

Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Departamento de Engenharia de Produção

Flávio Molina da Silva

Modelos e métodos de resolução para problemas integrados
de dimensionamento de lotes de produção com decisões de
distribuição e arranjo da carga

São Carlos
2011

Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Departamento de Engenharia de Produção

Flávio Molina da Silva

Modelos e métodos de resolução para problemas integrados
de dimensionamento de lotes de produção com decisões de
distribuição e arranjo de carga

Texto apresentado ao programa de Pós-
Graduação em Engenharia de Produção para
defesa da Tese em Engenharia de Produção

Orientação: Prof. Dr. Reinaldo Morabito
Co-orientação: Prof. Dr. Silvio Alexandre de
Araujo

São Carlos
2011

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária/UFSCar**

M722mm

Molina-da-Silva, Flávio.

Modelos e métodos de resolução para problemas integrados de dimensionamento de lotes de produção com decisões de distribuição e arranjo de carga / Flávio Molina da Silva. -- São Carlos : UFSCar, 2012.
176 f.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2011.

1. Pesquisa operacional. 2. Dimensionamento de lotes. 3. Empacotamento. 4. Heurística lagrangiana. 5. Formiga - comportamento - modelos matemáticos. I. Título.

CDD: 658.4034 (20^a)



FOLHA DE APROVAÇÃO

Aluno(a): Flávio Molina da Silva

TESE DE DOUTORADO DEFENDIDA E APROVADA EM 07/12/2011 PELA
COMISSÃO JULGADORA:

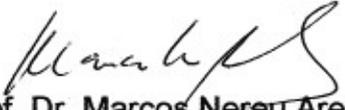

Prof. Dr. Reinaldo Morabito Neto
Orientador(a) PPGE/UFSCar

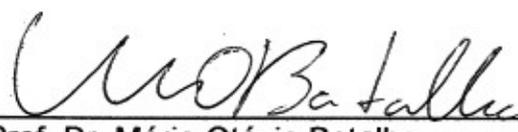

Prof. Dr. Silvio Alexandre de Araujo
IBILCE/UNESP


Prof. Dr. Moacir Godinho Filho
PPGE/UFSCar


Profª Drª Laura Silvia Bahiense da Silva Leite
COOPE/UFRJ


Prof. Dr. Roberto Fernandes Tavares Neto
PPGE/UFSCar


Prof. Dr. Marcos Nereu Arenales
ICMC/USP


Prof. Dr. Mário Otávio Batalha
Coordenador do PPGE/UFSCar

Agradecimentos

A Deus, pela constante presença em todos os momentos da minha vida, iluminando, protegendo e conduzindo os meus passos.

Aos meus pais, João Batista da Silva Neto e Solangela Molina da Silva, e ao meu irmão, Fábio Molina da Silva, por todo sacrifício, paciência e incentivos dados para a realização não apenas deste trabalho, mas tudo em minha vida.

A Priscila Marques Toneli, agradeço o carinho, a compreensão e os cuidados dedicados. Que o apoio e as horas de atenção foram fundamentais para a realização deste trabalho.

A todos os amigos da UFSCar e UFTM, em especial ao Roberto Tavares e Deisemara Ferreira pela grande amizade e companheirismo e principalmente pela paciência e discussões sobre o trabalho.

Em especial, agradeço aos professores Reinaldo Morabito e Silvio Alexandre de Araujo, pela amizade, orientação, incentivo, paciência e (muita) dedicação na elaboração deste trabalho.

Ao Professor Marc Reimann pela orientação, amizade e pelos conhecimentos, não apenas na área de estudo, mas também pela oportunidade de conhecer novas culturas.

A banca examinadora por aceitarem participar da avaliação deste trabalho e pelas contribuições realizadas na qualificação, que foram de grande importância para a conclusão deste trabalho.

A todos os professores do Departamento de Engenharia de Produção (DEP) por toda a atenção e conhecimento dados.

A todas as pessoas e funcionários do DEP que, direta ou indiretamente, contribuíram para a elaboração deste trabalho.

A FAPESP pelo auxílio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, são estudados problemas de dimensionamento de lotes de produção com decisões de distribuição dos produtos e, também, problemas que integram decisões de dimensionamento de lotes e empacotamento dos produtos em veículos (*bins*). Em geral, estes problemas envolvem um balanceamento (*trade-off*) entre os custos de produção, os custos de estocagem e os custos de distribuição. As decisões de dimensionamento de lotes consideram limitações das capacidades de produção e prazos de entrega da demanda. As decisões de distribuição estão relacionadas ao carregamento e transporte dos produtos dentro dos dispositivos de unitização de carga (paletes, contêineres, carrocerias de caminhão, etc.). O carregamento dos produtos pode envolver uma, duas ou três dimensões relevantes para o empacotamento ou arranjo dos produtos dentro dos veículos. Os problemas estudados são modelados via programação matemática e resolvidos pelo método *branch-and-cut* de um pacote de otimização, e os desempenhos e resultados obtidos são analisados. Além disso, também são desenvolvidos métodos heurísticos específicos para a resolução aproximada de alguns destes problemas. Os métodos heurísticos são construídos tendo como base a relaxação lagrangiana e a otimização baseada em colônias de formigas. Todos os métodos são testados e avaliados, levando em conta as soluções encontradas pelo pacote de otimização com os modelos propostos.

Palavras-chave: Dimensionamento de lotes capacitado com decisões de distribuição, problemas integrados de dimensionamento de lotes e empacotamento de “*bins*”, heurística lagrangiana, otimização baseada em colônias de formigas.

Abstract

In this research, we study lot sizing problems with decisions on product distribution and, also, problems that integrate lot sizing decisions and product packing in the vehicles (bins). In general, these problems involve a trade-off among production costs, holding costs and distribution costs. The lot sizing problems consider limitations in the production capacity and demand delivery deadline. The distribution decisions are related to the product loading into the unit load device (pallets, containers or trucks). The packing problems may involve one, two or three dimensions relevant to the product loading. The problems are modeled by mathematical programming and solved by the branch-and-cut method of an optimization package, and then, the performance and the results obtained are analyzed. Furthermore, heuristic methods are specifically developed in order to provide an approximate solution for these problems. The heuristic methods are built according to the lagrangian relaxation and ant colony optimization. All the methods are tested and evaluated, regarding the solutions found by the optimization package for the proposed models.

Key-Words: Capacitated lot sizing problems with distribution decisions, Integrated lot sizing and bin packing problems, Lagrangian Heuristics, Ant Colony Optimization.

Lista de Figuras

Figura 1-1: Unitizadores de carga (Paletes e Contêiner).....	2
Figura 2-1 Método do subgradiente.....	30
Figura 2-2: Volume do poliedro limitado.....	37
Figura 2-3: Exemplo do caminho de duas pontes (adaptado de Dorigo et al (1996)).....	40
Figura 3-1 a) Itens misturados b) um tipo de item por palete.....	46
Figura 3-2: Custo convexo de transporte.....	47
Figura 3-3: Contêiner carregado com paletes.....	50
Figura 3-4: <i>GAPs</i> obtidos em um estudo inicial.....	62
Figura 4-1: Representação do subproblema de transporte dos itens como um problema de transporte.....	69
Figura 4-2: Tempo computacional otimização do subgradiente X volume.....	82
Figura 4-3: <i>GAP</i> do método de otimização do subgradiente e do algoritmo de volume.....	83
Figura 5-1: Itens carregados diretamente em caminhões.....	91
Figura 5-2: Custos de produção por período – Classe 1.1.....	107
Figura 6-1: Solução do problema de empacotamento para o primeiro período – Estratégia 1.....	123
Figura 6-2: Solução do problema do empacotamento (Modelo 6.5).....	126
Figura 6-3: Primeira iteração - Construção da solução do dimensionamento de lotes.....	130
Figura 6-4: Solução do dimensionamento de lotes - Fim da iteração.....	132
Figura 6-5: Solução do empacotamento dos itens do primeiro período.....	134
Figura 6-6: Gráfico do custo total de produção de um item em um período t	136
Figura 6-7: Construção da solução – ACO 2.....	141
Figura 6-8: Qualidade das soluções obtidas pelas estratégias.....	151
Figura 6-9: Gráfico com as soluções obtidas para os problemas 5x5.....	155
Figura 6-10: Gráfico com as soluções obtidas para os problemas 5x10.....	156

Lista de Tabelas

Tabela 1-1: Dados fixos dos modelos.....	5
Tabela 3-1: Dados fixos dos modelos.....	55
Tabela 3-2: Dados variáveis do Modelo 3.1.....	57
Tabela 3-3: Resultados obtidos pelo AMPL/CPLEX – Modelo 3.1.....	58
Tabela 3-4: Resultados obtidos pelo AMPL/CPLEX – Modelo 3.2.....	58
Tabela 3-5: Resultados obtidos pelo AMPL/CPLEX – Modelo 3.3.....	59
Tabela 3-6: Resultados obtidos pelo AMPL/CPLEX – Modelo 3.1.....	60
Tabela 3-7: Resultados obtidos pelo AMPL/CPLEX – Modelo 3.2.....	61
Tabela 3-8: Resultados obtidos pelo AMPL/CPLEX – Modelo 3.3.....	62
Tabela 4-1: Resultados obtidos pelo AMPL/CPLEX e a pela heurística lagrangiana.....	75
Tabela 4-2: Resultados obtidos pelo AMPL/CPLEX e a pelo algoritmo de volume.....	81
Tabela 4-3: Resultados obtidos pelo AMPL/CPLEX e a pelo algoritmo de colônias de formigas.....	88
Tabela 4-4: Resultados obtidos pelo AMPL/CPLEX e a pelo algoritmo de colônias de formigas – Classe M1-M4.....	89
Tabela 5-1: Dados fixos dos modelos.....	105
Tabela 5-2: Resultados dos testes (5x5) – Modelo 5.1 –CPLEX.....	108
Tabela 5-3: Resultados dos testes (5x10) – Modelo 5.1 – CPLEX.....	110
Tabela 5-4: Resultados dos testes (10x5) – Modelo 5.1 –CPLEX.....	111
Tabela 5-5: Resultados dos testes (10x10) –Modelo 5-1 –CPLEX.....	111
Tabela 5-6: Resultados dos testes (5x5) – Modelo 5.4 –CPLEX.....	113
Tabela 5-7: Resultados dos testes (5x10) – Modelo 5.4 – CPLEX.....	114
Tabela 5-8: Resultados dos testes (10x5) – Modelo 5.4 –CPLEX.....	115
Tabela 5-9: Resultados dos testes (10x10) – Modelo 5-4 –CPLEX.....	116
Tabela 6-1: Dados do exemplo.....	122
Tabela 6-2: (a) Resultados do AMPL/CPLEX e das Estratégias 1 e 2- Problemas (5X5).....	144
Tabela 6-3: (b) Resultados das Heurística ACO 1 e 2 - Problemas (5X5).....	145
Tabela 6-4: (a) Resultados do AMPL/CPLEX e das Estratégias 1 e 2- Problemas (5X10).....	146
Tabela 6-5: (b) Resultados das Heurísticas ACO 1 e 2- Problemas (5X10).....	146
Tabela 6-6: (a) Resultados do AMPL/CPLEX e das Estratégias 1 e 2- Problemas (10X5).....	147
Tabela 6-7: (b) Resultados das Heurística ACO 1 e 2- Problemas (10X5).....	148
Tabela 6-8: (a) Resultados do AMPL/CPLEX e das Estratégias 1 e 2 - Problemas (10X10).....	149
Tabela 6-9: (b) Resultados das Heurística ACO 1 e 2 - Problemas (10X10).....	149
Tabela 6-10: Resultados do problema integrado - Problemas (5X5).....	154
Tabela 6-11: Resultados do problema integrado - Problemas (5X10).....	155
Tabela 6-12: Resultados do problema integrado - Problemas (10X5).....	156
Tabela 6-13: Resultados do problema integrado - Problemas (10X10).....	157

Sumário

1- Introdução.....	1
1.1- Objetivos.....	3
1.2- Método de pesquisa	6
1.3- Estrutura do trabalho	7
2 Revisão da literatura e conceitos básicos	9
2.1 Dimensionamento de lotes.....	9
2.2 Problemas de dimensionamento de lotes integrados	13
2.2.1 Problemas de dimensionamento com custos logísticos	15
2.3 Problemas de empacotamento	19
2.3.1 Problema de empacotamento unidimensional	19
2.3.2 Problema de empacotamento bidimensional	20
2.3.3 Problema de empacotamento tridimensional.....	22
2.3.4 Modelo utilizando padrões de empacotamento	25
2.4 Métodos heurísticos.....	27
2.4.1 Relaxação Lagrangiana.....	27
2.4.2 Otimização baseada em colônias de formigas	39
3 Modelagem do problema de dimensionamento de lotes com custos de transporte utilizando unitizadores de carga.....	45
3.1 Modelo com itens diferentes.....	45
3.2 Modelo considerando o transporte dos paletes em caminhões iguais	50
3.3 Modelo considerando o transporte dos paletes em caminhões diferentes	52
3.4 Testes computacionais – Modelo 3.1, Modelo 3.2 e Modelo 3.3	54
3.4.1 Geração dos dados.....	55
3.4.2 Resultados computacionais dos exemplares de tamanho moderado	57
3.4.3 Resultados computacionais dos exemplares de tamanho grande.....	59
3.5 Considerações do capítulo.....	63
4 Métodos heurísticos para o problema de dimensionamento de lotes com decisão de distribuição utilizando a unitização da carga.....	65
4.1 Heurística lagrangiana	65
4.1.1 Relaxação lagrangiana.....	65
4.1.2 Procedimento de factibilização das restrições de capacidade.....	70
4.1.3 Procedimento de factibilização das restrições de carregamento dos paletes	71
4.1.4 Resumo do método de solução com otimização do subgradiente	72
4.1.5 Resultados computacionais: heurística lagrangiana	73

4.1.6	Algoritmo de Volume.....	75
4.1.7	Resultados computacionais: Algoritmo de Volume	80
4.2	Heurística baseada em colônia de formigas.....	83
4.3	Considerações do capítulo	89
5	Modelagem do problema integrado de dimensionamento de lotes e arranjo de carga nos caminhões....	91
5.1	Modelo integrado de dimensionamento de lotes não capacitado e empacotamento unidimensional 92	
5.2	Modelo integrado de dimensionamento de lotes não capacitado e empacotamento bidimensional	95
5.3	Modelo integrado de dimensionamento de lotes não capacitado e empacotamento tridimensional	98
5.4	Modelo baseado em padrões de empacotamento.....	100
5.5	Modelos integrados de dimensionamento de lotes capacitado com arranjo físico da carga.....	102
5.6	Testes computacionais	104
5.6.1	Geração dos dados.....	104
5.6.2	Resultados computacionais: Modelo 5.1	105
5.6.3	Resultados computacionais: Modelo 5.7	112
6	Heurísticas para resolução dos problemas integrados de dimensionamento de lotes com empacotamento unidimensional	118
6.1	Métodos heurísticos para o problema integrado de dimensionamento de lotes com arranjo físico da carga	118
6.1.1	Heurística Lagrangiana para o problema de dimensionamento de lotes com empacotamento unidimensional	119
6.1.2	Estratégia 1 (Foco no dimensionamento e empacotamento <i>a posteriori</i>)	121
6.1.3	Estratégia 2 (Foco no empacotamento e dimensionamento <i>a posteriori</i>)	123
6.1.4	Heurística baseada em otimização de colônia de formigas ACO 1 (Foco no dimensionamento, com custos de empacotamento).....	126
6.1.4.1	Construção da solução do dimensionamento de lotes	128
6.1.4.2	Construção da solução do empacotamento dos itens.....	132
6.1.4.3	Análise dos possíveis valores de produção.....	135
6.1.5	Heurística baseada em otimização de colônia de formigas ACO 2. (Foco no empacotamento, com custos de produção)	138
6.1.6	Busca local.....	141
6.2	Resultados computacionais.....	142
6.3	Heurística de resolução para o problema de dimensionamento de lotes capacitado com empacotamento unidimensional	151
6.4	Resultados dos testes computacionais	153
6.5	Considerações finais do Capítulo	158

7. Conclusões e Propostas Futuras	159
7.1 Conclusões.....	159
7.1 Perspectivas para pesquisa futura	162
Referências Bibliográficas.....	165

1- Introdução

O Planejamento e o Controle da Produção (PCP) envolve atividades que permitem que os processos produtivos nas indústrias possam fluir continuamente, a partir de decisões que façam o uso dos recursos disponíveis da melhor maneira possível, assegurando que a produção seja obtida em tempo e quantidade previstos (Bonney, 2000 e Slack *et al.*, 2009). Em outras palavras, o PCP é responsável por receber dados de diversas áreas e transformá-los em informações e decisões para dar suporte à produção. Assim, pode-se dizer que o PCP é responsável pelas respostas de algumas perguntas como: “O que produzir?”, “Quanto produzir?” e “Quando produzir?”.

Em diversos processos de produção, a Logística está diretamente envolvida com o PCP. Pode-se definir Logística como o conjunto de todas as atividades de movimentação e de armazenagem, que facilitam o fluxo dos produtos desde a aquisição da matéria-prima até o consumidor final, incluindo as informações relacionadas à movimentação dos produtos, gerando um serviço de atendimento ao cliente a um custo razoável (Ballou, 2004). Em outras palavras, a Logística é a área responsável por fornecer e administrar os recursos, os equipamentos e as informações para a execução de todas as atividades de movimentação e de armazenagem de uma empresa.

No dia a dia do PCP de muitas empresas, para evitar imprevistos na programação da produção, é necessário que haja um planejamento eficiente que envolve vários fatores, tais como: tempo e mão-de-obra disponíveis para a produção, disponibilidade de insumos, demanda a ser atendida e quantidade de máquinas que terão que ser preparadas para a produção, entre outros. Cada um destes fatores tem influência nos custos e no desempenho da fábrica como um todo. Além dos fatores do processo produtivo, podem-se analisar outros fatores que influenciam diretamente na qualidade e no custo dos produtos, como exemplo, a compra, a disponibilidade da matéria-prima, a movimentação dos produtos intermediários no “chão-de-fábrica” e a distribuição dos produtos finais até os armazéns de estocagem e os consumidores finais.

A competitividade crescente imposta pelas transformações que têm afetado a ordem econômica mundial tem exigido, cada vez mais, que o processo produtivo seja bem gerenciado para poder produzir e entregar produtos com alta qualidade, dentro do prazo e com o menor custo possível. Vários trabalhos vêm apontando que uma melhoria na qualidade das decisões, ou seja, no gerenciamento, pode ser obtida considerando diferentes fatores do processo produtivo de maneira integrada. Trabalhos como Fleischmann (1990), Sounderpandian e Balashanmugam (1991) e Drexl

e Kimms (1997), Araujo (2011) apresentam e analisam processos de produção, como de enlatados, tintas, ração, refrigerantes, entre outros, em que a troca de itens da produção é um fator que tem um peso grande nos custos e na utilização da capacidade, devido aos tempos e aos custos de produção e de preparo de máquinas (*setup*). Planos de produção para estes processos são gerados com auxílio de problemas de otimização do planejamento da produção. Deve-se ressaltar que a natureza combinatória de tais problemas de planejamento da produção, em geral, os torna de difícil solução, devido à complexidade computacional, e exige o desenvolvimento de complexas ferramentas matemático-computacionais para resolvê-los.

De acordo com Norden e Velde (2005), embora os custos de transporte, em certos casos, representem mais de cinquenta por cento do custo logístico total de um produto, estes são praticamente negligenciados na modelagem dos problemas de planejamento da produção e do dimensionamento de lotes de produção. Na prática, esse problema integrado de dimensionamento de lotes de produção e transporte dos produtos finais, em geral, é resolvido em duas etapas: na primeira, é determinado o tamanho dos lotes, e, na segunda etapa, é resolvido o problema do transporte. Ainda em relação ao transporte dos produtos, em algumas empresas, os produtos finais são embalados e colocados em dispositivos de unitização de carga, tais como paletes e contêineres (Figura 1), para serem estocados e transportados até os centros de armazenagem (depósitos), e depois serem distribuídos para os clientes (Oliveira e Morabito, 2006). Este transporte pode gerar um custo que está diretamente relacionado ao dimensionamento de lotes. Os custos de transporte podem ter comportamentos diferentes em relação ao tamanho dos lotes, por exemplo, em uma economia de escala, a alta produção dos itens pode reduzir os custos de transporte por produto.



Figura 1-1: Unitizadores de carga (Paletes e Contêiner)

Considerando tanto o nível de planejamento tático (decisões de médio prazo) quanto o operacional (decisões de curto prazo), um modelo de otimização para problemas de dimensionamento de lotes integrado com decisões de distribuição pode ser útil para fazer simulações com diferentes conjuntos de dados (previsões de demandas, limitações de capacidade, etc.), permitindo, assim, que o programador teste diferentes cenários. O modelo de otimização

também pode colaborar na redução de custos e de tempos e na agilidade do planejamento e programação da produção, o que pode ter um impacto importante em alguns processos produtivos. No entanto, modelos matemáticos representando problemas de planejamento e programação envolvendo decisões de produção e distribuição de produtos de forma integrada são, em geral, difíceis de serem tratados e resolvidos.

Conforme Norden e Velde (2005), modelos matemáticos que representam problemas integrados têm, em geral, natureza combinatória, e o desenvolvimento de métodos para resolvê-los exige pessoal familiarizado em modelagem matemática e métodos de solução para modelos de otimização, o que pode ser inviável para uma empresa de pequeno ou médio porte. Entretanto, podem resultar em benefícios técnicos e econômicos significativos para estes processos de produção. Assim, a formulação e o desenvolvimento de métodos de solução para problemas que integram a produção e distribuição são temas relevantes para pesquisa e podem contribuir para fornecer ferramentas de apoio à decisão para processos de produção, em que as decisões da produção e transporte devem ser tomadas de maneira mais integrada e coordenada, além de colaborar para o enriquecimento da literatura científica sobre o assunto.

1.1- Objetivos

O presente trabalho teve como objetivo principal (i) estudar problemas e modelos de dimensionamento de lotes de produção com decisões de distribuição de produtos e desenvolver algumas extensões destes modelos, incluindo tanto custos de distribuição quanto decisões de arranjo de carga dos produtos e (ii) estudar e propor abordagens eficazes para resolvê-los. Para atingir este objetivo, foram estendidos alguns modelos já existentes na literatura para problemas com decisões de distribuição para considerar situações mais realistas, assim como propor novos modelos para alguns problemas integrados com decisões de arranjo de carga considerando uma, duas e três dimensões relevantes para o arranjo. A solução destes modelos foi realizada pelo método *branch-and-cut* implementado em um pacote de otimização, também foram, desenvolvidos e aplicados métodos heurísticos baseados em relaxação lagrangiana e métodos heurísticos baseados em colônias de formigas para resolver, de maneira aproximada, os problemas estudados.

Em geral, estes problemas de dimensionamento de lotes integrados com decisões de distribuição e com arranjo de carga envolvem um balanceamento (*trade-off*) entre os custos de produção, os custos de estocagem e os custos de distribuição. As decisões de distribuição estão relacionadas ao carregamento dos produtos dentro dos dispositivos de unitização de carga (por exemplo, paletes, contêineres e carrocerias de caminhão).

Em Norden e Velde (2005), foi proposto um modelo que considera um problema prático de uma empresa europeia com flutuações mensais de distribuição de produtos entre sua fábrica e seus armazéns. A empresa negocia um contrato de longo prazo com a transportadora, em que um custo fixo por período é associado ao transporte dos itens. Em contrapartida, um limite de paletes ou contêineres é disponibilizado com custo unitário mais baixo que o custo padrão. O número limite de paletes ou contêineres é estipulado com base em uma previsão de demanda. Caso a empresa necessite de um número maior destas unidades em um período, novas unidades podem ser utilizadas, no entanto, seus custos unitários serão mais elevados. O objetivo é minimizar os custos de produção e de distribuição dos itens desde a fábrica até os armazéns, e, para tanto, os autores propõem uma heurística lagrangiana para solução do problema.

No problema estudado por Norden e Velde, os custos de transporte pesam a favor de aumentar preparações e reduzir estoques. Este comportamento ocorre, pois existe um *trade-off* entre produzir em grande escala para economizar custos de preparo de máquinas e não produzir em grande escala e economizar custos de transporte da produção. Em outras palavras, se em cada período a produção dos itens é baixa, o custo de transporte e de estoque também são baixos porém, o custo de preparo de máquinas é elevado, dado que este é feito diversas vezes em vários períodos. Por outro lado, se aproveitarmos o custo de preparo de máquinas, produzindo em grande quantidade, teremos altos custos de transporte e de estoque. Baseado em Norden e Velde (2005), Molina *et al.* (2009) apresentaram um modelo para uma extensão do problema de dimensionamento de lotes, no qual são consideradas restrições de capacidade e atraso da entrega da demanda e duas heurísticas de resolução do problema.

Na primeira parte deste trabalho foram estudadas variações da situação acima em que a distribuição envolve unitizadores de carga, como paletes ou contêineres. Um exemplo é o problema integrado de produção e distribuição que considera que, após alocar os itens nos paletes, estes últimos são carregados dentro de caminhões. Para este caso, os custos de transporte não são mais diretamente associados apenas ao número de paletes utilizados, mas também ao número de caminhões utilizados para transportar os paletes (“itens” de tamanhos iguais), sendo carregados dentro de caminhões com mesma capacidade (“palletes” de tamanhos iguais), obtendo novamente um problema de arranjo da carga (problema de empacotamento). Outra variação do problema integrado de produção e distribuição consiste em considerar a situação anterior agora com caminhões com capacidades diferentes, e, assim, além de decidir quantos caminhões utilizar, é necessário determinar o carregamento de cada caminhão.

Deste modo, na primeira parte deste trabalho foram desenvolvidos e propostos novos modelos de programação matemática que integrem dimensionamento de lotes com distribuição de produtos utilizando unitizadores de carga, e desenvolver e/ou aplicar algoritmos exatos, aproximados e híbridos para a resolução destes problemas integrados. Pretende-se estender os modelos de otimização e os métodos de resolução para o problema integrado apresentados em Molina *et al.* (2009) para situações mais genéricas e realistas, assim como estudar outros métodos para resolvê-los. A extensão do modelo foi feita em diversas etapas (podendo ser considerada cada etapa como uma variação do modelo). Por exemplo, numa primeira etapa, foi considerado que os tipos de itens (produtos finais) possuem embalagens de tamanhos diferentes e não podem ser misturados em um mesmo palete. Com isso, foi necessário analisar a capacidade do palete para cada tipo de item, resolvendo um problema de carregamento de paletes para determinar o número máximo de cada tipo de item em um mesmo palete.

Na segunda parte deste trabalho foram estudados problemas integrados de dimensionamento de lotes e distribuição em que os itens são carregados diretamente nos caminhões (i.e., sem utilizar unitizadores de carga, como paletes) e, portanto, envolve arranjar a carga dentro das carrocerias dos caminhões. Foram desenvolvidos novos modelos de otimização e métodos de solução para esses problemas integrados mais gerais que envolvem decisões de dimensionamento de lotes e decisões de empacotamento (isto é, arranjo) dos produtos em *bins* (unidimensional, bidimensional e tridimensional). Note que, nos problemas estudados na primeira parte do trabalho, o empacotamento (arranjo) dos itens nos *bins* é feito *a priori*, ou seja, é feito um pré-processamento com os dados do problema para resolver o problema de empacotamento e a solução dada pelo pré-processamento é utilizada como parâmetro do problema de dimensionamento. Nesta segunda parte, as decisões de arranjo da carga são tomadas em conjunto com as do problema de dimensionamento de lotes. Cabe observar que a literatura de trabalhos que tratem o dimensionamento de lotes com o arranjo da carga em *bins* é bem escassa. Os objetivos deste trabalho estão resumidos e organizados na tabela a seguir.

Tabela 1-1: Dados fixos dos modelos

	Atividades
Parte 1	Estudar problemas e modelos de dimensionamento de lotes de produção com decisões de distribuição de produtos, considerando a unitização da carga em paletes e desenvolver extensões destes modelos, com as seguintes considerações:

	<ul style="list-style-type: none"> • Cada palete transporta itens do mesmo tipo • Os custos são associados a quantidade de caminhões utilizados para o transporte da produção • Considerar uma frota heterogênea <p>Estudar e propor abordagens eficazes para resolver os problemas propostos e comparar o resultados com o a solução obtida pelo método <i>branch and cut</i> implementada em um pacote de otimização. Foram abordadas dois tipos de heurísticas:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Heurística baseada em relaxação Lagrangiana • Heurística baseada em otimização de colônia de formigas.
Parte 2	<p>Estudar problemas e modelos de dimensionamento de lotes de produção com decisões de distribuição considerando o arranjo de carga nos caminhões.</p> <p>Estudar e propor abordagens eficazes para resolver os problemas propostos e comparar o resultados com o a solução obtida pelo método <i>branch and cut</i> implementada em um pacote de otimização. Foram abordadas dois tipos de heurísticas:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Heurística baseada em relaxação Lagrangiana • Heurística baseada em otimização de colônia de formigas.

1.2- Método de pesquisa

Em resumo, neste trabalho foi estudado o comportamento de uma função custo, gerada por variáveis dependentes da produção e distribuição dos itens de empresas. Assim, esta pesquisa pode ser descrita como dedutiva, em que os modelos são gerados a partir de um problema de planejamento e programação da produção com decisões de distribuição. Além disso, por ter as variáveis do problema bem definidas pelo pesquisador, são excluídos os métodos de pesquisas qualitativos. Essa exclusão pode ser feita, pois, de acordo com Bryman (1989), os métodos qualitativos são caracterizados também pela manipulação das variáveis do problema pelo pesquisador para um estudo do comportamento ou das relações de causa e efeito das variáveis. Note que, no caso qualitativo, o pesquisador tem total controle sobre a decisão das variáveis, e um dos objetivos é estudar a relação de causa e efeito entre o volume de produção e os custos operacionais dos produtos de empresas, o que justifica a escolha do método dedutivo.

De acordo com Bertrand e Fransoo (2002), o método de pesquisa Modelagem/Simulação é utilizado para analisar relações causais entre variáveis independentes e dependentes através de modelos que simulam alguma realidade. Considerando que este estudo é baseado na construção de modelos objetivos que expliquem o comportamento de processos operacionais da vida real ou que possam apreender os problemas de tomada de decisão, este trabalho se encaixa no método de pesquisa de Modelagem. Ainda em relação ao método de pesquisa Modelagem, de acordo com Bertrand e Fransoo (2002) e Morabito e Pureza (2009), este trabalho pode ser classificado como axiomático normativo. Os modelos e os métodos de resolução serão testados com dados gerados aleatoriamente, seguindo exemplos da literatura, simulando uma realidade, e não serão considerados dados reais de empresas, embora, durante a realização deste trabalho, tenham sido realizadas visitas a algumas empresas com o objetivo de identificar potenciais aplicações do estudo deste trabalho. Tais visitas são mencionadas ao longo do trabalho.

1.3- Estrutura do trabalho

Esse trabalho está organizado como segue. No Capítulo 2, é feita uma revisão da literatura e discussão dos conceitos básicos sobre o problema de dimensionamento de lotes, os problemas de empacotamento, a relaxação e as heurísticas lagrangianas, o algoritmo de otimização do subgradiente e o algoritmo de volume e a otimização baseada em colônia de formigas (ACO – *Ant Colony Optimization*).

No Capítulo 3, são apresentados modelos matemáticos para representar as extensões dos problemas de dimensionamento de lotes com custo de transporte, em que o transporte é realizado com auxílio de unitizadores de carga, como paletes ou contêineres. Estes modelos foram codificados e implementados em uma linguagem de modelagem e resolvidos pelo método *branch-and-cut* de um pacote de otimização, no caso o AMPL/CPLEX (Fourer *et al.*, 2002; e ILOG, 2007). Os resultados dos testes computacionais desses modelos são apresentados e analisados no referido capítulo.

No Capítulo 4, são apresentados os métodos heurísticos de resolução para um dos modelos apresentados no Capítulo 3. Estes métodos heurísticos são baseados em relaxação lagrangiana (com otimização do subgradiente e com algoritmo de volume) e otimização por colônia de formigas. Eles foram codificados e implementados em linguagem C++ e seus desempenhos computacionais foram analisados e comparados tendo como base as soluções obtidas pelo pacote de otimização AMPL/CPLEX apresentadas no Capítulo 3.

No Capítulo 5, são apresentados modelos matemáticos de otimização para problemas de dimensionamento de lotes integrados com problemas de empacotamento em que os itens são carregados diretamente nos caminhões (arranjo de carga). Os custos de transporte estão relacionados ao número de caminhões utilizados para o transporte da produção, sendo importante a decisão do arranjo da carga nos caminhões. Alguns modelos foram codificados e implementados na linguagem de modelagem AMPL e resolvidos pelo método *branch-and-cut* do CPLEX. Os resultados dos testes computacionais realizados são apresentados e analisados neste capítulo.

No Capítulo 6, são propostas algumas estratégias de resolução para alguns dos modelos apresentados no Capítulo 5. Duas estratégias são baseadas em métodos de resolução aplicados na prática e outras duas são baseadas em heurísticas de otimização baseadas em colônias de formigas. Estes métodos também foram codificados e implementados em linguagem C++ e seus desempenhos computacionais foram analisados e comparados tendo como base as soluções obtidas pelo pacote de otimização AMPL/CPLEX apresentadas no Capítulo 5.

Finalmente, no sétimo e último capítulo são apresentadas as considerações finais deste trabalho e perspectivas para pesquisa futura.

2 Revisão da literatura e conceitos básicos

Este capítulo tem como meta fundamentar o estudo desenvolvido neste trabalho e consiste basicamente de uma revisão bibliográfica de trabalhos referentes aos problemas de dimensionamento de lotes, aos problemas de empacotamento, aos problemas de dimensionamento de lotes integrados a alguns problemas de distribuição, às heurísticas lagrangianas e à otimização baseada em colônias de formigas (ACO).

2.1 Dimensionamento de lotes

O problema de dimensionamento de lotes (*lot sizing*) é um problema de planejamento da produção que consiste em definir a quantidade dos itens que serão produzidos em um processo de produção dentro de um horizonte de planejamento finito, de modo a satisfazer determinadas restrições, de acordo com um determinado objetivo. Pelo fato de diversos modelos para o problema de dimensionamento de lotes terem sido propostos na literatura, esta revisão apresenta apenas alguns trabalhos clássicos para o problema de interesse para o presente estudo.

Um dos primeiros modelos de dimensionamento de lotes foi o modelo do lote econômico de compras (*Economic Order Quantity* –EOQ), proposto por Harris (1913), que consiste em um modelo que não restringe capacidade e permite a produção de mais de um tipo de item. Além disso, o autor considera a demanda estacionária, os períodos de tempo contínuos e o horizonte de planejamento finito. O modelo EOQ é resolvido otimamente por uma expressão analítica em forma fechada. Mais detalhes sobre o modelo EOQ são encontrados em Taha (2008). Posteriormente, esse modelo foi estendido para o modelo *Economic Lot Scheduling Problem* (ELSP), que considera restrições de capacidade e vários itens. No ELSP, a demanda também é estacionária, e os períodos de tempos são contínuos com um horizonte de planejamento infinito.

Buscando se ajustar mais à realidade, Wagner e Whitin (1958) propuseram uma extensão do problema de dimensionamento de lotes que, além de considerar a demanda dinâmica, assume um horizonte de planejamento finito dividido em vários períodos. Além do modelo, propuseram um método baseado em programação dinâmica que resolve o problema otimamente em tempo polinomial. Evans (1985) propôs um algoritmo com a mesma complexidade do algoritmo de Wagner e Whitin, porém, testes computacionais mostraram que, em geral, o algoritmo de Evans é computacionalmente mais eficiente (Evans, 1985). Mais detalhes sobre este problema podem ser encontrado em Barany *et al.* (1984b) e Bitran e Yanasse (1982).

Para facilitar a compreensão dos modelos propostos no próximo capítulo, uma variação do modelo estudado em Wagner e Whitin (1958) é apresentada a seguir, considerando a diversidade de tipos de produtos ou itens, os custos de preparação da máquina e o custo de estoque. Para isso, considere os seguintes parâmetros e variáveis.

Parâmetros do modelo:

h_{it} Custo de estocagem por unidade do item do tipo i no período t ;

s_{it} Custo de preparo da máquina para produção do item do tipo i no período t ;

d_{it} Demanda do item do tipo i no período t ;

Variáveis do modelo:

I_{it}^+ Quantidade em estoque do item do tipo i no final do período t ;

X_{it} Quantidade produzida do item do tipo i no período t ;

Y_{it} Variável binária que indica se a máquina está preparada para a produção do item do tipo i no período t ;

Com esses parâmetros e variáveis, o modelo de dimensionamento de lotes pode ser escrito como:

Modelo 2.1: Dimensionamento de lotes

$$z = \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^T (h_{it} I_{it}^+ + s_{it} Y_{it}) \quad (2.1)$$

$$\text{S.a} \quad I_{it-1}^+ + X_{it} - I_{it}^+ = d_{it} \quad t = 1, \dots, T \quad i = 1, \dots, n \quad (2.2)$$

$$X_{it} \leq \sum_{k=t}^T d_{ik} Y_{it} \quad t = 1, \dots, T \quad i = 1, \dots, n \quad (2.3)$$

$$X_{it}, I_{it}^+ \geq 0 \quad t = 1, \dots, T \quad i = 1, \dots, n \quad (2.4)$$

$$Y_{it} \in \{0,1\} \quad t = 1, \dots, T \quad i = 1, \dots, n \quad (2.5)$$

A função objetivo (2.1) é dada pela soma dos custos de estocagem dos itens em cada período e os custos de preparo da máquina. O conjunto de restrições (2.2) refere-se ao balanceamento de produção e estoque. Neste conjunto de restrições, garantimos que, para cada item em cada período,

a produção dos itens mais o estoque do período anterior menos o que será estocado neste período é igual à demanda que deve ser atendida. A restrição (2.3) garante que há a produção de um tipo de item em cada período apenas se a máquina for preparada para esta produção no período. Geralmente, a restrição (2.3) é descrita da seguinte forma: $X_{it} \leq MY_{it}$; em que M é um valor suficientemente grande. Neste caso, limitamos o valor de M , para cada item em cada período, em no máximo $\sum_{k=t}^T d_{ik}$. As restrições (2.4) são de não negatividade da produção e do estoque. Em alguns casos, há a necessidade de considerar também integralidade das variáveis de produção e estoque, neste caso, dizemos que as variáveis são inteiras e não negativas ($X_{it}, I_{it}^+ \in \mathbb{Z}^+$) e as restrições (2.5) são do domínio das variáveis de preparo da máquina. Observe que, no conjunto de restrições (2.3), quando considerado o período $t = 1$, aparece a variável I_{i0}^+ que indica o estoque inicial de cada item. Sem perda de generalidade, esta variável é associada ao valor zero. Caso exista estoque inicial, pode ser feito um pré-processamento em que o valor de I_{i0}^+ pode ser subtraído da demanda do primeiro período e a variável I_{i0}^+ assume o valor zero.

O Modelo 2.1 é uma variação do modelo estudado em Wagner e Whitin (1958), pois os autores consideram apenas um tipo de item, porém, sem perda de generalidade, o problema anterior pode ser separado em n problemas de dimensionamento de lotes, sendo um para cada tipo de item. Três trabalhos mais recentes, Wagelmans *et al.* (1992), Aggarwal e Park (1993) e Federgruen e Tzur (1995), apresentam outros algoritmos de menor complexidade para resolver este problema. Alguns autores, como Brahim *et al.* (2006), propuseram variações para a modelagem deste problema de dimensionamento de lotes. Dentre essas variações, os autores apresentam a denominada formulação agregada, em que o problema é modelado sem o uso das variáveis de estoque, que são substituídas e consideradas de modo agregado no custo de produção do problema.

No trabalho de Karimi *et al.* (2003), é feita uma classificação dos problemas de dimensionamento de lotes de acordo com algumas características dos problemas que são descritas a seguir. Os problemas de dimensionamento de lotes podem ser classificados segundo o seu horizonte de planejamento, que pode ser finito ou infinito. Um horizonte de planejamento finito é usualmente acompanhado por uma demanda dinâmica e um horizonte de planejamento infinito, acompanhado por uma demanda estacionária. Os problemas também podem ser classificados pelo tamanho dos períodos do horizonte de planejamento. Neste caso, períodos grandes, em que é possível produzir diversos tipos de itens, são denominados *Big Bucket*. Por outro lado, problemas com períodos curtos, em que há produção de no máximo um ou dois tipos de itens, são classificados como *Small Bucket*.

A existência de restrições de recursos também é um fator importante para a classificação. Observe que, no Modelo 2.1, a decisão de produção é feita apenas relacionando os custos e a demanda de cada item e que não há uma limitação do número de itens que serão produzidos. Poderia ser incluído no modelo restrições que limitam essa produção, como disponibilidade da matéria-prima, limite de tempo de produção e capacidade de armazenamento. Quando o problema de dimensionamento contém alguma dessas condições, é dito que o problema é capacitado; caso contrário, é dito que o problema é não capacitado. Em Buschkühl (2010) é feita uma revisão e classificação sobre problemas de dimensionamento de lotes com restrições de capacidade.

A classificação dos problemas de dimensionamento de lotes pode ser feita pela diversidade de itens. Os dois tipos principais são um-item e multi-itens, em que são produzidos um único tipo ou vários tipos de itens, respectivamente. Cabe observar que, em geral, admitindo que a capacidade de produção é ilimitada, um problema multi-itens pode ser decomposto, sem perda de generalidade, em problemas de um único item. Assim, é possível resolver o problema com vários itens, utilizando métodos de solução desenvolvidos para problemas com um único tipo de item. Entretanto, quando as restrições de capacidade são consideradas, é necessário o desenvolvimento de métodos para o problema com vários tipos de itens.

Além do horizonte de planejamento, problemas de dimensionamento de lotes podem ser classificados pelo número de estágios necessários para a produção dos itens. Neste caso, os problemas são classificados como monoestágio e multiestágio. No sistema monoestágio, o item final é produzido de maneira direta. As demandas dos produtos são satisfeitas diretamente pelo produto final, então, neste caso é dito que o problema tem demandas independentes. No sistema multiestágio, alguns itens (produtos finais) dependem de outros itens. Conseqüentemente, a demanda de um nível de produção depende da produção dos níveis anteriores, ou seja, a demanda é dependente ou derivada.

Revisões bibliográficas de problemas de dimensionamento de lotes e de métodos de resolução podem ser encontrados, por exemplo, em Bahl *et al.* (1987), Karimi *et al.* (2003), Brahim *et al.* (2006) e Jans e Degraeve (2007). Alguns métodos exatos, sem considerar tempo de preparação, podem ser encontrados, por exemplo, em Barany *et al.* (1984) e Evans (1985). Em Cattrysse *et al.* (1990) e Kirca e Kökten (1994), são apresentados métodos heurísticos para resolver o problema monoestágio sem tempo de preparação. Em Diaby *et al.* (1992) e Armentano *et al.* (1999), são apresentados métodos exatos de resolução para o problema com tempo de preparação de máquina. Em Trigeiro *et al.* (1989), é desenvolvido um método heurístico que consiste em relaxar

as restrições de capacidade através da técnica de relaxação Lagrangiana. Em seguida, se a solução for infactível, um método de factibilização é aplicado, o qual transfere produção entre períodos na tentativa de factibilizar a solução, e, finalmente, os multiplicadores duais são atualizados, utilizando o método de otimização do subgradiente. Araujo e Arenales (2000) fazem uma modificação no método desenvolvido por Trigeiro *et al.* (1989) e obtêm uma pequena melhoria nos resultados computacionais.

Várias pesquisas sobre técnicas de resolução de problemas de dimensionamento de lotes multiestágio considerando variações na estrutura do produto e/ou na limitação de capacidade podem ser encontradas. Alguns exemplos desses trabalhos são: Afentakis *et al.* (1984), Billington *et al.* (1986), Maes *et al.* (1991) e Kuik *et al.* (1993).

2.2 Problemas de dimensionamento de lotes integrados

Como mencionado anteriormente na Introdução, vários trabalhos vêm apontando que uma melhoria na qualidade das decisões pode ser obtida considerando diferentes fatores do processo produtivo de maneira mais integrada. Neste sentido, várias pesquisas têm sido feitas, considerando a integração do problema de dimensionamento de lotes com outros problemas do setor produtivo, como pode ser visto em Drexl e Kimms (1997), Karimi *et al.* (2003a), Zhu e Wilhelm (2006), Poltroniere *et al.* (2007), Quadt e Kuhn (2008), Gao *et al.* (2008), Jans e Degraeve (2008) e Robinson *et al.* (2009). De acordo com Jans e Degraeve (2008), as diferentes aplicações industriais têm feito surgir diferentes extensões dos modelos clássicos de dimensionamento de lotes, considerando diferentes tipos de integrações.

Vários estudos desenvolvidos em situações práticas aplicaram o problema de dimensionamento de lotes de forma integrada a outros problemas. Por exemplo, em Araujo e Arenales (2003, 2004), Araujo *et al.* (2008) e Tonaki e Toledo (2010) é estudado o setor de fundições, considerando o problema de dimensionamento de lotes integrado com o seqüenciamento da produção em fundições de pequeno, médio e grande porte. Em Luche *et al.* (2009) foi desenvolvido um estudo aplicado ao setor de grãos eletrofundidos e em Araujo *et al.* (2007) e Mateus *et al.* (2009) foram realizados estudos mais genéricos do problema de dimensionamento de lotes e seqüenciamento. Em Almada-lobo *et al.* (2007) foi realizado um estudo em uma empresa de vidros de um problema de dimensionamento de lotes capacitado integrado com seqüenciamento da produção.

Rangel e Ferreira (2003), Ferreira *et al.* (2009), Toledo *et al.* (2009) e Ferreira *et al.* (2010) também apresentam um problema prático de dimensionamento de lotes e sequenciamento da

produção. Os autores apresentam as inter-relações entre os vários setores de uma empresa de refrigerantes, além de modelar e propor métodos heurísticos de resolução. Em Bernardes *et al.* (2010) é apresentada uma reformulação para um problema integrado de dimensionamento de lotes com seqüenciamento. Outro setor onde o problema de dimensionamento de lotes aparece de forma integrada com o seqüenciamento é setor de nutrição, sobre o qual Toso e Morabito (2005), Toso *et al.* (2008, 2009) e Clark *et al.* (2010) fazem um estudo de caso em uma fábrica de ração. Em Clark *et al.* (2011) são descritos diversas aplicações de problemas de dimensionamento e seqüenciamento de lotes.

Outro problema que aparece integrado ao dimensionamento de lotes é o problema de corte e empacotamento. O problema de corte consiste em, dada a matéria-prima em estoque e a demanda de itens a ser cortada, determinar o melhor modo (segundo um objetivo) de obter os itens a partir de cortes realizados na matéria-prima. Assim como os problemas integrados de dimensionamento de lotes com seqüenciamento, os problemas de dimensionamento de lotes integrados com o problema de corte e empacotamento são, em geral, resolvidos na prática de forma isolada, ou seja, uma vez definidos os lotes em cada período, uma quantidade de itens deve ser cortada a partir dos itens produzidos, ou seja, um problema de corte deve ser resolvido a cada período.

Um dos primeiros trabalhos, em que o problema de dimensionamento e o problema de corte são integrados, é o de Farley (1988), em que o autor apresenta um problema, cujo objetivo global é maximizar a utilidade do sistema ao longo do horizonte de planejamento em uma fábrica de roupas. Hendry *et al.* (1996) propõem a solução do problema integrado em duas fases. Na primeira, o problema de corte de estoque com restrições de capacidade é resolvido heurísticamente e, em uma segunda etapa, esta solução é usada para formular e resolver um problema de otimização inteira para determinar a produção diária. Trabalhos como Nonas e Thorstenson (2000), Arbib e Marinelli (2005), Gramani e França (2006), Poltroniere *et al.* (2007), Gramani *et al.* (2009), Santos *et al.* (2010), Santos *et al.* (2011) e Alem e Morabito (2012) apresentam o problema dimensionamento de lotes e corte de forma integrada.

As decisões logísticas também podem ser integradas ao problema de dimensionamento de lotes. Wong (2010) e Seliaman e Ahmad (2009) fazem um estudo dos custos de estoque e as dimensões dos lotes em toda a cadeia de suprimentos. Em Xiao e Taaffe (2010), são desenvolvidos modelos para um problema em que o dimensionamento de lotes é resolvido considerando os custos de produção e a taxa de entrega da produção aos consumidores finais. Diferente dos trabalhos encontrados na literatura, no trabalho de Xiao e Taaffe (2010), o modelo considera os custos de

produção e a taxa de entrega. Esse modelo consiste em maximizar a contribuição ao lucro da empresa, considerando os ganhos com a entrega e os gastos com a produção (preparo de máquina, custo de produção, custo de estoque). Em Araujo (2011) são apresentados alguns problemas de dimensionamentos de lotes integrado aplicados a algumas empresas.

2.2.1 Problemas de dimensionamento com custos logísticos

Como mencionado, de acordo com Norden e Velde (2005), os custos de transporte representam boa parte do custo dos produtos da empresa. Assim, outra integração importante encontrada na literatura é a do dimensionamento de lotes com o custo de transporte. Em Norden e Velde (2005), é proposto um problema de uma empresa europeia com flutuações mensais de distribuição de produtos entre sua empresa e seu armazém. O mesmo problema foi recentemente estudado por Molina *et al.* (2009), em que é proposto um método heurístico, baseado em relaxação lagrangiana e surrogate. Testes computacionais mostraram que, para este problema, as duas relaxações são equivalentes quanto à qualidade das soluções encontradas. No entanto, o limitante da relaxação lagrangiana/surrogate é obtido em um menor número de iterações. No mesmo artigo, Molina *et al.* propõem uma extensão para o problema, considerando restrições de capacidade de produção e admitindo atraso na entrega da demanda. Os referidos autores propõem um modelo para o problema modificado e dois métodos de resolução, em que o primeiro é baseado em relaxação lagrangiana e o segundo na relaxação lagrangiana/surrogate. Como no caso mais simples, os testes computacionais mostraram que os limitantes das relaxações são equivalentes, porém, a heurística lagrangiana/surrogate converge com um número menor de iterações. Nos modelos propostos por Norden e Velde (2005) e Molina *et al.* (2009), admite-se que os itens finais são do mesmo tamanho e que podem ser colocados em um mesmo palete, desde que a capacidade do palete não seja excedida.

O presente trabalho tem como ponto de partida o modelo desenvolvido em Molina *et al.* (2009), em que o transporte dos itens é feito por uma empresa terceirizada. Para isso, é estabelecido um contrato com três custos estabelecidos: um custo de contrato fixo que é cobrado a cada período; um custo por unidade para os R primeiros paletes transportados (R é definido no contrato e é determinado tendo como base uma previsão da demanda); um custo por unidade de paletes utilizado, além dos R primeiros. Baseando-se nestes valores, a função custo para a utilização de r paletes pode ser expressa da seguinte forma:

$$f(r) = \begin{cases} c_0 + r c_1 & \text{se } r \leq R \\ c_0 + R c_1 + (r - R) c_2 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Em que:

c_0	Custo fixo mensal do contrato;
c_1	Custo unitário dos primeiros R paletes utilizados;
c_2	Custo unitário dos demais paletes ($c_2 > c_1$);
R	Número de paletes contratado com custo mais barato c_1 .

Além desses custos, os autores consideram que, ao final de cada período, toda a produção deve ser transportada até um armazém onde é feita a estocagem ou entrega da demanda. Para o modelo, são considerados os seguintes parâmetros e as variáveis do problema:

Parâmetros do modelo:

$i = 1, 2, \dots, n$	Número de itens distintos;
$t = 1, 2, \dots, T$	Número de períodos no horizonte de planejamento;
s_{it}	Custo de preparação para a produção do item i no período t ;
h_{it}^+	Custo unitário de estocagem do item i no final do período t ;
h_{it}^-	Penalidade por atraso de uma unidade do item i no final do período t ;
d_{it}	Demanda do item i no período t ;
b_i	Tempo necessário para a produção do item do tipo i
q_i	Tempo de preparação para a produção do item i ;
Cap_t	Capacidade de produção no período t ;
M	Um número positivo suficientemente grande;
P	Número de itens que podem ser colocados em um mesmo paleta.

O valor de P é calculado *a priori*, e, para isso, é considerado que todas as caixas, independente do tipo dos itens, possuem o mesmo tamanho, e que os itens são arranjados em camadas horizontais sobre a superfície do paleta, o que é usual na prática dos produtores para facilitar o arranjo e a estabilidade da carga. Para resolver o problema de carregamento de paletes do produtor, pode-se consultar trabalhos como Scheithauer e Terno (1996), Morabito e Morales (1998), Amaral e Wright (2001), Young-Gun e Maing-Kyu (2001), Oliveira (2004), Pureza e Morabito (2006), Oliveira e Morabito (2006), Birgin *et al.* (2010), Kitamura (2009) e as referências neles citadas.

Variáveis de decisão:

X_{it} Quantidade a ser produzida do item i no período t ;

I_{it}^+ Quantidade estocada do item i no período t ;

I_{it}^- Quantidade atrasada do item i no período t ;

Y_{it} Variável binária que indica se há produção do item i no período t ($Y_{it}=1$ se $X_{it} > 0$; $Y_{it}=0$, caso contrário);

A_t Número de paletes transportados no período t com custo unitário c_1 ;

B_t Número de paletes transportados no período t com custo unitário c_2 ;

Com isso, o modelo matemático é escrito da seguinte forma:

Modelo 2.2: Itens diferentes transportados em um mesmo paleta

$$z = \min \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (h_{it}^+ I_{it}^+ + h_{it}^- I_{it}^- + s_{it} Y_{it}) + \sum_{t=1}^T \left(c_0 + c_1 \sum_{i=1}^n A_{it} + c_2 \sum_{i=1}^n B_{it} \right) \quad (2.6)$$

$$\text{s.a.} \quad I_{i,t-1}^+ - I_{i,t-1}^- + X_{it} - I_{i,t}^+ + I_{i,t}^- = d_{it} \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T \quad (2.7)$$

$$X_{it} - M Y_{it} \leq 0 \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T \quad (2.8)$$

$$\sum_{i=1}^n (b_i X_{it} + q_i Y_{it}) \leq Cap_t \quad t = 1, \dots, T \quad (2.9)$$

$$B_t + A_t \geq \sum_{i=1}^n \frac{X_{it}}{P} \quad t = 1, \dots, T \quad (2.10)$$

$$0 \leq A_t \leq R \quad t = 1, \dots, T \quad (2.11)$$

$$I_{i0}^+ = I_{i0}^- = I_{iT}^+ = I_{iT}^- = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.12)$$

$$X_{it} \geq 0, I_{it}^+ \geq 0, I_{it}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T \quad (2.13)$$

$$A_t, B_t \in Z^+, Y_{it} \in \{0,1\} \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T \quad (2.14)$$

A função objetivo (2.6) minimiza a soma dos custos de estoque, atraso na entrega da demanda, o preparo da máquina e os custos de transporte. As restrições (2.7) são responsáveis pelo balanceamento da produção e estoque. As restrições (2.8) são responsáveis por garantir que o custo de preparo da máquina seja cobrado sempre que houver produção dos itens. As restrições (2.9) são de capacidade da produção. As restrições (2.10) asseguram que toda a produção em cada período será transportada até o armazém e, junto com a restrição (2.11), é garantido que este transporte seja

feito de acordo com os custos pré-estabelecidos no contrato. Finalmente, as restrições (2.12), (2.13) e (2.14) definem as condições de cada variável.

Vroblefski *et al.* (2000) afirmam que os custos de distribuição (logísticos) são um dos maiores custos e tendem a ser dependentes do volume de produtos transportados. Em Baumol e Vinod (1970), os custos das taxas de embarque ou de carga são introduzidos em um modelo que considera os custos do transporte, o tempo para o transporte, as rotas e o estoque dos produtos; além disso, os autores propõem dois métodos de resolução para o problema. No problema integrado de dimensionamento e lotes com transporte estudado por Lee *et al.* (2005), os autores consideram que a capacidade de transporte está associada ao número de contêineres (ou paletes) utilizados pelos itens, ou seja, os itens são produzidos e alocados em contêineres. O objetivo é minimizar o número de contêineres utilizados, uma vez que os custos logísticos são proporcionais a esse número. Os autores propuseram uma heurística baseada na representação do modelo como um problema de fluxo em redes.

Revisões gerais dos problemas integrados de produção e de distribuição podem ser encontradas em Erengüç *et al.* (1999) e em Rizk e Martel (2001). Além da revisão, em Erengüç *et al.* (1999), são apresentados modelos considerando três diferentes fases da cadeia de suprimentos: a primeira é sobre os fornecedores que oferecem bens ou serviços para diversas plantas; a segunda é em relação à produção dos bens finais para satisfazer uma determinada demanda, e, por último, é considerada a distribuição dos bens finais. Cada fase da cadeia de suprimentos é discutida em detalhes sobre vantagens e desvantagens de como cada fase é organizada.

Rizk e Martel (2001) fazem uma revisão bibliográfica, começando com problemas de dimensionamento de lotes, e vão ampliando a revisão, acrescentando restrições de capacidade e estoque e integrando o dimensionamento de lotes a uma cadeia de suprimentos. Os autores finalizam o trabalho com um modelo de dimensionamento de lotes com múltiplas linhas de produção e com entrega da demanda para os clientes da cadeia de suprimentos.

A maior parte dos métodos de solução para modelos que integram o dimensionamento e o transporte da produção envolve métodos híbridos que combinam heurísticas e relaxações, por exemplo: em Norden e Velde (2005), Molina *et al.* (2009), entre outros citados anteriormente. Em Sambasivan e Yahia (2005) é estudado um problema de dimensionamento de lotes capacitado considerando multi-plantas, com transferências entre as plantas. O problema é baseado numa empresa de fabricação de produtos de aço laminado. Os autores apresentam uma abordagem lagrangiana para a resolução do problema estudado pelos autores. Métodos exatos como *branch and*

bound (Wolsey e Nemhauser, 1999) foram pouco explorados por se acreditar que eles têm poucas chances de resolver estes problemas nas situações reais, devido a sua complexidade.

2.3 Problemas de empacotamento

A seguir, são revisados alguns modelos de problemas de empacotamento da literatura que são utilizados para a construção dos modelos integrados do próximo capítulo.

2.3.1 Problema de empacotamento unidimensional

Considere o problema de carregar um determinado número de caixas (de comprimentos, pesos ou volumes distintos) em caminhões de tamanhos iguais. Admite-se que todas as caixas têm que ser carregadas em algum caminhão e que a quantidade de caminhões seja suficientemente grande para carregar todas as caixas. Para a construção do modelo, considere os seguintes dados para o problema de carregamento de caminhões em uma dimensão.

Parâmetros do modelo:

w_i Comprimento (ou peso ou volume) do item do tipo i ;

W Comprimento (ou capacidade de peso ou volume) de cada caminhão;

d_i Demanda do item do tipo i ;

M Número suficientemente grande;

Variáveis de decisão:

Z_{ik} Número de itens do tipo i alocados no caminhão k ;

A_k Variável binária que indica se o caminhão k é utilizado;

O modelo pode ser escrito como um problema de corte ou empacotamento unidimensional, em que a restrição de capacidade de cada restrição de mochila é dada pela restrição de capacidade do caminhão. Mais detalhes sobre os problemas da mochila e corte unidimensional podem ser encontrados em Martello e Toth (1990), Kellerer *et al.* (2004) e Archettia *et al.* (2010). O modelo de corte ou empacotamento unidimensional é dado a seguir (mais informações sobre este modelo, proposto inicialmente por Kantorovich em 1939, pode ser encontrado em Arenales *et al.*, 2006).

Modelo 2.3: Empacotamento Unidimensional

$$z = \min \sum_{k=1}^M A_k \quad (2.15)$$

$$\text{S.a} \quad \sum_{i=1}^N w_i Z_{ik} \leq W A_k \quad k = 1, \dots, M \quad (2.16)$$

$$\sum_{k=1}^M Z_{ik} = d_i \quad i = 1, \dots, N \quad (2.17)$$

$$Z_{ik} \in \mathbb{N} \quad k = 1, \dots, M; i = 1, \dots, N \quad (2.18)$$

$$A_k \in \{0,1\} \quad k = 1, \dots, M \quad (2.19)$$

A função objetivo deste modelo (2.15) é determinar o número mínimo de caminhões necessários para empacotar todos os itens. As restrições (2.16) são restrições de mochila que garantem que a capacidade dos caminhões será respeitada e as restrições (2.17) garantem que todos os itens serão empacotados. As restrições (2.18) e (2.19) indicam o domínio das variáveis. Na prática, o valor de M é dado pelo tamanho da frota da empresa. Caso seja aceitável considerar uma frota suficientemente grande ou infinita (sem limite do número de caminhões) para este modelo, é necessário determinar *a priori* um valor para o limite superior de M , preferencialmente o menor possível uma vez que, quanto maior for o valor de M , maior será o número de variáveis do modelo.

2.3.2 Problema de empacotamento bidimensional

Para considerar duas dimensões no empacotamento, é necessário fazer algumas adaptações nos dados e nas variáveis de decisão do modelo da seção anterior. Note que, para o caso bidimensional, é necessário identificar a posição dos itens dentro do caminhão, o que não era necessário quando era considerada apenas uma dimensão para o empacotamento, como no modelo da seção anterior. Mais detalhes sobre o problema de empacotamento bidimensional podem ser encontrados em Beasley (1985), Chen *et al.* (1995), Lodi *et al.* (2002). A seguir, apresenta-se um modelo de empacotamento bidimensional, adaptado do modelo de corte bidimensional proposto em Beasley (1985) que maximiza o espaço utilizado no empacotamento de itens em um caminhão. Para isso, além dos dados do modelo anterior, considere os seguintes dados adicionais.

l_i Largura do item do tipo i ;

L Largura de cada caminhão;

Considere também os conjuntos de coordenadas que indicam as possíveis posições em cada eixo X e Y , em que os itens podem ser alocados dentro do caminhão. Note que essas coordenadas podem ser limitadas às combinações lineares não negativas dos comprimentos e larguras dos itens, sem perda de generalidade (Beasley, 1985).

$$X = \{p \mid 0 \leq p \leq L - \min l(i), p = \sum_{i=1}^n \beta_i l_i, 0 \leq \beta_i \leq d_i, \beta_i \in \mathbb{N}\}$$

$$Y = \{q \mid 0 \leq q \leq W - \min w(i), q = \sum_{i=1}^n \beta_i w_i, 0 \leq \beta_i \leq d_i, \beta_i \in \mathbb{N}\}$$

Considere também a matriz unimodular a_{ipqrs} que indica se os itens podem ser alocados em uma determinada posição do caminhão. Os elementos da matriz são definidos pela seguinte fórmula:

$$a_{ipqrs} = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq p \leq r \leq p + l_i - 1 \leq L - 1 \text{ e} \\ & 0 \leq q \leq s \leq q + w_i - 1 \leq W - 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Além disso, considere a variável de decisão que indica se o item i foi colocado na posição (p, q) .

$$Z_{ipq} = \begin{cases} 1, & \text{se o item } i \text{ está posicionado no ponto } (p, q) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Assim, em função do modelo de corte ou empacotamento bidimensional proposto em Beasley (1985), tem-se o seguinte modelo para o carregamento de caminhões:

Modelo 2.4: Empacotamento Bidimensional

$$z = \max \sum_{i=1}^N \sum_{p \in X} \sum_{q \in Y} w_i l_i Z_{ipq} \quad (2.20)$$

$$\text{S.a } \sum_{i=1}^n \sum_{p \in X} \sum_{q \in Y} a_{ipqrs} Z_{ipq} \leq 1 \quad r \in X; s \in Y \quad (2.21)$$

$$\sum_{p \in X} \sum_{q \in Y} Z_{ipq} \leq d_i \quad i = 1, \dots, n \quad (2.22)$$

$$Z_{ipq} \in \{0,1\} \quad i = 1, \dots, n; p \in X; q \in Y \quad (2.23)$$

As restrições (2.21) garantem que não há sobreposição de caixas no empacotamento no caminhão, e as restrições (2.22) garantem que a demanda de cada item não será excedida. Observe que neste modelo, o objetivo (2.20) é maximizar a área utilizada de um caminhão. Para considerar

vários caminhões, basta considerar todos os caminhões (idênticos) como apenas um caminhão de tamanho maior (“super caminhão”), similarmente ao que foi feito em Beasley (1985) para o caso de várias placas idênticas. Porém, a construção dos elementos a_{ipqrs} deve agora levar em consideração o espaço de cada caminhão. Outra maneira de considerar vários caminhões é incluindo variáveis binárias A_k e definindo variáveis Z_{ipqk} , de acordo com cada caminhão k , similarmente ao que foi feito no Modelo 2.3. Com pequenas modificações no modelo acima, pode-se obter um modelo que minimiza o número de caminhões utilizados, que servirá de base para construir um modelo que integra as decisões de dimensionamento de lotes com empacotamento bidimensional, a ser discutido em um capítulo mais adiante.

2.3.3 Problema de empacotamento tridimensional

Similarmente ao caso bidimensional, o modelo para o problema de empacotamento tridimensional pode ser escrito com pequenas adaptações feitas no modelo de corte bidimensional de Beasley (1985) da seção anterior. Mais detalhes sobre problema de empacotamento tridimensional podem ser encontrados em Junqueira *et al.* (2011), Parreño *et al.* (2008), Pisinger (2002) e Hifi (2002). Embora o modelo de corte apresentado por Beasley forneça as posições (coordenadas) tridimensionais do carregamento, este pode não ser muito útil na prática em empacotamento, pois o carregamento pode ser instável, ou seja, podem ocorrer soluções em que as caixas ficam “flutuando” dentro do caminhão ou contêiner. Para evitar soluções deste tipo, é possível utilizar uma adaptação do modelo de carregamento de contêiner apresentada em Junqueira *et al.* (2012) que considera restrições de estabilidade de carga e empilhamento.

Segundo Junqueira *et al.* (2012), a estabilidade do carregamento pode ser dividida em duas componentes: a estabilidade vertical e a estabilidade horizontal. A estabilidade vertical está relacionada à ação da gravidade sobre os itens. Pode-se dizer que a carga está estável quando se tem a certeza que nenhuma caixa está flutuando ou, em outras palavras, que nenhuma caixa irá cair de sua pilha. A estabilidade horizontal pode ser interpretada como a capacidade dos itens se moverem dentro do caminhão, quando este estiver se movimentando. A seguir, é apresentado um modelo que considera apenas a estabilidade vertical, apresentado em Junqueira *et al.* (2012). Os seguintes conjuntos de dados e de variáveis adicionais aos modelos anteriores são definidos.

Dados adicionais:

H Altura do caminhão;

h_i Altura do item do tipo i .

Considere agora as três arestas do canto inferior frontal esquerdo do contêiner como a origem de um sistema ortogonal cartesiano. Seja (p, q, r) a posição em que o canto inferior frontal esquerdo de um determinado item é colocado. Similarmente ao caso bidimensional, os conjuntos X , Y e Z , dados a seguir, definem todos os pontos (p, q, r) em que os itens podem ser colocados.

$$X = \{p \mid 0 \leq p \leq L - \min l_i, p = \sum_{i=1}^n \beta_i l_i, 0 \leq \beta_i \leq d_i, \beta_i \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, n\}$$

$$Y = \{q \mid 0 \leq q \leq W - \min w_i, q = \sum_{i=1}^n \beta_i w_i, 0 \leq \beta_i \leq d_i, \beta_i \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, n\}$$

$$Z = \{r \mid 0 \leq r \leq H - \min h_i, r = \sum_{i=1}^n \beta_i h_i, 0 \leq \beta_i \leq d_i, \beta_i \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, n\}$$

Observe que os conjuntos acima apenas indicam as possíveis posições que os itens podem ser colocados. Assim, como no caso bidimensional, é necessário definir uma função para evitar a sobreposição das caixas dentro do caminhão. Assim, seja $a_{ipqrstu}$ uma função com $i = 1, 2, \dots, n$, $p, s \in X$, $q, t \in Y$ e $r \in Z$ tal que

$$a_{ipqrstu} = \begin{cases} 1, & \text{se uma caixa do tipo } i, \text{ quando empacotada com seu canto inferior} \\ & \text{frontal esquerdo na posição } (p, q, r), \text{ não permite que outra caixa} \\ & \text{qualquer ocupe a posição } (s, t, u) \text{ dentro dela;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A função acima pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$a_{ipqrstu} = \begin{cases} 1, & 0 \leq p \leq s \leq p + l_i - 1 \leq L - 1; \\ & 0 \leq q \leq t \leq q + w_i - 1 \leq W - 1; \\ & 0 \leq r \leq u \leq r + h_i - 1 \leq H - 1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ou seja, se $a_{ipqrstu} = 1$, implica que a posição (s, t, u) está ocupada por uma caixa do tipo i disposta tal que seu canto inferior frontal esquerdo esteja na posição (p, q, r) do contêiner. Caso contrário, se $a_{ipqrstu} = 1$, então a posição não está ocupada por esta caixa.

Além de garantir que não acontecerá a sobreposição das caixas no carregamento, é necessário uma nova função que garanta a estabilidade da carga. Assim, é necessário uma função que indique as posições que as caixas podem ser dispostas no contêiner, de modo a garantir a estabilidade vertical. Seja a função $c_{ipqrst(r+h_i)}$ com $p, s \in X$, $q, t \in Y$ e $r \in Z$ tal que

$$c_{ipqrst(r+h_i)} = \begin{cases} 1, & \text{se uma caixa do tipo } i, \text{ quando empacotada com seu canto inferior} \\ & \text{frontal esquerdo na posicao } (p, q, r), \text{ contém o ponto definido pela} \\ & \text{posição } (s, t, r + h_i) \text{ na sua face superior} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim como a função a_{ipqrst} , a função $c_{ipqrst(r+h_i)}$ é calculada *a priori* e pode ser reescrita da seguinte forma:

$$c_{ipqrst(r+h_i)} = \begin{cases} 1, & 0 \leq p \leq s \leq p + l_i - 1 \leq L - 1; \\ & 0 \leq q \leq t \leq q + w_i - 1 \leq W - 1; \\ & 0 \leq r \leq H - h_i; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para escrever o modelo, é necessário apenas um tipo de variável.

Variáveis de carregamento:

$$z_{ipqr} = \begin{cases} 1, & \text{se uma caixa do tipo } i \text{ é empacotada com seu canto inferior frontal} \\ & \text{esquerdo na posição } (p, q, r), \text{ tal que } 0 \leq p \leq L - l_i, 0 \leq q \leq W - w_i \text{ e} \\ & 0 \leq r \leq H - h_i, \text{ dentro do caminhão } k; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Com isso, pode-se escrever a seguinte adaptação do modelo apresentado em Junqueira *et al.* (2012) para o problema de carregamento em três dimensões.

Modelo 2.5: Empacotamento tridimensional

$$z_3 = \min \sum_{i=1}^n \sum_{p \in X} \sum_{q \in Y} \sum_{r \in Z} a_{ipqrst} z_{ipqr} \quad (2.24)$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{p \in X} \sum_{q \in Y} \sum_{r \in Z} a_{ipqrst} z_{ipqr} \leq 1 \quad s \in X; t \in Y; u \in Z \quad (2.25)$$

$$\sum_{p \in X} \sum_{q \in Y} \sum_{r \in Z} z_{ipqr} \leq d_i \quad i = 1, \dots, n \quad (2.26)$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{r-h_i \geq 0} \sum_{p \in X} \sum_{q \in Y} \sum_{s \in S} \sum_{b \in B} c_{ipq(r-h_i)str} z_{ipq(r-h_i)} \geq \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n; s \in X; t \in Y; \\ r \in Z/\{0\} \quad (2.27)$$

$$\propto l_j w_j z_{jpq(r-h_i)}$$

$$z_{ipqr} \in \{0,1\} \quad i = 1, \dots, N; p \in X; q \in Y; r \in Z \quad (2.28)$$

Em que os conjuntos S e B são dados por $S = \{s \in X | p \leq s \leq p + l_j - 1\}$ e $B = \{b \in Y | q \leq t \leq q + w_j - 1\}$. O objetivo deste problema (Modelo 2.5) é maximizar o volume utilizado nos caminhões

utilizados para o carregamento todos os itens. As restrições (2.25) garantem a não sobreposição dos itens. A restrição (2.26) limita o número máximo de cada tipo de item carregado no caminhão. A restrição (2.27) está relacionada à estabilidade de carga. Para a restrição (2.27), é necessário definir o valor de α , que indica a fração mínima da área da face inferior de uma caixa do tipo j que deve estar suportada pelas áreas das faces superiores de caixas do tipo i , que tenham as projeções destas áreas comuns em relação à caixa do tipo j , e que estejam colocadas imediatamente abaixo da caixa do tipo j , em contato com esta. Em geral defini-se $\alpha = 1$

Como no caso bidimensional da seção anterior, o modelo anterior pode ser estendido para o caso de vários caminhões (iguais), considerando os vários caminhões como apenas um (“super caminhão”), sobrepondo um com o outro e tomando os devidos cuidados na geração da função de sobreposição das caixas e de estabilidade de carga. Alternativamente, o Modelo 2.3 pode ser modificado usando variáveis Z_{ipqrk} e A_k , conforme o modelo anterior. Além disso, ambos os modelos, como apresentados, ainda podem ser melhorados no sentido de diminuir os possíveis pontos de arranjos da carga, diminuindo o número de variáveis do problema. Tais melhorias são discutidas em Junqueira *et al.* (2012).

2.3.4 Modelo utilizando padrões de empacotamento

Nesta seção é apresentado um modelo alternativo para os três modelos apresentados para o problema de empacotamento, que admite padrões de empacotamento *a priori*. Para a construção deste modelo, considere as seguintes adaptações para os dados e variáveis apresentados.

Considere inicialmente o vetor ρ_p , denominado padrão de empacotamento p , como um vetor que contém em sua i – ésima posição (ρ_{ip}) a quantidade do item i que é carregada no padrão de empacotamento p . Observe que, para o caso unidimensional, a solução ótima pode ser obtida por meio de uma combinação linear de ρ_p para todos os p 's. Além disso, cabe ressaltar que, para os casos com duas e três dimensões, os padrões de empacotamento consideram apenas a informação da quantidade de itens que podem ser colocadas dentro de um único caminhão (as posições destes itens já estão pré-definidas nos padrões de empacotamento). Mais informações sobre formulação de problemas de corte ou empacotamento com uso de plano de corte podem ser obtidas em Gilmore e Gomory (1961, 1963 e 1965), Christofides e Whitlock (1977) e Hifi (1998).

Seja P o número de possíveis padrões de empacotamento, em que o caminhão pode ser carregado. Defina a variável A_p como o número de vezes que o padrão ρ_p é utilizado para carregar a demanda. Em outras palavras, A_p também pode ser vista como o número de caminhões

carregando itens com padrões ρ_p . Com isso, pode-se escrever o seguinte modelo de empacotamento (baseado em Gilmore e Gomory, 1961, 1963 e 1965).

Modelo 2.6: Formulação baseada em padrões de carregamento

$$z = \min \sum_{p=1}^P A_p \quad (2.29)$$

$$S.a \quad \sum_{p=1}^P \rho_{ip} A_p = d_{it} \quad i = 1, \dots, N \quad (2.30)$$

$$A_p \in \mathbb{Z} \quad p = 1, \dots, P \quad (2.31)$$

Apesar da aparência mais simples deste modelo, dependendo do número de variáveis e do tamanho dos itens em relação aos caminhões, o valor do parâmetro P pode ser muito grande. Além disso, a “tarefa” de gerar *a priori* os padrões de empacotamento pode ser trabalhosa, lembrando que a idéia é que o modelo funcione para o caso bidimensional ou tridimensional. Observe que o trabalho de determinar o valor de M para os modelos anteriores é transferido para a geração dos planos de empacotamento do modelo. Em geral, resolve-se este tipo de problemas por geração de colunas.

No Capítulo 4, para gerar os modelos integrados, não será utilizado a formulação estendida (2.29-2.31), pois espera-se que as soluções ótimas de carregamento gere diversos padrões de carregamento com pouca ou nenhuma repetição entre os padrões. Observe que, neste caso, seria necessário gerar diversas colunas para obter a solução ótima do problema, enquanto os outros modelos fornecem como solução ótima os padrões utilizados. A formulação estendida será utilizada apenas em um método heurístico de resolução para simular o método de resolução realizado na prática.

Para finalizar a revisão de modelos de empacotamento, cabe mencionar que, em Dyckhoff (1990), é feita uma classificação dos problemas de corte e de empacotamento. Esta classificação tem quatro indicações: a primeira em relação ao número de dimensões relevantes para o problema, a segunda, se os itens são selecionados para serem carregados em todos os objetos ou se todos os itens são transportados em uma seleção de objetos; a terceira característica está relacionada ao número de objetos, e, por último, a quantidade e a variabilidade dos itens carregados. Em Wäsher *et*

al. (2007), é feita uma revisão dos trabalhos de corte de empacotamento, e é sugerida uma extensão da classificação apresentada em Dyckhoff (1990). Uma das mudanças são a heterogeneidade dos itens que serão carregados e o tamanho dos objetos. Segundo a classificação dada por Wäsher *et al.* (2007), pode-se classificar os problemas de empacotamento tratados neste trabalho como “*Single Bin-Size Bin Packing Problem*”.

2.4 Métodos heurísticos

Como mencionado no Capítulo 1, os modelos matemáticos resultantes dos problemas integrados apresentados no próximo capítulo têm, em geral, natureza combinatória, o que dificulta sua resolução. Assim, a formulação e o desenvolvimento de métodos heurísticos de solução para problemas que integram a produção e distribuição são um tema relevante para esta pesquisa e podem contribuir para fornecer ferramentas mais eficazes de apoio à decisão para processos de produção.

O uso de métodos híbridos que combinam heurísticas e relaxações tem se mostrado eficiente para diversos problemas combinatórios encontrados na literatura. Após análise preliminar do problema estudado neste trabalho e seus modelos, foi decidido utilizar dois métodos heurísticos de resolução: um baseado em técnicas de relaxação lagrangiana e outro baseado em otimização de colônias de formigas. Assim, revisa-se brevemente cada uma dessas heurísticas.

2.4.1 Relaxação Lagrangiana

A relaxação lagrangiana introduzida por Held e Karp (1971) (veja também os trabalhos clássicos de Geofrion (1974) e Fisher (1981)) tem sido utilizada com sucesso em diversos problemas de otimização combinatória, inclusive em problemas de dimensionamento de lotes. Em Trigeiro *et al.* (1989), a relaxação lagrangiana é aplicada em um problema de dimensionamento de lotes capacitado. Neste, os autores relaxam a restrição de capacidade e aplicam rotinas de factibilização na solução da relaxação para obter uma solução viável para o problema inicial. Os autores utilizam o método de otimização do subgradiente para atualizar os multiplicadores lagrangianos.

Diaby *et al.* (1992) aplicam a relaxação lagrangiana em um problema de dimensionamento de lotes. Os autores desenvolvem um modelo de programação inteira mista e resolvem o problema com relaxação lagrangiana e mostram, por testes computacionais, que o uso da relaxação lagrangiana é eficiente para problemas grandes, obtendo soluções próximas do valor ótimo. Toledo e Armentano (2006) desenvolvem uma heurística baseada em relaxação lagrangiana para resolver um problema de dimensionamento de lotes com restrição de capacidade, considerando múltiplas

máquinas em paralelo e minimizando os custos de produção e estoque. No mesmo trabalho, a heurística desenvolvida obteve a solução ótima do problema para alguns exemplares. Jans e Degraeve (2004) aplicam relaxação lagrangiana às restrições de demanda de um modelo reformulado de dimensionamento de lotes com o objetivo de obter limitantes inferiores de boa qualidade. Em Brahim *et al.* (2010), os autores utilizam a relaxação lagrangiana para resolver um problema de dimensionamento de lotes com janela de tempo para produção e tempos de preparo de máquina. Buschkühl *et al.* (2010) apresentam uma revisão de trabalhos que aplicam a relaxação lagrangiana em problemas de dimensionamento de lotes.

A seguir, é apresentada resumidamente a relaxação lagrangiana, o método do subgradiente e o algoritmo de volume para facilitar a compreensão das heurísticas aplicadas mais adiante. A apresentação da relaxação lagrangiana e sua motivação são dadas, por exemplo, em Fisher (1981, 2004), no qual foi baseado o texto a seguir. Considere o seguinte problema de programação inteira.

$$\begin{aligned} Z &= \min cx \\ \text{S.a.} & \\ & Ax \leq b \\ & Dx \leq e \\ & x \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned} \quad (\text{P})$$

Suponha que o problema de programação linear inteira (P) seja de difícil resolução e que seja conhecido que, se o conjunto de restrições $Ax \leq b$ não fosse considerado no problema (P), então este seria mais fácil de ser resolvido. O método de relaxação lagrangiana consiste na relaxação da restrição que dificulta o problema, e sua adição à função objetivo de forma penalizada. A relaxação é descrita a seguir.

Considerando um vetor λ com elementos não negativos (será denotado por $\lambda \geq 0$) e o sistema $Ax - b$. Cada elemento λ_i , do vetor λ , está associado a uma restrição ($A_i \leq b_i$) do sistema $Ax \leq b$. Com isso, a relaxação lagrangiana do problema (P) é dada pelo seguinte problema:

$$\begin{aligned} Z_{LR}(\lambda) &= \min cx + \lambda(Ax - b) \\ \text{S.a.} & \\ & Dx \leq e \\ & x \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned} \quad (\text{RLP}(\lambda))$$

Observe que o problema não possui o conjunto de restrições que dificultam a resolução do problema (P), porém, no problema $\text{RLP}(\lambda)$, esta restrição é adicionada com um multiplicador λ na função objetivo. Em Guignard (2003), encontra-se uma demonstração de que, para cada multiplicador, $\lambda \geq 0$, a solução ótima da relaxação é um limitante inferior para o problema (P) e

que este limitante tem no mínimo a mesma qualidade que o valor ótimo da relaxação linear do mesmo problema.

Ou seja, temos a seguinte propriedade para a solução da relaxação lagrangiana: dados $\lambda \geq 0$ e x_λ uma solução ótima para $RLP(\lambda)$, se x^* é uma solução ótima para o problema P, então $cx_\lambda + \lambda(Ax_\lambda - b) \leq cx^*$. Além disso, se a solução da relaxação lagrangiana (x_λ) for, também, uma solução viável para o problema (P), temos que a solução ótima do problema (P) satisfaz a seguinte propriedade: $cx_\lambda + \lambda(Ax_\lambda - b) \leq cx^* \leq cx_\lambda$. Observe que o fato da solução da relaxação lagrangiana ser viável para o problema (P) não garante que x_λ é uma solução ótima para o problema (P).

Para garantir que a solução da relaxação lagrangiana é uma solução ótima para o problema (P), além da solução x_λ ser viável para o problema (P), temos que a solução x_λ tem que satisfazer as condições das folgas complementares (Guignard, 2003), ou seja, x_λ é uma solução ótima para o problema se esta for uma solução viável para o problema (P) e se satisfaz a condição $\lambda(Ax_\lambda - b) = 0$.

2.4.1.1 Método de otimização por subgradiente

O resumo descrito nesta seção é baseado em Geoffrion (1974), Fisher (1981) e Guignard (2003). Sabendo que, para cada valor de λ , a solução ótima do problema $RLP(\lambda)$ fornece um limitante inferior para o problema (P), é definido como próximo passo obter o multiplicador que forneça o melhor limitante inferior para o problema (P). O problema de determinar o multiplicador é denominado de problema dual lagrangiano e pode ser descrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \max_{\lambda} Z_{LR}(\lambda) &= \max_{\lambda} \min(cx + \lambda(Ax - b)) \\ \text{S.a.} & \\ Dx &\leq e \quad (\text{DRLP}) \\ x &\in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

O método do subgradiente é um método aplicado a funções diferenciáveis por partes. Em Fisher (1981), é demonstrada a construção do método e prova-se que o valor de (DRLP) converge para uma solução ótima de (P) quando é aplicado um número suficientemente grande de iterações.

Em resumo, o método do subgradiente funciona da seguinte forma: dada a função $Z_{LR}(\lambda)$, queremos obter o valor do multiplicador λ que maximiza a função. Iniciamos o método com um dado λ^1 e então obtém-se uma solução ótima do problema $RLP(\lambda^1)$. Seja x^1 esta solução ótima associada ao multiplicador λ^1 . Calculando o gradiente da função $Z_{LR}(\lambda)$, obtemos o vetor gradiente $Ax^1 - b$. Sabendo que a função $Z_{LR}(\lambda)$ cresce na direção do gradiente, atualizamos o multiplicador lagrangiano λ . A atualização do multiplicador é feita “caminhando” na direção do subgradiente para

obter um novo vetor λ^2 . O tamanho do passo para obter o novo valor do multiplicador não pode ser muito grande, pois, como a função é diferenciável por partes, não temos garantia que a função irá sempre melhorar no sentido do gradiente (ver Figura 2-1), mas sim apenas em uma vizinhança do ponto estudado. Existem fórmulas específicas para obter o tamanho do passo. Uma destas fórmulas é detalhada na construção do método heurístico. Com o novo vetor λ^2 , é aplicado o mesmo procedimento descrito anteriormente, e é obtido o vetor λ^3 . O processo é repetido até que o critério de parada seja satisfeito. Mais detalhes sobre o método do subgradiente são encontrados, por exemplo, em Held *et al.* (1974), Geoffrion (1974), Fisher (1981) e Camerini *et al.* (2005).

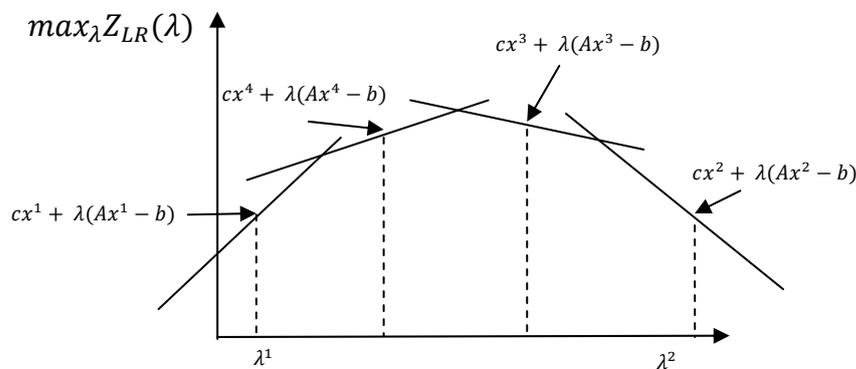


Figura 2-1 Método do subgradiente

O esquema a seguir resume o método de otimização do subgradiente. O mesmo método será mais detalhado em capítulos adiante, na construção dos métodos heurísticos de resolução dos problemas discutidos neste trabalho.

<p>Passo 1. Inicialização Definindo os valores iniciais:</p> <p>λ^0: valor inicial do multiplicador lagrangiano</p> <p>ρ: tamanho inicial do passo do subgradiente.</p> <p>LB: limitante inferior inicial.</p> <p>LS: limitante superior do problema (P)</p> <p>$k=0$: contador de iterações</p> <p>Critérios de parada</p> <p>Passo 2. Enquanto os critérios de parada não forem satisfeitos Resolva $RLP(\lambda^k)$ e obtenha a solução x^k</p> <p>Se $LB \leq Z_{LR}(\lambda^k)$ então $LB = Z_{LR}(\lambda^k)$ (atualização do limitante</p>

inferior)

Faça :

$$k=k+1.$$

$$\lambda^k = \lambda^{k-1} + \frac{\rho (LS - Z_{LR}(\lambda^k))}{|Ax^{k-1} - b|^2}$$

Se a solução obtida for viável,

então atualize o limitante superior (LS);

se a solução obtida foi ótima, então **PARE**.

Senão, aplique heurística de factibilização (Seções 4.4 e 4.5) obtendo um limitante superior (LS)

Fim

No esquema acima, $|Ax^{k-1} - b|^2$ é dado pela soma dos quadrados dos elementos $A_i x^{k-1} - b_i$. Uma crítica deste método, feita em Barahona e Anbil (2000), é que o método do subgradiente obtém aproximações para a solução dual do problema (P), “não se importando” com as soluções primais do problema. Observe que o método descrito utiliza um limitante superior para o problema, mas este não é atualizado a cada iteração do subgradiente. Barahona e Anbil (2000) apresentam uma extensão do método do subgradiente para produzir aproximações de uma solução do problema primal, utilizando as soluções obtidas a cada iteração do método do subgradiente. Este método é denominado de algoritmo de volume e é descrito na seção a seguir.

2.4.1.2 Algoritmo de volume

O algoritmo de volume apresentado por Barahona e Anbil (2000), como mencionado, é uma extensão do método do subgradiente, com o objetivo de obter uma solução primal para o problema (P). Para isso, os autores descrevem um método que utiliza as soluções duais obtidas pelo método do subgradiente para tentar obter uma solução viável primal, que é dada por uma combinação linear convexa das soluções duais. Para desenvolver o método, os autores relacionam a decomposição de Dantzig-Wolfe (1960) com a relaxação lagrangiana, e mencionam que o algoritmo pode ser visto como uma maneira rápida de aproximar a solução obtida pela decomposição de Dantzig-Wolfe.

A forma como desenvolveremos o algoritmo de volume neste trabalho é baseado no algoritmo apresentado em Barahona e Anbil (2000). No entanto, existem outros trabalhos que interpretam este algoritmo de forma diferente, como, por exemplo, em Bahiense *et al.* (2002), que apresentam um algoritmo de volume revisado, relacionam tal algoritmo com o método de feixes e

mostram que o algoritmo de volume trata-se de um método de extragradientes, e não de subgradientes como originalmente proposto por Barahoma e Anbil (2000). Além disso, o método proposto por Bahiense *et al.* (2002) tem garantia de convergência. Outro estudo sobre algoritmo de volume é encontrado em Fukuda (2007).

Antes de apresentarmos o algoritmo de volume, segundo Barahoma e Anbil (2000) é necessário compreender a decomposição de Dantzig-Wolfe e a relação entre a decomposição e a relaxação lagrangiana. A ideia básica do método de decomposição de Dantzig-Wolfe consiste na resolução de um elevado número de problemas de pequena dimensão, tipicamente bem estruturados, em oposição à resolução do problema original, caracterizado por uma complexidade e tamanho que o tornam de difícil resolução.

Segundo Pimentel (2005), na decomposição Dantzig-Wolfe as restrições que dificultam a resolução do problema inicial ficam num problema, designado problema mestre, e define-se um ou mais subproblemas a partir de subsistemas, com interação de informação entre o problema mestre e os subproblemas, até que a solução para o problema original seja encontrada. A cada subsistema, está habitualmente associado o mesmo tipo de problema, que exibe uma estrutura especial e para o qual são conhecidos algoritmos de resolução eficientes. A solução para o problema original é obtida com a resolução de uma seqüência de problemas de menor dimensão, resolvidos geralmente pelo método de geração de colunas.

Segundo Araujo (2011), considere o problema (P), ao qual chamamos de formulação compacta, definido por:

Formulação Compacta:

$$\begin{aligned} z_p &= \min cx \\ \text{S.a.} \quad & Ax \leq b \\ & Dx \leq e \\ & x \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned} \quad (P)$$

Seja o conjunto $S = \{x \in \mathbb{Z}_n^+ | Dx \leq e\}$. Tem-se que S é um poliedro e, de acordo com o teorema de Minkowski (ver, por exemplo, Nemhauser e Wolsey, 1988), pode ser definido a partir de um número finito de pontos extremos p_k , $k \in C = \{k=1, \dots, K\}$ e um número finito de raios extremos. Neste texto, será considerada apenas a aplicação da decomposição de Dantzig-Wolfe ao caso em que o conjunto S é um poliedro limitado. Conseqüentemente, com esta consideração,

qualquer ponto x pertencente ao conjunto S pode ser representado como uma combinação convexa dos pontos extremos de S , ou seja, x pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{aligned}x &= \sum_{k=1}^K \lambda_k p_k \\ \sum_{k=1}^K \lambda_k &= 1 \\ \lambda_k &\in \{0,1\} \quad \forall k \in C\end{aligned}$$

Substituindo a variável x , pela representação acima, na formulação compacta, obtemos um problema de otimização em termos dos pontos extremos de S . A formulação a seguir é denominada de formulação estendida. Denotamos este problema por PM (problema mestre).

Formulação Estendida:

$$\begin{aligned}(PM) \quad z_{PM} &= \min \sum_{k=1}^K (cp_k) \lambda_k \\ \text{Sujeito a:} \\ \sum_{k=1}^K (Ap_k) \lambda_k &\leq b \quad \text{Complicadas} \\ \sum_{k=1}^K \lambda_k &= 1 \\ \lambda_k &\in \{0,1\} \quad \forall k \in C\end{aligned}$$

O peso de cada ponto extremo p_k ($k=1, \dots, K$) é representado pelas variáveis de decisão do problema mestre λ_k ($k=1, \dots, K$). As restrições complicadas definem as restrições de ligação, agora representadas em termos de pontos extremos, e tem-se ainda a restrição de convexidade ($\sum_{k=1}^K \lambda_k = 1$), que garante a escolha de uma combinação convexa dos pontos extremos. Qualquer solução válida para o problema PM é também válida para o problema original P e ambas as formulações têm um valor idêntico em termos de função objetivo na solução ótima. A partir de uma solução factível qualquer do problema PM , pode-se utilizar a combinação convexa para obter a solução correspondente no problema P .

Entretanto, o problema original P e o problema mestre PM diferem no que diz respeito às suas relaxações lineares, pois, os valores ótimos das relaxações lineares são obtidos com a resolução dos seguintes e respectivos problemas:

Relaxação Linear da Formulação Compacta:

$$\begin{aligned} \bar{z}_{P_L} &= \min c^T x \\ (P_L) \quad \text{Sujeito a:} & \\ & Ax \leq b \quad \text{Complicadas} \\ & Dx \leq e \quad \text{Simples} \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Relaxação linear da Formulação Estendida:

$$\begin{aligned} \bar{z}_{PM_L} &= \min \sum_{k=1}^K (cp_k) \lambda_k \\ (PM_L) \quad \text{Sujeito a:} & \\ & \sum_{k=1}^K (Ap_k) \lambda_k \leq b \quad \text{Complicadas} \\ & \sum_{k=1}^K \lambda_k = 1 \\ & \lambda_k \in [0,1] \quad \forall k \in C \end{aligned}$$

De acordo com Vanderbeck (2000) e Vanderbeck e Savelsbergh (2006), a relaxação linear da formulação estendida pode ser escrita equivalentemente por:

$$\begin{aligned} \bar{z}_{PM_L} &= \min c^T x \\ (PM_L) \quad \text{Sujeito a:} & \\ & Ax \leq b \quad \text{Complicadas} \\ & x \in \text{conv}(\{x \in Z_+^n / Dx \leq e\}) \end{aligned}$$

em que: $\text{conv}(\{x \in Z_+^n / Dx \leq e\})$ representa o envoltório convexo do conjunto $\{x \in Z_+^n / Dx \leq e\}$, ou seja, representa o conjunto de todos os pontos que podem ser escritos como combinação convexa dos pontos do conjunto $\{x \in Z_+^n / Dx \leq e\}$. Ainda de acordo com os mesmos autores, ao comparar os valores das funções objetivo dos modelos anteriores, pode-se estabelecer que $\bar{z}_P \leq \bar{z}_{PM_L} \leq z_P$.

Segundo Pimentel (2005), ao se analisar os problemas PM e P , geralmente verifica-se que o primeiro tem um grande número de variáveis (igual ao número de pontos extremos do conjunto C), mas substancialmente menos restrições que o segundo, pois o conjunto de restrições definidas pelo conjunto S foi substituído pela restrição de convexidade. Para lidar com o número exponencialmente grande de variáveis, pode-se recorrer ao método de geração de colunas para resolver o problema mestre PMR_L . A ideia básica da geração de colunas consiste em: em vez de considerar todos os pontos extremos do conjunto S na relaxação linear do problema mestre PM_L , considera-se apenas um conjunto restrito desses pontos extremos, definindo assim um problema mestre restrito PMR_L , e avalia-se se existem pontos extremos que não estão presentes no problema

PMR_L que, caso fossem incluídos no problema, poderiam melhorar o valor da sua função objetivo. Os pontos que se revelarem atrativos devem então ser adicionados ao problema mestre.

Na geração de colunas, o PMR_L é otimizado iterativamente, até que exista a garantia de que a solução ótima do PMR_L é também a solução ótima do PM_L . Em cada iteração do método, faz-se a otimização do PMR_L , obtendo-se uma solução que é ótima em termos das variáveis que nele estão incluídas. Contudo poderão existir variáveis, ou pontos extremos do conjunto S , que não façam parte atualmente do PMR_L que sejam atrativos. Para avaliar a atratividade destes pontos extremos recorre-se à solução ótima dual do PMR_L e à resolução de um subproblema. Seja π o vetor de variáveis duais associado ao conjunto de restrições $\sum_{k=1}^K (Ap_k)\lambda_k \leq b$ e μ a variável dual associada à restrição $\sum_{k=1}^K \lambda_k = 1$. Tais variáveis duais são obtidas com a resolução do problema PMR_L . O custo reduzido de uma variável λ_k é dado por: $cp_k + \pi Ap_k - \mu$. Se $cp_k + \pi Ap_k - \mu \geq 0$, para $\forall k \in C$, a solução ótima de PMR_L , é também a solução ótima para a relaxação linear do problema mestre PM_L . Se do conjunto de todas as variáveis que não pertencem ao PMR_L existir pelo menos uma com custo reduzido negativo, então esta coluna deve ser adicionada ao PMR_L , e todo o processo deve ser repetido. Para se encontrar a variável λ_k que tem o menor custo reduzido, pode resolver-se o seguinte problema:

$$z_{SUB} = \min(c + A\pi)x - \mu$$

$$(SUB) \quad \begin{array}{l} \text{Sujeito a:} \\ Dx \leq e \\ x \in Z_+^n \end{array} \quad \text{Simples}$$

Este problema é habitualmente designado por subproblema (SUB). Observe que as variáveis do subproblema são inteiras. Se $z_{SUB} \geq 0$, então a solução ótima do PM_L foi encontrada. Se $z_{SUB} < 0$, então uma nova coluna deve ser adicionada ao PMR_L e o procedimento apresentado deverá ser repetido, até que não existam mais colunas atrativas.

Mostramos a seguir a relação entre a decomposição de Dantzig-Wolfe e o problema dual lagrangiano. Considerando o problema (P), podemos escrever a seguinte relaxação lagrangiana:

$$Z_{RL} = \min_{x \in S} cx + \lambda(Ax - b)$$

S.a.

Como mencionado, para cada multiplicador λ , a solução ótima de Z_{RL} é um limitante inferior para o problema (P). Assim, definimos como problema dual lagrangiano o problema de obter o valor de λ que forneça o melhor limitante inferior para o problema (P). Podemos descrever o problema dual lagrangiano da seguinte forma:

$$\text{S.a.} \quad Z_{DL} = \max_{\lambda} \min_{x \in S} cx + \lambda(Ax - b)$$

Em Barahoma e Anbil (2000), o problema dual lagrangiano Z_{DL} é descrito, de maneira equivalente, da seguinte forma:

$$\text{S.a.} \quad \begin{aligned} Z_{DL} &= \max \eta \\ \eta &\leq cx + \lambda(Ax - b) \\ x &\in S \end{aligned}$$

Como mencionado, estamos supondo que o conjunto S pode ser descrito como uma combinação convexa de um número finito de pontos extremos de S . Assim, resolver o problema Z_{DL} considerando apenas os pontos extremos do conjunto S é equivalente a resolver o problema Z_{DL} quando consideramos todo o conjunto S . Considerando p_k ($k=1, \dots, K$) os pontos extremos do conjunto S , podemos descrever o problema Z_{DL} da seguinte forma:

$$\text{S.a.} \quad \begin{aligned} Z_{DL} &= \max \eta \\ \eta - \lambda(Ap_k - b) &\leq cp_k \end{aligned}$$

Escrevendo o problema dual de Z_{DL} , obtemos o seguinte problema:

$$\begin{aligned} Z_{DDL} &= \sum_{k=1}^K cp_k \pi_k \\ \text{Sujeito a:} \\ (DDL) \quad & - \sum_{k=1}^K (Ap_k - b) \pi_k \geq 0 \\ & \sum_{k=1}^K \pi_k = 1 \\ & \pi_k \geq 0 \end{aligned}$$

Logo, a solução ótima do problema dual lagrangiano é igual à solução ótima do problema mestre obtido pela decomposição de Dantzig-Wolfe.

O termo volume é devido ao teorema do volume apresentado a seguir que consiste num teorema baseado em dualidade e mostra que as variáveis primais do problema mestre da decomposição de Dantzig-Wolfe são proporcionais aos volumes definidos pelas faces que estão ativas em uma vizinhança de uma solução ótima do problema dual associado.

Teorema (Barahoma e Anbil (2000)). Considere novamente o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} & \max z \\ \text{S.a.} \quad & z + \lambda a_i \leq b_i \text{ para } i=1, \dots, m \end{aligned}$$

em que λ é um vetor com $n-1$ componentes. Seja $(\hat{z}, \hat{\lambda})$ uma solução ótima e suponha que as m primeiras restrições sejam ativas no ponto ótimo. Seja $\bar{z} < \hat{z}$ e assumimos que as condições $z + \lambda a_i \leq b_i$ para $i = 1, \dots, m$ e $z \geq \bar{z}$ definem um poliedro limitado (veja Figura 2.2).

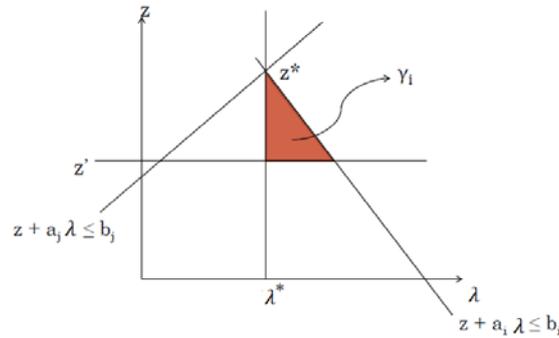


Figura 2-2: Volume do poliedro limitado

Para $1 = i, i + 1, \dots, m - 1, m$, seja γ_i o volume entre a face definida por $z + \lambda a_i \leq b_i$ e o hiperplano definido por $z = \bar{z}$. Então, uma solução ótima dual é dada por $\pi_i = \frac{\gamma_i}{\sum_{j=1}^m \gamma_j}$.

Uma interpretação geométrica para o teorema é apresentada em Bahiense (2000). Como o somatório das variáveis primais na decomposição de Dantzig-Wolfe é igual a um, cada valor λ_k ($k=1, \dots, K$), pode ser interpretado como a probabilidade de que, em uma vizinhança da solução ótima dual, o subproblema (SUB) gere um ponto extremo, o que pode ser interpretado também como a probabilidade de gerar a face k .

O resumo do algoritmo de volume, dado a seguir, é baseado nos trabalhos de Barahona e Anbil (2000), Bahiense *et al.* (2002) e Fukuda (2007). Considere as seguintes definições para as variáveis utilizadas no resumo a seguir:

x_l^k : Solução da relaxação lagrangiana, com o multiplicador λ^k , obtida na k -ésima iteração;

v_l^k : Subgradiente associado a x_l^k .

x_v^k : solução obtida na k -ésima iteração do algoritmo de volume (extragradiante associado a x_l^k , v_l^k e o multiplicador λ_v^k).

Passo 1.	Inicialização
	Definir os critérios de parada
	Definindo os valores iniciais:

	<p>λ^0: valor inicial do multiplicador lagrangiano</p> <p>ρ : tamanho inicial do passo do subgradiente.</p> <p>LB : limitante inferior inicial.</p> <p>LS : limitante superior do problema (P)</p> <p>$k=0$: contador de iterações</p> <p>$0 < \alpha < 1$: um escalar</p> <p>Resolva $RLP(\lambda^k)$ e obtenha a solução x_l^k e o limitante $Z_{LR}(\lambda^k)$</p> <p>Inicialize as variáveis</p> $LB = Z_{LR}(\lambda^k), x_v^k = x_l^k, \lambda_v^k = \lambda^k, v_l^k = Ax_l^k - b, v_v^k = v_v^k$
Passo 2.	<p>Enquanto os critérios de parada não forem satisfeitos</p> <p>Atualize o multiplicador Lagrangiano</p> $\lambda^{k+1} = \lambda_v^k + \frac{\rho (LS - Z_{LR}(\lambda^k))}{\ Ax_v^k - b\ ^2} v_v^k$ <p>Resolver $RLP(\lambda^{k+1})$ e obtenha a solução x_l^{k+1} e $Z_{LR}(\lambda^{k+1})$</p> <p>Faça: $v_l^{k+1} = Ax_l^{k+1} - b$</p>
Passo 3.	<p>Atualizar a aproximação primal</p> $x_v^{k+1} = \alpha x_l^{k+1} + (1 - \alpha)x_v^k$ $v_v^{k+1} = Ax_v^{k+1} - b$
Passo 4	<p>Teste da solução dual e atualização das variáveis</p> <p>Se $Z_{LR}(\lambda^{k+1}) < LS$ declare uma iteração vermelha</p> <p>Caso contrário</p> <p>Se $v_l^{k+1} v_v^{k+1} < 0$ declare uma iteração amarela</p>

	<p>Se $v_l^{k+1}v_v^{k+1} \geq 0$ declare uma iteração verde e faça</p> $LS = Z_{LR}(\lambda^{k+1})$ $\lambda_v^k = \lambda^{k+1}$ $k = k + 1$
Passo 5	Verifique os critérios de para e caso não sejam satisfeitos volte ao Passo 2

Uma interpretação para diferenciar as iterações em vermelho, amarelo e verde é indicar a qualidade das soluções obtidas em cada iteração. Neste caso, vermelho indica que não conseguimos melhorar a solução, amarelo indica que é possível encontrar uma solução melhor, e verde indica que foi obtida uma boa solução e que os parâmetros devem ser atualizados. Observe que uma das principais diferenças entre o algoritmo de volume e o algoritmo de otimização do subgradiente está no uso das soluções x_v^{k+1} , obtida como combinação linear dos pontos extremos e na atualização dos multiplicadores lagrangianos. De acordo com Barahona e Anbil (2000), a escolha dos valores de α pode ser definida como fixa inicialmente e após algumas iterações esta decresce, dependendo dos números de iterações vermelhas. Com o objetivo de aumentar a precisão primal, Barahona e Anbil (2000) sugerem ainda os seguintes cálculos para determinar os valores de α a cada iteração do algoritmo de volume. Defina um valor α_{max} como um limitante superior para os valores de α . Determine α de tal modo que:

$$\alpha_{opt} = \underset{\delta \in R}{Argmin} \|\delta(Ax_l^k - b) + (1 - \delta)(Ax_v^k - b)\|$$

Se $\alpha_{opt} < 0$, então $\alpha = \frac{\alpha_{max}}{10}$, caso contrário, $\alpha = \min\{\alpha_{opt}, \alpha_{max}\}$. Observe que α_{opt} é dado por um valor real δ que minimiza a norma do vetor $[\delta(Ax_l^k - b) + (1 - \delta)(Ax_v^k - b)]$. Mais detalhes de como se obter o valor de δ são fornecidos no Capítulo 4. Até aqui, finalizamos a breve revisão de relaxação lagrangiana. Na próxima seção é apresentada uma metaheurística baseada no comportamento de formigas em busca de alimentos.

2.4.2 Otimização baseada em colônias de formigas

O método ACO (*Ant Colony Optimization*) é baseado no comportamento das formigas, que, em busca do alimento, vão eliminando um hormônio chamado de feromônio. No início, cada formiga ou grupo de formigas realizam buscas de modo aleatório, até que um desses grupos

encontre alimento e comece a voltar ao ninho, depositando mais feromônios pela trilha, o que atrai outras formigas para este caminho. Os caminhos em que poucas formigas passam perdem o feromônio pelo processo de evaporação, deixando de ser caminhos atrativos para as outras formigas ao longo do tempo.

Pode-se resumir o método de otimização baseado em colônias de formigas (ACO) como um método de busca probabilístico, em que a probabilidade de se escolher uma determinada solução pode depender de uma estratégia de busca e de informações das soluções já obtidas pela estratégia. O método foi proposto por Colomi *et al.* (1991). Neste trabalho, os autores representam o problema do caixeiro viajante por um grafo composto por duas informações. A primeira está relacionada à distância entre dois vértices do grafo. Este dado é denominado, na literatura, por visibilidade, pois indica a distância entre dois vértices do grafo. A segunda informação armazenada pelo algoritmo é denominada por feromônio e é modificada cada vez que as formigas percorrem arcos do grafo. O algoritmo dado a seguir é baseado em Colomi *et al.* (1991) e foi construído para resolver um problema do caixeiro viajante. As adaptações da heurística para os problemas deste trabalho são dadas em um capítulo mais adiante.

Para entender melhor o algoritmo, considere a Figura 2-3 que representa um caminho em que as formigas saem do ninho (lado direito) e caminham até a comida (lado esquerdo). Para realizar este trajeto, as formigas necessitam escolher uma das duas pontes que ligam o ninho a comida. Neste caso, vamos supor que a ponte de cima tem uma distância menor que a ponte de baixo. Vamos supor que duas formigas saem do ninho ao mesmo tempo para obter comida e encontram a ponte livre de feromônios e precisam escolher uma das duas pontes para percorrer.

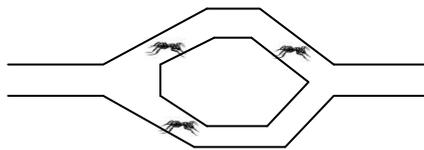


Figura 2-3: Exemplo do caminho de duas pontes (adaptado de Dorigo et al (1996))

Considere que a primeira formiga escolha a ponte de cima (ou a mais curta) e a segunda formiga decide percorrer a ponte de baixo (ou a mais longa). Devido a distância, a formiga que escolheu a ponte mais curta voltará para o ninho marcando o percurso com uma quantidade de feromônio. Assim que a primeira formiga chega ao ninho, duas outras formigas saem em busca da comida. Neste momento, estas duas formigas são influenciadas pelo feromônio deixado pelo caminho e isso influencia na decisão da escolha do caminho a ser percorrido, uma vez que o

caminho que possui o feromônio tem garantia de ter obtido comida. Seguindo esta idéia, espera-se que ao longo do tempo, o menor caminho tenha uma quantidade de feromônio muito maior que o outro caminho, fazendo com que quase todas as formigas escolham o caminho mais curto, uma vez que a quantidade de feromônio existente em cada caminho influencia diretamente na decisão do caminho tomado pelas formigas.

Assim, vamos agora à analogia com o problema do caixeiro viajante. Observe que, no caso anterior, temos apenas duas pontes para o percurso das formigas. Podemos interpretar cada ponte como uma possível solução para o problema do caixeiro viajante, em que a distância entre o ninho e a comida seria a distância do percurso que esta ponte representa. Assim, cada formiga percorre todas as cidades criando um roteiro e retorna ao ninho com a distância percorrida. Após certo tempo, o percurso com a menor distância terá uma quantidade maior de feromônios e as formigas começarão a utilizar as arestas com a maior quantidade de feromônios. Para as arestas que não são utilizadas, ou que com o tempo vão deixando de ser utilizadas, a quantidade de feromônio vai diminuindo com o passar do tempo (iterações).

Denotamos a visibilidade por η_{ij} , da aresta (i,j) , que pode ser considerada como um valor atribuído a qualidade da solução ou do percurso percorrido pela formiga até um determinado instante. Como enumerar todas as possíveis soluções do caixeiro viajante seria inviável, Colomi *et al.* (1991) considera, neste caso, a visibilidade como a distância entre duas cidades (neste caso, da cidade i até a cidade j). Geralmente, a visibilidade é diretamente relacionada com o valor da função objetivo ou parte dele, por exemplo, se o problema for de maximizar, pode-se usar a função objetivo como visibilidade, pois quanto maior for o valor da função objetivo, maior será a probabilidade desta solução ser escolhida.

A segunda informação armazenada pelo algoritmo é denominada por feromônio e é modificada cada vez que as formigas percorrem o grafo. Assim como a visibilidade, a quantidade de feromônio τ_{ij} na aresta (i,j) fornece uma informação sobre os arcos que ligam os vértices i e j . Ou seja, o feromônio indica quais os subcaminhos percorridos pelas formigas. O método, a visibilidade e o feromônio podem ser mais bem compreendidos na heurística de resolução que é apresentada mais adiante. De acordo com Dorigo e Gambardella (1997), pode-se resumir o método da seguinte forma:

1	Inicialize os dados de entrada e variáveis
2	Faça (até que o critério de parada seja satisfeito)
2.1	Faça (Cada iteração deste <i>looping</i> é denominado de formiga) Cada formiga aplica a regra de construção de solução.
2.2	Aplicação de regra de atualização de feromônio
3	Fim do programa.

Dado o resumo do método, o próximo passo é identificar os critérios de construção da solução (Passo 2.1) e a atualização do feromônio (Passo 2.2). A solução é gerada probabilisticamente, considerando para o cálculo da probabilidade de escolher o arco (i, j) com a seguinte equação:

$$P_{ij} = \frac{\eta_{ij}^{\alpha} \tau_{ij}^{\beta}}{\sum_{ij} \eta_{ij}^{\alpha} \tau_{ij}^{\beta}}$$

Em que, α e β são valores reais e P_{ij} é a probabilidade de escolher o arco (i, j) . A construção da solução é feita de modo iterativo, por exemplo, a formiga inicia no nó 1 e sorteia-se o nó j que será visitado após o nó 1, por meio da probabilidade descrita acima. Selecionado o nó j , sorteia-se o próximo nó, até que todo o caminho do caixeiro viajante seja determinado. Observe que no cálculo das probabilidades são utilizadas as informações do feromônio τ_{ij} . A variável do feromônio é utilizada para indicar o melhor “caminho” para a construção de uma solução. Usualmente, todos os τ_{ij} recebem um mesmo valor e a cada iteração o valor do feromônio é atualizado pela seguinte equação:

$$\tau_{ij} = (1 - \rho)\Delta_{ij} + \rho\tau_{ij}$$

em que ρ é um valor real entre zero e um, utilizado para “controlar” a convergência do método e Δ_{ij} é uma variável binária que indica qual arco está na melhor solução encontrada até o momento. Quanto mais próximo ρ for de zero, mais rápido o método converge para uma solução, pois os arcos não visitados terão seu feromônio reduzidos rapidamente para zero. Por outro lado, se ρ for próximo de um, o método pode avaliar mais soluções e obter uma solução melhor, porém o método terá uma convergência mais lenta.

O modelo de resolução adotado para a resolução dos problemas deste trabalho é o mesmo apresentado por Colomi *et al.* (1991), Dorigo *et al.* (1996) e Dorigo e Gambardella (1997). O feromônio tende a ser mais forte nos caminhos escolhidos e no restante vai ficando mais fraco com o passar do tempo. Esse método foi escolhido no presente estudo por ser simples e de fácil

compreensão e implementação. Existem variações do método de colônia de formigas e em Dorigo *et al.*(1996) é feita uma comparação entre os métodos de busca e atualização dos feromônios e os tipos de formigas existentes.

Em Dorigo *et al.* (1996), o depósito de feromônios é realizado apenas na melhor solução encontrada por um conjunto de formigas. Em Bullnheimer *et al.* (1997) o feromônio é atualizado em todas as soluções encontradas e que pertençam a um *ranking* pré-estabelecido. Blum e Dorigo (2004) apresentam uma variação da atualização do feromônio, em que é utilizada a qualidade da solução encontrada para tal atualização, e não apenas a informação de qual estratégia obteve a melhor solução até o momento.

Em Colomi *et al.*(1991), o algoritmo apresentado obtém bons resultados para o problema estudado pelos autores. Porém, Stovba (2005) cita que o algoritmo pode apresentar problemas de convergência devido a alguns fatos, como, por exemplo, a busca da solução ser probabilística, podendo a solução ótima nunca ser “sorteada”. Dependendo da atualização do feromônio utilizada, as informações fornecidas entre as soluções boas e ruins podem não ser significativas na construção da solução. Dependendo do número de informações “guardadas” pelo feromônio, o método pode não ter uma convergência em uma solução.

Para tentar solucionar os problemas citados por Stovba (2005), podem ser consideradas algumas variações do método de colônia de formigas. Por exemplo, em Dorigo *et al.*(1996) é apresentada uma variação em que apenas são depositados os feromônios nos melhores caminhos (soluções) encontrados (denominado de *Elite Ants*). Bullnheimer *et al.* (1997) faz um *ranking* com as soluções encontradas pelas formigas e permite que apenas um subconjunto dessas soluções atualizem o feromônio. Stutzle e Hoos (2000) propõem a limitação dos valores do feromônio depositado pelos caminhos do grafo.

Além das variações em relação à atualização dos feromônios, podem ser encontradas também variações em relação às formigas e/ou tipos de formigas (modos de construção da solução e/ou métodos de construção). Por exemplo, em Ellabib *et al.* (2007) são apresentados seis algoritmos de colônias trabalhando em paralelo para obter solução para um problema de roteamento de veículos com janela de tempo. Neste caso, é dito que os autores trataram o problema com múltiplas colônias e, além disso, as colônias trocavam informações sobre as soluções obtidas. Reimann (2007) apresenta um estudo sobre o desempenho do algoritmo de otimização baseado em colônias de formigas aplicado em um problema do caixeiro viajante simétrico. Neste estudo, o autor implementa o método de busca com informações obtidas com uma relaxação do problema do

caixeiro viajante. Em Brugger *et al.* (2004) os autores apresentam uma aplicação do método de otimização baseado em colônias de formigas para um problema de empacotamento unidimensional. Em Tavares Neto e Godinho Filho (2009, 2011a, 2011b e 2011c) encontra-se uma revisão dos principais métodos de colônia de formiga e algumas de suas aplicações.

Com isso, fechamos a revisão bibliográfica com todo o conteúdo básico que será utilizado para a realização deste trabalho. Em outras palavras, neste capítulo foram revisados resumidamente os modelos de dimensionamento de lotes e modelo de corte/empacotamento. Além disso, foram revisados dois métodos de solução que serão utilizados nos próximos capítulos para a resolução de alguns problemas deste trabalho.

3 Modelagem do problema de dimensionamento de lotes com custos de transporte utilizando unitizadores de carga

Neste capítulo, são estudados problemas de dimensionamento de lotes com decisões de distribuição de forma integrada, isto é, considerando custos de transporte e utilizando unitizadores de carga. A modelagem destes problemas é importante, pois existe um *trade-off* entre produzir em grande escala para economizar custos de preparo de máquina e, por outro lado, poder gastar muito com custos de transporte. Conforme Norden e Velde (2005), os custos de transporte contribuem para aumentar o número de preparações e reduzir estoques. Molina *et al.* (2009) propuseram uma extensão do modelo proposto por tais autores, considerando atraso na entrega da demanda, tempo de preparação e restrições de capacidade. A seguir, a partir do modelo apresentado em Molina *et al.* (2009) (Modelo 2.2 do Capítulo 2), são propostas algumas extensões com o objetivo de considerar situações mais gerais que ocorrem com frequência na prática.

3.1 Modelo com itens diferentes

A primeira extensão dos modelos de Norden e Velde (2005) e Molina *et al.* (2009) consiste em considerar que os itens a serem produzidos possuem tamanhos diferentes e não podem ser misturados em um mesmo palete. Ou seja, cada palete pode ser carregado com um único tipo de item, o que é usual na prática de produtores, especialmente em ambientes de manufatura. Para isso, é necessário definir a capacidade do palete para cada tipo de item. Este dado pode ser obtido *a priori*, resolvendo-se o chamado Problema de Carregamento de Paletes do Produtor (e.g., Dowsland, 1987, Bhattacharya *et al.*, 1998, Alvarez-Valdes *et al.*, 2005, Oliveira e Morabito, 2006, Morabito e Pureza, 2009, Birgin *et al.*, 2010) como um pré-processamento para cada tipo de item. Este problema de carregamento considera que os itens são arranjados em camadas horizontais sobre a superfície do palete, o que também é usual na prática dos produtores para facilitar o arranjo e a estabilidade da carga.

A Figura 3-1 item (a) representa uma solução com diferentes tipos de itens (de tamanhos diferentes) sendo carregados por um mesmo palete. Esta solução não é mais possível na extensão do modelo de Molina *et al.* (2009), sendo apenas possíveis soluções com um único tipo de item, como mostra a Figura 3-1 item (b).



Figura 3-1 a) Itens misturados

b) um tipo de item por palete

Como em Norden e Velde (2005) e Molina *et al.* (2009), a capacidade do palete para cada tipo i de item (P_i) é obtida *a priori*, resolvendo o chamado Problema de Carregamento de Paletes do Produtor, como um pré-processamento para cada tipo de item. Os parâmetros e as variáveis do modelo com itens diferentes são descritos a seguir.

Parâmetros do modelo:

- $i = 1, 2, \dots, n$ Número de itens distintos;
- $t = 1, 2, \dots, T$ Número de períodos no horizonte de planejamento;
- s_{it} Custo de preparação para a produção do item i no período t ;
- h_{it}^+ Custo unitário de estocagem do item i no final do período t ;
- h_{it}^- Penalidade por atraso de uma unidade do item i no final do período t ;
- d_{it} Demanda do item i no período t ;
- b_i Tempo necessário para a produção do item do tipo i ;
- q_i Tempo de preparação para a produção do item i ;
- Cap_t Capacidade de produção no período t ;
- M Um número positivo suficientemente grande;
- P_i Número de itens do tipo i que podem ser arranjados em um mesmo palete;
- c_0 Custo fixo mensal do contrato;
- c_1 Custo unitário dos primeiros R paletes utilizados;
- c_2 Custo unitário dos demais paletes ($c_2 > c_1$);
- R Número de paletes contratado com custo mais barato c_1 .

Com relação aos modelos apresentados por Norden e Velde (2005) e Molina *et al.* (2009), o pré-processamento é feito uma única vez, obtendo assim um limitante P para o número máximo de itens que são carregados em um palete. Como neste modelo é considerado que os itens não podem

ser misturados, é necessário fazer um pré-processamento do carregamento de paletes para cada tipo de item, e assim são obtidos os valores P_i para cada item i .

Variáveis de decisão:

X_{it} Quantidade a ser produzida do item i no período t ;

I_{it}^+ Quantidade estocada do item i no período t ;

I_{it}^- Quantidade atrasada do item i no período t ;

Y_{it} Variável binária que indica se há a produção do item i no período t ($Y_{it}=1$ se $X_{it} > 0$; $Y_{it}=0$, caso contrário);

A_{it} Número de paletes transportados contendo o item i no período t com custo unitário c_1 ;

B_{it} Número de paletes transportados contendo o item i no período t com custo unitário c_2 .

Outra diferença entre os dois modelos é a definição das variáveis de transporte A_{it} e B_{it} , que agora contém informações de quais itens estão sendo carregados pelos paletes mais baratos e quais estão sendo carregados pelos paletes mais caros. No Modelo 2.2, as variáveis de decisão fornecem apenas o número de paletes transportado.

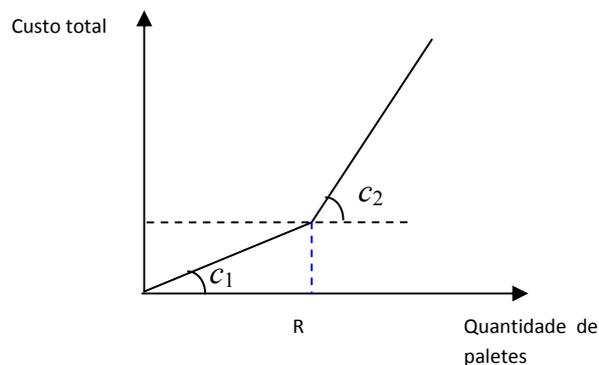


Figura 3-2: Custo convexo de transporte

A Figura 3-2 ilustra que os custos de transporte são lineares por partes e convexos em relação ao número de paletes utilizados. Observe que, a partir da quantidade R , o custo unitário de transporte muda de c_1 para c_2 , $c_2 > c_1$. O primeiro modelo estendido proposto neste trabalho é definido por:

Modelo 3.1: Itens diferentes em paletes diferentes

$$z = \min \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (h_{it}^+ I_{it}^+ + h_{it}^- I_{it}^- + s_{it} Y_{it}) + \sum_{t=1}^T \left(c_0 + c_1 \sum_{i=1}^n A_{it} + c_2 \sum_{i=1}^n B_{it} \right) \quad (3.1)$$

$$\text{s.a. } I_{i,t-1}^+ - I_{i,t-1}^- + X_{it} - I_{i,t}^+ + I_{i,t}^- = d_{it} \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T; \quad (3.2)$$

$$X_{it} - M Y_{it} \leq 0 \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T; \quad (3.3)$$

$$\sum_{i=1}^n (b_i X_{it} + q_i Y_{it}) \leq \text{Cap}_t \quad t = 1, \dots, T; \quad (3.4)$$

$$B_{it} + A_{it} \geq \frac{X_{it}}{P_i} \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T; \quad (3.5)$$

$$0 \leq \sum_{i=1}^n A_{it} \leq R \quad t = 1, \dots, T; \quad (3.6)$$

$$I_{i0}^+ = I_{i0}^- = I_{iT}^+ = I_{iT}^- = 0 \quad i = 1, \dots, n; \quad (3.7)$$

$$X_{it} \geq 0, I_{it}^+ \geq 0, I_{it}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T; \quad (3.8)$$

$$A_{it}, B_{it} \in Z^+, Y_{it} \in \{0,1\} \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T. \quad (3.9)$$

As diferenças entre o Modelo 3.1 e o modelo apresentado em Molina *et al.*(2009) (Modelo 2.2) estão na definição das variáveis A_{it} e B_{it} e nas expressões (3.1), (3.5), (3.6) e (3.9). A função objetivo (3.1) minimiza a soma dos custos de estoque, de atraso, de preparação e de transporte. As restrições (3.2) são chamadas de restrição de balanceamento de produção e estoque e representam a seguinte condição: o estoque ou o atraso do mês anterior mais a produção do período atual tem que ser igual a demanda mais o estoque ou menos o atraso. As restrições (3.3) asseguram que exista produção apenas quando o custo e o tempo de preparação forem considerados. As restrições (3.4) são restrições de capacidade de produção. Nas restrições (3.5), é assegurado que um número suficiente de paletes para o transporte de cada tipo de item seja alocado. As restrições (3.6) limitam em R a utilização dos paletes com custo mais baixo. Em (3.7), é imposto que as variáveis de estoques e de atrasos iniciais e finais dos itens sejam nulas. Desta maneira, considera-se que os níveis iniciais de estoque e falta são nulos, e também que no final do horizonte de planejamento, eles deverão ser nulos (isto é, só pode haver estoques e atrasos dentro do horizonte de planejamento). As restrições (3.8) garantem a não negatividade das variáveis de produção, de estoque e de atraso. Finalmente, em (3.9), são definidos os domínios das variáveis binárias e

inteiras. Para este modelo, M é fixado como a soma das demandas de todos os itens em todo o horizonte de planejamento, $M = \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T d_{it}$.

Para ter uma noção da ordem de grandeza das dimensões do modelo apresentado, facilmente se verifica que o modelo possui $(3nT)$ variáveis reais, $(2nT)$ variáveis inteiras e (nT) variáveis binárias. Além disso, o modelo possui $T(3n+2) + 4n$ restrições. Assim, para um exemplo com 12 períodos e 20 tipos de itens, o modelo possui 720 variáveis reais, 480 variáveis inteiras, 240 variáveis binárias e 824 restrições.

Exemplo ilustrativo:

A seguir, apresentamos um exemplo para ilustrar a importância da resolução do problema integrado de dimensionamento de lotes com custos de transporte. Considere os seguintes valores para um problema com $n = 5$ itens e $T = 5$ períodos. O custo de estoque por item e por período é igual a 3 ($h_{it}^+ = 3$), o custo de atraso por item e por período é igual a 30 ($h_{it}^- = 3$), e o custo de preparação da máquina para a produção dos itens é igual a 100 ($s_{it} = 3$). O tempo de produção de cada item é igual a 1 ($b_i = 1$). O tempo de preparo da máquina para a produção dos itens é igual a $q = (17, 17, 12, 10, 17)$. A capacidade em cada período é igual a 316 ($Cap_t = 316$). A capacidade de carregamento do palete para cada item é de $P = (56, 101, 87, 124, 89)$. O custo dos paletes mais barato é de 50 ($c_1 = 50$) e os paletes mais caros é de 200 ($c_2 = 200$), sendo 3 o número máximo de paletes mais baratos que podem ser usados em cada período $R = 3$. A demanda dos itens é dada pela matriz a seguir, sendo as linhas os itens e as colunas os períodos.

$$d = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 8 & 13 & 11 \\ 58 & 94 & 79 & 108 & 64 \\ 39 & 46 & 85 & 33 & 32 \\ 61 & 75 & 73 & 51 & 47 \\ 33 & 62 & 41 & 50 & 34 \end{pmatrix}.$$

Ao resolver este problema desconsiderando o transporte dos itens, ou seja, primeiro resolvendo-se o problema de dimensionamento de lotes, independentemente das decisões de transporte, e depois, com a solução do problema de dimensionamento de lotes, determinando-se a quantidade de caminhões e os custos com o transporte, obtemos uma solução com custo de produção igual a 2793. Para o transporte das quantidades produzidas são necessários 5 paletes no primeiro período, 4 paletes no segundo e terceiro períodos e mais 5 paletes no quarto e quinto períodos, o que resulta um custo de transporte de 2350. Com isso, o custo total de produção e transporte é de 5143.

Resolvendo-se agora o problema de forma integrada, utilizando o Modelo 3.1 e o pacote de otimização AMPL/CPLEX, obtemos uma solução ótima com custo total de 4907, com custo de produção igual a 3157 e custo de transporte igual a 1750. Com este pequeno exemplo, podemos perceber que resolver os problemas de produção e transporte separadamente e seqüencialmente, como geralmente é feito na prática, pode não fornecer uma boa solução para o problema integrado.

3.2 Modelo considerando o transporte dos paletes em caminhões iguais

A segunda extensão do problema de dimensionamento de lotes com custos de transporte proposta neste trabalho considera que os itens a serem produzidos possuem tamanhos diferentes e não podem ser misturados em um mesmo palete (como no Modelo 3.1), e, além disso, após alocar os itens nos paletes, estes últimos são carregados em caminhões de mesmo tamanho (ver Figura 3-3).



Figura 3-3: Contêiner carregado com paletes

Os custos de transporte não são mais diretamente associados ao número de paletes utilizados, e sim ao número de caminhões necessários para fazer o transporte dos paletes. Além do problema de empacotamento de itens (de tamanhos iguais) no palete (um problema para cada tamanho de item), tem-se o problema de empacotamento de paletes (de tamanhos iguais) no caminhão. Ambos os problemas de empacotamento podem ser considerados em um pré-

processamento, resolvendo-se Problemas de Carregamento de Paletes do Produtor e admitindo-se que os paletes são arranjados em camadas horizontais dentro da carroceria do caminhão, o que também é usual na prática (Figura 3-3). Com esse pré-processamento, é calculado o valor do número máximo de paletes que pode ser transportado em um caminhão. Assim, além da quantidade de itens de tipo i que é carregada em cada palete (P_i), agora também é necessário pré-computar a quantidade de paletes, admitidos do mesmo tamanho (comprimento e largura) independente do item, carregados no caminhão (em geral, utiliza-se no máximo duas camadas de paletes em cada caminhão, devido à limitação de altura do caminhão).

Parâmetros adicionais do modelo:

- P' Número máximo de paletes que pode ser transportado em um caminhão;
- c_1 Custo unitário dos primeiros R caminhões utilizados;
- c_2 Custo unitário dos demais caminhões;
- R' Número contratado de caminhões com custo mais barato c_1 .

Variáveis de decisão adicionais:

- A_t Número de caminhões utilizados no período t com custo unitário c_1 ;
- B_t Número de caminhões utilizados no período t com custo unitário c_2 ;
- Z_{it} Número de paletes necessários para transportar os itens do tipo i produzidos no período t .

O segundo modelo estendido proposto neste trabalho é dado por:

Modelo 3.2: Transporte dos paletes de tamanhos iguais nos caminhões

$$z = \min \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (h_{it}^+ I_{it}^+ + h_{it}^- I_{it}^- + s_{it} Y_{it}) + \sum_{t=1}^T (c_0 + c_1 A_t + c_2 B_t) \quad (3.10)$$

s.a.

$$(3.2), (3.3), (3.4), (3.7), (3.8)$$

$$B_t + A_t \geq \frac{1}{P'} \sum_{i=1}^n Z_{it} \quad t = 1, \dots, T \quad (3.11)$$

$$Z_{it} \geq \frac{X_{it}}{P_i} \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T \quad (3.12)$$

$$0 \leq A_t \leq R' \quad t = 1, \dots, T \quad (3.13)$$

$$A_t, B_t, Z_{it} \in N \quad Y_{it} \in \{0,1\} \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T \quad (3.14)$$

As restrições (2.2), (2.3), (2.4), (2.7) e (2.8) são relativas ao problema de dimensionamento de lotes e são as mesmas do Modelo 3.1. As restrições (3.11) determinam o número de caminhões necessários para transportar os paletes pelo custo mais barato e pelo custo mais caro, e as restrições (3.12) referem-se ao número de paletes necessários para o transporte de cada tipo de item em cada período. A função objetivo (3.10) e as restrições (3.13) e (3.14) foram simplesmente adaptadas para o problema em questão. As variáveis de transporte não contêm informações de quais itens estão sendo carregados por cada caminhão, mas esta informação não é relevante, dado que sevesta considerando os caminhões de tamanhos iguais, que os paletes têm tamanhos iguais, e os itens têm o mesmo destino (i.e., o depósito).

O Modelo 3.2 possui $2T(n+1)$ variáveis inteiras, e o restante das variáveis se mantém com o mesmo número do Modelo 3.1. Além disso, o Modelo 3.2 tem $T(3nT+3) + 4n$ restrições, a mais do que o Modelo 3.1. Por exemplo, para um problema com 20 tipos de itens e 12 períodos, o modelo tem 720 variáveis reais, 264 variáveis inteiras (216 a menos que o Modelo 3.1, considerando estes mesmos números de itens e períodos), 240 variáveis binárias e 836 restrições.

3.3 Modelo considerando o transporte dos paletes em caminhões diferentes

A terceira extensão proposta neste trabalho do modelo de dimensionamento de lotes com custos de transporte considera, além das extensões dos modelos 3.1 e 3.2, a existência de vários tipos de caminhões com capacidades e custos diferentes, o que ocorre na prática em situações de frota heterogênea. Similarmente aos casos anteriores, o problema de empacotamento relativo ao carregamento de paletes (de tamanhos iguais) em cada caminhão pode ser resolvido em um pré-processamento, por meio da solução de Problemas de Carregamento de Paletes do Produtor (um problema para cada tipo de caminhão). Desse modo, neste modelo, existem dois dados que serão computados *a priori*: o primeiro é a capacidade de carregamento dos paletes para cada tipo de item (P_i), assim como foi feito no Modelo 3.1 e Modelo 3.2, e o segundo é a capacidade de cada caminhão considerando os paletes. Diferente do Modelo 3.2, agora é necessário obter a capacidade para cada tipo k de caminhão (P'_k), lembrando que os paletes são considerados todos do mesmo tamanho.

No modelo a seguir, o objetivo é decidir quantos caminhões de cada tipo utilizar, o que o diferencia dos modelos anteriores, em que se determina apenas uma quantidade, seja de paletes ou de caminhões, sem a necessidade de se escolher entre diferentes opções de paletes ou caminhões com diferentes custos. Portanto, a decisão agora é relativa ao custo de cada caminhão. Caminhões

menores têm custos unitários menores, mas têm capacidade restrita a um menor número de paletes. Considere os seguintes dados e variáveis adicionais aos dados dos modelos 3.1 e 3.2:

Parâmetros adicionais do modelo:

- $K = 1, \dots, K$ Número de caminhões distintos;
- P'_k Número máximo de paletes que pode ser transportados no caminhão do tipo k (dado obtido resolvendo-se um Problema de Carregamento de Paletes, em que os itens são os paletes, e o palete é caminhão do tipo k);
- c_{1k} Custo unitário dos primeiros R caminhões do tipo k utilizados;
- c_{2k} Custo unitário dos demais caminhões do tipo k ($C_{2k} > C_{1k}$);
- R'_k Número contratado de caminhões do tipo k com custo mais barato c_{1k} .

Variáveis de decisão adicionais:

- A_{kt} Número de caminhões do tipo k utilizados no período t com custo unitário c_{1k} ;
- B_{kt} Número de caminhões do tipo k utilizados no período t com custo unitário c_{2k} ;
- Z'_{kt} Número de caminhões do tipo k para o transporte de paletes no período t .

O terceiro modelo estendido proposto neste trabalho é dado por:

Modelo 3.3: Transporte dos paletes de tamanhos iguais em caminhões de tamanhos diferentes

$$z = \min \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (h_{it}^+ I_{it}^+ + h_{it}^- I_{it}^- + s_{it} Y_{it}) + \sum_{t=1}^T \left(c_0 + \sum_{k=1}^K (c_{1k} A_{kt} + c_{2k} B_{kt}) \right) \quad (3.15)$$

s.a.

$$(3.2), (3.3), (3.4), (3.7), (3.8), (3.12)$$

$$A_{kt} + B_{kt} \geq \frac{Z'_{kt}}{P'_k} \quad t = 1, \dots, T; k = 1, \dots, K \quad (3.16)$$

$$\sum_{k=1}^K Z'_{kt} = \sum_{i=1}^n Z_{it} \quad t = 1, \dots, T \quad (3.17)$$

$$0 \leq A_{kt} \leq R'_k \quad t = 1, \dots, T; k = 1, \dots, K \quad (3.18)$$

$$A_{kt}, B_{kt}, Z_{it}, Z'_{kt} \in \mathbb{N}, Y_{it} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T; k = 1, \dots, K \quad (3.19)$$

Novamente as restrições (2.2), (2.3), (2.4), (2.7), (2.8) são referentes ao problema de dimensionamento de lotes e se mantêm iguais às restrições do Modelo 3.1. A restrição (3.12) é referente ao cálculo do número de paletes necessários para o transporte da produção e se mantêm

igual ao que foi descrito no Modelo 3.2, por causa da introdução das restrições (3.17). A função objetivo (3.15) foi modificada em relação à (3.1) para retratar os novos custos de transporte. A restrição (3.16) calcula o número de caminhões necessário para o transporte dos paletes no período t . Na restrição (3.17), há duas variáveis (Z'_{kt} e Z_{it}), a primeira variável contabiliza o número de caminhões necessários para transportar a produção dos itens e a segunda, o número de paletes transportados pelos caminhões. A restrição (3.17) garante que o número de paletes transportado pelos caminhões seja igual ao número de paletes necessário para transportar a produção de cada período. Assim como no modelo anterior, as variáveis de transporte não fornecem a informação de qual item está sendo carregado por qual tipo de caminhão, mas esta informação não é relevante, dado que se está considerando que os paletes têm tamanhos iguais e os itens têm o mesmo destino (i.e., o depósito). As restrições (3.18) limitam a utilização dos caminhões do tipo k com custo mais baixo a R'_k .

O Modelo 3.3 possui $(nT+3nK)$ variáveis inteiras (naturais) e o mesmo número de variáveis reais e binárias dos outros modelos. Em relação ao número de restrições, o Modelo 3.3 possui $(3nT+2T+4n+2KT)$ restrições. Por exemplo, para um problema com 12 períodos, 20 tipos de itens e 2 tipos de caminhões, o modelo tem 720 variáveis reais, 312 variáveis inteiras, 240 variáveis binárias e 872 restrições.

O Modelo 3.3 pode ser particularizado para o caso em que se tem apenas um tipo de custo contratual (c_{lk}) para cada tipo de caminhão k . Neste caso, desconsideram-se as variáveis B_{kt} , e as decisões envolvem apenas a escolha dos caminhões de cada tipo, que, por sua vez, estão disponíveis em quantidades limitadas (R_k). O problema pode se tornar inviável caso o número total de caminhões não seja suficiente para o transporte de toda a produção. Esta modificação pode ser vista como uma particularização do Modelo 3.3 em que o custo c_{2k} é artificialmente definido como um custo suficientemente grande. Para os testes computacionais apresentados na próxima seção, foi utilizado o Modelo 3.3 modificado.

3.4 Testes computacionais – Modelo 3.1, Modelo 3.2 e Modelo 3.3

Nesta seção, inicialmente é descrita a maneira como os dados dos experimentos foram gerados e, posteriormente, apresentam-se alguns resultados computacionais obtidos a partir da resolução dos modelos pelo método *branch-and-cut* do *software* de otimização CPLEX, versão 9.0. Para isso, utiliza-se a linguagem de modelagem AMPL, versão 9.0. É importante ressaltar que, exceto para tempo de resolução, os demais parâmetros de resolução do CPLEX são mantidos pelo

default. Os testes computacionais desta seção foram realizados em um microcomputador Pentium Core 2 Duo 2GHZ com 2G de memória RAM e sistema operacional Windows XP.

3.4.1 Geração dos dados

Para as classes do Modelo 3.1, são considerados os seguintes dados baseados em Norden e Velde (2005) e Molina *et al.* (2009). A Tabela 3-1 apresenta dois tipos de dados fixos, valores constantes e intervalos. No processo de geração dos dados, são considerados picos de demanda a cada cinco períodos, em que a demanda d_{it} é multiplicada por 1,5. A capacidade de produção em cada período é gerada de forma dependente dos tempos de produção e de preparação e da demanda de cada item pela seguinte fórmula:

$$Cap_t = \left\lceil \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^T (b_i d_{ik} + q_i)}{\alpha T} \right\rceil \quad t = 1, \dots, T$$

em que α é um parâmetro para controle da folga na capacidade. O número máximo de paletes baratos, ou seja, o valor R , é calculado de acordo com a fração de demanda média que é transportada com o custo c_1 . O valor de FR significa que R deve ser gerado de forma que, para uma fração FR dos períodos (por exemplo, $FR=1/4$), a demanda deve ser inferior a $\sum_{i=1}^n \frac{P_i}{n}$. Na adaptação deste valor para o Modelo 3.2, considera-se o número de paletes que pode ser transportado no caminhão (P'), ou seja, R' deve ser gerado de forma que, para uma fração $FR=1/4$

dos períodos, a demanda deve ser inferior a $R' \left\lceil \frac{\left(\frac{\sum_{i=1}^n P_i}{n}\right)}{P'} \right\rceil$. Como o Modelo 3.3 considera caminhões

de tamanhos diferentes e os caminhões menores são limitados em R' , neste caso, FR é interpretado

como a fração de períodos em que a demanda é inferior a $R' \left\lceil \frac{\left(\frac{\sum_{i=1}^n P_i}{n}\right)}{P'_n} \right\rceil$.

Tabela 3-1: Dados fixos dos modelos

s_{it}	100	Para todos os exemplares, foi considerado o custo de preparação da máquina igual a 100.
h_{it}^+	3	Para todos os exemplares, foi considerado o custo de estoque de cada unidade em cada período igual a 3.
h_{it}^-	30	Os custos de atraso por unidade da demanda não atendida em cada período é igual a dez vezes o custo de estocagem, ou seja, igual a 30.

b_i	1	Por simplicidade, o tempo de produção por unidade dos itens é igual 1.
q_i	[10,30]	Para cada item, foi escolhido aleatoriamente um valor maior que 10 e menor que 30.
ED_i	[40,700]	Para gerar a demanda dos itens, é necessário determinar um valor para ED_i , que é escolhido aleatoriamente entre os valores 40 e 700.
d_{it}	$\left[\left\lfloor \frac{ED_i}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{3ED_i}{2} \right\rfloor \right]$	Determinado o valor de ED_i , a demanda de cada item em cada período é determinada aleatoriamente, sendo no mínimo metade do valor de ED_i e no máximo três meios de ED_i .
P_i	[50,150]	A capacidade de carregamento dos paletes para cada tipo i de item é determinado aleatoriamente entre os valores de 50 a 150 unidades.
FR	$\frac{1}{4}$	A constante R é determinada de tal modo que, em um quarto dos períodos, é necessário utilizar os paletes com o custo mais alto.

Além desses dados, há quatro outros dados que definem as classes de exemplares: número de itens (n), número de períodos (T), custos de transporte (c_1 e c_2) e controle de folga na capacidade (α). Baseando-se em Norden e Velde (2005) e Molina *et al.* (2009), inicialmente foram geradas quatro classes do problema com exemplares de tamanhos moderados (classes M1, M2, M3 e M4) para testar as extensões do modelo. Foram considerados $n=20$ tipos de itens, $T=12$ períodos, os custos de transporte c_1 e c_2 iguais a (50, 200) e (150, 500) e o controle de folga na capacidade α igual a 0,85 e 1. Para cada uma dessas quatro classes, foram gerados 50 exemplares que se diferem apenas pelos dados que são gerados aleatoriamente nos intervalos predeterminados. Convém observar que estes exemplares de tamanhos moderados já representam situações realistas na prática, conforme Norden e Velde (2005) e Molina *et al.* (2009).

Em seguida, para uma melhor análise do comportamento e das limitações dos Modelos 3.1, 3.2 e 3.3, foram geradas outras 16 classes do problema com exemplares de tamanhos grandes (classes G1, G2, ..., G16), com números de itens iguais a 50 e 150, e números de períodos iguais a 20 e 50. Novamente, para cada uma destas dezesseis classes, foram geradas 50 exemplares que se diferem apenas pelos dados que são gerados aleatoriamente nos intervalos predeterminados. A Tabela 3-2 apresenta as dimensões das classes de exemplares M1-M4 e G1-G16.

Tabela 3-2: Dados variáveis do Modelo 3.1

	Item (n)	Período (T)	α	c_1	c_2
classe M1	20	12	0,85	50	200
classe M2	20	12	0,85	150	500
classe M3	20	12	1,00	50	200
classe M4	20	12	1,00	150	500
classe G1	50	20	0,85	50	200
classe G2	50	50	0,85	50	200
classe G3	150	20	0,85	50	200
classe G4	150	50	0,85	50	200
classe G5	50	20	1,00	50	200
classe G6	50	50	1,00	50	200
classe G7	150	20	1,00	50	200
classe G8	150	50	1,00	50	200
classe G9	50	20	0,85	150	500
classe G10	50	50	0,85	150	500
classe G11	150	20	0,85	150	500
classe G12	150	50	0,85	150	500
classe G13	50	20	1,00	150	500
classe G14	50	50	1,00	150	500
classe G15	150	20	1,00	150	500
classe G16	150	50	1,00	150	500

3.4.2 Resultados computacionais dos exemplares de tamanho moderado

Os resultados computacionais obtidos com o pacote AMPL/CPLEX para as classes M1-M4 são apresentados a seguir e foram analisados, considerando-se:

NC Número médio dos nós com a melhor solução;

NN Número médio de nós do CPLEX;

PC Número médio de planos de corte do CPLEX;

TC Tempo computacional médio do CPLEX (limitado em 180 segundos);

GAP Valor médio de $GAP = |LS - LI| / (e^{-10} + |LS|)$ para as 50 exemplares.

Os planos de cortes (PC) são detalhados a seguir, pois, em Molina (2007) foram feitos testes com o pacote AMPL/CPLEX em problemas de dimensionamento de lotes com custos de transporte, e o autor concluiu que a geração de planos de corte é a uma ferramenta importante para obter boas

soluções para estes problemas. Detalhes sobre esses planos de corte podem ser encontrados, por exemplo, em Wolsey (1998).

Nos resultados da Tabela 3-3, pode-se observar que, em todas as classes, o pacote de otimização utiliza o tempo máximo de resolução e, embora obtenha um *GAP* pequeno, não prova a otimalidade da solução encontrada. Nestes testes, não foi possível identificar porque a classe M4 se difere das outras na geração dos planos de corte; porém, pode ser observado que, nos exemplares desta classe, o pacote analisa um número muito maior de nós na árvore de busca do método de resolução.

Tabela 3-3: Resultados obtidos pelo AMPL/CPLEX – Modelo 3.1

	<i>NC</i>	<i>NN</i>	<i>PC</i>				<i>TC</i>	<i>GAP</i>
			Corte de Fluxo	Inteiro misto	Corte de Caminho de Fluxo	Corte de Gomory		
classe M1	72911,53	153361,59	101,16	233,49	49,71	241,47	180,01	0,01%
classe M2	42223,61	69433,24	108,24	179,55	72,86	222,02	180,01	0,01%
classe M3	42228,31	67416,59	99,00	184,10	77,37	229,14	180,01	0,01%
classe M4	139262,67	174115,24	59,14	190,78	45,78	241,84	180,01	0,01%

Tabela 3-4: Resultados obtidos pelo AMPL/CPLEX – Modelo 3.2

	<i>NC</i>	<i>NN</i>	<i>PC</i>				<i>TC</i>	<i>GAP</i>
			Corte de Fluxo	Inteiro misto	Corte de Caminho de Fluxo	Corte de Gomory		
classe M1	13330,16	40773,96	246,84	214,10	22,80	97,80	22,13	0,00%
classe M2	55804,61	119805,86	276,82	195,04	57,86	91,59	122,30	0,00%
classe M3	65563,33	133345,43	280,76	192,92	57,90	85,61	131,77	0,00%
classe M4	55157,12	138227,35	253,73	221,08	25,10	100,82	70,52	0,00%

Nos testes realizados com o Modelo 3.2, o pacote de otimização encontra a solução ótima de todos os problemas das classes M1-M4 (Tabela 3-4), diferentemente dos resultados encontrados para os problemas do Modelo 3.1 (Tabela 3-3), em que o pacote de otimização encontra uma solução viável para o problema, mas não consegue provar sua otimalidade.

O mesmo comportamento é observado nos testes do Modelo 3.3 (Tabela 3-5), porém, apenas em alguns exemplares das classes M2 e M3, o pacote não prova a otimalidade da solução no tempo estipulado de 180 segundos (3 minutos).

Pode-se concluir assim que, os Modelos 3.1, 3.2 e 3.3, que representam o problema de dimensionamento de lotes com custo de transporte para casos realistas, podem ser razoavelmente bem resolvidos pelo pacote AMPL/CPLEX em um tempo aceitável, considerando as decisões práticas.

Tabela 3-5: Resultados obtidos pelo AMPL/CPLEX – Modelo 3.3

	NC	NN	PC				TC	GAP
			Corte de Fluxo	Inteiro misto	Corte de Caminho de Fluxo	Corte de Gomory		
classe M1	8477,55	25253,31	245,02	222,80	17,04	120,31	16,08	0,00%
classe M2	67255,98	189950,45	268,51	204,12	56,65	129,29	172,16	0,01%
classe M3	72979,92	160808,96	259,61	210,88	60,65	150,02	175,75	0,01%
classe M4	19893,78	87496,65	238,71	238,35	20,76	137,59	55,97	0,00%

3.4.3 Resultados computacionais dos exemplares de tamanho grande

Na Tabela 3-6, são apresentadas as médias dos resultados obtidos para os $16 \times 50 = 800$ exemplares das classes G1-G16 para o Modelo 3.1. como observado anteriormente, o Modelo 3.1 possui $(3nT)$ variáveis reais, $(2nT)$ inteiras e (nT) variáveis binárias. Além disso, o modelo possui $T(3n+2) + 4n$ restrições. Por exemplo, na classe G16, os modelos têm 22.500 variáveis reais, 15.000 variáveis inteiras, 7.500 variáveis binárias e 23.200 restrições (enquanto que na classe M4 da Tabela 1 os modelos têm apenas 720 variáveis reais, 480 variáveis inteiras, 240 variáveis binárias e 824 restrições). Em todos os exemplares resolvidos, o pacote AMPL/CPLEX atingiu o limite de tempo antes de encontrar uma solução ótima e provar sua otimalidade.

Pode-se verificar que há um compromisso (*trade-off*) entre resolver a árvore de decisão e gerar planos de corte. Isto pode ser concluído ao se verificar que quanto maior o número de planos de corte gerados, menor é o número de nós avaliados. O pacote obtém boas soluções iniciais com a geração de planos de corte, não passando de 10% de *GAP* já na primeira solução dos exemplares em que foi obtida uma solução viável dentro do limite de tempo. Então, quanto maior o tamanho do problema (representado pelo número de itens e períodos), maior a dificuldade em obter boas soluções (veja coluna *GAP*), como era esperado. Além disso, o aumento nos custos de transporte também dificulta bastante a resolução do problema, provavelmente devido a um *trade-off* maior entre os custos de preparação e transporte.

Tabela 3-6: Resultados obtidos pelo AMPL/CPLEX – Modelo 3.1

	NC	NV	PC				TC	GAP
			Corte de Fluxo	Inteiro misto	Corte de Caminho de Fluxo	Corte de Gomory		
classe G1	6393,00	31119,93	1396,23	1316,60	102,67	399,73	180,00	1,69%
classe G2	8013,00	8995,97	4123,37	3200,27	268,67	400,00	180,00	1,91%
classe G3	6838,67	7925,30	5081,40	3902,43	312,93	400,00	180,00	1,66%
classe G4*	642,27	3309,90	13742,00	9566,70	832,20	400,00	180,00	3,66%
classe G5	4744,00	21344,73	1381,70	956,00	352,37	392,57	180,00	3,83%
classe G6	8219,64	8925,68	3900,60	2006,83	1050,43	396,23	180,00	6,15%
classe G7**	2735,00	3546,00	4825,90	2741,03	1323,03	398,60	180,00	7,25%
classe G8	-----	5,33	13280,30	6173,67	3089,37	399,90	180,00	-----
classe G9**	4935,13	29602,20	1337,93	1204,17	144,33	399,70	180,00	2,92%
classe G10	9971,79	10846,10	3998,17	2881,00	373,23	399,97	180,00	3,47%
classe G11***	-----	9247,03	4934,50	3556,00	432,33	399,93	180,00	-----
classe G12	-----	588,77	13365,53	8731,50	1183,10	399,93	180,00	-----
classe G13	4643,33	12928,83	1361,93	947,47	347,13	391,77	180,00	4,34%
classe G14	-----	6114,20	3835,43	1893,70	1064,23	396,00	180,00	-----
classe G15	-----	2377,57	4786,40	2679,23	1318,23	398,23	180,02	-----
classe G16	-----	4,33	13121,97	5355,20	3088,73	399,83	180,03	-----

* Não foi possível encontrar uma solução factível para 9 exemplares, as quais foram retiradas para a obtenção da média

** Não foi possível encontrar uma solução factível para 2 exemplares, as quais foram retiradas para a obtenção da média

*** Não foi possível encontrar uma solução factível para 48 exemplares, as quais foram retiradas para a obtenção da média

----- Não foi possível encontrar uma solução factível para os 50 exemplares.

A Tabela 3-7 apresentada os resultados médios obtidos com o Modelo 3.2 para os respectivos 800 exemplares das classes G1-G16. O Modelo 3.2 possui $2T(n+1)$ variáveis inteiras, e o restante das variáveis se mantém com o mesmo número do Modelo 3.1. Além disso, o Modelo 3.2 tem $T(3nT+3) + 4n$ restrições. Por exemplo, na classe G16, os modelos têm 22.500 variáveis reais, 100 variáveis inteiras, 7.500 variáveis binárias e 68.550 restrições (enquanto que, na classe M4 da Tabela 2-4, os modelos têm apenas 720 variáveis reais, 24 variáveis inteiras, 240 variáveis binárias e 836 restrições). É possível observar que o pacote de otimização aplicado ao Modelo 3.2 teve menos dificuldades do que quando aplicado ao Modelo 3.1 para resolver estes exemplares. Enquanto que, nas classes G1 e G9, o pacote prova a otimalidade da solução encontrada para alguns exemplares (o tempo médio é menor nestas classes), e também que o pacote encontra pelo menos uma solução factível para todos os 800 exemplares gerados. Novamente, nota-se que, quando se tem um maior número de itens e períodos, o pacote tem mais dificuldades para resolver o problema (classes G8 e G16), como era esperado, e são gerados números maiores de planos de corte nestas classes. Outra observação nesta tabela é em relação à dificuldade maior para resolver exemplares com altos custos de transporte. Também é notado que na classe G16 a melhor solução foi

encontrada no terceiro nó da árvore de busca com *GAP* de 21%, e que foram analisados em média 14 nós em cada problema.

Tabela 3-7: Resultados obtidos pelo AMPL/CPLEX – Modelo 3.2

	<i>NC</i>	<i>NN</i>	<i>PC</i>				<i>TC</i>	<i>GAP</i>
			Corte de Fluxo	Inteiro misto	Corte de Caminho de Fluxo	Corte de Gomory		
classe G1	26870,83	57966,40	1473,97	967,13	16,57	397,83	163,40	0,17
classe G2	10026,23	27470,73	4313,47	2416,10	25,20	399,60	180,00	0,59
classe G3	7109,87	22408,60	5304,13	2935,23	46,43	395,97	180,00	0,19
classe G4	1363,93	4731,57	14282,97	7330,10	81,70	392,33	180,01	0,35
classe G5	10156,53	27190,47	1492,27	855,67	339,20	339,70	182,28	0,70
classe G6	4083,60	8239,17	4266,20	2046,83	691,57	366,73	180,00	1,41
classe G7	1395,33	2009,77	5184,37	2543,60	899,77	370,03	180,00	0,50
classe G8	16,33	30,77	14099,00	6440,13	1703,80	361,97	180,04	15,51
classe G9	35495,37	70961,57	1476,27	972,13	20,63	397,17	160,87	0,29
classe G10	11413,60	28891,60	4335,23	2423,00	37,47	398,07	180,00	1,11
classe G11	8848,83	21013,87	5317,47	2964,03	53,50	388,37	180,00	0,36
classe G12	1792,00	4193,63	14322,60	7379,10	96,03	370,10	180,01	0,63
classe G13	12219,20	24898,00	1488,03	868,23	347,40	337,90	180,00	0,92
classe G14	2940,77	5403,17	4244,20	2058,57	691,53	361,43	180,00	2,07
classe G15	1051,67	1418,87	5172,03	2570,43	919,67	363,27	180,01	0,71
classe G16	2989,76	1363,57	14097,30	6518,77	1748,07	342,37	180,03	21,01

Finalmente, a Tabela 3-8 apresenta os resultados obtidos com o Modelo 3.3 para os respectivos 800 exemplares das classes G1-G16. O Modelo 3.3 contém $(nT+3nK)$ variáveis inteiras, e o restante se mantém com o mesmo número do outros modelos. Em relação ao número de restrições, o Modelo 3.3 possui $(3nT+2T+4n+2KT)$ restrições. Por exemplo, na classe G16, os modelos têm 22.500 variáveis reais, 7.800 variáveis inteiras, 7.500 variáveis binárias e 23.400 restrições (enquanto que, na classe M4 da Tabela 3-5, os modelos têm apenas 720 variáveis reais, 312 variáveis inteiras, 240 variáveis binárias e 872 restrições). A Tabela 3-8 mostra que o pacote AMPL/CPLEX também teve dificuldades para resolver alguns exemplares do Modelo 3.3, particularmente as das classes G8 e G16 (exemplares com maior número de variáveis). Em todos os exemplares, o pacote utilizou o limite de tempo, e para nenhum exemplar foi provada a otimalidade da solução. Além disso, o número de planos de corte gerados segue a mesma tendência a cada quatro classes, de acordo com o aumento no tamanho do problema.

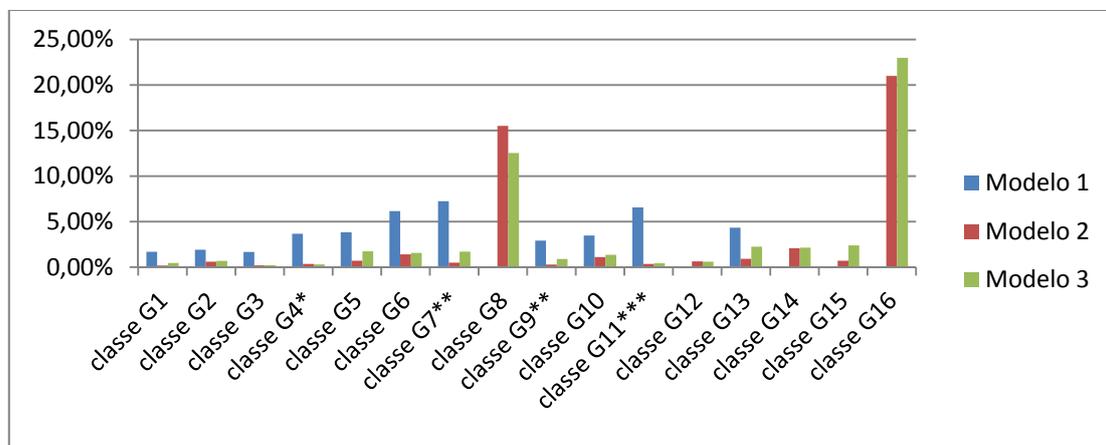
Tabela 3-8: Resultados obtidos pelo AMPLC/CPLEX – Modelo 3.3

	NC	NN	PC				TC	GAP
			Corte de Fluxo	Inteiro misto	Corte de Caminho de Fluxo	Corte de Gomory		
classe G1	30858,93	101255,80	1453,33	972,93	11,60	400,00	179,99	0,46
classe G2	16629,50	35578,37	4311,60	2350,07	16,60	400,00	180,00	0,69
classe G3	11192,70	23428,90	5286,77	2911,40	15,70	400,00	180,00	0,21
classe G4	2694,77	5675,63	14267,13	7037,70	14,97	400,00	180,02	0,30
classe G5	15813,00	30605,27	1456,70	840,70	327,13	394,93	180,00	1,73
classe G6	4380,07	11858,87	4195,77	1778,53	978,37	398,93	180,00	1,56
classe G7	1804,23	2223,40	5152,27	2446,70	1184,47	399,83	180,01	1,70
classe G8*	28,64	83,63	14220,83	5515,40	2813,23	400,00	180,03	12,53
classe G9	41159,77	101064,77	1452,53	991,63	12,03	399,37	179,99	0,89
classe G10	22075,83	36531,77	4309,47	2391,83	19,20	400,00	179,99	1,35
classe G11	11983,97	27254,80	5283,23	2956,33	18,97	400,00	180,00	0,43
classe G12	3343,47	5673,13	14267,00	7151,63	20,13	400,00	180,01	0,60
classe G13	19780,03	31341,53	1441,70	861,23	336,60	393,97	179,99	2,25
classe G14	4215,10	8909,20	4127,90	1888,27	1017,90	398,53	180,00	2,14
classe G15	1921,87	2270,37	5053,80	2560,47	1250,30	399,43	180,01	2,38
Classe G16**	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

* Não foi possível encontrar uma solução factível para 9 exemplares, as quais foram retiradas para a obtenção da média

** Não foi possível encontrar uma solução factível para 49 exemplares, as quais foram retiradas para a obtenção da média

Cabe observar que, nos Modelos 3.1, 3.2 e 3.3, foram escolhidos aleatoriamente alguns exemplares para fazer alguns testes adicionais e verificar o comportamento da resolução do problema pelo pacote de otimização sem limitação do tempo de execução. Os resultados foram similares àqueles obtidos nas tabelas anteriores, com o *GAP* menor apenas na quarta casa decimal. O gráfico a seguir apresenta um resumo dos *GAPs* obtidos para cada classe nos modelos estudados. Cabe observar que nas classes em que não há a representação do *GAP* significa que não foi possível obter a média para esta classe.

**Figura 3-4: GAPs obtidos em um estudo inicial**

3.5 Considerações do capítulo

Neste capítulo, foram apresentados três modelos matemáticos para o problema de dimensionamento de lotes com custos de transporte, considerando diferentes situações que ocorrem na prática. Os modelos são uma alternativa para resolver problemas realistas de dimensões moderadas, pois, em todos os casos, com tamanho moderado, o AMPL/CPLEX fornece soluções factíveis para os modelos em um tempo computacional razoavelmente pequeno (180 segundos) e com valor muito próximo da otimalidade (isto é, com *gaps* relativamente pequenos). Quando os problemas possuem dimensões maiores, o pacote AMPL/CPLEX tem dificuldades para obter soluções factíveis com pequenos *GAP's* de otimalidade dentro deste tempo limite, principalmente para resolver o Modelo 3.1. Porém, aumentando-se o limite de tempo para valores maiores, mas ainda aceitáveis na prática para as decisões envolvidas (1500 segundos), o CPLEX foi capaz de obter soluções factíveis com *GAP's* relativamente pequenos. Mais detalhes com este tempo limite de resolução maior pode ser encontrado no próximo capítulo.

Os modelos 3.2 e 3.3 foram resolvidos mais facilmente pelo CPLEX para as classes de exemplares analisadas, pois, além de terem os menores *GAP's*, alguns exemplares foram resolvidos provando a otimalidade da solução. Isto pode ter ocorrido devido às novas restrições dos modelos que podem gerar planos de corte mais eficientes para a resolução dos problemas.

Convém salientar que durante o desenvolvimento deste trabalho, foram realizadas visitas em duas transportadoras lotadas na cidade de São Paulo. Em uma delas, obteve-se mais informações sobre, por exemplo, como é feito o planejamento da quantidade de caminhões necessária para o transporte da carga. A previsão da quantidade de caminhões é feita por meio de um *software* em que a demanda é fornecida como um dado de entrada para o *software*, e, como dado de saída, é fornecido o número de paletes necessários para o transporte da carga. A partir do número de paletes, é feita uma previsão do número de caminhões necessários para o transporte dos itens.

Em ambas as empresas, observou-se que não existem contratos diretos com os clientes que relacionam o custo de transporte e o número de caminhões utilizados. Porém, ambas as empresas solicitam uma previsão de caminhões necessários para o transporte da carga de seus clientes, e, caso a empresa necessite de mais caminhões (além do número previsto ou do existente em sua frota), as transportadoras contratadas alugam caminhões de outras transportadoras, e as despesas são transferidas para os clientes. Um dos modelos aqui apresentados poderia ser utilizado para, por exemplo, auxiliar na análise de cenários e apoiar a decisão de se obter ou não a demanda de

determinados clientes ou formalizar um contrato relacionando o número de caminhões utilizados e o custo por caminhão.

4 Métodos heurísticos para o problema de dimensionamento de lotes com decisão de distribuição utilizando a unitização da carga

Neste capítulo, são estudadas e desenvolvidas heurísticas para resolver o problema de dimensionamento de lotes com custos de transporte representado pelo Modelo 3.1. Optou-se por aplicar as heurísticas a este modelo após observar os resultados apresentados no capítulo 3, em que tal modelo se mostrou ser mais difícil de ser resolvido pelo pacote AMPL/CPLEX. No entanto, as heurísticas também podem ser estendidas para tratar os problemas representados pelos Modelos 3.2 e 3.3. O presente capítulo apresenta três heurísticas: heurística lagrangiana com método do subgradiente, algoritmo de volume e heurística baseada em otimização de colônias de formigas.

4.1 Heurística lagrangiana

A seguir, detalha-se a heurística lagrangiana proposta para o Modelo 3.1. A principal diferença entre esta heurística e a heurística lagrangiana proposta por Molina *et al.* (2009) para o modelo 2.2 consiste na maneira de resolver o subproblema de transporte dos itens.

4.1.1 Relaxação lagrangiana

Conforme o resumo apresentado na Seção 2.4.1, a relaxação lagrangiana, em geral, é aplicada de modo que as restrições que dificultam a resolução do problema sejam “eliminadas” e penalizadas na função objetivo. No Modelo 3.1 apresentado no capítulo 3, as restrições (3.5) são as únicas restrições que integram os problemas de dimensionamento de lotes e de transporte dos paletes, isto é, acoplam as variáveis das decisões de tamanho dos lotes e quantidade de paletes. Sendo assim, sem essas restrições, é possível separar os problemas em dois subproblemas e resolvê-los mais facilmente do que se forem tratados integrados. Se apenas as restrições (3.5) forem relaxadas, um dos subproblemas resultantes será um problema de dimensionamento de lotes com restrições de capacidade, que também é de difícil resolução, por outro lado, se relaxarmos, também, as restrições (3.4), ter-se-á, em um dos subproblemas, o problema de dimensionamento de lotes sem restrição de limite de capacidade da produção. Cabe mencionar que outros modos de relaxação do problema podem ser construídos e que foi escolhido esta relaxação baseando-se nos trabalhos de Norden e Velde (2005) e Molina *et al.* (2009).

O primeiro passo da heurística é relaxar as restrições de capacidade (3.4) e de acoplamento (3.5) e penalizá-las na função objetivo. Para isso, são considerados os seguintes multiplicadores lagrangianos não negativos:

- $\mu_i^1 \geq 0$ - multiplicador lagrangiano relacionado à restrição de capacidade;

- $\mu_{it}^2 \geq 0$ - multiplicador lagrangiano relacionado à restrição de transporte dos paletes. (3.5).

Assim, a seguinte relaxação lagrangiana do Modelo 3.1 pode ser escrita.

Modelo 4.1: Relaxação Lagrangiana

$$z_{RL} = \min \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (h_{it}^+ I_{it}^+ + h_{it}^- I_{it}^- + s_{it} Y_{it}) + \sum_{t=1}^T \left(c_0 + c_1 \sum_{i=1}^n A_{it} + c_2 \sum_{i=1}^n B_{it} \right) + \sum_{t=1}^T \mu_t^1 \left(\sum_{i=1}^n (b_i X_{it} + q_i Y_{it}) - Cap_t \right) + \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \mu_{it}^2 \left(\frac{X_{it}}{P_i} - A_{it} - B_{it} \right) \quad (4.1)$$

s.a. (3.2), (3.3), (3.6), (3.7), (3.8) e (3.9)

Observe que, além da restrição de capacidade (3.4), a restrição que integra o problema de dimensionamento ao de transporte (3.5) foi “dualizada”. Assim como nos trabalhos realizados por Norden e Velde (2005) e Molina *et al.* (2009), a relaxação pode ser separada em dois subproblemas independentes, um de dimensionamento de lotes e outro de transporte dos paletes. Essa independência decorre do fato de os multiplicadores lagrangianos (alguns deles comuns aos dois subproblemas) serem fixados em cada iteração do procedimento de otimização do subgradiente, conforme será discutido adiante.

Modelo 4.2: Subproblema de Dimensionamento de Lotes

$$z_1 = \min \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \left(h_{it}^+ I_{it}^+ + h_{it}^- I_{it}^- + (s_{it} + \mu_t^1 q_i) Y_{it} + \left(\mu_t^1 b_i + \frac{\mu_{it}^2}{P_i} \right) X_{it} \right) - \sum_{t=1}^T \mu_t^1 Cap_t \quad (4.2)$$

s.a. (3.2), (3.3), (3.7), (3.8)

$$Y_{it} \in \{0,1\} \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T \quad (4.3)$$

As restrições (3.2), (3.3), (3.7) e (3.8) são referentes ao problema de dimensionamento de lotes e ao domínio das variáveis. O custo de produção da relaxação lagrangiana pode ser eliminado, fazendo uso de substituição de variáveis, e o Modelo 4.1 pode ser escrito apenas em função do custo de preparo de máquinas, de estoque e de atraso da produção. Em Molina (2007) e Norden e Velde (2005), essas substituições foram feitas para padronizar os modelos, que não consideram o custo de produção. Porém essa substituição não será realizada neste trabalho, pois essa substituição não influencia no método de resolução de programação dinâmica que será utilizado para resolver este problema. O subproblema (z_1) pode ser decomposto em n problemas de dimensionamento de lotes, um para cada item. A solução ótima para cada item pode ser facilmente obtida, utilizando-se o

algoritmo de Zangwill (1969). Cabe mencionar que, em Molina (2007), também foi utilizado o algoritmo de Zangwill (1969), e os resultados foram positivos.

Modelo 4.3: Subproblema de transporte dos itens

$$z_2 = \min \sum_{t=1}^T \left(c_0 + c_1 \sum_{i=1}^n A_{it} + c_2 \sum_{i=1}^n B_{it} \right) + \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \mu_{it}^2 (-A_{it} - B_{it}) \quad (4.4)$$

$$\text{s.a. } 0 \leq \sum_{i=1}^n A_{it} \leq R \quad t = 1, \dots, T \quad (4.5)$$

$$A_{it}, B_{it} \in \mathbb{N}^+ \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T \quad (4.6)$$

Como o custo $\sum_{t=1}^T c_0$ é constante e independe da decisão tomada, este pode ser omitido da resolução do subproblema. Por simplicidade, neste trabalho, o custo de contrato é considerado como nulo, dado que este fato não interfere no modelo e no método de resolução. Assim a função objetivo (4.4) pode ser reescrita por:

$$z_2 = \min \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n \left((c_1 - \mu_{it}^2) A_{it} + (c_2 - \mu_{it}^2) B_{it} \right) \quad (4.7)$$

A resolução de (z_2) pode ser feita por inspeção, do seguinte modo (Norden e Velde, 2005).

Passo 0	Inicialização $FS_t = R; A_{it} = 0, B_{it} = 0 \quad i = 1, \dots, n \text{ e } t = 1, \dots, T$
Passo 1	Defina um conjunto em ordem crescente como a seguir: $NC = \{(c_1 - \mu_{it}^2), i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T\} \cup \{(c_2 - \mu_{it}^2), i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T\}$
Passo 2	Escolha o primeiro elemento do conjunto (dado por algum par i e t). Se o elemento considerado vem do primeiro subconjunto Então: Se $(c_1 - \mu_{it}^2) < 0$ $A_{it} = FS_t$ $FS_t = 0$ Senão $A_{it} = 0$ Senão: Se $(c_2 - \mu_{it}^2) < 0$ $B_{it} = \infty$ Senão $B_{it} = 0$
Passo 3	Retorne os valores de A_{it} e B_{it} .

Observe que, caso existam i e t tais que $(c_2 - \mu_{it}^2) < 0$, o limitante oferecido por este procedimento de solução será inócuo ($-\infty$), e o valor da variável de transporte para os paletes com custo mais baixo fica limitado pelo valor de R . Assim, para obter um limitante melhor, tem-se que

limitar as variáveis de transporte com custo mais alto. Para melhorar a qualidade dos limitantes inferiores, Norden e Velde (2005) e Molina *et al.* (2009) propõem limitantes para as variáveis e algumas desigualdades válidas que limitam o número de paletes utilizados. Devido às extensões propostas no Modelo 3.1, no presente trabalho, algumas adaptações tiveram que ser feitas nestes limitantes e desigualdades.

- **Limitante superior para as variáveis B_{it}**

- Seja UD_i definido como o número de paletes necessários para transportar toda a demanda (i.e., de todos os períodos do horizonte de planejamento) do item i , dado por:

$$UD_i = \left\lceil \frac{\sum_{t=1}^T d_{it}}{P_i} \right\rceil$$

- Seja UC_{it} definido como o número máximo de paletes necessário no período t pelo item i , respeitando-se a restrição de capacidade máxima de produção (traduzida em paletes). Este limite é calculado a partir das restrições de capacidade (3.4):

$$UC_{it} = \left\lceil \frac{\frac{Cap_t - q_i}{b_i}}{P_i} \right\rceil \quad t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, n$$

O seguinte limitante superior pode ser estabelecido para as variáveis B_{it} :

$$B_{it} \leq \min\{UD_i, UC_{it}\} \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T \quad (4.8)$$

- **Desigualdade válida para o problema (4.6)-(4.7)**

A inequação (4.9) a seguir garante que, no mínimo, toda a demanda do item i será transportada pelos paletes caros e baratos.

$$UD_i \leq \sum_{t=1}^T (A_{it} + B_{it}) \quad i = 1, \dots, n \quad (4.9)$$

- **Problema de transporte**

Em Norden e Velde (2005) e Molina *et al.* (2009), o subproblema (z_2) foi resolvido por uma heurística de inspeção. No presente trabalho, devido à restrição de não misturar itens diferentes em um mesmo palete, não foi possível adaptar diretamente as heurísticas utilizadas nos trabalhos

anteriores. Ao invés disso, o subproblema (z_2) resulta em um Problema de Transporte, em que as “fontes” ou “centros de produção” (nós de origens) correspondem aos períodos $t = 1, 2, \dots, T$, e os “clientes” ou “mercados consumidores” (nós de destinos) correspondem aos itens $i = 1, 2, \dots, n$, com a seguinte interpretação das variáveis:

- A_{it} Fração da demanda atendida pela fonte t para o cliente i com custo $(c_1 - \mu_{it}^2)$.
- B_{it} Fração da demanda atendida pela fonte t para o cliente i com custo $(c_2 - \mu_{it}^2)$.

Para cada fonte t , há uma capacidade de oferta, sendo R para as fontes com custos de transporte baixos e $\min\{UD_t, UC_{it}\}$ para as fontes com custos de transporte altos. A Figura 4-1 ilustra este problema de transporte. Os nós do lado esquerdo da figura, são os períodos do horizonte de planejamento (variando de 1 a T) e do lado esquerdo temos os itens que devem ser produzidos nos períodos.

Para cada período $t=1, \dots, T$, existem duas fontes, a primeira associada ao custo de transporte baixo $(c_1 - \mu_{it}^2)$ e a segunda, ao custo de transporte alto $(c_2 - \mu_{it}^2)$. Cada fonte pode atender a todos os clientes $i=1, \dots, n$ (itens). Além disso, dependendo do valor de cada multiplicador lagrangiano, podem ocorrer casos em que os custos para atender a demanda de alguns itens em alguns períodos sejam negativos. Portanto, este problema de transporte pode ser visto como um caso mais geral do clássico Problema de Transporte, em que todos os custos entre fontes e clientes são não-negativos.

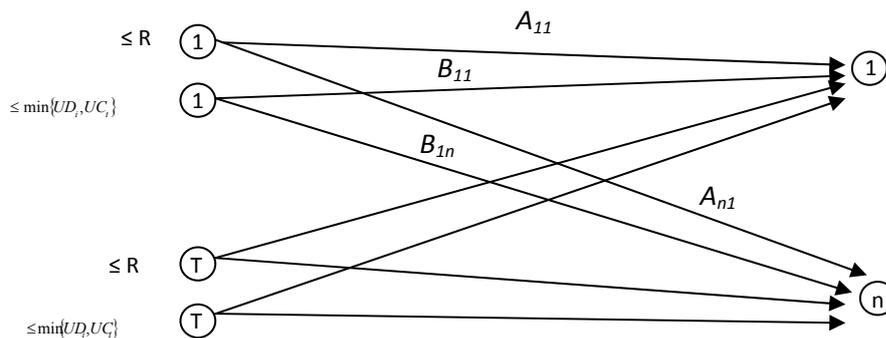


Figura 4-1: Representação do subproblema de transporte dos itens como um problema de transporte

Para resolver esse problema de transporte mais geral com possibilidade de custos negativos, a cada iteração, foi usado o pacote CPLEX 9.0. Outros métodos explorando as características específicas do problema de transporte com custos negativos, possivelmente mais eficientes do que o CPLEX 9.0, poderiam ter sido utilizados para tentar reduzir os tempos computacionais de execução. Esse é um tópico interessante para pesquisa futura que não foi investigado neste estudo.

4.1.2 Procedimento de factibilização das restrições de capacidade

Caso a solução encontrada viole as restrições de capacidade (3.4) em algum período, então é preciso transferir o excesso de produção deste período para algum período com folga de capacidade. Essa transferência pode ser resumida em quatro etapas:

- Na primeira, começa-se do último período, buscando transferir a produção de itens de períodos com capacidade violada para períodos anteriores. Essa transferência é feita até o segundo período de produção. Assim, apenas o primeiro período poderá violar a restrição de capacidade.
- A segunda etapa também consiste em transferir a produção de itens de períodos em que a restrição de capacidade não é satisfeita, mas, neste caso, começa-se do primeiro período e caminha-se em direção ao penúltimo período.
- Essas duas etapas são repetidas, cada uma, mais uma vez, resultando na terceira e na quarta etapas deste procedimento de transferência, e então é verificado se as restrições de capacidade são satisfeitas.

Os critérios para a transferência são baseados em Molina *et al.* (2009) e consistem basicamente em: dado um período com excesso de produção, deve-se transferir uma determinada quantidade de algum item para algum outro período. A quantidade a ser transferida é calculada obtendo, para aquele período, o mínimo entre o excesso de produção e a quantidade produzida do item. Este cálculo é feito para todos os itens e todos os períodos que permitem que a transferência seja realizada. A seleção do item e do período em que será transferida a produção é obtida por meio da minimização de uma função que considera os custos da transferência e a redução do excesso de produção. À medida que uma solução viável não é encontrada, um fator passa a dar maior importância para a redução do excesso em detrimento aos custos de transferência. Esse procedimento é detalhado a seguir.

Defina Δ_t como a diferença entre o tempo de produção utilizado no período t e a capacidade do mesmo, ou seja:

$$\Delta_t = \sum_{i=1}^n (b_i X_{it} + q_i Y_{it}) - Cap_t.$$

Assim, o excesso de produção em cada período t pode ser definido como:

$$Excesso_t = \max\{\Delta_t, 0\}.$$

Para eliminar o excesso de produção em um período t em que a capacidade é excedida, tem-se que transferir uma determinada quantidade w de um item i para um período k . A quantidade transferida é calculada obtendo o mínimo entre o excesso de produção no período t e a produção do item i no mesmo período, ou seja,

$$w_{it} = \min\{Excesso_t, X_{it}\}.$$

Assim que os períodos com excesso de produção e a quantidade que poderá ser transferida são conhecidos, falta definir a função que indicará qual item e de qual para qual período será transferida. Para isso, é necessário o cálculo de três valores: o primeiro é a variação do custo com a transferência (*variação_custo*) que indica o quanto a nova solução se distancia do valor da relaxação. O segundo valor é em relação à factibilidade e representa o quanto a nova solução se aproxima de uma solução viável (*Penalidade*). O terceiro valor é relacionado à quantidade de tempo utilizado que será transferido (*Redução_Excesso*). Assim, definidos estes três valores, pode-se definir a função que indica a transferência como:

$$f_{itk} = \frac{\textit{variação_custo} + \beta * \textit{Penalidade}}{\textit{ReduçãoExcesso}}$$

É escolhido o item i do período t para ser transferido para o período k de tal modo que f_{itk} seja o máximo possível.

4.1.3 Procedimento de factibilização das restrições de carregamento dos paletes

O procedimento de factibilização das restrições de paletes utilizado neste trabalho foi adaptado de Norden e Velde (2005) e Molina *et al.* (2009). A cada iteração do algoritmo de relaxação, o subproblema de transporte é utilizado para construir uma solução viável. O objetivo é encontrar A_{it} e B_{it} que satisfaçam as restrições de transporte. Em outras palavras, para cada período, os itens são produzidos e, quando possível, alocados nos paletes com custos mais baixos. O restante produzido é colocado em paletes com custos mais altos. Seja X_{it}^* ($i=1, \dots, n$ e $t=1, \dots, T$) uma solução ótima para o subproblema de dimensionamento de lotes. A partir desta solução, pode-se obter uma solução que satisfaça as restrições de transporte do problema original. Para isso, basta considerar A_{it}^* paletes com custos baixos e B_{it}^* paletes com custos altos, em que:

$$A_{it}^* = \min \left\{ R, \left\lceil \frac{X_{it}^*}{P_i} \right\rceil \right\} \text{ e } B_{it}^* = \max \left\{ 0, \left\lfloor \frac{X_{it}^*}{P_i} \right\rfloor - R \right\} \text{ para } i = 1, \dots, n, \quad t = 1, \dots, T.$$

4.1.4 Resumo do método de solução com otimização do subgradiente

Nesta seção, apresenta-se um resumo geral do método de resolução. O algoritmo de otimização do subgradiente, conforme proposto por Held *et al.* (1974) e Camerini *et al.* (1975), foi implementado neste trabalho para atualizar os multiplicadores. Os parâmetros utilizados foram estabelecidos após extensivos testes preliminares. O critério de parada foi considerado como o que ocorrer primeiro dentre: obter limitantes inferior e superior iguais, ou realizar o número de 700 iterações (i.e., $num_Max_iterações = 700$).

Passo 1. Inicialização

Definindo os valores iniciais:

$$\mu_i^1 = 0 \text{ e } \mu_{it}^2 = 0, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n \text{ e } t = 1, 2, \dots, T.$$

$$\rho = 1,75 \text{ (tamanho do passo do subgradiente).}$$

$$LB = -\infty \text{ (ou, caso seja conhecido, um limitante inferior)}$$

Faça $k = 1$ e $cont = 0$

Passo 2. Solução do problema

Resolva os n subproblemas de dimensionamento de lotes.

Resolva o subproblema de transportes.

Se a solução obtida fornecer um limitante inferior melhor que o atual, então atualize o limitante inferior (LB) atual e faça $cont = 0$, senão incremente $cont$.

Se a solução obtida for viável, então atualize o limitante superior (LS); se a solução obtida for ótima, então **PARE**.

Senão, aplique heurística de factibilização, obtendo um limitante superior (LS).

Passo 3. Se foram realizados $cont = 30$ iterações, então divida o passo (ρ) por dois e faça $cont = 0$.

Atualize os valores de μ_i^1 e μ_{it}^2 , $i = 1, 2, \dots, n$, $t = 1, 2, \dots, T$.

$$\mu_i^1 = \frac{\rho(LS - LB)}{\left(\sum_{i=1}^n (b_i X_{it} + q_i Y_{it}) - Cap_t\right)^2}$$

$$\mu_{it}^2 = \frac{\rho(LS - LB)}{\left(\frac{X_{it}}{P_i} - A_{it} - B_{it}\right)^2}$$

$$k = k + 1$$

Se $k < num_Max_iterações$,

então volte ao **Passo 2**;

senão **PARE**.

Fim.

O passo do subgradiente foi atualizado a cada 30 iterações sem melhoria da solução. A decisão do número total de iterações realizadas e da melhoria da solução foi feita por testes preliminares com alguns exemplares do problema. Foram testados 10 exemplares de cada exemplar antes de se fixar os parâmetros.

Como mencionado, além do Modelo 3.1, a heurística lagrangiana também pode ser adaptada para resolver os Modelos 3.2 e 3.3. Para o Modelo 3.2, a relaxação lagrangiana também é aplicada a dois conjuntos de restrições, neste caso as restrições de capacidade (3.4) e as restrições que contabilizam o número de paletes necessários (3.12). Esta relaxação também pode ser dividida em dois subproblemas: um relacionado ao problema de dimensionamento de lotes e outro ao problema de transporte. Porém, a função objetivo do subproblema relacionado ao transporte será de minimizar a soma do produto entre o multiplicador lagrangiano e o número de paletes utilizados e os custos de transporte. Neste caso, é necessário desenvolver um limitante inferior para o número de paletes que precisa ser transportado em cada período contendo cada tipo de item. Além do limite de paletes que serão transportados, é necessário obter um método de resolução para o subproblema de transporte. As mesmas restrições são relaxadas no Modelo 3.3, sendo necessário também obter um bom limitante para o número de paletes utilizados e um método de resolução para o subproblema de transporte resultante.

4.1.5 Resultados computacionais: heurística lagrangiana

A heurística descrita na Seção 4 foi implementada em linguagem C++, e foram feitos alguns testes computacionais, utilizando os dados gerados de acordo com a descrição feita na Tabela 3-2. Nestes testes, foram consideradas apenas as classes de exemplares grandes G1-G16, em que o método *branch-and-cut* do pacote AMPL/CPLEX teve mais dificuldades para resolvê-las no

Capítulo 3. Os testes foram realizados no mesmo microcomputador descrito na Seção 3.4. Os resultados obtidos foram analisados considerando:

<i>UBLag</i>	valor da melhor solução factível encontrada pela heurística Lagrangiana;
<i>LBLag</i>	valor do limitante inferior encontrado pela relaxação Lagrangiana;
<i>OC</i>	valor da solução obtida pelo pacote CPLEX (com limite de tempo de 1500 segundos);
<i>TCLag</i>	Tempo computacional médio da heurística Lagrangiana*;
<i>GapOLag</i>	valor médio de $100 \times (UBLag-OC)/OC$;
<i>LBgapLag</i>	valor médio de $100 \times (OC-LBLag)/OC$;
<i>GapLag</i>	valor médio de $100 \times (UBLag-LBLag)/UBLag$ *.

* Os valores informados entre parênteses nas tabelas a seguir são do desvio padrão dos valores para os testes realizados.

Na Tabela 4-1, são apresentados os resultados dos testes realizados. Analisando os resultados da heurística lagrangiana, as colunas *GapLag* e *LBgapLag* mostram que, quanto mais apertada a capacidade de produção, maior a dificuldade de resolução da heurística (exemplares das classes G5, G6, G7, G8, G13, G14, G15 e G16), o que seria esperado. Pode-se observar também que, conforme o número de variáveis aumenta, o tempo computacional do problema também aumenta (coluna *TCLag*), o que também era esperado. Isso ocorre, pois, o problema de transporte (com custos negativos) envolvido em cada iteração da heurística fica mais difícil de ser resolvido. Analisando-se alguns exemplares da classe G16, foi observado que o pacote CPLEX utiliza em média 15,3 segundos para resolver cada problema de transporte dentro da heurística, o que gera um tempo total de 10710 segundos. Em outras palavras, aproximadamente 70% do tempo computacional utilizado para resolver o problema pelo método heurístico é gasto com o pacote de otimização CPLEX (tempo de impressão do modelo, tempo de resolução e tempo de leitura dos resultados). Acredita-se que este tempo possa ser diminuído consideravelmente se o CPLEX for substituído por algum algoritmo específico para resolver o Problema de Transportes com custos negativos, ou se for utilizada alguma rotina do CPLEX junto ao programa.

Comparando os resultados da Tabela 4-1 obtidos pelo AMPL/CPLEX e pela heurística lagrangiana, não foi possível estabelecer uma relação consistente entre a dificuldade de resolução dos problemas e suas diferentes classes. Pode-se verificar nas classes G1, G2, G3 e G4, que, nas classes pares (G2 e G4), ou seja, com o número maior de períodos, a heurística obtém uma solução

mais próxima da obtida pelo CPLEX, mas isso não se verifica nas outras classes (G5, G6, G7 e G8). Conclui-se que as soluções obtidas pelo pacote AMPL/CPLEX em geral são melhores do que as da versão atual da heurística lagrangiana, pois as soluções da heurística lagrangiana são em média 35% maior (com desvio padrão médio de 2%) que a solução obtida pelo pacote de AMPL/CPLEX.

Tabela 4-1: Resultados obtidos pelo AMPL/CPLEX e a pela heurística lagrangiana

	AMPL/CPLEX 10.0		Heurística Lagrangiana			
	<i>TC</i>	<i>Gap</i>	<i>TCLag</i>	<i>GapOLag</i>	<i>LBgapLag</i>	<i>GapLag</i>
classe G1	1500	0,50%	118,14 (10,49)	8,31%	15,82%	22,81% (1,36)
classe G2	1500	0,82%	849,65 (98,03)	8,19%	15,73%	22,63% (0,98)
classe G3	1500	0,65%	1178,28 (78,53)	8,84%	14,72%	22,26% (2,56)
classe G4	1500	1,01%	1500,00 (0,00)	8,17%	16,07%	22,93% (1,66)
classe G5	1500	1,62%	269,71 (20,80)	39,32%	37,45%	62,04% (1,65)
classe G6	1500	2,28%	1500,00 (0,00)	37,31%	29,23%	55,63% (1,72)
classe G7	1500	2,19%	1500,00 (0,00)	38,86%	33,24%	59,18% (0,99)
classe G8	1500	3,57%	1500,00 (0,00)	23,18%	32,09%	47,83% (1,43)
classe G9	1500	1,06%	124,72 (10,34)	11,99%	10,14%	20,92% (1,81)
classe G10	1500	1,64%	932,17 (101,79)	11,35%	10,23%	20,42% (2,46)
classe G11	1500	1,21%	1240,38 (95,67)	11,77%	9,63%	20,27% (1,65)
classe G12	1500	6,58%	1500,00 (0,00)	7,06%	14,75%	20,77% (1,36)
classe G13	1500	2,01%	272,84 (16,85)	29,40%	23,55%	46,03% (0,89)
classe G14	1500	2,37%	1500,00 (0,00)	25,99%	18,21%	39,47% (2,01)
classe G15	1500	2,36%	1500,00 (0,00)	30,12%	19,57%	43,80% (1,47)
Classe G16	1500	4,93%	1500,00 (0,00)	18,79%	20,45%	35,40% (1,77)

Vale ressaltar que a heurística consegue em todos os casos obter uma solução viável para o problema, enquanto que o CPLEX não consegue encontrar uma solução viável dentro do limite de tempo para alguns exemplares. Além disso, a heurística pode ser implementada em uma linguagem procedural como C++ sem a necessidade de investimentos em um *software* comercial, ou dependência dele. Observando que, nos casos em que o CPLEX obtém uma solução viável para os problemas, as soluções obtidas pela heurística são próximas das soluções encontradas pelo CPLEX.

4.1.6 Algoritmo de Volume

Analisando os resultados apresentados na Tabela 4-1 pode-se observar que a heurística lagrangiana com o método do subgradiente não teve um bom desempenho na resolução do

problema, comparativamente ao pacote AMPL/CPLEX. Com o objetivo de tentar melhorar as soluções encontradas, é investigada a utilização do algoritmo de volume na heurística lagrangiana, apresentado na Seção 2.4.1.

Para a aplicação do algoritmo de volume, foram feitas as adaptações necessárias no programa do algoritmo de subgradiente. As etapas de factibilização da solução obtida pela relaxação lagrangiana e as melhorias não foram excluídas no algoritmo de resolução, pois a aplicação do algoritmo de volume foi feita com o objetivo de melhorar as soluções viáveis obtidas com a aplicação da relaxação lagrangiana. Assim como a heurística lagrangiana com o método do subgradiente, o algoritmo de volume também pode ser estendido para os Modelos 3.2 e 3.3, com as mesmas adaptações comentadas no caso anterior. Detalhes sobre o algoritmo do volume implementado para a resolução do Modelo 3.1 é dado a seguir.

Passo 1.	<p>Inicialização</p> <p>Definir os critérios de parada</p> <p>Definindo os valores iniciais:</p> <p>$\mu_{i,l}^{1,0} = 0$ e $\mu_{it,l}^{2,0} = 0$, para $i = 1, 2, \dots, n$ e $t = 1, 2, \dots, T$. (valor inicial do multiplicador lagrangiano)</p> <p>$\rho = 1,75$ (tamanho inicial do passo do subgradiente)</p> <p>$LB = -\infty$: limitante inferior inicial.</p> <p>$LS = \infty$ limitante superior do problema (P)</p> <p>$k=0$: contador de iterações</p> <p>$0 < \alpha < 1$: um escalar</p> <p>Resolva RLP($\mu_{t,l}^{1,k}, \mu_{it,l}^{2,k}$) e obtenha a solução x_l^k e $Z_{LR}(\mu_{t,l}^{1,k}, \mu_{it,l}^{2,k})$</p> <p>Inicialize as variáveis</p> $LB = Z_{LR}(\mu_{t,l}^{1,k}, \mu_{it,l}^{2,k}), x_v^k = x_l^k, \mu_{t,v}^{1,k} = \mu_{t,l}^{1,k}, \mu_{it,v}^{2,k} = \mu_{it,l}^{2,k}$ $\sum_{t=1}^T \mu_t^1 \left(\sum_{i=1}^n (b_i X_{it} + q_i Y_{it}) - Cap_t \right) + \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \mu_{it}^2 \left(\frac{X_{it}}{P_i} - A_{it} - B_{it} \right)$ $v_{t,l}^{1,k} = \sum_{i=1}^n (b_i X_{it} + q_i Y_{it}) - Cap_t, v_{t,v}^{1,k} = v_l^{1,k}$ $v_{it,l}^{2,k} = \frac{X_{it}}{P_i} - A_{it} - B_{it}, v_{it,v}^{2,k} = v_{it,l}^{2,k}$
-----------------	--

<p>Passo 2.</p>	<p>Enquanto os critérios de parada não forem satisfeitos</p> <p>Atualize o multiplicador Lagrangiano</p> $\mu_{t,l}^{1,k} = \mu_{t,v}^{1,k} + \frac{\rho (LS - Z_{LR}(\lambda^k))}{\left(\sum_{t=1}^T (\sum_{i=1}^n (b_i X_{it,l} + q_i Y_{it,l}) - Cap_t)^2\right) + \left(\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n \frac{X_{it,l}}{P_i} - A_{it,l} - B_{it,l}\right)^2} v_{t,l}^{1,k}$ $\mu_{it,l}^{2,k} = \mu_{it,v}^{2,k} + \frac{\rho (LS - Z_{LR}(\lambda^k))}{\left(\sum_{t=1}^T (\sum_{i=1}^n (b_i X_{it,l} + q_i Y_{it,l}) - Cap_t)^2\right) + \left(\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n \frac{X_{it,l}}{P_i} - A_{it,l} - B_{it,l}\right)^2} v_{it,l}^{2,k}$ <p>Resolver RLP($\mu_{t,l}^{1,k}, \mu_{it,l}^{2,k}$) e obtenha a solução x_l^{k+1} e $Z_{LR}(\mu_{t,l}^{1,k}, \mu_{it,l}^{2,k})$</p> <p>Faça:</p> $v_{t,l}^{1,(k+1)} = \sum_{i=1}^n (b_i X_{it,l} + q_i Y_{it,l}) - Cap_t$ $v_{it,l}^{2,(k+1)} = \frac{X_{it,l}}{P_i} - A_{it,l} - B_{it,l}$
<p>Passo 3.</p>	<p>Atualizar a aproximação primal</p> <p>Obtenha o parâmetro α (ver após o resumo)</p> $x_v^{k+1} = \alpha x_l^{k+1} + (1 - \alpha) x_v^k$ $v_{t,v}^{1,(k+1)} = \sum_{i=1}^n (b_i X_{it,v} + q_i Y_{it,v}) - Cap_t$ $v_{it,v}^{2,(k+1)} = \frac{X_{it,v}}{P_i} - A_{it,v} - B_{it,v}$

Passo 4	<p>Teste da solução dual e atualização das variáveis</p> <p>Se $Z_{LR}(\mu_{t,l}^{1,k}, \mu_{it,l}^{2,k}) < LS$ declare uma iteração vermelha</p> <p>A cada 20 iterações vermelhas faça $\rho = \frac{2\rho}{3}$</p> <p>Caso contrário</p> <p>Se $\sum_{t=1}^T v_{t,l}^{1,k+1} v_{t,v}^{1,k+1} + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n v_{it,l}^{2,k+1} v_{it,v}^{2,k+1} < 0$ declare uma iteração amarela</p> <p>A cada 2 iterações amarelas faça $\rho = 1,1\rho$</p> <p>Se $\sum_{t=1}^T v_{t,l}^{1,k+1} v_{t,v}^{1,k+1} + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n v_{it,l}^{2,k+1} v_{it,v}^{2,k+1} \geq 0$ declare uma iteração verde e faça</p> $LS = Z_{LR}(\mu_{t,l}^{1,k}, \mu_{it,l}^{2,k})$ $\mu_{t,v}^{1,k} = \mu_{t,l}^{1,k}$ $\mu_{it,v}^{2,k} = \mu_{it,l}^{2,k}$ $k = k + 1$ $\rho = 2\rho$
Passo 5	<p>Faça</p> <p>Verifique os critérios de para e caso não sejam satisfeitos volte ao Passo 2</p>

Para o cálculo do parâmetro α para a atualização das variáveis, é necessário obter o:

$\underset{\delta \in R}{Argmin} \|\delta(Ax_l^k - b) + (1 - \delta)(Ax_v^k - b)\|$. Ou seja, temos que obter δ que minimiza a norma dada por:

$$\sqrt{\delta \left[\left(\sum_{t=1}^T \left(\sum_{i=1}^n (b_i X_{it,l} + q_i Y_{it,l}) - Cap_t \right)^2 \right) + \left(\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n \frac{X_{it,l}}{P_i} - A_{it,l} - B_{it,l} \right)^2 \right] + (1 - \delta) \left[\left(\sum_{t=1}^T \left(\sum_{i=1}^n (b_i X_{it,v} + q_i Y_{it,v}) - Cap_t \right)^2 \right) + \left(\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n \frac{X_{it,v}}{P_i} - A_{it,v} - B_{it,v} \right)^2 \right]}.$$

Observe que temos uma função dependente de apenas uma variável, neste caso δ , ou seja, obter o valor δ que minimiza a expressão acima é equivalente a obter o δ que minimiza o quadrado desta expressão. Para facilitar a apresentação do cálculo de δ usaremos a notação do produto interno $\langle . \rangle$ e simplificação da expressão, dada por $\delta(Ax_l^k - b) + (1 - \delta)(Ax_v^k - b)$. Queremos então obter δ que minimiza a expressão $\|\delta(Ax_l^k - b) + (1 - \delta)(Ax_v^k - b)\|^2$.

Aplicando a notação de produto interno, temos que:

$$\begin{aligned} & \|\delta(Ax_l^k - b) + (1 - \delta)(Ax_v^k - b)\|^2 = \\ & = \langle \delta(Ax_l^k - b) + (1 - \delta)(Ax_v^k - b), \delta(Ax_l^k - b) + (1 - \delta)(Ax_v^k - b) \rangle \end{aligned}$$

Como se quer o valor mínimo, deseja-se obter o valor de δ que é raiz da primeira derivada da função descrita acima, ou seja, obter-se δ tal que:

$$\frac{d(\langle \delta(Ax_l^k - b) + (1 - \delta)(Ax_v^k - b), \delta(Ax_l^k - b) + (1 - \delta)(Ax_v^k - b) \rangle)}{d\delta} = 0.$$

Calculando a primeira derivada em função de δ , obtemos a seguinte expressão:

$$2 * \langle (Ax_l^k - b) - (Ax_v^k - b), \delta(Ax_l^k - b) + (1 - \delta)(Ax_v^k - b) \rangle = 0,$$

o que é equivalente a obter δ tal que:

$$\langle (Ax_l^k - b) - (Ax_v^k - b), \delta(Ax_l^k - b) + (1 - \delta)(Ax_v^k - b) \rangle = 0.$$

Como todos os valores deste produto escalar são valores reais (não pertencem ao mesmo tempo ao conjunto dos números complexos e ao conjunto dos números reais), podemos usar a seguinte propriedade do produto escalar: $\langle a \pm b, c \rangle = \langle a, c \rangle \pm \langle b, c \rangle$, com a, b e c vetores. Aplicando esta propriedade, obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} & \langle (Ax_l^k - b), \delta(Ax_l^k - b) + (1 - \delta)(Ax_v^k - b) \rangle - \\ & \langle (Ax_v^k - b), \delta(Ax_l^k - b) + (1 - \delta)(Ax_v^k - b) \rangle = 0. \end{aligned}$$

Novamente, como todos os valores do produto escalar pertencem ao conjunto dos números reais, a seguinte propriedade também se verifica: $\langle a, b \pm c \rangle = \langle a, b \rangle \pm \langle a, c \rangle$, com a, b e c vetores. Aplicando esta propriedade na expressão anterior temos:

$$\begin{aligned} & \langle (Ax_l^k - b), \delta(Ax_l^k - b) \rangle + \langle (Ax_l^k - b), (1 - \delta)(Ax_v^k - b) \rangle - \langle (Ax_v^k - b), \delta(Ax_l^k - b) \rangle \\ & > + \langle (Ax_v^k - b), (1 - \delta)(Ax_v^k - b) \rangle \end{aligned}$$

Considerando δ um valor real e a e b vetores, temos a seguinte propriedade para o produto escalar: $\langle \delta a, b \rangle = \langle a, \delta b \rangle = \delta \langle a, b \rangle$. Aplicando esta propriedade obtemos:

$$\begin{aligned} & \delta \langle (Ax_l^k - b), (Ax_l^k - b) \rangle + (1 - \delta) \langle (Ax_l^k - b), (Ax_v^k - b) \rangle - \delta \\ & \langle (Ax_v^k - b), (Ax_l^k - b) \rangle - (1 - \delta) \langle (Ax_v^k - b), (Ax_v^k - b) \rangle = 0. \end{aligned}$$

Fazendo a distributiva nas parcelas com $(1 - \delta)$ temos:

$$\begin{aligned} \delta < (Ax_l^k - b), (Ax_l^k - b) > + < (Ax_l^k - b), (Ax_v^k - b) > - \delta < (Ax_l^k - b), (Ax_v^k - b) > \\ > - \delta < (Ax_v^k - b), (Ax_l^k - b) > - < (Ax_v^k - b), (Ax_v^k - b) > + \delta \\ < (Ax_v^k - b), (Ax_v^k - b) > = 0 \end{aligned}$$

Sabendo que, para a e b vetores com valores reais, $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$, e colocando o termo δ em evidência e do lado esquerdo da equação, e os termos sem a multiplicação por δ do lado direito, temos que:

$$\begin{aligned} \delta (< (Ax_l^k - b), (Ax_l^k - b) > - 2 < (Ax_l^k - b), (Ax_v^k - b) > + < (Ax_v^k - b), (Ax_v^k - b) >) \\ = < (Ax_v^k - b), (Ax_v^k - b) > - < (Ax_l^k - b), (Ax_v^k - b) >. \end{aligned}$$

Ou seja, para obter o valor de δ que minimiza a expressão $\|\delta(Ax_l^k - b) + (1 - \delta)(Ax_v^k - b)\|$, basta fazer:

$$\delta = \frac{\langle (Ax_v^k - b), (Ax_v^k - b) \rangle - \langle (Ax_l^k - b), (Ax_v^k - b) \rangle}{\langle (Ax_l^k - b) - (Ax_v^k - b), (Ax_l^k - b) - (Ax_v^k - b) \rangle}.$$

Com isso, podemos resolver os exemplares apresentados nas Tabelas 3.1 e 3.2 pelo método do algoritmo de volume. Como mencionado, as heurísticas foram implementadas em C++ e os testes foram realizados no mesmo computador que a heurística lagrangiana. Os resultados dos testes computacionais do algoritmo de volume estão apresentados a seguir.

4.1.7 Resultados computacionais: Algoritmo de Volume

Devido às etapas realizadas para o algoritmo de volume, é esperado que o algoritmo de volume seja mais lento quando comparado ao algoritmo do subgradiente. Para poder realizar uma comparação entre os dois algoritmos, os critérios de paradas serão mantidos os mesmos, ou seja, mil iterações ou o tempo limite de 1500 segundos. Os resultados obtidos foram analisados considerando:

<i>UBVol</i>	valor da melhor solução factível encontrada pelo algoritmo de volume;
<i>LBVol</i>	valor do limitante inferior encontrado pelo algoritmo de volume;
<i>OC</i>	valor da solução obtida pelo pacote CPLEX (com limite de tempo de 1500 segundos)
<i>TCVol</i>	Tempo computacional médio da heurística Lagrangiana;
<i>GapOVol</i>	valor médio de $100 \times (UBVol - OC) / OC$

LBgapVol valor médio de $100 \times (OC-LBVol)/OC$

GapVol valor médio de $100 \times (UBVol-LBVol)/UBVol$

* Os valores informados entre parênteses nas tabelas a seguir são do desvio padrão dos valores para os testes realizados.

Na Tabela 4-2, são apresentados os resultados dos testes realizados. Com os dados apresentados, pode-se afirmar que os resultados obtidos pela heurística lagrangiana com algoritmo do volume são iguais aos resultados obtidos pela heurística lagrangiana com otimização do subgradiente. Em alguns casos, o método obteve um limitante inferior melhor, que pode ter ocorrido devido ao modo de atualização dos multiplicadores lagrangianos. Uma diferença encontrada entre os métodos é o tempo de resolução dos problemas das classes G1 a G4 e G9 a G11. Uma justificativa para esta diferença pode ser o tempo de resolução do problema de transporte, resolvido pelo pacote CPLEX.

Tabela 4-2: Resultados obtidos pelo AMPL/CPLEX e a pelo algoritmo de volume

	AMPL/CPLEX 10.0		Algoritmo de volume			
	<i>TC</i>	<i>Gap</i>	<i>TCVol</i>	<i>GapOVol</i>	<i>LBgapVol</i>	<i>GapVol</i>
classe G1	1500	0,50%	64,03 (10,43)	8,31%	15,82%	22,81% (1,36)
classe G2	1500	0,82%	139,17 (30,45)	8,19%	15,14%	22,46% (0,98)
classe G3	1500	0,65%	152,35 (28,90)	8,84%	14,23%	22,08% (2,56)
classe G4	1500	1,01%	537,97 (100,74)	8,17%	15,67%	22,88% (1,66)
classe G5	1500	1,62%	1500,00 (0,00)	39,32%	36,98%	61,04% (1,65)
classe G6	1500	2,28%	1500,00 (0,00)	37,31%	29,43%	54,69% (1,72)
classe G7	1500	2,19%	1500,00 (0,00)	38,86%	33,24%	59,18% (0,99)
classe G8	1500	3,57%	1500,00 (0,00)	23,18%	31,16%	46,43% (1,43)
classe G9	1500	1,06%	42,92 (9,81)	11,99%	9,14%	20,70% (1,81)
classe G10	1500	1,64%	107,16 (30,67)	11,35%	10,23%	20,42% (2,46)
classe G11	1500	1,21%	1240,38 (123,45)	11,77%	9,73%	20,32% (1,65)
classe G12	1500	6,58%	1500,00 (0,00)	7,06%	14,65%	20,72% (1,36)
classe G13	1500	2,01%	1500,00 (0,00)	29,40%	23,55%	46,03% (0,89)
classe G14	1500	2,37%	1500,00 (0,00)	25,99%	18,21%	39,47% (2,01)
classe G15	1500	2,36%	1500,00	30,12%	19,57%	43,80%

			(0,00)			(1,47)
Classe G16	1500	4,93%	1500,00 (0,00)	18,79%	20,65%	35,71% (1,77)

Como mencionado, o algoritmo de volume é uma “extensão” da heurística lagrangiana e é aplicado com o objetivo de obter uma boa solução factível para o problema original. Acredita-se que o método não obteve uma boa solução factível devido à qualidade da solução da relaxação lagrangiana, que, como discutido anteriormente, está relacionada aos limitantes gerados para o transporte dos paletes.

A Figura 4.2, a seguir, representa a média dos tempos computacionais entre o método de otimização do subgradiente e o algoritmo de volume, sendo o eixo das abscissas representando as classes e o eixo das ordenadas representando o tempo computacional utilizado. As variâncias do tempo computacional estão omitidas na figura, mas são descritas na Tabela 4-2. Para as classes com capacidade apertada, ambas as heurísticas param a resolução por atingirem o limite de tempo de resolução de 1500 segundos. Para duas classes, G5 e G13, o algoritmo de volume foi mais rápido que a heurística que lagrangiana e para o restante, como esperado, o algoritmo de volume é um pouco mais lento que a otimização do subgradiente.

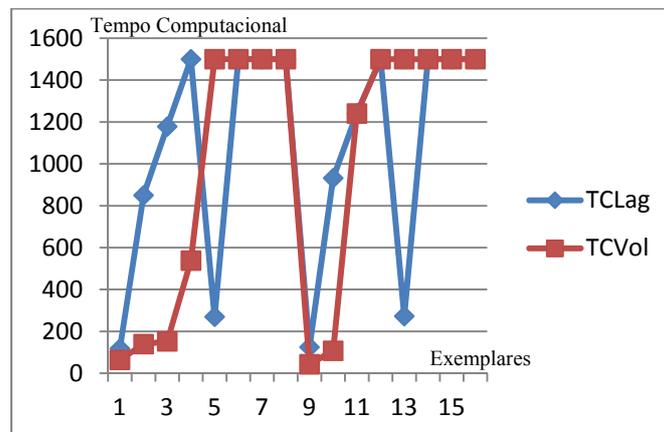


Figura 4-2: Tempo computacional otimização do subgradiente X volume

A Figura 4-3, representa o *GAP* entre os limitantes inferior e superior. Pode-se observar que o algoritmo de volume, em alguns casos, tem uma pequena melhora, mas não significativa, no *GAP* de resolução. Essa melhoria ocorre, pois, nestes casos, o limitante inferior obtido pelo algoritmo de volume é um pouco melhor do que o limitante encontrado pelo método de otimização do subgradiente.

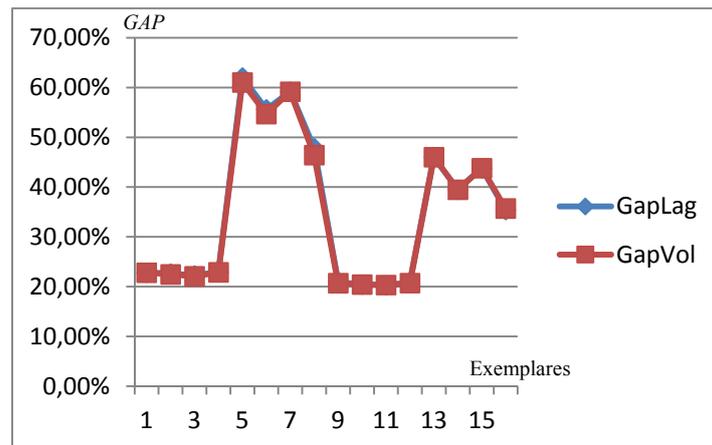


Figura 4-3: GAP do método de otimização do subgradiente e do algoritmo de volume

Cabe lembrar que, o método apresentado por Barahona e Anbil (2000) não possui garantia de convergência, diferente do método apresentado por Bahiense *et al.* (2002). Um proposta para um trabalho futuro para tentar melhorar a resolução do problema é utilizar o algoritmo apresentado por Bahiense *et al.* (2002). Acredita-se que um possível motivo da falta de bom desempenho da heurística lagrangiana está nas inequações válidas, geradas para limitar o número de paletes transportados. A seguir, é apresentado outro método heurístico de resolução para o problema de dimensionamento de lotes capacitado com custos de transporte (Modelo 3.1).

4.2 Heurística baseada em colônia de formigas

Nesta seção, é apresentada uma variação do método de otimização baseado em colônia de formigas, apresentado na Seção 1.4, para resolver o Modelo 3.1. Embora a idéia da construção da solução para o problema de dimensionamento de lotes com custos de transporte e as iterações são aplicadas seguindo a estrutura do algoritmo apresentado, o método desenvolvido é dito como uma variação do método original, pois a construção da solução do problema pode gerar soluções infactíveis. Neste caso, diremos que a formiga (solução encontrada) é sacrificada, e esta solução não interfere na atualização do feromônio. O problema deste método é que podemos não obter uma solução factível para o problema. A construção da solução e a estratégia para determinar a probabilidade de escolher uma possível solução estão descritas a seguir.

O objetivo é construir uma solução de tal forma que satisfaça as condições da produção e de transporte dos itens. A estratégia pode ser resumida da seguinte forma:

- | | |
|---|---|
| 1 | Inicie as entradas e as variáveis. |
| 2 | Faça (até os critérios de parada sejam satisfeitos). |

2.1	Enquanto toda a demanda não for produzida ou existir capacidade de produção em algum período Faça:
2.1.1	Calcule a visibilidade η_{ijt} de produzir a quantidade w_{ijt} do item do tipo i no período j para satisfazer a demanda no período t .
2.1.2	Calcule a probabilidade de uma determinada quantidade w_{ijt} do item i da demanda do período t ser carregado no caminhão no período j .
2.1.3	Sorteie uma determinada quantidade w_{ijt} item i da demanda do período t para ser produzido no período j .
2.1.4	Atualize a demanda ainda não atendida do item sorteado e a capacidade de produção restante no período sorteado.
2.2	Verifique o critério de parada satisfeito no processo 2.1.1
2.2.1	Se o critério de parada ocorrer por falta de capacidade e produção e há demanda não atendida no final do horizonte de planejamento Faça: Sacrifique a formiga.
	Caso contrário Atualize os dados do feromônio com a equação
	$\tau_{ij} = (1 - \rho)\Delta_{ij} + \rho\tau_{ij}$
2.3	Fim da construção da solução Retorne a etapa 2.1
3	Retorne a melhor solução obtida

Nesta estratégia, está sendo resolvido, a cada iteração, um problema de empacotamento relacionado à quantidade de paletes utilizada para transportar a produção de cada item. Para o cálculo da visibilidade da solução, é usada uma função com três índices (a matriz de feromônio terá a mesma dimensão da visibilidade), em que cada um indica, respectivamente, o item produzido, o período de produção e o período no qual a demanda será atendida com esta produção.

O parâmetro denotado por η_{ijt} (visibilidade) considera a razão da quantidade produzida do item i no período t e o custo de produção do item no período. Para isso, considera-se w_{ijt} como a quantidade a ser produzida do item i no período j para satisfazer à demanda do período t . Como

estamos minimizando os custos, a estratégia para construir a visibilidade é obter o custo unitário dos itens com a produção de w_{ijt} itens em cada iteração, ou seja, é a razão entre a quantidade produzida e o custo de produção e transporte. A expressão para o cálculo da visibilidade é dada por:

$$\eta_{ijt} = \frac{w_{ijt}}{\sum_{k=j}^{t-1} h_{ik} w_{it} + (1 - Y_{ij}) * s_{ij} + \Delta_{ij}}$$

em que Δ_{it} é uma função que indica o custo de transporte das w_{ijt} unidades produzidas do item i no período j . Esta função leva em consideração os paletes utilizados nas iterações anteriores e que contêm espaço para o transporte das unidades do mesmo tipo de item para determinar se será necessário usar mais paletes e os custos desses paletes adicionais, considerando a convexidade dos custos, apresentado no Modelo 3.1. Por exemplo, supondo que na primeira iteração foram produzidas 5 unidades do item 1 no primeiro período e na segunda iteração foi determinada a produção de 7 unidades do mesmo item no primeiro período para satisfazer a demanda do segundo período. Se a capacidade de transporte dos paletes para o item do tipo 1 for de 6 unidade, então na segunda iteração será necessário apenas mais um palete para transportar as 7 unidades no primeiro período (sendo 2 unidades no palete utilizado na primeira iteração e 5 no segundo palete). Com isso, Δ_{it} será igual ao custo de utilizar apenas um palete, lembrando que para determinar este custo, é necessário verificar se no primeiro período não ultrapassado o limite de paletes mais barato. Por outro lado, se a capacidade do palete for de 15 unidades, o custo dado por Δ_{it} será igual a zero, pois os itens estipulados na segunda iteração podem ser transportados no palete utilizado na primeira iteração.

Convém observar que este método heurístico pode ser adaptado para os modelos 3.2 e 3.3. Nestes casos, são necessárias adaptações no cálculo do valor de Δ_{it} , em que, no primeiro caso, é necessário considerar o custo dos caminhões utilizados e os paletes de cada caminhão. No segundo caso, temos que considerar os diferentes custos e tamanhos dos caminhões.

Para finalizar a heurística, temos que determinar a quantidade w_{ijt} que será utilizada. Observe que se considerarmos todas as possibilidades de w_{ijt} , o método ficaria muito demorado, devido ao número de iterações necessárias para calcular as visibilidades para cada possibilidade de w_{ijt} . Além disso, teríamos que considerar mais uma dimensão para visibilidade η_{ijt} para guardar a informação da quantidade produzida. Então, decidimos inicialmente que, para a resolução do Modelo 3.1, a quantidade transportada w_{ijt} é uma variável 0-1 em cada iteração da construção da

solução, ou seja, produzir ou não uma única unidade do item i no período j para satisfazer a demanda do período t .

Limitar w_{ijt} desse modo tornou a construção da solução muito lenta, pois para obter o transporte de todos os itens é necessária uma “rotina” com um número de iterações de mesmo tamanho da soma da demanda de todos os itens. Além disso, devido às inúmeras possibilidades de construção da solução, as informações armazenadas pelo feromônio têm pouca influência na construção da solução. Ou seja, considerar a construção da solução adicionando os itens um a um nos caminhões se tornou inviável computacionalmente. O método foi testado e após o terceiro dia de resolução, o algoritmo ainda não tinha finalizado a resolução do problema (máximo de 1000 iterações e sem limitação de tempo) e não foi obtida uma convergência das soluções obtidas por cada formiga.

Para tentar melhorar o procedimento da construção da solução, considerou-se então que a quantidade de itens produzidos w_{ijt} , em cada iteração é o mínimo entre a quantidade ainda não atendida do item i no período t , a capacidade máxima do palete para este item e a capacidade restante de produção do período t . A construção da solução é iterativa, pois inicialmente não há produção dos itens em quaisquer períodos e, em cada iteração da construção da solução, é decidida uma quantidade de um tipo de item que será produzida e em qual período. A cada decisão, as variáveis são atualizadas, alterando os valores da função de visibilidade. As iterações de construção da solução só finalizam quando é obtida uma solução factível, ou quando todos os valores da função de visibilidade são nulos (gerando um caminho com solução infactível, pois a capacidade restante de cada período é nula).

O método de otimização baseado em colônias de formigas foi implementado e alguns problemas testes foram resolvidos. Com a resolução desses problemas, foi possível perceber que o método continuava pouco eficiente em relação ao tempo de resolução, necessitando um dia e meio para uma resolução de um exemplar. Devido à condição de aceitar o atraso na produção, a função de visibilidade analisa várias possibilidades, o que dificulta a convergência da solução (ver Stovba, 2005), além dos diversos cálculos realizados para construir a solução.

Com o objetivo de reduzir os cálculos realizados para a construção da solução, foi estabelecido um limite no período de atraso e estoque da produção. Em outras palavras, considerou-se que os atrasos e/ou estoques da produção não podem durar por mais de três períodos, por exemplo, os itens com demanda no quinto período devem ser produzidos entre o segundo e o oitavo período. Obviamente, esta limitação na escolha dos períodos de produção pode eliminar boas

soluções, pois limita muito a árvore de busca eliminando soluções viáveis para o problema, mas também acelera bastante o processo de construção da solução.

Nos testes realizados, foi utilizado o valor para a evaporação do feromônio $\rho = 0,98$, ou seja, foi considerado uma evaporação lenta para que o método de resolução pudesse explorar um maior número de soluções. Lembrando que, como não há garantia que a construção da solução irá fornecer boas soluções, utilizar um valor baixo para a evaporação dos feromônios, implicaria em realizar, nas primeiras iterações, buscas mais aleatórias e convergências mais rápidas para a melhor solução encontrada, mesmo não tendo garantia do que acontecerá nas primeiras iterações. A Tabela 4-3 fornece os resultados obtidos com a resolução dos problemas teste descritos. A tabela fornece as seguintes informações:

<i>Solução CPLEX</i>	Solução obtida pelo método <i>branch-and-cut</i> do pacote de otimização;
<i>GAP CPLEX</i>	valor do GAP fornecido pelo pacote de otimização
<i>Solução ACO</i>	Solução obtida pelo algoritmo de colônia de formigas;
<i>Gap ACOxCplex</i>	Distância entre a solução obtida pela heurística baseada em colônias de formiga e o pacote de otimização: $100 \times (\text{Solução ACO} - \text{Solução CPLEX}) / \text{Solução Cplex}$

Inicialmente, o método de colônia de formigas foi testado em 10 exemplares, porém, mesmo com as adaptações realizadas, o método se mostrou lento, sendo necessário, em média, 10 vezes mais do que o tempo de resolução do CPLEX para obter as 10 soluções para os problemas testados. Assim, optou-se por apresentar, na tabela 4-3, apenas a primeira resolução de cada teste. O método de colônia de formigas utilizou os 1500 segundos para a resolução dos problemas testados. Como pode ser observado na tabela 4-3, o método utilizado para buscar uma solução para o problema não foi eficiente para os casos em que a capacidade é apertada (Classes G5, G6, G7, G8, G13, G14, G15 e G16). Nos demais exemplares, o método também não obteve uma solução competitiva para o problema, quando comparada com a solução do método *branch-and-cut* do CPLEX e da heurística lagrangiana. Uma justificativa para a ineficiência do método está no fato de que para garantir a convergência da solução, os períodos de atraso e estoque tiveram que ser limitados, reduzindo o espaço de busca da solução. Por outro lado, se esta limitação não fosse imposta, conforme mencionado anteriormente o método se tornaria demasiadamente lento, e a convergência ficaria comprometida devido às dimensões da matriz de feromônio. Com base nos experimentos

computacionais aqui realizados, a conclusão é que a presente versão do método ACO não é uma boa alternativa de solução para o problema.

Tabela 4-3: Resultados obtidos pelo AMPL/CPLEX e a pelo algoritmo de colônias de formigas

Exemplar	Solução CPLEX	GAP	Solução ACO	GAP ACOxCPLEX
Classe G1	477186,00	0,50%	620468,00	23,09
Classe G2	1305110,00	0,82%	1869298,00	30,18
Classe G3	1533542,00	0,65%	2188527,00	29,93
Classe G4	3772302,00	1,01%	6329063,00	40,40
Classe G5	734980,00	1,62%	-	-
Classe G6	1595130,00	2,28%	-	-
Classe G7	2010596,00	2,19%	-	-
Classe G8	4698137,00	3,57%	-	-
Classe G9	1034070,00	1,06%	1326541,00	22,05
Classe G10	2850432,00	1,64%	3730600,00	23,59
Classe G11	3347036,00	1,21%	4453109,00	24,84
Classe G12	8650693,00	6,58%	11526840,00	24,95
Classe G13	1304838,00	2,01%	-	-
Classe G14	3123296,00	2,37%	-	-
Classe G15	3822354,00	2,36%	-	-
Classe G16	9327627,00	4,93%	-	-

Uma alternativa para melhorar o processo de busca por uma solução e a qualidade das soluções seria adicionar um parâmetro no cálculo da visibilidade e da atualização do feromônio, que informasse a melhor quantidade produzida de cada item em cada período. Por outro lado, esta alternativa aumentaria as informações guardadas pelo feromônio, o que poderia gerar um problema de convergência para uma solução.

Como o algoritmo de colônia de formigas não obteve sucesso com os exemplares grandes, principalmente para os exemplares com capacidade apertada, resolvemos testar o algoritmo para as classes médias e verificar o desempenho desta heurística quando os exemplares possuem um número menor de variáveis. Para a análise dos resultados das classes médias (M1 a M4) considere os seguinte dados:

Solução CPLEX	Solução obtida pelo método <i>brnach-and-cut</i> do pacote de otimização;
GAP CPLEX	valor do GAP fornecido pelo pacote de otimização
Média Solução	Média das dez soluções obtidas pelo algoritmo de colônia de formigas;

<i>ACO</i>	
Média <i>Gap</i>	Média da distância entre a solução obtida pela heurística baseada em colônias de formiga e o pacote de otimização: $100 \times (\text{Solução ACO-Solução CPLEX})/\text{Solução Cplex}$
Melhor solução ACO	Melhor solução encontrada em dez resoluções do exemplar
<i>GAP</i> melhor solução	Distância entre a melhor solução obtida pela heurística baseada em colônias de formiga e o pacote de otimização: $100 \times (\text{Solução ACO-Solução CPLEX})/\text{Solução Cplex}$

* Os valores informados entre parênteses nas tabelas a seguir são do desvio padrão dos valores para os testes realizados.

Na Tabela 4-4, são apresentados os resultados obtidos pelo AMPL/CPLEX e os resultados obtidos pela heurística baseada em otimização por colônia de formigas. A menos da classe M4, os resultados da heurística não são satisfatórios, pois o *GAP* entre a solução obtida pelo AMPL/CPLEX e a heurística é em torno de 20% a 30%. Os tempos de resolução dos problemas não foram apresentados, mas cabe mencionar que a heurística necessita em média de 1550 segundos para revolver um exemplar uma única vez, enquanto o pacote de otimização ficou limitado a 180 segundos.

Tabela 4-4: Resultados obtidos pelo AMPL/CPLEX e a pelo algoritmo de colônias de formigas – Classe M1-M4

Exemplar	Solução CPLEX	<i>GAP</i>	Média Solução ACO	Desvio padrão	Média <i>GAP</i>	Melhor solução ACO	<i>GAP</i> melhor solução
Classe M1	91734	1,54%	115561,80	2814,89	20,62%	111819	17,96%
Classe M2	96433	1,97%	121976,30	1098,31	20,94%	120336	19,86%
Classe M3	173570	1,27%	241797,60	2336,87	28,22%	237643	26,96%
Classe M4	198607	1,54%	214363,20	4353,50	7,35%	206201	3,68%

Não foi identificada nenhuma justificava da diferença entre a qualidade da solução entre a Classe M4 e as demais, lembrando do Capítulo 3 que a classe M4 tem capacidade apertada e custos de transporte mais caros.

4.3 Considerações do capítulo

Dentre os métodos apresentados neste capítulo para a resolução do problema integrado de dimensionamento de lotes capacitado com custos de transporte, o de melhor desempenho para resolver os exemplares aqui considerados foi o método baseado em heurística lagrangiana com algoritmo de volume, pois, embora a heurística lagrangiana tenha obtido *GAP's* ruins, a solução

factível obtida ficou mais próxima da solução fornecida pelo pacote CPLEX. O método do volume resolveu alguns problemas com um tempo menor, quando comparado a heurística lagrangiana com otimização do subgradiente. No entanto, este método, na sua versão atual, não foi competitivo com o CPLEX.

No caso da heurística baseada em colônias de formigas, seria recomendável pesquisar um novo método de busca para obter mais soluções factíveis para o problema de dimensionamento de lotes capacitado. A heurística aqui construída é uma variação de um método utilizado na literatura, que sacrifica formigas, que não obtém caminhos com solução factível, o que aconteceu com algumas classes do problema. Desta maneira, na sua versão atual, esta heurística também não foi competitiva com o CPLEX para resolver os exemplares aqui considerados.

Neste capítulo e no anterior, foram estudados problemas integrados de dimensionamento de lotes com custos de transporte em que os itens utilizam unitizadores de carga (e.g., paletes) para a realização do transporte. Esta foi a primeira parte deste trabalho. Nos próximos dois capítulos, é apresentada a segunda parte deste trabalho em que são estudados problemas integrados em que os itens produzidos são carregados diretamente em caminhões, sem o uso de paletes e, nestes casos, o problema de dimensionamento de lotes deve ser resolvido de forma integrada ao problema de empacotamento.

5 Modelagem do problema integrado de dimensionamento de lotes e arranjo de carga nos caminhões

Neste capítulo estuda-se o problema integrado combinando decisões de dimensionamento de lotes e decisões de carregamento dos caminhões, incluindo o arranjo físico da carga. Considera-se que os itens produzidos são carregados diretamente nos caminhões, ou seja, não são mais carregados em paletes, para depois serem carregados nos caminhões (Figura 5-1). Observe que com essa condição, diferente dos modelos do Capítulo 3, os parâmetros de empacotamento não podem ser mais calculados *a priori*, pois o empacotamento de um item depende diretamente dos tamanhos e das quantidades dos outros itens que estão sendo produzidos no mesmo período. Assim, é necessário desenvolver modelos que integrem, de maneira monolítica e simultânea, o problema de dimensionamento de lotes com o problema de empacotamento, de tal forma que as decisões dos dois problemas sejam interdependentes.



Figura 5-1: Itens carregados diretamente em caminhões

Devido à dificuldade de se desenvolver e resolver modelos de dimensionamento de lotes integrado com o problema de empacotamento considera-se algumas simplificações destes problemas, dos pontos de vista de restrições de capacidade de produção e dimensões envolvidas no empacotamento. Inicialmente, é considerado o caso não capacitado do problema de dimensionamento de lotes, descritos no Capítulo 2, que pode ser facilmente resolvido pelo método proposto por Wagner e Whitin (1958), ou seja, supõe-se que o problema de dimensionamento de lotes tem apenas custos de preparo da máquina e estoque, e não são considerados, por enquanto, os custos de atraso e restrições de capacidade. No entanto, são consideradas limitações de capacidade do empacotamento no caminhão. As restrições de limitação da capacidade da produção e o atraso da

demanda, dentro do horizonte de planejamento, são considerados logo após o estudo inicial com o caso não capacitado.

Todos os modelos integrados são apresentados em três etapas, cada uma considerando que o problema de carregamento de caminhões envolve uma, duas e três dimensões relevantes para sua solução (i.e., casos uni, bi e tridimensional), respectivamente. Porém, o foco maior deste capítulo são os casos unidimensionais, que também vão ser estudados no próximo capítulo. Além disso, por simplicidade, em todos os casos, considera-se que as dimensões das caixas são valores inteiros e que o empacotamento é feito ortogonalmente no caminhão, ou seja, os itens são carregados de tal forma que seus lados fiquem paralelos aos lados do caminhão. Além disso, por simplicidade, também considera-se que as caixas têm orientação fixa, ou seja, as caixas não podem ser rotacionadas no carregamento, embora essa restrição em geral possa ser facilmente relaxada nos modelos e métodos a seguir.

5.1 Modelo integrado de dimensionamento de lotes não capacitado e empacotamento unidimensional

O primeiro modelo integrado proposto representa o problema de dimensionamento de lotes não capacitado e o empacotamento dos itens em um caminhão, considerando apenas uma dimensão para o problema de empacotamento. Neste caso, pode-se pensar que esta dimensão representa o peso, o volume ou valor dos produtos transportados (a limitação de valor pode aparecer na prática de transportadoras em função de restrições das seguradoras para fazer o seguro da carga transportada). Para a construção deste modelo, considere o modelo de dimensionamento de lotes (Modelo 2.1) e empacotamento unidimensional (Modelo 2.3) dados no Capítulo 2. Observe que o Modelo 2.1 tem foco no custo mínimo de produção, ou seja, não fornece o número de caminhões necessários para o transporte em cada período. Além disso, o Modelo 2.3 determina o número mínimo de caminhões necessários para transportar toda a demanda de apenas um determinado período.

A idéia aqui é utilizar estes dois modelos, fazendo adaptações na modelagem do problema de empacotamento para que o carregamento seja feito em todos os períodos, para que, juntos, representem o problema integrado. Considerando os dados e variáveis dos dois modelos são necessárias as seguintes alterações de parâmetros de variáveis.

Parâmetros do modelo:

c Custo unitário por caminhão utilizado para o transporte da produção;

Variáveis de decisão:

Z_{ikt} Número de itens do tipo i alocados no caminhão k no período t ;

A_{kt} Variável binária que indica se o caminhão k é utilizado no período t ;

Observe que as variáveis relacionadas ao problema de empacotamento necessitam de um índice a mais para guardar informações referentes ao período. Lembre que nos Modelos 3.1, 3.2 e 3.3, as variáveis de transporte eram inteiras (ao invés de binárias) e indicavam quantos caminhões eram utilizados. Neste modelo, a variável de transporte é binária, indicando se o caminhão k é utilizado ou não em cada período t . Além disso, o custo de transporte (c) é considerado simplesmente como linear (ao invés de convexo). Porém o modelo continua sendo válido para o caso convexo e, neste caso, basta trocar a constante c por um vetor de custo, onde os R primeiros caminhões têm valor c_1 , e os restantes têm valor c_2 . Além disso, para considerar custos côncavos, basta adicionar uma restrição que ordena as variáveis A_{kt} e garanta que o caminhão $k+1$ só será utilizado se o caminhão k já estiver sendo usado.

Modelo 5.1: Dimensionamento de lotes não capacitado com empacotamento unidimensional

$$z = \min \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (h_{it} I_{it}^+ + s_{it} Y_{it}) + \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^M c A_{kt} \quad (5.1)$$

$$\text{S.a} \quad I_{i(t-1)}^+ + X_{it} - I_{it}^+ = d_{it} \quad t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, n \quad (5.2)$$

$$X_{it} \leq \sum_{j=t}^T d_{ij} Y_{jt} \quad t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, n \quad (5.3)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i Z_{ikt} \leq W A_{kt} \quad t = 1, \dots, T; k = 1, \dots, M \quad (5.4)$$

$$\sum_{k=1}^M Z_{ikt} \geq X_{it} \quad t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, n \quad (5.5)$$

$$X_{it}, I_{it}^+ \geq 0; Z_{ikt} \in \mathbb{N} \quad t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, M \quad (5.6)$$

$$Y_{it}, A_{kt} \in \{0,1\} \quad t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, M \quad (5.7)$$

Observe que, diferente dos Modelos 3.1, 3.2 e 3.3, o Modelo 5.1 contém informações sobre o carregamento dos itens em cada caminhão. Isto ocorre devido às variáveis Z_{ikt} , obtidas do problema de empacotamento. Lembrando que, os Modelos 3.1, 3.2 e 3.3, contém, por um pré-processamento, apenas o número máximo de paletes que podem ser carregados em um caminhão.

As restrições (5.2) e (5.3) são relacionadas ao problema de dimensionamento de lotes e as restrições (5.4) e (5.5) ao empacotamento da produção. A restrição (5.5) é a única responsável pela integração das decisões de dimensionamento e empacotamento, pois ela relaciona a variável de produção com a variável de carregamento. Observe que o modelo consiste em determinar o tamanho dos lotes e a quantidade de caminhões de maneira a minimizar a soma dos custos de produção e transporte (equação 5.1).

O Modelo 5.1 contém $nT(M+1)$ variáveis inteiras, $T(n+M)$ variáveis binárias e $T(3n+M)$ restrições. Note que, assim como no modelo de empacotamento unidimensional (Modelo 2.3), é importante definir bem o valor de M , pois se este for muito grande, o número de variáveis e restrições também será grande. Por outro lado, se este número for muito pequeno, pode ser que o problema se torne infactível. Neste trabalho, o número de caminhões disponíveis (M) foi calculado multiplicando um limitante inferior do número de *bins* necessários para o transporte de toda a demanda. Em outras palavras, o número de caminhões disponíveis foi definido pela equação $M = \left\lceil \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \frac{w_i d_{it}}{W} \right\rceil$ com $\alpha > 1$. Cabe mencionar que o valor de M obtido desta maneira é bem maior do que o número de caminhões necessários para o transporte da produção, pois em cada período o problema terá M caminhões disponíveis. Na prática, o valor de M é estabelecido pela empresa (um parâmetro do problema), sendo igual ao número de caminhões disponíveis em cada período. Se a frota for considerada infinita, ou seja, não há um limite máximo de caminhões que podem ser usados em cada período, o Modelo 5.1 continua sendo válido, sendo necessário obter um limitante superior para o número de caminhões.

Embora este modelo integrado tenha sido desenvolvido a partir do modelo de dimensionamento de lotes resolvido por Wagner e Whitin (1958), ou seja, sem considerar variáveis de atraso e restrições de capacidade, note que com simples adaptações, estas variáveis e estas restrições podem ser incluídas ao modelo. Além disso, pode-se acrescentar mais uma restrição de capacidade de peso ou volume ao problema (restrição de mochila), mas note que desta maneira o problema resultante não seria um problema integrado de dimensionamento de lotes e empacotamento bidimensional. Isso ficará mais claro na próxima seção.

Cabe mencionar também que, considerando um caso particular do modelo integrado, onde há apenas um período de produção, o problema de dimensionamento de lotes integrado com empacotamento unidimensional pode ser visto apenas como um problema de empacotamento unidimensional (Modelo 2.3). Segundo Coffman *et al.* (1997), este problema é classificado como NP-completo e, portanto, o presente problema integrado também é NP-completo.

5.2 Modelo integrado de dimensionamento de lotes não capacitado e empacotamento bidimensional

Nesta seção é apresentado um modelo para o problema de dimensionamento de lotes não capacitado integrado com decisões de arranjo bidimensional da carga, similarmente ao que foi feito na seção anterior. O que diferencia este modelo do anterior é que neste duas dimensões dos itens são relevantes para o empacotamento, por exemplo, o comprimento e a largura dos itens e do caminhão.

Para a construção deste modelo integrado, é considerado o mesmo modelo de dimensionamento de lotes utilizado na construção do modelo da seção anterior (Modelo 2.1) e uma adaptação do modelo de empacotamento bidimensional (Modelo 2.4) proposto em Beasley (1985), apresentado no Capítulo 2, que maximiza o espaço utilizado no arranjo de itens em um caminhão. Observe que no modelo de empacotamento bidimensional (Modelo 2.4), o objetivo é maximizar a área utilizada de um caminhão. Como mencionado no Capítulo 2, o modelo pode ser adaptado para o caso de vários caminhões (idênticos) considerando-os como apenas um caminhão de tamanho maior, similarmente ao que foi feito em Beasley (1985) para o caso de várias placas bidimensionais de corte. Lembrando que a construção dos elementos a_{ipqrs} deve levar em consideração o espaço físico de cada caminhão para não ocorrer sobreposição. Além disso, esta idéia não fornece o número de caminhões utilizados, mas apenas a área máxima utilizada, que neste caso será a soma da área de todos os itens.

Desta maneira, o Modelo 2.4 foi adaptado para obter o número mínimo de caminhões necessários para o carregamento de todos os itens e, além disso, os elementos a_{ipqrs} são independentes do número de caminhões disponíveis. Para a construção deste modelo de empacotamento é necessário fazer adaptações de algumas variáveis, que são apresentadas a seguir.

Variáveis de decisão:

Z_{ipqkt} Variável binária que indica se o item i está alocado no caminhão k na posição (p,q) no período t ;

Note que no Modelo 5.1 as variáveis de carregamento fornecem apenas informações de quais itens e em qual quantidade são transportados por cada caminhão k . Com estes dados, a solução do carregamento pode ser feita por meio de permutações com repetição destes itens. No caso bidimensional as variáveis de carregamento são binárias e fornecem as posições e os caminhões em que cada item é carregado. Com isso, pode-se escrever a seguinte adaptação do modelo de empacotamento:

Modelo 5.2: Empacotamento bidimensional - minimizar número de caminhões

$$z = \min \sum_{k=1}^M \sum_{t=1}^T A_{kt} \quad (5.8)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{p \in X} \sum_{q \in Y} a_{ipqrs} Z_{ipqkt} \leq 1 \quad t = 1, \dots, T; k = 1, \dots, M; r \in X; s \in Y \quad (5.9)$$

$$\sum_{p \in X} \sum_{q \in Y} \sum_{k=1}^M Z_{ipqkt} = d_{it} \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T \quad (5.10)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{p \in X} \sum_{q \in Y} Z_{ipqkt} \leq A_{kt} \quad t = 1, \dots, T; k = 1, \dots, M \quad (5.11)$$

$$Z_{ipqkt}, A_{kt} \in \{0,1\} \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T; \\ k = 1, \dots, M; p \in X; q \in Y \end{array} \quad (5.12)$$

Como mencionado, a função objetivo (5.8) deste modelo é minimizar o número de caminhões necessários para carregar toda a demanda. As restrições (5.9) garantem a não sobreposição dos itens em todos os caminhões e para todos os períodos. As restrições (5.10) garantem que toda a demanda será transportada e, por último, a restrição (5.11) indica quais caminhões serão utilizados.

As restrições (5.9) e (5.11) podem ser substituídas por um conjunto de restrições que consideram a não sobreposição dos itens e a utilização dos caminhões. Essas restrições são dadas pelo seguinte conjunto de inequações:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{p \in X} \sum_{q \in Y} a_{ipqrs} Z_{ipqkt} \leq A_{kt} \quad t = 1, \dots, T; k = 1, \dots, M; r \in X; s \in Y \quad (5.13)$$

Com essas modificações no modelo de empacotamento, pode-se obter um modelo que integra as decisões de dimensionamento de lotes não capacitado com arranjo bidimensional da carga, proposto a seguir:

Modelo 5.3: Dimensionamento de lotes não capacitado com empacotamento bidimensional

$$z = \min \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (h_{it} I_{it}^+ + s_{it} Y_{it}) + \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^M c A_{kt} \quad (5.14)$$

$$I_{i(t-1)}^+ + X_{it} - I_{it}^+ = d_{it} \quad t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, n \quad (5.15)$$

$$X_{it} \leq \sum_{j=t}^T d_{ij} Y_{it} \quad t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, n \quad (5.16)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{p \in X} \sum_{q \in Y} a_{ipqrs} Z_{ipqkt} \leq A_{kt} \quad t = 1, \dots, T; k = 1, \dots, M; r \in X; s \in Y \quad (5.17)$$

$$\sum_{k=1}^M \sum_{p \in X} \sum_{q \in Y} Z_{ipqkt} \geq X_{it} \quad t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, n \quad (5.18)$$

$$X_{it}, I_{it}^+ \geq 0 \quad t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, n \quad (5.19)$$

$$Y_{it}, A_{kt}, Z_{ipqkt} \in \{0,1\} \quad t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, M \quad (5.20)$$

Note que a restrição (5.18) é a restrição de acoplamento dos dois problemas. Fazendo uma análise do número de restrições e variáveis do Modelo 5.3, note que, além do valor de M (número de caminhões disponíveis), o tamanho dos caminhões também tem influência nas dimensões do modelo, pois as variáveis dependem dos valores de p e q que são combinações lineares não negativas do comprimento e largura dos caminhões.

Assim como no Modelo 5.1, o modelo integrado de dimensionamento de lotes com empacotamento pode ser facilmente estendido para um modelo de dimensionamento de lotes capacitado com atraso de entrega. Para facilitar as notações na análise do modelo, será usado apenas $|X|$ e $|Y|$ para descrever as cardinalidades dos conjuntos X e Y . Dada a definição, podemos descrever algumas informações do Modelo 5.3. O Modelo 5.3 contém $2nT$ variáveis inteiras, $T(nM|X||Y|+M+n)$ variáveis binárias e $Tn(3+M|X||Y|)$ restrições. Observe que, como foi dito, o número de variáveis binárias e restrições dependem do número de caminhões disponíveis (M) e as dimensões dos caminhões, porém as dimensões dos caminhões são fixas. Assim como Modelo 5.2, o parâmetro M , na prática, é um valor estipulado pela empresa. Um método para definir um valor de M para realizar alguns testes computacionais é calcular um limitante inferior para o número de caminhões necessários para o transporte de toda a demanda, tendo como base a área dos objetos, ou seja, pode-se calcular o número de caminhões disponíveis com a equação $M = \left\lceil \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \frac{w_i l_i d_{it}}{W * L} \right\rceil$ com $\alpha > 1$.

Métodos de resolução do modelo de dimensionamento de lotes integrado com o empacotamento bidimensional não são estudados neste trabalho e são um tópico interessante para pesquisa futura. Este modelo foi aqui apresentado com o objetivo de ilustrar uma possível integração do modelo de dimensionamento de lotes com arranjo bidimensional da carga, e facilitar a apresentação do modelo tridimensional da próxima seção.

5.3 Modelo integrado de dimensionamento de lotes não capacitado e empacotamento tridimensional

O Modelo 5.1, que representa o problema integrado para o caso do empacotamento unidimensional, pode ser visto como uma relaxação do problema de empacotamento bidimensional ou tridimensional, em que a restrição de capacidade de carregamento é utilizada simplesmente como uma restrição de volume de carga. Nesta seção também é usado o modelo de dimensionamento de lotes em Wagner e Whitin (1958) (Modelo 2.1) para fazer parte do modelo integrado que representa o problema de dimensionamento de lotes com empacotamento tridimensional. Para o empacotamento tridimensional, é feita uma adaptação do Modelo 2.5 apresentado em Junqueira *et al.* (2012) para considerar o carregamento de toda a demanda em caminhões de tamanhos iguais e os períodos de produção. Para essas adaptações, considere as seguintes variáveis:

Z_{ipqrkt} Variável binária que indica se o item i está alocado no caminhão k na posição (p, q, r) no período t ;

Fazendo as devidas adaptações às variáveis e dados fornecidos para o carregamento tridimensional, pode-se escrever o seguinte modelo para o problema de empacotamento:

Modelo 5.4: Empacotamento tridimensional - Minimizar o número de caminhões

$$z = \min \sum_{k=1}^M \sum_{t=1}^T A_{kt} \quad (5.21)$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{p \in X} \sum_{q \in Y} \sum_{r \in Z} a_{ipqrsuv} Z_{ipqrkt} \leq A_{kt} \quad \begin{array}{l} k = 1, \dots, M; t = 1, \dots, T; \\ s \in X; v \in Y; u \in Z \end{array} \quad (5.22)$$

$$\sum_{p \in X} \sum_{q \in Y} \sum_{r \in Z} \sum_{k=1}^M Z_{ipqrkt} = d_{it} \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T \quad (5.23)$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{|r-h_i| \geq 0} \sum_{p \in X} \sum_{q \in Y} \sum_{s \in S} \sum_{b \in B} c_{ipq(r-h_i)svr} Z_{ipq(r-h_i)kt} \geq \alpha l_j w_j Z_{jpq(r-h_i)kt} \quad \begin{array}{l} j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T; \\ k = 1, \dots, M; s \in X; b \in Y; \\ r \in Z/\{0\} \end{array} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned}
& i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T; \\
Z_{ipqrkt}, A_{kt} \in \{0,1\} & \quad k = 1, \dots, M; p \in Y, q \in X; \\
& \quad r \in Z
\end{aligned} \tag{5.25}$$

em que os conjuntos S e B das restrições (5.24) são dados por $S = \{s \in X | p \leq s \leq p + l_j - 1\}$ e $B = \{b \in Y | q \leq t \leq q + w_j - 1\}$. A função objetivo (5.21) minimiza a soma do número de caminhões utilizados em cada período. As restrições (5.22) estão relacionadas ao arranjo dos itens nos caminhões, em cada período. Nesta restrição, junto com a definição dos parâmetros $a_{ipqrsvu}$, garantimos que não há sobreposição dos itens nos caminhões. As restrições (5.23) garantem que para cada período e cada item, a demanda será transportada em algum caminhão. A restrição (5.24), como mencionado no Modelo 2.5 garante a estabilidade horizontal da carga. Com os Modelos 2.1 e 5.4 definidos, pode-se escrever o seguinte modelo para o problema integrado de dimensionamento de lotes não capacitado com empacotamento tridimensional com estabilidade vertical de carga:

Modelo 5.5: Modelo integrado de dimensionamento de lotes não capacitado com Empacotamento Tridimensional

$$z = \min \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (h_{it} I_{it}^+ + s_{it} Y_{it}) + \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^M c A_{kt} \tag{5.26}$$

S.a.

$$I_{i(t-1)}^+ + X_{it} - I_{it}^+ = d_{it} \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T \tag{5.27}$$

$$X_{it} \leq \sum_{j=t}^T d_{ij} Y_{it} \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T \tag{5.28}$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{p \in X} \sum_{q \in Y} \sum_{r \in Z} a_{ipqrsvu} Z_{ipqrkt} \leq A_{kt} \quad k = 1, \dots, M; t = 1, \dots, T; s \in X; v \in Y; u \in Z \tag{5.29}$$

$$\sum_{p \in X} \sum_{q \in Y} \sum_{r \in Z} \sum_{k=1}^M Z_{ipqrkt} \geq X_{it} \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T \tag{5.30}$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{p \in X} \sum_{q \in Y} \sum_{s \in S} \sum_{b \in B} c_{ipq(r-h_i)sbr} Z_{ipq(r-h_i)kt} \geq \alpha l_j w_j Z_{jpq(r-h_i)kt} \quad k = 1, \dots, M; t = 1, \dots, T; s \in X; b \in Y; r \in Z/\{0\} \tag{5.31}$$

$$X_{it}, I_{it}^+ \geq 0 \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T \tag{5.32}$$

$$Y_{it}, A_{kt}, Z_{ipqrkt} \in \{0,1\} \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T; k = 1, \dots, M; s \in X; b \in Y; r \in Z/\{0\} \tag{5.33}$$

em que os conjuntos S e B das restrições (5.31) são dados por $S = \{s \in X | p \leq s \leq p + l_j - 1\}$ e $B = \{b \in Y | q \leq t \leq q + w_j - 1\}$. A função objetivo (5.26) minimiza os custos de produção e transporte. As restrições (5.27) são restrições de balanceamento de produção, estoque e atraso. As restrições (5.28) garantem que, para item em cada período, a produção ocorre apenas se a máquina estiver preparada para produção do item no período. Como no modelo anterior, a restrição (5.29) é garante o carregamento, sem sobreposição dos itens, dentro dos caminhões e a restrição (5.30) garante que toda a produção de cada item será transportada. Observe que a restrição (5.30) pode ser substituída por restrições de igualdade. As restrições (5.31) são de estabilidade horizontal da carga (como descrito no Modelo 2.5).

Assim como nos dois casos anteriores (Modelos 5.1 e 5.3), apenas um conjunto de restrições integram os dois problemas. Em Molina *et al.* (2009) e Norden e Velde (2005), os custos de transporte foram considerados convexos. Nos modelos integrados sem a unitização da produção, a função objetivo é válida para custos lineares e convexos, sendo necessária uma pequena adaptação no custo de transporte, que passa de uma constante para um vetor indicando o preço de cada caminhão utilizado. Para os custos côncavos, além desta adaptação dos custos, é necessário também adicionar uma variável que ordena os caminhões para forçar o uso dos R primeiros caminhões.

Assim como no Modelo 5.3, o número de variáveis e restrições do Modelo 5.5 de dimensionamento de lotes com empacotamento tridimensional também é influenciado pelo tamanho dos caminhões, ou seja, quanto maior for o caminhão, mais variáveis e restrições terá o modelo. O Modelo 5.5 tem $2nT$ variáveis inteiras, $TM(2+n|X||Y||Z|)$ variáveis binárias e $T(3n+2|X||Y||Z|M)$ restrições. Métodos de resolução do modelo de dimensionamento de lotes integrado com o empacotamento tridimensional não são estudados neste trabalho e são um tópico interessante para pesquisa futura. .

5.4 Modelo baseado em padrões de empacotamento

Os modelos integrados apresentados nas seções anteriores (Modelo 5.1, Modelo 5.3 e Modelo 5.5), além da solução do dimensionamento de lotes, fornecem as posições dos itens no carregamento. Nesta seção é apresentado um modelo alternativo para estes três modelos apresentados, baseado em padrões de empacotamento pré-definidos. Para a construção deste modelo, considere o modelo de dimensionamento de lotes (Modelo 2.1) e o modelo de empacotamento (Modelo 2.6) e as seguintes adaptações para os dados e variáveis apresentados.

Seja A_{pt} o número de vezes que o padrão de empacotamento ρ_p no período t é utilizado para carregar os itens. Note que esta variável A_{pt} também pode ser vista como o número de caminhões

carregando os ρ_p itens no período t . O modelo baseado em padrões de empacotamento é definido por:

Modelo 5.6: Modelo geral de dimensionamento de lotes com empacotamento

$$z = \min \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (h_{it} I_{it}^+ + s_{it} Y_{it}) + \sum_{t=1}^T \sum_{p=1}^P c A_{pt} \quad (5.34)$$

$$\text{S.a } I_{i(t-1)}^+ + X_{it} - I_{it}^+ = d_{it} \quad t = 1, \dots, T \quad i = 1, \dots, n \quad (5.35)$$

$$X_{it} \leq \sum_{k=j}^T d_{ik} Y_{it} \quad t = 1, \dots, T \quad i = 1, \dots, n \quad (5.35)$$

$$\sum_{p=1}^P \rho_{ip} A_{pt} = X_{it} \quad t = 1, \dots, T \quad i = 1, \dots, n \quad p = 1, \dots, P \quad (5.36)$$

$$X_{it}, I_{it}^+ \in \mathbb{N} \quad (5.37)$$

$$A_{pt}, \in \mathbb{N} Y_{it} \in \{0,1\} \quad (5.38)$$

Assim como nos outros modelos, apenas um conjunto de restrições é responsável pela integração dos problemas, neste caso as restrições (5.36). Uma grande dificuldade para a resolução deste modelo é determinar *a priori* todos os padrões de empacotamento quando são consideradas duas ou três dimensões no problema. Ou seja, quando o valor de P resulta muito grande. As dimensões deste modelo alternativo são influenciadas pelo número de padrões de empacotamento utilizados na resolução do problema. O Modelo 5.6 tem $T(P+2n)$ variáveis inteiras, nT variáveis binárias e $Tn(2+P)$ restrições.

Nos três modelos integrados aqui propostos (Modelos 5.1, 5.3 e 5.5), o custo de utilização de cada caminhão é dado por uma constante c , independente do número de caminhões utilizados. Nos modelos do Capítulo 3, os custos de transporte eram convexos, em que os primeiros R caminhões eram mais baratos e os demais eram mais caros. Os Modelos 5.1, 5.3 e 5.5 podem ser facilmente modificados para considerar os custos convexos, para isso basta substituir a constante c por um vetor (c_k) , $k = 1, \dots, K$, em que os R primeiros elementos do vetor (c_k) é menor do que os demais valores. Do mesmo modo podemos modificar os custos para considerar uma economia de escala.

Métodos de geração dos padrões de empacotamento (colunas) podem ser utilizados para resolver este modelo, mas não serão investigados neste trabalho e são um tópico interessante para pesquisa futura. Alguns trabalhos envolvendo a geração de colunas para problemas integrados de dimensionamento de lotes e corte de materiais são encontrados na literatura, por exemplo, em

Poltroniere (2004), Gramani e França (2006), Gramani *et al.* (2009), Gramani *et al.* (2010) Leão *et al.* (2011) e Alem e Morabito (2012). Como mencionado, com as suposições dos problemas propostos neste trabalho e considerando o contexto prático das suas aplicações, é esperado que, para a solução ótima de cada problema, sejam gerados diversos padrões de carregamento e que cada padrão de carregamento seja usado poucas vezes (em outras palavras, poucos caminhões são carregados com um mesmo tipo de arranjo da carga, provavelmente apenas um), fazendo com que os Modelos 5.1, 5.2 e 5.4 sejam mais atrativos para este estudo.

5.5 Modelos integrados de dimensionamento de lotes capacitado com arranjo físico da carga

Nesta seção apresentam-se os Modelos 5.1, 5.2 e 5.4 para considerarem restrições de capacidade de produção e atraso da demanda dentro do horizonte de planejamento. Para obter as restrições de capacidade da produção, considere os seguintes parâmetros:

b_i	Tempo necessário para a produção do item do tipo i
q_i	Tempo de preparação para a produção do item i ;
Cap_t	Capacidade de produção no período t .

Para cada período, temos que a soma do tempo de produção dos itens com o tempo de preparo da máquina não pode ser maior do que o tempo máximo de produção no mesmo período. Assim, para cada período $t = 1, \dots, T$, temos a seguinte restrição de capacidade:

$$\sum_{i=1}^n (b_i X_{it} + q_i Y_{it}) \leq Cap_t.$$

Observe que, para garantir a restrição de capacidade de produção nos Modelos 5.1, 5.3 e 5.5, basta simplesmente adicionar as restrições de capacidade nos modelos. Para considerarmos o atraso da demanda são necessárias três modificações em cada modelo. É necessário adaptar a função objetivo dos problemas para considerar os custos de atraso, a restrição de balanceamento de demanda e estoque para considerar a possibilidade de atraso na produção, e a restrição de preparo para máquina.

Para todos os modelos (Modelos 5.1, 5.3 e 5.5) a função objetivo (equações 5.1, 5.14 e 5.26, respectivamente) é dada por: $z = \min \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (h_{it} I_{it}^+ + s_{it} Y_{it}) + \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^M c A_{kt}$.

Considere os seguintes parâmetros e variáveis:

h_{it}^+	Custo unitário de estocagem do item i no final do período t ;
------------	---

h_{it}^-	Penalidade por atraso de uma unidade do item i no final do período t ;
I_{it}^+	Quantidade de itens do tipo i em estoque no final do t ;
I_{it}^-	Quantidade de itens do tipo i em atraso no final do t ;

Podemos reescrever a função objetivo dos modelos para considerar o custo de atraso na produção. A nova função objetivo dos modelos é descrita a seguir.

$$z = \min \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (h_{it}^+ I_{it}^+ + h_{it}^- I_{it}^- + s_{it} Y_{it}) + \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^M c A_{kt}.$$

Para poder produzir as demandas com atraso, temos que modificar a restrição de balanceamento de produção e estoque, que agora passa a fazer o balanceamento entre a produção, estoque e atraso. Nos modelos foi considerado o conjunto de restrições (5.2, 5.15 e 5.27) dado por $I_{i(t-1)}^+ + X_{it} - I_{it}^+ = d_{it}$. Para considerar o atraso da demanda nos modelo, este conjunto de restrições deve ser substituído por:

$$I_{i(t-1)}^+ - I_{i(t-1)}^- + X_{it} - I_{it}^+ + I_{it}^- = d_{it}.$$

Por ultimo, falta modificar a restrição de preparo da máquina (5.3, 5.16 e 5.28), que é dada por $X_{it} \leq \sum_{k=j}^T d_{ik} Y_{ij}$. Observe que, com esta restrição, estamos limitando a produção de um período j à soma das demandas de períodos futuros $j, j+1, \dots, T$, o que não é válido quando consideramos a possibilidade de atraso da demanda dentro do horizonte de planejamento. Para considerar todas as possibilidades de atraso na produção as restrições de preparo de máquina devem substituídas por:

$$X_{it} \leq \sum_{k=1}^T d_{ik} Y_{it}.$$

Para ilustrar as modificações feitas nos modelos, reescrevemos o Modelo 5.1 considerando restrições de capacidade e atraso na demanda. Os demais modelos podem ser escritos de maneira similar considerando as modificações comentadas anteriormente. Lembrando que, em todos os casos, estamos admitindo que o estoque e atraso iniciais e bem como, o estoque e atraso no último período são iguais a zero, ou seja, todos os modelos têm a seguinte restrição: $I_{i0}^+ = I_{i0}^- = I_{iT}^+ = I_{iT}^- = 0$.

Modelo 5.7: Dimensionamento de lotes capacitado com empacotamento unidimensional

$$z = \min \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (h_{it}^+ I_{it}^+ + h_{it}^- I_{it}^- + s_{it} Y_{it}) + \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^M c A_{kt}. \quad (5.39)$$

$$I_{i(t-1)}^+ - I_{i(t-1)}^- + X_{it} - I_{it}^+ + I_{it}^- = d_{it}. \quad t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, n \quad (5.40)$$

$$\sum_{i=1}^n (b_i X_{it} + q_i Y_{it}) \leq \text{Cap}_t. \quad t = 1, \dots, T \quad (5.41)$$

$$X_{it} \leq \sum_{j=1}^T d_{ij} Y_{jt} \quad t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, n \quad (5.42)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i Z_{ikt} \leq W A_{kt} \quad t = 1, \dots, T; k = 1, \dots, M \quad (5.43)$$

$$\sum_{k=1}^M Z_{ikt} = X_{it} \quad t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, n \quad (5.44)$$

$$X_{it}, I_{it}^+, I_{it}^- \geq 0; Z_{ikt} \in \mathbb{N} \quad t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, M \quad (5.45)$$

$$Y_{it}, A_{kt} \in \{0,1\} \quad t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, M \quad (5.46)$$

Na seção a seguir são apresentados e analisados os resultados de alguns testes computacionais para o Modelo 5.1 (sem a restrição de capacidade e sem atraso da demanda) e para o Modelo 5.7 (com restrição de capacidade e atraso da demanda)

5.6 Testes computacionais

Nesta seção são testados os modelos de dimensionamento de lotes integrado com o problema de empacotamento unidimensional (Modelos 5.1 e 5.7). Inicialmente é descrita a maneira como os dados dos experimentos foram gerados e, posteriormente, são apresentados alguns resultados computacionais obtidos a partir da resolução dos modelos pelo pacote de otimização AMPL/CPLEX. Os testes com os demais modelos apresentados neste capítulo são deixados para pesquisa futura.

5.6.1 Geração dos dados

Para gerar os dados descritos na Tabela 5-1, como tamanho dos itens e tamanho dos caminhões, foram considerados os dados descritos em Beasley (1985) (os dados detalhados estão disponíveis em Beasley *OR- Library*).

Tabela 5-1: Dados fixos dos modelos

n	{5,10}	O número de tipos de itens num problema é fixado em 5 ou 10
T	{5,10}	A quantidade de períodos num problema é fixado em 5 ou 10
M	$M = \left\lceil \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \frac{w_i d_{it}}{W} \right\rceil$	O número de caminhões é obtido utilizando a expressão descrita e com o valor de $\alpha = 1,5$
w_i	(20,100)	O tamanho dos itens é sorteado entre os valores 20 e 100
W	1000	O tamanho do caminhão é fixado em 1000
s_{it}	100	O custo de preparo da máquina para a produção dos itens nos períodos é igual a 100
h_{it}^+	3	O custo de estocagem por unidade por período é fixado em 3
C	{100, 150, 200, 400, 3000}	Os custos de transporte são fixados em 100, 150, 200, 400 ou 3000

As instâncias exemplares a seguir são baseadas em Beasley (1985), que utiliza em média 500 itens para o problema de empacotamento. Assim, utilizou-se uma demanda média de 100 itens por período para 5 períodos ou 50 itens por período para as instâncias com 10 períodos. Por isso, os valores de n e T são menores aqueles utilizados nos modelos dos capítulos anteriores.

Como realizados nos modelos anteriores, são fixados alguns valores e outros são sorteados uniformemente em um intervalo. Por exemplo, o tamanho dos itens w_i é escolhido aleatoriamente entre 20 e 100. A demanda d_{it} é gerada aleatoriamente para que a soma de todos os itens em todos os períodos seja igual a 500 (100 ou 50 para item). Para cada demanda e tamanho dos itens gerados (quatro tipos para cada n e T fixo) são gerados cinco exemplares, um para cada custo de transporte. Com isso, a nomenclatura das classes destes testes é definida do seguinte modo: classe *.1 com custo de transporte $C=100$, classe *.2 com custo $C=150$, classe *.3 com custo $C=200$, classe *.4 com $C=400$ e classe *.5 com $C=3000$.

5.6.2 Resultados computacionais: Modelo 5.1

O Modelo 5.1 foi codificado na sintaxe da linguagem de modelagem AMPL 9.0 e resolvido pelo método *branch-and-cut* do pacote computacional CPLEX 11.1.1 com os parâmetros *default*, utilizando um microcomputador Intel Core i7 de 2,80GHz e 8G de memória com sistema

operacional Windows 7 Ultimate. Neste caso, o tempo de resolução do CPLEX 11.1.1 foi limitado em 3600 segundo.

Exemplo ilustrativo:

Antes de apresentar os resultados dos testes computacionais, faremos uma análise mais detalhada dos resultados obtidos para um exemplar da Classe 1.1. Este exemplar tem 5 itens, 5 períodos e 30 caminhões para cada período. O custo de preparo da máquina é de 100 unidades monetárias e o custo de estoque é de 3 unidades monetárias por item. O custo de cada caminhão é de 100 unidades monetárias. Os tamanhos (e.g., peso ou volume) de cada item são 56, 57, 33, 56, 58, respectivamente e o tamanho de cada caminhão é de 1000. A demanda do itens por período é dada pela matriz 5x5 abaixo, em que as linhas indicam os itens e as colunas os períodos:

$$d_{ij} = \begin{pmatrix} 83 & 22 & 7 & 11 & 1 \\ 9 & 5 & 64 & 0 & 18 \\ 58 & 10 & 5 & 17 & 9 \\ 65 & 28 & 9 & 2 & 0 \\ 29 & 78 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ao resolvermos este problema considerando inicialmente apenas o problema de dimensionamento de lotes e, somente depois, com a solução do problema de dimensionamento de lotes, obtermos o número de caminhões necessários para o transporte da produção em cada período, obtermos uma solução ótima para o problema de dimensionamento de lotes com função objetivo (considerando apenas os custos de produção) de valor igual a 1355 unidades monetárias. Para esta solução, são necessários 31 caminhões para o transporte de toda produção, o que gera um custo total de $1355 + 3100 = 4355$.

Por outro lado, ao resolvermos este problema integrado considerando primeiro apenas o problema de empacotamento, levando em conta toda a demanda, obtermos como solução ótima do problema de empacotamento 28 caminhões, ou seja, são necessários no mínimo 28 caminhões para transportar toda a demanda. A partir desta solução de empacotamento, resolvemos então o problema de dimensionamento de lotes, ou seja, a produção dos itens tem que ser realizada de modo a utilizar exatamente os 28 caminhões. Resolvendo este problema de dimensionamento de lotes, obtermos um custo de produção de 1980, ou seja, temos um custo total de $1980 + 2800 = 4780$, que, neste caso, é pior do que o da primeira resolução.

Se resolvermos o mesmo problema integrado utilizando o Modelo 5.1 e o pacote AMPL/CPLEX, obtermos uma solução cujo custo de produção é de 1373 e para o transporte desta

produção são necessários 29 caminhões, ou seja, a solução ótima fornecida na resolução do modelo integrado tem custo total de $1373 + 2900 = 4273$. Esse exemplo ilustra o ganho ao se resolver o problema integrado em relação a resolução seqüencial dos dois problemas.

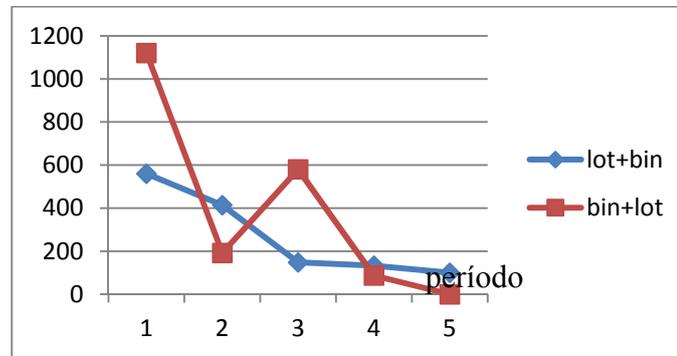


Figura 5-2: Custos de produção por período – Classe 1.1

A Figura 5-2 mostra os custos de produção, por período, quando resolvemos seqüencialmente o problema de dimensionamento de lotes e depois o problema de empacotamento (linha lot+bin), ou vice-versa (linha bin+lot). Observe que, quando resolvemos primeiro o problema de dimensionamento de lotes e depois o de empacotamento, o custo de produção fica mais balanceado ao longo dos períodos, quando comparado com a resolução em que primeiro é resolvido o problema de empacotamento e depois o de dimensionamento de lotes.

Esse mesmo estudo foi repetido para outros exemplares e, em todos os casos, foi notado o mesmo *trade-off* entre os custos de produção e o custo de transporte. Em todos os casos a melhor solução foi obtida com a resolução do modelo integrado, como seria esperado. A seguir apresentamos o resumo dos testes realizados com todos os exemplares e os resultados obtidos foram analisados considerando:

TC Tempo computacional do AMPL/CPLEX;

Função Valor da função objetivo (5.1) para a melhor solução obtida
Objetivo pelo AMPL/CPLEX

GAP Valor do $Gap = |LS - LI| / (e^{-10} + |LS|)$ (cálculo efetuado pelo pacote de otimização);

As tabelas com os resultados do pacote de otimização são apresentados de acordo com o tamanho dos problemas, ou seja, são apresentadas quatro tabelas na seguinte ordem, considerando o número de tipos de itens e quantidade de períodos: 5X5, 5X10, 10X5 e 10X10. Isto é, a primeira

tabela traz informações sobre os exemplares com 5 tipos de itens e 5 períodos, a segunda tabela traz informações sobre os exemplares com 5 tipos de itens e 10 períodos, e assim por diante.

Tabela 5-2: Resultados dos testes (5x5) – Modelo 5.1 –CPLEX

	<i>TC</i>	Função Objetivo	<i>GAP</i>
classe 1.1	178,31	4273	0,00%
classe 1.2	1709,79	5723	0,86%
classe 1.3	1958,69	7173	1,82%
classe 1.4	2004,10	12973	2,11%
classe 1.5	2219,07	88472	3,68%
classe 2.1	1325,66	4411	2,26%
classe 2.2	1663,23	5871	2,75%
classe 2.3	1535,12	7311	2,81%
classe 2.4	1476,29	13117	3,36%
classe 2.5	2218,46	88472	3,68%
classe 3.1	1760,49	4046	0,89%
classe 3.2	1589,74	5496	2,55%
classe 3.3	1455,08	6812	0,19%
classe 3.4	1454,12	12412	0,24%
classe 3.5	1741,12	88172	3,72%
classe 4.1	1809,57	3700	0,25%
classe 4.2	1904,42	5237	0,87%
classe 4.3	1820,13	6687	1,06%
classe 4.4	1018,01	12511	1,37%
classe 4.5	2654,83	87989	3,03%

A Tabela 5-2 mostra que quanto maior for o custo de transporte, maior é a dificuldade para o CPLEX resolver o modelo integrado. Isto ocorre, pois quanto maior o custo de transporte, a *trade-off* “pesa” mais para o problema de empacotamento, e este é de difícil resolução. Isso fica mais claro observando os resultados das classes *.5, onde os custos de transporte são altos e, para obter a solução ótima desses exemplares, é necessário obter a solução ótima para o arranjo da carga, pois os

custos de produção são baixos quando comparados ao custo de transporte. Com exceção do primeiro exemplar (classe 1.1), para todas os exemplares, o CPLEX parou a resolução dos problemas por “estouro de memória”. Isto pôde ser notado, pois embora o CPLEX tenha sido limitado em 3600 segundos, o pacote finalizou a resolução em um tempo menor do que o estipulado e com um *GAP* maior do que o estipulado pelo *default* (0,01%). Embora o pacote de otimização tenha finalizado a resolução antes do tempo estipulado, os *GAPs* obtidos pelo pacote foram baixos, ficando entre 0,7% e 3,9%, com exceção da Classe 1.1. Não foi encontrada nenhuma justificativa lógica para explicar a facilidade de resolução dos exemplares da Classe 1.1.

Na Tabela 5-3 pode-se notar que aumentar o número de períodos influencia na resolução do problema. Essa influência faz com que o custo de transporte tenha um efeito diferente do que ocorre com os testes apresentados na Tabela 5-2. Em outras palavras, neste caso, quanto maior for o custo de transporte, mais fácil fica para o pacote CPLEX resolver o problema. Isso ocorre, pois quando o custo de transporte é próximo ao custo de preparo de máquina (em especial quando esses custos são iguais, classe *.1), existe uma variedade de soluções com valores próximos a serem analisadas. Por exemplo, o custo de preparo de máquina para produzir um determinado tipo de item para aproveitar a capacidade de carregamento de um caminhão é o mesmo que o custo de utilizar um novo caminhão num outro período para o transporte deste item. Quando o custo de transporte é muito mais alto do que o custo de produção (classe *.5), as reduções no custo de transporte são mais significativas do que as reduções no custo de preparação. Tal fato pode ter auxiliado a “poda” da árvore de busca do método *branch-and-cut*. Note que neste caso é preferível economizar no transporte.

Embora nos casos com mais períodos o CPLEX tenha tido mais facilidade para resolver os problemas com custo de transporte mais alto, ele ainda não obtêm a solução ótima para estes problemas ($GAP \leq 0,01\%$). Isto ocorre devido à dificuldade com as restrições relacionadas ao empacotamento (obter a solução ótima para o arranjo da carga nos caminhões). Assim como nos testes anteriores, o pacote de otimização parou a resolução sem provar a otimalidade da solução. Isso pode ser verificado analisando o tempo de resolução e o *GAP* fornecido. A qualidade das soluções encontradas é boa, tendo o *GAP* entre 1,5% e 3%. Não foi possível, para estes exemplares, verificar uma relação entre os custos (transporte e produção) e a qualidade da solução.

Tabela 5-3: Resultados dos testes (5x10) – Modelo 5.1 – CPLEX

	TC	Função Objetivo	GAP
classe 1.1	1877,88	5162	2,66%
classe 1.2	1900,35	6838	2,83%
classe 1.3	2354,20	8464	2,17%
classe 1.4	1565,28	15064	1,93%
classe 1.5	3000,62	100888	1,76%
classe 2.1	1705,96	5309	2,35%
classe 2.2	1933,34	6951	1,84%
classe 2.3	1193,18	86,01	1,94%
classe 2.4	1221,50	15201	1,78%
classe 2.5	1237,89	101135	1,94%
classe 3.1	2312,72	5687	2,76%
classe 3.2	2241,02	7372	2,55%
classe 3.3	2325,68	8991	2,71%
classe 3.4	2433,51	15592	2,38%
classe 3.5	1800,37	101422	2,09%
classe 4.1	3600,31	6656	2,09%
classe 4.2	3600,73	8285	1,83%
classe 4.3	3600,26	9941	1,51%
classe 4.4	3166,76	16573	2,19%
classe 4.5	1941,64	102571	2,23%

Na Tabela 5-4 pode-se analisar o que acontece quando se aumenta o número de tipos de itens no problema. Com exceção das classes 4.* e 1.5, foi observado o mesmo comportamento dos testes da Tabela 4-2, ou seja, quando o custo de transporte é maior, o *GAP* de resolução fica maior devido à dificuldade com as restrições relacionadas ao arranjo dos itens.

Na maioria dos casos, os resultados da Tabela 5-5 apresentam o mesmo comportamento da Tabela 5-2. Uma diferença dos outros testes é que, nestes resultados, o CPLEX é capaz de garantir a otimalidade da solução encontrada para as classes 4.1, 4.2 e 4.3. A resolução do problema de dimensionamento de lotes para a classe 4.* é mais simples, não precisando de estoque entre os períodos. Isso pode ser um dos motivos para esse comportamento diferenciado na resolução dessas classes.

Tabela 5-4: Resultados dos testes (10x5) – Modelo 5.1 –CPLEX

	TC	Função Objetivo	GAP
classe 1.1	1877,88	6290	2,09%
classe 1.2	1900,35	8102	2,61%
classe 1.3	2354,20	9902	2,77%
classe 1.4	1565,28	17102	3,07%
classe 1.5	3000,62	108016	1,01%
classe 2.1	1705,96	6143	1,53%
classe 2.2	1933,34	7974	2,30%
classe 2.3	1193,18	9774	2,51%
classe 2.4	1221,50	16974	2,95%
classe 2.5	1237,89	110574	3,39%
classe 3.1	2312,72	6463	2,77%
classe 3.2	2241,02	8239	2,54%
classe 3.3	2325,68	10056	2,77%
classe 3.4	2433,51	17250	3,14%
classe 3.5	1800,37	110880	3,45%
classe 4.1	3600,31	6977	1,45%
classe 4.2	3600,73	8765	1,73%
classe 4.3	3600,26	10504	1,46%
classe 4.4	3166,76	17422	0,69%
classe 4.5	1941,64	111401	3,37%

Tabela 5-5: Resultados dos testes (10x10) –Modelo 5-1 –CPLEX

	TC	Função Objetivo	GAP
classe 1.1	1114,06	6153	1,04%
classe 1.2	1202,18	7653	1,20%
classe 1.3	1350,99	9153	1,23%
classe 1.4	1344,25	15153	1,95%
classe 1.5	2839,41	93160	3,06
classe 2.1	2435,68	7303	1,28%
classe 2.2	2778,6	8883	1,27%
classe 2.3	2706,43	10501	2,37%
classe 2.4	3600,38	16577	1,50%
classe 2.5	2751,74	97497	1,85%

	TC	Função Objetivo	GAP
classe 3.1	3261,01	7800	1,27%
classe 3.2	3221,58	9333	2,11%
classe 3.3	2911,23	10800	2,38%
classe 3.4	2806,62	16809	2,53%
classe 3.5	2125,71	94962	3,29
classe 4.1	1,450	4300	0,00%
classe 4.2	115,90	5906	0,00%
classe 4.3	1093,10	7456	0,00%
classe 4.4	1893,69	13572	1,52
classe 4.5	3028,01	91572	2,98

5.6.3 Resultados computacionais: Modelo 5.7

O Modelo 5.7 também foi codificado na sintaxe da linguagem de modelagem AMPL 9.0 e resolvido pelo método *branch-and-cut* do pacote computacional CPLEX 11.1.1 com os parâmetros *default*, utilizando um microcomputador Intel Core i7 de 2,80GHz e 8G de memória com sistema operacional Windows 7 Ultimate. Neste caso, o tempo de resolução do CPLEX 11.1.1 foi limitado em 3600 segundos. Os dados relacionados à capacidade de produção foram gerados baseados em Trigeiro *et al.*(1989) e obtido pela expressão

$$Cap_t = \left\lfloor \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^T (b_i d_{ik} + q_i)}{0,85T} \right\rfloor; t = 1, \dots, T.$$

A seguir apresentamos o resumo dos testes realizados com todos os exemplares e os resultados obtidos foram analisados considerando:

<i>TC</i>	Tempo computacional do CPLEX;
Função Objetivo	Valor da função objetivo (5.1) para a melhor solução encontrada pelo pacote AMPL/CPLEX
<i>GAP</i>	Valor do $Gap = LS - LI / (e^{-10} + LS)$ (cálculo efetuado pelo pacote de otimização);

As tabelas com os resultados do pacote de otimização são apresentados de acordo com o tamanho dos problemas, ou seja, são apresentadas quatro tabelas na seguinte ordem, considerando o número de tipos de itens e quantidade de períodos: 5X5, 5X10, 10X5 e 10X10. Isto é, a primeira tabela traz informações sobre os exemplares com 5 tipos de itens e 5 períodos, a segunda tabela traz informações sobre os exemplares com 5 tipos de itens e 10 períodos, e assim por diante.

Tabela 5-6: Resultados dos testes (5x5) – Modelo 5.7 –CPLEX

	<i>TC</i>	Função Objetivo	<i>GAP</i>
classe 1.1	3600,35	5295,00	0,01%
classe 1.2	3600,00	6745,00	0,02%
classe 1.3	3600,01	8197,00	0,02%
classe 1.4	3600,00	14058,00	0,03%
classe 1.5	3600,00	89395,00	0,04%
classe 2.1	3600,00	6471,00	0,02%
classe 2.2	3600,00	7921,00	0,02%
classe 2.3	3600,00	9371,00	0,02%
classe 2.4	3600,00	15171,00	0,03%
classe 2.5	3600,00	89395,00	0,04%
classe 3.1	3600,00	5713,00	0,01%
classe 3.2	3600,00	7163,00	0,01%
classe 3.3	3600,00	8613,00	0,01%
classe 3.4	3600,00	14413,00	0,01%
classe 3.5	3600,00	91183,00	0,04%
classe 4.1	3600,00	3700,00	0,02%
classe 4.2	3600,00	5237,00	0,02%
classe 4.3	3600,00	6687,00	0,02%
classe 4.4	3600,00	12511,00	0,22%
classe 4.5	3600,00	88081,00	0,23%

Pode-se perceber na Tabela 5-6 que o pacote de otimização utilizou o tempo máximo de resolução e não provou a otimalidade das soluções. Um fato que desperta a curiosidade é que,

quando adicionamos as restrições de capacidade nos exemplares da seção anterior, o pacote de otimização obteve uma solução mais próxima da ótima. Isto pode ser observado na Tabela 5-2, pois os *GAPs* são todos superiores a 1% e na Tabela 5-6 com todos os *GAPs* menores do que 0,3%. Não foi identificado o motivo do AMPL/CPLEX executar o tempo máximo estipulado para os problemas com restrição de capacidade e para os problemas sem restrição de capacidade, o AMPL/CPLEX ter tido dificuldades relacionadas à memória do computador (Tabela 5-5).

Assim como no caso não capacitado (Tabela 5-3), na Tabela 5-7 pode-se notar que aumentar o número de períodos influencia na resolução do problema. Isto pode ser verificado no aumento do *GAPs* das soluções encontradas pelo pacote de otimização. Note que, na Tabela 5-6, em que há 5 tipos de itens e 5 períodos, os *GAPs* são próximos de zero, enquanto que na Tabela 5-7, em que aumentamos o número de períodos para 10, os *GAPs* obtidos na resolução são superiores a 1,2%. Não foi verificada alguma influência dos custos de transporte na qualidade da solução encontrada pelo pacote de otimização.

Tabela 5-7: Resultados dos testes (5x10) – Modelo 5.7 – CPLEX

	TC	Função Objetivo	<i>GAP</i>
classe 1.1	3600,00	9596,00	1,44
classe 1.2	3600,82	12514,00	1,56
classe 1.3	3600,07	15434,00	2,06
classe 1.4	3617,55	26768,00	1,87
classe 1.5	3607,94	175164,00	2,18
classe 2.1	3602,22	10981,00	1,84
classe 2.2	3600,71	13881,00	2,70
classe 2.3	3611,47	16781,00	2,13
classe 2.4	3601,04	28381,00	3,15
classe 2.5	3603,48	176681,00	2,30
classe 3.1	3607,88	10012,00	1,38
classe 3.2	3605,31	12896,00	1,22
classe 3.3	3600,17	15808,00	1,28
classe 3.4	3600,23	27267,00	1,42
classe 3.5	3601,11	176095,00	1,79
classe 4.1	3603,37	7305,00	3,34
classe 4.2	3603,91	10314,00	3,74
classe 4.3	3600,13	13260,00	4,07
classe 4.4	3609,34	24842,00	2,37
classe 4.5	3600,52	173663,00	1,93

Quando o número de tipos de itens é aumentado e continuamos com 5 períodos (Tabela 5-8), podemos perceber que o pacote de otimização também piora a qualidade das soluções

encontradas (coluna *GAP*). Se compararmos a qualidade das soluções encontradas nos casos com 5 períodos e 10 itens (Tabela 5-7) e 10 períodos e 5 itens (Tabela 5-8), podemos verificar que aumentar o número de períodos do horizonte de planejamento dificulta ainda mais o problema, quando comparado ao aumento do número de itens.

Tabela 5-8: Resultados dos testes (10x5) – Modelo 5.7 –CPLEX

	TC	Função Objetivo	<i>GAP</i>
classe 1.1	3600	12188	1,07
classe 1.2	3600	15234	1,12
classe 1.3	3600	18450	1,25
classe 1.4	3600	27590	1,63
classe 1.5	3600	168456	2,15
classe 2.1	3600	14068,00	0,74
classe 2.2	3600	16918,00	0,94
classe 2.3	3600	19768,00	1,13
classe 2.4	3600	31168,00	1,58
classe 2.5	3600	179429,00	2,09
classe 3.1	3600	13361,00	0,82
classe 3.2	3600	16261,00	1,01
classe 3.3	3600	19161,00	1,14
classe 3.4	3600	30761,00	1,42
classe 3.5	3600	179322,00	2,06
classe 4.1	3600	7000,00	2,77
classe 4.2	3600	9927,00	2,86
classe 4.3	3600	12827,00	2,37
classe 4.4	3600	24490,00	1,94
classe 4.5	3600	172992,00	1,66

Após os resultados das três tabelas anteriores, seria esperado que, ao se aumentar o número de tipos de itens e períodos (mesmo os exemplares tendo em média 500 itens) dos exemplares, então o pacote AMPL/CPLEX teria mais dificuldade para resolver os exemplares, comparado com os exemplares com 5 itens e 5 períodos. De fato o pacote de otimização encontra solução com *GAPs*, em média, maiores do que os encontrados nos problemas menores (Tabela 5-6). Não foi possível perceber algum comportamento especial na resolução dos problemas desta classe em relação à diferença dos custos de transporte.

Tabela 5-9: Resultados dos testes (10x10) – Modelo 5-7 –CPLEX

	TC	Função Objetivo	GAP
classe 1.1	3600	21142	3,41%
classe 1.2	3600	26738	2,14%
classe 1.3	3600	32715	3,17%
classe 1.4	3600	55696	3,19%
classe 1.5	3600	360058	4,46%
classe 2.1	3600	23226	1,69%
classe 2.2	3600	29048	2,30%
classe 2.3	3600	34869	2,57%
classe 2.4	3600	58408	3,54%
classe 2.5	3600	360528	3,95%
classe 3.1	3600	22028	1,33%
classe 3.2	3600	27808	1,55%
classe 3.3	3600	33518	1,49%
classe 3.4	3600	56631	1,85%
classe 3.5	3600	356878	3,07%
classe 4.1	3600	13935	2,98%
classe 4.2	3600	19835	2,80%
classe 4.3	3600	25654	2,40%
classe 4.4	3600	48847	1,78%
classe 4.5	3600	346921	2,01%

Neste capítulo, apresentamos alguns modelos que integram o problema de dimensionamento de lotes com o empacotamento. O foco do capítulo foi principalmente nos modelos de dimensionamento de lotes com empacotamento unidimensional, que foram implementados no AMPL. Alguns testes foram realizados com auxílio do pacote de otimização AMPL/CPLEX, com o objetivo de identificar se existe um *trade-off* entre os custos de produção e os custos de transporte em relação ao volume de produção em cada período. Para estes testes, foram considerados custos de transporte de tal modo que, inicialmente os custos de transporte são baixos, comparativamente aos custos de produção, o que permite resolver cada problema isoladamente, focando primeiro na resolução do problema de produção e depois no problema de transporte. Por último, os custos de

transporte considerados são altos, comparados com os custos de produção, também permitindo a resolução de cada problema separadamente, porém, focando agora primeiro na resolução do problema de transporte. No próximo capítulo estudamos alguns métodos heurísticos para resolução dos problemas de dimensionamento de lotes integrados com empacotamento unidimensional.

6 Heurísticas para resolução dos problemas integrados de dimensionamento de lotes com empacotamento unidimensional

Neste capítulo são estudadas e propostas algumas abordagens heurísticas de resolução dos problemas integrados de dimensionamento de lotes e empacotamento unidimensional representados pelos Modelos 5.1 e 5.7. O objetivo é investigar diferentes estratégias de resolução dos problemas, para depois analisar e comparar os resultados obtidos entre as estratégias e a solução encontrada pelo método *branch-and-cut* do pacote de otimização CPLEX, utilizando os Modelos 5.1 e 5.7. Assim como no capítulo anterior, o estudo começa com o problema integrado de dimensionamento de lotes com arranjo de carga sem as considerações de capacidade da produção e atraso da demanda. Quatro estratégias de resolução são exploradas para resolver o Modelo 5.1, Após este estudo, baseado nos resultados de cada heurística, algumas estratégias foram adaptadas para o problema integrado de dimensionamento de lotes capacitado com arranjo de carga e atraso da demanda (Modelo 5.7).

Quando o problema de dimensionamento de lotes é resolvido integrado ao problema de arranjo de carga com custos de transporte, as variáveis de preparo de um lado e a variável de estoque junto com a variável de transporte de outro lado são as responsáveis pela decisão da produção. Se o custo de estoque mais o custo de transporte de uma determinada quantidade de itens for menor que o custo de preparo da máquina num outro período, é considerada a decisão de produzir para estocar pois assim economiza-se o custo de preparo da máquina para a produção. Por outro lado, se o custo do estoque mais o custo de transporte for muito alto, compensa diminuir o estoque, realizando um número maior de preparo da máquina para a produção. Nas duas primeiras abordagens a seguir, os problemas de dimensionamento e transporte são desacoplados e com isso a variável de estoque é incluída em apenas um dos problemas. Neste trabalho considerou-se a variável de estoque como uma variável do problema de dimensionamento. Note que, desta maneira, quando o problema é separado são obtidos dois problemas conhecidos na literatura.

6.1 Métodos heurísticos para o problema integrado de dimensionamento de lotes com arranjo físico da carga

Como mencionado, nesta seção apresentamos quatro métodos heurísticos de resolução, apresentando estratégias diferentes para encontrar boas soluções para o Modelo 5.1. Este estudo é realizado para obter mais conhecimentos sobre o problema integrado e poder desenvolver, em seguida, heurísticas para o problema integrado de dimensionamento de lotes capacitado e possibilidade de atraso no atendimento da demanda (Modelo 5.4).

6.1.1 Heurística Lagrangiana para o problema de dimensionamento de lotes com empacotamento unidimensional

O objetivo desta seção é construir uma heurística Lagrangiana para o problema integrado de dimensionamento de lotes e empacotamento unidimensional. Por conveniência, o Modelo 5.1 é rerepresentado a seguir:

Modelo 5.1: Dimensionamento de lotes com empacotamento unidimensional

$$z = \min \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (h_{it} I_{it}^+ + s_{it} Y_{it}) + \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^M c A_{kt} \quad (5.1)$$

$$\text{S.a.} \quad I_{i(t-1)}^+ + X_{it} - I_{it}^+ = d_{it} \quad t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, n \quad (5.2)$$

$$X_{it} \leq \sum_{j=t}^T d_{ij} Y_{it} \quad t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, n \quad (5.3)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i Z_{ikt} \leq W A_{kt} \quad t = 1, \dots, T; k = 1, \dots, M \quad (5.4)$$

$$\sum_{k=1}^M Z_{ikt} \geq X_{it} \quad t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, n \quad (5.5)$$

$$X_{it}, I_{it}^+ \geq 0; Z_{ikt} \in \mathbb{N} \quad t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, M \quad (5.6)$$

$$Y_{it}, A_{kt} \in \{0,1\} \quad t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, M \quad (5.7)$$

Note que a única restrição que relaciona o problema de dimensionamento de lotes com o empacotamento unidimensional é a restrição (5.5). Assim, para construir a relaxação Lagrangiana do problema, são relaxadas as restrições que integram o problema (5.5). Para isso, considere as seguintes variáveis Lagrangianas:

- $\mu_{it} \geq 0$ - variável Lagrangiana relacionada às restrições de empacotamento com as de produção. Com essas considerações, podemos escrever a seguinte relaxação do problema representado pelo Modelo 5.1:

Modelo 6.1: Dimensionamento de lotes capacitado com empacotamento unidimensional

$$z = \min \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (h_{it}^+ I_{it}^+ + s_{it} Y_{it}) + \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^M c A_{kt} + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n \left(\mu_{it} \left(X_{it} - \sum_{k=1}^M Z_{ikt} \right) \right) \quad (6.1)$$

$$\text{S.a.} \quad I_{it-1}^+ + X_{it} - I_{it}^+ = d_{it} \quad t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, n \quad (6.2)$$

$$X_{it} \leq \sum_{j=t}^T d_{ij} Y_{jt} \quad t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, n \quad (6.3)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i Z_{ikt} \leq W A_{kt} \quad t = 1, \dots, T; k = 1, \dots, M \quad (6.4)$$

$$X_{it}, I_{it}^+ \geq 0, Z_{ikt} \in \mathbb{N} \quad t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, M \quad (6.5)$$

$$Y_{it}, A_{kt} \in \{0,1\} \quad t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, M \quad (6.7)$$

Observe no Modelo 6.1 que não há mais as restrições que integram os problemas de dimensionamento de lotes e o problema de empacotamento. Assim, podemos resolver a relaxação Lagrangiana separando em dois subproblemas, o primeiro relacionado ao problema de dimensionamento de lotes e o outro relacionado ao problema de empacotamento. Convém observar que o Modelo 6.1 é uma das possíveis relaxações Lagrangianas para o Modelo 5.1. A motivação para a escolha desta relaxação Lagrangiana foi poder desacoplar as decisões de planejamento da produção das decisões de transporte. O problema de dimensionamento de lotes é então dado pelo seguinte modelo:

Modelo 6.2: Dimensionamento de lotes resultante da relaxação.

$$z = \min \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (h_{it}^+ I_{it}^+ + s_{it} Y_{it} + \mu_{it} X_{it}) \quad (6.8)$$

$$\text{S.a} \quad I_{it-1}^+ + X_{it} - I_{it}^+ = d_{it} \quad t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, n \quad (6.9)$$

$$X_{it} \leq \sum_{j=t}^T d_{ij} Y_{jt} \quad t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, n \quad (6.10)$$

$$X_{it}, I_{it}^+ \geq 0 \quad t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, n \quad (6.11)$$

$$Y_{it} \in \{0,1\} \quad t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, n \quad (6.12)$$

O Modelo 6.2 pode ser resolvido com o método descrito em Wagner e Within (1958), assim foi realizado na heurística Lagrangiana descrita no Capítulo 3. O problema de empacotamento obtido a partir da relaxação Lagrangiana do Modelo 5.1 é dado pelo seguinte modelo:

Modelo 6.3: Empacotamento unidimensional resultante da relaxação

$$z = \min \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^M (c A_{kt} - \sum_{i=1}^n \mu_{it} Z_{ikt}) \quad (6.13)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i Z_{ikt} \leq W A_{kt} \quad t = 1, \dots, T; k = 1, \dots, M \quad (6.14)$$

$$Z_{ikt} \in \mathbb{N} \quad t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, M \quad (6.15)$$

$$A_{kt} \in \{0,1\} \quad t = 1, \dots, T; k = 1, \dots, M \quad (6.16)$$

Note que se $\mu_{it} = 0$ para todo i e t , então a solução ótima deste problema será não transportar nenhum item nos caminhões, obtendo o valor ótimo da função igual a zero. Caso exista algum $\mu_{it} > 0$, teremos um problema de múltiplas mochilas. Para obter a solução ótima do problema de múltiplas mochilas, este problema pode ser resolvido considerando apenas uma mochila e aplicando a mesma solução para as demais M mochilas, pois não existe um limite máximo de itens que devem ser transportados. Observe que a solução ótima deste problema será menor ou igual a zero, o que não é interessante para a solução da relaxação, uma vez que queremos obter o melhor limitante da relaxação Lagrangiana. Assim, temos que desenvolver limitantes mínimo e máximo para o transporte dos itens e adicionar estes limitantes à relaxação do problema. Além disso, esses limitantes terão que ser inequações válidas para o problema inicial.

Observe também que adicionar duas restrições para impor quantidades mínima e máxima a serem transportadas por todos os caminhões dificulta o problema descrito no Modelo 6.3, impossibilitando sua resolução por inspeção ou por fórmulas bem conhecidas de programação dinâmica, como feito por Wagner e Within (1958). Além disso, é necessário determinar bons limitantes para o problema de empacotamento, pois caso isso não ocorra, a resolução do problema pode se tornar difícil, assim como aconteceu com o Modelo 3.1 no Capítulo 4. Dadas essas dificuldades, e considerando as boas oportunidades dos métodos apresentados nas próximas seções, resolvemos deixar a construção desses limitantes e da resolução do Modelo 5.1 via relaxação Lagrangiana como uma proposta para pesquisa futura. Decidimos investigar neste estudo outros métodos heurísticos de resolução do problema, como as Estratégias 1 e 2 a seguir e um método de otimização baseado em colônias de formigas.

6.1.2 Estratégia 1 (Foco no dimensionamento e empacotamento *a posteriori*)

Esta estratégia consiste de um método relativamente simples de resolução do Modelo 5.1. Resolvemos primeiro o problema de dimensionamento de lotes não capacitado (sem a preocupação com os custos do carregamento) (Modelo 2.1) e depois, com a solução do problema de dimensionamento de lotes, resolvemos vários problemas de empacotamento unidimensional, sendo um para cada período do horizonte de planejamento do dimensionamento de lotes. Neste caso, utilizamos o algoritmo apresentado em Wagner e Within (1958) para resolver o problema de dimensionamento de lotes, e o modelo de empacotamento (Modelo 2.3), apresentado na seção anterior.

Exemplo ilustrativo:

Para uma melhor compreensão, a seguir é apresentado um pequeno exemplo ilustrativo de como resolver o problema com a Estratégia 1. Para isso, considere os seguintes dados da Tabela 6-1.

Tabela 6-1: Dados do exemplo

Itens (i)	(1,2)	Neste exemplo estamos considerando apenas dois tipos itens, denominados itens 1 e 2
Período (t)	(1,2)	São considerados apenas dois períodos, 1 e 2.
Demanda (d_{it})	5	A demanda de cada item para cada período é de 5 unidades
Tamanho dos itens (w_i)	(4,2)	O tamanho dos itens 1 e 2 são, respectivamente, 4 e 2
Capacidade do caminhão (W)	10	Todos os caminhões têm tamanho igual a 10.
Custo de preparo da máquina (s_{it})	10	O custo de preparo da máquina para a produção dos itens 1 ou 2 é igual a 10.
Custo de estoque por item (h_{it})	3	O custo de estoque por unidade em cada período é de 3 unidades monetárias
Custo de transporte por caminhão (c)	10	O custo de cada caminhão utilizado é igual a 10

Dados os parâmetros do Modelo 5.1, inicialmente o problema de dimensionamento de lotes não capacitado é resolvido aplicando-se o método de Wagner e Within (1958). Com isso, é obtida a seguinte solução: produzir $X_{11}=5$ unidades do item 1 e $X_{21}=5$ unidades do item 2 no primeiro período, e produzir 5 unidades de cada item no segundo período ($X_{12} = X_{22} = 5$). A segunda etapa da resolução do problema é resolver o problema de empacotamento unidimensional para cada período, considerando as 5 unidades de cada item. Para isso, é utilizado o pacote de otimização AMPL/CPLEX junto com o Modelo 2.3 do Capítulo 2. Resolvendo-se o problema para o primeiro período, é obtida a solução da Figura 6-1 para o problema de empacotamento do primeiro período.

Observe que a solução do empacotamento para o primeiro período também é a solução ótima para o problema de empacotamento no segundo período. Assim, com este simples método de resolução, foi obtida uma solução factível cujo valor da função objetivo é $z=100$, sendo 40 relacionado ao custo do dimensionamento de lotes e 60 ao custo de transporte (30 no primeiro período e 30 no segundo).

1	1	2	
1	1	2	
1	2	2	2

Figura 6-1: Solução do problema de empacotamento para o primeiro período – Estratégia 1

Cabe mencionar que, segundo Norden e Velde (2005), este procedimento é o mais usual na prática. Observe que este método de resolução é “míope”, pois resolve primeiro o problema de dimensionamento de lotes de forma independente do problema de empacotamento. Isso faz com que este método não seja uma boa opção quando as decisões de transporte têm maior impacto nas decisões de dimensionamento de lotes. Embora esta Estratégia 1 tenha encontrado a solução ótima para este pequeno exemplo, em geral, é esperado que isso não aconteça para outros problemas.

6.1.3 Estratégia 2 (Foco no empacotamento e dimensionamento *a posteriori*)

Assim como na estratégia anterior, na Estratégia 2 os problemas de dimensionamento de lote e empacotamento são resolvidos separadamente e de forma seqüencial. No entanto, diferente da estratégia anterior, agora primeiro é resolvido o problema de empacotamento, para obter os melhores arranjos dos itens nos caminhões e depois, baseando-se nesses arranjos, é resolvido o problema de dimensionamento de lotes, utilizando esses padrões de empacotamento. Para resolver os dois problemas foram utilizados os Modelos 2.1 e 2.3 do Capítulo 2 e o pacote de otimização AMPL/CPLEX.

Como o problema de empacotamento utiliza os padrões ótimos de empacotamento obtidos na resolução do problema de empacotamento, são necessárias algumas alterações no Modelo 2.1 de dimensionamento de lotes. Para isso, considere os seguintes parâmetros adicionais:

$k = 1, \dots, K$ Número de padrões de empacotamento distintos;

X_{kt} Quantidade de padrões do tipo k utilizados no período t ;

Q_{ik} Quantidade de itens do tipo i no padrão k ;

Y_{it} Variável binária que indica se a máquina está preparada para a produção do item do tipo i no final do período t ;

Observe que o problema de empacotamento utiliza a solução de empacotamento Q_{ik} e que a variável X_{kt} não depende do item, e sim dos padrões de empacotamento que serão utilizados em cada período.

Modelo 6.4: Modelo de Dimensionamento de Lotes com Padrões de Corte

$$z_1 = \min \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (h_{it} I_{it}^+ + s_{it} Y_{it}) + \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T c X_{kt} \quad (6.17)$$

$$\text{S.a} \quad I_{it-1}^+ + \sum_{k=1}^K X_{kt} Q_{ik} - I_{it}^+ = d_{it} \quad t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, n \quad (6.18)$$

$$\sum_{k=1}^K X_{kt} Q_{ik} \leq \sum_{m=j}^T d_{im} Y_{it} \quad t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, n \quad (6.19)$$

$$X_{it}, I_{it}^+ \geq 0 \quad j = 1, \dots, T; i = 1, \dots, n \quad (6.20)$$

$$Y_{it} \in \{0,1\} \quad j = 1, \dots, T; i = 1, \dots, n \quad (6.21)$$

A função objetivo (6.17) contém informação sobre o problema de carregamento e considera o número de caminhões utilizados e seu custo. Se esta variável não for utilizada, as soluções do modelo poderão conter um número grande de estoque para evitar o tempo de preparo da máquina, e com isso o modelo fica “míope”, pois não identifica as conseqüências da produção em relação ao custo de transporte. Com a adição do custo de transporte na função objetivo, o modelo é capaz de identificar melhor o conflito entre a variável de estoque e os custos de produção.

Devido à dificuldade de obter todas as soluções ótimas do problema de empacotamento, para usar os respectivos padrões de empacotamento no Modelo 6.4, é necessário selecionar, dentre esse conjunto de soluções ótimas, a solução que fornece a melhor combinação de padrões de empacotamento para resolver o Modelo 6.4. Cabe observar que, para a resolução do Modelo 6.4, são usados os padrões de empacotamento de apenas uma solução ótima do problema de empacotamento. Para resolver o problema de quais padrões de empacotamento utilizar, em outras palavras, decidir qual é a solução ótima do problema de empacotamento que fornece a melhor solução para o problema de dimensionamento, foi realizada uma pequena modificação no modelo de empacotamento (Modelo 2.3). Neste modelo modificado são priorizadas as soluções com o menor número de itens distintos em um mesmo padrão de empacotamento. Para este modelo, considere $\delta > 0$ um valor suficientemente pequeno, de tal modo que o número de caminhões da solução ótima do modelo adaptado seja o mesmo que o obtido pelo Modelo 2.3. Além disso, é usada uma variável binária Y_{ik} que indica se o item i está sendo usado no caminhão k .

Modelo 6.5: Problema de Empacotamento – Modelo 2.3 Modificado

$$z = \min \sum_{k=1}^M (cA_k + \delta \sum_{i=1}^n Y_{ik}) \quad (6.22)$$

$$\text{S.a} \quad \sum_{i=1}^n w_i Z_{ik} \leq WA_k \quad k = 1, \dots, M \quad (6.23)$$

$$\sum_{k=1}^M Z_{ik} = d_i \quad i = 1, \dots, n \quad (6.24)$$

$$Z_{ik} \leq \left\lfloor \frac{W}{w_i} \right\rfloor Y_{ik} \quad k = 1, \dots, M; i = 1, \dots, n \quad (6.25)$$

$$Z_{ik} \in \mathbb{N} \quad k = 1, \dots, M; i = 1, \dots, n \quad (6.26)$$

$$A_k, Y_{ik} \in \{0,1\} \quad k = 1, \dots, M \quad (6.27)$$

Observe que o objetivo do Modelo 6.5 é obter, dentre todas as soluções ótimas do Modelo 2.3, a solução ótima do problema de empacotamento que utiliza em cada caminhão a menor diversidade de itens. Outra interpretação para esta adaptação é dada pelo modelo mais geral apresentado anteriormente no Capítulo 5 (Modelo 5.6). Como na maioria dos casos é difícil obter todos os padrões de empacotamento, foi decidido utilizar apenas padrões que fazem parte de uma solução ótima do problema de empacotamento e, além disso, que esta tivesse a menor variedade de itens em cada caminhão. O motivo para a escolha deste tipo de solução é porque esses padrões de empacotamento não obrigam a produção de vários itens em um mesmo período. Observe que para produzir o primeiro padrão de corte da solução do exemplo da seção anterior (Figura 6-1), é necessária a produção dos dois tipos de itens.

Exemplo ilustrativo:

Considerando o mesmo exemplo ilustrativo apresentado na seção anterior, são aplicados os métodos descritos para uma melhor compreensão da estratégia. Assim, inicialmente é resolvido o problema de empacotamento considerando toda a demanda de todos os itens, ou seja, 10 itens do tipo 1 e 10 itens do tipo 2. Resolvendo-se o Modelo 6-2 com o pacote AMPL/CPLEX, é obtida a solução da Figura 6-2 para o problema de empacotamento. A solução consiste de 6 caminhões em que os quatro primeiros caminhões são transportados, cada um, com dois itens do tipo 1 e um item do tipo 2. No último caminhão são transportados cinco itens do tipo 2.

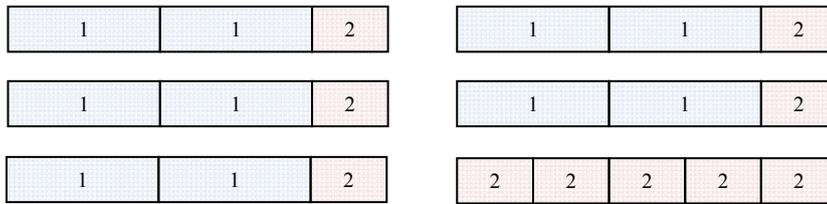


Figura 6-2: Solução do problema do empacotamento (Modelo 6.5)

Note na Figura 6-2 que a solução ótima do problema de empacotamento foi dada utilizando apenas dois tipos de padrões de carregamento. Note também que no problema de dimensionamento de lotes são utilizados os padrões de empacotamento, neste caso, apenas dois tipos.

Utilizando o AMPL/CPLEX para resolver o Modelo 6.1 para o problema de dimensionamento de lotes, foi obtida a seguinte solução ótima do mesmo: no primeiro período são produzidos 10 itens do tipo 1 e 5 do tipo 2 e no segundo período apenas 5 itens do tipo 2. Em outras palavras, são produzidos no primeiro período 5 padrões de empacotamento com 2 itens do tipo 1 e uma unidade do tipo 2, e no segundo período é produzido apenas uma vez o padrão que contém 5 itens do tipo 2. Com isso, a Estratégia 2 fornece uma solução factível com valor objetivo igual a 105, sendo 60 relacionado ao custo de transporte e 45 ao custo do dimensionamento de lotes. Neste caso, a solução da Estratégia 2 foi pior do que a da Estratégia 1. Ambas as soluções utilizaram 6 caminhões para o transporte da produção, porém a Estratégia 2 teve um custo de produção maior que a Estratégia 1. Neste exemplo, a solução do dimensionamento de lotes utilizou todos os padrões de empacotamento fornecidos pela resolução do problema de empacotamento, o que não ocorre para todos os casos.

6.1.4 Heurística baseada em otimização de colônia de formigas ACO 1 (Foco no dimensionamento, com custos de empacotamento).

O método de otimização baseado em colônias de formigas foi resumidamente descrito no Capítulo 2 e aplicado para resolver o Modelo 3.1 no Capítulo 4. Conforme apresentado, trata-se de um método de busca probabilístico, onde a probabilidade de se escolher uma determinada solução depende função de uma visibilidade para a construção da solução. A cada iteração, além do critério de busca da solução, o algoritmo considera a qualidade da solução obtida até o momento com esse critério (refletido no valor dos feromônios).

Embora a aplicação deste método para resolver o Modelo 3.1 não tenha produzido resultados satisfatórios, optamos por aplicá-lo também para resolver o Modelo 5.1 para verificar se seu desempenho não seria melhor nesse problema integrado. Observa-se que o Modelo 5.1, diferentemente do Modelo 3.1, não envolve atraso da demanda e é não capacitado (isto é, sem

restrições de capacidade de produção). Nesta seção são apresentados os dados propostos para a resolução do problema apresentado e as estratégias de construção da solução (visibilidade).

Como mencionado, nesta estratégia é usada uma variação do método de otimização baseado em colônias de formigas. Esta variação consiste basicamente em aplicar dois métodos de busca de colônias de formigas em uma mesma heurística. O primeiro método de colônia de formigas é para resolver o problema de dimensionamento de lotes. A cada busca por uma solução do problema de dimensionamento de lotes, é aplicado um método de otimização de colônias de formigas para resolver os problemas de empacotamento em cada período. O método pode ser descrito da seguinte forma:

1	Inicialize os dados de entrada (demanda e custos) e variáveis (Produção, estoque, preparo de máquina e caminhões iguais a zero)
2	Faça (até que o critério de parada do dimensionamento de lotes seja satisfeito):
2.1	Faça (para cada formiga do tipo 1-construção da solução do dimensionamento de lotes): <p style="margin-left: 40px;">Encontre uma solução para o problema de dimensionamento de lotes (aplicação do método descrito em 6.1.4.1).</p>
2.1.1	Faça (até que o critério de parada do problema de empacotamento seja satisfeito):
2.1.2	Faça (para cada formiga do tipo 2- construção da solução do problema de empacotamento para cada período): <p style="margin-left: 40px;">Encontre uma solução para o problema de empacotamento (aplicação do método descrito na seção 6.1.4.2).</p> <p style="margin-left: 40px;">Atualize o feromônio do processo de empacotamento.</p> <p style="margin-left: 40px;">Atualize o feromônio do processo de dimensionamento de lotes.</p>
3	Fim do programa.

A seguir detalham-se os procedimentos utilizados para a construção da solução de ambos os métodos utilizados. Primeiro é apresentado o método de construção da solução de dimensionamento de lotes.

6.1.4.1 Construção da solução do dimensionamento de lotes

A visibilidade é uma função que indica a qualidade de uma determinada solução. Neste caso, quanto maior o valor da função, melhor será a solução que representa este valor. Esta função depende de quatro índices e é representada por η_{itkr} , em que o primeiro índice representa o item que será produzido, o segundo o período em que o item será produzido e o terceiro o período para o qual a produção atenderá a demanda. O último índice representa o critério de seleção da quantidade que será produzida. Este último índice é explicado mais adiante.

O critério para avaliar a qualidade da solução é dado pela divisão da quantidade produzida do item i no período t (representado por X_{it}) pelo custo total de produção desta quantidade neste período. O custo total de produção é a soma dos custos de estoque, preparo de máquina e de transporte. Para determinar o custo de transporte, é necessário resolver um problema de empacotamento do caminhão. Para isso, utilizamos o seguinte parâmetro para determinar um número de “novos” caminhões necessários para transportar da produção de X_{it} . Este parâmetro é dado por:

$UB_{X_{it}}$: um limitante superior para o número de “novos”caminhões utilizados para a produção de X_{it} .

Assim, a visibilidade pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\eta_{itkr} = \frac{X_{it}}{\sum_{j=t}^{k-1} (X_{it} h_{ij}) + (1 - Y_{it}) S_{it} + c UB_{X_{it}}}$$

Observe que um dado importante para esta função é o valor de X_{it} , ou seja, a quantidade de itens do tipo i que será produzida no período t . Para facilitar a compreensão do método, inicialmente considere apenas dois casos.

1. Produzir toda a demanda do período k , ainda não atendida do item i no período t .
2. Produzir toda a demanda do período k , ainda não atendida do item i no período k .

Como estamos considerando apenas dois casos (produzir tudo ou nada da demanda de um item i no período t para satisfazer a demanda do período k , podemos utilizar um único valor (indicado por 0) para representar r , pois é necessário calcular o custo de produzir tudo no período k (η_{ikk0}) e produzir tudo no período t (η_{itkr}). Tendo os dois custos, um deles é sorteado para construir a solução. Observe que a idéia de produzir tudo ou nada é característica do método de

resolução apresentado por Wagner e Whitin (1958). Para mais detalhes desta propriedade do problema, o leitor pode consultar, por exemplo, o livro original ou Johnson e Montgomery (1974).

O divisor da visibilidade é formado pelos custos de produção e por uma estimativa do custo de transporte (um limitante superior). A primeira parcela (custo de produção) é dada pela soma dos custos de estoque e preparação da máquina para produção e a segunda parcela (estimativa dos custos de transporte) é calculado considerando que os itens são carregados primeiramente nos caminhões que já estão sendo utilizados no período, onde é feita a produção. Depois, caso ainda tenham itens para serem transportados, consideramos os custos dos novos caminhões utilizados. Observe que quanto maior o custo de produção e a estimativa do custo de transporte, menor será o valor da visibilidade e assim, menor será a probabilidade dessa decisão ser considerada na solução do problema.

Dada a estratégia de construção da solução, calcula-se a probabilidade de escolha das soluções (esta probabilidade foi discutida no Capítulo 2) e sorteia-se uma solução. Escolhida esta solução, atualiza-se os dados da visibilidade e repete-se o processo até que toda a decisão de dimensionamento de lotes tenha sido feita.

Assim, pode-se resumir o processo de construção da solução da seguinte maneira:

1	Inicie as entradas (demanda, custos de produção, tamanho dos itens e capacidade dos caminhões) e variáveis (produção, estoque, preparo de máquina, número de caminhões utilizados).
2	Faça (do primeiro período até o último):
2.1	Enquanto (toda a demanda do período não for satisfeita):
	Calcule a visibilidade de produzir uma quantidade X_{it} do item i no período t para satisfazer a demanda do período k .
	Calcule a probabilidade de produzir uma quantidade X_{it} do item i no período t para satisfazer a demanda do período k .
	Sorteie uma quantidade X_{it} considerando a probabilidade calculada.
	Atualize as variáveis de decisão

Produção de mais X_{it} itens do tipo i no período t . Existe o preparo da máquina para a produção do item i no período t ($Y_{it} = 1$). Atualize o estoque Coloque as X_{it} unidades em caminhões no período t . Atualize o espaço restante dos caminhões utilizados.
3 Retorne a solução obtida para o problema

Exemplo ilustrativo:

Para exemplificar a aplicação deste método, é considerado o mesmo exemplo ilustrativo dado na Seção 5.1. Iniciando a construção no primeiro período $t = 1$, calcula-se o valor da visibilidade da solução. A seguir é detalhado somente o cálculo da visibilidade η_{1110} e, para o restante das visibilidades, serão apenas apresentados os valores obtidos, pois esses cálculos são feitos de modo análogo. Observe que, como esta é a primeira iteração, então não há preparo de máquinas para nenhum item e para o caso $t = k$ a variável binária do preparo de máquina é igual a zero. Assim, substituindo na fórmula para o cálculo da visibilidade, obtém-se:

$$\eta_{1110} = \frac{5}{0 + (1 - 0) * 10 + 10 * UB_{X_{11}}}$$

Como não foi decidida nenhuma produção, ainda não há nenhum caminhão sendo utilizado. Ou seja, são necessários novos caminhões para o transporte dos 5 itens que são produzidos no primeiro período para satisfazer a demanda deste item no primeiro período. Para o transporte de 5 itens deste tipo são necessários 3 caminhões, sendo os dois primeiros com dois itens do tipo 1 e o segundo com apenas um item do tipo 1 (Figura 6-3). Além disso, os dois primeiros caminhões ficam com 2 de espaço restante de para carregamento de mais itens e o terceiro caminhão 6 de espaço restante.



Figura 6-3: Primeira iteração - Construção da solução do dimensionamento de lotes

Observe que, como mencionado, o carregamento é feito de modo “guloso” e, neste caso, os itens são carregados fazendo uso dos três caminhões, sendo os dois primeiros com dois itens do tipo 1 e uma perda de tamanho 2, e o terceiro caminhão com um item do tipo 1 e uma perda de tamanho 6 (Figura 6-3). Com isso, substituindo na fórmula para o cálculo da visibilidade, obtém-se:

$$\eta_{1110} = \frac{5}{0 + (1 - 0) * 10 + 10 * 3} = \frac{1}{6}$$

Calculando a visibilidade para todos os itens e todos os períodos, são obtidos os seguintes valores: $\eta_{1110} = \frac{1}{6}$ e $\eta_{2110} = \frac{1}{4}$. Com esses valores, calcula-se a probabilidade de escolha de cada solução e uma delas é sorteada. Neste caso, foi sorteada a visibilidade η_{1110} , ou seja, são produzidas 5 unidades do item 1 no período 1 para satisfazer a demanda do período 1.

Na segunda iteração, inicialmente se verifica se ainda há demanda que não foi atendida no primeiro período, o que ocorre, pois o item 2 ainda não foi contemplado. Então, o próximo passo é calcular o valor das visibilidades. Observe que $\eta_{1110} = 0$, pois a demanda restante do item 1 no período 1 é igual a 0, assim, basta calcular η_{2110} :

$$\eta_{2110} = \frac{5}{0 + (1 - 0) * 10 + 10 * UB_{X_{21}}}$$

Note que $UB_{X_{21}}$ (limitante superior para o número de caminhões “novos” necessários para o transporte de X_{21} itens do tipo 2 no período 1) tem que ser calculado considerando a decisão tomada na primeira iteração, ou seja, primeiro os itens do tipo 2 são carregados nos caminhões já utilizados e, caso necessário, utiliza-se novos caminhões. A alocação dos itens é feita de modo direto, sem o rearranjo da carga, ou seja, considera que os itens dentro do caminhão são fixos e que apenas o espaço de folga pode ser utilizado.

Observe que toda a demanda do item 2 no período 1 pode ser carregada nos caminhões que já estão sendo utilizados (veja Figura 6-3) e assim, não há necessidade de se utilizar novos caminhões. Com isso, $UB_{X_{21}} = 0$ e $\eta_{2110} = \frac{5}{10}$. Ao fim de cada iteração de busca por uma solução (ou a cada busca realizada por uma formiga), é obtida uma solução para o problema de dimensionamento de lotes integrado com o empacotamento.

Na terceira iteração é verificado que não há mais demanda no primeiro período e são calculadas as visibilidades para o segundo período. Note que agora são calculadas quatro visibilidades, pois a produção dos itens poderá ser feita no primeiro período. Aplicando-se todo

método de construção da solução, é obtida a seguinte solução: produzir 10 unidades do tipo 1 e 5 unidades do tipo 2 no primeiro período e 5 unidades do tipo 2 no segundo período, obtendo o carregamento da Figura 6-4, onde a primeira coluna é o carregamento do primeiro período e a segunda coluna o do segundo período.

1	1	2				
1	1	2				
1	2	2	2			
1	1					
1	1					
1						

2	2	2	2	2
---	---	---	---	---

Figura 6-4: Solução do dimensionamento de lotes - Fim da iteração

Como o processo de empacotamento é míope, a solução de empacotamento do primeiro período não é necessariamente a melhor para esta combinação de itens. Assim, o próximo passo é melhorar esta solução, aplicando outro método de resolução, baseado em colônias de formigas para melhorar esta solução. Observe que está sendo aplicado um método de otimização baseado em colônias de formigas dentro de outro, cada um resolvendo um tipo de problema. Por esse motivo, foi dito que esta é uma variação deste método de otimização, baseado em colônias de formigas.

Ainda em relação ao procedimento de construção da solução factível do problema integrado, nesta estratégia a qualidade do empacotamento não tem muita influência sobre a qualidade da solução geral. O principal impacto ocorre nos custos de produção (custos de estoque e preparos de máquina). Por isso foi dito que este método resolve o problema integrado focando mais no problema de dimensionamento de lotes.

6.1.4.2 Construção da solução do empacotamento dos itens

A seguir é apresentado o método que é aplicado, em cada período, para melhorar a solução do empacotamento. O método é baseado no trabalho apresentado em Brugger *et al.* (2004) e é definido como:

- | | |
|---|--|
| 1 | Inicie as entradas (tamanho dos caminhões e quantidade de itens que são produzidos nos períodos) e variáveis (caminhões utilizados e arranjo da carga nos caminhões) |
|---|--|

	<p>Se a demanda de algum item for positiva, então “abra” o primeiro caminhão e contabilize o caminhão que será utilizado.</p> <p>Caso contrário, o número de caminhões utilizados é 0 e vá para o Passo 3</p>
2	Faça (até que todos os itens sejam carregados em caminhões)
2.1	Calcule a visibilidade η_{ijk} para o carregamento dos itens ainda não alocados.
2.2	<p>Se para todos os itens a visibilidade for igual a zero</p> <p>Abra um novo caminhão.</p> <p>Caso contrário</p> <p>Calcule a probabilidade do item ser carregado nos caminhões que estão abertos.</p> <p>Sorteie um item para carregar no caminhão.</p> <p>Coloque o item sorteado no caminhão.</p> <p>Atualize o espaço restante no caminhão.</p>
3	Retorne o padrão de empacotamento.

Como visibilidade para o cálculo da probabilidade do item a ser carregado no caminhão que está “aberto”, é usada uma função que indica quão eficiente é colocar o item no caminhão em cada iteração. Para esta função são necessários três índices: i , o item que será carregado; j , o caminhão em que será carregado e k , a capacidade do caminhão que não será utilizada após o carregamento deste item. Além disso, seja $waste_j$ o espaço não utilizado no caminhão j e $k = waste_j - w_i$. Com isso, a visibilidade da solução do carregamento é dada por:

$$\eta_{ijk} = \frac{1}{waste_j - w_i}$$

Note que quando toda a capacidade do caminhão for utilizada, acontecerá uma divisão por zero. Para evitar esse problema, toda vez que a capacidade do caminhão for totalmente utilizada, a visibilidade receberá um valor suficientemente grande. Além disso, os itens de tamanho superior a capacidade restante do caminhão terão visibilidade igual a zero. Considerando os dados da primeira coluna da Figura 6-4, segue uma iteração da construção da solução do problema de empacotamento unidimensional.

Primeiro é calculado o valor da visibilidade η_{ijk} . Para isso, como esta é a primeira iteração, é necessário iniciar os dados fazendo $j = 1$ e $waste_1 = 10$. Assim, como são apenas dois tipos de itens que serão carregados, são calculadas as duas opções de carregamento: $\eta_{116} = \frac{1}{6}$ e $\eta_{218} = \frac{1}{8}$. Calculando a probabilidade de carregar o item 1 e o item 2 no caminhão 1 e fazendo o sorteio, foi decidido carregar o item 1. Na atualização dos dados, é necessário atualizar apenas a demanda restante do item 1 e a folga do caminhão que passa a ser igual a 6 ($waste_1 = 6$). Atualizando os dados e calculando os valores da visibilidade, novamente são obtidos os seguintes valores das visibilidades: $\eta_{112} = \frac{1}{2}$ e $\eta_{214} = \frac{1}{4}$.

Novamente, calculando a probabilidade e fazendo o sorteio, foi decidido carregar o item 1 no caminhão 1. Repetindo o processo, o primeiro caminhão é carregado com três itens, sendo dois do tipo 1 e um do tipo 2. Os dados são atualizados e um novo caminhão é aberto para carregar o restante da demanda e o processo é repetido.

Aplicando o método de construção da solução de carregamento até que todos os itens sejam carregados, é gerada a seguinte solução da Figura 6-5 para o carregamento dos itens do primeiro período. Observe que logo na primeira solução encontrada, esta é melhor que a solução encontrada na construção da solução do dimensionamento de lotes. Além disso, este procedimento é aplicado a todos os períodos.

1	1	2
1	1	2
1	1	2
1	1	2
1	1	2

Figura 6-5: Solução do empacotamento dos itens do primeiro período

Cabe mencionar também que nesta seção foram apresentados apenas os métodos de construção da solução e a função de visibilidade. A Heurística ACO 1 consiste em aplicar o método de otimização baseado em colônias de formigas, descrito anteriormente, com os métodos de construção descritos nesta seção. Lembrando que, dentro da construção da solução do dimensionamento de lotes com empacotamento, é aplicado em cada período um método de colônias de formigas para o problema de empacotamento. Após algumas iterações a Heurística ACO 1 obtém a mesma solução ótima obtida pela Estratégia 1.

6.1.4.3 Análise dos possíveis valores de produção

A Heurística ACO 1 foi implementada e comparada com os resultados obtidos por um pacote de otimização e foi observado que a decisão de produzir tudo ou nada em cada período não foi muito boa, devido ao empacotamento dos itens. Assim, utilizar apenas a decisão de produzir toda a demanda ou nada não é muito boa. Por outro lado, calcular a visibilidade de todas as combinações de produção em cada período também não é viável. O problema agora é decidir para quais combinações de “explosão” desta demanda é viável para analisar durante a estratégia, ou seja, dada uma demanda de um determinado item, quais valores de fração dessa demanda devem ser considerados para calcular a visibilidade. Para isso, foi feita uma análise do custo total de produção de um determinado item i produzido em um período j para satisfazer a demanda de um período k . O valor do custo de produção de um volume X_{it} do item i no período t para satisfazer a demanda do período k é dado pela seguinte equação:

$$\left(\sum_{j=t}^{k-1} (X_{it} h_{ij}) + (1 - Y_{it}) s_{it} + cNB_t \right) + ((1 - Y_{ik}) s_{ik} \delta + cNB_k).$$

O primeiro termo da equação, composto por $(\sum_{j=t}^{k-1} (X_{it} h_{ij}) + (1 - Y_{it}) s_{it} + cNB_t)$, é em relação ao custo de produção da quantidade X_{it} no período t , e o segundo termo, $((1 - Y_{ik}) s_{ik} \delta + cNB_k)$, representa o custo de produzir a demanda restante no período k . Para obter esses custos, considere as seguintes variáveis:

δ : Variável binária que indica se parte da demanda do item i tem de ser produzida no período k .

NB_t : Quantidade de caminhões adicionais necessários para transportar os itens que são produzidos no período t .

Para calcular os valores destas variáveis, é necessário um dado adicional denotado por:

Ud_t : Representa a quantidade de itens que podem ser transportados em caminhões que já estão sendo utilizados em seu respectivo período.

Para considerar um caso mais geral, é considerado que Ud_t é maior do que a quantidade de itens necessários para carregar um caminhão e menor do que a demanda total do item, ou seja, $\left\lfloor \frac{W}{w_i} \right\rfloor < Ud_t < d_{it}$. Além disso, considere:

Ld_k : Quantidade necessária para diminuir exatamente uma unidade do valor de NB_k .

Em outras palavras, Ld_k é calculado de tal modo que se for transferida a produção de exatamente Ld_k unidades do item i do período k para o período t , a quantidade de caminhões utilizados no período k deixa de ser NB_k e passa a ser $NB_k - 1$. Assim, considerando apenas o item i e os dois períodos t e k , é possível construir o gráfico da função de custo apresentado na Figura 6-6. O gráfico da Figura 6-6 possui quatro pontos importantes que devem ser analisados. A análise do gráfico é feita do ponto $X_{it} = 0$ até $X_{it} = d_{ik}$. Observe que estes dois pontos são os pontos que representam a produção de tudo ou nada, ou seja, a mesma estratégia que foi considerada na construção e no exemplo da solução do problema de dimensionamento de lotes da Heurística ACO 1. Quando $X_{it} = 0$, significa que a produção de toda a demanda do item i está sendo feita no período k e para isso, paga-se um custo. Quando $X_{it} > 0$, é cobrado o custo de estoque e o valor da função da função vai crescendo. Quando $X_{it} = Ld_k$ (a produção é igual à quantidade de itens necessária para diminuir exatamente uma unidade nos caminhões utilizados no período k), economiza-se um caminhão no período k . Note que o valor do custo para $X_{it} = Ld_k$ pode ser maior ou menor do que o custo para $X_{it} = 0$. Isso irá depender do custo de estoque e do custo de transporte. Assim, esses dois pontos são importantes e devem ser considerados pela visibilidade.

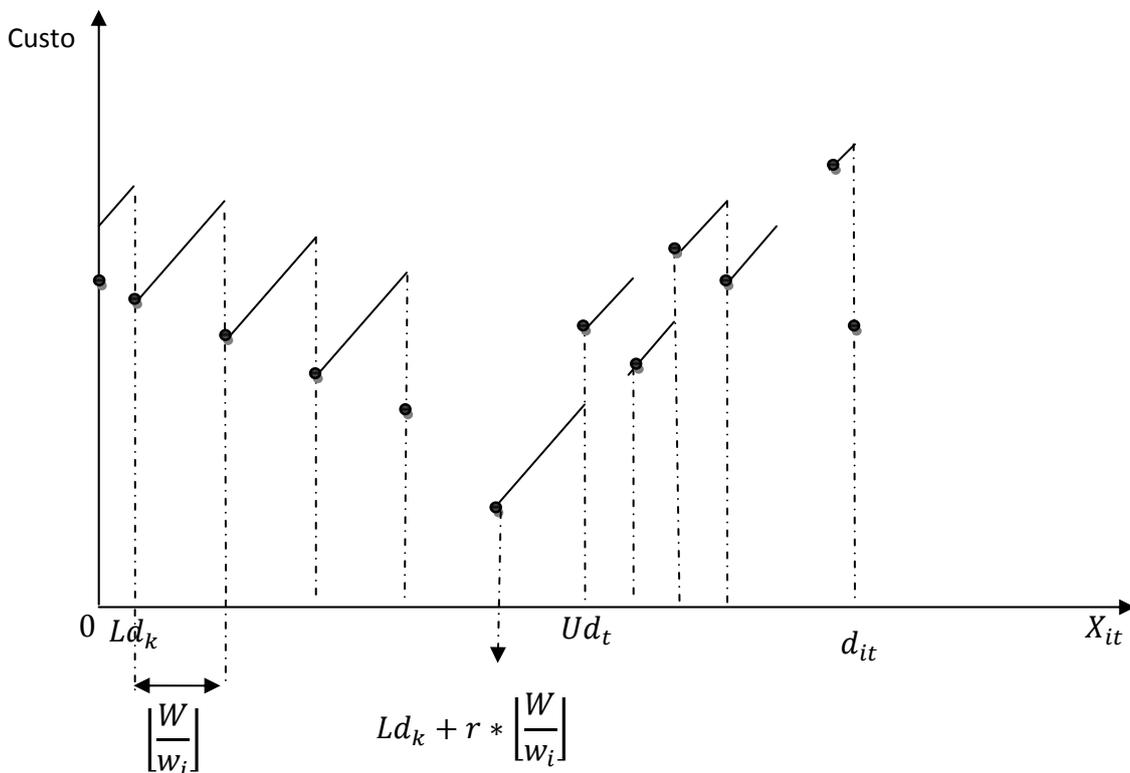


Figura 6-6: Gráfico do custo de produção de um item em um período t

Quando $X_{it} > Ld_k$, o custo começa a ficar maior do que custo para $X_{it} = Ld_k$, pois novamente o custo de estoque fica maior e não há a redução do custo de transporte. Conforme o

valor de X_{it} aumenta, o custo de estoque também aumenta e o custo de transporte continua igual (não há necessidades de mais caminhões para o transporte no período t e não há redução no número de caminhões no período k). Quando $X_{it} = Ld_k + \left\lfloor \frac{W}{w_i} \right\rfloor$, ou seja, quando a produção no período t é grande o suficiente para economizar o segundo caminhão no período k , ocorre um salto na função do custo de produção. Este salto pode fazer com que o novo custo fique melhor ou pior do que o custo para $X_{it} = Ld_k$. Supondo que o custo de produzir $X_{it} = Ld_k + \left\lfloor \frac{W}{w_i} \right\rfloor$ itens no período t seja melhor do que produzir $X_{it} = Ld_k$ itens no mesmo período, fica fácil ver que produzir $\left\lfloor \frac{W}{w_i} \right\rfloor$ itens a mais no período k será ainda melhor. Essa análise acontece até que $X_{it} = Ld_k + r * \left\lfloor \frac{W}{w_i} \right\rfloor$ itens e pela suposição de que este ponto será melhor do que todos os pontos considerando $X_{it} = Ld_k + y * \left\lfloor \frac{W}{w_i} \right\rfloor$ para $y = 1, \dots, r - 1$ e assim, este ponto também deverá ser considerado na estratégia de construção.

Se $X_{it} > Ld_k + r * \left\lfloor \frac{W}{w_i} \right\rfloor$, a função de custo passa a ter outro tipo de comportamento. O custo é linear, pois a cada item produzido paga-se o estoque, até que todo espaço dos caminhões que já estavam sendo utilizados no período t seja totalmente carregado ($X_{it} = Ud_t$). A partir deste ponto, ao se aumentar a produção do item no período t , será necessário pagar mais um caminhão no mesmo período, e neste ponto a função tem mais um salto (para cima). Ao se continuar aumentando a produção do item no mesmo período, chegará um ponto em que será necessário menos um caminhão no período k e a função do custo tem mais um salto, desta vez para baixo. Este comportamento se repete até o ponto em que toda a demanda é produzida no período t e neste caso, não será necessário utilizar caminhão no período k e não ocorrerá preparo de máquina, fazendo com que neste ponto a função tenha outro salto, para um valor menor ainda.

Observe que não há necessidade de avaliar os pontos onde $Ld_k + r * \left\lfloor \frac{W}{w_i} \right\rfloor < X_{it} < d_i$, pois para todos esses pontos o valor do custo é pior do que os custos nos dois extremos desta desigualdade. Assim, estes dois pontos também são incluídos na estratégia de construção da solução. Com isso, a Heurística ACO 1 é finalizada como uma variação do método de otimização baseado em colônias de formigas com o método de construção da solução descrito na Seção 6.1.4.2. Sendo que, como já mencionado, esta última utiliza outro método de otimização baseado em colônia de formigas.

Antes de apresentar a próxima estratégia, é feita uma rápida análise da estratégia descrita. Observe que a estratégia possui duas buscas de otimização baseadas em colônias de formigas.

Primeiro, obtêm-se a produção dos itens, considerando um limitante superior para o problema de empacotamento e depois, para cada período do horizonte de planejamento, é resolvido um problema de empacotamento. Desse modo, espera-se que os problemas de empacotamento em cada período sejam mais fáceis de ser resolvidos do que quando todos os itens são considerados em todos os períodos.

Se forem consideradas 1000 iterações e 20 formigas para resolver cada problema, o método terá um total de 400 milhões de problemas de empacotamento resolvidos, o que deixaria a estratégia lenta. Uma alternativa para resolver este problema é estudar a convergência do método de resolução do empacotamento e utilizar um número menor de iterações para resolver cada problema de empacotamento. Por meio dessa análise, foi possível desenvolver a próxima estratégia de resolução do problema integrado.

6.1.5 Heurística baseada em otimização de colônia de formigas ACO 2. (Foco no empacotamento, com custos de produção)

Nesta estratégia, o objetivo é construir um método que resolva o problema de empacotamento em cada período do horizonte de planejamento, considerando a demanda atendida e os custos de produção e empacotamento. A idéia dessa estratégia é utilizar apenas uma atualização de feromônio e que a cada decisão tomada, sejam considerados os custos de empacotamento e de produção. Essa estratégia pode ser resumida da seguinte forma:

1	Inicie as entradas (demanda, custos, tamanho dos itens e capacidade do caminhão) e variáveis (arranjo da carga nos caminhões, variáveis de produção, estoque e preparo de máquina).
2	Faça (até que todos os itens sejam produzidos e carregados em caminhões):
2.1	<p>Calcule a visibilidade η_{ijt} do item i da demanda do período j ser carregado e produzido no período t.</p> <p>Calcule a probabilidade do item i da demanda do período j ser produzido e carregado no período t.</p> <p>Sorteie um item i da demanda do período j para carregar em algum caminhão do período t.</p> <p>Se o item não puder ser carregado em nenhum caminhão do período t devido à capacidade abra um novo caminhão,</p>

	<p>carregue o item e atualize o custo do caminhão e a capacidade restante.</p> <p>Caso contrário, carregue o item no primeiro caminhão que tiver capacidade e atualize a capacidade restante.</p> <p>Atualize a demanda não atendida do item e período sorteado.</p> <p>Adicione o item a produção do período sorteado.</p> <p>Atualize o estoque do produto e os custos.</p> <p>Atualize, se necessário, o custo de preparo da máquina.</p>
3	Retorne a solução do problema.

Perceba que nesta estratégia está sendo resolvido um problema de dimensionamento de lotes, em que os custos de transporte são identificados na estratégia de construção da solução. Para o cálculo da visibilidade da solução, é usado uma função com três índices, em que cada um indica o item produzido, o período de produção e o período no qual a demanda será atendida com esta produção. Esta função considera a divisão entre o tamanho do item carregado pelo custo de produção deste item, ou seja,

$$\eta_{ijt} = \frac{w_i}{\sum_{k=j}^{t-1} h_{ik} + (1 - Y_{it}) * s_{it} + c * \Delta_{it}}$$

onde Δ_{it} é igual a 1 se o item i é maior que o espaço ainda não utilizado do caminhão do período t , e igual a 0, caso contrário. É claro que se a demanda do item i no período j for igual a zero, ou se o período t for maior que o período j , o valor desta visibilidade será igual a zero. Observe que a cada iteração do carregamento, a decisão é tomada em relação a apenas uma unidade de algum item, e o processo de carregamento finaliza quando a demanda de todos os itens de todos os períodos estiver carregada em algum caminhão em algum período. Além disso, no final do processo de carregamento, a solução do empacotamento fornecerá diretamente a solução do problema de dimensionamento de lotes.

Exemplo ilustrativo:

Para exemplificar, são feitas algumas iterações desta heurística, considerando o mesmo exemplo nas estratégias anteriores. Neste caso, o problema pode ser visto com os seguintes dados e

a seguinte interpretação do problema. Tem-se que carregar dois tipos de itens em dois tipos de caminhões. O primeiro tipo de item (tipo 1 com tamanho 4) possui 10 unidades, sendo que no máximo 5 deles podem ser carregados no caminhão 2. O mesmo ocorre com os item do tipo 2, ou seja, possuem 10 unidades de volume 2, sendo que no máximo 5 unidades podem ser transportadas no caminhão 2. Calculando a visibilidade da solução, são gerados os seguintes valores:

$$\begin{array}{lll} \eta_{111} = \frac{4}{20} & \eta_{112} = \frac{4}{23} & \eta_{122} = \frac{4}{20} \\ \eta_{211} = \frac{2}{20} & \eta_{212} = \frac{2}{23} & \eta_{222} = \frac{2}{20} \end{array}$$

Calculando a probabilidade e sorteando uma das visibilidades, foi escolhida a visibilidade $\eta_{122} = \frac{4}{20}$, ou seja, uma unidade do item 1 será produzida e transportada no período 2. Atualizando as demandas e a função Δ_{it} , os cálculos das visibilidades são refeitos e chega-se aos seguintes valores:

$$\begin{array}{lll} \eta_{111} = \frac{4}{20} & \eta_{112} = \frac{4}{23} & \eta_{122} = \frac{4}{0} \\ \eta_{211} = \frac{2}{20} & \eta_{212} = \frac{2}{23} & \eta_{222} = \frac{2}{10} \end{array}$$

Observe que para a produção do item 1 no período 2 não há custo de produção, pois o preparo de máquina já foi considerado na iteração anterior e há espaço para o transporte do item no caminhão que já está sendo utilizado. Embora seja um abuso de notação escrever a divisão por zero, cabe ressaltar que nestes casos, no lugar de zero, a visibilidade considerará um valor suficientemente pequeno (isto em 0,000001), para que esta estratégia de construção seja considerada como a melhor a ser escolhida.

Calculando a probabilidade de escolher uma solução e fazendo o sorteio, como esperado, foi escolhido transportar o item 1 no período 2 e conseqüentemente, sua produção é realizada no mesmo período. Este procedimento é feito até que todos os itens sejam carregados em caminhões. Lembrando que a demanda do primeiro período não pode ser transportada no segundo período. Realizando os cálculos até o fim da construção da solução, foi gerado o carregamento ilustrado na Figura 6-7, sendo a primeira coluna os itens que serão carregados no primeiro período e a segunda coluna, os itens do segundo período.

1	1	2			1	1			
1	1	2			1				
1	2	2	2		1				
2	2	2	2	2					

Figura 6-7: Construção da solução – ACO 2

Como solução, foi decidido produzir 5 unidades do item 1 no primeiro período e 5 unidades no segundo período. O item 2 tem a produção de 10 unidades no primeiro período. Esta solução possui uma função objetivo de valor igual a 115, sendo 70 de custo de transporte e o restante do custo de produção (preparo de máquina e estoque). Repetindo este procedimento, obtemos a solução ótima para este problema. Assim, apenas a Estratégia 2 não obteve a solução ótima para o problema. Cabe ressaltar que esta é apenas uma solução encontrada pela rotina de construção de solução. Esta construção é utilizada junto com o método de otimização baseado em colônias de formigas e, por isso, não é possível, ainda, comparar esta solução com as soluções obtidas pelas soluções construídas nas outras estratégias. Para isso, a próxima seção mostra os resultados das soluções dos problemas descritos na Seção 5.6 encontradas com cada uma das estratégias

6.1.6 Busca local

Nas Heurísticas ACO 1 e 2, com a resolução de alguns problemas testes, foi notado que algumas soluções poderiam ser melhoradas com uma simples rotina de busca local. O objetivo desta rotina é determinar se é possível melhorar alguma solução diminuindo o estoque de alguns períodos. A rotina é iniciada no primeiro período de produção e “caminha” até o último. A cada período t , a busca local avalia se existe um período k com $k > t$, tal que algum item produzido no período t possa ser transferido para a produção do período k . A transferência ocorre apenas se a nova solução for factível, ou seja, a produção do item i , que será transferida do período t para o período k , para satisfazer a demanda de um período j com $k \leq j$. Além disso, k é o período mais próximo de t , ou seja, não existe outro período entre t e k com capacidade nos caminhões para realizar a transferência de qualquer item que seja produzido no período t .

Para a escolha do item que será transferido do período t para o período k , os itens são ordenados de forma decrescente, considerando a razão do custo de estoque pelo tamanho dos itens, ou seja, são ordenados pela razão $\frac{h_{it}}{w_i}$. Determinado o período k para transferência, os itens são analisados segundo a ordenação e a transferência é realizada considerando os seguintes fatores:

- a quantidade a ser transferida do item i não pode exceder a folga dos caminhões utilizados no período k , ou seja, não é possível utilizar novos caminhões no período k ;

- a quantidade de itens que são transferidos tem de ser menor ou igual ao menor estoque entre os períodos t e $k - 1$;

Após a transferência, os dados são atualizados e o processo é repetido até que não exista um período k com espaço para receber algum item do período t , ou que toda a produção satisfaça exatamente a demanda deste item entre os períodos t e $k - 1$. Caso alguma destas condições seja satisfeita, todo o processo é repetido para o próximo período ($t + 1$), e isto se repete até que todos os períodos sejam analisados.

Feita a busca local, é aplicado o procedimento de otimização baseado em colônias de formiga em cada período para obter-se um melhor carregamento dos caminhões e assim, além do custo de estoque, a nova solução da produção dos itens também pode ganhar no custo de transporte. Cabe observar que este procedimento de busca local pode ser aplicado a cada solução encontrada (a cada iteração de uma formiga), constituindo-se assim como um método híbrido de resolução. Porém, neste trabalho, esta rotina é aplicada apenas para a melhor solução encontrada pelo método de otimização de colônia de formigas. Como a solução do exemplo ilustrativo, obtida pelas Heurísticas 1 e 2, é a solução ótima do problema, a busca local não conseguiu fazer melhorias na solução.

6.2 Resultados computacionais

Esta seção tem como objetivo mostrar e analisar os resultados computacionais obtidos pelas Estratégias 1 e 2 e as Heurísticas ACO 1 e 2 de resolução descritas neste capítulo. Lembrando que as estratégias foram construídas com a intenção de resolver o problema integrado de dimensionamento de lotes e empacotamento unidimensional representado pelo Modelo 5.1. Os testes foram feitos com os mesmos problemas descritos no capítulo 5, para que seja possível comparar os resultados das estratégias com os resultados obtidos pelo pacote de otimização AMPL/CPLEX. Todos os testes foram realizados em um microcomputador Intel Core i7 de 2,80GHz e 8G de memória com sistema operacional Windows 7 Ultimate. Todas as estratégias foram implementadas na linguagem C++ e alguns testes preliminares foram realizados para que fosse possível fixar alguns parâmetros, necessários nas Heurísticas ACO 1 e 2 (métodos de otimização baseado em colônias de formigas). Os parâmetros utilizados são descritos a seguir.

Nas Estratégias 1 e 2 os modelos utilizados (Modelos 2.3, 6.4 e 6.5) foram resolvidos pelo pacote CPLEX 11.1.1 com o tempo máximo de resolução para cada etapa (modelo) de 1800 segundos. Este limite para cada modelo ocorre, pois se os dois modelos utilizarem o tempo máximo

de resolução, este será igual a 3600 segundos, ou seja, o mesmo tempo limitado para o modelo integrado. O restante dos parâmetros foram estabelecidos pelo *default* do pacote.

As Heurística ACO 1 e 2 necessitam da definição dos parâmetros do método de otimização baseado em colônias de formigas. Esses parâmetros são: o número de iterações utilizadas (quantidade de vezes que é realizada a atualização do feromônio), número de formigas (quantidade de soluções construídas em cada iteração) e o valor de evaporação do feromônio (valor de ρ que é utilizado na fórmula de evaporação do feromônio dada por: $\tau_{ij} = (1 - \rho)\Delta_{ij} + \rho\tau_{ij}$). Para essas estratégias são aplicadas 1000 iterações em cada heurística. As heurísticas usam 20 formigas, ou seja, a cada iteração são geradas 20 soluções para os problemas. Para controlar a evaporação dos feromônios, foi considerado o valor $\rho = 0,99$ e, neste caso, diz-se que a evaporação do feromônio é lenta. Cabe mencionar que a evaporação dos feromônios implica diretamente na convergência do método, ou seja, quanto mais lenta a evaporação do feromônio, mais lenta será a convergência do método para a melhor solução encontrada.

Para resolver os problemas de empacotamento são aplicadas 1000 iterações e 20 formigas para obter a solução em cada período. Foi decidido utilizar este número menor de iterações, pois é esperado que o problema de empacotamento em cada período seja de fácil resolução. As Heurísticas ACO 1 e 2 foram aplicadas dez vezes em cada problema e são apresentadas a médias e os desvios padrões dos valores obtidos e a melhor solução dentre as dez. Os valores analisados são:

<i>TC</i>	Tempo de resolução (limitado em 3600 segundos)
<i>FO</i>	Média dos valores da função objetivo*
<i>MFO</i>	Melhor valor encontrado da função objetivo
<i>GAP</i>	valor médio de $100 \times (FO(\text{estratégia}) - FO(\text{CPLEX})) / FO(\text{estratégia})$

*os dados entre parêntesis são relacionados o desvio padrão das soluções encontradas.

As tabelas são apresentadas de acordo com o tamanho dos exemplares, onde foram apresentados os resultados obtidos pelo método *branch-and-cut* do CPLEX para resolver o Modelo 5.1. Os tempos computacionais, das estratégias, apresentados nas Tabelas 6-2 (a) e (b) já eram esperados uma vez que a Estratégia 1 utiliza o método de programação dinâmica dado pro Wagner e Within (1958) e resolve cinco problemas pequenos de empacotamento, enquanto a Estratégia 2 resolve apenas um problema de empacotamento, porém com mais itens. Comparando os tempos computacionais das Estratégias 1 e 2, é esperado que a Estratégia 1 seja mais rápida do que a Estratégia 2. Pois a Estratégia 1 aplica o método de programação dinâmica dado em Wagner e

Withiin (1958) para resolver o problema de dimensionamento de lotes não capacitado e os problemas de empacotamento resolvidos em cada período são mais fáceis, quando comparados aos problemas resolvidos pela Estratégia 2. Além disso, o problema de dimensionamento de lotes da Estratégia 2 é resolvido pelo pacote de otimização CPLEX, que em geral precisa de mais tempo do que o método de programação dinâmica desenvolvido por Wagner e Whitin. Em relação ao tempo computacional das Heurísticas ACO 1 e 2, como a Heurística ACO 1 contém dois métodos de otimização baseados em colônias de formigas, já era esperado que esta necessitaria de mais tempo computacional para realizar as 1000 iterações.

Em relação à qualidade da solução dos problemas, a Estratégia 2 utiliza o tempo máximo de 1800 segundos para a resolução do problema de empacotamento (Modelo 6.2) e resolve o problema de dimensionamento de lotes (Modelo 6.1) com uma solução viável, e sem garantia de otimalidade, do problema de empacotamento. Por outro lado, ao se observar a qualidade da solução das estratégias (coluna FO e *GAP*), a Estratégia 2, quando comparada a Estratégia 1, se mostra melhor para resolver os problemas. Lembrando que a Estratégia 1 é mais usual na prática. Para essas classes de problemas, a Heurística ACO 1 se mostrou, na maioria dos casos, a melhor para resolver os problemas. Observe que em todos os casos a melhor solução encontrada pela Estratégia 2 tem a qualidade mais próxima (coluna *GAP* apresentada na Tabela 6-2 com valor menor) da obtida pelo pacote de otimização AMPL/CPLEX.

Tabela 6-2: (a) Resultados do AMPL/CPLEX e das Estratégias 1 e 2- Problemas (5X5)

	CPLEX		Estratégia 1			Estratégia 2		
	TC	FO	TC	FO	<i>GAP</i>	TC	FO	<i>GAP</i>
classe 1.1	178,31	4273	0,07	4455	4,09%	1800,05	4423	3,39%
classe 1.2	1709,79	5723	0,08	6005	4,70%	1800,03	5873	2,55%
classe 1.3	1958,69	7173	0,07	7555	5,06%	1800,09	7323	2,05%
classe 1.4	2004,10	12973	0,07	13755	5,69%	1800,05	13123	1,14%
classe 1.5	2219,07	88472	0,08	94355	6,23%	1802,27	88523	0,06%
classe 2.1	1325,66	4411	0,15	4505	2,09%	1800,05	4552	3,10%
classe 2.2	1663,23	5871	0,15	6005	2,23%	1800,05	6002	2,18%
classe 2.3	1535,12	7311	0,14	7505	2,58%	1800,06	7452	1,89%
classe 2.4	1476,29	13117	0,14	13505	2,87%	1800,16	13252	1,02%
classe 2.5	2218,46	88472	0,14	91505	3,31%	1803,18	88652	0,20%
classe 3.1	1760,49	4046	3,91	4546	11,00%	1800,00	4180	3,21%
classe 3.2	1589,74	5496	3,90	6246	12,01%	1800,00	5630	2,38%
classe 3.3	1455,08	6812	3,93	7946	14,27%	1800,00	7080	3,79%
classe 3.4	1454,12	12412	3,92	14746	15,83%	1800,01	12880	3,63%
classe 3.5	1741,12	88172	3,92	103146	14,52%	1800,09	88280	0,12%
classe 4.1	1809,57	3700	0,01	3700	0,00%	1800,00	3850	3,90%
classe 4.2	1904,42	5237	0,01	5300	1,19%	1800,00	5300	1,19%
classe 4.3	1820,13	6687	0,01	6900	3,09%	1800,00	6750	0,93%
classe 4.4	1018,01	12511	0,01	13300	5,93%	1800,00	12550	0,31%
classe 4.5	2654,83	87989	0,01	96500	8,82%	1800,00	87950	-0,04%

Tabela 6-3: (b) Resultados das Heurística ACO 1 e 2 - Problemas (5X5)

	ACO 1				ACO 2			
	TC	FO	MFO	GAP	TC	FO	MFO	GAP
classe 1.1	199,19	4274,90 (2,03)	4273	0,04%	56,17	4351,10 (49,35)	4273	1,79%
classe 1.2	199,09	5723,00 (0,00)	5723	0,00%	53,91	5852,10 (83,42)	5766	2,21%
classe 1.3	198,95	7175,60 (1,83)	7173	0,04%	51,62	7293,00 (79,23)	7216	1,65%
classe 1.4	199,22	12974,20 (1,46)	12973	0,01%	49,07	13150,20 (98,84)	13050	1,35%
classe 1.5	199,85	88373,00 (0,00)	88373	-0,11%	50,50	88563,80 (79,89)	88421	0,10%
classe 2.1	213,21	4423,20 (5,34)	4415	0,28%	53,52	4503,10 (93,45)	4415	2,05%
classe 2.2	210,38	5871,20 (4,81)	5865	0,00%	52,04	5976,70 (87,35)	5913	1,77%
classe 2.3	210,03	7323,20 (6,34)	7315	0,17%	50,97	7410,80 (70,12)	7331	1,35%
classe 2.4	210,66	13123,00 (5,94)	13115	0,05%	48,42	13276,30 (63,45)	13196	1,20%
classe 2.5	199,02	88372,70 (2,48)	88370	-0,11%	51,27	88556,90 (83,67)	88474	0,10%
classe 3.1	213,72	4072,00 (0,00)	4072	0,64%	49,78	4168,20 (73,57)	4082	2,93%
classe 3.2	213,95	5522,00 (0,00)	5522	0,47%	48,36	5654,20 (95,39)	5522	2,80%
classe 3.3	214,68	6972,00 (0,00)	6972	2,29%	47,38	7123,70 (84,88)	7028	4,38%
classe 3.4	213,86	12769,40 (15,89)	12746	2,80%	44,12	12963,90 (71,03)	12898	4,26%
classe 3.5	215,06	88172,00 (0,00)	88172	0,00%	44,95	88382,10 (51,74)	88316	0,24%
classe 4.1	167,96	3700,00 (0,00)	3700	0,00%	34,85	3700,00 (0,00)	3700	0,00%
classe 4.2	169,95	5243,50 (6,32)	5237	0,12%	33,74	5245,90 (7,89)	5237	0,17%
classe 4.3	170,70	6713,20 (29,43)	6687	0,39%	33,74	6698,80 (21,87)	6687	0,18%
classe 4.4	177,98	12682,80 (163,20)	12487	1,35%	32,04	12499,60 (74,32)	12487	-0,09%
classe 4.5	187,22	88342,80 (124,58)	88248	0,40%	32,33	87966,00 (69,32)	87887	-0,03%

*os dados entre parêntesis são relacionados a variância das soluções encontradas.

A Heurística ACO 2, por focar no problema de empacotamento, apresenta soluções melhores para os problemas onde o custo de transporte é muito alto (classe *.5). Em algumas classes, as Heurísticas ACO 1 e 2 encontram uma solução melhor que o CPLEX para o Modelo 5-1. Isso ocorre, pois as estratégias conseguem uma solução melhor para o dimensionamento de lotes.

Tabela 6-4: (a) Resultados do AMPL/CPLEX e das Estratégias 1 e 2- Problemas (5X10)

	CPLEX		Estratégia 1			Estratégia 2		
	TC	FO	TC	FO	GAP	TC	FO	GAP
classe 1.1	1877,88	5162	0,66	5732	9,94%	2858,17	5705	9,52%
classe 1.2	1900,35	6838	0,66	7732	11,56%	3762,00	7355	7,03%
classe 1.3	2354,20	8464	0,66	9732	13,03%	3759,00	9005	6,01%
classe 1.4	1565,28	15064	0,66	17732	15,05%	3479,00	15605	3,47%
classe 1.5	3000,62	100888	0,66	121732	17,12%	3449,00	101405	0,51%
classe 2.1	1705,96	5309	0,12	5419	2,03%	3600,01	5948	10,74%
classe 2.2	1933,34	6951	0,12	5419	2,03%	3465,04	7674	9,42%
classe 2.3	1193,18	8601	0,12	8919	3,57%	3584,58	9348	7,99%
classe 2.4	1221,50	15201	0,12	15919	4,51%	3599,99	15886	4,31%
classe 2.5	1237,89	101135	0,12	106919	5,41%	3600,01	101686	0,54%
classe 3.1	2312,72	5687	0,09	5808	2,08%	3717,00	6045	5,92%
classe 3.2	2241,02	7372	0,09	7608	3,10%	3566,00	7695	4,20%
classe 3.3	2325,68	8991	0,09	9408	4,43%	3354,00	9345	3,79%
classe 3.4	2433,51	15592	0,09	16608	6,12%	3425,00	15945	2,21%
classe 3.5	1800,37	101422	0,09	110208	7,97%	3599,99	101745	0,32%
classe 4.1	4002,31	6656	0,18	6784	1,89%	3600,01	6843	2,73%
classe 4.2	4832,73	8285	0,18	8534	2,92%	3599,99	8512	2,67%
classe 4.3	4037,26	9941	0,18	10284	3,34%	3600,02	10251	3,02%
classe 4.4	3166,76	16573	0,18	17284	4,11%	3599,99	16762	1,13%
classe 4.5	1941,64	102571	0,18	108284	5,28%	3600,01	102844	0,27%

Tabela 6-5: (b) Resultados das Heurísticas ACO 1 e 2- Problemas (5X10)

	ACO 1				ACO 2			
	TC	FO	MFO	GAP	TC	FO	MFO	GAP
classe 1.1	327,39	5392,50 (183,42)	5166	4,27%	142,65	5642,30 (374,35)	5461	8,51%
classe 1.2	327,38	7172,20 (172,43)	7076	4,66%	138,91	7533,30 (297,87)	7349	9,23%
classe 1.3	327,98	8914,80 (201,32)	8711	5,06%	139,80	9321,40 (376,02)	9037	9,20%
classe 1.4	329,82	15752,40 (216,74)	15543	4,37%	136,83	16101,90 (393,92)	15810	6,45%
classe 1.5	330,61	103289,80 (1985,88)	101224	2,33%	137,58	102282,60 (1367,63)	101852	1,36%
classe 2.1	330,39	5735,10 (170,75)	5600	7,43%	142,39	5747,90 (148,90)	5638	7,64%
classe 2.2	330,78	7427,20 (186,77)	7230	6,41%	142,26	7383,30 (139,06)	7196	5,86%
classe 2.3	332,29	9076,80 (137,89)	8916	5,24%	141,34	9199,00 (278,65)	8895	6,50%
classe 2.4	332,90	15799,70 (179,32)	15660	3,79%	139,98	15886,80 (213,71)	15649	4,32%
classe 2.5	333,18	102874,50 (1377,51)	101439	1,69%	138,94	102530,70 (681,74)	102034	1,36%
classe 3.1	332,92	6212,80 (376,66)	6050	8,46%	157,84	6348,00 (301,52)	6085	10,41%
classe 3.2	334,09	7927,90 (389,33)	7727	7,01%	158,42	8163,70 (366,78)	7851	9,70%
classe 3.3	333,70	9752,20 (299,11)	9548	7,81%	155,58	9918,90 (471,13)	9493	9,35%
classe 3.4	335,48	16480,90 (390,99)	16085	5,39%	158,62	16787,80 (268,22)	16568	7,12%
classe 3.5	335,42	104595,20 (2246,93)	102468	3,03%	159,19	102932,40 (1174,28)	102285	1,47%
classe 4.1	348,80	7514,50 (211,89)	7372	11,42%	210,69	7365,90 (288,39)	7106	9,64%
classe 4.2	349,28	9260,70 (198,93)	9065	10,54%	210,38	9177,50 (167,72)	8922	9,72%

classe 4.3	350,19	10934,20 (398,39)	10422	9,08%	210,45	10878,10 (302,59)	10621	8,61%
classe 4.4	348,74	17950,00 (396,43)	17532	7,67%	207,82	17664,20 (411,83)	17339	6,18%
classe 4.5	348,54	106106,90 (2513,21)	103896	3,33%	209,56	103651,10 (378,91)	103363	1,04%

*os dados entre parêntesis são relacionados a variância das soluções encontradas.

Nas Tabelas 6-3 (a) e (b) pode-se observar que as estratégias tiveram, em geral, o mesmo comportamento que o CPLEX, ou seja, quando o número de períodos aumenta, a resolução dos problemas fica mais difícil, o que era esperado. Isso é notado pelo aumento da “distância” entre a solução da estratégia e a solução do CPLEX para essas classes. Novamente a Heurística ACO 2 se mostra melhor quando os custos de transporte são altos. Porém, não é notado um comportamento diferente na Heurística ACO 2 quando os custos de transporte são variados. Novamente a Estratégia 2 se mostra melhor que a Estratégia 1. Isso pode ocorrer, pois a Estratégia 2 utiliza os custos de transporte para resolver o problema de dimensionamento de lotes, enquanto a Estratégia 1 resolve os dois problemas independentemente.

Nas Tabelas 6-4 (a) e (b) é possível perceber que quando o número de itens é maior, a Estratégia 1 é, na maioria dos casos, melhor do que a Estratégia 2. Isso pode ocorrer, pois quanto maior for o número de diferentes tipos de itens, mais difícil é a resolução do problema de empacotamento. Em relação às estratégias que utilizam o método de otimização baseado em colônias de formigas, a Heurística ACO 1 encontra uma solução melhor que a Heurística ACO 2 para a maioria dos problemas. Observando que em muitos casos, a Heurística ACO 2 já encontra uma solução melhor que a solução do CPLEX. Em relação ao tempo computacional utilizado, as estratégias apresentam comportamento similar ao observado na Tabela 6-2.

Tabela 6-6: (a) Resultados do AMPL/CPLEX e das Estratégias 1 e 2- Problemas (10X5)

	CPLEX		Estratégia 1			Estratégia 2		
	TC	FO	TC	FO	GAP	TC	FO	GAP
classe 1.1	1877,88	6290	0,12	6375	1,33%	14911,00	6784	7,28%
classe 1.2	1900,35	8102	0,12	8225	1,50%	126641,00	8584	5,62%
classe 1.3	2354,20	9902	0,12	10075	1,72%	191622,00	10384	4,64%
classe 1.4	1565,28	17102	0,12	17475	2,13%	176676,00	17584	2,74%
classe 1.5	3000,62	108016	0,12	113675	4,98%	3600,01	111184	2,85%
classe 2.1	1705,96	6143	0,25	6235	1,48%	3968,00	6532	5,96%
classe 2.2	1933,34	7974	0,25	8085	1,37%	5295,00	8332	4,30%
classe 2.3	1193,18	9774	0,25	9935	1,62%	13905,00	10132	3,53%
classe 2.4	1221,50	16974	0,25	17335	2,08%	22938,00	17332	2,07%
classe 2.5	1237,89	110574	0,25	113535	2,61%	3599,99	110932	0,32%
classe 3.1	2312,72	6463	0,19	6678	3,22%	8367,00	6866	5,87%
classe 3.2	2241,02	8239	0,19	8578	3,95%	15481,00	8666	4,93%
classe 3.3	2325,68	10056	0,19	10478	4,03%	26073,00	10466	3,92%
classe 3.4	2433,51	17250	0,19	18078	4,58%	79909,00	17666	2,35%
classe 3.5	1800,37	110880	0,19	116878	5,13%	3600,00	111342	0,41%
classe 4.1	4002,31	6977	0,09	7001	0,34%	16978,00	7310	4,56%
classe 4.2	4832,73	8765	0,09	8801	0,41%	40566,00	9110	3,79%
classe 4.3	4037,26	10504	0,09	10601	0,92%	109096,00	10910	3,72%
classe 4.4	3166,76	17422	0,09	17801	2,13%	2543,31	18110	3,80%
classe 4.5	1941,64	111401	0,09	111401	0,00%	3600,01	111785	0,34%

Tabela 6-7: (b) Resultados das Heurística ACO 1 e 2- Problemas (10X5)

	ACO 1				ACO 2			
	TC	FO	MFO	GAP	TC	FO	MFO	GAP
classe 1.1	413,40	6305,40 (20,84)	6296	0,24%	132,74	6562,60 (179,54)	6408	4,15%
classe 1.2	413,32	8104,50 (26,71)	8078	0,03%	133,08	8420,00 (391,79)	8161	3,78%
classe 1.3	413,93	9891,70 (27,93)	9786	-0,10%	126,48	10336,70 (426,37)	10027	4,21%
classe 1.4	418,37	16907,30 (153,96)	16806	-1,15%	125,88	17504,20 (191,92)	17348	2,30%
classe 1.5	420,85	108031,80 (163,84)	107906	0,01%	122,57	110971,50 (284,75)	108670	2,66%
classe 2.1	424,85	6132,30 (83,70)	6043	-0,17%	114,80	6475,10 (302,44)	6192	5,13%
classe 2.2	427,88	7885,70 (47,06)	7856	-1,12%	114,14	8266,10 (368,91)	7943	3,53%
classe 2.3	430,16	9623,70 (97,40)	9549	-1,56%	113,33	10198,90 (183,06)	10050	4,17%
classe 2.4	429,12	16628,10 (52,37)	16606	-2,08%	108,31	17415,40 (397,60)	17093	2,53%
classe 2.5	425,12	107724,40 (137,12)	107612	-2,65%	106,65	110623,30 (2192,09)	108339	0,04%
classe 3.1	395,22	6469,40 (44,29)	6370	0,10%	115,24	6750,00 (193,74)	6584	4,25%
classe 3.2	394,57	8269,10 (37,81)	8228	0,36%	113,55	8574,00 (141,83)	8386	3,91%
classe 3.3	393,76	10034,00 (259,04)	9888	-0,22%	112,04	10421,50 (211,89)	10287	3,51%
classe 3.4	396,70	17100,60 (347,75)	16888	-0,87%	110,04	17614,30 (310,99)	17471	2,07%
classe 3.5	396,99	109596,50 (2398,34)	107955	-1,17%	107,40	111068,90 (3219,99)	109241	0,17%
classe 4.1	410,29	7041,60 (80,79)	6947	0,92%	125,67	7347,10 (117,43)	7238	5,04%
classe 4.2	414,28	8823,30 (132,89)	8714	0,66%	124,95	9171,70 (189,83)	9015	4,43%
classe 4.3	412,76	10543,50 (137,52)	10446	0,37%	122,55	10969,20 (143,78)	10806	4,24%
classe 4.4	412,86	17649,10 (348,20)	17444	1,29%	121,37	18128,30 (283,45)	17930	3,90%
classe 4.5	410,84	108819,10 (214,87)	108484	-2,37%	117,63	111134,70 (301,24)	109411	-0,24%

*os dados entre parêntesis são relacionados a variância das soluções encontradas.

Quando as duas dimensões são maiores (Tabelas 6-5 (a) e (b)) as estratégias que focam mais no problema de dimensionamento obtiveram uma solução melhor para as classes. A Heurística ACO 1 é a que mais se destaca na resolução destes problemas. Uma informação que desperta curiosidade nos resultados dos problemas com 10 itens e 10 períodos é que a Heurística ACO 1 encontrou melhores soluções para os exemplares Classe 3.*.

Pode-se concluir que a resolução do problema de dimensionamento de lotes não capacitado integrado ao empacotamento unidimensional (Modelo 5.1) por outras estratégias, em geral, fornece soluções melhores do que as estratégias inspiradas na prática (Estratégias 1 e 2) para esse conjunto de exemplares. O CPLEX não foi capaz de garantir a otimalidade da solução encontrada para

diversos exemplares, devido à limitação de tempo de resolução do problema. As Heurísticas ACO 1 e 2, além de serem alternativas sem a dependência de um pacote comercial de otimização, se mostraram eficientes, tanto no tempo computacional utilizado como na qualidade das soluções encontradas. Na maioria das vezes, a Heurística ACO 1 foi mais eficiente que o pacote de otimização CPLEX. Além disso, o desvio padrão da Heurística ACO 1 é pequeno e, em geral, a Heurística ACO 1 obtém soluções próximas as soluções do AMPL/CPLEX.

Tabela 6-8: (a) Resultados do AMPL/CPLEX e das Estratégias 1 e 2 - Problemas (10X10)

	CPLEX		Estratégia 1			Estratégia 2		
	TC	FO	TC	FO	GapO	TC	FO	GapO
classe 1.1	1114,06	6153	0,27	6209	0,90%	1801,83	7158	14,04%
classe 1.2	1202,18	7653	0,27	7759	1,37%	1802,07	8658	11,61%
classe 1.3	1350,99	9153	0,27	9309	1,68%	1801,83	10158	9,89%
classe 1.4	1344,25	15153	0,27	15509	2,30%	1808,16	16158	6,22%
classe 1.5	2839,41	93160	0,27	96109	3,07%	2307,62	94158	1,06%
classe 2.1	2435,68	7303	0,29	7378	1,02%	3600,01	8226	11,22%
classe 2.2	2778,6	8883	0,29	9028	1,61%	3599,99	9826	9,60%
classe 2.3	2706,43	10501	0,29	10678	1,66%	3600,01	11426	8,10%
classe 2.4	3635,38	16577	0,29	17278	4,06%	3599,99	17826	7,01%
classe 2.5	2751,74	97497	0,29	103078	5,41%	3600,01	101085	3,55%
classe 3.1	3261,01	7800	0,24	7800	0,00%	3599,99	8308	6,11%
classe 3.2	3221,58	9333	0,24	9300	-0,35%	3600,01	9808	4,84%
classe 3.3	2911,23	10800	0,24	10800	0,00%	3599,99	11308	4,49%
classe 3.4	2806,62	16809	0,24	16800	-0,05%	3600,01	17308	2,88%
classe 3.5	2125,71	94962	0,24	94800	-0,17%	3600,01	95391	0,45%
classe 4.1	1,45	4300	0,01	4300	0,00%	1800,12	5297	18,82%
classe 4.2	115,908	5906	0,01	5950	0,74%	1800,06	6797	13,11%
classe 4.3	10093,1	7456	0,01	7600	1,89%	1800,08	8297	10,14%
classe 4.4	1893,69	13572	0,01	14200	4,42%	1800,08	14297	5,07%
classe 4.5	3028,01	91572	0,01	100000	8,43%	1800,12	92297	0,79%

Tabela 6-9: (b) Resultados das Heurística ACO 1 e 2 - Problemas (10X10)

	ACO 1				ACO 2			
	TC	FO	MFO	GAP	TC	FO	MFO	GAP
classe 1.1	670,41	6232,60 (127,63)	6160	1,28%	304,93	7029,80 (562,87)	6746	12,47%
classe 1.2	670,03	7779,10 (152,18)	7660	1,62%	306,63	8643,60 (700,61)	8175	11,46%
classe 1.3	671,95	9187,60 (78,69)	9145	0,38%	308,89	10303,50 (860,58)	9814	11,17%
classe 1.4	675,73	15216,70 (121,77)	15145	0,42%	303,11	16427,50 (873,54)	15772	7,76%
classe 1.5	667,97	93531,70 (437,71)	93160	0,40%	289,70	94416,90 (689,92)	93846	1,33%
classe 2.1	669,06	7593,30 (273,36)	7426	3,82%	348,77	8403,00 (575,04)	8097	13,09%
classe 2.2	672,12	9109,70 (125,79)	8990	2,49%	346,76	9876,90 (203,97)	9729	10,06%
classe 2.3	671,08	10706,60 (239,60)	10584	1,92%	345,48	11587,40 (388,44)	11268	9,38%
classe 2.4	673,46	17194,20 (567,29)	16785	3,59%	338,44	18151,90 (719,87)	17704	8,68%
classe 2.5	670,14	100271,70 (3087,71)	98060	2,77%	336,11	98480,80 (519,84)	98080	1,00%
classe 3.1	672,44	8433,90 (440,98)	8113	7,52%	383,88	8923,60 (517,63)	8587	12,59%
classe 3.2	672,62	9921,20 (482,23)	9545	5,93%	382,71	10465,60 (726,69)	10017	10,82%

classe 3.3	678,93	11422,00 (474,88)	11059	5,45%	383,84	12025,20 (303,27)	11838	10,19%
classe 3.4	678,38	17845,30 (558,36)	17552	5,81%	378,38	18055,50 (850,45)	17492	6,90%
classe 3.5	682,12	96338,40 (864,44)	95528	1,43%	372,20	95413,30 (540,39)	95096	0,47%
classe 4.1	610,60	4300,00 (0,00)	4300	0,00%	142,90	4330,00 (58,06)	4300	0,69%
classe 4.2	608,82	5906,00 (0,00)	5906	0,00%	143,04	5953,10 (69,10)	5906	0,79%
classe 4.3	610,62	7465,20 (12,27)	7456	0,12%	142,76	7542,50 (57,52)	7506	1,15%
classe 4.4	616,14	13639,20 (89,73)	13572	0,49%	142,90	13882,00 (113,09)	13774	2,23%
classe 4.5	625,78	91751,70 (246,28)	91572	0,20%	146,19	92373,90 (428,96)	92068	0,87%

*os dados entre parêntesis são relacionados a variância das soluções encontradas.

Para o caso em que são consideradas duas ou três dimensões relevantes para o empacotamento da produção, a Heurística ACO 2 necessita de uma heurística para decidir a posição em que os itens serão arranjados. A Estratégia 1 é facilmente adaptada para o caso em que o empacotamento é bidimensional ou tridimensional, sendo necessário apenas resolver na segunda etapa, um problema de empacotamento dado pelos Modelos 5.2 e 5.5, respectivamente. Para adaptar a Heurística ACO 1 quando são consideradas 2 ou 3 dimensões para arranjo da carga, é necessário obter um método para calcular um limitante superior para o número de caminhões utilizados ($UB_{X_{it}}$) e um método de resolução heurístico para o problema de empacotamento bidimensional e tridimensional, respectivamente. Desta forma a Estratégia 1 e as Heurísticas ACO 1 e 2 são de fácil adaptação para resolver os Modelos 5.3 e 5.5.

A Figura 6-8 apresenta as qualidades das soluções (comparadas com as soluções obtidas pelo CPLEX) para as classes com 5 itens e 5 períodos (Tabela 6-2). Podemos verificar que a Heurística ACO 1, em geral, se destaca na qualidade das soluções obtidas. Outra informação que desperta curiosidade é que a Estratégia 1 (utilizada na prática) foi o pior método de resolução para o problema para este conjunto de exemplares. As estratégias Estratégias 2 e Heurística ACO 1 possuem, praticamente, a mesma qualidade das soluções obtidas. Uma possível justificativa para estas estratégias terem praticamente a mesma qualidade de solução é que ambas tem um foco maior no problema de empacotamento.

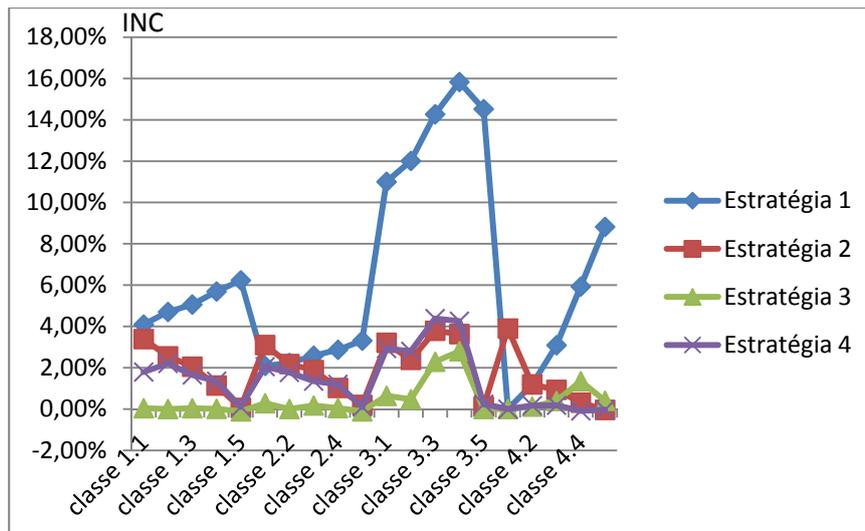


Figura 6-8: Qualidade das soluções obtidas pelas estratégias

Como mencionado, a primeira parte deste capítulo foi dedicada a estudar métodos de resolução para o problema de dimensionamento de lotes não capacitado integrado com empacotamento unidimensional. Ou seja, até aqui, os estudos deste problema consideravam que o problema de dimensionamento de lotes não possui restrições de capacidade e não foi permitido o atraso da entrega da demanda. As seções a seguir, estudam os casos em que são consideradas as restrições de capacidade da produção e o atraso no atendimento à demanda, conforme foi considerado no Capítulo 3 com unitização da carga.

6.3 Heurística de resolução para o problema de dimensionamento de lotes capacitado com empacotamento unidimensional

Antes de descrever a heurística construída para a resolução do problema de dimensionamento de lotes com restrição de capacidade e atraso de demanda integrado com o problema de empacotamento unidimensional, fazemos uma rápida análise das estratégias aplicadas no início do capítulo. A Estratégia 1 da Seção 6.1.2 foi baseada em heurísticas para a resolução do problema utilizadas na prática. Os problemas são considerados simplesmente desacoplados e resolvidos seqüencialmente. Primeiro é resolvido o problema de dimensionamento de lote e, em seguida, é resolvido o problema de empacotamento. Observe que, para a resolução do dimensionamento de lotes, agora, teremos um problema de dimensionamento de lotes capacitado que, em geral, é de difícil resolução. Assim, seria pouco viável aplicar este método, pois não poderíamos utilizar os conhecidos métodos de programação dinâmica para resolução do problema de dimensionamento de lotes não capacitado.

A Estratégia 2, na Seção 6.1.3 também resolve os problemas de dimensionamento de lotes e empacotamento separadamente e seqüencialmente. A primeira etapa envolve resolver o problema

de empacotamento unidimensional. A segunda etapa considera no Modelo 6.5 as restrições de capacidade de produção e o atraso da demanda. Observe que, dependendo da combinação dos padrões de empacotamento utilizados, o Modelo 6.5 pode ser infactível, além de que considerar a restrição de capacidade da produção dificulta a resolução do modelo de dimensionamento de lotes.

Por outro lado, as Heurísticas ACO 1 e 2 (aplicação do método de otimização baseado em colônia de formigas), apresentadas nas Seções 6.1.4 e 6.1.5, necessitam de ajustes apenas no método de cálculo da visibilidade. Como a Heurística ACO 1 foi, em geral, melhor que a Heurística ACO 2 nos testes com problema integrado não capacitado, escolhemos a Heurística ACO 1 para adaptar o método de resolução para o presente caso com restrição de capacidade da produção e atraso da demanda. Para adaptar a Heurística ACO 1 é necessário modificar apenas o cálculo da visibilidade, que no caso anterior é dado por:

$$\eta_{itkr} = \frac{X_{it}}{\sum_{j=t}^{k-1} (X_{it} * h_{ij}) + (1 - Y_{it}) * s_{it} + c * UB_{X_{it}}},$$

em que X_{it} é a quantidade produzida no período t para satisfazer a demanda do período k do item do tipo i e $UB_{X_{it}}$ é um limitante superior para o número de caminhões utilizados para o transporte dos X_{it} itens. Há duas modificações necessárias no cálculo da visibilidade, a primeira é em relação ao custo de produção dos X_{it} , dado pelo dividendo da visibilidade. Neste caso, é necessário considerar o custo do atraso da produção, obtendo assim a seguinte função de visibilidade para o problema:

$$\eta_{itkr} = \frac{X_{it}}{\sum_{j=t}^{k-1} (X_{it} h_{ij}^+) + \sum_{j=k}^{t-1} (X_{it} h_{ij}^-) + (1 - Y_{it}) s_{it} + c UB_{X_{it}}}.$$

Cabe mencionar que, apenas um dos somatórios (ou $\sum_{j=t}^{k-1} (X_{it} h_{ij}^+)$ ou $\sum_{j=k}^{t-1} (X_{it} h_{ij}^-)$) utilizados no cálculo da visibilidade η_{itkr} é aplicado. Em outras palavras, utiliza-se apenas $\sum_{j=t}^{k-1} (X_{it} h_{ij}^+)$ considerando que a produção está sendo realizada para um período futuro ou, apenas $\sum_{j=k}^{t-1} (X_{it} h_{ij}^-)$, considerando que a produção está sendo realizada para suprir a demanda de um período passado (*backlog*).

A segunda modificação na Heurística ACO 1 é em relação a quantidade de produção X_{it} . Como no problema integrado não capacitado não era considerada a capacidade de produção, foi possível considerar os quatro pontos principais (apontados na Figura 6-6). Como agora estamos considerando a limitação da produção, em cada iteração da construção da solução, os pontos

principais são limitados pela capacidade restante em cada período, considerando a preparação da máquina a produção dos itens.

Assim, são considerados os seguintes pontos:

- 1) $X_{it} = \min (Ld_k, \max (Cap'_t - s_t(1 - Y_{it}), 0))$, em que Cap'_t é a capacidade restante de produção no período t .
- 2) $X_{it} = \min (Ld_k + r * \lfloor \frac{W}{w_i} \rfloor, \max (Cap'_t - s_t(1 - Y_{it}), 0))$, em que r é um valor inteiro, tal que toda a produção é transportada sem a necessidade de utilizar novos caminhões.
- 3) $X_{it} = \min (d_i, \max (Cap'_t - s_t(1 - Y_{it}), 0))$, em que d_i é a demanda ainda não atendida do item do tipo i no período k .

Observe que, com a limitação da produção, podem existir caminhos percorridos na construção da solução que forneçam sempre $X_{it} = 0$ a partir de um determinado número de iterações da construção da solução, indicando que o caminho escolhido fornece uma solução ineficaz. Neste caso, a construção é ignorada (“sacrificando-se” a formiga) e retornando a outra construção da solução. Por isso, dizemos que este método é uma variação do método de otimização baseado em colônias de formigas, uma vez que, nos trabalhos aplicados na literatura, não é utilizado caminhos com soluções ineficazes.

6.4 Resultados dos testes computacionais

Para a apresentação dos resultados computacionais, consideramos os exemplares descritos na Tabela 5.1 do Capítulo 5 e para a construção dos tempos e capacidade da produção, são considerados os métodos descritos no Capítulo 3. As tabelas com os resultados dos testes computacionais estão organizadas com as seguintes informações:

TC	Tempo de resolução (limitado em 3600 segundos)
FO	Valor da função objetivo na resolução do modelo integrado pelo método <i>branch-and-cut</i> do CPLEX;
GAP	GAP obtido na resolução dos problemas com o método <i>branch-and-cut</i> do pacote CPLEX
TC_{ACO}	Valor médio do tempo de resolução do método heurístico*
FO_{ACO}	Valor médio da função objetivo com a solução heurística*
$\frac{GAP_{CPLEX}}{GAP_{ACO}}$	valor médio de $100 \times (FO(heurística) - FO(CPLEX)) / FO(heurística)$ *

Melhor Solução

Melhor solução obtida dentre as 10 resoluções heurísticas**

GAP Melhor Solução

$100 \times (\text{Melhor Solução FO(heurística)} - \text{FO(CPLEX)}) / \text{Melhor Solução FO(heurística)}^{**}$

* A média é obtida de dez resoluções do mesmo problema.

** Para obter esta solução é necessário 10 vezes mais o tempo da coluna TC ACO.

Podemos observar, tanto na Tabela 6-6 quanto na Figura 6-8, que o método *branch-and-cut* do pacote de otimização CPLEX e o método heurístico ACO 1 obtêm soluções com valores bens próximos para os problemas testados. Em geral, se for considerada a melhor solução obtida pela heurística ACO 1, dentre as dez resoluções dos problemas, a solução obtida é tão boa quanto à solução do CPLEX e com tempo computacional próximo ao do pacote de otimização.

Tabela 6-10: Resultados do problema integrado - Problemas (5X5)

	CPLEX			Heurística ACO 1					
	TC	FO	GAP	TC ACO	FO ACO	Desvio Padrão	GAP CPLEX	melhor solução	GAP melhor Solução
Classe 1.1	3600,35	5295,00	0,01%	180,48	5542,90	381,46	4,47%	5396,00	1,87%
Classe 1.2	3600,00	6745,00	0,02%	175,39	7246,90	744,29	6,93%	6866,00	1,76%
Classe 1.3	3600,01	8197,00	0,02%	169,77	8781,40	806,76	6,65%	8363,00	1,98%
Classe 1.4	3600,00	14058,00	0,03%	159,69	14838,00	871,13	5,26%	14439,00	2,64%
Classe 1.5	3600,00	89395,00	0,04%	148,19	92433,70	4290,98	3,29%	90286,00	0,99%
Classe 2.1	3600,00	6471,00	0,02%	168,72	7082,70	188,00	8,57%	6806,00	4,92%
Classe 2.2	3600,00	7921,00	0,02%	164,52	8751,60	175,31	9,46%	8643,00	8,35%
Classe 2.3	3600,00	9371,00	0,02%	160,77	10358,10	299,55	9,46%	10046,00	6,72%
Classe 2.4	3600,00	15171,00	0,03%	155,94	16580,60	580,71	8,40%	16104,00	5,79%
Classe 2.5	3600,00	89395,00	0,04%	148,97	91531,70	1156,43	2,32%	90213,00	0,91%
Classe 3.1	3600,00	5713,00	0,01%	164,27	5882,30	40,33	2,87%	5825,00	1,92%
Classe 3.2	3600,00	7163,00	0,01%	156,65	7826,30	692,13	7,87%	7348,00	2,52%
Classe 3.3	3600,00	8613,00	0,01	152,20	9662,00	1023,23	10,86%	8950,00	3,77%
Classe 3.4	3600,00	14413,00	0,01%	147,45	16718,30	1184,28	13,38%	15207,00	5,22%
Classe 3.5	3600,00	91183,00	0,04%	134,10	93831,60	930,51	2,81%	92794,00	1,74%
Classe 4.1	3600,00	3700,00	0,02%	115,33	3700,00	0,00	0,00%	3700,00	0,00%
Classe 4.2	3600,00	5237,00	0,02%	114,06	5241,00	6,56	0,08%	5237,00	0,00%
Classe 4.3	3600,00	6687,00	0,02%	114,44	6715,70	27,22	0,43%	6687,00	0,00%
Classe 4.4	3600,00	12511,00	0,22%	114,31	12519,70	41,43	0,07%	12487,00	-0,19%
Classe 4.5	3600,00	88081,00	0,23%	113,95	87982,10	86,16	-0,11%	87887,00	-0,22%

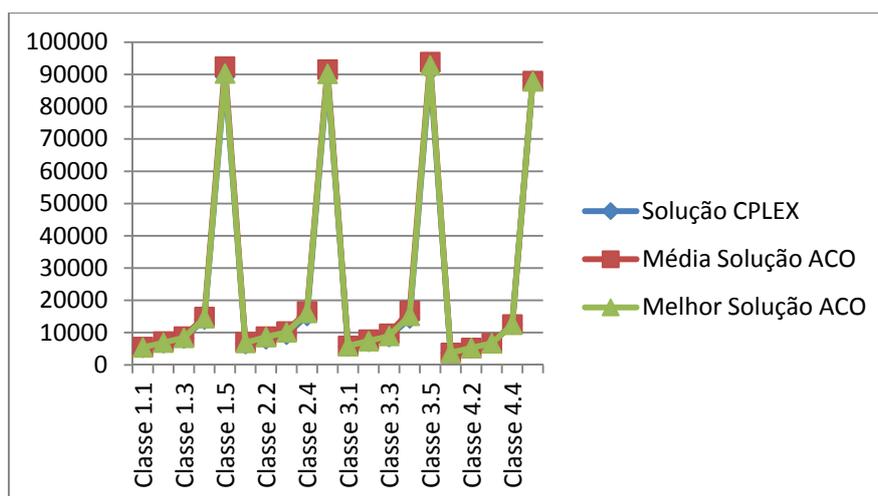


Figura 6-9: Gráfico com as soluções obtidas para os problemas 5x5.

Cabe mencionar também que o pacote de otimização, para todos os exemplares, finaliza a resolução para não ultrapassar o limite de tempo estipulado, ou seja, o pacote de otimização não garante a otimalidade da solução, embora o *GAP* seja relativamente pequeno. Assim como nos exemplos sem a restrição de capacidade e a consideração de atraso da produção para satisfazer a demanda, quando aumentamos número de períodos para a programação da produção, aparentemente dificultamos a resolução para todos os métodos de resolução. Isso é percebido observando-se as colunas *GAP* da resolução do CPLEX, que na Tabela 6-6 são maiores que os da Tabela 6-5, considerando o mesmo tempo de resolução.

Tabela 6-11: Resultados do problema integrado - Problemas (5X10)

	CPLEX			Heurística ACO 1					
	TC	FO	GAP	TC ACO	FO ACO	Desvio Padrão	GAP CPLEX	melhor solução	GAP melhor Solução
Classe 1.1	3600,00	9596,00	1,44	2135,06	11354,30	207,18	15,46%	10983,00	12,63%
Classe 1.2	3600,82	12514,00	1,56	2066,41	14987,00	630,20	16,36%	14292,00	12,44%
Classe 1.3	3600,07	15434,00	2,06	2029,29	17630,20	1466,55	11,76%	15306,00	-0,84%
Classe 1.4	3617,55	26768,00	1,87	1924,29	30587,20	491,34	12,46%	29349,00	8,79%
Classe 1.5	3607,94	175164,00	2,18	1829,03	187561,40	4603,41	6,55%	181921,00	3,71%
Classe 2.1	3602,22	10981,00	1,84	2054,43	13362,40	857,52	17,49%	11844,00	7,29%
Classe 2.2	3600,71	13881,00	2,70	2005,58	16619,40	248,84	16,46%	16336,00	15,03%
Classe 2.3	3611,47	16781,00	2,13	1999,65	20002,90	843,57	15,97%	19202,00	12,61%
Classe 2.4	3601,04	28381,00	3,15	1937,39	32478,50	811,81	12,56%	31228,00	9,12%
Classe 2.5	3603,48	176681,00	2,30	1803,31	186257,90	3312,64	5,11%	181671,00	2,75%
Classe 3.1	3607,88	10012,00	1,38	1906,08	12332,80	607,93	18,63%	11604,00	13,72%
Classe 3.2	3605,31	12896,00	1,22	1860,23	15786,40	582,59	18,20%	14773,00	12,71%
Classe 3.3	3600,17	15808,00	1,28	1830,09	19132,50	588,22	17,30%	18276,00	13,50%
Classe 3.4	3600,23	27267,00	1,42	1786,99	31587,80	2605,91	13,07%	26892,00	-1,39%
Classe 3.5	3601,11	176095,00	1,79	1664,71	187935,60	2116,22	6,29%	184453,00	4,53%

Classe 4.1	3603,37	7305,00	3,34	1118,33	8282,50	413,82	11,58%	7390,00	1,15%
Classe 4.2	3603,91	10314,00	3,74	1117,35	11815,10	534,94	12,52%	10752,00	4,07%
Classe 4.3	3600,13	13260,00	4,07	1117,24	15065,00	347,22	11,93%	14312,00	7,35%
Classe 4.4	3609,34	24842,00	2,37	1116,15	26808,70	499,67	7,30%	26089,00	4,78%
Classe 4.5	3600,52	173663,00	1,93	1099,03	175297,90	642,57	0,93%	173736,00	0,04%

Embora exista uma diferença entre a resolução do CPLEX e do método heurístico (Figura 6-10), podemos observar que os métodos obtêm soluções próximas, sendo o CPLEX o que obtém a melhor solução para os exemplares. Por outro lado, o pacote de otimização necessita de aproximadamente três vezes mais tempo computacional para obter a solução do que a heurística.

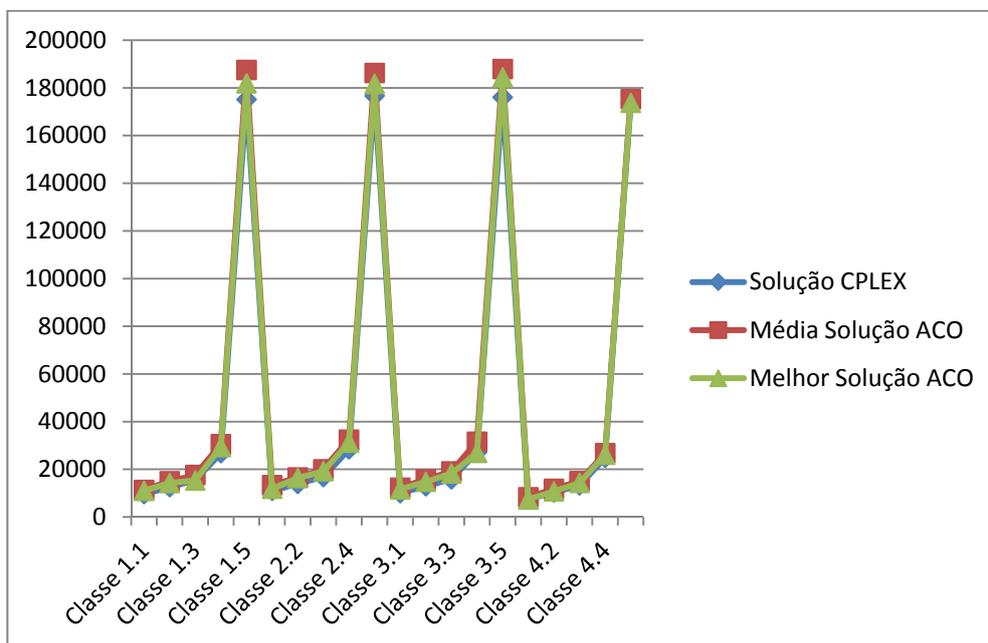


Figura 6-10: Gráfico com as soluções obtidas para os problemas 5x10.

Tabela 6-12: Resultados do problema integrado - Problemas (10X5)

	CPLEX			Heurística ACO 1					
	TC	FO	GAP	TC ACO	FO ACO	Desvio Padrão	GAP CPLEX	melhor solução	GAP melhor Solução
Classe 1.1	3600	12188	1,07	1020,88	14428,50	1268,78	18,38%	13849,00	13,63%
Classe 1.2	3600	15234	1,12	1123,32	18787,00	1530,20	23,32%	17592,00	15,48%
Classe 1.3	3600	18450	1,25	1004,43	22784,45	1466,55	23,49%	19185,00	3,98%
Classe 1.4	3600	27590	1,63	987,52	30587,20	491,34	10,86%	28854,00	4,58%
Classe 1.5	3600	168456	2,15	1125,21	196561,40	4603,41	16,68%	183925,00	9,18%
Classe 2.1	3600	14068,00	0,74	952,13	17338,20	439,39	23,25%	16741	19,00%
Classe 2.2	3600	16918,00	0,94	920,15	21391,70	2271,68	26,44%	20436	20,79%
Classe 2.3	3600	19768,00	1,13	903,06	23688,60	1849,24	19,83%	20436	3,38%
Classe 2.4	3600	31168,00	1,58	848,53	36688,60	13130,87	17,71%	32927	5,64%
Classe 2.5	3600	179429,00	2,09	752,30	183250,10	16216,01	2,13%	188863	5,26%

Classe 3.1	3600	13361,00	0,82	833,68	17331,10	2084,87	29,71%	13658	2,22%
Classe 3.2	3600	16261,00	1,01	806,50	21294,40	1186,98	30,95%	19720	21,27%
Classe 3.3	3600	19161,00	1,14	780,18	27103,40	1167,75	29,30%	25037	30,67%
Classe 3.4	3600	30761,00	1,42	834,91	39724,80	36935,04	22,56%	32563	5,86%
Classe 3.5	3600	179322,00	2,06	822,74	193603,10	183150,40	7,38%	189941	5,92%
Classe 4.1	3600	7000,00	2,77	815,60	7000,00	0,00	0,00%	7000,00	0,00%
Classe 4.2	3600	9927,00	2,86	815,60	9927,00	0,00	0,00%	9927,00	0,00%
Classe 4.3	3600	12827,00	2,37	815,60	12881,90	45,03	0,43%	12827	0,00%
Classe 4.4	3600	24490,00	1,94	813,02	24769,30	255,37	1,14%	24532,00	0,17%
Classe 4.5	3600	172992,00	1,66	813,95	173413,50	227,00	0,24%	173119,00	0,07%

Nos exemplares com 10 itens e 5 períodos (Tabela 6-8), pode ser observado um comportamento diferente, na resolução de alguns exemplares, quando comparamos com os resultados das Tabelas 6-6 e 6-7. Nestas tabelas, observamos que nos exemplares *.2 e *.3, o método heurístico ACO obtêm soluções mais “distantes” da solução do CPLEX, quando comparadas com as soluções dos exemplares *.1 e *.4. Uma possível justificativa para este fato é que o conflito entre as decisões de planejamento de produção e de transporte para estas classes é mais evidente. Nos outros casos, o custo de produção é muito maior quando comparado com o custo de transporte, ou vice-versa, o que pode facilitar na resolução dos problemas. Na Tabela 6-8, este fato não é tão evidente, e neste caso, os exemplares *.1 e *.2 para as três primeiras classes são os mais difíceis de serem resolvidos pelo método heurístico. Isto pode ser devido à complexidade de resolução do problema de dimensionamento de lotes e o baixo custo de transporte. Nos demais casos, o custo alto de transporte pode “facilitar” ou melhorar a busca por uma solução ótima. Cabe mencionar que, assim como nos casos anteriores, o método de resolução heurístico é competitivo com o pacote de otimização, considerando os exemplares analisados.

Tabela 6-13: Resultados do problema integrado - Problemas (10X10)

	CPLEX			Heurística ACO 1					
	TC	FO	GAP	TC ACO	FO ACO	Desvio Padrão	GAP CPLEX	melhor solução	GAP melhor Solução
Classe 1.1	3600	21142	3,41%	1120,98	28865,00	1046,95	26,76%	27677,00	23,61%
Classe 1.2	3600	26738	2,14%	1055,43	35741,00	1565,02	25,19%	33218,00	19,51%
Classe 1.3	3600	32715	3,17%	1015,13	42278,80	1288,13	22,62%	40570,00	19,36%
Classe 1.4	3600	55696	3,19%	974,10	69770,10	2547,48	20,17%	65786,00	15,34%
Classe 1.5	3600	360058	4,46%	1003,46	384181,89	2777,59	6,28%	380221,25	5,30%
Classe 2.1	3600	23226	1,69%	1173,84	33012,90	1516,07	29,65%	31311,00	25,82%
Classe 2.2	3600	29048	2,30%	974,10	69770,10	2547,48	20,17%	65786,00	15,34%
Classe 2.3	3600	34869	2,57%	1124,21	48155,50	1077,24	27,59%	46598,00	25,17%
Classe 2.4	3600	58408	3,54%	1027,00	75169,20	1541,12	22,30%	72949,00	19,93%
Classe 2.5	3600	360528	3,95%	945,72	385062,50	3218,53	6,37%	379127,00	4,91%

Classe 3.1	3600	22028	1,33%	1058,52	34893,20	2640,57	36,87%	30448,00	27,65%
Classe 3.2	3600	27808	1,55%	1028,70	43625,80	2433,72	36,26%	39335,00	29,30%
Classe 3.3	3600	33518	1,49%	1019,27	51408,40	1852,82	34,80%	48131,00	30,36%
Classe 3.4	3600	56631	1,85%	994,59	78071,60	2875,43	27,46%	75665,00	25,16%
Classe 3.5	3600	356878	3,07%	882,68	388032,70	3363,79	8,03%	383893,00	7,04%
Classe 4.1	3600	13935	2,98%	665,82	17150,90	798,92	18,75%	15764,00	11,60%
Classe 4.2	3600	19835	2,80%	668,41	23744,90	931,76	16,47%	22232,00	10,78%
Classe 4.3	3600	25654	2,40%	661,26	29829,60	488,14	14,00%	29032,00	11,64%
Classe 4.4	3600	48847	1,78%	667,59	53947,80	757,78	9,46%	53054,00	7,93%
Classe 4.5	3600	346921	2,01%	666,48	351912,00	1282,26	1,42%	349494,00	0,74%

Na Tabela 6-9 a heurística não obteve soluções próximas das soluções obtidas pelo método *branch-and-cut* do CPLEX para a maioria dos exemplares. Podemos perceber que para os exemplares com custo de transporte mais alto (Classe *.5), a heurística obtém boas soluções para os exemplares. Uma justificativa para este fato é que o algoritmo “busca” por soluções que utilizam o menor número possível de caminhões. Nos exemplares da Classe 4.* a heurística obtém o melhor resultado entre os problemas com 10 itens e 10 períodos. Isto ocorre devido ao fato do problema de planejamento de produção desta classe ser de fácil resolução .

6.5 Considerações finais do Capítulo

A idéia de considerar o transporte da carga sem a unitização foi relevante para o estudo do problema integrado, pois a partir desta idéia foi necessário integrar o problema de dimensionamento de lotes com o problema de empacotamento. O estudo realizado na primeira parte deste capítulo para o caso não capacitado foi importante para identificar e analisar os conflitos entre os custos de produção e os custos de transporte do problema integrado. Para a resolução do problema integrado, esboçamos uma heurística Lagrangiana que aplica uma relaxação Lagrangiana e com isso, obtemos dois subproblemas, o primeiro de dimensionamento de lotes e o segundo de empacotamento unidimensional, que é de difícil resolução. Optamos por não dar continuidade ao desenvolvimento desta heurística neste estudo, que fica como um tópico para pesquisa futura. Também foram desenvolvidas quatro heurísticas de resolução, sendo duas baseadas na prática de empresas e outras duas baseadas em otimização de colônia de formigas. O foco da segunda parte do capítulo foi na extensão de modelos e métodos de resolução considerando as restrições de capacidade da produção e o atraso da produção para satisfazer a demanda. Os resultados também foram competitivos, comparativamente ao método *branch-and-cut* do CPLEX.

7. Conclusões e Propostas Futuras

7.1 Conclusões

O objetivo principal deste trabalho foi estudar problemas e modelos de dimensionamento de lotes de produção com decisões de distribuição de produtos e desenvolver algumas extensões destes modelos, incluindo decisões de arranjo físico de carga dos produtos. Além disso, também estudar e propor abordagens eficazes para resolver estes problemas integrados de produção e transporte. Para isso, o objetivo principal foi dividido em duas partes. Na primeira parte deste trabalho foram estudadas algumas extensões do modelo de otimização e os métodos de resolução para o problema integrado apresentados em Molina *et al.* (2009), de maneira a considerar situações mais genéricas e realistas, assim como estudar e desenvolver outros métodos para resolver os modelos estendidos. Na segunda parte deste trabalho foram estudados alguns casos do problema de dimensionamento de lotes integrado com o problema de empacotamento (arranjo físico da carga). Alguns métodos de resolução para o problema integrado de dimensionamento de lotes com empacotamento foram desenvolvidos e a qualidade das soluções foi analisada.

Na primeira parte deste trabalho, o Modelo (2.2), apresentado em Molina *et al.* (2009) foi estendido (Capítulo 3) em três etapas (podendo ser considerada cada etapa como uma extensão do modelo). Na primeira etapa, para o transporte da produção, foi considerado a unitização da carga em paletes e três extensões de modelos existentes na literatura foram realizadas para o estudo do problema de dimensionamento de lotes com custos de transporte, tentando considerar diferentes situações que ocorrem na prática. A primeira consideração realizada é que diferentes tipos de itens (produtos) são transportados em paletes diferentes, lembrando, que os modelos apresentados na literatura consideram que diferentes tipos de itens podem ser transportados em um mesmo palete. A próxima consideração é que os custos de transportes não dependem diretamente do número de paletes utilizados, mas sim do número de caminhões necessários para transportar os paletes. Por último, foi considerado o caso de frota heterogênea para o transporte da produção.

Para estas três extensões da primeira parte deste trabalho, os modelos matemáticos foram implementados na linguagem de modelagem AMPL e resolvidos pelo método *branch-and-cut* do CPLEX. Inicialmente, foram considerados tempos limites de resolução relativamente pequenos (180 segundos) para validar e analisar a dificuldade de resolução dos modelos. Foram considerados, inicialmente, exemplares com 20 produtos e 12 períodos e, em geral, o pacote de otimização obteve a solução ótima para estes exemplares antes do limite de tempo estabelecido. Testes adicionais com exemplares maiores (i.e., com maior diversidade de produtos e maior horizonte de planejamento) e

tempos limites de resolução maiores também foram realizados e, para estes exemplares o pacote AMPL/CPLEX obteve soluções viáveis sem garantia de otimalidade para o Problema de dimensionamento de lotes com custo de transporte em que os itens diferentes são transportados em paletes distintos (Modelo 3.1). Por outro lado, os modelos em que os custos de transporte são dados pelo número de caminhões idênticos utilizados (Modelo 3.2) e o caso para frota heterogênea (Modelo 3.3) foram resolvidos mais facilmente pelo CPLEX para as classes de exemplares analisadas, pois, em alguns casos as soluções obtidas estão mais próximas da solução ótima e para alguns exemplares foi garantida a otimalidade da solução. Esta diferença na dificuldade de resolução entre os modelos pode ter ocorrido devido às novas restrições, adicionadas para considerar as diferentes extensões dos modelos que podem gerar planos de corte mais eficientes para a resolução dos problemas.

Como mencionado, durante a realização deste trabalho, foram realizadas visitas em duas transportadoras lotadas na cidade de São Paulo. Nestas empresas não existe um contrato direto que relaciona o custo de transporte e o número de caminhões utilizados, porém ambas solicitam uma previsão de caminhões necessários para o transporte da carga de seus clientes. Caso alguns desses clientes necessitem de um número maior de caminhões do que o previsto, a transportadora precisa alugar caminhões de outras empresas ou de terceiros para satisfazer a demanda, e as despesas com estes custos adicionais são transferidas diretamente para o cliente, o que pode ser identificado como um custo convexo similar ao utilizado nos modelos estudados. Assim, um dos modelos poderia ser utilizado para realizar a análise de cenários e auxiliar na decisão de se obter ou não a demanda de determinados clientes, ou formalizar um contrato relacionando o número de caminhões utilizados e o custo por caminhão. A aplicação dos modelos em um estudo de caso prático não foi possível neste estudo, mas é um tópico interessante para pesquisa futura.

Ainda na primeira parte deste trabalho, com o objetivo de desenvolver métodos de resolução mais rápidos para os problemas de dimensionamento de lotes e transporte com unitização da carga, escolhemos o problema representado pelo Modelo 3.1 por ter sido o mais difícil de ser resolvido pelo método *branch-and-cut* do CPLEX. Inicialmente, foi desenvolvida uma heurística Lagrangiana, tendo como base os estudos existentes na literatura. Esta heurística Lagrangiana não teve um desempenho competitivo com o método *branch-and-cut* do CPLEX, pois em alguns casos a heurística Lagrangiana foi lenta e não obteve bons limitantes inferiores para o problema. Com o objetivo de tentar melhorar o método de busca, foi pesquisada a aplicação do algoritmo de volume como uma alternativa ao algoritmo de otimização do subgradiente da relaxação Lagrangiana da heurística. O algoritmo de volume se mostrou um método mais rápido que a otimização do

subgradiente, porém as soluções obtidas pelos dois métodos foram de qualidades similares, com uma pequena vantagem para o algoritmo de volume. Uma justificativa para a falta de desempenho da heurística Lagrangiana com algoritmo de volume são as inequações viáveis adicionadas ao modelo para limitar o número de paletes transportados.

Além dos métodos descritos acima, foi proposta uma variação da heurística baseada em otimização de colônias de formigas para tratar o problema. Este método também não se mostrou eficiente, pois não obteve uma solução viável para alguns exemplares estudados. Para os exemplares em que uma solução viável foi obtida, esta solução ainda estava relativamente distante da solução obtida pelo método *branch-and-cut* do CPLEX. Acredita-se que a versão atual do método ACO ainda não fornece informação suficiente na matriz de feromônio para permitir ao método de busca dimensionar bem o tamanho dos lotes de produção.

Na segunda parte desta tese desenvolveu-se novos modelos de otimização e métodos de solução para problemas integrados mais gerais, que envolvem decisões de dimensionamento de lotes e decisões de empacotamento (isto é, arranjo de carga) dos produtos em caminhões ou *bins* (unidimensional, bidimensional e tridimensional). Diferentemente dos problemas estudados na primeira parte, as decisões de arranjo da carga são tomadas em conjunto com as do problema de dimensionamento de lotes. Para isso, foi necessário estudar o problema integrado de dimensionamento de lotes com empacotamento. Cabe observar que, nos problemas em que o transporte dos itens é feito por meio de paletes, o problema de empacotamento é resolvido *a priori*.

Para o estudo do problema integrado de dimensionamento de lotes com empacotamento, foram consideradas inicialmente três variações do problema: o empacotamento unidimensional, bidimensional e tridimensional. Quatro modelos foram apresentados para a integração dessas decisões de dimensionamento e empacotamento, sendo o quarto modelo uma generalização dos três primeiros casos. Dentre os três primeiros modelos, o caso de empacotamento unidimensional, por ser mais simples, foi o foco maior do capítulo e foi escolhido para ser implementado na linguagem de modelagem AMPL e resolvido com o auxílio do pacote de otimização CPLEX 11.0. Para os testes computacionais, foram considerados custos de transporte de tal modo que, inicialmente os custos de transporte são baixos, comparados aos custos de produção, o que permite resolver cada problema separadamente e seqüencialmente, focando primeiro na resolução do problema de produção e depois no problema de transporte. Também foram considerados casos em que os custos de transporte são altos, comparados com os custos de produção, também permitindo a resolução de cada problema separadamente e seqüencialmente, porém, focando agora primeiro na resolução do

problema de empacotamento. Dessa forma, foi possível identificar e analisar a existência de conflitos entre os custos de produção e os custos de transporte. Embora os testes realizados tenham envolvido exemplares de dimensões relativamente pequenas, o pacote de otimização teve mais dificuldade para resolver os problemas integrados, quando comparados com os problemas com unitização de carga da primeira parte deste estudo.

Assim como na primeira parte deste trabalho com o problema de dimensionamento de lotes com unitização da carga, na segunda parte também foram desenvolvidos e avaliados alguns métodos heurísticos de resolução do problema integrado de dimensionamento de lotes e empacotamento. Devido à complexidade do problema, foram estudados inicialmente problemas de dimensionamento de lotes sem restrições de capacidade e sem a permissão do atraso na entrega da demanda. Para estes casos, foram desenvolvidos métodos de resolução que se mostraram razoavelmente eficientes, comparativamente ao método *branch-and-cut* do CPLEX, dependendo da classe de problema analisado. Por exemplo, as estratégias que possuem como foco a resolução do problema de dimensionamento de lotes são melhores para resolver problemas em que os custos de transporte são baixos, quando comparados aos custos de produção. Similarmente, as estratégias que possuem foco na resolução do problema de empacotamento são melhores na resolução de problemas em que os custos de transporte são altos, quando comparados com os custos de produção. As estratégias baseadas em otimização de colônia de formigas tiveram um bom desempenho quando comparadas as duas estratégias baseadas na prática e ao método *branch-and-cut* do CPLEX.

Após este estudo com o problema integrado representado pelo Modelo 5.1, foram consideradas as restrições de capacidade da produção e o atraso da produção. O modelo de dimensionamento de lotes capacitado com atraso na produção integrado ao problema de empacotamento unidimensional foi então considerado (Modelo 5.4) e a estratégia de resolução que se destacou no estudo inicial (Heurística ACO 1) foi adaptada para a resolução deste problema. Assim, o método de resolução baseado em colônia de formigas foi então implementado para o caso com capacidade e atraso da produção. O método se mostrou competitivo com o pacote de otimização CPLEX, pois obteve boas soluções para os problemas estudados em um tempo competitivo ao do pacote de otimização.

7.1 Perspectivas para pesquisa futura

Este trabalho deixa algumas questões em aberto que poderão ser estudadas em pesquisas futuras. Para o problema de dimensionamento de lotes com custos de transporte utilizando a

unitização da carga do Capítulo 3, podemos tentar melhorar o método de resolução do problema por meio de novas inequações viáveis para o Modelo 3.1, que limitem de maneira mais eficiente o número de paletes utilizados para o transporte da produção. Outra proposta para pesquisa futura seria adaptar e implementar o algoritmo de volume proposto em Bahiense *et al.* (2002), na tentativa de se obter melhores soluções para o problema representado pelo Modelo 3.1, uma vez que o algoritmo de volume proposto em Barahona e Anbil (2000) não tem garantia de convergência para uma solução viável.

Em relação ao método de resolução baseado em colônias de formigas para resolver o Modelo 3.1, novos procedimentos de construção da solução poderiam ainda ser investigados. Lembrando que neste método há a necessidade de se obter uma matriz de feromônio com informações suficientes para o “aprendizado” na construção da solução. Outras perspectivas interessantes para pesquisas futuras relacionadas à primeira parte desta tese (Capítulos 3 e 4) seriam estender estes métodos e desenvolver outros métodos para resolver os outros modelos do Capítulo 3, em particular os Modelos 3.2 e 3.3.

Para os problemas integrados de dimensionamento de lotes com empacotamento e arranjo de carga estudados na segunda parte desta tese (Capítulos 5 e 6), acredita-se que o método de resolução baseado em colônia de formigas possa ser adaptado com poucas alterações no algoritmo de construção da solução para os casos mais gerais em que os problemas de empacotamento tenham duas ou mais dimensões. Para os casos bidimensional e tridimensional (Modelos 5.3 e 5.5), há a necessidade de se obter bons limitantes superiores para o número de caminhões utilizados. Para isso, a cada iteração seria necessário resolver um problema de empacotamento bidimensional ou tridimensional.

Ainda para os problemas integrados de dimensionamento de lotes com empacotamento do Capítulo 5, outras heurísticas baseadas em métodos de relaxação poderiam ser estudadas para o Modelo 5.1 (unidimensional), por exemplo, a relaxação *surrogate* (Glover, 1968) e combinações entre relaxações Lagrangiana e *surrogate* (Molina *et al.* 2009). Em resumo, a relaxação *surrogate* pode ser vista como a troca de um conjunto de restrições por uma única restrição gerada por uma combinação linear do conjunto de restrições. No Modelo 5.1, o conjunto de restrições que integra as decisões do planejamento da produção com o arranjo da carga é dada por $\sum_{k=1}^M Z_{ikt} \geq X_{it}$, em que Z_{ikt} é a quantidade de itens do tipo i carregadas no caminhão k no período t e X_{it} é a quantidade produzida do item i no período t . Considerando $\mu_{it} > 0, i = 1, \dots, n$ e $t = 1, \dots, T$ o multiplicador *surrogate*, uma relaxação *surrogate* é dada substituindo o conjunto de restrições $\sum_{k=1}^M Z_{ikt} \geq X_{it}$ do

Modelo 5.1 pela restrição $\sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \mu_{it} \sum_{k=1}^M Z_{ikt} \geq \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \mu_{it} X_{it}$. Observe que se $\mu_{it} = 1$ para $i = 1, \dots, n$ e $t = 1, \dots, T$, a relaxação *surrogate* pode ser separada em dois subproblemas. O primeiro é um problema de dimensionamento de lotes e o segundo é um problema de empacotamento em que toda a demanda tem que ser carregada nos caminhões. A solução da relaxação *surrogate* fornece um limitante inferior para o problema de integrado. Uma proposta de trabalho futuro seria estudar um método de atualização do multiplicador *surrogate* para obter o melhor limitante inferior para o problema.

Como mencionado, durante o desenvolvimento deste estudo algumas empresas foram visitadas para identificar e avaliar possíveis aplicações dos modelos e métodos de resolução deste trabalho. A aplicação dos modelos e métodos desenvolvidos nesta tese em estudos de caso reais, para se analisar na prática o desempenho e os benefícios destes modelos e métodos de solução também são propostas de pesquisas futuras interessantes deste trabalho.

Como foi evidenciado nos Capítulos 1 e 2, em todos os casos estudados neste trabalho admite-se que o transporte da produção é feito da fábrica para um único armazém. Como outra proposta futura, também poderia-se estudar como estender os modelos e métodos de resolução para tratar problemas integrados mais gerais, combinando decisões de dimensionamento de lotes com decisões de distribuição dos produtos para vários depósitos e/ou clientes, por meio de integração de problemas de roteirização e programação de veículos e arranjo de cargas nestes veículos em função da roteirização.

Mais recentemente Rath e Gutjahr (2011) definiram *matheuristics* como algoritmos de otimização interativos entre meta-heurísticas e programação matemática; mais detalhes sobre *matheuristics* também podem ser encontrados em Maniezzo *et al.* (2009). Outra perspectiva interessante de pesquisa futura desta tese seria combinar o método de otimização de colônia de formigas com um método exato de resolução baseado em programação matemática. A idéia seria utilizar interativamente o método exato para “ensinar” melhores caminhos de busca para as formigas. Com isso, poderia-se tentar diminuir o número de iterações do método de otimização baseado em colônia de formigas, principalmente nos casos em que o algoritmo tem dificuldade para obter uma solução factível, como ocorre, por exemplo, na resolução de diversos exemplares do Modelo 3.1.

Referências Bibliográficas

Alvarez-Valdes, R., Parreño F. e Tamarit, J. M. “A tabu search algorithm for the pallet loading problem”. *OR SPECTRUM*, 27, n 1 (2005): 43-61.

Alem, D. J. e Morabito, R. “Production planning in furniture settings via robust optimization”. *Computers & Operations Research* 39, n 2 (2012), 139-150.

Almada-Lobo, B., Klabjan, D., Carravilla, M. A. e Oliveira, J. F. “Single machine multi-product capacitated lot sizing with sequence-dependent setups”, *International Journal of Production Research* 45, n. 20 (2007): 4873-4894.

Afentakis, P., Gavish, B. e Karmakar., U. “Computationally efficient optimal solutions to the lot-sizing problem in multistage assembly systems.” *Management Science* 30, n. 2 (1984): 222-239.

Aggarwal, A., e Park., J. K. “Improved algorithms for economic lot size problems.” *Operations Research* 41 (1993): 549–571.

Amaral, A. e Wright, M. “Experiments with a strategic oscillation algorithm for the pallet loading problem”. *International Journal of Production Research* 3, n 11(2001): 2341–2351

Araujo, S. A. “Problemas de Dimensionamento de Lotes e suas Integrações a Outros Problemas em Contextos Industriais”. *Texto de Livre – docência*. IBILCE-UNESP. São José do Rio Preto, São Paulo (2011).

Araujo, S. A., e Arenales, M. N. “Dimensionamento de lotes e programação do forno numa fundição de porte médio.” *Pesquisa Operacional* 23, n. 3 (2003): 403-420.

Araujo, S. A., e Arenales, M. N. “Planejamento e programação da produção numa fundição cativa automatizada de grande porte.” *Investigação Operacional* 24 (2004): 197–210.

Araujo, S. A., e Arenales, M. N. “Problema de dimensionamento de lotes monoestágio com restrições de capacidade: modelagem, método de resolução e resultados computacionais.” *Pesquisa Operacional* 20, n. 2 (2000): 287-306.

Araujo, S. A., Arenales, M. N. e Clark, A. R. "Joint rolling-horizon scheduling of materials processing and lot-sizing with sequence-dependent setups." *Journal of Heuristics* 13 (2007): 337-358.

Araujo, S. A., Arenales, M. N. e Clark, A. R. “Lot-sizing and furnace scheduling in small market-driven foundries.” *Computers and Operations Research* 35 (2008): 916-932.

Arbib, C., e Marinelli., F. “Integrating process optimization and inventory planning in cutting-stock with skiving option: An optimization model and its application: Supply chain management and advanced planning.” *European Journal of Operational Research* 163, n. 3 (2005): 615-630.

- Archettia, C., Bertazzi, L. e Speranza, M. G. "Reoptimizing the 0-1 knapsack problem". *Discrete Applied Mathematics*, 158 (2010), n 17: 1879-1887.
- Arenales, M. N., Armentano, V., Morabito, R. e Yanasse, H. *Pesquisa Operacional*. Rio de Janeiro: Campus, 2006.
- Armentano, V. A, Toledo, F. M. B. e França, P. "A network flow model for capacitated lot-sizing problemas." *Omega* 27 (1999): 275-284.
- Bahiense, L., Maculan, N. e Sagastizábal, C. "The volume algorithm revisited: relation with bundle methods". *Mathematical Programming, Ser. A* 94 (2002): 41-69.
- Bahl, H., Ritzman, L.P. e Gupta, J. N. D. "Determining lot sizes and resource requirements: A review." *Operations Research* 35, n. 3 (1987): 329-245.
- Ballou, R. H. *Gerenciamento da cadeia de suprimentos: planejamento, organização e logística empresarial*. 4. Porto Alegre: Bookmann, 2004.
- Barahona, F. e Anbil, R. "The volume algorithm: producing primal solutions with a subgradient method." *Mathematical Programming, Ser. A* 87 (2000): 385-399.
- Barany, I., Roy, T. J. V. e Wolsey, L. A. "Strong formulations for multi-item capacited lot sizing." *Management Science* 30, n. 10 (1984a): 1255-1261.
- Barany, I., Van Roy, T.J. e Wolsey, L.A. "Uncapacitated lot sizing: the convex hull of solutions". *Mathematical Programming* 22, (1984b), pp. 32-43.
- Baumol, W.J., e Vinod, H. D. "An inventory theoretic model of freight transport demand." *Management Science* 16 (1970): 413-421.
- Beasley, J. E. "An exact two-dimensional non-guillotine cutting tree search procedure." *Operations Research* 1 (1985): 49-64.
- Beasley, J. E. —. OR-Library Bin packing - one-dimensional. <http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/orlib/binpackinfo.html> (acesso em 15 de janeiro de 2010).
- Bernardes, E. D., Araujo, S. A. e Rangel, S. "Reformulação para um problema integrado de dimensionamento e seqüenciamento de lotes". *Pesquisa Operacional*, v. 30 (2010): 637-655.
- Bertazzi, L., e Speranza, M. G. "Models and Algorithms for the Minimization of Inventory and Transportation Costs: A Survey, in *New Trends in Distribution Logistics* (Speranza, M.G. and Staehly, P., eds.)" *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, 1999: 137-157.

- Bertrand, J. W. M., e Fransoo, J. C. “Operations management research methodologies using quantitative modeling.” *International Journal of Operations & Production Management* 22, n. 2 (2002): 241-264.
- Bhattacharya, S.; Roy, R. & Bhattacharya, S. “An Exact Depth-First Algorithm for the Pallet Loading Problem”. *European Journal of Operational Research*, 110 (1998), 610-625.
- Billington, P., McClain, J. O. e Thomas, L. “Heuristics for multilevel lot-sizing with a bottleneck.” *Management Science* 32, n. 8 (1986): 989-1006.
- Birgin, E. G., Lobato, R. D. e Morabito, R., “An effective recursive partitioning approach for the packing of identical rectangles in a rectangle”, *Journal of the Operational Research Society*, 61 (2010), 306-320.
- Bischoff, E.E. “Three-dimensional packing of items with limited load bearing strength”. *European Journal of Operational Research* 168(2006):952-66.
- Bitran, G. R. e Yanasse, H. H. Computational complexity of the lot size problem. *Management Science* 28 (1982), n. 10, pp. 1174-1186.
- Blum, C. e Dorigo, M. “The Hyper-Cube Framework for Ant Colony Optimization.” *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics - Part B: Cybernetics* 34, n. 2 (2004): 1161-1172.
- Bonney, M. “Reflections on production planning and control (PPC).” *Gestão & Produção* 7, n. 3 (2000): 181-207.
- Brahimi, N., Dauzere-Peres, S. e Wolsey, L. A. “Polyhedral and Lagrangian approaches for lot sizing with production time windows and setuptimes.” *Computers & Operations Research* 37 (2010): 182-188.
- Brahimi, N., Dauzere-Peres, S.N., Najid, M. e Nordli, A. “Single item lot sizing problem.” *European Journal of Operational Research* 1 (2006): 1-16.
- Brugger, B., Doerner, K. F., Hartl, R. F. e Reimann, M. “An Ant Colony Optimization Approach for the One-Dimensional Bin Packing Problem.” *Lecture Notes in Computer Science - Evolutionary Computation in Combinatorial Optimization*, 2004: 41-50.
- Bryman, A. *Research methods and organization studies*. London: Unwin Hyman, 1989.
- Bullnheimer, B, Hartl, R. e Strauss, C. “An improved ant system algorithm for the vehicle routing problem.” *Operation Research* 89 (1997): 319--328.
- Buschkühl, L., Sahling, F., Helber, S. e Tempelmeier, H. “Dynamic capacitated lot-sizing problems: a classification and review of solution approaches”, *OR Spectrum* (2010) 32:231-261.
- Camerini, P. M., Fratta, L., e Maffioli, F. “On improving relaxation methods by modified gradient techniques”. *Mathematical Programming Study* 3 (1975), 26-34.

- Cattrysse, D., Maes, J. e van Wassenhove, L. N. “Set partitioning and column generation heuristics for capacitated dynamic lot sizing.” *European Journal of Operational Research* 46 (1990): 38-47.
- Chen, C. S., Lee, S. M. e Shen, Q.S. “A analytical model for the container loading problem”. *European Journal of Operational Research* 80 (1995): 68–76.
- Christofides, N. e Whitlock, C. “An Algorithm for two-dimensional cutting problems.” *Operations Research* 25, n. 1 (1977): 30-44.
- Clark, A., Almada-Lobo, B. e Almeder, C. “Lot sizing and scheduling: industrial extensions and research opportunities”, *International Journal of Production Research*, 49, n 9 (2011), 2457-2461
- Clark, A., Morabito, R. e Toso, E., “Production setup-sequencing and lot-sizing at an animal nutrition plant through ATSP subtour elimination and patching”, *Journal of Scheduling*, 13 (2010), 2: 111-121.
- Coffman, E. G., Leung, J. Y. T. e Csirik, J. “Variantes of classical one-dimensional bin packing”. *Handbook of Approximation Algorithms and Metaheuristics*, Editado por Teofilo F . Gonzalez. Capítulo 3: (2007): 33-1–33-13.
- Coffman, E. G., Garey, M. R. e Johnson, D. S. “Approximation Algorithms for Bin Packing: A Survey.” In: *Approximation Algorithms for N-Hard Problems*, por D. S. Hochbaum, 46-93. PWS Publishing Company, 1997.
- Colomi, A, Dorigo, M. e Maniezzo, V. “Distributed Optimization by Ant Colonies.” *Proceeding of ECAL91 - European Conference of Artificial Life*. Paris: France, 1991. 134-142.
- Colomi, A., Dorigo, M. e Maniezzo, V. “Distributed optimizations by ant colonies.” *European Conference of Artificial Life*, 1991: 134-142.
- Cordon, O., Viana, I. F., Herrera, F. e Moreno, L. “A New ACO Model Integrating Evolutionary Computation Concepts: The Best-Worst Ant System.” *Ants 2000*, 2000.
- Dantzig, G. B. e Philip Wolfe, P. “Decomposition Principle for Linear Programs”. *Operations Research* 8 (1960): 101–111.
- Diaby, M., Bahl H., Karwan, M. H. e Ziont, S. “Capacitated Lot-sizing and Scheduling by Lagrangean Relaxation.” *European Journal of Operational Research* 59 (1992): 444-458.
- Dorigo, M, e Blum, C. “Ant Colony Optimization theory: A survey.” *Theoretical Computer Science* 344 (2005): 243-278.
- Dorigo, M, e Grambardella, L. M. “Ant Colony System: A cooperative Learning Approach to the Travelling Salesman Problem.” *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* 1, n. 1 (1997): 53-66.

- Dorigo, M., Maniezzo, V. e Colomi, A. "Ant System: optimization by a Colony of Cooperating Agents." IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics - Part B: Cybernetics 26, n. 1 (1996): 29-41.
- Dorigo, M., e Stutzle, T. "Ant Colony Optimization." The MIT Press, 2004.
- Dowland, K. "An Exact Algorithm for the Pallet Loading Problem". European Journal of Operational Research, 31 (1987), 78-84.
- Drexler, A. e Kimms, A. "Lot Sizing and Scheduling – Survey and extensions." European Journal of Operational Research 99 (1997): 221-235.
- Dyckhoff, H. "A typology of cutting and packing problem." European Journal of Operational Research 44 (1990), 145-159.
- Ellabib, I., Calamai, P. e Basir, O. "Exchange strategies for multiple Ant Colony System." Information Sciences 177 (2007): 1248-1264.
- Erengüç, Ş. S., Simpson, N. e Vakharia, A. "Integrated production/distribution planning in supply chains: An invited review." European Journal of Operational Research 115 (1999): 219-236.
- Evans, J. R. "An efficient implementation of the Wagner-Whitin algorithm for dynamic lot-sizing." Journal of Operations Management 5 (1985): 229-235.
- Evans, J. R. "Network-based optimization algorithms for the capacitated multi-item lot-sizing problem." Computers and Industrial Engineering 9 (1985): 297-305.
- Farley, A. A. "Mathematical programming models for cutting-stock problems in the clothing industry." Journal of Operational Research Society 39, n. 1 (1988): 41-53.
- Federgruen, A., e Tzur, M. "Fast solution and detection of minimal forecast horizons in dynamic programs with a single indicator of the future: Applications to dynamic lot-sizing models." Management Science 41 (1995): 874-893.
- Ferreira, D. Abordagens para o problema integrado de dimensionamento e sequenciamento de lotes de produção de bebidas. Tese de Doutorado, São Carlos: PPG em Engenharia de Produção/UFSCar, 2006.
- Ferreira, D., Morabito, R. e Rangel, S. "Relax and fix heuristics to solve one-stage one-machine lot-scheduling models for small-scale soft drink plants." Computers & Operations Research, n. 37 (2010): 684-691.
- Ferreira, D., Morabito, R. e Rangel, S., "Solution approaches for the soft drink integrated production lot sizing and scheduling problem", European Journal of Operational Research, 196 (2009): 697-706.
- Fisher, M.L. "The Lagrangian Relaxation Method for Solving Integer Programming Problems". Management Science 50 (2004), Ten Most Influential Titles of "Management Science's": 1861-1871.

- Fisher, M. L. "The lagrangian relaxation method for solving integer programming problems." *Management Science* 27, n. 1 (1981): 1-18.
- Fleischmann, B. "The discrete lot sizing and scheduling problem." *European Journal of Operational Research* 44 (1990): 337-348.
- Florian, M., e Klein, M. "Deterministic production planning with concave cost and capacity constraints." *Management Science* 19 (1974): 12-20.
- Fourer, R., Gay, D. M. e Kernighan, B. W. "AMPL: A Modeling Language for Mathematical Programming", Duxbury Press. 2a edição, 2002.
- Fukuda, E. H. "Algoritmo do volume e otimização não diferenciável". Dissertação de mestrado. IME-USP, São Paulo (2007).
- Gambardella, L. M., e Dorigo, M. "An Ant Colony System Hybridized with a New Local Search for the Sequential Ordering Problem." *INFORMS Journal of Computing* 12, n. 3 (2000): 237-255.
- Gambardella, L. M., e Dorigo, M. "Solving Symetric and Asymmetric TSPs by Ant Colonies." *International Conference on Evolutionary Computation*. (1996). 622-627.
- Gao, L., Altay, N. e Robinson, E. P. "A comparative study of modeling and solution approaches for the coordinated lot-size problem with dynamic demand". *Mathematical and Computer Modelling*, 47 (2008): 1254-1263.
- Geoffrion, A.M. "Lagrangian relaxation in integer programming." *Mathematical Programming Study* 2 (1974): 82-114.
- Gilmore, P. C., e Gomory, R. E.. "A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem." *Operations Research* 9 (1961): 849-859.
- Gilmore, P. C., e Gomory, R. E. "A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem, parth II." *Operations Research* 14 (1963): 94-120.
- Gilmore, P. C., e Gomory, R. E. "Multistage cutting stock problems of two and more dimensions." *Operations Research*, 1965: 94-120.
- Glover, F. "Surrogate Constraints". *Operations Research*, 16 (1968): 741-749.
- Gramani, M. C. N., França, P. M. e Arenales, M. N. "A Lagrangian relaxation approach to a coupled lot-sizing and cutting stock problem." *International Journal of Production Economics* 119 (2009): 219-227.
- Gramani, M. C. e França, P. M.. "The combined cutting stock and lot-sizing problem in industrial processes." *European Journal of Operational Research* 147, n. 1 (2006): 509-521.

Gramani, M.C.N., França, P.M. e Arenales, M.N. “A linear optimization approach to the combined production planning mode”, *Journal of the Franklin Institute* 348, (2010), n. 2: 1161-1750.

Guignard, M. “Lagrangean Relaxation”. *Top*, v 11 (2003), n2: 151-228.

Harris, F. W. “How many parts to make at once.” *The Magazine of Management* 10 (1913): 135–36.

Held, M., Wolfe, P., e Crowder, H. P. “Validation of subgradient optimization”. *Mathematical Programming* 6 (1974), 62–88.

Held, M., e Karp, R.M. “The traveling salesman problem and minimum spanning tree: part II.” *Mathematical Programming* 1 (1971): 6-25.

Hendry, L. C., Fok, K. K. e Shek, K. W. “A cutting stock and scheduling problem in the copper industry.” *Journal of Operational Research* 47, n. 1 (1996): 38-47.

Hifi M. “Approximate algorithms for the container loading problem”. *International Transactions in Operational Research* 9(2002), n 6:747–74.

Hifi, M. “Exact algorithms for the guillotine strip cutting/packing problem”. *Computers & Operations Research*, 25 (1998): 925–940.

ILOG CPLEX 11.0 – User’s Manual (2007). Download em <http://www-01.ibm.com/software/integration/optimization/cplex-optimizer/>. Última visita em 12/07/2010.

Jans, R, e Degraeve, Z.. “Meta-heuristics for dynamic lot sizing: A review and comparison of solution approaches.” *European Journal of Operational Research* 177 (2007): 1855-1875.

Jans, R, e Degraeve, Z. “Modelling Industrial Lot Sizing Problems: A Review.” *International Journal of Production Research* 46, n. 6 (2008): 1619-1643.

Jans, R., e Degraeve, Z. “Improved lower bounds for the capacitated lot sizing problem with setup times.” *Operations Research Letters* 32, n. 2 (2004): 185-195.

Johnson, L. A. e Montgomery, D. C. *Operations research in production planning, scheduling, and inventory control*. New York: John Wiley & Sons, 1974.

Junqueira, L., Morabito, R. e Yamashita, D. S. “MIP-based approaches for the container loading problem with multi-drop constraints”. *Annals of Operations Research*, aceito para publicação (2011). DOI: 10.1007/s10479-011-0942-z

Junqueira, L., Morabito, R. e Yamashita, D. S., “Three-dimensional container loading models with cargo stability and load bearing constraints”, *Computers & Operations Research*, 39, 1, 74-85, 2012.

- Karimi, B., Ghomi, S. M. T. F. e Wilson, J. M. “The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms.” *The International Journal of Management Science* 31 (2003): 365-378.
- Karimi, A. e Gupta, S. “Scheduling a Two-Stage Multiproduct Process with Limited Product Shelf Life in Intermediate Storage.” *Ind. Eng. Chem. Res.*, 42 , n. 3 (2003a), 490–508.
- Kellerer, H., Pferschy, U. e Pisinger, D. “Knapsack Problems”, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg (2004).
- Kitamura, B. L. A. “Heurística Surrogate para o problema de carregamento de paletes do produtor” – Dissertação de mestrado - São José do Rio Preto, UNESP-IBILCE 2009
- Kirca, O. e Kökten, M. “A new heuristic approach for the multi-item dynamic lot sizing problem.” *European Journal of Operational Research* 72, n. 2 (1994): 332-341.
- Krarup, J. e Bilde, O. “Plant location, set covering and economic lot size: An O(mn)-algorithm for structured problems.” *International Series of Numerical Mathematics* 36 (1977): 155-186.
- Kuik, R., Salomom, M., van Wassenhose, L. N. e Maes, J. “Linear programming simulated annealing and tabu search heuristics for lotsizing in bottleneck assembly systems.” *IIE Transactions* 25 (1993): 62-72.
- Leão, A. A. S., Santos, M. O., Hoto, R., Arenales, M. N. “The constrained compartmentalized knapsack problem: mathematical models and solution methods”. *European Journal of Operational Research*, 212 (2011): 455-463.
- Lee, W-S, Han, J. H. e Cho, S.J. “A Heuristic for a multi-product dynamic lot-sizing and shipping problem.” *Int. J. Production Economics* 98 (2005): 204-214.
- Lodi, A., Martello S. e Monaci, M. “Two-dimensional packing problems: A survey”. *European Journal of Operational Research*, 141 (2002): 241–252.
- Lozano, S., Larraneta, J. e Oliveira, L. “Primal Dual Approach to the Single Level Capacitated Lot-Sizing Problem.” *European Journal of Operational Research* 51 (1991): 354-366.
- Luche, J. R. D., Morabito, R. e Pureza, V., “Combining process selection and lot sizing models for production scheduling of electrofused grains”, *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 26 (3), 421-443, 2009.
- Maes, J., McClain, J. O. e Wassenhove, L. N. V.. “Multilevel capacitated lotsizing complexity and lp based heuristic.” *European Journal of Operational Research* 53 (1991): 131-148.
- Maniezzo, V., Stützle, T. e Vob, S. “Matheuristics: Hybridizing Metaheuristics and Mathematical Programming”. *Annals of Information Systems*. Editora: Springer-Verlag, 2009.
- Martello, S., e Toth, P. *Knapsack Problems - Algorithms and Computer Implementations*. England: John Wiley & Sons Ltda, 1990.

- Mateus, G.R., Ravetti, M.G., Souza, M.C., Valeriano, T.M., 2009. Capacitated lot sizing and sequence dependent setup scheduling: an iterative approach for integration. *Journal of Scheduling* 13, 245-259.
- Molina, F. "Heurísticas para um problema de dimensionamento de lotes com restrições de capacidade e custos de transporte." dissertação de mestrado, DCCE, UNESP-Ibilce, São José do Rio Preto, 2007.
- Molina, F., Santos, M. O., Toledo, F. M.B. e Araujo, S. A. "An approach using the lagrangean/surrogate relaxation for lot-sizing and distribution problem." *Pesquisa Operacional* 29, n. 2 (2009): 269-288.
- Morabito, R. e Morales, S. "A simple and effective recursive procedure to the manufacturer's pallet loading problem." *Journal of the Operational Research Society* 49 (1998): 819-828.
- Morabito, R. e Pureza, V. "Modelagem e Simulação." In: *Metodologia de Pesquisa em Engenharia de Produção*, por P. A. C. Miguel, 165-194. Rio de Janeiro: Editora Campus/Elsevier, 2009.
- Nemhauser, G. L. e Wolsey, L.A. "Integer and Combinatorial Optimization", John Wiley, New York (1988).
- Nonas, S. L., e Thorstenson, A. "A combined cutting-stock and lot-sizing problem." *Operation Research* 120 (2000): 327-342.
- Norden, L, e Velde, S. "Multi-product lot-sizing with a transportation capacity reservation contract." *European Journal of Operational Research* 165 (2005): 127-138.
- Oliveira, L. K. Métodos baseados em relaxação Lagrangiana e surrogate para o problema de carregamento de paletes do produtor. Tese de Doutorado, São Carlos: PPG em Engenharia de Produção/UFSCar, 2004.
- Oliveira, L. K., e Morabito, R. "Métodos exatos baseados em relaxação Lagrangiana e surrogate para o problema de carregamento de paletes do produtor." *Pesquisa Operacional* 26, n. 2 (2006): 403-432.
- Parreño F., Alvarez-Valdes R., Oliveira, J.F., Tamarit, J.M. "A maximal-space algorithm for the container loading problem. *INFORMS Journal on Computing* 20(2008):412–22.
- Pimentel, C. M. O. "Algoritmos de partição e geração de colunas para dimensionamento de lotes de produção". Dissertação de Mestrado. Universidade do Minho. Minho-Portugal (2005).
- Pisinger D. "Heuristics for the container loading problem". *European Journal of Operational Research* 141(2002):382–92.
- Poltroniere, S. C., K. C. Poldi, F. M. B. Toledo, e M. N. Arenales. "A coupling cutting stock-lot sizing problem in the paper industry." *Annals of Operations Research* 157 (2007): 91-104.
- Pureza, V. e Morabito, R. "Some experiments with a simple tabu search algorithm for the manufacturer's pallet loading problem." *Computers & Operations Research* 33 (2006): 804-819.

- Quadt, D. e Kuhn, H. "Capacitated lot-sizing with extensions: a review". *4OR: A Quarterly Journal of Operations Research*, 6 (2008), n. 1: 61-83.
- Reimann, M. "Guiding ACO by Problem Relaxation: A Case Study on the Symmetric TSP". *Computer Science, Hybrid Metaheuristics, Lecture Notes in Computer Science, Volume 4771* (2007): 45-56.
- Rangel, S., e Ferreira, D. "Um modelo de dimensionamento de lote para uma fábrica de refrigerantes." *Tema - Tendências Em Matemática Aplicada e Computacional* 4, n. 2 (2003): 237-246.
- Rizk, N., e Martel, A. *Supply chain flow planning methods: a review of the lot-sizing literature*. Working Paper DT-2001-AM-1, Canada: Université Laval, 2001.
- Robinson, P., Narayanan, A. e Sahinc, F. "Coordinated deterministic dynamic demand lot-sizing problem: A review of models and algorithms". *Omega*, 37 (2009), n. 1: 3-15.
- Santos, S. M. P. G., Araujo, S. A. e Rangel, S. "Integrated cutting machine programming and lot sizing in furniture industry". *Pesquisa Operacional para o desenvolvimento*, v. 3(2011): 1-17
- Santos, M. O., Massago, S. e Almada-Lobo, "Infeasibility handling in genetic algorithm using nested domains for production", *Computers & Operations Research* 37, n 6 (2010): 1113-1122.
- Scheithauer, G. e Terno, J. "The G4-heuristic for the pallet loading problem". *Journal of the Operational Research Society*, 47(1996):511-522..
- Smabasivan, M. e Yahya, S. "A Lagrangean-based heuristic for multi-plant, multi-item, multi-period capacitated lot-sizing problems with inter-plant transfers." *Computer & Operations Research*, 32 (2005), n. 3, 537-555.
- Seliaman, M. E., e Ahmad, A. R. "A generalized algebraic model for optimizing inventory decisions in a multi-stage complex supply chain." *Transportations Reserch Parte E* 45 (2009): 409-418.
- Slack, N., Chambers, S. e Johnston, R. *Administração da produção*. 2. São Paulo: Editora Atlas S. A., 2009.
- Souderpandian, J. e Balashanmugam, B. "Multiproduct, Multifacility scheduling Using the Transportation Model: a Case Study." *Production and Inventory Management Journal* 32, n. 4 (1991): 69-73.
- Stovba, S. D. "Ant algorithms: Theory and applications." *Programming and Computer Software*, v. 31, n. 4 (2005): 167-178.
- Stutzle, T. e Hoos, H. H. "Max-min ant system." *Future Gener. Comput. Syst.*, Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, v. 16, n. 9 (2000): 889-914.
- Taha, H. A. "Pesquisa Operacional". Editora Pearson Prentice Hall, São Paulo, 8ª edição (2008).

Tavares Neto, R. F. e Godinho Filho, M. “Proposta de um framework para prototipagem de sistemas heurísticos multiagentes baseados em algoritmos de colônia de formigas.” *Pesquisa Operacional*, v. 29, n. 3 (2009): 643-668.

Tavares Neto, R. F. e Godinho Filho, M. “A software model to prototype Ant Colony Optimization Algorithms”. *Expert Systems with Applications*, aceito para publicação, 2011a.

Tavares Neto, R. F. e Godinho Filho, M. “An Ant Colony Optimization Approach to a Permutational Flowshop Scheduling Problem with Outsourcing Allowed: . *Computers & Operations Research*, aceito para publicação, 2011b.

Tavares Neto, R. F. e Godinho Filho, M. “Otimização por colônia de formigas para o problema de sequenciamento de tarefas em uma única máquina com terceirização permitida”. *Gestão & Produção*, aceito para publicação, 2011c.

Toledo, C. F., França, P. M., Morabito, R. e Kimms. A. “Multi-population genetic algorithm to solve the synchronized and integrated two-level lot-sizing and scheduling problem.” *International Journal of Production Research* 47, n. 11 (2009): 3097-3119.

Toledo, F. M. B., e Armentano, V. A. “A Lagrangian-based heuristic for the capacitated lot-sizing problem in parallel machines.” *European Journal of Operational Research* 175 (2006): 1070-1083.

Toledo, F. M. B., e Armentano, V. A. Dimensionamento de lotes em máquinas paralelas. Tese de Doutorado, Campinas: Universidade de Campinas - Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - Departamento de Desenvolvimento de Sistemas, 1998.

Tonaki, V. S. e Toledo, F. M. B. “An approach for solving the lot-sizing problem of a market-driven foundry”, *Journal of the Operational Research Society* 61, n 1 (2010): 108-114.

Toso, E. A. V., R. Morabito, e A. R. Clark. “Combinação de abordagens GLSP e ATSP para o problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes de produção de suplementos para nutrição animal.” *Pesquisa Operacional* 28 (2008): 423-450.

Toso, E., e Morabito, R.. “Otimização do dimensionamento e sequenciamento de lotes de produção: Estudo de caso numa fábrica de rações.” *Gestão & Produção* 12, n. 2 (2005): 203–217.

Toso, E., R. Morabito, e Clark, A.. “Lot-sizing and sequencing optimisation at an animal-feed plant.” *Computers and Industrial Engineering* 57 (2009): 813-821.

Trigeiro, W. W., Thomas, L. J. e McClain, J. O. “Capacitated Lot Sizing With Setup Times.” *Management Science* 35, n. 3 (1989): 353-366.

Vanderbeck, F. “Exact solution of decomposable integer programs A computational study on management applications”. Economic and Social Research Council (ESRC), Swindon - United Kingdom (2000).

- Vanderbeck, F. e Savelsbergh, M. W. P. "A generic view of Dantzig–Wolfe decomposition in mixed integer programming". *Operations Research Letters* 34 (2006), v 3: 296-306.
- Vroblefski, M., Ramesh, R. e Zions, S. "Efficient lot-sizing under a differential transportation cost structure for serially distributed ware-houses." *European Journal of Operational Research* 127 (2000): 574-593.
- Wagelmans, A., van Hoesel, S. e Kolen, A. "Economic lot sizing: an $o(n \log n)$ algorithm that runs in linear time in the wagner-whitin case." *Operations Research* 40 (1992): 145–156.
- Wagner, H. M., e Whitin, T. M.. "Dynamic version of the economic lot size model." *Management Science* 13 (1958): 88-96.
- Wolsey, L. A. *Integer Programming*. John Wiley & Sons, 1998.
- Wolsey, L. A., e Nemhauser, G. L.. *Integer and Combinatorial Optimization*. Wiley-Interscience, 1999.
- Wong, J. T. "The distribution processing and replenishment policy of the supply chain under asymmetric information and deterioration: Insight into the information value." *Expert Systems with Applications* 37 (2010): 2347-2353.
- Xiao, Y., e Taaffe, K.. "Satisfying market demands with delivery obligations or delivery charges." *Computers & Operations Research* 37 (2010): 396-405.
- Young-Gun G., Maing-Kyu K. "A fast algorithm for two-dimensional pallet loading problems of large size". *European Journal of Operational Research* 134(2001): 193–202.
- Zangwill, W. L. "A backlogging model and a multi-echelon model of a dynamic economic lot size production system - a network approach." *Management Science* (9) 15 (1969): 506-527.
- Zhu, X. e Wilhelm, W. E. "Scheduling and lot sizing with sequence dependent setup: a literature review". *IIE Transactions* 38 (2006): 987-1007