



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE
TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA E À GEOMETRIA TROPICAIS

ADRIELLI EDUARDA CANOVA

São Carlos
Janeiro de 2024

INTRODUÇÃO À ALGEBRA E À GEOMETRIA TROPICAIS

Adrielli Eduarda Canova

Monografia apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de licenciada em Matemática no Curso de Licenciatura em Matemática da UFSCar.

Orientadora: Profa. Dra. Karina Schiabel

São Carlos
2024

Dedico este trabalho aos meus pais, Clayton e Sandra, cujo apoio, inspiração, afeto e amor incondicional foram fundamentais em cada passo desta jornada.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais, Sandra e Clayton, por todo o amor, incentivo e suporte dados durante toda a minha vida, especialmente durante a graduação.

Agradeço à Deus e Nossa Senhora por todas as bênçãos que permitiram chegar até aqui.

Agradeço à minha irmã, Camilli, que apesar das brincadeiras, sempre acreditou em mim e que este momento chegaria.

À minha orientadora, Prof^a Dr^a Karina Schiabel, por toda a instrução, suporte, dedicação e paciência.

Ao PET Matemática, do qual fiz parte durante 3 anos, e que foi uma parte muito importante da minha formação.

Aos amigos e colegas que estiveram presentes nessa jornada.

E, finalmente, aos meus professores, por todo o conhecimento compartilhado.

A persistência é o caminho do êxito
Charles Chaplin.

Resumo

Neste Trabalho de Conclusão de Curso exploramos uma breve introdução à Álgebra e à Geometria Tropicais. Apresentamos desde definições e propriedades fundamentais das operações que constituem o semianel tropical, até o estudo e classificação de cônicas tropicais.

Palavras-chave: Max-plus, Álgebra Tropical, Polinômio Tropical, Curva Tropical, Cônica Tropical.

Lista de Figuras

1.1	Representação gráfica de um monômio tropical de uma variável.	7
1.2	Representações gráficas dos monômios do Exemplo 1.7.	7
1.3	Representações gráficas dos polinômios do Exemplo 1.8.	9
2.1	Reta Euclidiana	13
2.2	Exemplos de retas não-euclidianas.	14
2.3	Exemplo de reta tropical genérica.	14
2.4	Visualização gráfica da Propriedade 1.	15
2.5	Visualização gráfica da Propriedade 2.	15
2.6	Representação gráfica da curva do polinômio $P(x, y) = 1 \oplus x^2 \oplus 1 \odot y$	16
2.7	Reta Tropical determinada por $P(x, y) = ax + by + c$	17
2.8	Reta Tropical determinada por $P(x, y) = 3 \odot x \oplus 4 \odot y \oplus 5$	17
2.9	Curva Tropical do polinômio $P(x, y) = 2 \odot x^2 \oplus 3 \odot x \oplus 1 \odot y^2 \oplus 6 \odot y \oplus 0$	19
3.1	Polígono de Newton associado a $P(x) = a \oplus b \odot x \oplus c \odot x^2$ no caso em que $b \geq \frac{a+c}{2}$	22
3.2	Polígono de Newton associado a $P(x) = a \oplus b \odot x \oplus c \odot x^2$ no caso em que $b < \frac{a+c}{2}$	22
3.3	$P(x) = 3 \oplus 2 \odot x \oplus 5 \odot x^2$ na forma tropical.	24
3.4	Polígono de Newton de $P(x) = 3 \oplus 2 \odot x \oplus 5 \odot x^2$	24
3.5	Polígono de Newton de $Q(x) = -1 \oplus 3 \odot x^2 \oplus 5 \odot x^3 \oplus 5 \odot x^4$	25
3.6	$Q(x) = -1 \oplus 3 \odot x^2 \oplus 5 \odot x^3 \oplus 5 \odot x^4$ na forma tropical.	26
3.7	Curva Tropical do polinômio $P(x, y) = 2 \odot x^2 \oplus 3 \odot x \oplus 1 \odot y^2 \oplus 6 \odot y \oplus 0$	27
3.8	Polígono de Newton da curva $P(x, y) = 2 \odot x^2 \oplus 3 \odot x \oplus 1 \odot y^2 \oplus 6 \odot y \oplus 0$	28
3.9	Representações gráficas de $P(x, y) = 4 \odot x^2 \oplus 6 \odot x \odot y \oplus 4 \odot y^2 \oplus 6 \odot x \oplus 6 \odot y \oplus 2$	50
3.10	Elipse $4x^2 + 6xy + 4y^2 + 6x + 6y + 2 = 0$ na Geometria Euclidiana.	50
3.11	Representações gráficas de $Q(x, y) = -\infty \odot x^2 \oplus 1 \odot x \odot y \oplus 3 \odot y^2 \oplus 2 \odot x \oplus 1 \odot x^2 \oplus (-\infty)$	51
3.12	Hipérbole $xy + 3y^2 + 3x + y = 0$ na Geometria Euclidiana.	52

Sumário

Introdução	1
1 Álgebra Tropical	3
1.1 Polinômios Tropicais	6
1.1.1 Polinômios de uma variável	7
1.1.2 Raízes de um polinômio tropical de uma variável	9
1.2 Polinômios Tropicais de duas variáveis	11
2 Retas e Curvas Tropicais	13
2.1 Reta Tropical	14
2.2 Curvas Tropicais	15
3 Polígonos de Newton e Cônicas Tropicais	21
3.1 Polígonos de Newton associados a polinômios de uma variável	21
3.2 Polígonos de Newton associados a polinômios de duas variáveis	26
3.3 Cônicas Tropicais	28
4 Considerações Finais	53

Introdução

Neste trabalho apresentamos uma introdução à Álgebra e à Geometria Tropicais.

A terminologia *tropical* se deu em homenagem ao matemático Imre Simon, de origem belga, que graduou-se na USP e teve importantes contribuições para a teoria de semianéis. Segundo Speyer e Sturmfels, o “adjetivo tropical foi cunhado por matemáticos franceses, incluindo Jean-Eric Pin, em homenagem ao colega brasileiro Imre Simon” em referência à visão que os franceses tinham do Brasil.

A Álgebra Tropical também é conhecida como max-plus e surge ao considerarmos o semianel $(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$, em que $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup (-\infty)$ e as operações \oplus e \odot são definidas como

$$\begin{array}{l} \oplus : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T} \\ (x, y) \mapsto x \oplus y = \max\{x, y\} \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{l} \odot : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T} \\ (x, y) \mapsto x \odot y = x + y. \end{array}$$

Com essas operações, a álgebra tropical se torna relativamente mais simples que a usual, e é especialmente útil para se resolver problemas complexos de maneira simplificada uma vez que confere a eles perspectivas mais acessíveis e possibilita novas abordagens.

As aplicações mais intuitivas envolvem problemas de otimização. No entanto, há na literatura uma variedade de aplicações avançadas em diferentes ramos que demonstram o uso da álgebra tropical, incluindo:

- Teoria de controle e automação: a álgebra tropical pode ser usada para modelar sistemas dinâmicos, como sistemas de automação e controle. Alguns exemplos são resolução de problemas de tempo discreto, escalonamento de tarefas e programação de atividades em sistemas de produção.
- Otimização e problemas de caminho mínimo: podemos encontrar caminhos mínimos em grafos ponderados utilizando a álgebra tropical, em que os pesos são interpretados como tempos de viagem, distâncias ou custos. Essa abordagem é usada em logística, transporte e planejamento de rotas.
- Redes de comunicação e telecomunicações: em redes de comunicação, a álgebra tropical pode ser usada para modelar e analisar fluxo de dados, latência e atrasos de transmissão. Isso é importante para a otimização de redes de telecomunicações e sistemas distribuídos.

- Economia e finanças: a álgebra tropical pode ser aplicada em análises financeiras e econômicas, como modelagem de fluxo de caixa, avaliação de ativos e otimização de portfólios.
- Teoria da informação e codificação: em problemas de codificação de dados, a álgebra tropical pode ser utilizada para tratar questões de redundância e eficiência na transmissão e armazenamento de informações.
- Biologia e genética: a álgebra tropical pode ser usada para modelar e analisar sistemas biológicos, como redes de regulação genética e interações moleculares.

As aplicações acima mencionadas não são triviais e requerem ferramentas que fogem do escopo desse trabalho.

Para um exemplo mais simples de aplicação, imagine um cenário de produção em que uma etapa i depende de duas etapas anteriores j e k para poder ser iniciada. Vamos supor que a etapa j leve um tempo T_j para ser concluída e a etapa k um tempo T_k . Ainda a etapa i leva T_i . Nesse cenário qual é o tempo total envolvido na produção? Como i precisa esperar pelas etapas j e k para só então ser executada, o tempo total nesse caso será $a_i + \max\{T_j, T_k\} = a_i \odot (T_j \oplus T_k)$. Se considerarmos um conjunto maior de etapas, podemos utilizar o mesmo para determinar o tempo total de execução de produção e isso permite, entre outras coisas, estudar o processo de forma a torná-lo mais eficiente como um todo. Ao leitor interessado em outras aplicações, recomendamos [9], em que é abordado um problema de demanda por colateral em um exemplo de aplicação na economia e [6] que apresenta um modelo tropical envolvendo modelagem de controles de vacinação.

Este trabalho está dividido em quatro capítulos. No primeiro, definimos o semianel tropical, estudamos algumas propriedades e introduzimos os polinômios tropicais. O estudo de raízes dos polinômios tropicais é o primeiro passo para a Geometria Tropical e seus elementos mais simples - a reta e a curva associada a um polinômio de duas variáveis são apresentados no Capítulo 2. No Capítulo 3, estudamos os polígonos de Newton associados aos polinômios tropicais e como eles trazem uma visão simplificada ao estudo desses objetos. Apresentamos também as cônicas tropicais, fazendo uma classificação a partir das relações entre os coeficientes dos polinômios que as definem. Finalmente, no Capítulo 4, fazemos as considerações finais acerca do desenvolvimento do trabalho e sua contribuição para a formação da autora.

Capítulo 1

Álgebra Tropical

Seja $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e consideremos as seguintes aplicações:

$$\begin{aligned} \oplus : \mathbb{T} \times \mathbb{T} &\rightarrow \mathbb{T} & \odot : \mathbb{T} \times \mathbb{T} &\rightarrow \mathbb{T} \\ (x, y) &\mapsto x \oplus y = \max\{x, y\} & (x, y) &\mapsto x \odot y = x + y, \end{aligned}$$

em que $+$ denota a adição usual em \mathbb{R} .

Observamos que

$$x \oplus (-\infty) = \max\{x, -\infty\} = x \quad \text{e} \quad x \odot (-\infty) = x + (-\infty) = -\infty,$$

qualquer que seja $x \in \mathbb{T}$.

O conjunto \mathbb{T} , munido das operações \oplus e \odot , denominadas respectivamente adição e multiplicação em \mathbb{T} , é um semianel, como mostra a seguinte proposição.

Proposição 1.1. *$(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$ é um semianel.*

Demonstração. A adição \oplus satisfaz as seguintes propriedades:

- (Existência de elemento neutro) $-\infty$ é o elemento neutro da adição, pois

$$a \oplus (-\infty) = \max\{a, -\infty\} = a, \forall a \in \mathbb{T}.$$

- (Propriedade associativa) $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c, \forall a, b, c \in \mathbb{T}$. De fato,

$$a \oplus (b \oplus c) = \max\{a, \max\{b, c\}\} = \max\{a, b, c\} = \max\{\max\{a, b\}, c\} = (a \oplus b) \oplus c.$$

- (Propriedade comutativa) $a \oplus b = b \oplus a, \forall a, b \in \mathbb{T}$. De fato,

$$a \oplus b = \max\{a, b\} = \max\{b, a\} = b \oplus a.$$

A multiplicação \odot satisfaz as seguintes propriedades:

- (Existência do Elemento Neutro) 0 é o elemento neutro da multiplicação, pois

$$a \odot 0 = a + 0 = a, \forall a \in \mathbb{T}.$$

- (Propriedade associativa) $a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c, \forall a, b, c \in \mathbb{T}$. De fato,

$$a \odot (b \odot c) = a + (b + c) = (a + b) + c = (a \odot b) \odot c.$$

- (Propriedade comutativa) $a \odot b = b \odot a, \forall a, b \in \mathbb{T}$. De fato,

$$a \odot b = a + b = b + a = b \odot a.$$

- (Propriedade distributiva de \odot em relação à \oplus) Valem as distributivas

$$a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c) \text{ e } (a \oplus b) \odot c = (a \odot c) \oplus (b \odot c).$$

De fato,

$$a \odot (b \oplus c) = a + \max\{b, c\} = \max\{a + b, a + c\} = (a + b) \oplus (a + c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c);$$

$$(a \oplus b) \odot c = \max\{a, b\} + c = \max\{a + c, b + c\} = (a + c) \oplus (b + c) = (a \odot c) \oplus (b \odot c).$$

- (Existência de elemento absorvente) O elemento $-\infty$ é um elemento absorvente, ou seja $a \odot -\infty = -\infty, \forall a \in \mathbb{T}$. De fato, $a \odot -\infty = a + (-\infty) = -\infty$.

□

Definição 1.2. O semianel $(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$ é chamado *semianel tropical* ou *semianel max-plus*.

Podemos escrever as seguintes tabuadas para as operações tropicais:

\oplus	1	2	3	4	5	6	7	8	9	\odot	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	2	3	4	5	6	7	8	9	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	3	3	4	5	6	7	8	9	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	4	4	4	5	6	7	8	9	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	5	5	5	5	6	7	8	9	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	6	6	6	6	6	7	8	9	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	7	7	7	7	7	7	8	9	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	8	8	8	8	8	8	8	9	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Observação 1.3. Para $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, denotaremos $a^n = a \odot a \odot \dots \odot a = a + a + \dots + a = n \cdot a$, $\forall a \in \mathbb{T}$.

Além das propriedades que garantem que \mathbb{T} é um semianel, podemos ainda destacar outras propriedades e características interessantes no semianel tropical.

- se $a \in \mathbb{T}$ e $a \neq -\infty$, então a possui inverso multiplicativo. De fato, tomando $b = -a$, temos

$$a \odot b = a \odot (-a) = a + (-a) = 0.$$

Esta propriedade faz com que alguns autores (como [4] e [8]) se refiram à tripla $(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$ como semicorpo tropical.

- a soma tropical é idempotente, isto é, $a \oplus a = a$, $\forall a \in \mathbb{T}$, pois $a \oplus a = \max\{a, a\} = a$. A idempotência impede a existência de inverso aditivo. em $\mathbb{T} \setminus \{-\infty\}$. De fato, se $x \in \mathbb{T}$, então x' é inverso aditivo de x se, e somente se, $x \oplus x' = -\infty$. Assim,

$$\begin{aligned} x \oplus x' = -\infty &\Leftrightarrow x \oplus (x \oplus x') = x \oplus (-\infty) \\ &\Leftrightarrow \max\{x, \max\{x, x'\}\} = \max\{x, -\infty\} \\ &\Leftrightarrow \max\{x, x'\} = \max\{x, -\infty\} \\ &\Leftrightarrow x \oplus x' = x, \end{aligned}$$

ou seja, $x = -\infty$ é o único elemento de \mathbb{T} que possui inverso aditivo.

- na álgebra tropical, a operação inversa da adição não está bem definida. Por exemplo, a equação $13 \oplus x = 4$ não possui solução, pois $\max\{13, x\} = 13$ se $x \leq 13$ e $\max\{13, x\} = x$ para $x > 13$. Em geral, observamos que, para uma equação do tipo $a \oplus x = b$, vale:

$$a \oplus x = b \iff \max\{a, x\} = b \begin{cases} \text{Se } a = b, \text{ então } x \leq a = b \\ \text{Se } a < b, \text{ então } x = b \\ \text{Se } a > b, \text{ a equação não possui solução.} \end{cases}$$

Assim, dados $a, b \in \mathbb{T}$ arbitrários, a solução x de $a \oplus x = b$ não está bem definida.

- a divisão tropical, ou seja, a operação inversa à multiplicação, que denotaremos por \oslash , é definida a partir da subtração usual em \mathbb{R} . Por exemplo, como

$$4 \odot x = 6 \iff 4 + x = 6 \iff x = 6 - 4 = 2$$

temos $6 \oslash 4 = 2$.

- (esta é uma particularidade curiosa!): na álgebra tropical, a divisão por 0 é bem definida e, além disso, 0 é o elemento neutro da divisão tropical.

- (outra curiosidade interessante!): vale a chamada *identidade tropical*:

$$(x \oplus y)^n = x^n \oplus y^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} (x \oplus y)^n &= (x \oplus y) \odot (x \oplus y) \odot \dots \odot (x \oplus y) \\ &= (x \oplus y) + (x \oplus y) + \dots + (x \oplus y) \\ &= n \cdot (x \oplus y) = n \cdot \max\{x, y\} \\ &= \max\{nx, ny\} = (nx) \oplus (ny) \\ &= x^n \oplus y^n. \end{aligned}$$

Observação 1.4. Alguns autores, como em [5], consideram como o semianel tropical a tripla $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus, \odot)$, em que $x \oplus y = \min\{x, y\}$ e $x \odot y = x + y$, quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R} \cup \infty$. Neste caso, o semianel tropical é também chamado semianel min-plus. Na álgebra min-plus, ∞ é o elemento neutro de \oplus e o elemento absorvente de \odot .

1.1 Polinômios Tropicais

Estudaremos nesta seção os polinômios tropicais. Assim como na álgebra convencional, um polinômio tropical define uma função (polinomial) e podemos analisar a existência de raízes, cuja caracterização é relativamente distinta da álgebra convencional.

Definição 1.5. Um *monômio tropical* nas variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{T}$ é dado por

$$a \odot x_1^{i_1} \odot x_2^{i_2} \odot \dots \odot x_n^{i_n},$$

com $a \in \mathbb{T}$ e $i_j \in \mathbb{N}, \forall j \in \{1, \dots, n\}$.

Observe que um monômio tropical nas variáveis x_1, x_2, \dots, x_n determina uma função $m : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}$, dada por

$$m(x_1, \dots, x_n) = a + i_1 x_1 + \dots + i_n x_n.$$

Definição 1.6. Um *polinômio tropical* nas variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{T}$ é uma combinação linear tropical (finita) de monômios tropicais.

Embora um polinômio tropical esteja definido em variáveis pertencentes a \mathbb{T} , sem perda de generalidade, podemos estudar os polinômios com variáveis reais. Essa restrição torna as definições e representações gráficas (que são essenciais) mais simples, e assim faremos neste trabalho. Alguns autores, inclusive, já definem polinômio tropical diretamente desta forma (veja [2]).

Neste trabalho nos restringiremos aos polinômios de uma e duas variáveis.

1.1.1 Polinômios de uma variável

Um monômio de uma variável $M(x) = a \odot x^n$ pode ser representado graficamente como na Figura 3.1, em que $C = (0, a)$ é o ponto em que a reta intercepta o eixo Oy , dado que $M(0) = a \odot 0^n = a + n \cdot 0 = a$. Ainda, $n \in \mathbb{N}$ é o coeficiente angular da reta, portanto a função definida por um monômio tropical é não decrescente.

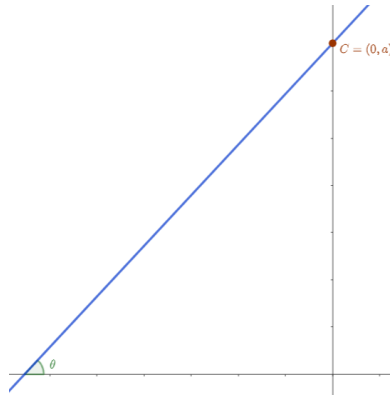


Figura 1.1: Representação gráfica de um monômio tropical de uma variável.

Exemplo 1.7. Alguns exemplos de monômios tropicais e suas representações gráficas (Figura 1.2).

(a) $M(x) = 5 \odot x^2 = 5 + 2x$.

(b) $N(x) = 3 \odot x = 3 + x$.

(c) $Q(x) = 2 \odot x^3 = 2 + 3x$.

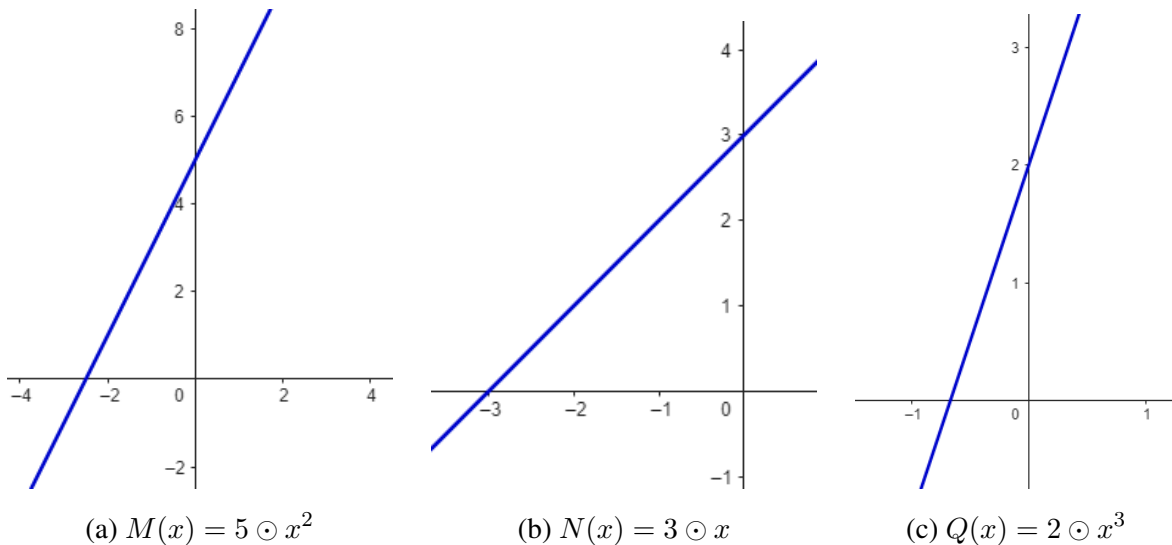


Figura 1.2: Representações gráficas dos monômios do Exemplo 1.7.

De acordo com a Definição 1.6, um polinômio tropical de uma variável é uma combinação linear tropical de monômios tropicais de uma variável, ou seja, uma expressão da forma:

$$P(x) = \bigoplus_{i=0}^n a_i \odot x^i$$

Note que

$$\begin{aligned} P(x) &= \bigoplus_{i=0}^n a_i \odot x^i = a_0 \oplus (a_1 \odot x^1) \oplus \dots \oplus (a_n \odot x^n) \\ &= a_0 \oplus (a_1 + 1x) \oplus \dots \oplus (a_n + nx) = \max_{0 \leq i \leq n} \{a_i + ix\}. \end{aligned}$$

Dados dois polinômios tropicais $P(x) = \bigoplus_{i=0}^n a_i \odot x^i$ e $Q(x) = \bigoplus_{i=0}^m b_i \odot x^i$, dizemos que eles são iguais se $n = m$ e $a_i = b_i$, para todo $0 \leq i \leq n$.

Um polinômio tropical define uma função polinomial

$$P(x) = \bigoplus_{i=0}^d a_i x^i := \max_{0 \leq i \leq d} \{a_i + ix\},$$

que é afim por partes. Dizemos que as funções polinomiais tropicais $P(x) = \bigoplus_{i=0}^n a_i x^i$ e $Q(x) = \bigoplus_{i=0}^m b_i x^i$ são iguais quando $P(x) = Q(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Observemos que podemos tratar o polinômio tropical como sua função tropical associada, adotaremos a mesma notação para ambos.

Ademais, dois polinômios tropicais distintos podem representar uma mesma função associada, por exemplo $x^2 \oplus x \oplus 1$ e $x^2 \oplus 1$ definem a mesma função, uma vez que $\max\{2x, x, 1\} = \max\{2x, 1\}$.

Vejamos mais alguns exemplos de polinômios tropicais de uma variável.

Exemplo 1.8. Consideremos

- (a) $P(x) = 3 \odot x \oplus 2$.
- (b) $Q(x) = x^3 \oplus 3 \odot x^2 \oplus (-1)$.
- (c) $R(x) = 2 \odot x \oplus 3 \odot x^2 \oplus 2$.

Note que, como 0 é o elemento neutro da multiplicação tropical, $P(x) = x^3 \oplus 3 \odot x^2 \oplus (-1) = 0 \odot x^3 \oplus 2 \odot x^2 \oplus (-1)$.

Podemos ver a representação gráfica de cada item do Exemplo 1.8 na Figura 1.3.

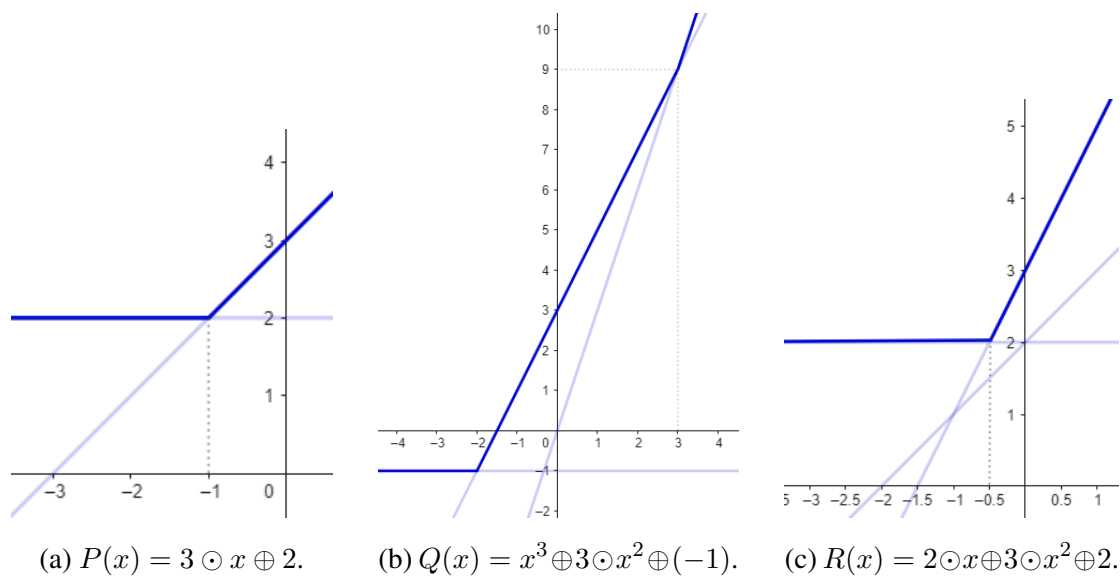


Figura 1.3: Representações gráficas dos polinômios do Exemplo 1.8.

Teorema 1.9. *Seja $P(x) \neq -\infty$ um polinômio tropical. Então $P(x)$ é uma função não-decrescente.*

Demonstração. Seja $P(x) = a_0 \oplus a_1 \odot x \oplus a_2 \odot x^2 \oplus \dots \oplus a_n \odot x^n = \max\{a_0, a_1 + x, a_2 + 2x, \dots, a_n + nx\}$ e consideremos $x_1 > x_2$. Examinando individualmente cada termo da função máximo, temos:

$$\begin{aligned} a_0 &= a_0 \\ a_1 + x_1 &> a_1 + x_2 \\ a_2 + 2x_1 &> a_2 + 2x_2 \\ &\vdots \\ a_n + nx_1 &> a_n + nx_2 \end{aligned}$$

Dessa forma, cada termo em $\max\{a_0, a_1 + x, a_2 + 2x, \dots, a_n + nx\}$ é não-decrescente e podemos concluir que o polinômio $P(x)$ também possui essa propriedade. □

Corolário 1.10. *Se $P(x) \neq -\infty$ e $a_0 = -\infty$, então $P(x)$ é estritamente crescente.*

Demonstração. Repetindo o argumento da demonstração anterior, observamos que, como o máximo nunca será atingido em $a_0 = -\infty$, e os demais termos são estritamente crescentes, segue que $P(x)$ é estritamente crescente. □

1.1.2 Raízes de um polinômio tropical de uma variável

Na álgebra convencional, a raiz de um polinômio $P(x)$ é o elemento $x_0 \in \mathbb{R}$ que satisfaz $P(x_0) = 0$, em que 0 é elemento neutro da adição. Uma extensão natural desse conceito à álgebra tropical seria definir as raízes dos polinômios tropicais como os elementos x_0 que satisfazem $P(x_0) = -\infty$. Como a_0 é o termo constante do polinômio tropical $P(x)$, devemos ter $P(x) \geq a_0, \forall x \in \mathbb{R}$. Assim, para

qualquer $a_0 \neq -\infty$, $P(x)$ não possui raiz. Desta forma, adotou-se um ponto de vista geométrico para a definição de raízes de polinômios tropicais.

Definição 1.11. As raízes tropicais de um polinômio tropical são os $x_0 \in \mathbb{R}$ para os quais existem i e j distintos em \mathbb{N} tais que $P(x) = a_i \odot x_0^i = a_j \odot x_0^j$.

Geometricamente, as raízes do polinômio são os valores x_0 em que ocorre uma quina no gráfico, ou seja, ocorrem na interseção das retas do gráfico dos monômios que definem o polinômio.

Exemplo 1.12. Vamos determinar as raízes dos polinômios do Exemplo 1.8.

(a) $P(x) = 3 \odot x \oplus 2 = \max\{3 + x, 2\}$.

Devemos encontrar x_0 que satisfaça $a_i + ix_0 = a_j + jx_0$. Desta forma, para determinar as raízes de $P(x) = 3 \odot x \oplus 2$, vamos igualar seus termos. Observemos que:

$$3 + x = 2 \iff x = -1.$$

Como $P(-1) = \max\{3 - 1, 2\} = \max\{2, 2\} = 2$, segue que o máximo ocorre duas vezes em -1 e portanto -1 é a raiz do polinômio. Observe na Figura 1.3 que, de fato, -1 é a abcissa da quina do gráfico.

b) $Q(x) = x^3 \oplus 3 \odot x^2 \oplus (-1) = \max\{3x, 3 + 2x, -1\}$.

Note que aqui temos três termos e portanto encontraremos três candidatos a raízes do polinômio. Igualando os termos dois a dois, temos:

(i) $3x = 3 + 2x \iff x = 3$

(ii) $3x = -1 \iff x = -\frac{1}{3}$

(iii) $3 + 2x = -1 \iff x = -2$

Para verificar se e quais dos valores x são raízes, calculamos $P(x)$ para cada candidato a raiz:

(i) $Q(3) = \max\{9, 9, -1\} = 9$. Como o máximo 9 é atingido duas vezes, $x = 3$ é uma raiz do polinômio.

(ii) $Q(-\frac{1}{3}) = \max\{-1, \frac{7}{3}, -1\} = \frac{7}{3}$. Como o máximo $\frac{7}{3}$ é atingido uma única vez, $x = -\frac{1}{3}$ não é uma raiz.

(iii) $Q(-2) = \max\{-6, -1, -1\} = -1$. Como o máximo -1 é atingido duas vezes, segue que -2 também é raiz de $P(x)$

c) $R(x) = 2 \odot x \oplus 3 \odot x^2 \oplus 2 = \max\{2 + x, 3 + 2x, 2\}$.

Novamente, igualando os três termos do polinômio dois a dois;

i) $2 + x = 3 + 2x \iff x = -1$

ii) $2 + x = 2 \iff x = 0$

iii) $3 + 2x = 2 \iff x = -\frac{1}{2}$

Verificando se esses valores de x são de fato raízes:

i) $R(-1) = \max\{1, 1, 2\} = 2$ e, como o máximo 2 é atingido uma única vez, $x = -1$ não é raiz.

ii) $R(0) = \max\{2, 3, 2\} = 3$ e, como o máximo 3 é atingido apenas uma vez, $x = 0$ também não é raiz.

iii) $R(-\frac{1}{2}) = \max\{\frac{3}{2}, 2, 2\} = 2$ e, como o máximo 2 é atingido duas vezes, $x = -\frac{1}{2}$ é raiz do polinômio.

Definição 1.13. Seja $P(x) = \bigoplus_{i=0}^n a_i \odot x^i$ um polinômio não nulo. O grau do polinômio tropical $P(x)$ é o maior expoente n tal que $a_n \neq -\infty$.

Embora os polinômios dos itens (b) e (c) dos Exemplos 1.8 e 1.12 tenham graus 3 e 2, respectivamente, o número de raízes tropicais encontradas é menor que o grau do polinômio em cada um dos casos. Isso ocorre devido à multiplicidade das raízes tropicais.

Definição 1.14. A multiplicidade $M(x_0)$ da raiz tropical x_0 é definida como por $\max_{i,j} \{|i - j|\}$, em que i, j são determinados a partir da igualdade $a_i + ix = a_j + jx$.

Voltando ao item (b) do Exemplo 1.12, a raiz $x = 3$ é determinada pela igualdade $a_i + ix = a_j + jx \Rightarrow 3x = 3 + 2x$ (ou seja, $i = 3$ e $j = 2$), logo sua multiplicidade é $|i - j| = |3 - 2| = 1$. Já a raiz $x = -\frac{1}{2}$ é determinada pela igualdade $3 + 2x = 2$ (ou seja, $i = 2$ e $j = 0$) e sua multiplicidade é $|i - j| = |2 - 0| = 2$. Note que a soma das multiplicidades coincide com o grau do polinômio, que neste caso é 3. No caso do exemplo (c), a multiplicidade da raiz $x = -\frac{1}{2}$ é $|i - j| = |2 - 0| = 2$ e coincide com o grau do polinômio.

1.2 Polinômios Tropicais de duas variáveis

Um polinômio tropical de duas variáveis $x, y \in \mathbb{R}$ tem a forma

$$P(x, y) = \bigoplus_{i+j=0}^n a_{ij} \odot x^i \odot y^j = \max_{i,j} (a_{ij} + ix + jy),$$

em que $a_{ij} \in \mathbb{T}$.

As funções polinomiais determinadas por polinômios de duas variáveis determinam funções afim por partes.

Exemplo 1.15. Como exemplos de polinômios de duas variáveis, temos:

(a) $P(x, y) = 1 \oplus x^2 \oplus 1 \odot y = \max\{1, 2x, 1 + y\}$.

(b) $Q(x, y) = 2 \odot x^2 \oplus 3 \odot x \oplus 1 \odot y^2 \oplus 6 \odot y \oplus 0 = \max\{2 + 2x, 3 + x, 1 + 2y, 6 + y, 0\}$.

(c) $R(x, y) = 3 \odot x^2 \oplus 2 \odot y \oplus 3 \odot y^2 = \max\{3 + 2x, 2 + y, 3 + 2y\}$.

(d) $S(x, y) = 2 \odot x \oplus 2 \odot y \oplus 3 \odot x \odot y = \max\{2 + x, 2 + y, 3 + x + y\}$.

O estudo das raízes de polinômios de uma variável de grau maior que 1 e de polinômios de grau 2 descrevem os objetos mais simples da geometria tropical. Faremos esse estudo no próximo capítulo.

Capítulo 2

Retas e Curvas Tropicais

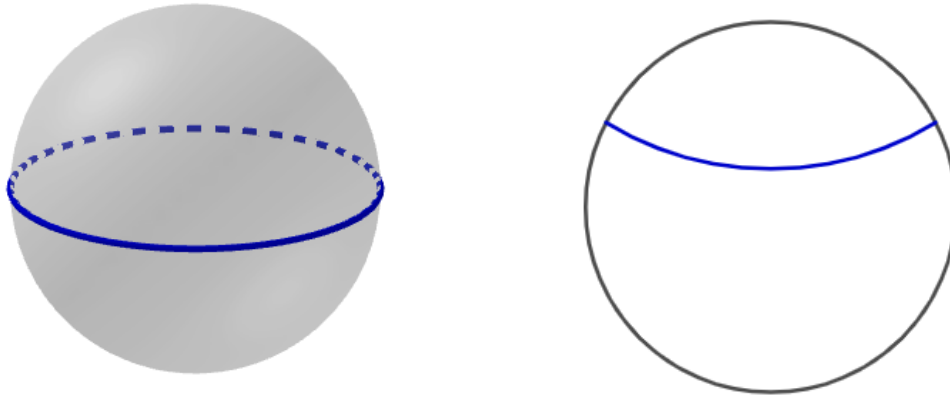
O que é uma reta? Respostas informais a essa pergunta costumam ser “é um objeto entidade unidimensional que se estende infinitamente” ou “um traço que segue uma direção sem curvas ou ângulos”. Essas descrições, no entanto, referem-se à concepção tradicional de uma reta euclidiana.



Figura 2.1: Reta Euclidiana

A geometria Euclidiana é fundamentada nos cinco postulados formulados por Euclides em torno de 300 a.C., que foram consagrados em sua célebre obra "*Os Elementos*". Apesar dos quatro primeiros postulados serem conhecidos por sua simplicidade, o quinto, famoso "Postulado das Paralelas", tem sido alvo de especulação ao longo da história. Ele se destaca por sua complexidade em relação aos demais e muitos matemáticos ilustres dedicaram suas pesquisas na tentativa de provar que o quinto postulado poderia ser deduzido a partir dos quatro primeiros.

No entanto, apesar de muitos esforços, essa teoria nunca foi definitivamente provada. Em vez disso, surgiram outras abordagens geométricas que mantêm os quatro primeiros postulados, mas descartam o quinto. Estas são conhecidas como Geometrias Não-Euclidianas. Alguns exemplos de Geometrias Não-Euclidianas são a Geometria Esférica, a Geometria Hiperbólica e a Geometria Projetiva. Cada uma dessas geometrias oferece uma perspectiva única sobre o espaço e teve implicações significativas nas áreas da matemática, física e modelagem de sistemas complexos. Em cada uma delas a reta assume forma e características diferentes, como podemos observar na Figura 2.2:



(a) Reta Esférica.

(b) Reta Hiperbólica.

Figura 2.2: Exemplos de retas não-euclidianas.

2.1 Reta Tropical

Na geometria tropical, a reta também tem uma forma bem diferente da reta euclidiana. Mas assim como nas geometrias não-euclidianas, possui algumas propriedades semelhantes.

Geometricamente, uma reta tropical se forma a partir de 3 semirretas (clássicas) com direções $(-1, 0)$, $(0, -1)$ e $(1, 1)$, a partir de um ponto qualquer no plano.

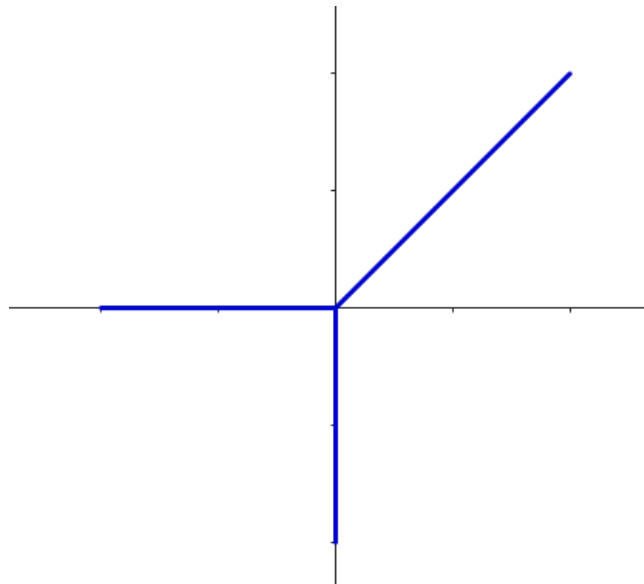


Figura 2.3: Exemplo de reta tropical genérica.

A reta tropical satisfaz duas importantes propriedades:

1. Duas retas tropicais sempre se interceptam.

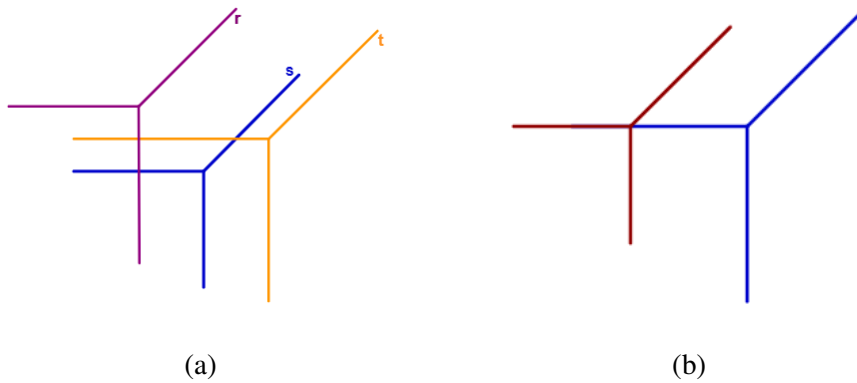


Figura 2.4: Visualização gráfica da Propriedade 1.

2. Dois pontos distintos, em posições arbitrárias, determinam uma única reta tropical.

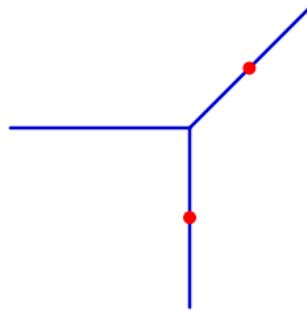


Figura 2.5: Visualização gráfica da Propriedade 2.

2.2 Curvas Tropicais

Dentro do escopo deste trabalho, consideraremos a curva tropical como um objeto que está diretamente associado a um polinômio de duas variáveis. Em particular, a reta tropical que vimos na seção anterior é um caso particular de uma curva tropical, associada a um polinômio da forma $P(x, y) = a \odot x \oplus b \odot y \oplus c$, com $a, b, c \in \mathbb{T}$ e $x, y \in \mathbb{R}$. Note a analogia com a reta usual, que é gráfico da função polinomial $f(x, y) = ax + by + c$ na geometria usual.

Definição 2.1. A curva tropical C definida pelo polinômio $P(x, y) = \bigoplus_{i+j=0}^n a_{ij} \odot x^i \odot y^j$ em \mathbb{R}^2 , com $a_{ij} \in \mathbb{T}$, é o conjunto de pontos $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ para os quais existem $(i, j) \neq (k, l)$ satisfazendo $P(x_0, y_0) = a_{ij} + ix_0 + jy_0 = a_{kl} + kx_0 + ly_0$.

Em outras palavras, a curva tropical é formada pelos pontos (x_0, y_0) nos quais o máximo de $P(x, y)$ é atingido no mínimo duas vezes.

Exemplo 2.2. Voltemos ao Exemplo 1.15. Para determinar a curva definida pelo polinômio $P(x, y) = 1 \oplus x^2 \oplus 1 \odot y$ do item (a), devemos encontrar os pontos que satisfaçam o sistema:

$$\begin{cases} 1 = 1 + y \geq 2x \\ 1 = 2x \geq 1 + y \\ 1 + y = 2x \geq 1 \end{cases}$$

temos como solução do sistema as semirretas:

$$\{(x, 0) \mid x \leq \frac{1}{2}\}, \quad \{(\frac{1}{2}, y) \mid y \leq 0\} \quad \text{e} \quad \{(x, 2x - 1) \mid x \geq \frac{1}{2}\}.$$

Na Figura 2.6, temos a representação gráfica da curva definida pelo polinômio.

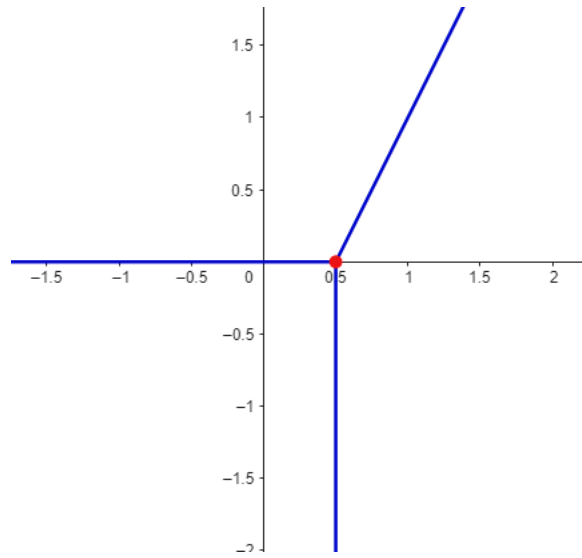


Figura 2.6: Representação gráfica da curva do polinômio $P(x, y) = 1 \oplus x^2 \oplus 1 \odot y$.

Note que o ponto $(\frac{1}{2}, 0)$ é a quina do gráfico dessa função, que denominaremos *vértice* da curva. Ainda, as semirretas serão denominadas *arestas*.

Vejamos como uma reta tropical corresponde à curva do polinômio $P(x, y) = a \odot x \oplus b \odot y \oplus c$. Neste caso, analisamos o sistema

$$\begin{cases} a + x = b + y \geq c \\ a + x = c \geq b + y \\ b + y = c \geq a + x \end{cases}$$

e encontramos as semirretas que determinam uma reta tropical:

$$\{(y + (b - a), y) \mid y \geq (c - b)\}, \quad \{((c - a), y) \mid y \leq (c - b)\} \quad \text{e} \quad \{(x, (c - b)) \mid x \leq (c - a)\}.$$

Assim, pela construção algébrica, uma reta é representada como na Figura 2.7 e coincide com a reta apresentada na Seção 2.1.

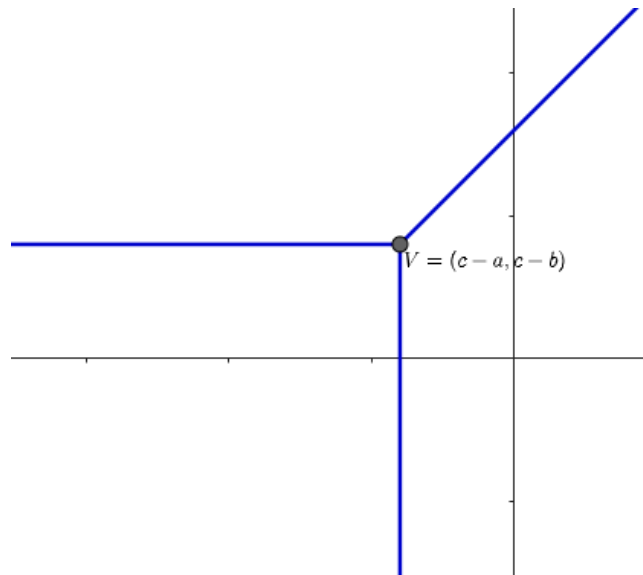


Figura 2.7: Retas Tropical determinadas por $P(x, y) = ax + by + c$.

Exemplo 2.3. Dado o polinômio $P(x, y) = 3 \odot x \oplus 4 \odot y \oplus 5$, obtemos as semirretas

$$\{(y + 1), y \mid y \geq 1\}, \quad \{(2, y) \mid y \leq 1\} \quad \text{e} \quad \{(x, 1) \mid x \leq 2\}$$

que determinam uma reta tropical:

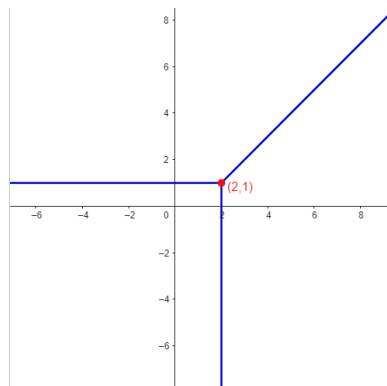


Figura 2.8: Retas Tropical determinadas por $P(x, y) = 3 \odot x \oplus 4 \odot y \oplus 5$.

Exemplo 2.4. Encontremos a curva C do polinômio $P(x, y) = 2 \odot x^2 \oplus 3 \odot x \oplus 1 \odot y^2 \oplus 6 \odot y \oplus 0 = \max\{0, 3 + x, 6 + y, 2 + 2x, 1 + 2y\}$.

Para determinar a curva desse polinômio, precisamos estabelecer os sistemas de equações e inequações, igualando os termos dois a dois e fazendo-os maior ou igual aos outros três monômios da função máximo. Observe que teremos 10 sistemas:

$$(1) \quad 0 = 3 + x \geq \begin{cases} 6 + y \\ 2 + 2x \\ 1 + 2y \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos $3 + x = 0 \Rightarrow x = -3$, daí:

$$\begin{cases} 6 + y \leq 0 \Rightarrow y \leq -6 \\ 2 + 2x \leq 0 \text{ e como } x = -3 \text{ a inequação é válida} \\ 1 + 2y \leq 0 \Rightarrow y \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

e obtemos a semirreta $\{(-3, y) \mid y \leq -6\}$.

$$(2) \quad 0 = 2 + 2x \geq \begin{cases} 3 + x \\ 6 + y \\ 1 + 2y \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos $2 + 2x = 0 \Rightarrow x = -1$, e então:

$$\begin{cases} 3 + x \leq 0 \Rightarrow x \leq -3 \\ 6 + y \leq 0 \Rightarrow y \leq -6 \\ 1 + 2y \Rightarrow y \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Como $x = -1 > -3$, a primeira inequação é impossível, e portanto, não determina uma semirreta da curva.

Analogamente para os demais sistemas:

$$(3) \quad 0 = 6 + y \geq \begin{cases} 3 + x \\ 2 + 2x \\ 1 + 2y \end{cases}$$

Obtemos a semirreta $\{(x, -6) \mid x \leq -3\}$.

$$(4) \quad 0 = 1 + 2y \geq \begin{cases} 3 + x \\ 6 + y \\ 2 + 2x \end{cases}$$

Obtemos um sistema impossível, e portanto este não determina uma das semirretas.

$$(5) \quad 3 + x = 6 + y \geq \begin{cases} 2 + 2x \\ 0 \\ 1 + 2y \end{cases}$$

Obtemos a semirreta $\{(y + 3, y) \mid -6 \leq y \leq -2\}$.

$$(6) \quad 3 + x = 2 + 2x \geq \begin{cases} 6 + y \\ 0 \\ 1 + 2y \end{cases}$$

Obtemos a semirreta $\{(1, y) \mid y \leq -2\}$.

$$(7) \quad 3 + x = 1 + 2y \geq \begin{cases} 6 + y \\ 0 \\ 2 + 2x \end{cases}$$

Obtemos um sistema impossível, e portanto este não determina uma das semirretas.

$$(8) \quad 6 + y = 2 + 2x \geq \begin{cases} 3 + x \\ 0 \\ 1 + 2y \end{cases}$$

Obtemos a semirreta $\{(x, 2x - 4) \mid 1 \leq y \leq -2\}$.

$$(9) \quad 6 + y = 1 + 2y \geq \begin{cases} 3 + x \\ 0 \\ 2 + 2x \end{cases}$$

Obtemos a semirreta $\{(x, 5) \mid x \leq 4, 5\}$.

$$(10) \quad 2 + 2x = 1 + 2y \geq \begin{cases} 3 + x \\ 0 \\ 6 + y \end{cases}$$

Obtemos a semirreta $\{(x, \frac{1+2x}{2}) \mid x \geq 4, 5\}$

Assim podemos representar a curva C como na Figura 3.7 abaixo:

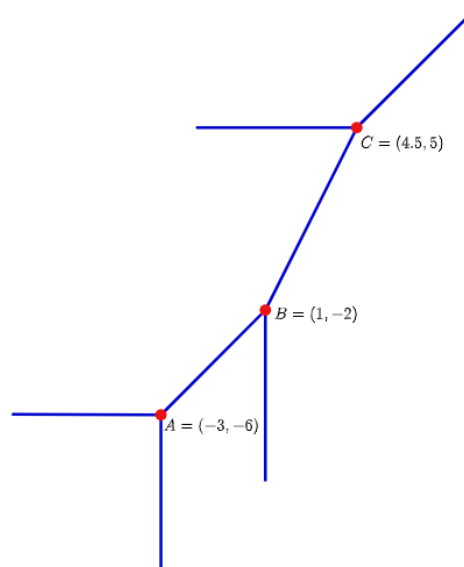


Figura 2.9: Curva Tropical do polinômio $P(x, y) = 2 \odot x^2 \oplus 3 \odot x \oplus 1 \odot y^2 \oplus 6 \odot y \oplus 0$.

Assim como as raízes possuem multiplicidade, as arestas de uma curva possuem um peso da aresta, que é definido como segue:

Definição 2.5. O peso de uma aresta da curva C é o máximo dos m.d.c de $|i - k|$ e $|j - l|$ para cada par (i, j) e (k, l) , da igualdade $ix + jy + c_{i,j} = kx + ly + c_{k,l}$ correspondente a esta aresta.

Exemplo 2.6. Dada a curva do polinômio $P(x, y) = 2 \odot x^2 \oplus 3 \odot x \oplus 1 \odot y^2 \oplus 6 \odot y \oplus 0$, determinada pelas semirretas encontradas no Exemplo 2.4, encontremos os pesos das arestas desta curva:

Tomando a semirreta $\{(-3, y) \mid x \leq -6\}$ obtida através da igualdade $0 = 3 + x \iff 0x + 0y + 0 = 1x + 0y + 3$, obtemos $(i, j) = (0, 0)$ e $(l, k) = (1, 0)$. Tomando o máximo dos m.d.c. dos números $|i - j| = 0$ e $|l - k| = 1$, temos que o peso dessa aresta é 1.

De forma análoga, ao considerar cada uma das arestas, observamos que todas elas, exceto aquela definida pela equação $2 + 2x = 1 + 2y$, possuem peso 1. Especificamente, a aresta em questão tem peso 2.

Capítulo 3

Polígonos de Newton e Cônicas Tropicais

3.1 Polígonos de Newton associados a polinômios de uma variável

Como observamos na Seção 2.2, conforme o grau n do polinômio cresce, o número de equações e inequações a serem resolvidas para determinarmos as raízes dos polinômios também cresce. Neste caso, podemos utilizar os chamados polígonos de Newton para simplificar essa questão.

Definição 3.1. A *envoltória superior convexa* de um conjunto de pontos $\{l_1, \dots, l_n\}$ é a menor forma convexa que envolve todos os pontos l_i superiormente.

Definição 3.2. O *polígono de Newton* associado a um polinômio tropical de uma variável $P(x) = \bigoplus_{i=0}^n a_i \odot x^i$ é a envoltória superior convexa do conjunto de pontos $\{(i, a_i), i = 0, \dots, n\}$.

Exemplo 3.3. Dado o polinômio $P(x) = a \oplus b \odot x \oplus c \odot x^2$, temos duas possibilidades para a envoltória superior convexa dos pontos $(0, a), (1, b), (2, c)$:

- $b \geq \frac{a+c}{2}$: os três pontos estão contidos na envoltória.

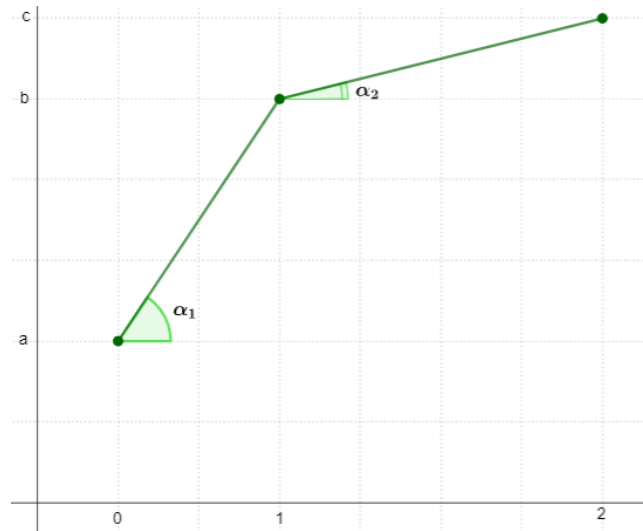


Figura 3.1: Polígono de Newton associado a $P(x) = a \oplus b \odot x \oplus c \odot x^2$ no caso em que $b \geq \frac{a+c}{2}$.

- $b < \frac{a+c}{2}$: a envoltória é um único segmento.

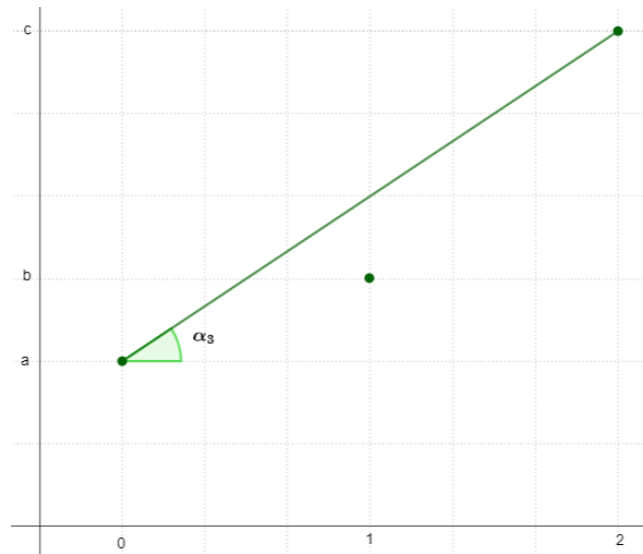


Figura 3.2: Polígono de Newton associado a $P(x) = a \oplus b \odot x \oplus c \odot x^2$ no caso em que $b < \frac{a+c}{2}$.

Notemos que cada ponto está associado a um monômio do polinômio $P(x) = \max_{i=1}^n \{a_i + ix\}$. Ainda, cada segmento associa-se a uma raiz deste polinômio.

Observação 3.4. Observe que o polígono de Newton possuir um número de segmentos diferente do grau do polinômio indica que existem raízes com multiplicidade maior que 1.

Proposição 3.5. Se x_0 é raiz de $P(x) = a \oplus b \odot x \oplus c \odot x^2$, então $x_0 = -m$, onde m é a inclinação de algum segmento que compõe o polígono de Newton associado.

Demonstração. As raízes do polinômio $P(x) = a \oplus b \odot x \oplus c \odot x^2 = \max\{a, b + x, c + 2x\}$, são determinadas a partir do sistema de inequações:

$$\begin{cases} a = b + x \geq c + 2x & \text{(I)} \\ a = c + 2x \geq b + x & \text{(II)} \\ b + x = c + 2x \geq a & \text{(III)} \end{cases}$$

$$\text{(I)} \quad a = b + x \Rightarrow x = a - b, \text{ daí } a \geq c + 2x \Rightarrow a \leq 2b - c.$$

$$\text{(II)} \quad a = c + 2x \Rightarrow x = \frac{a - c}{2}, \text{ daí } a \geq b + x \Rightarrow a \geq 2b - c.$$

$$\text{(III)} \quad b + x = c + 2x \Rightarrow x = b - c, \text{ daí } b + x \geq a \Rightarrow a \leq 2b - c.$$

Obtemos então duas possibilidades, a primeira em que ocorrem as condições das equações (I) e (III), quando obtemos duas raízes: $x = a - b$ e $x = b - c$, respectivamente, e a segunda em que ocorre a condição (II) e temos a raiz $x = \frac{a - c}{2}$, com multiplicidade 2.

Calculemos a inclinação de cada um dos segmentos que compõem o polígono de Newton nos casos (I), (II) e (III):

$$\text{(a)} \quad \tan \alpha_1 = \frac{b - a}{1 - 0} = b - a$$

$$\text{(b)} \quad \tan \alpha_2 = \frac{c - b}{2 - 1} = c - b$$

$$\text{(c)} \quad \tan \alpha_3 = \frac{c - a}{2 - 0} = \frac{c - a}{2}$$

Os inversos (multiplicativos na álgebra tropical) das inclinações dos itens (a) e (b) são $a - b$ e $b - c$, respectivamente, que de fato coincidem com as raízes do polinômio para as condições (I) e (III). Ainda, o inverso da inclinação de α_3 é $\frac{a - c}{2}$ e novamente coincide com a raiz do polinômio para o caso (II) e deve ter multiplicidade 2. \square

Observação 3.6. A multiplicidade de uma raiz x_0 de um polinômio $P(x)$ coincide com a diferença - em módulo - das abscissas do respectivo segmento do polígono de Newton associado. De fato, pela Definição 1.11, sabemos que a multiplicidade da raiz do polinômio é $M = \max\{|i - j|\}$ em que i, j são determinados a partir da igualdade $a_i + ix_0 = a_j + jx_0$.

No caso de $P(x) = a \oplus b \odot x \oplus c \odot x^2$, temos a raiz $x = \frac{a - c}{2}$, que tem multiplicidade 2, uma vez que é encontrada a partir da igualdade dos monômios $b + x = c + 2x$, em que temos $i = 1$ e $j = 2$, portanto $M = \max\{|1 - 2|\} = 2$. Observemos que para determinar os pontos que definem o polígono de Newton nós usamos os pontos (i, a_i) , desta forma ao tomar a diferença das abscissas do segmento do polígono estamos tomando os mesmos i, j .

Exemplo 3.7. Alguns exemplos de polígonos de Newton de polinômios de uma variável:

a) $P(x) = 3 \oplus 2 \odot x \oplus 5 \odot x^2$.

Os pontos que definem o polígono de Newton são $(0, 3)$, $(1, 2)$ e $(2, 5)$. Na Figura 3.3, vemos sua representação.

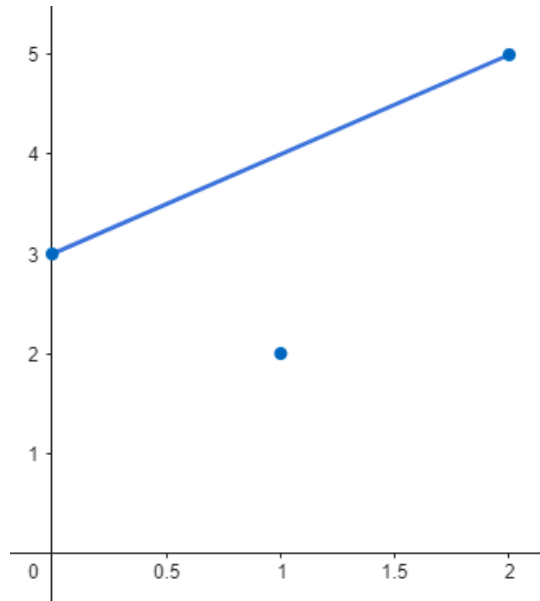


Figura 3.3: $P(x) = 3 \oplus 2 \odot x \oplus 5 \odot x^2$ na forma tropical.

Note que $P(x)$ é um polinômio de grau 2, porém o polígono de Newton associado é composto por apenas 1 segmento, o que indica que a raiz possui multiplicidade 2. De fato, a raiz $x_0 = -1$, obtida como o inverso tropical da inclinação do segmento determinado pelos pontos $(2, 5)$ e $(0, 2)$ possui multiplicidade 2 que é dada pela diferença $2 - 0$ das abscissas destes pontos.

Na Figura 3.4, vemos a representação da curva na forma tropical.

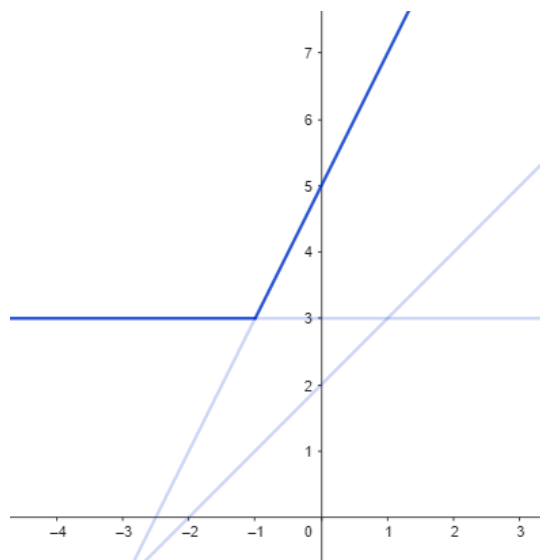


Figura 3.4: Polígono de Newton de $P(x) = 3 \oplus 2 \odot x \oplus 5 \odot x^2$.

b) $Q(x) = -1 \oplus 3 \odot x^2 \oplus 5 \odot x^3 \oplus 5 \odot x^4$.

Os pontos que definem o polígono de Newton são $(0, -1)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$ e $(4, 5)$. Na figura abaixo vemos sua representação.

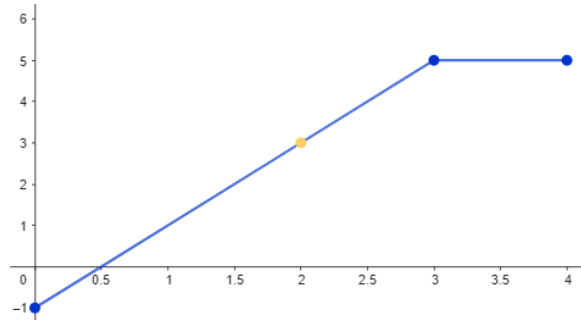


Figura 3.5: Polígono de Newton de $Q(x) = -1 \oplus 3 \odot x^2 \oplus 5 \odot x^3 \oplus 5 \odot x^4$.

Notemos que $Q(x)$ é um polinômio de grau 4, porém o polígono de Newton associado é composto por apenas 2 segmentos, indicando que existe pelo menos uma raiz múltipla. De fato, a raiz $x_0 = -2$, obtida como o inverso tropical da inclinação do segmento determinado pelos pontos $(0, -1)$ e $(3, 5)$, possui multiplicidade 3, que é a diferença $3 - 0$ das abcissas destes pontos. Já a raiz $x_0 = 0$, obtida como o inverso tropical da inclinação do segmento determinado pelos pontos $(3, 5)$ e $(4, 5)$, é uma raiz de multiplicidade 1, que é a diferença $4 - 3$ das abcissas destes pontos.

Na figura a seguir, vemos a representação da curva na forma tropical.

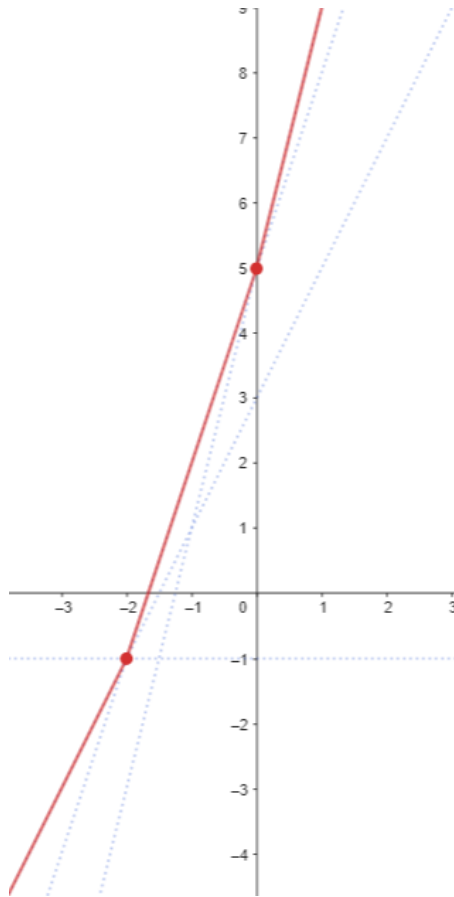


Figura 3.6: $Q(x) = -1 \oplus 3 \odot x^2 \oplus 5 \odot x^3 \oplus 5 \odot x^4$ na forma tropical.

3.2 Polígonos de Newton associados a polinômios de duas variáveis

Nesta seção nos dedicaremos ao estudo dos polígonos de Newton associados a polinômios de duas variáveis. O polígono de Newton também é denominado subdivisão dual ou ainda triângulo dual, dado que no caso em que os coeficientes do polinômio são todos distintos de $-\infty$, a envoltória tem o formato triangular.

Definição 3.8. A subdivisão dual Δ_v associada ao vértice $v = (x_0, y_0)$ de uma curva C definida pelo polinômio tropical

$$P(x, y) = \bigoplus_{i+j=0}^n a_{ij} \odot^i x \odot^j y$$

é a envoltória convexa dos pontos (i, j) tal que

$$P(x_0, y_0) = a_{ij} + ix_0 + jy_0.$$

Definição 3.9. A subdivisão dual de uma curva C definida pelo polinômio tropical $P(x, y)$ de grau n é a união dos Δ_v para cada vértice v da curva C .

$$\Delta_n = \bigcup \Delta_{v_i}.$$

Proposição 3.10. Dada uma curva tropical associada a um polinômio de grau n , em que $a_{ij} \neq -\infty$, o polígono Δ_n associado será definido pelos vértices $(0, 0)$, $(0, n)$ e $(n, 0)$.

Exemplo 3.11. Dado um polinômio de duas variáveis e grau 1, $P(x, y) = \bigoplus_{i+j=0}^1 a_{ij} \odot x^i \odot y^j$, temos $i + j \leq 1$, dessa forma a curva $P(x, y) = \max\{a_{00}, a_{10} + x, a_{01} + y\}$ é definida pelas semirretas

$$\{(a_{00} - a_{10}), y) \mid y \leq (a_{00} - a_{10})\}$$

$$\{(x, a_{00} - a_{10}) \mid x \leq a_{00} - a_{10}\}$$

$$\{(x, \frac{a_{10} - x}{a_{01}}) \mid x \geq a_{00} = a_{10}\},$$

que correspondem, respectivamente, aos monômios $a_{01} + y$, $a_{10} + x$ e a_{00} que definem $P(x, y)$. Além disso, o conjunto de pares ordenados $\{(i, j) : 0 \leq i + j \leq 1\}$ definem o triângulo dual. Observemos que cada lado do triângulo corresponde a uma aresta da curva tropical.

Exemplo 3.12. Retomando o polinômio do Exemplo 2.4, $P(x, y) = 2 \odot x^2 \oplus 3 \odot x \oplus 1 \odot y^2 \oplus 6 \odot y \oplus 0$, temos a seguinte curva na forma tropical:

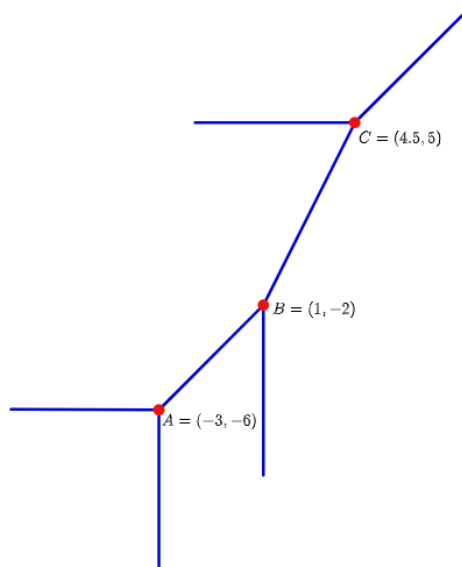


Figura 3.7: Curva Tropical do polinômio $P(x, y) = 2 \odot x^2 \oplus 3 \odot x \oplus 1 \odot y^2 \oplus 6 \odot y \oplus 0$.

Como se trata de um polinômio de grau 2, definimos o triângulo dual determinado pelos pontos $(0, 0)$, $(0, 2)$ e $(2, 0)$. As subdivisões duais associadas aos vértices A , B e C são dadas por:

- Vértice A , $(-3, -6)$: Esse vértice é determinado a partir das igualdades $3 + x = 0$, $6 + y = 0$ e $3 + x = 6 + y$ e define a subdivisão dada pelos pontos $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(0, 0)$.
- Vértice B , $(1, -2)$: Esse vértice é determinado a partir das igualdades $3 + x = 2 + 2x$, $6 + y = 3 + x$ e $2 + 2x = 6 + y$ e define a subdivisão dada pelos pontos $(1, 0)$, $(2, 0)$ e $(0, 1)$.

- Vértice C , $(4.5, 5)$: Esse vértice é determinado a partir das igualdades $1 + 2y = 2 + 2x$, $6 + y = 1 + 2y$ e $2 + 2x = 6 + y$ e define a subdivisão dada pelos pontos $(0, 1)$, $(0, 2)$ e $(2, 0)$.

Dessa forma obtemos o seguinte polígono de Newton:

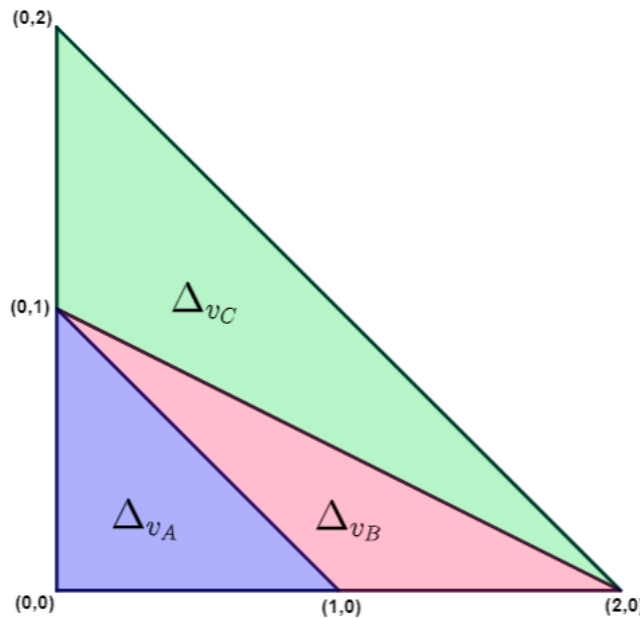


Figura 3.8: Polígono de Newton da curva $P(x, y) = 2 \odot x^2 \oplus 3 \odot x \oplus 1 \odot y^2 \oplus 6 \odot y \oplus 0$.

Teorema 3.13. Dado Δ_n , as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. Dois segmentos de Δ_n não se interceptam, exceto nos vértices ou se são coincidentes.
2. Toda envoltória de Δ_n é convexa.
3. Cada envoltória Δ_{n_i} corresponde a um vértice i .

3.3 Cônicas Tropicais

Uma cônica tropical é a figura geométrica determinada por uma função tropical de duas variáveis e grau 2 e pode ser representada tanto na forma tropical quanto como polígono de Newton.

Definição 3.14. Uma cônica tropical tem como forma geral a função:

$$P(x, y) = a \odot x^2 \oplus b \odot x \odot y \oplus c \odot y^2 \oplus d \odot x \oplus e \odot y \oplus f,$$

com $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{T}$.

Se todos os coeficientes da cônica tropical são distintos de $-\infty$, o polígono associado a essa curva será Δ_2 , dado que $i + j \leq 2$, e terá como vértices de sua envoltória os pontos $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(0, 2)$ e ainda, como vértices internos $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 1)$, totalizando 6 vértices.

As cônicas aqui estudadas serão classificadas em casos denotados por

$$\text{Caso } Xy_0 \dots y_k \\ \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$$

em que $X = 4, 5, 6$ é o número de coeficientes de $P(x, y)$ distintos de $-\infty$; $y_0 \dots y_k$, $0 \leq k \leq 6 - X$, representam os coeficientes iguais a $-\infty$ e $\theta_1 \dots \theta_m$, $3 \leq m \leq 4$, são os coeficientes angulares das semirretas que representam os monômios de $P(x, y)$.

Observação 3.15. Para as semirretas verticais, ou seja, que não possuem inclinação, convencionaremos $\theta = -\infty$.

Consideremos a curva $P(x, y) = a \odot x^2 \oplus b \odot x \odot y \oplus c \odot y^2 \oplus d \odot x \oplus e \odot y \oplus f$, ou seja,

$$P(x, y) = \max\{a + 2x, b + x + y, c + 2y, d + x, e + y, f\}.$$

Conforme visto anteriormente, combinaremos cada um dos termos da expressão máximo igualando dois a dois e fazendo-os maior que os outros. Note que, como temos 6 termos, haverá $C_2^6 = 15$ sistemas.

$$(1) \ a + 2x = b + x + y > \begin{cases} c + 2y \\ d + x \\ e + y \\ f \end{cases}$$

$$(2) \ a + 2x = d + x > \begin{cases} c + 2y \\ b + x + y \\ e + y \\ f \end{cases}$$

$$(3) \ a + 2x = c + 2y > \begin{cases} b + x + y \\ d + x \\ e + y \\ f \end{cases}$$

$$(4) \ a + 2x = e + y > \begin{cases} c + 2y \\ d + x \\ b + x + y \\ f \end{cases}$$

$$(5) \ a + 2x = f > \begin{cases} c + 2y \\ d + x \\ e + y \\ b + x + y \end{cases}$$

$$(6) \ b + x + y = c + 2y > \begin{cases} a + 2x \\ d + x \\ e + y \\ f \end{cases}$$

$$(7) \ b + x + y = d + x > \begin{cases} c + 2y \\ a + 2x \\ e + y \\ f \end{cases}$$

$$(8) \ b + x + y = e + y > \begin{cases} a + 2x \\ d + x \\ c + 2y \\ f \end{cases}$$

$$(9) \ b + x + y = f > \begin{cases} c + 2y \\ d + x \\ e + y \\ a + 2x \end{cases}$$

$$(10) \ c + 2y = d + x > \begin{cases} b + x + y \\ a + 2x \\ e + y \\ f \end{cases}$$

$$(11) \ c + 2y = e + y > \begin{cases} b + x + y \\ a + 2x \\ d + x \\ f \end{cases}$$

$$(12) \quad c + 2y = f > \begin{cases} b + x + y \\ a + 2x \\ d + x \\ e + y \end{cases}$$

$$(13) \quad d + x = e + y > \begin{cases} b + x + y \\ a + 2x \\ c + 2y \\ f \end{cases}$$

$$(14) \quad d + x = f > \begin{cases} b + x + y \\ a + 2x \\ c + 2y \\ e + y \end{cases}$$

$$(15) \quad e + y = f > \begin{cases} b + x + y \\ a + 2x \\ c + 2y \\ d + x \end{cases}$$

Analisando cada um dos casos, encontramos as seguintes condicionantes:

(1) Da igualdade $a + 2x = b + x + y$, obtemos $x = b + y - a$. Aplicando às desigualdades, obtemos as seguintes relações:

- $a + 2x > c + 2y \Rightarrow 2b > c - a$
- $a + 2x > d + x \Rightarrow b > d - y$
- $a + 2x > e + y \Rightarrow 2b > a - y + e$
- $a + 2x > f \Rightarrow 2b > f - 2y - a$

Dessa forma, temos como condicionante $2b > c - a$.

(2) Da igualdade $a + 2x = d + x$, obtemos $x = d - a$. Aplicando às desigualdades, obtemos as seguintes relações:

- $d + x > c + 2y \Rightarrow 2d > c + 2y + a$
- $d + x > b + x + y \Rightarrow d > b + y$
- $d + x > e + y \Rightarrow 2d > e + y + a$

- $d + x > f \Rightarrow 2d > f + a$

Dessa forma, temos como condicionante $2d > f + a$.

Analogamente, para cada um dos sistemas (3)-(15), encontramos as respectivas condicionantes:

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} 2b < c + a \end{array} \right.$$

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} b - a < e - d \\ 2e > f + c \\ c - a < 2(e - d) \\ f - a < 2(e - b) \end{array} \right.$$

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} 2d < a + f \end{array} \right.$$

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} 2b > a + c \end{array} \right.$$

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} 2b > c + a \\ d - a > c - b \\ 2d > f + a \end{array} \right.$$

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} 2b > c + a \\ d - b > e - c \\ 2e > f + c \end{array} \right.$$

$$(9) \left\{ \begin{array}{l} 2b > c + a \\ b - d > \frac{c - f}{2} \\ e - b < \frac{f - a}{2} \\ e - b < f - d \end{array} \right.$$

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} 2d > f + a \\ 2d > f + 2b - c \\ d + c > e + b \\ 2d + c > 2e + a \end{array} \right.$$

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} 2e > f + c \end{array} \right.$$

$$(12) \left\{ \begin{array}{l} 2e < f + c \end{array} \right.$$

$$(13) \begin{cases} 2d > f + a \\ f - d < e - b \\ 2e > f + c \end{cases}$$

$$(14) \begin{cases} 2d < a + f \end{cases}$$

$$(15) \begin{cases} 2e > c + f \end{cases}$$

Observe que, em cada caso, as condicionantes encontradas determinam as semirretas que definem a curva tropical.

Para classificar as curvas, estudaremos as subdivisões duais Δ_v , que estão associadas a cada um dos vértices v dessa curva. Note que existem $C_3^6 - 3 = 17$ combinações possíveis para Δ_v , dadas pelas combinações três a três das retas - que representam as interseções - e excluindo-se os casos em que as combinações levam a (i, j) colineares.

Observe que cada (i, j) é determinado por um monômio que compõe $P(x, y)$:

Monômio	Vértice (i, j)	Nomenclatura
f	$(0, 0)$	a'
$a \odot x^2$	$(2, 0)$	b'
$b \odot x \odot y$	$(1, 1)$	c'
$c \odot y^2$	$(0, 2)$	d'
$d \odot x$	$(1, 0)$	e'
$e \odot y$	$(0, 1)$	f'

Dessa forma encontramos os seguintes Δ_v :

$$\begin{array}{cccccc} \Delta_{a'b'c'} & \Delta_{a'b'd'} & \Delta_{b'c'e'} & \Delta_{b'c'f'} & \Delta_{c'd'e'} & \Delta_{c'd'f'} \\ \Delta_{c'd'e'} & \Delta_{c'd'f'} & \Delta_{d'e'f'} & \Delta_{a'c'd'} & \Delta_{a'c'e'} & \Delta_{a'c'f'} \\ \Delta_{a'c'e'} & \Delta_{a'c'f'} & \Delta_{a'd'e'} & \Delta_{a'd'f'} & \Delta_{b'd'f'} & \Delta_{b'd'e'} \\ \Delta_{b'd'f'} & \Delta_{b'd'e'} & \Delta_{a'b'f'} & \Delta_{b'e'f'} & \Delta_{c'e'f'} & \end{array}$$

Em seguida, podemos encontrar as inclinações θ e os pesos ω (recorde que $\omega = mdc(|i - i'|, |j - j'|)$), de cada semirreta.

1. $\Delta_{a'b'c'}$, é dado pelos pontos $(0, 0)$, $(0, 2)$ e $(1, 1)$ e corresponde ao vértice:

$$\text{Vértice : } \begin{cases} f = a + 2x \\ b + x + y = f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{f - a}{2} \\ y = \frac{f - a - 2b}{2} \end{cases}$$

Calculando as inclinações, obtemos $\theta = \{0, -1, 1\}$:

$$\theta_{a'b'} = \frac{y_{b'} - y_{a'}}{x_{b'} - x_{a'}} = \frac{0 - 0}{2 - 0} = 0$$

$$\theta_{b'c'} = \frac{y_{c'} - y_{b'}}{x_{c'} - x_{b'}} = \frac{1 - 0}{1 - 2} = -1$$

$$\theta_{a'c'} = \frac{y_{c'} - y_{a'}}{x_{c'} - x_{a'}} = \frac{1 - 0}{1 - 0} = 1$$

E finalmente os pesos $\omega = \{2, 1, 1\}$:

$$\omega_{a'b'} = mdc(0, 2) = 2$$

$$\omega_{b'c'} = mdc(1, 1) = 1$$

$$\omega_{a'c'} = mdc(1, 1) = 1$$

Analogamente, para cada um dos Δ :

2. $\Delta_{a'b'd'}$, dado pelos pontos $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(0, 2)$, correspondente ao vértice:

$$\begin{cases} f = a + 2x \\ c + 2y = f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{f - a}{2} \\ y = \frac{f - c}{2} \end{cases}$$

Inclinações θ : $\{0, -\infty, -1\}$

Pesos ω : $\{2, 2, 2\}$

3. $\Delta_{b'c'e'}$, dado pelos pontos $(2, 0)$, $(1, 1)$ e $(1, 0)$, correspondente ao vértice:

$$\begin{cases} d + x = a + 2x \\ d + x = b + x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = d - a \\ y = d - b \end{cases}$$

Inclinações θ : $\{-1, 0, -\infty\}$

Pesos ω : $\{1, 1, 1\}$

4. $\Delta_{b'c'f'}$, dado pelo pontos $(2, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$, correspondente ao vértice:

$$\begin{cases} a + 2x = e + y \\ b + x + y = e + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = e - b \\ y = a + e - 2b \end{cases}$$

Inclinações θ : $\{-1, -\frac{1}{2}, 0\}$

Pesos $\omega: \{1, 1, 1\}$

5. $\Delta_{c'd'e'}$, dado pelo pontos $(0, 2)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$, correspondente ao vértice:

$$\begin{cases} b + x + y = d + x \\ d + x = c + 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = c + d - 2b \\ y = d - b \end{cases}$$

Inclinações $\theta: \{-2, -\infty, -1\}$

Pesos $\omega: \{1, 1, 1\}$

6. $\Delta_{c'd'f'}$, dado pelos pontos $(1, 1)$, $(0, 2)$ e $(0, 1)$, correspondente ao vértice:

$$\begin{cases} b + x + y = e + y \\ c + 2y = e + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = e - b \\ y = e - c \end{cases}$$

Inclinações $\theta: \{0, -\infty, -1\}$

Pesos $\omega: \{1, 1, 1\}$

7. $\Delta_{b'e'f'}$, dado pelos pontos $(0, 2)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$, correspondente ao vértice::

$$\begin{cases} c + 2y = e + y \\ d + x = e + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2e - c - d \\ y = e - c \end{cases}$$

Inclinações $\theta: \{-2, -\infty, -1\}$

Pesos $\omega: \{1, 1, 1\}$

8. $\Delta_{a'c'd'}$, dado pelos pontos $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 2)$, correspondente ao vértice:

$$\begin{cases} b + x + y = f \\ c + 2y = f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{f + c - 2b}{2} \\ y = \frac{f - c}{2} \end{cases}$$

Inclinações $\theta: \{1, -\infty, -1\}$

Pesos $\omega: \{1, 2, 1\}$

9. $\Delta_{a'c'e'}$, dado pelos pontos $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(1, 0)$, correspondente ao vértice:

$$\begin{cases} b + x + y = f \\ d + x = f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = f - d \\ y = d - b \end{cases}$$

Inclinações $\theta: \{1, 0, -\infty\}$

Pesos $\omega: \{1, 1, 1\}$

10. $\Delta_{a'c'f'}$, dado pelos pontos $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$, correspondente ao vértice:

$$\begin{cases} b + x + y = f \\ e + y = f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = e - b \\ y = f - e \end{cases}$$

Inclinações $\theta: \{1, 1, 0\}$

Pesos $\omega: \{1, 1, 1\}$

11. $\Delta_{a'd'e'}$, dado pelos pontos $(0, 0)$, $(0, 2)$ e $(1, 0)$, correspondente ao vértice:

$$\begin{cases} c + 2y = f \\ d + x = f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = f - d \\ y = \frac{f - c}{2} \end{cases}$$

Inclinações $\theta: \{-\infty, 0, -2\}$

Pesos $\omega: \{2, 1, 1\}$

12. $\Delta_{a'e'f'}$, dado pelos pontos $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$, correspondente ao vértice:

$$\begin{cases} e + y = f \\ d + x = f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = f - d \\ y = f - e \end{cases}$$

Inclinações $\theta: \{0, -\infty, -1\}$

Pesos $\omega: \{1, 1, 1\}$

13. $\Delta_{b'd'f'}$, dado pelos pontos $(2, 0)$, $(0, 2)$ e $(0, 1)$, correspondente ao vértice:

$$\begin{cases} e + y = a + 2x \\ e + y = c + 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2e - c}{2} \\ y = e - c \end{cases}$$

Inclinações $\theta: \{-1, -\frac{1}{2}, -\infty\}$

Pesos $\omega: \{2, 1, 1\}$

14. $\Delta_{b'd'e'}$, dado pelos pontos $(2, 0)$, $(0, 2)$ e $(1, 0)$, correspondente ao vértice:

$$\begin{cases} a + 2x = d + x \\ c + 2y = d + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = d - a \\ y = \frac{2d - a - c}{2} \end{cases}$$

Inclinações $\theta: \{-1, -2, 0\}$

Pesos $\omega: \{2, 1, 1\}$

15. $\Delta_{a'b'f'}$, dado pelos pontos $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(0, 1)$, correspondente ao vértice:

$$\begin{cases} a + 2x = f \\ e + y = f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{f-a}{2} \\ y = f - e \end{cases}$$

Inclinações $\theta: \{0, -\infty, -\frac{1}{2}\}$

Pesos $\omega: \{2, 1, 1\}$

16. $\Delta_{b'e'f'}$, dado pelos pontos $(2, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$, correspondente ao vértice:

$$\begin{cases} a + 2x = d + x \\ e + y = d + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = d - a \\ y = 2d - a - e \end{cases}$$

Inclinações $\theta: \{0, -\frac{1}{2}, -1\}$

Pesos $\omega: \{1, 1, 1\}$

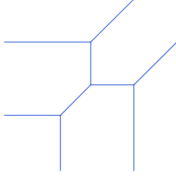
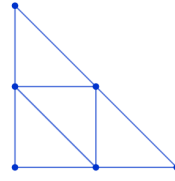
17. $\Delta_{c'e'f'}$, dado pelos pontos $(1, 1)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$, correspondente ao vértice:

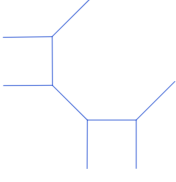
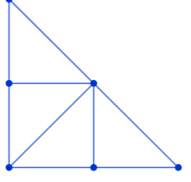
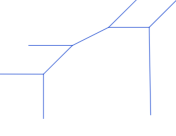
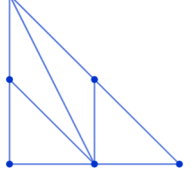
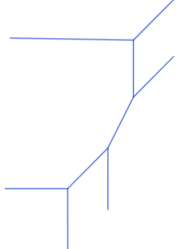
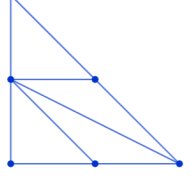
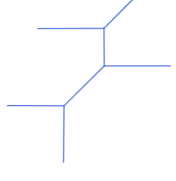
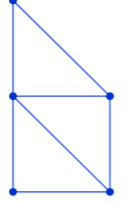
$$\begin{cases} b + x + y = d + x \\ b + x + y = e + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = e - b \\ y = d - b \end{cases}$$

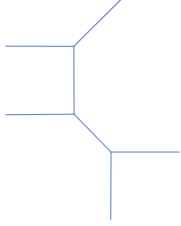
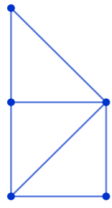
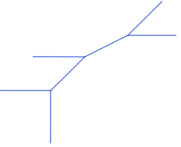

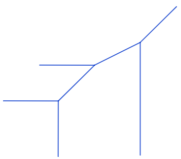
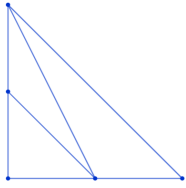
Inclinações $\theta: \{-\infty, 0, -1\}$

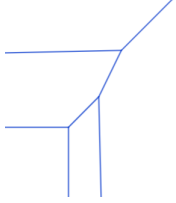
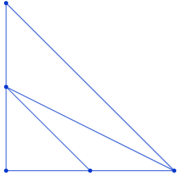
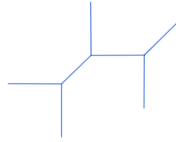
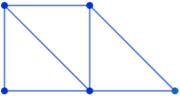
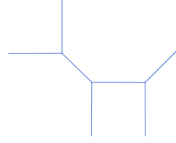
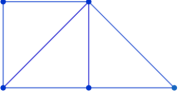
Pesos $\omega: \{1, 1, 1\}$

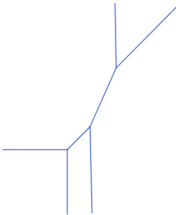
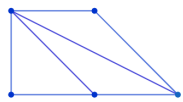
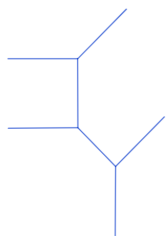
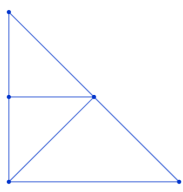
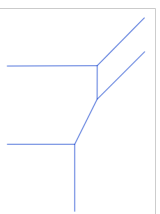
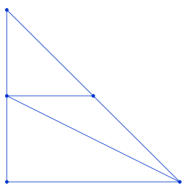
Com essas condicionantes e vértices podemos classificar as cônicas como em Ellis [3] e em Nascimento [7], em que cada tipo de cônica atende as condicionantes e, uma vez classificada, facilmente conseguimos determinar seus vértices e, conseqüentemente, sua forma tropical e seu polígono de Newton.

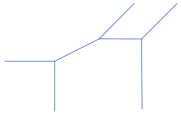
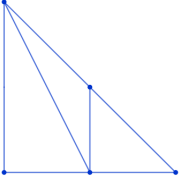
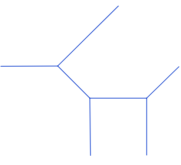
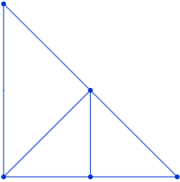
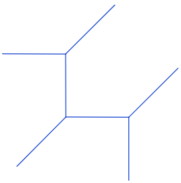
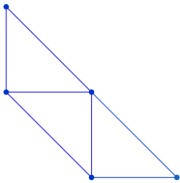
Caso	Forma Tropical	Polígono de Newton	Condicionantes	Vértices
<p>Caso 6</p> <p>$\{-\infty, -1, 0\}$</p>			$a, b, c, d, e, f \neq -\infty$ $2b > c + a$ $2d > f + a$ $2e > f + c$ $d - a > e - b$ $d - b < e - c$ $f - d < e - b$	$V_1 = (d - a, d - b)$ $V_2 = (e - b, e - c)$ $V_3 = (e - b, d - b)$ $V_4 = (f - d, f - e)$

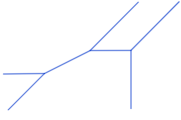
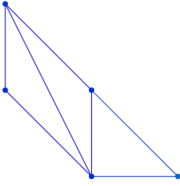
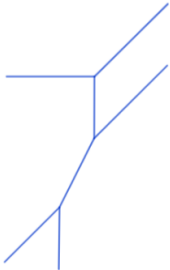
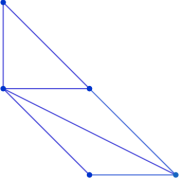


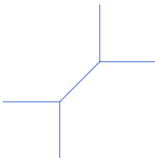
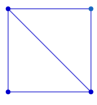
<p>Caso 6 $\{-\infty, -1, 0, 1\}$</p>			$a, b, c, d, e, f \neq -\infty$ $2b > c + a$ $2d > f + a$ $2e > f + c$ $d - a > e - b$ $d - b < e - c$ $2(b - d) > c - f$ $2(e - b) < f - a$ $e - b < f - d$	$V_1 = (d - a, d - b)$ $V_2 = (e - b, e - c)$ $V_3 = (f - d, d - b)$ $V_4 = (e - b, f - e)$
<p>Caso 6 $\{-\infty, 0, -\frac{1}{2}, -1\}$</p>			$a, b, c, d, e, f \neq -\infty$ $2b > c + a$ $2d > f + a$ $2e > f + c$ $d - a > e - b$ $2(d - b) > f - c$ $d + c > e + b$ $2d + c > 2e + a$ $f - d < e - b$	$V_1 = (d - a, d - b)$ $V_2 = (c + d - 2b, d - b)$ $V_3 = (2e - c - d, e - c)$ $V_4 = (f - d, f - e)$
<p>Caso 6 $\{-\infty, 0, -1, -2\}$</p>			$a, b, c, d, e, f \neq -\infty$ $2b > c + a$ $2d > f + a$ $b - a < e - d$ $2e > f + c$ $c - a < 2(e - d)$ $f - a < 2(e - b)$ $d - b < e - c$ $f - d < e - b$	$V_1 = (e - b, a + e - 2b)$ $V_2 = (d - a, 2d - a - e)$ $V_3 = (e - b, e - c)$ $V_4 = (f - d, f - e)$
<p>Caso 5a $\{-\infty, 0, -1\}$</p>			$a = -\infty$ $b, c, d, e, f \neq -\infty$ $2b > c + a$ $2d > f + a$ $2e > f + c$ $d - a > e - b$ $d - b < e - c$ $f - d > e - b$	$V_1 = (e - b, e - c)$ $V_2 = (e - b, d - b)$ $V_3 = (f - d, f - e)$

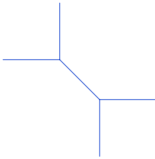

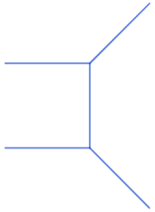
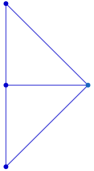
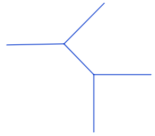
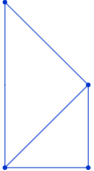
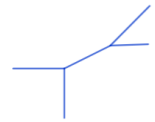
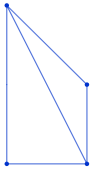
<p>Caso 5a $\{-\infty, -1, 0, 1\}$</p>			$a = -\infty$ $b, c, d, e, f \neq -\infty$ $2b > c + a$ $2d > f + a$ $2e > f + c$ $d - a > e - b$ $d - b < e - c$ $2(b - d) > c - f$ $2(e - b) < f - a$ $e - b < f - d$	$V_1 = (e - b, e - c)$ $V_2 = (f - d, d - b)$ $V_3 = (e - b, f - e)$
<p>Caso 5a $\{-\infty, 0, -\frac{1}{2}, -1\}$</p>			$a = -\infty$ $b, c, d, e, f \neq -\infty$ $2b > c + a$ $2d > f + a$ $2e > f + c$ $d - a > e - b$ $2(d - b) > f - c$ $d + c > e + b$ $2d + b > 2e + a$ $f - d < e - b$	$V_1 = (c + d - 2b, d - b)$ $V_2 = (2e - c - d, e - c)$ $V_3 = (f - d, f - e)$
<p>Caso 5b $\{-\infty, 0, -\frac{1}{2}, -1\}$</p>			$b = -\infty$ $a, c, d, e, f \neq -\infty$ $2b < c + a$ $2d > f + a$ $2e > f + c$ $2(d - b) > f - c$ $d + c > e + b$ $2d + c > 2e + a$ $f - d < e - b$	$V_1 = (d - a, \frac{2d - a - c}{2})$ $V_2 = (2e - c - d, e - c)$ $V_3 = (f - d, f - e)$

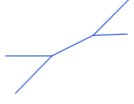
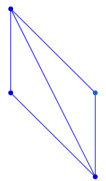
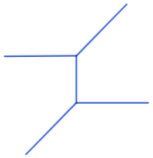
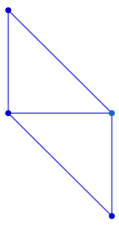

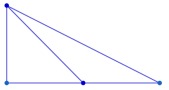

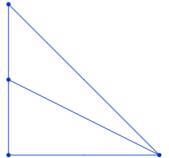
<p style="text-align: center;">Caso 5b $\{-\infty, 0, -1, -2\}$</p>			$b = -\infty$ $a, c, d, e, f \neq -\infty$ $2b < c + a$ $2d > f + a$ $b - a < e - d$ $2e > f + c$ $c - a < 2(e - d)$ $f - a < 2(e - b)$ $f - d < e - b$	$V_1 = \left(\frac{2e - c - a}{2}, e - c\right)$ $V_2 = (d - a, 2d - a - e)$ $V_3 = (f - d, f - e)$
<p style="text-align: center;">Caso 5c $\{-\infty, 0, -1\}$</p>			$c = -\infty$ $a, b, d, e, f \neq -\infty$ $2b > c + a$ $2d > f + a$ $2e > f + c$ $d - a > e - b$ $d - b < e - c$ $f - d < e - b$	$V_1 = (d - a, d - b)$ $V_2 = (e - b, d - b)$ $V_3 = (f - d, f - e)$
<p style="text-align: center;">Caso 5c $\{-\infty, -1, 0, 1\}$</p>			$c = -\infty$ $a, b, d, e, f \neq -\infty$ $2b > c + a$ $2d > f + a$ $2e > f + c$ $d - a > e - b$ $d - b < e - c$ $2(b - d) > c - f$ $2(e - b) > f - a$ $e - b > f - d$	$V_1 = (d - a, d - b)$ $V_2 = (f - d, d - b)$ $V_3 = (e - b, f - e)$


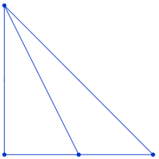

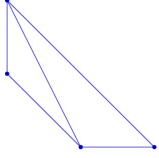

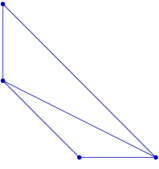
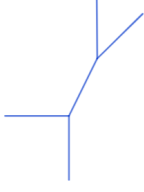
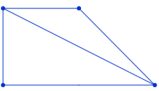
<p style="text-align: center;">Caso 5c $\{-\infty, 0, -1, -2\}$</p>			$c = -\infty$ $a, b, d, e, f \neq -\infty$ $2b > c + a$ $2d > f + a$ $b - a < e - d$ $2e > f + c$ $c - a < 2(e - d)$ $f - a < 2(e - b)$ $d - b < e - c$ $f - d < e - b$	$V_1 = (e - b, a + e - 2b)$ $V_2 = (d - a, 2d - a - e)$ $V_3 = (f - d, f - e)$
<p style="text-align: center;">Caso 5d $\{-\infty, -1, 0, 1\}$</p>			$d = -\infty$ $a, b, c, e, f \neq -\infty$ $2b > c + a$ $2e > f + c$ $2d < a + f$ $d - b < e - c$ $2(b - d) > c - f$ $2(e - b) < f - a$ $e - b < f - d$	$V_1 = \left(\frac{f - a}{2}, \frac{f - a - 2b}{2}\right)$ $V_2 = (e - b, e - c)$ $V_3 = (e - b, f - e)$
<p style="text-align: center;">Caso 5d $\{-\infty, -1, 0, -2\}$</p>			$d = -\infty$ $a, b, c, e, f \neq -\infty$ $2b > c + a$ $b - a < e - d$ $2e > f + c$ $c - a < 2(e - d)$ $f - a < 2(e - b)$ $2d < a + f$ $d - b < e - c$	$V_1 = (e - b, a + e - 2b)$ $V_2 = \left(\frac{f - a}{2}, f - e\right)$ $V_3 = (e - b, e - c)$

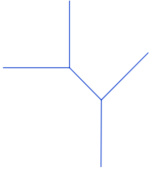
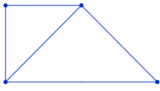
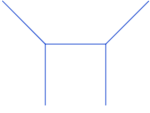
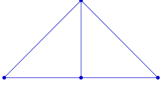
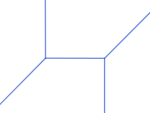
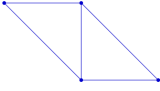
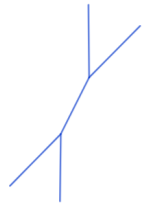
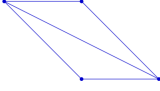
<p>Caso 5e $\{-\infty, 0, -\frac{1}{2}, -1\}$</p>			$e = -\infty$ $a, b, c, d, f \neq -\infty$ $2b > c + a$ $2d > f + a$ $d - a > e - b$ $2(d - b) > f - c$ $d + c > e + b$ $2d + c < 2e + a$ $2e < f + c$	$V_1 = (d - a, d - b)$ $V_2 = (c + d - 2b, d - b)$ $V_3 = (f - d, \frac{f - c}{2})$
<p>Caso 5e $\{-\infty, -1, 0, 1\}$</p>			$e = -\infty$ $a, b, c, d, f \neq -\infty$ $2b > c + a$ $2d > f + a$ $2e > f + c$ $d - a > e - b$ $2(d - b) > f - c$ $2(e - b) < f - a$ $e - b < f - d$ $f - d < e - b$ $2e < f + c$	$V_1 = (d - a, d - b)$ $V_2 = (\frac{f + c - 2b}{2}, \frac{f - c}{2})$ $V_3 = (f - d, f - e)$
<p>Caso 5f $\{-\infty, 0, -1\}$</p>			$f = -\infty$ $a, b, c, d, e \neq -\infty$ $2b > c + a$ $2d > f + a$ $2e > f + c$ $d - a > e - b$ $d - b < e - c$ $f - d < e - b$	$V_1 = (d - a, d - b)$ $V_2 = (e - b, e - c)$ $V_3 = (e - b, d - b)$

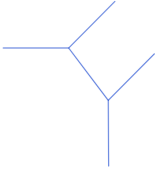
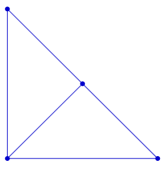
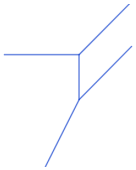
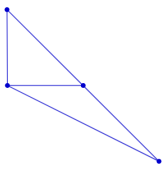
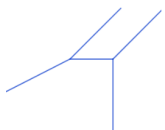
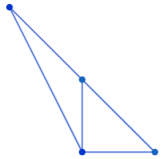
<p>Caso 5f</p> $\{-\infty, 0, -\frac{1}{2}, 1\}$			$f = -\infty$ $a, b, c, d, e \neq -\infty$ $2b > c + a$ $2d > f + a$ $2e > f + c$ $d - a > e - b$ $2(d - b) > f - c$ $d + c > e + b$ $2d + c > 2e + a$ $f - d < e - b$	$V_1 = (d - a, d - b)$ $V_2 = (c + d - 2b, d - b)$ $V_3 = (2e - c - d, e - c)$
<p>Caso 5f</p> $\{-\infty, 0, -1, -2\}$			$f = -\infty$ $a, b, c, d, e \neq -\infty$ $2b > c + a$ $2d > f + a$ $b - a < e - d$ $2e > f + c$ $c - a < 2(e - d)$ $f - a < 2(e - b)$ $d - b < e - c$ $f - d < e - b$	$V_1 = (e - b, a + e - 2b)$ $V_2 = (d - a, 2d - a - e)$ $V_3 = (e - b, e - c)$
<p>Caso 4ab</p> $\{-\infty, 0, -\frac{1}{2}, -1\}$			$a = b = -\infty$ $c, d, e, f \neq -\infty$ $2d > f + a$ $2e > f + c$ $2(d - b) > 2e + a$ $d + c > e + b$ $2d + c > 2e + a$ $f - d < e - b$	$V_1 = (2e - c - d, e - c)$ $V_2 = (f - d, f - e)$
<p>Caso 4ac</p> $\{-\infty, 0, -1\}$			$a = c = -\infty$ $b, d, e, f \neq -\infty$ $2b > c + a$ $2d > f + a$ $2e > f + c$ $d - a > e - b$ $d - b < e - c$ $f - d < e - b$	$V_1 = (e - b, d - b)$ $V_2 = (f - d, f - e)$

<p>Caso 4ac $\{-\infty, 0, 1\}$</p>			$a = c = -\infty$ $b, d, e, f \neq -\infty$ $2b > c + a$ $2d > f + a$ $2e > f + c$ $d - a > e - b$ $d - b < e - c$ $2(b - d) > c - f$ $2(e - b) < f - a$ $e - b < f - d$	$V_1 = (f - d, d - b)$ $V_2 = (e - b, f - e)$
<p>Caso 4ad $\{-\infty, -1, 0, 1\}$</p>			$a = d = -\infty$ $a, b, c, e, f \neq -\infty$ $2b > c + a$ $2e > f + c$ $d - b < e - c$ $2(b - d) > c - f$ $2(e - b) < f - a$ $e - b < f - d$	$V_1 = (e - b, e - c)$ $V_2 = (e - b, f - e)$
<p>Caso 4ae $\{-\infty, -1, 0, 1\}$</p>			$a = e = -\infty$ $b, c, d, f \neq -\infty$ $2d > f + a$ $d - a > e - b$ $2e < f + c$ $2(b - d) > c - f$ $2(e - b) < f - a$ $e - b < f - d$	$V_1 = \left(\frac{f + c - 2b}{2}, \frac{f - c}{2}\right)$ $V_2 = (f - d, d - b)$
<p>Caso 4ae $\{-\infty, 0, -\frac{1}{2}, -1\}$</p>			$a = e = -\infty$ $b, c, d, f \neq -\infty$ $2b > c + a$ $2d > f + a$ $d - a > e - b$ $2e < f + c$ $2(b - d) > f - c$ $d + c > e + b$ $2d + c > 2e + a$	$V_1 = (c + d - 2b, d - b)$ $V_2 = \left(f - d, \frac{f - c}{a}\right)$

<p>Caso 4af</p> <p>$\{0, -\frac{1}{2}, -1\}$</p>			$a = f = -\infty$ $b, c, d, e \neq -\infty$ $2b > c + a$ $2d > f + a$ $d - a > e - b$ $2(d - b) > f - c$ $d + c > e + b$ $2d + c > 2e + a$ $2e > f + c$ $f - d < e - b$	$V_1 = (c + d - 2b, d - b)$ $V_2 = (2e - c - d, e - c)$
<p>Caso 4af</p> <p>$\{-\infty, 0, -1\}$</p>			$a = f = -\infty$ $a, b, c, d \neq -\infty$ $2d > f + a$ $2b > c + a$ $2e > f + c$ $d - a > e - b$ $d - b < e - c$ $f - d < e - b$	$V_1 = (e - b, e - c)$ $V_2 = (e - b, d - b)$
<p>Caso 4bc</p> <p>$\{-\infty, 0, -1, -2\}$</p>			$b = c = -\infty$ $a, d, e, f \neq -\infty$ $2d > f + a$ $b - a < e - d$ $2e > f + c$ $c - a < 2(e - d)$ $f - a < 2(e - b)$ $f - d < e - b$	$V_1 = (d - a, 2d - a - e)$ $V_2 = (f - d, f - e)$
<p>Caso 4bd</p> <p>$\{-\infty, 0, -1, -2\}$</p>			$b = d = -\infty$ $a, c, e, f \neq -\infty$ $2b < c + a$ $b - a < e - d$ $2e > f + c$ $c - a < 2(e - d)$ $f - a < 2(e - b)$ $2d < a + f$	$V_1 = (\frac{2e - c - a}{2}, e - c)$ $V_2 = (\frac{f - a}{2}, f - e)$

<p>Caso 4be $\{-\infty, 0, -1, -\frac{1}{2}\}$</p>			$b = e = -\infty$ $a, c, d, f \neq -\infty$ $2b < c + a$ $2d > f + a$ $2(d - b) > f - c$ $d + c > e + b$ $2d + c > 2e + a$ $2e < f + c$	$V_1 = (d - a, \frac{2d - a - c}{2})$ $V_2 = (f - d, \frac{f - c}{2})$
<p>Caso 4bf $\{-\infty, 0, -1, -\frac{1}{2}\}$</p>			$b = f = -\infty$ $a, c, d, e \neq -\infty$ $2b < c + a$ $2d > f + a$ $2(d - b) > f - c$ $d + c > e + b$ $2d + c > 2e + a$ $2e < f + c$ $f - d < e - b$	$V_1 = (d - a, \frac{2d - a - c}{2})$ $V_2 = (2e - c - d, e - c)$
<p>Caso 4bf $\{-\infty, 0, -1, -2\}$</p>			$b = f = -\infty$ $a, c, d, e \neq -\infty$ $2b < c + a$ $2d > f + a$ $b - a < e - d$ $c - a < 2(e - d)$ $f - a < 2(e - b)$ $2e > f + c$ $f - d < e - b$	$V_1 = (\frac{2e - c - a}{2}, e - c)$ $V_2 = (d - a, 2d - a - e)$
<p>Caso 4cd $\{-\infty, 0, -1, -2\}$</p>			$c = d = -\infty$ $a, b, e, f \neq -\infty$ $2b > c + a$ $2d > f + a$ $b - a < e - d$ $c - a < 2(e - d)$ $f - a < 2(e - b)$ $2e > f + c$ $d - b < e - c$	$V_1 = (e - b, a + e - 2b)$ $V_2 = (\frac{f - a}{2}, f - e)$

<p>Caso 4cd $\{-\infty, 0, -1, 1\}$</p>			$c = d = -\infty$ $a, b, e, f \neq -\infty$ $2b > c + a$ $2d < a + f$ $2(b - d) > c - f$ $2(e - b) < f - a$ $2e > f + c$ $e - b < f - d$	$V_1 = \left(\frac{f - a}{2}, \frac{f - a - 2b}{2}\right)$ $V_2 = (e - b, f - e)$
<p>Caso 4ce $\{-\infty, 0, -1, 1\}$</p>			$c = e = -\infty$ $a, d, e, f \neq -\infty$ $2b > c + a$ $2d < a + f$ $d - a > e - b$ $2(e - b) < f - a$ $2(b - d) > c - f$ $e - b < f - d$	$V_1 = (d - a, d - b)$ $V_2 = (f - d, d - b)$
<p>Caso 4cf $\{-\infty, 0, -1\}$</p>			$c = f = -\infty$ $a, b, d, e \neq -\infty$ $2b > c + a$ $2d > a + f$ $d - a > e - b$ $2e > f + c$ $d - b < e - c$ $f - d < e - b$	$V_1 = (d - a, d - b)$ $V_2 = (e - b, d - b)$
<p>Caso 4cf $\{-\infty, -1, -2\}$</p>			$c = f = -\infty$ $a, b, d, e \neq -\infty$ $2b > c + a$ $2d > a + f$ $b - a > e - d$ $2e > f + c$ $d - b < e - c$ $f - d < e - b$ $c - a < 2(e - d)$ $f - a < 2(e - b)$	$V_1 = (e - b, a + e - 2b)$ $V_2 = (d - a, 2d - a - e)$

<p>Caso 4de $\{-\infty, 0, -1, 1\}$</p>			$d = e = -\infty$ $a, b, c, f \neq -\infty$ $2b > c + a$ $2d < a + f$ $2(b - d) > c - f$ $2(e - b) < f - a$ $e - b < f - d$ $2e < f + c$	$V_1 = \left(\frac{f - a}{2}, \frac{f - a - 2b}{2} \right)$ $V_2 = \left(\frac{f + c - 2b}{2}, \frac{f - c}{2} \right)$
<p>Caso 4df $\{-\infty, 0, -1, -2\}$</p>			$d = f = -\infty$ $a, b, c, e \neq -\infty$ $2b > c + a$ $b - a < e - d$ $c - a < 2(e - d)$ $f - a < 2(e - b)$ $2e > f + c$ $d - b < e - c$	$V_1 = (e - b, a + e - 2b)$ $V_2 = (e - b, e - c)$
<p>Caso 4ef $\{-\infty, 0, -\frac{1}{2}, -1\}$</p>			$e = f = -\infty$ $a, b, c, d \neq -\infty$ $2b > c + a$ $2d > f + a$ $d - a > a - b$ $2(d - b) > f - c$ $d + c > e + b$ $2d + c > 2e + a$	$V_1 = (d - a, d - b)$ $V_2 = (c + d - 2b, d - b)$

Exemplo 3.16. Consideremos $P(x, y) = 4 \odot x^2 \oplus 6 \odot x \odot y \oplus 4 \odot y^2 \oplus 6 \odot x \oplus 6 \odot y \oplus 2$. Os coeficientes são $a = 4, b = 6, c = 4, d = 6, e = 6, f = 2$ e, portanto trata-se de um polinômio de Caso 6, dado que todos os coeficientes são diferentes de $-\infty$.

Testando as condicionantes das quatro possibilidades do Caso 6, vemos que este se trata do Caso 6 $\{-\infty, -1, 0\}$:

• **Caso 6** $\{-\infty, -1, 0\}$

$2b > c + a$	$12 > 8$	Atende
$2d > f + a$	$12 > 6$	Atende
$2e > f + c$	$12 > 6$	Atende
$d - a > e - b$	$2 > 0$	Atende
$d - b > e - c$	$0 < 2$	Atende
$f - d > e - b$	$-2 < 0$	Atende

• **Caso 6** $\{-\infty, -1, 0, 1\}$

$2b > c + a$	$12 > 8$	<i>Atende</i>
$2d > f + a$	$12 > 6$	<i>Atende</i>
$2e > f + c$	$12 > 6$	<i>Atende</i>
$d - a > e - c$	$2 > 0$	<i>Atende</i>
$d - b < e - c$	$0 < 2$	<i>Atende</i>
$2(b - d) > c - f$	$0 > 2$	<i>Não atende</i>
$2(e - b) < f - a$	$0 < -2$	<i>Não atende</i>
$e - b < f - d$	$0 < -4$	<i>Não atende</i>

• **Caso 6** $\{-\infty, 0, -\frac{1}{2}, -1\}$

$2b > c + a$	$12 > 8$	<i>Atende</i>
$2d > f + a$	$12 > 6$	<i>Atende</i>
$2e > f + c$	$12 > 6$	<i>Atende</i>
$d - a > e - b$	$2 > 0$	<i>Atende</i>
$2(d - b) > f - c$	$0 > -2$	<i>Atende</i>
$d + c > e + b$	$10 > 12$	<i>Não Atende</i>
$2d + c > 2e + a$	$16 > 16$	<i>Não Atende</i>
$f - d > e - b$	$-4 < 0$	<i>Atende</i>

• **Caso 6** $\{-\infty, 0, -1, -2\}$

$2b > c + a$	$12 > 8$	<i>Atende</i>
$2d > f + a$	$12 > 6$	<i>Atende</i>
$b - a < e - d$	$2 < 0$	<i>Não atende</i>
$2e > f + c$	$12 > 6$	<i>Atende</i>
$c - a > 2(e - d)$	$0 < 0$	<i>Não atende</i>
$f - a < 2(e - b)$	$-2 < 0$	<i>Atende</i>
$d - b < e - c$	$0 < 2$	<i>Atende</i>
$f - d < e - b$	$-2 < 0$	<i>Atende</i>

Dessa forma, temos os seguintes vértices:

$$V_1 = (d - a, d - b) = (2, 0);$$

$$V_2 = (e - b, e - c) = (0, 2);$$

$$V_3 = (e - b, d - b) = (0, 0);$$

$$V_4 = (f - d, f - e) = (-4, -4).$$

Temos então as seguintes representações gráficas para a forma tropical e para o polígono de Newton da cônica:

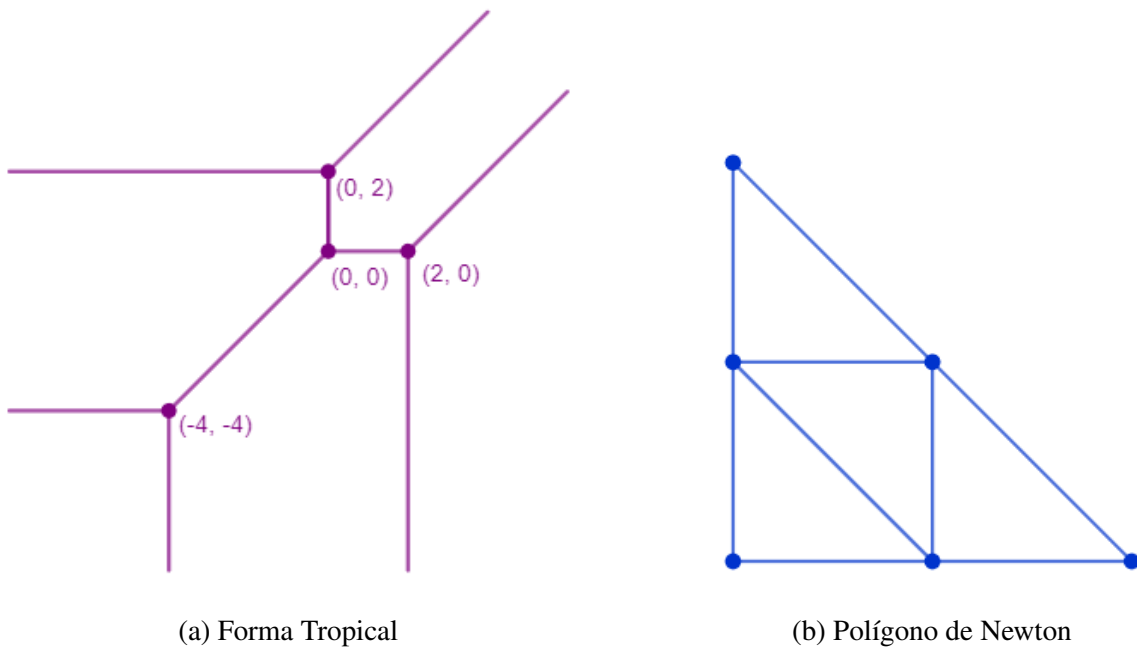


Figura 3.9: Representações gráficas de $P(x, y) = 4 \odot x^2 \oplus 6 \odot x \odot y \oplus 4 \odot y^2 \oplus 6 \odot x \oplus 6 \odot y \oplus 2$.

Observe que, na Geometria Euclidiana, a equação $4x^2 + 6xy + 4y^2 + 6x + 6y + 2 = 0$ representa a elipse ilustrada na Figura 3.10.

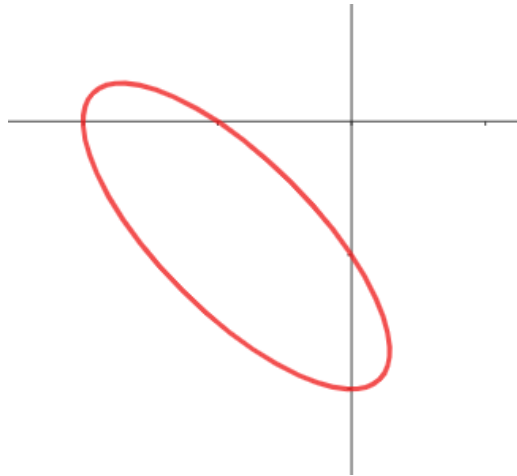


Figura 3.10: Elipse $4x^2 + 6xy + 4y^2 + 6x + 6y + 2 = 0$ na Geometria Euclidiana.

Exemplo 3.17. Seja $Q(x, y) = -\infty \odot x^2 \oplus 1 \odot x \odot y \oplus 3 \odot y^2 \oplus 2 \odot x \oplus 1 \odot x^2 \oplus (-\infty)$. Os coeficientes são $a = -\infty, b = 1, c = 3, d = 2, e = 1, f = -\infty$, e portanto como $a = f = -\infty$ trata-se de uma cônica do Caso $4af$. Checando as condicionantes das duas possibilidades deste caso, temos:

• **Caso 4af** $\{0, -\frac{1}{2}, -1\}$

$2b > c + a$	$2 > -\infty$	<i>Atende</i>
$2d > f + a$	$4 > -\infty$	<i>Atende</i>
$d - a > e - b$	$\infty > 0$	<i>Atende</i>
$2(b - d) > f - c$	$-2 > -\infty$	<i>Atende</i>
$d + c > e + b$	$5 > 2$	<i>Atende</i>
$2d + c > 2e + a$	$7 > -\infty$	<i>Atende</i>
$f - d < e - b$	$-\infty < 0$	<i>Atende</i>
$2e > f + c$	$2 > -\infty$	<i>Atende</i>

• **Caso 4af** $\{-\infty, 0, -1\}$

$2b > c + a$	$2 > -\infty$	<i>Atende</i>
$2d > f + a$	$4 > -\infty$	<i>Atende</i>
$2e > f + c$	$2 > -\infty$	<i>Atende</i>
$d - a > e - b$	$\infty > 0$	<i>Atende</i>
$d - b < e - c$	$1 < -2$	<i>Não atende</i>
$f - d < e - c$	$-\infty < -2$	<i>Atende</i>

Portanto, a cônica é classificada no Caso 4af $\{0, -\frac{1}{2}, -1\}$ e obtemos os seguintes vértices:

$$V_1 = (c + d - 2b, d - b) = (3, 1)$$

$$V_2 = (2e - c - d, e - c) = (-3, -2)$$

E finalmente, temos as seguintes representações gráficas na forma tropical e como polígono de Newton:

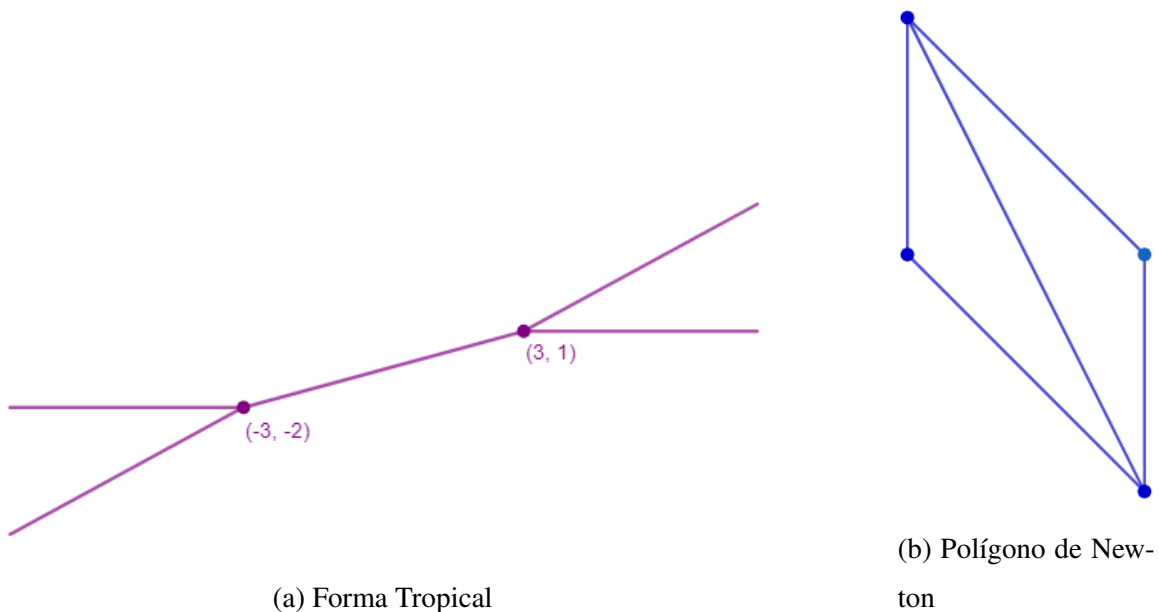


Figura 3.11: Representações gráficas de $Q(x, y) = -\infty \odot x^2 \oplus 1 \odot x \odot y \oplus 3 \odot y^2 \oplus 2 \odot x \oplus 1 \odot x^2 \oplus (-\infty)$.

Note que, como $-\infty$ é o elemento neutro da adição tropical, relacionamos $Q(x, y)$ com a equação $xy + 3y^2 + 3x + y = 0$ na geometria euclidiana, que representa a hipérbole ilustrada na Figura 3.12

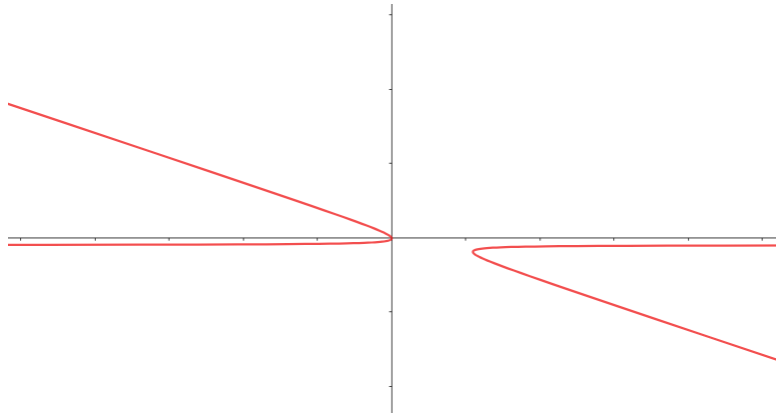


Figura 3.12: Hipérbole $xy + 3y^2 + 3x + y = 0$ na Geometria Euclidiana.

Capítulo 4

Considerações Finais

Ao longo deste trabalho, exploramos uma introdução à Álgebra e Geometria Tropicais, um assunto que não é contemplado pelas disciplinas da grade curricular dos cursos de Graduação em Matemática.

Durante o desenvolvimento do trabalho, um dos principais desafios foi relacionado às bibliografias disponíveis, uma vez, que por se tratar de uma área de estudo relativamente nova e pouco explorada, especialmente no Brasil, encontramos materiais de duas naturezas: ou extremamente introdutórios, ou literaturas estrangeiras com teor muito avançado para os objetivos deste trabalho.

Apesar das adversidades, foi bastante enriquecedor estudar esse tema, uma vez que eu não conhecia e achei especialmente curiosa a forma como a geometria se apresenta na forma tropical, em especial as retas. Além disso, durante todo o trabalho usei inúmeras competências e conteúdos adquiridos durante todo o curso, tais como teoria e propriedades de semianeis, propriedades de polinômios e propriedade e classificação de cônicas. Ainda, um dos principais aliados durante todo o trabalho foi o Geogebra, ferramenta que se fez presente durante praticamente toda a graduação e foi de especial utilidade na construção de cada um dos casos das cônicas e seus polígonos de Newton correspondentes.

Referências Bibliográficas

- [1] Braraviera, A. T., Branco, F. M. *Introdução à Álgebra Max-Plus*. III Colóquio de Matemática da Região Sul, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2014.
- [2] Brugellé, E., Shaw, Kristin. *A bit of Tropical Geometry*. The American Mathematical Monthly, 2014, No. 7, pp. 563-589.
- [3] Ellis, Amanda. *Classification of Conics in the Tropical Projective Plane*. Brigham Young University, Theses and Dissertations, 2005.
- [4] García, N. M. *Curvas Tropicales*. Universidad de Salamanca (Espanha), 2022.
- [5] Maclagan, D., Sturmfelds, B. *Introduction to Tropical Geometry*. American Mathematical Society, Vol. 161, 2015.
- [6] Moraes, A. E. *Controle Realimentado de Admissões nas Diferentes Etapas de Um Ciclo de Vacinação via Álgebra Tropical*. Universidade Federal de Minas Gerais, 2022.
- [7] Nascimento, T. M. H. *Álgebra Tropical. Uma abordagem introdutória*. Universidade Federal do Sergipe, 2016.
- [8] Reis, A. L., Oliveira, D. M. C., Silva, G. P., et al. *Fundamentos da Geometria Tropical*. Universidade Federal de Juíz de Fora, 2020.
- [9] Silva, M. A. *Geometria Tropical e Demanda por Colateral*. Universidade Federal de Ouro Preto, 2019.

Índice Remissivo

curva tropical, 15

cônica tropical, 28

grau do polinômio tropical, 11

monômio tropical, 6

multiplicidade da raiz tropical, 11

peso de uma aresta, 20

polinômio tropical, 6

polígono de Newton associado a um polinômio
tropical de uma variável, 21

raízes tropicais, 10

semianel, 3

semianel max-plus, 4

semianel tropical, 4

subdivisão dual, 26