Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

Classificação das Álgebras de Lie Semi-simples Complexas e Reais

Autor: *Vitor Schiavuzzo Ferreira*

Orientador: *Prof.º Dr. Fábio Ferrari Ruffino*

Disciplina: Trabalho de Conclusão do Curso 2

Curso: Bacharelado em Matemática

Professores Responsáveis: Alex Carlucci Rezende
Thaís Maria Dalbelo
Luciene Nogueira Bertoncello

São Carlos, 17 de fevereiro de 2024.

Classificação das Álgebras de Lie Semi-simples Complexas e Reais

Autor: *Vitor Schiavuzzo Ferreira*

Orientador: *Prof.º Dr. Fabio Ferrari Ruffino*

Disciplina: Trabalho de Conclusão do Curso 2

Curso: Bacharelado em Matemática

Professores Responsáveis: Alex Carlucci Rezende
Thaís Maria Dalbelo
Luciene Nogueira Bertoncello

São Carlos, 17 de fevereiro de 2024.

Vitor Schiavuzzo Ferreira

Fabio Ferrari Ruffino

Agradecimentos

Existem tantas pessoas que eu sinto que preciso agradecer, mas este espaço não é o suficiente para dizer tudo o que eu gostaria a todas elas. Tenho até um certo receio de acabar esquecendo de alguém que me ajudou durante essa jornada, afinal, não quero que nenhuma pessoa se sinta menos especial do que realmente é (ou que foi) para mim. Ao mesmo tempo, seria muita falta de consideração não dizer nada para algumas dessas pessoas. Desse modo, vou compartilhar um pouquinho do que sinto de uma pequena parcela de amigos, familiares ou camaradas, que me acompanharam durante todo o meu trajeto até o presente momento, e espero que o meu gesto, de não mencionar alguém, não ofenda esses outros indivíduos que com certeza foram muito importantes para a minha formação.

Começo agradecendo a todos os meus amigos que me proporcionaram muita alegria, resenhas, risadas, apoio, carinho e amor durante esse tempo que estivemos juntos. Em particular, agradeço aos meus queridos amigos, Gabriela Lye Watanabe, Lucas Ramos Ferreira, Miguel Fantini Fernandes e Nelson Amorim Junior, que acompanharam de perto todos os meus surtos, desesperos, momentos de euforia e de alegria, e todos os meus desabafos e abraços sufocantes durante toda a nossa história nesses cinco anos de curso. Eu amo muito todos vocês e vou guardar para sempre todo o amor que vocês nunca cansaram de me esbaldar. Agradeço, também, ao meu amigo, Vitor do Vale Grytz, que me ouviu em momentos que outros não poderiam ouvir, e que teve toda a paciência (e um pouco mais) para me ajudar a formatar este trabalho. Nada disso teria sido possível sem você. A minha querida amiga, Emilly Chaves, que me presenteou, principalmente nesta fase final, com muito suporte emocional e um ombro amigo nas vezes em que precisei chorar. Por fim, mas não menos importante, ao meu amigo, Victorio Amadeo Cremasco, que tirou todas as minhas dúvidas nas disciplinas que cursamos juntos durante este período.

Agradeço a minha família por todo apoio financeiro e emocional durante todos esses anos, até mesmo antes de minha entrada na graduação, afinal de contas, eu nunca teria conseguido chegar até aqui se não fosse por vocês.

Ao meu querido orientador, Fabio Ferrari Ruffino, que nunca se cansou de me explicar a mesma coisa mais do que três vezes, que sempre soube responder à todas as minhas dúvidas, que me ouviu durante os meus momentos de incerteza e insegurança, e que me entregou muito apoio durante esses dois anos de orientação.

Ao meu psicólogo, Douglas Fernandes Donaris, que me ajudou nos momentos difíceis e que me ensinou, não só a lidar com os meus sentimentos e inseguranças, mas também a enfrentar os desafios que aparecem durante toda a nossa vida (e que vão sempre aparecer). Se hoje eu me considero alguém maduro emocionalmente e corajoso, eu não tenho outra pessoa a entregar tal mérito se não for a você.

A todos os professores que lecionaram a mim nesses cinco anos de curso.

A Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), que me amparou financeiramente e contribuiu com o meu aprendizado como pesquisador.

Mais uma vez, obrigado a todas as pessoas citadas neste texto, e aquelas que não foram mencionadas, mas que são muito especiais na minha vida.

"O final não é mais importante do que os caminhos que levam a ele."

Kan Gao, *To the Moon*

Resumo

Neste trabalho, apresentaremos a classificação das álgebras de Lie semi-simples complexas e reais. Na verdade, apenas introduziremos o caso real, enquanto faremos completamente o caso complexo. Para tal tarefa, apresentaremos os conceitos iniciais, passando por teoria de categorias, um pouco da teoria de módulos sobre anéis, álgebra homológica e o básico da teoria das álgebras de Lie. Em seguida, focaremos em apresentar a teoria dos objetos que constituem o objetivo principal deste trabalho: as álgebras de Lie semi-simples. Após isso, será introduzido a cohomologia das álgebras de Lie, afim de provarmos dois teoremas importantes (*Teorema de Weyl* e de *Levi-Malcev*), que nos ajudam a obter tal classificação, bem como nos motiva a faze-la. Finalmente, mostraremos a classificação das álgebras de Lie complexas e a usaremos para realizar a classificação análoga no contexto real.

Abstract

In this work, we present the classification of real and complex semisimple Lie algebras. Actually, we only introduce the real case, while we show the complete classification in the complex setting. In order to achieve this aim, we present basic concepts, passing through category theory, a little of modules over rings theory, homological algebra and the basic theory of Lie algebras. Afterwards, we summarize the theory of semisimple Lie algebras, that constitute the main topic of the present work. After this, we introduce the cohomology of Lie algebras, in order to prove two important theorems (*Weyl's Theorem* and *Levi-Malcev Theorem*), wich help us to obtain the classification, as well motivate us to do so. Finally, we show the classification of complex semisimple Lie algebras and we apply it to realize the analogous classification in the real framework.

Sumário

Introdução

Existe uma série de aplicações dos grupos de Lie na matemática e na física. Desse modo, estes objetos tornam-se importantes de serem estudados, porém este trabalho não tem como foco os grupos de Lie, e sim as álgebras de Lie. Elas surgiram, inicialmente, como uma ferramenta para se estudar os grupos de Lie. De fato, dado um grupo de Lie G, associa-se a ele uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, que possui algumas equivalências com relação ao grupo associado a ela. Por exemplo, existe uma correspondência entre os subgrupos analíticos de G e as subálgebras de $\mathfrak{g}$, de tal forma que os subgrupos invariantes correspondem aos ideais de $\mathfrak{g}$, os subgrupos abelianos às subálgebras abelianas, e assim em diante.

Algumas aplicações das álgebras de Lie no estudo de grupos são, por exemplo, no problema de Burnside, que consiste em encontrar um limite para as ordens de grupos finitos com r geradores que satisfazem $x^m = 1$ para algum inteiro positivo m. Outra aplicação, por exemplo, seria no estudo dos grupos livres, já que estes podem ser associados a álgebras de Lie livres por um processo criado por Wilhelm Magnus. Entretanto, assas aplicações não são o foco deste projeto.

Na verdade, Sopus Lie começou a se perguntar quais eram todas as ações locais de grupos de Lie em variedades suaves. Mais tarde, Wilhem Killing perceber que, para que se pudesse classificar tais ações, era necessário que fossem classificadas todas as álgebras de Lie de dimensão finita associadas a tais grupos. A praticidade de tal abordagem se deve ao fato de que álgebras de Lie, por serem espaços vetoriais, são muito mais fáceis de serem estudadas. Assim, este trabalho tem como objetivo classificar as álgebras de Lie semi-simples complexas e reais, já que essas podem ser escritas como uma soma direta de ideias simples, como veremos mais a frente.

Durante este trabalho, também introduziremos a teoria de cohomologia de álgebras de Lie. Ela surgiu, inicialmente, por Élie Cartan para se estudar a topologia dos grupos de Lie e de espaços homogêneos, relacionando os métodos de cohomologia de Georges de Rham às álgebras de Lie. Nosso foco, neste trabalho, entretanto, será de provarmos dois teoremas bastantes importantes dentro da teoria das álgebras de Lie: o *Teorema de Weyl* e o *Teorema de Levi-Malcev*. O primeiro é importante para que façamos a parte da classificação das álgebras de Lie semi-simples. Já o segundo nos mostra o porquê é interessante que façamos tal classificação, pois garante que toda álgebra de Lie de dimensão finita é o produto semidireto do seu radical com uma subálgebra semi-simples.

Capítulo 1

Um Pouco de Teoria de Categorias

A teoria de categorias é bastante relevante dentro do estudo da álgebra. Desse modo, as ferramentas obtidas a partir desta teoria serão muito úteis para que seja feito todo desenvolvimento deste trabalho, em particular, na parte da cohomologia das álgebras de Lie, onde as categorias serão usadas em peso.

Embora o título deste capítulo sugira o contrário, não iremos introduzir toda a teoria de categorias, já que isso levaria demasiado tempo. Na verdade, iremos assumir os conceitos mais básicos da teoria. Especificamente, assumiremos o que é uma categoria e os principais exemplos, monomorfismos, epimorfismos e isomorfismos, funtores, transformações naturais, produto e coproduto, e o conceito de dualidade em categorias. O foco será em introduzir os funtores adjuntos e as categorias abelianas, que serão extremamente importantes para o que virá a seguir.

1.1 Notação

Antes de começarmos, é importante fixarmos algumas notações que serão usadas no decorrer deste trabalho:

- Se A e B são objetos de uma categoria $\mathfrak{C}$, denotamos por $\mathfrak{C}(A, B)$ o conjunto dos morfismos de A em B.
- $\mathfrak{S}$: categoria dos conjuntos;
- $\mathfrak{Ab}$: categoria dos grupos abelianos;
- $\mathfrak{A}_F$: categoria das F-álgebras (F corpo);
- $\mathfrak{L}$: categoria das álgebras de Lie;
- $\hookrightarrow$: monomorfismo;
- $\twoheadrightarrow$: epimorfismo;

- $\xrightarrow{\sim}$: isomorfismo.

Além disso, seja Λ um anel com unidade. Então $\mathfrak{M}^e_\Lambda$ é a categoria dos Λ-módulos à esquerda, enquanto $\mathfrak{M}^d_\Lambda$ denota a categoria dos Λ-módulos à direita. Se escrevermos somente $\mathfrak{M}_\Lambda$, então estaremos, por abuso de notação, falando da categoria dos Λ-módulos à esquerda, ou apenas dos Λ-módulos, caso Λ seja comutativo. De todo modo, caso este último seja o caso, deixaremos explícito no texto. Caso contrário, o leitor sempre deve assumir que estamos trabalhando com Λ-módulos à esquerda[1].

Se $\{X_i\}_{i\in I}$ é uma família de objetos de uma categoria $\mathfrak{C}$ e (P, p_i) é o produto de tais objetos, então denotamos

$$P := \prod_{i\in I} X_i.$$

Ainda, sabemos que se $f_i\colon Y \to X_i$ são morfismos de um objeto Y aos objetos X_i's, então o único morfismo induzido $f\colon Y \to \prod X_i$ será denotado por $f := \{f_i\}$. Se I é finito, então escreveremos todos os elementos entre as chaves. Por exemplo, se o produto dos objetos X_1 e X_2 está bem definido e se $f_1\colon Y \to X_1$ e $f_2\colon Y \to X_2$ são morfismos, então denotamos o único morfismo induzido por f_1 e f_2 por $\{f_1, f_2\}$.

Analogamente, se (C, q_i) é o coproduto da família de objetos anterior, então denotamos

$$C := \coprod_{i\in I} X_i$$

para tal coproduto. Além disso, se $g_i\colon X_i \to Y$ forem morfismos, então o único morfismo induzido pelos morfismos g_i's será denotado por $\langle g_i\rangle$. Novamente, se I for finito, colocaremos cada morfismo g_i entre os colchetes.

Por fim, mencionamos que a composição de morfismos em uma categoria será feita pela justaposição.

1.2 Funtores adjuntos

Começamos com a definição:

Definição 1.2.1. Sejam $F\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ e $G\colon \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ funtores entre as categorias $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ tais que existe uma equivalência natural (isomorfismo natural)

$$\eta = \eta_{XY}\colon \mathfrak{D}(F(X), Y) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{C}(X, G(Y))$$

de funtores $\mathfrak{C}^{\mathrm{opp}} \times \mathfrak{D} \to \mathfrak{S}$. Então, dizemos que F é **adjunto à esquerda** de G e que G é **adjunto à direita** de F, e escrevemos $\eta\colon F \dashv G$. Chamamos η de **adjunção**.

[1]O motivo de tratarmos somente dos módulos à esquerda se deve ao fato que se trabalhar com os módulos à direita é totalmente análogo, já que as categorias são as mesmas a menos de dualização.

Exemplo 1.2.2. O **funtor livre** $F\colon \mathfrak{S} \to \mathfrak{M}_\Lambda$ é o funtor que associa cada conjunto S ao Λ-módulo livre gerado por S. Já o **funtor esquecimento** $G\colon \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{S}$ é o funtor que associa cada Λ-módulo livre M ao conjunto M. Desse modo, temos que $F \dashv G$.

O fato que será necessário para o que vem a seguir será o resultado proveniente do seguinte teorema:

Teorema 1.2.3. *Sejam $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ categorias. Se o um funtor $G\colon \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ possui uma adjunção à esquerda, então G preserva produtos, pull-backs e kernels.*

1.3 Categorias abelianas

Dentre todas as categorias algébricas, iremos destacar três delas: as categorias $\mathfrak{Ab}$, $\mathfrak{M}^e_\Lambda$ e $\mathfrak{M}^d_\Lambda$. Elas são interessantes por possuírem algumas propriedades, por exemplo, os conjuntos de morfismos entre dois objetos possuem uma estrutura de grupo abeliano. Além disso, as propriedades destas categorias são auto-duais. Isso significa que um teorema válido para uma dessas categorias pode ser dualizado um um teorema de alguma outra categoria de "mesmo tipo". Desse modo, nesta seção introduziremos o conceito de *categoria abeliana*, que é a generalização das propriedades destas categorias.

Dentro deste estudo, veremos que a categoria dos Λ-módulos (à esquerda ou à direita) é bastante geral. De fato, o *Teorema do Mergulho Pleno* nos diz que toda categoria abeliana pequena pode ser totalmente mergulhada em uma categoria de módulos para algum anel particular. O exemplo mais simples deste fato é a categoria dos grupos abelianos, já que todo grupo abeliano pode ser visto como um $\mathbb{Z}$-módulo. Assim, sempre podemos assumir que estamos trabalhando na categoria dos Λ-módulos para provarmos algum fato relacionado a diagramas finitos, como por exemplo envolvendo kernels, cokernels e imagens.

Começamos com uma definição:

Definição 1.3.1. Seja $\mathfrak{C}$ uma categoria. Então:

i. Um objeto I de $\mathfrak{C}$ é dito ser **inicial** se para cada objeto B de $\mathfrak{C}$ existe um único morfismo $\varphi \in \mathfrak{C}(I, B)$;

ii. Um objeto T de $\mathfrak{C}$ é dito ser **terminal** se para cada objeto A de $\mathfrak{C}$ existe um único morfismo $\varphi \in \mathfrak{C}(A, T)$;

iii. Um objeto 0 de $\mathfrak{C}$ é chamado de **objeto zero** se é ao mesmo tempo inicial e terminal.

Assim, podemos introduzir o conceito que será a base para a teoria que iremos desenvolver.

Definição 1.3.2. Seja $\mathfrak{A}$ uma categoria. Dizemos que $\mathfrak{A}$ é **aditiva** se, e somente se, possui objeto zero, toda dupla de objetos admite produto e todo conjunto de morfismos $\mathfrak{A}(A, B)$ é um grupo abeliano, de modo que a composição

$$\mathfrak{A}(A, B) \times \mathfrak{A}(B, C) \to \mathfrak{A}(A, C)$$

é bilinear.

Como já é de se esperar, as categorias $\mathfrak{Ab}$, $\mathfrak{M}^e_\Lambda$ e $\mathfrak{M}^d_\Lambda$ são aditivas. Entretanto, vejamos um outro exemplo interessante e que será utilizado mais adiante.

Exemplo 1.3.3. Um **Λ-módulo graduado**[2] é uma família de Λ-módulos $M = \{M_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Se M e N forem Λ-módulos graduados, um morfismo $\varphi \colon M \to N$ de grau k é uma família de homomorfismos de Λ-módulos $\{ \varphi_n \colon M_n \to N_{n+k} \}_{n\in\mathbb{Z}}$. Então a categoria $\mathfrak{M}^{\mathbb{Z}}_\Lambda$ dos Λ-módulos graduados restrita aos morfismos de graus 0 é uma categoria aditiva.

Em uma categoria abeliana, sempre denotaremos o produto dos objetos A e B por $A \oplus B$.

Um leitor atento irá perceber que, embora exijamos a existência do produto para toda dupla de objetos em uma categoria abeliana, não mencionamos nada sobre o coproduto. Assim, uma pergunta natural a se fazer é: o que podemos dizer sobre o coproduto de dois objetos em uma categoria abeliana? A resposta é dada pela seguinte proposição:

Proposição 1.3.4. *Seja $\mathfrak{A}$ uma categoria aditiva. Dado um par de objetos (A_1, A_2) de $\mathfrak{A}$, considere os morfismos $i_1 = \{\mathrm{id}, 0\} \colon A_1 \to A_1 \oplus A_2$ e $i_2 = \{0, \mathrm{id}\} \colon A_2 \to A_1 \oplus A_2$. Então a tripla $(A_1 \oplus A_2, i_1, i_2)$ é o coproduto de A_1 e A_2 na categoria aditiva $\mathfrak{A}$.*

O que tal resultado nos mostra é que, em uma categoria aditiva, toda dupla de objetos possuem todos os coprodutos, ainda que não tenhamos feito tal exigência ao defini-las. No caso dessas categorias, usaremos o termo *soma* ao invés de coproduto. De fato, esses conceitos coincidem somente quando um número finito de objetos está envolvido.

Proposição 1.3.5. *Sejam A, B, C e D objetos em uma categoria aditiva $\mathfrak{A}$. Então dado um diagrama*

$$A \xrightarrow{\{\psi,\varphi\}} B \oplus C \xrightarrow{\langle\gamma,\delta\rangle} D,$$

tem-se que

$$\langle\gamma, \delta\rangle \{\varphi, \psi\} = \gamma\varphi + \delta\psi,$$

onde $+$ denota a operação do grupo abeliano $\mathfrak{A}(A, D)$.

[2]Na verdade, o termo mais correto seria Λ-módulo graduado pelos inteiros (ou somente por $\mathbb{Z}$), já que esse conceito pode ser generalizado para um conjunto qualquer de índices. Porém, nos restringiremos somente ao caso dos inteiros por ser o caso que será de interesse neste trabalho.

Além de mostrar que a composição de morfismos funciona de uma maneira muito "boa", a proposição acima possui um corolário muito interessante.

Corolário 1.3.6. *A operação do grupo aditivo $\mathfrak{A}(A, B)$ é determinado pela categoria $\mathfrak{A}$.*

Existe mais um conceito que será muito utilizado mais a frente, e que diz respeito às categorias aditivas (alem das categorias abelianas, como veremos a seguir). Para isso, temos a proposição seguinte, que irá motivar tal definição.

Proposição 1.3.7. *Sejam $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ categorias aditivas e $F\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ um funtor. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

i. F preserva somas;

ii. F preserva produtos;

iii. para cada par de objetos (A, B) de $\mathfrak{A}$, a aplicação $F\colon \mathfrak{A}(A, B) \to \mathfrak{B}(F(A), F(B))$ é um homomorfismo de grupos.

Com o resultado acima em mente, dizemos que um funtor é **aditivo** se satisfaz qualquer uma das afirmações acima.

Antes de finalmente definirmos categorias abelianas, precisamos de mais dois conceitos que o leitor já deve estar familiarizado: o conceito de kernel e cokernel. Recorde que se $\varphi\colon G \to H$ é um homomorfismo de grupos abelianos[3], então o kernel de φ é o conjunto dado por

$$\ker \varphi := \{\, g \in G \mid \varphi(g) = 0 \,\}\,.$$

Um resultado importante, e que motiva a definição de cokernel, é que $\ker \varphi = 0$ se, e somente se, φ é injetor, ou em linguagem de categorias, se é um monomorfismo[4].

Assim, queremos definir o cokernel de um morfismo como sendo um subgrupo que satisfaz uma propriedade semelhante, isto é, φ é um homomorfismo sobrejetor se, e somente se, $\operatorname{coker} \varphi = 0$. Logo, é natural definirmos o cokernel de φ como $\operatorname{coker} \varphi := H/\operatorname{im} \varphi$.

Apesar dessas definições serem bastante simples, elas não são válidas para categorias de maneira geral. Por conta disso, e para fixarmos a linguagem que iremos adotar, generalizaremos tais conceitos.

Definição 1.3.8. Seja $\sigma\colon X \to Y$ um morfismo entre objetos em uma categoria com objeto zero. Um **kernel** de σ é um morfismo $\mu\colon K \to X$ que satisfaz as seguintes propriedades:

[3]Na verdade, o que será dito a seguir continua sendo válido para algumas outras estruturas algébrica, como por exemplo para módulos, mas vamos focar no caso de grupos abelianos apenas para considerarmos objetos mais palpáveis".

[4]Recorde, aqui, que os conceitos de monomorfismo e homomorfismo injetor são equivalentes na categorias dos grupos abelianos.

i. $\sigma\mu = 0$;

ii. Se $\tau\colon K' \to X$ é um morfismo tal que $\sigma\tau = 0$, então $\tau = \mu\tau_0$, com $\tau_0\colon K' \to K$ único.

Em outras palavras, temos que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dr, "\sigma"] & \\
 & K \arrow[u, "\mu"] \arrow[r, "0"] & Y \\
K' \arrow[uur, bend left, "\tau"] \arrow[ur, dashed, "\tau_0"] \arrow[urr, bend right, "\sigma\circ\tau=0"'] & &
\end{tikzcd}$$

Nem todo morfismo em uma categoria com objeto zero possui kernel, porém, caso este exista, pode-se provar que ele é único. Mais ainda, não só μ é único, mas K também, portanto usaremos a notação $K \coloneqq \ker\sigma$. Assim, quando dizemos "kernel", estaremos nos referindo a μ ou a $\ker\varphi$, a depender do contexto.

Dualizando, temos a seguinte definição de cokernel:

Definição 1.3.9. Seja $\sigma\colon X \to Y$ um morfismo entre objetos em uma categoria com objeto zero. Um **cokernel** de σ é um morfismo $\gamma\colon Y \to C$ que satisfaz as seguintes propriedades:

i. $\gamma\sigma = 0$;

ii. Se $\delta\colon Y \to C'$ é um morfismo tal que $\delta\sigma = 0$, então $\delta = \delta_0\gamma$, com $\delta_0\colon C \to C'$ único.

Novamente, temos que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, "0"'] \arrow[dr, "\sigma"] \arrow[ddl, bend right, "\delta\circ\sigma=0"'] & \\
 & C \arrow[dl, dashed, "\delta_0"'] & Y \arrow[l, "\gamma"'] \arrow[dll, bend left, "\delta"] \\
C' & &
\end{tikzcd}$$

Assim como no caso do kernel, γ e C são únicos, portanto utilizamos a notação $C \coloneqq \operatorname{coker}\sigma$.

Um resultado interessante e importante é que todo kernel é um monomorfismo, enquanto todo cokernel é um epimorfismo. Uma caracterização bastante útil é que, nas categorias aditivas, os monomorfismos possuem kernel zero, enquanto os epimorfismos possuem cokernel zero[5].

Com os conceitos apresentados até agora, finalmente estamos aptos a definir as categorias abelianas.

[5]Isso é a generalização dos resultados que apresentamos anteriormente, quando começamos a falar dos kernels e cokernels de homomorfismos de grupos abelianos.

Definição 1.3.10. Seja $\mathfrak{A}$ uma categoria aditiva. Dizemos que $\mathfrak{A}$ é uma **categoria abeliana** se todas as seguintes propriedades forem satisfeitas:

i. todo morfismo possui kernel e cokernel;

ii. todo monomorfismo é o kernel de seu cokernel, enquanto todo epimorfismo é o cokernel de seu kernel;

iii. todo morfismo é escrito como a composição de um epimorfismo com um monomorfismo.

As categorias aditivas mencionadas anteriormente são abelianas. Outro exemplo de categoria abeliana é a categoria dos grupos abelianos finitos. A categoria dos grupos abelianos livres não é abeliana, embora seja aditiva.

Proposição 1.3.11. *Dado um morfismo $\varphi\colon A \to B$ em uma categoria abeliana $\mathfrak{A}$, temos uma sequência dada a partir de φ*

$$\ker\varphi \xhookrightarrow{\mu} A \overset{\eta}{\twoheadrightarrow} I \xhookrightarrow{\nu} B \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} \operatorname{coker}\varphi,$$

onde $\varphi = \nu\eta$, μ é o kernel de φ, ε é o cokernel de φ , η é o cokernel de μ e ν é o kernel ε. Além disso, a decomposição de φ como a composição de um epimorfismo com um monomorfismo é única.

O resultado acima não só nos garante a unicidade da decomposição de todo morfismo φ como também mostra de maneira explícita como é feita tal decomposição.

De maneira geral, sabemos que um monomorfismo que também é um epimorfismo não é necessariamente um isomorfismo (embora a recíproca seja verdadeira). Entretanto, sabemos que em todos os exemplos de categorias abelianas que mencionamos até agora, um isomorfismo é, essencialmente, um homomorfismo injetor (monomorfismo) que também é sobrejetor (epimorfismo). Assim, é de se esperar que tal equivalência ocorra em categorias abelinas. De fato, a Proposição 1.3.11 nos garante o seguinte corolário que caracteriza isomorfismos em categorias abelianas:

Corolário 1.3.12. *Se um morfismo $\alpha\colon X \to Y$ em uma categoria abeliana é um monomorfismo e um epimorfismo, então α é um isomorfismo.*

Além do corolário acima, a Proposição 1.3.11 nos diz que dado um morfismo $\varphi\colon X \to Y$, obtemos uma sequência completamente determinada por φ. Mais do que isso, dado um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[d, "\beta"'] \\ X' \arrow[r, "\varphi'"] & Y', \end{tikzcd}$$

existe um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\ker\varphi \arrow[r, hook, "\mu"] \arrow[d, "\kappa"'] & X \arrow[r, two heads, "\eta"] \arrow[d, "\alpha"'] & I \arrow[r, hook, "\nu"] \arrow[d, "\iota"'] & Y \arrow[r, two heads, "\varepsilon"] \arrow[d, "\beta"'] & \operatorname{coker}\varphi \arrow[d, "\lambda"'] \\
\ker\varphi' \arrow[r, hook, "\mu'"] & X' \arrow[r, two heads, "\eta'"] & I' \arrow[r, hook, "\nu'"] & Y' \arrow[r, two heads, "\varepsilon'"] & \operatorname{coker}\varphi',
\end{tikzcd}$$

com $\varphi = \nu\eta$ e $\varphi' = \nu'\eta'$. De fato, a proposição garante que, sendo μ e μ' kernels, ε e ε' cokernels, existem morfismos κ, ι e λ tais que $\mu'\kappa = \alpha\mu$, $\eta'\alpha = \iota\eta$ e $\varepsilon'\beta = \lambda\varepsilon$. Logo, basta que provarmos que $\nu'\iota = \beta\nu$. Note que

$$\nu'\iota\eta = \nu'\eta'\alpha = \varphi'\alpha = \beta\varphi = \beta\nu\eta.$$

como η é epimorfismo, segue que $\nu'\iota = \beta\nu$, como queríamos mostrar.

Os fatos anteriores são importantes para que possamos trabalhar com os objetos que iremos definir a seguir.

Definição 1.3.13. Uma **sequência exata curta** em uma categoria abeliana $\mathfrak{A}$ é simplesmente uma sequência

$$\bullet \xhookrightarrow{\mu} \bullet \xrightarrow{\varepsilon} \bullet,$$

de modo que μ é o kernel de ε, enquanto ε é o cokernel de μ.

Um conceito que será muito utilizado no decorrer deste trabalho é o de *cisão*:

Definição 1.3.14. Dizemos que uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow A \xhookrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\varepsilon} C \longrightarrow 0$$

cinde se existe um morfismo $\sigma\colon C \to B$ tal que $\varepsilon\sigma = \mathrm{id}_C$. O morfismo σ é chamado de **cisão**.

Note que a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow A \xhookrightarrow{\iota_A} A \oplus C \xrightarrow{\pi_C} C \longrightarrow 0$$

sempre cinde pelo morfismo ι_C. Com esta ideia, temos um resultado clássico dentro da álgebra homológica. Este resultado será utilizado em vários momentos neste trabalho, e não será citado, embora estejamos o utilizando no momento que mostrarmos que alguma sequência exata curta cinde.

Lema 1.3.15 (Lema da Cisão). *Para uma sequência exata curta*

$$0 \longrightarrow A \xhookrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\varepsilon} C \longrightarrow 0$$

são equivalentes as seguintes condições:

i. a sequência exata curta cinde;

ii. existe um morfismo $\gamma\colon B \to A$ *tal que* $\mu\gamma = \mathrm{id}_A$*;*

iii. existe um isomorfismo $\delta\colon B \to A \oplus C$ *tal que* $\delta\mu = \iota_A$ *e* $\varepsilon\delta^{-1} = \iota_C$*.*

Finalmente, terminarmos esta seção com a seguinte definição análoga:

Definição 1.3.16. Uma sequência exata longa em uma categoria abeliana $\mathfrak{A}$, é uma sequência

$$\cdots \xrightarrow{\varphi_n} \bullet \xrightarrow{\varphi_{n+1}} \cdots,$$

de modo que $\varphi_n = \mu_n\varepsilon_n$, μ_n é um monomorfismo, ε_n é um epimorfismo e, para cada $n \in \mathbb{Z}$, μ_n é o kernel de ε_{n+1}, enquanto ε_{n+1} é o cokernel de μ_n.

Capítulo 2

Módulos Sobre um Anel

Assim como no capítulo anterior, o título "módulos sobre um anel" pode enganar, já que assumiremos os conceitos mais básicos da teoria de módulos. O foco aqui, na verdade, será introduzir os funtores Ext e Tor, além de definirmos os módulos projetivos e injetivos, que serão usados para definir resoluções (e consequentemente os funtores derivados) no próximo capítulo.

2.1 O funtor Hom

A partir desta seção, Λ denotará um anel com unidade.

Recorde que se M e N são Λ-módulos, então $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, N)$ denota o conjunto dos homomorfismos de Λ-módulos com domínio em M e codomínio em N. Podemos induzir uma estrutura de grupo abeliano em $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, N)$ induzida pela operação de soma em N da seguinte forma: para cada par $\varphi, \psi \colon M \to N$ de homomorfismos de Λ-módulos, definimos $(\varphi + \psi)(x) \colon \varphi(x) + \psi(x)$.

Entretanto, note que, em geral, $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, N)$ não é um Λ-módulo com a multiplicação por escalar induzida pela multiplicação por escalar de N. De fato, seja $\varphi \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M, N)$ e fixe um escalar $\alpha \in \Lambda$. Defina $\psi(x) = \alpha\varphi(x)$. Note que para todo escalar $\lambda \in \Lambda$, temos $(\lambda\psi)(x) = (\lambda\alpha)\varphi(x)$, mas $\psi(\lambda x) = \alpha\varphi(\lambda x) = (\alpha\lambda)\varphi(x)$. Como Λ não é comutativo, não podemos dizer que ψ é um homomorfismo, pois, em geral, $\lambda\psi(x) \neq \psi(\lambda x)$.

Agora, fixando um Λ-módulo M, podemos associar um Λ-módulo N a ao grupo abeliano $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, N)$. Assim, se $\varphi \colon N_1 \to N_2$ é um homomorfismo de Λ-módulos, então podemos associá-lo a um homomorfismo de grupos abelianos

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_\Lambda(M, \varphi) \colon \mathrm{Hom}_\Lambda(M, N_1) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(M, N_2) \\ \psi &\longmapsto \varphi \circ \psi. \end{aligned}$$

Note que se $\varphi_1 \colon N_1 \to N_2$ e $\varphi_2 \colon N_2 \to N_3$ são homomorfismo de Λ-módulos, então

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(M, \varphi_2) \circ \mathrm{Hom}_\Lambda(M, \varphi_1)(\psi) = (\varphi_2 \circ \varphi_1) \circ \psi = \mathrm{Hom}_\lambda(M, \varphi_2 \circ \varphi_1)(\psi).$$

É fácil perceber que se $\mathrm{id}\colon N \to N$ é o homomorfismo (de Λ-módulos) identidade, então $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, \mathrm{id})$ é o homomorfismo (de grupos abelianos) identidade. Logo, temos que $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, -)$ define um funtor covariante da categoria dos Λ-módulos à categoria dos grupos abelianos.

Analogamente, podemos associar um Λ-módulo N ao grupo abeliano $\mathrm{Hom}_\Lambda(N, M)$. Neste caso, dado um homomorfismo de Λ-módulos $\varphi\colon N_1 \to N_2$, obtemos um homomorfismo de grupos abeliano

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_\Lambda(\varphi, M)\colon \mathrm{Hom}_\Lambda(N_2, M) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(N_1, M) \\ \psi &\longmapsto \psi \circ \varphi. \end{aligned}$$

Novamente, podemos observar que se $\varphi_1\colon N_1 \to N_2$ e $\varphi_2\colon N_2 \to N_3$ são homomorfismos de Λ-módulos, então

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(\varphi_1, M) \circ \mathrm{Hom}_\Lambda(\varphi_2, M) = \mathrm{Hom}_\Lambda(\varphi_2 \circ \varphi_1, M),$$

e que se $\mathrm{id}\colon N \to N$ é o homomorfismo identidade entre o Λ-módulo N, então $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{id}, M)$ é o homomorfismo identidade entre o grupo abeliano $\mathrm{Hom}_\Lambda(N, M)$. Portanto, $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, M)$ é um funtor contravariante da categoria dos Λ-módulos à categoria dos grupos abelianos.

Desse modo, temos que $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, -)$ é um bifuntor, contravariante na primeira entrada e covariante na segunda. Mais do que isso, temos que $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, -)$ é un funtor aditivo.

Vamos terminar esta seção falando de um teorema que nos mostra como este funtor interage com as sequências exatas. Para isso, note que se uma sequência de Λ-módulos (ou de grupos abeliano)

$$\cdots \longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} M_n \xrightarrow{\varphi_n} M_{n-1} \longrightarrow \cdots,$$

é exata, então é equivalente dizermos que $\ker \varphi_n \subseteq \operatorname{im} \varphi_{n-1}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Além disso, se

$$A \xhookrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} \mathrel{\mkern-14mu}\rightarrow C$$

é uma sequência exata curta, então C pode ser visto como o quociente $B/\operatorname{im}\varphi$. Além disso, costumamos, para não correr risco de ambiguidades, denotar a sequência exata curta acima por

$$0 \longrightarrow A \xhookrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} \mathrel{\mkern-14mu}\rightarrow C \longrightarrow 0.$$

Com isso, temos o seguinte teorema:

Teorema 2.1.1. *Seja $M' \xhookrightarrow{\mu} M \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} M''$ uma sequência exata de Λ-módulos. Então todo Λ-módulo N induz duas sequências exatas*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(N, M') \xhookrightarrow{\mu_*} \mathrm{Hom}_\Lambda(N, M) \xrightarrow{\varepsilon_*} \mathrm{Hom}_\Lambda(N, M'')$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(M'', N) \xhookrightarrow{\varepsilon^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(M, N) \xrightarrow{\mu^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(M', N),$$

onde $\mu_* = \mathrm{Hom}_\Lambda(N, \mu)$, $\mu^* = \mathrm{Hom}_\Lambda(\mu, N)$, $\varepsilon_* = \mathrm{Hom}_\Lambda(N, \varepsilon)$ *e* $\varepsilon^* = \mathrm{Hom}_\Lambda(\varepsilon, N)$.

No teorema acima, note que, embora μ seja injetor e ε sobrejetor, não podemos afirmar que ε_* e μ^* são sobrejetores.

2.2 O funtor produto tensorial

Com a construção do funtor Hom feita, podemos nos perguntar se existe algum outro funtor que se relaciona de alguma forma com ele. Mais especificamente, se existe uma relação de adjunção com Hom e outro objeto. Desse modo, iremos construir tal objeto e mostraremos que ele possui algumas semelhanças com Hom.

Durante esta seção, M denotará um Λ-módulo à direita enquanto N denotará um Λ-módulo à esquerda.

Definição 2.2.1. O **produto tensorial** de M e N é o grupo abeliano, denotado por $M \otimes_\Lambda N$, obtido quocientando o grupo abeliano livre do conjunto de todos os símbolos $m \otimes n$, $m \in M$ e $n \in N$, pelo subgrupo normal gerado pelos elementos da forma

i. $(m_1 + m_2) \otimes n - (m_1 \otimes n + m_2 \otimes n)$;

ii. $m \otimes (n_1 + n_2) - (m \otimes n_1 + m \otimes n_2)$;

iii. $m\lambda \otimes n - m \otimes \lambda n$,

onde $m_1, m_2, m \in M$, $n_1, n_2, n \in N$ e $\lambda \in \Lambda$.

Note que se Λ for um anel comutativo ou um corpo, então o grupo abeliano $M \otimes_\Lambda N$ possui uma estrutura de Λ-módulo ou de Λ-espaço vetorial, respectivamente. Logo, existe um isomorfismo de Λ-módulos (ou de Λ-espaços vetoriais) $M \otimes_\Lambda N \xrightarrow{\sim} N \otimes_\Lambda M$.

Temos, ainda, dois isomorfismos de grupos abelianos

$$\begin{aligned} \Lambda \otimes_\Lambda N &\xrightarrow{\sim} N \\ \lambda \otimes n &\mapsto \lambda n \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} M \otimes_\Lambda \Lambda &\xrightarrow{\sim} M \\ m \otimes \lambda &\mapsto m\lambda. \end{aligned}$$

Assim como no caso do funtor Hom, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.2.2. *Para todo Λ-módulo à esquerda N e todo Λ-módulo à direita M, os funtores $- \otimes_\Lambda N : \mathfrak{M}^d_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ e $M \otimes_\Lambda - : \mathfrak{M}^e_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ são funtores covariantes. Ainda, $- \otimes_\Lambda -$ é um bifuntor.*

É importante mencionar que, assim como o funto Hom, o funtor produto tensorial é um funtor aditivo. Finalmente, podemos apresentar a propriedade que relaciona o funtor $-\otimes_\Lambda -$ com $\mathrm{Hom}_\Lambda(-,-)$.

Teorema 2.2.3. *Para todo Λ-módulo à direita M, o funtor $M \otimes_\Lambda - \colon \mathfrak{M}^e_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ é adjunto à esquerda do funtor $\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(M,-)\colon \mathfrak{Ab} \to \mathfrak{M}^e_\Lambda$.*

Assim, resultado acima implica em uma propriedade muito semelhante à do funtor Hom, que é expressada no Teorema 2.1.1.

Proposição 2.2.4. *Seja $N' \overset{\mu}{\hookrightarrow} N \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} N''$ uma sequência exata de Λ-módulos à esquerda. Então todo Λ-módulo à direita M induz uma sequência exata*

$$M \otimes_\Lambda N' \xrightarrow{\mu_*} M \otimes_\Lambda N \overset{\varepsilon_*}{\twoheadrightarrow} M \otimes_\Lambda N'' \longrightarrow 0,$$

onde $\mu_* = M \otimes_\Lambda \mu$ e $\varepsilon_* = M \otimes_\Lambda \varepsilon$.

2.3 Módulos livres, projetivos e injetivos

Seja M um Λ-módulo e seja S um subconjunto de M. Considere o conjunto M_0 de todos os elementos da forma

$$m = \sum_{s \in S} \lambda_s s,$$

onde cada $\lambda_s \in \Lambda$ é não nulo apenas para uma quantidade finita de termos. Se M_0 é um Λ-módulo, mais do que isso, é o menor submódulo de M que contém S.

Se para algum S o submódulo M_0 é igual a M, dizemos que S é um **conjunto de geradores** de M, além disso, se admite um conjunto finito de geradores, dizemos que ele é **finitamente gerado**. De todo modo, um conjunto de geradores S de M é chamado de **base** de M se todo elemento de $m \in M$ é escrito de maneira única da forma

$$m = \sum_{s \in S} \lambda_s s,$$

novamente com apenas uma quantidade finita de escalares não nulos. Note que um conjunto de geradores é uma base apenas se for linearmente independente (assim como no sentido da álgebra linear). Com isso, temos a seguinte definição.

Definição 2.3.1. Se S é uma base de um Λ-módulo M, então dizemos que M é **livre** pelo conjunto S. Dizemos que M é livre se é livre para algum subconjunto.

Exemplo 2.3.2. Todo espaço vetorial é um módulo livre, já que todo espaço vetorial possui base.

Podemos relacionar todo módulo livre a partir de uma soma direta. Isso é possível por meio do seguinte resultado:

Proposição 2.3.3. *Se M é um Λ-módulo livre por um conjunto S, então*

$$M \simeq \bigoplus_{s\in S} \Lambda.$$

Reciprocamente, $\bigoplus_{s\in S}\Lambda$ é livre pelo conjunto $\{\, 1_s \mid s \in S \,\}$, onde 1_s é a n-úpla com todas as entradas nulas exceto em s, a qual é igual a 1.

Ainda, temos um resultado importante que funciona, de certo modo, como uma "propriedade universal" de um módulo livre[1].

Proposição 2.3.4. *Seja M um Λ-módulo livre num conjunto S. Para cada Λ-módulo N e cada função injetora $f\colon S \hookrightarrow N$, existe um único homomorfismo de Λ-módulos $\varphi\colon M \to N$ que estende f.*

Embora não seja necessário neste trabalho, os módulos livres possuem uma propriedade bastante interessante que será apresentada na proposição abaixo.

Proposição 2.3.5. *Todo Λ-módulo M é o quociente de um módulo livre P.*

Voltando ao que ns interessa, vejamos mais uma propriedade dos módulos livre.

Proposição 2.3.6. *Seja M um Λ-módulo livre. Para todo homomorfismo sobrejetor $\varepsilon\colon A \twoheadrightarrow B$ de Λ-módulos e para todo homomorfismo $\gamma\colon M \to B$, existe um homomorfismo $\beta\colon M \to A$ tal que $\varepsilon \circ \beta = \gamma$.*

Esta propriedade é importante pelo seguinte motivo: se

$$0 \longrightarrow M' \xhookrightarrow{\mu} M \xrightarrow{\varepsilon} M'' \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta de Λ-módulos e P é um Λ-módulo livre, então a proposição acima nos garante que cada homomorfismo $\gamma\colon P \to B$ é induzido a partir de um homomorfismo $\beta\colon P \to A$. Junto do Teorema 2.1.1, isso nos garante que a seguinte sequência é exata

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(P, M') \xhookrightarrow{\mu_*} \mathrm{Hom}_\Lambda(P, M) \xrightarrow{\varepsilon_*} \mathrm{Hom}_\Lambda(P, M'') \longrightarrow 0,$$

ou seja, que ε_* é sobrejetivo. Portanto, os módulos livres fazem com que o funtor Hom "preserve" exatidão no sentido acima. Mais do que isso, qualquer módulo que satisfaça a propriedade acima fará o mesmo. Dessa maneira, é intuitivo que tais objetos sejam estudados.

[1] Destacamos esta informação aqui, pois podemos generalizar o conceito de objeto livre em uma categoria qualquer utilizando a mesma propriedade descrita em termos de categorias.

Definição 2.3.7. Um Λ-módulo P é dito **projetivo** se para todo homomorfismo sobrejetor $\varepsilon\colon M \to N$ de Λ-módulos e para todo homomorfismo $\gamma\colon P \to N$, existir um homomorfismo $\beta\colon P \to M$ tal que $\varepsilon \circ \beta = \gamma$. Em outras palavras, para todos homomorfismos ε e γ tal que ε é sobrejetivo, existe um único homomorfismo β de modo que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\beta"'] \arrow[d, "\gamma"] \\ M \arrow[r, two heads, "\varepsilon"] & N. \end{tikzcd}$$

Exemplo 2.3.8. Todo módulo livre é projetivo pela Proposição 2.3.6.

Proposição 2.3.9. *Uma soma direta $\bigoplus_{i\in I} P_i$ é projetiva se, e somente se, cada P_i também é.*

Existem várias caracterizações de módulos projetivos (uma delas, e a que motivou tal definição) sendo a mencionada anteriormente sobre a "preservação" de sequências exatas curtas a partir do funtor Hom.

Teorema 2.3.10. *Seja P um Λ-módulo. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

i. *P é projetivo;*

ii. *para toda sequência exata curta*

$$0 \longrightarrow M' \xhookrightarrow{\mu} M \xrightarrow{\varepsilon} M'' \longrightarrow 0$$

de Λ-módulos, a sequência

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(P, M') \xhookrightarrow{\mu_*} \mathrm{Hom}_\Lambda(P, M) \xrightarrow{\varepsilon_*} \mathrm{Hom}_\Lambda(P, M'') \longrightarrow 0$$

é exata;

iii. *se $\varepsilon\colon M \twoheadrightarrow P$ é sobrejetor, então existe um homomorfismo $\beta\colon P \to M$ tal que $\varepsilon\beta = \mathrm{id}_P$;*

iv. *P é um componente de soma direta de todo módulo o qual é um quociente;*

v. *P é um componente de soma direta em um módulo livre.*

Exemplo 2.3.11. Todo espaço vetorial é projetivo, já que módulo livre implica em módulo projetivo.

Exemplo 2.3.12. $\mathbb{Z}_n$ não é projetivo como $\mathbb{Z}$-módulo. Logo, um grupo abeliano finitamente gerado é projetivo se, e somente se, é livre.

Como a definição de módulo projetivo depende intrinsecamente de morfismos, podemos dualizar esta definição, obtendo assim um objeto semelhante, mas que possui características "duais" às características dos módulos projetivos. Vale ressaltar, entretanto, que a dualização de um conceito não garante que os resultados são obtidos apenas dualizando as provas. Portanto, podem existir algum resultado que não é verdadeiro para o caso do objeto dualizado e vice-versa.

Definição 2.3.13. Um Λ-módulo I é dito **injetivo** se para todo homomorfismo $\delta\colon M \to I$ e todo homomorfismo injetor $\mu\colon M \to N$, existir um homomorfismo $\alpha\colon N \to I$ tal que $\alpha \circ \mu = \delta$. Ou seja, tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, hook, "\mu"] \arrow[d, "\delta"'] & N \arrow[dl, dashed, "\alpha"] \\ I. & \end{tikzcd}$$

Podemos dualizar a Proposição 2.3.3 obtendo assim o resultado abaixo.

Proposição 2.3.14. *O produto direto de Λ-módulos $\prod_{j\in J} I_j$ é injetivo se, e somente se, cada I_j também é.*

2.4 O funtor Ext

Agora, construiremos um funtor que será fundamental para a definição de cohomologia mais à frente. Isso se deve ao fato de que, como veremos mais tarde, este funtor trata-se de um *funtor derivado*. Estes objetos são como o coração da álgebra homológica, e seu papel é intrínseco nos estudos desta área.

Dizemos que uma sequência exata curta de Λ-módulos

$$0 \longrightarrow R \overset{\mu}{\hookrightarrow} P \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} A \longrightarrow 0$$

é dita ser uma **apresentação projetiva** de A se P é projetivo. Dado um Λ-módulo B, podemos induzir uma sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(A,B) \overset{\varepsilon^*}{\hookrightarrow} \mathrm{Hom}_\Lambda(P,B) \xrightarrow{\mu^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(R,B)$$

de grupos abelianos pelo Teorema 2.1.1.

Como mencionamos anteriormente, μ^* não é sobrejetor, necessariamente. Logo, podemos nos perguntar o "quanto falta" para que isso aconteça. Desse modo, definimos para os módulos A e B, e para a apresentação projetiva escolhida de A, o grupo abeliano

$$\mathrm{Ext}_\Lambda(A,B) := \operatorname{coker} \mu^*.$$

Inicialmente, o grupo abeliano acima depende da escolha da apresentação projetiva de A, porém, pode-se provar que, na verdade, ele não depende. Por conta disso, não iremos usar nenhum tipo de notação para representar qual apresentação projetiva foi escolhida para dar origem a tal objeto. Um elemento $\varphi\colon R \to B$ de $\mathrm{Ext}^{\varepsilon}_{\Lambda}(A, B)$ será representado por $[\varphi]$.

A partir dessa definição, obtemos o fato de que a sequência

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Lambda}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Lambda}(P, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Lambda}(R, B) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\Lambda}(A, B) \longrightarrow 0$$

é exata.

Agora, dado um homomorfismo de Λ-módulos $\beta\colon B \to B'$, podemos facilmente induzir um homomorfismo de grupos abelianos $\beta_*\colon \mathrm{Ext}_{\Lambda}(A, B) \to \mathrm{Ext}_{\Lambda}(A, B')$. Desse modo, podemos provar que esta construção faz de $\mathrm{Ext}_{\Lambda}(A, -)$ um funtor covariante.

Dado um homomorfismo de Λ-módulos $\alpha\colon A \to A'$, escolha duas apresentações projetivas

$$0 \longrightarrow R \hookrightarrow P \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} A \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow R' \hookrightarrow P' \overset{\varepsilon'}{\twoheadrightarrow} A' \longrightarrow 0$$

de A e A', respectivamente. Uma vez que P é projetivo, existe um homomorfismo de Λ-módulos $\pi\colon P \to P'$, que induz um homomorfismo de Λ-módulos $\sigma\colon R \to R'$, fazendo o diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R \arrow[r, hook] \arrow[d, "\sigma"] & P \arrow[r, two heads, "\varepsilon"] \arrow[d, "\pi"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R' \arrow[r, hook] & P' \arrow[r, two heads, "\varepsilon'"] & A' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

comutar. Note que R está mergulhado em P (e R' em P'), portanto σ é obtido restringindo-se π na imagem de R em P. Mais ainda, σ está de fato bem definida (isto é, σ vai de R a R', e não a P') pela exatidão das linhas do diagrama acima. Assim, dizemos que π **eleva** α.

Junto de σ, o homomorfismo π induz um homomorfismo de grupos abelianos

$$\pi^* = (\alpha; P, P')\colon \mathrm{Ext}_{\Lambda}(A', B) \to \mathrm{Ext}_{\Lambda}(A, B),$$

que não depende da escolha de π, apenas do homomorfismo α tomado. Definimos então $\mathrm{Ext}_{\Lambda}(\alpha, B)\colon (\alpha; P, P')$. Desse modo, podemos provar que $\mathrm{Ext}_{\Lambda}(-, B)$ é um funtor contravariante da categorias dos Λ-módulos para a categoria dos grupos abelianos.

Em resumo:

Teorema 2.4.1. $\mathrm{Ext}_{\Lambda}(-, -)$ *é um bifuntor da categoria dos Λ-módulos à categoria dos grupos abelianos. Ele é contravariante na primeira entrada e covariante na segunda.*

2.5 O funtor Tor

Na seção anterior, construímos o funtor Ext a partir do funtor Hom. Sabendo da relação de adjunção entre o funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(-,-)$ e $- \otimes_\Lambda -$, é intuitivo pensarmos em construir um objeto parecido, porém a partir do funtor do produto tensorial. Esta construção será feita nesta seção.

Novamente, começamos a partir de uma apresentação projetiva

$$0 \longrightarrow R \xhookrightarrow{\mu} P \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} A \longrightarrow 0.$$

Em seguida, dado um Λ-módulo B, obtemos uma sequência exata

$$R \otimes_\Lambda B \xrightarrow{\mu_*} P \otimes_\Lambda B \overset{\varepsilon_*}{\twoheadrightarrow} A \otimes_\Lambda B \longrightarrow 0$$

a partir do Teorema 2.2.4. Desse modo, assim como fizemos no caso do funtor Ext, definimos

$$\mathrm{Tor}^\Lambda(A,B) := \ker \mu_*.$$

Mais uma vez, pode-se provar que tal grupo abeliano não depende da apresentação projetiva escolhida, portanto não iremos utilizar nenhuma notação para indicar tal apresentação.

Uma propriedade importante garantida pela definição acima é que a sequência

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}^\Lambda(A,B) \longrightarrow R \otimes_\Lambda B \longrightarrow P \otimes_\Lambda B \longrightarrow A \otimes_\Lambda B \longrightarrow 0$$

é exata, muito similar ao que acontece com o funtor Ext.

Note que dado um homomorfismo $\beta\colon B \to B'$, podemos induzir um homomorfismo $\beta_*\colon \mathrm{Tor}^\Lambda(A,B) \to \mathrm{Tor}^\Lambda(A,B')$ a partir do homomorfismo induzido $\beta_*\colon R \otimes_\Lambda B \to R \otimes_\Lambda B'$. Analogamente ao caso do funtor Ext, dado um homomorfismo $\alpha\colon A \to A'$, podemos induzir um homomorfismo $\alpha_*\colon \mathrm{Tor}^\Lambda(A',B) \to \mathrm{Tor}^\Lambda(A,B)$. Desse modo, temos:

Teorema 2.5.1. $\mathrm{Tor}^\Lambda(-,-)$ *é um bifuntor da categoria dos Λ-módulos à categoria dos grupos abelianos. Ele é contravariante na primeira entrada e covariante na segunda.*

Capítulo 3

Álgebra (Co)Homológica

Aqui chegamos na parte mais fundamental desta parte do trabalho, no sentido de que tudo o que faremos adiante relacionado à homologia virá dos conceitos aqui apresentados. Nosso objetivo é construir os funtores derivados. Para tal tarefa, precisaremos de alguns conceitos, como por exemplo complexos de cadeias e cocadeias e resoluções. É importante mencionarmos que Hilton e Stammbach em [3] focam em alguns casos particulares de definições e construções. Por exemplo, eles enfatizam a construção de um funtor derivado a esquerda a partir de um funtor aditivo covariante. Desse modo, afim de diferenciarmos a nossa abordagem à dos autores, iremos focar em casos distintos dos deles, embora que os mencionemos.

3.1 Complexos de (co)cadeias

Recorde que $\mathfrak{M}_\Lambda^\mathbb{Z}$ é a categoria dos Λ-módulos graduados por $\mathbb{Z}$. Um objeto $\mathbf{M}$ em $\mathfrak{M}_\Lambda^\mathbb{Z}$ é uma família $\{ M_n \}_{n\in\mathbb{Z}}$ de Λ-módulos. Um homomorfismo de Λ-módulos graduados de grau p é um homomorfismo $\varphi\colon \mathbf{M} \to \mathbf{M}'$ é uma família de homomorfismo de Λ-módulos $\{\varphi_n\colon M_n \to M'_{n+p}\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Definição 3.1.1. Um **complexo de cocadeias** $\mathbf{C} = (C^n, \delta^n)$ sobre Λ é um objeto em $\mathfrak{M}_\Lambda^\mathbb{Z}$ junto de um endomorfismo $\delta\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ de grau +1 tal que $\delta\delta = 0$, isto é, uma família de Λ-módulos $\{ C^n \}_{n\in\mathbb{Z}}$ e uma família de homomorfismos $\{\delta^n\colon C^n \to C^{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, tais que $\delta^{n+1}\delta^n = 0$. Em outras palavras, $\operatorname{im}\delta^n \subseteq \ker\delta^{n+1}$. Denotamos tal cadeia por

$$\mathbf{C}\colon \cdots \longrightarrow C^{n-1} \xrightarrow{\delta^{n-1}} C^n \xrightarrow{\delta^n} C^{n+1} \longrightarrow \cdots .$$

O endomorfismo δ (assim como suas componentes δ^n) são chamados de **diferenciais** ou de **cobordos**.

Nesse contexto, um **morfismo de complexos de cocadeia**, ou simplesmente **aplicação de cocadeia**, é um homomorfismo $\boldsymbol{\varphi}\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ de grau 0 em $\mathfrak{M}_\Lambda^\mathbb{Z}$ tal que $\boldsymbol{\varphi}\delta = \tilde{\delta}\boldsymbol{\varphi}$, onde δ

denota o diferencial em $\mathbf{C}$ e $\tilde{\delta}$ o de $\mathbf{D}$. Pictoramente, $\boldsymbol{\varphi}$ é uma família de homomorfismos $\{\varphi^n : C^n \to D^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de modo que o diagrama

$$\begin{tikzcd} C^n \arrow[r, "\delta^n"] \arrow[d, "\varphi^n"] & C^{n+1} \arrow[d, "\varphi^{n+1}"] \\ D^n \arrow[r, "\tilde{\delta}^n"] & D^{n+1} \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

comuta para todo $n \in \mathbb{Z}$. Para evitarmos que a notação fique carregada, iremos denotar os diferencias de qualquer complexo de cocadeias por δ.

Assim, temos que a coleção de complexos de cocadeias junto da coleção das aplicações de cocadeias formam uma categoria abeliana. Note que se $F : \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{M}_{\Lambda'}$ é um funtor covariante aditivo, e se $\mathbf{C} = (C^n, \delta^n)$ é um complexo de cocadeias sobre Λ, então $F(\mathbf{C}) = (F(C^n), F(\delta^n))$ é um complexo de cocadeias sobre Λ'. Logo, F induz um funtor na categoria dos complexos de cocadeias.

Agora, vamos definir cohomologia. Note que, como $\operatorname{im}\delta^{n-1} \subseteq \ker\delta^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, podemos considerar o módulo

$$H^n(\mathbf{C}) := \frac{\ker\delta^n}{\operatorname{im}\delta^{n-1}}.$$

Neste caso, temos um módulo graduado $H(\mathbf{C}) = \{\, H^n(\mathbf{C}) \,\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Chamamos o $H^n(\mathbf{C})$ de ***n*-ésimo módulo de cohomologia** de $\mathbf{C}$. No caso em que $\Lambda = \mathbb{Z}$, trocaremos o termo por *n-ésimo grupo de cohomologia* de $\mathbf{C}$.

Pelo diagrama 3.1, uma aplicação de cocadeia $\boldsymbol{\varphi} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ induz um homomorfismo de grau zero $H(\boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{\varphi}^* : H(\mathbf{C}) \to H(\mathbf{D})$ de módulos graduados que está bem definido. Desse modo, $H(-)$ torna-se um funtor da categoria dos complexos de cocadeias à categoria dos Λ-módulos graduados, chamado de **funtor de cohomologia**. Em particular, cada $H^n(-)$ é um funtor da categoria dos complexos de cocadeias à categoria $\mathfrak{M}_\Lambda$.

Dualizando estes conceitos, obtemos a seguinte definição:

Definição 3.1.2. Um **complexo de cadeias** $\mathbf{C} = (C_n, \partial_n)$ sobre Λ é um objeto em $\mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}}$ junto de um endomorfismo $\partial : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ de grau -1 tal que $\partial\partial = 0$, isto é, uma família de Λ-módulos $\{\, C_n \,\}_{n\in\mathbb{Z}}$ e uma família de homomorfismos $\{\partial_n : C_n \to C_{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tais que $\partial_n\partial_{n+1} = 0$. Em outras palavras, $\operatorname{im}\partial_{n+1} \subseteq \ker\partial_n$. Denotamos tal cadeia por

$$\mathbf{C} : \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots .$$

O endomorfismo ∂ (assim como suas componentes δ_n) são chamados de **diferenciais** ou de **bordos**.

Definimos os **morfismos de complexos de cadeias** ou **aplicações de cadeias** de maneira análoga aos de cocadeias. Dado um complexo de cadeia $\mathbf{C} = (C_n, \partial_n)$, definimos o **módulo de homologia** $H(\mathbf{C}) = \{\, H_n(\mathbf{C}) \,\}$ por

$$H_n(\mathbf{C}) \coloneqq \frac{\ker \partial_n}{\operatorname{im} \partial_{n+1}},$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Com essas definições, é fácil perceber que, assim como no caso de cohomologia, $H(-)$ torna-se um funtor, chamado de **funtor de homologia**.

Enfatizamos que estamos fixando a seguinte notação: para conceitos e objetos relacionados à cohomologia, sempre usaremos o superíndice, enquanto para homologia, o índice. Quando não for usado nenhum dos dois, isto é, quando for escrito somente $H(-)$, significa que podemos interpretar a afirmação tanto como homologia como cohomologia,

Exemplo 3.1.3. Seja M e N Λ-módulos e considere

$$0 \longrightarrow R \xhookrightarrow{\mu} P \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

uma apresentação projetiva de M. Definimos o complexo de cocadeias $\mathbf{C}$ de grupos abelianos como abaixo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_\Lambda(P,N) \arrow[r, "\mu^*"] \arrow[d, equal] & \operatorname{Hom}_\Lambda(R,N) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^0 \arrow[r, "\delta^0"] & C^1 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Assim, para todo $n \neq 0,1$, temos que $C^n = 0$. É fácil perceber que

$$\begin{aligned}
H^0(\mathbf{C}) &= \operatorname{Hom}_\Lambda(M,N),\\
H^1(\mathbf{C}) &= \operatorname{Ext}_\Lambda(M,N),\\
H^n(\mathbf{C}) &= 0, \forall n \neq 0,1.
\end{aligned}$$

Desse modo, obtemos os grupos abelianos $\operatorname{Hom}_\Lambda(M,N)$ e $\operatorname{Ext}_\Lambda(M,N)$ como grupos de cohomologia de um complexo de cocadeia conveniente $\mathbf{C}$. Este procedimento será usado mais a frente para generalizarmos $\operatorname{Ext}_\Lambda(M,N)$.

Uma vez que a categoria dos complexos de (co)cadeia é abeliana, podemos falar de sequências exatas de complexos de (co)cadeias. Assim, uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \mathbf{A} \xhookrightarrow{\varphi} \mathbf{B} \xrightarrow{\psi} \mathbf{C} \longrightarrow 0$$

de complexos de cocadeia é exata se, e somente se, a sequência exata curta de Λ-módulos

$$0 \longrightarrow A^n \xhookrightarrow{\varphi^n} B^n \xrightarrow{\psi^n} C^n \longrightarrow 0$$

é exata para todo $n \in \mathbb{Z}$. Obviamente, o mesmo vale para sequências exatas curtas de complexos de cadeias. Apresentamos o seguinte resultado:

Teorema 3.1.4. *Dada uma sequência exata curta*

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{A} \overset{\varphi}{\hookrightarrow} \boldsymbol{B} \overset{\psi}{\twoheadrightarrow} \boldsymbol{C} \longrightarrow 0$$

de complexo de cadeias (cocadeias), existe um morfismo de módulos graduados de grau -1 $(+1)$ $\omega\colon H(\boldsymbol{C}) \to H(\boldsymbol{A})$ *tal que o triângulo*

$$\begin{tikzcd} H(\boldsymbol{A}) \arrow[rr, "\varphi_*"] & & H(\boldsymbol{B}) \arrow[dl, "\psi_*"] \\ & H(\boldsymbol{C}) \arrow[ul, "\omega"] & \end{tikzcd}$$

é exato. Chamamos ω *de* ***homomorfismo de conexão****.*

Pictoricamente, o teorema acima nos garante que, para complexos de cocadeias, a sequência

$$\cdots \xrightarrow{\omega^{n-1}} H^n(\mathbf{A}) \xrightarrow{\varphi^*} H^n(\mathbf{B}) \xrightarrow{\psi^*} H^n(\mathbf{C}) \xrightarrow{\omega^n} H^{n+1}(\mathbf{A}) \longrightarrow \cdots$$

é exata, enquanto para o caso de complexos de cadeia, a sequência

$$\cdots \xrightarrow{\omega_{n+1}} H_n(\mathbf{A}) \xrightarrow{\varphi^*} H_n(\mathbf{B}) \xrightarrow{\psi^*} H_n(\mathbf{C}) \xrightarrow{\omega_n} H_{n-1}(\mathbf{A}) \longrightarrow \cdots$$

é exata.

3.2 Homotopia

Dadas dois complexos de (co)cadeias **C** e **D**, é natural nos perguntarmos o que ocorre com duas aplicações de (co)cadeia $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ ao considerarmos os homomorfismos induzidos nos módulos de (co)homologia $H(\mathbf{C})$ e $H(\mathbf{D})$. Assim, esta seção será focada em introduzirmos o conceito de *homotopia*, que é usado para estudar esses casos e, principalmente, quando as aplicações de (co)cadeia serão equivalentes na (co)homologia.

Definição 3.2.1. Dados duas aplicações de cocadeia $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, uma **homotopia** $\Sigma\colon \boldsymbol{\varphi} \to \boldsymbol{\psi}$ entre $\boldsymbol{\varphi}$ e $\boldsymbol{\psi}$ é um homomorfismo de módulos graduados $\Sigma\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ de grau -1 tal que $\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\varphi} = \delta\Sigma + \Sigma\delta$. Em outras palavras, tal que

$$\psi^n - \varphi^n = \delta^{n-1}\Sigma^n + \Sigma^{n+1}\delta^n,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Neste caso, dizemos que $\boldsymbol{\varphi}$ e $\boldsymbol{\psi}$ são **homotópicas**, e escrevemos $\boldsymbol{\varphi} \simeq \boldsymbol{\psi}$ se existir uma homotopia $\Sigma\colon \boldsymbol{\varphi} \to \boldsymbol{\psi}$.

A vantagem de definirmos este conceito é que aplicações homotópicas induzem o mesmo homomorfismo na cohomologia:

Proposição 3.2.2. *Se duas aplicações de cocadeia* $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi} \colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ *são homotópicas, então* $H(\boldsymbol{\varphi}) = H(\boldsymbol{\psi}) \colon H(\boldsymbol{C}) \to H(\boldsymbol{D})$.

Demonstração. Seja $\in \ker \delta^n$. Como $\boldsymbol{\varphi}$ e $\boldsymbol{\psi}$ são homotópicas, então existe uma homotopia $\Sigma \colon \boldsymbol{\varphi} \to \boldsymbol{\psi}$. Note que

$$(\psi^n - \varphi^n)(x) = \delta^{n-1}\Sigma^n(x) + \Sigma^{n+1}\delta^n(x) = \delta^{n-1}\Sigma^n(x).$$

Logo, $\psi^n(x) - \varphi^n(x) \in \operatorname{im} \delta^{n-1}$, donde segue que $\varphi^n(x)$ e $\psi^n(x)$ estão na mesma classe de homologia. ■

É fácil de perceber que $\simeq$ é, de fato, uma relação de equivalência. Mais do que isso, o resultado a seguir nos mostra que tal relação é "compatível" com a composição de homotopias.

Lema 3.2.3. *Sejam* $\boldsymbol{\varphi} \simeq \boldsymbol{\psi} \colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ *e* $\boldsymbol{\varphi'} \simeq \boldsymbol{\psi'} \colon \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{E}$ *aplicações de cocadeias. Então*

$$\boldsymbol{\varphi'}\boldsymbol{\varphi} \simeq \boldsymbol{\psi'}\boldsymbol{\psi} \colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{E}.$$

Por fim, apresentamos um resultado sobre a interação de um funtor aditivo a aplicações homotópicas. Este resultado implica em um corolário bastante útil para o que faremos a seguir.

Lema 3.2.4. *Seja* $F \colon \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{M}_{\Lambda'}$ *um funtor aditivo. Se* $\boldsymbol{C}$ *e* $\boldsymbol{D}$ *são complexos de cocadeia de* Λ*-módulos e* $\boldsymbol{\varphi} \simeq \boldsymbol{\psi} \colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$, *então* $F(\boldsymbol{\varphi}) \simeq F(\boldsymbol{\psi}) \colon F(\boldsymbol{C}) \to F(\boldsymbol{D})$.

Demonstração. De fato, considere a homotopia $\Sigma \colon \boldsymbol{\varphi} \to \boldsymbol{\psi}$. Então

$$F(\psi^n) - F(\varphi^n) = F(\psi^n - \varphi^n) = F(\delta^{n-1}\Sigma^n + \Sigma^{n+1}\delta^n) = F(\delta^{n-1})F(\Sigma^n) + F(\Sigma^{n+1})F(\delta^n),$$

donde segue que $F(\Sigma) \colon F(\boldsymbol{\varphi}) \to F(\boldsymbol{\psi})$ é uma homotopia. ■

Corolário 3.2.5. *Se* $\boldsymbol{\varphi} \simeq \boldsymbol{\psi} \colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ *e* F *é um funtor aditivo, então* $H(F(\boldsymbol{\varphi})) = H(F(\boldsymbol{\psi})) \colon H(F(\boldsymbol{C})) \to H(F(\boldsymbol{D}))$.

Demonstração. O resultado segue diretamente da Porposição 3.2.2 e do Lema 3.2.4. ■

3.3 Resoluções

Nesta seção, introduziremos um conceito novo que será usado para que possamos definir os funtores derivados na próxima seção: as *resoluções*. A vantagem é que todo Λ-módulo possui as resoluções necessárias, como revemos a seguir.

Definição 3.3.1. Um complexo de cadeia

$$\mathbf{C} \colon \cdots \longrightarrow C_n \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0 \longrightarrow 0,$$

com $C_n = 0$ para todo $n < 0$, é dito:

i. **projetivo**, se C_n é projetivo para todo $n \in \mathbb{N}$;

ii. **acíclico**, se $H_n(\mathbf{C}) = 0$ para todo $n \geq 1$.

Note que a definição acima implica que um complexo de cadeia $\mathbf{C}$ é acíclico se, e somente se, a sequência

$$\cdots \longrightarrow C_n \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0 \longrightarrow H_0(\mathbf{C}) \longrightarrow 0$$

é exata. Temos o seguinte resultado:

Teorema 3.3.2. *Seja*

$$\boldsymbol{C}\colon \cdots \longrightarrow C_n \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0$$

projetivo e seja

$$\boldsymbol{D}\colon \cdots \longrightarrow D_n \longrightarrow D_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow D_0$$

acíclico. Então existe, para todo homomorfismo $\varphi\colon H_0(\boldsymbol{C}) \to H_0(\boldsymbol{D})$, uma aplicação de cadeia $\boldsymbol{\varphi}\colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ que induz φ. Além disso, duas aplicações de cadeia que induzem φ são homotópicas.

Um complexo de cadeia projetivo e acíclico $\mathbf{P}$ junto de um isomorfismo de Λ-módulos $H_0(\mathbf{P}) \xrightarrow{\sim} M$ é chamado de **resolução projetiva** de M.

Lema 3.3.3. *Existe uma resolução projetiva para todo Λ-módulo M.*

Embora o lema acima não tenha sido demonstrado, é importante mencionarmos que a existência de uma resolução projetiva é obtida a partir de uma apresentação projetiva. Logo, uma resolução projetiva existe se existir ao menos uma apresentação projetiva de M.

Proposição 3.3.4. *Duas resoluções projetivas de M são canonicamente do mesmo tipo de homotopia.*

Agora, podemos pensar em dualizar as definições e resultados anteriores.

Definição 3.3.5. Um complexo de cocadeia

$$\mathrm{C}\colon 0 \longrightarrow C_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_n \longrightarrow C_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

com $C_n = 0$ para todo $n < 0$, é dito:

i. **injetivo**, se C_n é injetivo para todo $n \in \mathbb{N}$;

ii. **acíclico**, se $H^n(\mathbf{C}) = 0$ para todo $n \geq 1$.

Temos, assim, um resultado similar ao Teorema 3.3.2.

Teorema 3.3.6. *Seja*

$$\boldsymbol{C}\colon C_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_n \longrightarrow C_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

acíclico e seja

$$\boldsymbol{D}\colon D_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow D_n \longrightarrow D_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

injetivo. Então existe, para todo homomorfismo $\varphi\colon H^0(\boldsymbol{C}) \to H^0(\boldsymbol{D})$, uma aplicação de cocadeia $\boldsymbol{\varphi}\colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ que induz φ. Além disso, duas aplicações de cocadeia que induzem φ são homotópicas.

Intuitivamente, um complexo de cocadeia $\mathbf{I}$ injetivo e acíclico junto de um isomorfismo $H^0(\mathbf{I}) \xrightarrow{\sim} M$ é chamado de **resolução injetiva** de M. Assim como no caso projetivo, a existência de uma resolução injetiva é intrínseca a existência de apresentações injetivas. Concluímos esta seção com o seguinte resultado dual:

Proposição 3.3.7. *Duas resoluções injetivas de M são canonicamente do mesmo tipo de homotopia.*

3.4 Funtores derivados

Neta seção, construiremos os objetos mais importantes da álgebra homológica: os funtores derivados. Iremos trabalhar apenas com funtores aditivos da forma $T\colon \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$, porém, vale mencionar que as construções feitas a seguis são válidas para funtores aditivos com o contradomínio sendo qualquer categoria abeliana.

Começamos com um funtor aditivo contravariante $T\colon \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$. Dado um Λ-módulo M, tome uma resolução projetiva $\mathbf{P}$ de M. Aplicando o funtor T, obtemos um complexo de cocadeias

$$T(\mathbf{P})\colon T(P_0) \longrightarrow \cdots \longrightarrow T(P_{n-1}) \longrightarrow T(P_n) \longrightarrow \cdots$$

de grupos abelianos. Assim, definimos

$$R^n_{\mathbf{P}}(T(M)) := H^n(T(\mathbf{P})),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. O índice $\mathbf{P}$ é para explicitar que o funtor foi obtido a partir da resolução projetiva $\mathbf{P}$.

Agora, dado um homomorfismo de Λ-módulos $\alpha\colon M \to M'$, considere duas resoluções projetivas $\mathbf{P}$ e $\mathbf{P'}$ de M e M', respectivamente. Pelo Teorema 3.3.2, existe uma aplicação de cadeia $\boldsymbol{\alpha}\colon \mathbf{P} \to \mathbf{P'}$ que induz α, determinado a menos de homotopia. Assim, o Corolário 3.2.5 nos garante que obtemos um homomorfismo de grupos abelianos

$$\alpha(\mathbf{P}, \mathbf{P'})\colon R^n_{\mathbf{P}}(T(M)) \to R^n_{\mathbf{P'}}(T(M'))$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, que independe de $\boldsymbol{\alpha}$.

Sejam $\alpha\colon M \to M'$ e $\alpha'\colon M' \to M''$ homomorfismos de Λ-módulos e considere $\mathbf{P}$, $\mathbf{P'}$ e $\mathbf{P''}$ resoluções projetivas de M, M' e M'', respectivamente. Desse modo, a composição $\alpha'\alpha\colon M \to M''$ induz uma aplicação $\alpha'\alpha(\mathbf{P},\mathbf{P''})\colon R^n_{\mathbf{P}}(T(M)) \to R^n_{\mathbf{P''}}(T(M''))$, pelos mesmos argumentos que vimos acima. Tal aplicação pode ser construída por meio de uma aplicação de cocadeia $\mathbf{P} \to \mathbf{P''}$. Em particular, podemos escolher a composição de $\boldsymbol{\alpha}\colon \mathbf{P} \to \mathbf{P''}$, que induz α, e $\boldsymbol{\alpha'}\colon \mathbf{P'} \to \mathbf{P''}$, que induz α'. Assim, obtemos

$$(\alpha'\alpha)(\mathbf{P},\mathbf{P''}) = \alpha'(\mathbf{P'},\mathbf{P''}) \circ \alpha(\mathbf{P},\mathbf{P'}). \tag{3.2}$$

Ainda, é claro que $\mathrm{id}_M\colon M \to M$ o que vimos acima implica que

$$\mathrm{id}_M(\mathbf{P},\mathbf{P}) = \mathrm{id}_{R^n_{\mathbf{P}}(T(M))}. \tag{3.3}$$

Com essas construções, obtemos:

Proposição 3.4.1. *Sejam $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{Q}$ duas resoluções projetivas de M. Então existe um isomorfismo canônico*

$$\eta = \eta_{\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}}\colon R^n_{\boldsymbol{P}}(T(M)) \xrightarrow{\sim} R^n_{\boldsymbol{Q}}(T(M)),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dadas três resoluções projetivas $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$ de M, obtemos que o isomorfismo natural da proposição acima possui a propriedade que $\eta_{\mathbf{Q},\mathbf{R}}\eta_{\mathbf{P},\mathbf{Q}} = \eta_{\mathbf{P},\mathbf{R}}$ e $\eta_{\mathbf{P},\mathbf{P}} = \mathrm{id}$, pelas igualdades 3.2 e 3.3. Sendo assim, podemos identificar os grupos abelianos $R^n_{\mathbf{P}}(T(M))$ e $R^n_{\mathbf{P}}(T(M))$ via η. Desse modo, iremos, a partir de agora, retirar o índice $\mathbf{P}$ e escrever apenas $R^n(T(M))$ ao invés de $R^n_{\mathbf{P}}(T(M))$.

Finalmente, dado um homomorfismo de Λ-módulos $\alpha\colon M \to M'$, associaremos a ele o homomorfismo de grupos abelianos

$$\alpha_* = \alpha(\mathbf{P},\mathbf{P'})\colon R^n(T(M)) \to R^n(T(M')).$$

Podemos provar que α_* é compatível com η. Assim, as propriedades 3.2 e 3.3 fazem com que $R^n(T(M))$ seja um funtor. Com isso, terminamos a nossa construção e podemos definir:

Definição 3.4.2. Seja $T\colon \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ um funtor aditivo contravariante. Então $R^n(T)\colon \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, é chamado de ***n*-ésimo funtor derivado à direita** de T. Os objetos obtidos de $R^n(T)$ em um Λ-módulo M é computado a partir do seguinte algoritmo: tome uma resolução projetiva $\mathbf{P}$ de M, considere o complexo de cocadeia $T(\mathbf{P})$ e então tome a cohomologia $R^n(T(M)) = H^n(T(\mathbf{P}))$.

É intuitivo nos perguntarmos se a construção acima é dualizável. A resposta para essa pergunta é sim. Nesse caso, consideramos uma resolução injetiva $\mathbf{I}$ de M, aplicamos $T\colon \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ (um funtor contravariante aditivo), obtendo assim um complexo de grupos abelianos

$$T(\mathbf{I})\colon \cdots \longrightarrow T(I_{n+1}) \longrightarrow T(I_n) \longrightarrow \cdots \longrightarrow T(I_0).$$

Agora, basta definirmos $L_n(T(M)) := H_n(T(\mathbf{I}))$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, definimos um funtor que é chamado de **funtor derivado à esquerda** de T. Note que de fato $F_n(T)$ define um funtor pelos mesmos argumentos usados anteriormente (com exceção do Teorema 3.3.2, que precisa ser substituído pelo Teorema 3.3.6).

E para funtores aditivos covariantes? Neste caso, o processo também é um mesmo, porém com as resoluções "trocadas". Explicitamente, se T é covariante aditivo, tomamos uma resolução projetiva $\mathbf{P}$ de M, consideramos o complexo de grupos abelianos $T(\mathbf{P})$ e definimos $L_n(T(M)) := H_n(T(\mathbf{P}))$, para todo $n \in \mathbb{N}$, o funtor derivado à esquerda de T. Se $\mathbf{I}$ é uma resolução injetiva de M, então o funtor derivado à direita de T é dado por $R^n(T(M)) := H^n(T(\mathbf{I}))$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora, iremos apresentar duas definições antes de começarmos a apresentar alguns resultados básicos desses funtores.

Definição 3.4.3. Considere um funtor covariante $T\colon \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$. Se para toda sequência exata curta

$$0 \longrightarrow M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

obtivermos

$$T(M') \longrightarrow T(M) \twoheadrightarrow T(M'') \longrightarrow 0,$$

então dizemos que T é **exato à direita**. Analogamente, se obtivermos

$$0 \longrightarrow T(M') \hookrightarrow T(M) \longrightarrow T(M''),$$

então dizemos que T é **exato à esquerda**.

Definição 3.4.4. Considere um funtor contravariante $T\colon \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$. Se para toda sequência exata curta

$$0 \longrightarrow M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

obtivermos

$$T(M'') \longrightarrow T(M) \twoheadrightarrow T(M') \longrightarrow 0,$$

então dizemos que T é **exato à direita**. Analogamente, se obtivermos

$$0 \longrightarrow T(M'') \hookrightarrow T(M) \longrightarrow T(M'),$$

então dizemos que T é **exato à esquerda**.

Exemplo 3.4.5. Pela Proposição 2.2.4, para todo Λ-módulo N, temos que $N \otimes_\Lambda -$ é um funtor exato à direita. Analogamente, o Teorema 2.1.1 implica que $\mathrm{Hom}_\Lambda(N, -)$ e $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, N)$ são exatos à esquerda.

A proposição abaixo mostra que a exatidão de T garante que o 0-ésimo funtor derivado seja bem mais simples do que normalmente é.

Proposição 3.4.6. *Se $T\colon \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ é exato à direita, então $L_0(T)$ e T são naturalmente equivalentes. Se T é exato à esquerda, então $R^0(T)$ e T são naturalmente equivalentes.*

Já a proposição abaixo nos garante que objetos projetivos e injetivos são compatíveis de uma maneira trivial com os funtores derivados. Explicitamente, temos que:

Proposição 3.4.7. *Se $T\colon \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ é covariante, então $L_n(T(P)) = 0$ e $R^n(T(I)) = 0$ para todo $n = 1, 2, \ldots$, se P for projetivo e I for injetivo. Neste caso, $L_0(T(P)) = T(P)$ e $R^0(T(I)) = T(I)$. Se T é contravariante, então $L_n(T(I)) = 0$ e $R^n(T(P)) = 0$ para todo $n = 1, 2, \ldots$, se P for projetivo e I for injetivo. Novamente neste caso, $L_0(T(I)) = T(I)$ e $R^0(T(P)) = T(P)$.*

Para finalizarmos esta parte de propriedades básicas de funtores derivados, temos:

Proposição 3.4.8. *Os funtores $L_n(T)\colon \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ e $R^n(T)\colon \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ são aditivos para todo $n \in \mathbb{N}$.*

No decorrer deste trabalho, vimos que as sequências exatas curtas são bastante úteis nos estudos da álgebra homológica. De fato, em diversas situações conseguimos induzir complexo a partir delas. O resultado abaixo mostrará que o mesmo pode ser feito utilizando funtores derivados.

Teorema 3.4.9. *Seja $T\colon \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ um funtor aditivo e seja*

$$0 \longrightarrow M' \overset{\alpha}{\hookrightarrow} M \overset{\alpha'}{\twoheadrightarrow} M'' \longrightarrow 0$$

uma sequência exata curta. Então existem homomorfismos de conexão

$$\omega_n\colon L_n(T(M'')) \to L_{n-1}(T(M')) \qquad e \qquad \xi^n\colon R^n(T(M'')) \to R^{n+1}(T(M')),$$

com $n = 1, 2, \ldots$, tais que as sequências

$$\cdots \longrightarrow L_n(T(M')) \xrightarrow{\alpha_*} L_n(T(M)) \xrightarrow{\alpha'_*} L_n(T(M'')) \xrightarrow{\omega_n} L_{n-1}(T(M')) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow L_1(T(M'')) \xrightarrow{\omega_1} L_0(T(M')) \xrightarrow{\alpha_*} L_0(T(M)) \xrightarrow{\alpha'_*} L_0(T(M'')) \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow R^0(T(M')) \xrightarrow{\alpha^*} R^0(T(M)) \xrightarrow{\alpha'^*} R^0(T(M'')) \xrightarrow{\xi^0} R^1(T(M')) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow R^n(T(M')) \xrightarrow{\alpha^*} R^n(T(M)) \xrightarrow{\alpha'^*} R^n(T(M'')) \xrightarrow{\xi^n} R^{n+1}(T(M')) \longrightarrow \cdots$$

são exatas.

Agora, o que podemos dizer no caso em que temos duas sequências exatas curtas "compatíveis" entre si? E se quisermos partir de dois funtores naturalmente equivalentes, o que podemos concluir sobre as sequências exatas longas induzidas? Temos a seguinte proposição que responde estas perguntas.

Proposição 3.4.10. *Seja $\tau\colon T \to T'$ uma transformação natural entre dois funtores contravariantes aditivos $T, T'\colon \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ e considere o diagrama comutativo*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, hook, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi'"] & M \arrow[r, two heads, "\alpha'"] \arrow[d, "\varphi"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, hook, "\beta"] & N \arrow[r, two heads, "\beta'"] & N'' \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

onde as linhas são exatas. Então os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & R^n(T(M'')) \arrow[r, "\alpha^*"] \arrow[d, "\tau_{M''}"] & R^n(T(M)) \arrow[r, "\alpha'^*"] \arrow[d, "\tau_M"] & R^n(T(M')) \arrow[r, "\xi^n"] \arrow[d, "\tau_{M'}"] & R^{n+1}(T(M'')) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_{M''}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & R^n(T'(M'')) \arrow[r, "\alpha^*"] & R^n(T'(M)) \arrow[r, "\alpha'^*"] & R^n(T'(M')) \arrow[r, "\xi'^n"] & R^{n+1}(T'(M'')) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & R^n(T(N'')) \arrow[r, "\beta^*"] \arrow[d, "\varphi''^*"] & R^n(T(N)) \arrow[r, "\beta'^*"] \arrow[d, "\varphi^*"] & R^n(T(N')) \arrow[r, "\xi^n"] \arrow[d, "\varphi'^*"] & R^{n+1}(T(N'')) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''^*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & R^n(T(M'')) \arrow[r, "\alpha^*"] & R^n(T(M)) \arrow[r, "\alpha'^*"] & R^n(T(M')) \arrow[r, "\xi^n"] & R^{n+1}(T(M'')) \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

3.5 n-Extensões

Nesta seção, iremos estudar o funtor derivado obtido a partir do funtor contravariante $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, N)$. Este funtor será o funtor Ext^n_Λ.

Definição 3.5.1. Dado um Λ-módulo N, definimos

$$\mathrm{Ext}^n_\Lambda(-, N) := R^n(\mathrm{Hom}_\Lambda(-, N)),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $\mathrm{Hom}_\Lambda(-,N)$ é exato à esquerda, pela Proposição 3.4.6, temos que $\mathrm{Ext}^0_\Lambda(M,N) = \mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)$. Um leitor atento se perguntará o porquê do uso da notação Ext^n_Λ para o funtor derivado à direita de Hom_Λ, já que ela já havia sido usada para um objeto construído anteriormente. A resposta é o resultado abaixo:

Proposição 3.5.2. *Temos um isomorfismo* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M,N) \simeq \mathrm{Ext}_\Lambda(M,N)$.

Desse modo, podemos ver que o 1-ésimo funtor derivado à direita de Hom_Λ coincide com a construção que fizemos antes.

Agora, queremos dar uma estrutura de bifuntor a Ext^n_Λ, ou melhor dizendo, verificarmos que este de fato é um bifuntor, assim como no caso de Ext_Λ. Pelo Teorema 3.4.9, dada uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M'' \longrightarrow 0,$$

obtemos uma sequência exata longa

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_\Lambda(M'',N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_\Lambda(M,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_\Lambda(M',N) \xrightarrow{\xi^n} \mathrm{Ext}^{n+1}_\Lambda(M'',N) \longrightarrow \cdots, \quad (3.4)$$

a qual chamamos de **Ext-sequência exata longa na primeira variável**. Pela Proposição 3.4.10, temos que esta sequência é natural no seguinte sentido: dado um diagrama comutativo com as linhas exatas

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi'"] & M \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\varphi"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \overline{M'} \arrow[r, hook] & \overline{M} \arrow[r, two heads] & \overline{M''} \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

obtemos um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \mathrm{Ext}^n_\Lambda(\overline{M''},N) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''^*"] & \mathrm{Ext}^n_\Lambda(\overline{M},N) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^*"] & \mathrm{Ext}^n_\Lambda(\overline{M'},N) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi'^*"] & \mathrm{Ext}^{n+1}_\Lambda(\overline{M''},N) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''^*"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & \mathrm{Ext}^n_\Lambda(M'',N) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^n_\Lambda(M,N) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^n_\Lambda(M',N) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^{n+1}_\Lambda(M'',N) \arrow[r] & \cdots. \end{tikzcd} \quad (3.5)$$

Se $\beta\colon N \to N'$ é um homomorfismo de Λ-módulos, então β induz uma transformação natural $\beta\colon \mathrm{Hom}_\Lambda(-,N) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(-,N')$. Assim, a Proposição 3.4.10 implica que toda sequência exata curta

$$0 \longrightarrow M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M'' \longrightarrow 0,$$

induz um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \mathrm{Ext}^n_\Lambda(M'',N) \arrow[r] \arrow[d, "\beta^*"] & \mathrm{Ext}^n_\Lambda(M,N) \arrow[r] \arrow[d, "\beta^*"] & \mathrm{Ext}^n_\Lambda(M',N) \arrow[r, "\xi^n"] \arrow[d, "\beta^*"] & \mathrm{Ext}^{n+1}_\Lambda(M'',N) \arrow[r] \arrow[d, "\beta^*"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & \mathrm{Ext}^n_\Lambda(M'',N') \arrow[r] & \mathrm{Ext}^n_\Lambda(M,N') \arrow[r] & \mathrm{Ext}^n_\Lambda(M',N') \arrow[r, "\xi^n"] & \mathrm{Ext}^{n+1}_\Lambda(M'',N') \arrow[r] & \cdots. \end{tikzcd} \quad (3.6)$$

Desse modo, temos o seguinte resultado:

Proposição 3.5.3. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$, *temos que* $\operatorname{Ext}^n_\Lambda(-,-)$ *é um bifuntor.*

Terminamos esta seção mencionando que o Teorema 3.4.9 e a Proposição 3.4.10 garantem, com as devidas alterações, que os diagramas 3.4, 3.5 e 3.6 são válidos, também, para o funtor $\operatorname{Ext}^n_\Lambda(N,-)$.

3.6 Mudança de anéis

Esta seção será bastante curta, já que o nosso único interesse é apresentarmos um resultado, que será necessário mais à frente nos estudos de cohomologia das álgebras de Lie.

Sejam Λ e Λ' anéis. Se existir um homomorfismo de anéis $\gamma\colon \Lambda \to \Lambda'$, então podemos induzir uma estrutura de Λ-módulo a um Λ'-módulo M via γ definindo

$$\lambda m = \gamma(\lambda)m,$$

para todo $\lambda \in \Lambda$ e $m \in M$.

Neste caso, temos um funtor $U^\gamma\colon \mathfrak{M}_{\Lambda'} \to \mathfrak{M}_\Lambda$, chamado de **funtor mudança de anel**, induzido por γ. Este funtor é exato à direita e possui um funtor adjunto à esquerda $F\colon \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{M}_{\Lambda'}$ dado por

$$F(M) = \Lambda' \otimes_\Lambda M,$$

para todo Λ-módulo M, onde Λ' possui uma estrutura de Λ-módulo à direita via γ, enquanto $F(M)$ adquire a estrutura de Λ'-módulo a partir da estrutura de Λ'-módulo de Λ'. Assim, temos o seguinte resultado que será usado mais à frente:

Proposição 3.6.1. *Se* Λ' *é plano como um* Λ*-módulo à direita via* γ, *então*

$$\Psi\colon\ \operatorname{Tor}^{\Lambda'}_n(\Lambda' \otimes_\Lambda A, B') \xrightarrow{\sim} \operatorname{Tor}^\Lambda_n(A, U^\gamma(B'))$$

é uma equivalência natural.

Capítulo 4

Introdução às álgebras de Lie

Neste capítulo, apresentaremos os objetos que serão fundamentais para o desenvolvimento do tema, isto é, as álgebras de Lie. Além disso, veremos os resultados básicos. O leitor notará que os conceitos aqui introduzidos serão bastante similares aos de outras estruturas algébricas, em particular, aos apresentados em teoria de grupos.

4.1 Álgebras de Lie

Nesta seção, apresentaremos a definição de álgebra de Lie. Em seguida, veremos alguns exemplos básicos de álgebras de Lie (que iremos usar em diversos momentos nos capítulos posteriores). Por fim, terminaremos com os conceitos de álgebras derivada e representação adjunta, que serão usados mais à frente para estudar as representações das álgebras de Lie.

Definição 4.1.1. Seja F um corpo. Uma **álgebra de Lie** sobre F (ou simplesmente **F-álgebra de Lie**) é um F-espaço vetorial $\mathfrak{g}$ munido de uma aplicação bilinear

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\to \mathfrak{g} \\ (x, y) &\mapsto [x, y] \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

i. $[x, x] = 0$, para todo $x \in \mathfrak{g}$,

ii. **(Identidade de Jacobi)** $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$, para todo $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

A aplicação bilinear em questão é denominada **colchete de Lie** ou **comutador**. A bilinearidade dela e o item (i) implicam a **anticomutatividade**[1], isto é, $[x, y] = -[y, x]$ para todos $x, y \in \mathfrak{g}$. Quando não houver risco de ambiguidades, diremos *álgebra de Lie* para nos referirmos a uma *F-álgebra de Lie*.

[1]Alguns autores usam a anticomutatividade ao invés da propriedade i., na definição de álgebra de Lie. Todavia, se trata de uma condição equivalente somente se a característica de F é diferente de 2 e se não estamos trabalhando com álgebras de Lie a partir de módulos.

Assim como em outras estruturas algébricas, podemos definir a noção de subestrutura:

Definição 4.1.2. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Um subespaço vetorial $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ é chamado de **subálgebra de Lie** se $[x, y] \in \mathfrak{h}$ para todos $x, y \in \mathfrak{h}$.

Por simplicidade, usaremos o termo *subálgebra* para nos referir a uma subálgebra de Lie. Note que, assim como em outras subestruturas, uma subálgebra é uma álgebra de Lie com as operações herdadas de $\mathfrak{g}$.

Note também que qualquer elemento não nulo $x \in \mathfrak{g}$ define uma subálgebra de Lie de dimensão 1 (denotada por Fx) com o colchete nulo.

Enfim, ressaltamos que todas as álgebras de Lie neste trabalho serão de dimensão finita sobre o corpo F, exceto quando for mencionado o contrário.

4.1.1 Álgebras de Lie lineares

Vamos mostrar os principais exemplos de álgebra de Lie que serão usados neste trabalho.

Seja V um F-espaço vetorial. O conjunto de todos os endomorfismos de V, isto é, das transformações lineares de V em V, é naturalmente um F-espaço vetorial. Se V é de dimensão n, então a dimensão de $\operatorname{End} V$ é n^2. Podemos dar uma estrutura de álgebra de Lie a $\operatorname{End} V$, definindo o colchete[2] por $[x, y] = xy - yx$ para todos $x, y \in \operatorname{End} V$ (sendo o produto xy a composição de endomorfismos).

Daqui em diante, denotamos por $\mathfrak{gl}(V)$ o espaço $\operatorname{End}(V)$, quando for pensado como álgebra de Lie. Chamamos $\mathfrak{gl}(V)$ de **álgebra linear geral** associada a V.

Definição 4.1.3. Seja V um F-espaço vetorial. Uma subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$ é chamada de **álgebra de Lie linear**.

Uma outra forma conveniente de olharmos para $\mathfrak{gl}(V)$ é através de matrizes. Em álgebra linear, vimos que uma base fixada de V induz um isomorfismo entre $\operatorname{End} V$ e o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem $n := \dim_F V$ sobre F. Este espaço de matrizes, com o colchete $[A, B] = AB - BA$, é denotado por $\mathfrak{gl}(n, F)$.

Agora, vamos apresentar quatro famílias de álgebras de Lie que são de extrema importância para a teoria que estamos desenvolvendo. As famílias são denotadas por $\mathbf{A}_\ell$, $\mathbf{B}_\ell$, $\mathbf{C}_\ell$ e $\mathbf{D}_\ell$, e são chamadas de **álgebras clássicas**[3].

$\mathbf{A}_\ell$: Seja $\dim_F V = \ell + 1$. A **álgebra linear especial**, denotada por $\mathfrak{sl}(V)$, $\mathfrak{sl}_{\ell+1}(F)$ ou $\mathfrak{sl}(\ell + 1, F)$, é a subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$ que consiste de todos os endomorfismos de traço igual a zero em V. Para fins futuros, vamos ressaltar que uma base para tal álgebra é o conjunto dos elementos e_{ij}, com $i \neq j$, unido com o conjunto dos elementos da forma $h_i = e_{ii} - e_{i+1,i+1}$. Esta base é chamada de base canônica de $\mathfrak{sl}(V)$. Desse modo, é fácil de perceber que $\dim_F \mathfrak{sl}(V) = \ell^2 + 2\ell$.

[2]Daí o nome *comutador*.

[3]Isso se deve ao fato de corresponderem a certos grupos de Lie clássicos.

B$_\ell$: Seja $\dim_F V = 2\ell + 1$. Considere a forma bilinear não degenerada simétrica f em V definida pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_\ell \\ 0 & I_\ell & 0 \end{bmatrix},$$

onde I_ℓ denota o bloco igual à matriz identidade de ordem ℓ. A **álgebra ortogonal**, denotada por $\mathfrak{so}(V)$, $\mathfrak{so}_{2\ell+1}(F)$ ou $\mathfrak{so}(2\ell+1, F)$, é a subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$ que consiste em todo $x \in \operatorname{End} V$ tal que $f(x(v), w) = -f(v, x(w))$, para todo $v, w \in V$.

C$_\ell$: Seja $\dim_F V = 2\ell$. Considere a forma bilinear não degenerada antissimétrica f definida pela matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & I_\ell \\ -I_\ell & 0 \end{bmatrix}.$$

A **álgebra simplética**, denotada por $\mathfrak{sp}(V)$, $\mathfrak{sp}_{2\ell}(F)$ ou $\mathfrak{sp}(2\ell, F)$, é a subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$ que consiste em todo $x \in \operatorname{End} V$ tal que $f(x(v), w) = -f(v, x(w))$, para todo $v, w \in V$.

D$_\ell$ ($\ell \geq 2$): As álgebras dessa família também são álgebras ortogonais, porém, nesse caso, V terá dimensão par, isto é, $\dim_F V = 2\ell$. Dotamso V da forma bilinear não degenerada simétrica f definida pela matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & I_\ell \\ I_\ell & 0 \end{bmatrix}.$$

O conjunto

$$\mathfrak{su}(n, F) := \left\{ x \in \mathfrak{sl}(n, F) \;\middle|\; -\overline{x}^t = x \right\}.$$

é uma subálgebra de $\mathfrak{sl}(n, F)$. Assim como nos outros casos, podemos denotar tal álgebra por $\mathfrak{su}(V)$ ou $\mathfrak{su}_n(F)$. Esta subálgebra desempenhará um papel importante na classificação das álgebra de Lie reais.

Por fim, mencionamos três subálgebras que serão usadas para alguns exemplos. Denotamos por $\mathfrak{t}(n, F)$ a subálgebra de $\mathfrak{gl}(n, F)$ das *matrizes triangulares superiores*, enquanto $\mathfrak{n}(n, F)$ denota a subálgebra das *matrizes triangulares estritamente superiores*. Enfim, $\mathfrak{d}(n, F)$ denota a subálgebra de $\mathfrak{gl}(n, F)$ das matrizes *diagonais*. Note que, como espaço vetorial, $\mathfrak{t}(n, F) = \mathfrak{d}(n, F) \oplus \mathfrak{n}(n, F)$.

4.2 Ideais e homomorfismos

Em teoria de grupos, sabemos que, dado um grupo G, podemos construir o grupo quociente G/N a partir de um subgrupo normal N de G. Analogamente, em teoria de anéis, fazemos o mesmo com um anel e um ideal bilateral. Nesta seção, vamos definir o conceito análogo no contexto das álgebras de Lie. Além disso, introduzirmos a noção de homomorfismo e suas propriedades fundamentais.

4.2.1 Ideais

Começamos com a seguinte definição:

Definição 4.2.1. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Um subespaço $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{g}$ é um **ideal** se para todo $x \in \mathfrak{i}$ e $y \in \mathfrak{g}$, obtivermos $[x, y] \in \mathfrak{i}$.

Note que a anticomutatividade implica a equivalência da definição caso seja substituído $[x, y]$ por $[y, x]$. É fácil perceber que, em qualquer álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, o subespaço trivial 0 e a própria álgebra $\mathfrak{g}$ são ideais.

Exemplo 4.2.2. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Então o conjunto

$$Z(\mathfrak{g}) := \left\{ z \in \mathfrak{g} \,\middle|\, [x, z] = 0 \text{ para todo } x \in \mathfrak{g} \right\}$$

é um ideal de $\mathfrak{g}$, chamado de **centro** de $\mathfrak{g}$.

Podemos construir novos ideais a partir de ideais dados. De fato, seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e sejam $\mathfrak{i}, \mathfrak{j} \subseteq \mathfrak{g}$ ideais. Então a soma de ideais

$$\mathfrak{i} + \mathfrak{j} := \{ x + y \in \mathfrak{g} \mid x \in \mathfrak{i},\ y \in \mathfrak{j} \}$$

e o comutador de ideais

$$[\mathfrak{i}, \mathfrak{j}] := \left\{ \sum_{k=1}^{n} [x_k, y_k] \,\middle|\, x_k \in \mathfrak{i},\ y_k \in \mathfrak{j}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

são ideais de $\mathfrak{g}$. Com essas operações definidas, temos as seguintes propriedades:

Proposição 4.2.3. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{g}$ ideais. Então:*

i. $[\mathfrak{i}, \mathfrak{j}] = [\mathfrak{j}, \mathfrak{i}]$,

ii. $[\mathfrak{i} + \mathfrak{j}, \mathfrak{k}] = [\mathfrak{i}, \mathfrak{k}] + [\mathfrak{j}, \mathfrak{k}]$,

iii. $[[\mathfrak{i}, \mathfrak{j}], \mathfrak{k}] \subseteq [[\mathfrak{i}, \mathfrak{k}], \mathfrak{j}] + [[\mathfrak{j}, \mathfrak{k}], \mathfrak{i}]$,

iv. $[\mathfrak{i} \cap \mathfrak{j}, \mathfrak{k}] \subseteq [\mathfrak{i}, \mathfrak{k}] \cap [\mathfrak{j}, \mathfrak{k}]$.

O caso especial $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é chamado de **álgebra derivada** de $\mathfrak{g}$. Pode-ser verificar que todas as álgebras clássicas, isto é, as álgebras das famílias $\mathbf{A}_\ell$, $\mathbf{B}_\ell$, $\mathbf{C}_\ell$ e $\mathbf{D}_\ell$, coincidem com a própria álgebra derivada. Ainda, dizemos que $\mathfrak{g}$ é uma **álgebra abeliana** se $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$ (ou seja, o colchete de Lie é trivial).

Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{g}$ um ideal. Podemos construir a **álgebra quociente** $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ como o espaço vetorial quociente com o colchete

$$[x + \mathfrak{i}, y + \mathfrak{i}] = [x, y] + \mathfrak{i}.$$

Terminamos esta subseção apresentando alguns conceitos significativos além dos anteriores. O **normalizador** de uma subálgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ (ou simplesmente um subespaço $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$) é definido por

$$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \coloneqq \{\, x \in \mathfrak{g} \mid [x, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h} \,\},$$

onde[4] $[x, \mathfrak{h}] \coloneqq \{\, [x, y] \in \mathfrak{g} \mid y \in \mathfrak{h} \,\}$. Em outras palavras, o normalizador de uma subálgebra $\mathfrak{h}$ é a maior subálgebra que contém $\mathfrak{h}$ como um ideal. Quando $\mathfrak{h} = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$, dizemos que $\mathfrak{h}$ é **auto-normalizante**. Por fim, dado um subconjunto $X \subseteq \mathfrak{g}$, o **centralizador** $C_{\mathfrak{g}}(X)$ de X é a subálgebra de $\mathfrak{g}$ dada por

$$C_{\mathfrak{g}}(X) \coloneqq \{\, x \in \mathfrak{g} \mid [x, X] = 0 \,\}.$$

Note que $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{g})$.

4.2.2 Homomorfismos e representações

Definição 4.2.4. Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}'$ F-álgebras de Lie. Uma transformação linear $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ é chamada de **homomorfismo de álgebras de Lie** se, e somente se, $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$.

Por comodidade, usaremos o termo *homomorfismo* ao invés de *homomorfismo de álgebras de Lie* quando não houver risco de ambiguidade. A partir de um homomorfismo $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ qualquer, o **kernel** de φ é o ideal

$$\ker \varphi \coloneqq \{\, x \in \mathfrak{g} \mid \varphi(x) = 0 \,\}.$$

Quando $\ker \varphi = 0$, diremos que φ é um **monomorfismo**[5]. Analogamente, se $\varphi(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}'$, diremos que φ é um **epimorfismo**. Se φ for um monomorfismo e um epimorfismo, diremos que é um *isomorfismo*[6]. Vale ressaltar que o kernel de um homomorfismo é sempre um ideal do domínio, enquanto a imagem é uma subálgebra do contradomínio.

Exemplo 4.2.5. Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{g}$ um ideal. Temos o epimorfismo

$$\begin{aligned} \pi\colon \mathfrak{g} &\twoheadrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \\ x &\longmapsto x + \mathfrak{i} \end{aligned}$$

chamado de **homomorfismo projeção**.

Se existe um isomorfismo entre $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}'$, dizemos que são **isomorfas** (ou que $\mathfrak{g}$ é isomorfa a $\mathfrak{g}'$) e usaremos a notação $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}'$.

[4] Note que essa definição pode ser para qualquer *subconjunto* de uma álgebra de Lie, não necessariamente uma subálgebra.

[5] Estamos usando tal nomenclatura pois o conceito de monomorfismo e homomorfismo injetor são equivalentes na categoria das álgebras de Lie, assim como na categoria dos grupos.

[6] O mesmo que foi dito em relação aos monomorfismos vale também para epimorfismos e isomorfismos.

Proposição 4.2.6. *Sejam* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie e* $\mathfrak{i}, \mathfrak{j} \subseteq \mathfrak{g}$ *ideais. Considere o homomorfismo projeção* $\pi \colon \mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$*. Segue que:*

i. ***(Propriedade Universal do Quociente)*** *Para qualquer álgebra de Lie* $\mathfrak{g}'$ *e qualquer homomorfismo* $\varphi \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$*, seja*

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{i}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}') := \{ \varphi \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}') \mid \mathfrak{i} \subseteq \ker \varphi \} .$$

Então a aplicação

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}/\mathfrak{i}, \mathfrak{g}') &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{i}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}') \\ \psi &\longmapsto \psi \circ \pi \end{aligned}$$

é uma bijeção.

ii. ***(Teorema do Isomorfismo)*** *Dado um homomorfismo* $\varphi \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$*, a aplicação*

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{g}}{\ker \varphi} &\xrightarrow{\sim} \varphi(\mathfrak{g}) \\ x + \ker \varphi &\longmapsto \varphi(x) \end{aligned}$$

é um isomorfismo.

iii. Se $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{j}$*, então* $\mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ *é um ideal de* $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ *e* $(\mathfrak{g}/\mathfrak{i})/(\mathfrak{j}/\mathfrak{i})$ *é isomorfo a* $\mathfrak{g}/\mathfrak{j}$*.*

iv. A aplicação

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{i}+\mathfrak{j}}{\mathfrak{j}} &\xrightarrow{\sim} \frac{\mathfrak{i}}{\mathfrak{i} \cap \mathfrak{j}} \\ i + j &\longmapsto i + \mathfrak{i} \cap \mathfrak{j} \end{aligned}$$

é um isomorfismo.

O item *(i)* da proposição anterior nos diz que se $\varphi \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ é um homomorfismo, então para qualquer ideal $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{g}$ contido em $\ker \varphi$, existe um único homomorfismo $\psi \colon \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \to \mathfrak{g}'$ fazendo o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & \mathfrak{g}' \\ \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \arrow[ur, dashed, "\exists! \psi"'] & \end{tikzcd}$$

Tendo estes resultados básicos análogos aos de outras teorias algébricas, podemos definir o conceito a seguir, tal qual fazemos para grupos:

Definição 4.2.7. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e V um espaço vetorial, ambos sobre um corpo F. Uma **representação** de $\mathfrak{g}$ em V é um homomorfismo $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$.

Note que, embora seja exigido que $\mathfrak{g}$ tenha dimensão finita, o espaço V pode ter dimensão arbitrária.

Exemplo 4.2.8. Para qualquer álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, a **representação adjunta** de $\mathfrak{g}$ é a representação

$$\begin{aligned} \operatorname{ad}\colon \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ x &\longmapsto \operatorname{ad} x, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \operatorname{ad} x\colon \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ y &\longmapsto [x, y] \end{aligned}$$

Note que $\ker \operatorname{ad} = Z(\mathfrak{g})$. Desse modo, se $\mathfrak{g}$ é simples, então $Z(\mathfrak{g}) = 0$. Mas isso mostra que $\operatorname{ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ é um monomorfismo e, portanto, que toda álgebra de Lie simples é isomorfa a alguma álgebra de Lie linear.

Algumas vezes, um elemento de $x \in \mathfrak{g}$ pode estar sendo visto como elemento de uma subálgebra $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$. Neste caso, usaremos a notação $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$ para indicar que x está agindo em $\mathfrak{g}$ e, de maneira análoga, indicaremos que x age em $\mathfrak{h}$ pela notação $\operatorname{ad}_{\mathfrak{h}} x$.

Exemplo 4.2.9. Seja $x \in \mathfrak{d}(n, F)$. Então $\operatorname{ad}_{\mathfrak{d}(n,F)} x = 0$, enquanto $\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(n,F)} x$ não necessariamente será nulo.

4.3 Álgebras de Lie solúveis e nilpotentes

Nesta seção, vamos introduzir os conceitos fundamentais de álgebra de Lie *solúvel* e *nilpotente*, que, além de serem interessantes em si mesmos, serão indispensáveis para classificar as álgebras de Lie semi-simples (embora estas álgebras não sejam solúveis nem nilpotentes).

4.3.1 Solubilidade

O conceito de solubilidade para álgebras de Lie é análogo ao correspondente na Teoria de Grupos.

Definição 4.3.1. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. A **série derivada** de $\mathfrak{g}$ é a sequencia de ideais definida recursivamente da seguinte maneira:

i. $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$,

ii. $\mathfrak{g}^{(i)} = [\mathfrak{g}^{(i-1)}, \mathfrak{g}^{(i-1)}]$.

Definição 4.3.2. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Dizemos que $\mathfrak{g}$ é **solúvel** se sua série derivada se anula para algum $n \in \mathbb{N}$, isto é, se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$. Neste caso, n é chamado de **comprimento derivado** de $\mathfrak{g}$.

Note que toda álgebra abeliana é solúvel.

Exemplo 4.3.3. Ambas as álgebras $\mathfrak{t}(n, F)$ e $\mathfrak{n}(n, F)$ são álgebras de Lie solúveis.

Temos as seguintes propriedades relacionadas à solubilidade:

Proposição 4.3.4. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie.*

i. *Se $\mathfrak{g}$ é solúvel, então o mesmo vale para todas as subálgebras de $\mathfrak{g}$ e as imagens de homomorfismos com domínio em $\mathfrak{g}$.*

ii. *Se $\mathfrak{i}$ é um ideal solúvel de $\mathfrak{g}$, tal que $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ é solúvel, então $\mathfrak{g}$ também é solúvel.*

iii. *Se $\mathfrak{i}$ e $\mathfrak{j}$ são ideais solúveis de $\mathfrak{g}$, então $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$ também é.*

Dada uma álgebra de Lie arbitrária $\mathfrak{g}$, definimos o **radical** de $\mathfrak{g}$, denotado por $\operatorname{Rad}\mathfrak{g}$, como sendo o ideal maximal solúvel de $\mathfrak{g}$, ou seja, o ideal solúvel que não está contido em nenhum outro ideal solúvel. Note que o artigo "o" foi porque o item iii da proposição acima mostra que o ideal solúvel maximal é único.

4.3.2 Nilpotência

Pelo que vimos até aqui, é intuitivo se esperar que a noção de nilpotência, tal qual a de solubilidade e outras noções, vem da teoria de grupos. Entretanto, este conceito é mais recente e apareceu primeiro nos estudos das álgebras de Lie.

Definição 4.3.5. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. A **série central descendente** de $\mathfrak{g}$ é a sequencia de ideais definida recursivamente da seguinte maneira:

i. $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$,

ii. $\mathfrak{g}^i = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{i-1}]$.

Definição 4.3.6. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Dizemos que $\mathfrak{g}$ é **nilpotente** se sua série central descendente se anula para algum $n \in \mathbb{N}$, isto é, se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{g}^n = 0$.

Novamente, toda álgebra abeliana é nilpotente. Note que $\mathfrak{g}^{(i)} \subseteq \mathfrak{g}^i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, logo toda álgebra nilpotente é solúvel. A recíproca, entretanto, não é verdadeira: basta considerar a álgebra $\mathfrak{t}(n, F)$.

Exemplo 4.3.7. As álgebras $\mathfrak{sl}(2, F)$ e $\mathfrak{n}(n, F)$ são nilpotentes.

Temos as seguintes propriedades básicas:

Proposição 4.3.8. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie.*

i. Se $\mathfrak{g}$ é nilpotente, então o mesmo vale para todas as subálgebras de $\mathfrak{g}$ e imagens de homomorfismos com domínio em $\mathfrak{g}$.

ii. Se $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ é nilpotente, então $\mathfrak{g}$ também é.

iii. Se $\mathfrak{g}$ é nilpotente e não nula, então $Z(\mathfrak{g}) \neq 0$.

Equivalentemente, $\mathfrak{g}$ é nilpotente se existir $n \in \mathbb{N}$ não nulo tal que $\operatorname{ad} x_0 \circ \cdots \circ \operatorname{ad} x_n(y) = 0$ para todos $x_i, y \in \mathfrak{g}$, $i \in \{0, \dots, n\}$. Em particular, $(\operatorname{ad} x)^n = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$.

Definição 4.3.9. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Dizemos que $x \in \mathfrak{g}$ é **ad-nilpotente** se $\operatorname{ad} x$ for um endomorfismo nilpotente de $\mathfrak{g}$.

Já vimos que, se $\mathfrak{g}$ é nilpotente, então todos os seus elementos são ad-nilpotentes. O seguinte teorema mostra que vale também a volta desta afirmação.

Teorema 4.3.10 (Teorema de Engel). *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Então $\mathfrak{g}$ é nilpotente se, e somente se, todos os elementos de $\mathfrak{g}$ forem ad-nilpotentes.*

Se V é um espaço vetorial de dimensão n, definimos uma **bandeira** em V como sendo uma cadeia de subespaços

$$0 = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_n = V$$

tal que $\dim_F V_i = i$. A demonstração do Teorema de Engel é baseada em um teorema (que não precisamos enunciar aqui), a partir do qual podemos deduzir o seguinte corolário:

Corolário 4.3.11. *Seja $\mathfrak{g}$ uma subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$, onde V é um espaço vetorial de dimensão n, formada por endomorfismos nilpotentes. Neste caso, existe uma bandeira (V_i) em V tal que $x(V_i) \subseteq V_{i-1}$ para todos $i \in \{0, \dots, n\}$ e $x \in \mathfrak{g}$. Equivalentemente, existe uma base de V tal que os elementos de $\mathfrak{g}$ são representandos por matrizes diagonais estritamente superiores.*

De maneira similar, temos o seguinte resultado importante.

Teorema 4.3.12 (Teorema de Lie). *Seja $\mathfrak{g}$ uma subálgebra* solúvel *de $\mathfrak{gl}(V)$, onde V é um espaço vetorial de dimensão n sobre um corpo algebricamente fechado. Neste caso, existe uma bandeira (V_i) em V tal que $x(V_i) \subseteq V_i$ para todos $i \in \{0, \dots, n\}$ e $x \in \mathfrak{g}$. Equivalentemente, existe uma base de V tal que os elementos de $\mathfrak{g}$ são representandos por matrizes diagonais superiores.*

Observamos que a hipótese do Corolário 4.3.11 implica que a álgebra $\mathfrak{g}$ é nilpotente, mas é mais forte do que isso (por exemplo, $\mathfrak{d}(n, F)$ é nilpotente, sendo abeliana, mas nenhum elemento não nulo dela é um endomorfismo nilpotente). Pelo contrário, a hipótese do Teorema 4.3.12 afirma que $\mathfrak{g}$ é solúvel.

Terminamos este capítulo apresentando dois corolários do *Teorema de Lie*:

Corolário 4.3.13. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie solúvel, com F algebricamente fechado. Então existe uma cadeia de ideais de $\mathfrak{g}$*

$$0 = \mathfrak{g}_0 \subseteq \mathfrak{g}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$$

tal que $\dim_F \mathfrak{g}_i = i$.

Corolário 4.3.14. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie solúvel, com F algebricamente fechado. Então $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ implica que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ é nilpotente. Em particular, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é nilpotente.*

Capítulo 5

As Álgebras de Lie Semi-simples

Este capítulo será focado em introduzir as álgebras de Lie semi-simples, além de apresentar algumas ferramentas para que possamos estudá-las. A importância de tais álgebras se deve ao fato de que vários grupos de Lie clássicos são associados a álgebras de Lie semi-simples. Desse modo, as álgebras semi-simples desempenham um papel muito importante dentro da teoria de Lie. Além disso, no Capítulo 6, veremos o *Teorema de Levi-Malcev*, que nos mostra que toda álgebra de Lie de dimensão finita é uma extensão de uma subálgebra semi-simples por seu radical. Em outras palavras, para entendermos o funcionamento das álgebras de Lie de dimensão finita, basta que entendamos as álgebras de Lie de dimensão finita semi-simples e solúveis.

Daqui em diante assumimos que o corpo F seja algebricamente fechado e de característica zero, a menos que seja mencionado o contrário.

5.1 Álgebras de Lie simples e semi-simples

Definição 5.1.1. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie não abeliana. Dizemos que $\mathfrak{g}$ é **simples** se, e somente se, $\mathfrak{g}$ não possui ideais além de 0 e de si mesma.

A condição imposta em $\mathfrak{g}$ de não ser abeliana é pedida para evitar de atribuir demasiada importância às álgebras de Lie de dimensão 1. Note que $\mathfrak{g}$ ser simples implica no fato de que $Z(\mathfrak{g}) = 0$ e $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. Desse modo, podemos perceber que uma álgebra simples não pode ser solúvel (logo, nem nilpotente).

Exemplo 5.1.2. A álgebra linear especial $\mathfrak{sl}(2, F)$ é simples.

Agora podemos enunciar a definição de semi-simplicidade:

Definição 5.1.3. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Dizemos que $\mathfrak{g}$ é **semi-simples** se $\operatorname{Rad}\mathfrak{g} = 0$.

Note que se $\mathfrak{g}$ é simples, então $\operatorname{Rad}\mathfrak{g} = 0$ (do contrário, $\mathfrak{g}$ seria solúvel). Portanto, $\mathfrak{g}$ também é semi-simples, ou seja, *simplicidade implica semi-simplicidade*. Por fim, se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie arbitrária, então $\mathfrak{g}/\operatorname{Rad}\mathfrak{g}$ é semi-simples.

Exemplo 5.1.4. As álgebras $\mathfrak{sl}(n, F)$ (em particular, $\mathfrak{sl}(2, F)$)[1] são semi-simples.

5.2 Critério de Cartan

Nesta seção, veremos um critério para que uma álgebra de Lie seja solúvel. Pelo Corolário 4.3.14, temos que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotente implica $\mathfrak{g}$ ser solúvel. Além disso, o *Teorema de Engel* (Teorema 4.3.10) nos diz que, para verificar se uma álgebra de Lie é nilpotente (neste caso, se $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é nilpotente), basta que verifiquemos se os elementos dela são ad-nilpotentes. Com essa ideia em mente, faz sentido encontrarmos requisitos que façam os elementos de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ serem ad-nilpotentes, obtendo assim que a álgebra $\mathfrak{g}$ seja solúvel. Temos o seguinte resultado:

Teorema 5.2.1 (Critério de Cartan). *Seja $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ uma subálgebra, sendo V um espaço vetorial de dimensão finita. Neste caso, se $\operatorname{tr}(xy) = 0$ para todo $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ e $y \in \mathfrak{g}$, então $\mathfrak{g}$ é solúvel.*

A partir do Critério de Cartan, podemos obter o seguinte corolário:

Corolário 5.2.2. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie tal que $\operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y) = 0$ para todos $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ e $y \in \mathfrak{g}$ (em particular, pode valer para todos $x, y \in \mathfrak{g}$). Neste caso, $\mathfrak{g}$ é solúvel.*

5.3 Forma de Killing

Pela seção anterior, podemos perceber que o traço do produto $\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y$, com $x, y \in \mathfrak{g}$, pode ser bastante útil. Desse modo, para uma álgebra de Lie arbitrária $\mathfrak{g}$, definimos a forma bilinear

$$\begin{aligned} \kappa\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\longrightarrow F \\ (x, y) &\longmapsto \operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y), \end{aligned}$$

que é chamada de **forma de Killing**. Note que κ é simétrica (já que $\operatorname{tr}(xy) = \operatorname{tr}(yx)$ para matrizes x e y) e **associativa** no seguinte sentido: $\kappa([x, y], z) = \kappa(x, [y, z])$. Tal propriedade é válida pois, para endomorfismos x, y e z de um espaço vetorial de dimensão finita, temos que $\operatorname{tr}([x, y]z) = \operatorname{tr}(x[y, z])$.

Recorde que uma forma bilinear simétrica $\beta\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to F$ é **não degenerada** se a condição $\beta(x, y) = 0$ para todo $y \in \mathfrak{g}$ implica que $x = 0$. Isso é equivalente a dizer que o seu **radical**

$$S := \left\{ x \in \mathfrak{g} \;\middle|\; \beta(x, y) = 0 \text{ para todo } y \in \mathfrak{g} \right\}$$

é igual a 0. Fixando uma base $x_1, \ldots, x_n$ de $\mathfrak{g}$, temos o seguinte resultado de álgebra linear: κ é não degenerada se, e somente se, a matriz de κ com relação à base fixada (isto é, a matriz de ordem n cuja entrada (i, j) é $\kappa(x_i, x_j)$) tiver determinante diferente de zero.

[1]Destacamos esta álgebra, pois ela será muito útil na classificação das álgebras de Lie complexas (consequentemente reais).

Exemplo 5.3.1. Considere $\mathfrak{sl}(2, F)$ com a base canônica, isto é, com a base

$$h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \ x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então, obtemos

$$\operatorname{ad} h = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \ \operatorname{ad} x = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \operatorname{ad} y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Desse modo, temos que a matriz de κ é dada por

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

cujo determinante é igual a -128, o que faz de κ não degenerada em $\mathfrak{sl}(2, F)$.

Até agora, vimos a definição de forma de Killing e nos recordamos de alguns conceitos referentes às formas bilineares. Mas, afinal, para que serve a forma de Killing? O resultado a seguir ilustrará bem a sua importância.

Teorema 5.3.2. *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é semi-simples se, e somente se, sua forma de Killing é não degenerada.*

5.3.1 Ideais simples

Nesta subseção, veremos uma outra caracterização de uma álgebra de Lie semi-simples $\mathfrak{g}$ através de seus ideias simples (isto é, os ideais de $\mathfrak{g}$ que são simples como álgebras de Lie).

Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é dita **soma direta** de ideias se é escrita como uma soma direta de subespaços vetoriais $\mathfrak{g} = \mathfrak{i}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{i}_n$, onde cada $\mathfrak{i}_i \subseteq \mathfrak{g}$ é um ideal. Temos o seguinte resultado:

Teorema 5.3.3. *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é semi-simples se, e somente se, $\mathfrak{g}$ pode ser escrita como uma soma direta $\mathfrak{g} = \mathfrak{i}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{i}_n$ de ideais simples. Além disso, todo ideal simples de $\mathfrak{g}$ coincide com um dos ideais simples $\mathfrak{i}_i$ e a forma de Killing de $\mathfrak{i}_i$ é obtida restringindo-se a forma de Killing de $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{i}_i \times \mathfrak{i}_i$.*

Por fim, obtemos os seguintes corolários do teorema acima:

Corolário 5.3.4. *Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie semi-simples, então $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ e todos os ideais de $\mathfrak{g}$ e as imagens de homomorfismos com domínio $\mathfrak{g}$ são semi-simples. Além disso, todo ideal de $\mathfrak{g}$ é obtido como soma direta de certos ideais simples de $\mathfrak{g}$.*

Corolário 5.3.5. *Seja $\mathfrak{i}$ um ideal de uma álgebra de Lie semi-simples $\mathfrak{g}$. Então existe um ideal $\mathfrak{j}$ que é o complemento de $\mathfrak{i}$, ou seja, tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{i} \oplus \mathfrak{j}$ como álgebra de Lie.*

5.4 Módulos sobre uma álgebra de Lie

Nesta seção, aprofundaremos o estudo de representações das álgebras de Lie, principalmente usando a representação adjunta. Vale ressaltar que todas as representações neste trabalho serão representações de dimensão finita. Para se estudar representações, é conveniente introduzirmos a linguagem de módulos. Sendo assim, esta seção será voltada a introduzir tal conceito.

Começamos com a seguinte definição:

Definição 5.4.1. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Um F-espaço vetorial V munido de uma operação

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} \times V &\longrightarrow V \\ (x, v) &\longmapsto x \cdot v \end{aligned}$$

é dito um **$\mathfrak{g}$-módulo** se satisfaz as seguintes condições para todos $x, y \in \mathfrak{g}$, $v, w \in V$ e $a, b \in F$:

i. $(ax + by) \cdot v = a(x \cdot v) + b(y \cdot w)$,

ii. $x \cdot (av + bw) = a(x \cdot v) + b(y \cdot w)$,

iii. $[x, y] \cdot v = x \cdot y \cdot v - y \cdot x \cdot v$.

Quando não houver risco de ambiguidade, denotaremos $x \cdot v$ apenas por xv.

Exemplo 5.4.2. Seja $\varphi \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ uma representação de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre um F-espaço vetorial V. Então V é um $\mathfrak{g}$-módulo pela ação $x \cdot v = \varphi(x)(v)$ de $\mathfrak{g}$ em V. Por outro lado, a mesma igualdade induz uma representação de $\mathfrak{g}$ em V caso V seja um $\mathfrak{g}$-módulo.

O exemplo acima nos permite observar que o conceito de módulo é equivalente ao de representação.

Com essa nova estrutura, é intuitivo introduzir os conceitos clássicos de estruturas algébricas para os módulos. Faremos isso agora:

Definição 5.4.3. Sejam V e W $\mathfrak{g}$-módulos. Uma transformação linear $\varphi \colon V \to W$ é um **homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos** se $\varphi(x \cdot v) = x \cdot \varphi(v)$.

Como é de se esperar, caso φ seja um isomorfismo de F-espaços vetoriais, então φ será um **isomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos**. Neste caso, dizemos que V e W dispõem representações **equivalentes** de $\mathfrak{g}$. Assim como em outras estruturas algébricas, o kernel de φ é um submódulo de V, enquanto a imagem de φ é um submódulo de W. Vale ressaltar que todos os teoremas canônicos[2] também valem para módulos.

[2]Propriedade universal do quociente, teoremas do isomorfismo, o fato de que $\ker \varphi = 0$ se, e somente se, φ for injetor, etc.

Definição 5.4.4. Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e V um $\mathfrak{g}$-módulo. Dizemos que V é um módulo **irredutível** se os únicos $\mathfrak{g}$-submódulos dele são 0 e V.

É importante mencionar que *não consideramos o espaço vetorial* 0 *como sendo um* $\mathfrak{g}$*-módulo irredutível*.

Caso V seja escrito como soma direta de $\mathfrak{g}$-submódulos irredutíveis, então dizemos que V é **completamente redutível**. Equivalentemente, V será completamente redutível se cada $\mathfrak{g}$-submódulo $W \subseteq V$ tiver um complemento $W' \subseteq V$, isto é, um $\mathfrak{g}$-submódulo W' tal que $V = W \oplus W'$.

Vimos que os conceitos de representação e módulo são equivalentes. Portanto, os termos *irredutível* e *completamente redutível* podem ser usados também para representações.

Exemplo 5.4.5. Pela representação adjunta, é claro que $\mathfrak{g}$ é um $\mathfrak{g}$-módulo. Neste caso, os $\mathfrak{g}$-submódulos de $\mathfrak{g}$ são os ideais de $\mathfrak{g}$. Dessa forma, toda álgebra de Lie simples é um módulo irredutível, enquanto toda álgebra de Lie semi-simples é completamente redutível.

Agora, vejamos como podemos construir novos módulos a partir de outros módulos dados.

Sejam V um $\mathfrak{g}$-módulo e $W, W' \subseteq V$ $\mathfrak{g}$-submódulos. A soma direta $W \oplus W'$ é um $\mathfrak{g}$-módulo definindo a operação $x \cdot (w, w') := (x \cdot w, x \cdot w')$ com $w \in W$, $w' \in W'$ e $x \in \mathfrak{g}$. Considere o F-espaço vetorial dual V^* de V. Podemos induzir uma estrutura de $\mathfrak{g}$-módulo a V^* definindo a operação $(x \cdot f)(v) := -f(x \cdot v)$, para todos $f \in V^*$, $v \in V$ e $x \in \mathfrak{g}$. Neste caso, dizemos que V^* é o $\mathfrak{g}$-módulo **dual** de V. Seja V' outro $\mathfrak{g}$-módulo. Então $\mathrm{Hom}_F(V, V')$ possui uma estrutura de $\mathfrak{g}$-módulo definindo a ação de $\mathfrak{g}$ por $(x \cdot f)(v) = x \cdot f(v) - f(x \cdot v)$. Por fim, o produto tensorial $V \otimes W$ é um $\mathfrak{g}$-módulo com a operação $x \cdot (v \otimes w) := x \cdot v \otimes w + v \otimes x \cdot w$, para todos $v \in V$, $w \in W$ e $x \in \mathfrak{g}$.

Finalizamos esta seção nos recordando de um resultado clássico de teoria de representações:

Teorema 5.4.6 (Lema de Schur). *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie e seja* V *um* $\mathfrak{g}$*-módulo irredutível. Neste caso, todo endomorfismo de* $\mathfrak{g}$*-módulo de* V *é um produto por escalar.*

5.5 Um caso particular

Nesta seção, estudaremos as representações de $\mathfrak{sl}(2, F)$.

Antes de começarmos, vamos recordar que a *decomposição de Jordan* de um endomorfismo T de um F-espaço vetorial[3] V pode ser escrito como a soma $T = T_s + T_n$, onde T_s é um operador semi-simples (o que, neste caso, equivale a ser diagonalizável), T_n é um operador nilpotente e os dois comutam entre si. Tal decomposição é única.

[3]Ressaltamos aqui que a existência de tal decomposição é garantida pelo fato de que F é algebricamente fechado.

De modo geral, se $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ é uma representação de $\mathfrak{g}$ em V, não podemos dizer nada a respeito da decomposição de Jordan para qualquer endomorfismo. Porém, caso $\mathfrak{g}$ seja semi-simples, temos o seguinte resultado:

Teorema 5.5.1 (Preservação da decomposição de Jordan). *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples. Para qualquer elemento $x \in \mathfrak{g}$, considere a decomposição de Jordan $x = x_s + x_n$, com x_s semi-simples e x_n nilpotente. Então, para toda representação $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, tem-se*

$$\varphi(x_s) = \varphi(x)_s \qquad e \qquad \varphi(x_n) = \varphi(x)_n.$$

O que o teorema acima nos diz é que, se $\mathfrak{g}$ é semi-simples e $x = x_s + x_n$ é a decomposição de Jordan de x, então, para toda a representação $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, temos que $\varphi(x) = \varphi(x_s) + \varphi(x_n)$ é a decomposição de Jordan de $\varphi(x)$.

Agora, considere a base canônica de $\mathfrak{sl}(2, F)$, dada por

$$h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que,

$$[h, x] = 2x \qquad [h, y] = -2y \qquad [x, y] = h.$$

Pela preservação da decomposição de Jordan (Teorema 5.5.1), temos que h age diagonalmente em V. Desse modo, podemos decompor V como

$$V = \bigoplus_{\alpha \in F} V_\alpha,$$

onde $V_\alpha := \{\, v \in V \mid h \cdot v = \alpha v \,\}$ são os auto-espaços de V com relação a h. Se α é tal que $V_\alpha \neq 0$, então dizemos que α é um **peso** de h em V. Neste caso, V_α é um **espaço peso**.

É natural nos perguntarmos como x e y agem em cada V_α. Vejamos o que podemos concluir. Seja $v \in V_\alpha$. Então

$$h \cdot (x \cdot v) = x \cdot (h \cdot v) + [h, x] \cdot v = x \cdot (\alpha v) + 2x \cdot v = (\alpha + 2) x \cdot v.$$

Assim, podemos perceber que que, se v é um autovetor de h com autovalor α, então $x \cdot v$ é um autovetor de h com autovalor $\alpha + 2$. Em outras palavras, x "manda" V_α em $V_{\alpha+2}$. Analogamente, podemos verificar que y "manda" V_α em $V_{\alpha-2}$. Dessa forma, a ação de $\mathfrak{sl}(2, F)$ em V pode ser representada através da seguinte imagem:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, bend left, "x"] & V_{\alpha-2} \arrow[l, "y"] \arrow[r, bend left, "x"] \arrow[loop below, "h"] & V_{\alpha} \arrow[l, "y"] \arrow[r, bend left, "x"] \arrow[loop below, "h"] & V_{\alpha+2} \arrow[l, "y"] \arrow[r, bend left, "x"] \arrow[loop below, "h"] & \cdots \arrow[l, "y"]
\end{tikzcd}$$

Como a dimensão de V é finita e a decomposição é uma soma direta de subespaços, obtemos que existe α tal que $V_\alpha \neq 0$ e $V_{\alpha+2} = 0$. Logo, se $v \in V_\alpha$, então $x \cdot v = 0$. Assim, chamamos quaisquer vetores não nulos de V_α de **vetores maximais** de peso α.

No caso anterior, sabemos o que ocorre caso apliquemos x em cada vetor maximal, mas o que podemos dizer se aplicarmos y em um vetor maximal v não nulo? A resposta dessa pergunta é dada pelo seguinte lema:

Lema 5.5.2. *Seja V um $\mathfrak{sl}(2, F)$-módulo irredutível. Fixe $v_0 \in V_\alpha$ um vetor maximal e defina $v_{-1} = 0$, $v_i = (1/i!)y^i \cdot v_0$, para todo $i \geq 0$. Então*

i. $h \cdot v_i = (\alpha - 2i)v_i$,

ii. $y \cdot v_i = (i + 1)v_{i+1}$,

iii. $x \cdot v_i = (\alpha - i + 1)v_{i-1}$.

O que o lema acima nos diz é que o conjunto $\{v_0, y \cdot v_0, \ldots, y^n \cdot v_0\}$ gera o $\mathfrak{sl}(2, F)$-módulo V, onde n é o menor inteiro tal que $v_n \neq 0$ e $v_{n+1} = 0$. Mais do que isso, pelo item iii, obtemos que $x \cdot v_{n+1} = (\alpha - n)v_n$. O lado esquerdo é igual a 0 pela escolha de n. No lado direito, porém, temos que $v_n \neq 0$. Logo, a única possibilidade é que $\alpha - n = 0$, o que prova que o peso α é um inteiro não negativo uma unidade menor do que a dimensão de V (e que consequentemente todo autovalor de h será um inteiro). Chamamos tal α de **maior peso** de V. Note que pelo conjunto de geradores que encontramos, podemos afirmar que cada espaço peso possui dimensão um. Em resumo, temos o seguinte teorema:

Teorema 5.5.3. *Seja V um $\mathfrak{sl}(2, F)$-módulo irredutível.*

i. Com relação a h, V se decompõem em uma soma de auto-espaços V_α, onde $\alpha \in \{n, n-2, \ldots, -(n-2), -n\}$, $n + 1 = \dim V$ e $\dim V_\alpha = 1$.

ii. V possui um único vetor maximal a menos de múltiplos por escalares não nulos. Além disso, seu peso é igual ao inteiro não negativo n.

iii. Existe no máximo um $\mathfrak{sl}(2.F)$-módulo irredutível V para cada dimensão $n + 1$ ($n \leq 0$) a menos de isomorfismo.

Finalizamos este capítulo com um resultado que generaliza o teorema acima para módulos arbitrários (não necessariamente irredutíveis).

Corolário 5.5.4. *Seja V um $\mathfrak{sl}(2, F)$-módulo arbitrário. Então os autovalores de h em V são todos inteiros e cada um deles ocorre junto com seu oposto (o mesmo número de vezes). Ainda, em qualquer decomposição de V como uma soma direta de submódulos irredutíveis, o número de submódulos somados é igual a* $\dim V_0 + \dim V_1$.

Capítulo 6

Cohomologia das Álgebras de Lie

Neste capítulo, iremos usar as ferramentas que obtemos até agora para introduzir o estudo da cohomologia das álgebras de Lie. O foco, será demonstrar os teoremas de Weys e Levi-Malcev, que apresentam decomposições dos módulos sobre uma álgebra de Lie e das álgebras de Lie de dimensão finita, respectivamente.

6.1 Álgebra universal envelopante

Todo o trabalho desenvolvido até agora, foi feito com base em módulos sobre anéis. Apesar disso, queremos estudar os módulos sobre álgebras de Lie, e não sobre anéis. Por este motivo, precisamos relacionar uma álgebra de Lie a algum objeto que possua uma estrutura de anel. Isso será feito de maneira análoga ao caso para grupos.

Recorde que se A é uma F-álgebra, então podemos induzir uma estrutura de álgebra de Lie definindo o colchete de Lie em A como $[x, y] := xy - yx$, onde a justaposição denota o produto em A. Assim, obtemos um funtor $L\colon \mathfrak{A}_F \to \mathfrak{L}$ da categoria das F-álgebras à categoria das álgebras de Lie. Recorde, também, que a construção do anel grupo ocorre do fato de que o funtor anel grupo é construído para ser adjunto à esquerda do funtor unitário, que associa cada anel R ao grupo multiplicativo dos elementos de R. Portanto, o nosso trabalho é definir um funtor adjunto à esquerda do funtor L que definimos acima, de modo que o objeto que vamos construir respeite uma propriedade universal que será apresentada em seguida.

Seja V um F-espaço vetorial. Recursivamente, definimos a ***n*-dobra do produto tensorial** $T_n(V)$ de V como sendo F, se $n = 0$ e

$$T_n(V) := \bigotimes_{i=1}^{n} V,$$

caso $n \geq 1$. Desse modo, a **álgebra tensorial** de V é dada por

$$T(V) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} T_n(V),$$

com a multiplicação induzida por

$$(m_1 \otimes \cdots \otimes m_p) \cdot (m'_1 \otimes \cdots \otimes m'_q) := m_1 \otimes \cdots \otimes m_p \otimes m'_1 \otimes \cdots \otimes m'_q,$$

onde $m_i, m'_j \in V$ para todo $1 \leq i \leq p$ e todo $1 \leq j \leq q$.

Note que $T(V)$ nada mais é do que a F-álgebra livre sobre V. Desse modo, temos a seguinte propriedade universal: dado uma F-álgebra A e uma transformação linear $f\colon V \to A$, existe um único homomorfismo de F-álgebras $f_0\colon T(V) \to A$ que estende f. Assim, o funtor T, que associa cada F-espaço vetorial V a cada F-álgebra $T(V)$ é adjunto à esquerda do funtor esquecimento que associa cada F-álgebra A ao espeço vetorial A. Com isso, temos que f_0 deve ser definido como

$$f_0(m_1 \otimes \cdots \otimes m_p) := f(m_1) \cdots f(m_p).$$

Apesar da álgebra $T(V)$ ser associativa, ela ainda não respeita a propriedade universal que nos interessa no caso de V ser uma álgebra de Lie. Portanto, temos a seguinte definição:

Definição 6.1.1. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre F, e considere I o ideal de $T(\mathfrak{g})$ gerado pelos elementos da forma

$$x \otimes y - y \otimes x - [x, y],$$

para todo $x, y \in \mathfrak{g}$. Então a **álgebra universal envelopante** de $\mathfrak{g}$ é definida como sendo

$$U(\mathfrak{g}) := \frac{T(\mathfrak{g})}{I}.$$

Temos o seguinte resultado:

Proposição 6.1.2. *O funtor álgebra universal envelopante U é adjunto à esquerda ao funtor L.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e A uma F-álgebra. Como $\mathfrak{g}$ está mergulhada em $T(\mathfrak{g})$, obtemos uma transformação linear $\iota\colon \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$, que induz um único homomorfismo de álgebras de Lie $\iota\colon \mathfrak{g} \to LU(\mathfrak{g})$.

Desse modo, dado um homomorfismo de álgebras de Lie $f\colon \mathfrak{g} \to L(A)$, considere a transformação linear $i\colon L(A) \to A$ dada pela identidade de A. Então, pela propriedade universal da álgebra tensorial $T(\mathfrak{g})$, existe um homomorfismo de F-álgebras $f_0\colon T(\mathfrak{g}) \to A$ induzido pela transformação if. Como f_0 se anula em I, já que f é um homomorfismo de álgebras de Lie, obtemos um único homomorfismo de F-álgebras $f_1\colon U(\mathfrak{g}) \to A$ tal que $f = f_1\iota$.

Assim, podemos definir uma aplicação

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathfrak{L}(\mathfrak{g}, L(A)) &\longrightarrow \mathfrak{A}_F(U(\mathfrak{g}), A) \\ f &\longmapsto f_1, \end{aligned}$$

onde f_1 é definida como acima. Vamos mostrar que φ é uma bijeção mostrando que a sua inversa é

$$\begin{aligned}\psi\colon \mathfrak{A}_F(U(\mathfrak{g}), A) &\longrightarrow \mathfrak{L}(\mathfrak{g}, L(A))\\ g &\longmapsto g \circ \iota.\end{aligned}$$

Note que $g \circ \iota$ é um homomorfismo de álgebras de Lie (logo a aplicação acima está bem definida), pois

$$[g\iota(x), g\iota(y)] = [g(x), g(y)] = g(x)g(y) - g(y)(x) = g(xy - yx) = g([x, y]) = g\iota([x, y]).$$

Temos que,

$$\varphi(\psi(f)) = \varphi(f\iota) = (f\iota)_1 = f.$$

Por outro lado, segue que

$$\psi(\varphi(f)) = \psi(f_1) = f_1\iota = f.$$

Assim, existe uma correspondência biunívoca entre $\mathfrak{L}(\mathfrak{g}, L(A))$ e $\mathfrak{As}_F(U(\mathfrak{g}), A)$, o que prova que U é adjunto à esquerda de L. ■

Agora, considere $e_{i\,i\in J}$ uma base de $\mathfrak{g}$ indexada por um conjunto totalmente ordenado J. Seja $I = \{ i_1, \ldots, i_k \}$ uma sequência crescente de elementos de J com a relação de ordem, isto é, para todo $i_j \in J$ tal que $1 \le j \le k$, temos que $i_1 \le \cdots \le i_k$. Definimos então $e_I = e_{i_1} \cdots e_{i_k} \in U(\mathfrak{g})$ a imagem do elemento $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \in T(\mathfrak{g})$ pela projeção.

Teorema 6.1.3 (Birkhoff-Witt). *Seja $\{ e_i \}_{i\in J}$ uma base de $\mathfrak{g}$. Então os elementos e_I correspondentes a todas as sequências crescentes finitas I (incluindo a sequência vazia) formam uma base de $U(\mathfrak{g})$.*

Recorde que os conceitos de módulos sobre uma álgebra de Lie e representações de álgebras de Lie são equivalentes. Desse modo, se V é um $\mathfrak{g}$-módulo, então existe uma representação $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ que induz a estrutura de $\mathfrak{g}$-módulo em V. Pela propriedade universal da álgebra universal envelopante, φ induz um único homomorfismo $\varphi_1\colon U(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}(V)$ de F-álgebras, fazendo de V um $U(\mathfrak{g})$-módulo à esquerda.

Por outro lado, se $\sigma\colon U(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}\, V$ é um homomorfismo de F-álgebras (ou seja, V é um $U(\mathfrak{g})$-módulo), então V possui uma estrutura de $\mathfrak{g}$-módulo pela representação $\varphi = \sigma\iota$. Desse modo, temos que o conceito de $\mathfrak{g}$-módulo e $U(\mathfrak{g})$-módulo coincidem.

Agora, considere F um $\mathfrak{g}$-módulo trivial, isto é, $x \cdot v = 0$, para todo $v \in F$ e $x \in \mathfrak{g}$. Assim, o único homomorfismo correspondente $\varepsilon\colon U(\mathfrak{g}) \to F$ é chamado de **incrementação** de $U(\mathfrak{g})$. Seu kernel $\ker \varepsilon$ é denotado por $I(\mathfrak{g})$ e é chamado de **ideal de incrementação** de $\mathfrak{g}$. Note que $I(\mathfrak{g})$ nada mais é do que o ideal de $U(\mathfrak{g})$ gerado por $\iota(\mathfrak{g})$.

Corolário 6.1.4. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$. Então $U(\mathfrak{g})$ é um $\mathfrak{h}$-módulo livre.*

Demonstração. Seja $\{ e'_i \}_{i \in J'}$ uma base de $\mathfrak{h}$ e estenda-a para uma base de $\mathfrak{g}$ por uma base $\{ e_i \}_{i \in J}$ do complementar de $\mathfrak{h}$. Considere J e J' totalmente ordenados. Defina uma relação de ordem total em $J' \cup J$ da seguinte maneira:

$$i \leq j \begin{cases} \text{se } i, j \in J' \text{ e } i \leq j, \\ \text{se } i \in J' \text{ e } j \in J, \\ \text{se } i, j \in J \text{ e } i \leq j. \end{cases}$$

Pelo *Teorema de Birkhoff-Witt* (Teorema 6.1.3), temos que os elementos e_I formam uma base de $U(\mathfrak{g})$ e, portanto, que $U(\mathfrak{g})$ é um $\mathfrak{h}$-módulo livre. ∎

Com este corolário, obtemos o seguinte resultado:

Corolário 6.1.5. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$. Todo $\mathfrak{g}$-módulo projetivo (injetivo) é um $\mathfrak{h}$-módulo projetivo (injetivo).*

Assim como acontece no caso de módulos sobre anéis, se $\mathfrak{n}$ é uma subálgebra de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ é o quociente de $\mathfrak{g}$ por $\mathfrak{n}$, então obtemos uma sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathfrak{n} \hookrightarrow \mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathfrak{h} \longrightarrow 0.$$

Chamamos esta sequência exata curta de **extensão de álgebras de Lie**. No caso em que $\mathfrak{n}$ é abeliana, dizemos que a extensão possui **kernel abeliano**.

Terminamos esta seção com um resultado que será usado mais à frente.

Corolário 6.1.6. *Se*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{n} \hookrightarrow \mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathfrak{h} \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata de álgebras de Lie, então temos um isomorfismo $F \otimes_{U(\mathfrak{n})} U(\mathfrak{g}) \simeq U(\mathfrak{h})$ de $\mathfrak{g}$-módulos à direita.

Demonstração. Pelo Corolário 6.1.4, $U(\mathfrak{g})$ é um $\mathfrak{n}$-módulo livre e, portanto, um $U(\mathfrak{n})$-módulo livre. Logo, temos que o homomorfismo de álgebras de Lie

$$\begin{aligned} \varphi \colon F \otimes_{U(\mathfrak{n})} U(\mathfrak{g}) &\xrightarrow{\sim} U(\mathfrak{h}) \\ 1 \otimes m &\longmapsto \overline{m} \end{aligned}$$

é um isomorfismo. De fato, é claro que φ é sobrejetora, já que a projeção de $U(\mathfrak{g})$ em $U(\mathfrak{h})$ também é. Agora, se $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \otimes m_i \in \ker \varphi$, então

$$\overline{0} = \varphi\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \otimes m_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \varphi(1 \otimes m_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overline{m_i}$$

Logo, $m = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i m_i \in U(\mathfrak{n})$. Mas então $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \otimes m_i = 1 \otimes m = m \cdot 1 \otimes 1 = 0 \otimes 1 = 0$, donde segue o resultado desejado. ∎

6.2 A cohomologia das álgebras de Lie

Finalmente chegamos ao ponto chave desta parte do trabalho. Para definirmos a cohomologia das álgebras de lie, usaremos o funtor Ext. Durante as partes que seguem, por abuso de notação, escreveremos $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(-,-)$, $\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g}}(-,-)$, etc, ao invés de $\mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(-,-)$, $\mathrm{Ext}^n_{U(fg)}$, etc.

Definição 6.2.1. Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre F e um $\mathfrak{g}$-módulo M, o ***n*-ésimo grupo de cohomologia** de $\mathfrak{g}$ com coeficientes em M é definido por

$$H^n(\mathfrak{g}, M) := \mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g}}(F, M),$$

com $n \in \mathbb{N}$, onde F é visto como $\mathfrak{g}$-módulo trivial.

Embora chamemos $H^n(\mathfrak{g}, M)$ de n-ésimo grupo de cohomologia, estes conjuntos possuem mais do que uma estrutura de grupo: também são F-espaços vetoriais, Apesar disso, iremos continuar usando a terminologia de grupo ao invés de espaço vetorial.

A definição de grupo de cohomologia nos garante algumas propriedades importantes (e diretas) desses grupos.

Proposição 6.2.2.

i. Se

$$0 \longrightarrow M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta de $\mathfrak{g}$-módulos, então temos uma sequência de exata longa de cohomologia

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(\mathfrak{g}, M') \longrightarrow H^0(\mathfrak{g}, M) \longrightarrow H^0(\mathfrak{g}, M'') \longrightarrow H^1(\mathfrak{g}, M') \longrightarrow \cdots \\ \cdots \longrightarrow H^n(\mathfrak{g}, M') \longrightarrow H^n(\mathfrak{g}, M) \longrightarrow H^n(\mathfrak{g}, M'') \longrightarrow H^{n+1}(\mathfrak{g}, M') \longrightarrow \cdots. \end{aligned}$$

ii. Se M é injetivo, então $H^n(\mathfrak{g}, M) = 0$ para todo $n \geq 1$.

iii. Se

$$0 \longrightarrow M \hookrightarrow I \twoheadrightarrow M' \longrightarrow 0$$

é uma apresentação injetiva de M, então

$$H^{n+1}(\mathfrak{g}, M) \simeq H^n(\mathfrak{g}, M')$$

para todo $n \geq 1$.

iv. Seja

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow P_k \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

uma sequência exata de $\mathfrak{g}$-módulos (à esquerda), com $P_0, \ldots, P_k$ projetivos. Então a sequência

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(P_k, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(F, M) \longrightarrow H^{k+1}(\mathfrak{g}, M) \longrightarrow 0$$

é exata e especifica os grupos de cohomologia de $\mathfrak{g}$. Além disso, para todo $n \geq k+2$, temos que

$$H^n(\mathfrak{g}, M) \simeq \mathrm{Ext}_{\mathfrak{g}}^{n-k-1}(F, M).$$

Em particular, a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow I(\mathfrak{g}) \hookrightarrow U(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow F \longrightarrow 0$$

implica que

$$H^n(\mathfrak{g}, M) \simeq \mathrm{Ext}_{\mathfrak{g}}^{n-1}(I(\mathfrak{g}), M),$$

para todo n‘2.

Naturalmente, é plausível tentarmos computar os grupos de cohomologia. Desse modo, o nosso objetivo agora é será computar os grupos de cohomologia de graus 0, 1 e 2. Os dois primeiros serão feitos nesta seção, enquanto o último ficará para a próxima, já que será necessário obtermos alguns resultados antes.

Para todo $\mathfrak{g}$-módulo M, temos que $H^0(\mathfrak{g}, M)$ é igual a $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(F, M)$, já que $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{g}}^n$ é um funtor derivado. Para cada homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos $\varphi \colon F \to M$, temos que φ é completamente determinado pela imagem de um elemento fixo[1] $a \in F$ tal que $a \neq 0$. Suponha que $\varphi(a) = m$. Assim, para todo $x \in \mathfrak{g}$, obtemos

$$0 = \varphi(0) = \varphi(x \cdot a) = x \cdot \varphi(a) = x \cdot m.$$

Portanto, há uma correspondência entre os homomorfismos de $\mathfrak{g}$-módulos e os elementos de M que são anulados pela ação de qualquer elemento de $\mathfrak{g}$, ou seja,

$$H^0(\mathfrak{g}, M) = \left\{ m \in M \;\middle|\; x \cdot m = 0, \text{ para todo } x \in \mathfrak{g} \right\}.$$

Para computarmos o grupo de cohomologia $H^1(\mathfrak{g}, M)$, será necessário introduzir alguns conceitos antes.

[1]Recorde aqui que um homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos é, antes de tudo, uma transformação linear, e que esta é completamente determinada pelo que ela faz em uma base do espaço vetorial do domínio.

Definição 6.2.3. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e M um $\mathfrak{g}$-módulo. Uma **derivação** de $\mathfrak{g}$ a M é uma transformação F-linear $d\colon \mathfrak{g} \to M$ tal que

$$d([x, y]) = x \cdot d(y) - y \cdot d(x),$$

para todo $x, y \in \mathfrak{g}$.

Note que, se $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}, M)$ é o conjunto de todas as derivações de $\mathfrak{g}$ em M, então este possui uma estrutura de F-espaço vetorial. Note, também, que se M é um $\mathfrak{g}$-módulo trivial, então uma derivação nada mais é do que um homomorfismo de álgebras de Lie, com M sendo abeliana.

Exemplo 6.2.4. Seja M um $\mathfrak{g}$-módulo. Para cada $m \in M$, temos que a aplicação

$$\begin{aligned} d_m\colon \mathfrak{g} &\longrightarrow M \\ x &\longmapsto x \cdot m \end{aligned}$$

é uma derivação de $\mathfrak{g}$ em M. Derivações desta forma são chamadas de **derivações internas**. Além disso, o conjunto de tais derivações (denotado por $\mathrm{Ider}(\mathfrak{g}, M)$) é um F-subespaço vetorial de $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}, M)$.

Teorema 6.2.5. *O funtor* $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}, -)$ *é representado pelo* $\mathfrak{g}$*-módulo* $\mathbb{I}(\mathfrak{g})$*, ou seja, para qualquer* $\mathfrak{g}$*-módulo* M*, existe um isomorfismo natural entre os* F*-espaços vetoriais* $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}, M)$ *e* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(I(\mathfrak{g}), M)$.

Agora, podemos computar o 1-ésimo grupo de cohomologia.

Proposição 6.2.6. *Se* $\mathfrak{g}$ *é uma álgebra de Lie e* M *é um* $\mathfrak{g}$*-módulo, então*

$$H^1(\mathfrak{g}, M) \simeq \frac{\mathrm{Der}(\mathfrak{g}, M)}{\mathrm{Ider}(\mathfrak{g}, M)}.$$

Além disso, se M *é um* $\mathfrak{g}$*-módulo trivial, então* $H^1(\mathfrak{g}, M) \simeq \mathrm{Hom}_F(\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], M)$.

Em teoria de grupos, vemos que derivações são relacionadas com extensões cindidas. Isso acontece, também, no caso de álgebras de Lie, mas para falarmos disso, precisamos introduzir um objeto análogo ao *produto semi-direto* de grupos.

Dado uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e um $\mathfrak{g}$-módulo M, considere o F-espaço vetorial $M \oplus \mathfrak{g}$. Defina neste espaço vetorial a aplicação bilinear $M \oplus \mathfrak{g} \times M \oplus \mathfrak{g} \to M \oplus \mathfrak{g}$ dada por

$$[(a, x), (b, y)] := (x \cdot b - y \cdot a, [x, y]).$$

Com essa aplicação, $M \oplus \mathfrak{g}$ possui uma estrutura de álgebra de Lie. Tal álgebra de Lie é denotada por $M \rtimes \mathfrak{g}$. Dizemos que $M \rtimes \mathfrak{g}$ é o **produto semi-direto** de M e $\mathfrak{g}$.

Se M é um $\mathfrak{g}$-módulo trivial, então os mergulhos canônicos $\iota_M\colon M \to M \rtimes \mathfrak{g}$ e $\iota_{\mathfrak{g}}\colon \mathfrak{g} \to M \rtimes \mathfrak{g}$ e a projeção canônica $p_{\mathfrak{g}}\colon M \rtimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ são homomorfismos de álgebras de Lie. Dessa maneira, temos uma sequência exata curta de álgebras de Lie

$$0 \longrightarrow M \xhookrightarrow{\iota_M} M \rtimes \mathfrak{g} \xrightarrow{p_{\mathfrak{g}}} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

que cinde pelo mergulho $\iota_{\mathfrak{g}}$.

Com o produto semi-direto, obtemos o seguinte resultado:

Proposição 6.2.7. *Há um isomorfismo natural de espaços vetoriais entre* $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}, M)$ *e o espaço vetorial dos homomorfismos de álgebras de Lie* $f\colon \mathfrak{g} \to M \rtimes \mathfrak{g}$ *tais que* $p_{\mathfrak{g}} \circ f = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$.

Finalizamos esta seção apresentando a homologia das álgebras de Lie.

Definição 6.2.8. Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre F e um $\mathfrak{g}$-módulo M (à direita), o ***n*-ésimo grupo de homologia** de $\mathfrak{g}$ com coeficientes em M é definido por

$$H_n(\mathfrak{g}, M) := \mathrm{Tor}_n^{\mathfrak{g}}(M, F),$$

com $n \in \mathbb{N}$, onde F é visto como $\mathfrak{g}$-módulo trivial.

Não iremos nos aprofundar muito neste caso, mas mencionaremos que os grupos de homologia possuem propriedades similares às propriedades listadas na Proposição 6.2.2. Um resultado necessário para a próxima seção será o seguinte:

Proposição 6.2.9. *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie e* M *um* $\mathfrak{g}$*-módulo à direita. Então*

$$H_1(\mathfrak{g}, M) = \ker(M \otimes_{\mathfrak{g}} I(\mathfrak{g}) \to M \otimes_{\mathfrak{g}} U(\mathfrak{g})).$$

Se M *é um* $\mathfrak{g}$*-módulo trivial, então* $H_1(\mathfrak{g}, M) \simeq M \otimes_{\mathfrak{g}} (\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$.

6.3 Extensões e o 2-ésimo grupo de cohomologia

Nesta seção, iremos computar o grupo $H^2(\mathfrak{g}, M)$ usando a mesmo método empregado para a computação dos grupos de cohomologia da teoria de grupos. Seja

$$0 \longrightarrow \mathfrak{n} \hookrightarrow \mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathfrak{h} \longrightarrow 0$$

uma sequência exata de álgebras de Lie. Considere a sequência exata curta de $\mathfrak{g}$-módulos

$$0 \longrightarrow I(\mathfrak{g}) \hookrightarrow U(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow F \longrightarrow 0.$$

Tensorizando por $U(\mathfrak{h})$, obtemos uma sequência exata de $\mathfrak{h}$-módulos

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^{\mathfrak{g}}(U(\mathfrak{h}), F) \longrightarrow U(\mathfrak{h}) \otimes_{\mathfrak{g}} I(\mathfrak{g}) \longrightarrow U(\mathfrak{h}) \otimes_{\mathfrak{g}} U(\mathfrak{g}) \longrightarrow U(\mathfrak{h}) \otimes_{\mathfrak{g}} F \longrightarrow 0.$$

Pelo Corolário 6.1.6, temos que $\mathrm{Tor}_1^{\mathfrak{g}}(U(\mathfrak{h}), F) \simeq \mathrm{Tor}_1^{\mathfrak{g}}(U(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathfrak{n}} F, F)$. A Proposição 3.6.1 implica que $\mathrm{Tor}_1^{\mathfrak{g}}(U(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathfrak{n}} F, F) \simeq \mathrm{Tor}_1^{\mathfrak{n}}(F, F)$, donde segue, da Proposição 6.2.9 que

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathfrak{n}}(F,F) = H_1(\mathfrak{n}, F) \simeq F \otimes_F \frac{\mathfrak{n}}{[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]} \simeq \frac{\mathfrak{n}}{[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]}.$$

Em resumo, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 6.3.1. *Se*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{n} \hookrightarrow \mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathfrak{h} \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata de álgebras de Lie, então

$$0 \longrightarrow \tfrac{\mathfrak{n}}{[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]} \hookrightarrow U(\mathfrak{h}) \otimes_{\mathfrak{g}} I(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow I(\mathfrak{h}) \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta de $\mathfrak{h}$-módulos.

Teorema 6.3.2. *Se*

$$0 \longrightarrow I(\mathfrak{g}) \hookrightarrow U(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow F \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata de álgebras de Lie, e se M é um $\mathfrak{h}$-módulo, então a sequência

$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}(\mathfrak{h}, M) \longrightarrow \mathrm{Der}(\mathfrak{g}, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}\left(\tfrac{\mathfrak{n}}{[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]}, M\right) \longrightarrow H^2(\mathfrak{h}, M) \longrightarrow H^2(\mathfrak{g}, M)$$

é exata.

Seja

$$0 \longrightarrow \mathfrak{n} \xhookrightarrow{\iota} \mathfrak{g} \xrightarrow{p} \mathfrak{h} \longrightarrow 0$$

uma extensão de álgebras de Lie com kernel abeliano $\mathfrak{n}$. Recorde que uma **seção** $s\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ de p nada mais é do que uma transformação F-linear tal que $p \circ s = \mathrm{id}_{\mathfrak{h}}$. Assim, se tal seção existe, podemos induzir em $\iota(\mathfrak{n})$ (e equivalentemente em $\mathfrak{n}$) uma estrutura de $\mathfrak{h}$-módulo, definindo $x \cdot \iota(n) := [s(x), \iota(n)]$, para todo $n \in \mathfrak{n}$ e $x \in \mathfrak{h}$, com $[\bullet, \bullet]$ sendo o colchete em $\mathfrak{g}$. Se $s'\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ é uma outra seção de p, temos

$$p(s - s') = ps - ps' = \mathrm{id}_{\mathfrak{h}} - \mathrm{id}_{\mathfrak{h}} = 0.$$

Mas então $\mathrm{im}(s - s') \subseteq \ker p = \mathrm{im}\, \iota$. Isso implica que $[(s - s')(x), \iota(n)] = 0$ para todo $x \in \mathfrak{h}$ e $n \in \mathfrak{n}$, já que $\mathfrak{n}$ é abeliana. Assim, segue que $[s(x), \iota(n)] = [s'(x), \iota(n)]$.

Dessa forma, temos que a estrutura de $\mathfrak{h}$-módulo não depende da escolha da seção escolhida. Assim, dizemos que tal estrutura de $\mathfrak{h}$-módulo de $\mathfrak{n}$ é induzida pela extensão.

Definição 6.3.3. Uma **extensão** de $\mathfrak{h}$ por um $\mathfrak{h}$-módulo M é uma extensão de álgebras de Lie

$$0 \longrightarrow M \hookrightarrow \mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathfrak{h} \longrightarrow 0$$

com kernel abeliano M tal que a estrutura de $\mathfrak{h}$-módulo de M induzida pela extensão coincide a estrutura de $\mathfrak{h}$-módulo de M.

Exemplo 6.3.4. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e M um $\mathfrak{g}$-módulo. Então

$$0 \longrightarrow M \xhookrightarrow{\iota_M} M \rtimes \mathfrak{g} \xrightarrow{p_{\mathfrak{g}}} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

é uma extensão de $\mathfrak{g}$ pelo $\mathfrak{g}$-módulo M. Esta extensão é chamada de **extenção cisante**, ou **extensão trivial**.

Dizemos que duas extensões $M \hookrightarrow \mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathfrak{h}$ e $M \hookrightarrow \mathfrak{g}' \twoheadrightarrow \mathfrak{h}$ são **equivalente** se existe um homomorfismo de álgebras de Lie $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & \mathfrak{g} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "f"] & \mathfrak{h} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, hook] & \mathfrak{g}' \arrow[r, two heads] & \mathfrak{h} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

comuta. Note que se f existe, então f é automaticamente um isomorfismo. O conjunto de todas as classes de equivalência das extensões de $\mathfrak{h}$ por M é denotado por $M(\mathfrak{h}, M)$. Note que $M(\mathfrak{h}, M) \neq \emptyset$, já que ao menos a extensão cisante é uma extensão de $\mathfrak{h}$ por M.

Um leitor atento pode estar se perguntando o motivo de estarmos definindo todos esses conceitos, já que esta seção tem como objetivo principal computar o 2-ésimo grupo de cohomologia. Tal questionamento é respondido com seguinte resultado:

Teorema 6.3.5. *Existe uma correspondência biunívoca entre $H^2(\mathfrak{h}, M)$ e o conjunto $M(\mathfrak{h}, M)$ das classes de equivalência das extensões de $\mathfrak{h}$ por M. Sendo assim, o conjunto $M(\mathfrak{h}, M)$ possui uma estrutura de F-espaço vetorial e $M(\mathfrak{h}, -)$ é um funtor covariante da categoria dos $\mathfrak{h}$-módulos à categoria dos F-espaços vetoriais.*

Terminaremos esta seção apresentando o seguinte resultado sobre cohomologia de módulos irredutíveis sobre uma álgebra de Lie semi-simples.

Proposição 6.3.6. *Seja fg uma álgebra de Lie semi-simples de dimensão finita. Considere M um $\mathfrak{g}$-módulo irredutível de dimensão finita de tal forma que a ação de $\mathfrak{g}$ em M não é trivial. Então $H^q(\mathfrak{g}, M) = 0$, para todo $q \geq 0$.*

6.4 Lemas de Whitehead e teoremas de Weyl e Levi

Neste seção, iremos provar alguns resultados bastante importantes dentro da teoria das álgebras de Lie. Estes são os *Lemas de Whitehead* e os *Teoremas de Weyl* e *Levi-Malcev*. Os dois primeiros são usados para provar os dois últimos, como veremos a seguir.

Lema 6.4.1 (Primeiro Lema de Whitehead). *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita semi-simples. Então para todo $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita M tem-se que $H^1(\mathfrak{g}, M) = 0$.*

Demonstração. A prova será feita por contradição. Suponhamos que exista um $\mathfrak{g}$-módulo M tal que $H^1(\mathfrak{g}, M) \neq 0$. Como qualquer M possui dimensão finita, vamos tomar M tal que $\dim_F M$ é a menor possível. Temos duas possibilidades: M é irredutível ou não.

Se M não é irredutível, então existe um submódulo próprio $M' \subseteq M$. Temos uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow \frac{M}{M'} \longrightarrow 0.$$

Uma vez que $\dim_F M' < \dim_F M$ e que $\dim_F M/M' < \dim_F M$, obtemos que

$$H^1(\mathfrak{g}, M') = H^1(\mathfrak{g}, M/M') = 0,$$

pois M é submódulo tal que $H^1(\mathfrak{g}, M) \neq 0$ de menor dimensão. Porém, pelo Teorema 3.1.4, podemos associar a sequência exata curta anterior a uma sequência exata longa de cohomologia

$$\cdots \longrightarrow H^1(\mathfrak{g}, M') \longrightarrow H^1(\mathfrak{g}, M) \longrightarrow H^1(\mathfrak{g}, \tfrac{M}{M'}) \longrightarrow \cdots .$$

Assim, obtemos que $H^1(\mathfrak{g}, M) = 0$, o que é uma contradição.

Desse modo, a única possibilidade é que M seja irredutível. Neste caso, obtemos, pela Proposição 6.3.6, que a ação de $\mathfrak{g}$ em M deve ser trivial.

A Proposição 6.2.6 nos garante, então que $H^1(\mathfrak{g}, M) \simeq \mathrm{Hom}_F(\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], M)$. Pelo Corolário 5.3.4, temos que $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Portanto, $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$, donde segue que $\mathrm{Hom}_F(\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], M) = 0$. Mas então $H^1(\mathfrak{g}, M) = 0$, o que é, novamente, uma contradição. Logo, não existe um $\mathfrak{g}$-módulo tal que $H^1(\mathfrak{g}, M) \neq 0$, o que finaliza a prova. ∎

Teorema 6.4.2 (Teorema de Weyl). *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgera de Lie de dimensão finita. Todo $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita é completamente redutível.*

Demonstração. Seja M um $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita. Se ele é irredutível, não a nada o que demonstrar. Se ele não é, então M possui um submódulo M' tal que

$$0 \longrightarrow M' \overset{\varphi}{\hookrightarrow} M \overset{\psi}{\twoheadrightarrow} \frac{M}{M'} \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta de $\mathfrak{g}$-módulos. Desse modo, basta mostrar que a sequência exata acima cinde, já que isso é equivalente a dizer que M' possui um complemento. Aplicando o funtor contravariante $\mathrm{Hom}_F(-, M')$, obtemos uma sequência exata de F-espaços vetoriais

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_F(\tfrac{M}{M'}, M') \hookrightarrow \mathrm{Hom}_F(M, M') \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_F(M', M') \longrightarrow 0.$$

Note que a sequência acima é exata pois F é um corpo. Recorde que cada um dos espaços vetoriais acima possui uma estrutura de $\mathfrak{g}$-módulo. Desse modo, temos uma sequência exata longa de cohomologia

$$0 \longrightarrow H^0(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_F(\tfrac{M}{M'}, M')) \longrightarrow H^0(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_F(M, M')) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^0(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_F(M', M')) \longrightarrow H^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_F(\tfrac{M}{M'}, M')) \longrightarrow \cdots$$

Uma vez que o 0-ésimo grupo de cohomologia é equivalente ao conjuntos dos elementos invariantes pela ação de $\mathfrak{g}$, temos que $H^0(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_F(A, B)) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(A, B)$. De fato, se $f \in H^0(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_F(A, B))$, então $(x \cdot f)(a) = 0$, para todo $x \in \mathfrak{g}$. Mas $(x\dot{f})(a) = x \cdot f(a) - f(x \cdot a)$, donde segue que $x \cdot f(a) = f(x \cdot a)$.

Assim, a sequência exata longa acima fica

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\tfrac{M}{M'}, M') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M, M') \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M', M') \longrightarrow H^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_F(\tfrac{M}{M'}, M')) \longrightarrow \cdots$$

Pelo *Primeiro Lema de Whitehead*, temos que $H^1 H^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_F(\frac{M}{M'}, M')) = 0$. Logo, obtemos uma sequência exata curta de $\mathfrak{g}$-módulos

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\tfrac{M}{M'}, M') \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M, M') \xrightarrow{\varphi^*} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M', M') \longrightarrow 0.$$

Note que $\varphi^* = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\varphi, M')$. Como φ^* é um epimorfismo (e portanto sobrejetor), temos que existe $f_0 \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M, M')$ tal que $\varphi^*(f_0) = \mathrm{id}_{M'}$. Mas isso é o mesmo que dizer que $f_0 \circ \varphi = \mathrm{id}_{M'}$. Portanto, existe um complemento de M', o que prova que M é completamente redutível. ∎

Note que o *Teorema de Weyl* é equivalente ao *Teorema de Maschke* que estudamos em teoria de representações de grupos.

Finalmente, terminaremos esta parte deste trabalho, provando o *Segundo Lema de Whitehead* e o *Teorema de Levi-Malcev*. Este segundo não será usado de fato neste trabalho, entretanto ele nos mostra que, para se conhecer as álgebras de Lie de dimensão finita, basta que saibamos como as álgebras semi-simples e solúveis se comportam.

Lema 6.4.3 (Segundo Lema de Whitehead). *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples de dimensão finita e seja M um $\mathfrak{g}$-módulo também de dimensão finita. Então $H^2(\mathfrak{g}, M) = 0$.*

Demonstração. Suponhamos que a afirmação seja falsa. Então existe um $\mathfrak{g}$-módulo com o 2-ésimo grupo de cohomologia diferente de 0. Seja M o $\mathfrak{g}$-módulo com $\dim_F M$ a menor possível tal que $H^2(\mathfrak{g}, M) \neq 0$. Há duas possibilidades: ou M é irredutível ou não é.

Se M não é irredutível, então M possui um submódulo próprio não nulo M'. Considere a sequência exata curta de $\mathfrak{g}$-módulos

$$0 \longrightarrow M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow \tfrac{M}{M'} \longrightarrow 0.$$

Esta sequência induz uma sequência exata longa de cohomologia

$$\cdots \longrightarrow H^2(\mathfrak{g}, M') \longrightarrow H^2(\mathfrak{g}, M) \longrightarrow H^2\left(\mathfrak{g}, \tfrac{M}{M'}\right) \longrightarrow \cdots.$$

Agora, temos que $\dim_F M' < \dim_F M$ e que, portanto $\dim_F M/M' < \dim_F M$. Desse modo, como M é o $\mathfrak{g}$-módulo de menor dimensão tal que $H^2(\mathfrak{g}, M) \neq 0$, obtemos que

$$H^2(\mathfrak{g}, M') = H^2\left(\mathfrak{g}, \frac{M}{M'}\right) = 0.$$

Mas isso implica que $H^2(\mathfrak{g}, M) = 0$ pela sequência exata longa induzida, o que é um absurdo.

Portanto, M deve ser irredutível. Neste caso, a Proposição 6.3.6 garante que M é um $\mathfrak{g}$-módulo trivial. Como todo $\mathfrak{g}$-módulo trivial é isomorfo a F, basta mostrarmos que $H^2(\mathfrak{g}, F) = 0$.

Pelo Teorema 6.3.5, temos que mostrar que toda extensão

$$0 \longrightarrow F \xhookrightarrow{\iota} \mathfrak{h} \xrightarrow{p} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

de $\mathfrak{g}$ é equivalente a extensão trivial, ou seja, que a extensão acima cinde.

Tome $s\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ a transformação linear que é uma seção de p, ou seja, tal que $ps = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$. Defina

$$x \cdot y := [s(x), y], \tag{6.1}$$

com $x \in \mathfrak{g}$ e $y \in \mathfrak{h}$. Note que

$$\begin{aligned} p(s([x, x']) - [s(x), s(x')]) &= p(s([x, x'])) - p([s(x), s(x')]) \\ &= [x, x'] - [p(s(x)), p(s(x'))] \\ &= [x, x'] - [x, x'] = 0, \end{aligned}$$

para todo $x, x' \in \mathfrak{g}$. Mas então $s([x, x']) - [s(x), s(x')] \in \ker p = \operatorname{im} \iota$, pata todo $x, x' \in \mathfrak{g}$. Logo, existe $k \in F$ tal que $\iota(k) = s([x, x']) - [s(x), s(x')]$, donde segue que $s([x, x']) = [s(x), s(x')] + \iota(k)$, para todo $x, x' \in \mathfrak{g}$. Com esta informação, é fácil perceber que 6.1 define uma estrutura de $\mathfrak{g}$-módulo em $\mathfrak{h}$.

Uma vez que $\mathfrak{g}$ é semi-simples e F está mergulhado em $\mathfrak{h}$, pelo *Torema de Weyl*, segue que F possui um complemento, digamos $\mathfrak{h}'$. Então $\mathfrak{h} = F \oplus \mathfrak{h}'$, donde segue que a sequência cinde e conclui a prova. ■

Teorema 6.4.4 (Teorema de Levi-Malcev). *Toda álgebra de Lie de dimensão finita $\mathfrak{g}$ é a extensão cisante de uma álgebra de Lie semi-simples pelo radical de $\mathfrak{g}$.*

Demonstração. Vamos provar por indução no comprimento derivado de $\operatorname{Rad}\mathfrak{g}$. Se $\operatorname{Rad}\mathfrak{g}$ é abeliano, então $\operatorname{Rad}\mathfrak{g}$ é um $\mathfrak{g}/\operatorname{Rad}\mathfrak{g}$-módulo. Como $\mathfrak{g}/\operatorname{Rad}\mathfrak{g}$ é semi-simples, temos que $H^2(\mathfrak{g}/\operatorname{Rad}\mathfrak{g}, \operatorname{Rad}\mathfrak{g}) = 0$ pelo *Segundo Lema de Whitehead*. Pelo Teorema 6.3.5, temos que todas as extensões são equivalentes a extensão trivial e, portanto, cindem. Em particular, a extensão

$$0 \longrightarrow \operatorname{Rad}\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{g} \twoheadrightarrow \frac{\mathfrak{g}}{\operatorname{Rad}\mathfrak{g}} \longrightarrow 0$$

cinde.

Agora, considere que o comprimento derivado de $\operatorname{Rad}\mathfrak{g}$ seja igual a n. Suponhamos que a afirmação vale para toda álgebra tal que o comprimento derivado de seu radical seja menor ou igual a $n-1$. Temos uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \operatorname{Rad}\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{g} \overset{p}{\twoheadrightarrow} \frac{\mathfrak{g}}{\operatorname{Rad}\mathfrak{g}} \longrightarrow 0.$$

Quocientando por $[\operatorname{Rad}\mathfrak{g}, \operatorname{Rad}\mathfrak{g}]$ e usando o isomorfismo

$$\frac{\mathfrak{g}/[\operatorname{Rad}\mathfrak{g}, \operatorname{Rad}\mathfrak{g}]}{\operatorname{Rad}\mathfrak{g}/[\operatorname{Rad}\mathfrak{g}, \operatorname{Rad}\mathfrak{g}]} \simeq \frac{\mathfrak{g}}{\operatorname{Rad}\mathfrak{g}},$$

obtemos uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \frac{\operatorname{Rad}\mathfrak{g}}{[\operatorname{Rad}\mathfrak{g},\operatorname{Rad}\mathfrak{g}]} \hookrightarrow \frac{\mathfrak{g}}{[\operatorname{Rad}\mathfrak{g},\operatorname{Rad}\mathfrak{g}]} \twoheadrightarrow \frac{\mathfrak{g}}{\operatorname{Rad}\mathfrak{g}} \longrightarrow 0.$$

Desse modo, as projeções induzem um diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Rad}\mathfrak{g} \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathfrak{g} \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, "\pi"] & \frac{\mathfrak{g}}{\operatorname{Rad}\mathfrak{g}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \frac{\operatorname{Rad}\mathfrak{g}}{[\operatorname{Rad}\mathfrak{g},\operatorname{Rad}\mathfrak{g}]} \arrow[r, hook] & \frac{\mathfrak{g}}{[\operatorname{Rad}\mathfrak{g},\operatorname{Rad}\mathfrak{g}]} \arrow[r, two heads, "\tilde{p}"] & \frac{\mathfrak{g}}{\operatorname{Rad}\mathfrak{g}} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Note que como $\operatorname{Rad}\mathfrak{g}/[\operatorname{Rad}\mathfrak{g}, \operatorname{Rad}\mathfrak{g}]$ possui comprimento derivado igual a 1 e é um $\mathfrak{g}/\operatorname{Rad}\mathfrak{g}$-módulo, pela primeira parte da prova, obtemos que a sequência de baixo cinde. Assim, seja $s\colon \mathfrak{g}/\operatorname{Rad}\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/[\operatorname{Rad}\mathfrak{g}, \operatorname{Rad}\mathfrak{g}]$ a seção que faz a sequência cindir. Considere $s(\mathfrak{g}/\operatorname{Rad}\mathfrak{g}) = \mathfrak{h}/[\operatorname{Rad}\mathfrak{g}, \operatorname{Rad}\mathfrak{g}]$. Restringindo o contradomínio da s, obtemos um isomorfismo $t\colon \mathfrak{g}/\operatorname{Rad}\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}/[\operatorname{Rad}\mathfrak{g}, \operatorname{Rad}\mathfrak{g}]$. Assim, $\mathfrak{h}/[\operatorname{Rad}\mathfrak{g}, \operatorname{Rad}\mathfrak{g}]$ é semi-simples e $[\operatorname{Rad}\mathfrak{g}, \operatorname{Rad}\mathfrak{g}]$ é o radical de $\mathfrak{h}$.

Dessa maneira, temos uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow [\operatorname{Rad}\mathfrak{g}, \operatorname{Rad}\mathfrak{g}] \hookrightarrow \mathfrak{h} \twoheadrightarrow \frac{\mathfrak{h}}{[\operatorname{Rad}\mathfrak{g},\operatorname{Rad}\mathfrak{g}]} \longrightarrow 0.$$

Uma vez que $[\operatorname{Rad}\mathfrak{g}, \operatorname{Rad}\mathfrak{g}]$ possui comprimento derivado igual a $n-1$ e $\mathfrak{h}/[\operatorname{Rad}\mathfrak{g}, \operatorname{Rad}\mathfrak{g}]$ é semi-simples, obtemos, por hipótese de indução, que a sequência curta acima cinde, digamos que por uma transformação F-linear $r\colon \mathfrak{h}/[\operatorname{Rad}\mathfrak{g}, \operatorname{Rad}\mathfrak{g}] \to \mathfrak{h}$.

Por fim, vamos mostrar $p \circ r \circ t = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}/\operatorname{Rad}\mathfrak{g}}$ (ou seja, que $r \circ t$ é uma seção). De fato, como $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$, podemos considerar que $r \circ t\colon \mathfrak{g}/\operatorname{Rad}\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Note que t é a restrição de s a sua imagem e que r é a inversa de π restrita em $\mathfrak{h}$. Desse modo, o fato de que $r \circ t$ é uma cisão é automático. ■

Capítulo 7

Classificação das Álgebras de Lie Semi-simples Complexas

Neste capítulo, mostraremos a classificação das álgebras de Lie complexas semi-simples. Além disso, introduziremos alguns conceitos que serão fundamentais para tal classificação. Na verdade, tudo o que será feito será válido para qualquer corpo algebricamente fechado de característica zero. Portanto, continuaremos denotando o corpo por F em vez que por $\mathbb{C}$.

7.1 Sistema de raízes

Nesta seção, vamos introduzir o conceito de sistema de raízes. A importância deste conceito na teoria das álgebras de Lie ficará clara em breve.

7.1.1 Reflexões em um espaço euclidiano

Recorde que um espaço euclidiano E é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão finita munido de uma forma bilinear simétrica positiva definida $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, que será denotada por (α, β) para todos $\alpha, \beta \in E$. Um **hiperplano** é um subespaço de E com codimensão 1.

Definição 7.1.1. Seja E um espaço euclidiano. Uma **reflexão** em E é uma transformação linear invertível que fixa ponto-a-ponto um hiperplano e que leva cada vetor ortogonal ao hiperplano em seu oposto.

É fácil de perceber que toda reflexão é ortogonal. Note que cada vetor não nulo $\alpha \in E$ induz a reflexão σ_α em relação ao hiperplano ortogonal a α, que é definida por

$$\sigma_\alpha(\beta) := \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha,$$

para todo $\beta \in E$. O **hiperplano de reflexão** de σ_α (isto é, o hiperplano fixado por σ_α), é

$$P_\alpha := \{ \beta \in E \mid (\beta, \alpha) = 0 \} .$$

Como o escalar $2(\beta,\alpha)/(\alpha,\alpha)$ aparecerá com bastante frequência, para evitarmos uma notação muito carregada, definimos

$$\langle \beta, \alpha \rangle := \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}.$$

Note que $\langle \beta, \alpha \rangle$ é linear somente na primeira entrada.

Terminamos esta subseção apresentando um resultado que será essencial para classificar as álgebras de Lie semi-simples.

Lema 7.1.2. *Seja Φ um conjunto finito que gera um espaço euclidiano E. Suponha que todas as reflexões σ_α, com $\alpha \in \Phi$, deixem Φ invariado. Se $\sigma \in \mathrm{Gl}(E)$ deixa Φ invariado, fixa um hiperplano P ponto-a-ponto e manda um elemento $\alpha \in \Phi$ não nulo no seu oposto, então $\sigma = \sigma_\alpha$ e $P = P_\alpha$.*

7.1.2 Sistema de raízes

Começamos esta seção com a seguinte definição:

Definição 7.1.3. Seja E um espaço euclidiano. Um subconjunto Φ é um **sistema de raízes** se satisfaz os seguintes axiomas:

i. O conjunto Φ é finito, gera E e não contém 0.

ii. Se $\alpha \in \Phi$, os únicos múltiplos de α em Φ são $\pm\alpha$.

iii. Se $\alpha \in \Phi$, a reflexão σ_α deixa Φ invariado.

iv. Se $\alpha, \beta \in \Phi$, então $\langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$.

Chamamos os elementos de Φ de **raízes**, como é de se esperar.

Com a definição acima, podemos introduzir um conceito importante: seja Φ um sistema de raízes em um espaço euclidiano E. Denotaremos por $\mathscr{W}$ o subgrupo de $\mathrm{Gl}(E)$ gerado pelas reflexões σ_α, onde $\alpha \in \Phi$. Pelo itens iii e i da definição, obtemos que $\mathscr{W}$ é um subgrupo de permutações de Φ e, portanto, é finito. Tal grupo é chamado de **grupo de Weyl** de Φ. O lema a seguir nos mostra que os automorfismos de E, que deixam Φ invariado, agem em $\mathscr{W}$ por conjugação.

Lema 7.1.4. *Seja Φ um sistema de raízes em E, com grupo de Weyl $\mathscr{W}$. Se $\sigma \in \mathrm{Gl}(E)$ deixa Φ invariado, então $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1} = \sigma_{\sigma(\alpha)}$ para todo $\alpha \in \Phi$. Além disso, tem-se que $\langle \beta, \alpha \rangle = \langle \sigma(\beta), \sigma(\alpha) \rangle$ para todo $\alpha, \beta \in \Phi$.*

Dados dois sistemas de raízes Φ e Φ', contidos respectivamente em E e E', diremos que (Φ, E') é **isomorfo** a (Φ', E') se existir um isomorfismo de espaços vetoriais $\varphi\colon E \to E'$ que manda Φ em Φ'. Desse modo, temos que tal isomorfismo induz um isomorfismo entre grupos de Weyl, que associa $\sigma \in \mathscr{W}_E$ a $\varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1} \in \mathscr{W}_{E'}$.

Tendo em vista o que virá a seguir, definimos

$$\alpha^\vee := \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)}$$

para todo $\alpha \in \Phi$. Desse modo, o **dual** de Φ é o conjunto $\Phi^\vee := \{ \alpha^\vee \in E \mid \alpha \in \Phi \}$. Note que $\Phi^\vee$ é um sistema de raízes de E, cujo grupo de Weyl é naturalmente isomorfo ao de Φ.

7.1.3 Pares de raízes

Recorde que, em um espaço euclidiano, temos que $(\alpha, \beta) = \|\alpha\| \|\beta\| \cos\theta$, onde θ é o ângulo formado entre os vetores α e β. Desse modo, o item iv da Definição 7.1.3 limita os possíveis valores para θ. De fato,

$$\langle \beta, \alpha \rangle = 2\frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = 2\frac{\|\alpha\|\|\beta\| \cos\theta}{\|\alpha\|\|\alpha\| \cos 0} = 2\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} \cos\theta.$$

Assim, obtemos $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 4\cos^2\theta$. Mas $\langle \beta, \alpha \rangle$ é um inteiro para todo $\alpha, \beta \in \Phi$. Portanto, o produto $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle$ também deve ser um inteiro. Como $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 4\cos^2\theta$, trata-se de um inteiro não negativo e, portanto, $\langle \alpha, \beta \rangle$ e $\langle \beta, \alpha \rangle$ têm o mesmo sinal. Sabendo que $0 \leq \cos^2\theta \leq 1$, as únicas possibilidades são as seguintes:

$\langle \alpha, \beta \rangle$	$\langle \beta, \alpha \rangle$	θ	$\|\beta\|^2 / \|\alpha\|^2$
0	0	$\pi/2$	indeterminado
1	1	$\pi/3$	1
-1	-1	$2\pi/3$	1
1	2	$\pi/4$	2
-1	-2	$3\pi/4$	2
1	3	$\pi/6$	3
-1	-3	$5\pi/6$	3

Implicitamente, a tabela nos dá o seguinte resultado:

Lema 7.1.5. *Sejam α e β raízes não proporcionais. Se $(\alpha, \beta) > 0$, então $\alpha - \beta$ é uma raiz. Se $(\alpha, \beta) < 0$, então $\alpha + \beta$ é uma raiz.*

Vejamos uma aplicação deste resultado: tome um par de raízes não proporcionais α e β. Considere todas as raízes da forma $\beta + i\alpha$, com $i \in \mathbb{Z}$. A coleção dessas raízes é chamada de **α-corda através de β**. Sejam $q, r \in \mathbb{Z}_+$ tais que $\beta + q\alpha$ e $\beta - r\alpha$ são raízes. Note que, para todo $i \in \mathbb{Z}$ tal que $-r \leq i \leq q$, a α-corda através de β é "inquebrável", isto é, $\beta + i\alpha \in \Phi$ para todo $i \in \mathbb{Z}$ neste intervalo. De fato, suponhamos que o fato anterior não seja válido. Então, existe $i \in \mathbb{Z}$ tal que $\beta + i\alpha \notin \Phi$, com $-r \leq i \leq q$. Tome $p < s$, com $p, s \in \mathbb{Z}$, tais que $\beta + p\alpha$ e $\beta + s\alpha$ são raízes, mas $\beta + (p+1)\alpha$ e $\beta + (s-1)\alpha$ não o são.

Note que

$$\beta + (p+1)\alpha = \beta + p\alpha + \alpha = (\beta + p\alpha) + \alpha.$$

Desse modo, o lema acima implica que $(\beta + p\alpha, \alpha) \geq 0$. Analogamente, obtemos que $(\beta + s\alpha, \alpha) \leq 0$. Assim, $(\beta + s\alpha, \alpha) \leq (\beta + p\alpha, \alpha)$. Mas então

$$(\beta, \alpha) + s(\alpha, \alpha) \leq (\beta, \alpha) + p(\alpha, \alpha).$$

Pelo fato de que $(\alpha, \alpha) > 0$, segue que $s \leq p$, o que é um absurdo.

Pela construção, σ_α apenas adiciona ou subtrai um múltiplo de α a qualquer raiz. Em particular, se aplicarmos σ_α em na α-corda através de β, obtemos que a reflexão deixa a corda invariada. Mas então a única possibilidade é que σ_α inverta a ordem das raízes. Obtemos assim que $\sigma_\alpha(\beta + q\alpha) = \beta - r\alpha$. Desse modo,

$$\beta - r\alpha = \sigma_\alpha(\beta + q\alpha) = \beta + q\alpha - \langle \beta + q\alpha, \alpha \rangle \alpha = \beta + q\alpha - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha - q \langle \alpha, \alpha \rangle \alpha.$$

Note que $\langle \alpha, \alpha \rangle = 2$. Logo, $(r - q - \langle \beta, \alpha \rangle)\alpha = 0$, o que implica

$$r - q = \langle \beta, \alpha \rangle .$$

Substituindo β por $\gamma := \beta + q\alpha$, obtemos a mesma corda com $q = 0$, logo, $r = \langle \gamma, \alpha \rangle$ e o comprimento da corda é $r + 1$. Dado que, pela tabela na Seção 7.1.3, temos que $0 \leq r \leq 3$, deduzimos que uma corda possui, no máximo, comprimento igual a quatro.

7.2 Decomposição em espaços de raízes

Na seção anterior, definimos os sistemas de raízes, assim como apresentamos certos resultados que valem para estes objetos. Isso foi feito para que mais tarde possamos construir os diagramas de Dynkin e, dessa forma, classificarmos as álgebras de Lie complexas semi-simples. Entretanto, para que seja possível chegarmos em tal resultado, precisamos antes construir o sistema de raízes de uma álgebra de Lie semi-simples.

Desse modo, esta seção será dedicada a essa construção. Note que os sistemas de raízes dependem de um espaço euclidiano, logo, também precisaremos encontrar um conjunto que possa ser um $\mathbb{R}$-espaço vetorial e que seja munido de uma forma bilinear simétrica definida positiva. Construiremos tal espaço também.

Nesta seção, $\mathfrak{g}$ denotará uma álgebra de Lie semi-simples (não nula). Usaremos a representação adjunta para as nossas construções. Além do mais, a forma de Killing e os Teoremas 5.5.1 (preservação da decomposição de Jordan) e 5.5.3 serão importantes ferramentas em tudo o que segue.

7.2.1 Subálgebras torais maximais e raízes

Pelo *Teorema de Engel* (Teorema 4.3.10), se todos os elementos de $\mathfrak{g}$ são nilpotentes, então $\mathfrak{g}$ também é. Porém, caso isto não ocorra, existe algum elemento $x \in \mathfrak{g}$ tal que $x_s \neq 0$, isto é, sua parte semi-simples é não nula. Assim, uma álgebra semi-simples $\mathfrak{g}$ contém necessariamente subálgebras formadas por elementos semi-simples (por exemplo, a gerada por um elemento x_s). Tais subálgebras são chamadas de **torais**. Temos o seguinte resultado:

Lema 7.2.1. *Toda subálgebra toral de $\mathfrak{g}$ é abeliana.*

Fixemos uma **subálgebra toral maximal** $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ (ou seja, $\mathfrak{h}$ é toral e não está contida propriamente em nenhuma subálgebra toral de $\mathfrak{g}$). Como $\mathfrak{h}$ é abeliana pelo lema acima, obtemos que $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{h}$ é uma família de endomorfismos semi-simples de $\mathfrak{g}$ que comutam. Por isso, existe uma base de $\mathfrak{g}$ tal que todo endomorfismo em $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{h}$ é representado por uma matriz diagonal. Assim, podemos decompor o espaço vetorial $\mathfrak{g}$ como soma direta de auto-espaços:

$$\mathfrak{g}_\alpha := \left\{ x \in \mathfrak{g} \;\middle|\; \operatorname{ad} h(x) = \alpha(h)x \text{ para todo } h \in \mathfrak{h} \right\},$$

com $\alpha \in \mathfrak{h}^*$. Note que $\mathfrak{g}_0 = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ e que este contém $\mathfrak{h}$ pelo lema acima. Seja Φ o conjunto de todos os funcionais lineares $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ não nulos tais que $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$. Como é de se imaginar pela notação, este conjunto será o nosso sistema de raízes, portanto, mesmo que não tenhamos provado isso ainda, o chamaremos desta maneira. Os elementos de Φ serão chamados de raízes[1], novamente, como a notação sugere. A decomposição

$$\mathfrak{g} = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \right)$$

é chamada de **decomposição em espaços de raízes**. Note que, como $\mathfrak{g}$ tem dimensão finita, obtemos que Φ é um conjunto finito.

Exemplo 7.2.2. Considere $\mathfrak{sl}(2, F)$. Com relação à base canônica, os elementos semi-simples de $\mathfrak{sl}(2, F)$ são múltiplos de h, que é o único elemento semi-simples da base tomada. Assim, a única subálgebra toral maximal $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{sl}(2, F)$ é a subálgebra gerada por h. Podemos verificar, dessa forma, que a decomposição será dada por

$$\mathfrak{sl}(2, F) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha},$$

onde $\mathfrak{g}_\alpha$ é o subespaço gerado por x e $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ é o subespaço gerado por y.

No exemplo acima, a decomposição é bastante simples, já que estamos tomando uma álgebra de Lie bastante conveniente e de dimensão pequena. Nem sempre teremos tanta facilidade, mas vale pontuarmos certas coisas que ocorrem neste exemplo e que não são

[1] Agora, podemos entender de onde vem o nome "raiz" nesse contexto. Note que $\alpha(h)$ nada mais é do que um autovalor de $\operatorname{ad} h$ e, portanto, é raiz do polinômio característico de $\operatorname{ad} h$.

casos particulares: temos que $\mathfrak{h} = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ e os espaços $\mathfrak{g}_\alpha$ são de dimensão 1 para toda raiz $\alpha \in \Phi$. Além disso, a notação $\mathfrak{g}_\alpha$ e $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ não foi escolhida ao acaso: veremos que, se α é uma raiz, então $-\alpha$ também é (mais do que isso, $-\alpha$ é a única raiz múltipla de α).

Proposição 7.2.3. *Seja $\mathfrak{h}$ uma subálgebra toral maximal de $\mathfrak{g}$. Para todo funcional $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$, tem-se $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. Se $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ com $\alpha \neq 0$, então $\operatorname{ad} x$ é nilpotente. Se $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$ são tais que $\alpha + \beta \neq 0$, então $\mathfrak{g}_\alpha$ é ortogonal a $\mathfrak{g}_\beta$ com relação à forma de Killing κ de $\mathfrak{g}$.*

Finalmente, temos o seguinte corolário:

Corolário 7.2.4. *Seja $\mathfrak{h}$ uma subálgebra toral maximal de $\mathfrak{g}$. A restrição da forma de Killing em $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ é não degenerada.*

Como havíamos mencionado antes, vale a seguinte propriedade:

Proposição 7.2.5. *Seja $\mathfrak{h}$ uma subálgebra toral maximal de $\mathfrak{g}$. Então $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.*

Corolário 7.2.6. *Se $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra toral maximal de $\mathfrak{g}$, então a restrição da forma de Killing κ em $\mathfrak{h}$ é não degenerada.*

O motivo pelo qual o corolário acima é tão importante se deve ao fato de que ele nos permite identificar $\mathfrak{h}$ com $\mathfrak{h}^*$. Cada elemento $\varphi \in \mathfrak{h}^*$ corresponde ao único elemento $t_\varphi \in \mathfrak{h}$ que satisfaz $\varphi(h) = \kappa(t_\varphi, h)$ para todo $h \in \mathfrak{h}$. Nesse caso, o sistema Φ corresponde ao conjunto $\{ t_\alpha \in \mathfrak{h} \mid \alpha \in \Phi \}$.

7.2.2 Propriedades ortogonais, integrais e racionais

Nesta subseção, vamos dar uma estrutura de sistema de raízes a Φ. Por definição, temos que $0 \notin \Phi$. Além disso, sabemos que Φ é um conjunto finito. A proposição a seguir enuncia alguns resultados interessantes:

Proposição 7.2.7.

i. *O espaço dual $\mathfrak{h}^*$ é gerado por Φ.*

ii. *Se $\alpha \in \Phi$, então $-\alpha \in \Phi$.*

iii. *Sejam $\alpha \in \Phi$, $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Temos que $[x, y] = \kappa(x, y)t_\alpha$.*

iv. *Se $\alpha \in \Phi$, então a dimensão de $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ é 1, o elemento t_α formando uma base.*

v. *Para todo $\alpha \in \Phi$, tem-se $\alpha(t_\alpha) = \kappa(t_\alpha, t_\alpha) \neq 0$.*

vi. *Se $\alpha \in \Phi$ e x_α é um elemento não nulo de $\mathfrak{g}_\alpha$, então existe $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que x_α, y_α e $h_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha]$ geram uma subálgebra simples de dimensão 3 de $\mathfrak{g}$, que é isomorfa a $\mathfrak{sl}(2, F)$ via*

$$x_\alpha \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad y_\alpha \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad h_\alpha \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

vii. *Tem-se que $h_\alpha = -h_{-\alpha}$ e*

$$h_\alpha = \frac{2t_\alpha}{\kappa\,(t_\alpha, t_\alpha)}.$$

Antes de prosseguirmos, façamos algumas observações. Embora Φ gere $\mathfrak{h}^*$, não temos ainda que Φ gera um espaço euclidiano, já que $\mathfrak{h}^*$ não é um espaço vetorial real em geral. Pelo item ii, temos, que se α é uma raiz, então $-\alpha$ também o é, porém ainda não provamos que estas são as únicas raízes múltiplas de α.

Recordemos de um comentário feito no começo do capítulo: $\mathfrak{g}$ é constituída de "cópias" de $\mathfrak{sl}(2, F)$. Isso é garantido de maneira bem objetiva pelo item vi. da proposição anterior. Para cada par de raízes α e $-\alpha$, seja $S_\alpha \simeq \mathfrak{sl}(2, F)$ a subálgebra construída como no item vi da Proposição 7.2.7. Usando o *Teorema de Weyl* (Teorema 6.4.2) e pelo Teorema 5.5.3, temos uma descrição de todos os S_α-módulos, em particular, de $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} S_\alpha$. Usando esses fatos, obtemos o seguinte resultado:

Proposição 7.2.8.

i. *Se $\alpha \in \Phi$, então $\dim_F \mathfrak{g}_\alpha = 1$. Em particular, $S_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha} + \mathfrak{h}_\alpha$, com $\mathfrak{h}_\alpha = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$. Além disso, para cada $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ não nulo, existe $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$.*

ii. *Se $\alpha \in \Phi$, os únicos múltiplos de α que são raízes são $\pm\alpha$.*

iii. *Se $\alpha, \beta \in \Phi$, então $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ e $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha$ é uma raiz.*

iv. *Se $\alpha, \beta \in \Phi$ tais que $\alpha + \beta$ é uma raiz, então $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.*

v. *A álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é gerada pelos espaços de raízes $\mathfrak{g}_\alpha$.*

Pelo item ii, $\beta(h_\alpha)$ é um número inteiro, que chamamos de **inteiro de Cartan**.

Agora, considere $\mathfrak{g}$ como enunciada no começo dessa seção. Seja $\mathfrak{h}$ uma subálgebra toral maximal, $\Phi \subsetneq \mathfrak{h}^*$ o sistema de raízes de $\mathfrak{g}$ (com relação a $\mathfrak{h}$) e $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha\right)$ a decomposição em espaços de raízes de $\mathfrak{g}$.

Nosso trabalho, agora, será construir o espaço euclidiano onde o sistema Φ está inserido. Como a restrição da forma de Killing κ é não degenerada em $\mathfrak{h}$, podemos transferi-la para $\mathfrak{h}^*$ definindo $(\gamma, \delta) = \kappa(t_\gamma, t_\delta)$ para todos $\gamma, \delta \in \mathfrak{h}^*$. Pelo item i da Proposição 7.2.7, temos que Φ gera $\mathfrak{h}^*$. Assim, tome $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ uma base de raízes de $\mathfrak{h}^*$. Em particular, toda raiz $\beta \in \Phi$ pode ser escrita de maneira única como uma combinação F-linear

$$\beta = \sum_{i=1}^{\ell} c_i \alpha_i,$$

ou seja, com $c_i \in F$ para todo $i \in \{1, \ldots, \ell\}$.

Vamos provar que $c_i \in \mathbb{Q}$ para todo $i \in \{1, \ldots, \ell\}$. Para cada $j \in \{1, \ldots, \ell\}$, temos

$$(\beta, \alpha_j) = \sum_{i=1}^{\ell} c_i (\alpha_i, \alpha_j).$$

Multiplicando ambos os lados por $2/(\alpha_j, \alpha_j)$ e usando o fato de que $(\gamma, \delta) = \kappa(t_\gamma, t_\delta)$ para todo $\gamma, \delta \in \Phi$, obtemos

$$\frac{2\kappa(t_\beta, t_{\alpha_j})}{\kappa(t_{\alpha_j, \alpha_j})} = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{2\kappa(t_{\alpha_i}, t_{\alpha_j})}{\kappa(t_{\alpha_j, \alpha_j})} c_i \implies \kappa\left(t_\beta, \frac{2t_{\alpha_j}}{\kappa(t_{\alpha_j}, t_{\alpha_j})}\right) = \sum_{i=1}^{\ell} \kappa\left(t_{\alpha_i}, \frac{2t_{\alpha_j}}{\kappa(t_{\alpha_j}, t_{\alpha_j})}\right) c_i.$$

Pelo item vii da Proposição 7.2.7, segue que

$$\kappa(t_\beta, h_{\alpha_j}) = \sum_{i=1}^{\ell} \kappa(t_{\alpha_i}, h_{\alpha_j}) c_i.$$

Uma vez que $\varphi(h) = \kappa(t_\varphi, h)$ para todo $h \in \mathfrak{h}$ (em particular, $h_\alpha \in \mathfrak{h}$), temos

$$\beta(h_{\alpha_j}) = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i(h_{\alpha_j}) c_i.$$

Usando o item ii da Proposição 7.2.8, obtemos que cada $\beta(h_{\alpha_j})$ e cada $\alpha_i(h_{\alpha_j})$ são inteiros. Desse modo, obtemos um sistema linear com coeficientes inteiros (em particular racionais) de ℓ equações com ℓ incógnitas c_i.

Uma vez que $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ é uma base de $\mathfrak{h}^*$ e a forma é não degenerada, a matriz $((\alpha_i, \alpha_j))_{1 \leq i \leq \ell, 1 \leq j \leq \ell}$ possui determinante diferente de zero. Portanto, a matriz dos coeficientes $\left(\alpha_i(h_{\alpha_j})\right)_{1 \leq i \leq \ell, 1 \leq j \leq \ell}$ também terá determinante diferente de zero. Logo, o sistema possui uma única solução racional.

Provamos, assim, que toda raiz pode ser escrita como combinação $\mathbb{Q}$-linear de raízes. Agora, seja $E_{\mathbb{Q}}$ o $\mathbb{Q}$-subespaço vetorial de $\mathfrak{h}^*$ gerado por todas as raízes. Pela construção, $\dim_{\mathbb{Q}} E_{\mathbb{Q}} = \dim_F \mathfrak{h}^*$. Mais do que isso, para todos funcionais $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$, temos

$$(\lambda, \mu) = \kappa(t_\lambda, t_\mu) = \operatorname{tr}\left((\operatorname{ad} t_\lambda)(\operatorname{ad} t_\delta)\right).$$

Uma vez que $\mathfrak{h}$ é toral e $t_\lambda, t_\delta \in \mathfrak{h}$, temos que existe uma base para $\mathfrak{h}$ que deixa $\operatorname{ad} t_\lambda$ e $\operatorname{ad} t_\delta$ diagonais simultaneamente, onde as entradas nas diagonais principais são os autovalores $\alpha(t_\lambda)$ e $\alpha(t_\delta)$ ($\alpha \in \Phi$), respectivamente. Desse modo,

$$(\lambda, \mu) = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(t_\lambda)\alpha(t_\delta) = \sum_{\alpha \in \Phi} \kappa(t_\alpha, t_\lambda)\kappa(t_\alpha, t_\delta) = \sum_{\alpha \in \Phi} (\alpha, \lambda)(\alpha, \delta).$$

Em particular, para qualquer raiz $\beta \in \Phi$, temos

$$(\beta, \beta) = \sum_{\alpha \in \Phi} (\alpha, \beta)^2.$$

Multiplicando ambos os lados por $1/(\beta, \beta)^2$, obtemos

$$\frac{1}{(\beta, \beta)} = \sum_{\alpha \in \Phi} \frac{(\alpha, \beta)^2}{(\beta, \beta)^2}.$$

Pelo item iii da Proposição 7.2.8, $\alpha(h_\beta)$ é um inteiro. Usando o item vii da Proposição 7.2.7, obtemos que

$$\alpha(h_\beta) = \alpha\left(\frac{2t_\beta}{\kappa(t_\beta, t_\beta)}\right) = \frac{2\alpha(t_\beta)}{\kappa(t_\beta, t_\beta)} = \frac{2\kappa(t_\alpha, t_\beta)}{\kappa(t_\beta, t_\beta)} = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)},$$

donde segue que $2(\alpha, \beta)/(\beta, \beta)$ é um inteiro e, portanto, que $(\alpha, \beta)/(\beta, \beta)$ é um racional. Logo, cada parcela $(\alpha, \beta)^2/(\beta, \beta)^2$ é um racional, o que prova que $1/(\beta, \beta)$ também é. Obviamente, o inverso multiplicativo de $1/(\beta, \beta)$ é (β, β) e, portanto, este também é um racional. Mas sabemos que $(\alpha, \beta)/(\beta, \beta) \in \mathbb{Q}$, logo $((\alpha, \beta)/(\beta, \beta)) \cdot (\beta, \beta) = (\alpha, \beta) \in \mathbb{Q}$. Isso prova que a forma bilinear induzida por κ aplicada em quaisquer vetores de $E_\mathbb{Q}$ é racional. Obtemos, assim, uma forma bilinear não degenerada simétrica em $E_\mathbb{Q}$. Uma vez que $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, basta provarmos que ela é positiva definida para que esta seja um produto interno em $E_\mathbb{Q}$.

De fato, se $\lambda \in E_\mathbb{Q}$, então

$$(\lambda, \lambda) = \sum_{\alpha \in \Phi} (\alpha, \lambda)^2,$$

com a parte da direita sendo uma soma de racionais iguais ou maiores do que zero. Portanto, $(\lambda, \lambda) \geq 0$, o que prova que a forma é positiva definida.

Finalmente, basta que façamos com que $E_\mathbb{Q}$ seja um $\mathbb{R}$-espaço vetorial para terminar a nossa construção de espaço euclidiano. Fazer isso é bem simples usando o produto tensorial. Nos recordemos que, se $P \supseteq K$ é uma extensão de corpo de K, então podemos dar uma estrutura de P-espaço vetorial a um K-espaço vetorial V. Para isso, basta tomarmos o produto tensorial $P \otimes_K V$ e definirmos o produto por escalar como

$$p \cdot (q \otimes v) := (pq) \otimes v,$$

onde $p, q \in P$ e $v \in V$. Desse modo, tome $E = \mathbb{R} \otimes_\mathbb{Q} E_\mathbb{Q}$. Temos assim um espaço euclidiano E com todas as propriedades que desejamos. Em resumo:

Teorema 7.2.9. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples, $\mathfrak{h}$ uma subálgebra toral maximal, Φ um conjunto de raízes e E o espaço euclidiano como construído acima. Então*

i. Φ é finito e gera E. Além disso, tem-se que $0 \notin \Phi$.

ii. *Se $\alpha \in \Phi$, então $-\alpha \in \Phi$, mas nenhum outro múltiplo de α é uma raiz.*

iii. *Se $\alpha, \beta \in \Phi$, então $\beta - \dfrac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha \in \Phi$.*

iv. *Se $\alpha, \beta \in \Phi$, então $\dfrac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$.*

Finalizamos esta seção com uma observação: embora o sistema de raízes pareça depender da escolha da subálgebra maximal toral $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, este não é o caso. Portanto, o sistema de raízes só depende do espaço euclidiano no qual o mesmo está definido.

7.2.3 Raízes simples

O **posto** de um sistema de raízes Φ em um espaço euclidiano E é definido como sendo a dimensão de E. Desse modo, nesta subseção, Φ denota um sistema de raízes de posto ℓ em um espaço euclidiano E, com grupo de Weyl denotado por $\mathscr{W}$.

Definição 7.2.10. Um subconjunto Δ de um sistema de raízes Φ é chamado de **base** se satisfaz as seguintes propriedades:

i. Δ é uma base de E.

ii. Cada raiz β pode ser escrita como uma soma

$$\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha \alpha,$$

de modo que os coeficientes k_α sejam inteiros todos não positivos ou todos não negativos.

Os elementos de Δ são chamadas de **raízes simples**. Se todos os coeficientes k_α de uma raiz β forem não negativos, então dizemos que β é **positiva**. Em caso contrário, dizemos que β é **negativa**. Os conjuntos de todas as raízes positivas e negativas, com relação a Δ, são denotados respectivamente por Φ^+ e Φ^-. É fácil notar que $\Phi^- = -\Phi^+$. Além do mais, se α e β são raízes positivas, então o mesmo vale para $\alpha + \beta$.

Tudo parece funcionar bem com a definição acima, mas ainda não temos a garantia de que, dado um sistema de raízes Φ qualquer, exista uma base de Φ. Temos o seguinte lema:

Lema 7.2.11. *Se Δ é uma base para Φ, então $(\alpha,\beta) \le 0$ para todas raízes simples distintas $\alpha, \beta \in \Delta$. Além disso, $\alpha - \beta$ não é uma raiz.*

Usaremos o lema acima para construirmos uma base. Seja $\gamma \in E$. Defina

$$\Phi^+(\gamma) := \{\, \alpha \in \Phi \mid (\gamma,\alpha) > 0 \,\}.$$

Note que o conjunto acima nada mais é do que o conjunto das raízes positivas que estão do "mesmo lado" do hiperplano ortogonal a γ. Usando geometria euclidiana, sabemos que a união de todos os hiperplanos P_α ortogonais a cada $\alpha \in \Phi$ será diferente de E. Logo, existe $\gamma \in E$ tal que

$$\gamma \in E - \bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha.$$

Chamamos tal vetor de **regular**. Caso γ não seja regular, dizemos que é **singular**. Desse modo, se γ é regular, é óbvio que $\Phi = \Phi^+(\gamma) \cup -\Phi^+(\gamma)$. Neste caso, diremos que $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$ é **decomponível** se existirem $\beta_1, \beta_2 \in \Phi^+(\gamma)$ tais que $\alpha = \beta_1 + \beta_2$. Caso contrário, α será dita **indecomponível**. Assim, temos o seguinte teorema:

Teorema 7.2.12. *Seja $\gamma \in E$ regular. Então o conjunto $\Delta(\gamma)$ de todas as raízes indecomponíveis de $\Phi^+(\gamma)$ é uma base de Φ. Mais do que isso, toda base de Φ é obtida dessa maneira.*

Finalizamos esta subseção mencionado que as componentes conexas de $E - \bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha$, delimitadas pelos hiperplanos P_α, são chamadas de **câmaras de Weyl** de E.

7.2.4 Grupo de Weyl

Esta subseção terá o único objetivo de mostrar que o grupo de Weyl "funciona muito bem". De fato, o resultado a seguir ilustra como o grupo de Weyl atua de uma maneira bastante conveniente:

Teorema 7.2.13. *Seja Δ uma base de um sistema de raízes Φ. Então:*

i. Se $\gamma \in E$ é regular, existe $\sigma \in \mathscr{W}$ tal que $(\sigma(\gamma), \alpha) > 0$ para toda raiz simples $\alpha \in \Delta$.

ii. Se Δ' é outra base de Φ, então $\sigma(\Delta') = \Delta$ para alguma permutação $\sigma \in \mathscr{W}$.

iii. Se α é uma raiz arbitrária, então existe $\sigma \in \mathscr{W}$ tal que $\sigma(\alpha) \in \Delta$.

iv. O grupo de Weyl $\mathscr{W}$ é gerado pelas reflexões σ_α, com $\alpha \in \Delta$.

v. Se $\sigma(\Delta) = \Delta$, onde $\sigma \in \mathscr{W}$, então $\sigma = 1$.

O item i diz que $\mathscr{W}$ age transitivamente[2] nas câmaras de Weyl, enquanto o item ii diz que $\mathscr{W}$ age da mesma maneira (transitivamente) nas bases do sistema de raízes. Esta última afirmação quer dizer que $\mathscr{W}$ permuta as bases de Φ. Já o item iv nos mostra que $\mathscr{W}$ é gerado pelas reflexões "simples", isto é, pelas reflexões da forma σ_α. Finalmente, o item v nos permite perceber que $\mathscr{W}$ age simplesmente transitivamente em cada base do sistema de raízes.

[2]Recorde que um grupo age transitivamente em um conjunto não vazio quando sua ação possui somente uma órbita.

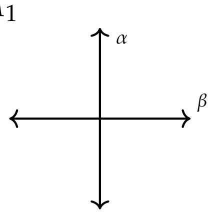
7.2.5 Sistemas irredutíveis

Nesta subseção, vamos apresentar o último conceito necessário para que possamos finalmente falar da classificação das álgebras de Lie semi-simples complexas.

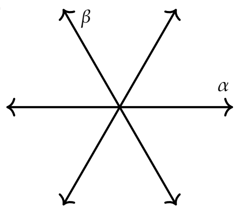
Definição 7.2.14. Seja Φ um sistema de raízes de um espaço euclidiano E. Então Φ é dito **irredutível** se não pode ser particionado na união de dois subconjuntos próprios tais que cada raiz em um é ortogonal a cada raiz no outro.

Exemplos de sistemas irredutíveis são os sistemas de $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ e $\mathbf{B}_2$, enquanto o sistema de $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_1$ não é. Vejamos os desenhos dos sistemas de raízes de dimensão dois:

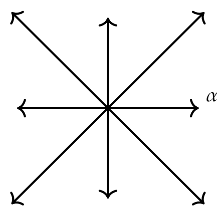
$A_1 \times A_1$



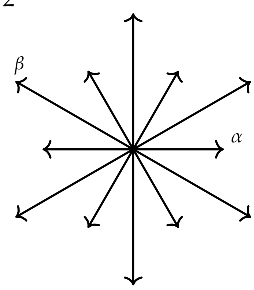
A_2



B_1



G_2



7.3 Classificação das álgebras complexas semi-simples

Sem mais delongas, finalmente estamos aptos a estudar o teorema de classificação. Nas primeiras três partes desta seção, mostraremos as construções necessárias para demonstrar o teorema, bem como alguns resultados importantes referentes a elas. A última parte será totalmente dedicada a enunciar e demonstrar o teorema de classificação.

Durante toda esta seção, Φ denotará um sistema de raízes de posto ℓ, com grupo de Weyl $\mathscr{W}$ e com base fixada Δ.

7.3.1 Matriz de Cartan

Fixando uma base ordenada $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ de raízes simples, a matriz $(\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)_{1 \leq i \leq \ell, 1 \leq j \leq \ell}$ é chamada de **matriz de Cartan**, já que suas entradas são justamente os inteiros de Cartan.

Exemplo 7.3.1. Os sistemas de posto 2 possuem as seguintes matrizes de Cartan:

$$\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vejamos algumas observações. Podemos perceber que a matriz de Cartan depende da ordem da base, porém, isso não será um problema. Como Δ é uma base de E, o determinante da matriz de Cartan é diferente de zero. Desse modo, podemos provar o seguinte resultado:

Proposição 7.3.2. *Seja $\Phi' \subseteq E'$ outro sistema de raízes com base $\Delta' = \{ \alpha'_1, \ldots, \alpha'_\ell \}$. Se $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle \alpha'_i, \alpha'_j \rangle$ para todos i e j tais que $1 \leq i, j \leq \ell$, então a bijeção*

$$\begin{aligned} \Delta &\to \Delta' \\ \alpha_i &\mapsto \alpha'_i \end{aligned}$$

se estende de maneira única a um isomorfismo $\varphi \colon E \to E'$ que aplica Φ em Φ' e satisfaz $\langle \varphi(\alpha), \varphi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$ para todo $\alpha, \beta \in \Phi$. Em outras palavras, a matriz de Cartan de Φ determina o sistema de raízes a menos de isomorfismo.

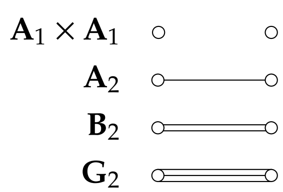
A proposição acima nos diz que podemos obter (ou recuperar) um sistema de raízes apenas olhando para a sua matriz de Cartan.

7.3.2 Grafos de Coxeter e diagramas de Dynkin

Nesta subseção, vamos introduzir os diagramas de Dynkin. Eles serão construídos a partir de uma base de um sistema de raízes. Dessa forma, obteremos uma correspondência entre as álgebras de Lie semi-simples e os diagramas de Dynkin, a menos de isomorfismo.

Recorde que, se α e β são raízes positivas distintas, então $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle$ será igual a 0, 1, 2 ou 3. Desse modo, seja Φ um sistema de raízes de posto ℓ. Definimos o **grafo de Coxeter** de Φ como sendo o grafo de ℓ vértices, correspondentes às raízes α_i ($i \in \{ 1, \ldots, \ell \}$) da base de E fixada, de modo que os vértices α_i e α_j são ligados por $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle$ arestas. Note que o grafo de Coxeter não nos diz nada sobre o comprimento das raízes.

Exemplo 7.3.3. Obtemos os seguintes grafos de Coxeter para os sistemas de raízes a seguir:



Quando os comprimentos de α_i e α_j coincide, obtemos que $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle$. Sendo assim, α_i e α_j são ligados necessariamente por uma aresta. Em caso contrário, há mais do que uma aresta e o grafo de Coxeter não diz qual das duas normas é maior.

Assim, quando uma aresta dupla ou tripla aparecer num grafo de Coxeter, podemos adicionar uma seta apontando para a menor das duas raízes. Desse modo, diremos que o diagrama obtido é um **diagrama de Dynkin**.

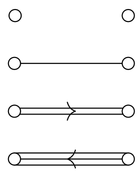
Exemplo 7.3.4. Para os sistemas do exemplo acima, temos os seguintes diagramas de Dynkin:

$\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_1$

$\mathbf{A}_2$

$\mathbf{B}_2$

$\mathbf{G}_2$



7.3.3 Componentes irredutíveis

Recorde que um sistema de raízes Φ é irredutível se não pode ser particionado em dois subconjuntos Φ_1 e Φ_2 tais que $(\alpha, \beta) = 0$ para todos $\alpha \in \Phi_1$ e $\beta \in \Phi_2$. Observamos que, se $(\alpha, \beta) = 0$, então $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$. Portanto, Φ é irredutível se, e somente se, o grafo de Coxeter associado a Φ for conexo.

Seja Δ uma base de Φ. Considere $\Delta = \Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_t$ a partição de Δ correspondente à partição de Φ. Seja E_i o $\mathbb{R}$-espaço vetorial gerado por Δ_i. Então é fácil de perceber que $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_t$. Mais do que isso, se consideramos o conjunto das combinações $\mathbb{Z}$-lineares de elementos de Δ_i, obtemos um sistema de raízes de E_i, que possui grupo de Weyl dado pela restrição a E_i do subgrupo de $\mathscr{W}$ das reflexões σ_α, onde $\alpha \in \Delta_i$. Se E' é um subespaço de E, então, se uma reflexão σ_α deixa E' invariado, temos que $\alpha \in E'$ ou $E' \subseteq P_\alpha$. Em outras palavras, cada E_i é $\mathscr{W}$-invariante, o que prova que cada raiz pertence a somente um E_i. Resumidamente, temos o seguinte resultado:

Proposição 7.3.5. *Todo sistema de raízes Φ se decompõem unicamente como união de sistemas de raízes irredutíveis Φ_i de subespaços E_i de E, tais que a decomposição $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_t$ é uma soma direta ortogonal.*

7.3.4 O teorema de classificação

Finalmente apresentaremos o *Teorema de Classificação das Álgebras de Lie Semi-simples Complexas*. Esta seção será dedicada totalmente a ele. Note que, pela Proposição 7.3.5, basta que façamos a classificação dos sistemas irredutíveis, pois o diagrama de Dynkin associado a uma álgebra de Lie semi-simples complexa arbitrária será obtido pela união de diagramas de Dynkin de álgebras de Lie semi-simples com sistemas de raízes irredutíveis.

Para facilitarmos a escrita da demonstração do teorema, vamos definir alguns conceitos primeiramente. Note que o grafo de Coxeter de um sistema de raízes não depende da norma das raízes. Desse modo, por conveniência, podemos trabalhar com vetores unitários.

Definição 7.3.6. Seja E um espaço euclidiano de dimensão arbitrária. Um conjunto linearmente independente $\mathfrak{A} = \{ \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \}$ de elementos unitários é dito **admissível** se satisfaz as seguintes propriedades para todo $\varepsilon_i, \varepsilon_j \in \mathfrak{A}$, onde $i, j \in \{ 1, \ldots, n \}$ e $i \neq j$:

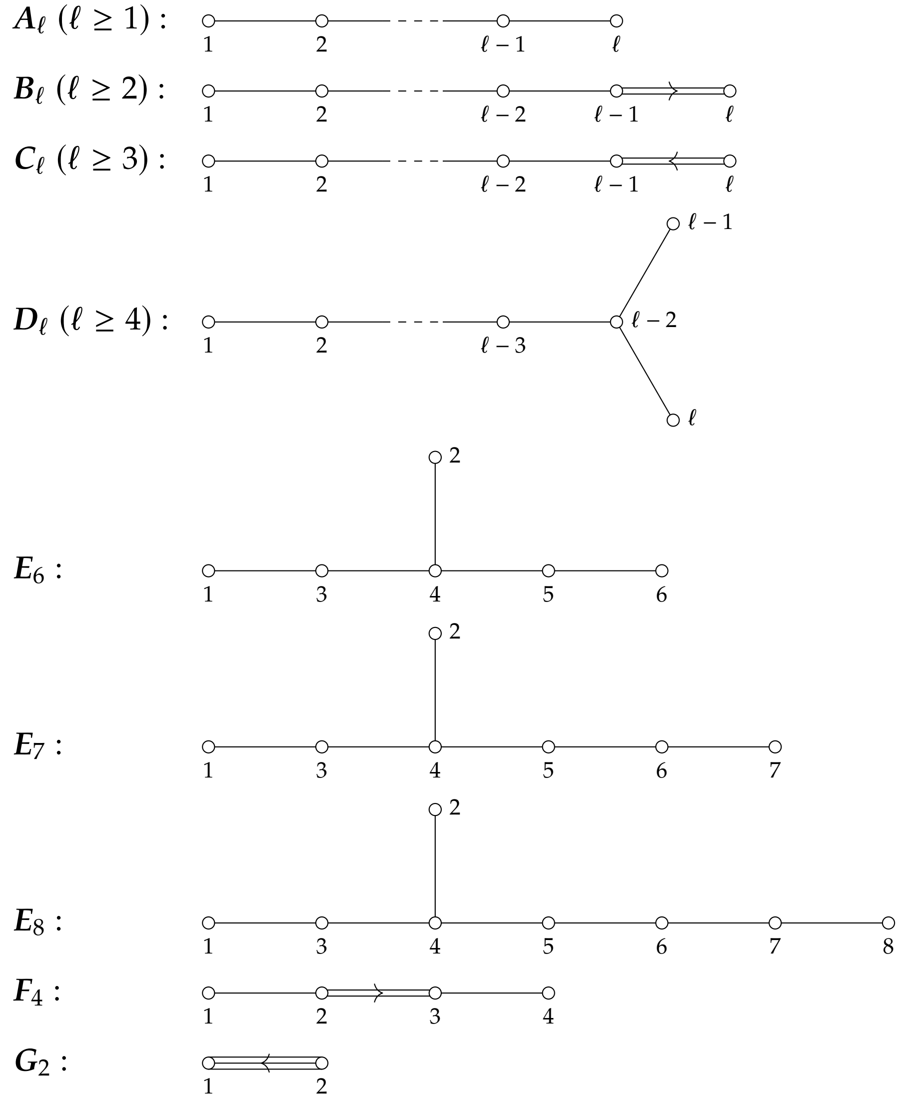
i. $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \leq 0$.

ii. $4(\varepsilon_i, \varepsilon_j)^2 = k$ para algum $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Um exemplo de conjunto admissível é o conjunto de raízes simples de um espaço euclidiano, cada uma dividida pela sua norma. Podemos associar um grafo Γ a um conjunto admissível $\mathfrak{A}$. Para isso, associamos cada ε_i a um vértice de Γ. Em seguida, para todo $i \neq j$, ligaremos os vértices correspondentes aos vetores ε_i e ε_j por $4(\varepsilon_i, \varepsilon_j)^2$ arestas. Isso significa que, se considerarmos o conjunto de raízes simples mencionado anteriormente, o grafo associado ao conjunto admissível será um grafo de Coxeter. Note que se fixarmos um $i \in \{1, \ldots, n\}$, o conjunto $\mathfrak{A} \setminus \{\varepsilon_i\}$ ainda é admissível. Mais do que isso, o grafo Γ associado a $\mathfrak{A} \setminus \{\varepsilon_i\}$ é o mesmo grafo de $\mathfrak{A}$, excluindo-se o vértice correspondente a ε_i e todas as arestas que partem deste vértice.

Por fim, mencionamos que as restrições para os postos dos sistemas $\mathbf{A}_\ell - \mathbf{D}_\ell$ no teorema abaixo são impostas para evitar ambiguidades.

Teorema 7.3.7. *Se Φ é um sistema de raízes irredutível de posto ℓ, então o seu diagrama de Dynkin é um dos seguintes:*



Demonstração. A demonstração deste teorema será feita em passos. Seja Δ uma base para Φ. A ideia desta prova será tomar o conjunto admissível $\mathfrak{A} = \{ \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\ell \}$ de todas as raízes simples divididas pela sua norma, e verificar todos os possíveis grafos Γ que são associados a $\mathfrak{A}$ (em particular, todos os possíveis grafos de Coxeter associados a Δ).

1. Tome

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i.$$

   Como $\mathfrak{A}$ é linearmente independente, temos que $\varepsilon \neq 0$. Mas então $(\varepsilon, \varepsilon) > 0$. Note que

$$(\varepsilon, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i, \varepsilon_i) + \sum_{i<j} 2(\varepsilon_i, \varepsilon_j).$$

   Uma vez que os vetores ε_i são unitários, obtemos que $(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = 1$, para todo $i \in \{ 1, \dots, n \}$. Desse modo, temos

$$(\varepsilon, \varepsilon) = n + \sum_{i<j} 2(\varepsilon_i, \varepsilon_j).$$

   Pelo fato de $(\varepsilon, \varepsilon) > 0$, segue que

$$n > -\sum_{i<j} 2(\varepsilon_i, \varepsilon_j).$$

   Para que a inequação acima seja satisfeita, o somatório deve ser no máximo igual a $n-1$. Mas para cada par de vetores distintos ε_i e ε_j que estão conectados por ao menos uma aresta, temos que $4(\varepsilon_i, \varepsilon_j)^2 = k$, onde $k \in \{ 1, 2, 3 \}$. Como $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) < 0$ (neste caso), obtemos que $2(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \leq -1$. Mas isso significa que *o número de pares de vértices conectados em Γ por ao menos uma aresta é menor do que n.*

2. Suponhamos que Γ possua algum ciclo. Seja $\mathfrak{A}'$ o subconjunto do conjunto admissível $\mathfrak{A}$ de todos os vértices que estão no ciclo. Sabemos que $\mathfrak{A}'$ também é um conjunto admissível, desse modo, considere Γ' o subgrafo de Γ associado a $\mathfrak{A}'$. O número de pares de vértices conectados por ao menos uma aresta em Γ' é igual à cardinalidade de $\mathfrak{A}'$, o que é um absurdo pelo item anterior. Portanto, *o grafo Γ não contém ciclos.*

3. Tome $\varepsilon \in \mathfrak{A}$ arbitrário. Sejam $\eta_1, \dots, \eta_k \in \mathfrak{A}$ os vértices que estão conectados a ε por ao menos uma aresta. Pelo item anterior, $(\eta_i, \eta_j) = 0$, para todos $i, j \in \{ 1, \dots, k \}$ distintos (em caso contrário, Γ possuiria algum ciclo). Como $\eta_1, \dots, \eta_k$ são vetores linearmente independentes unitários ortogonais entre si, considere o espaço gerado por ε e pelo

conjunto $B = \{ \eta_1, \ldots, \eta_k \}$. Então existe um vetor unitário η_0 neste espaço, tal que η_0 é ortogonal a cada vetor de B. Neste caso, é claro que $(\varepsilon, \eta_0) \neq 0$. Desse modo, podemos escrever

$$\varepsilon = \sum_{i=0}^{k} (\varepsilon, \eta_i)\eta_i.$$

Uma vez que ε é unitário, obtemos que $(\varepsilon, \varepsilon) = 1$, donde segue que

$$1 = (\varepsilon, \varepsilon) = \left(\varepsilon, \sum_{i=0}^{k} (\varepsilon, \eta_i)\eta_i \right) = \sum_{i=0}^{k} (\varepsilon, \eta_i)(\varepsilon, \eta_i) = \sum_{i=0}^{k} (\varepsilon, \eta_i)^2.$$

Multiplicando a igualdade por 4 e desconsiderando o vetor η_0, obtemos

$$4 > \sum_{i=1}^{k} 4(\varepsilon, \eta_i)^2.$$

Mas $4(\varepsilon, \eta_i)^2$ é exatamente a quantidade de arestas que conectam ε a cada η_i. Assim, o somatório acima representa a quantidade de arestas que se originam de ε. Pela desigualdade acima, concluímos que *no máximo três arestas são originadas de qualquer vértice de* Γ.

4. Pelo item anterior, se Γ possui uma aresta tripla, então os vértices dessa aresta não podem ser conectados com nenhum outro vértice. Logo, *o único grafo conexo de um conjunto admissível que contém uma aresta tripla é* $\circ\!\equiv\!\circ$.

5. Sejam $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \in \mathfrak{A}$ tais que ε_i é conectado a ε_{i+1} por uma única aresta em Γ, para todo $i \in \{ 1, \ldots, k-1 \}$. Em outras palavras, o subgrafo Γ', composto apenas pelos vértices do conjunto $\{ \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \}$, é igual a $\circ\!-\!\circ\!- - - -\!\circ\!-\!\circ$. Dizemos que este subgrafo é uma *corrente simples*. Considere

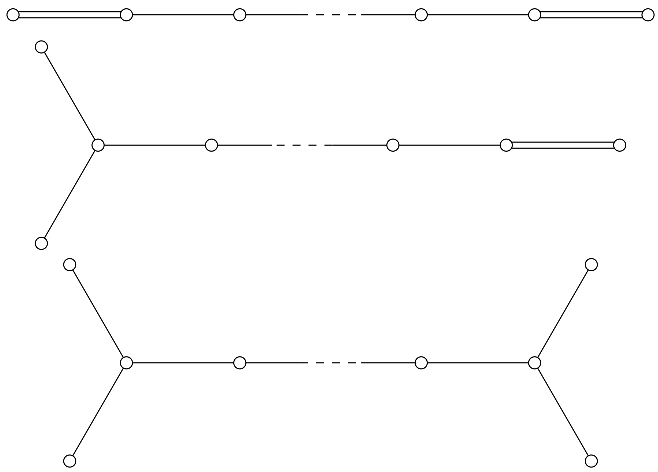
$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i.$$

Seja $\mathfrak{B} = (\mathfrak{A} \setminus \{ \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \}) \cup \{ \varepsilon \}$. Uma vez que ε é uma combinação linear de elementos linearmente independentes entre si e que também são linearmente independentes com relação aos elementos de $\mathfrak{A} \setminus \{ \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \}$, obtemos que o conjunto $\mathfrak{B}$ é linearmente independente. Note que

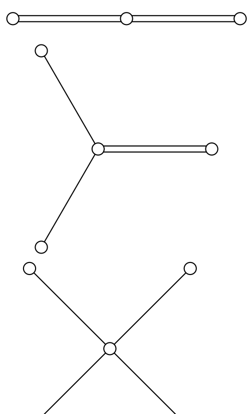
$$(\varepsilon, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{k} (\varepsilon_i, \varepsilon_i) + \sum_{i<j} 2(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = k + \sum_{i<j} 2(\varepsilon_i, \varepsilon_j).$$

Uma vez que $2(\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}) = -1$ para todo $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ e que $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ para todo $j \neq i+1$ ($j \in \{1, \ldots, k\}$), obtemos que $(\varepsilon, \varepsilon) = k - (k-1) = 1$. Logo, ε é um vetor unitário. Agora, para qualquer $\eta \in \mathfrak{A} \setminus \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$, temos que η será conectado a no máximo um vértice ε_i (caso contrário, violaríamos a condição imposta no item 2). Portanto, $(\eta, \varepsilon) = 0$ ou $(\eta, \varepsilon) = (\eta, \varepsilon_i)$, onde ε_i é o vértice conectado a η. Independente do que ocorra, temos que $(\eta, \varepsilon) \leq 0$ e que $4(\eta, \varepsilon)^2 = k$, com $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Por isso, o conjunto $\mathfrak{B}$ é admissível. Em outras palavras, *o grafo obtido de* Γ *substituindo uma corrente simples por um único vértice é um grafo correspondente a um conjunto admissível.*

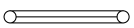
6. Suponha que o grafo Γ de um conjunto admissível possua um subgrafo de uma das seguintes formas:

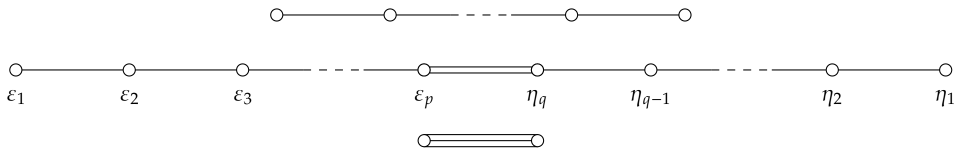


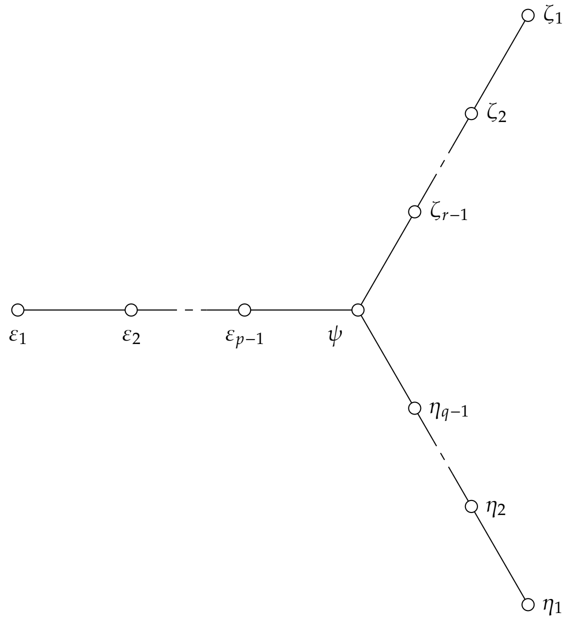
Pelo item anterior, podemos substituir as correntes simples por um único vértice, obtendo assim grafos de conjuntos admissíveis. Esses grafos seriam da forma:



Entretanto, todos esses grafos contrariam o item 3, já que possuem um vértice que origina quatro arestas. Portanto, Γ *não pode possuir nenhum subgrafo das formas apresentadas acima.*

7. Pelo que vimos anteriormente, se Γ tiver a ocorrência de uma aresta tripla, então Γ é da forma . Pelo item anterior, no máximo uma aresta dupla pode ocorrer no grafo Γ, assim como um nó bifurcado. Além disso, se um grafo possuir uma aresta dupla, então este não poderá conter um nó bifurcado e vice-versa. Logo, *o grafo conexo* Γ *de um conjunto admissível tem uma das seguintes formas*:





8. Considere o segundo tipo de grafo apresentado no item anterior, com os vértices rotulados da mesma maneira. Sejam

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{p} i\varepsilon_i \qquad \text{e} \qquad \eta = \sum_{i=1}^{q} i\eta_i.$$

Desse modo, segue que

$$(\varepsilon, \varepsilon) = \left(\varepsilon, \sum_{i=1}^{p} i\varepsilon_i\right) = \sum_{i=1}^{p} i(\varepsilon, \varepsilon_i) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} ij(\varepsilon_j, \varepsilon_i).$$

No somatório acima, temos três possibilidades: $j = i$, $j = i+1$ e $j \neq i, i+1$. Assim, podemos reescrever o somatório como

$$(\varepsilon, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{p} i^2(\varepsilon_i, \varepsilon_i) + \sum_{i=1}^{p-1} 2i(i+1)(\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}) + \sum_{\substack{j\neq i\\ j\neq i+1}} ij(\varepsilon_i, \varepsilon_j).$$

Pela escolha dos vértices, temos que $2(\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}) = 2(\eta_j, \eta_{j+1}) = -1$ para todo $i \in \{ 1, \ldots, p \}$ e $j \in \{ 1, \ldots, q \}$. Além disso, quaisquer pares de vértices diferentes desses serão ortogonais. Assim, obtemos

$$(\varepsilon, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{p} i^2 - \sum_{i=1}^{p-1} i(i+1) = \sum_{i=1}^{p} i^2 - \sum_{i=1}^{p-1} i^2 - \sum_{i=1}^{p-1} i = p^2 - \frac{p(p-1)}{2} = \frac{2p^2 - p^2 + p}{2} = \frac{p(p+1)}{2}.$$

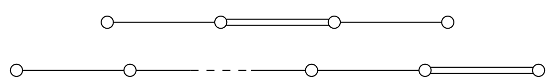
Analogamente, temos que $(\eta, \eta) = q(q+1)/2$. Agora, note que

$$(\varepsilon, \eta) = \left(\varepsilon, \sum_{i=1}^{q} i\eta_i \right) = \sum_{i=1}^{q} i(\varepsilon, \eta_i) = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{p} ij(\varepsilon_j, \eta_i).$$

Note também que $(\varepsilon_j, \eta_i) = 0$ para todos $i \in \{ 1, \ldots, q-1 \}$ e $j \in \{ 1, \ldots, p-1 \}$. Logo, obtemos que $(\varepsilon, \eta) = pq(\varepsilon_p, \eta_q)$. Isso implica que $(\varepsilon, \eta)^2 = p^2q^2(\varepsilon_p, \eta_j)^2$. Uma vez que $4(\varepsilon_p, \eta_q)^2 = 2$, segue $(\varepsilon, \eta)^2 = p^2q^2/2$. Pela desigualdade de Schwartz, temos que $(\varepsilon, \eta)^2 < (\varepsilon, \varepsilon)(\eta, \eta)$ (assumimos que não pode ocorrer a igualdade, pois ε e η claramente são distintos). Mas então

$$\begin{aligned} \frac{p^2q^2}{2} < \frac{p(p+1)q(q+1)}{4} &\implies 2pq < (p+1)(q+1) = pq + p + q + 1 \\ &\implies pq - p - q < 1 \implies pq - p - q + 1 < 2. \end{aligned}$$

Note que $pq - p - q + 1 = (p-1)(q-1)$, donde segue que $(p-1)(q-1) < 2$. Como p e q são inteiros não negativos, obtemos que $(p-1)(q-1) = 1$ ou $(p-1)(q-1) = 0$. No primeiro caso, concluímos que $p = q = 2$. Já no segundo, temos duas possibilidades: $p = 1$ e q sendo qualquer inteiro maior ou igual a zero, ou o contrário. Em outras palavras, *os únicos grafos que possuem a mesma forma do segundo grafo do item anterior são os grafos abaixo*:



9. Agora, consideremos o quarto grafo do item 7 e vejamos quais são os possíveis casos de grafos dessa forma. Utilizamos a mesma nomenclatura dos vértices do item anterior. Novamente, definimos

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{p-1} i\varepsilon_i, \qquad \eta = \sum_{i=1}^{q-1} i\eta_i \qquad \text{e} \qquad \zeta = \sum_{i=1}^{r-1} i\zeta_i.$$

Pela escolha dos vértices que tomamos, podemos perceber que ε, η e ζ são linearmente independentes e dois a dois ortogonais entre si. Note que o vértice ψ não pode ser escrito como combinação linear de ε, η e ζ. Agora, sejam θ_1, θ_2 e θ_3 os ângulos formados entre o vetor ψ e os vetores ε, η e ζ, respectivamente. Considere o espaço gerado por ψ e pelo conjunto $B = \left\{ \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p-1}, \eta_1, \dots, \eta_{q-1}, \zeta_1, \dots, \zeta_{r-1} \right\}$. Existe um vetor unitário ψ_0 neste espaço tal que ψ_0 é ortogonal a cada vetor de B. É claro que $(\psi, \psi_0) \neq 0$. Além disso, podemos escrever

$$\psi = (\psi, \psi_0)\psi_0 + \sum_{i=1}^{p-1}(\psi, \varepsilon_i)\varepsilon_i + \sum_{i=1}^{q-1}(\psi, \eta_i)\eta_i + \sum_{i=1}^{r-1}(\psi, \zeta_i)\zeta_i.$$

Como ψ é ortogonal a ε_i, η_j e ζ_k para todos $i \in \{ 1, \dots, p-2 \}$, $j \in \{ 1, \dots, q-2 \}$ e $k \in \{ 1, \dots, r-2 \}$, obtemos

$$\psi = (\psi, \psi_0)\psi_0 + (\psi, \varepsilon_{p-1})\varepsilon_{p-1} + (\psi, \eta_{q-1})\eta_{q-1} + (\psi, \zeta_{r-1})\zeta_{r-1},$$

donde segue que

$$\begin{aligned} 1 = (\psi, \psi) &= \big(\psi, (\psi, \psi_0)\psi_0 + (\psi, \varepsilon_{p-1})\varepsilon_{p-1} + (\psi, \eta_{q-1})\eta_{q-1} + (\psi, \zeta_{r-1})\zeta_{r-1}\big) \\ &= (\psi, \psi_0)^2 + (\psi, \varepsilon_{p-1})^2 + (\psi, \eta_{q-1})^2 + (\psi, \zeta_{r-1})^2. \end{aligned}$$

Desse modo, temos que $(\psi, \varepsilon_{p-1})^2 + (\psi, \eta_{q-1})^2 + (\psi, \zeta_{r-1})^2 < 1$. Note que $(\psi, \varepsilon) = (p-1)(\psi, \varepsilon_{p-1})$, assim como $(\psi, \eta) = (q-1)(\psi, \eta_{q-1})$ e $(\psi, \zeta) = (r-1)(\psi, \zeta_{r-1})$. Logo, obtemos que $\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 < 1$. Considerando $p-1$ no lugar de p, pelo passo anterior, temos que $(\varepsilon, \varepsilon) = p(p-1)/2$. Abrindo as contas, concluímos que $\cos^2\theta_1 = \frac{1}{2}(1 - 1/p)$. Analogamente, valem as igualdades semelhantes para η e ζ. Somando todas elas, obtemos

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1. \tag{7.1}$$

Mudando as variáveis, podemos assumir que $1/p < 1/q < 1/r$. Em particular, 7.1 implica que $3/2 \geq 3/r > 1$. Assim, segue que $r = 2$. Mas então $1/p + 1/q > 1/2$, $2/q > 1/2$ e $2 \leq q < 4$. Se $q = 3$, então $1/p > 1/6$ e então $p < 6$. Desse modo, as possíveis tuplas são $(p, 2, 2)$ (que é o caso igual a $\mathbf{D}_n$), $(3, 3, 2)$ ($\mathbf{E}_6$), $(4, 3, 2)$ ($\mathbf{E}_7$) e $(5, 3, 2)$ ($\mathbf{E}_8$),

Agora, classificamos os possíveis grafos de Coxeter que qualquer álgebra de Lie semi-simples em um corpo algebricamente fechado de característica zero pode possuir. Precisamos, porém, dos diagramas de Dynkin para provar o teorema. Sendo assim, basta que verifiquemos quais são os possíveis diagramas obtidos quando inserimos as setas nos grafos. Note que, com exceção dos diagramas das famílias $\mathbf{B}_\ell$ e $\mathbf{C}_\ell$, as setas não fazem diferença nos diagramas obtidos, independentemente de onde estiverem apontando. No caso das famílias $\mathbf{B}_\ell$ e $\mathbf{C}_\ell$, os grafos de Coxeter obtidos são os mesmos. Assim, quando inserimos as setas, a orientação vai catalogar as álgebras de uma família ou da outra, o que finaliza a demonstração do teorema. ■

Todos os diagramas de Dynkin apresentados no *Teorema de Classificação* são de sistemas de raízes de álgebras de Lie simples. Isso classifica as semi-simples, pois já sabemos que toda álgebra de Lie semi-simples é uma soma direta de ideais simples.

Capítulo 8

Classificação das Álgebras de Lie Semi-simples Reais

Neste capítulo, vamos introduzir a classificação das álgebras de Lie reais semi-simples. Para isso, usaremos a classificação complexa e as formas reais das álgebras de Lie complexas simples, em particular, a forma real compacta de tais álgebras.

8.1 Formas reais

Antes de começarmos a falar da classificação, precisamos entender as relações entre as álgebras de Lie reais e as álgebras de Lie complexas. Desse modo, vamos estudar o que ocorre com as álgebras de Lie reais, quando estendermos os escalares a $\mathbb{C}$, e o que ocorre com as álgebras de Lie complexas, quando restringirmos os escalares a $\mathbb{R}$.

Definição 8.1.1. Seja V um $\mathbb{C}$-espaço vetorial. O **realificado** $V^{\mathbb{R}}$ de V é o $\mathbb{R}$-espaço vetorial obtido restringindo-se os escalares de $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}$.

Note que a dimensão (real) de $V^{\mathbb{R}}$ é sempre o dobro da dimensão (complexa) de V.

Reciprocamente, partindo de um espaço vetorial real V de dimensão par, podemos torná-lo um espaço vetorial complexo fixando uma transformação $\mathbb{R}$-linear $J\colon V \to V$ que satisfaz $J^2 = -1$. De fato, neste caso, podemos definir a multiplicação por um escalar complexo $a + ib \in \mathbb{C}$ como

$$(a + ib)v := av + bJ(v)$$

para todo $v \in V$. Isso motiva a seguinte definição:

Definição 8.1.2. Seja V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial. Uma transformação linear $J\colon V \to V$ é chamada de **estrutura complexa** em V se $J^2 = -\operatorname{id}$.

Note que não pedimos explicitamente que a dimensão de V fosse par. Entretanto, isso segue facilmente da definição, pois $(\det J)^2 = (-1)^{\dim V}$ e, portanto, $(-1)^{\dim V}$ é positivo.

De maneira geral, um $\mathbb{R}$-espaço vetorial V admite várias estruturas complexas. De fato, basta fixarmos uma base de V e definirmos J através da matriz representativa

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Desse modo, mudando a base de V fixada, obtemos outra estrutura complexa. Isso faz com que os $\mathbb{C}$-espaços vetoriais obtidos por meio de um mesmo $\mathbb{R}$-espaço vetorial V sejam diferentes, dependendo da estrutura complexa escolhida.

Agora, vamos falar da extensão complexa de um espaço vetorial real:

Definição 8.1.3. Seja V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial. O **complexificado** $V_{\mathbb{C}}$ de V é o $\mathbb{C}$-espaço vetorial dado por

$$V_{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V.$$

Note que $V_{\mathbb{C}} \simeq V \oplus V$ como espaço vetorial real, identificando $1 \otimes v$ com $(v, 0)$ e $i \otimes v$ com $(0, v)$. Sob esta identificação, podem escrever o elemento $(u, v) \in V \oplus V$ da forma $u + iv$ (ou seja, $u + iv$ é o elemento $(1 \otimes u) + (i \otimes v) \in V_{\mathbb{C}}$). Podemos definir naturalmente a função $\sigma\colon V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ dada por $\sigma(u + iv) = u - iv$. Esta função é anti-linear, isto é, $\sigma(zv) = \overline{z}v$ para todos $z \in \mathbb{C}$ e $v \in V_{\mathbb{C}}$. Além disso, $\sigma^2 = 1$. Isso justifica a seguinte definição.

Definição 8.1.4. Seja V um $\mathbb{C}$-espaço vetorial. Uma transformação anti-linear $\sigma\colon V \to V$ é chamada de **conjugação** em V se satisfaz a condição $\sigma^2 = \mathrm{id}$.

Temos que toda conjugação é linear quando restrita a escalares reais. Desse modo, todo $\mathbb{C}$-espaço vetorial V com uma conjugação σ pode ser visto como o complexificado de um $\mathbb{R}$-espaço vetorial, sendo este espaço formado pelos pontos fixos de σ.

De maneira resumida, existe uma bijeção entre os $\mathbb{C}$-espaços vetoriais e os $\mathbb{R}$-espaços vetoriais munidos de uma estrutura complexa. Analogamente, existe uma equivalência entre entre os $\mathbb{R}$-espaços vetoriais e os $\mathbb{C}$-espaços vetoriais munidos de uma conjugação.

O que podemos dizer com relação ao complexificado de uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$? E sobre o realificado de uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{C}$? Para discutirmos isso, primeiro consideraremos a seguinte definição:

Definição 8.1.5. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$. Uma estrutura complexa $J\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é dita **adaptada** se $[J(x), y] = [x, J(y)] = J([x, y])$, para todo $x, y \in \mathfrak{g}$.

Em outras palavras, J é adaptada se comuta com $\operatorname{ad} x$, para todo $x \in \mathfrak{g}$. Note que, se J é adaptada, então $[J(x), J(y)] = -[x, y]$.

Exemplo 8.1.6. Se J é a estrutura complexa de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ dada pela multiplicação por i na realificação de $\mathfrak{g}$, então J é adaptada. Por outro lado, se a multiplicação por escalares complexos for dada por J, então $\mathfrak{g}$ ganha uma estrutura de álgebra de Lie sobre $\mathbb{C}$.

Agora, veremos o que podemos fazer com as conjugações.

Definição 8.1.7. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{C}$. Uma transformação anti-linear inversível $\sigma\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é um **antiautomorfismo** se $[\sigma(x), \sigma(y)] = \sigma([x, y])$, para todo $x, y \in \mathfrak{g}$.

Assim como ocorre com as conjugações, um antiautomorfismo de $\mathfrak{g}$ é um automorfismo no realificado de $\mathfrak{g}$. Agora, dado um antiautomorfismo $\sigma\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, o conjunto

$$\mathfrak{g}_0 := \left\{ x \in \mathfrak{g}^{\mathbb{R}} \;\middle|\; \sigma(x) = x \right\}$$

é uma subálgebra de Lie do realificado de $\mathfrak{g}$, que possui como complexificada a álgebra de Lie complexa $\mathfrak{g}$.

Finalmente, podemos definir uma forma real de uma álgebra de Lie complexa:

Definição 8.1.8. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{C}$. Uma **forma real** de $\mathfrak{g}$ é uma subálgebra $\mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$, que é o subespaço dos pontos fixos de uma conjugação $\sigma\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ que também é um antiautomorfismo. Quando isso ocorre, $\mathfrak{g}$ é o complexificado de $\mathfrak{g}_0$.

Vejamos alguns exemplos de formas reais:

Exemplo 8.1.9. Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie real, então sua complexificada $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ com relação à conjugação usual possui como forma real a própria álgebra $\mathfrak{g}$. Por exemplo, se considerarmos $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ com a conjugação

$$\begin{aligned} \sigma\colon \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \\ x &\longmapsto \overline{x} \end{aligned}$$

obtemos que a subálgebra dos pontos fixos de σ é a álgebra $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, ou seja, esta última é a forma real de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ com relação a σ.

Exemplo 8.1.10. Considere a álgebra de Lie complexa $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ com a conjugação

$$\begin{aligned} \sigma\colon \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \\ x &\longmapsto -\overline{x}^t. \end{aligned}$$

Então $\mathfrak{su}(n, \mathbb{R})$ é a forma real de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ com relação a σ.

A partir de uma álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$, considere $\mathfrak{g}^{\rho} := (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^{\mathbb{R}}$. O que podemos dizer sobre as formas de Killing de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ e $\mathfrak{g}^{\rho}$? O resultado seguinte nos permite relacionar tais formas:

Proposição 8.1.11. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie complexa. Considere $\kappa\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ e $\kappa^{\rho}\colon \mathfrak{g}^{\mathbb{R}} \times \mathfrak{g}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ as formas de Killing de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$, respectivamente. Então, para todo $x, y \in \mathfrak{g}$, tem-se*

$$\kappa^{\rho}(x, y) = 2 \operatorname{Re} \kappa(x, y).$$

Com esta proposição, podemos ver imediatamente que, se κ^ρ é não degenerada, então o mesmo ocorre com κ (pois $\kappa(x, y) = 0$ implica $\kappa^\rho(x, y) = 0$). Por outro lado, se κ é não degenerada, então, para todo $x \in \mathfrak{g}$, existe $y \in \mathfrak{g}$ tal que $\kappa(x, y) \neq 0$. Se $\operatorname{Re} \kappa(x, y) \neq 0$, então $\kappa^\rho(x, y) \neq 0$. Em caso contrário, necessariamente $\operatorname{Im} \kappa(x, y) \neq 0$ e, portanto, $\operatorname{Re} \kappa(x, iy) \neq 0$, logo, $\kappa^\rho(x, iy) \neq 0$. De todo modo, κ^ρ é não degenerada.

A proposição nos dá que, uma álgebra de Lie complexa é semi-simples se, e somente se, sua realificada também é. Desse modo, se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie real, então caso $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ ou $\mathfrak{g}^\rho$ for semi-simples, o mesmo ocorre com as demais.

Sabemos que toda álgebra de Lie semi-simples pode ser escrita como soma direta de ideais simples. Em particular, temos que toda álgebra de Lie simples é semi-simples. Dessa maneira, é natural nos perguntarmos o que ocorre com as álgebra de Lie simples quando essas são complexificadas ou realificadas. De fato, como os ideais próprios de uma álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$ se complexificam em ideais próprios de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, então se $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ é simples, o mesmo ocorre para $\mathfrak{g}$. O contrário não é verdade, entretanto.

Teorema 8.1.12. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie real simples. Então há duas possibilidades:*

i. $\mathfrak{g}$ é uma forma real de uma álgebra de Lie complexa simples.

ii. $\mathfrak{g}$ é o realificado de uma álgebra de Lie complexa simples.

Em outras palavras, ou $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ é simples ou $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ é escrita como uma soma direta de dois ideais simples isomorfos entre si.

8.2 Formas reais compactas

Na seção anterior, vimos o que é a forma real de uma álgebra de Lie complexa. Entretanto, observamos que uma álgebra de Lie complexa pode ter mais do que uma forma real. De fato, há uma bijeção entre as formas reais de uma álgebra de Lie complexa e as conjugações dessa álgebra de Lie. Com isso em mente, nesta seção, vamos introduzir o conceito de forma real compacta e mostraremos que uma álgebra de Lie complexa possui uma *única* forma compacta.

Definição 8.2.1. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie real. Dizemos que $\mathfrak{g}$ é **compacta**[1] se sua forma de Killing é negativa definida.

A definição, entretanto, não nos garante que uma álgebra de Lie complexa possua uma forma compacta. Felizmente, isso sempre acontece, como podemos ver pelo seguinte resultado:

[1]A escolha deste termo não é arbitrária, mas sim segue do fato que um grupo de Lie é compacto se, e somente se, a forma de Killing da álgebra de Lie associada a ele for negativa definida.

Teorema 8.2.2. *Toda álgebra de Lie complexa possui uma forma real compacta.*

Com a garantia da existência de tal forma real, podemos nos focar a estudá-la. Vimos que as formas reais de uma álgebra complexa estão em bijeção com as conjugações da mesma álgebra de Lie. Desse modo, faz sentido que estudemos as conjugações das álgebras complexas.

Definição 8.2.3. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie complexa e sejam $\sigma_1, \sigma_2 \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ duas conjugações de $\mathfrak{g}$ associadas a duas formas reais. Então:

i. Dizemos que σ_1 e σ_2 são **equivalentes** se suas formas reais associadas (denotadas por $\mathfrak{g}^{\sigma_1}$ e $\mathfrak{g}^{\sigma_2}$, respectivamente) são isomorfas.

ii. Dizemos que σ_1 e σ_2 são **compatíveis** se comutam, isto é, se $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$.

iii. Dizemos que σ_1 é **compacta** se sua forma real associada $\mathfrak{g}^{\sigma_1}$ for compacta.

Antes de prosseguirmos com a próxima proposição, precisamos da seguinte definição:

Definição 8.2.4. Seja V um F-espaço vetorial. Um automorfismo $\theta \colon V \to V$ é dito **involutivo** se $\theta^2 = \mathrm{id}$.

Com esta definição, podemos caracterizar as relações que foram apresentadas acima entre duas conjugações. Essa caracterização será dada pela proposição abaixo:

Proposição 8.2.5. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples complexa e sejam $\sigma_1, \sigma_2 \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ duas conjugações de $\mathfrak{g}$ associadas a duas formas reais. Então:*

i. As conjugações σ_1 e σ_2 são equivalente se, e somente se, existe um automorfismo (de espaços vetoriais) $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}\, \mathfrak{g}$ tal que $\sigma_2 = \varphi\sigma_1\varphi^{-1}$.

ii. As conjugações σ_1 e σ_2 são compatíveis se, e somente se, a transformação $\theta = \sigma_1\sigma_2$ for um automorfismo involutivo. Neste caso, a restrição a $\mathbb{R}$ de θ deixa as formas reais associadas invariantes, isto é, $\theta\big|_{\mathfrak{g}^{\sigma_i}} \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}\, \mathfrak{g}^{\sigma_i}$, com $i \in \{1, 2\}$.

iii. Se σ_1 e σ_2 são compatíveis e compactas, então $\sigma_1 = \sigma_2$.

O item iii. da proposição acima nos mostra que, para provarmos que a forma compacta de uma álgebra de Lie complexa seja única, basta que provemos que todas as formas reais compactas sejam compatíveis. Isso será feito a partir do seguinte teorema:

Teorema 8.2.6. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples complexa. Sejam $\sigma, \tau \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ duas conjugações de $\mathfrak{g}$, com τ sendo compacta. Então existe um automorfismo $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}\, \mathfrak{g}$ tal que σ e $\varphi\tau\varphi^{-1}$ são compatíveis, e de modo que $\varphi\tau\varphi^{-1}$ é compacta.*

Assim, temos o corolário:

Corolário 8.2.7. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples complexa e sejam $\sigma, \tau \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ duas conjugações compactas. Então σ e τ são equivalente, isto é, $\mathfrak{g}$ possui uma única forma real compacta a menos de isomorfismo.*

Agora temos a unicidade da forma real compacta, vejamos um resultado que irá relacioná-la aos automorfismos involutivos de $\mathfrak{g}$.

Teorema 8.2.8. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples complexa, $\theta \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ um automorfismo involutivo e $\tau \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ a conjugação compacta de $\mathfrak{g}$. Então existe um automorfismo $\varphi \in \operatorname{Aut}_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$ tal que θ comuta com $\varphi\tau\varphi^{-1}$. Em particular, existe uma forma real compacta $\varphi(\mathfrak{g}^{\tau})$ que é invariante sobre θ.*

Vamos entender os resultados que acabamos de apresentar. Podemos perceber que duas formas reais de uma álgebra de Lie complexa são isomorfas se, e somente se, suas conjugações forem conjugadas entre si. O Teorema 8.2.8 nos diz que se θ é um automorfismo involutivo de $\mathfrak{g}$ e τ é a sua conjugação compacta, então existe um automorfismo φ de modo que $\theta\varphi\tau\varphi^{-1}$ também é um automorfismo involutivo. Desse modo, é natural nos perguntarmos se podemos obter todos os automorfismos involutivos de $\mathfrak{g}$ a partir da conjugação compacta τ. A resposta para essa pergunta está no seguinte teorema:

Teorema 8.2.9. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples complexa. Então*

$$\Psi \colon \left\{ \begin{array}{c} \textit{Classes de isomorfismo} \\ \textit{das formas reais de } \mathfrak{g} \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \textit{Classes de conjugação em } \operatorname{Aut}_{\mathbb{C}} \mathfrak{g} \\ \textit{de automorfismos involutivos} \end{array} \right\}$$
$$[\sigma] \longmapsto [\sigma\tau]$$

está bem definida e é uma bijeção, com τ uma conjugação compacta de $\mathfrak{g}$ que é compatível com a conjugação σ.

Com o teorema acima, fica claro que para classificar as álgebras de Lie reais simples, basta que classifiquemos os automorfismos involutivos das álgebras de Lie complexas simples.

8.3 Classificação real

Nesta seção, $\mathfrak{g}$ denotará uma álgebra de Lie complexa, $\mathfrak{h}$ uma subálgebra toral maximal de $\mathfrak{g}$, Φ o sistema de raízes correspondente de $\mathfrak{g}$ com base $\Delta = \{ \alpha_1 \ldots, \alpha_n \}$.

Recorde que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha\right)$. Assim, se $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, então existe um único $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que $\{ x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha] \}$ é uma base da "cópia" de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ em $\mathfrak{g}$. Desse modo, Sejam $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ esses geradores canônicos.

Para cada subconjunto de índices $J \subseteq \{ 1, \ldots, n \}$, existe um único automorfismo involutivo $\theta_J \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ tal que

$$\begin{cases} \theta_J(x_i) = x_i, \quad \theta_J(y_i) = y_i, & \text{se } i \notin J, \\ \theta_J(x_i) = -x_i, \quad \theta_J(y_i) = -y_i, & \text{se } i \in J. \end{cases}$$

Dessa maneira, dizemos que θ_J corresponde ao diagrama de Dynkin de (Φ, Δ), de modo que os vértices α_i, com $i \in J$, são preenchidos.

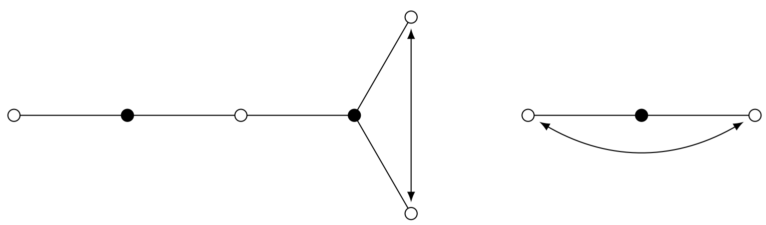
Agora, se ω é um **automorfismo involutivo** do diagrama de Dynkin (Φ, Δ), isto é, uma composição de transposições disjuntas entre os vértices que preserva os inteiros de Cartan, e se $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ é constituído de vértices que são fixados por ω, então existe um único automorfismo involutivo $\theta_{\omega,J} \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ dado por

$$\begin{cases} \theta_{\omega,J}(x_i) = x_{\omega(i)}, \quad \theta_{\omega,J}(y_i) = y_{\omega(i)}, & \text{se } i \notin J, \\ \theta_{\omega,J}(x_i) = -x_i, \quad \theta_{\omega,J}(y_i) = -y_i, & \text{se } i \in J. \end{cases}$$

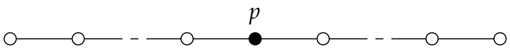
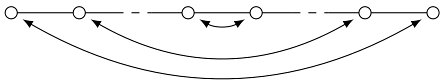
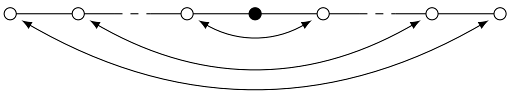
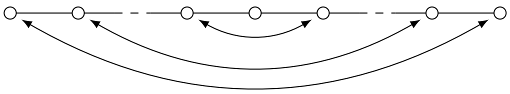
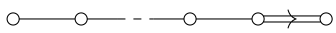
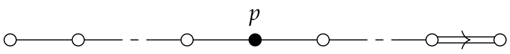
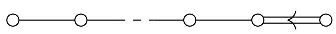
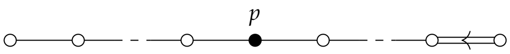
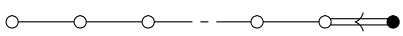
Dizemos que $\theta_{\omega,J}$ corresponde ao diagrama de Dynkin de (Φ, Δ) com os vértices α_i, com $i \in J$, preenchidos e onde ω é indicado por setas.

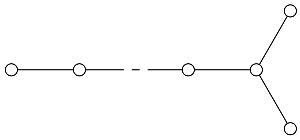
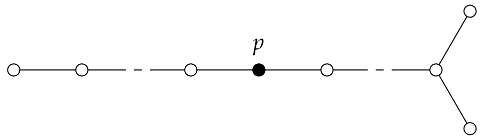
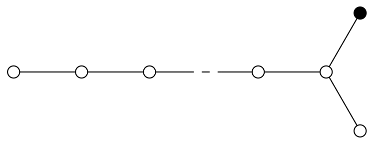
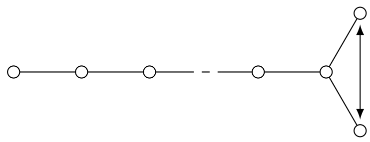
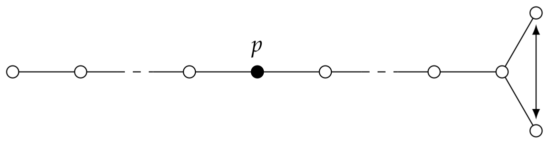
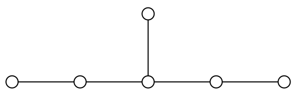
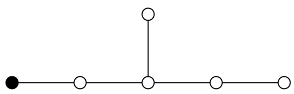
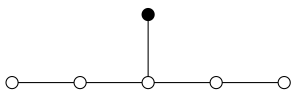
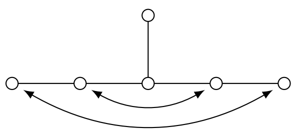
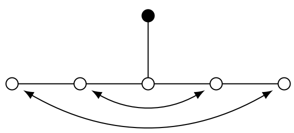
Chamamos estes diagramas de Dynkin com alguns vértices preenchidos e com um possível automorfismo involutivo de diagramas indicado por setas de **diagramas de Vogan**.

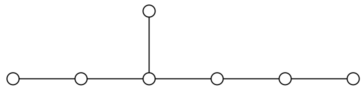
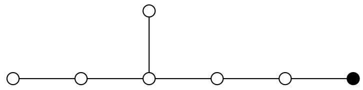
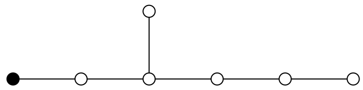
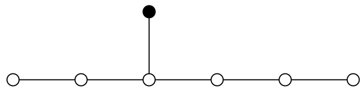
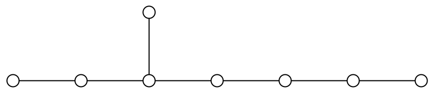
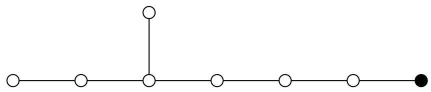
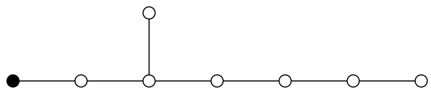
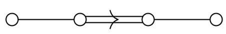
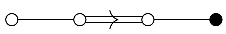
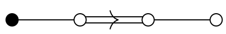
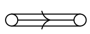
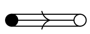
Exemplo 8.3.1. Os seguintes diagramas são diagramas de Vogan:



Teorema 8.3.2. *A menos de conjugação, os automorfismos involutivos das álgebras de Lie simples sobre $\mathbb{C}$ são os automorfismos correspondentes aos diagramas de Vogan abaixo:*

Tipo	*Diagrama de Vogan*	*Subálgebra Fixa*	*Forma Real*
		$\boldsymbol{A}_\ell$	$\mathfrak{su}_{\ell+1}(\mathbb{R})$
	 $\left(1 \leq p \leq \left[\frac{\ell}{2}\right]\right)$	$\boldsymbol{A}_{p-1} \times \boldsymbol{A}_{\ell-p} \times Z$ $(\boldsymbol{A}_0 = 0)$	$\mathfrak{su}_{p,\ell+1-p}(\mathbb{R})$
	 $(\ell = 2r > 1)$	$\mathfrak{so}_{2r+1}(\mathbb{R})$	$\mathfrak{sl}_{\ell+1}(\mathbb{R})$
$\boldsymbol{A}_\ell$	 $(\ell = 2r - 1 > 1)$	$\mathfrak{so}_{2r}(\mathbb{R})$	$\mathfrak{sl}_{\ell+1}(\mathbb{R})$
	 $(\ell = 2r - 1 > 1)$	$\mathfrak{sp}_{2r}(\mathbb{R})$	$\mathfrak{sl}_{r}(\mathbb{H})$
		$\boldsymbol{B}_\ell$	$\mathfrak{so}_{2\ell+1}(\mathbb{R})$
$\boldsymbol{B}_\ell$	 $(1 \leq p \leq \ell)$	$\mathfrak{so}_{2\ell+1-p} \times \mathfrak{so}_p$ $(\mathfrak{so}_1 = 0,\ \mathfrak{so}_2 = Z)$	$\mathfrak{so}_{2\ell+1-p,p}(\mathbb{R})$
		$\boldsymbol{C}_\ell$	$\mathfrak{sp}_{\ell}(\mathbb{H})$
$\boldsymbol{C}_\ell$	 $\left(1 \leq p \leq \left\lfloor\frac{\ell}{2}\right\rfloor\right)$	$\mathfrak{sp}_{2p} \times \mathfrak{sp}_{2(\ell-p)}$	$\mathfrak{sp}_{\ell-p,p}(\mathbb{H})$
		$\boldsymbol{A}_{\ell-1} \times Z$	$\mathfrak{sp}_{2\ell}(\mathbb{R})$

Tipo	*Diagrama de Vogan*	*Subálgebra Fixa*	*Forma Real*
D_ℓ		D_ℓ	$\mathfrak{so}_{2\ell}(\mathbb{R})$
	 $\left(1 \leq p \leq \left\lfloor \frac{\ell}{2} \right\rfloor\right)$	$\mathfrak{so}_{2(\ell-p)} \times \mathfrak{so}_{2p}$	$\mathfrak{so}_{2(\ell-p),2p}(\mathbb{R})$
	 $(\ell > 4)$	$A_{\ell-1} \times Z$	$\mathfrak{so}^*_{2\ell}(\mathbb{R})$
		$B_{\ell-1}$	$\mathfrak{so}_{2\ell-1,1}(\mathbb{R})$
	 $\left(1 \leq p \leq \left\lfloor \frac{\ell-1}{2} \right\rfloor\right)$	$\mathfrak{so}_{2\ell-2p-1} \times \mathfrak{so}_{2p+1}$	$\mathfrak{so}_{2\ell-2p-1,2p+1}(\mathbb{R})$
E_6		E_6	$E_{6,-78}$
		$D_5 \times Z$	$E_{6,-14}$
		$A_5 \times A_1$	$E_{6,2}$
		F_4	$E_{6,-26}$
		C_4	$E_{6,6}$

Tipo	*Diagrama de Vogan*	*Subálgebra Fixa*	*Forma Real*
E_7		E_7	$E_{7,-133}$
		$E_6 \times Z$	$E_{7,-25}$
		$D_6 \times A_1$	$E_{7,-5}$
		A_7	$E_{7,7}$
E_8		E_8	$E_{8,-248}$
		$E_7 \times A_1$	$E_{8,-24}$
		D_8	$E_{8,8}$
F_4		F_4	$F_{4,-52}$
		B_4	$F_{4,-20}$
		$C_3 \times A_1$	$F_{4,4}$
G_2		G_2	$G_{2,-14}$
		$A_1 \times A_1$	$G_{2,2}$

Referências Bibliográficas

[1] Alberto Elduque. *Lie Algebras*. 2021. Notas de aula disponíveis na página da web http://personal.unizar.es/elduque/files/LAElduque.pdf.

[2] William Fulton and Joe Harris. *Representation theory: a first course*, volume 129. Springer Science & Business Media, 2013.

[3] Peter J Hilton and Urs Stammbach. *A course in homological algebra*, volume 4. Springer Science & Business Media, 2012.

[4] James Edward Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory*, volume 9. Springer Science & Business Media, 2012.

[5] Nathan Jacobson. *Lie algebras*. Number 10. Courier Corporation, 1979.

[6] Luiz Antonio Barrera San Martin. *Álgebras de Lie*. 2020. Disponível na página da web https://www.ime.unicamp.br/~lino/Alglie0.pdf.

[7] Veeravalli Seshadri Varadarajan. *Historical Review of Lie Theory*. 2007. Disponível na página da web https://www.math.ucla.edu/~vsv/liegroups2007/historical%20review.pdf.