UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ALAN KAUS-ZAMPIERON

TEOREMA DE GAUSS-BONNET VIA FORMAS DIFERENCIAIS

SÃO CARLOS
2024

ALAN KAUS-ZAMPIERON

TEOREMA DE GAUSS-BONNET VIA FORMAS DIFERENCIAIS

Monografia apresentada ao Curso de Bacharelado em Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

Orientador: Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes

SÃO CARLOS
2024

Kaus-Zampieron, Alan

Teorema de Gauss-Bonnet via formas diferenciais / Alan
Kaus-Zampieron -- 2024.
98f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos,
campus São Carlos, São Carlos
Orientador (a): José Nazareno Vieira Gomes
Banca Examinadora: Adilson Eduardo Presoto, Dirk
Töben
Bibliografia

1. Topologia diferencial. 2. Álgebra. 3. Análise. I. Kaus-
Zampieron, Alan. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática
(SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Arildo Martins - CRB/8 7180

RESUMO

Esta monografia tem foco demonstrar e entender a motivação geométrica do Teorema de Gauss-Bonnet. Para tanto, inicialmente o projeto prevê o estudo de variedades diferenciáveis, espaço tangente, espaço cotangente, orientação de superfície e o teorema de Frobenius.

Sequencialmente o estudo segue passa pelo estudo de fibrados tensoriais e vetoriais, conexões em fibrados vetoriais, conexões afins e conexões em fibrados de referenciais.

Finaliza-se o projeto com o estudo de geometria Riemanniana, no qual estará previsto o teorema fundamental da geometria Riemanniana, coordenadas normais geodésicas, curvatura seccional e, finalmente, o teorema de Gauss-Bonnet.

Palavras-chave: Topologia. Álgebra. Análise. Geometria.

ABSTRACT

This monograph focuses on demonstrating and understanding the geometric motivation of the Gauss-Bonnet Theorem. To this end, the project initially envisages the study of differentiable manifolds, tangent space, cotangent space, surface orientation and Frobenius' theorem.

Sequentially, the study follows the study of tensor and vector bundles, connections in vector bundles, affine connections and connections in reference bundles.

The project ends with the study of Riemannian geometry, which will include the fundamental theorem of Riemannian geometry, geodesic normal coordinates, sectional curvature and, finally, the Gauss-Bonnet theorem.

Keywords: Topology. Algebra. Analysis. Geometry.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A história da utilização das formas diferenciais na geometria é uma jornada que se estende ao longo de vários séculos, marcada por avanços matemáticos e conexões profundas entre diferentes áreas da matemática e da física. As formas diferenciais são ferramentas poderosas que permitem uma abordagem mais flexível e abstrata para a compreensão da geometria e da topologia dos espaços.

A origem das formas diferenciais remonta aos estudos de Isaac Newton e Gottfried W. Leibniz no século XVII sobre cálculo diferencial e integral. A ideia fundamental era entender como quantidades variáveis mudavam em relação umas às outras. No entanto, somente no século XIX que as formas diferenciais começaram a emergir como uma abordagem sistemática para entender a geometria de maneira mais profunda.

O matemático Carl F. Gauss desempenhou um papel significativo na introdução das formas diferenciais na geometria. Seus estudos sobre a curvatura de superfícies levaram à noção de curvatura intrínseca, sendo uma característica que não depende da maneira como a superfície está incorporada no espaço tridimensional. Isso levou à formulação da "geometria intrínseca", que se concentra nas propriedades geométricas que podem ser definidas apenas em termos da própria superfície.

O desenvolvimento das formas diferenciais avançou com os trabalhos de Bernhard Riemann, que generalizou as noções de curvatura para espaços de dimensões superiores. Ele introduziu o conceito de métrica, sendo uma maneira de medir distâncias e ângulos em espaços curvos, e também explorou as ideias de conexões e curvatura em espaços mais gerais.

O século XX trouxe avanços significativos com a introdução da teoria da relatividade de Einstein. A geometria diferencial desempenhou um papel central na formulação da teoria da gravitação de Einstein, onde a gravidade foi interpretada como a curvatura do espaço-tempo em resposta à presença de massa e energia. A teoria da relatividade geral não apenas utilizou as formas diferenciais para modelar o espaço-tempo, mas também influenciou o desenvolvimento de ideias mais abstratas na geometria diferencial.

Mais recentemente, as formas diferenciais têm sido essenciais na compreensão das topologias complexas dos espaços, como os estudos sobre variedades e variedades diferenciáveis. Elas se aplicam em várias áreas da matemática, como teoria dos nós, teoria das cordas, geometria algébrica e muito mais.

Em resumo, a história da utilização das formas diferenciais na geometria é uma narrativa de desenvolvimento matemático contínuo, desde suas raízes no cálculo diferencial até suas aplicações modernas na física teórica e em diversas áreas da matemática avançada.

Este trabalho baseou-se nas obras (LEE, 2012), (LAM, 1999) e (POLLACK, 2013) para o estudo das variedades suaves, no livro (POLLACK, 2013) para a compreensão da álgebra exterior, formas diferenciais e integração em variedades, apoiando-se nos livros (LIMA, 2018) e (MORITA, 2001) no intuito de ser uma introdução à topologia diferencial e geometria Riemanniana.

2 VARIEDADES

É importante relembrarmos primeiro algumas definições para a introdução do capítulo que segue.

Definição 2.1. Uma topologia em um conjunto X é uma coleção τ de partes de X, chamados os abertos da topologia, com as seguintes propriedades:

1. O conjunto vazio e o próprio conjunto X são abertos, isto é, $\emptyset, X \in \tau$;
2. A interseção de dois conjuntos abertos é um aberto, isto é, se $A_1, A_2 \in \tau$, então $A_1 \cap A_2 \in \tau$;
3. A união de uma família arbitrária de abertos é um aberto, isto é, dado $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$, com $A_\lambda \in \tau, \forall \lambda \in L$, tem-se $\left(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda\right) \in \tau$.

Um espaço topológico é um par (X, τ) onde X é um conjunto e τ é uma topologia em X.

Definição 2.2. Dois espaços topológicos são ditos homeomorfos se existe uma aplicação entre esses espaços que seja contínua, invertível e que sua inversa seja contínua. Essa aplicação é chamada homeomorfismo.

Definição 2.3. Sejam $x, y \in X$ e (X, τ) um espaço topológico. x, y pode ser separados por abertos se existe um aberto U de x e um aberto V de y tal que $U \cap V = \emptyset$. (X, τ) é um espaço Hausdorff se quaisquer dois pontos distintos em X podem ser separados por abertos.

Para fins de simplificação para falar de um espaços topológicos X usaremos apenas X subentendendo sua estrutura topológica ao invés de (X, τ).

2.1 VARIEDADE DIFERENCIÁVEL

Definição 2.4. Suponha M um espaço Hausdorff.

a) Se para todo $u \in M$, existe uma vizinhança U de u tal que U é um homeomorfismo de um aberto em $\mathbb{R}^m$, então M é dita uma variedade m-dimensional ou uma variedade topológica m-dimensional.

b) Se o homeomorfismo é $x_U : U \to x_U(U)$ no qual $x_U(U)$ é um aberto do $\mathbb{R}^m$, diremos que (U, x_U) é uma carta coordenada de M.

c) Como $x_U(U)$ é um homeomorfismo, para qualquer $u \in U$, podemos definir as coordenadas de u como

$$x = x_U(u) \in \mathbb{R}^m,$$

isto é, $x_U(u) = x = (x_1, \dots, x_m)$ no qual as coordenadas locais do ponto $u \in U$ são expressas por $(x_U(u))_i = x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, \dots, m\}$.

Observação 2.1. Sejam (U, x_U) e (V, x_V) duas cartas coordenadas de M. Se $U \cap V \neq \emptyset$, então $x_U(U \cap V)$ e $x_V(U \cap V)$ são dois conjuntos abertos não vazios de $\mathbb{R}^m$, e a aplicação

$$x_V \circ x_U^{-1}|_{x_U(U\cap V)} : x_U(U \cap V) \to x_V(U \cap V)$$

define um homeomorfismo entre esses dois abertos, com inversa dada por $x_U \circ x_V^{-1}|_{x_V(U\cap V)}$. É claro que ambas as aplicações estão definidas entre abertos do espaço euclidiano.

É notável que, expresso em coordenadas, $x_v \circ x_u^{-1}$ e $x_u \circ x_v^{-1}$ representam m funções de valores reais em um aberto do espaço euclidiano, isto é, se $x = (x_1, \dots, x_m) \in x_U(U \cap V)$ então podemos definir f_i tal que

$$f_i(x) = f_i(x_1, \dots, x_m) = (x_V \circ x_U^{-1}(x_1, \dots, x_m))_i = ((y_1, \dots, y_m))_i = y_i$$

para todo $i \in \{1, \dots, m\}$. Analogamente, podemos definir m funções g_i tal que se $y \in x_V(U \cap V)$, então $g_i(y) = x_i$. Além disso, como $x_v \circ x_u^{-1}$ e $x_u \circ x_v^{-1}$ são homeomorfismos inversos um do outro, então f_i e g_i são contínuas, $f_i(g_1(y_1, \dots, y_m), \dots, g_m(y_1, \dots, y_m)) = y_i$ e $g_i(f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_m(x_1, \dots, x_m)) = x_i$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$.

Da observação acima tiramos a seguinte definição.

Definição 2.5. Suponha M uma variedade m-dimensional.

1. Diremos que as cartas coordenadas de M, (U, x_U) e (V, x_V), são C^r-compatíveis se $U \cap V \neq \emptyset$ e f_i, g_i são C^r quando $U \cap V \neq \emptyset$;

2. Se um dado conjunto de cartas coordenadas $\mathcal{A} = \{(U, x_U), (V, x_V), (W, x_W), \dots\}$ em M satisfazendo as seguintes condições, diremos que $\mathcal{A}$ é uma C^r-estrutura diferenciável de M:

    a) $\{U, V, W, \dots\}$ é uma cobertura de conjuntos abertos de M;

    b) Quaisquer duas cartas coordenadas em $\mathcal{A}$ são C^r-compatíveis;

    c) $\mathcal{A}$ é maximal.

3. Se uma estrutura C^r-diferenciável é dada em M, então M é dita uma variedade C^r-diferenciável. Se M admite uma estrutura $C^{\inf}$-diferenciável, então diremos que M é uma variedade suave;

4. uma carta coordenada em uma estrutura diferenciável é dita uma carta coordenada compatível (ou admissível) de M.

De agora em diante, diremos sistema de coordenadas local de um ponto p em uma variedade diferenciável M para nos referirmos a um sistema de coordenadas obtido de uma carta compatível contendo p. E também, como trataremos apenas de variedades suaves, usaremos variedade para nos referir a uma variedade suave.

Definição 2.6. Suponha que $f : M \to N$ seja uma aplicação contínua entre as variedades M e N, as quais $\dim M = m$ e $\dim N = n$.

a) Se existir cartas coordenadas compatíveis (U, x_U) em um ponto $p \in M$ e (V, y_V) em $f(p) \in N$ tal que a aplicação

$$y_V \circ f \circ x_U^{-1} : x_U(U) \to y_V(V)$$

seja C^∞ no ponto $x_U(p)$, então f é dita C^∞ em p;

b) Se f é C^∞ em todo ponto $p \in M$, então diremos que f é uma aplicação suave de M em N;

c) Se $\dim M = \dim N$, f é um homeomorfismo e f, f^{-1} são suaves, então diremos que f é um difeomorfismo;

d) Se as variedades M e N são difeomorfas, então diremos que as estruturas suaves correspondentes das variedades são isomorfas.

Notemos que como $y_V \circ f \circ x_U^{-1}$ é uma aplicação continua de um conjunto aberto $x_U(U) \subset \mathbb{R}^m$ para outro conjunto aberto $y_V(V) \subset \mathbb{R}^n$, a diferenciabilidade no ponto $x_U(p)$ está bem definida.

Observação 2.2. Uma importante caso de aplicações suaves entre variedades é o das curvas parametrizadas sobre variedades, na qual $M = (a, b) \subset \mathbb{R}$. Isto é, uma aplicação suave

$$f : (a, b) \to N$$

é uma curva parametrizada na variedade N. Tais curvas serão de importância impar para o estudo da próxima seção.

É possível também construirmos variedades suaves $(m + n)$-dimensionais a partir de variedades suaves m e n-dimensionais como o método a seguir sugere.

Suponha M e N variedades m e n-dimensionais com estruturas suaves $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ e $\{(V_\beta, y_\beta)\}_{\beta\in B}$, respectivamente.

(i) Notemos que $\{U_\alpha \times V_\beta\}_{\alpha\in A,\beta\in B}$ forma uma cobertura aberta do espaço produto $M\times N$.

(ii) Então definamos as aplicações

$$\begin{array}{rccll} x_\alpha \times y_\beta : & U_\alpha \times V_\beta & \to & \mathbb{R}^{m+n} & \\ & (p, q) & \mapsto & x_\alpha \times y_\beta(p, q) & = (x_\alpha(p), y_\beta(q)). \end{array}$$

Assim, $\left(U_\alpha \times V_\beta, x_\alpha \times y_\beta\right)$ é uma carta coordenada de $M \times N$. Desta forma conseguimos uma estrutura diferenciável suave em $M \times N$.

Obtemos assim $M \times N$ como uma variedade suave $(m+n)$-dimensional.

Definição 2.7. Dada uma estrutura diferenciável suave determinada por uma cobertura coordenada C^∞-compatível $\left\{\left(U_\alpha \times V_\beta, x_\alpha \times y_\beta\right)\right\}_{\alpha\in A, \beta\in B}$ de um espaço produto $M \times N$. Diremos que $M \times N$ é uma variedade suave $(m+n)$-dimensional chamada variedade produto de M e N.

Observação 2.3. As projeções naturais da variedade produto $M \times N$ nos seus fatores (M e N) são denotadas por

$$\begin{array}{rccll} \pi_1 : & M \times N & \to & M & \\ & (p,q) & \mapsto & \pi_1(p,q) & = p \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccll} \pi_2 : & M \times N & \to & M & \\ & (p,q) & \mapsto & \pi_2(p,q) & = q \end{array}$$

são, ambas, aplicações suaves.

2.2 ESPAÇO TANGENTE

Primeiramente, façamos uma breve discussão introdutória acerca das funções C^∞ definidas em um ponto $p \in M$, no qual M é alguma variedade m-dimensional.

Suponha M uma variedade m-dimensional. Fixe um ponto $p \in M$ e seja f uma função C^∞ definida em uma vizinhança de p. Denotaremos por C_p^∞ o conjunto de todas as funções C^∞ que passam por p. De fato, o domínio de duas funções diferentes pertencentes a C_p^∞ pode ser diferente, mas as operações básicas de adição e multiplicação no conjunto C_p^∞ continua bem definido, isto é, se $f, g \in C_p^\infty$ com domínios U e V, respectivamente. Então basta tomar $U \cap V$ que esta restrição também é uma vizinhança de p. Logo, $f+g \in C_p^\infty$ e $fg \in C_p^\infty$.

Definamos agora uma relação $\sim$ em C_p^∞. Suponha $f, g \in C_p^\infty$. Então

$$f \sim g \Leftrightarrow \exists H \subset M; p \in H \text{ e } f|_H = g|_H.$$

É direto que $\sim$ é uma relação de equivalência em C_p^∞. Sendo assim, denotaremos a classe de equivalência de $f \in C_p^\infty$ por $[f]$ denominada C^∞-germe em $p \in M$. Definamos também

$$\mathcal{F}_p = C_p^\infty / \sim = \left\{[f]\,;\, f \in C_p^\infty\right\}$$

munido de uma adição e multiplicação por escalar. Isto é, dado $[f], [g] \in \mathcal{F}_p$ e $a \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{cases} [f] + [g] = [f+g]\,; \\ \quad a[f] = [af]\,. \end{cases}$$

É fato que $\mathcal{F}_p$, assim definido, é um espaço linear sobre $\mathbb{R}$.

Suponhamos agora que γ seja uma curva parametrizada em M que passa por $p \in M$. Então existe um número positivo δ tal que $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$ é uma aplicação C^∞ com $\gamma(0) = p$. Denotaremos o conjunto de todas essas curvas parametrizadas por Γ_p.

Para $\gamma \in \Gamma_p$ e $[f] \in \mathcal{F}_p$, seja

$$\langle\langle \gamma, [f] \rangle\rangle = \left. \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \right|_{t=0}, -\delta < t < \delta.$$

Notemos que para uma curva γ fixada e dada uma $f \in [f]$ qualquer, temos à direita

$$\left. \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \right|_{t=0} = \left\langle \nabla f|_{\gamma(0)}, \left. \frac{d\gamma}{dt} \right|_{t=0} \right\rangle.$$

Como, neste caso, $\left. \frac{d\gamma}{dt} \right|_{t=0}$ é um valor constante, então o valor de $\left. \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \right|_{t=0}$ é determinado por $[f]$ uma vez que para qualquer outra função escolhida em $[f]$ terá as mesmas derivadas parciais pela definição da classe de equivalência construída. Também é notório que o nosso operador $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$ é linear na segunda variável, isto é, $\forall \gamma \in \Gamma_p$, $[f], [g] \in \mathcal{F}_p$ e $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\langle\langle \gamma, [f] + a[g] \rangle\rangle &= \langle\langle \gamma, [f] + [ag] \rangle\rangle = \langle\langle \gamma, [f + ag] \rangle\rangle = \left. \frac{d((f + ag) \circ \gamma)}{dt} \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{d(f \circ \gamma + (ag) \circ \gamma)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \right|_{t=0} + \left. \frac{d((ag) \circ \gamma)}{dt} \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \right|_{t=0} + a \left. \frac{d(g \circ \gamma)}{dt} \right|_{t=0} = \langle\langle \gamma, [f] \rangle\rangle + a \langle\langle \gamma, [g] \rangle\rangle .
\end{aligned}$$

Por fim, definamos

$$\mathcal{H}_p = \left\{ [f] \in \mathcal{F}_p; \langle\langle \gamma, [f] \rangle\rangle = 0, \forall \gamma \in \Gamma_p \right\}.$$

Assim definido $\mathcal{H}_p$ é um subespaço linear de $\mathcal{F}_p$.

Teorema 2.1. *Suponha $[f] \in \mathcal{F}_p$. Para uma carta coordenada admissível (U, x_U), seja*

$$F(x_1, \ldots, x_m) = f \circ x_U^{-1}(x_1, \ldots, x_m).$$

Então

$$[f] \in \mathcal{H}_p \Leftrightarrow \left. \frac{\partial F}{\partial x_i} \right|_{x_U(p)} = 0, 1 \leq i \leq m.$$

Demonstração. $(\Rightarrow)$

Suponha $\gamma \in \Gamma_p$, com representação das coordenadas definidas por

$$(x_U \circ \gamma(t))_i = x_i(t), -\delta < t < \delta.$$

Assim, dada $[f] \in \mathcal{H}_p$,

$$\begin{aligned}
0 &= \langle\langle \gamma, [f] \rangle\rangle = \left.\frac{d(f \circ \gamma)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d(f \circ x_U^{-1} \circ x_U \circ \gamma)}{dt}\right|_{t=0} \\
&= \left\langle \nabla (f \circ x_U^{-1})\big|_{x_U(p)}, \left.\frac{d(x_U \circ \gamma)}{dt}\right|_{t=0} \right\rangle = \left\langle \nabla F\big|_{x_U(p)}, \left.\frac{d(x_U \circ \gamma)}{dt}\right|_{t=0} \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left.\frac{\partial F}{\partial x_i}\right|_{x_U(p)} \left.\frac{d(x_U \circ \gamma)_i}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{i=1}^{m} \left.\frac{\partial F}{\partial x_i}\right|_{x_U(p)} \left.\frac{dx_i}{dt}\right|_{t=0}.
\end{aligned}$$

Como estamos tomando arbitrariamente $\gamma \in \Gamma_p$, então $\left.\frac{dx_i}{dt}\right|_{t=0}$ pode assumir qualquer valor real. Logo, $\left.\frac{\partial F}{\partial x_i}\right|_{x_U(p)} = 0, 1 \leq i \leq m$.

($\Leftarrow$)

A volta é imediata. □

Observação 2.4. Em suma, o teorema acima nos diz que o subespaço $\mathcal{H}_p$ é exatamente o espaço linear dos germes das funções suaves cujas derivadas parciais com respeito as coordenadas locais são todas iguais a zero em p.

Definição 2.8. O espaço quociente $\mathcal{F}_p/\mathcal{H}_p$ é chamado espaço cotangente de M em p, denotado por T_p^*(ou $T_p^*(M)$). Denotaremos a classe $\mathcal{H}_p$-equivalente da função germe $[f]$ por $\widetilde{[f]}$(ou $(df)_p$) a qual é chamada de vetor cotangente de M em p.

Observação 2.5. T_p^* é um espaço linear, isto é, tem uma estrutura linear induzida do espaço linear $\mathcal{F}_p$. Assim, dadas $[f], [g] \in \mathcal{F}_p$ e $a \in \mathbb{R}$, temos

$$\widetilde{[f]} + a\widetilde{[g]} = [f] + a\,[g] = [f + ag] = ([f \widetilde{+} ag]) = ([f] \widetilde{+} [ag]) = ([f] \widetilde{+} a\,[g]).$$

Teorema 2.2. *Suponha $f_1, \dots, f_s \in C_p^\infty$ e $F(y_1, \dots, y_s)$ uma função suave em uma vizinhança de $(f_1(p), \dots, f_s(p)) \in \mathbb{R}^s$. Então $f = F(f_1, \dots, f_s)$ pertence a C_p^∞ e*

$$(df)_p = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial f_i}(f_1(p), \dots, f_s(p))(df_i)_p.$$

Demonstração. Suponha que o domínio de f_i contendo p seja U_i. Então f está definida em $\bigcap_{i=1} U_i$ e para tpdo $q \in \bigcap_{i=1} U_i$,

$$f(q) = F(f_1(q), \dots, f_s(q)).$$

Por hipótese, F é uma função suave em uma vizinhança de $(f_1(p), \dots, f_s(p)) \in \mathbb{R}^s$, portanto $f = F(f_1, \dots, f_s) \in C_p^\infty$.

Definamos $a_i = \dfrac{\partial F}{\partial f_i}(f_1(p), \ldots, f_s(p))$. Então, para qualquer $\gamma \in \Gamma_p$,

$$\begin{aligned}
\langle\langle \gamma, [f] \rangle\rangle &= \left.\frac{d(f \circ \gamma)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}F(f_1 \circ \gamma, \ldots, f_s \circ \gamma)\right|_{t=0} \\
&= \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial F}{\partial f_i}(f_1(p), \ldots, f_s(p)) \left.\frac{d(f_i \circ \gamma)}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{i=1}^{s} a_i \langle\langle \gamma, [f_i] \rangle\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{s} \langle\langle \gamma, a_i [f_i] \rangle\rangle = \left\langle\left\langle \gamma, \sum_{i=1}^{s} a_i [f_i] \right\rangle\right\rangle.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\langle\langle \gamma, [f] \rangle\rangle - \left\langle\left\langle \gamma, \sum_{i=1}^{s} a_i [f_i] \right\rangle\right\rangle = 0 \Rightarrow \left\langle\left\langle \gamma, [f] - \sum_{i=1}^{s} a_i [f_i] \right\rangle\right\rangle = 0.$$

Logo,

$$[f] - \sum_{i=1}^{s} a_i [f_i] \in \mathcal{H}_p \Rightarrow [f] - \sum_{i=1}^{s} a_i [f_i] = 0 \Rightarrow [f] = \sum_{i=1}^{s} a_i [f_i].$$

Portanto, pela observação 2.5, $(df)_p = \sum_{i=1}^{s} a_i (df_i)_p$. $\square$

Corolário 2.1. *Para qualquer $f, g \in C_p^\infty$ e $a \in \mathbb{R}$, temos*

a) $(d(f + g))_p = (df)_p + (dg)_p$;

b) $(d(af))_p = a(df)_p$;

c) $(d(fg))_p = f(p)(dg)_p + g(p)(df)_p$.

Corolário 2.2. $\dim T_p^* = m$.

Demonstração. Tome uma carta coordenada admissível (U, x_U) e defina as coordenadas locais u_i por

$$u_i(q) = (x_U(q))_i = x_i \circ x_U(q), q \in U,$$

no qual x_i é um dado sistema de coordenadas de $\mathbb{R}^m$. Então $u_i \in C_p^\infty$ e $(du_i)_p \in T_p^*$.

Afirmação: $\mathcal{B}^* = \{(du_i)_p; 1 \leq i \leq m\}$ **é uma base para** T_p^*.

Suponha $(df)_p \in T_p^*$. Então $f \circ x_U^{-1}$ é uma função suave definida em um aberto de $\mathbb{R}^m$. Seja $F(x_1, \ldots, x_m) = f \circ x_U^{-1}(x_1, \ldots, x_m)$. Logo

$$\begin{aligned}
f(q) &= f \circ x_U^{-1} \circ x_U(q) \\
&= f \circ x_U^{-1}(x_1 \circ x_U(q), \ldots, x_m \circ x_U(q)) \\
&= f \circ x_U^{-1}(u_1(q), \ldots, u_m(q)) \\
&= F(u_1(q), \ldots, u_m(q)).
\end{aligned}$$

Pelo teorema 2.2 $(df)_p = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial u_i}(u_1(p), \dots, u_m(p))(du_i)_p = \sum_{i=1}^{m} \left.\frac{\partial f}{\partial u_i}\right|_p (du_i)_p$, isto é, $(df)_p$ é uma combinação linear de $(du_i)_p$.

Suponha agora que exista $a_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, tal que $\sum_{i=1}^{m} a_i (du_i)_p = 0$, isto é,

$\sum_{i=1}^{m} a_i \left[u_i\right] \in \mathcal{H}_p$.

. Então, por definição, para qualquer $\gamma \in \Gamma_p$ teremos

$$\left\langle\left\langle \gamma, \sum_{i=1}^{m} a_i \left[u_i\right] \right\rangle\right\rangle = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_i \left.\frac{d(u_i \circ \gamma)}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

Em particular, tomemos $\lambda_k \in \Gamma_p$, $1 \leq k \leq m$ tal que $u_i \circ \lambda_k(t) = u_i(p) + \delta_{ik} t$ e

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, i = k, \\ 0, i \neq k. \end{cases}$$

Desta forma

$$\left.\frac{d(u_i \circ \lambda_k)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d(u_i(p) + \delta_{ik} t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d(u_i(p))}{dt}\right|_{t=0} + \left.\frac{d(\delta_{ik} t)}{dt}\right|_{t=0} = \delta_{ik}.$$

Neste caso, temos

$$\begin{aligned} \left\langle\left\langle \lambda_k, \sum_{i=1}^{m} a_i \left[u_i\right] \right\rangle\right\rangle = 0 \Rightarrow 0 &= \sum_{i=1}^{m} a_i \left.\frac{d(u_i \circ \lambda_k)}{dt}\right|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_i \left.\frac{d(u_i(p) + \delta_{ik} t)}{dt}\right|_{t=0} = a_k. \end{aligned}$$

Logo, $a_k = 0, 1 \leq k \leq m$. Então, $\mathcal{B}^*$ é linearmente independente, concluindo assim que é uma base para T_p^*.

Portanto, T_p^* é um espaço linear m-dimensional. □

Observação 2.6. Notemos que

a) $\mathcal{B}^*$ definida acima é chamada base natural de T_p^* com respeito ao sistema de coordenadas locais u_i.

b) Por definição, $[f], [g] \in \mathcal{H}_p \Leftrightarrow \langle\langle \gamma, [f] \rangle\rangle = \langle\langle \gamma, [g] \rangle\rangle, \forall \gamma \in \Gamma_p$. Então podemos escrever

$$\langle\langle \gamma, (df)_p \rangle\rangle = \langle\langle \gamma, [f] \rangle\rangle, \forall \gamma \in \Gamma_p, (df)_p \in T_p^*.$$

Definiremos uma relação de equivalência $\sim$ em Γ_p como segue.

Suponha $\gamma, \gamma' \in \Gamma_p$. Então $\gamma \sim \gamma'$ se, e somente se, para qualquer $(df)_p \in T_p^*$,

$\langle\langle \gamma, (df)_p \rangle\rangle = \langle\langle \gamma', (df)_p \rangle\rangle$.

Denotaremos a casse de equivalência de γ por $[\gamma]$. Então definiremos

$$\langle\langle[\gamma]\,,(df)_p\rangle\rangle^* = \langle\langle\gamma,(df)_p\rangle\rangle\,.$$

Proposição 2.1. *As classes de equivalência* $[\gamma]\,,\gamma\in\Gamma_p$ *definem o dual de* T_p^*.

Demonstração. Suponhamos um sistema de coordenadas locais u_i. Suponhamos $\gamma\in\Gamma_p$ tal que esta seja descrita em $\mathbb{R}^m$ por

$$x_U\circ\gamma(t) = (u_1(t),\ldots,u_m(t)).$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}\langle\langle[\gamma]\,,(df)_p\rangle\rangle^* &= \langle\langle\gamma,(df)_p\rangle\rangle = \langle\langle\gamma,[f]\rangle\rangle = \left.\frac{d(f\circ\gamma)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d((f\circ x_U^{-1})\circ(x_U\circ\gamma))}{dt}\right|_{t=0}\\ &= \left\langle \nabla(f\circ x_U^{-1})\big|_{x_U(p)}\,,\left.\frac{d(x_U\circ\gamma)}{dt}\right|_{t=0}\right\rangle = \sum_{i=1}^m \left.\frac{\partial(f\circ x_U^{-1})}{\partial u_i}\right|_{x_U(p)}\left.\frac{d(x_U\circ\gamma)_i}{dt}\right|_{t=0}\\ &= \sum_{i=1}^m \left.\frac{\partial(f\circ x_U^{-1})}{\partial u_i}\right|_{x_U(p)}\left.\frac{du_i}{dt}\right|_{t=0}.\end{aligned}$$

Definindo $a_i = \left.\dfrac{\partial(f\circ x_U^{-1})}{\partial u_i}\right|_{x_U(p)}$ e $\xi_i = \left.\dfrac{du_i}{dt}\right|_{t=0}$, concluímos

$$\langle\langle[\gamma]\,,(df)_p\rangle\rangle^* = \sum_{i=1}^m a_i\xi_i.$$

Isto é, a_i são as componentes do vetor cotangente $(df)_p$ e $\langle\langle[\gamma]\,,(df)_p\rangle\rangle^*$ é determinada pelas componentes ξ_i. Além disso, $\langle\langle[\gamma]\,,\cdot\rangle\rangle^*$ é um funcional linear em T_p^*.

Notemos que, tomando γ tal que

$$u_i(t) = (x_U(p))_i + t\xi_i$$

com ξ_i arbitrário estaremos descrevendo qualquer curva pertencente a Γ_p. Desta forma $\langle\langle[\gamma]\,,\cdot\rangle\rangle^*$ representa qualquer funcional linear em T_p^* e, por definição, o conjunto de todas as classes $[\gamma]$ define o espaço dual de T_p^*. □

Observação 2.7. Os itens a seguir são importantes uma vez que nos dão um melhor vislumbre do significado da proposição 2.1.

a) Definiremos T_p como o espaço dual de T_p^* e chamaremos de espaço tangente de M em p. Os elementos nesse espaço serão ditos vetores tangentes.

b) O significado geométrico dos vetores tangentes é bem simples. Se $\gamma,\gamma'\in\Gamma_p$, de modo que

$$\begin{cases} x_U\circ\gamma(t) = (u_1(t),\ldots,u_m(t))\\ x_U\circ\gamma'(t) = (u_1'(t),\ldots,u_m'(t)).\end{cases}$$

Então,

$$
\begin{aligned}
[\gamma] = \left[\gamma'\right] \quad &\Rightarrow \quad \langle\langle[\gamma]\,,(df)_p\rangle\rangle^* = \left\langle\left\langle\left[\gamma'\right]\,,(df)_p\right\rangle\right\rangle^* \\
&\Rightarrow \quad a_i\,\frac{du_i}{dt}\bigg|_{t=0} = a_i\,\frac{du_i'}{dt}\bigg|_{t=0}\,,\ 1 \le i \le m.
\end{aligned}
$$

Isto é, uma condição necessária e suficiente para $[\gamma] = \left[\gamma'\right]$ é $\frac{du_i}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{du_i'}{dt}\Big|_{t=0}$. Ou seja, a equivalência definida significa que as curvas parametrizadas γ e γ' tem o mesmo vetor tangente em p.

c) Identificaremos o vetor tangente X de M em p com o conjunto de todas as curvas parametrizadas que passam por p e tem vetor tangente em comum em p.

d) O funcional $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle^*$ é bilinear.

Sejam $\gamma, \gamma' \in \Gamma_p$, tais que $[\gamma] \neq \left[\gamma'\right]$ e $a \in \mathbb{R}$. Se

$$
\begin{cases}
x_U \circ \gamma(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t)) \\
x_U \circ \gamma'(t) = (u_1'(t), \ldots, u_m'(t)).
\end{cases}
$$

e $x_U \circ (\gamma + a\gamma')(t) = x_U \circ \gamma(t) + a x_U \circ \gamma'(t)$, então

$$
\begin{aligned}
\frac{d(x_U \circ (\gamma + a\gamma'))}{dt}\bigg|_{t=0} &= \frac{d((x_U \circ \gamma) + a(x_U \circ \gamma'))}{dt}\bigg|_{t=0} \\
&= \frac{d(x_U \circ \gamma)}{dt}\bigg|_{t=0} + a\,\frac{d(x_U \circ \gamma')}{dt}\bigg|_{t=0}.
\end{aligned}
$$

Isto é, pela linearidade de $\frac{d}{dt}$, temos $\left[\gamma + a\gamma'\right] = [\gamma] + a\left[\gamma'\right]$. Assim, tomando $(df)_p \in T_p^*$, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
\left\langle\left\langle[\gamma] + a\left[\gamma'\right]\,,(df)_p\right\rangle\right\rangle^* &= \left\langle\left\langle\left[\gamma + a\gamma'\right]\,,(df)_p\right\rangle\right\rangle^* = \langle\langle\gamma + a\gamma', (df)_p\rangle\rangle \\
&= \langle\langle\gamma + a\gamma', [f]\rangle\rangle = \frac{d(f \circ (\gamma + a\gamma'))}{dt}\bigg|_{t=0} \\
&= \frac{d((f \circ \gamma) + a(f \circ \gamma'))}{dt}\bigg|_{t=0} \\
&= \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}\bigg|_{t=0} + a\,\frac{d(f \circ \gamma')}{dt}\bigg|_{t=0} \\
&= \langle\langle\gamma, [f]\rangle\rangle + a\,\langle\langle\gamma', [f]\rangle\rangle \\
&= \langle\langle[\gamma]\,,(df)_p\rangle\rangle^* + a\left\langle\left\langle\left[\gamma'\right]\,,(df)_p\right\rangle\right\rangle^*.
\end{aligned}
$$

O que prova a linearidade da primeira coordenada. A linearidade da segunda segue do que construímos até o momento.

Agora vamos supor as curvas parametrizadas $\lambda_k, 1 \leq k \leq m$, em um sistema de coordenadas u_i dadas por $u_i \circ \lambda_k(t) = u_i(p) + \delta_{ik}t$. Então,

$$\langle\langle[\lambda_k], (du_i)_p\rangle\rangle^* = \langle\langle\lambda_k, [u_i]\rangle\rangle = \left.\frac{d(u_i(p) + \delta_{ik}t)}{dt}\right|_{t=0} = \delta_{ik}.$$

Isto é, $\mathcal{B} = \{[\lambda_k]\,; 1 \leq k \leq m\}$ é a base dual de $\mathcal{B}^* = \{(du_i)_p; 1 \leq i \leq m\}$.

Um significado interessante para os vetores tangentes $[\lambda_k]$ é entendê-los como operadores diferenciais parciais $\dfrac{\partial}{\partial u_i}$ agindo sob a função germe $[f]$, isto é,

$$\begin{aligned}\langle\langle[\lambda_k], (df)_p\rangle\rangle^* &= \left\langle\left\langle[\lambda_k], \sum_{i=1}^{m} \left.\frac{\partial f}{\partial u_i}\right|_p (du_i)_p\right\rangle\right\rangle^* = \sum_{i=1}^{m} \left.\frac{\partial f}{\partial u_i}\right|_p \langle\langle[\lambda_k], (du_i)_p\rangle\rangle^* \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left.\frac{\partial f}{\partial u_i}\right|_p \delta_{ik} = \left.\frac{\partial f}{\partial u_k}\right|_p,\end{aligned}$$

no qual $\left.\dfrac{\partial f}{\partial u_k}\right|_p$ significa $\left.\dfrac{\partial(f \circ x_U^{-1})}{\partial u_i}\right|_{x_U(p)}$. Assim, $\langle\langle[\lambda_k], (du_i)_p\rangle\rangle^* = \delta_{ik}$ pode ser identificado como

$$\left\langle\left\langle \left.\frac{\partial}{\partial u_k}\right|_p, (du_i)_p\right\rangle\right\rangle^* = \delta_{ik}.$$

Observação 2.8. Da discussão acima.

a) Chamaremos a base dual de $\mathcal{B}^*$ em T_p de base natural do espaço tangente sob o sistema de coordenadas locais (u_i).

   De fato, vimos que

$$\langle\langle[\gamma], (df)_p\rangle\rangle^* = \sum_{i=1}^{m} \left.\frac{\partial f}{\partial u_i}\right|_p \left.\frac{du_i}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \left.\frac{\partial f}{\partial u_i}\right|_p \Rightarrow [\gamma] = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_p.$$

   Logo, ξ_i's são as componentes do vetor tangente $[\gamma]$ com respeito a base natural do espaço tangente T_p;

b) Se $[\gamma'] \in T_p$ tem componentes ξ_i', então $[\gamma] + [\gamma']$ são determinados pelas componentes $\xi_i + \xi_i'$;

c) Similarmente, o vetor tangente $a[\gamma]$, $a \in \mathbb{R}$, tem como componentes $a\xi_i$.

A partir deste ponto estaremos omitindo o índice p dos elementos vetoriais para fins de melhor organização da escrita, usando-o apenas quando houve possibilidade de confusão.

Definição 2.9. Suponha $X \in T_p, f \in C_p^\infty$. Denotaremos

$$Xf = \langle\langle X, (df)_p\rangle\rangle^*$$

no qual Xf é dita derivada direcional da função f na direção do vetor X.

Proposição 2.2. *Suponha $X \in T_p, f, g \in C_p^\infty, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. então*

a) $X(\alpha f + \beta g) = \alpha Xf + \beta Xg$;

b) $X(fg) = f(p)Xg + g(p)Xf$.

Observação 2.9. É interessante perceber os seguintes pontos:

a) Sob as coordenadas locais (u_i), um vetor tangente $X = [\gamma] \in T_p$ e um vetor cotangente $a = df \in T_p^*$ tem representações lineares em termos das bases naturais

$$X = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \frac{\partial}{\partial u_i} \text{ e } a = \sum_{i=1}^{m} a_i du_i,$$

no qual $\xi_i = \dfrac{d(u_i \circ \gamma)}{dt}$ e $a_i = \dfrac{\partial f}{\partial u_i}$.

b) Sob outro sistema de coordenadas locais (u_i'), se as componentes de X e a com respeito a base natural correspondente são ξ_i' e a_i', respectivamente, então eles satisfazem as seguintes regras de transformação:

(i) $\xi_j' = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \xi_i \frac{\partial u_j'}{\partial u_i}$;

(ii) $a_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_j' \frac{\partial u_j'}{\partial u_i}$.

No qual $\dfrac{\partial u_j'}{\partial u_i} = \dfrac{\partial (x_U' \circ x_U^{-1})_j}{\partial u_i}$ é a matriz jacobiano da mudança de coordenadas $x_U' \circ x_U^{-1}$. Os vetores satisfazendo (i) são chamados de contravariantes e os que satisfazem (ii) são chamados covariantes.

Aplicações suaves entre variedades suaves induzem aplicações lineares entre espaços tangentes e entre espaços cotangentes.

Suponha $F : M \to N$ uma aplicação suave, $p \in M$ e $F(p) = q \in N$. Definiremos o seguinte operador

$$\begin{array}{rccl} F^* : & T_q^* & \to & T_p^* \\ & df & \mapsto & F^*(df) := d(f \circ F). \end{array}$$

Esta é uma aplicação linear a qual chamaremos de diferencial da aplicação F. Considere então a aplicação adjunta de F^* definida por

$$\begin{array}{rccl} F_* : & T_p & \to & T_q \\ & X & \mapsto & F_*X \quad \text{tal que } \langle\langle F_*X, a\rangle\rangle^* = \langle\langle X, F^*a\rangle\rangle^* . \end{array}$$

Tal aplicação é chamada de aplicação tangente induzida por F.

Suponhamos que (u_i) e (v_j) sejam sistemas de coordenadas locais de vizinhanças $p \in U$ e $q \in V$, respectivamente. Notemos que

$$\langle\langle F_*X, df\rangle\rangle^* = \sum_{j=1}^{n} \nu_j \frac{\partial f}{\partial v_j} \Rightarrow F_*X = \sum_{j=1}^{n} \nu_j \frac{\partial}{\partial v_j},$$

no qual $\nu_j = \dfrac{dv_j}{dt}$. Por outro lado,

$$\langle\langle X, F^*(df)\rangle\rangle^* = \langle\langle X, d(f \circ F)\rangle\rangle^* = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \frac{\partial(f \circ F)}{\partial u_i}.$$

no qual $\xi_i = \dfrac{du_i}{dt}$. Desta igualdade notemos que substituindo f por $v_j = x_j \circ x_V$ temos

$$\langle\langle X, F^*(dv_j)\rangle\rangle^* = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \frac{\partial(v_j \circ F)}{\partial u_i} = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \frac{\partial F_j}{\partial u_i} \Rightarrow F^*(dv_j) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_j}{\partial u_i} du_i.$$

Isto é, a ação de F^* na base natural $\{dv_j; 1 \leq j \leq n\}$. A matriz representação de F^* nas bases naturais $\{dv_j\}$ e $\{du_i\}$ é exatamente a matriz jacobiano $\left(\dfrac{\partial F_j}{\partial u_i}\right)_p$.

Podemos escrever ainda

$$\frac{\partial(f \circ F)}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial v_j} \frac{\partial(v_j \circ F)}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial u_i} \frac{\partial f}{\partial v_j}.$$

Assim, obtemos

$$\langle\langle F_*X, df\rangle\rangle^* = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial u_i} \frac{\partial f}{\partial v_j} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \xi_i \frac{\partial F_j}{\partial u_i} \right) \frac{\partial f}{\partial v_j}.$$

Logo, $F_*X = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \xi_i \frac{\partial F_j}{\partial u_i} \right) \frac{\partial}{\partial v_j}$ e $\nu_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \xi_i \frac{\partial F_j}{\partial u_i}$. Então

$$F_* \left(\frac{\partial}{\partial u_i} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F_j}{\partial u_i} \right) \frac{\partial}{\partial v_j}$$

é a ação de F_* na base natural $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial u_i} \right\}$. Isto é, a matriz representação da aplicação tangente F_*

sob as bases naturais $\left\{\frac{\partial}{\partial u_i}\right\}$ e $\left\{\frac{\partial}{\partial v_j}\right\}$ ainda é a matriz jacobiano $\left(\frac{\partial F_j}{\partial u_i}\right)_p$.

2.3 ORIENTAÇÃO

Definição 2.10. Uma variedade diferenciável M é orientável se admite uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}_\alpha$ tal que

(i) Para todo par α, β, com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, a diferencial da mudança de coordenadas $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ tem determinante positivo.

Caso contrário, a variedade M é não-orientável. Se M é orientável, a escolha de uma estrutura diferenciável satisfazendo a condição (i) é uma orientação para M. Duas estruturas diferenciáveis satisfazendo a condição (i) determinam a mesma orientação se a união delas ainda satisfaz a condição (i).

Definição 2.11. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M^n$ de um intervalo aberto $(-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R}$ sobre uma variedade diferenciável M, é uma curva diferenciável em M. Suponha que $\alpha(0) = p \in M$, e seja $C^\infty(M)$ o conjunto das funções diferenciáveis em M. O vetor tangente *à* curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha'(0)f = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\bigg|_{t=0}.$$

Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes a M em p com as operações usuais de funções é um espaço vetorial n-dimensional denotado por T_pM.

Escolhendo uma parametrização $\boldsymbol{x} : U \to M^n$ em $p = \boldsymbol{x}(0)$ as representantes locais da função $f \in C^\infty(M)$ e da curva α nesta parametrização são, respectivamente,

$$\widetilde{f}(q) = f \circ \boldsymbol{x}(q), \quad q = (x_1, \dots, x_n) \in U \quad \text{e} \quad \widetilde{\alpha}(t) = \boldsymbol{x}^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

Restringindo f a α e notando que $f \circ \alpha = \tilde{f} \circ \tilde{\alpha} : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\alpha'(0)f &= \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\bigg|_{t=0} = \frac{d(\tilde{f} \circ \tilde{\alpha})}{dt}\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}\widetilde{f}(x_1(t), \dots, x_n(t))\bigg|_{t=0} \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i'(0)\left(\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_i}\right)_0 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i'(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0\right)(\widetilde{f}).
\end{aligned}$$

Logo, a expressão local de $\alpha'(0)$ em termos da parametrização $\boldsymbol{x}$ é:

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0.$$

Note que $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)_0 \in T_pM$, pois é o vetor tangente em p à curva coordenada $x_i \mapsto \boldsymbol{x}(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0)$. O fato de $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ ser linearmente independente juntamente com a expressão local de $\alpha'(0)$, prova que o conjunto $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ forma uma base coordenada para T_pM. O espaço vetorial T_pM é o espaço tangente de M em p.

Proposição 2.3. *Seja $\varphi : M^m \to N^n$ uma aplicação diferenciável entre as variedades diferenciáveis M e N. Para cada $p \in M$ e cada $v \in T_pM$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ tal que $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. Faça $\beta = \varphi \circ \alpha$. A aplicação $d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ dada por $d\varphi_p(v) = (\varphi \circ \alpha)'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α. Esta aplicação é a diferencial de φ em p.*

Demonstração. Sejam $\boldsymbol{x} : U \to M$ e $\boldsymbol{y} : V \to N$ parametrizações em p e $\varphi(p)$, respectivamente. A expressão local de φ é dada por

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}(q) &= \boldsymbol{y}^{-1} \circ \varphi \circ \boldsymbol{x}(q) = (y_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n(x_1, \dots, x_m)) \\ q &= (x_1, \dots, x_m) \in U \quad \text{e} \quad (y_1, \dots, y_n) \in V. \end{aligned}$$

Por outro lado, a expressão local de α é dada por

$$\widetilde{\alpha}(t) = \boldsymbol{x}^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t)).$$

Portanto,

$$\boldsymbol{y}^{-1} \circ \beta(t) = \widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\alpha}(t) = (y_1(x_1(t), \dots, x_m(t)), \dots, y_n(x_1(t), \dots, x_m(t))).$$

Assim a expressão de $\beta'(0)$ na base $\left\{\dfrac{\partial}{\partial y_i}\right\}$ de $T_{\varphi(p)}N$ é dada por

$$\beta'(0) = \Big(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial y_1}{\partial x_i}\Big|_q x_i'(0), \dots, \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial y_n}{\partial x_i}\Big|_q x_i'(0)\Big), \quad q = \boldsymbol{x}^{-1}(p).$$

Isto mostra que $\beta'(0)$ não depende da escolha de α. Além disso, podemos escrever

$$d\varphi_p(v) = \beta'(0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}\Big|_q & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}\Big|_q & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_m}\Big|_q \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}\Big|_q & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2}\Big|_q & \cdots & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_m}\Big|_q \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1}\Big|_q & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_2}\Big|_q & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_m}\Big|_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'(0) \\ x_2'(0) \\ \vdots \\ x_m'(0) \end{pmatrix}.$$

$\square$

Portanto, $d\varphi_p$ é uma aplicação linear de T_pM em $T_{\varphi(p)}N$ cuja matriz nas bases associadas às parametrizações $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ é precisamente a matriz $\left(\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{n\times m}$, com $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$.

Definição 2.12. O semi-espaço $\mathbb{H}^n$ é o conjunto dado por

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n \geq 0\}.$$

Um subconjunto aberto V no semi-espaço $\mathbb{H}^n$ tem a forma $V = U \cap \mathbb{H}^n$, onde U é aberto em $\mathbb{R}^n$.

Diremos que uma função $f : V \to \mathbb{R}$, definida em um aberto V de $\mathbb{H}^n$ é diferenciável se existir uma função diferenciável $\bar{f} : U \to \mathbb{R}$ de um aberto $U \supset V$ de $\mathbb{R}^n$, tal que a restrição de $\bar{f}$ a V seja igual a f. Se f é diferenciável em V a diferencial df_p é definida por $df_p = d\bar{f}_p$.

Uma definição que generaliza a Definição 2.4 é a de variedade com bordo. Sua definição é praticamente a mesma das variedades sem bordo com a diferença que as parametrizações têm como domínios conjuntos abertos em semi-espaços do espaço Euclidiano.

Definição 2.13. Uma variedade diferenciável de dimensão n com bordo é um conjunto M com uma família de aplicações injetivas $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{H}^n \to M$ de abertos U_α de $\mathbb{H}^n$ em M, tais que

(i) $\displaystyle\bigcup_\alpha \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = M$;

(ii) Para todo par α, β, com $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W)$ e $\mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{H}^n$ e as aplicações $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$ e $\mathbf{x}_\alpha^{-1} \circ \mathbf{x}_\beta$ são diferenciáveis.

Definição 2.14. Um ponto $p \in M$ é dito ponto de bordo de M se para um sistema de coordenadas $\mathbf{x} : U \to M$ em torno de p se tem $\mathbf{x}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = p$. O conjunto dos pontos de bordo de M, é chamado o bordo de M e indicado por ∂M.

Além disso, é possível provar que a definição de ponto de bordo independe do sistema de coordenadas e que o bordo de uma variedade diferenciável de dimensão n com $\partial M \neq \emptyset$ é uma variedade diferenciável (sem bordo) de dimensão $n - 1$.

As definições de diferenciabilidade de funções, plano tangente, orientabilidade, etc., para variedades com bordo são introduzidas de maneira inteiramente análoga às correspondentes definições para variedades diferenciáveis (sem bordo).

2.4 TEOREMA DE FROBENIUS

Uma vez que o conceito de vetor tangente $X_p \in T_p^*$ para qualquer ponto $p \in M$ foi bem definido e discutido na seção 2.2, podemos interpretá-lo como uma função de valores reais $X_p : C_p^\infty \to \mathbb{R}$ na qual C_p^∞ é o conjunto das funções suaves em p.

Definição 2.15. Se para um ponto arbitrário $p \in M$ e um vetor tangente X_p em M é arbitrário em p, então X é dito um campo vetorial tangente em M. Para $f \in C^{\infty}(M)$, seja

$$(Xf)(p) = X_p f.$$

Desta forma, Xf é uma função de valores reais em M.

Definição 2.16. Suponha X um campo vetorial tangente em uma variedade suave M tal que para qualquer $f \in C^{\infty}(M)$ temos $Xf \in C^{\infty}(M)$. Então X é dito um campo vetorial tangente suave em M.

Observação 2.10. Vimos que um campo vetorial suave X é um operador de $C^{\infty}(M)$ nele mesmo. Aplicando a proposição 2.2, obtemos as seguintes operações de X. Suponha $f, g \in C^{\infty}(M)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então

a) $X(\alpha f + \beta g) = \alpha(Xf) + \beta(Xf)$;

b) X(fg) = f(Xg) + g(Xf).

Será útil termos em mente próximo lema.

Lema 2.1. *Seja (U, x_U) uma carta coordenada em uma variedade suave M e $V \subset U$ tal que $V \neq \emptyset$ e $\overline{V} \subset U$ é compacto. Então existe uma função suave $h : M \to \mathbb{R}$ tal que*

a) $0 \leq h(p) \leq 1, \forall p \in M$ *;*

b) $h(p) = \begin{cases} 1, p \in V; \\ 0, p \notin U. \end{cases}$

Demonstração. Sejam M uma variedade suave, $U \subset M$ um conjunto aberto e definamos uma carta coordenada (U, x_U).

Tomemos agora os conjuntos abertos $V, W \subset U$ tal que $\overline{V} \subset W$ e $\overline{W} \in U$ são compactos.

Notemos que como x_U é um difeomorfismo, então $x_U(V), x_U(W), x_U(U) \in \mathbb{R}^m$ são conjuntos aberto, $\overline{x_U(V)} = x_U\left(\overline{V}\right) \in x_U(W)$ e $\overline{x_U(W)} = x_U\left(\overline{W}\right) \in x_U(U)$ são compactos.

Definiremos então a função suave $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ tal que $0 \leq f(q) \leq 1, \forall q \in \mathbb{R}^m$ e

$$f(q) = \begin{cases} 1, q \in x_U(V); \\ 0, q \notin x_U(W). \end{cases}$$

Como x_U é um difeomorfismo e f é suave, então $f \circ x_U$ é uma função suave. Então definiremos h da seguinte forma

$$\begin{array}{rccl} h: & M & \to & \mathbb{R} \\ & p & \mapsto & h(p) = \begin{cases} f \circ x_U(p) & , p \in U; \\ 0 & , p \notin U. \end{cases} \end{array}$$

Como $f(q) = 0$ se $q \notin x_U(W)$, então $f \circ x_U(p) = 0$ se $p \in U - W$. Logo, h estende suavemente $f \circ x_U$ para toda a variedade M uma vez que $h(p) = 0$ se $p \notin U$. Isto é, h é uma função suave tal que $0 \leq h(p) \leq 1, \forall p \in M$ e

$$h(p) = \begin{cases} 1, p \in V; \\ 0, p \notin U. \end{cases}$$

Portanto, h é a função suave que queríamos encontrar. $\square$

O comportamento local de um campo vetorial tangente é dado pelo seguinte resultado.

Proposição 2.4. *Suponha X um campo vetorial tangente suave em uma variedade M. Então para qualquer subconjunto aberto $U \subset M$, a restrição de X em U, $X|_U$, é um campo vetorial tangente suave no aberto U.*

Demonstração. Para demonstrarmos a suavidade de $X|_U$ é suficiente mostrar que para qualquer $f \in C^\infty(M)$, $X|_U f$ é também uma função suave em U. Tome qualquer ponto $p \in U$. Então existe uma vizinhança coordenada V de p tal que $\overline{V} \subset U$ é compacto. Assim, usando o resultado do lema 2.1, existe uma função suave $g \in C^\infty(M)$ tal que $g|_V = 1$ e $g|_{M-U} = 0$.

Seja

$$\tilde{f}(q) = \begin{cases} f(q)g(q), q \in U; \\ 0, q \notin U. \end{cases}$$

Então $\tilde{f} \in C^\infty(M)$ e $\tilde{f}\Big|_V = f|_V$. Assim,

$$\left(X|_U f\right)(q) = X_q f = \left(X|_U \tilde{f}\right)(q), \forall q \in V.$$

Como X é um campo vetorial tangente suave em M, $X|_U \tilde{f} \in C^\infty(M)$. Logo, $X|_U f$ é uma função suave em qualquer ponto $p \in U$. Portanto, $X|_U$ é um campo vetorial tangente suave no aberto U. $\square$

Teorema 2.3. *Uma condição necessária e suficiente para um campo vetorial tangente X em uma variedade suave M ser um campo vetorial tangente suave é que, para qualquer $p \in M$, exista um sistema de coordenadas local $(U; u_i)$ tal que a restrição de X em U seja expressa por*

$$X|_U = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \frac{\partial}{\partial u_i},$$

no qual $\xi_i, 1 \leq i \leq m$, são funções suaves em U.

Demonstração. Primeiramente, mostremos que, de fato, é uma condição suficiente. Seja M uma variedade suave. Tomemos X um campo vetorial tangente de M tal que, $\forall p \in M$,

$$X|_{U_p} = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \frac{\partial}{\partial u_i},$$

no qual U_p é uma vizinhança coordenada de p e $\xi_i \in C^\infty(U_p)$. Assim, dada $f \in C^\infty(M)$, temos localmente

$$(Xf)\big|_{U_p} = X\big|_{U_p} f = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \frac{\partial f}{\partial u_i},$$

isto é, $(Xf)\big|_{U_p}$ é expressa por uma soma finita de $\xi_i \in C^\infty(U_p)$. O que implica que para cada $p \in M$, $(Xf)\big|_{U_p} \in C^\infty(U_p)$. Portanto, $Xf \in \bigcup_{p\in M} C^\infty(U_p) = C^\infty\left(\bigcup_{p\in M} U_p\right) = C^\infty(M)$.

Para demonstrarmos que é uma condição necessária basta notarmos que se X é um campo vetorial tangente de M, $X\big|_U$ é um campo vetorial tangente suave em $U \in M$. O campo vetorial tangente pode ser expresso localmente por

$$X\big|_U = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \frac{\partial}{\partial u_i},$$

sob a base natural $\left\{\frac{\partial}{\partial u_i}\right\}$. Como as coordenadas u_i são funções suaves em U, por definição de campo vetorial tangente suave, $(xu_i) = X\big|_U u_i$ são funções suaves em u_i. Ou seja

$$X\big|_U u_i = \sum_{j=1}^{m} \xi_j \frac{\partial u_i}{\partial u_j} = \xi_i,$$

são funções suaves em U. $\square$

Definição 2.17. Suponha X e Y dois campos vetoriais tangentes suaves em M. O produto colchete de Poisson é definido por

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Logo, $[X, Y]$ é um operador em $C^\infty(M)$, e para qualquer $f \in C^\infty(M)$ temos

$$[X, Y]\, f = X(Yf) - Y(Xf).$$

Observação 2.11. Para qualquer $f, g \in C^\infty(M)$, temos

$$\begin{aligned} [X, Y]\,(f+g) &= X(Y(f+g)) - Y(X(f+g)) = X(Yf+Yg) - Y(Xf+Xg) \\ &= X(Yf) - Y(Xf) + X(Yg) - Y(Xg) = [X, Y]\,f + [X, Y]\,g. \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
[X,Y](fg) &= X(Y(fg)) - Y(X(fg)) = X(fYg + gYf) - Y(fXg + gXf) \\
&= X(fYg) + X(gYf) - Y(fXg) - Y(gXf) \\
&= fX(Yg) + YgXf + gX(Yf) + YfXg - fY(Xg) - XgYf - gY(Xf) - XfYg \\
&= fX(Yg) - fY(Xg) + gX(Yf) - gY(Xf) \\
&= f(X(Yg) - Y(Xg)) + g(X(Yf) - Y(Xf)) \\
&= f[X,Y]g + g[X,Y]f.
\end{aligned}
$$

Notemos também que, pela definição 2.16, como X e Y são campos vetoriais tangentes suaves de M e $f \in C^{\infty}(M)$, então $Xf, Yf \in C^{\infty}(M)$. Novamente, pela definição 2.16, $Y(Xf), X(Yf) \in C^{\infty}(M)$. Logo, da definição 2.17, como $[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$, então $[X,Y]f \in C^{\infty}(M)$. Portanto, pela definição 2.16, $[X,Y]$ é um campo vetorial tangente suave em M.

Seguem algumas propriedades do produto colchete de Poisson.

Proposição 2.5. *Suponha que X, Y, Z sejam campos vetoriais tangentes suaves em M e $f, g \in C^{\infty}$. Então*

a) $[X,Y] = -[Y,X]$*;*

b) $[X+Y,Z] = [X,Z] + [Y,Z]$*;*

c) $[fX, gY] = (fXg)Y - (gYf)X + (fg)[X,Y]$*;*

d) $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$.*(Identidade de Jacobi)*

Demonstração. Sejam X, Y, Z campos vetoriais tangentes suaves em M e $f, g \in C^{\infty}(M)$. Tomemos $h \in C^{\infty}(M)$. Pela definição 2.17 podemos escrever

a) $[X,Y]h = X(Yh) - Y(Xh) = -(Y(Xh) - X(Yh)) = (-[Y,X])h$.

Portanto, $[X,Y] = -[Y,X]$;

b) $[X+Y,Z]h = (X+Y)(Zh) - Z((X+Y)h) = X(Zh) + Y(Zh) - Z(Xh + Yh)$
$= X(Zh) - Z(Xh) + Y(Zh) - Z(Yh) = [X,Z]h + [Y,Z]h$
$= ([X,Z] + [Y,Z])h$.

Portanto, $[X+Y,Z] = [X,Z] + [Y,Z]$;

c) $[fX, gY]h = fX(gYh) - gY(fXh) = f(gX(Yh) + YhXg) - g(fY(Xh) + XhYf)$
$= (fg)X(Yh) + fYhXg - (gf)Y(Xh) - gXhYf = (fXg)Yh - (gYf)Xh + (fg)(X(Yh) - Y(Xh))$
$= (fXg)Yh - (gYf)Xh + (fg)[X,Y]h = ((fXg)Y - (gYf)X + (fg)[X,Y])h$.

Portanto, $[fX, gY] = (fXg)Y - (gYf)X + (fg)[X,Y]$;

d) $[X,[Y,Z]]\,h = X([Y,Z]\,h) - [Y,Z]\,(Xh) = X(Y(Zh) - Z(Yh)) - Y(Z(Xh)) + Z(Y(Xh))$
$= X(Y(Zh)) - X(Z(Yh)) - Y(Z(Xh)) + Z(Y(Xh))$.

Analogamente,

$$[Y,[Z,X]]\,h = Y(Z(Xh)) - Y(X(Zh)) - Z(X(Yh)) + X(Z(Yh));$$
$$[Z,[X,Y]]\,h = Z(X(Yh)) - Z(Y(Xh)) - X(Y(Zh)) + Y(X(Zh)).$$

Logo,

$$[X,[Y,Z]]\,h + [Y,[Z,X]]\,h + [Z,[X,Y]]\,h = 0.$$

Portanto, $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$.

□

Agora, usaremos do ferramental desenvolvido até aqui e as coordenadas locais para expressar $[X,Y]$ em uma variedade suave M.

Sejam M uma variedade suave e $(U;u_i)$ um sistema de coordenadas locais em $U \subset M$. Então, podemos assumir que $X|_U = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \frac{\partial}{\partial u_i}$ e $Y|_U = \sum_{j=1}^{m} \eta_j \frac{\partial}{\partial u_j}$ no qual X e Y são campos vetoriais tangentes suaves de M. Dada uma $f \in C^\infty(M)$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
([X,Y]\,f)|_U &= [X,Y]|_U\, f = \left[X|_U\,,\, Y|_U\right] f = \left[\sum_{i=1}^{m} \xi_i \frac{\partial}{\partial u_i}, \sum_{j=1}^{m} \eta_j \frac{\partial}{\partial u_j}\right] f \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left[\xi_i \frac{\partial}{\partial u_i}, \sum_{j=1}^{m} \eta_j \frac{\partial}{\partial u_j}\right] f = \sum_{i=1}^{m} \left(-\left[\sum_{j=1}^{m} \eta_j \frac{\partial}{\partial u_j}, \xi_i \frac{\partial}{\partial u_i}\right] f\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} - \left[\eta_j \frac{\partial}{\partial u_j}, \xi_i \frac{\partial}{\partial u_i}\right] f\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \left[\xi_i \frac{\partial}{\partial u_i}, \eta_j \frac{\partial}{\partial u_j}\right] f.
\end{aligned}$$

Notemos que a propriedade (c) da proposição 2.5 nos diz que $[fX, gY] = (fXg)\,Y - (gYf)X + (fg)\,[X,Y]$. Logo,

$$\left[\xi_i \frac{\partial}{\partial u_i}, \eta_j \frac{\partial}{\partial u_j}\right] f = \left(\xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial u_i}\right) \frac{\partial f}{\partial u_j} - \left(\eta_j \frac{\partial \xi_i}{\partial u_j}\right) \frac{\partial f}{\partial u_i} + (\xi_i \eta_j) \left[\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j}\right] f.$$

Como $f \in C^\infty(M)$, então $\frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial u_j \partial u_i}$. Assim,

$$\left[\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j}\right] f = \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial u_j \partial u_i} = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left[\xi_i\frac{\partial}{\partial u_i},\eta_j\frac{\partial}{\partial u_j}\right]f &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left(\left(\xi_i\frac{\partial \eta_j}{\partial u_i}\right)\frac{\partial f}{\partial u_j}-\left(\eta_j\frac{\partial \xi_i}{\partial u_j}\right)\frac{\partial f}{\partial u_i}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left(\xi_j\frac{\partial \eta_i}{\partial u_j}-\eta_j\frac{\partial \xi_i}{\partial u_j}\right)\frac{\partial f}{\partial u_i}.\end{aligned}$$

Concluímos que o campo vetorial tangente suave $[X, Y]$ pode ser expresso localmente por

$$[X, Y]|_U = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left(\xi_j\frac{\partial \eta_i}{\partial u_j}-\eta_j\frac{\partial \xi_i}{\partial u_j}\right)\frac{\partial}{\partial u_i}.$$

Isto é, uma soma finita de funções $\xi_i, \eta_j, \dfrac{\partial \eta_i}{\partial u_j}, \dfrac{\partial \xi_i}{\partial u_j} \in C^\infty(U)$. Tal resultado é interessante, uma vez que explora e expõem com clareza a questão da suavidade do campo vetorial tangente suave $[X, Y]$ em função dos elementos da base natural $\left\{\dfrac{\partial}{\partial u_i}\right\}$ e os coeficientes locais dos campos vetoriais tangentes suaves X e Y.

Definição 2.18. Suponha X um campo vetorial tangente suave em M e $p \in M$. Se $X_p = 0$, então p é dito um ponto singular de X.

O resultado a seguir nos apresenta a natureza de um campo vetorial tangente suave próximo de pontos não-singulares.

Teorema 2.4. *Suponha X um campo vetorial tangente suave em uma variedade suave M. Se $X_p \neq 0$ em um ponto $p \in M$, então existe um sistema de coordenadas local (W, w_i) tal que*

$$X|_W = \frac{\partial}{\partial w_1}.$$

Demonstração. Pelo teorema 2.3, existe um sistema de coordenadas local $(U; u_i)$.Suponhamos que $u_i(p) = 0$ no qual U é uma vizinhança coordenada de p, tal que a restrição do campo vetorial tangente suave X na variedade suave M seja expresso localmente por

$$X|_U = \sum_{i=1}^{m}\xi_i\frac{\partial}{\partial u_i}, \xi_i \in C^\infty(U).$$

Como $X_p \neq 0$ podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\xi_1(p) \neq 0$. Pela continuidade de ξ_1, podemos assumir que um é uma vizinhança suficientemente pequena de p tal que $\xi_1(q) \neq 0, \forall q \in U$.

Consideremos o seguinte sistema de EDO's

$$\frac{du_j}{du_1} = \frac{\xi_j(u_1, \ldots, u_m)}{\xi_1(u_1, \ldots, u_m)}, 2 \leq j \leq m,$$

no qual u_1 é a variável independente e u_j são funções desconhecidas. Da teoria de EDO, existe

$\delta > 0$ tal que

$$\{(u_1, \dots, u_m); |u_i| < \delta\} \subset U$$

e para quaisquer valores iniciais dados $(v_2, \dots, v_m)$, $|v_j| < \delta, 2 \leq j \leq m$, o sistema de EDO tem solução única

$$u_j = \phi_j(u_1; v_2, \dots, v_m), -\delta \leq u_1 \leq \delta$$

que satisfaz

$$\phi_j(0; v_2, \dots, v_m) = v_j,$$

na qual as funções ϕ_j dependem suavemente de u_1 e dos valores iniciais.

Consideremos a mudança de coordenadas

$$\begin{cases} u_1 = v_1; \\ u_j = \phi_j(v_1; v_2, \dots, v_m), 2 \leq j \leq m. \end{cases}$$

Como $\phi_j(0; v_2, \dots, v_m) = v_j$, então

$$\det\left(\left.\frac{\partial(u_1, \dots, u_m)}{\partial(v_1, \dots, v_m)}\right|_{v_1=0}\right) = \det\left(\left.\frac{\partial(v_1, \phi_2, \dots, \phi_m)}{\partial(v_1, \dots, v_m)}\right|_{v_1=0}\right) = 1.$$

Assim, existe uma vizinhança $W \subset U$ de p que tem $v_i, 1 \leq i \leq m$, como seu sistema de coordenadas local. Notemos que

$$X|_W = X|_U = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \frac{\partial}{\partial u_i}.$$

Como $\dfrac{du_j}{du_1} = \dfrac{\xi_j(u_1, \dots, u_m)}{\xi_1(u_1, \dots, u_m)}, 2 \leq j \leq m$, então $\xi_i(u_1, \dots, u_m) = \xi_1(u_1, \dots, u_m)\dfrac{\partial u_i}{\partial u_1}$. Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \xi_i \frac{\partial}{\partial u_i} &= \xi_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \sum_{i=2}^{m} \xi_1 \frac{\partial u_i}{\partial u_1} \frac{\partial}{\partial u_i} = \xi_1 \frac{\partial u_1}{\partial v_1} \frac{\partial}{\partial u_1} + \sum_{i=2}^{m} \xi_1 \frac{\partial u_i}{\partial v_1} \frac{\partial}{\partial u_i} \\ &= \xi_1 \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u_i}{\partial v_1} \frac{\partial}{\partial u_i} = \xi_1 \frac{\partial}{\partial v_1}. \end{aligned}$$

Assim, definamos o seguinte sistema de coordenadas local

$$\begin{cases} w_1 = \displaystyle\int_0^{v_1} \frac{dv_1}{\xi_1}; \\ w_j = v_j, 2 \leq j \leq m. \end{cases}$$

Da primeira relação tiramos que $1 = \dfrac{1}{\xi_1} \dfrac{\partial v_1}{\partial w_1}$, então $\dfrac{\partial v_1}{\partial w_1} = \xi_1$. Como $X|_W = \xi_1 \dfrac{\partial}{\partial v_1}$, então na base natural associada a esse novo sistema de coordenadas local

$$X|_W = \xi_1 \frac{\partial}{\partial v_1} = \frac{\partial v_1}{\partial w_1} \frac{\partial}{\partial v_1}.$$

Notemos que $\dfrac{\partial v_j}{\partial w_1} = 0$. Então

$$\frac{\partial v_1}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial v_1} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial v_i}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial v_i} = \frac{\partial}{\partial w_1}.$$

Isto é, $X|_W = \dfrac{\partial}{\partial w_1}$. $\square$

A seguir, discutiremos uma generalização do problema que o teorema 2.4 lida para enunciarmos o teorema de Frobenius.

Suponha que para todo ponto $p \in M$, um subespaço h-dimensional $L^h(p)$ do espaço tangente T_p sejam associados. Isto é, L^h é dito um campo subespaço tangente h-dimensional de M. Mais precisamente,

$$\forall p \in M, \exists U \mid p \in U \text{ e } \{X_i\}_{1 \leq i \leq h}, X_i \in T_p,$$

com $X_i(q)$ sejam linearmente $\forall q \in U$. Então L^h é dito um campo subespaço tangente suave h-dimensional, ou uma distribuição suave h-dimensional, em M denotado por

$$L^h\big|_U = \{X_i\}_{1 \leq i \leq h}.$$

Os campos vetoriais tangentes $X_1, \ldots, X_h$ são determinados por L^h em cima de uma transformação linear não-degenerada, isto é, se T é a tal transformação, então $T \neq= 0$ com coeficientes funcionais. De fato, se temos

$$Y_\alpha = \sum_{\beta=1}^{h} a_\alpha^\beta X_\beta, 1 \leq \alpha \leq h,$$

no qual a_α^β são funções suaves em U e $\det\left(a_\alpha^\beta(q)\right) \neq 0, \forall q \in U$, então $L^h\big|_U$ também é gerado por $Y_1, \ldots, Y_h$. Isto é,

$$L^h\big|_U = \{Y_1, \ldots, Y_h\}.$$

O problema é:

Dado uma distribuição h-dimensional, L^h, em M. Existe um sistema de coordenadas local $(W; w_i)$ tal que $L^h\big|_U = \left\{\dfrac{\partial}{\partial w_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial w_h}\right\}$?

Quando isto é verdade, o campo vetorial tangente X_α pode ser expresso como

$$X_\alpha = \sum_{\beta=1}^{h} a_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial w_\beta}, 1 \leq \alpha \leq h,$$

com $\det\left(a_\alpha^\beta(q)\right) \neq 0, \forall q \in W$.

Notemos que, como estamos no contexto de funções suaves, então para qualquer

$f \in C^{\infty}(M)$ temos $\left[\dfrac{\partial}{\partial w_{\alpha}}, \dfrac{\partial}{\partial w_{\beta}}\right] = 0$. Assim, usando do resultado da proposição 2.5, temos

$$\left[X_{\alpha}, X_{\beta}\right] = \sum_{\eta,\delta=1}^{h} \left(a_{\beta}^{\delta}\frac{\partial a_{\alpha}^{\eta}}{\partial w_{\delta}} - a_{\alpha}^{\delta}\frac{\partial a_{\beta}^{\eta}}{\partial w_{\delta}}\right)\frac{\partial}{\partial w_{\eta}}.$$

Como $\det\left(a_{\alpha}^{\beta}\right) \neq 0$, então existe a inversa $\left(a^{-1}\right)_{\alpha}^{\beta}$. Logo, da álgebra de matrizes

$$1 = (Id)_{\alpha}^{\alpha} = \left(\left(a^{-1}\right) * a\right)_{\alpha}^{\alpha} = \sum_{\beta=1}^{h} \left(a^{-1}\right)_{\alpha}^{\beta} a_{\beta}^{\alpha}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{\eta,\delta=1}^{h} \left(a_{\beta}^{\delta}\frac{\partial a_{\alpha}^{\eta}}{\partial w_{\delta}} - a_{\alpha}^{\delta}\frac{\partial a_{\beta}^{\eta}}{\partial w_{\delta}}\right)\frac{\partial}{\partial w_{\eta}} &= \sum_{\eta,\delta=1}^{h} \left(a_{\beta}^{\delta}\frac{\partial a_{\alpha}^{\eta}}{\partial w_{\delta}} - a_{\alpha}^{\delta}\frac{\partial a_{\beta}^{\eta}}{\partial w_{\delta}}\right)\left(\sum_{\gamma=1}^{h}\left(a^{-1}\right)_{\eta}^{\gamma} a_{\gamma}^{\eta}\right)\frac{\partial}{\partial w_{\eta}} \\
&= \sum_{\gamma=1}^{h}\sum_{\eta,\delta=1}^{h} \left(a_{\beta}^{\delta}\frac{\partial a_{\alpha}^{\eta}}{\partial w_{\delta}} - a_{\alpha}^{\delta}\frac{\partial a_{\beta}^{\eta}}{\partial w_{\delta}}\right)\left(\left(a^{-1}\right)_{\eta}^{\gamma} a_{\gamma}^{\eta}\right)\frac{\partial}{\partial w_{\eta}} \\
&= \sum_{\gamma=1}^{h}\sum_{\eta,\delta=1}^{h} \left(a_{\beta}^{\delta}\frac{\partial a_{\alpha}^{\eta}}{\partial w_{\delta}} - a_{\alpha}^{\delta}\frac{\partial a_{\beta}^{\eta}}{\partial w_{\delta}}\right)\left(a^{-1}\right)_{\eta}^{\gamma}\left(a_{\gamma}^{\eta}\frac{\partial}{\partial w_{\eta}}\right) \\
&= \sum_{\gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta}^{\gamma}\left(a_{\gamma}^{\eta}\sum_{\rho=1}^{h}\frac{\partial w_{\rho}}{\partial w_{\eta}}\frac{\partial}{\partial w_{\rho}}\right) \\
&= \sum_{\gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta}^{\gamma}\left(\sum_{\rho=1}^{h} a_{\gamma}^{\eta}\frac{\partial w_{\rho}}{\partial w_{\eta}}\frac{\partial}{\partial w_{\rho}}\right).
\end{aligned}$$

Definindo $a_{\gamma}^{\rho} = a_{\gamma}^{\eta}\dfrac{\partial w_{\rho}}{\partial w_{\eta}}$ teremos

$$\sum_{\gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta}^{\gamma}\left(\sum_{\rho=1}^{h} a_{\gamma}^{\eta}\frac{\partial w_{\rho}}{\partial w_{\eta}}\frac{\partial}{\partial w_{\rho}}\right) = \sum_{\gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta}^{\gamma}\left(\sum_{\rho=1}^{h} a_{\gamma}^{\rho}\frac{\partial}{\partial w_{\rho}}\right) = \sum_{\gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta}^{\gamma} X_{\gamma}.$$

Portanto, $\left[X_{\alpha}, X_{\beta}\right] = \sum_{\gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta}^{\gamma} X_{\gamma}$.

Observação 2.12. Notemos que se os campos vetoriais tangentes $Y_1, \ldots, Y_h$ geram a mesma distribuição h-dimensional L^h, então $\left[Y_{\alpha}, Y_{\beta}\right]$ pode ser escrito como uma combinação linear dos Y_{γ} quando $X_{\alpha}, 1 \leq \alpha \leq h$, satisfaz $\left[X_{\alpha}, X_{\beta}\right] = \sum_{\gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta}^{\gamma} X_{\gamma}$.

A discussão e observação acima nos inspira a seguinte definição.

Definição 2.19. Suponha $L^h = \{X_1, \ldots, X_h\}$ seja uma distribuição h-dimensional gerado pelos X_i's. Se $\left[X_{\alpha}, X_{\beta}\right]$ é uma combinação linear de $X_{\gamma}, 1 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq h$, então dizemos que a distribuição satisfaz a condição de Frobenius.

Por fim, segue o resultado que generaliza o problema discutido anteriormente conhecido por Teorema de Frobenius.

Teorema 2.5. *Suponha que* $L^h = \{X_1, \dots, X_h\}$ *seja uma distribuição h-dimensional em um conjunto aberto U. Uma condição suficiente e necessária para a existência de um sistema de coordenadas local* $(W; w_i)$, $W \subset U$, *tal que*

$$L^h\big|_W = \left\{\frac{\partial}{\partial w_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial w_h}\right\},$$

é que L^h *satisfaça a condição de Frobenius.*

Demonstração. Primeiramente, é interessante observar que a necessidade da condição foi apresentada e demonstrada na discussão anterior a definição 2.19. Sendo assim, só nos resta demonstrar que a condição de Frobenius é suficiente e para isso usaremos uma indução finita em h.

Notemos que o teorema 2.4 resolve nosso caso se $h = 1$. Assim, assumamos que seja válido para distribuições $(h-1)$-dimensionais.

Suponha que a distribuição L^h seja gerada pelos campos vetoriais tangentes linearmente independentes $X_1, \dots, X_h$ em $U \subset M$ e

$$\left[X_\alpha, X_\beta\right] = \sum_{\gamma=1}^{h} a_{\alpha\beta}^{\gamma} X_\gamma, 1 \leq \alpha, \beta \leq h.$$

Pelo teorema 2.4, existe um sistema de coordenadas local (y_i) tal que $X_h = \dfrac{\partial}{\partial y_h}$. Tomemos então

$$X'_\lambda = X_\lambda - (X_\lambda y_h)X_h, 1 \leq \lambda \leq h-1.$$

Assim,

$$X_h y_h = \frac{\partial y_h}{\partial y_h} = 1 \Rightarrow X'_\lambda y_h = X_\lambda y_h - (X_\lambda y_h)X_h y_h = X_\lambda y_h - X_\lambda y_h = 0$$

Desta forma, X_h e $X'_\lambda, 1 \leq \lambda \leq h-1$, continuam sendo linearmente independentes e geram L^h. Por construção, estes h campos vetoriais ainda satisfazem a condição de Frobenius. Logo,

$$\left[X'_\alpha, X'_\beta\right] = \sum_{\gamma=1}^{h-1} b_{\alpha\beta}^{\gamma} X'_\gamma + b_{\alpha\beta}^{h} X_h, 1 \leq \alpha, \beta \leq h-1.$$

Por definição, $\left[X'_\alpha, X'_\beta\right] = X'_\alpha X'_\beta - X'_\beta X'_\alpha$. Isto é,

$$\left[X'_\alpha, X'_\beta\right] y_h = X'_\alpha(X'_\beta y_h) - X'_\beta(X'_\alpha y_h) = 0, 1 \leq \alpha, \beta \leq h-1.$$

Por outro lado,

$$\left[X'_\alpha, X'_\beta\right] y_h = \sum_{\gamma=1}^{h-1} b_{\alpha\beta}^{\gamma}(X'_\gamma y_h) + b_{\alpha\beta}^{h}(X_h y_h) = b_{\alpha\beta}^{h} \Rightarrow b_{\alpha\beta}^{h} = 0, 1 \leq \alpha, \beta \leq h-1.$$

Então, a distribuição ${L'}^{h-1} = \left\{X'_1, \dots, X'_{h-1}\right\}$ satisfaz

$$\left[X'_\alpha, X'_\beta\right] = \sum_{\gamma=1}^{h-1} a^\gamma_{\alpha\beta} X'_\gamma, 1 \leq \alpha, \beta \leq h-1.$$

Pela hipótese de indução, existe um sistema de coordenadas local (z_i) em p tal que

$${L'}^{h-1} = \left\{\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_{h-1}}\right\}.$$

Como $\dfrac{\partial}{\partial z_\alpha} = \displaystyle\sum_{\beta=1}^{h-1} c^\beta_\alpha X'_\beta$, então

$$\frac{\partial y_h}{\partial z_\alpha} = \sum_{\beta=1}^{h-1} c^\beta_\alpha (X'_\beta y_h) = 0.$$

Logo, podemos assumir que $L^h = \left\{\dfrac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \dfrac{\partial}{\partial z_{h-1}}, X_h\right\}$ e a condição de Frobenius nos permite escrever

$$\left[\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, X_h\right] = \sum_{\gamma=1}^{h-1} c^\gamma_{\alpha h}\frac{\partial}{\partial z_\gamma} + c^h_{\alpha h} X_h, 1 \leq \alpha \leq h-1 \Rightarrow \left[\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, X_h\right] y_h = c^h_{\alpha h}$$

Por outro lado, como $X_h y_h = 1$,

$$\left[\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, X_h\right] y_h = \frac{\partial}{\partial z_\alpha}(X_h y_h) - x_h \frac{\partial y_h}{\partial z_\alpha} = \frac{\partial (1)}{\partial z_\alpha} = 0, 1 \leq \alpha \leq h-1 \Rightarrow c^h_{\alpha h} = 0.$$

Então, $\left[\dfrac{\partial}{\partial z_\alpha}, X_h\right] = \displaystyle\sum_{\gamma=1}^{h-1} c^\gamma_{\alpha h}\frac{\partial}{\partial z_\gamma}, 1 \leq \alpha \leq h-1.$

Suponhamos que, no sistema de coordenadas local (z_i), X_h possa ser escrito como $X_h = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \xi_i \frac{\partial}{\partial z_i}$. Notemos que, como estamos no âmbito de funções suaves, $\dfrac{\partial}{\partial z_i}\dfrac{\partial}{\partial z_j} = \dfrac{\partial}{\partial z_j}\dfrac{\partial}{\partial z_i}$, assim

$$\left[\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, X_h\right] = \left[(1)\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \sum_{i=1}^{m} \xi_i \frac{\partial}{\partial z_i}\right] = \sum_{i=1}^{m}\left[(1)\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \xi_i \frac{\partial}{\partial z_i}\right] = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \xi_i}{\partial z_\alpha}\frac{\partial}{\partial z_i} - \sum_{i=1}^{m} \xi_i \frac{\partial (1)}{\partial z_i}\frac{\partial}{\partial z_\alpha}.$$

Logo, $\left[\dfrac{\partial}{\partial z_\alpha}, X_h\right] = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \xi_i}{\partial z_\alpha}\frac{\partial}{\partial z_i} \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \xi_i}{\partial z_\alpha}\frac{\partial}{\partial z_i} = \left[\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, X_h\right] = \sum_{\gamma=1}^{h-1} c^\gamma_{\alpha h}\frac{\partial}{\partial z_\gamma}$. Então

$$\frac{\partial \xi_j}{\partial z_\alpha} = 0, h \leq j \leq m, 1 \leq \alpha \leq h-1.$$

Ou seja, $\xi_j, h \leq j \leq m$, são funções de $z_h, \dots, z_m$. Tomemos $X'_h = \displaystyle\sum_{\rho=h}^{m} \xi_\rho \frac{\partial}{\partial z_\rho}$. Então, pela independência linear de X'_h e $\dfrac{\partial}{\partial z_\alpha}, 1 \leq \alpha \leq h-1$, podemos escrever $L^h = \left\{\dfrac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \dfrac{\partial}{\partial z_{h-1}}, X'_h\right\}$.

Pelo teorema 2.4, existe uma mudança de coordenadas local de $(z_1, \dots, z_m)$ para $(w_1, \dots, w_m)$ tal que $X'_h = \dfrac{\partial}{\partial w_h}$.

Notemos que, como essa mudança de coordenadas não envolvem $z_1, \ldots, z_{h-1}$, então podemos tomar $w_\alpha = z_\alpha, 1 \leq \alpha \leq h-1$. Finalmente, obtemos o sistema de coordenadas local $(w_1, \ldots, w_m)$ em p no qual

$$L^h\big|_W = \left\{ \frac{\partial}{\partial w_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial w_h} \right\}.$$

$\square$

3 CONEXÕES

Para adentrarmos este capitulo precisamos primeiro discutir algumas noções e resultados preliminares sobre fibrados tensoriais e fibrados vetoriais, os quais apresentaremos nessa primeira seção.

Observação 3.1. O leitor deve notar que estaremos usando $\otimes$ para indicar o produto tensorial e $\wedge$ para o produto exterior.

3.1 FIBRADOS TENSORIAIS E FIBRADOS VETORIAIS

O gráfico $(x, f(x))$ de valor real $f(x)$ em uma variedade M é uma aplicação de M para uma variedade produto $M \times \mathbb{R}$. Isto é,

$$\begin{array}{rccc} f: & M & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array} \Rightarrow (x, f(x)) \in M \times \mathbb{R}.$$

Em termos de fibrados, $(x, f(x))$ é uma seção do fibrado $M \times \mathbb{R}$. Desta forma fibrados generalizam as variedades produtos.

É de nosso interesse principal o estudo da classe dos fibrados vetoriais definidos tal que qualquer campo vetorial em uma variedade seja uma seção de algum fibrado vetorial. Mas para entendermos tais elementos de maneira mais abrangente e rica, primeiro discutiremos as noções de fibrados tensoriais que generalizam a noção dos fibrados vetoriais.

Suponha que M seja uma variedade suave m-dimensional, T_p e T_p^* sejam seus espaços tangente e cotangente em $p \in M$. Então existe um (r, s)-espaço tensorial

$$T_s^r(p) = \underbrace{T_p \otimes T_p \otimes \cdots \otimes T_p}_{\text{r vezes}} \otimes \underbrace{T_p^* \otimes T_p^* \otimes \cdots \otimes T_p^*}_{\text{s vezes}},$$

de M em p o qual é um espaço vetorial m^{r+s}-dimensional. Seja

$$T_s^r = \bigcup_{p \in M} T_s^r(p).$$

Chamaremos T_s^r de fibrado tensorial em M.

Observação 3.2. É importante termos em mente primeiro algumas notações.

a) Suponha V um espaço vetorial m-dimensional sobre $\mathbb{R}$. Denotaremos o grupo linear dos automorfismos de V por $GL(V)$.

b) Escolha a base $\{e_1, \cdots, e_m\} \subset V$. Então V é isomorfo a $\mathbb{R}^m$. Podemos assim entender $y \in V$ como $y = (y_1, \cdots, y_m)$.

Logo, $GL(V)$ é um grupo multiplicativo das matrizes $m \times m$, isto é, $GL(V)$ é o grupo geral linear $GL(m;\mathbb{R})$ tal que, dado $y \in V$ e $a \in GL(V)$, a ação desse grupo em V será definida por

$$y \cdot a = (y_1, \cdots, y_m) \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m^1 & \cdots & a_m^m \end{pmatrix},$$

no qual $\det(a) = \det\left(a_i^j\right) \neq 0$.

c) V_s^r representa o espaço de todos os (r,s)-tensores do espaço vetorial V e tem base

$$\mathcal{B}_{\mathcal{V}} = \left\{ e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e_{j_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{j_s}^*; e_{i_\alpha} \in V, e_{j_\beta}^* \in V^*, 1 \leq i_\alpha, j_\beta \leq m \right\}$$

Logo, os elementos de V_s^r pode ser expressos por componentes. Se denotarmos os elementos de V_s^r por linhas coordenadas, então os elementos da base podem ser definidos em uma ordem. Assim, assumiremos o sistema de indices $(i_1, \cdots, i_r, j_1, \cdots, j_s)$.

Para continuarmos nossa discussão precisaremos do resultado que segue.

Teorema 3.1. *Uma variedade diferenciável M possui uma partição diferenciável da unidade se, e somente se, toda componente conexa de M é de Hausdorff e tem base enumerável.*

Discutiremos a seguir uma topologia que faz de T_s^r um espaço Hausdorff e tenha base contável, então, pelo resultado do teorema 3.1, poderemos definiremos uma estrutura diferenciável C^∞ tal que T_s^r seja uma variedade diferenciável suave. Tal variedade assim obtida é localmente difeomorfa a uma variedade produto.

Considere uma vizinhança coordenada $U \subset M$ com coordenadas locais $u_1, \ldots, u_m$. Então para qualquer $p \in U$, existem as bases naturais

$$\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial u_1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial u_1}\right|_p \right\} \text{ e } \left\{ (du_1)_p, \ldots, (du_m)_p \right\},$$

dual uma da outra, para T_p e T_p^*, respectivamente. Logo,

$$\mathcal{B}_{\mathcal{M}} = \left\{ \left.\frac{\partial}{\partial u_{i_1}}\right|_p \otimes \cdots \otimes \left.\frac{\partial}{\partial u_{i_1}}\right|_p \otimes (du_{j_r})_p \otimes \cdots \otimes (du_{j_s})_p; 1 \leq i_\alpha, j_\beta \leq m \right\}$$

é uma base para $T_s^r(p)$. Agora podemos definir a aplicação

$$x_U : U \times V_s^r \to \bigcup_{p \in U} T_s^r(p)$$

tal que $\forall(p, y) \in U \times V_s^r$, $x_U(p, y)$ é um elemento de $T_s^r(p)$ e as componentes de $x_U(p, y)$ com respeito a $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$ são as mesmas de y com respeito a $\mathcal{B}_{\mathcal{V}}$. Desta forma, x_U é bijetiva.

Escolheremos a cobertura coordenada $\{U, W, ...\}$ de M e suporemos que as aplicações correspondentes seja $\{x_U, x_W, ...\}$. Tomemos o conjunto de imagens de todos os abertos de $U \times V_s^r, W \times V_s^r, ...$ sob a aplicação x_U sendo uma base topológica de T_s^r.

Notemos que, como V é homeomorfo a $\mathbb{R}^m$, então V_s^r é homeomorfo a $\mathbb{R}^{m^{r+s}}$. Portanto, V_s^r é Hausdorff e existe uma base correspondente de abertos de $\mathbb{R}^{m^{r+s}}$ para V_s^r. Então o a base de V_s^r é contável. Assim, como M é uma variedade suave, U é uma variedade suave com a estrutura de abertos herdada de M. Assim, UxV_s^r tem base contável. Como temos uma bijeção de UxV_s^r para $\bigcup\limits_{p \in U} T_s^r(p)$ por x_U, podemos concluir que $\bigcup\limits_{p \in U} T_s^r(p)$ é um espaço Hausdorff com base contável e toda aplicação definida por

$$x_U : U \times V_s^r \to \bigcup_{p \in U} T_s^r(p)$$

é um homeomorfismo.

Fixe um ponto $p \in U$. Então podemos definir uma aplicação

$$x_{U,p} : V_s^r \to T_s^r(p)$$

tal que $y \in V_s^r$ é levado em $x_{U,p}(y) = x_U(p, y)$.

Pela definição de x_U, a aplicação $x_{U,p}$ é um isomorfismo linear do espaço vetorial V_s^r para $T_s^r(p)$.

Suponha W outra vizinhança coordenada de M contendo p com coordenadas locais $w_1, ..., w_m$. Então, seja

$$g_{UW}(p) = x_{W,p}^{-1} \circ x_{U,p} : V_s^r \to V_s^r.$$

Isto é, $g_{UW}(p)$ é um automorfismo do espaço vetorial V_s^r, então $g_{UW} \in GL(V_s^r)$. Como definido anteriormente, a ação de qualquer elemento de $GL(V_s^r)$ em V_s^r é uma multiplicação à direita. Logo, uma condição suficiente e necessária quaisquer $y, y' \in V_s^r$ satisfazer

$$x_U(p, y) = x_W(p, y')$$

é que $y' = y \cdot g_{UW}(p)$.

Proposição 3.1. *Para qualquer duas vizinhanças coordenadas U, W de M, se $U \cap W \neq \emptyset$, então a aplicação*

$$g_{UW} : U \cap W \to GL(V_s^r)$$

tal que $g_{UW} = x_{W,p}^{-1} \circ x_{U,p}$, é suave.

Demonstração. Primeiramente notemos que as base de T_p e T_p^* são

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial w_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial w_m}\right)_p \right\} \text{ e } \{(dw_1)_p, \cdots, (dw_m)_p\},$$

respectivamente com respeito as coordenadas locais $w_1, \dots, w_m$.

Suponha que $y, y' \in V_s^r$ sejam expressos por

$$y = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \leq m} y_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e_{j_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{j_s}^*$$

e

$$y' = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \leq m} y'_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e_{j_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{j_s}^*.$$

Para facilitar nossa escrita, adotaremos a seguinte forma

$$y = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \leq m} y_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s} \left(\bigotimes_{\alpha=1}^{r} e_{i_\alpha} \right) \otimes \left(\bigotimes_{\alpha=1}^{s} e_{j_\alpha}^* \right).$$

Isso implica que

$$x_U(p, y) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \leq m} y_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s} \left(\bigotimes_{\alpha=1}^{r} \left(\frac{\partial}{\partial u_{i_\alpha}}\right)_p \right) \otimes \left(\bigotimes_{\alpha=1}^{s} \left(du_{j_\alpha}\right)_p \right)$$

e

$$x_W(p, y') = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \leq m} y'_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s} \left(\bigotimes_{\alpha=1}^{r} \left(\frac{\partial}{\partial w_{i_\alpha}}\right)_p \right) \otimes \left(\bigotimes_{\alpha=1}^{s} \left(dw_{j_\alpha}\right)_p \right)$$

Em $U \cap W$, temos a relação entre as bases naturais que satisfaz

$$\begin{cases} du_{j_\alpha} = \displaystyle\sum_{j_\beta=1}^{m} \frac{\partial u_{j_\alpha}}{\partial w_{j_\beta}} dw_{j_\beta} \\ \dfrac{\partial}{\partial u_{i_\alpha}} = \displaystyle\sum_{i_\beta=1}^{m} \frac{\partial w_{i_\beta}}{\partial u_{i_\alpha}} \frac{\partial}{\partial w_{i_\beta}} \end{cases}$$

na qual $\left(\dfrac{\partial w_{i_\beta}}{\partial u_{i_\alpha}}\right) = J_{UW}$ é a matriz jacobiana da mudança de coordenadas locais. Assim,

$$x_U(p, y) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \leq m} y_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s} \left(\bigotimes_{\alpha=1}^{r} \left(\frac{\partial}{\partial u_{i_\alpha}}\right)_p \right) \otimes \left(\bigotimes_{\alpha=1}^{s} \left(du_{j_\alpha}\right)_p \right)$$

$$= \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \leq m} y_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s} \left(\bigotimes_{\alpha=1}^{r} \left(\sum_{i_\beta=1}^{m} \frac{\partial w_{i_\beta}}{\partial u_{i_\alpha}} \frac{\partial}{\partial w_{i_\beta}} \right)_p \right) \otimes \left(\bigotimes_{\alpha=1}^{s} \left(\sum_{j_\beta=1}^{m} \frac{\partial u_{j_\alpha}}{\partial w_{j_\beta}} dw_{j_\beta} \right)_p \right).$$

Assim, se $x_U(p, y) = x_W(p, y')$ e usando da linearidade e comutatividade do produto tensorial, temos

$$y'_{k_1 \dots k_r l_1 \dots l_s} = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \leq m} y_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s} \left(\frac{\partial w_{k_1}}{\partial u_{i_1}}\right)_p \cdots \left(\frac{\partial w_{k_r}}{\partial u_{i_r}}\right)_p \left(\frac{\partial u_{j_1}}{\partial w_{l_1}}\right)_p \cdots \left(\frac{\partial u_{j_s}}{\partial w_{l_s}}\right)_p.$$

Ou seja,

$$(yg_{UW}(p))_{k_1\dots k_r l_1\dots l_s} = \sum_{1\le i_1,\dots,i_r,j_1,\dots,j_s\le m} y_{i_1\dots i_r j_1\dots j_s}\left(\frac{\partial w_{k_1}}{\partial u_{i_1}}\right)_p\cdots\left(\frac{\partial w_{k_r}}{\partial u_{i_r}}\right)_p\left(\frac{\partial u_{j_1}}{\partial w_{l_1}}\right)_p\cdots\left(\frac{\partial u_{j_s}}{\partial w_{l_s}}\right)_p.$$

Definamos o produto tensorial entre matrizes por

$$A\otimes B = \begin{pmatrix} a_1^1 B & \cdots & a_1^m B\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_m^1 B & \cdots & a_m^m B\end{pmatrix}$$

Notemos que, desta forma, a equação nos diz que as matrizes não-degeneradas $m^{r+s}\times m^{r+s}$ representadas por $g_{UW}(p)$ são precisamente o produtório tensorial de r matrizes jacobianas J_{UW} e s matrizes J_{UW}^{-1}. Isto é,

$$g_{UW}(p) = \left(\bigotimes_{\alpha=1}^{r} J_{UW}\right)\otimes\left(\bigotimes_{\alpha=1}^{s} J_{UW}^{-1}\right).$$

Como ambas as matrizes jacobinas J_{UW} e $J_{UW}^{-1} = J_{WU}$ são compostas por funções suaves em $U\cap W$, então g_{UW} é também uma aplicação suave em $U\cap W$. $\square$

Pela estrutura topológica de T_s^r, $\{x_U(U\times V_s^r), x_W(W\times V_s^r), \dots\}$ forma a cobertura aberta de T_s^r. As coordenadas de um ponto $x_U(p,y)$ na vizinhança coordenada $x_U(U\times V_s^r)$ são $(u_i(p), y_{i_1\dots i_r j_1\dots j_s})$ nas quais u_i's são as coordenadas locais na vizinhança de $U\subset M$ e $y_{i_1\dots i_r j_1\dots j_s}$'s são as componentes de $y\in V_s^r$ com respeito a base $\mathcal{B}_{\mathcal{V}}$.

Notemos que, quando $U\cap W\neq\emptyset$, como g_{UW} é uma aplicação suave, a equação $y' = y\cdot g_{UW}(p)$ implica que a cobertura coordenada de T_s^r dado acima é C^∞-compatível. Portanto, T_s^r é uma variedade suave.

Observação 3.3. seguem algumas observações pertinentes ao assunto deste capítulo.

a) A projeção natural $\pi : T_s^r \to M$ mapeia elementos em $T_s^r(p)$ ao ponto $p\in M$. Isto é, π assim é uma sobrejeção suave.

b) Chamaremos a variedade suave T_s^r um fibrado (r,s)-tensorial em M, π o fibrado projeção e $T_s^r(p)$ a fibra do fibrado $T_s^r(p)$ no ponto p.

c) Notemos que se $s = 0$ e $r = 1$, então T_s^r é o fibrado tangente de M denotado por $T(M)$. Da mesma forma, se $r = 0$ e $s = 1$, então T_s^r é o fibrado cotangente de M, denotado por $T^*(M)$.

d) Seguindo o processo apresentado para construção do fibrado tensorial, podemos analogamente definir os fibrados vetoriais exteriores e fibrados das formas exteriores em M, sendo estes respectivamente

$$\begin{cases} \Lambda^r(M) = \bigcup_{p \in M} \Lambda^r(T_p); \\ \Lambda^r(M^*) = \bigcup_{p \in M} \Lambda^r(T_p^*). \end{cases}$$

e) Suponha $f : M \to T_s^r$ uma aplicação suave. Se

$$\pi \circ f = id : M \to M,$$

isto é, $\forall p \in M$, $f(p) \in T_s^r(p)$, então diremos que f é uma seção suave de um fibrado tensorial T_s^r, ou um campo (r, s)-tensorial suave em M.

f) Uma seção do fibrado tangente é um campo vetorial tangente em M;

g) Uma seção do fibrado cotangente é uma 1-forma diferencial;

h) Uma seção suave do fibrado das formas exteriores $\Lambda^r(M^*)$ é uma diferencial exterior de grau r em M.

Desta forma, é notório que generalizarmos a estrutura dos fibrados tensoriais, obtemos o conceito da generalização dos fibrados vetoriais.

Definição 3.1. Suponha que E e M sejam duas variedades suaves, e $\pi : E \to M$ seja uma aplicação sobrejetiva suave. Seja $V = \mathbb{R}^q$ um espaço vetorial q-dimensional. Se uma cobertura aberta $\{U, W, Z, ...\}$ de M e o conjunto $\{x_U, x_W, x_Z, ...\}$ satisfazem todas as seguintes condições, então (E, M, π) é um fibrado vetorial real em M, no qual E é chamado espaço fibrado, M é chamado espaço base, π é a projeção do fibrado e $V = \mathbb{R}^q$ é chamada a fibra tipica.

a) Toda aplicação x_U é um difeomorfismo de $U \times \mathbb{R}^q$ para $\pi^{-1}(U) \subset E$ e para qualquer $p \in U, y \in \mathbb{R}^q$,

$$\pi \circ x_U(p, y) = p;$$

b) Para qualquer $p \in U$ fixado, seja

$$x_{U,p}(y) = x_U(p, y), y \in \mathbb{R}^q.$$

Então $x_{U,p} : \mathbb{R}^q \to \pi^{-1}(p)$ é um homeomorfismo. Quando $U \cap W \neq \emptyset$, para qualquer $p \in U \cap W$

$$g_{UW}(p) = x_{W,p}^{-1} \circ x_{U,p} : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$$

é um automorfismo linear de $V = \mathbb{R}^q$, isto é, $g_{UW}(p) \in GL(V)$;

c) Quando $U \cap W \neq \emptyset$, a aplicação $g_{UW} : U \cap W \to GL(V)$ é suave.

Observação 3.4. Da condição (b), sabemos que uma condição necessária e suficiente para elementos $y_u, y_w \in V$ satisfazendo

$$x_U(p, y_u) = x_W(p, y_w)$$

é $y_u \cdot g_{UW}(p) = y_w$, no qual $g_{UW}(p)$ é visto como uma matriz $q \times q$ não-degenerada.

Definição 3.2. Para qualquer $p \in M$, definiremos $E_p = \pi^{-1}(p)$ e chamaremos de fibra do fibrado vetorial E no ponto p.

Suponha U uma vizinhança coordenada de M contendo p. Notemos que, pela nossa definição de $x_{U,p}$ temos para todo $y \in V$,

$$x_{U,p}(y) = x_U(p, y) = x_U\left(p, \sum_{i=1}^{q} y_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{q} y_i x_{U,p}(e_i).$$

Como $x_{U,p}$ é um homeomorfismo, então para todo $V \in E_p$ existe um único $y \in V$ tal que $v = x_{U,p}(y)$. Assim, tomando $v_1, v_2 \in E_p$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, podemos escrever

$$\begin{aligned} v_1 + \alpha V_2 &= x_{U,p}(y_1) + \alpha x_{U,p}(y_2) = \sum_{i=1}^{q} y_{1_i} x_{U,p}(e_i) + \alpha \sum_{i=1}^{q} y_{2_i} x_{U,p}(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{q} (y_{1_i} + \alpha y_{2_i}) x_{U,p}(e_i) = x_{U,p}(y_1 + \alpha y_2) \in E_p. \end{aligned}$$

Isto é, $x_{U,p}$ leva a estrutura linear de V para E_p. Além disso, temos que todo elemento de E_p pode ser descrito por uma combinação linear de $x_{U,p}(e_i)$, ou seja, uma base de E_p. Portanto, E_p é um espaço vetorial q-dimensional.

Como nossa $x_{U,p}$ é tal que, em $U \cap W \neq \emptyset$,

$$g_{UW}(p) = x_{W,p}^{-1} \circ x_{U,p} : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q,$$

pela observação 3.4, $y_u \cdot g_{UW}(p) = y_w$, isto é,

$$x_{W,p}(y_w) = x_{W,p}(y_u \cdot g_{UW(p)}) = x_{W,p} \circ g_{UW(p)}(y_u) = x_{W,p} \circ x_{W,p}^{-1} \circ x_{U,p}(y_u) = x_{U,p}(y_u).$$

Portanto, nosso espaço vetorial terá a mesma base e, portanto, a estrutura linear se mantém a mesma, independente da escolha de U e $x_{U,p}$.

Um fibrado vetorial E pode, portanto, ser visto como o resultado da colagem das variedades produto da forma $U \times \mathbb{R}^q$ ao longo das fibras correspondentes no mesmo ponto $p \in M$. Desta forma, a relação linear entre fibras é preservada.

Observação 3.5. Da discussão acima, podemos observar que,

a) A variedade produto $M \times \mathbb{R}^q = E$ é o exemplo mais simples de fibrado vetorial, chamado fibrado trivial sobre M, ou fibrado produto.

b) Todos os fibrado tensoriais T^r_s mencionados no início desse capítulo são fibrados vetoriais.

c) A aplicação $g_{UW} : U \cap W \to GL(V)$ definido na condição (b) da definição 3.1 satisfaz

(i) para $p \in U$,

$$g_{UU}(p) = id : V \to V;$$

(ii) se $p \in U \cap W \cap Z$,

$$g_{UW}(p) \cdot g_{ZU}(p) \cdot g_{WZ}(p) = x^{-1}_{W,p} \circ x_{U,p} \circ x^{-1}_{U,p} \circ x_{Z,p} \circ x^{-1}_{Z,p} \circ x_{W,p} = id.$$

São estas, as condições de compatibilidade.

Definição 3.3. O conjunto $\{g_{UW}, g_{ZU}, g_{WZ}, ...\}$ satisfazendo as condições citadas na observação 3.4 item (c) é chamado de família das funções de transição dos fibrados vetoriais (E, M, π).

Teorema 3.2. *Suponha M uma variedade m-dimensional suave, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ uma cobertura aberta de M e V um espaço vetorial q-dimensional. Se para qualquer par de índices, α, β no qual $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, existe uma aplicação suave*

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(V)$$

satisfazendo as condições de compatibilidade da observação 3.4 item (c), então existe um fibrado vetorial q-dimensional (E, M, π) no qual tem $\{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta \in \mathcal{A}}$ como suas funções de transição.

Demonstração. Seja M uma variedade m-dimensional e $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ uma cobertura de abertos de M. Tomemos $T \subset \mathcal{A} \times M \times V$, onde V é um espaço vetorial $\mathbb{R}^q$ dimensional e T é o espaço dos elementos (α, p, y) tal que $p \in U_\alpha$. Desta forma, T é um espaço topológico dado pela união disjunta dos abertos $\alpha \times U_\alpha \times V$. Agora, definiremos a seguinte relação de equivalência em T

$$(\alpha, p, y) \sim (\beta, p', y') \Leftrightarrow p = p' g_{\alpha\beta}(p) \cdot y = y', g_{\alpha\beta} \in GL(V).$$

Assim, tomemos então $\widetilde{E} = T/\sim$, isto é, $\widetilde{E}$ é o conjunto das classes de equivalência de $\sim$ em T.

Definamos uma função q da seguinte forma,

$$q : T \to \widetilde{E},$$

na qual $q(\alpha, p, y) = \{(\alpha, p, y)\} = [\alpha, p, y]$. Isto é, q leva os elementos de T nas suas classes de equivalência.

Diremos que $U \subset \widetilde{E}$ é um aberto, se $q^{-1}(U)$ é um aberto em T. Desta forma, $q(\alpha \times U_\alpha \times V) = \{[\alpha, p, y]\,; p \in U_\alpha\}$. Como T é a união disjunta destes abertos, então qualquer aberto em T será descrita por uma união disjunta desses abertos. Isso implica que todos os abertos definidos em $\widetilde{E}$ também será descrita por uma união disjunta dos abertos $q(\alpha \times U_\alpha \times V)$. Assim, q^{-1} leva aberto em aberto, o que implica que q é contínua. Portanto, com esses abertos disjuntos $\widetilde{E}$ é um espaço topológico.

Defina agora

$$\widetilde{\pi} : \widetilde{E} \to M$$

tal que $\widetilde{\pi}([\alpha, p, y]) = p$.

Tomemos W um aberto de M, então

$$(\widetilde{\pi} \circ q)^{-1}(W) = q^{-1} \circ \widetilde{\pi}^{-1}(W).$$

Isto é, dada como definimos, $q^{-1} \circ \widetilde{\pi}^{-1}(W) = T \cap \mathbb{A} \times W \times V$. Portanto, $q^{-1} \circ \widetilde{\pi}^{-1}(W)$ é um aberto de T, definido por uma união disjunta de abertos em T. Assim $\widetilde{\pi}^{-1}(W)$ é um aberto em $\widetilde{E}$ e $\widetilde{\pi}$ é contínua.

Definiremos agora x_α por

$$x_\alpha(p, y) = q(\alpha, p, y), p \in U_\alpha, y \in V.$$

Como q é contínua, então x_α é contínua. Como $\widetilde{\pi}([\alpha, p, y]) = p$, então $\widetilde{\pi}(q(\alpha, p, y)) = p$. Portanto, $\widetilde{\pi} \circ x_\alpha(p, y) = p$. Logo, x_α é uma aplicação injetora de $U_\alpha \times V$ em $\widetilde{\pi}^{-1}(U_\alpha)$.

Desta maneira, se $b = [\beta, p, y]$ está em $\widetilde{\pi}^{-1}(U_\alpha)$, então $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ e $(\beta, p, y) \sim (\alpha, p, y \cdot g_{\alpha\beta}(p))$. Concluímos dessa forma que $b = x_\alpha(p, y \cdot g_{\alpha\beta})$, logo x_α é uma aplicação sobrejetora $U_\alpha \times V$ em $\widetilde{\pi}^{-1}(U_\alpha)$.

Se $(\alpha, p, y) \sim (\alpha, p', y')$, então $p = p'$ e $y \cdot g_{\alpha\alpha}(p) = y'$. Como $g_{\alpha\alpha}(p) = id$, então $y = y'$. Portanto, x_α definida dessa forma é uma aplicação continua bijetora de $U_\alpha \times V$ para $\widetilde{\pi}^{-1}(U_\alpha)$.

Precisamos provar que x_α^{-1} é contínua. Para tanto, precisamos mostrar que se $W \in U \times V$ é um aberto, então $x_\alpha(W)$ é um aberto em $\widetilde{E}$. Ou seja, $q^{-1} \circ x_\alpha(W)$ é aberto em T.

Como os conjuntos do tipo $\beta \times U_\beta \times V$ são abertos e cobrem T, então é suficiente mostrar que $q^{-1} \circ x_\alpha(W)$ é aberto em cada interseção $\beta \times \left(U_\alpha \cap U_\beta\right) \times V$. Definiremos a restrição de q a $\beta \times \left(U_\alpha \cap U_\beta\right) \times V$ por

$$r : \beta \times \left(U_\alpha \cap U_\beta\right) \times V \to U_\alpha \times V$$

de modo que $r(\beta, p, y) = (p, y \cdot g_{\beta\alpha})$. Notemos que desta forma r é contínua em cada coordenada, portanto r é contínua. Então $r^{-1}(W)$ é um aberto de $\beta \times \left(U_\alpha \cap U_\beta\right) \times V$ e $q^{-1} \circ x_\alpha(W)$ é um aberto em T.

Por fim, considere as aplicações $x_{\alpha,p}$ definidas por

$$x_{\alpha,p} : V \to \widetilde{\pi}^{-1}(U_\alpha)$$

tal que $x_{\alpha,p}(y) = x_\alpha(p, y)$. Assim, podemos definir as aplicações $x_{\alpha,p}^{-1} \circ x_{\beta,p}$ de V nele mesmo. Se

$y' = x_{\alpha,p}^{-1} \circ x_{\beta,p}(y)$, por definição,

$$x_{\alpha,p}(y') = \circ x_{\beta,p}(y) \Rightarrow q(p, y', \alpha) = q(p, y, \beta) \Rightarrow (p, y', \alpha) \sim (p, y, \beta),$$

e, portanto, $y' = y \cdot g_{\beta\alpha}(p)$. Logo,

$$\forall y \in V, x_{\alpha,p}^{-1} \circ x_{\beta,p}(y) = y \cdot g_{\beta\alpha}(p).$$

Fica demonstrado assim que $\{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta\in\mathcal{A}}$ é a família de funções de transição para o fibrado construido $\left(\widetilde{E}, M, \widetilde{\pi}\right)$. □

Observação 3.6. O teorema anterior significa que a família das funções de transição descrevem a essência de um fibrado vetorial. Isto é, para construir um fibrado vetorial, basta especificar suas funções de transição.

Definição 3.4. Suponha $s : M \to E$ uma aplicação suave. Se

$$\pi \circ s = id : M \to M,$$

então s é dita a seção suave do fibrado vetorial (E, M, π). Denotaremos o conjunto de todas as secções suaves de um fibrado vetorial (E, M, π) por $\Gamma(E)$.

Como vimos, toda fibra de um fibrado vetorial é um espaço vetorial isomorfo a V. Assim, é possível definir pontualmente uma adição e multiplicação por escalar das secções da seguinte forma.

Suponha $s, s_1, s_2 \in \Gamma(E)$ e α uma função suave de valores reais. Para qualquer $p \in M$, seja

$$\begin{cases} (s_1 + s_2)(p) = s_1(p) + s_2(p); \\ \quad (\alpha s)(p) = \alpha(p) \cdot s(p). \end{cases}$$

Então, $s_1 + s_2$ e αs são também secções suaves de um fibrado vetorial E. Assim, $\Gamma(E)$ é um espaço vetorial real.

3.2 CONEXÕES EM FIBRADOS VETORIAIS

Com as noções introduzidas na seção anterior, estamos aptos para discutirmos as ideias a seguir.

Definição 3.5. Uma conexão em um fibrado vetorial E é uma aplicação definida por

$$D : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*(M) \otimes E)$$

satisfazendo as seguintes condições.

a) Para qualquer $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$

$$D(s_1 + s_2) = Ds_1 + Ds_2.$$

b) Para qualquer $s \in \Gamma(E)$ e qualquer $\alpha \in C^\infty(M)$

$$D(\alpha s) = d\alpha \otimes s + \alpha Ds.$$

Suponha X um campo vetorial tangente suave em M e $s \in \Gamma(E)$. Seja

$$D_X s = \langle X, Ds \rangle \,,$$

no qual $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa o pareamento entre $T(M)$ e $T^*(M)$. Então $D_X s$ é uma seção de E chamada quociente diferencial absoluto ou derivada covariante da seção s ao longo de X.

Observação 3.7. Notemos as seguintes propriedades direto da definição 3.5.

a) Seja $\alpha = c \in \mathbb{R}, \alpha \in C^\infty(M)$. Então, pela condição (b) da definição 3.5

$$D((c)s) = d(c) \otimes s + (c)Ds = (c)Ds.$$

b) Chamaremos de seção zero a seção $s \in \Gamma(E)$ tal que $s(p) = 0, \forall p \in M$. Isto é, as componentes $\alpha s_i \in C^\infty(M)$ são constantes iguais a zero.

   Tomemos s_0 tal que seja uma seção zero. Notemos que toda seção zero pode ser escrita como αs, onde $\alpha = 0 \forall p \in M$ e $\forall s \in \Gamma(E)$. Então, $\forall p \in M$,

$$Ds_0(p) = D(\alpha s)(p) = d\alpha(p) \otimes s(p) + \alpha(p) \otimes Ds(p) = d(0) \otimes s(p) + 0Ds(p) = 0.$$

   Com isso, concluímos que D leva uma seção zero em uma seção zero.

D assim definido é um operador linear de $\Gamma(E)$ em $\Gamma(T^*(M) \otimes E)$. Notemos as seguintes propriedades locais.

Proposição 3.2. *Sejam $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$ tal que $s_1|_U(p) = s_2|_U(p), \forall p \in U \subset M$. Então*

$$Ds_1|_U(p) = Ds_2|_U(p), \forall p \in U \subset M.$$

Demonstração. Seja (E, M, π) um fibrado vetorial q-dimensional na variedade suave m-dimensional M e $\Gamma(E)$ seu conjunto de secções com respeito a (E, M, π).

Tomemos $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$ tal que $s_1(q) = s_2(q), \forall q \in U \subset M$. Tome um $p \in U$. Então existe um conjunto V tal que $p \in V \subset \overline{V} \subset U$. Pelo lema 2.1 existe uma função suave h em M tal que

$$h(q) = \begin{cases} 1, q \in V; \\ 0, q \notin U. \end{cases}$$

Desta forma $h(s_1 - s_2)$ é uma seção zero de E, e, portanto, podemos escrever que para $q \in U$

$$\begin{aligned} 0 &= D(h(s_1 - s_2))(q) = dh_q \otimes (s_1 - s_2)(q) + h(q)D(s_1 - s_2)(q) \\ &= dh_q \otimes (s_1(q) - s_2(q)) + h(q)(Ds_1(q) - Ds_2(q)) = h(q)(Ds_1(q) - Ds_2(q)). \end{aligned}$$

Como h difere de zero para $q \in U$, então $Ds_1(q) - Ds_1(q) = 0$. Portanto, $Ds_1(q) = Ds_2(q)$. Dada a arbitrariedade de $p \in U$, concluímos que se $s_1|_U = s_2|_U$, então $Ds_1|_U = Ds_2|_U$. □

Por $D_X s = \langle X, Ds\rangle$,$D$ como uma aplicação bivalente é um operador de $\Gamma(T(M)) \otimes \Gamma(E)$ para $\Gamma(E)$. Assim, esse operador satisfaz as seguintes propriedades.

Proposição 3.3. *Sejam X e Y quaisquer dois campos vetoriais tangentes em M, s, s_1, s_2 secções suaves de E e $\alpha \in C^\infty(M)$. Então*

a) $D_{X+Y}s = D_X s + D_Y s$.

b) $D_{\alpha X}s = \alpha D_X s$.

c) $D_X(s_1 + s_2) = D_X s_1 + D_X s_2$.

d) $D_X(\alpha s) = (X\alpha)s + \alpha D_X s$.

Observação 3.8. Como uma aplicação bivalente, o quociente diferencial absoluto também tem algumas propriedades, tal qual a conexão D que o define.

a) Se X_1, X_2 são dois campos vetoriais com mesmo valor em um ponto $p \in M$, então $D_{X_1}s$ e $D_{X_2}s$ também tem o mesmo valor em $p \in M$ para qualquer seção suave $s \in \Gamma(E)$. Isto é, suponha $X_1, X_2 \in T(M)$ tal que $X_1|_p = X_2|_p$ e $s \in \Gamma(E)$. Então

$$D_{X_1}s(p) = \left\langle X_1|_p, Ds(p)\right\rangle = \left\langle X_2|_p, Ds(p)\right\rangle = D_{X_2}s(p).$$

Com isto podemos definir o quociente diferencial absoluto de uma seção de E com respeito a um vetor tangente em $p \in M$. Assim, para $X \in T_p(M)$, D_X é uma aplicação de $\Gamma(E)$ para E_p.

b) Para uma aplicação $D_X : \Gamma(E) \to E_p$ tal que $X \in T_p(M)$, então $D_X s_1 = D_X s_2$ se os valores das secções s_1 e s_2 forem os mesmos em uma curva parametrizada em M tangente ao campo X.

De fato, seja $X \in T_pM$ e $p \in M$. Recordemos que X representa uma classe de equivalência das curvas suaves γ em M tal que $\gamma(0) = p$ e tenham X como campo vetorial tangente em p. Tomemos umas das curvas $\gamma \in [\gamma] = X$ e $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$ tal que $s_1 \circ \gamma(t) = s_2 \circ \gamma(t)$. Assim,

$$D_{Xs_1}(p) \;=\; \langle X, Ds_1(p)\rangle = \langle X, Ds_1(\gamma(0))\rangle = \langle \gamma, Ds_2(\gamma(0))\rangle = \langle X, Ds_2(p)\rangle = D_{Xs_2}(p).$$

Dada a arbitrariedade de p, temos então que $D_{Xs_1} = D_{Xs_2}$.

c) Localmente, uma conexão é dada por um conjunto de 1-formas diferenciais.

Suponha U uma vizinhança coordenada de M com coordenadas locais u_i, $1 \leq i \leq m$. Escolhamos então as secções suaves s_α, $1 \leq \alpha \leq q$, de E em U tal que elas sejam linearmente independentes em todo ponto. Tal conjunto das q secções são ditos um referencial local de E em U. Do modo que tomamos s_α, notemos que, para todo $p \in U$,

$$\{du_i \otimes s_\alpha, 1 \leq i \leq m, 1 \leq \alpha \leq q\}$$

forma uma base para o espaço tensorial $T_p^* \otimes E_p$.

d) por definição Ds_α é uma seção local em U do fibrado $T^*(M) \otimes E$. Então podemos escrever

$$Ds_\alpha = \sum_{1 \leq i \leq m, 1 \leq \beta \leq q} \Gamma_{\alpha i}^{\beta} du_i \otimes s_\beta,$$

no qual $\Gamma_{\alpha i}^{\beta}$ são funções suaves em U. Denotaremos $\omega_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{m} du_i$, então podemos escrever

$$Ds_\alpha = \sum_{\beta=1}^{q} \omega_\alpha^\beta \otimes s_\beta.$$

Introduziremos a notação de matriz para simplificar os cálculos. Usaremos S para denotar a coluna da matriz formada pela referencial local, e ω para denotar a matriz com elementos $\omega_{\alpha\beta}$, isto é,

$$S = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_q \end{pmatrix} \text{ e } \omega = \begin{pmatrix} \omega_1^1 & \cdots & \omega_1^q \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_q^1 & \cdots & \omega_q^q \end{pmatrix}$$

Então, escreveremos $Ds_\alpha = \sum_{\beta=1}^{q} \omega_\alpha^\beta$ na forma $DS = \omega \otimes S$. A matriz ω é dita uma matriz conexão, que por sua vez depende da escolha da referencial local.

Seja $S' = (s'_1, ..., s'_q)_t$ é outra referencial local em U, então podemos assumir que $S' = AS$, na qual

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \cdots & \alpha_1^q \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_q^1 & \cdots & \alpha_q^q \end{pmatrix}.$$

Nesta matriz α_i^j são funções suaves em U, e $\det A \neq 0$. Suponha que a matriz da conexão D com respeito a referencial local S' seja ω'. Então, pelas condições de conexões

$$\begin{aligned} DS' = D(AS) &= dA \otimes S + ADS = dA \otimes S + A(\omega \otimes S) = (dA + A\omega) \otimes S \\ &= (dA + A\omega) \otimes A^{-1}S' = (dA + A\omega)A^{-1} \otimes S' = (dAA^{-1} + A\omega A^{-1}) \otimes S'. \end{aligned}$$

Portanto, $\omega' = (dAA^{-1} + A\omega A^{-1})$.

Por outro lado, suponha uma cobertura coordenada $\{U, W, Z, ...\}$ de M. Em cada aberto da cobertura fixe uma referencial local S_U de E e atribua uma matriz $q \times q$ ω_U de 1-formas diferenciais o qual satisfaz a fórmula

$$\omega' = dAA^{-1} + A\omega A^{-1}$$

Quando as vizinhanças coordenadas correspondentes intersectam-se. Em outras palavras, em $U \cap W \neq \emptyset$, se $S_W = A_{WU}S_U$ na qual A_{WU} é uma matriz $q \times q$ de funções suaves em $U \cap W$, então

$$\omega_W = dA_{WU}A_{WU}^{-1} + A_{WU}\omega_U A_{WU}^{-1}.$$

Proposição 3.4. *Existe uma conexão D em E tal que a matriz representação em cada membro de U da cobertura coordenada é exatamente ω_U*

Demonstração. Suponha s uma seção arbitrária de E a qual pode ser expressa em U como $s = \alpha_U S_U$, na qual $\alpha_U = (\alpha_U^1, \cdots, \alpha_U^q)$ e α_U^i são funções suaves em U.

Seja Ds expressa em U por $Ds|_U = (d\alpha_U + \alpha_U\omega_U) \otimes S_U$.

Temos que mostrar que se $U \cap W \neq \emptyset$, então em $U \cap W$

$$(d\alpha_U + \alpha_U\omega_U) \otimes S_U = (d\alpha_W + \alpha_W\omega_W) \otimes S_W$$

e, portanto, $Ds|_U$ é uma seção em M.

Notemos que, como $S_W = A_{WU}S_U$. Assim,

$$\begin{aligned} \alpha_U S_U = S = \alpha_W S_W = \alpha_W A_{WU} S_U. \quad &\Rightarrow \quad \alpha_U = \alpha_W A_{WU}. \\ &\Rightarrow \quad d\alpha_U = d(\alpha_W A_{WU}) = d\alpha_W A_{WU} + \alpha_W dA_{WU} \end{aligned}$$

Além disso, $S_U = A_{WU}^{-1} S_W$. Assim obtemos que em $U \cap W$

$$\begin{aligned}(d\alpha_U + \alpha_U\omega_U) \otimes S_U &= (d\alpha_W A_{WU} + \alpha_W dA_{WU} + \alpha_W A_{WU}\omega_U) \otimes A_{WU}^{-1} S_W \\ &= (d\alpha_W A_{WU} + \alpha_W dA_{WU} + \alpha_W A_{WU}\omega_U) A_{WU}^{-1} \otimes S_W \\ &= (d\alpha_W + \alpha_W dA_{WU}A_{WU}^{-1} + \alpha_W A_{WU}\omega_U A_{WU}^{-1}) \otimes S_W.\end{aligned}$$

Como $\omega_W = dA_{WU}A_{WU}^{-1} + A_{WU}\omega_U A_{WU}^{-1}$. Então $A_{WU}\omega_U A_{WU}^{-1} = \omega_W - dA_{WU}A_{WU}^{-1}$. Podemos escrever então

$$\begin{aligned}&(d\alpha_W + \alpha_W dA_{WU}A_{WU}^{-1} + \alpha_W A_{WU}\omega_U A_{WU}^{-1}) \otimes S_W \\ =\ &(d\alpha_W + \alpha_W dA_{WU}A_{WU}^{-1} + \alpha_W(\omega_W - dA_{WU}A_{WU}^{-1})) \otimes S_W \\ =\ &(d\alpha_W + \alpha_W dA_{WU}A_{WU}^{-1} + \alpha_W\omega_W - \alpha_W dA_{WU}A_{WU}^{-1}) \otimes S_W \\ =\ &(d\alpha_W + \alpha_W\omega_W) \otimes S_W\end{aligned}$$

Portanto, $(d\alpha_U + \alpha_U\omega_U) \otimes S_U = (d\alpha_W + \alpha_W\omega_W) \otimes S_W$.

Seja $S_1, S_2, S \in \Gamma(E) e \beta \in C^\infty(M)$. Notemos que,

$$\begin{aligned}D(S_1 + S_2)\big|_U &= (d\alpha_U + \alpha_U\omega_U) \otimes (S_1 + S_2)_U = (d\alpha_U + \alpha_U\omega_U) \otimes (S_{1_U} + S_{2_U}) \\ &= (d\alpha_U + \alpha_U\omega_U) \otimes S_{1_U} + (d\alpha_U + \alpha_U\omega_U) \otimes S_{2_U} = DS_1\big|_U + DS_2\big|_U.\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}D(\beta S)\big|_U &= (d(\beta\alpha_U) + \beta\alpha_U\omega_U) \otimes S_U = (d\beta\alpha_U + \beta d\alpha_U + \beta\alpha_U\omega_U) \otimes S_U \\ &= (d\beta\alpha_U + \beta(d\alpha_U + \alpha_U\omega_U)) \otimes S_U = d\beta\alpha_U \otimes S_U + \beta(d\alpha_U + \alpha_U\omega_U) \otimes S_U \\ &= d\beta \otimes d\beta\alpha_U \otimes S_U + \beta\ DS\big|_U = d\beta \otimes S + \beta\ DS\big|_U.\end{aligned}$$

Portanto, satisfaz as condições da definição de conexão. Assim, D é uma conexão em E tal que a matriz conexão de D em U é ω_U. □

Teorema 3.3. *Uma conexão sempre existe em um fibrado vetorial.*

Demonstração. Tome uma cobertura coordenada $\{U_\alpha\}$ de M. Como fibrados vetoriais são localmente isomorfos a $U_\alpha \times V$, onde V é a fibra tipica q-dimensional, então assumiremos que existe uma referencial local $S_\alpha = (s_{\alpha_1}, \dots, s_{\alpha_q})_t$ para qualquer U_α. Para estrutura local das conexões, precisamos apenas construir ω_α uma matriz $q \times q$ em cada U_α tal que as matrizes construídas satisfaçam

$$\omega' = dAA^{-1} + A\omega A^{-1}$$

sob uma mudança de referencial local.

Sabemos que para uma variedade suave m-dimensional, podemos assumir que $\{U_\alpha\}$ é localmente finita e $\{g_\alpha\}$ é uma partição da unidade subordinada tal que $supp(g_\alpha) \subset U_\alpha$.

Quando $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, existe naturalmente uma matriz não degenerada $A_{\alpha\beta}$ de funções suaves em $U_\alpha \cap U_\beta$ tal que

$$S_\alpha = A_{\alpha\beta} S\beta, \det A_{\alpha\beta} \neq 0.$$

Para todo $\alpha \in \mathcal{A}$, escolha uma matriz φ_α arbitrária de 1-formas diferenciais em U_α. Seja

$$\omega_\alpha = \sum_{\beta\in\mathcal{A}} g_\beta \left(dA_{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}^{-1} + A_{\alpha\beta}\varphi_\beta A_{\alpha\beta}^{-1}\right),$$

no qual os termos g_β do somatório sobre β são zero quando $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$. Desta forma, definimos então ω_α como uma matriz de 1-formas diferenciais em U_α.

Por fim, precisamos demonstrar que $\omega_\alpha = dA_{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}^{-1} + A_{\alpha\beta}\omega_\beta A_{\alpha\beta}^{-1}$.

Notemos primeiramente que se $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$, então $S_\alpha = A_{\alpha\beta}S_\beta$ e $S_\beta = A_{\beta\gamma}S_\gamma$. Portanto $S_\alpha = A_{\alpha\beta}A_{\beta\gamma}S_\gamma$, isto é, $A_{\alpha\gamma} = A_{\alpha\beta}A_{\beta\gamma}$.

Tome então,

$$\omega_\beta = \sum_{\gamma\in\mathcal{A}} g_\gamma(dA_{\beta\gamma}A_{\beta\gamma}^{-1} + A_{\beta\gamma}\varphi_\gamma A_{\beta\gamma}^{-1}).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
A_{\alpha\beta}\omega_\beta A_{\alpha\beta}^{-1} &= A_{\alpha\beta}\left(\sum_{\gamma\in\mathcal{A}} g_\gamma\left(dA_{\beta\gamma}A_{\beta\gamma}^{-1} + A_{\beta\gamma}\varphi_\gamma A_{\beta\gamma}^{-1}\right)\right)A_{\alpha\beta}^{-1}\\
&= \sum_{\gamma\in\mathcal{A}} g_\gamma A_{\alpha\beta}\left(dA_{\beta\gamma}A_{\beta\gamma}^{-1} + A_{\beta\gamma}\varphi_\gamma A_{\beta\gamma}^{-1}\right)A_{\alpha\beta}^{-1}\\
&= \sum_{\gamma\in\mathcal{A}} g_\gamma A_{\alpha\beta}\left(\left(dA_{\beta\alpha}A_{\alpha\gamma} + A_{\beta\alpha}dA_{\alpha\gamma}\right)A_{\beta\gamma}^{-1} + A_{\beta\gamma}\varphi_\gamma A_{\beta\gamma}^{-1}\right)A_{\alpha\beta}^{-1}\\
&= \sum_{\gamma\in\mathcal{A}} g_\gamma A_{\alpha\beta}\left(dA_{\beta\alpha}A_{\alpha\gamma}A_{\beta\gamma}^{-1} + A_{\beta\alpha}dA_{\alpha\gamma}A_{\beta\gamma}^{-1} + A_{\beta\gamma}\varphi_\gamma A_{\beta\gamma}^{-1}\right)A_{\alpha\beta}^{-1}\\
&= \sum_{\gamma\in\mathcal{A}} g_\gamma A_{\alpha\beta}\left(dA_{\beta\alpha}A_{\alpha\gamma}A_{\beta\gamma}^{-1}A_{\alpha\beta}^{-1} + A_{\beta\alpha}dA_{\alpha\gamma}A_{\beta\gamma}^{-1}A_{\alpha\beta}^{-1} + A_{\beta\gamma}\varphi_\gamma A_{\beta\gamma}^{-1}A_{\alpha\beta}^{-1}\right)\\
&= \sum_{\gamma\in\mathcal{A}} g_\gamma A_{\alpha\beta}\left(dA_{\beta\alpha}A_{\alpha\gamma}A_{\alpha\gamma}^{-1} + A_{\beta\alpha}dA_{\alpha\gamma}A_{\alpha\gamma}^{-1} + A_{\beta\gamma}\varphi_\gamma A_{\alpha\gamma}^{-1}\right)\\
&= \sum_{\gamma\in\mathcal{A}} g_\gamma\left(A_{\alpha\beta}dA_{\beta\alpha} + A_{\alpha\beta}A_{\beta\alpha}dA_{\alpha\gamma}A_{\alpha\gamma}^{-1} + A_{\alpha\beta}A_{\beta\gamma}\varphi_\gamma A_{\alpha\gamma}^{-1}\right)\\
&= \sum_{\gamma\in\mathcal{A}} g_\gamma\left(A_{\alpha\beta}dA_{\beta\alpha} + dA_{\alpha\gamma}A_{\alpha\gamma}^{-1} + A_{\alpha\gamma}\varphi_\gamma A_{\alpha\gamma}^{-1}\right)\\
&= \sum_{\gamma\in\mathcal{A}} g_\gamma\left(-dA_{\alpha\beta}A_{\beta\alpha} + dA_{\alpha\gamma}A_{\alpha\gamma}^{-1} + A_{\alpha\gamma}\varphi_\gamma A_{\alpha\gamma}^{-1}\right)\\
&= \sum_{\gamma\in\mathcal{A}} g_\gamma\left(-dA_{\alpha\beta}A_{\beta\alpha}\right) + \sum_{\gamma\in\mathcal{A}} g_\gamma\left(dA_{\alpha\gamma}A_{\alpha\gamma}^{-1} + A_{\alpha\gamma}\varphi_\gamma A_{\alpha\gamma}^{-1}\right)\\
&= -dA_{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}^{-1} + \omega_\alpha.
\end{aligned}$$

Portanto, $\omega_\alpha = dA_{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}^{-1} + A_{\alpha\beta}\omega_\beta A_{\alpha\beta}^{-1}$. □

Observação 3.9. É interessante notarmos que na realidade existe muita liberdade para escolhermos uma conexão. Além disso, o caso particular em que $\varphi_\beta = 0$ na igualdade

$$\omega_\alpha = \sum_{\beta\in\mathcal{A}} g_\beta\left(dA_{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}^{-1} + A_{\alpha\beta}\varphi_\beta A_{\alpha\beta}^{-1}\right)$$

nos devolve uma conexão D em E cuja matriz conexão em U_α é $\omega_\alpha = \sum_{\beta\in\mathcal{A}} g_\beta \left(dA_{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}^{-1}\right)$.

Nesta fórmula da transformação, a matriz conexão ser nula não é uma propriedade invariante. De fato, para uma conexão arbitrária podemos sempre encontrar uma referencial local de modo que a matriz conexão seja zero no mesmo ponto. Essa propriedade será útil para cálculos envolvendo conexões.

Teorema 3.4. *Seja D uma conexão em um fibrado vetorial E e $p \in M$. Então existe uma referencial local S em uma vizinhança coordenada de p tal que a matriz conexão correspondente seja nula em p.*

Demonstração. Seja U uma vizinhança coordenada de p, isto é, $(U; u_i)$ tal que $p \in U$ e $u_i(p) = 0, 1 \leq i \leq m$. Suponhamos que S' seja u,a referencial local em U com matriz conexão correspondente $\omega' = \left(\omega'^{\beta}_{\alpha}\right)$, na qual

$$\omega'^{\beta}_{\alpha} = \sum_{i=1}^{m} \Gamma'^{\alpha}_{\beta i} du_i,$$

e $\Gamma'^{\alpha}_{\beta i}$ são funções suaves em U. Seja

$$a^{\beta}_{\alpha} = \delta^{\beta}_{\alpha} - \sum_{i=1}^{m} \Gamma'_{\beta i}(p)^{\alpha} u_i$$

elementos da matriz $A = \left(a^{\beta}_{\alpha}\right)$. Então,

$$A(p) = \left(a^{\beta}_{\alpha}(p)\right) = \left(\delta^{\beta}_{\alpha} - \sum_{i=1}^{m} \Gamma'^{\alpha}_{\beta i}(p)u_i(p)\right) = \left(\delta^{\beta}_{\alpha}\right).$$

Isto é, $A(p) = Id$. Logo, existe uma vizinhança $V \subset U$ de p tal que A é não degenerada em V. Assim, temos outra referencial S em V tal que

$$S = AS'.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
dA(p) &= \left(da^{\beta}_{\alpha}\right)_p = \left(d\left(\delta^{\beta}_{\alpha} - \sum_{i=1}^{m} \Gamma'^{\alpha}_{\beta i}(p)u_i(p)\right)\right) \\
&= = \left(d\delta^{\beta}_{\alpha} - d\left(\sum_{i=1}^{m} \Gamma'^{\alpha}_{\beta i}(p)u_i(p)\right)\right) = -\sum_{i=1}^{m} \Gamma'^{\alpha}_{\beta i}(p)\left(du_i\right)_p \\
&= -\omega'^{\beta}_{\alpha}(p).
\end{aligned}$$

Isto é, $dA(p) = -\omega'(p)$. Assim, sabendo que $\omega = dAA^{-1} + A\omega' A^{-1}$, temos

$$\omega(p) = dA(p)A^{-1}(p) + A(p)\omega'(p)A^{-1}(p) = dA(p) + \omega'(p) = -\omega'(p) + \omega'(p) = 0.$$

Portanto, S é a referencial local que queríamos. □

Observação 3.10. Notemos que, como $\omega' = dAA^{-1} + A\omega A^{-1}$, então $\omega' A = dA + A\omega$. Então, podemos escrever

$$d\left(\omega' A\right) = d\left(dA + A\omega\right) = d\left(dA\right) + d\left(A\omega\right) = dA \wedge \omega + Ad\omega.$$

Por outro lado,

$$d\left(\omega' A\right) = d\omega' A + dA \wedge \omega' = d\omega' A - \omega' \wedge dA.$$

Como $\omega' A = dA + A\omega$, então $dA = \omega' A - A\omega$. Assim, podemos escrever que

$$\begin{aligned} dA \wedge \omega + Ad\omega &= \left(\omega' A - A\omega\right) \wedge \omega + Ad\omega = \left(\omega' A\right) \wedge \omega - (A\omega) \wedge \omega + Ad\omega \\ &= \left(\omega' A\right) \wedge \omega - A\left(\omega \wedge \omega\right) \wedge \omega + Ad\omega \\ &= \left(\omega' A\right) \wedge \omega + A\left(d\omega - \omega \wedge \omega\right). \end{aligned}$$

Analogamente, $d\omega' A - \omega' \wedge dA = \left(d\omega' - \omega' \wedge \omega'\right) A + \omega' \wedge (A\omega)$. Como $\omega' \wedge (A\omega) = \left(\omega' A\right) \wedge \omega$, obtemos a igualdade

$$\left(d\omega' - \omega' \wedge \omega'\right) A = A\left(d\omega - \omega \wedge \omega\right).$$

A observação 3.10 inspira a seguinte definição.

Definição 3.6. Dada uma matriz conexão ω, definiremos por Ω a matriz

$$\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega.$$

Chamaremos Ω de matriz curvatura da conexão D em U.

Claro que isso implica que o resultado da observação 3.10 nos devolve

$$\left(d\omega' - \omega' \wedge \omega'\right) A = A\left(d\omega - \omega \wedge \omega\right) \Rightarrow \Omega' A = A\Omega \Rightarrow \Omega' = A\Omega A^{-1}.$$

Observação 3.11. O resultado acima nos diz que, enquanto ω não necessariamente é uma matriz homogênea, Ω é homogênea. Tal matriz curvatura, para além de uma enorme gama de informações, ela será importante para podermos construir formas diferenciais definidas globalmente.

Proposição 3.5. *Suponha que X e Y sejam dois campos vetoriais tangentes quaisquer em M. Então a matriz curvatura Ω define uma transformação linear $R(X, Y)$ de $\Gamma(E)$ em $\Gamma(E)$.*

Demonstração. Tome $s \in \pi^{-1}(p)$. Usando o referencial local $S = \left(s_1, \ldots, s_q\right)$ de um fibrado vetorial E em U, s pode ser expressa por

$$s = \sum_{\alpha=1}^{q} \lambda_\alpha \left. s_\alpha \right|_p, \lambda_\alpha \in \mathbb{R}.$$

Então, seja

$$R(X,Y)s = \sum_{1\leq\alpha,\beta\leq q} \lambda_\alpha \left\langle X\wedge Y, \Omega_\alpha^\beta\right\rangle s_\beta\big|_p .$$

No qual $X = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \frac{\partial}{\partial u_i}$ e $Y = \sum_{i=1}^{m} \xi_i' \frac{\partial}{\partial u_i}$, $\xi_i, \xi_i' \in \mathbb{R}$ e $1 \leq i \leq m$.

Notemos que

$$\begin{aligned}
\left\langle X\wedge Y, \Omega_\alpha^\beta\right\rangle &= \left\langle \left(\sum_{i=1}^{m} \xi_i \frac{\partial}{\partial u_i}\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^{m} \xi_j' \frac{\partial}{\partial u_j}\right), \Omega_\alpha^\beta \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \xi_i\xi_j' \left\langle \frac{\partial}{\partial u_i} \wedge \frac{\partial}{\partial u_j}, \Omega_\alpha^\beta \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \xi_i\xi_j' \left\langle \frac{\partial}{\partial u_i} \wedge \frac{\partial}{\partial u_j}, d\omega_\alpha^\beta - \sum_{\gamma=1}^{q} \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} \xi_i\xi_j' \left\langle \frac{\partial}{\partial u_i} \wedge \frac{\partial}{\partial u_j}, \sum_{r=1}^{m} d\Gamma_{\alpha r}^\beta \wedge du_r - \sum_{\gamma=1}^{q} \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} \xi_i\xi_j' \left\langle \frac{\partial}{\partial u_i} \wedge \frac{\partial}{\partial u_j}, \sum_{k,r=1}^{m} \frac{\partial\Gamma_{\alpha r}^\beta}{\partial u_k} du_k \wedge du_r - \sum_{\gamma=1}^{q} \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} \xi_i\xi_j' \left\langle \frac{\partial}{\partial u_i} \wedge \frac{\partial}{\partial u_j}, \sum_{k,r=1}^{m} \left(\frac{\partial\Gamma_{\alpha r}^\beta}{\partial u_k} - \sum_{\gamma=1}^{q} \Gamma_{\alpha k}^\gamma \Gamma_{\gamma r}^\beta\right) du_k \wedge du_r \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} \xi_i\xi_j' \sum_{k,r=1}^{m} \left(\frac{\partial\Gamma_{\alpha r}^\beta}{\partial u_k} - \sum_{\gamma=1}^{q} \Gamma_{\alpha k}^\gamma \Gamma_{\gamma r}^\beta\right) \left\langle \frac{\partial}{\partial u_i} \wedge \frac{\partial}{\partial u_j}, du_k \wedge du_r \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} \xi_i\xi_j' \sum_{k,r=1}^{m} \left(\frac{\partial\Gamma_{\alpha r}^\beta}{\partial u_k} - \sum_{\gamma=1}^{q} \Gamma_{\alpha k}^\gamma \Gamma_{\gamma r}^\beta\right) \delta_{ij}^{kr} \\
&= \sum_{i,j=1 i\neq j}^{m} \xi_i\xi_j' \left(\frac{\partial\Gamma_{\alpha j}^\beta}{\partial u_i}(p) - \sum_{\gamma=1}^{q} \Gamma_{\alpha i}^\gamma(p) \Gamma_{\gamma j}^\beta(p)\right) \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Então podemos escrever

$$\begin{aligned}
R(X,Y)s &= \sum_{1\leq\alpha,\beta\leq q} \lambda_\alpha \left\langle X\wedge Y, \Omega_\alpha^\beta\right\rangle s_\beta\big|_p \\
&= \sum_{1\leq\alpha,\beta\leq q} \lambda_\alpha \sum_{i,j=1}^{m} \xi_i\xi_j' \left(\frac{\partial\Gamma_{\alpha j}^\beta}{\partial u_i}(p) - \sum_{\gamma=1}^{q} \Gamma_{\alpha i}^\gamma(p) \Gamma_{\gamma j}^\beta(p)\right) s_\beta\big|_p \\
&= \sum_{\beta=1}^{q}\sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{i,j=1}^{m} \lambda_\alpha \xi_i\xi_j' \left(\frac{\partial\Gamma_{\alpha j}^\beta}{\partial u_i}(p) - \sum_{\gamma=1}^{q} \Gamma_{\alpha i}^\gamma(p) \Gamma_{\gamma j}^\beta(p)\right) s_\beta\big|_p \\
&= \sum_{\beta=1}^{q} \lambda_\beta\, s_\beta\big|_p \in \pi^{-1}(p)
\end{aligned}$$

Sendo assim, tome $\gamma \in \mathbb{R}$ e $s, s' \in \pi^{-1}(p)$ tal que $s = \sum_{\alpha=1}^{q} \lambda_\alpha \, s_\alpha\big|_p$ e $s' = \sum_{\alpha=1}^{q} \lambda'_\alpha \, s_\alpha\big|_p$. Escreva

$$\begin{aligned} R(X, Y)s + \gamma R(X, Y)s' &= \sum_{\beta=1}^{q} \lambda_\beta \, s_\beta\big|_p + \gamma \sum_{\beta=1}^{q} \lambda'_\beta \, s_\beta\big|_p \\ &= \sum_{\beta=1}^{q} \left(\lambda_\beta + \gamma\lambda'_\beta\right) \, s_\beta\big|_p = R(X, Y)(s + \gamma s') \end{aligned}$$

Então fica claro que $R(X, Y)$ é uma transformação linear de $\pi^{-1}(p)$ no próprio espaço. Notemos também que, como $\dfrac{\partial \Gamma^{\beta}_{\alpha j}}{\partial u_i}(p)$ pode ser reescrito através da transformação de coordenadas locais, então de fato $R(X, Y)$ independe da escolha de sistema de coordenadas.

Por fim, se X, Y são dois campos vetoriais tangentes suaves em uma variedade suave M, então $R(X, Y)$ é uma transformação linear de $\Gamma(E)$ em $\Gamma(E)$, tal que

$$(R(X, Y)s)(p) = R(X_p, Y_p)s(p), p \in M, s \in \Gamma(E).$$

□

Proposição 3.6. *Seja $R(X, Y)$ uma transformação linear de $\Gamma(E)$ em $\Gamma(E)$ definida pela matriz curvatura Ω. Então, $R(X, Y)$ satisfaz*

a) $R(X, Y) = -R(Y, X)$.

b) $R(fX, Y) = fR(Y, X)$.

c) $R(X, Y)(fs) = f(R(Y, X)s)$.

No qual $X, Y \in \Gamma(T(M)), f \in C^\infty(M)$ e $s \in \Gamma(E)$.

Observação 3.12. O operador linear $R(X, Y)$ definido acima chamaremos de operador curvatura da conexão D.

Teorema 3.5. *Seja X e Y dois campos vetoriais tangentes suaves arbitrários na variedade suave M. Então*

$$R(X, Y) = D_X D_Y - D_Y D_X - D_{[X,Y]}.$$

Demonstração. Pelo fato de que o quociente diferencial absoluto e o operador curvatura serem operadores locais, precisamos apenas considerar os operadores de ambos os lados de

$$R(X, Y) = D_X D_Y - D_Y D_X - D_{[X,Y]}$$

em uma seção local. Tome $s \in \Gamma(E)$ tal que tenha expressão local $s = \sum_{\alpha=1}^{q} \lambda_\alpha s_\alpha$. Então

$$\begin{aligned}
D_X s &= \langle X, Ds\rangle = \left\langle X, D\left(\sum_{\alpha=1}^{q}\lambda_\alpha s_\alpha\right)\right\rangle = \left\langle X, \sum_{\alpha=1}^{q} D\left(\lambda_\alpha s_\alpha\right)\right\rangle \\
&= \left\langle X, \sum_{\alpha=1}^{q}\left(d\lambda_\alpha \otimes s_\alpha + \lambda_\alpha D s_\alpha\right)\right\rangle \\
&= \left\langle X, \sum_{\alpha=1}^{q} d\lambda_\alpha \otimes s_\alpha\right\rangle + \left\langle X, \sum_{\alpha=1}^{q}\lambda_\alpha D s_\alpha\right\rangle \\
&= \sum_{\alpha=1}^{q}\left(X\lambda_\alpha\right) s_\alpha + \left\langle X, \sum_{\alpha=1}^{q}\lambda_\alpha \sum_{\beta=1}^{q}\omega_\alpha^\beta \otimes s_\beta\right\rangle \\
&= \sum_{\alpha=1}^{q}\left(X\lambda_\alpha\right) s_\alpha + \left\langle X, \sum_{\beta=1}^{q}\sum_{\alpha=1}^{q}\lambda_\beta \omega_\beta^\alpha \otimes s_\alpha\right\rangle \\
&= \sum_{\alpha=1}^{q}\left(X\lambda_\alpha\right) s_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{\beta=1}^{q}\lambda_\beta\left\langle X, \omega_\beta^\alpha\right\rangle s_\alpha \\
&= \sum_{\alpha=1}^{q}\left(X\lambda_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{\beta=1}^{q}\lambda_\beta\left\langle X, \omega_\beta^\alpha\right\rangle\right) s_\alpha.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\left\{\begin{aligned}
D_Y s &= \sum_{\alpha=1}^{q}\left(Y\lambda_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{\beta=1}^{q}\lambda_\beta\left\langle Y, \omega_\beta^\alpha\right\rangle\right) s_\alpha \\
D_{[X,Y]} s &= \sum_{\alpha=1}^{q}\left([X,Y]\,\lambda_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{\beta=1}^{q}\lambda_\beta\left\langle [X,Y], \omega_\beta^\alpha\right\rangle\right) s_\alpha
\end{aligned}\right. .$$

Seguindo a mesma logica e abrindo $D_Y D_X s$ podemos escrever

$$\begin{aligned}
D_Y D_X s &= D_Y\left(\sum_{\alpha=1}^{q}\left(X\lambda_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{\beta=1}^{q}\lambda_\beta\left\langle X, \omega_\beta^\alpha\right\rangle\right) s_\alpha\right) \\
&= \left\langle Y, D\left(\sum_{\alpha=1}^{q}\left(X\lambda_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{\beta=1}^{q}\lambda_\beta\left\langle X, \omega_\beta^\alpha\right\rangle\right) s_\alpha\right)\right\rangle \\
&= \sum_{\alpha=1}^{q}\left(Y(X\lambda_\alpha) + \sum_{\beta=1}^{q}\left(X\lambda_\beta\left\langle Y, \omega_\beta^\alpha\right\rangle + Y\lambda_\beta\left\langle X, \omega_\beta^\alpha\right\rangle\right)\right. \\
&+ \left.\sum_{\beta=1}^{q}\left(Y\left\langle X, \omega_\beta^\alpha\right\rangle + \sum_{\gamma=1}^{\beta}\left\langle X, \omega_\beta^\gamma\right\rangle\left\langle Y, \omega_\gamma^\alpha\right\rangle\right)\right) s_\alpha
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
D_X D_Y s &= \sum_{\alpha=1}^{q} \left(X(Y\lambda_\alpha) + \sum_{\beta=1}^{q} \left(Y\lambda_\beta \left\langle X, \omega_\beta^\alpha \right\rangle + X\lambda_\beta \left\langle Y, \omega_\beta^\alpha \right\rangle \right) \right. \\
&+ \left. \sum_{\beta=1}^{q} \left(X \left\langle Y, \omega_\beta^\alpha \right\rangle + \sum_{\gamma=1}^{\beta} \left\langle Y, \omega_\beta^\gamma \right\rangle \left\langle X, \omega_\gamma^\alpha \right\rangle \right) \right) s_\alpha .
\end{aligned}$$

Por fim, escrevamos

$$\begin{aligned}
D_X D_Y s - D_Y D_X s &= \sum_{\alpha=1}^{q} \left(X(Y\lambda_\alpha) + \sum_{\beta=1}^{q} \left(Y\lambda_\beta \left\langle X, \omega_\beta^\alpha \right\rangle + X\lambda_\beta \left\langle Y, \omega_\beta^\alpha \right\rangle \right) \right. \\
&+ \left. \sum_{\beta=1}^{q} \left(X \left\langle Y, \omega_\beta^\alpha \right\rangle + \sum_{\gamma=1}^{\beta} \left\langle Y, \omega_\beta^\gamma \right\rangle \left\langle X, \omega_\gamma^\alpha \right\rangle \right) \right) s_\alpha \\
&- \sum_{\alpha=1}^{q} \left(Y(X\lambda_\alpha) + \sum_{\beta=1}^{q} \left(X\lambda_\beta \left\langle Y, \omega_\beta^\alpha \right\rangle + Y\lambda_\beta \left\langle X, \omega_\beta^\alpha \right\rangle \right) \right. \\
&+ \left. \sum_{\beta=1}^{q} \left(Y \left\langle X, \omega_\beta^\alpha \right\rangle + \sum_{\gamma=1}^{\beta} \left\langle X, \omega_\beta^\gamma \right\rangle \left\langle Y, \omega_\gamma^\alpha \right\rangle \right) \right) s_\alpha \\
&= \sum_{\alpha=1}^{q} \left([X, Y]\lambda_\alpha + \sum_{\beta=1}^{q} \lambda_\beta \left(\left\langle [X, Y], \omega_\beta^\alpha \right\rangle \right. \right. \\
&+ \left. \left. \left\langle X \wedge Y, d\omega_\beta^\alpha - \sum_{\gamma=1}^{q} \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha \right\rangle \right) \right) s_\alpha \\
&= \sum_{\alpha=1}^{q} \left([X, Y]\lambda_\alpha + \sum_{\beta=1}^{q} \lambda_\beta \left\langle [X, Y], \omega_\beta^\alpha \right\rangle \right) s_\alpha \\
&+ \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_{\beta=1}^{q} \lambda_\beta \left\langle X \wedge Y, d\omega_\beta^\alpha - \sum_{\gamma=1}^{q} \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha \right\rangle s_\alpha \\
&= D_{[X,Y]}s + \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_{\beta=1}^{q} \lambda_\beta \left\langle X \wedge Y, \Omega_\beta^\alpha \right\rangle s_\alpha \\
&= D_{[X,Y]}s + R(X, Y)s.
\end{aligned}$$

Portanto, $R(X, Y) = D_X D_Y - D_Y D_X - D_{[X,Y]}$. □

Teorema 3.6. *A matriz curvatura Ω satisfaz a identidade de Bianchi*

$$d\Omega = \omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \omega.$$

Demonstração. Por definição $\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega$. Desta forma, podemos escrever a diferencial exterior de Ω como

$$\begin{aligned}
d\Omega &= d\left(d\omega - \omega \wedge \omega\right) = d\left(d\omega\right) - d\left(\omega \wedge \omega\right) = -\left(d\omega \wedge \omega - \omega \wedge d\omega\right)\\
&= -\left(\Omega + \omega \wedge \omega\right) \wedge \omega + \omega \wedge \left(\Omega + \omega \wedge \omega\right)\\
&= -\Omega \wedge \omega - \omega \wedge \omega \wedge \omega + \omega \wedge \Omega + \omega \wedge \omega \wedge \omega\\
&= \omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \omega.
\end{aligned}$$

□

Para a próxima discussão que faremos, precisaremos dos seguintes resultados e conceitos.

Proposição 3.7. *Seja ω uma 1-forma diferencial em uma variedade suave M, X e Y campos vetoriais tangentes suaves em M. Então*

$$\langle X \wedge Y, d\omega\rangle = X\langle Y, \omega\rangle - Y\langle X, \omega\rangle - \langle [X, Y], \omega\rangle.$$

Demonstração. Dada uma variedade suave M, tomemos uma 1-forma diferencial $\omega \in T^*$. É claro que ela pode ser expressa localmente por

$$\omega = \sum_{i=1}^{q} \Gamma_{\alpha i}^{\beta} du_i \Rightarrow d\omega = \sum_{i=1}^{q} d\Gamma_{\alpha i}^{\beta} \wedge du_i.$$

Primeiramente, notemos que

$$\begin{aligned}
\langle X \wedge Y, d\omega\rangle &= \left\langle X \wedge Y, \sum_{i=1}^{q} d\Gamma_{\alpha i}^{\beta} \wedge du_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{q} \left\langle X \wedge Y, d\Gamma_{\alpha i}^{\beta} \wedge du_i \right\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{q} \left(\left\langle X, d\Gamma_{\alpha i}^{\beta} \right\rangle \langle Y, du_i\rangle - \left\langle Y, d\Gamma_{\alpha i}^{\beta} \right\rangle \langle X, du_i\rangle \right)\\
&= \sum_{i=1}^{q} \left(\left(X\Gamma_{\alpha i}^{\beta} \right) (Yu_i) - \left(Y\Gamma_{\alpha i}^{\beta} \right) (Xu_i) \right)\\
&= \sum_{i=1}^{q} \left(X\Gamma_{\alpha i}^{\beta} \right) (Yu_i) - \sum_{i=1}^{q} \left(Y\Gamma_{\alpha i}^{\beta} \right) (Xu_i)
\end{aligned}$$

Notemos também que

$$\langle X, \omega\rangle = \left\langle X, \sum_{i=1}^{q} \Gamma_{\alpha i}^{\beta} du_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{q} \Gamma_{\alpha i}^{\beta} \langle X, du_i\rangle = \sum_{i=1}^{q} \Gamma_{\alpha i}^{\beta} (Xu_i).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\langle [X, Y], \omega\rangle &= \sum_{i=1}^{q} \Gamma_{\alpha i}^{\beta} ([X, Y]\, u_i) = \sum_{i=1}^{q} \Gamma_{\alpha i}^{\beta} ((XY - YX) u_i)\\
&= \sum_{i=1}^{q} \Gamma_{\alpha i}^{\beta} (X(Yu_i) - Y(Xu_i)) = \sum_{i=1}^{q} \Gamma_{\alpha i}^{\beta} X(Yu_i) - \sum_{i=1}^{q} \Gamma_{\alpha i}^{\beta} Y(Xu_i).
\end{aligned}$$

Podemos tambem escrever

$$\begin{aligned} Y\langle X,\omega\rangle &= Y\left(\sum_{i=1}^{q}\Gamma_{\alpha i}^{\beta}(Xu_i)\right) = \sum_{i=1}^{q} Y\left(\Gamma_{\alpha i}^{\beta}(Xu_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{q}\left(\left(Y\Gamma_{\alpha i}^{\beta}\right)(Xu_i) + \Gamma_{\alpha i}^{\beta}Y(Xu_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{q}\left(Y\Gamma_{\alpha i}^{\beta}\right)(Xu_i) + \sum_{i=1}^{q}\Gamma_{\alpha i}^{\beta}Y(Xu_i). \end{aligned}$$

Analogamente, $X\langle Y,\omega\rangle = \sum_{i=1}^{q}\left(X\Gamma_{\alpha i}^{\beta}\right)(Yu_i) + \sum_{i=1}^{q}\Gamma_{\alpha i}^{\beta}X(Yu_i)$. Portanto,

$$\begin{aligned} X\langle Y,\omega\rangle - Y\langle X,\omega\rangle - \langle [X,Y],\omega\rangle &= \sum_{i=1}^{q}\left(X\Gamma_{\alpha i}^{\beta}\right)(Yu_i) + \sum_{i=1}^{q}\Gamma_{\alpha i}^{\beta}X(Yu_i) \\ &- \sum_{i=1}^{q}\left(Y\Gamma_{\alpha i}^{\beta}\right)(Xu_i) - \sum_{i=1}^{q}\Gamma_{\alpha i}^{\beta}Y(Xu_i) \\ &- \sum_{i=1}^{q}\Gamma_{\alpha i}^{\beta}X(Yu_i) + \sum_{i=1}^{q}\Gamma_{\alpha i}^{\beta}Y(Xu_i) \\ &= \sum_{i=1}^{q}\left(X\Gamma_{\alpha i}^{\beta}\right)(Yu_i) - \sum_{i=1}^{q}\left(Y\Gamma_{\alpha i}^{\beta}\right)(Xu_i) \\ &= \langle X\wedge Y, d\omega\rangle \end{aligned}$$

□

Definição 3.7. Seja $L^r = \{X_1, \ldots, X_r\}$ uma distribuição suave r-dimensional em M. Seja

$$\left(L^r(p)\right)^{\perp} = \left\{\omega \in T_p^*; \langle X,\omega\rangle = 0, \forall X \in L^r(p)\right\}.$$

Chamaremos $\left(L^r(p)\right)^{\perp}$ de espaço aniquilador de $L^r(p)$.

Proposição 3.8. *$\left(L^r(p)\right)^{\perp}$ é um subespaço $(m-r)$-dimensional de T_p^**

Demonstração. Seja M uma variedade suave m-dimensional. Suponha L^r seja uma distribuição suave r-dimensional gerada por $\{X_1, \ldots, X_r\}$, isto é, L^r é gerado por r campos vetoriais tangentes suaves em uma vizinhança. Como M é m-dimensional, então existem $m-r$ campos vetoriais tangentes suaves $X_{r+1}, \ldots, X_m$ tais que $X_1, \ldots, X_m$ sejam linearmente independentes em todo ponto da vizinhança.

Suponhamos então que $\{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ sejam as 1-formas diferenciais duais nesta vizinhança. Então, em todo ponto da vizinhança,

$$\langle X_i, \omega_j\rangle = \delta_{ij}, 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq m.$$

Notemos que $\langle X_i, \omega_j\rangle = 0$ para todo X_i, quando $r+1 \leq j \leq m$. Portanto, $\left(L^r(p)\right)^{\perp}$ é gerado por $\omega_{r+1}, \ldots, \omega_m$, sendo assim um subespaço $(m-r)$-dimensional de T_p^*. □

Definição 3.8. Seja M uma variedade suave m-dimensional. Seja $L^r(p)$ uma distribuição suave r-dimensional gerado por $\{X_1, \dots, X_r\}$ e $\left(L^r(p)\right)^{\perp}$ seu espaço aniquilador. Localmente, L^r equivale ao sistema de equações

$$\omega_s = 0, r + 1 \leq s \leq m,$$

no qual $\{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ são as 1-formas diferenciais duais nesta vizinhança. Chamaremos esse sistema de equações de sistema Pfaffiano de equações.

Definição 3.9. Sejam M uma variedade suave m-dimensional, U uma vizinhança de p em M e u_i o sistema de coordenadas local de U. Se u_i é tal que as subvariedades

$$u_s = c \in \mathbb{R}, r + 1 \leq s \leq m$$

satisfazem o sistema Pfaffiano $\omega_s = 0, r + 1 \leq s \leq m$. Então diremos que o sistema Pfaffiano é completamente integrável.

Observação 3.13. Para um sistema Pfaffiano completamente integrável, existe um sistema de coordenadas locais u_i tal que o sistema é equivalente a

$$du_s = 0, r + 1 \leq s \leq m.$$

Nestas condições, a distribuição L^r é gerada precisamente pelos campos vetoriais tangentes $\dfrac{\partial}{\partial u_1}, \dots, \dfrac{\partial}{\partial u_r}$. É direto que o contrário também é verdade.

Agora, recordemos o teorema 2.5. Enunciaremos o mesmo em sua forma dual.

Teorema 3.7. *Uma condição suficiente e necessária para o sistema Pfaffiano de equações*

$$\omega_s = 0, r + 1 \leq s \leq m,$$

ser completamente integrável é $d\omega_s$ ser expresso por uma combinação linear de ω_i, $r+1 \leq i \leq m$.

Demonstração. Seja M uma variedade suave m-dimensional. Da proposição 3.7 temos que, dado dois campos vetoriais tangentes suaves X_α e X_β temos

$$\langle X_\alpha \wedge X_\beta, d\omega \rangle = X_\alpha \langle X_\beta, \omega \rangle - X_\beta \langle X_\alpha, \omega \rangle - \left\langle \left[X_\alpha, X_\beta\right], \omega \right\rangle$$

no qual ω é uma 1-forma diferencial. Tome X_α e X_β tais que $1 \leq \alpha, \beta \leq r$ com $\{X_1, \dots, X_r\}$ sendo o gerador de L^r e ω_s tal que $r + 1 \leq s \leq m$ com $\{\omega_{r+1}, \dots, \omega_m\}$ sendo o gerador de $(L^r)^{\perp}$, então

$$\langle X_\alpha \wedge X_\beta, d\omega_s \rangle = - \left\langle \left[X_\alpha, X_\beta\right], \omega_s \right\rangle .$$

A distribuição L^r satisfaz a condição de Frobenius

$$\left[X_\alpha, X_\beta\right] \in L^r, 1 \leq \alpha, \beta \leq r,$$

se, e somente se,

$$\langle X_\alpha \wedge X_\beta, d\omega_s \rangle = 0.$$

De fato, $d\omega_s$ pode ser expresso em termos de $\omega_i, 1 \leq i \leq m$ da forma

$$d\omega_s = \sum_{t=r+1}^{m} \psi_{ts} \wedge \omega_t + \sum_{i,j=1}^{r} a_{ij}^s \omega_i \wedge \omega_j,$$

na qual ψ_{ts} são 1-formas diferenciais e a_{ij}^s são funções suaves as quais sejam antissimétricas com respeito aos indices i, j.

Notemos $\langle X_i, \omega_j \rangle = \delta_{ij}$ para $\{X_1, \dots, X_m\}$ e suas 1-formas diferenciais duais correspondentes $\{\omega_1, \dots, \omega_m\}$.

Suponhamos que $\langle X_\alpha \wedge X_\beta, d\omega_s \rangle = 0$. Então

$$\begin{aligned}
0 &= \langle X_\alpha \wedge X_\beta, d\omega_s \rangle = \left\langle X_\alpha \wedge X_\beta, \sum_{t=r+1}^{m} \psi_{ts} \wedge \omega_t + \sum_{i,j=1}^{r} a_{ij}^s \omega_i \wedge \omega_j \right\rangle \\
&= \left\langle X_\alpha \wedge X_\beta, \sum_{t=r+1}^{m} \psi_{ts} \wedge \omega_t \right\rangle + \left\langle X_\alpha \wedge X_\beta, \sum_{i,j=1}^{r} a_{ij}^s \omega_i \wedge \omega_j \right\rangle \\
&= \sum_{t=r+1}^{m} \langle X_\alpha \wedge X_\beta, \psi_{ts} \wedge \omega_t \rangle + \sum_{i,j=1}^{r} a_{ij}^s \langle X_\alpha \wedge X_\beta, \omega_i \wedge \omega_j \rangle \\
&= \sum_{t=r+1}^{m} \big(\langle X_\alpha, \psi_{ts} \rangle \langle X_\beta, \omega_t \rangle - \langle X_\beta, \psi_{ts} \rangle \langle X_\alpha, \omega_t \rangle \big) \\
&+ \sum_{i,j=1}^{r} a_{ij}^s \langle X_\alpha \wedge X_\beta, \omega_i \wedge \omega_j \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{r} a_{ij}^s \big(\langle X_\alpha, \omega_i \rangle \langle X_\beta, \omega_j \rangle - \langle X_\beta, \omega_i \rangle \langle X_\alpha, \omega_j \rangle \big) = a_{\alpha\beta}^s - a_{\beta\alpha}^s = 2a_{\alpha\beta}^s.
\end{aligned}$$

Logo, temos que $a_{\alpha\beta}^s = 0$ e $[X_\alpha, X_\beta] \in L^r, 1 \leq \alpha, \beta \leq r$. Notemos que a volta é direta.

Portanto, $d\omega_s = \sum_{t=r+1}^{m} \psi_{ts} \wedge \omega_t$, isto é, $d\omega_s$ ser expresso por uma combinação linear de $\omega_i, r+1 \leq i \leq m$. □

Definição 3.10. Seja s uma seção de um fibrado vetorial E satisfazendo $Ds = 0$. Então diremos que s é uma seção paralela.

Observação 3.14. Da definição 3.10 é direto que a seção zero é uma seção paralela. Porém, em geral, uma seção paralela não nula pode não existir. Se expressarmos s com respeito a uma referencial S por $s = \sum_{\alpha=1}^{q} \lambda_\alpha s_\alpha$ então

$$0 = Ds = D\left(\sum_{\alpha=1}^{q} \lambda_\alpha s_\alpha \right) = \sum_{\alpha=1}^{q} \left(d\lambda_\alpha \otimes s_\alpha + \sum_{\beta=1}^{q} \lambda_\beta \omega_\beta^\alpha \otimes s_\alpha \right).$$

Logo, $Ds = 0$ é equivalente a $d\lambda_\alpha + \sum_\beta \lambda_\beta \omega_\beta^\alpha = 0$, que por sua vez é um sistema Pfaffiano de equações. Se tomarmos

$$\Theta_\alpha = d\lambda_\alpha + \sum_\beta \lambda_\beta \omega_\beta^\alpha \Rightarrow d\Theta_\alpha = d\left(d\lambda_\alpha + \sum_{\beta=1}^{q} \lambda_\beta \omega_\beta^\alpha\right) = \sum_{\beta=1}^{q} \Theta_\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \sum_{\beta=1}^{q} \lambda_\beta \Omega_\beta^\alpha.$$

Assim, se a matriz curvatura da conexão D for nula, então Θ_α pode ser escrito por uma combinação linear dos termos $\Theta_1, \ldots, \Theta_q$. Isto é, o sistema

$$d\lambda_\alpha + \sum_{\beta=1}^{q} \lambda_\beta \omega_\beta^\alpha = 0, 1 \leq \alpha \leq q$$

é completamente integrável. Neste caso teremos q secções paralelas linearmente independentes. Para $d\lambda_\alpha + \sum_{\beta=1}^{q} \lambda_\beta \omega_\beta^\alpha = 0, 1 \leq \alpha \leq q$, ter solução não nula, precisaremos impor certas condições na conexão.

Definição 3.11. Seja $\mathcal{C}$ uma curva parametrizada em M e X um campo vetorial tangente ao longo de $\mathcal{C}$. Se a seção s do fibrado vetorial E em $\mathcal{C}$ satisfazer $Ds = 0$, então diremos que s é paralelo ao longo da curva $\mathcal{C}$.

Observação 3.15. Suponha que a curva $\mathcal{C}$ seja expressa em coordenadas locais da vizinha coordenada U de M por $u_i = u_i(t), 1 \leq i \leq m$. Então o campo vetorial tangente de $\mathcal{C}$ é

$$X = \sum_{i=1}^{m} \frac{du_i}{dt} \frac{\partial}{\partial u_i}.$$

Seja S uma referencial local em U. Então $s = \sum_{\alpha=1}^{q} \lambda_\alpha s_\alpha$ é uma seção paralela ao longo de $\mathcal{C}$ se, e somente se, satisfaz o sistema de equações

$$\langle X, Ds\rangle = \sum_{\alpha=1}^{q} \left(\frac{d\lambda_\alpha}{dt} + \sum_{\beta=1}^{q} \Gamma_{\beta i}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial u_i}\right).$$

Isto é, $\frac{d\lambda_\alpha}{dt} + \sum_{\beta=1}^{q} \Gamma_{\beta i}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial u_i} = 0, 1 \leq \alpha \leq q.$

Claro que, como se trata de um sistema de equações diferenciais ordinárias, as soluções dos problemas de valores iniciais existem e são únicas. Logo, se qualquer vetor $v \in E_p$ é dado em um ponto $p \in \mathcal{C}$, então isto determina de maneira única um campo vetorial paralelo ao longo de $\mathcal{C}$ que será chamado de deslocamento paralelo de v ao longo de $\mathcal{C}$.

Proposição 3.9. *Uma conexão D em um fibrado vetorial E induz uma conexão D no fibrado dual E^*.*

Demonstração. Suponha $s \in \Gamma(E)$, $s^* \in \Gamma(E^*)$ e a paridade $\langle s, s^* \rangle$ é uma função suave em M, isto é, $\langle s, s^* \rangle = s^*(s)$.Seja a referencial local $S = \left(s_1, \ldots, s_q\right)^t$ em E e a referencial local dual $S^* = \left(s_1^*, \ldots, s_q^*\right)^t$ em E^* , então

$$\left\langle s_\alpha, s_\beta^* \right\rangle = \delta_\alpha^\beta, 1 \leq \alpha, \beta \leq q.$$

Tomemos como conexão D induzida em E^* determinada pela igualdade

$$\langle s, Ds^* \rangle = d \langle s, s^* \rangle - \langle Ds, s^* \rangle$$

na qual $\langle , \rangle$ no lado direito ainda significa a paridade entre E e E^*.

Notemos que de fato,

$$\begin{aligned}
\langle s, D(s_1^* + s_2^*) \rangle &= d \langle s, s_1^* + s_2^* \rangle - \langle Ds, s_1^* + s_2^* \rangle \\
&= d \langle s, s_1^* \rangle + d \langle s, s_2^* \rangle - \langle Ds, s_1^* \rangle - \langle Ds, s_2^* \rangle \\
&= \langle s, Ds_1^* \rangle + \langle s, Ds_2^* \rangle = \langle s, Ds_1^* + Ds_2^* \rangle
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle s, D(\alpha s^*) \rangle &= d \langle s, \alpha s^* \rangle - \langle Ds, \alpha s^* \rangle \\
&= d\alpha \langle s, s^* \rangle + \alpha d \langle s, s^* \rangle + \alpha \langle Ds, s^* \rangle \\
&= \langle s, d\alpha \otimes s^* \rangle + \alpha \left(d \langle s, s^* \rangle + \langle Ds, s^* \rangle \right) \\
&= \langle s, d\alpha \otimes s^* \rangle + \alpha \langle s, Ds^* \rangle \\
&= \langle s, d\alpha \otimes s^* + \alpha Ds^* \rangle .
\end{aligned}$$

Portanto, por definição, D é uma conexão. $\square$

Observação 3.16. As seguintes observações sobre a discussão de induzir uma conexão são pertinentes

a) Dada as condições da proposição 3.9. Seja $Ds_\beta^* = \sum_{\gamma=1}^{q} {\omega^*}_\gamma^\beta \otimes s_\gamma^*$, então temos

$$\begin{aligned}
\left\langle s_\alpha, Ds_\beta^* \right\rangle &= d \left\langle s_\alpha, s_\beta^* \right\rangle - \left\langle Ds_\alpha, s_\beta^* \right\rangle \\
&= d\delta_\alpha^\beta - \left\langle Ds_\alpha, s_\beta^* \right\rangle = - \left\langle Ds_\alpha, s_\beta^* \right\rangle
\end{aligned}$$

Da mesma forma que $\left\langle s_\alpha, s_\beta^* \right\rangle = \delta_\alpha^\beta$, teremos $\left\langle s_\alpha, Ds_\beta^* \right\rangle = {\omega^*}_\alpha^\beta$ e $\left\langle Ds_\alpha, s_\beta^* \right\rangle = \omega_\alpha^\beta$. Assim, ${\omega^*}_\alpha^\beta = -\omega_\alpha^\beta$ e $Ds_\beta^* = - \sum_{\alpha=1}^{q} \omega_\alpha^\beta \otimes s_\alpha^*$.

Se a seção s^* de E^* é expressa localmente como

$$s^* = \sum_{\alpha=1}^{q} x_\alpha s_\alpha^*,$$

então, usando das propriedades de conexão de D e $Ds^*_\beta = -\sum_{\alpha=1}^{q}\omega_\alpha^\beta \otimes s^*_\alpha$, temos

$$Ds^* = \sum_{\alpha=1}^{q}\left(dx_\alpha - \sum_{\beta=1}^{q} x_\beta \omega_\alpha^\beta\right)\otimes s_\alpha.$$

b) Suponha que as conexões D sejam separadamente dadas em fibrados vetoriais E_1 e E_2.

Suponha $s_1 \in \Gamma(E_1), s_2 \in \Gamma(E_2)$. Então $s_1 \oplus s_2$ e $s_1 \otimes s_2$ são secções de $E_1 \oplus E_2$ e $E_1 \otimes E_2$, respectivamente. Definamos

$$\begin{cases} D(s_1 \oplus s_2) & = & Ds_1 \oplus Ds_2 \\ D(s_1 \otimes s_2) & = & Ds_1 \otimes s_2 + s_1 \otimes Ds_2 \end{cases}$$

as equações que determinam as conexões em $E_1 \oplus E_2$ e $E_1 \otimes E_2$, respectivamente. São essas conexões chamadas conexão induzida em $E_1 \oplus E_2$ e conexão induzida em $E_1 \otimes E_2$.

3.3 CONEXÕES AFINS

O fibrado tangente $T(M)$ é um fibrado vetorial m-dimensional determinado intrinsecamente pela estrutura diferenciável de uma variedade suave m-dimensional M. Então podemos definir uma conexão afim como segue.

Definição 3.12. Seja M uma variedade suave m-dimensional e $T(M)$ o fibrado tangente associado a M. Definamos a conexão afim como na definição 3.5 no fibrado vetorial $T(M)$. Isto é

$$D : \Gamma(T(M)) \to \Gamma(T^*(M) \otimes T(M))$$

satisfazendo as seguintes condições.

a) Para qualquer $s_1, s_2 \in \Gamma(T(M))$

$$D(s_1 + s_2) = Ds_1 + Ds_2.$$

b) Para qualquer $s \in \Gamma(T(M))$ e qualquer $\alpha \in C^\infty(M)$

$$D(\alpha s) = d\alpha \otimes s + \alpha Ds.$$

Em suma, a conexão afim nada mais é que uma conexão definida em $T(M)$.

Uma variedade com uma dada conexão afim chamaremos de espaço da conexão afim.

É importante frisar que de agora em diante adotaremos a convenção da soma de Einstein para facilitar e evitar uma notação densa. isto é, estaremos trocando

$$\sum_k \alpha_i^k \alpha_k^j \text{ por } \alpha_i^k \alpha_k^j$$

ou ainda

$$\sum_j M_i^j v_j \text{ por } M_i^j v_j.$$

no qual todos os índices assumem valores inteiros variando de 1 até m. Estaremos expressando o símbolo de somatório apenas em casos de ambiguidade.

Iniciaremos essa seção com uma breve discussão.

Suponha M um espaço de conexão afim com uma dada conexão D. Tomemos um sistema de coordenadas qualquer $(U; u_i)$ de M. Então a base natural $\left\{ s_i = \dfrac{\partial}{\partial u_i}, 1 \leq i \leq m \right\}$ forma uma referencial local do fibrado tangente $T(M)$ em U. Logo podemos assumir que

$$Ds_i = \omega_i^j \otimes s_j = \Gamma_{ik}^j du_k \otimes s_j,$$

na qual Γ_{ik}^j são funções suaves em U, chamadas os coeficientes da conexão D com respeito as coordenadas locais u_i.

Suponhamos agora $(W; w_i)$ seja outro sistema de coordenadas locais de M. Tomemos $s_i' = \dfrac{\partial}{\partial w_i}$. Como consequência da mudança de coordenadas locais teremos a seguinte fórmula em $U \cap W \neq \emptyset$

$$S' = J_{WU} S,$$

na qual J_{WU}é a matriz jacobiana da mudança de coordenadas locais de $S = (s_1, \ldots, s_m)^t$. Do resultado $\omega' = dAA^{-1} + A\omega A^{-1}$ obtemos

$$\omega' = dJ_{WU} J_{WU}^{-1} + J_{WU} \omega J_{WU}^{-1}$$

isto é,

$$\omega'^j_i = d\left(\frac{\partial u_p}{\partial w_i}\right) \frac{\partial w_j}{\partial u_p} + \frac{\partial u_p}{\partial w_i} \frac{\partial w_j}{\partial u_q} \omega_p^q$$

na qual $\omega'^j_i = \Gamma'^j_{ik} dw_k$. Logo, a abrindo ambos os lados da igualdade, temos

$$\begin{aligned}
\Gamma'^j_{ik} dw_k &= d\left(\frac{\partial u_p}{\partial w_i}\right)\frac{\partial w_j}{\partial u_p} + \frac{\partial u_p}{\partial w_i}\frac{\partial w_j}{\partial u_q}\Gamma^q_{pr} du_r = \left(\frac{\partial^2 u_p}{\partial w_k \partial w_i} dw_k\right)\frac{\partial w_j}{\partial u_p} + \frac{\partial u_p}{\partial w_i}\frac{\partial w_j}{\partial u_q}\Gamma^q_{pr} du_r \\
&= \frac{\partial^2 u_p}{\partial w_k \partial w_i}\frac{\partial w_j}{\partial u_p} dw_k + \frac{\partial u_p}{\partial w_i}\frac{\partial w_j}{\partial u_q}\Gamma^q_{pr}\frac{\partial u_r}{\partial w_k} dw_k \\
&= \left(\frac{\partial^2 u_p}{\partial w_k \partial w_i}\frac{\partial w_j}{\partial u_p} + \Gamma^q_{pr}\frac{\partial u_p}{\partial w_i}\frac{\partial w_j}{\partial u_q}\frac{\partial u_r}{\partial w_k}\right) dw_k
\end{aligned}$$

Logo, a transformação dos coeficientes Γ'^j_{ik} da conexão sob essa mudança de variável é

$$\Gamma'^j_{ik} = \frac{\partial^2 u_p}{\partial w_k \partial w_i}\frac{\partial w_j}{\partial u_p} + \Gamma^q_{pr}\frac{\partial u_p}{\partial w_i}\frac{\partial w_j}{\partial u_q}\frac{\partial u_r}{\partial w_k}.$$

Observação 3.17. A formula obtida na discussão acima indica que Γ'^j_{ik} não é um campo tensorial em M e, portanto, os coeficientes da conexão serem nulos em um ponto de M não é uma propriedade invariante. Isto é, pode existir um sistema de coordenadas tal que os coeficientes da conexão sejam zero em um ponto dado. Este fato será muito útil para cálculos envolvendo conexões.

O proposito principal para introduzir as noções de conexões afins em M é podermos realizar a diferencial de um campo tensorial.

Definição 3.13. Seja X um campo vetorial suave em M expresso em coordenadas locais com $X = x_i \dfrac{\partial}{\partial u_i}$. Então, por definição,

$$\begin{aligned}
DX &= D\left(x_i \frac{\partial}{\partial u_i}\right) = dx_i \otimes \frac{\partial}{\partial u_i} + x_i D\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right) = dx_i \otimes \frac{\partial}{\partial u_i} + x_i\left(\omega^j_i \otimes \frac{\partial}{\partial u_j}\right) \\
&= dx_i \otimes \frac{\partial}{\partial u_i} + x_j \omega^i_j \otimes \frac{\partial}{\partial u_i} = \left(dx_i + x_j \omega^i_j\right) \otimes \frac{\partial}{\partial u_i} \\
&= \left(\frac{\partial x_i}{\partial u_k} du_k + x_j \Gamma^i_{jk} du_k\right) \otimes \frac{\partial}{\partial u_i} = x^i{}_{,k}\, du_k \otimes \frac{\partial}{\partial u_i},
\end{aligned}$$

no qual $x^i{}_{,k} = \dfrac{\partial x_i}{\partial u_k} + x_j \Gamma^i_{jk}$. Deste modo DX é a seção do fibrado vetorial $T^*(M) \otimes T(M)$. Isto é, DX é um campo $(1,1)$-tensorial em M. Chamaremos DX por diferencial absoluta de X.

Sob coordenadas locais u_i, a referencial dual local do fibrado cotangente é

$$s^*_i = du_i, 1 \leq i \leq m,$$

isto é, o dual de $\left\{s_1 = \dfrac{\partial}{\partial u_i}, 1 \leq i \leq m\right\}$. Sabemos que $D_\beta = -\displaystyle\sum_{\alpha=1}^{q} \omega^\beta_\alpha \otimes s^*_\alpha$ temos

$$Ds^*_i = -\omega^i_j \otimes s^*_j = -\Gamma^i_{jk} du_k \otimes du_j.$$

Definição 3.14. Se um campo vetorial cotangente α em M é expresso em coordenadas locais como $\alpha = \alpha_i du_i$, então

$$D\alpha = \left(d\alpha_i - \alpha_j \omega_i^j\right) \otimes du_i = \alpha_{i,j} du_j \otimes du_i$$

no qual $\alpha_{i,j} = \dfrac{\partial \alpha_i}{\partial u_j} - \alpha_k \Gamma_{ij}^k$. $D\alpha$ é um campo $(0,2)$-tensorial que chamemos de diferencial absoluta do campo vetorial cotangente α.

Observação 3.18. Em geral, se t é um campo (r,s)-tensorial, então a imagem de t sob a conexão induzida D é um campo $(r, s+1)$-tensorial Dt, chamada diferencial absoluta de t.

A diferencial absoluta de um campo escalar é definido sendo sua própria diferencial ordinária.

Exemplo 3.1. Suponha t um campo $(2,1)$-tensorial expresso como

$$t = t_k^{ij} du_k \otimes \frac{\partial}{\partial u_i} \otimes \frac{\partial}{\partial u_j}$$

sob as coordenadas locais u_i. De $D(s_1 \otimes s_2) = Ds_1 \otimes s_2 + s_1 \otimes Ds_2$, temos

$$\begin{aligned} Dt &= dt_k^{ij} \otimes du_k \otimes \frac{\partial}{\partial u_i} \otimes \frac{\partial}{\partial u_j} + t_k^{ij} D\left(du_k\right) \otimes \frac{\partial}{\partial u_i} \otimes \frac{\partial}{\partial u_j} \\ &+ t_k^{ij} du_k \otimes D\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right) \otimes \frac{\partial}{\partial u_j} + t_k^{ij} du_k \otimes \frac{\partial}{\partial u_i} \otimes D\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right) \\ &= \left(dt_k^{ij} - t_l^{ij}\omega_k^l + t_k^{lj}\omega_l^i + t_k^{il}\omega_l^j\right) \otimes du_k \otimes \frac{\partial}{\partial u_i} \otimes \frac{\partial}{\partial u_j} \\ &= t_{k,h}^{ij} du_h \otimes du_k \otimes \frac{\partial}{\partial u_i} \otimes \frac{\partial}{\partial u_j}, \end{aligned}$$

no qual $t_{k,h}^{ij} = \dfrac{\partial t_k^{ij}}{\partial u_h} - t_l^{ij}\Gamma_{kh}^l + t_k^{lj}\Gamma_{lh}^i + t_k^{il}\Gamma_{lh}^j$.

Definição 3.15. Seja $\mathcal{C}$ uma curva parametrizada em M, tal que $u_i = u_i(t)$ e $X(t)$ o campo vetorial tangente definido em $\mathcal{C}$ dado por

$$X(t) = x_i(t)\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_{\mathcal{C}(t)}.$$

Diremos que $X(t)$ é paralelo ao longo de $\mathcal{C}$ se sua diferencial absoluta ao longo de $\mathcal{C}$ é nula, isto é, se

$$\frac{DX}{dt} = 0.$$

Se os vetores tangentes de uma curva $\mathcal{C}$ são paralelos ao longo de $\mathcal{C}$, então diremos que $\mathcal{C}$ é uma curva paralela a si mesma ou geodésica.

A equação $\dfrac{DX}{dt} = 0$ é equivalente ao sistema de equações $\dfrac{dx_i}{dt} + x_j \Gamma_{jk}^i \dfrac{du_k}{dt} = 0$. Esse é um sistema de EDO's de primeira ordem. Logo, um dado vetor tangente X em qualquer ponto em

$\mathcal{C}$ nos devolve um campo vetorial tangente paralelo, chamado deslocamento paralelo de X ao longo da curva $\mathcal{C}$.

Observação 3.19. Um deslocamento paralelo ao longo de $\mathcal{C}$ estabelece um isomorfismo entre os espaços tangentes em quaisquer dois pontos em $\mathcal{C}$.

Se $\mathcal{C}$ é uma geodésica, então seu vetor tangente

$$X(t) = x_i(t)\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_{\mathcal{C}(t)}$$

é paralelo ao longo de $\mathcal{C}$. Portanto, a curava geodésica deve satisfazer

$$\frac{d^2u_i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{du_j}{dt}\frac{du_k}{dt} = 0.$$

Este é um sistema de EDO's de segunda ordem. Logo, existe uma única geodésica que passa em um dado ponto de M o qual é tangente a um dado vetor tangente neste ponto.

Discutiremos agora a matriz da curvatura Ω de uma conexão afim.

Como $\omega^j_i = \Gamma^j_{ik}du_k$, temos

$$\begin{aligned} d\omega^j_i - \omega^h_i \wedge \omega^j_h &= \frac{\partial\Gamma^j_{ik}}{\partial u_l}du_l \wedge du_k - \Gamma^h_{il}\Gamma^j_{hk}du_l \wedge du_k \\ &= -\left(\frac{\partial\Gamma^j_{ik}}{\partial u_l} - \Gamma^h_{il}\Gamma^j_{hk}\right)du_k \wedge du_l \end{aligned}$$

Notemos tambem que

$$\begin{aligned} d\omega^j_i - \omega^h_i \wedge \omega^j_h &= \frac{\partial\Gamma^j_{il}}{\partial u_k}du_k \wedge du_l - \Gamma^h_{ik}\Gamma^j_{hl}du_k \wedge du_l \\ &= \left(\frac{\partial\Gamma^j_{il}}{\partial u_k} - \Gamma^h_{ik}\Gamma^j_{hl}\right)du_k \wedge du_l \end{aligned}$$

Então, podemos escrever

$$d\omega^j_i - \omega^h_i \wedge \omega^j_h = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Gamma^j_{il}}{\partial u_k} - \frac{\partial\Gamma^j_{ik}}{\partial u_l} + \Gamma^h_{il}\Gamma^j_{hk} - \Gamma^h_{ik}\Gamma^j_{hl}\right)du_k \wedge du_l$$

Portanto, $\Omega^j_i = \frac{1}{2}R^j_{ikl}du_k \wedge du_l$, no qual $R^j_{ikl} = \frac{\partial\Gamma^j_{il}}{\partial u_k} - \frac{\partial\Gamma^j_{ik}}{\partial u_l} + \Gamma^h_{il}\Gamma^j_{hk} - \Gamma^h_{ik}\Gamma^j_{hl}$.

Se $(W; w_i)$, é outro sistema de coordenadas de M, então o referencial local em W, $S' = \left(\frac{\partial}{\partial w_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial w_m}\right)^t$, é relacionada a S em $U \cap W \neq \emptyset$ por

$$S' = J_{WU}S.$$

Por $\Omega' = A\Omega A^{-1}$, temos

$$\Omega' = J_{WU}\Omega J^{-1}_{WU},$$

no qual Ω' é a matriz curvatura da conexão D sob o sistema de coordenadas $(W; w_i)$. Componente a componente da equação acima podemos escrever

$$\begin{aligned}
\Omega'^j_i &= \Omega^q_p \frac{\partial u_p}{\partial w_i}\frac{\partial w_j}{\partial u_q} = \left(\frac{1}{2}R^q_{prs}du_r \wedge du_s\right)\frac{\partial u_p}{\partial w_i}\frac{\partial w_j}{\partial u_q} \\
&= \frac{1}{2}R^q_{prs}\left(\frac{\partial u_r}{\partial w_k}dw_k \wedge \frac{\partial u_s}{\partial w_l}dw_l\right)\frac{\partial u_p}{\partial w_i}\frac{\partial w_j}{\partial u_q} \\
&= \frac{1}{2}R^q_{prs}\frac{\partial w_j}{\partial u_q}\frac{\partial u_p}{\partial w_i}\frac{\partial u_r}{\partial w_k}\frac{\partial u_s}{\partial w_l}dw_k \wedge dw_l.
\end{aligned}$$

Por outro lado, $\Omega'^j_i = \dfrac{1}{2}R'^j_{ikl}dw_k \wedge dw_l$. Logo, $R'_{ikl} = R^q_{prs}\dfrac{\partial w_j}{\partial u_q}\dfrac{\partial u_p}{\partial w_i}\dfrac{\partial u_r}{\partial w_k}\dfrac{\partial u_s}{\partial w_l}$.

Notemos que na análise tensorial clássica, usamos para definir uma transformação entre os coeficientes de dois (r, s)-tensores como

$$x^{j_1\ldots j_r}_{l_1\ldots l_s} = \overline{x}^{i_1\ldots i_r}_{k_1\ldots k_s}\alpha^{j_1}_{i_1}\cdots\alpha^{j_r}_{i_r}\beta^{l_i}_{k_1}\cdots\beta^{l_s}_{k_s}$$

e, de fato, R'_{ikl} satisfaz a regra de transformação para as componentes de $(1, 3)$-tensores. Portanto,

$$R = R_{ikl}\frac{\partial}{\partial u_j} \otimes du_i \otimes du_k \otimes du_l$$

e independe da escolha das coordenadas locais.

Definição 3.16. Dada as condições da discussão acima,

$$R = R_{ikl}\frac{\partial}{\partial u_j} \otimes du_i \otimes du_k \otimes du_l$$

é chamado tensor curvatura da conexão afim D.

Observação 3.20. Sabemos que para quaisquer dois campos vetoriais tangentes suave X e Y em M temos o operador curvatura $R(X, Y)$ o qual leva um campo vetorial tangente em M em outro campo vetorial tangente em M. Pelo teorema 3.5 temos $R(X, Y) = D_X D_Y - D_Y D_X + D_{[X,Y]}$. Agora podemos expressar $R(X, Y)$ em termos do tensor curvatura.

Suponha X, Y, Z sejam campos vetoriais tangentes com expressões locais $X = X_i\dfrac{\partial}{\partial u_i}$, $Y = Y_i\dfrac{\partial}{\partial u_i}$ e $Z = Z_i\dfrac{\partial}{\partial u_i}$. Então

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Z &= Z_i\left\langle X \wedge Y, \Omega^j_i\right\rangle\frac{\partial}{\partial u_j} = Z_i\left\langle\left(X_k\frac{\partial}{\partial u_k}\right) \wedge \left(Y_l\frac{\partial}{\partial u_l}\right), \frac{1}{2}R^j_{ikl}du_k \wedge du_l\right\rangle\frac{\partial}{\partial u_j} \\
&= Z_1\frac{1}{2}R^j_{ikl}X_k Y_l\frac{\partial}{\partial u_j} = \frac{1}{2}R^j_{ikl}Z_1 X_k Y_l\frac{\partial}{\partial u_j}
\end{aligned}$$

Notemos então que

$$\left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial u_k}, \frac{\partial}{\partial u_l}\right)\frac{\partial}{\partial u_i}, du_j\right\rangle = \left\langle\left\langle\frac{\partial}{\partial u_k}\wedge\frac{\partial}{\partial u_l}, \Omega_i^j\right\rangle\frac{\partial}{\partial u_j}, du_j\right\rangle$$
$$\left\langle R_{ikl}^j\frac{\partial}{\partial u_j}, du_j\right\rangle = R_{ikl}^j.$$

Sabemos que os coeficientes Γ_{ik}^j da conexão não satisfazem a regra de transformação para tensores como foi definido. No entanto, podemos definir

$$T_{ik}^j = \Gamma_{ik}^j - \Gamma_{ki}^j.$$

Como $\Gamma'^j_{ik} = \dfrac{\partial^2 u_p}{\partial w_k \partial w_i}\dfrac{\partial w_j}{\partial u_p} + \Gamma_{pr}^q\dfrac{\partial u_p}{\partial w_i}\dfrac{\partial w_j}{\partial u_q}\dfrac{\partial u_r}{\partial w_k}$, então

$$\begin{aligned}
T'^j_{ik} &= \Gamma'^j_{ik} - \Gamma'^j_{ki} = \frac{\partial^2 u_p}{\partial w_k \partial w_i}\frac{\partial w_j}{\partial u_p} + \Gamma_{pr}^q\frac{\partial u_p}{\partial w_i}\frac{\partial w_j}{\partial u_q}\frac{\partial u_r}{\partial w_k} - \frac{\partial^2 u_p}{\partial w_i \partial w_k}\frac{\partial w_j}{\partial u_p} - \Gamma_{pr}^q\frac{\partial u_p}{\partial w_k}\frac{\partial w_j}{\partial u_q}\frac{\partial u_r}{\partial w_i} \\
&= \Gamma_{pr}^q\frac{\partial u_p}{\partial w_i}\frac{\partial w_j}{\partial u_q}\frac{\partial u_r}{\partial w_k} - \Gamma_{pr}^q\frac{\partial u_p}{\partial w_k}\frac{\partial w_j}{\partial u_q}\frac{\partial u_r}{\partial w_i} = \Gamma_{pr}^q\frac{\partial u_p}{\partial w_i}\frac{\partial w_j}{\partial u_q}\frac{\partial u_r}{\partial w_k} - \Gamma_{rp}^q\frac{\partial u_r}{\partial w_k}\frac{\partial w_j}{\partial u_q}\frac{\partial u_p}{\partial w_i} \\
&= \left(\Gamma_{pr}^q - \Gamma_{rp}^q\right)\frac{\partial u_p}{\partial w_i}\frac{\partial w_j}{\partial u_q}\frac{\partial u_r}{\partial w_k} = T_{pr}^q\frac{\partial u_p}{\partial w_i}\frac{\partial w_j}{\partial u_q}\frac{\partial u_r}{\partial w_k}.
\end{aligned}$$

Assim, T_{ik}^j satisfaz a regra da transformação para as componentes de $(1,2)$-tensores.

Definição 3.17. Nas condições da discussão acima, definamos

$$T = T_{ik}^j\frac{\partial}{\partial u_j}\otimes du_i \otimes du_k.$$

T é um $(1,2)$-tensor que chamaremos por tensor torção da conexão afim D.

Observação 3.21. Por $T_{ik}^j = \Gamma_{ik}^j - \Gamma_{ki}^j$, vemos que as componentes do tensor torção T são antissimétricas com respeito aos índices de baixo, isto é,

$$T_{ik}^j = -T_{ki}^j.$$

Sendo um $(1,2)$-tensor, T pode ser visto como uma aplicação de $\Gamma(T(M)) \times \Gamma(T(M))$ em $\Gamma(T(M))$, isto é

$$\begin{aligned}
T : \Gamma(T(M)) \times \Gamma(T(M)) &\to \Gamma(T(M)) \\
(X, Y) &\mapsto T(X,Y) = T_{ij}^k X_i Y_j \frac{\partial}{\partial u_k}.
\end{aligned}$$

Proposição 3.10. $T(X,Y) = D_X Y - D_Y X - [X,Y]$.

Definição 3.18. Se o tensor torção de uma conexão afim D é zero, então a conexão é chamada conexão afim livre de torção.

Proposição 3.11. *Uma conexão afim livre de torção sempre existe.*

Demonstração. Sejam Γ^j_{ik} os coeficientes de uma conexão D. Então tome

$$\widetilde{\Gamma}^j_{ik} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^j_{ik} + \Gamma^j_{ki}\right).$$

Notemos que $\widetilde{\Gamma}^j_{ik}$ definido dessa forma é simétrico com respeito aos índices inferiores e satisfaz

$$\Gamma'^j_{ik} = \Gamma^q_{pr}\frac{\partial w_j}{\partial u_1}\frac{\partial u_p}{\partial w_i}\frac{\partial u_r}{\partial w_k} + \frac{\partial^2 u_p}{\partial w_i \partial w_k}\frac{\partial w_j}{\partial u_p}$$

sob uma mudança de coordenadas locais. Portanto, $\widetilde{\Gamma}^j_{ik}$ são os coeficientes de alguma conexão $\widetilde{D}$, e $\widetilde{D}$ é livre de torção. □

Proposição 3.12. *Qualquer conexão pode ser decomposta em uma soma de um múltiplo de seus tensores torção e uma conexão livre de torção.*

Demonstração. Sejam Γ^j_{ik} os coeficientes de uma conexão D. Então

$$T^j_{ik} = \Gamma^j_{ki} - \Gamma^j_{ik} \text{ e } \widetilde{\Gamma}^j_{ik} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^j_{ik} + \Gamma^j_{ki}\right).$$

Notemos que

$$\widetilde{\Gamma}^j_{ik} - \frac{1}{2}T^j_{ik} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^j_{ik} + \Gamma^j_{ki}\right) + \frac{1}{2}\left(\Gamma^j_{ik} - \Gamma^j_{ki}\right) = \Gamma^j_{ik}.$$

Então, dados X e Z campos vetoriais tangentes em M, uma rápida conta nos devolve que $D_X Z = \frac{1}{2}T(X,Z) + \widetilde{D}_X Z$. □

Observação 3.22. A equação geodésica $\frac{d^2u_i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{du_j}{dt}\frac{du_k}{dt} = 0$ equivale a $\frac{d^2u_i}{dt^2} + \widetilde{\Gamma}^j_{ik}\frac{du_j}{dt}\frac{du_k}{dt} = 0$. Logo, a conexão D e a conexão livre de torção $\widetilde{D}$ correspondente tem as mesmas geodésicas.

Os próximos teoremas nos indicaram propriedades desejáveis das conexões afins livres de torção.

Teorema 3.8. *Suponha D uma conexão afim livre de torção em M. Então, para qualquer ponto $p \in M$ existe um sistema de coordenadas locais u_i tal que os coeficientes Γ^j_{ik}da conexão correspondente se anulam em p.*

Demonstração. Seja que $(W; w_i)$ é um sistema de coordenadas locais em p com coeficientes Γ'^j_{ik}. Seja

$$u_i = w_i + \frac{1}{2}\Gamma'^j_{ik}(p)(w_j - w_j(p))(w_k - w_k(p)). \tag{3.1}$$

Então $\left.\frac{\partial u_i}{\partial w_j}\right|_p = \left.\frac{\partial w_i}{\partial w_j}\right|_p = \delta^i_j$ e $\left.\frac{\partial^2 u_i}{\partial w_j \partial w_k}\right|_p = \Gamma'^j_{ik}(p)$. Logo, a matriz $\left(\frac{\partial u_i}{\partial w_j}\right)$ é não degenerada em uma vizinhança de p e (3.1) provê uma mudança de coordenadas local em uma vizinhança de p. Como

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial w_j \partial w_k} = \Gamma'^j_{ik} = \Gamma^q_{pr}\frac{\partial w_j}{\partial u_1}\frac{\partial u_p}{\partial w_i}\frac{\partial u_r}{\partial w_k} + \frac{\partial^2 u_p}{\partial w_i \partial w_k}\frac{\partial w_j}{\partial u_p},$$

pra toda combinação de índices em p. Então os coeficientes da conexão no novo sistema de coordenadas u_i satisfaz $\Gamma^j_{ik}(p) = 0, 1 \leq i, j, k \leq m$. $\square$

Teorema 3.9. *Suponha D uma conexão afim livre de torção em M. Então temos a identidade de Bianchi*

$$R^j_{ikl,h} + R^j_{ilh,k} + R^j_{ihk,l} = 0.$$

Demonstração. Do teorema 3.6 temos que a matriz curvatura satisfaz $d\Omega = \omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \omega$. Então, $d\Omega^j_i = \omega^k_i \wedge \Omega^j_k - \Omega^k_i \wedge \omega^j_k$, isto é,

$$\frac{\partial R^j_{ikl}}{\partial\partial u_h} du_h \wedge du_k \wedge du_l = \left(\Gamma^p_{ih} R^j_{pkl} - \Gamma^i_{ph} R^p_{ikl}\right) du_h \wedge du_k \wedge du_l.$$

Assim,

$$R^j_{ikl,h} du_h \wedge du_k \wedge du_l = -\left(\Gamma^p_{kh} R^j_{ipl} - \Gamma^p_{lh} R^j_{ikp}\right) du_h \wedge du_k \wedge du_l = 0$$

no qual a última igualdade estamos usando a propriedade de livre torção da conexão. Então

$$\left(R^j_{ikl,h} + R^j_{ilh,k} + R^j_{ihk,l}\right) du_h \wedge du_k \wedge du_l = 0. \tag{3.2}$$

Como os coeficientes da equação (3.2) são antissimétricos com respeito a k, l, h, concluímos que

$$R^j_{ikl,h} + R^j_{ilh,k} + R^j_{ihk,l} = 0. \tag{3.3}$$

$\square$

Observação 3.23. Do resultado $R(X, Y) = D_X D_Y - D_Y D_X - D_{[X,Y]}$ sabemos que quando o quociente diferencial absoluto de segunda ordem de um campo vetorial tangente é calculado, o efeito da mudança da ordem da diferenciação é mensurado pelo tensor curvatura. Existe um resultado similar para campos tensoriais.

Primeiro assumiremos que f é um campo escalar em M. Então

$$f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial u_i}, \; f_{,ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} - \Gamma^k_{ij} f_{,k}$$

Logo, $f_{,ij} - f_{,ji} = T^k_{ij} f_{,k}$.

Se X é um campo vetorial tangente em M expresso localmente por $X = X_i \dfrac{\partial}{\partial u_i}$, então

$$X_{i,p} = \frac{\partial X_i}{\partial u_p} + X_j \Gamma^i_{jp}, \; X_{i,pq} = \frac{\partial X_{i,p}}{\partial u_q} + X_{j,p} \Gamma^i_{jq} - X_{i,l} \Gamma^l_{pq}.$$

Assim, $X_{i,pq} - X_{i,qp} = -X_j R^i_{jpq} + X_{i,l} T^l_{pq}$.

Analogamente, para um $(1, 2)$-tensor t, temos $t^{ij}_{k,pq} - t^{ij}_{k,qp} = -t^{lj}_k R^i_{lpq} - t^{il}_k R^j_{lpq} + t^{ij}_l R^l_{kpq} + t^{ij}_{k,l} T^l_{pq}$.

Vale ressaltar que a formula da comutação para diferenciais absolutas é completamente determinada pelo tensor curvatura e tensor torção.

3.4 CONEXÕES EM FIBRADOS REFERENCIAIS

Definição 3.19. Seja M uma variedade diferenciável m-dimensional. Chamaremos de referencial uma combinação linear da forma $(p; e_1, \ldots, e_m)$ no qual p é um ponto de M e $e_1, \ldots, e_m$ são m vetores tangentes linearmente independentes em p. O conjunto de todos os referenciais em M é denotado por P. (P, M, π) é chamado fibrado referencial em M no qual π é uma aplicação suave de P em M definida por $\pi(p; e_1, \ldots, e_m) = p$ chamada projeção natural.

Introduziremos uma estrutura diferenciável em P tal que P seja uma variedade suave.

Suponha $(U; u_i)$ uma vizinhança coordenada qualquer de M. Então exste uma referencial natural $\left(\frac{\partial}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u_m}\right)$ em U. Assim, qualquer estrutura $(p; e_1, \ldots, e_m)$ em U pode ser escrito como

$$e_i = X_i^k \left(\frac{\partial}{\partial u_k}\right)_p, 1 \leq i \leq m,$$

no qual $\left(X_i^k\right)$ é uma matriz $m \times m$ não degenerada e, portanto, um elemento de $GL(m, \mathbb{R})$. Logo, podemos definir uma aplicação $x_U : U \times GL(m, \mathbb{R}) \to \pi^{-1}(U)$ tal que para qualquer $p \in U$ e $\left(X_i^k\right) \in GL(m, \mathbb{R})$ temos

$$x_U(p, X_i^k) = (p; e_1, \ldots, e_m),$$

no qual $e_i = X_i^k \left(\frac{\partial}{\partial u_k}\right)_p$, $1 \leq i \leq m$. x_U é injetiva.

Agora escolha uma cobertura coordenada $\{U, W, Z, \ldots\}$ de M com a correspondente aplicação

$$\begin{array}{rccl} x_U : & U \times GL(m, \mathbb{R}) & \to & \pi^{-1}(U) \\ & (p, X_i^k) & \mapsto & x_U(p, X_i^k) = (p; e_1, \ldots, e_m) \end{array}$$

na qual $(p; e_1, \ldots, e_m) = \left(p; X_1^k \left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)_p, \ldots, X_m^k \left(\frac{\partial}{\partial u_m}\right)_p\right)$. A imagem de todos os conjuntos abertos no produto topológico $U \times GL(m, \mathbb{R})$ sob x_U formam uma base topológica para P. Com respeito a essa estrutura topológica de P, a aplicação x_U é um homeomorfismo.

Observação 3.24. Através da aplicação x_U, $\pi^{-1}(U)$ torna-se uma vizinhança coordenada em P com sistema de coordenadas local $\left(u_i, X_i^k\right)$.

Se $U \cap W \neq \emptyset$, então M tem mudança de coordenadas local em $U \cap W$

$$w_i = w_i(u_1, \ldots, u_m), 1 \leq i \leq m.$$

A base natural correspondente satisfaz

$$\frac{\partial}{\partial u_i} = \frac{\partial w_j}{\partial u_i} \frac{\partial}{\partial w_j}.$$

Se $(p; e_1, \dots, e_m)$ é uma estrutura em $U \cap W$, então suas coordenadas $\left(u_i, X_i^k\right)$ e $\left(w_i, Y_i^k\right)$ sob os dois sistemas de coordenadas satisfazem a seguinte relação

$$x_U\left(u_i, X_i^k\right) = x_W\left(w_i, Y_i^k\right),$$

isto é, w_i e u_i se relacionam por $w_i = w_i(u_1, \dots, u_m)$, $X_i^k \dfrac{\partial}{\partial u_i} = Y_i^k \dfrac{\partial}{\partial w_i}$ ou ainda $Y_i^k = X_i^j \dfrac{\partial w_k}{\partial u_j}$. Logo, essas relações constituem as fórmulas da transformação coordenada para a variedade P.

Observação 3.25. w_i e Y_i^k são todas funções suaves de u_i e X_i^k. Assim, as vizinhanças coordenadas $\pi^{-1}(U)$ e $\pi^{-1}(W)$ são C^∞-compatíveis. Portanto, P torna-se uma variedade suave $(m + m^2)$-dimensional e a projeção natural $\pi : P \to M$ é uma aplicação sobrejetiva suave.

A equação $x_U(p, X_i^k) = (p; e_1, \dots, e_m)$ nos mostra que a aplicação x_U provê uma estrutura produto local da variedade P, o que significa que $\pi^{-1}(U)$ é difeomorfo ao produto direto $U \times GL(m; \mathbb{R})$.

Para qualquer $p \in U$, seja $x_{U,p}(X) = x_U(p, X), X \in GL(m; \mathbb{R})$. Então $x_{U,p} : GL(m; \mathbb{R}) \to \pi^{-1}(p)$ é um homeomorfismo.

Se $U \cap W \neq \emptyset$, para $p \in U \cap W$, a aplicação $x_{W,p}^{-1} \circ x_{U,p}$ é um homeomorfismo de $GL(m; \mathbb{R})$ nele mesmo. Por

$$Y_i^k = X_i^j \frac{\partial w_k}{\partial u_j} \tag{3.4}$$

sabemos que $x_{W,p}^{-1} \circ x_{U,p}$ é precisamente a translação à direta da matriz jacobiana $J_{UW} = \left(\dfrac{\partial w_k}{\partial u_j}\right)$ em $GL(m; \mathbb{R})$. Logo, $\{J_{UW}\}$ formam uma família de funções de transição no fibrado referencial. Portanto, a fibrado referencial P é o fibrado principal associado com o fibrado tangente $T(M)$ de M. Sua fibra típica e estrutura de grupo são ambas $GL(m; \mathbb{R})$.

Observação 3.26. O fibrado referencial é um fixe de fibras que não é um fibrado vetorial.

Notemos que a estrutura de grupo $GL(m; \mathbb{R})$ age no fibrado referencial P de uma forma natural e forma um grupo de homeomorfismos em P.

Definição 3.20. Seja $a = \left(a_i^j\right) \in GL(m; \mathbb{R})$. Então $\det(a) \neq 0$. A ação L_a de a em P é definida por

$$L_a(p; e_1, \dots, e_m) = (p; e_1', \dots, e_m')$$

na qual $e_i' = a_i^j e_j$. Chamaremos La de translação à esquerda do elemento $a \in GL(m; \mathbb{R})$ em P.

Observação 3.27. Toda La é um homeomorfismo de P nele mesmo, e preserva as fibras, isto é, $\pi \circ L_a = \pi : P \to M$.

Se $a, b \in GL(m; \mathbb{R})$, então $Lab = La \circ Lb$.

Suponha $(U; u_i)$ e $(W; w_i)$ sejam dois sistemas de coordenadas em M com os sistemas de coordenadas correspondentes (u_i, X_i^k) e (w_i, Y_i^k) em P. Usando $\left(X^{*k}_i\right)$ e $\left(Y^{*k}_i\right)$ para denotarmos as matrizes inversas de $\left(X_i^k\right)$ e $\left(Y_i^k\right)$, respectivamente, isto é

$$X_i^k X^{*j}_k = X^{*k}_i X_k^j = \delta_i^j,$$
$$Y_i^k Y^{*j}_k = Y^{*k}_i Y_k^j = \delta_i^j.$$

Se $U \cap W \neq \emptyset$, então em $U \cap W$ temos

$$dw_i = \frac{\partial w_i}{\partial u_j} du_j.$$

Por $Y_i^k = X_i^j \dfrac{\partial w_k}{\partial u_j}$ temos

$$X^{*j}_i = \frac{\partial w_k}{\partial u_i} Y^{*j}_k. \tag{3.5}$$

Assim, $X^{*j}_i du_i = Y^{*j}_i dw_i \Rightarrow \theta_i = X^{*j}_i du_i$ é uma 1-forma que independe da escolha das coordenadas locais em P. Assim, θ_i é uma 1-forma diferencial em P.

Definição 3.21. Seja $\theta_i = 0, 1 \leq i \leq m$. Esse é um sistema Pfaffiano de equações que define um campo subespaço tangente m^2-dimensional de V em P e determina em cada ponto um subespaço tangente m^2-dimensional chamado espaço vertical.

De $\theta_i = X^{*j}_i du_i$ obtemos $du_i = X_i^j \theta_j$. Logo, o sistema de equações $\theta_i = 0, 1 \leq i \leq m$, é equivalente a $du_i = 0, 1 \leq i \leq m$, em toda vizinhança coordenada $\pi^{-1}(U)$, e o sistema pfaffiano de equações é completamente integrável.

Definição 3.22. Definiremos como variedade integral máximo do sistema pfaffiano de equações $\theta_i = 0, 1 \leq i \leq m$

$$u_i = c \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq m,$$

no qual é a fibra $\pi^{-1}(p)$, $p \in M$, de P.

Observação 3.28. Assim, o espaço vertical é o espaço tangente de cada fibra.

Agora, suponha que M seja um espaço de conexão afim m-dimensional com conexão D. Suponha a matriz conexão de D sob o sistema de coordenadas local $(U; u_i)$ e seja $\omega = \left(\omega_i^j\right)$. Então a diferencial absoluta do campo vetorial $e_i = X^{*k}_i \dfrac{\partial}{\partial du_k}$ é

$$De_i = \left(dX_i^k + X_i^j \omega_j^k\right) \otimes \frac{\partial}{\partial u_k}.$$

Se olharmos as X_i^k como variáveis independentes, então

$$DX_i^k = dX_i^k + X_i^j \omega_j^k$$

é uma 1-forma diferencial na vizinhança coordenada $\pi^{-1}(U)$ de P.

Agora, encontraremos um conjunto de 1-formas diferenciais determinadas pela conexão D e definida em toda a variedade P.

Seja $(W; w_i)$ outro sistema de coordenadas locais de M. Se $U \cap W \neq \emptyset$, então em $U \cap W$ temos,

$$Y_i^k = X_i^j \frac{\partial w_k}{\partial u_j}.$$

Logo, de $\omega'^j_i = d\left(\frac{\partial u_p}{\partial w_i}\right)\frac{\partial w_j}{\partial u_p} + \frac{\partial u_p}{\partial w_i}\frac{\partial w_j}{\partial u_q}\omega_p^q$, podemos escrever

$$\begin{aligned} dY_i^k + Y_i^j \omega'^k_j &= dX_i^j \frac{\partial w_k}{\partial u_j} + X_i^j d\left(\frac{\partial w_k}{\partial u_j}\right) + Y_i^j \left(d\left(\frac{\partial u_h}{\partial w_j}\right)\frac{\partial w_k}{\partial u_h} + \frac{\partial u_h}{\partial w_j}\omega_p^h \frac{\partial w_k}{\partial u_p}\right) \\ &= \left(dX_i^j + X_i^l \omega_l^j\right)\frac{\partial w_k}{\partial u_j}, \end{aligned}$$

Isto é, $DY_i^k = DX_i^j \frac{\partial w_k}{\partial u_j}$. Assim, como $X^{*j}_i = \frac{\partial w_k}{\partial u_i} Y^{*j}_k$, temos

$$Y^{*j}_k DY_i^k = X^{*j}_k DX_i^k.$$

Assim, a 1-forma diferencial $\theta_i^j = X^{*j}_k DX_i^k = X^{*j}_k\left(dX_i^k + X_i^l \omega_l^k\right)$ é independente da escolha do sistema de coordenadas local e, portanto, é uma 1-forma diferencial em P.

Como (u_i, X_i^j) é um sistema de coordenadas local em P, então (du_i, dX_i^j) são coordenadas do espaço tangente em um ponto de P. Portanto, $(u_i, X_i^k; du_i, dX_i^k)$ é um sistema de coordenadas local do fibrado tangente em P. Agora, θ_i com θ_i^k são $m + m^2$ 1-formas diferenciais definidas em P. Elas pode ser expressas como combinações lineares de du_i e dX_i^k em qualquer vizinhança coordenada $\pi^{-1}(U)$ e vice-versa. Logo, θ_i e θ_i^k são linearmente independentes em todo ponto, isto é, $\{\theta_i, \theta_i^k\}$ formam uma referencial dual em toda P no qual o dual é uma referencial global em P.

Observação 3.29. Em geral, pode não existir uma referencial global em M. Como sempre existe uma conexão afim em M, então sempre existe uma referencial global em uma fibrado referencial P. Nesse sentido, a variedade P é mais simples que M.

Sob o sistema de coordenadas local $(U; u_i)$, obtemos de $\theta_i = X^{*i}_j du_j$ e $\theta_i^j = X^{*j}_k\left(dX_i^k + X_i^l \omega_l^k\right)$ que

$$\begin{cases} du_i &= X_j^i \theta_j, \\ dX_i^j &= -X_i^k \omega_k^j + X_k^j \theta_i^k. \end{cases}$$

Calculando a diferencial exterior de $du_i = X_j^i \theta_j$ temos

$$0 = dX_j^i \wedge \theta_j + X_j^i d\theta_j = X_j^i\left(d\theta_j - \theta_k \wedge \theta_k^j\right) - X_k^p X_l^q \Gamma_{pq}^i \theta_l \wedge \theta_k.$$

Assim

$$d\theta_j - \theta_k \wedge \theta^j_k = X^{*j}_{\ r} X^p_k X^q_l \Gamma^r_{pq} \theta_l \wedge \theta_k = \frac{1}{2} X^{*j}_{\ r} X^p_k X^q_l T^r_{pq} \theta_k \wedge \theta_l \tag{3.6}$$

no qual, T^r_{pq} é o tensor torção definido por $T^r_{pq} = \Gamma^r_{qp} - \Gamma^r_{pq}$.

Analogamente, calculando a diferencial exterior de $dX^j_i = -X^k_i \omega^j_k + X^j_k \theta^k_i$, temos

$$0 = -X^k_i \Omega^j_k + X^j_k \left(d\theta^k_i - \theta^l_i \wedge \theta^k_l \right).$$

Então,

$$d\theta^j_i - \theta^l_i \wedge \theta^j_l = X^{*j}_{\ h} X^k_i \Omega^h_k = \frac{1}{2} X^{*j}_{\ q} X^p_i X^s_l R^q_{prs} \theta_k \wedge \theta_l \tag{3.7}$$

no qual R^q_{prs} é o tensor curvatura definido por $R^q_{prs} = \dfrac{\partial \Gamma^q_{ps}}{\partial u_r} - \dfrac{\partial \Gamma^q_{pr}}{\partial u_s} + \Gamma^h_{ps}\Gamma^q_{hr} - \Gamma^h_{pr}\Gamma^q_{hs}$.

Sejam

$$\begin{cases} P^j_{kl} = X^{*j}_{\ r} X^p_k X^q_l T^r_{pq}, \\ S^j_{ikl} = X^{*j}_{\ q} X^p_i X^r_k X^s_l R^q_{prs}. \end{cases} \overset{(3.6)\text{ e }(3.7)}{\Longrightarrow} \begin{cases} d\theta_j - \theta_k \wedge \theta^j_k = \dfrac{1}{2} P^j_{kl} \theta_k \wedge \theta_l, \\ d\theta^j_i - \theta^k_i \wedge \theta^j_k = \dfrac{1}{2} S^j_{ikl} \theta_k \wedge \theta_l. \end{cases}$$

Pela definição de P^j_{kl} e S^j_{ikl}, como dependem de termos que não dependem da escolha das coordenadas locais, os mesmos também são independentes da escolha das coordenadas locais. Essas equações assim definidas são validas em todo fibrado referencial P.

Definição 3.23. Sob as condições da discussão acima, seja P um fibrado referencial. O sistema de equações

$$\begin{cases} d\theta_j - \theta_k \wedge \theta^j_k = \dfrac{1}{2} P^j_{kl} \theta_k \wedge \theta_l, \\ d\theta^j_i - \theta^k_i \wedge \theta^j_k = \dfrac{1}{2} S^j_{ikl} \theta_k \wedge \theta_l. \end{cases}$$

chamaremos de equações estruturais da conexão.

Para a estrutura natural $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial u_i} \right\}$ temos $X^k_i = X^{*k}_{\ i} = \delta^k_i$. Portanto, o sistema de equações estruturais da conexão torna-se

$$\begin{cases} -du_k \wedge \omega^j_k = \dfrac{1}{2} T^j_{kl} du_k \wedge du_l, \\ d\omega^j_i - \omega^k_i \wedge \omega^j_k = \dfrac{1}{2} R^j_{ikl} du_k \wedge du_l. \end{cases}$$

restrito a estrutura natural.

Se denotarmos

$$\begin{cases} \Theta_j & = & \frac{1}{2}P^j_{kl}\theta_k \wedge \theta_l, \\ \\ \Theta^j_i & = & \frac{1}{2}S^j_{ikl}\theta_k \wedge \theta_l. \end{cases}$$

Então as equações estruturais tornam-se

$$\begin{cases} \Theta_j & = & d\theta_j - \theta_k \wedge \theta^j_k, \\ \\ \Theta^j_i & = & d\theta^j_i - \theta^k_i \wedge \theta^j_k. \end{cases}$$

Calculando a diferencial exterior mais uma vez, obtemos

$$\begin{cases} d\Theta_j + \Theta_k \wedge \theta^j_k - \theta_k \wedge \Theta^j_k = 0, \\ \\ d\Theta^j_i + \Theta^k_i \wedge \theta^j_k - \theta^k_i \wedge \Theta^j_k = 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

Essas equações também são chamadas por identidade de Bianchi.

Observação 3.30. Sabemos que as formas diferenciais θ_i são determinadas pela estrutura diferenciável de M. A importância das equações estruturais é que elas dão uma condição suficiente para as m^2 formas diferenciais definirem uma conexão afim em M.

Para demonstrar próximo teorema, precisaremos do seguinte resultado.

Lema 3.1. *Sejam V um espaço vetorial real n-dimensional, $\{v^*_1, \dots, v^*_r\}$ e $\{w^*_1, \dots, w^*_r\}$ sejam dois conjuntos de V^* tal que*

$$\sum_{\alpha=1}^{r} v^*_\alpha \wedge w^*_\alpha = 0. \tag{3.9}$$

Se os elementos do conjunto $\{v^*_1, \dots, v^*_r\}$ são linearmente independentes, então

$$w^*_\alpha = \sum_{\beta=1}^{r} a_{\alpha\beta} v_\beta, 1 \leq \alpha \leq r, \tag{3.10}$$

de modo que $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$.

Teorema 3.10. *Sejam $\theta^j_i, 1 \leq i, j \leq m$, m^2 1-formas diferenciais no fibrado referencial P. Se estas 1-formas e as θ_i satisfizerem as equações estruturais*

$$\begin{cases} d\theta_i - \theta_j \wedge \theta^i_j & = & \frac{1}{2}P^i_{kl}\theta_k \wedge \theta_l, \\ \\ d\theta^j_i - \theta^k_i \wedge \theta^j_k & = & \frac{1}{2}S^j_{ikl}\theta_k \wedge \theta_l, \end{cases}$$

na qual P^j_{kl} e S^j_{ikl} são funções definidas em P, então existe uma conexão afim D tal que θ^j_i e D são relacionados de modo que $\theta^j_i = X^{*j}_{\ k} DX^k_i$.

Demonstração. Escolha um sistema de coordenadas local (u_i, X^k_i) em P. Então $\theta_i = X^{*i}_{\ k} du_k$, no qual $\left(X^{*i}_{\ k}\right)$ é a matriz inversa de $\left(X^i_k\right)$. Portanto,

$$d\theta_i = dX^{*i}_{\ k} \wedge du_k = \left(dX^{*i}_{\ k} X^k_j\right) \wedge \theta_j = -X^{*i}_{\ k} dX^k_j \wedge \theta_j.$$

Utilizando esta igualdade em $d\theta_i - \theta_j \wedge \theta^i_j = \frac{1}{2} P^i_{jk} \theta_k \wedge \theta_l$ temos

$$\theta_j \wedge \left(\theta^j_i + \frac{1}{2} P^i_{jk} \theta_k - X^{*i}_{\ k} dX^k_j\right) = 0.$$

Como θ_j são linearmente independentes, pelo lema de Cartan 3.1, $\theta^i_j - X^{*i}_{\ k} DX^k_j$ são uma combinação linear de θ_l. Logo, podemos assumir que

$$X^k_j \theta^j_i - dX^k_i = \omega^k_j X^j_i,$$

no qual ω^k_j são combinações lineares de θ_l e, portanto, de du_i.

Seja $\omega^k_j = \Gamma^k_{ji} du_i$, no qual Γ^k_{ji} são funções em P. Provaremos que as Γ^k_{ji} são funções de u_i e independem de X^j_i, então Γ^k_{ji} são os coeficientes de alguma conexão sobe as coordenadas locais u_i.

De fato, aplicando a diferencial exterior em $X^k_j \theta^j_i - dX^k_i = \omega^k_j X^j_i$, obtemos

$$dX^k_j \wedge \theta^j_i + X^k_j d\theta^j_i = d\omega^k_j X^j_i - \omega^k_j \wedge dX^j_i.$$

Usando o sistema proposto no enunciado do teorema, equação acima pode ser simplificada para

$$X^j_i \left(d\omega^k_j - \omega^l_j \wedge \omega^k_l\right) = \frac{1}{2} X^k_j S^j_{ilh} \theta_l \wedge \theta_h.$$

Notemos que no lado direito da igualdade temos apenas uma dependência das formas diferenciais du_i. No lado esquerdo, $d\omega^k_j$ e $\omega^l_j \wedge \omega^k_l$ também depende apenas de du_i. Como $\omega^k_j = \Gamma^k_{ji} du_i$, temos

$$d\omega^k_j = \sum_{i,j} \frac{\partial \Gamma^k_{ji}}{\partial u_l} du_l \wedge du_i + \sum_{i,l,h} \frac{\partial \Gamma^k_{ji}}{\partial X^h_l} dX^h_l \wedge du_i.$$

Como $d\omega^k_j$ dependem apenas de du_i, temos $\frac{\partial \Gamma^k_{ji}}{\partial X^h_l} = 0$ pela unicidade de escrita para espaço de dimensão finita. Logo, Γ^k_{ji} depende apenas do sistema de coordenadas locais u_i.

Suponha $(W; w_i)$ é outra vizinhança coordenada de M. Então (w_i, Y^k_i) é o sistema de coordenadas local de P em $\pi^{-1}(W)$. Se $U \cap W \neq \emptyset$, então em $U \cap W$ temos

$$\theta^j_i = X^{*j}_{\ k} dX^k_i + X^{*j}_{\ k} \omega^k_l X^l_i = Y^{*j}_{\ k} dY^k_i + Y^{*j}_{\ k} \omega'^k_{\ l} Y^l_i,$$

no qual $\omega'^k_{\ l} = \Gamma'^k_{li} dw_j$ e Γ'^k_{li} são funções de w_i apenas. Aplicando $Y^k_i = X^j_i \frac{\partial w_k}{\partial u_j}$ na equação obtida acima, temos

$$\omega'^j_i = d\left(\frac{\partial u_p}{\partial w_i}\right)\frac{\partial w_j}{\partial u_p} + \frac{\partial u_p}{\partial w_i}\frac{\partial w_j}{\partial u_p}\omega^q_p.$$

Assim, fica claro que $\left(\omega^j_i\right)$ de fato define uma conexão afim D em M, tal que $\left(\omega^j_i\right)$ é a matriz conexão de D sob o sistema de coordenadas local $(U; u_i)$. $\square$

Definição 3.24. O sistema pfaffiano de equações

$$\theta_i = 0, 1 \leq i \leq m,$$

definem o campo do espaço vertical V em P. Chamaremos de espaço horizontal o subespaço tangente m-dimensional $H(x)$ determinado pelo sistema pfaffiano de equações

$$\theta^i_j = 0.1 \leq i, j \leq m,$$

em cada ponto $x \in P$. A distribuição m^2-dimensional H determinada pelo sistema de equações acima é chamada campo dos espaços horizontais.

Proposição 3.13. *Seja H o campo dos espaços horizontais determinado pela conexão afim D no fibrado referencial P. Então H tem as seguintes propriedades*

a) Em qualquer ponto $x \in P$, o espaço tangente $T_x(P)$ pode ser decomposto na soma direta

$$T_x(P) = V(x) \oplus H(x)$$

e a imagem do espaço horizontal $H(x)$ sob a projeção π é isomorfo ao espaço tangente $T_p(M)$ em que $p = \pi(x)$.

b) H é invariante sob a translação à esquerda $La, a \in GL(m; \mathbb{R})$, em P. Isto é, para qualquer $x \in P$, temos

$$(L_a)_* H(x) = H(L_a(x)).$$

Demonstração. a) Como a dimensão de $V(x)$ é m e a dimensão de $H(x)$ é m^2, então é evidente que a soma das dimensões de $V(x)$ e $H(x)$ é exatamente a dimensão de $T_x(P)$, $m^2 + m$. Portanto, basta mostrarmos que $V(x) \cap H(x) = 0$ para demonstrarmos que $T_x(P) = V(x) \oplus H(x)$. Seja $X \in V(x) \cap H(x)$. Das definições dos espaços horizontal e vertical temos

$$\theta_i(X) = 0,\ \theta^i_j(X) = 0,\ 1 \leq i, j \leq m.$$

Como $\left\{\theta_i, \theta^i_j\right\}$ forma uma referencial dual em P, então $X = 0$. Portanto, $T_x P$ é uma soma direta de $V(x)$ e $H(x)$.

Notemos que a aplicação $\pi : P \to M$ é uma sobrejeção suave. Então $\pi_* : T_x(P) \to T_{p=\pi(x)}(M)$ é um homomorfismo sobrejetivo. Como $\pi_*(V(x)) = 0$, então $\pi_* : T_x(P) \to T_p(M)$ é um isomorfismo assegurando assim a propriedade (a).

b) Para demonstrarmos a segunda propriedade precisamos apenas expressar a translação à esquerda La nas coordenadas locais do fibrado referencial.

Seja U uma vizinhança coordenada de M com coordenadas locais u_i. Então as coordenadas locais do fibrado referencial P na vizinhança coordenada $\pi^{-1}(U)$ são (u_i, X_j^i).

Suponhamos que a estrutura $(p; e_i')$ seja a imagem de $(p; e_i)$ sob La, na qual $e_i' = a_i^j e_j$. Seja

$$e_i' = X'^j_i \frac{\partial}{\partial u_j}.$$

Desta forma $X'^j_i = a_i^k X_k^j$ e $X'^{*k}_i \left(a^{-1}\right)^j_k$, no qual $\left(X'^{*j}_i\right)$ é a matriz inversa de $\left(X'^j_i\right)$. Logo

$$X'^{*j}_k D X'^k_i = a_i^p \left(X^{*q}_k D X_p^k\right) \left(a^{-1}\right)^j_q,$$

isto é, $(L_a)^* \theta_i^j = a_i^p \left(a^{-1}\right)^j_q \theta_p^q$.

Além disso, o espaço horizontal H é o subespaço aniquilador de θ_i^j, $1 \leq i, j \leq m$. Portanto, $(L_a)^* \theta_i^j = a_i^p \left(a^{-1}\right)^j_q \theta_p^q$ implica que o campo do espaço horizontal H é invariante sob a translação à esquerda L_a. $\square$

Observação 3.31. Por outro lado, se nos são dados um subespaço tangente m-dimensional H de um fibrado referencial P que satisfaça as duas propriedades acima, então existe uma conexão D em M tal que H é o campo do espaço horizontal do fibrado referencial P com respeito a conexão D. Portanto, do ponto de vista do fibrado referencial, uma conexão afim é equivalente a um subespaço tangente m-dimensional que satisfaz as propriedades da proposição 3.13.

4 TEOREMA DE GAUSS-BONNET

Para finalmente falarmos do resultado principal deste trabalho, precisamos antes de algumas definições e conceitos iniciais da geometria riemanniana como seguem.

4.1 INTRODUÇÃO À GEOMETRIA RIEMANNIANA

Suponha M uma variedade suave m-dimensional, e G é um campo tensorial covariante de posto 2 em M. Se $(U; u_i)$ é um sistema de coordenadas locais em M, então o campo tensorial G pode ser expresso como

$$G = g_{ij} du_i \otimes du_j,$$

em U, no qual $g_{ij} = g_{ji}$ é uma função suave em U. G provê uma função bilinear em $T_p(M)$ em todo $p \in M$.

Definição 4.1. Sejam $X = X_i \dfrac{\partial}{\partial u_i}$, $Y = Y_i \dfrac{\partial}{\partial u_i}$ e G é um campo tensorial covariante de posto 2 em M tal que

$$G(X, Y) = g_{ij} X_i Y_j$$

e $g_{ij} = g_{ji}$. Diremos que o tensor G é não-degenerado no ponto $p \in M$ se sempre que $X \in T_p(M)$ e $G(X, Y) = 0$ para todo $Y \in T_p(M)$, então $X = 0$.

Observação 4.1. G é não degenerado em p se, e somente se. o sistema de equações lineares

$$g_{ij}(p) X_i = 0, 1 \leq j \leq m$$

tem zero como sua única solução, isto é, $\det(g_{ij}(p)) \neq 0$.

Definição 4.2. Se para todo $X \in T_p(M)$ temos

$$G(X, Y) \geq 0,$$

e a igualdade é assegurada apenas se $X = 0$, então diremos que o tensor G é positivo definido em p.

Observação 4.2. Da álgebra linear sabemos que uma condição suficiente e necessária para G ser positivo definido é que a matriz $\left(g_{ij}\right)$ seja positiva definida. Logo, um tensor G é positivo definido é necessariamente não-degenerado.

Definição 4.3. Seja uma variedade suave m-dimensional M recebe G, um campo tensorial covariante simétrico não-degenerado de posto 2 para todo ponto, então diremos que M uma variedade Riemanniana generalizada e G é um tensor fundamental ou tensor métrico de M. Se G é positivo definido, então M é uma variedade Riemanniana.

Observação 4.3. Para uma variedade Riemanniana generalizada M, $G(X, Y) = g_{ij}X_iY_j$ especifica um produto interno no espaço tangente $T_p(M)$ em todo $p \in M$.

Para quaisquer $X, Y \in T_p(M)$, seja

$$\langle X, Y\rangle_g = G(X, Y) = g_{ij}X_iY_j,$$

no qual $\langle\ ,\ \rangle$ é a notação de produto interno. Quando G é positivo definido, isso é significativo para definir o comprimento de um vetor tangente e o angulo entre dois vetores tangentes no mesmo ponto, isto é,

$$|X| = \sqrt{\langle X, X\rangle_g} = \sqrt{g_{ij}X_iX_j} \text{ e } cos\angle(X, Y) = \frac{\langle X, Y\rangle_g}{|X||Y|}.$$

Logo, uma variedade Riemanniana é uma variedade diferenciável a qual é munida de um produto interno positivo definido no espaço tangente em todo ponto. É preciso que o produto interno seja suave, isto é, se X e Y são campos vetoriais tangentes suaves, então $X \cdot Y$ é uma função suave em M.

Definição 4.4. Seja M uma variedade Riemanniana tal que G seja um tensor métrico de M. A 2-forma diferencial

$$ds^2 = g_{ij}du_idu_j$$

é independente da escolha do sistema de coordenadas local u_i e é usualmente chamada forma métrica ou métrica Riemanniana. ds é precisamente o comprimento de um vetor tangente infinitesimal chamado elemento de comprimento de arco. Isto é, seja $\mathcal{C}$ com uma curva parametrizada suave por partes em M de modo que suas coordenadas sejam $u_i = u_i(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, funções contínuas. Então o comprimento de arco de $\mathcal{C}$ é definido por

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ij}\frac{du_i}{dt}\frac{du_j}{dt}}dt.$$

Teorema 4.1. *Existe uma métrica Riemanniana em qualquer variedade suave m-dimensional M.*

Demonstração. Tome uma cobertura coordenada localmente finita $\{U_\alpha; u_{\alpha_i}\}$ de M. Suponha $\{h_\alpha\}$ seja a partição da unidade correspondente tal que $supph_\alpha \subset U_\alpha$. Seja

$$ds_\alpha^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(du_{\alpha_i}\right)^2 \text{ e } ds^2 = \sum_\alpha h_\alpha ds_\alpha^2,$$

no qual $h_\alpha ds_\alpha^2$ seja definido por

$$\left(h_\alpha ds_\alpha^2\right)(p) = \begin{cases} h_\alpha(p)ds_\alpha^2 & , \quad p \in U_\alpha, \\ 0 & , \quad p \notin U_\alpha. \end{cases}$$

As equações $= \sum_{i=1}^{m} \left(du_{\alpha_i}\right)^2$ e $ds^2 = \sum_\alpha h_\alpha ds_\alpha^2$ definem 2-formas diferenciais suaves em M.

Como o lado direito da segunda equação é uma soma de uma quantidade finita de termos em todo ponto $p \in M$, a fórmula tem sentido. Isto é, se escolhermos uma vizinhança coordenada $(U; u_i)$ tal que $\overline{U}$ seja compacto, então U intersecta-se apenas com um número finito n de U_α's, pois $\{U_\alpha\}$ é localmente finita. Portanto, a restrição de $ds^2 = \sum_\alpha h_\alpha ds_\alpha^2$ é

$$ds^2 = \sum_{\lambda=1}^{n} h_{\alpha_\lambda} ds_{\alpha_\lambda}^2 = g_{ij} du_i du_j$$

no qual $g_{ij} = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u_{\alpha_\lambda k}}{\partial u_i} \frac{\partial u_{\alpha_\lambda k}}{\partial u_j}$. Como $O \leq h_\alpha \leq 1$ e $\sum_\alpha h_\alpha = 1$, existe um índice β tal que $h_\beta(p) > 0$. Assim,

$$ds^2(p) \geq h_\beta ds_\beta^2.$$

Portanto, ds^2 é positiva definida em toda M. □

Observação 4.4. Em geral, pode não existir uma métrica Riemanniana não-positiva definida em M. No contexto de feixe de fibras, a existência de uma métrica Riemanniana em M implica a existência de uma seção suave positiva definida do fibrado de tensores covariantes simétricos de posto 2 em M. No entanto, para fibrados vetoriais arbitrários, pode não existir uma seção suave a qual é não nula em todo ponto.

Assuma M uma variedade Riemanniana generalizada. Quando mudamos o sistema de coordenadas local, a fórmula da transformação para as componentes do tensor fundamental G é

$$g'_{ij} = g_{kl} \frac{\partial u_k}{\partial u'_i} \frac{\partial u_l}{\partial u'_j}.$$

Como a matriz $\left(g_{ij}\right)$ é não-degenerada, então ela possui inversa a qual denotaremos por $\left(g^{ij}\right)$, isto é,

$$g^{ik} g_{kj} = g_{jk} g^{ki} = \delta_{ij}.$$

Então, a fórmula da transformação para g^{ij} sob uma mudança de coordenada é dada por

$$g'^{ij} = g^{kl} \frac{\partial u'_i}{\partial u_k} \frac{\partial u'_j}{\partial u_l}.$$

Desta forma, $\left(g^{ij}\right)$ é um tensor covariante simétrico de posto 2.

Observação 4.5. Podemos levar um espaço tangente em um espaço cotangente usando o tensor fundamental. Assim, um vetor covariante e um vetor contravariante podem ser vistos como expressões diferentes de um mesmo vetor.

Tome $X \in T_p(M)$ e seja

$$\alpha_X(Y) = G(X, Y), \ \ Y \in T_p(M).$$

Definido desta forma, α_X é um funcional linear em $T_p(M)$, isto é, $\alpha_X \in T_p^*(M)$. Por outro lado, como G é não-degenerado, qualquer elemento de $T_p^*(M)$ pode ser expresso na forma α_X. Logo, α estabelece um isomorfismo entre $T_p(M)$ e $T_p^*(M)$. olhando para cada componente, se

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial u_i}, \ \alpha_X = X_i du_i,$$

então obtemos de $\alpha_X(Y) = G(X, Y), \ Y \in T_p(M)$ que

$$X_i = g_{ij} X^j, \ X^j = g^{ij} X_i.$$

Além disso, se $\left(X^i\right)$ é um vetor contravariante, então (X_i) definido acima obedece à regra da transformação para vetores covariantes.

Definição 4.5. Dada as condições da observação 4.5 podemos definir de maneira genérica que se $\left(t^i_{jk}\right)$ é um $(1, 2)$-tensor, então

$$t_{ijk} = g_{il} t^l_{jk}, \ t^{ij}_k = g^{il} t^j_{lk}$$

são $(0, 3)$-tensor e $(2, 1)$-tensor, respectivamente. As operações acima são usualmente chamadas abaixamento e elevação de índices tensoriais, respectivamente.

Definição 4.6. suponha (M, G) seja uma variedade Riemanniana generalizada e D é uma conexão afim na variedade M. Se

$$DG = 0,$$

então chamaremos D de conexão métrica-compatível em (M, G).

Observação 4.6. A condição $DG = 0$ significa que o tensor fundamental G é paralelo com respeito as conexões métricas-compatíveis. Se a matriz conexão de D sob as coordenadas locais u_i é $\omega = \left(\omega_i^j\right)$, então

$$DG = \left(dg_{ij} - \omega_i^k g_{kj} - \omega_j^k g_{ik}\right) \otimes du_i \otimes du_j.$$

Logo, $DG = 0$ é equivalente a

$$dg_{ij} = \omega_i^k g_{kj} + \omega_j^k g_{ik}$$

ou, em notação matricial,

$$dG = \omega G + G\omega^t,$$

no qual

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & \cdots & g_{mm} \end{pmatrix} \text{ e } \omega = \begin{pmatrix} \omega_1^1 & \cdots & \omega_1^m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_m^1 & \cdots & \omega_m^m \end{pmatrix}.$$

Notemos que o significado geométrico das conexões métricas-compatíveis é que as translações paralelas preservam a métrica.

Proposição 4.1. *Seja (M, G) uma variedade Riemanniana, $\mathcal{C}$ uma curva parametrizada em M e D uma conexão métrica-compatível em (M, G). Então o comprimento de um vetor tangente e o angulo entre dois vetores são invariantes sob translações paralelas.*

Demonstração. Tome $X(t)$ e $Y(t)$ campos vetoriais paralelos ao longo da curva $\mathcal{C}$ com coordenadas $u_i = u_i(t), 1 \leq i \leq m$ com respeito a conexão métrica-compatível. Então

$$\begin{cases} \dfrac{dX_i}{dt} + \Gamma^i_{jk} X_j \dfrac{dX_k}{dt} = 0 \\ \\ \dfrac{dY_i}{dt} + \Gamma^i_{jk} Y_j \dfrac{dX_k}{dt} = 0 \end{cases}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(g_{ij} X_i Y_j\right) &= \frac{dg_{ij}}{dt} X_i Y_j + g_{ij} \frac{dX_i}{dt} Y_j + g_{ij} X_i \frac{dY_j}{dt} \\ &= \left(\frac{dg_{ij}}{dt} - g_{ik}\Gamma^k_{ih}\frac{du_h}{dt} - g_{jk}\Gamma^k_{ih}\frac{du_h}{dt}\right) X_i Y_j. \end{aligned}$$

Como $dg_{ij} = \omega_i^k g_{kj} + \omega_j^k g_{ik}$, então $\dfrac{dg_{ij}}{dt} = g_{ik}\Gamma^k_{ih}\dfrac{du_h}{dt} + g_{jk}\Gamma^k_{ih}\dfrac{du_h}{dt}$. logo,

$$\frac{d}{dt}\left(g_{ij} X_i Y_j\right) = 0.$$

Assim, ao longo de $\mathcal{C}$ temos $g_{ij} X_i Y_j = c \in \mathbb{R}$ constante. Portanto, o comprimento e o angulo entre vetores tangentes são invariantes sob translações paralelas em (M, G). □

O próximo resultado é o mais importante da geometria Riemanniana.

Teorema 4.2. *Seja M uma variedade Riemanniana generalizada m-dimensional. Então existe uma única conexão métrica-compatível livre de torção em M chamada conexão de Levi-Civita de M ou conexão Riemanniana de M.*

Demonstração. Seja D uma conexão métrica-compatível livre de torção em M. Denotaremos a matriz conexão de D sob as coordenadas locais u_i por $\omega = \left(\omega_i^j\right)$, no qual $\omega_i^j = \Gamma^j_{ik} du_k$.

Então temos

$$\begin{cases} dg_{ij} = & \omega_i^k g_{kj} + \omega_j^k g_{ik}, \\ \Gamma^j_{ik} = & \Gamma^j_{ki}. \end{cases} \tag{4.1}$$

Definamos

$$\begin{cases} \Gamma_{ijk} = & g_{lj}\Gamma^l_{ik}, \\ \omega_{ik} = & g_{lk}\omega^l_i. \end{cases}$$

Segue de (4.1) que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} & = & \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik}, \quad \dfrac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} & = & \Gamma_{ikj} + \Gamma_{kij}, \quad \dfrac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} & = & \Gamma_{jki} + \Gamma_{kji}, \\ \Gamma_{ijk} & = & \Gamma_{kji}. \end{cases} \tag{4.2}$$

Assim, usando do fato $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{kji}$, podemos notar que

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} = \Gamma_{ikj} + \Gamma_{kij} + \Gamma_{jki} + \Gamma_{kji} - \Gamma_{ijk} - \Gamma_{jik} = \Gamma_{ikj} + \Gamma_{jki} = 2\Gamma_{ikj}.$$

Assim, $\Gamma_{ikj} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}\right)$. Analogamente, $\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_l}\right)$. Logo, vemos que a conexão métrica-compatível livre de torção é determinado unicamente pelo tensor métrico.

Por outro lado, Γ^k_{ij} satisfaz a equação da transformação para coeficientes da conexão sob uma mudança de coordenadas local. Assim, elas definem uma conexão afim D em M. Notemos que $\frac{\partial g^{ij}}{\partial u_k} = \Gamma^j_{ik} + \Gamma^i_{jk}$. Portanto, D é uma conexão métrica-compatível livre de torção em M. □

Definição 4.7. Seja M uma variedade Riemanniana generalizada m-dimensional, D uma conexão métrica-compatível livre de torção e G o tensor métrico. Sob um sistema de coordenadas u_i,

$$\Gamma_{ikj} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}\right) \text{ e } \Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_l}\right)$$

são os chamados símbolos de Christoffel da primeira e segunda forma fundamental, respectivamente.

Observação 4.7. É conveniente usar uma referencial arbitrária ao invés da referencial natural em uma vizinhança de uma variedade Riemanniana. Uma referencial local em uma variedade é uma seção local de um feixe de fibras.

Seja $(e_1, \dots, e_m)$ uma referencial local com referencial dual $(\theta_1, \dots, \theta_m)$. Tome

$$De_i = \theta^j_i e_j,$$

no qual $\theta = \left(\theta^j_i\right)$ é a matriz conexão da conexão D com respeito a referencial $(e_1, \dots, e_m)$. Aqui os θ_i e θ^j_i são nada mais que as formas obtidas pelo pull das 1-formas diferenciais no feixe de fibras P de volta para seção local as quais usaremos os mesmos símbolos θ_i e θ^j_i para facilitar a identificação. Desta forma, pelas equações de estrutura das conexões sabemos que afirmar que D é uma conexão livre de torção é equivalente a afirmar que as 1-formas diferenciais θ^i_j satisfazem as equações

$$d\theta_i - \theta_j \wedge \theta^i_j = 0.$$

Se denotarmos $g_{ij} = G(e_i, e_j)$, então a forma métrica é $ds^2 = g_{ij}\theta_i\theta_j$. Como $G = g_{ij}\theta_i \otimes \theta_j$, $DG = \left(dg_{ij} - g_{ik}\theta_j^k - g_{kj}\theta_i^k\right) \otimes \theta_i \otimes \theta_j$. Portanto, a condição para D ser uma conexão métrica-compatível é ainda

$$dg_{ij} = \theta_i^k g_{kj} + \theta_j^k g_{ik}.$$

Pela observação 4.7 podemos reestruturar o teorema fundamental da geometria Riemanniana da seguinte forma.

Teorema 4.3. *Sejam (M, G) uma variedade Riemanniana generalizada e $\{\theta_i, 1 \leq i \leq m\}$ um conjunto de 1-formas diferenciais em uma vizinhança $U \subset M$ o qual é linearmente independente em toda U. Então existe um único conjunto de m^2 1-formas diferenciais θ_j^k em U tal que*

$$d\theta_i - \theta_j \wedge \theta_j^i = 0 \text{ e } dg_{ij} = \theta_i^k g_{kj} + \theta_j^k g_{ik},$$

igualdade essas as quais g_{ij} são as componentes de G com respeito a referencial dual $\{\theta_i\}$, isto é, $G = g_{ij}\theta_i \otimes \theta_j$

Observação 4.8. Seja M uma variedade Riemanniana e G positivo definido. Então podemos escolher uma referencial ortogonal $\{e_i, 1 \leq i \leq m\}$ em U com $g_{ij} = \delta_{ij}$, isto é,

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{m} (\theta_i)^2 .$$

A segunda fórmula $dg_{ij} = \theta_i^k g_{kj} + \theta_j^k g_{ik}$ então torna-se

$$\theta_i^j + \theta_j^i = 0,$$

o que implica que a matriz conexão $\theta = \left(\theta_i^j\right)$ é antissimétrica.

Recordemos que a equação $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik}$ pode ser escrito como

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} = g_{il}\Gamma_{jk}^l + g_{jl}\Gamma_{ik}^l \text{ ou } g_{ij,k} = 0.$$

Esta é outra forma da condição $DG = 0$. Isto implica que para uma conexão métrica-compatível o tensor métrica g_{ij} comporta-se como uma constante sob a aplicação da diferencial absoluta.

Por definição, a matriz curvatura da conexão de Levi-Civita ω é

$$\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega.$$

A aplicação da diferencial exterior de $dG = \omega G + G\omega^t$ nos rende

$$d\omega G - \omega \wedge dG + dG \wedge \omega^t + G(d\omega)^t = 0 \Rightarrow (d\omega - \omega \wedge \omega)\, G + G\,(d\omega - \omega \wedge \omega)^t = 0.$$

Isto é, $\Omega G + (\Omega G)^t = 0$.

Seja $\Omega_{ij} = \Omega_i^k g_{kj}$. Então $\omega G = \left(\Omega_{ij}\right)$ e podemos reescrever $\Omega G + (\Omega G)^t = 0$ como

$$\Omega_{ij} + \Omega_{ji} = 0,$$

isto é, Ω_{ij} é antissimétrica com respeito aos índices de baixo. Notemos que

$$\Omega_{ij} = d\omega_{ij} + \omega_i^l \wedge \omega_{jl}.$$

Pelo que vimos no capítulo sobre conexões temos também

$$\Omega_i^j R_{ikl}^j du_k \wedge du_l$$

no qual $R_{ikl}^j = \dfrac{\partial \Gamma_{il}^j}{\partial u_k} - \dfrac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial u_l} + \Gamma_{il}^h \Gamma_{hk}^j - \Gamma_{ik}^h \Gamma_{hl}^j$. Se agora temos

$$R_{ijkl} = R_{ikl}^h g_{hj},$$

então

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} R_{ijkl} du_k \wedge du_j \text{ e } R_{ijkl} = \frac{\partial \Gamma_{ijl}}{\partial u_k} - \frac{\partial \Gamma_{ijk}}{\partial u_l} + \Gamma_{ik}^h \Gamma_{jhl} - \Gamma_{il}^h \Gamma_{jhk}.$$

no qual R_{ijkl} é um tensor covariante de posto 4.

A discussão acima, nos inspira a seguinte definição.

Definição 4.8. Sob as condições da discussão acima e seja R_{ijkl} é um tensor covariante de posto 4 como discutido. R_{ijkl} é completamente determinado por uma dada métrica Riemanniana generalizada em M chamado tensor curvatura da variedade Riemanniana generalizada M.

O tensor curvatura tem propriedades muito especiais como podemos ver a seguir.

Teorema 4.4. *O tensor curvatura R_{ijkl} de uma variedade Riemanniana generalizada satisfaz as seguintes propriedades*

a) $R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk}$;

b) $R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0$;

c) $R_{ijkl} = R_{klij}$.

Corolário 4.1. *Sob as mesmas condições do teorema 4.4, temos*

$$R_{jkl}^i + R_{klj}^i + R_{ljk}^i = 0.$$

Observação 4.9. De $g_{ij,k} = 0$, obtemos

$$R_{ijkl,h} = \left(g_{jp} R_{ikl}^p\right)_{,h} = g_{jp} R_{ikl,h}^p.$$

Logo, usando o teorema 3.9, temos

$$R_{ijkl,h} + R_{ijlh,k} + R_{ijhk,l} = 0$$

também chamada de identidade de Bianchi.

O conceito de uma variedade Riemanniana pode ser generalizado para um fibrado vetorial Riemanniano como nos mostra a definição a seguir.

Definição 4.9. Seja (E, M, π) um fibrado vetorial real. Se para todo $p \in M$ nos for dado uma função bilinear simétrica não degenerada G na fibra $\pi^{-1}(p)$ e $G(X, Y)$ for uma função suave em M para quais quer duas secções suaves X e Y de E, então E é chamado de fibrado vetorial Riemanniano generalizado. Se G é positivo definido, então E é chamado de fibrado vetorial Riemanniano e G é chamado de estrutura Riemanniana em E

Observação 4.10. Assim como no teorema 4.1, sempre existe uma estrutura Riemanniana em qualquer fibrado vetorial real. De maneira similar, podemos definir o conceito de conexão métrica-compatível ou fibrado vetorial Riemanniano generalizado.

Um fibrado tensorial em uma variedade Riemanniana pode naturalmente ser visto como um fibrado vetorial Riemanniano.

Exemplo 4.1. Tome o fibrado tensorial $T_2^1(M)$. Se $a, b \in T_2^1(M)$ então o produto interno de a e b é

$$\langle a, b\rangle_g = \sum_{\substack{i,j,k \\ l,r,s}} g^{ij} g^{kl} g_{rs} a^r_{ik} b^s_{jl}.$$

4.2 DEMONSTRAÇÃO TEOREMA DE GAUSS-BONNET

Finalmente, demonstraremos o teorema de Gauss-Bonnet nessa seção. Esse é um teorema clássico da geometria diferencial global, o qual sua grande contribuição é estabelecer uma ligação entre as propriedades globais das variedades. Na seção iremos provar apenas o teorema, a versão equivalente ao enunciado clássico do teorema provado apenas para superfícies fechadas orientáveis, isto é, variedades Riemannianas fechadas orientáveis 2-dimensionais. A escolha é dada pelo fato de que é uma demonstração construtiva e a chave para sua generalização é o entendimento da demonstração para o caso 2-dimensional. Só então pode-se generalizar usando a mesma lógica da demonstração para o caso $2n$, isto é, variedades Riemannianas fechadas orientáveis de dimensão par. Além disso, o caso 2-dimensional torna-se lúdico e didático para visualizarmos o que está acontecendo de fato geometricamente. Neste capítulo estaremos usando $\langle \cdot, \cdot \rangle$ como o produto interno usual.

Suponha M uma variedade Riemanniana 2-dimensional orientada. Se escolhermos um referencial suave $\{e_1, e_2\}$ em uma vizinhança coordenada U cuja orientação com seja consistente com M, com correferecial $\{\theta_1, \theta_2\}$, então a métrica Riemanniana é

$$ds^2 = g_{ij}\theta_i\theta_j, \; 1 \leq i, j \leq 2,$$

no qual $g_{ij} = G(e_1, e_2)$. Pelo teorema fundamental da geometria Riemanniana existe um único conjunto de 1-formas diferenciais θ_i^j tal que

$$\begin{cases} d\theta_i - \theta_j \wedge \theta_j^i = 0, \\ dg_{ij} = g_{ik}\theta_j^k + g_{kj}\theta_i^k. \end{cases}$$

Então θ_i^j define a conexão de Levi-Civita em M

$$De_i = \theta_i^j e_j.$$

Seja $\Omega_{ij} = \Omega_i^k g_{kj}$. Então, da observação 4.7, temos $\Omega_{ij}+\Omega_{ji} = 0$. Assim, Ω_{ij} é antissimétrica. Dada a nossa restrição da dimensão da variedade, os índices i, j tomam apenas valores de 1 e 2, então o único elemento não-nulo na forma curvatura Ω_{ij} é Ω_{12}.

Consideremos a regra da transformação para Ω_{12} sob uma mudança de referencial local. Seja Ω denotando a matriz curvatura $\left(\Omega_i^j\right)$. Escreva

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}.$$

Se $\left(e_1', e_2'\right)$ é outro referencial local em uma vizinhança coordenada $W \subset M$ com orientação consistente com M, então em $U \cap W$, quando $U \cap W \neq \emptyset$,

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix},$$

no qual

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}, \; \det A > 0.$$

seja G' e Ω' denotando a métrica Riemanniana e matriz curvatura as correspondentes, respectivamente, com respeito ao referencial $\{e_1', e_2'\}$. Então

$$G' = AGA^t, \; \Omega' = A\Omega A^{-1},$$

no qual $\Omega' = A\Omega A^{-1}$ é a equação discutida após a definição 3.6. Logo, $\Omega' G' = A\left(\Omega G\right) A^t$. Isto é

$$\begin{pmatrix} 0 & \Omega_{12}' \\ -\Omega_{21}' & 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{12} \\ -\Omega_{21} & 0 \end{pmatrix} A^t,$$

Assim, $\Omega'_{12} = (\det A)\,\Omega_{12}$. Tambem obteremos de $G' = AGA^t$ e $\Omega' = A\Omega A^{-1}$, que

$$g' = \det G' = (\det A)^2 \det G = (\det A)^2\, g.$$

Assim, $\dfrac{\Omega'_{12}}{\sqrt{g'}} = \dfrac{\Omega_{12}}{\sqrt{g}}$. Em outras palavras, $\dfrac{\Omega_{12}}{\sqrt{g}}$ é independente da escolha do referencial local de orientação consistente e, portanto, um 2-forma diferencial exterior definida em toda a variedade.

Assim, temos a seguinte definição.

Definição 4.10. Sob as mesmas condições da discussão acima. Se escolhermos um sistema de coordenadas local u_i com a mesma orientação de M e $\{e_1, e_2\}$ seja a base natural, então

$$\Omega_{12} = \frac{1}{2} R_{12kl} du_k \wedge du_l = R_{1212} du_1 \wedge du_2.$$

Logo, $\dfrac{\Omega_{12}}{\sqrt{g}} = \dfrac{R_{1212}}{\sqrt{g}} du_1 \wedge du_2 = \dfrac{R_{1212}}{g}\sqrt{g} du_1 \wedge du_2$. Definiremos a curvatura gaussiana K pela equação

$$K d\sigma = -\frac{R_{1212}}{g}\sqrt{g} du_1 \wedge du_2,$$

na qual $d\sigma = \sqrt{g} du_1 \wedge du_2$ é o elemento de área orientado de M.

O teorema de Gauss-Bonnet se preocupa com a integrabilidade da forma diferencial $Kd\sigma$ em M.

Se $\{e_1, e_2\}$ é um regencial local ortogonal com uma orientação consistente a de M, então $g = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 = 1$. Logo,

$$K d\sigma = -\Omega_{12}.$$

Por outro lado, segue de $Ds^* = \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{q} \left(dx_\alpha - \sum_{\beta=1}^{q} x_\beta \omega_\alpha^\beta \right) \otimes s_\alpha^*$ que

$$\Omega_{12} = d\theta_{12} + \theta_1^i \wedge \theta_{2i}.$$

Como θ_i^j é antissimétrica, temos

$$\Omega_{12} = d\theta_{12},$$

no qual $\theta_{12} = \langle De_1, e_2 \rangle$. Segue da igualdade acima e $Kd\sigma = -\Omega_{12}$ que

$$K d\sigma = -d\theta_{12}.$$

Observação 4.11. Devemos salientar que enquanto existir um referencial ortogonal suave $\{e_1, e_2\}$ com uma orientação consistente com a de M em um aberto $U \subset M$, então existe uma forma conexão θ_{12} em U e assim $Kd\sigma = -d\theta_{12}$ está assegurado.

Proposição 4.2. *Em uma variedade Riemanniana* 2*-dimensional orientada, um referencial ortogonal suave com orientação consistente com a de M corresponde a um campo vetorial tangente que nunca se anula.*

Demonstração. Seja $\{e_1, e_2\}$ um referencial ortogonal suave com orientação consistente a de M. O vetor tangente no e_2 do referencial é obtido por uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ do vetor e_1 no sentido da orientação de M. Portanto, o referencial $\{e_1, e_2\}$ com uma orientação consistente a de M é equivalente ao campo vetorial tangente unitário e_1. $\square$

Definição 4.11. Um ponto $p \in M$ tal que um campo vetorial tangente X seja nulo, isto é, $X(p) = 0$ é o que chamaremos por ponto singular.

Agora, descreveremos o conceito de um índice de um campo vetorial tangente em um ponto singular.

Assuma que existe um campo vetorial suave X em U que tem exatamente um ponto singular p, isto é, $X(q) \neq 0$ quando $q \in U - \{p\}$. Então existe um campo vetorial tangente unitário suave

$$a_1 = \frac{X}{|X|}$$

no qual determina um referencial ortogonal $\{a_1, a_2\}$ com uma orientação consistente a de M em $U - \{p\}$. Portanto, se $\{e_1, e_2\}$ é um referencial ortogonal dado em U que tem também orientação consistente a M, então podemos assumir que

$$\begin{cases} a_1 = e_1 \cos\alpha + e_2 \operatorname{sen}\alpha, \\ a_2 = -e_1 \operatorname{sen}\alpha + e_2 \cos\alpha, \end{cases} \tag{4.3}$$

no qual $\alpha = \angle(e_1, a_1)$ é a forma angulo orientado de e_1 a a_1. α é uma função multi-valorada, mas em todo ponto a diferença entre dois valores de α é um múltiplo inteiro de 2π. Logo, pela diferenciabilidade do referencial e dos campos vetoriais, sempre existe um ramo contínuo de α em uma vizinhança de qualquer ponto. A função de um valor real é suave nesta vizinhança e a diferença entre quaisquer dois ramos contínuos de α é um múltiplo inteiro de 2π. Seja

$$\omega_{12} = \langle Da_1, a_2 \rangle.$$

Então, pelo sistema de equações (4.3) e a igualdade acima, temos

$$
\begin{aligned}
\omega_{12} &= \langle Da_1, a_2\rangle = \langle D(e_1\cos\alpha + e_2\,\text{sen}\,\alpha), -e_1\,\text{sen}\,\alpha + e_2\cos\alpha\rangle \\
&= \langle D(e_1\cos\alpha) + D(e_2\,\text{sen}\,\alpha), -e_1\,\text{sen}\,\alpha + e_2\cos\alpha\rangle \\
&= \langle d\cos\alpha\otimes e_1 + \cos\alpha De_1 + d\,\text{sen}\,\alpha\otimes e_2 + \text{sen}\,\alpha De_2, -e_1\,\text{sen}\,\alpha + e_2\cos\alpha\rangle \\
&= \langle -\text{sen}\,\alpha\,(d\alpha\otimes e_1), -e_1\,\text{sen}\,\alpha + e_2\cos\alpha\rangle + \\
&+ \langle \cos\alpha De_1, -e_1\,\text{sen}\,\alpha + e_2\cos\alpha\rangle + \\
&+ \langle \cos\alpha\,(d\alpha\otimes e_2), -e_1\,\text{sen}\,\alpha + e_2\cos\alpha\rangle + \\
&+ \langle \text{sen}\,\alpha De_2, -e_1\,\text{sen}\,\alpha + e_2\cos\alpha\rangle \\
&= \langle -\text{sen}\,\alpha\,(d\alpha\otimes e_1), -e_1\,\text{sen}\,\alpha\rangle + \langle -\text{sen}\,\alpha\,(d\alpha\otimes e_1), e_2\cos\alpha\rangle + \\
&+ \langle \cos\alpha De_1, -e_1\,\text{sen}\,\alpha\rangle + \langle \cos\alpha De_1, e_2\cos\alpha\rangle + \\
&+ \langle \cos\alpha\,(d\alpha\otimes e_2), -e_1\,\text{sen}\,\alpha\rangle + \langle \cos\alpha\,(d\alpha\otimes e_2), e_2\cos\alpha\rangle + \\
&+ \langle \text{sen}\,\alpha De_2, -e_1\,\text{sen}\,\alpha\rangle + \langle \text{sen}\,\alpha De_2, e_2\cos\alpha\rangle \\
&= \text{sen}^2\,\alpha\,\langle (d\alpha\otimes e_1), e_1\rangle - \text{sen}\,\alpha\cos\alpha\,\langle (d\alpha\otimes e_1), e_2\rangle + \\
&- \cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha\,\langle De_1, e_1\rangle + \cos^2\alpha\,\langle De_1, e_2\rangle + \\
&- \cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha\,\langle (d\alpha\otimes e_2), e_1\rangle + \cos^2\alpha\,\langle (d\alpha\otimes e_2), e_2\rangle + \\
&- \text{sen}^2\,\alpha\,\langle De_2, e_1\rangle + \text{sen}\,\alpha\cos\alpha\,\langle De_2, e_2\rangle \\
&= \text{sen}^2\,\alpha d\alpha - \cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha\theta_{11} + \cos^2\alpha\theta_{12} + \cos^2\alpha d\alpha - \text{sen}^2\,\alpha\theta_{21} + \text{sen}\,\alpha\cos\alpha\theta_{22} \\
&= \text{sen}^2\,\alpha d\alpha + \cos^2\alpha\theta_{12} + \cos^2\alpha d\alpha - \text{sen}^2\,\alpha\theta_{21} \\
&= d\alpha + \cos^2\alpha\theta_{12} + \text{sen}^2\,\alpha\theta_{12} \\
&= d\alpha + \theta_{12}.
\end{aligned}
$$

Suponha $\mathcal{D}$ um domínio simplesmente conexo contendo o ponto p cuja o bordo serja uma curva fechada simples suave $\mathcal{C} = \partial\mathcal{D}$. $\partial\mathcal{D}$ tem uma orientação induzida por M. Suponha o parâmetro comprimento de arco de $\mathcal{C}$ seja $s, 0 \leq s \leq L$, e a direção ao longo da curva conforme s aumenta seja a mesma direção induzida de $\mathcal{C}$. Então $\mathcal{C}(0) = \mathcal{C}(L)$. Como $\mathcal{C}$ é um conjunto compacto, pode ser coberto por uma quantidade finita de vizinhanças e exite um ramo contínuo de α em cada vizinhança. Assim, existe uma função $\alpha = \alpha(s), 0 \leq s \leq L$, em $\mathcal{C}$. Em geral, $\alpha(0) \neq \alpha(L)$ e a diferença entre qualquer duas funções de ramo é um múltiplo inteiro de 2π. Pelo teorema fundamental do cálculo, temos

$$\alpha(L) - \alpha(0) = \int_0^L d\alpha.$$

Mas $\alpha(L)$ e $\alpha(0)$ é o ângulo entre os dois vetores tangentes a_1 e e_1 no mesmo ponto $\mathcal{C}(0)$. Portanto, à esquerda da igualdade é um múltiplo inteiro de 2π e é independente da escolha do ramo contínuo de $\alpha(s)$. Isto também independe da escolha do referencial $\{e_1, e_2\}$.

Proposição 4.3. *O valor de* $\alpha(L) - \alpha(0) = \int_0^L d\alpha$ *independe da escolha da curva fechada simples* $\mathcal{C}$ *ao redor de* p.

Demonstração. Seja $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}$ e $\mathcal{D}_1 \neq \mathcal{D}$ tal que $\mathcal{D}_1$ seja outro domínio simplesmente conexo contendo p. Seja $\overset{\circ}{\mathcal{D}}_1$ o interior de $\mathcal{D}_1$. Então, $\mathcal{D} - \overset{\circ}{\mathcal{D}}_1$ é um domínio com bordo em M e seu bordo com orientação induzida é $\mathcal{C} - \mathcal{C}_1$. Por $\omega_{12} = d\alpha + \theta_{12}$ e pelo teorema de Stokes para formas diferenciais, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}-\mathcal{C}_1} d\alpha &= \int_{\mathcal{C}-\mathcal{C}_1} \omega_{12} - \int_{\mathcal{C}-\mathcal{C}_1} \theta_{12} = \int_{\mathcal{C}-\mathcal{C}_1} \omega_{12} - \int_{\mathcal{D}-\mathcal{D}_1} d\theta_{12} \\ &= \int_{\mathcal{C}-\mathcal{C}_1} \omega_{12} + \int_{\mathcal{D}-\mathcal{D}_1} K d\sigma.\end{aligned}$$

A igualdade à direita é independente da escolha do referencial $\{e_1, e_2\}$ em $\mathcal{D} - \mathcal{D}_1$. Assim, podemos assumir que $e_i = a_i, i = 1, 2$. Então $\overline{\alpha} = \angle(e_1, a_1) = 0$ e a igualdade acima está assegurada. Portanto,

$$\int_{\mathcal{C}-\mathcal{C}_1} \omega_{12} + \int_{\mathcal{D}-\mathcal{D}_1} K d\sigma = \int_{\mathcal{C}-\mathcal{C}_1} d\overline{\alpha} = 0.$$

Assim,

$$\int_{\mathcal{C}} d\alpha - \int_{\mathcal{C}_1} d\alpha = \int_{\mathcal{C}-\mathcal{C}_1} d\alpha = 0,$$

isto é, $\int_{\mathcal{C}} d\alpha = \int_{\mathcal{C}_1} d\alpha.$ □

Definição 4.12. Sejam X um campo vetorial tangente suave com um ponto singular isolado p e U uma vizinha coordenada de p, tal que p é o único ponto singular de X em U. Então o inteiro

$$I_p = \frac{1}{2\pi}(\alpha(L) - \alpha(0)) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{C}} d\alpha,$$

obtido pela construção da proposição 4.3 independente da escolha da curva fechada simples $\mathcal{C}$ ao redor de p e da escolha do referencial $\{e_1, e_2\}$ em U com orientação consistente a de M. Isto é, chamado o índice de campo vetorial tangente X em um ponto p.

Observação 4.12. Intuitivamente, o índice I_p é o número de vezes que o campo vetorial tangente X gira ao redor do ponto singular p. Integrando $\omega_{12} = d\alpha + \theta_{12}$ sabre $\mathcal{C}$, temos

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{C}} \omega_{12} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{C}} d\alpha - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{D}} K d\sigma.$$

Como a curvatura gaussiana K é contínua em p, quando $\mathcal{D}$ é reduzido a um ponto, a integral $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{D}} K d\sigma \to 0$. Mas $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{C}} d\alpha$ é a constante I_p. Assim,

$$I_p = \frac{1}{2\pi}\lim_{\mathcal{C}\to p}\int_{\mathcal{C}} \omega_{12}.$$

Para demonstrarmos o último resultado também precisaremos usarmos de um fato o qual a demonstração não compete a esse trabalho

Proposição 4.4. *Toda variedade compacta é triangularizável.*

Finalmente podemos enunciar o último resultado deste trabalho.

Teorema 4.5. *Seja M uma variedade Riemanniana 2-dimensional orientada compacta. Então,*

$$\frac{1}{2\pi}\int_M K d\sigma = \chi(M),$$

no qual $\chi(M)$ é a característica de Euler de M.

Demonstração. Escolha um campo vetorial tangente suave X em M com apenas uma quantidade finita de pontos isolados $p_i, 1 \leq i \leq r$. Para cada p_i, escolhemos uma vizinhança bola aberta de raio ϵ, isto é, $B_\epsilon(p_i)$ de modo que ϵ seja suficiente pequeno para que não existe nenhum outro $p_j \neq p_i$ que seja ponto singular de X. Seja $\mathcal{C}_i = \partial\mathcal{D}_i$, então $\mathcal{C}_i$ é uma curva fechada simples com orientação induzida de M em $\mathcal{D}_i$. Logo, o campo vetorial X determina uma referencial ortogonal suave $\{e_1, e_2\}$ em $M - \bigcup_i \mathcal{D}_i$ que tem orientação consistente com $e_1 = \dfrac{X}{|X|}$. Suponha

$$\theta_{12} = \langle De_1, e_2\rangle$$

Por $Kd\sigma = -d\theta_{12}$, temos

$$\Omega_{12} = d\theta_{12} = -Kd\sigma.$$

Também, pelo teorema de Stokes para formas diferenciais, podemos obter

$$\int_{M-\bigcup_i \mathcal{D}_i} Kd\sigma = -\int_{M-\bigcup_i \mathcal{D}_i} d\theta_{12} = \sum_{i=1}^{r}\int_{\partial\mathcal{D}_i}\theta_{12} = \sum_{i=1}^{r}\int_{\mathcal{C}_i}\theta_{12}.$$

no qual na segunda igualdade o sinal de menos some, pois o bordo de $M - \bigcup_i \mathcal{D}_i$ é idêntico ao bordo de $\bigcup_i \mathcal{D}_i$, porém a forma tem orientação induzida oposta a orientação de $\sum_i \partial\mathcal{D}_i = \sum_i \mathcal{C}_i$.

Como o referencial ortogonal $\{e_1, e_2\}$ é bem definido em $M - \bigcup_i \{p_i\}$, a equação $\int_{M-\bigcup_i \mathcal{D}_i} Kd\sigma = \sum_{i=1}^{r}\int_{\mathcal{C}_i}\theta_{12}$ ainda é assegurada com $\epsilon \to 0$. Também, como K é uma função diferenciável continuamente definida em toda M, temos

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{M-\bigcup_i \mathcal{D}_i} Kd\sigma = \int_M Kd\sigma,$$

e, pela observação 4.12, o termo final $\sum_{i=1}^{r}\int_{\mathcal{C}_i}\theta_{12} = 2\pi\sum_{i=1}^{r} I_p$ quando $\epsilon \to 0$. Assim,

$$\frac{1}{2\pi}\int_M Kd\sigma = \sum_{i=1}^{r} I_p.$$

Notemos que lado esquerdo da equação é independente do campo vetorial tangente X. Construiremos um campo vetorial tangente especial em M como segue.

Primeiramente, por hipótese M é uma variedade Riemanniana 2-dimensional orientada compacta. Assim, pela proposição 4.4. Sendo assim, façamos a seguinte construção:

Seja $t : |P| \to M$ onde P é o conjunto de pontos que chamaremos de vértices de $|P|$, onde $|P|$ é um poliedro cuja cada face é um triangulo e a subdivisão baricêntrica de cada face nos devolva um novo conjunto de vértices P' cuja cada $v \in P'$ seja levado em p_i. De fato, essa subdivisão baricêntrica da triangulação terá um número finito de vértices pelo fato de que M é compacta. Isto é, como M compacta, então dada uma cobertura por abertos, ela admite subcobertura finita de abertos. Então ela admite uma subcobertura de finita de fechados. Como M é compacta, então cada fechado é compacto. Logo, ela admite uma subcobertura finita de compactos. Desta forma, a menos de ajuste no formato dos nossos compactos, podemos entender cada triangulo da subdivisão como um compacto dessa subcobertura. Logo, serão finitos triângulos e, portanto, finitos vértices. Então, sem perda de generalidade, podemos assumir que cada vértice $v \in P'$ seja levado em p_i .

Agora tomemos uma nova subdivisão baricêntrica da subdivisão baricêntrica de $|P|$ tal que o conjunto de todos os vértices dessa nova divisão seja P''.

Defina agora

$$\begin{array}{rccl} \phi: & P'' & \to & P' \\ & v & \mapsto & \phi(v) = \begin{cases} b_{\triangle(v)}, \text{ se } v \in \overset{\circ}{\triangle}(v), \text{ tal que } \triangle(v) \in |P|; \\ m_{a(v)}, \text{ se } v \in \overset{\circ}{a}(v), \text{ tal que } a(v) \in |P|; \\ v, \text{ se } v \in |P|. \end{cases} \end{array}$$

De modo que $\triangle(v)$ significa o triangulo que contem v, $\overset{\circ}{\triangle}(v)$ significa o interior do triangulo que contem v, $b_{\triangle(v)}$ é o baricentro do triangulo que contem v, $a(v)$ é a aresta que contem v, $\overset{\circ}{a}(v)$ é o interior da aresta que contem (v) e $m_{a(v)}$ é o ponto médio da aresta que contem v. Assim, podemos definir uma aplicação continua associada a ϕ definida por $\overline{\phi} : |P''| \to |P'|$. Claro que $\overline{\phi}$ é uma aplicação sobrejetora.

Para cada ponto $p \in M$ tal que $p \neq \left(t \circ \overline{\phi} \circ t^{-1}\right)(p)$, podemos definir o segmento $\overline{p\left(t \circ \overline{\phi} \circ t^{-1}\right)(p)}$ de uma curva que passa por p. Assim, podemos definir X'_p como o vetor tangente a esse segmento. Façamos uma reparametrização por comprimento de arco para que X'_p seja unitário independente de p. Dessa forma, a medida que p se aproxima de um ponto singular p_i, X'_p vai a zero.

Para termos um campo vetorial contínuo, tomemos $X'_{p_i} = 0$. Esse campo não é C^∞.No entanto, como M é uma variedade suave, podemos tomar uma interpolação do campo vetorial tangente contínuo X' tal que essa interpolação nos devolva um campo vetorial tangente suave com mesmo comportamento o qual não altera os pontos singulares definidos. Portanto, esse é o campo vetorial tangente suave X que procurávamos.

Notemos que da forma que $\overline{\phi}$ foi definida, X descreve um comportamento repulsor em cada vértice de $|P|$, comportamento de sela em cada ponto médio de uma aresta de $|P|$ e atrator em cada baricentro de cada face um triângulo de $|P|$. Isto é, X tem orientação compatível a de M em cada vértice e em cada baricentro de cada face, e orientação contraria nos pontos médios de cada aresta. Logo,

$$\begin{cases} I_p = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathcal{C}} d\alpha = \dfrac{1}{2\pi}(2\pi) = 1, \text{ se } p \text{ é um vértice;} \\ I_p = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathcal{C}} d\alpha = \dfrac{1}{2\pi}(-2\pi) = -1, \text{ se } p \text{ é o ponto médio de uma aresta;} \\ I_p = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathcal{C}} d\alpha = \dfrac{1}{2\pi}(2\pi) = 1, \text{ se } p \text{ é o o baricentro de um triangulo.} \end{cases}$$

Assim, temos que $\sum I_{p_i} = n_v - n_e + n_f = \chi(M)$, no qual n_v é o número de vértices, n_e é o número de arestas e n_f é o número de faces da triangulação. Portanto,

$$\frac{1}{2\pi}\int_M K d\sigma = \chi(M).$$

□

Da nossa demonstração do teorema de Gauss-Bonnet para variedade suaves orientadas de dimensão dois, segue como corolário imediato o teorema dos Índices de Hopf.

Corolário 4.2. *Seja X um campo vetorial tangente suave em uma variedade Riemanniana compacta orientada com uma quantidade finita de pontos singulares. Então a soma desses índices nos vários pontos singulares é igual à característica de Euler da variedade.*

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conclui-se assim este trabalho com foco de demonstrar o teorema de Gauss-Bonnet e sua compreensão geométrica. fora realizado em um trabalho anterior o estudo da álgebra exterior, partindo do estudo do espaço vetorial dos p-tensores, suas respectivas operações, o subespaço vetorial dos p-tensores alternados, o produto exterior e o teorema do determinante para isomorfismos lineares em V^k .

Subsequentemente, no mesmo trabalho anterior, passamos formas diferenciais, a partir da definição de k-formas, seguido do produto exterior de k-formas, a representação local de k-formas, as propriedades do produto exterior de k-formas e diferencial exterior de k-formas.

Como previsto, no mesmo trabalho anterior, seguiu-se pelo estudo de integração em superfícies, partindo da definição de superfícies m-dimensionais do $\mathbb{R}^n$, a partição da unidade, o teorema da mudança de variáveis, pullback, integração de formas de grau máximo e, finalmente, o Teorema de Stokes e suas aplicações.

Com tal base fundamentada, iniciou-se este trabalho com o estudo de variedades diferenciáveis, espaço tangente, espaço cotangente, orientação de superfície e o teorema de Frobenius.

Sequencialmente, o estudo passou pelo estudo de fibrados tensoriais e vetoriais, conexões em fibrados vetoriais, conexões afins e conexões em fibrados de referenciais.

Sequencialmente o estudo passou pelo estudo de fibrados tensoriais e vetoriais, conexões em fibrados vetoriais, conexões afins e conexões em fibrados de referenciais.

Finaliza-se o projeto com o estudo de geometria Riemanniana, no qual estará previsto o teorema fundamental da geometria Riemanniana, coordenadas normais geodésicas, curvatura seccional e, finalmente, o teorema de Gauss-Bonnet.

É notória que o objetivo, para além de demonstrar, fora esmiuçar a compreensão geométrica do teorema de Gauss-Bonnet e dar um sentido de invariante para a característica de Euler. O motivo para essa abordagem enfática neste resultado é a utilização deste trabalho como alicerce para um futuro estudo e compreensão da topologia e geometria diferencial.

REFERÊNCIAS

LAM, S.-S. C. W.-H. C. K. S. **Lectures on Differential Geometry**. [S.l.]: World Scientific, 1999. Citado na página 6.

LEE, J. M. **Introduction to Smooth Manifolds**. 2. ed. New York: Springer-Verlag, 2012. (Graduate Texts in Mathematics). Citado na página 6.

LIMA, E. L. **Curso de Análise - Volume 2**. 11. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2018. (Projeto Euclides). Citado na página 6.

MORITA shigeyuki. **Geometry of Differential Forms**. [S.l.]: AMS, 2001. Citado na página 6.

POLLACK, V. W. G. A. **Differential Topology**. [S.l.]: AMS, 2013. Citado na página 6.