(T - \lambda \mathbf{1})\psi = 0$ tem pelo menos uma solução não nula $\psi \in \text{dom} T$; nesse caso, ψ é chamado de *autovetor* de T .

Teorema 1.2. Seja $T : \text{dom} T \subset \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ e $\lambda_0 \in \rho(T)$. Então, para todo λ no disco $|\lambda - \lambda_0| < 1/\|R_{\lambda_0}(T)\|$ do plano complexo, $R_\lambda(T) \in B(\mathcal{B})$ e

$$R_\lambda(T) = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}(T)^{j+1},$$

em que a série é absolutamente convergente.

Corolário 1.3. $\rho(T)$ é um conjunto aberto e $\sigma(T)$ é um conjunto fechado de \mathbb{C} .

As provas dos resultados enunciados nesta seção podem ser encontrados em [16].

1.2 Operadores autoadjuntos

Definição 1.4. Um operador linear $T : \text{dom } T \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ é *simétrico* se

$$\langle T\xi, \eta \rangle = \langle \xi, T\eta \rangle, \quad \forall \xi, \eta \in \text{dom } T.$$

T é *hermitiano* se é simétrico e $\text{dom } T \sqsubseteq \mathcal{H}$.

Sejam \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 espaços de Hilbert. Seja $T : \text{dom } T \sqsubseteq \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$, definimos $\text{dom } T^*$ como o espaço vetorial dos elementos $\eta \in \mathcal{H}_2$ tais que o funcional linear

$$\xi \rightarrow \langle \eta, T\xi \rangle, \quad \xi \in \text{dom } T,$$

pode ser representado por $\zeta \in \mathcal{H}_1$, ou seja,

$$\langle \eta, T\xi \rangle = \langle \zeta, \xi \rangle, \quad \forall \xi \in \text{dom } T.$$

Definição 1.5. O *adjunto* de T é o operador T^* com domínio $\text{dom } T^*$ definido acima e, para $\eta \in \text{dom } T^*$, $T^*\eta := \zeta$. Assim,

$$\langle \eta, T\xi \rangle = \langle T^*\eta, \xi \rangle, \quad \forall \xi \in \text{dom } T, \forall \eta \in \text{dom } T^*.$$

Note que é essencial que $\text{dom } T \sqsubseteq \mathcal{H}_1$ para que $T^* : \text{dom } T^* \subset \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ esteja bem definido.

A seguinte proposição mostra algumas propriedades do adjunto para o caso específico de operadores limitados.

Proposição 1.6. Se $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, então $T^* \in B(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$, $T^{**} = T$ e $\|T^*\| = \|T\|$. Portanto,

$$\langle \eta, T\xi \rangle = \langle T^*\eta, \xi \rangle, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}_1, \forall \eta \in \mathcal{H}_2.$$

Definição 1.7. a) Um operador linear $T : \text{dom } T \sqsubseteq \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ é *autoadjunto* se $T = T^*$

b) Um operador limitado $T : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ é *unitário* se $\text{Im } T = \mathcal{H}_2$, é injetor e $T^* = T^{-1}$.

Observação 1.8. a) Note que $T : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ é unitário se, e somente se,

$$\langle T\xi, T\eta \rangle = \langle \xi, T^*T\eta \rangle = \langle \xi, \eta \rangle, \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}_1,$$

e $\text{Im } T = \mathcal{H}_2$; em particular os operadores unitários são isometrias e T^{-1} também é unitário.

b) Se T é autoadjunto, então $\langle T\xi, \xi \rangle \in \mathbb{R}$, para todo $\xi \in \text{dom } T$. De fato, dado $\xi \in \text{dom } T$

$$\langle T\xi, \xi \rangle = \langle \xi, T^*\xi \rangle = \langle \xi, T\xi \rangle = \overline{\langle T\xi, \xi \rangle}.$$

Além disso, um operador autoadjunto é simétrico. Portanto, todo operador autoadjunto é hermitiano.

c) Se $T \in B(\mathcal{B})$, a noção de hermitiano e autoadjunto coincidem.

Definição 1.9. a) Dizemos que os espaços de Hilbert \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 são *unitariamente equivalentes* se existe um operador unitário $U : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$.

b) Dois operadores lineares $T_j : \text{dom } T_j \subset \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_j$, $j = 1, 2$, são *unitariamente equivalentes* se existe um operador unitário $U : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ tal que $\text{dom } T_2 := U \text{dom } T_1$ e

$$T_2 = UT_1U^{-1} = UT_1U^*.$$

Proposição 1.10. *Sejam T_1 e T_2 operadores lineares unitariamente equivalentes. Então,*

a) *se T_1 é hermitiano (resp. autoadjunto), então T_2 também é hermitiano (resp. autoadjunto);*

b) $\sigma(T_1) = \sigma(T_2)$.

Prova: a) Por hipótese, existe um operador unitário $U : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ tal que $\text{dom } T_2 = U \text{dom } T_1$ e $T_2 = UT_1U^*$; note que $\text{dom } T_2 \subseteq \mathcal{H}_2$. Suponha T_1 hermitiano. Dados $\xi, \eta \in \text{dom } T_2$,

$$\begin{aligned} \langle T_2\xi, \eta \rangle &= \langle (UT_1U^*)\xi, \eta \rangle = \langle T_1(U^*)\xi, U^*\eta \rangle \\ &= \langle U^*\xi, T_1(U^*\eta) \rangle = \langle \xi, (UT_1U^*)\eta \rangle \\ &= \langle \xi, T_2\eta \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, T_2 é hermitiano. Agora, suponha que T_1 seja autoadjunto. Nesse caso,

$$T_2^* = (UT_1U^*)^* = (U^*)^*(UT_1)^* = UT_1^*U^* = UT_1U^* = T_2.$$

Portanto, T_2 é autoadjunto.

b) Dado $z \in \mathbb{C}$, vale

$$U(T_1 - z\mathbf{1})U^* = T_2 - z\mathbf{1}.$$

Assim, $z \in \rho(T_1)$ se, e somente se, $z \in \rho(T_2)$. Logo $\sigma(T_1) = \sigma(T_2)$. □

Uma das propriedades fundamentais do espectro dos operadores autoadjuntos é o seguinte teorema.

Teorema 1.11. *Se T é autoadjunto, então $\sigma(T)$ é um subconjunto não vazio de \mathbb{R} .*

Teorema 1.12. *Seja T autoadjunto, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- a) $z \in \rho(T)$.
- b) $\text{Im}(T - z\mathbf{1}) = \mathcal{H}$.
- c) $\exists c > 0$ tal que $\|(T - z\mathbf{1})\xi\| \geq c\|\xi\|$, $\forall \xi \in \text{dom } T$.

Definição 1.13. Um operador hermitiano T é *limitado inferiormente* se existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\langle \xi, T\xi \rangle \geq \beta\|\xi\|^2$, $\forall \xi \in \text{dom } T$. Neste caso, usamos a notação $T \geq \beta\mathbf{1}$ e dizemos que β é um *limite inferior* para T . No caso em que $\beta = 0$, T também é chamado de *operador positivo*.

Teorema 1.14. *Seja T um operador autoadjunto com $T \geq \beta\mathbf{1}$, então $\sigma(T) \subset [\beta, \infty)$.*

Outra propriedade interessante é mostrada no seguinte teorema.

Teorema 1.15. *Seja T autoadjunto. Se λ é um ponto isolado de $\sigma(T)$, então λ é um autovalor de T .*

Definição 1.16. *Seja T um operador autoadjunto.*

- a) O *espectro essencial* de T é o conjunto $\sigma_{\text{ess}}(T)$ de pontos de acumulação de $\sigma(T)$ junto como os autovalores T de multiplicidade infinita.
- b) O *espectro discreto* de T é o conjunto $\sigma_{\text{dis}}(T) := \sigma(T) \setminus \sigma_{\text{ess}}(T)$, isto é, o conjunto de autovalores isolados de T , cada um com multiplicidade finita.
- c) Se $\sigma_{\text{ess}}(T) = \emptyset$, então T diz-se ter *espectro puramente discreto*; se $\sigma_{\text{dis}}(T) = \emptyset$, então T diz-se ter *espectro puramente essencial*.

Note que $\sigma_{\text{ess}}(T) \subset \sigma(T)$ desde que este último é um conjunto fechado.

Definição 1.17. Uma sequência $(\xi_n) \subset \mathcal{H}$ *converge fracamente* a $\xi \in \mathcal{H}$, $\xi_n \xrightarrow{w} \xi$, se para cada $\eta \in \mathcal{H}$ tem-se

$$\langle \xi_n, \eta \rangle \rightarrow \langle \xi, \eta \rangle.$$

Dizemos que $(\xi_n) \subset \mathcal{H}$ *converge em norma* ou *converge fortemente* a $\xi \in \mathcal{H}$ se

$$\|\xi_n - \xi\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

O próximo resultado apresenta uma caracterização importante do espectro essencial.

Teorema 1.18. *Se T é autoadjunto, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(T)$;
- ii) *Existe uma sequência normalizada $(\xi_n) \subset \text{dom } T$ (isto é, $\|\xi_n\| = 1$, $\forall n$) de tal modo que $\xi_n \xrightarrow{w} 0$*

$$(T - \lambda\mathbf{1})\xi_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Tal sequência é chamada de sequência singular de Weyl para T em λ .

Corolário 1.19. *Se T é autoadjunto, então $\sigma_{\text{ess}}(T)$ é um subconjunto fechado de \mathbb{R} .*

As provas dos resultados enunciados nesta seção podem ser encontrados em [16].

1.3 Operadores compactos

Definição 1.20. Um operador linear $T : \text{dom} T \subseteq \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ é *compacto*, também chamado de *completamente contínuo*, se $\overline{T(A)}$ é compacto em \mathcal{H} para todo subconjunto limitado $A \subset \text{dom} T$.

Observação 1.21. Equivalentemente, $T : \text{dom} T \subseteq \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ é compacto se para toda sequência limitada $(\xi_n) \subset \text{dom} T$, a sequência $(T\xi_n)$ tem uma subsequência convergente em \mathcal{H} .

O seguinte teorema mostra uma caracterização dos operadores autoadjuntos com espectro essencial vazio; devido a tal caracterização estes operadores também são chamados de *operadores com resolvente compacto*.

Teorema 1.22. *Seja $T : \text{dom} T \subseteq \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ um operador autoadjunto e suponha que $\dim \mathcal{H} = \infty$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) $\sigma_{\text{ess}}(T) = \emptyset$.
- ii) *Existe uma base ortonormal $(\xi_j)_{j=1}^{\infty}$ de \mathcal{H} formada por autovetores de T , $T\xi_j = \lambda_j\xi_j$, $\forall j$, com λ_j autovalores reais, contando suas multiplicidades, satisfazendo $\lim_{j \rightarrow \infty} |\lambda_j| = \infty$ (e assim, cada um deles possui multiplicidade finita).*
- iii) $R_z(T)$ é um operador compacto para algum $z \in \rho(T)$ (portanto, $\forall z \in \rho(T)$).

A prova deste teorema pode ser encontrada em [16].

1.4 Formas sesquilineares

Seja $\text{dom} b$ um subespaço denso no espaço de Hilbert \mathcal{H} . Uma *forma sesquilinear* em \mathcal{H} é uma aplicação

$$b : \text{dom} b \times \text{dom} b \longrightarrow \mathbb{C}$$

que é linear na segunda variável e antilinear na primeira. b é hermitiana se

$$b(\xi, \eta) = \overline{b(\eta, \xi)}, \quad \forall \xi, \eta \in \text{dom} b.$$

A aplicação $\xi \mapsto b(\xi, \xi) := b(\xi)$, $\xi \in \text{dom} b$, é chamada de *forma quadrática* associada a b . Em algumas situações denota-se $\text{dom} b \times \text{dom} b$ simplesmente por $\text{dom} b$.

Observação 1.23. i) Vale a seguinte *identidade de polarização* para formas quadráticas:

$$4b(\xi, \eta) = b(\xi + \eta) - b(\xi - \eta) - ib(\xi + i\eta) + ib(\xi - i\eta), \quad \forall \xi, \eta \in \text{dom} b.$$

ii) b é hermitiana se, e somente se, a forma quadrática associada é real. De fato, suponha que b seja hermitiana. Para cada $\xi \in \text{dom } b$,

$$b(\xi) = b(\xi, \xi) = \overline{b(\xi, \xi)} = \overline{b(\xi)},$$

ou seja, $b(\xi)$ é real. Agora, suponha que b é uma forma quadrática real. Do item i), quaisquer que sejam $\xi, \eta \in \text{dom } b$,

$$\begin{aligned} b(\xi, \eta) &= 1/4[b(\xi + \eta) - b(\xi - \eta) - ib(\xi + i\eta) + ib(\xi - i\eta)] \\ &= 1/4[b(\eta + \xi) - b(\eta - \xi) - ib(\eta - i\xi) + ib(\eta + i\xi)] \\ &= 1/4[b(\eta + \xi) - b(\eta - \xi) + ib(\eta + i\xi) - ib(\eta - i\xi)] \\ &= \overline{b(\eta, \xi)}, \end{aligned}$$

ou seja, b é hermitiana.

Definição 1.24. Uma forma sesquilinear é *limitada* se

$$\|b\| := \sup_{\substack{\xi_1, \xi_2 \in \text{dom } b \\ \xi_1, \xi_2 \neq 0}} \frac{|b(\xi_1, \xi_2)|}{\|\xi_1\| \|\xi_2\|}$$

é finito, isto é, $\|b\| < \infty$.

Exemplo 1.25. O produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ num espaço de Hilbert \mathcal{H} é uma forma sesquilinear limitada, de norma 1.

Proposição 1.26. Se $b : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma forma sesquilinear limitada, então existe um único operador $T_b \in B(\mathcal{B})$ satisfazendo

$$b(\xi_1, \xi_2) = \langle T_b \xi_1, \xi_2 \rangle, \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{H}.$$

Além disso, $\|T_b\| = \|b\|$ e se b é hermitiana, então T_b é autoadjunto.

Observação 1.27. Existe uma correspondência biunívoca entre as formas sesquilineares limitadas (resp. hermitianas) em \mathcal{H} e os operadores limitados em \mathcal{H} (resp. autoadjuntos). A forma sesquilinear do Exemplo 1.25 tem como operador autoadjunto associado o operador identidade.

Definição 1.28. a) Seja b uma forma sesquilinear hermitiana. Então, b é *positiva* se a forma quadrática associada satisfaz $b(\xi, \xi) \geq 0, \forall \xi \in \text{dom } b$.

b) Seja b uma forma sesquilinear hermitiana. Então, b é *limitada inferiormente* se existe $\beta \in \mathbb{R}$ com $b(\xi, \xi) \geq \beta \|\xi\|^2, \forall \xi \in \text{dom } b$. Neste caso, denotamos $b \geq \beta \mathbf{1}$ e dizemos que β é um *limite inferior* de b . Note que $b - \beta \mathbf{1}$ define uma forma sesquilinear positiva a qual é dada por

$$(b - \beta \mathbf{1})(\xi, \eta) := b(\xi, \eta) - \beta \langle \xi, \eta \rangle.$$

- c) Seja b uma forma sesquilinear hermitiana e $(\xi_n) \subset \text{dom } b$. (ξ_n) é chamada de *sequência de Cauchy* em relação a b (ou em $(\text{dom } b, b)$) se $b(\xi_n - \xi_m) \rightarrow 0$ quando $n, m \rightarrow \infty$. Diz-se que (ξ_n) *converge* a ξ em relação a b (ou em $(\text{dom } b, b)$) se $\xi \in \text{dom } b$ e $b(\xi_n - \xi) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.
- d) Uma forma sesquilinear b é *fechada* se para cada sequência de Cauchy (ξ_n) em $(\text{dom } b, b)$ com $\xi_n \rightarrow \xi$ em \mathcal{H} , tem-se $\xi \in \text{dom } b$ e $\xi_n \rightarrow \xi$ em $(\text{dom } b, b)$.

Observação 1.29. Note que se b é uma forma sesquilinear limitada inferiormente, então sua forma quadrática associada é real. Logo, pela Observação 1.23, tem-se que b é hermitiana.

Se β é o limite inferior da forma sesquilinear b , definimos o seguinte produto interno em $\text{dom } b \subset \mathcal{H}$:

$$\langle \xi, \eta \rangle_+ := b(\xi, \eta) + (1 - \beta)\langle \xi, \eta \rangle, \quad \forall \xi, \eta \in \text{dom } b.$$

Note que

$$\langle \xi, \xi \rangle_+ = b(\xi, \xi) + (1 - \beta)\langle \xi, \xi \rangle = b(\xi) + (1 - \beta)\|\xi\|^2 = b(\xi) - \beta\|\xi\|^2 + \|\xi\|^2 \geq \|\xi\|^2.$$

Logo, $\|\xi\|_+ := \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle_+} \geq \|\xi\|, \forall \xi \in \text{dom } b$.

Lema 1.30. *Seja b uma forma sesquilinear hermitiana tal que $b \geq \beta 1$, para algum $\beta \in \mathbb{R}$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) $(\text{dom } b, \langle \cdot, \cdot \rangle_+)$ é um espaço de Hilbert.
- ii) b é fechada.

Exemplo 1.31. Dado um operador linear $T : \text{dom } T \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, podemos definir duas formas sesquilineares hermitianas e positivas. Mais precisamente, definimos $\text{dom } b := \text{dom } T =: \text{dom } \tilde{b}$ e

$$\begin{aligned} b(\xi, \eta) &= \langle T\xi, T\eta \rangle, \\ \tilde{b}(\xi, \eta) &= \langle T\xi, T\eta \rangle + \langle \xi, \eta \rangle. \end{aligned}$$

Em particular, desde que $\tilde{b}(\xi, \xi) = \|T\xi\|^2 + \|\xi\|^2 = \|\xi\|_T^2$ (isto é, o quadrado da norma do gráfico de T), \tilde{b} é fechada se, e somente se, T é fechado.

Esta forma quadrática pode ser vista como uma motivação para a introdução do produto interno $\langle \xi, \eta \rangle_+$ e o Lema 1.30.

Exemplo 1.32. Um operador hermitiano $T : \text{dom } T \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ define uma forma sesquilinear hermitiana b^T da seguinte forma:

$$b^T(\xi, \eta) := \langle \xi, T\eta \rangle, \quad \text{dom } b^T = \text{dom } T.$$

Ainda mais, b^T é limitada inferiormente se, e somente se, T é limitada inferiormente. b^T é chamada de *forma sesquilinear gerada por T* .

As provas dos resultados enunciados nesta seção podem ser encontrados em [16].

1.5 Operadores associados à formas quadráticas

Definição 1.33. Dada uma forma sesquilinear hermitiana $b : \text{dom } b \rightarrow \mathbb{C}$, $\text{dom } b \subseteq \mathcal{H}$, o operador T_b associado à b é definido como

$$\begin{aligned} \text{dom } T_b &:= \{\xi \in \text{dom } b : \exists \zeta \in \mathcal{H} \text{ com } b(\eta, \xi) = \langle \eta, \zeta \rangle, \forall \eta \in \text{dom } b\}, \\ T_b \xi &:= \zeta, \quad \xi \in \text{dom } T_b, \end{aligned}$$

isto é, $b(\eta, \xi) = \langle \eta, T_b \xi \rangle$, $\forall \eta \in \text{dom } b$, $\forall \xi \in \text{dom } T_b$. Tal operador T_b está bem definido desde que $\text{dom } b \subseteq \mathcal{H}$.

Note que T_b é simétrico, pois, desde que b é hermitiano, para $\xi, \eta \in \text{dom } T_b$,

$$\langle \eta, T_b \xi \rangle = b(\eta, \xi) = \overline{b(\xi, \eta)} = \overline{\langle \xi, T_b \eta \rangle} = \langle T_b \eta, \xi \rangle.$$

Além disso, se b é uma forma sesquilinear hermitiana limitada, o operador T_b da Definição 1.33 coincide com o operador da Proposição 1.26.

O próximo teorema é conhecido como representação de formas sesquilineares.

Teorema 1.34. *Seja $\text{dom } b \subseteq \mathcal{H}$ e $b : \text{dom } b \times \text{dom } b \rightarrow \mathbb{C}$ uma forma sesquilinear fechada com limite inferior $\beta \in \mathbb{R}$ (portanto hermitiana).*

Então, o operador T_b associado à b é o único operador autoadjunto com $\text{dom } T_b \subseteq \text{dom } b$ tal que

$$b(\eta, \xi) = \langle \eta, T_b \xi \rangle, \quad \forall \eta \in \text{dom } b, \forall \xi \in \text{dom } T_b.$$

Ainda mais, $T_b \geq \beta \mathbf{1}$ e $\text{dom } T_b$ é um cerne de b , isto é, $\overline{b|_{\text{dom } T_b}} = b$. O subespaço $\text{dom } b$ é chamado de domínio da forma de T_b .

O próximo resultado é uma versão do Teorema 1.18, o qual apresenta uma caracterização do espectro essencial no qual a forma quadrática associada a T apareça.

Teorema 1.35. *Sejam $T : \text{dom } T \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador autoadjunto e positivo e b a sua forma quadrática associada. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(T)$;
- ii) *Existe uma sequência normalizada $(\xi_n) \subset \text{dom } b$, de tal modo que $\xi_n \xrightarrow{w} 0$ em \mathcal{H} e*

$$(T - \lambda \mathbf{1})\xi_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

em $(\text{dom } b)^$, o qual denota o espaço dual do espaço $\text{dom } b$.*

As provas dos resultados enunciados nesta seção podem ser encontrados em [16] e [29].

1.6 O princípio Max-Min

Em alguns casos é possível caracterizar os autovalores de um operador que estão abaixo do seu espectro essencial através de uma aproximação variacional. Vejamos os resultados abaixo.

Proposição 1.36. *Seja $T : \text{dom} T \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador autoadjunto e limitado inferiormente. Suponha que, contando a multiplicidade, os autovalores de T sejam*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \inf \sigma_{\text{ess}}(T).$$

Então,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \inf_{0 \neq \xi \in \text{dom} T} \frac{\langle \xi, T\xi \rangle}{\|\xi\|^2}, & E_1 &:= N(T - \lambda_1 I), \\ \lambda_2 &= \inf_{0 \neq \xi \in \text{dom} T \cap E_1^\perp} \frac{\langle \xi, T\xi \rangle}{\|\xi\|^2}, & E_2 &:= E_1 \oplus N(T - \lambda_2 I) \\ \lambda_k &= \inf_{0 \neq \xi \in \text{dom} T \cap E_{k-1}^\perp} \frac{\langle \xi, T\xi \rangle}{\|\xi\|^2}, & \text{em que } E_{k-1} &:= E_{k-2} \oplus N(T - \lambda_{k-1} I). \end{aligned}$$

A Proposição 1.36 é conhecida como *caracterização variacional do espectro discreto*.

Teorema 1.37 (Princípio Max-Min). *Seja $T : \text{dom} T \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador autoadjunto e limitado inferiormente. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina*

$$\lambda_n(T) = \sup_{M_{n-1}} \left\{ \inf_{\substack{\psi \in \text{dom} T \cap M_{n-1}^\perp \\ \|\psi\|=1}} \langle \psi, T\psi \rangle \right\}, \quad (1.1)$$

em que o supremo é tomado sobre todos os subespaços lineares M_{n-1} de dimensão no máximo $n - 1$.

Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se o seguinte:

- i) $\lambda_n(T) < \lambda_{\text{ess}}(T) := \inf\{\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(T)\}$ se, e somente se, T tem no mínimo n autovalores menores que $\lambda_{\text{ess}}(T)$. Neste caso, $\lambda_n(T)$ é o n -ésimo autovalor de T e o ínfimo em (1.1) é atingido quando $M_{n-1} = [e_1, \dots, e_{n-1}]$, em que e_j é o j -ésimo autovetor de T ($j = 1, 2, \dots, n - 1$) correspondente ao j -ésimo autovalor.
- ii) $\lambda_n(T) = \lambda_{\text{ess}}(T)$ se, e somente se, T tem no máximo $n - 1$ autovalores menores que $\lambda_{\text{ess}}(T)$ e, neste caso, $\lambda_m(T) = \lambda_n(T)$, para todo $m > n$.

Será conveniente ter uma versão do Teorema 1.37 no qual a forma quadrática associada a T apareça.

Teorema 1.38. *Sejam T , $\lambda_n(T)$ e M_{n-1} como no Teorema 1.37. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$,*

$$\lambda_n(T) = \sup_{M_{n-1}} \left\{ \inf_{\substack{\psi \in \text{dom} b \cap M_{n-1}^\perp \\ \|\psi\|=1}} b(\psi) \right\},$$

em que $b(\cdot)$ e $\text{dom} b$ são a forma quadrática e o domínio da forma de T , respectivamente.

1.7 Os quocientes de Rayleigh

Definição 1.39. Seja Q uma forma sesquilinear limitada inferiormente e fechada, com domínio $\text{dom } Q$ denso em um espaço de Hilbert \mathcal{H} . Denote por A o operador autoadjunto associado à Q . Os *quocientes de Rayleigh* do operador A podem ser definidos como

$$\lambda_j(A) = \inf_{\substack{G \subset \text{dom } Q \\ \dim G = j}} \sup_{\substack{\psi \in G \\ \psi \neq 0}} \frac{Q(\psi)}{\|\psi\|_H^2}. \quad (1.2)$$

Seja $\mu = \inf \sigma_{\text{ess}}(A)$. O quociente de Rayleigh $\{\lambda_j(A)\}_{j \in \mathbb{N}}$ forma uma sequência não decrescente que satisfaz: (i) Se $\lambda_j(A) < \mu$, então este é um autovalor discreto de A ; (ii) Se $\lambda_j(A) \geq \mu$, então $\lambda_j(A) = \mu$; (iii) o j -ésimo autovalor de A menor que μ (se existir) coincide com $\lambda_j(A)$.

Definição 1.40. Seja \mathcal{H}_1 um subespaço linear fechado de um espaço de Hilbert \mathcal{H} . Sejam $S : \text{dom } S \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ e $T : \text{dom } T \subseteq \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ operadores autoadjuntos positivos. Denote por a e b as formas quadráticas associadas a S e T , respectivamente. Dizemos que $0 \leq S \leq T$ se, e somente se, $\text{dom } b \subset \text{dom } a$ e

$$0 \leq a(\xi) \leq b(\xi), \quad \forall \xi \in \text{dom } b.$$

Lema 1.41. Sejam S e T como na Definição 1.40 e suponha que $0 \leq S \leq T$. Então, $\lambda_n(S) \leq \lambda_n(T)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

As provas dos resultados enunciados nesta seção podem ser encontrados em [16] e [20].

1.8 Partição da unidade e a fórmula de localização IMS

Em alguns resultados vamos trabalhar com partições da unidade devidamente definidas no seguinte sentido:

Definição 1.42. Uma família de funções $\{\chi_j\}_{j=1}^m$ é chamada uma *partição da unidade* se

- i) $0 \leq \chi_j(x) \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
- ii) $\sum_{j=1}^m \chi_j^2(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
- iii) $\{\chi_j\}$ é localmente finito.
- iv) $\chi_j \in C_0^\infty$.
- v) $\text{supp}_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^m |\nabla \chi_j(x)|^2 < \infty$.

A chave para a abordagem geométrica apresentada aqui é a seguinte fórmula de localização:

Lema 1.43 (fórmula de localização IMS). Seja $\{\chi_j\}_{j=1}^m$ uma partição da unidade, e seja V um potencial qualquer, tal que $H = -\Delta + V$ tem um domínio da forma $\text{dom}(-\Delta) \cap \text{dom}(V_+)$. Então,

$$H = \sum_{j=1}^m \chi_j H \chi_j - \sum_{j=1}^m |\nabla \chi_j|^2.$$

A prova do resultado enunciado nesta seção podem ser encontrado em [37].

Laplaciano de Dirichlet em guias de onda com canto

As propriedades espectrais do operador Laplaciano de Dirichlet em regiões ilimitadas do espaço euclidiano n -dimensional tem sido estudado extensivamente nos últimos anos. Neste contexto, é bem conhecido que em regiões limitadas o espectro é puramente discreto, porém a situação muda no caso ilimitado. Assim, a questão sobre a existência do espectro discreto em regiões ilimitadas surge naturalmente; neste caso os resultados não são triviais e dependem da geometria da região. Neste capítulo investigaremos o espectro do Laplaciano de Dirichlet em uma “guia de onda com canto”, cujo canto não depende do parâmetro de abertura, como mostra a Figura 2.1. Mostraremos que o espectro discreto existe e é finito. Além disso, para o caso particular de uma guia de onda retangular com canto, estudaremos condições sobre as quais existe um único autovalor discreto e uma conjectura para o comportamento dos elementos do espectro discreto quando o parâmetro de abertura tende a infinito. Para finalizar o capítulo, estudaremos a existência do espectro discreto no caso em que a guia de onda contém mais de um canto e apresentaremos alguns exemplos numéricos.

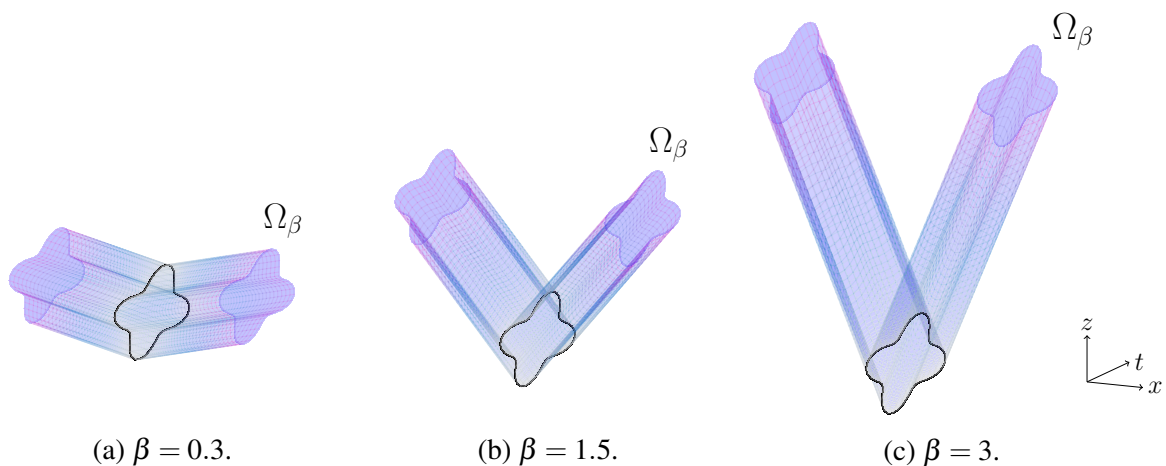


Figura 2.1: Guias de onda com canto que não depende do parâmetro de abertura β .

2.1 Geometria da guia de onda

Denote por $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica em \mathbb{R}^3 . Seja $S \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto, conexo e limitado, denotemos por $y = (y_1, y_2)$ um ponto de S . Tome $\beta \in (0, \infty)$ e considere a curva espacial dada por

$$r_\beta(x) := (x, 0, \beta|x|), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

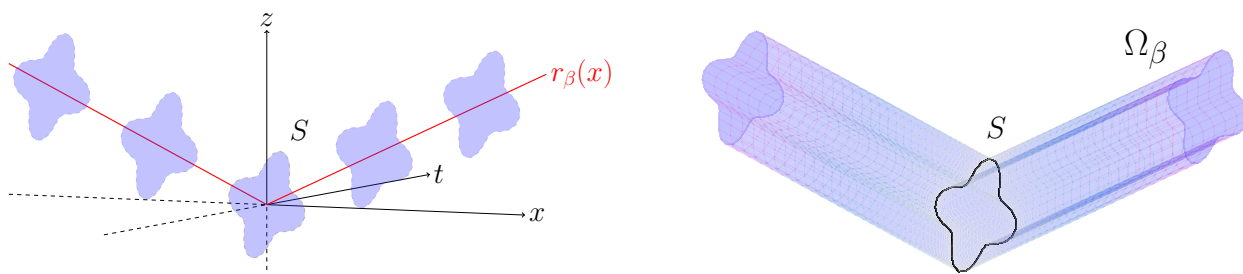
Defina a aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\beta : \quad \mathbb{R} \times S &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y_1, y_2) &\longmapsto r_\beta(x) + y_1 e_2 + y_2 e_3, \end{aligned} \quad (2.2)$$

e a região

$$\Omega_\beta := \mathcal{L}_\beta(\mathbb{R} \times S). \quad (2.3)$$

Geometricamente, Ω_β é obtida pela translação da região S ao longo da curva $r_\beta(x)$ tal que, em cada ponto da curva, S é paralela ao plano gerado por $\{e_2, e_3\}$, como mostra a Figura 2.2. Observemos que Ω_β é simétrico com relação ao plano $\{e_2, e_3\}$ e tem um “canto” neste plano. Por outro lado, a menos de um conjunto compacto apropriado, Ω_β é a união de dois semi-tubos retos. Ω_β será chamado de guia de onda com canto.



(a) Região S no plano tz e a traslação de S para alguns valores de x ao longo da curva $r_\beta(x)$.

(b) Domínio tubular gerado pela traslação de S ao longo da curva $r_\beta(x)$.

Figura 2.2: Guia de onda com canto Ω_β , com $\beta = 0.5$.

Denote por $-\Delta_{\Omega_\beta}^D$ o Laplaciano de Dirichlet em Ω_β , isto é, o operador autoadjunto associado com a forma quadrática

$$Q_{\Omega_\beta}^D(\psi) := \int_{\Omega_\beta} |\nabla \psi|^2 dx, \quad \text{dom } Q_{\Omega_\beta}^D = \mathcal{H}_0^1(\Omega_\beta); \quad (2.4)$$

$\mathbf{x} = (x, t, z)$ denota um ponto de Ω_β . O propósito deste capítulo é entender como a geometria da guia de onda com canto Ω_β influencia o espectro do operador $-\Delta_{\Omega_\beta}^D$.

2.2 Espectro essencial

Denote por $\partial_{y_1} := \partial/\partial y_1$ e $\partial_{y_2} := \partial/\partial y_2$. Considere o operador 2-dimensional

$$T(\beta) := -\partial_{y_1}^2 - (1 + \beta^2)\partial_{y_2}^2, \quad (2.5)$$

$\text{dom} T(\beta) := \{v \in \mathcal{H}_0^1(S) : T(\beta)v \in L^2(S)\}$. Denote por $E_1(\beta)$ o primeiro autovalor discreto de $T(\beta)$. Desde que $T(\beta)$ é um operador elíptico com coeficientes reais, $E_1(\beta)$ é simples, ver Capítulo 8 de [26].

Para cada $\beta \in (0, \infty)$, defina a curva espacial $\tilde{r}_\beta(x) := (x, 0, \beta x)$, $x \in \mathbb{R}$, e a aplicação $\tilde{\mathcal{L}}_\beta(x, y_1, y_2) := \tilde{r}_\beta(x) + y_1 e_1 + y_2 e_2$, $(x, y_1, y_2) \in \mathbb{R} \times S$. Considere a guia de onda reta $\tilde{\Omega}_\beta := \tilde{\mathcal{L}}_\beta(\mathbb{R} \times S)$, como mostra a Figura 2.3. A Proposição 3 de [38] mostra que o Laplaciano de Dirichlet em $\tilde{\Omega}_\beta$ tem um espectro puramente essencial e este coincide com o intervalo $[E_1(\beta), \infty)$.

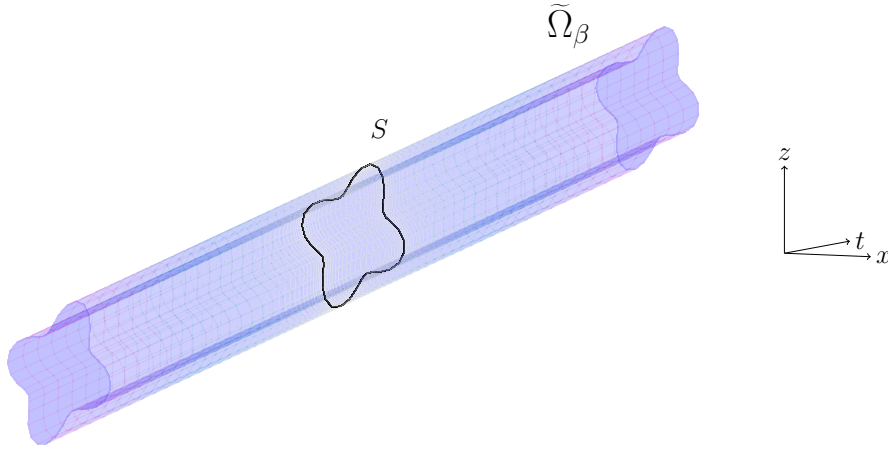


Figura 2.3: Guia de onda reta $\tilde{\Omega}_\beta$, com $\beta = 0.5$.

Assim, desde que o espectro essencial do Laplaciano de Dirichlet em um domínio tubular é determinado pela geometria da região apenas no infinito, é esperado o seguinte resultado para $-\Delta_{\tilde{\Omega}_\beta}^D$

Proposição 2.1. *Para cada $\beta \in (0, \infty)$, o espectro essencial do operador $-\Delta_{\tilde{\Omega}_\beta}^D$ coincide com o intervalo $[E_1(\beta), \infty)$.*

Demonstração. Seja $K \subset \tilde{\Omega}_\beta$ um conjunto compacto tal que $\tilde{\Omega}_{\text{ext}} := \tilde{\Omega}_\beta \setminus K = \tilde{\Omega}_{\text{ext}}^1 \sqcup \tilde{\Omega}_{\text{ext}}^2$, em que $\tilde{\Omega}_{\text{ext}}^1$ e $\tilde{\Omega}_{\text{ext}}^2$ são conjuntos isometricamente afins a um semi-tubo reto. Defina $\tilde{\Omega}_{\text{int}} := \text{int}(K)$. Consideremos a forma quadrática $Q_{\text{int}}^{DN} \oplus Q_{\text{ext}}^{DN}$, em que

$$Q_\omega^{DN}(\psi) = \int_{\Omega_\omega} |\nabla \psi|^2 dx,$$

$$\text{dom} Q_\omega^{DN} = \{\psi \in \mathcal{H}^1(\Omega_\omega) : \psi = 0 \text{ in } \partial\tilde{\Omega}_\beta \cap \partial\Omega_\omega\},$$

com $\omega \in \{\text{int}, \text{ext}\}$. Denote por H_{int}^{DN} e H_{ext}^{DN} os operadores autoadjuntos associados à Q_{int}^{DN} e Q_{ext}^{DN} , respectivamente. Observemos que vale a desigualdade

$$-\Delta_{\tilde{\Omega}_\beta}^D \geq H_{\text{int}}^{DN} \oplus H_{\text{ext}}^{DN}, \quad (2.6)$$

no sentido das formas quadráticas (veja [35], Capítulo XIII.15). A Proposição 3 e a Observação 1 em [38] implicam que $\sigma_{\text{ess}}(H_{\text{ext}}^{DN}) = [E_1(\beta), \infty)$. Pelo Princípio Max-Min e desde que o espectro do operador H_{int}^{DN} é puramente discreto (veja [15], Capítulo 7), tem-se a estimativa

$$\inf \sigma_{\text{ess}}(-\Delta_{\tilde{\Omega}_\beta}^D) \geq \inf \sigma_{\text{ess}}(H_{\text{int}}^{DN} \oplus H_{\text{ext}}^{DN}) = \inf \sigma_{\text{ess}}(H_{\text{ext}}^{DN}) = E_1(\beta),$$

isto é,

$$\sigma_{ess}(-\Delta_{\Omega_\beta}^D) \subseteq [E_1(\beta), \infty).$$

Por outro lado, pelas considerações em [38], é possível a construção de uma sequência de Weyl suportada em Ω_{ext} , associada a cada $\lambda \geq E_1(\beta)$. Isto mostra que $[E_1(\beta), \infty) \subseteq \sigma_{ess}(-\Delta_{\Omega_\beta}^D)$. O que conclui a demonstração. \square

2.3 Espectro discreto

Esta seção é dedicada ao estudo do espectro discreto de $-\Delta_{\Omega_\beta}^D$.

2.3.1 Problema auxiliar

Nesta subseção mostraremos como a simetria de Ω_β influencia o espectro discreto de $-\Delta_{\Omega_\beta}^D$. Os argumentos baseiam-se em [12].

Defina

$$\Omega_\beta^+ := \Omega_\beta \cap \{\mathbf{x} = (x, t, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\},$$

e $\partial_D \Omega_\beta^+ := \partial \Omega_\beta \cap \partial \Omega_\beta^+$. Considere a forma quadrática

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\Omega_\beta^+}^{DN}(\psi) &= \int_{\Omega_\beta^+} |\nabla \psi|^2 dx, \\ \text{dom } \mathcal{Q}_{\Omega_\beta^+}^{DN} &= \{\psi \in \mathcal{H}^1(\Omega_\beta^+) : \psi = 0 \text{ in } \partial_D \Omega_\beta^+\}. \end{aligned}$$

Denote por $-\Delta_{\Omega_\beta^+}^{DN}$ o operador autoadjunto associado à $\mathcal{Q}_{\Omega_\beta^+}^{DN}$. Especificamente,

$$\text{dom}(-\Delta_{\Omega_\beta^+}^{DN}) = \left\{ \psi \in \mathcal{H}^1(\Omega_\beta^+) : \Delta \psi \in L^2(\Omega_\beta^+), \quad \psi = 0 \text{ in } \partial_D \Omega_\beta^+, \text{ and } \partial \psi / \partial x = 0 \text{ in } x = 0 \right\}.$$

Observemos que é natural impor a condição de Neumann em $\Omega_\beta \cap \{\text{plano } x = 0\}$ pois esta garante a igualdade dos espectros no seguinte sentido.

Lema 2.2. *Suponha λ um autovalor discreto de $-\Delta_{\Omega_\beta}^D$, e denote por ψ_λ a autofunção correspondente. Então, ψ_λ é par, com relação à x , e $\partial \psi_\lambda / \partial x = 0$ em $\Omega_\beta \cap \{\text{plano } x = 0\}$.*

Demonstração. Primeiro, note que $\lambda < E_1(\beta)$. Considere a decomposição $\psi_\lambda = \psi_\lambda^{\text{even}} + \psi_\lambda^{\text{odd}}$ com relação a x , em que em que

$$\psi_\lambda^{\text{even}}(x, t, z) = \frac{\psi_\lambda(x, t, z) + \psi_\lambda(-x, t, z)}{2} \quad \text{e} \quad \psi_\lambda^{\text{odd}}(x, t, z) = \frac{\psi_\lambda(x, t, z) - \psi_\lambda(-x, t, z)}{2}.$$

Logo, obtêm-se

$$-\Delta \psi_\lambda^{\text{even}} = \lambda \psi_\lambda^{\text{even}} \quad \text{e} \quad -\Delta \psi_\lambda^{\text{odd}} = \lambda \psi_\lambda^{\text{odd}}, \quad \text{em } \Omega_\beta.$$

De fato, dado $(x, t, z) \in \Omega_\beta$

$$\begin{aligned} -\Delta \psi_\lambda^{even}(x, t, z) &= \frac{-\Delta \psi_\lambda(x, t, z) - \Delta \psi_\lambda(-x, t, z)}{2} = \frac{\lambda \psi_\lambda(x, t, z) + \lambda \psi_\lambda(-x, t, z)}{2} \\ &= \lambda \frac{\psi_\lambda(x, t, z) + \psi_\lambda(-x, t, z)}{2} = \lambda \psi_\lambda^{even}(x, t, z); \end{aligned}$$

de modo análogo obtêm-se a igualdade para ψ_λ^{odd} em Ω_β .

Agora, observe que

$$\begin{aligned} \psi_\lambda^{odd}(0, t, z) &= \frac{\psi_\lambda(0, t, z) - \psi_\lambda(0, t, z)}{2} = 0, \\ \psi_\lambda^{even}(0, t, z) &= \frac{\psi_\lambda(0, t, z) + \psi_\lambda(0, t, z)}{2} = \psi_\lambda(0, t, z) \end{aligned}$$

e

$$\partial_x \psi_\lambda^{even}(x, t, z)|_{x=0} = \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial x}(0, t, z) = 0.$$

Isto implica que ψ_λ^{odd} satisfaz a condição de Dirichlet e ψ_λ^{even} a condição de Neumann em $\Omega_\beta \cap \{\text{plano } x = 0\}$.

A seguir, mostremos que $\psi^{odd} = 0$. De fato, suponhamos que ψ^{odd} é uma função não nula em Ω_β , isto é, λ é um autovalor discreto de $-\Delta_{\Omega_\beta^+}^D$. Desde que $\Omega_\beta^+ \subset \hat{\Omega}_\beta$, pela monotonicidade do espectro de Dirichlet em relação ao domínio, tem-se que

$$\lambda_j(-\Delta_{\hat{\Omega}_\beta}^D) \leq \lambda_j(-\Delta_{\Omega_\beta^+}^D), \quad \forall j \geq 1. \quad (2.7)$$

Logo, o espectro em Ω_β^+ é “superior” ao espectro no tubo reto infinito $\hat{\Omega}_\beta$. Assim, desde que o espectro de $-\Delta_{\hat{\Omega}_\beta}^D$ é puramente essencial e coincide com o intervalo $[E_1(\beta), \infty)$, de (2.7) segue que $-\Delta_{\Omega_\beta^+}^D$ não pode conter autovalores discretos abaixo de $E_1(\beta)$, o qual é uma contradição. Portanto, $\psi^{odd} = 0$ e $\psi = \psi^{even}$. \square

Proposição 2.3. Para cada $\beta \in (0, \infty)$, tem-se $\sigma_{dis}(-\Delta_{\Omega_\beta}^D) = \sigma_{dis}(-\Delta_{\Omega_\beta^+}^{DN})$.

Demonstração. Primeiro, suponha que λ é um autovalor discreto de $-\Delta_{\Omega_\beta^+}^{DN}$, e denote por ψ_λ^+ a autofunção correspondente, isto é, $-\Delta \psi_\lambda^+(x, t, z) = \lambda \psi_\lambda^+(x, t, z)$, em Ω_β^+ . Denote por ψ_λ a extensão par, com relação a x , de ψ_λ^+ para Ω_β . Isto é,

$$\psi_\lambda(x, t, z) = \begin{cases} \psi_\lambda^+(x, t, z), & \text{se } x > 0, \\ \psi_\lambda^+(-x, t, z), & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Note que, para $x < 0$, $-\Delta \psi_\lambda^+(-x, t, z) = \lambda \psi_\lambda^+(-x, t, z)$, e $\psi_\lambda^+(x, t, z) = \psi_\lambda^+(-x, t, z)$ em $\Omega_\beta \cap \{\text{plano } x = 0\}$. Logo, ψ_λ define uma autofunção de $-\Delta_{\Omega_\beta}^D$ associada ao autovalor discreto λ . Então, $\sigma_{dis}(-\Delta_{\Omega_\beta^+}^{DN}) \subseteq \sigma_{dis}(-\Delta_{\Omega_\beta}^D)$.

Agora, seja $\lambda < E_1(\beta)$ um autovalor discreto de $-\Delta_{\Omega_\beta}^D$ e denote por ψ_λ a autofunção correspondente. Pelo Lema 2.2, a restrição de ψ_λ em Ω_β^+ define uma autofunção de $-\Delta_{\Omega_\beta^+}^{DN}$ com autovalor discreto λ . Então, $\sigma_{dis}(-\Delta_{\Omega_\beta}^D) \subseteq \sigma_{dis}(-\Delta_{\Omega_\beta^+}^{DN})$. \square

2.3.2 Mudança de variáveis

Devido à Proposição 2.3, a partir de agora estudaremos $\sigma_{dis}(-\Delta_{\Omega_\beta^+}^{DN})$ ao invés de $\sigma_{dis}(-\Delta_{\Omega_\beta}^D)$. Relembremos que $-\Delta_{\Omega_\beta^+}^D$ é o operador autoadjunto associado à forma quadrática

$$Q_{\Omega_\beta^+}^{DN}(\psi) = \int_{\Omega_\beta^+} |\nabla \psi|^2 dx,$$

$$\text{dom } Q_{\Omega_\beta^+}^{DN} = \{\psi \in \mathcal{H}^1(\Omega_\beta^+) : \psi = 0 \text{ in } \partial_D \Omega_\beta^+\}.$$

Nesta subseção realizamos uma mudança de variáveis a fim de que o domínio $\text{dom } Q_{\Omega_\beta^+}^{DN}$ não dependa de β .

Lembremos a aplicação \mathcal{L}_β dada por (2.2). Denote $\Lambda := (0, \infty) \times S$; em alguns momentos, um ponto de Λ será simplesmente denotado por (x, y) , $y = (y_1, y_2)$. Logo, $\Omega_\beta^+ = \mathcal{L}_\beta(\Lambda)$. Pela Proposição 1 em [38], $\mathcal{L}_\beta^+ := \mathcal{L}_\beta|_\Lambda$ é um $C^{0,1}$ -difeomorfismo local. Desde que \mathcal{L}_β^+ é injetora obtemos um $C^{0,1}$ -difeomorfismo global. Por conseguinte, a região Ω_β^+ pode ser identificada com a variedade Riemanniana (Λ, G_β) , em que $G_\beta = (G_\beta^{ij})$ é a métrica induzida por \mathcal{L}_β^+ , isto é,

$$G_\beta^{ij} = \langle \mathcal{G}_\beta^i, \mathcal{G}_\beta^j \rangle = G_\beta^{ji}, \quad i, j = 1, 2,$$

em que

$$G_\beta^1 = \frac{\partial \mathcal{L}_\beta^+}{\partial x}, \quad G_\beta^2 = \frac{\partial \mathcal{L}_\beta^+}{\partial y_1}, \quad G_\beta^3 = \frac{\partial \mathcal{L}_\beta^+}{\partial y_2}.$$

Mais precisamente,

$$G_\beta = \nabla \mathcal{L}_\beta^+ \cdot (\nabla \mathcal{L}_\beta^+)^t = \begin{pmatrix} 1 + \beta^2 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det G_\beta = 1.$$

Agora, consideremos o operador unitário

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\beta : L^2(\Omega_\beta^+) &\rightarrow L^2(\Lambda) \\ \psi &\mapsto \psi \circ \mathcal{L}_\beta^+ \end{aligned} \quad (2.8)$$

e definimos

$$\begin{aligned} Q_\beta(\psi) &:= Q_{\Omega_\beta^+}^{DN}(\mathcal{U}_\beta^{-1} \psi) = \int_\Lambda \langle \nabla \psi, G_\beta^{-1} \nabla \psi \rangle \sqrt{\det G_\beta} dx dy \\ &= \int_\Lambda \left(\left| \psi' - \beta \frac{\partial \psi}{\partial y_2} \right|^2 + |\nabla_y \psi|^2 \right) dx dy, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\text{dom } Q_\beta := \mathcal{U}_\beta(\text{dom } Q_{\Omega_\beta^+}^{DN}) = \{\psi \in \mathcal{H}^1(\Lambda) : \psi = 0 \text{ on } (0, \infty) \times \partial S\},$$

em que $\psi' := \partial \psi / \partial x$, e $\nabla_y \psi := (\partial_{y_1} \psi, \partial_{y_2} \psi)$. Denote por H_β o operador autoadjunto associado à forma quadrática $Q_\beta(\psi)$. Assim, desde que os operadores H_β e $-\Delta_{\Omega_\beta^+}^{DN}$ são unitariamente equivalentes, $\sigma(H_\beta) = \sigma(-\Delta_{\Omega_\beta^+}^{DN})$.

2.3.3 Existência e finitude do espectro discreto

Nesta subseção mostraremos a existência do espectro discreto para $-\Delta_{\Omega_\beta}^D$.

Proposição 2.4. Para cada $\beta \in (0, \infty)$, tem-se $\inf \sigma(-\Delta_{\Omega_\beta}^D) < E_1(\beta)$, isto é, $\sigma_{dis}(-\Delta_{\Omega_\beta}^D) \neq \emptyset$.

Demonstração. Considere a forma quadrática

$$q_\beta(\psi) = Q_\beta(\psi) - E_1(\beta) \|\psi\|_{L^2(\Lambda)}^2, \quad \text{dom } q_\beta = \text{dom } Q_\beta. \quad (2.10)$$

De acordo com (1.2) e a Proposição 2.1, é suficiente mostrar que existe uma função $\psi \in \text{dom } Q_\beta \setminus \{0\}$ tal que $q_\beta(\psi) < 0$. Construiremos tal função nos parágrafos abaixo.

O primeiro passo é construir uma sequência $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{dom } q_\beta$ tal que $q_\beta(\psi_n) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Para isto, seja $w \in C^\infty(\mathbb{R})$ uma função real tal que $w = 1$ para $x \leq 1$, e $w = 0$ para $x \geq 2$. Defina, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n(x) = w\left(\frac{x}{n}\right) \quad \text{e} \quad \psi_n(x, y) = w_n(x)\chi(y),$$

em que χ denota a autofunção normalizada correspondente ao primeiro autovalor $E_1(\beta)$. Em particular,

$$\int_0^\infty |w'_n|^2 dx = \frac{1}{n} \int_0^\infty |w'|^2 dx \rightarrow 0, \quad \text{as } n \rightarrow \infty, \quad (2.11)$$

e

$$\int_S (|\partial_{y_1}\chi|^2 + (1 + \beta^2)|\partial_{y_2}\chi|^2) dy = E_1(\beta). \quad (2.12)$$

De (2.12), e desde que $\int_S \chi \partial_{y_2}\chi dy = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} q_\beta(\psi_n) &= Q_\beta(\psi_n) - E_1(\beta) \|\psi_n\|_{L^2(\Lambda)}^2 \\ &= \int_\Lambda (|w'_n\chi - \beta w_n \partial_{y_2}\chi|^2 + |w_n|^2 |\nabla_y \chi|^2) dx dy - E_1(\beta) \int_\Lambda |w_n|^2 |\chi|^2 dx dy \\ &= \int_\Lambda [|w'_n|^2 \chi^2 - 2\beta w_n w'_n \chi \partial_{y_2}\chi + |w_n|^2 (|\partial_{y_1}\chi|^2 + (1 + \beta^2)|\partial_{y_2}\chi|^2 - E_1(\beta)|\chi|^2)] dx dy \\ &= \int_0^\infty |w'_n|^2 dx. \end{aligned}$$

De (2.11), podemos observar que $q_\beta(\psi_n) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

Agora, fixamos $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$\psi_{n,\varepsilon}(x, y) := \psi_n(x, y) + \varepsilon \phi(x, y),$$

para algum $\phi \in \text{dom } q_\beta$. Neste caso,

$$q_\beta(\psi_{n,\varepsilon}) = q_\beta(\psi_n) + 2\varepsilon \text{Re}(q_\beta(\psi_n, \phi)) + \varepsilon^2 q_\beta(\phi),$$

em que

$$q_\beta(\psi_n, \phi) = \int_\Lambda \left[(\overline{\partial_x \psi_n} - \beta \overline{\partial_{y_2} \psi_n})(\partial_x \phi - \beta \partial_{y_2} \phi) + (\overline{\partial_{y_1} \psi_n} \partial_{y_1} \phi) + (\overline{\partial_{y_2} \psi_n} \partial_{y_2} \phi) - E_1(\beta)(\overline{\psi_n} \phi) \right] dx dy.$$

A estratégia é mostrar que existe ϕ satisfazendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_\beta(\psi_n, \phi) \neq 0. \quad (2.13)$$

De fato, se (2.13) é válida, é suficiente escolher ε conveniente tal que $q_\beta(\psi_{n,\varepsilon}) < 0$, para algum n suficientemente grande.

Considere $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, com $\text{supp } \eta \subset [0, 1)$ e $\eta(0) \neq 0$. Tome $h \in H_0^1(S)$ (h será escolhido mais adiante). Definimos $\phi(x, y) = \eta(x)h(y)$. Logo,

$$\begin{aligned} q_\beta(\psi_n, \phi) &= \int_\Lambda [(w'_n \chi - \beta w_n \partial_{y_2} \chi)(\eta' h - \beta \eta \partial_{y_2} h) + w_n \partial_{y_1} \chi \eta \partial_{y_1} h + w_n \partial_{y_2} \chi \eta \partial_{y_2} h - E_1(\beta) w_n \chi \eta h] \, dx dy \\ &= \int_\Lambda (w'_n \chi \eta' h - \beta w'_n \chi \eta \partial_{y_2} h - \beta w_n \partial_{y_2} \chi \eta' h + \beta^2 w_n \partial_{y_2} \chi \eta \partial_{y_2} h) \, dx dy \\ &\quad + \int_\Lambda (w_n \partial_{y_1} \chi \eta \partial_{y_1} h + w_n \partial_{y_2} \chi \eta \partial_{y_2} h - E_1(\beta) w_n \chi \eta h) \, dx dy \\ &= \int_\Lambda (w'_n \chi \eta' h - \beta w'_n \chi \eta \partial_{y_2} h - \beta w_n \partial_{y_2} \chi \eta' h) \, dx dy \\ &\quad - \int_\Lambda (\partial_{y_1}^2 \chi + (1 + \beta^2) \partial_{y_2}^2 \chi + E_1(\beta) \chi) w_n \eta h \, dx dy \\ &\rightarrow -\beta \int_\Lambda \eta' \partial_{y_2} \chi h \, dx dy, \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$. Finalmente, definimos $h(y) := y_2 \chi(y)$; note que $h(y) = 0$, para todo $y \in \partial S$. Assim, desde que $\eta(0) \neq 0$,

$$-\beta \int_\Lambda \eta' \partial_{y_2} \chi y_2 \chi \, dx dy = \beta \eta(0) \int_S \partial_{y_2} \chi y_2 \chi \, dy = -\frac{\beta \eta(0)}{2} \neq 0.$$

Logo, (2.13) é válida, o que finaliza a demonstração. \square

Seja Q uma forma sesquilinear limitada inferiormente e fechada, com domínio $\text{dom } Q$ denso em um espaço de Hilbert \mathcal{H} . Denote por A o operador autoadjunto associado à Q , usaremos a notação $\mathcal{N}(A, \lambda)$ (ou $\mathcal{N}(Q, \lambda)$) para indicar o máximo índice j tal que o j -ésimo quociente de Rayleigh de A é menor que λ . Segundo os modelos abordados na Introdução, o “efeito canto” em Ω_β também induz a questão sobre o número de autovalores discretos. A continuação mostraremos um resultado associado à finitude do conjunto do espectro discreto

Proposição 2.5. *Para cada $\beta \in (0, \infty)$, $\sigma_{dis}(-\Delta_{\Omega_\beta}^D)$ é finito.*

Demonstração. Consideremos uma partição da unidade de classe C^∞ , (φ_0, φ_1) , tal que $\varphi_0^2(x) + \varphi_1^2(x) = 1$, $\varphi_0(x) = 1$ para $x < 1$ e $\varphi_0(x) = 0$ para $x > 2$. Primeiro, fixe $M > 0$. Defina

$$\varphi_{\ell, M}(x) = \varphi_\ell\left(\frac{x}{M}\right), \quad \ell \in \{0, 1\}.$$

Pela fórmula de localização IMS (ver, por exemplo, Capítulo 3 de [10]), para cada $\psi \in \text{dom } Q_\beta$,

$$Q_\beta(\psi) = Q_\beta(\varphi_{0, M} \psi) + Q_\beta(\varphi_{1, M} \psi) - \|\varphi'_{0, M} \psi\|_{L^2(\Lambda)}^2 - \|\varphi'_{1, M} \psi\|_{L^2(\Lambda)}^2. \quad (2.14)$$

Defina

$$W_M(x) := \left| \varphi'_0 \left(\frac{x}{M} \right) \right|^2 + \left| \varphi'_1 \left(\frac{x}{M} \right) \right|^2.$$

Logo,

$$\|\varphi'_{0,M}\psi\|_{L^2(\Lambda)}^2 + \|\varphi'_{1,M}\psi\|_{L^2(\Lambda)}^2 = \int_{\Lambda} \frac{W_M(x)}{M^2} (|\varphi_{0,M}\psi|^2 + |\varphi_{1,M}\psi|^2) dx dy. \quad (2.15)$$

Agora, considere os seguintes subconjuntos de Λ ,

$$\mathcal{O}_{0,M} = \{(x, y) \in \Lambda : x < 2M\} \quad \text{e} \quad \mathcal{O}_{1,M} = \{(x, y) \in \Lambda : x > M\}.$$

Para $\ell \in \{0, 1\}$, defina as formas quadráticas

$$\mathcal{Q}_{\ell,M}(\psi) := \int_{\mathcal{O}_{\ell,M}} \left(|\partial_x \psi - \beta \partial_{y_2} \psi|^2 + |\partial_{y_1} \psi|^2 + |\partial_{y_2} \psi|^2 - \frac{W_M(x)}{M^2} |\psi|^2 \right) dx dy, \quad (2.16)$$

com

$$\begin{aligned} \text{dom}(\mathcal{Q}_{0,M}) &= \{\psi \in \mathcal{H}^1(\mathcal{O}_{0,M}) : \psi = 0 \text{ em } \partial_D \Lambda \cap \partial \mathcal{O}_{0,M} \text{ e em } \{2M\} \times S\}, \\ \text{dom}(\mathcal{Q}_{1,M}) &= H_0^1(\mathcal{O}_{1,M}). \end{aligned}$$

De(2.14), (2.15) e (2.16), podemos escrever, para todo $\psi \in \text{dom} \mathcal{Q}_{\beta}$,

$$\mathcal{Q}_{\beta}(\psi) = \mathcal{Q}_{0,M}(\varphi_{0,M}\psi) + \mathcal{Q}_{1,M}(\varphi_{1,M}\psi).$$

Note que, do Princípio Max-Min, tem-se, para $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \lambda_j(H_{\beta}) &= \sup_{F_{j-1}} \left\{ \inf_{\psi \in (\text{dom}(\mathcal{Q}_{\beta}) \setminus \{0\}) \cap F_{j-1}^{\perp}} \frac{\mathcal{Q}_{\beta}(\psi)}{\|\psi\|_{L^2(\Lambda)}^2} \right\} \\ &= \sup_{F_{j-1}} \left\{ \inf_{\psi \in (\text{dom}(\mathcal{Q}_{\beta}) \setminus \{0\}) \cap F_{j-1}^{\perp}} \frac{\mathcal{Q}_{0,M}(\varphi_{0,M}\psi) + \mathcal{Q}_{1,M}(\varphi_{1,M}\psi)}{\|\varphi_{0,M}\psi\|_{L^2(\Lambda)}^2 + \|\varphi_{1,M}\psi\|_{L^2(\Lambda)}^2} \right\}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

em que o supremo é tomado sobre todos os subespaços lineares F_{n-1} de dimensão no máximo $j-1$.

A seguir, encontraremos um limite inferior para $\lambda_j(H_{\beta})$. Introduzimos a aplicação

$$\mathcal{R} : \text{dom}(\mathcal{Q}_{\beta}) \longrightarrow \text{dom}(\mathcal{Q}_{0,M}) \times \text{dom}(\mathcal{Q}_{1,M}) \quad \text{definida por} \quad \mathcal{R}(\psi) := (\varphi_{0,M}\psi, \varphi_{1,M}\psi).$$

Desde que $\{\varphi_{0,M}, \varphi_{1,M}\}$ é uma partição da unidade, \mathcal{R} é injetora. Em particular, \mathcal{R} é bijetora sobre sua imagem. Logo, do Lema 1.41, desde que $\mathcal{R}(\text{dom}(\mathcal{Q}_{\beta})) \subset \text{dom}(\mathcal{Q}_{0,M}) \times \text{dom}(\mathcal{Q}_{1,M})$, de (2.17) segue que

$$\lambda_j(H_{\beta}) \geq \sup_{F_{j-1}} \left\{ \inf_{(\psi_0, \psi_1) \in \mathcal{R}((\text{dom}(\mathcal{Q}_{\beta}) \setminus \{0\}) \cap F_{j-1}^{\perp})} \frac{\mathcal{Q}_{0,M}(\psi_0) + \mathcal{Q}_{1,M}(\psi_1)}{\|\psi_0\|_{L^2(\mathcal{O}_{0,M})}^2 + \|\psi_1\|_{L^2(\mathcal{O}_{1,M})}^2} \right\} = \lambda_j(H_{\beta_M}),$$

em que H_{β_M} é o operador autoadjunto diagonal associado à forma quadrática $\mathcal{Q}_{0,M} + \mathcal{Q}_{1,M}$ em $\text{dom}(\mathcal{Q}_{0,M}) \times \text{dom}(\mathcal{Q}_{1,M})$.

Seja $H_{\beta_{\ell,M}}$ o operador autoadjunto com domínio $\text{dom}(H_{\beta_{\ell,M}})$ associado à forma quadrática $Q_{\ell,M}$ em $\text{dom}(Q_{\ell,M})$, para $\ell = 0, 1$. Então,

$$H_{\beta_R} = \begin{pmatrix} H_{\beta_{0,M}} & 0 \\ 0 & H_{\beta_{1,M}} \end{pmatrix}, \quad \text{com domínio} \quad \text{dom}(H_{\beta_{0,M}}) \times \text{dom}(H_{\beta_{1,M}}).$$

Portanto, $\lambda_j(H_{\beta_M})$ é o j -ésimo elemento do conjunto ordenado

$$\{\lambda_k(H_{\beta_{0,M}})\}_{k \in \mathbb{N}} \cup \{\lambda_k(H_{\beta_{1,M}})\}_{k \in \mathbb{N}}.$$

O que implica

$$\mathcal{N}(Q_{\beta}, E_1(\beta)) \leq \mathcal{N}(Q_{0,M}, E_1(\beta)) + \mathcal{N}(Q_{1,M}, E_1(\beta)).$$

Assim, desde que o operador autoadjunto associado à $Q_{0,M}$ tem resolvente compacto, $\mathcal{N}(Q_{0,M}, E_1(\beta))$ é finito (ver, Teorema 1.22).

Para completar a prova, mostraremos que existe $M_0 > 0$ tal que $\mathcal{N}(Q_{1,M}, E_1(\beta))$ é finito, para todo $M > M_0$.

Consideremos o subespaço fechado $\mathcal{J} := \{f(x)\chi(y) : f \in L^2(M, \infty)\}$ do espaço de Hilbert $L^2(\mathcal{O}_{1,M})$ e a decomposição ortogonal

$$L^2(\mathcal{O}_{1,M}) = \mathcal{J} \oplus \mathcal{J}^\perp.$$

Assim, para $\psi \in L^2(\mathcal{O}_{1,M})$, escrevemos

$$\psi(x, y) = f(x)\chi(y) + \psi_\perp(x, y), \quad f \in L^2(M, \infty), \quad \psi_\perp \in \mathcal{J}^\perp. \quad (2.18)$$

Em particular,

$$\psi \in \text{dom } Q_\beta \quad \Leftrightarrow \quad f \in H_0^1(M, \infty), \quad \psi_\perp \in \text{dom } Q_\beta \cap \mathcal{J}^\perp. \quad (2.19)$$

Além disso, $\psi_\perp \in \mathcal{J}^\perp$ implica que

$$\int_S \psi_\perp(x, y)\chi(y)dy = 0, \quad \text{and} \quad \int_S \partial_x \psi_\perp(x, y)\chi(y)dy = 0, \quad \text{q.t.p.x.} \quad (2.20)$$

Para $\psi \in \text{dom } Q_\beta$, da decomposição em (2.18), das propriedades em (2.19) e (2.20), e desde que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{O}_{1,M}} \overline{\partial_x \psi_\perp} f \partial_{y_2} \chi \, dx dy &= - \int_{\mathcal{O}_{1,M}} \overline{\psi_\perp} f' \partial_{y_2} \chi \, dx dy, \\ \int_{\mathcal{O}_{1,M}} \overline{f'} \chi \partial_{y_2} \psi_\perp \, dx dy &= - \int_{\mathcal{O}_{1,M}} \overline{\psi_\perp} f' \partial_{y_2} \chi \, dx dy, \end{aligned}$$

segue

$$\begin{aligned} Q_{1,M}(\psi) &= \int_{\mathcal{O}_{1,M}} \left(|\partial_x(f\chi + \psi_\perp) - \beta \partial_{y_2}(f\chi + \psi_\perp)|^2 + |\partial_{y_1}(f\chi + \psi_\perp)|^2 + |\partial_{y_2}(f\chi + \psi_\perp)|^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{W_M(x)}{R^2} |f\chi + \psi_\perp|^2 \right) dx dy \\ &= Q_{1,M}(f\chi) + Q_{1,M}(\psi_\perp) + 4\beta \text{Re} \int_{\mathcal{O}_{1,M}} \overline{f'} \partial_{y_2} \chi \psi_\perp \, dx dy. \end{aligned}$$

Fixando $\varepsilon > 0$, note que da desigualdade $2\operatorname{Re}(\overline{f'}\partial_{y_2}\chi\psi_\perp) \geq -\frac{1}{\varepsilon}|f'\partial_{y_2}\chi|^2 - \varepsilon|\psi_\perp|^2$, segue que

$$Q_{1,M}(\psi) \geq Q_{1,M}(f\chi) + Q_{1,M}(\psi_\perp) - \frac{2}{\varepsilon} \int_M \kappa\beta|f'|^2 dx - 2\varepsilon\beta \int_{\mathcal{O}_{1,M}} |\psi_\perp|^2 dx dy, \quad (2.21)$$

em que $\kappa := \|\partial_{y_2}\chi\|_{L^2(S)}^2$.

Agora, vamos encontrar limites inferiores para $Q_{1,M}(f\chi)$ e $Q_{1,M}(\psi_\perp)$. Alguns cálculos mostram que

$$\begin{aligned} Q_{1,M}(f\chi) &= \int_M \left[|f'|^2 + \left(E_1(\beta) - \frac{W_M(x)}{M^2} \right) |f|^2 \right] dx \\ &\geq \int_M \left[|f'|^2 + \left(E_1(\beta) - \frac{\nu}{M^2} \mathbf{1}_{[M,2M]} \right) |f|^2 \right] dx, \end{aligned} \quad (2.22)$$

em que $\nu := \|W_M\|_\infty$ não depende de M .

Por outro lado, observe que a desigualdade $-2\operatorname{Re}(\overline{\partial_x\psi_\perp}\partial_{y_2}\psi_\perp) \geq -\frac{1}{\varepsilon}|\partial_x\psi_\perp|^2 - \varepsilon|\partial_{y_2}\psi_\perp|^2$, implica

$$\begin{aligned} |\partial_s\psi_\perp - \beta\partial_{t_2}\psi_\perp|^2 &\geq |\partial_s\psi_\perp|^2 - \frac{\beta}{\varepsilon}|\partial_s\psi_\perp|^2 - \varepsilon\beta|\partial_{t_2}\psi_\perp|^2 + \beta^2|\partial_{t_2}\psi_\perp|^2 \\ &= \left(1 - \frac{\beta}{\varepsilon} \right) |\partial_s\psi_\perp|^2 + (\beta^2 - \varepsilon\beta)|\partial_{t_2}\psi_\perp|^2 \\ &\geq (\beta^2 - \varepsilon\beta)|\partial_{t_2}\psi_\perp|^2, \end{aligned}$$

para $\varepsilon \geq \beta$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} Q_{1,M}(\psi_\perp) &\geq \int_{\mathcal{O}_{1,M}} \left((\beta^2 - \varepsilon\beta)|\partial_{y_2}\psi_\perp|^2 + |\partial_{y_1}\psi_\perp|^2 + |\partial_{y_2}\psi_\perp|^2 - \frac{W_M(x)}{M^2}|\psi_\perp|^2 \right) dx dy \\ &= \int_{\mathcal{O}_{1,M}} \frac{\beta^2 - \varepsilon\beta + 1}{1 + \beta^2} \left((1 + \beta^2)|\partial_{y_2}\psi_\perp|^2 + |\partial_{y_1}\psi_\perp|^2 \right) dx dy \\ &\quad + \int_{\mathcal{O}_{1,M}} \left(\left(1 - \frac{\beta^2 - \varepsilon\beta + 1}{1 + \beta^2} \right) |\partial_{y_1}\psi_\perp|^2 - \frac{W_M(x)}{M^2}|\psi_\perp|^2 \right) dx dy. \end{aligned}$$

Seja $E_2(\beta) > E_1(\beta)$ o segundo autovalor discreto do operador $T(\beta)$. Pelo Princípio Max-Min

$$\int_{\mathcal{O}_{1,M}} \left((1 + \beta^2)|\partial_{y_2}\psi_\perp|^2 + |\partial_{y_1}\psi_\perp|^2 \right) dx dy \geq E_2(\beta) \int_{\mathcal{O}_{1,M}} |\psi_\perp|^2 dx dy.$$

Então, para todo $\varepsilon \geq \beta$,

$$Q_{1,M}(\psi_\perp) \geq \left[\left(\frac{\beta^2 - \varepsilon\beta + 1}{1 + \beta^2} \right) E_2^S(\beta) - \frac{\nu}{M^2} \right] \int_{\mathcal{O}_{1,M}} |\psi_\perp|^2 dx dy. \quad (2.23)$$

Definamos o número

$$\zeta := \left(\frac{\beta^2 - \varepsilon\beta + 1}{1 + \beta^2} \right) E_2(\beta) - 2\varepsilon\beta - 1,$$

e as formas quadráticas

$$b(f\chi) := \int_{\sqrt{\nu}}^\infty \left[\left(1 - \frac{2\kappa\beta}{\varepsilon} \right) |f'|^2 + \left(E_1(\beta) - \mathbf{1}_{[\sqrt{\nu}, 2\sqrt{\nu}]} \right) |f|^2 \right] dx, \quad (2.24)$$

e

$$s(\psi_{\perp}) := \zeta \int_{\mathcal{O}_{1,\sqrt{v}}} |\psi_{\perp}|^2 dx dy, \quad (2.25)$$

agindo em $\text{dom } Q_{\beta} \cap \mathcal{J}$ e $\text{dom } Q_{\beta} \cap \mathcal{J}^{\perp}$, respectivamente.

Suponha $\varepsilon > 2\kappa\beta$ e tome $M_0 := \sqrt{v}$. Então, para $M > M_0$, combinando (2.21) - (2.25), tem-se

$$Q_{1,M}(\psi) \geq b(f\chi) + s(\psi_{\perp}),$$

para todo $\psi \in \text{dom } Q_{\beta}$. Esta desigualdade implica que $\mathcal{N}(Q_{1,M}, E_1(\beta)) \leq \mathcal{N}(b, E_1(\beta))$. Assim, desde que $\mathcal{N}(b, E_1(\beta))$ é finito (ver Observação A.3, Apêndice A), completamos a demonstração. \square

2.4 Número de autovalores discretos

O objetivo desta seção é mostrar que é possível encontrar um intervalo de variação para β para o qual o espectro discreto do operador $-\Delta_{\Omega_{\beta}}^D$ possua um único autovalor discreto. Por conveniência, nesta seção vamos descrever nossa guia de onda com canto, através de um outro conjunto, pois precisamos trabalhar com uma forma quadrática diferente à definida em (2.9), isto com o fim de poder encontrar os resultados desejados.

Seja $S := (a, b) \times (c, d)$, para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Seja Ω_{β} a guia de onda retangular com canto associada a $\beta \in (0, \infty)$, com seção transversal S , como mostra a Figura 2.4, dado pelo seguinte conjunto

$$\Omega_{\beta} = \{(s, t, z) \in \mathbb{R} \times (a, b) \times \mathbb{R} : \beta|s| + c < z < \beta|s| + d\}, \quad (2.26)$$

em que β denota a semi-abertura do canto em Ω_{β} .

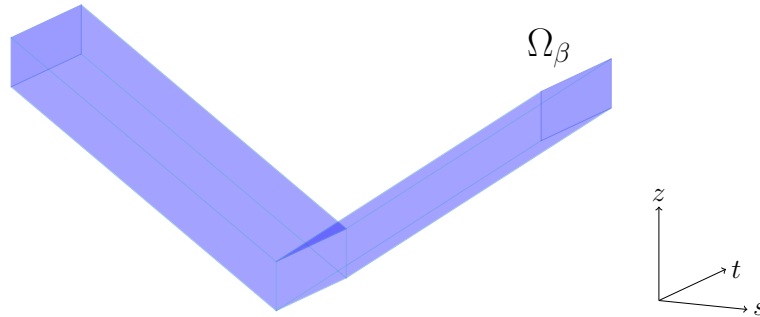


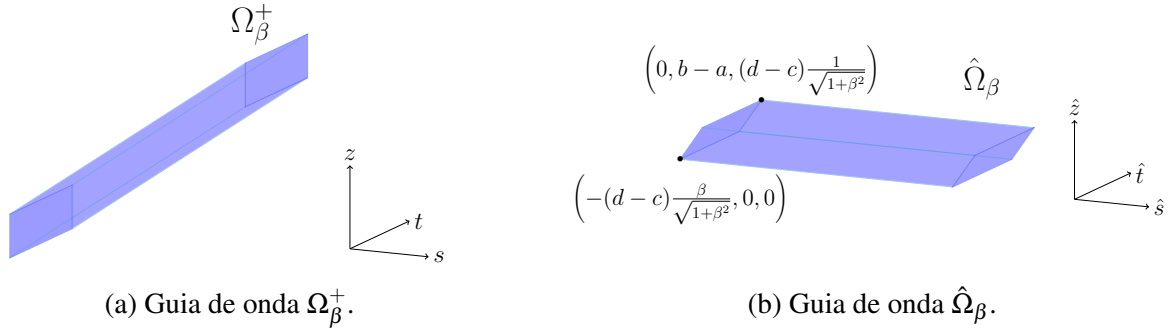
Figura 2.4: Guia de onda retangular com canto Ω_{β} , com $\beta = 0.7$.

Denote por $-\Delta_{\Omega_{\beta}}^D$ o operador autoadjunto associado à forma quadrática

$$Q_{\Omega_{\beta}}^D(\psi) = \int_{\Omega_{\beta}} |\nabla \psi|^2 ds, \quad \text{dom } Q_{\Omega_{\beta}}^D = \mathcal{H}_0^1(\Omega_{\beta}); \quad (2.27)$$

$s = (s, t, z)$ denota um ponto de Ω_{β} , e $\nabla \psi$ denota o gradiente de ψ .

Antes de mostrar a existência do intervalo para o qual o espectro discreto do operador Laplaciano de Dirichlet em Ω_{β} possui um único autovalor discreto, precisamos de realizar uma mudança de variáveis que ajude na procura.

Figura 2.5: Guias de onda isométricas, com $\beta = 0.7$.

Relembrando as notações e os resultados da Subseção 2.3.1, é suficiente estudar o espectro discreto do Laplaciano de Dirichlet em Ω_β^+ . Considere o conjunto aberto $\hat{\Omega}_\beta$,

$$\hat{\Omega}_\beta := \left\{ (\hat{s}, \hat{t}, \hat{z}) \in \left(-(d-c) \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}, \infty \right) \times (0, b-a) \times \left(0, (d-c) \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} \right) : \right. \\ \left. \hat{z} < \frac{\hat{s}}{\beta} + (d-c) \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}, \text{ se } \hat{s} \in \left(-(d-c) \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}, 0 \right) \right\},$$

como mostra a Figura 2.5, $\hat{\Omega}_\beta$ é isometricamente afim à Ω_β^+ .

Denote por $-\Delta_{\hat{\Omega}_\beta}^{DN}$ o operador autoadjunto associado à forma quadrática

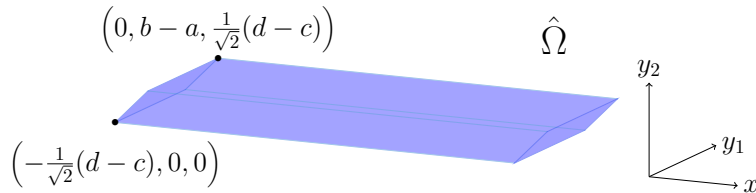
$$Q_{\hat{\Omega}_\beta}^{DN}(\psi) := \int_{\hat{\Omega}_\beta} |\nabla \psi|^2 d\hat{\mathbf{x}}, \quad \text{dom } Q_{\hat{\Omega}_\beta}^{DN} := \{ \psi \in \mathcal{H}^1(\hat{\Omega}_\beta) : \psi = 0 \text{ em } \partial_D \hat{\Omega}_\beta \}, \quad (2.28)$$

em que $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{s}, \hat{t}, \hat{z})$ denota um ponto de $\hat{\Omega}_\beta$ e $\partial_D \hat{\Omega}_\beta := \mathbb{R} \times (0, b-a) \times (0, (d-c)/\sqrt{1+\beta^2}) \cap \partial \hat{\Omega}_\beta$.

Seja $\hat{\Omega}$ um conjunto aberto,

$$\hat{\Omega} := \left\{ (x, y_1, y_2) \in \left(-\frac{d-c}{\sqrt{2}}, \infty \right) \times (0, b-a) \times \left(0, \frac{d-c}{\sqrt{2}} \right) : y_2 < x + \frac{d-c}{\sqrt{2}}, \text{ se } x \in \left(-\frac{d-c}{\sqrt{2}}, 0 \right) \right\},$$

como mostra a Figura 2.6.

Figura 2.6: Semi-guia de onda retangular $\hat{\Omega}$.

Considere a aplicação dilatação $\mathcal{F}_\beta : \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como

$$\mathcal{F}_\beta(x, y_1, y_2) = \left(x \frac{\sqrt{2}\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}, y_1, y_2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\beta^2}} \right), \quad \forall (x, y_1, y_2) \in \hat{\Omega}.$$

Observemos que $\hat{\Omega}_\beta := \mathcal{F}_\beta(\hat{\Omega})$, além disso, $\det J\mathcal{F}_\beta(x, y_1, y_2) = 2\beta/(1 + \beta^2) \neq 0$. Logo, $\mathcal{F}_\beta : \hat{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega}_\beta$ é um difeomorfismo local e, de fato, um difeomorfismo global, pois \mathcal{F}_β é injetora.

Agora, consideremos o operador unitário

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{U}}_\beta : L^2(\tilde{\Omega}_\beta) &\rightarrow L^2(\hat{\Omega}) \\ \psi &\mapsto \sqrt{\frac{2\beta}{1+\beta^2}}(\psi \circ \mathcal{F}_\beta), \end{aligned} \quad (2.29)$$

e, definamos

$$\begin{aligned} \hat{Q}_\beta(\psi) &:= \mathcal{Q}_{\tilde{\Omega}_\beta}^{DN}(\hat{\mathcal{U}}_\beta^{-1}\psi) = \int_{\hat{\Omega}} |(\nabla\psi) \circ \mathcal{F}_\beta|^2 \cdot |\det J\mathcal{F}_\beta| \, dx dy \\ &= \int_{\hat{\Omega}} \left[\left(\frac{1+\beta^2}{2\beta^2} \right) |\partial_x \psi|^2 + |\partial_{y_1} \psi|^2 + \left(\frac{1+\beta^2}{2} \right) |\partial_{y_2} \psi|^2 \right] dx dy, \end{aligned}$$

$$\text{dom } \hat{Q}_\beta := \hat{\mathcal{U}}_\beta(\text{dom } \mathcal{Q}_{\tilde{\Omega}_\beta}^{DN}) = \{ \psi \in \mathcal{H}^1(\hat{\Omega}) : \psi = 0 \text{ em } \partial_D \hat{\Omega} \},$$

em que $\partial_D \hat{\Omega} := \mathbb{R} \times (0, b-a) \times (0, (d-c)/\sqrt{2}) \cap \partial \hat{\Omega}$. Denote por \hat{H}_β o operador autoadjunto associado à forma quadrática $\hat{Q}_\beta(\psi)$.

Em particular, pelos resultados da Seção 2.2 e Subseção 2.3.1, tem-se que

$$\sigma_{\text{ess}}(-\Delta_{\tilde{\Omega}_\beta}^D) = \sigma_{\text{ess}}(\hat{H}_\beta) = \left[\pi^2 \left(\frac{1}{(b-a)^2} + \frac{1+\beta^2}{(d-c)^2} \right), \infty \right), \quad \text{e} \quad \sigma_{\text{dis}}(-\Delta_{\tilde{\Omega}_\beta}^D) = \sigma_{\text{dis}}(\hat{H}_\beta). \quad (2.30)$$

Agora estamos em condições de provar o seguinte resultado.

Proposição 2.6. *Se S é o retângulo $(a, b) \times (c, d)$, então, para cada $\beta \in (0, \beta^*)$, em que*

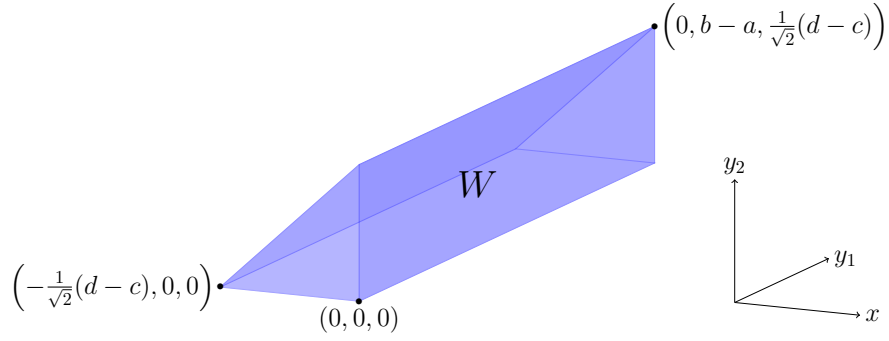
$$\beta^* = \begin{cases} \sqrt{3}R, & \text{se } R \leq 2/\sqrt{3}, \\ (1/2)\sqrt{-R^2 + 3 + \sqrt{49 + 2R^2 + R^4}}, & \text{se } R > 2/\sqrt{3}. \end{cases} \quad R = \frac{d-c}{b-a},$$

o operador $-\Delta_{\tilde{\Omega}_\beta}^D$ tem exatamente um autovalor discreto.

Demonstração. Dado (2.30), a estratégia é estudar $\sigma(\hat{H}_\beta)$. Suponha que $\lambda_1(\hat{H}_\beta)$ e $\lambda_2(\hat{H}_\beta)$ são autovalores discretos do operador \hat{H}_β .

Consideremos a fatia W , como mostra a Figura 2.7, definida como a região limitada pelos seguintes conjuntos

$$\begin{aligned} T_1 &:= \left\{ (x, y_1, y_2) \in \left(-\frac{d-c}{\sqrt{2}}, 0 \right) \times \{b-a\} \times \left(0, \frac{d-c}{\sqrt{2}} \right) : y_2 < x + \frac{d-c}{\sqrt{2}} \right\}, \\ T_2 &:= \left\{ (x, y_1, y_2) \in \left(-\frac{d-c}{\sqrt{2}}, 0 \right) \times \{0\} \times \left(0, \frac{d-c}{\sqrt{2}} \right) : y_2 < x + \frac{d-c}{\sqrt{2}} \right\}, \\ T_3 &:= \left\{ (x, y_1, y_2) \in \left(-\frac{d-c}{\sqrt{2}}, 0 \right) \times (0, b-a) \times \{0\} \right\}, \\ T_4 &:= \left\{ (x, y_1, y_2) \in \{0\} \times (0, b-a) \times \left(0, \frac{d-c}{\sqrt{2}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Figura 2.7: Fatia W com condições de Dirichlet-Neumann.

Agora, considere o operador

$$J(\beta) := -\left(\frac{1+\beta^2}{2\beta^2}\right)\partial_x^2 - \partial_{y_1}^2 - \left(\frac{1+\beta^2}{2}\right)\partial_{y_2}^2, \quad (2.31)$$

e o problema auxiliar

$$\begin{cases} J(\beta)\psi = \mu\psi, & \text{em } W, \\ \psi = 0, & \text{em } T_1 \cup T_2 \cup T_3, \\ \partial_x \psi = 0, & \text{em } T_4, \\ \partial_\nu \psi = 0, & \text{em } \partial W \setminus (\overline{T_1} \cup \overline{T_2} \cup \overline{T_3} \cup \overline{T_4}). \end{cases} \quad (2.32)$$

em que $\partial\nu$ é a derivada direcional ao longo do vetor normal exterior.

Sejam μ_1^β e μ_2^β os dois primeiros autovalores do problema (2.32) (o espectro do operador J é puramente discreto), e sejam ψ_1^β e ψ_2^β suas respectivas autofunções. Note que, no caso particular $\beta = 1$, tem-se $J(1) = -\Delta$. Assim, da Observação A.6 do Apêndice A, para $d - c \leq (2/\sqrt{3})(b - a)$ segue que

$$\begin{aligned} \mu_1^1 &= \pi^2 \left(\frac{1}{(d-c)^2} + \frac{1}{(b-a)^2} \right), & \psi_1^1(x, y_1, y_2) &= \frac{2}{e\sqrt{f}} \cos\left(\frac{\pi}{2e}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{2f}y_1\right) \sin\left(\frac{\pi}{2e}y_2\right), \\ \mu_2^1 &= \pi^2 \left(\frac{1}{(d-c)^2} + \frac{4}{(b-a)^2} \right), & \psi_2^1(x, y_1, y_2) &= \frac{2}{e\sqrt{f}} \cos\left(\frac{\pi}{2e}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{f}y_1\right) \sin\left(\frac{\pi}{2e}y_2\right), \end{aligned}$$

em que $e = (d - c)/\sqrt{2}$ e $f = (b - a)/2$. Suponhamos que

$$\mu_2^\beta \geq \pi^2 \left(\frac{1}{(b-a)^2} + \frac{1+\beta^2}{(d-c)^2} \right). \quad (2.33)$$

Considere o subespaço

$$E_\perp^\beta = \left\{ \varphi \in \text{dom } \hat{Q}_\beta : \int_W \psi_1^\beta \varphi \, dx dy = 0 \right\}.$$

Seja $\varphi \in \hat{Q}_\beta$, e seja ψ a restrição de φ em W . Note que, para cada $\psi \in \mathcal{C} = \{\varphi \in \mathcal{H}^1(W) : \varphi = 0 \text{ em } T_1 \cup T_2 \cup S_1\}$, tal que $\int_W \psi_1^\beta \psi \, dx dy = 0$, pelo Princípio Max-Min, tem-se que

$$\begin{aligned} \pi^2 \left(\frac{1}{(b-a)^2} + \frac{1+\beta^2}{(d-c)^2} \right) \int_W |\psi|^2 \, dx dy &\leq \mu_2^\beta \int_W |\psi|^2 \, dx dy \\ &\leq \int_W \left[\left(\frac{1+\beta^2}{2\beta^2} \right) |\partial_x \psi|^2 + |\partial_{y_1} \psi|^2 + \left(\frac{1+\beta^2}{2} \right) |\partial_{y_2} \psi|^2 \right] \, dx dy. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Além disso, para cada $\varphi \in \text{dom } \hat{Q}_\beta$

$$\pi^2 \left(\frac{1}{(b-a)^2} + \frac{1+\beta^2}{(d-c)^2} \right) \int_{\hat{\Omega} \setminus W} |\varphi|^2 dx dy \leq \int_{\hat{\Omega} \setminus W} \left[\left(\frac{1+\beta^2}{2\beta^2} \right) |\partial_x \varphi|^2 + |\partial_{y_1} \varphi|^2 + \left(\frac{1+\beta^2}{2} \right) |\partial_{y_2} \varphi|^2 \right] dx dy. \quad (2.35)$$

Por (2.34) e (2.35), obtemos, para todo $\varphi \in E_\perp^\beta$,

$$\pi^2 \left(\frac{1}{(b-a)^2} + \frac{1+\beta^2}{(d-c)^2} \right) \int_{\hat{\Omega}} |\varphi|^2 dx dy \leq \int_{\hat{\Omega}} \left[\left(\frac{1+\beta^2}{2\beta^2} \right) |\partial_x \varphi|^2 + |\partial_{y_1} \varphi|^2 + \left(\frac{1+\beta^2}{2} \right) |\partial_{y_2} \varphi|^2 \right] dx dy.$$

Desde que E^β tem dimensão no máximo 1, segue que

$$\lambda_2(\hat{H}_\beta) \geq \inf_{\substack{\psi \in \text{dom } \hat{Q}_\beta \cap E_\perp^\beta \\ \psi \neq 0}} \frac{\hat{Q}_\beta(\psi)}{\|\psi\|_{L^2(\hat{\Omega})}^2} \geq \pi^2 \left(\frac{1}{(b-a)^2} + \frac{1+\beta^2}{(d-c)^2} \right),$$

o que contradiz a hipótese de $\lambda_2(\hat{H}_\beta) \in \sigma_{\text{dis}}(\hat{H}_\beta)$. Logo, $\lambda_1(\hat{H}_\beta)$ é o único autovalor discreto de \hat{H}_β no intervalo $(0, \pi^2 (1/(b-a)^2 + (1+\beta^2)/(d-c)^2))$.

Agora, vamos encontrar os valores β para os quais (2.33) é verdadeira. Para estimar os autovalores do problema auxiliar (2.32), pelo Princípio Max-Min, sabemos que

$$\mu_2^\beta = \sup_{F_1} \left\{ \inf_{\substack{\psi \in \mathcal{C} \cap F_1^\perp \\ \psi \neq 0}} \frac{\int_W \left[\left(\frac{1+\beta^2}{2\beta^2} \right) |\partial_x \psi|^2 + |\partial_{y_1} \psi|^2 + \left(\frac{1+\beta^2}{2} \right) |\partial_{y_2} \psi|^2 \right] dx dy}{\|\psi\|_{L^2(W)}^2} \right\},$$

em que o supremo é tomado sobre todos os subespaços lineares F_1 de dimensão no máximo 1. Observe que

$$\begin{aligned} \mu_2^1 &= \sup_{F_1} \left\{ \inf_{\substack{\psi \in \mathcal{C} \cap F_1^\perp \\ \psi \neq 0}} \frac{\int_W (|\partial_x \psi|^2 + |\partial_{y_1} \psi|^2 + |\partial_{y_2} \psi|^2) dx dy}{\|\psi\|_{L^2(W_1)}^2} \right\} \\ &\leq \max \left\{ \frac{2\beta^2}{1+\beta^2}, 1, \frac{2}{1+\beta^2} \right\} \sup_{F_1} \left\{ \inf_{\substack{\psi \in \mathcal{C} \cap F_1^\perp \\ \psi \neq 0}} \frac{\int_W \left[\left(\frac{1+\beta^2}{2\beta^2} \right) |\partial_x \psi|^2 + |\partial_{y_1} \psi|^2 + \left(\frac{1+\beta^2}{2} \right) |\partial_{y_2} \psi|^2 \right] dx dy}{\|\psi\|_{L^2(W)}^2} \right\} \\ &= \max \left\{ \frac{2\beta^2}{1+\beta^2}, 1, \frac{2}{1+\beta^2} \right\} \mu_2^\beta. \end{aligned}$$

Logo,

$$\mu_2^\beta \geq \pi^2 \left(\frac{1}{(d-c)^2} + \frac{4}{(b-a)^2} \right) \min \left\{ \frac{1+\beta^2}{2\beta^2}, 1, \frac{1+\beta^2}{2} \right\}.$$

Finalmente, para $\beta \in (0, \sqrt{3}R)$, a desigualdade (2.33) é válida para $R \leq 2/\sqrt{3}$.

Agora, assumimos $R > 2/\sqrt{3}$. Neste caso,

$$\mu_1^1 = \pi^2 \left(\frac{1}{(d-c)^2} + \frac{1}{(b-a)^2} \right), \quad \mu_2^1 = \pi^2 \left(\frac{1}{(d-c)^2} + \frac{5}{(b-a)^2} \right).$$

Um análise similar mostra que

$$\mu_2^\beta \geq \pi^2 \left(\frac{5}{(d-c)^2} + \frac{1}{(b-a)^2} \right) \min \left\{ \frac{1+\beta^2}{2\beta^2}, 1, \frac{1+\beta^2}{2} \right\}.$$

Logo, o resultado é obtido para $\beta \in \left(0, (1/2)\sqrt{-R^2 + 3 + \sqrt{49 + 2R^2 + R^4}} \right)$. \square

Observação 2.7. As desigualdades $d - c > (2/\sqrt{3})(b - a)$ e $d - c \leq (2/\sqrt{3})(b - a)$ usadas na demonstração acima determinam o valor do segundo autovalor discreto μ_2^1 do operador $-\Delta$. Por outro lado, observe que $\beta \in (0, \beta^*)$ é apenas uma condição suficiente para garantir a singularidade do autovalor discreto.

Observação 2.8. A estratégia usada na demonstração da Proposição 2.6, para achar o intervalo de variação de β , pode ser usada também para o caso de uma região arbitraria $S \subset \mathbb{R}^2$, desde que o domínio Ω_β possa ser definido como em (2.26) e sejam conhecidos os valores $E_1(\beta)$, μ_1^1 e μ_1^1 .

2.5 Conjectura: espectro discreto

Considerando o caso particular em que S é um retângulo, nesta seção mostraremos uma conjectura sobre o comportamento dos elementos do espectro do operador Laplaciano de Dirichlet em Ω_β quando $\beta \rightarrow \infty$. Motivados pelos resultados em [5], a ideia é baseada no seguinte fato puramente geométrico:

Proposição 2.9. *Se S é o retângulo $(a, b) \times (c, d)$, então,*

$$\limsup_{\substack{\beta \rightarrow \infty \\ s \in \Omega_\beta}} |B_1(s) \cap \Omega_\beta| = 0, \quad (2.36)$$

em que $B_1(s)$ denota a bola de radio 1 centrada em $s \in \mathbb{R}^3$ e $|\cdot|$ representa a medida de Lebesgue.

Demonstração. Lembre o difeomorfismo dado por (2.2), definido por $\mathcal{L}_\beta^+(x, y_1, y_2) = (x, y_1, f(x) + y_2)$, em que $f(x) = x\beta$, $\text{dom } f = (0, \infty)$, e tal que $\Omega_\beta^+ = \mathcal{L}_\beta^+((0, \infty) \times S)$. Para cada $\eta \in \mathbb{R}$, denote por $\Sigma(\eta)$ o conjunto de pontos que se intersectam a fronteira $\partial\Omega_\beta$ com a semi-reta horizontal $(0, \infty) \times \{(a+b)/2\} \times \{\eta\}$. Desde que f é estritamente crescente, para todo $\eta \geq d$, o conjunto $\Sigma(\eta)$ consiste justamente de dois pontos $s_1(\eta) = \mathcal{L}_\beta(x_1(\eta), (a+b)/2, d)$ e $s_2(\eta) = \mathcal{L}_\beta(x_2(\eta), (a+b)/2, c)$, com $1 < x_1(\eta) < x_2(\eta)$. Seja $s = \mathcal{L}_\beta(x, y_1, y_2)$ um ponto em Ω_β tal que x é positivo, $y_1 = (a+b)/2$ e a componente no eixo z , η , satisfaz $\eta := f(x) + y_2 \geq 1 + d$. Logo, como se mostra na Figura 2.8, tem-se que $B_1(s) \cap \Omega_\beta \subset [x_1(\eta - 1), x_2(\eta + 1)] \times [(a+b)/2 - 1, (a+b)/2 + 1] \times [\eta - 1, \eta + 1]$, e então

$$|B_1(s) \cap \Omega_\beta| \leq 2 \cdot 2 \cdot |x_2(\eta + 1) - x_1(\eta - 1)|. \quad (2.37)$$

Pelo Teorema do Valor Médio,

$$2 + (d - c) = f(x_2(\eta + 1)) - f(x_1(\eta - 1)) = f'(\xi_\eta) |x_2(\eta + 1) - x_1(\eta - 1)|,$$

que $\Omega_{\beta,M}^2$ tem dois “cantos”, um no plano $\{0\} \times \mathbb{R}^2$ e outro no plano $\{M\} \times \mathbb{R}^2$, M é o valor da distância entre esses dois cantos, na direção x . $\Omega_{\beta,M}^2$ será chamado de guia de onda com dois cantos.

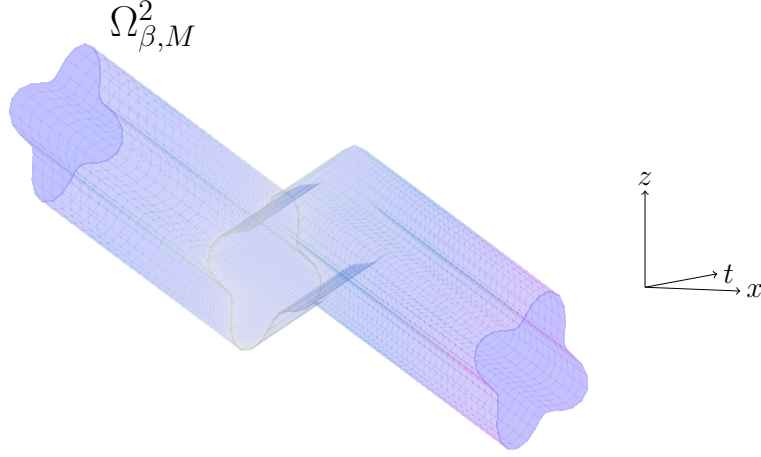


Figura 2.9: Guia de onda com dois cantos $\Omega_{\beta,M}^2$, com $\beta = 0.7$ e $M = 2.25$.

Denote por $-\Delta_{\Omega_{\beta,M}^2}^D$ o Laplaciano de Dirichlet em $\Omega_{\beta,M}^2$, isto é, o operador autoadjunto associado com a forma quadrática

$$Q_{\Omega_{\beta,M}^2}^D(\psi) := \int_{\Omega_{\beta,M}^2} |\nabla \psi|^2 dx, \quad \text{dom } Q_{\Omega_{\beta,M}^2}^D = \mathcal{H}_0^1(\Omega_{\beta,M}^2), \quad (2.41)$$

$\mathbf{x} = (x, t, z)$ denota um ponto de $\Omega_{\beta,M}^2$.

Note que, pela Proposição 1 em [38], $\mathcal{L}_{\beta,M}$ é um $C^{0,1}$ -difeomorfismo local. Desde que $\mathcal{L}_{\beta,M}$ é injetora obtemos um $C^{0,1}$ -difeomorfismo global. Logo, de modo análogo à Subseção 2.3.2, podemos realizar uma mudança de variáveis em (2.41) e chegar à seguinte forma quadrática definida por

$$Q_{\beta,M}(\psi) := \int_{\mathbb{R} \times S} \left(\left| \psi' - f'(x) \frac{\partial \psi}{\partial y_2} \right|^2 + |\nabla_y \psi|^2 \right) dx dy, \quad (2.42)$$

$$\text{dom } Q_{\beta,M} := \{ \psi \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R} \times S) : \psi = 0 \text{ on } (0, \infty) \times \partial S \},$$

em que $\psi' := \partial \psi / \partial x$, $\nabla_y \psi := (\partial_{y_1} \psi, \partial_{y_2} \psi)$, $f'(x) = \beta$, para todo $x \in [0, M]$ e $f'(x) = -\beta$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus [0, M]$. Denote por $H_{\beta,M}$ o operador autoadjunto associado com $Q_{\beta,M}(\psi)$. Assim, desde que os operadores $H_{\beta,M}$ e $-\Delta_{\Omega_{\beta,M}^2}^D$ são unitariamente equivalente, $\sigma(H_{\beta,M}) = \sigma(-\Delta_{\Omega_{\beta,M}^2}^D)$. Dos resultados da Seção 2.2, tem-se que

$$\sigma_{\text{ess}}(-\Delta_{\Omega_{\beta,M}^2}^D) = \sigma_{\text{ess}}(H_{\beta,M}) = [E_1(\beta), \infty). \quad (2.43)$$

Proposição 2.10. Dado $M \in (0, \infty)$, para cada $\beta \in (0, \infty)$, tem-se $\sigma_{\text{dis}}(-\Delta_{\Omega_{\beta,M}^2}^D) \neq \emptyset$.

A demonstração da Proposição 2.10 segue os mesmos passos da prova da Proposição 2.4 sendo necessário apenas a seguinte modificação. Considere $w \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $w = 1$ para $x \in [-1, 1]$, e $w = 0$ para $\mathbb{R} \setminus [-2, 2]$, e a função $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, com $\text{supp } \eta \subset (-1, N)$, em que $N = \min\{1, M/2\}$,

e $\eta(0) \neq 0$. Do suporte da função η , podemos observar que a demonstração esta focada num canto, particularmente, no canto que se encontra no plano $\{0\} \times \mathbb{R}$. O que implica que o fato da guia de onda possuir pelo menos um canto, garante a existência do espectro discreto do operador Laplaciano de Dirichlet.

Agora, observemos que no caso em que

$$f(x) = \begin{cases} -\beta x, & \text{se } x < 0, \\ \beta x, & \text{se } 0 \leq x < M, \\ -\beta x + 2M\beta, & \text{se } M \leq x < 2M, \\ \beta x - 2M\beta, & \text{se } x \geq 2M, \end{cases}$$

considerando a aplicação em (2.39), definimos

$$\Omega_{\beta,M}^3 := \mathcal{L}_{\beta,M}(\mathbb{R} \times S). \quad (2.44)$$

Geometricamente, $\Omega_{\beta,M}^3$ é descrita da mesma forma que no caso $\Omega_{\beta,M}^2$, com a diferença que $\Omega_{\beta,M}^3$ possui três “cantos”, um no plano $\{0\} \times \mathbb{R}^2$, e mais dois nos planos $\{M\} \times \mathbb{R}^2$ e $\{2M\} \times \mathbb{R}^2$, como se mostra na Figura 2.10. Observe que M representam a distância entre os cantos consecutivos na guia de onda, na direção x . $\Omega_{\beta,M}^3$ recebe o nome de guia de onda com três cantos.

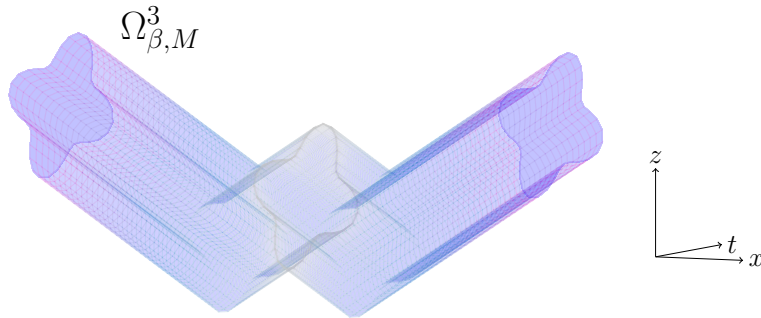


Figura 2.10: Guia de onda com três cantos $\Omega_{\beta,M}^3$, com $\beta = 0.7$ e $M = 2.25$.

Por outro lado, no caso em que

$$f(x) = \begin{cases} -\beta x, & \text{se } x < 0, \\ \beta x, & \text{se } 0 \leq x < M, \\ -\beta x + 2M\beta, & \text{se } M \leq x < 2M, \\ \beta x - 2M\beta, & \text{se } 2M \leq x < 3M, \\ -\beta x + 4M\beta, & \text{se } 3M \leq x < 4M, \end{cases}$$

obtemos

$$\Omega_{\beta,M}^4 := \mathcal{L}_{\beta,M}(\mathbb{R} \times S). \quad (2.45)$$

Neste caso, $\Omega_{\beta,M}^4$ possui quatro “cantos”, um no plano $\{0\} \times \mathbb{R}^2$, e mais três nos planos $\{M\} \times \mathbb{R}^2$, $\{2M\} \times \mathbb{R}^2$ e $\{3M\} \times \mathbb{R}^2$, como se mostra na Figura 2.11. $\Omega_{\beta,M}^4$ recebe o nome de guia de onda com quatro cantos.

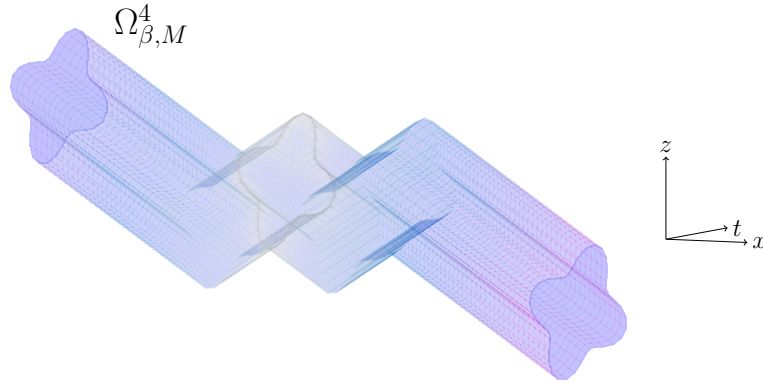


Figura 2.11: Guia de onda com quatro cantos $\Omega_{\beta, M}^4$, com $\beta = 0.7$ e $M = 2.25$.

Observemos que, seguindo o padrão dado na definição das funções $f(x)$ acima e a ideia da demonstração da Proposição 2.10, independentemente do número de cantos que possam ser adicionados à guia de onda, tem-se que, dado $M \in (0, \infty)$ e $n \in \{3, 4, 5, 6, \dots\}$, para todo $\beta \in (0, \infty)$,

$$\sigma_{ess}(-\Delta_{\Omega_{\beta, M}^n}^D) = [E_1(\beta), \infty) \quad \text{e} \quad \sigma_{dis}(-\Delta_{\Omega_{\beta, M}^n}^D) \neq \emptyset. \quad (2.46)$$

Pois, lembremos que o espectro essencial do operador Laplaciano de Dirichlet num domínio tubular é determinado pela geometria da região no infinito. Além disso, da Proposição 2.10, podemos observar que o fato do domínio tubular possuir pelo menos um canto, garante a existência do espectro discreto.

Por outro lado, vale a pena mencionar que, quando $M = 0$, nos casos em que $n \in \{2, 4, 6, \dots\}$, $\Omega_{\beta, M}^n$ corresponde a uma guia de onda reta, e nos casos em que $n \in \{3, 5, 7, \dots\}$, $\Omega_{\beta, M}^n$ corresponde à guia de onda com canto Ω_{β} , definida em (2.3).

2.7 Análise numérica

Nesta seção, vamos mostrar alguns resultados numéricos baseados nos problemas descritos nas seções anteriores, para isto, foi usando o software *Freefem++* [28]. Além disso, apresentaremos algumas conjecturas baseadas nos resultados numéricos.

Exemplo 2.11. Seja $S = (0, \pi\sqrt{2}/2) \times (0, \pi\sqrt{2}/4)$. Dado o operador 2-dimensional definido em (2.5), tem-se que, para todo $\beta \in (0, \infty)$, $E_1(\beta) = 2 + 8(1 + \beta^2)$. Através do código descrito no Exemplo B.1 do Apêndice B, para um tamanho de malha de aproximadamente 0.1, obtemos os dados representados na Figura 2.12, para $\beta \in (0, 10]$.

Como se observa na Figura 2.12, para $\beta \in (0, 1.73]$ (segundo valores calculados) o espectro discreto do operador $-\Delta_{\Omega_{\beta}}^D$ possui um único elemento, o número de autovalores discretos para $\beta > 1.73$ é finito e além disso o número de autovalores discretos tende a aumentar conforme β aumenta.

Exemplo 2.12. Seja $S = (0, 2\pi) \times (0, \pi)$. Dados $\beta, M \in (0, \infty)$, consideramos o domínio $\Omega_{\beta, M}^n$, para $n = 2, 3, 4$, como se mostra na Figura 2.16. De (2.46) e do operador 2-dimensional definido em

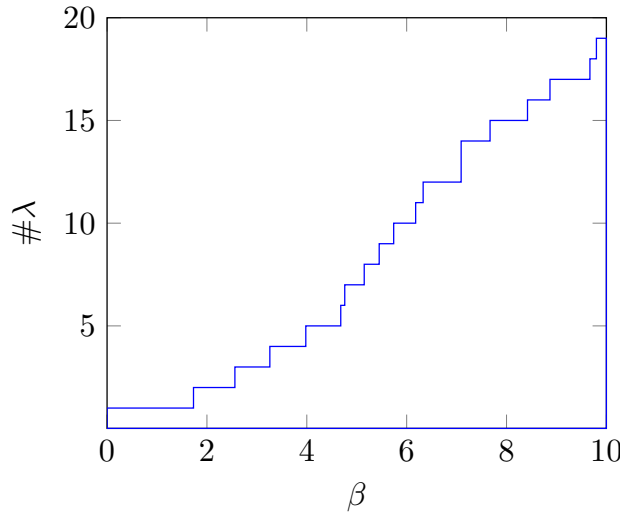


Figura 2.12: Relação entre o número de autovalores discretos $\#\lambda$ e β .

(2.5), tem-se que $E_1(\beta) = 5/4 + \beta^2$. Fixando os valores $\beta = 0.7, 1.5, 5$, através do código descrito no Exemplo B.1 do Apêndice B, é possível observar que, numericamente, para o caso em que β é igual a 0.7 e 1.5 o operador Laplaciano de Dirichlet em Ω_β possui somente um autovalor abaixo do ínfimo do espectro essencial, e no caso em que $\beta = 5$, $-\Delta_{\Omega_\beta}^D$ possui 8 autovalores discreto. Note que essa análise não depende de M .

Agora, variando M , vamos analisar o comportamento dos autovalores discretos do operador $-\Delta_{\Omega_{\beta,M}}^D$ pra cada uns dos valores β e n fixos, isto é, o comportamento do espectro discreto no caso em que a guia de onda contem mais de um canto. Nos gráficos apresentados nesta seção, as linhas retas de cor azul, mostram o ínfimo do espectro essencial em cada caso, os pontos vermelhos representam os valores calculados por meio do software *Freefem++*, e a linha preta descreve a tendencia dos autovalores discretos λ .

Caso $n = 2$

Consideremos a guia de onda retangular com dois cantos $\Omega_{\beta,M}^2$ definida em (2.40). Através do código descrito no Exemplo B.2 do Apêndice B, para um tamanho de malha em $[0.17, 0.7]$, foram obtidos os dados representados na Figura 2.13.

Como se observa nos gráficos em (a), (b) e (c) da Figura 2.13, dado $\beta \in (0, \infty)$, o número de autovalores discretos é finito e podemos observar o seguinte comportamento para alguns valores de M . No caso $\beta = 0.7$, para $M \geq 6$ o espectro discreto possui dois elementos, no entanto observemos que para $M \geq 30$ o espectro discreto possui um elemento degenerado, isto é, um autovalor discreto de multiplicidade igual a 2. No caso $\beta = 1.5$, para $M \geq 0.79$ o espectro discreto possui dois elementos e para $M \geq 7$, o espectro discreto possui um elemento de multiplicidade igual a 2. No caso $\beta = 5$, podemos observar um comportamento semelhante, pois neste caso para $M \geq 0.02$ obtemos mais de dois autovalores discretos e para $M \geq 2$ observamos a existência de vários elementos de multiplicidades igual a 2.

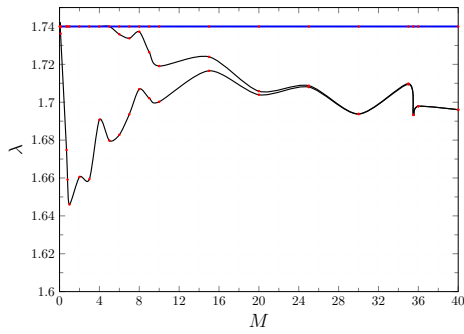
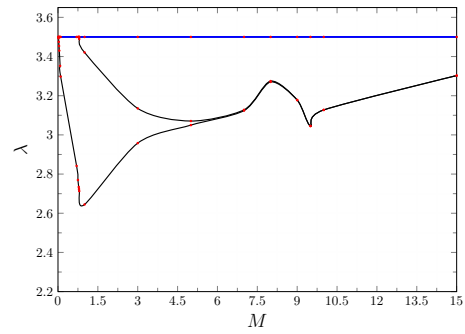
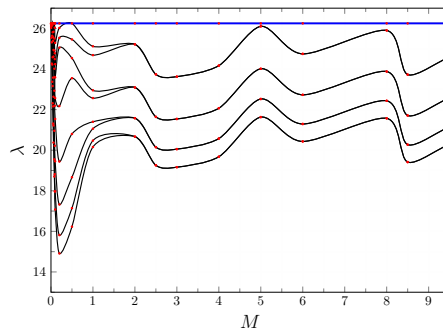
(a) Relação entre M e os autovalores discretos, para $\beta = 0.7$.(b) Relação entre M e os autovalores discretos, para $\beta = 1.5$.(c) Relação entre M e os autovalores discretos, para $\beta = 5$.

Figura 2.13: Autovalores discretos do operador Laplaciano de Dirichlet em guias de onda retangulares com dois cantos $\Omega_{\beta,M}^2$.

Caso $n = 3$

Consideremos a guia de onda retangular com três cantos $\Omega_{\beta,M}^3$ definida em (2.44). Através do código descrito no Exemplo B.3 do Apêndice B, para um tamanho de malha em $[0.18, 0.7]$, foram obtidos os dados representados na Figura 2.14.

Como se observa nos gráficos em (a), (b) e (c) da Figura 2.14, dado $\beta \in (0, \infty)$, o número de autovalores discretos é finito e podemos observar o seguinte comportamento para alguns valores de M . No caso $\beta = 0.7$, para $M \geq 8$ o espectro discreto possui três elementos, no entanto, observemos que existe $M \in [22, \infty)$ tal que o espectro discreto possui um elemento degenerado, pois podemos encontrar um autovalor discreto de multiplicidade igual a 2 ou 3. No caso $\beta = 1.5$, para $M \geq 0.9$ o espectro discreto possui três elementos e existe $M \in [10, \infty)$ tal que o espectro discreto possui um elemento de multiplicidade igual a 2 ou 3. No caso $\beta = 5$, podemos observar um comportamento semelhante, pois neste caso para $M \geq 0.01$ obtemos mais de três autovalores discretos e existe $M \in [4, \infty)$ tal que o espectro discreto possui vários elementos de multiplicidades igual a 2 ou 3.

Caso $n = 4$

Consideremos a guia de onda retangular com quatro cantos $\Omega_{\beta,M}^4$ definida em (2.45). Através do código descrito no Exemplo B.4 do Apêndice B, para um tamanho de malha em $[0.18, 0.79]$, foram obtidos os dados representados na Figura 2.15.

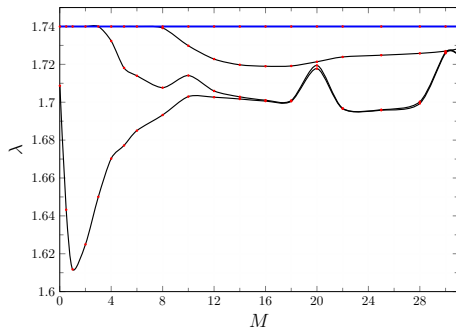
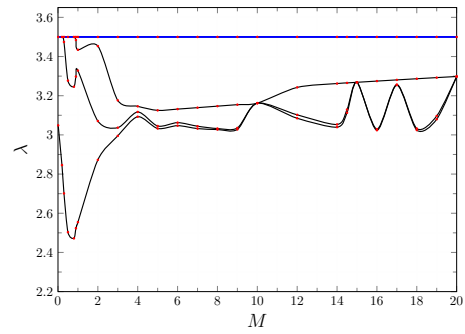
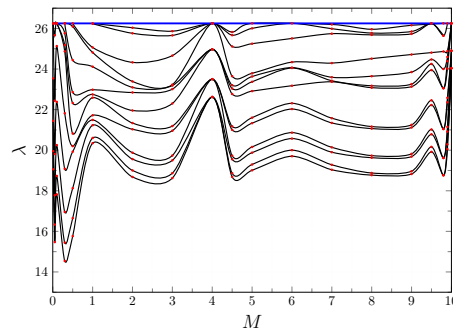
(a) Relação entre M e os autovalores discretos, para $\beta = 0.7$.(b) Relação entre M e os autovalores discretos, para $\beta = 1.5$.(c) Relação entre M e os autovalores discretos, para $\beta = 5$.

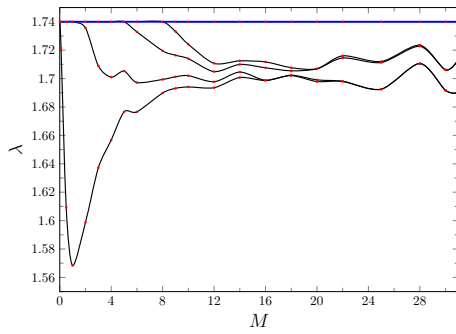
Figura 2.14: Autovalores discretos do operador Laplaciano de Dirichlet em Guias de onda retangulares com três cantos $\Omega_{\beta, M}^3$.

Como se observa nos gráficos em (a), (b) e (c) da Figura 2.15, dado $\beta \in (0, \infty)$, o número de autovalores discretos é finito e podemos observar o seguinte comportamento para alguns valores de M . No caso $\beta = 0.7$, para $M \geq 9$ o espectro discreto possui quatro elementos, no entanto observemos que existe $M \in [18, \infty)$ tal que o espectro discreto possui pelo menos um elemento degenerado, pois podemos encontrar um autovalor discreto de multiplicidade maior ou igual a 2. No caso $\beta = 1.5$, para $M \geq 3$ o espectro discreto possui quatro elementos e existe $M \in [6, \infty)$ tal que o espectro discreto possui pelo menos um elemento de multiplicidade maior ou igual a 2. No caso $\beta = 5$, podemos observar um comportamento semelhante, pois neste caso para $M \geq 0.02$ obtemos mais de quatro autovalores discretos e existe $M \in [2, \infty)$ tal que o espectro discreto possui pelo menos um elemento de multiplicidade maior ou igual a 2.

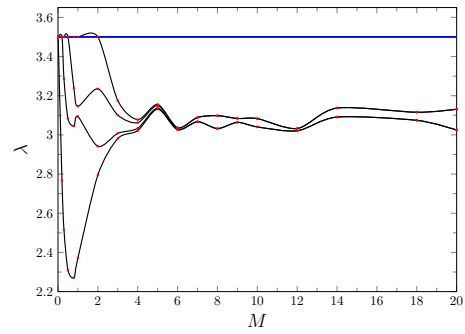
Observemos que em cada uns dos casos vistos anteriormente, o valor de M no qual obtemos os resultados descritos, esta inversamente relacionado com β . Pois cada vez que foi aumentado o valor de β , o valor M no qual foi encontrado a existência de n autovalores, diminuía.

Por outro lado, note que nos casos em que o espectro discreto do operador $-\Delta_{\Omega_{\beta}^D}$ possui um único autovalor discreto, para cada uns dos casos n , existe um $M^* \in (0, \infty)$ tal que para todo $M \in (M^*, \infty)$, o espectro discreto de $-\Delta_{\Omega_{\beta, M}^D}$ possui exatamente n elementos.

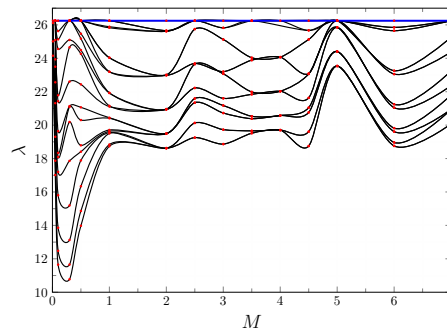
Por último, de modo geral podemos supor que, no caso de guias de onda retangulares com n



(a) Relação entre M e os autovalores discretos, para $\beta = 0.7$.



(b) Relação entre M e os autovalores discretos, para $\beta = 1.5$.



(c) Relação entre M e os autovalores discretos, para $\beta = 5$.

Figura 2.15: Autovalores discretos do operador Laplaciano de Dirichlet em Guias de onda retangulares com três cantos $\Omega_{\beta, M}^4$.

cantos, dado $\beta \in (0, \infty)$, existe $M^*, M^{**} \in (0, \infty)$ tal que para todo $M \geq M^*$ o espectro discreto do operador $-\Delta_{\Omega_{\beta, M}^4}^D$ possui pelo menos n elementos, e além disso, em $[M^{**}, \infty)$ existem valores de M cujo espectro discreto possui pelo menos um elemento degenerado.

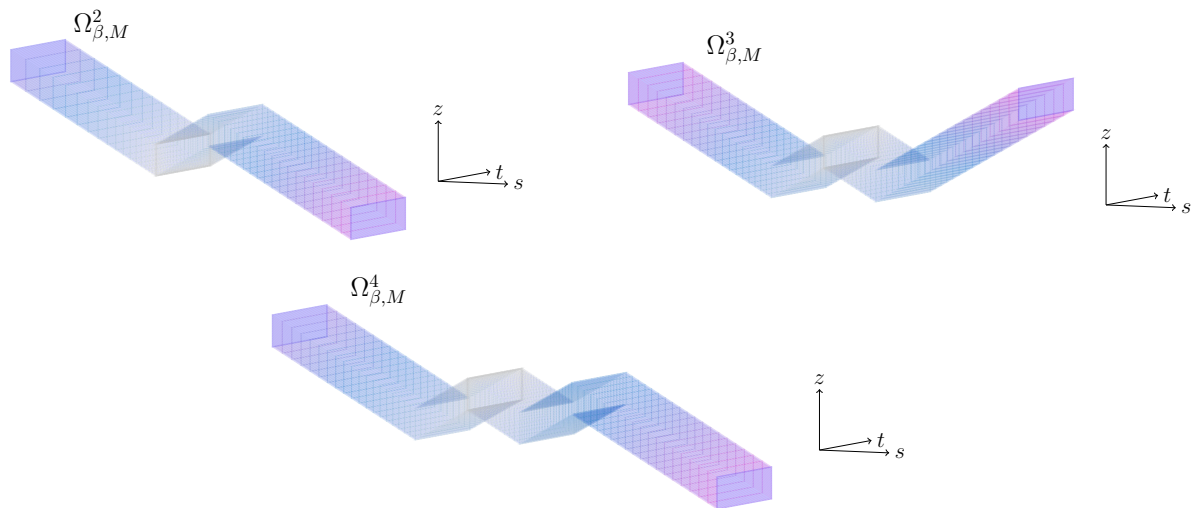


Figura 2.16: Guias de onda retangulares com mais de um canto $\Omega_{\beta,M}^n$, para $n = 2, 3, 4$, $\beta = 0.7$ e $M = 2.25$.

Laplaciano de Dirichlet em guias de onda com canto variando

Motivados pelos resultados em [12], neste capítulo investigaremos o espectro do operador Laplaciano de Dirichlet em uma “guia de onda com canto variando” com relação ao parâmetro de abertura, como mostra a Figura 3.1. Mesmo que o domínio neste caso possua uma geometria semelhante ao domínio definido no Capítulo 2, mostraremos com detalhes o resultado que envolve a existência do espectro discreto. Por outro lado, focaremos a nossa atenção no caso particular de uma guia de onda retangular com canto, na qual estudaremos condições sobre a existência de um único autovalor discreto e também o comportamento dos elementos do espectro discreto quando o parâmetro de abertura tende a infinito. Para finalizar o capítulo, apresentaremos um exemplo numérico.

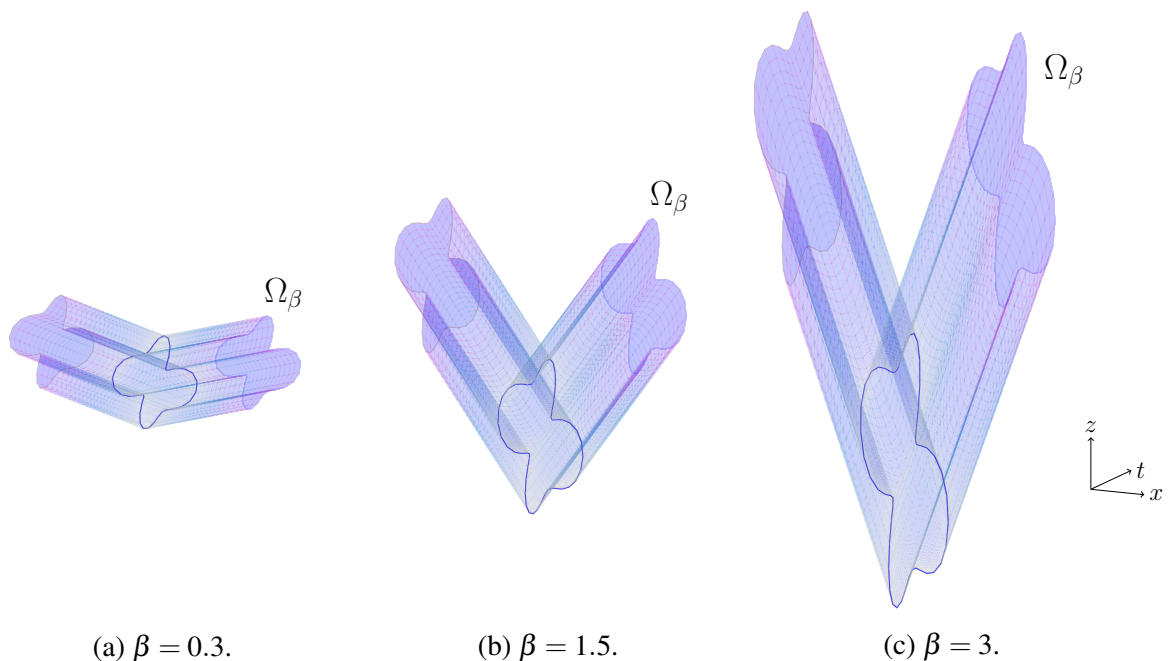


Figura 3.1: Guias de onda com canto variando com relação ao parâmetro de abertura β .

3.1 Geometria da guia de onda e espectro essencial

Denote por $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica em \mathbb{R}^3 . Seja $S \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto, conexo, limitado e denote por $y := (y_1, y_2)$ um ponto de S . Tome $\beta \in (0, \infty)$ e considere a curva espacial

$$r_\beta(x) := (x, 0, \beta|x|), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Defina a aplicação

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}_\beta : \quad \mathbb{R} \times S &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y_1, y_2) &\longmapsto r_\beta(x) + y_1 e_2 + y_2 \sqrt{1 + \beta^2} e_3, \end{aligned} \quad (3.2)$$

e a região

$$\Omega_\beta := \hat{\mathcal{L}}_\beta(\mathbb{R} \times S). \quad (3.3)$$

Agora, considere $\tilde{\Omega}_\beta$ o tubo reto definido por

$$\tilde{\Omega}_\beta := \left\{ \left(x, y_1, \beta x + y_2 \sqrt{1 + \beta^2} \right) \in \mathbb{R}^3 : (x, y_1, y_2) \in \mathbb{R} \times S \right\},$$

em que S corresponde à seção transversal inclinada de $\tilde{\Omega}_\beta$. Considere também a seção

$$S_\beta := \tilde{\Omega}_\beta \cap \text{plano } tz = \left\{ \left(y_1, y_2 \sqrt{1 + \beta^2} \right) \in \mathbb{R}^2 : (y_1, y_2) \in S \right\}. \quad (3.4)$$

De acordo com o modelo anterior, geometricamente, Ω_β pode ser obtida pela traslação da seção S_β ao longo da curva $r_\beta(x)$, tal que, em cada ponto da curva, S_β é paralela ao plano gerado por $\{e_2, e_3\}$, como mostra a Figura 3.2. Observemos que Ω_β é simétrico com relação ao plano $\{e_2, e_3\}$ e tem um “canto” neste plano que varia com relação ao parâmetro β . Por outro lado, a menos de um conjunto compacto apropriado, Ω_β é a união de dois semi-tubos retos.

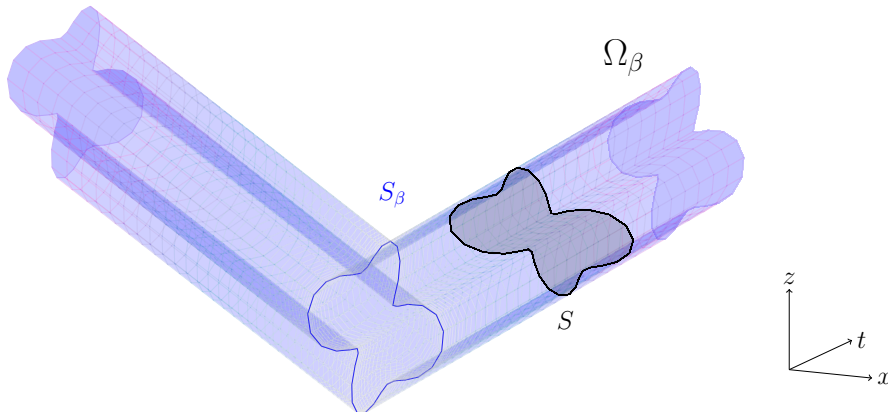


Figura 3.2: Guia de onda com canto variando Ω_β , seção transversal inclinada S e $\beta = 0.7$.

Denote por $-\Delta_{\Omega_\beta}^D$ o Laplaciano de Dirichlet em Ω_β , isto é, o operador autoadjunto associado com a forma quadrática

$$Q_{\Omega_\beta}^D(\psi) := \int_{\Omega_\beta} |\nabla \psi|^2 dx, \quad \text{dom } Q_{\Omega_\beta}^D = \mathcal{H}_0^1(\Omega_\beta); \quad (3.5)$$

$\mathbf{x} = (x, t, z)$ denota um ponto de Ω_β . O propósito deste capítulo é entender como a geometria da guia de onda com canto variando Ω_β influencia o espectro do operador $-\Delta_{\Omega_\beta}^D$, no caso em que a seção transversal inclinada não depende de β .

Do Capítulo 2, sendo $S_\beta \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto, conexo e limitado, definido em (3.4), e dada a aplicação \mathcal{L}_β definida em (2.2), observemos que nossa guia onda também pode ser definida como $\Omega_\beta := \mathcal{L}_\beta(\mathbb{R} \times S_\beta)$. Denote por E_1 o primeiro autovalor discreto do operador Laplaciano de Dirichlet em S , $-\Delta_S^D$. Logo, da Proposição 2.1, tem-se o seguinte resultado

Proposição 3.1. *Para cada $\beta \in (0, \infty)$, o espectro essencial do operador $-\Delta_{\Omega_\beta}^D$ coincide com o intervalo $[E_1, \infty)$.*

Por outro lado, das Proposições 2.4 e 2.5, segue que para todo $\beta \in (0, \infty)$, $\sigma_{dis}(-\Delta_{\Omega_\beta}^D) \neq \emptyset$ e é finito. Porém, lembrando que nosso principal objetivo é mostrar a existência do espectro discreto do operador Laplaciano de Dirichlet em Ω_β , na seguinte seção, usando a aplicação definida em (3.2), o resultado que envolve a existência de autovalores discreto sera demonstrado com detalhes.

3.2 Espectro discreto

Nesta seção estudaremos o espectro do operador $-\Delta_{\Omega_\beta}^D$, no caso em que Ω_β é o domínio definido através da aplicação (3.2).

3.2.1 Mudança de variáveis

Recorde a aplicação $\hat{\mathcal{L}}_\beta$ dada por (3.2). Denote $\Lambda := (0, \infty) \times S$ e defina, $\Omega_\beta^+ = \hat{\mathcal{L}}_\beta(\Lambda)$. Do Capítulo 2, lembrando as notações e os resultados da Subseção 2.3.1, a partir de agora estudaremos $\sigma_{dis}(-\Delta_{\Omega_\beta^+}^{DN})$ ao invés de $\sigma_{dis}(-\Delta_{\Omega_\beta}^D)$. Relembremos que $-\Delta_{\Omega_\beta^+}^{DN}$ é o operador autoadjunto associado à forma quadrática

$$Q_{\Omega_\beta^+}^{DN}(\psi) = \int_{\Omega_\beta^+} |\nabla \psi|^2 dx,$$

$$\text{dom } Q_{\Omega_\beta^+}^{DN} = \{\psi \in \mathcal{H}^1(\Omega_\beta^+) : \psi = 0 \text{ in } \partial_D \Omega_\beta^+\}.$$

Nesta subseção realizamos uma mudança de variáveis a fim de que o domínio $\text{dom } Q_{\Omega_\beta^+}^{DN}$ não dependa de β .

Pela Proposição 1 em [38], $\hat{\mathcal{L}}_\beta^+ := \hat{\mathcal{L}}_\beta|_\Lambda$ é um $C^{0,1}$ -difeomorfismo local. Desde que $\hat{\mathcal{L}}_\beta^+$ é injetora obtemos um $C^{0,1}$ -difeomorfismo global. Por conseguinte, a região Ω_β^+ pode ser identificada com a variedade Riemanniana (Λ, G_β) , em que $G_\beta = (G_\beta^{ij})$ é a métrica induzida por $\hat{\mathcal{L}}_\beta^+$, isto é,

$$G_\beta^{ij} = \langle \mathcal{G}_\beta^i, \mathcal{G}_\beta^j \rangle = G_\beta^{ji}, \quad i, j = 1, 2,$$

em que

$$\mathcal{G}_\beta^1 = \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_\beta^+}{\partial x}, \quad \mathcal{G}_\beta^2 = \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_\beta^+}{\partial y_1}, \quad \mathcal{G}_\beta^3 = \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_\beta^+}{\partial y_2}.$$

Mais precisamente,

$$G_\beta = \nabla \hat{\mathcal{L}}_\beta^+ \cdot (\nabla \hat{\mathcal{L}}_\beta^+)^t = \begin{pmatrix} 1 + \beta^2 & 0 & \beta \sqrt{1 + \beta^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta \sqrt{1 + \beta^2} & 0 & 1 + \beta^2 \end{pmatrix}, \quad \det G_\beta = 1 + \beta^2.$$

Agora, consideremos o operador unitário

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\beta : L^2(\Omega_\beta^+) &\rightarrow L^2(\Lambda) \\ \psi &\mapsto (1 + \beta^2)^{1/4} \psi \circ \hat{\mathcal{L}}_\beta^+, \end{aligned} \quad (3.6)$$

e definimos

$$\begin{aligned} Q_\beta(\psi) &:= Q_{\Omega_\beta^+}^{DN}(\mathcal{U}_\beta^{-1} \psi) = \int_\Lambda \langle \nabla \psi, G_\beta^{-1} \nabla \psi \rangle \sqrt{\det G_\beta} \, dx dy \\ &= \int_\Lambda \left(\left| \psi' - \frac{\beta}{\sqrt{1 + \beta^2}} \frac{\partial \psi}{\partial y_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \right|^2 + \frac{1}{1 + \beta^2} \left| \frac{\partial \psi}{\partial y_2} \right|^2 \right) dx dy, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\text{dom } Q_\beta := \mathcal{U}_\beta(\text{dom } Q_{\Omega_\beta^+}^{DN}) = \{ \psi \in \mathcal{H}^1(\Lambda) : \psi = 0 \text{ em } (0, \infty) \times \partial S \},$$

em que $\psi' := \partial \psi / \partial x$. Denote por H_β o operador autoadjunto associado à forma quadrática $Q_\beta(\psi)$. Assim, desde que os operadores H_β e $-\Delta_{\Omega_\beta^+}^{DN}$ são unitariamente equivalentes, $\sigma(H_\beta) = \sigma(-\Delta_{\Omega_\beta^+}^{DN})$.

3.2.2 Existência do espectro discreto

Nesta subseção mostraremos a existência do espectro discreto para $-\Delta_{\Omega_\beta}^D$.

Proposição 3.2. *Para cada $\beta \in (0, \infty)$, tem-se $\inf \sigma(-\Delta_{\Omega_\beta}^D) < E_1$, isto é, $\sigma_{\text{dis}}(-\Delta_{\Omega_\beta}^D) \neq \emptyset$.*

Demonstração. Considere a forma quadrática

$$q_\beta(\psi) = Q_\beta(\psi) - E_1 \|\psi\|_{L^2(\Lambda)}^2, \quad \text{dom } q_\beta = \text{dom } Q_\beta. \quad (3.8)$$

De acordo com (1.2) e a Proposição 3.1, é suficiente mostrar que existe uma função $\psi \in \text{dom } Q_\beta \setminus \{0\}$ tal que $q_\beta(\psi) < 0$. Construiremos tal função nos parágrafos abaixo.

O primeiro passo é construir uma sequência $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{dom } q_\beta$ tal que $q_\beta(\psi_n) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Para isto, seja $w \in C^\infty(\mathbb{R})$ uma função real tal que $w = 1$ para $x \leq 1$, e $w = 0$ para $x \geq 2$. Defina, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n(x) = w\left(\frac{x}{n}\right) \quad \text{e} \quad \psi_n(x, y) = w_n(x) \chi(y),$$

em que χ denota a autofunção normalizada correspondente ao primeiro autovalor E_1 . Em particular,

$$\int_0^\infty |w'_n|^2 dx = \frac{1}{n} \int_0^\infty |w'|^2 dx \rightarrow 0, \quad \text{as } n \rightarrow \infty, \quad (3.9)$$

e

$$\int_S (|\partial_{y_1} \chi|^2 + |\partial_{y_2} \chi|^2) dy = E_1. \quad (3.10)$$

De (3.10) e desde que $\int_S \chi \partial_{y_2} \chi dy = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} q_\beta(\psi_n) &= Q_\beta(\psi_n) - E_1 \|\psi_n\|_{L^2(\Lambda)}^2 \\ &= \int_\Lambda \left(\left| w'_n \chi - \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} w_n \partial_{y_2} \chi \right|^2 + |w_n|^2 \left[|\partial_{y_1} \chi|^2 + \frac{1}{1+\beta^2} |\partial_{y_2} \chi|^2 - E_1 |\chi|^2 \right] \right) dx dy \\ &= \int_\Lambda \left[|w'_n|^2 \chi^2 - 2 \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} w_n w'_n \chi \partial_{y_2} \chi + |w_n|^2 (|\partial_{y_1} \chi|^2 + |\partial_{y_2} \chi|^2 - E_1 |\chi|^2) \right] dx dy \\ &= \int_0^\infty |w'_n|^2 dx. \end{aligned}$$

De (3.9), podemos observar que $q_\beta(\psi_n) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

Agora, fixamos $\varepsilon > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$\psi_{n,\varepsilon}(x,y) := \psi_n(x,y) + \varepsilon \phi(x,y),$$

para algum $\phi \in \text{dom } q_\beta$. Neste caso,

$$q_\beta(\psi_{n,\varepsilon}) = q_\beta(\psi_n) + 2\varepsilon \text{Re}(q_\beta(\psi_n, \phi)) + \varepsilon^2 q_\beta(\phi).$$

A estratégia é mostrar que existe ϕ satisfazendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_\beta(\psi_n, \phi) \neq 0. \quad (3.11)$$

De fato, se (3.11) é válida, é suficiente escolher ε tal que $q_\beta(\psi_{n,\varepsilon}) < 0$, para algum n suficientemente grande.

Considere $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, com $\text{supp } \eta \subset [0, 1)$ e $\eta(0) \neq 0$. Tome $h \in H_0^1(S)$ (h será escolhido mais adiante). Definimos $\phi(x,y) = \eta(x)h(y)$. Logo,

$$\begin{aligned} q_\beta(\psi_n, \phi) &= \int_\Lambda \left[\left(w'_n \chi - \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} w_n \partial_{y_2} \chi \right) \left(\eta' h - \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \eta \partial_{y_2} h \right) + w_n \partial_{y_1} \chi \eta \partial_{y_1} h \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1+\beta^2} w_n \partial_{y_2} \chi \eta \partial_{y_2} h - E_1 w_n \chi \eta h \right] dx dy \\ &= \int_\Lambda \left(w'_n \chi \eta' h - \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} w'_n \chi \eta \partial_{y_2} h - \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} w_n \partial_{y_2} \chi \eta' h \right) dx dy \\ &\quad + \int_\Lambda (w_n \partial_{y_1} \chi \eta \partial_{y_1} h + w_n \partial_{y_2} \chi \eta \partial_{y_2} h - E_1 w_n \chi \eta h) dx dy \\ &= \int_\Lambda \left(w'_n \chi \eta' h - \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} w'_n \chi \eta \partial_{y_2} h - \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} w_n \partial_{y_2} \chi \eta' h \right) dx dy \\ &\quad - \int_\Lambda (\partial_{y_1}^2 \chi + \partial_{y_2}^2 \chi + E_1 \chi) w_n \eta h dx dy \\ &\rightarrow - \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \int_\Lambda \eta' \partial_{y_2} \chi h dx dy, \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$. Finalmente, definimos $h(y) := y_2 \chi(y)$; note que $h(y) = 0$, para todo $y \in \partial S$. Assim, desde que $\eta(0) \neq 0$,

$$-\beta \int_{\Lambda} \eta' \partial_{y_2} \chi y_2 \chi dx dy = \beta \eta(0) \int_S \partial_{y_2} \chi y_2 \chi dy = -\frac{\beta \eta(0)}{2} \neq 0.$$

Logo, (3.11) é válida, o que finaliza a demonstração. \square

3.3 Geometria e espectro de uma guia de onda retangular

Desde que $\sigma_{dis}(-\Delta_{\Gamma_\beta}^D) \neq \emptyset$ e é finito, uma questão interessante agora é analisar a quantidade $\mathcal{N}(\sigma_{dis}(-\Delta_{\Gamma_\beta}^D), E_1)$ de acordo com a variação de β . Em particular, vamos mostrar a existência de um intervalo de variação para β , de modo que o $\sigma_{dis}(-\Delta_{\Gamma_\beta}^D)$ possua um único autovalor e também analisar o que ocorre quando β se torna arbitrariamente grande. Por conveniência, nesta seção vamos descrever nossa guia de onda com canto, através de um outro conjunto, pois precisamos trabalhar com uma forma quadrática diferente à definida em (3.7), isto com o fim de poder encontrar os resultados desejados.

Seja S o retângulo $(0, 2\pi) \times (0, \pi)$ em \mathbb{R}^2 . Seja Γ_β a guia de onda retangular com canto variando com relação ao parâmetro β , com $\beta \in (0, \infty)$ a semi-abertura e S a seção transversal inclinada, definido por

$$\Gamma_\beta = \left\{ (s, t, z) \in \mathbb{R} \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} : \left(|s| - \pi \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\beta} \right) \beta < z < \beta |s| \right\}, \quad (3.12)$$

como mostra a Figura 3.3.

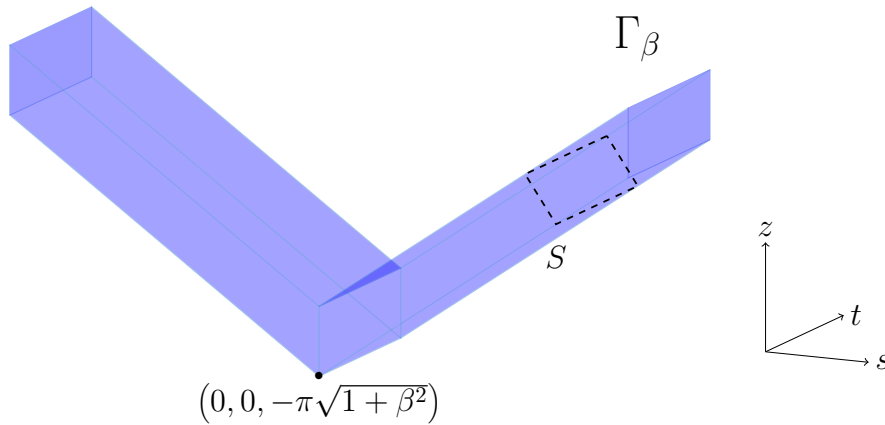


Figura 3.3: Guia de onda Γ_β , com $\beta = 0.7$.

Denote por $-\Delta_{\Gamma_\beta}^D$ o Laplaciano de Dirichlet em Γ_β , isto é, o operador autoadjunto associado à forma quadrática

$$Q_{\Gamma_\beta}^D(\psi) = \int_{\Gamma_\beta} |\nabla \psi|^2 ds, \quad \text{dom } Q_{\Gamma_\beta}^D = H_0^1(\Gamma_\beta); \quad (3.13)$$

$\mathbf{s} = (s, t, z)$ denota um ponto de Γ_β .

Seja $E_1(-\Delta_S^D) = 5/4$ o primeiro autovalor do operador Laplaciano de Dirichlet em S . Da Proposição 3.2, tem-se que

$$\sigma_{\text{ess}}(-\Delta_{\Gamma_\beta}^D) = [5/4, \infty). \quad (3.14)$$

A seguir, defina

$$\Gamma_\beta^+ := \Gamma_\beta \cap \{\mathbf{s} = (s, t, z) \in \mathbb{R}^3 : s > 0\},$$

e $\partial_D \Gamma_\beta^+ := \partial \Gamma_\beta \cap \partial \Gamma_\beta^+$. Considere a forma quadrática

$$Q_{\Gamma_\beta^+}^{DN}(\psi) = \int_{\Gamma_\beta^+} |\nabla \psi|^2 ds, \quad \text{dom } Q_{\Gamma_\beta^+}^{DN} = \{\psi \in \mathcal{H}^1(\Gamma_\beta^+) : \psi = 0 \text{ em } \partial_D \Gamma_\beta^+\}. \quad (3.15)$$

Denote por $-\Delta_{\Gamma_\beta^+}^D$ o operador autoadjunto associado à $Q_{\Gamma_\beta^+}^{DN}$, isto é,

$$\begin{aligned} \text{dom}(-\Delta_{\Gamma_\beta^+}^D) &= \{\psi \in \mathcal{H}^1(\Gamma_\beta^+) : \Delta \psi \in L^2(\Gamma_\beta^+), \\ &\quad \psi = 0 \text{ em } \partial_D \Gamma_\beta^+, \text{ e } \partial \psi / \partial x = 0 \text{ em } x = 0\}. \end{aligned}$$

Observemos que Γ_β é uma guia de onda retangular simétrica com relação ao plano $\{e_2, e_3\}$. Logo, da Proposição 2.3, segue que para a análise do espectro discreto é suficiente estudar o espectro discreto de $-\Delta_{\Gamma_\beta^+}^D$.

3.3.1 Mudança de variáveis

Considere o conjunto aberto $\hat{\Gamma}_\beta$ definido por

$$\hat{\Gamma}_\beta := \left\{ (\hat{s}, \hat{t}, \hat{z}) \in (-\pi\beta, \infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) : \hat{z} < \frac{\hat{s}}{\beta} + \pi \text{ se } \hat{s} \in (-\pi\beta, 0) \right\},$$

como mostra a Figura 3.4, $\hat{\Gamma}_\beta$ é isometricamente afim à Γ_β^+ .

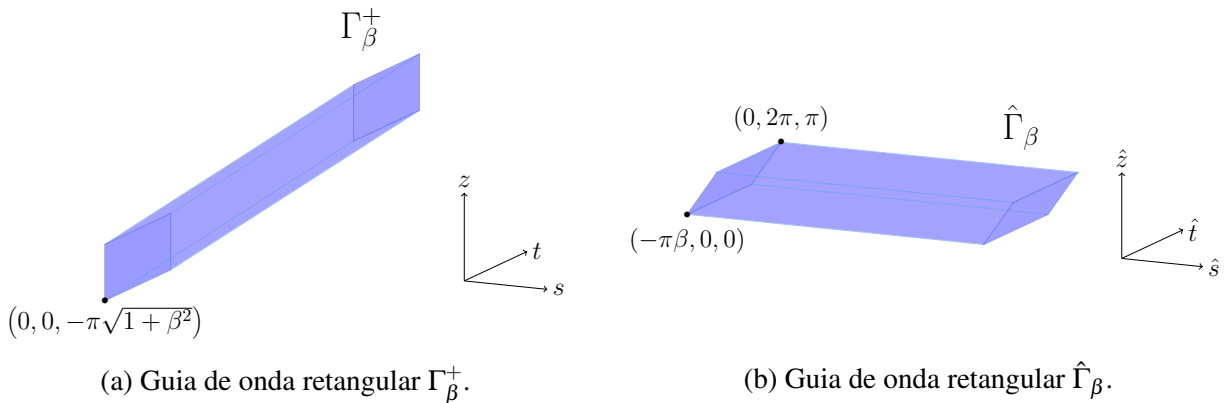


Figura 3.4: Guias de onda retangulares isométricas, com $\beta = 0.7$.

Denote por $-\Delta_{\hat{\Gamma}_\beta}^{DN}$ o operador autoadjunto associado à forma quadrática

$$Q_{\hat{\Gamma}_\beta}^{DN}(\psi) := \int_{\hat{\Gamma}_\beta} |\nabla \psi|^2 d\hat{s}, \quad \text{dom } Q_{\hat{\Gamma}_\beta}^{DN} := \{\psi \in \mathcal{H}^1(\hat{\Gamma}_\beta) : \psi = 0 \text{ em } \partial_D \hat{\Gamma}_\beta\}; \quad (3.16)$$

$\hat{s} = (\hat{s}, \hat{t}, \hat{z})$ denota um ponto de $\hat{\Gamma}_\beta$ e $\partial_D \hat{\Gamma}_\beta := (\mathbb{R} \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)) \cap \partial \hat{\Gamma}_\beta$. Considere a aplicação dilatação $\mathcal{F}_\beta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathcal{F}_\beta := (\beta x, y_1, y_2)$, e defina

$$\hat{\Gamma} := \{(x, y_1, y_2) \in (-\pi, \infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) : y_2 < x + \pi \text{ se } x \in (-\pi, 0)\}.$$

Finalmente, consideremos o operador unitário

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{U}}_\beta : L^2(\hat{\Gamma}_\beta) &\rightarrow L^2(\hat{\Gamma}) \\ \psi &\mapsto \sqrt{\beta}(\psi \circ \mathcal{F}_\beta) \end{aligned} \quad (3.17)$$

e definamos a forma quadrática

$$\hat{Q}_\beta(\psi) := Q_{\hat{\Gamma}_\beta}^{DN}(\hat{\mathcal{U}}_\beta^{-1} \psi) = \int_{\hat{\Gamma}} \left(\frac{1}{\beta^2} |\partial_x \psi|^2 + |\partial_{y_1} \psi|^2 + |\partial_{y_2} \psi|^2 \right) dx dy_1 dy_2,$$

$$\text{dom } \hat{Q}_\beta := \hat{\mathcal{U}}_\beta(\text{dom } Q_{\hat{\Gamma}_\beta}^{DN}) = \{\psi \in \mathcal{H}^1(\hat{\Gamma}) : \psi = 0 \text{ em } \partial_D \hat{\Gamma}\},$$

em que $\partial_D \hat{\Gamma} := (\mathbb{R} \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)) \cap \partial \hat{\Gamma}$. Denote por \hat{H}_β o operador autoadjunto associado à \hat{Q}_β . Assim, desde que os operadores $-\Delta_{\hat{\Gamma}_\beta}^{DN}$ e \hat{H}_β são unitariamente equivalentes, $\sigma(\hat{H}_\beta) = \sigma(-\Delta_{\hat{\Gamma}_\beta}^{DN})$.

3.4 Número de autovalores discretos

O objetivo desta seção é mostrar a existência de um intervalo de variação para β de modo que o espectro discreto do operador $-\Delta_{\hat{\Gamma}_\beta}^D$ possua um único autovalor. A estratégia é estudar o operador \hat{H}_β , usando como referência os resultados para o caso bidimensional que foi estudado em \mathbb{R}^2 de [33].

Suponha que $\lambda_1(\hat{H}_\beta)$ e $\lambda_2(\hat{H}_\beta)$ são autovalores do operador \hat{H}_β . Consideremos a fatia W , como mostra a Figura 3.5, definida como a região limitada pelos seguintes conjuntos

$$T_1 := \{(x, y_1, y_2) \in (-\pi, 0) \times \{2\pi\} \times (0, \pi) : y_2 < x + \pi\},$$

$$T_2 := \{(x, y_1, y_2) \in (-\pi, 0) \times \{0\} \times (0, \pi) : y_2 < x + \pi\},$$

$$S_1 := \{(x, y_1, y_2) \in (-\pi, 0) \times (0, 2\pi) \times \{0\}\},$$

$$S_2 := \{(x, y_1, y_2) \in \{0\} \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)\}.$$

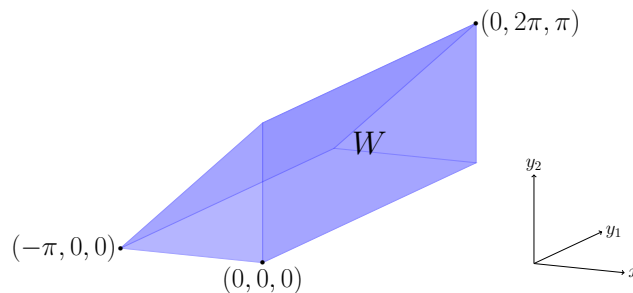


Figura 3.5: Fatia W com condições de Dirichlet-Neumann.

Denote por $\partial_x := \partial/\partial x$, $\partial_{y_1} := \partial/\partial y_1$ e $\partial_{y_2} := \partial/\partial y_2$. Defina o operador

$$A(\beta) := -\frac{1}{\beta^2} \partial_x^2 - \partial_{y_1}^2 - \partial_{y_2}^2. \quad (3.18)$$

Vamos considerar o seguinte problema auxiliar

$$\begin{cases} A(\beta)\psi = \lambda \psi, & \text{em } W, \\ \psi = 0, & \text{em } T_1 \cup T_2 \cup S_1, \\ \partial_x \psi = 0, & \text{em } S_2, \\ \partial_\nu \psi = 0, & \text{em } \partial W \setminus (\overline{T_1} \cup \overline{T_2} \cup \overline{S_1} \cup \overline{S_2}); \end{cases} \quad (3.19)$$

em que ∂_ν é a derivada direcional ao longo do vetor normal exterior.

Sejam μ_1^β e μ_2^β os dois primeiros autovalores do problema (3.19) (o espectro do operador A é puramente discreto), e ψ_1^β e ψ_2^β suas respectivas autofunções. Note que, no caso particular $\beta = 1$, tem-se $A(1) = -\Delta$. Logo,

$$\begin{aligned} \mu_1^1 &= \frac{3}{4}, & \psi_1^1(x, y_1, y_2) &= \frac{2}{\pi\sqrt{\pi}} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{y_1}{2}\right) \sin\left(\frac{y_2}{2}\right), \\ \mu_2^1 &= \frac{3}{2}, & \psi_2^1(x, y_1, y_2) &= \frac{2}{\pi\sqrt{\pi}} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin(y_1) \sin\left(\frac{y_2}{2}\right). \end{aligned}$$

Suponhamos que,

$$\mu_2^\beta \geq \frac{5}{4}. \quad (3.20)$$

Considere o subespaço

$$E_\perp^\beta = \left\{ \varphi \in \text{dom } \hat{Q}_\beta : \int_W \psi_1^\beta \varphi \, dx dy_1 dy_2 = 0 \right\}.$$

Para $\varphi \in \text{dom } \hat{Q}_\beta$, seja ψ a restrição de φ em W . Note que, para cada $\psi \in \mathcal{C} := \{\phi \in \mathcal{H}^1(W) : \phi = 0 \text{ em } T_2 \cup T_2 \cup S_1\}$, tem-se $\int_W \psi_1^\beta \psi \, dx dy_1 dy_2 = 0$. Assim, pelo Princípio Max-Min, tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{5}{4} \int_W |\psi|^2 \, dx dy_1 dy_2 &\leq \mu_2^\beta \int_W |\psi|^2 \, dx dy_1 dy_2 \\ &\leq \int_W \left(\frac{1}{\beta^2} |\partial_x \psi|^2 + |\partial_{y_1} \psi|^2 + |\partial_{y_2} \psi|^2 \right) \, dx dy_1 dy_2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Além disso, para cada $\varphi \in \text{dom } \hat{Q}_\beta$,

$$\frac{5}{4} \int_{\hat{\Gamma} \setminus W} |\varphi|^2 \, dx dy_1 dy_2 \leq \int_{\hat{\Gamma} \setminus W} \left(\frac{1}{\beta^2} |\partial_x \varphi|^2 + |\partial_{y_1} \varphi|^2 + |\partial_{y_2} \varphi|^2 \right) \, dx dy_1 dy_2. \quad (3.22)$$

Por (3.21) e (3.22), obtemos

$$\frac{5}{4} \int_{\hat{\Gamma}} |\varphi|^2 \, dx dy_1 dy_2 \leq \int_{\hat{\Gamma}} \left(\frac{1}{\beta^2} |\partial_x \varphi|^2 + |\partial_{y_1} \varphi|^2 + |\partial_{y_2} \varphi|^2 \right) \, dx dy_1 dy_2,$$

para todo $\varphi \in E_\perp^\beta$. Desde que E^β tem dimensão no máximo 1, segue que

$$\lambda_2(\hat{H}_\beta) \geq \inf_{\substack{\psi \in \text{dom } \hat{Q}_\beta \cap E_\perp^\beta \\ \psi \neq 0}} \frac{\hat{Q}_\beta(\psi)}{\|\psi\|_{L^2(\hat{\Gamma})}^2} \geq \frac{5}{4},$$

o que contradiz a hipótese de $\lambda_2(\hat{H}_\beta) \in (0, 5/4)$.

Agora, vamos encontrar os valores de β , para os quais (3.20) é verdadeira. Para estimar os autovalores do problema auxiliar (3.19), pelo Princípio Max-Min, sabemos que

$$\mu_2^\beta = \sup_{F_1} \left\{ \inf_{\substack{\psi \in \mathcal{C} \cap F_1^\perp \\ \psi \neq 0}} \frac{\int_W \left(\frac{1}{\beta^2} |\partial_x \psi|^2 + |\partial_{y_1} \psi|^2 + |\partial_{y_2} \psi|^2 \right) dx dy_1 dy_2}{\|\psi\|_{L^2(W)}^2} \right\},$$

em que o supremo é tomado sobre todos os subespaços lineares F_1 de dimensão no máximo 1. Observe que

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} &= \mu_2^1 = \sup_{F_1} \left\{ \inf_{\substack{\psi \in \mathcal{C} \cap F_1^\perp \\ \psi \neq 0}} \frac{\int_W \left(|\partial_x \psi|^2 + |\partial_{y_1} \psi|^2 + |\partial_{y_2} \psi|^2 \right) dx dy_1 dy_2}{\|\psi\|_{L^2(W)}^2} \right\} \\ &\leq \max\{\beta^2, 1\} \sup_{F_1} \left\{ \inf_{\substack{\psi \in \mathcal{C} \cap F_1^\perp \\ \psi \neq 0}} \frac{\int_W \left(\frac{1}{\beta^2} |\partial_x \psi|^2 + |\partial_{y_1} \psi|^2 + |\partial_{y_2} \psi|^2 \right) dx dy_1 dy_2}{\|\psi\|_{L^2(W)}^2} \right\} \\ &= \max\{\beta^2, 1\} \mu_2^\beta. \end{aligned}$$

Logo,

$$\mu_2^\beta \geq \frac{3}{2} \min\{1/\beta^2, 1\}.$$

Esta desigualdade mostra que se $\beta \in (0, \sqrt{6/5}]$, então a hipótese em (3.20) é válida. Portanto, temos demonstrado o seguinte resultado.

Proposição 3.3. Para cada $\beta \in (0, \sqrt{6/5}]$, o operador $-\Delta_{\Gamma_\beta}^D$ tem exatamente um autovalor discreto.

3.5 Acumulação de autovalores

O objetivo desta seção é estudar o número de elementos no espectro discreto quando $\beta \rightarrow \infty$. Geometricamente, observe que, quando $\beta \rightarrow \infty$, existe mais e mais espaço na região do canto da guia de onda retangular Γ_β , o que pode levar a aumentar o número de autovalores. Este fenômeno é comprovado pelo seguinte resultado.

Proposição 3.4. Para qualquer $\beta \in (0, \infty)$, o número de autovalores discretos do $-\Delta_{\Gamma_\beta}^D$ tende ao infinito quando $\beta \rightarrow \infty$.

Demonstração. Dado um paralelepípedo P_β contido em Γ_β , como mostra a Figura 3.6, pela monotonicidade do espectro com respeito à condição de Dirichlet, tem-se que

$$\lambda_j(-\Delta_{P_\beta}^D) \geq \lambda_j(-\Delta_{\Gamma_\beta}^D) \quad \forall j \geq 1, \quad (3.23)$$

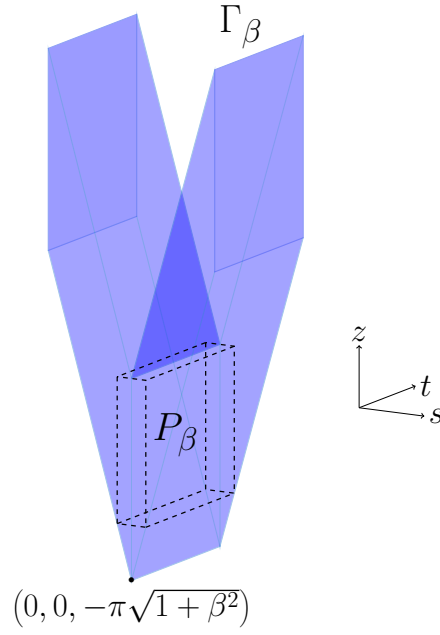


Figura 3.6: Paralelepípedo P_β com condições de Dirichlet contido em Γ_β , com $\beta = 4$ e $\alpha = 3$.

De (3.12), escolhemos P_β na forma de um paralelepípedo limitado pelas linhas $t = 0$, $t = 2\pi$, $z = -\alpha\pi$, $z = 0$ e $s = \pm\tau\pi$, em que α e τ satisfazem

$$\alpha \in \left(0, \sqrt{1+\beta^2}\right) \quad \text{e} \quad \tau\pi = \left(-\alpha \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} + 1\right) \pi \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\beta}.$$

Assim, desde que os autovalores do problema de Dirichlet em P_β são

$$\lambda_{l,m,n}(-\Delta_{P_\beta}^D) = \frac{1}{4} \left(\frac{l^2}{\tau^2} + m^2 + \frac{4n^2}{\alpha^2} \right),$$

para $l, m, n \in \mathbb{N}$, e $\sigma_{\text{ess}}(-\Delta_{\Gamma_\beta}^D) = [5/4, \infty)$, procuramos os autovalores $\lambda_{l,m,n}(-\Delta_{P_\beta}^D)$ menores que $5/4$, ou seja, procuramos os valores de $l, m, n \in \mathbb{N}$ tais que

$$\frac{l^2}{\tau^2} + m^2 + \frac{4n^2}{\alpha^2} < 5. \quad (3.24)$$

Escolhendo $\alpha > 1$,

$$\tau < \frac{\sqrt{1+\beta^2}-1}{\beta} < 1, \quad \beta \in (0, \infty).$$

Daí $l = 1$ (pois $\tau < 1$) e os valores $m, n \in \mathbb{N}$ que satisfazem (3.24) são necessariamente da forma

$$\frac{1}{\tau^2} + m^2 + \frac{4n^2}{\alpha^2} = \frac{\beta^2}{(\sqrt{1+\beta^2}-\alpha)^2} + m^2 + \frac{4n^2}{\alpha^2}, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Fixando $m \in \mathbb{N}$ e otimizando P_β : o mínimo de $\lambda_n(-\Delta_{P_\beta}^D)$ é obtido para α tal que

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\lambda_n(-\Delta_{P_\beta}^D) \right) = 0 \quad \iff \quad \frac{2\beta^2}{(\sqrt{1+\beta^2}-\alpha)^3} - \frac{8n^2}{\alpha^3} = 0.$$

Desde que,

$$\begin{aligned} \frac{\beta^2}{(\sqrt{1+\beta^2}-\alpha)^3} &= \frac{4n^2}{\alpha^3}, \\ \alpha &= \frac{4^{1/3}n^{2/3}(\sqrt{1+\beta^2}-\alpha)}{\beta^{2/3}}, \\ \alpha \left(1 + \frac{4^{1/3}n^{2/3}}{\beta^{2/3}}\right) &= \frac{4^{1/3}n^{2/3}\sqrt{1+\beta^2}}{\beta^{2/3}} = \frac{4^{1/3}n^{2/3}\beta^{1/3}}{\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}}, \end{aligned}$$

para β suficientemente grande, tem-se $\beta/\sqrt{1+\beta^2} \approx 1$. Assim,

$$\alpha = 4^{1/3}n^{2/3}\beta^{1/3},$$

e

$$\begin{aligned} \lambda_n(-\Delta_{P_\beta}^D) &= \frac{1}{4} \left(\frac{\beta^2}{(\sqrt{1+\beta^2}-\alpha)^2} + m^2 + \frac{4n^2}{\alpha^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{\beta^2}{(1+\beta^2)(1-4^{1/3}n^{2/3}\beta^{-2/3})^2} + m^2 + \frac{4n^2}{4^{2/3}n^{4/3}\beta^{2/3}} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(1-4^{1/3}n^{2/3}\beta^{-2/3})^2} + m^2 + 4^{1/3}n^{2/3}\beta^{-2/3} \right], \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Seja $Z := 4^{1/3}n^{2/3}\beta^{-2/3}$, e considere a equação

$$\frac{1}{(1-Z)^2} + m^2 + Z = 5.$$

Se $m = 1$,

$$\frac{1}{(1-Z)^2} + 1^2 + Z = 5 \quad \iff \quad \frac{1}{(1-Z)^2} + Z = 4,$$

tem como raízes, $Z_1 \approx 0.46791$, $Z_2 \approx 1.6527$ e $Z_3 \approx 3.87938$. Note que, pelo menos Z_1 é menor que $5/4$, isto é, para $Z \leq 0.46791$, tem-se que $\lambda_n(-\Delta_{P_\beta}^D) < 5/4$ e, portanto, $\lambda_n(-\Delta_{\Gamma_\beta}^D) < 5/4$. Observemos que,

$$n \leq \left(0.46791 \cdot 4^{-1/3}\beta^{2/3}\right)^{3/2} = 0.46791^{3/2} \cdot 0.5\beta \simeq 0.160034\beta,$$

implica que o número máximo $N \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_N(-\Delta_{P_\beta}^D) < 5/4$, é maior do que 0.160034β . Portanto, o número de autovalores de $-\Delta_{\Gamma_\beta}^D$ menores do que $5/4$ tende ao infinito quando $\beta \rightarrow \infty$.

Se, $m = 2$

$$\frac{1}{(1-Z)^2} + 2^2 + Z = 5 \quad \iff \quad \frac{1}{(1-Z)^2} + Z = 1,$$

tem como raízes, $Z = 0$, $Z = 3/2 + i\sqrt{3}/2$ e $Z = 3/2 - i\sqrt{3}/2$, tais raízes contradizem a definição de Z . □

Agora, vamos mostrar um resultado numérico baseado no problema descrito nas seções anteriores para o caso da guia de onda retangular, para isto, foi usando o software *Freefem++* [28].

Exemplo 3.5. Dada Γ_β a guia de onda retangular com canto, definida em (3.12). Através do código descrito no Exemplo B.5 do Apêndice B, obtemos os dados representados na Figura 3.7, para $\beta \in (0, 24]$, em que as linhas retas de cor azul, mostram o ínfimo do espectro essencial, $E_1 = 5/4$, os pontos vermelhos representam os valores calculados por meio do software *Freefem++*, e a linha preta descreve a tendencia dos autovalores discretos λ do operador $-\Delta_{\Gamma_\beta}^D$.

Como se observa na Figura 3.7, para $\beta \in (0, 4.12]$ o espectro discreto do $-\Delta_{\Gamma_\beta}^D$ possui um único elemento, o número de autovalores discretos para $\beta > 4.12$ é finito e além disso o número de autovalores discretos tende a aumentar conforme β aumenta.

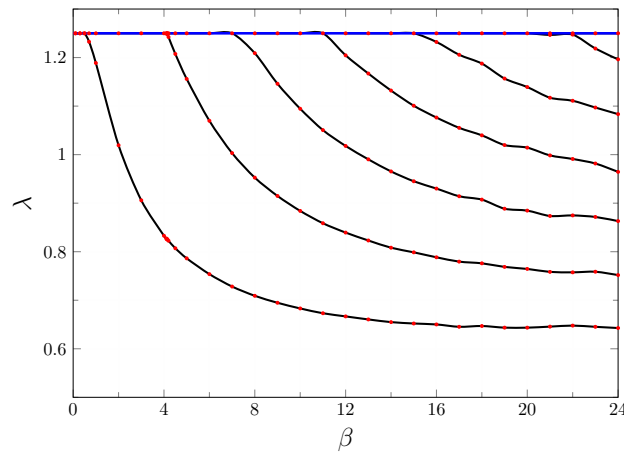


Figura 3.7: Relação entre o valor dos autovalores discretos λ do operador $-\Delta_{\Gamma_\beta}^D$ e β .

Laplaciano de Dirichlet em uma guia de onda reta, esticada e localmente torcida

Entre uma variedade de resultados estabelecidos na literatura, um dos resultados mais conhecidos é o fato de que em uma guia de onda reta o operador Laplaciano de Dirichlet não possui elementos no espectro discreto, isto é, seu espectro é puramente essencial. Como já comentado na Introdução, o mesmo acontece no caso de uma guia de onda reta e localmente torcida [21].

Motivados pelos resultados em [21], neste capítulo investigaremos condições suficientes que impliquem a existência de espectro discreto do operador Laplaciano de Dirichlet em uma guia de onda reta, esticada e localmente torcida. Além disso, apresentaremos como exemplo o caso de uma guia de onda retangular, reta, esticada e localmente torcida e analisaremos numericamente seu espectro discreto, aplicando os resultados prévios do capítulo.

4.1 Geometria da guia de onda e espectro essencial

Denotemos por $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica de \mathbb{R}^3 . Agora, seja $S \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto aberto, conexo e limitado não invariante por rotações (com relação ao origem em \mathbb{R}^2), denotemos por $y := (y_1, y_2)$ um ponto de S . Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \beta x$ uma função contínua e localmente Lipschitz, com $\beta \in (0, \infty)$. Além disso, f é diferenciável q.t.p. e $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Seja $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 com $\alpha' \in L^\infty(\mathbb{R})$, definimos a função rotação

$$\mathcal{R}_\alpha(x, y_1, y_2) = (0, y_1 \cos(\alpha(x)) - y_2 \sin(\alpha(x)), y_1 \sin(\alpha(x)) + y_2 \cos(\alpha(x))).$$

Agora, seja $r_\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ a curva espacial dada por

$$r_\beta(x) := (x, 0, f(x)) = (x, 0, \beta x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_\beta : \quad \mathbb{R} \times S &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y_1, y_2) &\longmapsto r_\beta(x) + \mathcal{R}_\alpha(x, y_1, y_2). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Definamos a guia de onda

$$\Omega_\beta := \mathcal{V}_\beta(\mathbb{R} \times S). \quad (4.3)$$

Geometricamente, Ω_β é obtido pela traslação da região S ao longo da curva $r_\beta(x)$, tal que, em cada ponto da curva, S é paralela ao plano gerado por $\{e_2, e_3\}$ e possui uma rotação de ângulo $\alpha(x)$ na posição x , como mostra a Figura 4.1. No contexto deste capítulo β denota um parâmetro de deformação dado por um “estiramento” da guia de onda reta e localmente torcida, assim Ω_β sera chamada de “guia de onda reta, esticada e localmente torcida”.

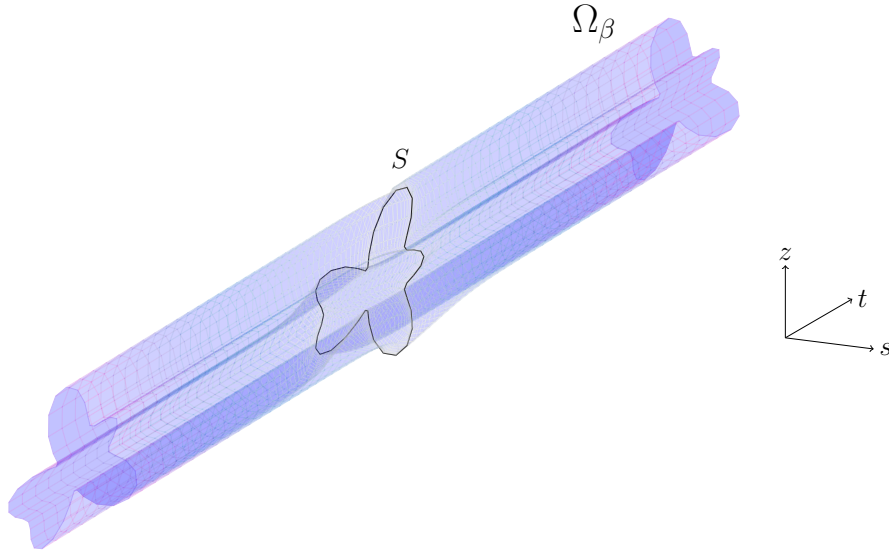


Figura 4.1: Guia de onda reta, esticada e localmente torcida, com $\beta = 0.9$ e $\alpha(x) = (\tanh(x) + \pi)/2$.

Consideremos a forma quadrática $Q_{\Omega_\beta}^D$ definida por

$$Q_{\Omega_\beta}^D(\psi) := \int_{\Omega_\beta} |\nabla \psi|^2 ds, \quad \text{dom } Q_{\Omega_\beta}^D := \mathcal{H}_0^1(\Omega_\beta); \quad (4.4)$$

em que $\mathbf{s} = (s, t, z)$ denota um ponto de Ω_β . Denotamos por $-\Delta_{\Omega_\beta}^D$ o operador autoadjunto associado à $Q_{\Omega_\beta}^D$, o qual age no espaço de Hilbert $L^2(\Omega_\beta)$ com condições de contorno de Dirichlet. O objetivo deste capítulo é estudar o espectro de $-\Delta_{\Omega_\beta}^D$. Inspirados por [21], assumimos que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \alpha'(x) =: 0. \quad (4.5)$$

Denote $\partial_{y_1} := \partial/\partial y_1$, $\partial_{y_2} := \partial/\partial y_2$. Considere o operador bidimensional

$$T(\beta) := -\partial_{y_1}^2 - (1 + \beta^2)\partial_{y_2}^2, \quad (4.6)$$

$\text{dom } T(\beta) = \{v \in \mathcal{H}_0^1(S) : T(\beta)v \in L^2(S)\}$. Denote por $E_1(\beta)$ o primeiro autovalor de $T(\beta)$. Desde que $T(\beta)$ é um operador elíptico com coeficiente reais, $E_1(\beta)$ é simples.

Considerando Ω_β uma guia de onda reta no infinito, a Proposição 3 de [38] mostra que o Laplaciano de Dirichlet em Ω_β possui um espectro puramente essencial e este é igual ao intervalo $[E_1(\beta), \infty)$. Assim, desde que o espectro essencial do Laplaciano de Dirichlet em domínios tubulares é dado unicamente pela geometria da região no infinito, temos o seguinte resultado:

Proposição 4.1. *Suponha que (4.5) é satisfeita. Então, para qualquer $\beta \in (0, \infty)$, o espectro essencial do operador $-\Delta_{\Omega_\beta}^D$ coincide com o intervalo $[E_1(\beta), \infty)$, em que $E_1(\beta)$ corresponde ao primeiro autovalor de $T(\beta)$.*

4.2 Espectro discreto

Nesta seção estudaremos o espectro discreto do operador $-\Delta_{\Omega_\beta}^D$. Primeiramente, vamos implementar uma mudança de variáveis com o propósito de tirar a dependência de β do domínio $\text{dom } \mathcal{Q}_{\Omega_\beta}^D$.

4.2.1 Mudança de variáveis

Relembre a aplicação \mathcal{V}_β dada por (4.2). Denote $\Lambda := \mathbb{R} \times S$. A saber, $\Omega_\beta = \mathcal{V}_\beta(\Lambda)$. Pela Proposição 1 em [38], \mathcal{V}_β é um difeomorfismo local $C^{0,1}$. Desde que \mathcal{V}_β é injetora obtemos um difeomorfismo global $C^{0,1}$. Assim, a região Ω_β pode ser identificada com a variedade Riemanniana (Λ, G_β) , em que $G_\beta = (G_\beta^{ij})$ é a métrica induzida por \mathcal{V}_β , isto é,

$$G_\beta^{ij} = \langle \mathcal{G}_\beta^i, \mathcal{G}_\beta^j \rangle = G_\beta^{ji}, \quad i, j = 1, 2,$$

em que

$$\mathcal{G}_\beta^1 = \frac{\partial \mathcal{V}_\beta}{\partial x}, \quad \mathcal{G}_\beta^2 = \frac{\partial \mathcal{V}_\beta}{\partial y_1}, \quad \mathcal{G}_\beta^3 = \frac{\partial \mathcal{V}_\beta}{\partial y_2}.$$

Mais especificamente, definimos

$$M(x, y) := K(x, y) \cos(\alpha(x)) + P(x, y) \sin(\alpha(x)) \text{ e } N(x, y) := -K(x, y) \sin(\alpha(x)) + P(x, y) \cos(\alpha(x)),$$

em que

$$K(x, y) := -\alpha'(x)y_1 \sin(\alpha(x)) - \alpha'(x)y_2 \cos(\alpha(x)), \quad L(x, y) := \alpha'(x)y_1 \cos(\alpha(x)) - \alpha'(x)y_2 \sin(\alpha(x)) + \beta.$$

Logo,

$$G_\beta = \nabla \mathcal{V}_\beta \cdot (\nabla \mathcal{V}_\beta)^t = \begin{pmatrix} 1 + K^2(x, y) + P^2(x, y) & M(x, y) & N(x, y) \\ M(x, y) & 1 & 0 \\ N(x, y) & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \det G_\beta = 1.$$

Agora, considerando o operador unitário

$$\mathcal{U}_\beta : \begin{array}{l} L^2(\Omega_\beta) \rightarrow L^2(\Lambda) \\ \psi \mapsto \psi \circ \mathcal{V}_\beta \end{array}, \quad (4.7)$$

definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_\beta(\psi) &:= \mathcal{Q}_{\Omega_\beta}^D(\mathcal{U}_\beta^{-1} \psi) = \int_\Lambda \langle \nabla \psi, G_\beta^{-1} \nabla \psi \rangle \sqrt{\det G_\beta} \, dx dy \\ &= \int_\Lambda \left(\left| \psi' + (\alpha'(x)y_2 - \beta \sin(\alpha(x))) \frac{\partial \psi}{\partial y_1} - (\alpha'(x)y_1 + \beta \cos(\alpha(x))) \frac{\partial \psi}{\partial y_2} \right|^2 + |\nabla_y \psi|^2 \right) dx dy, \end{aligned} \quad (4.8)$$

com $\text{dom } \mathcal{Q}_\beta = \mathcal{U}_\beta(\mathcal{H}_0^1(\Omega_\beta))$, em que $\psi' := \partial \psi / \partial x$. Dado que $f', \alpha' \in L^\infty(\mathbb{R})$, tem-se que $\text{dom } \mathcal{Q}_\beta = \mathcal{H}_0^1(\Lambda)$. Denote por H_β o operador autoadjunto associado à forma quadrática $\mathcal{Q}_\beta(\psi)$.

4.2.2 Existência do espectro discreto

Defina as constantes

$$\begin{aligned} A_1 &:= \int_S y_2^2 |\partial_{y_1} \chi|^2 dy, & A_2 &:= \int_S y_2 |\partial_{y_1} \chi|^2 dy, & A_3 &:= \int_S |\partial_{y_1} \chi|^2 dy, \\ B_1 &:= \int_S y_1^2 |\partial_{y_2} \chi|^2 dy, & B_2 &:= \int_S y_1 |\partial_{y_2} \chi|^2 dy, & B_3 &:= \int_S |\partial_{y_2} \chi|^2 dy, \\ C_1 &:= \int_S y_1 y_2 \partial_{y_1} \chi \partial_{y_2} \chi dy, & C_2 &:= \int_S y_2 \partial_{y_1} \chi \partial_{y_2} \chi dy, & C_3 &:= \int_S y_1 \partial_{y_1} \chi \partial_{y_2} \chi dy, & C_4 &:= \int_S \partial_{y_1} \chi \partial_{y_2} \chi dy, \end{aligned}$$

e a função $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} V(x) &:= (A_1 + B_1 - 2C_1)(\alpha'(x))^2 + 2(C_3 - A_2)\beta \alpha'(x) \text{sen}(\alpha(x)) + 2(B_2 - C_2)\beta \alpha'(x) \text{cos}(\alpha(x)) \\ &\quad + (A_3 - B_3)\beta^2 (\text{sen}(\alpha(x)))^2 + 2C_4\beta^2 \text{sen}(\alpha(x)) \text{cos}(\alpha(x)). \end{aligned}$$

Proposição 4.2. *Para cada $\beta \in (0, \infty)$, suponha que α é uma função não nula que satisfaz (4.5), tal que $V(x) \in L^1(\mathbb{R})$ e $\int_{\mathbb{R}} V(x) dx < 0$. Então*

$$\inf \sigma(-\Delta_{\Omega_\beta}^D) < E_1(\beta),$$

isto é, $\sigma_{dis}(-\Delta_{\Omega_\beta}^D) \neq \emptyset$.

Demonstração. Considere a forma quadrática

$$q_\beta(\psi) = \mathcal{Q}_\beta(\psi) - E_1(\beta) \|\psi\|_{L^2(\Lambda)}^2, \quad \text{dom } q_\beta = \text{dom } \mathcal{Q}_\beta. \quad (4.9)$$

De acordo com (1.2) e a Proposição 4.1, é suficiente mostrar que existe uma função $\psi \in \text{dom } \mathcal{Q}_\beta \setminus \{0\}$ tal que $q_\beta(\psi) < 0$.

Seja $w \in C^\infty(\mathbb{R})$ uma função linear, tal que $w = 1$ para $x \in [-1, 1]$, e $w = 0$ para $x \in \mathbb{R} \setminus (-2, 2)$. Defina, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n(x) = w\left(\frac{x}{n}\right) \quad \text{e} \quad \psi_n(x, y) = w_n(x) \chi(y),$$

em que χ denota a autofunção normalizada correspondente ao primeiro autovalor $E_1(\beta)$. Em particular,

$$\int_{\mathbb{R}} |w'_n|^2 dx = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} |w'|^2 dx \rightarrow 0, \quad \text{as } n \rightarrow \infty, \quad (4.10)$$

e

$$E_1(\beta) = \int_S \left(|\partial_{y_1} \chi|^2 + (1 + \beta^2) |\partial_{y_2} \chi|^2 \right) dy. \quad (4.11)$$

De (4.11) e desde que $\int_S \chi \partial_{y_2} \chi dy = \int_S \chi \partial_{y_1} \chi dy = 0$, $\int_S y_1 \chi \partial_{y_2} \chi dy = \int_S y_2 \chi \partial_{y_1} \chi dy = 0$, segue que

$$\begin{aligned}
q_\beta(\psi_n) &= Q_\beta(\psi_n) - E_1(\beta) \|\psi_n\|_{L^2(\Omega_0)}^2 \\
&= \int_{\Omega_0} \left(|w'_n \chi + (\alpha'(x)y_2 - \beta \text{sen}(\alpha(x)))w_n \partial_{y_1} \chi - (\alpha'(x)y_1 + \beta \cos(\alpha(x)))w_n \partial_{y_2} \chi|^2 \right. \\
&\quad \left. + |w_n|^2 |\nabla_y \chi|^2 \right) dx dy - E_1(\beta) \int_{\Omega_0} |w_n|^2 |\chi|^2 dx dy \\
&= \int_{\Omega_0} \left[|w'_n|^2 |\chi|^2 + 2(\alpha'(x)y_2 - \beta \text{sen}(\alpha(x)))w_n w'_n \chi \partial_{y_1} \chi - 2(\alpha'(x)y_1 - \beta \cos(\alpha(x)))w_n w'_n \chi \partial_{y_2} \chi \right. \\
&\quad \left. + |w_n|^2 \left([1 + (\alpha'(x)y_2 - \beta \text{sen}(\alpha(x)))^2] |\partial_{y_1} \chi|^2 + [1 + (\alpha'(x)y_1 + \beta \cos(\alpha(x)))^2] |\partial_{y_2} \chi|^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2(\alpha'(x)y_2 - \beta \text{sen}(\alpha(x)))(\alpha'(x)y_1 + \beta \cos(\alpha(x))) \partial_{y_1} \chi \partial_{y_2} \chi - E_1(\beta) |\chi|^2 \right) \right] dx dy \\
&= \int_{\Omega_0} \left[|w'_n|^2 |\chi|^2 + |w_n|^2 \left((\alpha'(x)y_2 - \beta \text{sen}(\alpha(x)))^2 |\partial_{y_1} \chi|^2 + [(\alpha'(x)y_1 + \beta \cos(\alpha(x)))^2 - \beta^2] |\partial_{y_2} \chi|^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2(\alpha'(x)y_2 - \beta \text{sen}(\alpha(x)))(\alpha'(x)y_1 + \beta \cos(\alpha(x))) \partial_{y_1} \chi \partial_{y_2} \chi \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + |\partial_{y_1} \chi|^2 + (1 + \beta^2) |\partial_{y_2} \chi|^2 - E_1(\beta) |\chi|^2 \right) \right] dx dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} |w'_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} V(x) |w_n|^2 dx.
\end{aligned}$$

Assim, de (4.10) e desde que $\|w_n\|_\infty \leq 1$ e $\int_{\mathbb{R}} V(x) dx < 0$, pelo teorema da convergência dominada, segue que

$$q_\beta(\psi_n) \rightarrow \int_{\mathbb{R}} V(x) dx, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Logo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $q_\beta(\psi_N) < 0$. □

Note que, a condição $\int_{\mathbb{R}} V(x) dx < 0$ implica a existência de autovalores discretos para $-\Delta_{\Omega_\beta}^D$.

Observação 4.3. Da definição da função V , desde que

$$A_1 + B_1 - 2C_1 = \int_S (y_2 \partial_{y_1} \chi - y_1 \partial_{y_2} \chi)^2 dy \geq 0,$$

vale ressaltar que o valor da integral $\int_{\mathbb{R}} V(x) dx$ ser negativo vai depender de forma significativa do valor de $\beta \in (0, \infty)$.

Em particular, no caso em que $\beta = 0$, tem-se

$$Q_0(\psi) = \int_{\Omega_0} \left(\left| \psi' + \alpha'(x)y_2 \frac{\partial \psi}{\partial y_1} - \alpha'(x)y_1 \frac{\partial \psi}{\partial y_2} \right|^2 + |\nabla_y \psi|^2 \right) dx dy \quad (4.12)$$

e

$$V(x) = (A_1 + B_1 - 2C_1)(\alpha'(x))^2 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} V(x) \geq 0. \quad (4.13)$$

Neste caso,

$$E_1 = \int_S \left(|\partial_{y_1} \chi|^2 + |\partial_{y_2} \chi|^2 \right) dy, \quad (4.14)$$

é o primeiro autovalor discreto do operador Laplaciano de Dirichlet em $L^2(S)$, em que χ_1 é sua correspondente autofunção normalizada. Pela definição variacional de E_1 , tem-se pela desigualdade de Poincaré,

$$\int_S |\chi'(y)|^2 dy \geq E_1 \int_S |\chi(y)|^2 dy, \quad \forall \chi \in \mathcal{H}_0^1(S). \tag{4.15}$$

Note que, $E_1 = E_1(0)$. Além disso,

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_0(\psi) &= \int_{\Omega_0} \left(\left| \psi' + \alpha'(x)y_2 \frac{\partial \psi}{\partial y_1} - \alpha'(x)y_1 \frac{\partial \psi}{\partial y_2} \right|^2 + |\nabla_y \psi|^2 \right) dx dy \\ &= \|\psi' + \alpha' y_2 \partial_{y_1} \psi - \alpha' y_1 \partial_{y_2} \psi\|^2 + \|\nabla_y \psi\|^2, \end{aligned}$$

com $\text{dom } \mathcal{Q}_0 = \mathcal{H}_0^1(\Omega_0)$, usando (4.14) no segundo termo da última igualdade, junto com o Teorema de Fubini, imediatamente obtemos o limite inferior

$$H_0 \geq E_1,$$

em que $H_0 = -(\partial_x + \alpha'(x)y_2 \partial_{y_1} - \alpha'(x)y_1 \partial_{y_2})^2 - (\partial_{y_1})^2 - (\partial_{y_2})^2$. Do Teorema 1.14 e a Proposição 4.1, segue que o operador $-\Delta_{\Omega_\beta}^D$ não possui elementos no espectro discreto, isto é, seu espectro é puramente essencial. Resultado a ser esperado, pois note que no caso em que $\beta = 0$ nossa guia de onda é reta.

4.3 Análise numérica

Nesta seção, exemplificaremos os resultados obtidos na seção anterior.

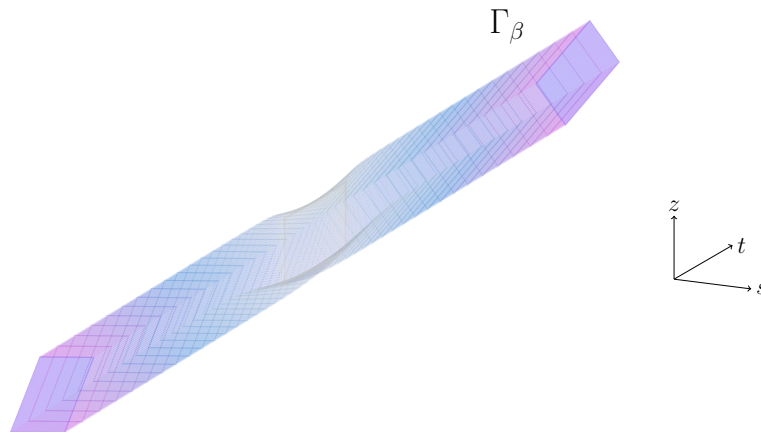


Figura 4.2: Guia de onda retangular, reta, esticada e localmente torcida, com $\beta = 0.9$ e $\alpha(x) = (\tanh(x) + \pi)/2$.

Consideremos $\Gamma_\beta = \mathcal{V}_\beta(\mathbb{R} \times S)$, em que $S = (0, \pi)^2$. De (4.6), fazendo alguns cálculos (ver Proposição A.4 no Apêndice A), tem-se que a autofunção correspondente ao primeiro autovalor

$E_1(\beta) = 2 + \beta^2$ é $\chi(y) = 2\text{sen}(y_1)\text{sen}(y_2)/\pi$. Neste caso, temos

$$A_1 = \int_S y_2^2 \left| \frac{2}{\pi} \cos(y_1)\text{sen}(y_2) \right|^2 dy = B_1 = \int_S y_1^2 \left| \frac{2}{\pi} \text{sen}(y_1) \cos(y_2) \right|^2 dy = \frac{1}{6}(2\pi^2 - 3) \approx 2.7899,$$

$$A_2 = \int_S y_2 \left| \frac{2}{\pi} \cos(y_1)\text{sen}(y_2) \right|^2 dy = B_2 = \int_S y_1 \left| \frac{2}{\pi} \text{sen}(y_1) \cos(y_2) \right|^2 dy = \frac{\pi}{2},$$

$$A_3 = \int_S \left| \frac{2}{\pi} \cos(y_1)\text{sen}(y_2) \right|^2 dy = B_3 = \int_S \left| \frac{2}{\pi} \text{sen}(y_1) \cos(y_2) \right|^2 dy = 1,$$

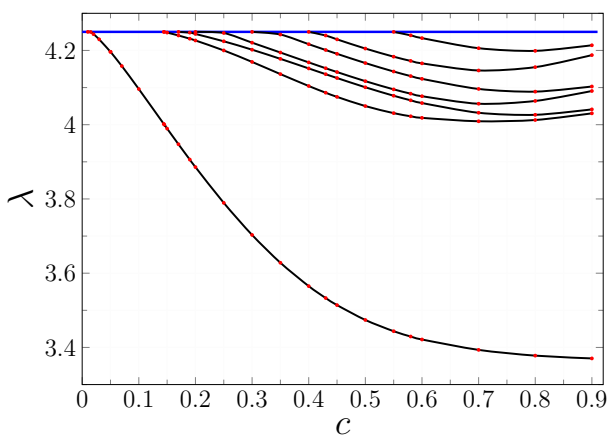
$$C_1 = \int_S \frac{4}{\pi^2} y_1 y_2 \cos(y_1)\text{sen}(y_2)\text{sen}(y_1) \cos(y_2) dy = \frac{1}{4},$$

$$C_2 = C_3 = C_4 = 0,$$

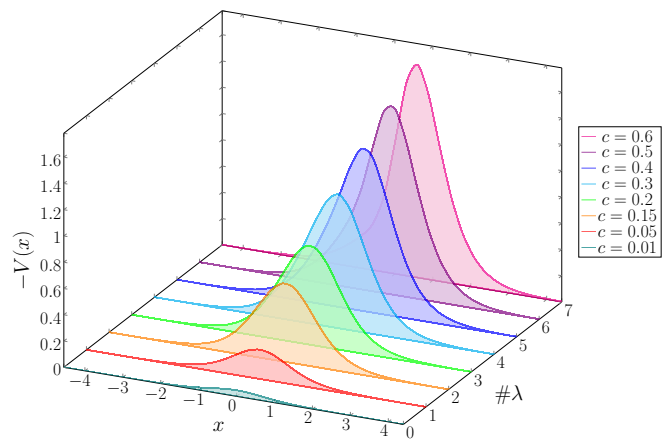
e

$$V(x) = \left(\frac{2}{3}\pi^2 - \frac{3}{2} \right) (\alpha'(x))^2 + \pi\beta\alpha'(x) (\cos(\alpha(x)) - \text{sen}(\alpha(x))), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

A seguir, vamos modelar o problema descrito acima usando o software *Freefem++* [28]. Através do código descrito no Exemplo B.6 do Apêndice B, obtemos os dados representados na Figura 4.3. Para esta análise fixamos $\beta = 1.5$ e consideramos a função $\alpha(x) = c \tanh(x) + \pi/2$, com $c \in \mathbb{R}$. Observemos que $\alpha(x)$ é uma função de classe C^∞ e sua derivada $\alpha'(x) = c(1 - \tanh^2(x))$ satisfaz a condição (4.5). Analisaremos a relação entre a constante c da função $\alpha(x)$ e os elementos no espectro discreto do operador Laplaciano de Dirichlet em Γ_β . Além disso, enquanto c varia, analisaremos a relação entre o valor de $\int_{\mathbb{R}} V(x) dx$ e o número de autovalores discretos do operador $-\Delta_{\Gamma_\beta}^D$. Cada um dos gráficos apresentados nesta seção, descrevem a tendência dos autovalores discretos λ do operador Laplaciano de Dirichlet em Γ_β , baseados nos valores calculados por meio do software *Freefem++*.



(a) Valor de λ vs constante c .



(b) $-V(x)$ vs número de autovalores ($\#\lambda$).

Figura 4.3: Relação da constante c e autovalores discretos do operador $-\Delta_{\Gamma_\beta}^D$, para $\beta = 1.5$.

Como se mostra na Figura 4.3a, sendo $E_1(1.5) = 4.25$ o ínfimo do espectro essencial de $-\Delta_{\Gamma_\beta}^D$, para cada $c \in (0.01, 0.144]$, o operador tem exatamente um autovalor discreto, e para valores $c > 0.144$ o número de autovalores é finito. Por outro lado, como mostra a Figura 4.3b, podemos observar

que o número de autovalores discretos dependem do valor da integral $\int_{\mathbb{R}} V(x)$, isto é, o número de autovalores diminui quando $\int_{\mathbb{R}} V(x)dx$ se aproxima de 0 pela esquerda, ainda mais, o valor da integral tem uma relação direta com o valor da constante c .

Agora, consideremos o caso particular em que $c = 1/2$, isto é, o caso em que $\alpha(x) = (\tanh(x) + \pi)/2$. Geometricamente, Γ_{β} é representada pela Figura 4.2. Como se mostra na Figura 4.4, para alguns valores $\beta \in (0, \infty)$ tem-se que $V(x) < 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, o que implica que $\int_{\mathbb{R}} V(x) < 0$. Portanto, a Proposição 4.2 garante que $-\Delta_{\Gamma_{\beta}}^D$ possui pelo menos um autovalor discreto. Além disso, pelo mencionado no paragrafo anterior, fazendo um comparativo entre os gráficos das Figuras 4.3b e 4.4, o aumento do valor β neste caso, poderia gerar um aumento de elementos no espectro discreto do operador Laplaciano de Dirichlet em Γ_{β} .

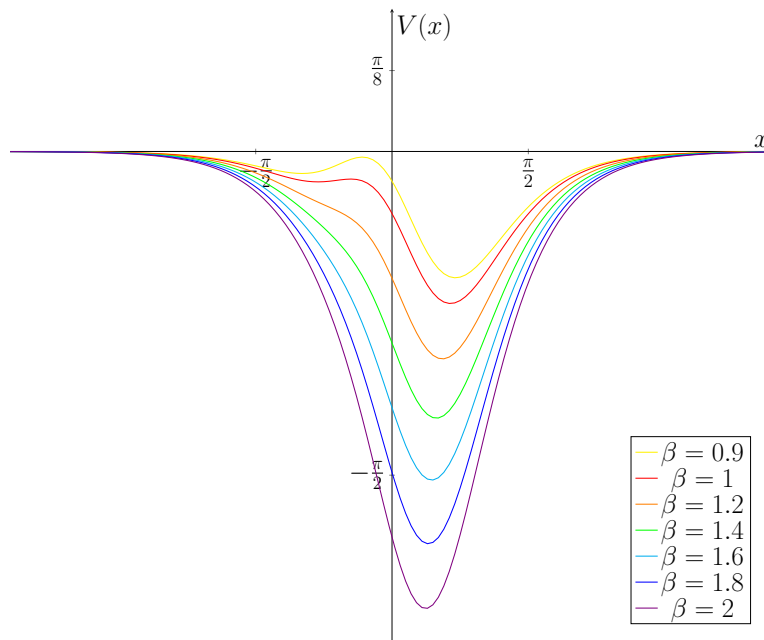


Figura 4.4: Gráfico da função $V(x)$, para $\alpha(x) = (\tanh(x) + \pi)/2$, para alguns valores de β .

Análises espectral em superfícies

Motivados pelos resultados em [17, 38], neste capítulo investigaremos o espectro do operador Laplaciano em uma “superfície em forma de uma guia onda”. Neste caso, observemos que o operador a ser estudado não possui condições na fronteira. Mostraremos que o espectro essencial do operador depende do comportamento da superfície no infinito. Além disso, investigaremos condições suficientes que impliquem a existência de espectro discreto.

5.1 Geometria da superfície

Denote por $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica de \mathbb{R}^3 . Seja $\xi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva fechada simples no plano yz , de classe C^2 , parametrizada pelo comprimento de arco t (isto é, $\|\xi'(t)\| = 1, \forall t \in [0, 1]$) com $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$. Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções localmente Lipschitz contínuas. Além disso, vamos supor que f, g são diferenciáveis em quase todo ponto, e $f', g' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Agora, considere a curva espacial

$$r(x) = (x, f(x), g(x)), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.1)$$

Definimos a aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \mathbb{R} \times \mathcal{C} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, t) &\longmapsto r(x) + \xi_1(t)e_2 + \xi_2(t)e_3, \end{aligned} \quad (5.2)$$

em que \mathcal{C} denota o círculo de comprimento 1, e a superfície

$$\mathcal{S} := \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathcal{C}). \quad (5.3)$$

Geometricamente, \mathcal{S} é obtida pela traslação da curva ξ ao longo da curva $r(x)$, como mostra na Figura 5.1. Denote por $-\Delta_{\mathcal{S}}$ o operador Laplaciano em \mathcal{S} , i.e., o operador autoadjunto associado à forma quadrática

$$Q_{\mathcal{S}}(\psi) = \int_{\mathcal{S}} |\nabla \psi|^2 dx, \quad \text{dom } Q_{\mathcal{S}} = \mathcal{H}^1(\mathcal{S}); \quad (5.4)$$

$\mathbf{x} = (x, y, z)$ denota um ponto de \mathcal{S} . O objetivo deste capítulo é estudar o espectro do operador $-\Delta_{\mathcal{S}}$. Inspirados por [38], vamos supor que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f'(x) =: \beta_1, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} g'(x) =: \beta_2, \quad \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}. \quad (5.5)$$

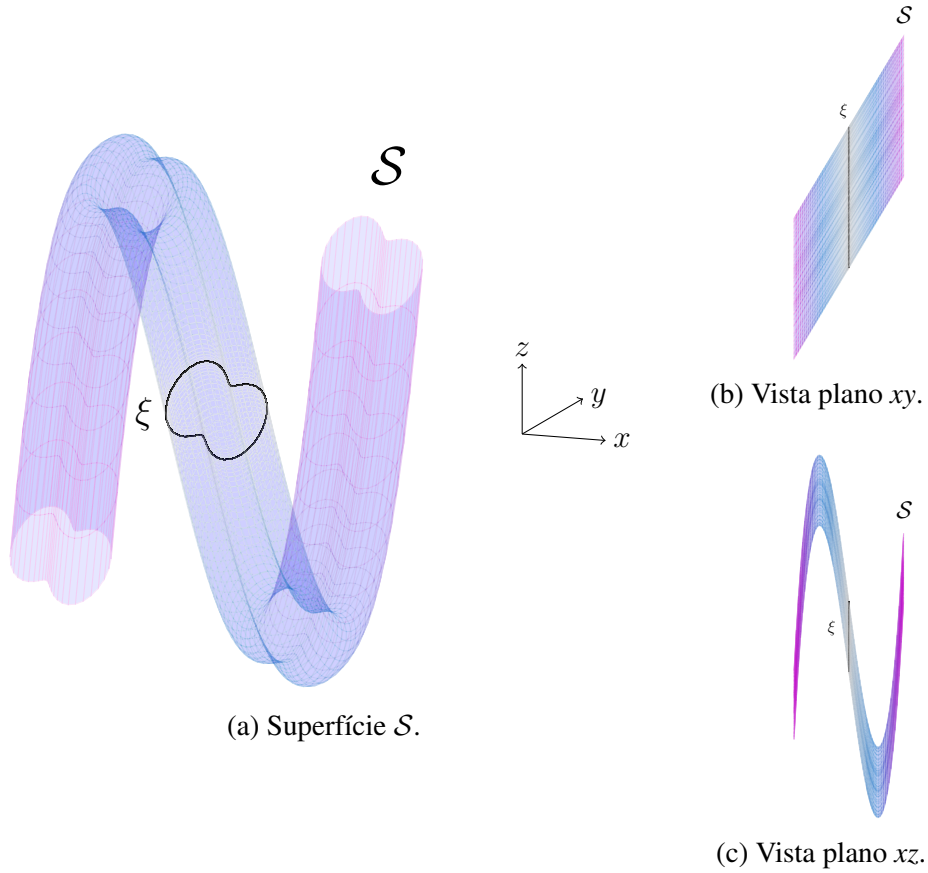


Figura 5.1: Superfície em forma de uma guia de onda.

5.2 Mudança de variáveis

Relembremos que $\mathcal{S} = \mathcal{P}(\Sigma)$, em que $\Sigma := \mathbb{R} \times \mathcal{C}$. Logo, nesta seção vamos implementar uma mudança de variáveis de tal forma que $Q_{\mathcal{S}}(\psi)$ passe a agir no espaço de Hilbert $L^2(\Sigma)$ em vez de $L^2(\mathcal{S})$.

Seja $G = (G_{ij})$ a métrica induzida pela aplicação \mathcal{P} , i.e.,

$$G_{ij} = \langle \mathcal{G}_i, \mathcal{G}_j \rangle = G_{ji}, \quad i, j = 1, 2,$$

em que

$$\mathcal{G}_1 = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} = (1, f'(x), g'(x)), \quad \mathcal{G}_2 = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = (0, \xi'_1(t), \xi'_2(t)).$$

Mais precisamente,

$$G = \nabla \mathcal{P} \cdot (\nabla \mathcal{P})^t = \begin{pmatrix} 1 + (f'(x))^2 + (g'(x))^2 & f'(x)\xi'_1(t) + g'(x)\xi'_2(t) \\ f'(x)\xi'_1(t) + g'(x)\xi'_2(t) & 1 \end{pmatrix},$$

e $\det G = 1 + (f'(x)\xi_2'(t) - g'(x)\xi_1'(t))^2 \neq 0$, para todo $(x, t) \in \Sigma$, desde que \mathcal{P} é um difeomorfismo global entre Σ e \mathcal{S} , podemos realizar uma mudança de variáveis.

Denote por $h(x, t) := h_{f', g'}(x, t) = \sqrt{\det G}$. A norma no espaço de Hilbert $L^2(\Sigma, h(x, t) dx dt)$ é dada por

$$\|\psi\|^2 := \int_{\Sigma} |\psi|^2 h dx dt.$$

Considerando o operador unitário

$$\mathcal{U}: \begin{array}{l} L^2(\mathcal{S}) \rightarrow L^2(\Sigma, h dx dt) \\ \psi \mapsto \psi \circ \mathcal{P} \end{array}, \quad (5.6)$$

definimos

$$\begin{aligned} Q_{f', g'}(\psi) &:= Q_{\mathcal{S}}(\mathcal{U}^{-1}\psi) = \int_{\Sigma} \langle \nabla \psi, G^{-1} \nabla \psi \rangle \sqrt{\det G} dx dt \\ &= \int_{\Sigma} \left(\left| \psi' - (f'(x)\xi_1'(t) + g'(x)\xi_2'(t)) \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|^2 + (1 + (f'(x)\xi_2'(t) - g'(x)\xi_1'(t))^2) \left| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|^2 \right) \frac{dx dt}{h(x, t)} \\ &= \int_{\Sigma} \frac{|\psi' - (f'(x)\xi_1'(t) + g'(x)\xi_2'(t)) \partial_t \psi|^2}{h(x, t)} dx dt + \int_{\Sigma} h(x, t) |\partial_t \psi|^2 dx dt, \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\text{dom } Q_{f', g'} := \mathcal{U}(\text{dom } Q_{\mathcal{S}}),$$

em que $\psi' := \partial \psi / \partial x$. Desde que $f', g' \in L^\infty(\mathbb{R})$, tem-se que $\text{dom } Q_{f', g'} = \mathcal{H}^1(\Sigma)$. Denote por $H_{f', g'}$ o operador autoadjunto associado à forma quadrática $Q_{f', g'}(\psi)$.

Agora, considerando mais um operador unitário

$$\hat{\mathcal{U}}: \begin{array}{l} L^2(\Sigma, h(x, t) dx dy) \rightarrow L^2(\Sigma) \\ \psi \mapsto \sqrt{h} \psi \end{array}, \quad (5.8)$$

definimos

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{f', g'}(\psi) &:= Q_{f', g'}(\hat{\mathcal{U}}^{-1}\psi) = Q_{f', g'}(h^{-1/2}\psi) \\ &= \int_{\Sigma} \frac{\left| (h^{-1/2}\psi)' - (f'\xi_1' + g'\xi_2') \partial_t (h^{-1/2}\psi) \right|^2}{h} dx dt + \int_{\Sigma} h \left| \partial_t (h^{-1/2}\psi) \right|^2 dx dt \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\text{dom } \hat{Q}_{f', g'} := \text{dom } Q_{f', g'},$$

em que $(h^{-1/2}\psi)' := \partial(h^{-1/2}\psi) / \partial x$. Observemos que,

$$(h^{-1/2}\psi)' = ((1 + (f'(x)\xi_2'(t) - g'(x)\xi_1'(t))^2)^{-1/4} \psi)' = h^{-1/2} \left[\psi' - \frac{\partial_x h^2}{4h^2} \psi \right],$$

e

$$\partial_t (h^{-1/2}\psi) = \partial_t ((1 + (f'(x)\xi_2'(t) - g'(x)\xi_1'(t))^2)^{-1/4} \psi) = h^{-1/2} \left[\partial_t \psi - \frac{\partial_t h^2}{4h^2} \psi \right].$$

Logo,

$$\hat{Q}_{f', g'}(\psi) = \int_{\Sigma} \frac{1}{h^2} \left| \psi' - \frac{\partial_x h^2}{4h^2} \psi - (f'\xi_1' + g'\xi_2') \left[\partial_t \psi - \frac{\partial_t h^2}{4h^2} \psi \right] \right|^2 dx dt + \int_{\Sigma} \left| \partial_t \psi - \frac{\partial_t h^2}{4h^2} \psi \right|^2 dx dt$$

Desde que, $f', g' \in L^\infty(\mathbb{R})$, tem-se que $\text{dom } \hat{Q}_{f',g'} = \mathcal{H}^1(\Sigma)$. Denote por $\hat{H}_{f',g'}$ o operador autoadjunto associado à forma quadrática $\hat{Q}_{f',g'}(\psi)$. Assim, desde que $H_{f',g'}$ e $\hat{H}_{f',g'}$ são unitariamente equivalentes, podemos identificar $-\Delta_S$ com o operador autoadjunto $\hat{H}_{f',g'}$.

Agora, considere o operador 2-dimensional

$$T_{\beta_1, \beta_2} := -\frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{1 + \beta_1^2 + \beta_2^2}{h_{\beta_1, \beta_2}^2} \right) \partial_t \right] + (1 + \beta_1^2 + \beta_2^2) \left[\left(\frac{(h_{\beta_1, \beta_2}^2)'}{4h_{\beta_1, \beta_2}^4} \right)' + \left(\frac{(h_{\beta_1, \beta_2}^2)'}{4h_{\beta_1, \beta_2}^3} \right)^2 \right], \quad (5.10)$$

$$\text{dom } T_{\beta_1, \beta_2} := \{v \in \mathcal{H}^1(\mathcal{C}) : T_{\beta_1, \beta_2} v \in L^2(\mathcal{C}), v'(0) = v'(1)\},$$

em que $h_{\beta_1, \beta_2}^2 := 1 + (\beta_1 \xi_2' - \beta_2 \xi_1')^2$. Denotemos por $E_1(0)$ o primeiro autovalor discreto de T_{β_1, β_2} . Desde que T_{β_1, β_2} é um operador elíptico com coeficientes reais, segue que $E_1(0)$ é simples.

5.3 Espectro essencial

Nesta seção vamos estudar o espectro essencial do operador $-\Delta_S$. Inspirados em [5], temos o seguinte resultado para o caso em que β_1, β_2 são finitos.

Lema 5.1. *Um número real λ pertence ao espectro essencial de $\hat{H}_{f',g'}$ se, e somente se, existe uma sequência $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{dom } \hat{Q}_{f',g'}$ tal que as três condições seguintes são satisfeitas*

- (i) $\|\psi_n\|_{L^2(\mathcal{S})} = 1, \forall n \in \mathbb{N}$;
- (ii) $(\hat{H}_{f',g'} - \lambda \mathbf{1})\psi_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, em $(\text{dom } \hat{H}_{f',g'})^*$,
- (iii) $\text{supp } \psi_n \subset \mathcal{S} \setminus (-n, n) \times \mathcal{C}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Pelo critério da sequência de Weyl para formas quadráticas, $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(\hat{H}_{f',g'})$ se, e somente se, existe uma sequência $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{dom } \hat{Q}_{f',g'}$ tal que (i) e (ii) mantêm-se mas (iii) é substituído por (iii') $v_n \xrightarrow{w} 0$, quando $n \rightarrow \infty$, em $L^2(\mathcal{S})$

A sequência $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisfazendo (i) e (iii) é claramente uma sequência que converge fracamente para zero. Daí, uma implicação do Lema é evidente. Reciprocamente, seja $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(\hat{H}_{f',g'})$, pelo critério para formas quadráticas, existe uma sequência $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{dom } \hat{Q}_{f',g'}$ satisfazendo (i), (ii) e (iii'). A partir dela vamos construir uma sequência $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisfazendo (i), (ii) e (iii).

Observe que na condição (ii), $(\text{dom } \hat{H}_{f',g'})^*$ denota o espaço dual do espaço $\text{dom}(\hat{Q}_{f',g'})$. Além disso, lembremos que a condição (ii) significa que

$$\|(\hat{H}_{f',g'} - \lambda \mathbf{1})\psi_n\|_{-1} := \|(\hat{H}_{f',g'} - \lambda \mathbf{1})\psi_n\|_{(\text{dom } \hat{Q}_{f',g'})^*} = \sup_{\phi \in \text{dom } \hat{Q}_{f',g'} \setminus \{0\}} \frac{|\langle \phi, (\hat{H}_{f',g'} - \lambda \mathbf{1})\psi_n \rangle|}{\|\phi\|_1} \rightarrow 0, \quad (5.11)$$

quando $n \rightarrow \infty$, em que

$$\|\phi\|_1^2 := \hat{Q}_{f',g'}(\phi) + \|\phi\|_{L^2(\mathcal{S})}^2.$$

Escrevendo,

$$\mathbf{v}_n = (\hat{H}_{f',g'} + \mathbf{1})^{-1}(\hat{H}_{f',g'} - \lambda \mathbf{1})\mathbf{v}_n + (1 + \lambda)(\hat{H}_{f',g'} + \mathbf{1})^{-1}\mathbf{v}_n \quad (5.12)$$

e usando (ii), segue que a sequência $\{\mathbf{v}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $\text{dom } \hat{Q}_{f',g'}$.

Seja $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ uma função real tal que $\varphi(x) = 0$, se $x \in [-1, 1]$ e $\varphi(x) = 1$, se $x \in \mathbb{R} \setminus (-2, 2)$. Defina, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_k(x) = \varphi\left(\frac{x}{k}\right);$$

mantemos a mesma notação para a função $\varphi_k \otimes \mathbf{1}$ em $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$ e, similarmente, para suas derivadas φ' e φ'' . Note que, $\text{supp } \varphi_k \subset \mathcal{S} \setminus (-k, k) \times \mathcal{C}$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, o operador $(1 - \varphi_k)(\hat{H}_{f',g'} + \mathbf{1})^{-1}$ é compacto em $L^2(\mathcal{S})$, daí, $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \varphi_k)(\hat{H}_{f',g'} + \mathbf{1})^{-1}\mathbf{v}_n = 0$ em $L^2(\mathcal{S})$. Logo, existe uma subsequência $\{\mathbf{v}_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{\mathbf{v}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} (1 - \varphi_k)(\hat{H}_{f',g'} + \mathbf{1})^{-1}\mathbf{v}_{n_k} = 0$ em $L^2(\mathcal{S})$. Consequentemente, de (5.12) e (ii) segue que $\lim_{k \rightarrow \infty} (1 - \varphi_k)\mathbf{v}_{n_k} = 0$ em $L^2(\mathcal{S})$. Logo, podemos assumir $\|\varphi_k \mathbf{v}_{n_k}\| \geq 1/2$, para cada $k \in \mathbb{N}$, e definimos

$$\psi_k := \frac{\varphi_k \mathbf{v}_{n_k}}{\|\varphi_k \mathbf{v}_{n_k}\|} \in \text{dom } \hat{Q}_{f',g'}.$$

Note que, ψ_k satisfaz (i) e (iii). Resta verificar (ii).

Agora, para toda $\phi \in \text{dom } \hat{Q}_{f',g'} \setminus \{0\}$, tem-se

$$|\langle \phi, (\hat{H}_{f',g'} - \lambda \mathbf{1})\psi_k \rangle| = |\hat{Q}_{f',g'}(\phi, \psi_k) - \lambda \langle \phi, \psi_k \rangle_{L^2(\mathcal{S})}|.$$

Sem perda de generalidade, vamos supor $\|\varphi_k \mathbf{v}_{n_k}\| = 1$. Integrando por partes,

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{f',g'}(\phi, \psi_k) &= \int_{\Sigma} \frac{1}{h^2} \left(\phi' - \frac{\partial_x h^2}{4h^2} \phi - (f' \xi'_1 + g' \xi'_2) \left[\partial_t \phi - \frac{\partial_t h^2}{4h^2} \phi \right] \right) \left(\psi'_k - \frac{\partial_x h^2}{4h^2} \psi_k - (f' \xi'_1 + g' \xi'_2) \left[\partial_t \psi_k - \frac{\partial_t h^2}{4h^2} \psi_k \right] \right) dx dt \\ &\quad + \int_{\Sigma} \left(\partial_t \phi - \frac{\partial_t h^2}{4h^2} \phi \right) \left(\partial_t \psi_k - \frac{\partial_t h^2}{4h^2} \psi_k \right) dx dt \\ &= \hat{Q}_{f',g'}(\phi \varphi_k, \mathbf{v}_{n_k}) + 2 \left\langle \frac{1}{h} \left(\phi' - \frac{\partial_x h^2}{4h^2} \phi - (f' \xi'_1 + g' \xi'_2) \left[\partial_t \phi - \frac{\partial_t h^2}{4h^2} \phi \right] \right), \frac{1}{h} \phi'_k \mathbf{v}_{n_k} \right\rangle_{L^2(\Sigma)} \\ &\quad + \left\langle \frac{1}{h^2} \phi, \phi''_k \mathbf{v}_{n_k} \right\rangle_{L^2(\Sigma)} - \left\langle \left(\frac{\partial_x h^2}{2h^4} - (f' \xi'_1 + g' \xi'_2) \frac{\partial_t h^2}{2h^4} + \frac{(f' \xi''_1 + g' \xi''_2)}{h^2} \right) \phi, \phi'_k \mathbf{v}_{n_k} \right\rangle_{L^2(\Sigma)}, \end{aligned}$$

e $-\lambda \langle \phi, \psi_k \rangle_{L^2(\Sigma)} = -\lambda \langle \phi \varphi_k, \mathbf{v}_{n_k} \rangle_{L^2(\Sigma)}$, para toda função teste $\varphi \in C_0^\infty(\Sigma)$. Assim, de (5.11), tem-se

$$\begin{aligned} \sup_{\phi \in C_0^\infty(\Sigma) \setminus \{0\}} \frac{|\hat{Q}_{f',g'}(\phi \varphi_k, \mathbf{v}_{n_k}) - \lambda \langle \phi \varphi_k, \mathbf{v}_{n_k} \rangle_{L^2(\Sigma)}|}{\|\phi\|_1} &\leq \sup_{\substack{\phi \in C_0^\infty(\Sigma) \setminus \{0\} \\ \phi \varphi_k \neq 0}} \frac{|\hat{Q}_{f',g'}(\phi \varphi_k, \mathbf{v}_{n_k}) - \lambda \langle \phi \varphi_k, \mathbf{v}_{n_k} \rangle_{L^2(\Sigma)}|}{\|\phi \varphi_k\|_1} \\ &= \|(\hat{H}_{f',g'} - \lambda \mathbf{1})\mathbf{v}_{n_k}\|_{-1} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quanto $k \rightarrow \infty$. Ao mesmo tempo, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a estimativa

$$\left\| \frac{1}{h} \left(\phi' - \frac{\partial_x h^2}{4h^2} \phi - (f' \xi'_1 + g' \xi'_2) \left[\partial_t \phi - \frac{\partial_t h^2}{4h^2} \phi \right] \right) \right\|^2 \leq \hat{Q}_{f',g'}(\phi) \leq \|\phi\|_1^2,$$

obtemos

$$\sup_{\phi \in C_0^\infty(\Sigma) \setminus \{0\}} \frac{\left| 2 \left\langle \frac{1}{h} \left(\phi' - \frac{\partial_x h^2}{4h^2} \phi - (f' \xi'_1 + g' \xi'_2) \left[\partial_t \phi - \frac{\partial_t h^2}{4h^2} \phi \right] \right), \frac{1}{h} \phi'_k v_{n_k} \right\rangle_{L^2(\Sigma)} \right|}{\|\phi\|_1} \leq \|\phi'_k\|_\infty \|v_{n_k}\| \frac{2}{\inf |h|},$$

em que $\|\phi'_k\|_\infty$ denota o supremo da norma de ϕ'_k . Assim, da normalização (i) e desde que $\|\phi'_k\|_\infty = k^{-1} \|\phi'\|_\infty$, segue que os dois termos tendem a zero quando $k \rightarrow \infty$. Além disso, da estimativa $\|\phi\| \leq \|\phi\|_1$, desde que $\|\phi'_k\|_\infty = k^{-2} \|\phi''\|_\infty$, segue que

$$\sup_{\phi \in C_0^\infty(\Sigma) \setminus \{0\}} \frac{\left| \left\langle \frac{1}{h^2} \phi, \phi''_k v_{n_k} \right\rangle_{L^2(\Sigma)} \right|}{\|\phi\|_1} \leq \|\phi''_k\|_\infty \|v_{n_k}\| \frac{1}{\inf |h^2|} \rightarrow 0,$$

e

$$\sup_{\phi \in C_0^\infty(\Sigma) \setminus \{0\}} \frac{\left| \left\langle \left(\frac{\partial_x h^2}{2h^4} - (f' \xi'_1 + g' \xi'_2) \frac{\partial_t h^2}{2h^4} + \frac{(f' \xi''_1 + g' \xi''_2)}{h^2} \right) \phi, \phi'_k v_{n_k} \right\rangle_{L^2(\Sigma)} \right|}{\|\phi\|_1} \leq \|\phi'_k\|_\infty \|v_{n_k}\| K \rightarrow 0,$$

quando $k \rightarrow 0$, em que na última desigualdade $K := \sup \left| \frac{\partial_x h^2}{2h^4} - (f' \xi'_1 + g' \xi'_2) \frac{\partial_t h^2}{2h^4} + \frac{(f' \xi''_1 + g' \xi''_2)}{h^2} \right|$.

Resumindo, acabamos de verificar que $\|(\hat{H}_{f',g'} - \lambda \mathbf{1}) \psi_k\|_{-1} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Portanto, $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ satisfaz a condição (ii), o que conclui a demonstração. \square

Usando o lema anterior, chegamos imediatamente ao seguinte resultado (dizendo que o espectro essencial do operador Laplaciano é determinado pelo comportamento da superfície apenas no infinito).

Proposição 5.2. *Suponha as condições em (5.5). Então, $\sigma_{ess}(\hat{H}_{f',g'}) = \sigma_{ess}(\hat{H}_{\beta_1,\beta_2})$.*

Demonstração. Seja $\lambda \in \sigma_{ess}(\hat{H}_{\beta_1,\beta_2})$. Pelo Lema 5.1, existe uma sequência $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{dom} \hat{H}_{\beta_1,\beta_2}$ tal que as condições (i) – (iii) são satisfeitas. De (5.12), para cada $n \in \mathbb{N}$, escrevemos

$$\psi_n = (\hat{H}_{\beta_1,\beta_2} + \mathbf{1})^{-1} (\hat{H}_{\beta_1,\beta_2} - \lambda \mathbf{1}) \psi_n + (1 + \lambda) (\hat{H}_{\beta_1,\beta_2} + \mathbf{1})^{-1} \psi_n.$$

Da condição (ii) do Lema 5.1, podemos observar que a sequência $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada no conjunto $\text{dom} \hat{Q}_{\beta_1,\beta_2}$.

Seja

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{f',g'}(\phi, \psi_n) &= \int_\Sigma \frac{1}{h^2} \left(\phi' - \frac{\partial_x h^2}{4h^2} \phi - (f' \xi'_1 + g' \xi'_2) \left[\partial_t \phi - \frac{\partial_t h^2}{4h^2} \phi \right] \right) \left(\psi'_n - \frac{\partial_x h^2}{4h^2} \psi_n - (f' \xi'_1 + g' \xi'_2) \left[\partial_t \psi_n - \frac{\partial_t h^2}{4h^2} \psi_n \right] \right) dx dt \\ &\quad + \int_\Sigma \left(\partial_t \phi - \frac{\partial_t h^2}{4h^2} \phi \right) \left(\partial_t \psi_n - \frac{\partial_t h^2}{4h^2} \psi_n \right) dx dt, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{\beta_1,\beta_2}(\phi, \psi_n) &= \int_\Sigma \frac{1}{h_{\beta_1,\beta_2}^2} \left(\phi' - (\beta_1 \xi'_1 + \beta_2 \xi'_2) \left[\partial_t \phi - \frac{(h_{\beta_1,\beta_2}^2)'}{4h_{\beta_1,\beta_2}^2} \phi \right] \right) \left(\psi'_n - (\beta_1 \xi'_1 + \beta_2 \xi'_2) \left[\partial_t \psi_n - \frac{(h_{\beta_1,\beta_2}^2)'}{4h_{\beta_1,\beta_2}^2} \psi_n \right] \right) dx dt \\ &\quad + \int_\Sigma \left(\partial_t \phi - \frac{(h_{\beta_1,\beta_2}^2)'}{4h_{\beta_1,\beta_2}^2} \phi \right) \left(\partial_t \psi_n - \frac{(h_{\beta_1,\beta_2}^2)'}{4h_{\beta_1,\beta_2}^2} \psi_n \right) dx dt. \end{aligned}$$

Alguns cálculos mostram que

$$\begin{aligned}
\hat{Q}_{f',g'}(\phi, \psi_n) &= \hat{Q}_{\beta_1, \beta_2}(\phi, \psi_n) + \int_{\Sigma} \left(\left[\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h_{\beta_1, \beta_2}^2} \right] \phi' \psi_n' + \left[\frac{1 + (f')^2 + (g')^2}{h^2} - \frac{1 + \beta_1^2 + \beta_2^2}{h_{\beta_1, \beta_2}^2} \right] \partial_t \phi \partial_t \psi_n \right. \\
&\quad + \left[(f' \xi_1' + g' \xi_2') \frac{\partial_t h^2}{4h^4} - (\beta_1 \xi_1' + \beta_2 \xi_2') \frac{(h_{\beta_1, \beta_2}^2)'}{4h_{\beta_1, \beta_2}^4} \right] (\phi' \psi_n + \phi \psi_n') \\
&\quad - \left[\frac{f' \xi_1' + g' \xi_2'}{h^2} - \frac{\beta_1 \xi_1' + \beta_2 \xi_2'}{h_{\beta_1, \beta_2}^2} \right] (\phi' \partial_t \psi_n + \partial_t \phi \psi_n') \\
&\quad - \left[(1 + (f')^2 + (g')^2) \frac{\partial_t h^2}{4h^4} - (1 + \beta_1^2 + \beta_2^2) \frac{(h_{\beta_1, \beta_2}^2)'}{4h_{\beta_1, \beta_2}^4} \right] (\partial_t \phi \psi_n + \phi \partial_t \psi_n) \\
&\quad + \left[(1 + (f')^2 + (g')^2) \left(\frac{\partial_t h^2}{4h^3} \right)^2 - (1 + \beta_1^2 + \beta_2^2) \left(\frac{(h_{\beta_1, \beta_2}^2)'}{4h_{\beta_1, \beta_2}^3} \right)^2 \right] \phi \psi_n \Big) dx dt \\
&\quad - \left\langle \frac{1}{h} \left(\phi' - \frac{\partial_x h^2}{4h^2} \phi - (f' \xi_1' + g' \xi_2') \left[\partial_t \phi - \frac{\partial_t h^2}{4h^2} \phi \right] \right), \frac{\partial_x h^2}{4h^3} \psi_n \right\rangle_{L^2(\Sigma)} \\
&\quad - \left\langle \phi, \frac{\partial_x h^2}{4h^4} \left(\psi_n' - (f' \xi_1' + g' \xi_2') \left[\partial_t \psi_n - \frac{\partial_t h^2}{4h^2} \psi_n \right] \right) \right\rangle_{L^2(\Sigma)}.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Desde que $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada no dom $\hat{Q}_{\beta_1, \beta_2}$, $\|\phi\|_1^2 := \hat{Q}_{f',g'}(\phi) + \|\phi\|_{L^2(S)}^2$, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e o fato de que $\|\partial_x h^2 / 4h^i\|_{L^\infty(\Sigma \setminus (-n,n) \times C)} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, para $i = 3, 4$, tem-se

$$\begin{aligned}
&\sup_{\substack{\phi \in \text{dom } \hat{Q}_{f',g'} \\ \phi \neq 0}} \frac{\left| \left\langle \frac{1}{h} \left(\phi' - \frac{\partial_x h^2}{4h^2} \phi - (f' \xi_1' + g' \xi_2') \left[\partial_t \phi - \frac{\partial_t h^2}{4h^2} \phi \right] \right), \frac{\partial_x h^2}{4h^3} \psi_n \right\rangle_{L^2(\Sigma)} \right|}{\|\phi\|_1} \\
&\leq \left\| \frac{\partial_x h^2}{4h^3} \right\|_{L^\infty(\Sigma \setminus (-n,n) \times C)} \|\psi_n\| \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&\sup_{\substack{\phi \in \text{dom } \hat{Q}_{f',g'} \\ \phi \neq 0}} \frac{\left| \left\langle \phi, \frac{\partial_x h^2}{4h^4} \left(\psi_n' - (f' \xi_1' + g' \xi_2') \left[\partial_t \psi_n - \frac{\partial_t h^2}{4h^2} \psi_n \right] \right) \right\rangle_{L^2(\Sigma)} \right|}{\|\phi\|_1} \\
&\leq \left\| \frac{\partial_x h^2}{4h^4} \right\|_{L^\infty(\Sigma \setminus (-n,n) \times C)} \left(\|\psi_n'\| + \|(f' \xi_1' + g' \xi_2')\|_{L^\infty(\Sigma)} \left[\|\partial_t \psi_n\| + \left\| \frac{\partial_t h^2}{4h^2} \right\|_{L^\infty(\Sigma)} \|\psi_n\| \right] \right) \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$. Além disso, note que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{h^2} - \frac{1}{h_{\beta_1, \beta_2}^2} \right\|_{L^\infty(\Sigma \setminus (-n, n) \times \mathcal{C})} &\rightarrow 0, & \left\| \frac{1 + (f')^2 + (g')^2}{h^2} - \frac{1 + \beta_1^2 + \beta_2^2}{h_{\beta_1, \beta_2}^2} \right\|_{L^\infty(\Sigma \setminus (-n, n) \times \mathcal{C})} &\rightarrow 0, \\ \left\| (f' \xi'_1 + g' \xi'_2) \frac{\partial_t h^2}{4h^4} - (\beta_1 \xi'_1 + \beta_2 \xi'_2) \frac{(h_{\beta_1, \beta_2}^2)'}{4h_{\beta_1, \beta_2}^4} \right\|_{L^\infty(\Sigma \setminus (-n, n) \times \mathcal{C})} &\rightarrow 0, \\ \left\| \frac{f' \xi'_1 + g' \xi'_2}{h^2} - \frac{\beta_1 \xi'_1 + \beta_2 \xi'_2}{h_{\beta_1, \beta_2}^2} \right\|_{L^\infty(\Sigma \setminus (-n, n) \times \mathcal{C})} &\rightarrow 0, \\ \left\| (1 + (f')^2 + (g')^2) \frac{\partial_t h^2}{4h^4} - (1 + \beta_1^2 + \beta_2^2) \frac{(h_{\beta_1, \beta_2}^2)'}{4h_{\beta_1, \beta_2}^4} \right\|_{L^\infty(\Sigma \setminus (-n, n) \times \mathcal{C})} &\rightarrow 0, \\ \left\| (1 + (f')^2 + (g')^2) \left(\frac{\partial_t h^2}{4h^3} \right)^2 - (1 + \beta_1^2 + \beta_2^2) \left(\frac{(h_{\beta_1, \beta_2}^2)'}{4h_{\beta_1, \beta_2}^3} \right)^2 \right\|_{L^\infty(\Sigma \setminus (-n, n) \times \mathcal{C})} &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

quanto $n \rightarrow \infty$. Assim, desde que $\text{supp } \psi'_n, \text{supp } \partial_t \psi_n \subseteq \text{supp } \psi_n$ e $\|(\hat{H}_{\beta_1, \beta_2} - \lambda \mathbf{1}) \psi_n\|_{-1} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, de (ii) no Lema 5.1, segue de (5.13) e (5.11) que $\|(\hat{H}_{f', g'} - \lambda \mathbf{1}) \psi_n\|_{-1} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Portanto, $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(\hat{H}_{f', g'})$. De modo análogo, obtemos a inclusão $\sigma_{\text{ess}}(\hat{H}_{f', g'}) \subset \sigma_{\text{ess}}(\hat{H}_{\beta_1, \beta_2})$ \square

Como uma consequência da Proposição 5.2 a partir de agora estudaremos o espectro do operador $\hat{H}_{\beta_1, \beta_2}$ em lugar do operador $\hat{H}_{f', g'}$. Logo, falta determinar o espectro (essencial) do operador $\hat{H}_{\beta_1, \beta_2}$.

Proposição 5.3. *O espectro do operador $\hat{H}_{\beta_1, \beta_2}$ é puramente essencial e é igual ao intervalo $[E_1(0), \infty)$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{F}_x: L^2(\Sigma) \rightarrow L^2(\Sigma)$ a transformada de Fourier parcial na variável longitudinal x . \mathcal{F}_x é um operador unitário e, para as funções $\psi \in L^1(\Sigma)$, sua expressão explícita é dada por

$$(\mathcal{F}_x \psi)(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} \psi(x, t) dx.$$

Consideremos o operador $\tilde{H}_{\beta_1, \beta_2} := \mathcal{F}_x \hat{H}_{\beta_1, \beta_2} \mathcal{F}_x^{-1}$ o qual admite uma decomposição direta integral

$$\tilde{H}_{\beta_1, \beta_2} = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \hat{H}_{\beta_1, \beta_2}(p) dp,$$

em que, para cada $p \in \mathbb{R}$, no sentido de distribuição,

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\beta_1, \beta_2}(p) &= -\frac{1}{h_{\beta_1, \beta_2}^2} (ip)^2 + 2ip \frac{(\beta_1 \xi'_1 + \beta_2 \xi'_2)}{h_{\beta_1, \beta_2}^2} \partial_t \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{1 + \beta_1^2 + \beta_2^2}{h_{\beta_1, \beta_2}^2} \right) \partial_t \right] + (1 + \beta_1^2 + \beta_2^2) \left[\left(\frac{(h_{\beta_1, \beta_2}^2)'}{4h_{\beta_1, \beta_2}^4} \right)' + \left(\frac{(h_{\beta_1, \beta_2}^2)'}{4h_{\beta_1, \beta_2}^3} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

$\text{dom } \hat{H}_{\beta_1, \beta_2}(p) = \{v \in \mathcal{H}^1(\mathcal{C}) : \hat{H}_{\beta_1, \beta_2}(p)v \in L^2(\mathcal{C}), v'(0) = v'(1)\}$; se $p = 0$ obtemos T_{β_1, β_2} definido em (5.10). Desde que

$$\sigma(\hat{H}_{\beta_1, \beta_2}) = \bigcup_{p \in \mathbb{R}} \sigma(\hat{H}_{\beta_1, \beta_2}(p)), \quad (5.14)$$

a estratégia é estudar a família de operadores $\{\hat{H}_{\beta_1, \beta_2}(p) : p \in \mathbb{R}\}$. Pela compacidade do mergulho $\mathcal{H}^1(\mathcal{C}) \hookrightarrow L^2(\mathcal{C})$, cada $\hat{H}_{\beta_1, \beta_2}(p)$ possui espectro puramente discreto. Em particular, denote por $\{E_n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência não decrescente de autovalores de $\hat{H}_{\beta_1, \beta_2}(0) = T_{\beta_1, \beta_2}$. Note que,

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\beta_1, \beta_2}(p) &= -\frac{1 + \beta_1^2 + \beta_2^2}{h_{\beta_1, \beta_2}^2} \left(\partial_t - i \frac{p(\beta_1 \xi_1' + \beta_2 \xi_2')}{1 + \beta_1^2 + \beta_2^2} \right)^2 - \frac{p^2(\beta_1 \xi_1' + \beta_2 \xi_2')^2}{h_{\beta_1, \beta_2}^2(1 + \beta_1^2 + \beta_2^2)} + \frac{p^2}{h_{\beta_1, \beta_2}^2} \\ &\quad - \left(\frac{1 + \beta_1^2 + \beta_2^2}{h_{\beta_1, \beta_2}^2} \right)' \partial_t + (1 + \beta_1^2 + \beta_2^2) \left[\left(\frac{(h_{\beta_1, \beta_2}^2)'}{4h_{\beta_1, \beta_2}^4} \right)' + \left(\frac{(h_{\beta_1, \beta_2}^2)'}{4h_{\beta_1, \beta_2}^3} \right)^2 \right] \\ &= -\frac{1 + \beta_1^2 + \beta_2^2}{h_{\beta_1, \beta_2}^2} \left(\partial_t - i \frac{p(\beta_1 \xi_1' + \beta_2 \xi_2')}{1 + \beta_1^2 + \beta_2^2} \right)^2 + \frac{p^2}{1 + \beta_1^2 + \beta_2^2} \\ &\quad - \left(\frac{1 + \beta_1^2 + \beta_2^2}{h_{\beta_1, \beta_2}^2} \right)' \partial_t + (1 + \beta_1^2 + \beta_2^2) \left[\left(\frac{(h_{\beta_1, \beta_2}^2)'}{4h_{\beta_1, \beta_2}^4} \right)' + \left(\frac{(h_{\beta_1, \beta_2}^2)'}{4h_{\beta_1, \beta_2}^3} \right)^2 \right] \\ &= e^{i\gamma(p)t} \left[T_{\beta_1, \beta_2} + \frac{p^2}{1 + \beta_1^2 + \beta_2^2} \right] e^{-i\gamma(p)t}, \end{aligned}$$

em que

$$\gamma(p) := \frac{p(\beta_1 \xi_1' + \beta_2 \xi_2')}{1 + \beta_1^2 + \beta_2^2}.$$

Consequentemente,

$$\sigma(\hat{H}_{\beta_1, \beta_2}(p)) = \left\{ E_n(0) + \frac{p^2}{1 + \beta_1^2 + \beta_2^2} \right\}_{n \in \mathbb{N}}. \quad (5.15)$$

Por tanto, de (5.14) e (5.15), obtemos o resultado desejado. \square

Das Proposições 5.2 e 5.3 segue o seguinte resultado.

Proposição 5.4. *Suponha as condições em (5.5). Então, $\sigma_{\text{ess}}(-\Delta_S) = [E_1(0), \infty)$.*

5.4 Espectro discreto

Defina, para todo $x \in \mathbb{R}$, as funções

$$A(x) := \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{h^2} |\chi|^2 dt, \quad B(x) := \int_{\mathcal{C}} \left[(f' \xi_1' + g' \xi_2') \frac{\partial_t h^2}{2h^4} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{f' \xi_1' + g' \xi_2'}{h^2} \right) - \frac{\partial_x h^2}{2h^4} \right] |\chi|^2 dt,$$

$$C(x) := \int_{\mathcal{C}} \left[\left(\frac{\partial_x h^2}{4h^3} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial t} \left((f' \xi_1' + g' \xi_2') \frac{\partial_x h^2}{4h^4} \right) - (f' \xi_1' + g' \xi_2') \frac{\partial_x h^2 \partial_t h^2}{8h^6} \right] |\chi|^2 dt,$$

$$D(x) := \int_{\mathcal{C}} \left(\frac{1}{h^2} |\chi'|^2 + \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial_t h^2}{4h^4} \right) + \left(\frac{\partial_t h^2}{4h^3} \right)^2 \right] |\chi|^2 \right) dt,$$

a constante

$$E := \int_{\mathcal{C}} \left(\frac{1}{h_{\beta_1, \beta_2}^2} |\chi'|^2 + \left[\left(\frac{(h_{\beta_1, \beta_2}^2)'}{4h_{\beta_1, \beta_2}^4} \right)' + \left(\frac{(h_{\beta_1, \beta_2}^2)'}{4h_{\beta_1, \beta_2}^3} \right)^2 \right] |\chi|^2 \right) dt,$$

e a função

$$V(x) := C(x) + (1 + (f')^2 + (g')^2)D(x) - (1 + \beta_1^2 + \beta_2^2)E, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Proposição 5.5. *Suponha as condições em (5.5), $V(x) \in L^1(\mathbb{R})$ e $\int_{\mathbb{R}} V(x) < 0$. Então,*

$$\inf \sigma(-\Delta_S) < E_1(0),$$

isto é, $\sigma_{dis}(-\Delta_S) \neq \emptyset$.

Demonstração. Considere a forma quadrática

$$\hat{q}_{f',g'}(\psi) = \hat{Q}_{f',g'}(\psi) - E_1(0) \|\psi\|_{L^2(\Sigma)}^2, \quad \text{dom } \hat{q}_{f',g'} = \text{dom } \hat{Q}_{f',g'}. \quad (5.16)$$

De acordo com (1.2) e a Proposição 5.4, é suficiente mostrar que existe uma função $\psi \in \text{dom } \hat{q}_{f',g'} \setminus \{0\}$ tal que $\hat{q}_{f',g'}(\psi) < 0$. Construiremos tal função nos parágrafos abaixo.

O primeiro passo é construir uma sequência $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{dom } \hat{q}_{f',g'}$ tal que $\hat{q}_{f',g'}(\psi_n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Para isto, seja $w \in C^\infty(\mathbb{R})$ uma função real tal que $w = 1$ para $x \in [-1, 1]$, e $w = 0$ para $x \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2]$. Defina, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n(x) = w\left(\frac{x}{n}\right) \quad \text{e} \quad \psi_n(x, t) = w_n(x)\chi(t),$$

em que χ denota a autofunção normalizada correspondente ao primeiro autovalor $E_1(0)$.

Em particular,

$$\int_{\mathbb{R}} |w'_n|^2 dx = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} |w'|^2 dx \rightarrow 0, \quad \text{as } n \rightarrow \infty, \quad (5.17)$$

e

$$\int_C (1 + \beta_1^2 + \beta_2^2) \left(\frac{|\chi'|^2}{h_{\beta_1, \beta_2}^2} + \left[\left(\frac{(h_{\beta_1, \beta_2}^2)'}{4h_{\beta_1, \beta_2}^4} \right)' + \left(\frac{(h_{\beta_1, \beta_2}^2)'}{4h_{\beta_1, \beta_2}^3} \right)^2 \right] |\chi|^2 \right) dt = E_1(0). \quad (5.18)$$

De (5.18), segue que

$$\begin{aligned} \hat{q}_{f',g'}(\psi_n) &= \hat{Q}_{f',g'}(\psi_n) - E_1(0) \|\psi_n\|_{L^2(\Sigma)}^2 \\ &= \int_{\Sigma} \left[\frac{|w'_n|^2 |\chi|^2}{h^2} - \frac{\partial_x h^2}{2h^4} w_n w'_n |\chi|^2 - \frac{2(f' \xi'_1 + g' \xi'_2)}{h^2} \left(w'_n \chi w_n \chi' - \frac{\partial_t h^2}{4h^2} w_n w'_n |\chi|^2 \right) \right. \\ &\quad + \left(\frac{\partial_x h^2}{4h^3} \right)^2 |w_n|^2 |\chi|^2 + (f' \xi'_1 + g' \xi'_2) \left(\frac{\partial_x h^2}{2h^4} |w_n|^2 \chi \chi' - \frac{\partial_x h^2 \partial_t h^2}{8h^6} |w_n|^2 |\chi|^2 \right) \\ &\quad \left. + (1 + (f')^2 + (g')^2) \left(\frac{|w_n|^2 |\chi|^2}{h^2} + \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial_t h^2}{4h^4} \right) + \left(\frac{\partial_t h^2}{4h^3} \right)^2 \right] |w_n|^2 |\chi|^2 \right) \right] dx dt \\ &\quad - \int_{\Sigma} (1 + \beta_1^2 + \beta_2^2) \left(\frac{|w_n|^2 |\chi'|^2}{h_{\beta_1, \beta_2}^2} + \left[\left(\frac{(h_{\beta_1, \beta_2}^2)'}{4h_{\beta_1, \beta_2}^4} \right)' + \left(\frac{(h_{\beta_1, \beta_2}^2)'}{4h_{\beta_1, \beta_2}^3} \right)^2 \right] |w_n|^2 |\chi|^2 \right) dx dt. \end{aligned}$$

Note que,

$$\begin{aligned} \int_C \frac{2(f' \xi'_1 + g' \xi'_2)}{h^2} \chi \chi' dt &= - \int_C \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{f' \xi'_1 + g' \xi'_2}{h^2} \right) |\chi|^2 dt, \\ \int_C (f' \xi'_1 + g' \xi'_2) \frac{\partial_x h^2}{2h^2} \chi \chi' dt &= - \int_C \frac{\partial}{\partial t} \left((f' \xi'_1 + g' \xi'_2) \frac{\partial_x h^2}{4h^2} \right) |\chi|^2 dt. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\hat{q}_{f',g'}(\psi_n) &= \int_{\mathbb{R}} A(x)|w'_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} B(x)w_n w'_n dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} (C(x) + (1 + (f')^2 + (g')^2)D(x) - (1 + \beta_1^2 + \beta_2^2)E) |w_n|^2 dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} A(x)|w'_n|^2 dx + \left(\int_{\mathbb{R}} |B(x)|^2 |w_n|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |w'_n|^2 dx \right)^{1/2} + \int_{\mathbb{R}} V(x)|w_n|^2 dx.\end{aligned}$$

Assim, de (5.17) e desde que $\|w_n\|_{\infty} \leq 1$ e $\int_{\mathbb{R}} V(x)dx < 0$, pelo teorema da convergência dominada, segue que

$$\hat{q}_{f',g'}(\psi_n) \rightarrow \int_{\mathbb{R}} V(x)dx, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Logo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\hat{q}_{f',g'}(\psi_N) < 0$. □

Observemos que, a condição $\int_{\mathbb{R}} V(x)dx < 0$ implica a existência de autovalores discretos para $-\Delta_S$. Porém, não é uma condição necessária para que isso aconteça. Por exemplo,

Proposição 5.6. *Suponha as condições em (5.5), $V(x), B(x) \in L^1(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} V(x) = 0$ e $B(x)$ não constante. Então,*

$$\inf \sigma(-\Delta_S) < E_1(0),$$

isto é, $\sigma_{dis}(-\Delta_S) \neq \emptyset$.

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{R}$, considere w_n e ψ_n como na demonstração da Proposição 5.5. No entanto, adicionamos uma pequena perturbação, com $\varepsilon \in \mathbb{R}$, e definimos

$$\psi_{n,\varepsilon}(x,t) := \psi_n(x,t) + \varepsilon \phi(x,t),$$

para algum $\phi \in \text{dom } \hat{q}_{\beta}$. Neste caso,

$$\hat{q}_{f',g'}(\psi_{n,\varepsilon}) = \hat{q}_{f',g'}(\psi_n) + 2\varepsilon \text{Re}(\hat{q}_{f',g'}(\psi_n, \phi)) + \varepsilon^2 \hat{q}_{f',g'}(\phi).$$

A estratégia é mostrar que existe ϕ satisfazendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{q}_{f',g'}(\psi_n, \phi) \neq 0. \tag{5.19}$$

De fato, se (5.19) é válida, é suficiente escolher ε tal que $\hat{q}_{f',g'}(\psi_{n,\varepsilon}) < 0$, para algum n suficientemente grande.

Considere $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, com $\text{supp } \eta \subset (-1, 1)$. Definimos $\phi(x, t) = \eta(x)\chi(t)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\hat{q}_{f',g'}(\psi_n, \phi) &= \int_{\Sigma} \frac{1}{h^2} \left(\psi_n - \frac{\partial_x h^2}{4h^2} \psi_n - (f' \xi_1' + g' \xi_2') \left[\partial_t \psi_n - \frac{\partial_t h^2}{4h^2} \psi_n \right] \right) \left(\phi - \frac{\partial_x h^2}{4h^2} \phi - (f' \xi_1' + g' \xi_2') \left[\partial_t \phi - \frac{\partial_t h^2}{4h^2} \phi \right] \right) dx dt \\
&\quad + \int_{\Sigma} \left(\partial_t \psi_n - \frac{\partial_t h^2}{4h^2} \psi_n \right) \left(\partial_t \phi - \frac{\partial_t h^2}{4h^2} \phi \right) dx dt - E_1(0) \int_{\Sigma} \psi_n \phi dx dt \\
&= \int_{\Sigma} \frac{1}{h^2} \left(w_n' \eta' |\chi|^2 - \frac{\partial_x h^2}{4h^2} w_n' \eta |\chi|^2 - (f' \xi_1' + g' \xi_2') w_n' \chi \left[\eta \chi' - \frac{\partial_t h^2}{4h^2} \eta \chi \right] \right. \\
&\quad - \frac{\partial_x h^2}{4h^2} w_n \eta' |\chi|^2 + \frac{\partial_x h^2}{4h^2} \frac{\partial_x h^2}{4h^2} w_n \eta |\chi|^2 + (f' \xi_1' + g' \xi_2') \frac{\partial_x h^2}{4h^2} w_n \chi \left[\eta \chi' - \frac{\partial_t h^2}{4h^2} \eta \chi \right] \\
&\quad \left. - (f' \xi_1' + g' \xi_2') \left[w_n \chi' \eta' \chi - \frac{\partial_t h^2}{4h^2} w_n \eta' |\chi|^2 - \frac{\partial_x h^2}{4h^2} w_n \chi' \eta \chi + \frac{\partial_x h^2}{4h^2} \frac{\partial_t h^2}{4h^2} w_n \eta |\chi|^2 \right] \right) dx dt \\
&\quad + \int_{\Sigma} \frac{(1 + (f')^2 + (g')^2)}{h^2} \left(w_n \chi' - \frac{\partial_t h^2}{4h^2} w_n \chi \right) \left(\eta \chi' - \frac{\partial_t h^2}{4h^2} \eta \chi \right) dx dt - E_1(0) \int_{\Sigma} w_n \eta |\chi|^2 dx dt \\
&\rightarrow \int_{\Sigma} \eta' \left[-\frac{\partial_x h^2}{4h^4} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{f' \xi_1' + g' \xi_2'}{2h^2} \right) + (f' \xi_1' + g' \xi_2') \frac{\partial_t h^2}{4h^4} \right] |\chi|^2 dx dt \\
&\quad + \int_{\Sigma} \eta \left[\left(\frac{\partial_x h^2}{4h^3} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial t} \left((f' \xi_1' + g' \xi_2') \frac{\partial_x h^2}{4h^4} \right) - (f' \xi_1' + g' \xi_2') \frac{\partial_x h^2 \partial_t h^2}{8h^6} \right] |\chi|^2 dx dt \\
&\quad + \int_{\Sigma} \frac{(1 + (f')^2 + (g')^2)}{h^2} \eta \left(\chi' - \frac{\partial_t h^2}{4h^2} \chi \right)^2 dx dt - E(0) \int_{\Sigma} \eta |\chi|^2 dx dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \eta' \frac{B(x)}{2} dx + \int_{\mathbb{R}} \eta V(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(V(x) - \frac{B'(x)}{2} \right) dx
\end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$. Se a última integral é zero para todo $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, deveríamos ter $V(x) - B'(x)/2 = 0$, q.t.p., o que implica que $B(x) = 2 \int_{\mathbb{R}} V(x) dx + C = C$, o que é uma contradição, pois por hipóteses $B(x)$ não é constante. Portanto, existe uma função ϕ satisfazendo (5.19). \square

Autovalores e autofunções do Operador Laplaciano

Neste apêndice mostraremos algumas propriedades dos autovalores do Laplaciano em domínios simples.

A.1 Caso unidimensional

Proposição A.1. *Seja $\Omega = (0, L)$ um intervalo, então os autovalores e autofunções do Operador Laplaciano com condições de contorno de Dirichlet são:*

$$\lambda_n := \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 n^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

as autofunções correspondentes são

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n}x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Dado o problema de autovalores do operador Laplaciano de Dirichlet no intervalo Ω

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda u(x), & \text{em } \Omega, \\ u(0) = u(L) = 0, \end{cases}$$

note que a equação característica de $-u''(x) = \lambda u(x)$ é $r^2 + \lambda = 0$. Para $\lambda > 0$, tem como solução $r = \pm\sqrt{\lambda}i$, assim a solução de $-u''(x) = \lambda u(x)$ é

$$u(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x),$$

em que A, B são constantes arbitrárias. Da condição de contorno, tem-se que $A = 0$ e $\lambda = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 n^2$, para $n \in \mathbb{N}$. Daí, temos um número infinito de autovalores $\lambda_n = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 n^2$ com suas correspondentes autofunções

$$u_n(x) = B \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n}x),$$

em que B é arbitrário, para $n \in \mathbb{N}$.

Mostremos que não existem outros autovalores. Observemos que se $\lambda = 0$ é um autovalor, nosso problema de autovalores torna-se

$$\begin{cases} -u''(x) = 0, & \text{em } (0, L), \\ u(0) = u(L) = 0, \end{cases}$$

As soluções desta EDO são

$$u(x) = Cx + D,$$

em que C, D são constantes arbitrárias. Da condição de contorno, tem-se que $C = D = 0$. Portanto, a única função u que satisfaz o PVI é $u(x) = 0$, para todo $x \in (0, L)$. Por definição, a função zero não é uma autofunção.

Agora, suponhamos que $\lambda = -\gamma^2$ é um autovalor do PVI, neste caso, nosso problema de autovalores torna-se

$$\begin{cases} -u''(x) = -\gamma^2 u(x), & \text{em } (0, L), \\ u(0) = u(L) = 0, \end{cases}$$

As soluções desta EDO são

$$u(x) = E \cosh(\gamma x) + F \sinh(\gamma x),$$

em que E, F são constantes arbitrárias. Da condição de contorno, tem-se que $E = F = 0$. Portanto, a única função u que satisfaz o PVI é $u(x) = 0$, para todo $x \in (0, L)$. Por definição, a função zero não é uma autofunção.

Para finalizar, desde que,

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{L^2(0,L)}^2 &= \int_0^L |u_n(x)|^2 dx = \int_0^L |B \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n} x)|^2 dx \\ &= B^2 \int_0^L \operatorname{sen}^2(\sqrt{\lambda_n} x) dx = \frac{B^2}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^{\sqrt{\lambda_n} L} \operatorname{sen}^2(t) dt \\ &= \frac{B^2}{\sqrt{\lambda_n}} \left[\frac{1}{2} t - \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2t) \right] \Big|_0^{\sqrt{\lambda_n} L} = \frac{B^2 L}{2} - \frac{B^2}{4\sqrt{\lambda_n}} \operatorname{sen}(2\sqrt{\lambda_n} L) \\ &= \frac{B^2 L}{2} - \frac{B^2}{\frac{4n\pi}{L}} \operatorname{sen}(2n\pi) = \frac{B^2 L}{2}, \end{aligned}$$

pela normalização de u_n , isto é, $\|u_n\|_{L^2(0,L)} = 1$, segue que $B = \sqrt{2/L}$. Portanto, para $n \in \mathbb{N}$

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right).$$

□

Observação A.2. Os autovalores do Laplaciano para o problema de Neumann no caso unidimensional

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda u(x), & \text{em } (0, L), \\ u'(0) = u'(L) = 0, \end{cases}$$

são

$$\lambda_n := \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 n^2, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

e as autofunções correspondentes são

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos(\sqrt{\lambda_n}x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

De fato, note que a equação característica de $-u''(x) = \lambda u(x)$ é $r^2 + \lambda = 0$. Para $\lambda > 0$, tem como solução $r = \pm\sqrt{\lambda}i$, assim a solução de $-u''(x) = \lambda u(x)$ é

$$u(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x),$$

em que A, B são constantes arbitrárias. Da condição de contorno, tem-se que $B = 0$ e $\lambda = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 n^2$, para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Daí, temos um número infinito de autovalores $\lambda_n = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 n^2$ com suas correspondentes autofunções

$$u_n(x) = A \cos(\sqrt{\lambda_n}x),$$

em que A é arbitrário, para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

De modo análogo, ao caso Dirichlet, é possível mostrar que não existem outros autovalores. Além disso, pela normalização de u_n , segue que $A = 1/\sqrt{L}$, para $n = 0$ e $A = \sqrt{2/L}$, para $n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}, \quad u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Observação A.3. $\mathcal{N}(b, E_1(\beta))$ é finito, De fato, seja

$$a(f) = -Cf'' + (E_1(\beta) - \mathbf{1}_{[M, 2M]})f, \quad (\text{A.1})$$

em que $C = 1 - \frac{2\kappa\beta}{\varepsilon} > 0$, o operador autoadjunto unidimensional associado à forma quadrática b definida em (2.24). Desde que,

$$a = -Cf'' + V(x)f, \quad \text{com} \quad V(x) = \begin{cases} E_1(\beta) - 1, & \text{se } x \in (M, 2M), \\ E_1(\beta), & \text{se } x \in (2M, \infty), \end{cases}$$

tem-se,

$$a \geq \left(-C\Delta_{(M, 2M)}^{DN} + (E_1(\beta) - 1)\mathbf{1}\right) \oplus \left(-C\Delta_{(2M, \infty)}^N + E_1(\beta)\mathbf{1}\right),$$

logo,

$$\inf \sigma(a) \geq \inf \left(\sigma \left(-C\Delta_{(M, 2M)}^{DN} + (E_1(\beta) - 1)\mathbf{1} \right) \cup \sigma \left(-C\Delta_{(2M, \infty)}^N + E_1(\beta)\mathbf{1} \right) \right).$$

Daí,

$$\mathcal{N}(q_R, E_1(\beta)) \leq \mathcal{N} \left(\left(-C\Delta_{(R, 2R)}^{DN} + (E_1^S(\beta) - 1)\mathbf{1} \right), E_1(\beta) \right),$$

pois, $\inf \sigma \left(-C\Delta_{(2R, \infty)}^N + E_1^S(\beta)\mathbf{1} \right) > E_1^S(\beta)$.

Dado o seguinte problema de Dirichlet-Neumann

$$\begin{cases} -C\psi''(x) + (E_1(\beta) - 1)\psi(x) = \lambda \psi(x), & \text{em } (M, 2M), \\ \psi(M) = \psi'(2M) = 0, \end{cases}$$

cuja equação característica é

$$Cr^2 + \lambda - E_1(\beta) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 = -\frac{\lambda - E_1(\beta) + 1}{C},$$

a qual tem como solução

$$r = \pm \sqrt{\frac{\lambda - E_1(\beta) + 1}{C}} i,$$

para $\lambda - E_1(\beta) + 1 > 0$, assim a solução de $-\left(1 - \frac{2\kappa\beta}{\varepsilon}\right) \psi''(x) + (E_1(\beta) - 1)\psi(x) = \lambda \psi(x)$ é da forma

$$\psi(x) = A \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda - E_1(\beta) + 1}{C}} x\right) + B \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{\lambda - E_1(\beta) + 1}{C}} x\right),$$

em que A, B são constantes arbitrárias.

Das condições de contorno,

$$\begin{aligned} -A \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda - E_1(\beta) + 1}{C}} M\right) &= B \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{\lambda - E_1(\beta) + 1}{C}} M\right), \\ B \cos^2\left(\sqrt{\frac{\lambda - E_1(\beta) + 1}{C}} M\right) &= 0. \end{aligned}$$

Se $B = 0$,

$$\psi(s) = A \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda_j - E_1(\beta) + 1}{C}} x\right),$$

em que $\lambda_j = C \left(\frac{\pi}{M}\right)^2 \left(j - \frac{1}{2}\right)^2 + E_1(\beta) - 1$ denota os autovalores discretos do operador $-C\Delta_{(M,2M)}^{DN} + (E_1(\beta) - 1)\mathbf{1}$, para $j \in \{1, 2, 3, \dots\}$, e A é uma constante arbitrária não nula. No caso $B \neq 0$, não tem-se solução.

Assim, para todo $M > M_0$, tem-se que $\mathcal{N}(b, E_1(\beta))$ é finito.

A.2 Caso 2-dimensional

Proposição A.4. *Seja $\Omega = (0, L) \times (0, l)$ um retângulo plano, então os autovalores e autofunções do Operador $T(\beta) = -u_{xx} - (1 + \beta^2)u_{yy}$ com condições de contorno de Dirichlet são:*

$$\begin{aligned} \lambda_{m,n} &= \pi^2 \left(\frac{m^2}{L^2} + (1 + \beta^2) \frac{n^2}{l^2} \right), \\ u_{m,n}(x, y) &= \frac{2}{\sqrt{Ll}} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l} y\right), \end{aligned}$$

para $m, n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Dado o problema de autovalores do operador $T(\beta)$ de Dirichlet na região retangular Ω

$$\begin{cases} T(\beta)u(x, y) = -u_{xx} - (1 + \beta^2)u_{yy} = \lambda u(x, y), & \text{em } \Omega, \\ u(x, y) = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo método de separação de variáveis, começamos procurando u da forma $u(x, y) = X(x)Y(y)$, derivando, tem-se

$$u_{xx} = X''(x)Y(y), \quad u_{yy} = X(x)Y''(y),$$

substituindo em $T(\beta)u(x, y) = \lambda u(x, y)$ e dividindo por $X(x)Y(y)$, obtemos

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = (1 + \beta^2)\frac{Y''(y)}{Y(y)} + \lambda.$$

Note que, o lado esquerdo depende unicamente de x , o lado direito depende unicamente de y , e λ é um autovalor em \mathbb{R} . Assim, esta equação pode ser cumprida somente se ambos os lados são constantes, isto é,

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = (1 + \beta^2)\frac{Y''(y)}{Y(y)} + \lambda = \mu, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

A partir daí, obtemos duas EDO's independentes

$$\begin{cases} X''(x) + \mu X(x) = 0, \\ Y''(y) + \left(\frac{\lambda - \mu}{1 + \beta^2}\right) Y(y) = 0. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Impondo as condições de contorno $u(0, y) = u(L, y) = 0$, obtemos $X(0) = X(L) = 0$, ou seja, temos o nosso conhecido problema de autovalores no caso unidimensional

$$\begin{cases} -X''(x) = \mu X(x), & \text{em } (0, L), \\ X(0) = X(L) = 0, \end{cases}$$

Se $\mu = \rho^2 > 0$, como foi mostrado na Observação A.1, $\mu_m = (m\pi/L)^2$ e $X_m(x) = \sqrt{2/L} \text{sen}(m\pi x/L)$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Agora, precisamos resolver nossa equação para Y . Em particular, temos que resolver

$$Y''(y) + \gamma Y(y) = 0,$$

em que $\gamma = \frac{\lambda - \mu}{1 + \beta^2}$. Impondo as condições de contorno $u(x, 0) = u(x, l) = 0$, obtemos $Y(0) = Y(l) = 0$, isto nos leva ao seguinte problema de autovalores

$$\begin{cases} -Y''(y) = \gamma Y(y), & \text{em } (0, l), \\ Y(0) = Y(l) = 0, \end{cases}$$

Se $\gamma = \iota^2 > 0$, como foi mostrado na Observação A.1, $\gamma_n = (n\pi/l)^2$ e $Y_n(y) = \sqrt{2/l} \text{sen}(n\pi y/l)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, os autovalores e correspondentes autofunções são dadas por

$$\lambda_{m,n} = \mu_m + (1 + \beta^2)\gamma_n = \pi^2 \left(\frac{m^2}{L^2} + (1 + \beta^2)\frac{n^2}{l^2} \right),$$

$$u_{m,n}(x, y) = X_m(x)Y_n(y) = \frac{2}{\sqrt{Ll}} \text{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{l}y\right),$$

para $m, n \in \mathbb{N}$. □

A.3 Caso 3-dimensional

Proposição A.5. *Seja $\Omega = (0, a) \times (0, b) \times (0, c)$ um paralelepípedo, então os autovalores e autofunções do Operador Laplaciano com condições de contorno de Dirichlet são:*

$$\lambda_{l,m,n} = \pi^2 \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \right),$$

$$u_{l,m,n}(x, y, z) = C_{l,m,n} \operatorname{sen} \left(\frac{l\pi}{a} x \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{b} y \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{c} z \right),$$

para $l, m, n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Dado o problema de autovalores do operador Laplaciano de Dirichlet na região Ω

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y, z) = -u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} = \lambda u(x, y, z), & \text{em } \Omega, \\ u(x, y, z) = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo método de separação de variáveis, começamos procurando u da forma $u(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$, derivando, tem-se

$$u_{xx} = X''(x)Y(y)Z(z), \quad u_{yy} = X(x)Y''(y)Z(z), \quad u_{zz} = X(x)Y(y)Z''(z),$$

substituindo em $-\Delta u(x, y) = \lambda u(x, y)$ e dividindo por $X(x)Y(y)$, obtemos

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} + \lambda.$$

Note que, cada termo é uma função separada de x , y , e z . Desde que as variáveis possam mudar de maneira arbitrária, tem-se

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} + \lambda = \mu, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Observemos que, impondo as condições de contorno $u(0, y, z) = u(a, y, z) = 0$, obtemos $X(0) = X(a) = 0$, ou seja, temos o nosso conhecido problema de autovalores no caso unidimensional

$$\begin{cases} -X''(x) = \mu X(x), & \text{em } (0, a), \\ X(0) = X(a) = 0, \end{cases}$$

Se $\mu = \rho^2 > 0$, como foi mostrado na Observação A.1, $\mu_l = (l\pi/a)^2$ e $X_l(x) = \sqrt{2/a} \operatorname{sen}(l\pi x/a)$, para todo $l \in \mathbb{N}$.

Agora, desde que

$$-\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \frac{Z''(z)}{Z(z)} + \lambda - \mu = \tau, \quad \tau \in \mathbb{R},$$

impondo as condições de contorno $u(x, 0, z) = u(x, b, z) = 0$, obtemos $Y(0) = Y(b) = 0$, isto nos leva ao seguinte problema de autovalores

$$\begin{cases} -Y''(y) = \tau Y(y), & \text{em } (0, b), \\ Y(0) = Y(b) = 0, \end{cases}$$

Se $\tau = \iota^2 > 0$, como foi mostrado na Observação A.1, $\tau_m = (m\pi/b)^2$ e $Y_m(y) = \sqrt{2/b}\text{sen}(m\pi y/b)$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Por último, precisamos resolver nossa equação para Z . Em particular, temos que resolver

$$Z''(z) + \gamma Z(z) = 0,$$

em que $\gamma = \lambda - \mu - \tau$. Impondo as condições de contorno $u(x, y, 0) = u(x, y, c) = 0$, obtemos $Z(0) = Z(c) = 0$, isto nos leva ao seguinte problema de autovalores

$$\begin{cases} -Z''(z) = \gamma Z(z), & \text{em } (0, c), \\ Z(0) = Z(c) = 0, \end{cases}$$

Se $\gamma = \varepsilon^2 > 0$, como foi mostrado na Observação A.1, $\gamma_n = (n\pi/c)^2$ e $Z_n(z) = \sqrt{2/c}\text{sen}(n\pi z/c)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, os autovalores e correspondentes autofunções são dadas por

$$\begin{aligned} \lambda_{l,m,n} &= \mu_l + \tau_m + \gamma_n = \pi^2 \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \right), \\ u_{l,m,n}(x, y, z) &= X_l(x)Y_m(y)Z_n(z) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{abc}} \text{sen} \left(\frac{l\pi}{a}x \right) \text{sen} \left(\frac{m\pi}{b}y \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi}{c}z \right), \end{aligned}$$

para $l, m, n \in \mathbb{N}$. □

Observação A.6. Dado o seguinte problema de autovalores com condições de contorno Dirichlet-Neumann na região $\Omega = (-a, 0) \times (0, 2b) \times (0, a)$

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y, z) = -u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} = \lambda u(x, y, z), & \text{em } \Omega, \\ u(x, y, 0) = u_z(x, y, a) = 0, & \text{para } (x, y) \in (-a, 0) \times (0, 2b) \\ u(-a, y, z) = u_x(0, y, z) = 0, & \text{para } (y, z) \in (0, 2b) \times (0, a) \\ u(x, 0, z) = u(x, 2b, z) = 0, & \text{para } (x, z) \in (-a, 0) \times (0, a). \end{cases}$$

Da demonstração da Proposição A.5, precisamos resolver os seguintes problemas de autovalores

$$\begin{cases} -X''(x) = \mu X(x), & \text{em } (-a, 0), \\ X(-a) = X'(0) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -Y''(y) = \tau Y(y), & \text{em } (0, 2b), \\ Y(0) = Y(2b) = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} -Z''(z) = \gamma Z(z), & \text{em } (0, a), \\ Z(0) = Z'(a) = 0, \end{cases}$$

Se, $\mu = \rho^2 > 0$, tem-se que

$$X(x) = A \cos(\rho x) + B \text{sen}(\rho x).$$

Das condições de contorno, segue que $B = 0$ e $\rho a = (l + 1/2)\pi$. Logo, pela normalização de X_l , segue que $A = \sqrt{2/a}$. Assim, para $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\mu_l = \frac{\pi^2}{a^2} \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{\pi^2}{4a^2} (2l + 1)^2, \quad \text{e} \quad X_l(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos(\sqrt{\mu_l}x).$$

Se, $\lambda - \mu = \tau = \iota^2 > 0$, tem-se que

$$Y(y) = A \cos(\iota y) + B \text{sen}(\iota y).$$

Das condições de contorno, segue que $A = 0$ e $2bl = m\pi$. Logo, pela normalização de Y_m , segue que $B = \sqrt{1/b}$. Assim, para $m \in \mathbb{N}$

$$\tau_m = \frac{\pi^2}{4b^2}m^2, \quad \text{e} \quad Y_m(y) = \frac{1}{\sqrt{b}}\text{sen}(\sqrt{\tau_m}y).$$

Por último, se $\lambda - \mu - \tau = \gamma = \varepsilon^2 > 0$, tem-se que

$$Z(z) = A\cos(\varepsilon z) + B\text{sen}(\varepsilon z).$$

Das condições de contorno, segue que $A = 0$ e $\varepsilon a = (n + 1/2)\pi$. Logo, pela normalização de Z_n , segue que $B = \sqrt{2/a}$. Assim, para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\gamma_n = \frac{\pi^2}{a^2} \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{\pi^2}{4a^2} (2n + 1)^2, \quad \text{e} \quad Z_n(z) = \sqrt{\frac{2}{a}}\text{sen}(\sqrt{\gamma_n}z).$$

Portanto, os autovalores e correspondentes autofunções são dadas por

$$\lambda_{l,m,n} = \mu_l + \tau_m + \gamma_n = \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{(2l+1)^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{(2n+1)^2}{a^2} \right),$$

$$u_{l,m,n}(x,y,z) = X_l(x)Y_m(y)Z_n(z) = \frac{2}{a\sqrt{b}} \cos\left(\frac{(2l+1)\pi}{2a}x\right) \text{sen}\left(\frac{\pi m}{2b}y\right) \text{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi}{2a}z\right),$$

para $m \in \mathbb{N}$ e $l, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Lista de códigos

Neste capítulo, apresentamos como exemplos, os códigos usados para gerar os resultados numéricos deste trabalho, através do software *Freefem++* [28].

Exemplo B.1. Elementos do espectro discreto do operador Laplaciano de Dirichlet na guia de onda retangular $\hat{\Omega}_\beta$, definida na Seção 2.4.

```

1 load "msh3"
2 load "medit"
3 int np=16;
4 int np2=64;
5 real t;
6 int L=1;
7 real beta=0.8;
8 real epsilon = pi;
9 // Mesh
10 border ba(t=-(epsilon*sqrt(2)*beta)/(4*sqrt(beta^2+1)), L){x=t; y=0; label=1;}
11 border bb(t=0, (epsilon*sqrt(2))/(4*sqrt(beta^2+1))){x=L; y=t; label=2;}
12 border bc(t=L,0){x=t; y=(epsilon*sqrt(2))/(4*sqrt(beta^2+1)); label=3;}
13 border bd(t=0,-(epsilon*sqrt(2)*beta)/(4*sqrt(beta^2+1))){x=t; y=(x/beta)
14 +(epsilon*sqrt(2))/(4*sqrt(beta^2+1)); label=4;}
15 mesh Th2 = buildmesh(ba(np*L+np) + bb(np) + bc(np*L)+ bd(np*L));
16 fespace Vh2(Th2,P1);
17 int[int] rup=[0,6], // label: upper face 0-> 1 (region -> label)
18 rdown=[0,5],// label: lower face 0-> 1 (region -> label)
19 rmid=[1,1,2,2,3,3,4,4];
20 real zmin=-epsilon*sqrt(2)/4,zmax=epsilon*sqrt(2)/4;
21 mesh3 Th=buildlayers(Th2, np2,
22 zbound=[zmin,zmax],
23 // region=r1,
24 labelmid=rmid,
25 reffaceup = rup,
26 reffacelow = rdown);
27 cout << "Th.nv=" << Th.nv << "Th.nt=" << Th.nt << endl;

```

```

28 fespace Vh(Th,P1);
29 Vh u1,u2;
30 Vh h = hTriangle;
31 cout << "size_of_mesh=" << h[].max << endl;
32 real sigma = 00; // value of the shift
33 macro Grad(u) [dx(u),dy(u),dz(u)] // EOM
34 varf a(u1,u2)= int3d(Th)( Grad(u1)'*Grad(u2) - sigma* u1*u2 )
35 + on(1,2,3,5,6,u1=0) ; // Boundary condition
36 varf b([u1],[u2]) = int3d(Th)( u1*u2 ) ; // no Boundary condition
37 matrix A= a(Vh,Vh,solver=sparsesolver),B= b(Vh,Vh);
38 int nev=20; // number of computed eigenvalue close to 0
39 real[int] ev(nev); // to store nev eigenvalue
40 Vh[int] eV(nev); // to store nev eigenvector
41 int k=EigenValue(A,B,sym=true,value=ev,vector=eV, tol=1e-10, maxit=0, ncv=0);
42 k=min(k,nev);
43 for (int i=0;i<k;i++){
44 u1=eV[i];
45 real gg = int3d(Th)(dx(u1)*dx(u1) + dy(u1)*dy(u1) + dz(u1)*dz(u1) );
46 real mm= int3d(Th)(u1*u1) ;
47 cout << "lambda[" << i << "]=" << ev[i] << ",_err=" << int3d(Th)(dx(u1)*dx(u1)
48 + dy(u1)*dy(u1) + dz(u1)*dz(u1) - (ev[i])*u1*u1) << endl;
49 }
50 medit("Omega_beta",Th);
51 plot(eV[0],cmm="ev"+0+"_v=" + ev[0],wait=1,value=1);

```

Exemplo B.2. Elementos do espectro discreto do operador Laplaciano de Dirichlet na guia de onda retangular com dois cantos $\Omega_{\beta,M}^2$, definida em (2.40).

```

1 load "msh3"
2 load "medit"
3 int np= 64;
4 int np2= 132;
5 real t;
6 int L=10;
7 real M=5;
8 real beta=0.7;
9 real epsilon = pi;
10 // Mesh for different region of the rectangle
11 //border cc(t=0,2*pi){x=(4+sin(4*t))*cos(t);y=(4+sin(4*t))*sin(t);label=1;}
12 //mesh Th2= buildmesh(cc(np));
13 mesh Th2= square(40,20,[2*epsilon*x,epsilon*y]);
14 fespace Vh2(Th2,P1);
15 int[int] rup=[0,6], // label: upper face 0-> 1 (region -> label)
16 rdown=[0,5],// label: lower face 0-> 1 (region -> label)
17 rmid=[1,1,2,2,3,3,4,4];
18 real zmin=-L, zmax=L+M;
19 func g = y -beta*z;
20 func q = y +beta*z;

```

```

21 func p= y-z*beta+2*M*beta;
22 func f = (z < 0)*g + (z >= 0 && z < M)*q + (z >= M)*p;
23 mesh3 Th=buildlayers(Th2,np2,
24 zbound=[zmin,zmax],
25 // region=r1,
26 labelmid=rmid,
27 reffaceup = rup,
28 reffacelow = rdown,
29 transfo=[z,x,f],
30 facemerge=1);
31 cout << "Th.:_nv_=" << Th.nv << "_nt_=" << Th.nt << endl;
32 fespace Vh(Th,P1);
33 Vh u1,u2;
34 Vh h = hTriangle;
35 cout << "size_of_mesh_=" << h[].max << endl;
36 real sigma = 00; // value of the shift
37 macro Grad(u) [dx(u),dy(u),dz(u)] // EOM
38 varf a(u1,u2)= int3d(Th)( Grad(u1)'*Grad(u2) - sigma*u1*u2 )
39 + on(1,2,3,4,5,6,u1=0) ; // Boundary condition
40 varf b([u1],[u2]) = int3d(Th)( u1*u2 ) ; // no Boundary condition
41 matrix A= a(Vh,Vh,solver=sparsesolver),
42 B= b(Vh,Vh);
43 int nev=15; // number of computed eigenvalue close to 0
44 real[int] ev(nev); // to store nev eigenvalue
45 Vh[int] eV(nev); // to store nev eigenvector
46 int k=EigenValue(A,B,sym=true,value=ev,vector=eV, tol=1e-10, maxit=0, ncv=0);
47 k=min(k,nev);
48 for (int i=0;i<k;i++){
49 u1=eV[i];
50 real gg = int3d(Th)(dx(u1)*dx(u1) + dy(u1)*dy(u1) + dz(u1)*dz(u1) );
51 real mm= int3d(Th)(u1*u1) ;
52 cout << "_lambda[" << i << "]=" << ev[i] << ",_err=" << int3d(Th)(dx(u1)*dx(u1)
53 + dy(u1)*dy(u1) + dz(u1)*dz(u1) - (ev[i])*u1*u1) << endl;
54 }
55 medit("2V-shaped_D_3D",Th);
56 plot(eV[0],cmm="ev"+_v_+ ev[0],wait=1,value=1);

```

Exemplo B.3. Elementos do espectro discreto do operador Laplaciano de Dirichlet na guia de onda retangular com três cantos $\Omega_{\beta,M}^3$, definida em (2.44).

```

1 load "msh3"
2 load "medit"
3 int np= 64;
4 int np2= 132;
5 real t;
6 int L=10;
7 real M=5;
8 real beta=0.7;

```

```

9  real epsilon = pi;
10 // Mesh for different region of the rectangle
11 //border cc(t=0,2*pi){x=(4+sin(4*t))*cos(t);y=(4+sin(4*t))*sin(t);label=1;}
12 //mesh Th2= buildmesh(cc(np));
13 mesh Th2= square(40,20,[2*epsilon*x,epsilon*y]);
14 fespace Vh2(Th2,P1);
15 int[int] rup=[0,6], // label: upper face 0-> 1 (region -> label)
16 rdown=[0,5],// label: lower face 0-> 1 (region -> label)
17 rmid=[1,1,2,2,3,3,4,4];
18 real zmin=-L, zmax=L+2*M;
19 func ag = y -beta*z;
20 func bg = y +beta*z;
21 func cg = y -beta*z+2*M*beta;
22 func dg = y +beta*z-2*M*beta;
23 func f = (z< 0)*ag + (z>=0 && z < M)*bg + (z>=M && z < 2*M)*cg + (z>=2*M)*dg;
24 mesh3 Th=buildlayers(Th2,np2,
25 zbound=[zmin,zmax],
26 // region=r1,
27 labelmid=rmid,
28 reffaceup = rup,
29 reffacelow = rdown,
30 transfo=[z,x,f],
31 facemerge=1);
32 cout << "Th._nv_=" << Th.nv << "._nt_=" << Th.nt << endl;
33 fespace Vh(Th,P1);
34 Vh u1,u2;
35 Vh h = hTriangle;
36 cout << "size_of_mesh_=" << h[].max << endl;
37 real sigma = 00; // value of the shift
38 macro Grad(u) [dx(u),dy(u),dz(u)] // EOM
39 varf a(u1,u2)= int3d(Th)( Grad(u1)'*Grad(u2) - sigma* u1*u2 )
40 + on(1,2,3,4,5,6,u1=0) ; // Boundary condition
41 varf b([u1],[u2]) = int3d(Th)( u1*u2 ) ; // no Boundary condition
42 matrix A= a(Vh,Vh,solver=sparsesolver),
43 B= b(Vh,Vh);
44 int nev=15; // number of computed eigenvalue close to 0
45 real[int] ev(nev); // to store nev eigenvalue
46 Vh[int] eV(nev); // to store nev eigenvector
47 int k=EigenValue(A,B,sym=true,value=ev,vector=eV, tol=1e-10, maxit=0, ncv=0);
48 k=min(k,nev);
49 for (int i=0;i<k;i++){
50 u1=eV[i];
51 real gg = int3d(Th)(dx(u1)*dx(u1) + dy(u1)*dy(u1) + dz(u1)*dz(u1) );
52 real mm= int3d(Th)(u1*u1) ;
53 cout << "lambda[" << i << "]=" << ev[i] << "._err_=" << int3d(Th)(dx(u1)*dx(u1)
54 + dy(u1)*dy(u1) + dz(u1)*dz(u1) - (ev[i])*u1*u1) << endl;
55 }
56 medit("3V-shaped_D_3D",Th);

```

```
57 plot(eV[0],cmm="ev_" + 0 + "_v_" + ev[0],wait=1,value=1);
```

Exemplo B.4. Elementos do espectro discreto do operador Laplaciano de Dirichlet na guia de onda retangular com quatro cantos $\Omega_{\beta,M}^4$, definida em (2.45).

```
1 load "msh3"
2 load "medit"
3 int np= 64;
4 int np2= 132;
5 real t;
6 int L=10;
7 real M=5;
8 real beta=0.7;
9 real epsilon = pi;
10 // Mesh for different region of the rectangle
11 //border cc(t=0,2*pi){x=(4+sin(4*t))*cos(t);y=(4+sin(4*t))*sin(t);label=1;}
12 //mesh Th2= buildmesh(cc(np));
13 mesh Th2= square(40,20,[2*epsilon*x,epsilon*y]);
14 fespace Vh2(Th2,P1);
15 int[int] rup=[0,6], // label: upper face 0-> 1 (region -> label)
16 rdown=[0,5],// label: lower face 0-> 1 (region -> label)
17 rmid=[1,1,2,2,3,3,4,4];
18 real zmin=-L, zmax=L+3*M;
19 func ag = y -beta*z;
20 func bg = y +beta*z;
21 func cg = y -beta*z+2*M*beta;
22 func dg = y +beta*z-2*M*beta;
23 func eg = y -beta*z+4*M*beta;
24 func f = (z < 0)*ag + (z >= 0 && z < M)*bg + (z >= M && z < 2*M)*cg
25 + (z >= 2*M && z < 3*M)*dg +(z >= 3*M)*eg;
26 mesh3 Th=buildlayers(Th2,np2,
27 zbound=[zmin,zmax],
28 // region=r1,
29 labelmid=rmid,
30 reffaceup = rup,
31 reffacelow = rdown,
32 transfo=[z,x,f],
33 facemerge=1);
34 cout << "Th.:_nv_" << Th.nv << "_nt_" << Th.nt << endl;
35 fespace Vh(Th,P1);
36 Vh u1,u2;
37 Vh h = hTriangle;
38 cout << "size_of_mesh_" << h[].max << endl;
39 real sigma = 00; // value of the shift
40 macro Grad(u) [dx(u),dy(u),dz(u)] // EOM
41 varf a(u1,u2)= int3d(Th)( Grad(u1)'*Grad(u2) - sigma* u1*u2 )
42 + on(1,2,3,4,5,6,u1=0) ; // Boundary condition
43 varf b([u1],[u2]) = int3d(Th)( u1*u2 ) ; // no Boundary condition
```

```

44 matrix A= a(Vh,Vh,solver=sparsesolver),
45 B= b(Vh,Vh);
46 int nev=15; // number of computed eigenvalue close to 0
47 real[int] ev(nev); // to store nev eigenvalue
48 Vh[int] eV(nev); // to store nev eigenvector
49 int k=EigenValue(A,B,sym=true,value=ev,vector=eV, tol=1e-10, maxit=0, ncv=0);
50 k=min(k,nev);
51 for (int i=0;i<k;i++){
52 u1=eV[i];
53 real gg = int3d(Th)(dx(u1)*dx(u1) + dy(u1)*dy(u1) + dz(u1)*dz(u1) );
54 real mm= int3d(Th)(u1*u1) ;
55 cout << "λi" << i << "]= " << ev[i] << ", err=" << int3d(Th)(dx(u1)*dx(u1)
56 + dy(u1)*dy(u1) + dz(u1)*dz(u1) - (ev[i])*u1*u1) << endl;
57 }
58 medit("4V-shaped_D_3D",Th);
59 plot(eV[0],cmm="ev"+i+"v"+ev[0],wait=1,value=1);

```

Exemplo B.5. Elementos do espectro discreto do operador Laplaciano de Dirichlet na guia de onda retangular com canto que depende de β , Γ_β , definida na Seção 3.3.

```

1 load "msh3"
2 load "medit"
3 int npoints= 16;
4 int npoints2= 64;
5 real t;
6 int L=5;
7 real beta=4.12;
8 real epsilon = pi;
9 // Mesh
10 border ba(t=-L, 0){x=t; y=-x*beta-epsilon*sqrt(1+beta^2); label=1;}
11 border bb(t=0, L){x=t; y=x*beta-epsilon*sqrt(1+beta^2); label=2;}
12 border bc(t=L*beta-epsilon*sqrt(1+beta^2), L*beta){x=L; y=t; label=3;}
13 border bd(t=L,0){x=t; y=x*beta; label=4;}
14 border be(t=0, -L){x=t; y=-x*beta; label=5;}
15 border bf(t=L*beta, L*beta-epsilon*sqrt(1+beta^2)){x=-L; y=t; label=6;}
16 mesh Th2 = buildmesh(ba(npoints*L) + bb(npoints*L) + bc(npoints)+ bd(npoints*L)+
17 be(npoints*L)+ bf(npoints));
18 fespace Vh2(Th2,P1);
19 int[int] rup=[0,1], // label: upper face 0-> 1 (region -> label)
20 rdown=[0,1],// label: lower face 0-> 1 (region -> label)
21 rmid=[1,1, 2,1, 3,1, 4,1, 5,1, 6,1];
22 real zmin=0,zmax=2*epsilon;
23 mesh3 Th=buildlayers(Th2,npoints2,
24 zbound=[zmin,zmax],
25 // region=r1,
26 labelmid=rmid,
27 reffaceup = rup,
28 reffacelow = rdown);

```

```

29 cout << "Th.:_nv_=" << Th.nv << "_nt_=" << Th.nt << endl;
30 fespace Vh(Th,P1);
31 Vh u1,u2;
32 Vh h = hTriangle;
33 cout << "size_of_mesh_=" << h[].max << endl;
34 real sigma = 00; // value of the shift
35 macro Grad(u) [dx(u),dy(u),dz(u)] // EOM
36 varf a(u1,u2)= int3d(Th)( Grad(u1)'*Grad(u2) - sigma* u1*u2 )
37 + on(1,u1=0.); // Boundary condition
38 varf b([u1],[u2]) = int3d(Th)( u1*u2 ); // no Boundary condition
39 matrix A= a(Vh,Vh,solver=sparsesolver),
40 B= b(Vh,Vh);
41 int nev=10; // number of computed eigenvalue close to 0
42 real[int] ev(nev); // to store nev eigenvalue
43 Vh[int] eV(nev); // to store nev eigenvector
44 int k=EigenValue(A,B,sym=true,value=ev,vector=eV, tol=1e-10, maxit=0, ncv=0);
45 k=min(k,nev);
46 for (int i=0;i<k;i++){
47 u1=eV[i];
48 real gg = int3d(Th)(dx(u1)*dx(u1) + dy(u1)*dy(u1) + dz(u1)*dz(u1) );
49 real mm= int3d(Th)(u1*u1) ;
50 cout << "_lambda[" << i<< "]=" << ev[i] << ",_err=" << int3d(Th)(dx(u1)*dx(u1)
51 + dy(u1)*dy(u1) + dz(u1)*dz(u1) - (ev[i])*u1*u1) <<endl;
52 }
53 medit("1_V-shaped_LD_3D",Th);
54 plot(eV[0],cmm="ev"+0+"_v_" + ev[0],wait=1,value=1);
55 //plot(eV[0],wait=1,value=1);

```

Exemplo B.6. Elementos do espectro discreto do operador Laplaciano de Dirichlet na guia de onda retangular, reta, esticada e localmente torcida, Γ_β , definida na Seção 4.3.

```

1 load "msh3_"
2 load "medit"
3 int np= 64;
4 int np2= 96;
5 real t;
6 int L=15;
7 real beta=1.5;
8 real epsilon = pi;
9 real c=0.5;
10 // Mesh for different region of the rectangle
11 //border cc(t=0,2*pi){x=(4+sin(4*t))*cos(t);y=(4+sin(4*t))*sin(t);label=1;}
12 //mesh Th2= buildmesh(cc(np));
13 mesh Th2= square(36,36,[epsilon*x,epsilon*y]);
14 fespace Vh2(Th2,P1);
15 int[int] rup=[0,6], // label: upper face 0-> 1 (region -> label)
16 rdown=[0,5],// label: lower face 0-> 1 (region -> label)
17 rmid=[1,1,2,2,3,3,4,4];

```

```

18 real zmin=-L, zmax=L;
19 mesh3 Th=buildlayers(Th2,np2,
20 zbound=[zmin,zmax],
21 // region=r1,
22 labelmid=rmid,
23 reffaceup = rup,
24 reffacelow = rdown, transfo=[z,x*cos(c*tanh(z)+pi/2)-y*sin(c*tanh(z)+pi/2),x*sin(c*tanh(z)+pi/2)
    ↪ +y*cos(c*tanh(z)+pi/2)+beta*z]
25 ,facemerge=1);
26 cout << "Th.:\nv_\=" << Th.nv << "\nt_\=" << Th.nt << endl;
27 fespace Vh(Th,P1);
28 Vh u1,u2;
29 Vh h = hTriangle;
30 cout << "size_of_mesh_\=" << h[].max << endl;
31 real sigma = 00; // value of the shift
32 macro Grad(u) [dx(u),dy(u),dz(u)] // EOM
33 varf a(u1,u2)= int3d(Th)( Grad(u1)'*Grad(u2) - sigma* u1*u2 )
34 + on(1,2,3,4,5,6,u1=0.) ; // Boundary condition
35 varf b([u1],[u2]) = int3d(Th)( u1*u2 ) ; // no Boundary condition
36 matrix A= a(Vh,Vh,solver=sparsesolver),
37 B= b(Vh,Vh);
38 int nev=10; // number of computed eigenvalue close to 0
39 real[int] ev(nev); // to store nev eigenvalue
40 Vh[int] eV(nev); // to store nev eigenvector
41 int k=EigenValue(A,B,sym=true,value=ev,vector=eV, tol=1e-10, maxit=0, ncv=0);
42 k=min(k,nev);
43 for (int i=0;i<k;i++){
44 u1=eV[i];
45 real gg = int3d(Th)(dx(u1)*dx(u1) + dy(u1)*dy(u1) + dz(u1)*dz(u1) );
46 real mm= int3d(Th)(u1*u1) ;
47 cout << "\lambda_\=" << i << "\=" << ev[i] << "\_err_\=" << int3d(Th)(dx(u1)*dx(u1)
48 + dy(u1)*dy(u1) + dz(u1)*dz(u1) - (ev[i])*u1*u1) <<endl;
49 }
50 //exportar eigenvalues para txt-file
51 ofstream file1("eigenvaluesth0_58.txt");
52 for(int i=0;i<nev;i++)
53 {
54 file1<<ev[i]<<"\n";
55 }
56 mediat("0_25_3D",Th);
57 plot(eV[0],cmm="ev_\"+0+"\_v_\=" + ev[0],wait=1,value=1);

```

Referências Bibliográficas

- [1] Y. Avishai, D. Bessis, B. G. Giraud, and G. Mantica. Quantum bound states in open geometries. *Phys. Rev. B*, 44:8028–8034, 1991.
- [2] Diana Carolina Suarez Bello and Alessandra A. Verri. Spectral analysis in broken sheared waveguides. *Math. Methods Appl. Sci.*, 47(7):6172–6183, 2024.
- [3] D. Borisov, P. Exner, and R. Gadyl’shin. Geometric coupling thresholds in a two-dimensional strip. *J. Math. Phys.*, 43(12):6265–6278, 2002.
- [4] D. Borisov, P. Exner, R. Gadyl’shin, and D. Krejčířk. Bound states in weakly deformed strips and layers. *Ann. Henri Poincaré*, 2(3):553–572, 2001.
- [5] P. Briet, H. Abdou-Soimadou, and D. Krejčířk. Spectral analysis of sheared nanoribbons. *Z. Angew. Math. Phys.*, 70(2):18, 2019.
- [6] W. Bulla, F. Gesztesy, W. Renger, and B. Simon. Weakly coupled bound states in quantum waveguides. *Proc. Am. Math. Soc.*, 125(5):1487–1495, 1997.
- [7] J. P. Carini, J. T. Londergan, K. Mullen, and D. P. Murdock. Multiple bound states in sharply bent waveguides. *Phys. Rev. B*, 48:4503–4515, 1993.
- [8] G. Carron, P. Exner, and D. Krejčířk. Topologically nontrivial quantum layers. *J. Math. Phys.*, 45(2):774–784, 2004.
- [9] B. Chenaud, P. Duclos, P. Freitas, and D. Krejčířk. Geometrically induced discrete spectrum in curved tubes. *Differ. Geom. Appl.*, 23(2):95–105, 2005.
- [10] H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch, and B. Simon. *Schrödinger operators, with application to quantum mechanics and global geometry*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [11] M. Dauge, Y. Lafranche, and T. Ourmières-Bonafos. Dirichlet spectrum of the Fichera layer. *Integral Equ. Oper. Theory*, 90(5):41, 2018.
- [12] M. Dauge, Y. Lafranche, and N. Raymond. Quantum waveguides with corners. *ESAIM, Proc.*, 35:14–45, 2012.

- [13] M. Dauge, T. Ourmières-Bonafos, and N. Raymond. Spectral asymptotics of the Dirichlet Laplacian in a conical layer. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 14(3):1239–1258, 2015.
- [14] M. Dauge and N. Raymond. Plane waveguides with corners in the small angle limit. *J. Math. Phys.*, 53(12):123529, 2012.
- [15] E. B. Davies. *Spectral theory and differential operators*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [16] C. R. de Oliveira. *Intermediate spectral theory and quantum dynamics*. Basel: Birkhäuser, 2009.
- [17] César R. de Oliveira, Luiz Hartmann, and Alessandra A. Verri. Effective Hamiltonians in surfaces of thin quantum waveguides. *J. Math. Phys.*, 60(2):022101, 9, 2019.
- [18] P. Duclos and P. Exner. Curvature-induced bound states in quantum waveguides in two and three dimensions. *Rev. Math. Phys.*, 7(1):73–102, 1995.
- [19] P. Duclos, P. Exner, and D. Krejčířík. Bound states in curved quantum layers. *Commun. Math. Phys.*, 223(1):13–28, 2001.
- [20] D. E. Edmunds and W. D. Evans. *Spectral theory and differential operators*. Oxford University Press, Oxford, 1989.
- [21] T. Ekholm, H. Kovařík, and D. Krejčířík. A Hardy inequality in twisted waveguides. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 188(2):245–264, 2008.
- [22] P. Exner, P. Šeba, and P. Št’oviček. On existence of a bound state in an L-shaped waveguide. *Czech. J. Phys. B*, 39(11):1181–1191, 1989.
- [23] P. Exner and M. Tater. Spectrum of Dirichlet Laplacian in a conical layer. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 43(47):474023, 2010.
- [24] L. Friedlander and M. Solomyak. On the spectrum of the Dirichlet Laplacian in a narrow infinite strip. In *Spectral theory of differential operators. M. Sh. Birman 80th anniversary collection*, volume 225, pages 103–116. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2008.
- [25] L. Friedlander and M. Solomyak. On the spectrum of the Dirichlet Laplacian in a narrow strip. *Isr. J. Math.*, 170(1):337–354, 2009.
- [26] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Berlin, Springer, 2001.

- [27] J. Goldstone and R. L. Jaffe. Bound states in twisting tubes. *Phys. Rev. B*, 45:14100–14107, 1992.
- [28] F. Hecht. New development in freefem++. *J. Numer. Math.*, 20(3-4):251–265, 2012.
- [29] D. Krejčířík and J. Kříž. On the spectrum of curved planar waveguides. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 41(3):757–791, 2005.
- [30] D. Krejčířík and Z. Lu. Location of the essential spectrum in curved quantum layers. *J. Math. Phys.*, 55(8):083520, 2014.
- [31] D. Krejčířík and R. Tiedra de Aldecoa. Ruled strips with asymptotically diverging twisting. *Ann. Henri Poincaré*, 19(7):2069–2086, 2018.
- [32] D. Krejčířík and K. Zahradová. Quantum strips in higher dimensions. *Oper. Matrices*, 14(3):635–665, 2020.
- [33] S. A. Nazarov and A. V. Shanin. Trapped modes in angular joints of 2d waveguides. *Appl. Anal.*, 93(3):572–582, 2014.
- [34] Thomas Ourmières-Bonafos and Konstantin Pankrashkin. Discrete spectrum of interactions concentrated near conical surfaces. *Appl. Anal.*, 97(9):1628–1649, 2018.
- [35] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. IV: Analysis of operators*. Academic Press, New York, 1978.
- [36] W. Renger and W. Bulla. Existence of bound states in quantum waveguides under weak conditions. *Lett. Math. Phys.*, 35(1):1–12, 1995.
- [37] B. Simon. Semiclassical analysis of low lying eigenvalues. i. non-degenerate minima : asymptotic expansions. *Ann. IHP, Phys. théor.*, 38:295–308, 1983.
- [38] A. A. Verri. Spectrum of the dirichlet laplacian in sheared waveguides. *Z. Angew. Math. Phys.*, 72(1):23, 2021.