

**LEONARDO JUNQUEIRA**

**MODELOS E ALGORITMOS PARA PROBLEMAS INTEGRADOS DE  
ROTEAMENTO E CARREGAMENTO DE VEÍCULOS**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia de Produção.

Orientador: Prof. Dr. Reinaldo Morabito Neto  
Agências Financiadoras: CAPES e FAPESP

**São Carlos  
2013**

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária/UFSCar**

J95ma

Junqueira, Leonardo.

Modelos e algoritmos para problemas integrados de roteamento e carregamento de veículos / Leonardo Junqueira. -- São Carlos : UFSCar, 2013.  
228 p.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2013.

1. Pesquisa operacional. 2. Otimização combinatória. 3. Modelagem matemática. 4. Métodos heurísticos. I. Título.

CDD: 658.4034 (20<sup>a</sup>)



## FOLHA DE APROVAÇÃO

Aluno(a): Leonardo Junqueira

TESE DE DOUTORADO DEFENDIDA E APROVADA EM 17/05/2013 PELA  
COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Reinaldo Morabito Neto  
Orientador(a) PPGE/UFSCar

Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Vitória Maria Miranda Pureza  
PPGE/UFSCar

Prof. Dr. Horacio Hideki Yanasse  
LAC/INPE

Prof. Dr. Flávio Keidi Miyazawa  
IC - UNICAMP

Prof. Dr. José Fernando Oliveira  
INESC TEC/FEUP

---

Prof. Dr. Mário Otávio Batalha  
Coordenador do PPGE



Aos meus pais,  
Maria e Osvaldo.



## AGRADECIMENTOS

---

---

Agradeço a todos que contribuíram de alguma maneira, direta ou indiretamente, para a realização desta obra. Em especial, gostaria de mencionar:

O professor Reinaldo Morabito Neto, por ter me dado a oportunidade de realizar mais este trabalho e pela orientação no mesmo, sempre com muita paciência e bom humor, e pelas inúmeras leituras e correções do texto.

Os professores José Fernando da Costa Oliveira e Maria Antónia da Silva Lopes de Carravilla, ambos do Departamento de Engenharia Industrial e Gestão da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto (DEIG-FEUP), por terem gentilmente me recebido no Porto e em Portugal, e supervisionado meu estágio de doutorado sanduíche naquela universidade.

Os professores Flávio Keidi Miyazawa, Horacio Hideki Yanasse, José Fernando da Costa Oliveira, Maria Antónia da Silva Lopes de Carravilla e Vitória Maria Miranda Pureza, pelos comentários, sugestões e críticas feitos no exame de qualificação e na defesa da tese, e que me ajudaram a melhorar o nível deste trabalho.

Os pesquisadores Christopher Sebastian Groër e Fabiana Oliveira Cecilio, que de alguma forma disponibilizaram os códigos de suas implementações computacionais, sem os quais este trabalho jamais teria sido concluído.

A rede mundial de computadores e a ferramenta de busca da Google, que me disponibilizaram inúmeros tutoriais e fóruns de discussão, que me auxiliaram no entendimento dos códigos e nas implementações computacionais.

Os colegas Marcos Roberto Silva e Rejane Arinos Vasco, por terem me recebido em diversas oportunidades na empresa em que trabalham e por terem sido sempre solícitos ao fornecer dados e informações, que me permitiram uma melhor compreensão do problema prático estudado neste trabalho.

Os colegas Bruno Jensen Virginio da Silva, Cleber Damião Rocco, Flávio Molina da Silva, Marina Soares Almeida, e todos os demais integrantes do Grupo de Pesquisa Operacional do DEP-UFSCar, e também os colegas Diana Yomali Ospina Lopez, Luís Filipe Ribeiro dos Santos Guimarães, Maria Teresa Peixoto Braga Bianchi de Aguiar, Pedro Filipe

de Monteiro Rocha, e todos os demais integrantes do Laboratório de Investigação Operacional do DEIG-FEUP, pelo companheirismo e cordialidade durante meu processo de doutorado.

Os funcionários do DEP-UFSCar, Karina dos Santos, Raquel Ottani Boriolo e Robson Lopes dos Santos, da secretaria de pós-graduação, e Leandro Canali Ramos, do suporte de informática, pela solicitude em diversos momentos.

A CAPES e a FAPESP, pelo apoio financeiro.

Os colegas de república em São Carlos, Heitor Leon Marson e Levi Sato, por tornarem a residência em São Carlos alegre e harmoniosa.

Minha namorada, Priscila Cristina Silva, que, perto ou longe, esteve sempre comigo, tendo se mostrado a melhor descoberta da minha tese.

Meus pais, Maria José Zupiroli Junqueira e Osvaldo José Junqueira, e meu irmão, Fabrício Junqueira, pela dedicação e atenção em todos os momentos, sem as quais eu dificilmente teria cumprido mais esta etapa.



...

*tudo se apresentou nesse relance  
e me chamou para seu reino augusto,  
afinal submetido à vista humana.*

*Mas, como eu relutasse em responder  
a tal apelo assim maravilhoso,  
pois a fé se abrandara, e mesmo o anseio,*

*a esperança mais mínima — esse anelo  
de ver desvanecida a treva espessa  
que entre os raios do sol inda se filtra;*

*como defuntas crenças convocadas  
presto e fremente não se produzissem  
a de novo tingir a neutra face*

*que vou pelos caminhos demonstrando,  
e como se outro ser, não mais aquele  
habitante de mim há tantos anos,*

*passasse a comandar minha vontade  
que, já de si volúvel, se cerrava  
semelhante a essas flores reticentes*

*em si mesmas abertas e fechadas;  
como se um dom tardio já não fora  
apetecível, antes despiciendo,*

*baixei os olhos, incurioso, lasso,  
desdenhando colher a coisa oferta  
que se abria gratuita a meu engenho.*

...

(fragmento de *A Máquina do Mundo*,  
de Carlos Drummond de Andrade)



## RESUMO

---

---

O objeto de estudo deste trabalho são problemas combinados do Problema de Roteamento de Veículos com o Problema de Carregamento de Contêineres, tratados mais recentemente na literatura como Problemas Integrados de Roteamento e Carregamento de Veículos. Nestes problemas, genericamente, busca-se otimizar simultaneamente o planejamento dos roteiros dos veículos e o arranjo da carga dentro dos mesmos, respeitando-se uma série de considerações práticas que advêm tanto do Problema de Roteamento de Veículos como do Problema de Carregamento de Contêineres. Os objetivos deste trabalho são: (i) estudar a integração do Problema de Roteamento de Veículos com o Problema de Carregamento de Contêineres; (ii) desenvolver modelos de programação matemática para representar Problemas Integrados de Roteamento e Carregamento de Veículos; (iii) desenvolver e implementar métodos heurísticos e meta-heurísticos para resolver alguns destes problemas; (iv) analisar e comparar o desempenho da solução dos modelos, via linguagens de modelagem e aplicativos de otimização, e dos métodos heurísticos desenvolvidos ao resolver exemplos baseados na literatura e em situações reais em que este problema ocorre. Além de serem problemas difíceis e relativamente pouco estudados, a principal justificativa para o estudo destes problemas é que, com métodos de solução eficazes para a otimização do roteamento dos veículos e do carregamento das cargas, decisões operacionais e táticas podem ser tomadas com maior segurança, acurácia, rapidez e menor incerteza em situações reais, além de possibilitar um melhor desempenho do pessoal encarregado da montagem e descarregamento da carga. Por outro lado, estes métodos também podem ser úteis na redução de custos fixos e variáveis de uma empresa que venha a utilizá-los. Experimentos computacionais com alguns dos modelos propostos foram realizados utilizando um aplicativo de otimização e aplicados a exemplos gerados aleatoriamente. Estes resultados mostram que os modelos são coerentes e representam adequadamente as situações tratadas, embora esta abordagem (na sua versão atual) esteja limitada a resolver otimamente apenas problemas de tamanho bem moderado, isto é, em que haja poucos clientes, poucos veículos, e que o número de possíveis posições para se arranjar as caixas dentro de cada veículo seja relativamente pequeno. Isso motivou o desenvolvimento de métodos heurísticos e meta-heurísticos para

resolver problemas mais realistas de roteamento e carregamento de veículos. Os algoritmos são baseados na combinação de heurísticas clássicas das literaturas de Roteamento de Veículos e de Carregamento de Contêineres, bem como em duas estratégias meta-heurísticas, e no uso delas em procedimentos mais elaborados. Embora não haja garantias de que as soluções obtidas para os respectivos problemas sejam ótimas, tratam-se de heurísticas relativamente simples, suficientemente rápidas para resolver problemas reais, razoavelmente flexíveis para incorporar aspectos práticos, e que normalmente garantem soluções relativamente boas em tempos computacionais aceitáveis na prática. Experimentos computacionais foram realizados com estes métodos considerando exemplos baseados na literatura de Roteamento de Veículos e em pedidos reais de cargas, bem como exemplos baseados em um caso real em que o problema ocorre.

**Palavras-chave:** Roteamento de Veículos. Carregamento de Contêineres. Problemas Integrados de Roteamento e Carregamento de Veículos. Otimização Combinatória. Métodos Heurísticos.

## ABSTRACT

---

---

The object of this study are combined problems of the Vehicle Routing Problem and the Container Loading Problem, recently addressed as Integrated Vehicle Routing and Loading Problems. In these problems, the objective is to optimize simultaneously the planning of the vehicles' routes and the arrangement of the cargo inside them, while considering a series of practical constraints from both vehicle routing and container loading. The objectives of this study are: (i) to study the integration between the Vehicle Routing Problem and the Container Loading Problem; (ii) to develop mathematical programming models to represent Integrated Vehicle Routing and Loading Problems; (iii) to develop and implement heuristics and metaheuristics to solve some of these problems; (iv) to analyze and compare the performance of the proposed models, by means of modeling languages and optimization solvers, as well as the heuristic methods, when solving instances from the literature and real-world situations. Besides being hard and relatively less studied problems, the main reason for this study is that with effective solution methods for optimizing the vehicle routing and the cargo loading, operational and tactical decisions could be made with more reliability, accuracy, quickness and with less uncertainty in real situations, besides of an improved use of the staff tasked to load and unload the cargo. On the other hand, these methods can also be useful to reduce fixed and variable costs in a company that might use them. Computational experiments with some of the proposed models were performed with an optimization software and randomly generated instances. The results show that the models are consistent and properly represent the practical situations treated, although this approach (in its current version) is limited to solve to optimality only problems of moderate size, that is, situations with few customers, few vehicles, and mainly with a relatively reduced number of possible positions to load the boxes. This has motivated the development of heuristic and metaheuristic methods to solve more realistic vehicle routing and loading problems. The algorithms are based on the combination of classical heuristics from both the vehicle routing and container loading literatures, as well as two metaheuristic strategies, and their use in more elaborate procedures. Although these approaches cannot assure optimal solutions for the respective problems, they are relatively simple, fast enough to solve real instances, flexible

enough to include practical considerations, and normally assure relatively good solutions in acceptable computational times in practice. Computational experiments were performed with these methods considering instances based on the vehicle routing literature and actual customers' orders, as well as instances based on a real-world situation where the problem occurs.

**Key-words:** Vehicle Routing. Container Loading. Integrated Vehicle Routing and Loading Problems. Combinatorial Optimization. Heuristic Methods.

## LISTA DE FIGURAS

---

---

Figura 1. Modelo de Mitroff et al. (1974) base para este trabalho.....	27
Figura 2. Problemas em redes de transporte multiobjetivo.....	31
Figura 3. Duas caixas empacotadas de maneira instável e estável, respectivamente. ....	43
Figura 4. Conjunto de caixas posicionadas sobre uma caixa de referência. ....	44
Figura 5. Caminhão sendo descarregado ao longo de cinco destinos.....	45
Figura 6. Exemplo de carregamento que não considera (esquerda) e que considera (direita) restrições de empacotamento tridimensional.....	53
Figura 7. Visão geral da área de recebimento, triagem e expedição da transportadora visitada.....	61
Figura 8. Modelo de caminhão tipicamente utilizado pela transportadora visitada.....	62
Figura 9. Equipamento utilizado pela transportadora visitada para obter as dimensões e os pesos das caixas.....	63
Figura 10. Derivação das formulações integradas a partir da formulação original para o TSP. ....	65
Figura 11. Posições relativas e área de contato de duas caixas dentro do veículo.....	72
Figura 12. Conjunto de caixas empilhadas sobre uma caixa de referência.....	73
Figura 13. Alcance máximo (“comprimento flexível”) do funcionário.....	75
Figura 14. Abstração de uma solução conceitual obtida com a formulação (1)-(5). ....	75
Figura 15. Exemplo de uma solução obtida com a formulação (1)-(5) e as restrições (13)-(16).....	77
Figura 16. Exemplo de uma solução obtida com a formulação (1)-(5) e as restrições (13)-(16) e (17)-(20).....	78
Figura 17. Abstração de uma solução conceitual obtida com a formulação (6)-(12). ....	80
Figura 18. Exemplo de uma solução obtida com a formulação (6)-(10) e (12) e as restrições (21)-(25).....	82
Figura 19. Exemplo de uma solução obtida com a formulação (6)-(10) e (12) e as restrições (21)-(25) e (26)-(29). ....	83
Figura 20. Abstração de uma solução conceitual obtida com a formulação (1)-(5). ....	85

Figura 21. Exemplo de uma solução obtida com a formulação (1)-(5) e as restrições (30)-(33). .....	87
Figura 22. Exemplo de uma solução obtida com a formulação (1)-(5) e as restrições (30)-(33) e (34). .....	88
Figura 23. Exemplo de uma solução obtida com a formulação (1)-(5) e as restrições (30)-(33) e (35). .....	89
Figura 24. Exemplo de uma solução obtida com a formulação (1)-(5) e as restrições (30)-(33), (35) e (36)-(39). .....	90
Figura 25. Exemplo de uma solução obtida com a formulação (1)-(5) e as restrições (30)-(33), (35), (36)-(39) e (40). .....	91
Figura 26. Abstração de uma solução conceitual obtida com a formulação (6)-(12). .....	93
Figura 27. Exemplo de uma solução obtida com a formulação (6)-(10) e (12) e as restrições (41)-(45). .....	96
Figura 28. Exemplo de uma solução obtida com a formulação (6)-(10) e (12) e as restrições (41)-(45) e (46). .....	97
Figura 29. Exemplo de uma solução obtida com a formulação (6)-(10) e (12) e as restrições (41)-(45) e (47). .....	98
Figura 30. Exemplo de uma solução obtida com a formulação (6)-(10) e (12) e as restrições (41)-(45), (47) e (48)-(51). .....	99
Figura 31. Exemplo de uma solução obtida com a formulação (6)-(10) e (12) e as restrições (41)-(45), (47), (48)-(51) e (52). .....	100
Figura 32. Depósito (1) e oito clientes (2-9) distribuídos geograficamente. ....	103
Figura 33. Padrões de empacotamento obtidos para o exemplo com paletes, 14 clientes e até 2 veículos. ....	111
Figura 34. Estratégia 1- carregamento após o roteamento. ....	120
Figura 35. Estratégia 2- carregamento durante o roteamento. ....	123
Figura 36. Os 12 clientes, o depósito (1) e a lista das economias para execução do Algoritmo de Clarke & Wright. ....	183
Figura 37. Primeira união de roteiros – clientes 12 e 13. ....	183
Figura 38. Segunda união de roteiros – clientes 11 e 12. ....	184
Figura 39. Terceira união de roteiros – clientes 9 e 10. ....	184
Figura 40. Quarta união de roteiros – clientes 8 e 11. ....	185
Figura 41. Quinta união de roteiros – clientes 7 e 9. ....	185
Figura 42. Sexta união de roteiros – clientes 4 e 5. ....	186



Figura 43. Sétima união de roteiros – clientes 3 e 4. ....	186
Figura 44. Oitava união de roteiros – clientes 2 e 3. ....	187
Figura 45. Os 12 clientes, o depósito (1) e o raio de varredura para execução do Algoritmo de Gillett & Miller. ....	189
Figura 46. Primeiro cliente (10) atribuído ao primeiro veículo. ....	190
Figura 47. Primeiro roteiro concluído. ....	190
Figura 48. Primeiro cliente (8) atribuído ao segundo veículo. ....	190
Figura 49. Segundo roteiro concluído. ....	191
Figura 50. Primeiro cliente (12) atribuído ao terceiro veículo. ....	191
Figura 51. Terceiro roteiro concluído. ....	191
Figura 52. Primeiro cliente (4) atribuído ao quarto veículo. ....	192
Figura 53. Quarto roteiro concluído. ....	192
Figura 54. Os 8 tipos de caixas presentes no exemplo de George e Robinson (1980). ....	197
Figura 55. Após iniciar o preenchimento da primeira camada. ....	197
Figura 56. Após terminar o preenchimento da primeira camada. ....	198
Figura 57. Após iniciar o preenchimento da segunda camada. ....	199
Figura 58. Após terminar o preenchimento da segunda camada. ....	200
Figura 59. Após iniciar o preenchimento da terceira camada. ....	201
Figura 60. Após terminar o preenchimento da terceira camada. ....	202
Figura 61. Após iniciar o preenchimento da quarta camada. ....	203
Figura 62. Após terminar o preenchimento da quarta camada. ....	204
Figura 63. Após iniciar o preenchimento da quinta camada. ....	205
Figura 64. Após terminar o preenchimento da quinta camada. ....	206
Figura 65. Após iniciar o preenchimento da sexta camada. ....	207
Figura 66. Após terminar o preenchimento da sexta camada. ....	208
Figura 67. Após iniciar o preenchimento da sétima camada. ....	209
Figura 68. Após terminar o preenchimento da sétima camada. ....	211
Figura 69. Após iniciar o preenchimento da oitava camada. ....	212
Figura 70. Após terminar o preenchimento da oitava camada. ....	213
Figura 71. Após iniciar o preenchimento da nona camada. ....	214
Figura 72. Após terminar o preenchimento da nona camada. ....	215
Figura 73. Após iniciar o preenchimento da décima camada. ....	216
Figura 74. Após terminar o preenchimento da décima camada. ....	217
Figura 75. Movimento 1-Ponto intra-roteiro. ....	221

Figura 76. Movimento 1-Ponto inter-roteiros.....	222
Figura 77. Movimento 2-Opt intra-roteiro. ....	222
Figura 78. Movimento 2-Opt inter-roteiros.....	222

## LISTA DE TABELAS

---

---

Tabela 1.	Considerações práticas apresentadas por Bischoff e Ratcliff (1995). .....	42
Tabela 2.	Resumo dos trabalhos que trataram Problemas Integrados de Roteamento e Carregamento de Veículos.....	54
Tabela 3.	Número de variáveis e restrições do CVRP e do 3L-CVRP para exemplos com até 2 veículos.....	104
Tabela 4.	Número de variáveis e restrições do CVRP e do 3L-CVRP para exemplos com até 3 veículos.....	104
Tabela 5.	Resultados obtidos com o CVRP e o 3L-CVRP para exemplos com até 2 veículos. ....	108
Tabela 6.	Resultados obtidos com o CVRP e o 3L-CVRP para exemplos com até 3 veículos. ....	109
Tabela 7.	Resultados obtidos com o CVRP e o 3L-CVRP para exemplos com paletes e até 2 veículos.....	110
Tabela 8.	Resultados obtidos com o CVRP e o 3L-CVRP para exemplos com paletes e até 3 veículos.....	110
Tabela 9.	Resumo dos exemplos baseados em Christofides et al. (1979).....	126
Tabela 10.	Resultados obtidos com os algoritmos baseados no Algoritmo de Clarke & Wright sem nenhuma restrição de empacotamento tridimensional para os exemplos baseados em Christofides et al. (1979).....	130
Tabela 11.	Resultados obtidos com os algoritmos baseados no Algoritmo de Gillett & Miller sem nenhuma restrição de empacotamento tridimensional para os exemplos baseados em Christofides et al. (1979).....	130
Tabela 12.	Resultados obtidos com a Estratégia 1 com o Algoritmo de Clarke & Wright para os exemplos baseados em Christofides et al. (1979).....	131
Tabela 13.	Resultados obtidos com a Estratégia 1 com o Algoritmo de Gillett & Miller para os exemplos baseados em Christofides et al. (1979).....	131
Tabela 14.	Resultados obtidos com a Estratégia 2 com o Algoritmo de Clarke & Wright para os exemplos baseados em Christofides et al. (1979).....	132

Tabela 15. Resultados obtidos com a Estratégia 2 com o Algoritmo de Gillett & Miller para os exemplos baseados em Christofides et al. (1979).....	132
Tabela 16. Resultados obtidos com a Estratégia 3 com o Algoritmo de Clarke & Wright para os exemplos baseados em Christofides et al. (1979).....	133
Tabela 17. Resultados obtidos com a Estratégia 3 com o Algoritmo de Gillett & Miller para os exemplos baseados em Christofides et al. (1979).....	133
Tabela 18. Resumo dos resultados obtidos para os exemplos baseados em Christofides et al. (1979).....	133
Tabela 19. Resumo dos exemplos baseados em um caso real. ....	134
Tabela 20. Resultados obtidos com os algoritmos baseados no Algoritmo de Clarke & Wright sem nenhuma restrição de empacotamento tridimensional para os exemplos baseados em um caso real. ....	138
Tabela 21. Resultados obtidos com os algoritmos baseados no Algoritmo de Gillett & Miller sem nenhuma restrição de empacotamento tridimensional para os exemplos baseados em um caso real. ....	138
Tabela 22. Resultados obtidos com a Estratégia 1 com o Algoritmo de Clarke & Wright para os exemplos baseados em um caso real. ....	139
Tabela 23. Resultados obtidos com a Estratégia 1 com o Algoritmo de Gillett & Miller para os exemplos baseados em um caso real. ....	139
Tabela 24. Resultados obtidos com a Estratégia 2 com o Algoritmo de Clarke & Wright para os exemplos baseados em um caso real. ....	140
Tabela 25. Resultados obtidos com a Estratégia 2 com o Algoritmo de Gillett & Miller para os exemplos baseados em um caso real. ....	140
Tabela 26. Resultados obtidos com a Estratégia 3 com o Algoritmo de Clarke & Wright para os exemplos baseados em um caso real. ....	141
Tabela 27. Resultados obtidos com a Estratégia 3 com o Algoritmo de Gillett & Miller para os exemplos baseados em um caso real. ....	141
Tabela 28. Resumo dos resultados obtidos para os exemplos baseados em um caso real....	141
Tabela 29. Resumo dos exemplos com aumento da heterogeneidade da carga.....	142
Tabela 30. Resultados obtidos com os algoritmos baseados no Algoritmo de Clarke & Wright sem nenhuma restrição de empacotamento tridimensional para os exemplos gerados aleatoriamente.....	145

Tabela 31. Resultados obtidos com os algoritmos baseados no Algoritmo de Gillett & Miller sem nenhuma restrição de empacotamento tridimensional para os exemplos gerados aleatoriamente. ....	145
Tabela 32. Resultados obtidos com a Estratégia 1 com o Algoritmo de Clarke & Wright para os exemplos gerados aleatoriamente. ....	146
Tabela 33. Resultados obtidos com a Estratégia 1 com o Algoritmo de Gillett & Miller para os exemplos gerados aleatoriamente. ....	146
Tabela 34. Resultados obtidos com a Estratégia 2 com o Algoritmo de Clarke & Wright para os exemplos gerados aleatoriamente. ....	147
Tabela 35. Resultados obtidos com a Estratégia 2 com o Algoritmo de Gillett & Miller para os exemplos gerados aleatoriamente. ....	147
Tabela 36. Resultados obtidos com a Estratégia 3 com o Algoritmo de Clarke & Wright para os exemplos gerados aleatoriamente. ....	148
Tabela 37. Resultados obtidos com a Estratégia 3 com o Algoritmo de Gillett & Miller para os exemplos gerados aleatoriamente. ....	148
Tabela 38. Tipos, dimensões, quantidades e prioridades das caixas do exemplo de George e Robinson (1980). ....	196
Tabela 39. Tipos e dimensões das caixas do exemplo 1 dos experimentos baseados em um caso real. ....	227
Tabela 40. Número de caixas de cada tipo requeridas por cada cliente do exemplo 1 dos experimentos baseados em um caso real. ....	227
Tabela 41. Tipos e dimensões das caixas do exemplo 1 dos experimentos baseados em Christofides et al. (1979). ....	228
Tabela 42. Número de caixas de cada tipo requeridas por cada cliente do exemplo 1 dos experimentos baseados em Christofides et al. (1979). ....	228



# SUMÁRIO

---

---

CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO.....	25
CAPÍTULO 2 ROTEAMENTO E CARREGAMENTO DE VEÍCULOS.....	29
2.1 INTRODUÇÃO.....	29
2.2 PROBLEMAS DE ROTEAMENTO DE VEÍCULOS.....	29
2.2.1 ELEMENTOS DO ROTEAMENTO DE VEÍCULOS.....	32
2.2.2 PRINCIPAIS VARIAÇÕES.....	38
2.3 PROBLEMAS DE CARREGAMENTO DE CONTÊINERES.....	40
2.3.1 CONSIDERAÇÕES PRÁTICAS NO CARREGAMENTO DE CONTÊINERES.....	41
2.3.2 PRINCIPAIS VARIAÇÕES.....	45
2.4 INTEGRAÇÃO COM OUTROS PROBLEMAS.....	48
2.5 PROBLEMAS INTEGRADOS DE ROTEAMENTO E CARREGAMENTO DE VEÍCULOS.....	52
2.5.1 O PROBLEMA EM UMA SITUAÇÃO REAL.....	60
CAPÍTULO 3 FORMULAÇÕES MATEMÁTICAS.....	65
3.1 INTRODUÇÃO.....	65
3.2 FORMULAÇÃO PARA O TSP.....	66
3.3 FORMULAÇÃO PARA O CVRP.....	68
3.4 PRÉ-DEFINIÇÕES PARA AS CONSIDERAÇÕES PRÁTICAS.....	69
3.5 FORMULAÇÕES PARA O 2L-TSP.....	75
3.6 FORMULAÇÕES PARA O 2L-CVRP.....	79
3.7 FORMULAÇÕES PARA O 3L-TSP.....	84
3.8 FORMULAÇÕES PARA O 3L-CVRP.....	93
3.9 RESULTADOS COMPUTACIONAIS E DISCUSSÃO.....	102

3.9.1 RESULTADOS DE EXEMPLOS GERADOS ALEATORIAMENTE .....	102
CAPÍTULO 4 MÉTODOS DE SOLUÇÃO.....	112
4.1 INTRODUÇÃO .....	112
4.2 ALGORITMOS UTILIZADOS .....	113
4.3 ESTRATÉGIA 1 – CARREGAMENTO APÓS O ROTEAMENTO .....	117
4.4 ESTRATÉGIA 2 – CARREGAMENTO DURANTE O ROTEAMENTO.....	120
4.5 ESTRATÉGIA 3 – MISTO ENTRE AS ESTRATÉGIAS 1 E 2.....	123
4.6 RESULTADOS COMPUTACIONAIS E DISCUSSÃO .....	125
4.6.1 RESULTADOS DE EXEMPLOS BASEADOS NA LITERATURA.....	125
4.6.2 RESULTADOS DE EXEMPLOS BASEADOS EM UM CASO REAL.....	134
4.6.3 RESULTADOS DE EXEMPLOS GERADOS ALEATORIAMENTE .....	142
CAPÍTULO 5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS .....	149
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	151
APÊNDICE A MODELOS EM GAMS .....	171
APÊNDICE B ALGORITMO DE CLARKE & WRIGHT.....	181
APÊNDICE C ALGORITMO DE GILLET & MILLER .....	188
APÊNDICE D ALGORITMO DE GEORGE & ROBINSON .....	193
APÊNDICE E VARIAÇÕES DO ALGORITMO DE GEORGE & ROBINSON .....	218
APÊNDICE F OPERADORES DE BUSCA LOCAL .....	221
APÊNDICE G ALGORITMO <i>SIMULATED ANNEALING</i> .....	223
APÊNDICE H ALGORITMO <i>RECORD-TO-RECORD TRAVEL</i> .....	225
APÊNDICE I DADOS DE ALGUNS EXEMPLOS .....	227



# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

---

A resolução de Problemas de Roteamento de Veículos tem sido um elemento importante na gestão eficiente do transporte em empresas e na coordenação da cadeia de suprimentos. De maneira geral, estes problemas tratam da atribuição de um conjunto de ordens de transporte ou serviço a um conjunto de veículos, e a determinação do itinerário de cada veículo. O objetivo do problema é minimizar os custos envolvidos, normalmente o número de veículos necessários e/ou a distância total percorrida. Os Problemas de Roteamento de Veículos possuem muitas aplicações no mundo real, dentro e fora da logística de transportes, e aparecem em diversos formatos, dependendo do tipo de pedido, do objetivo, do horizonte de tempo, do nível de planejamento, e das restrições às quais cada problema deve atender.

Por outro lado, a resolução de Problemas de Carregamento de Contêineres tem sido um elemento importante nas atividades logísticas de armazenagem, manuseio de materiais, embalagens de proteção e transporte. De maneira geral, estes problemas tratam da atribuição de itens menores a um objeto maior, todos com geometrias definidas. O objetivo do problema normalmente é maximizar o volume (ou valor) dos itens empacotados dentro do único objeto disponível, ou minimizar o número de objetos necessários para se empacotar todos os itens disponíveis. Os Problemas de Carregamento de Contêineres possuem aplicações na logística de transportes, e aparecem em diversos formatos, dependendo do objetivo, da variedade de itens e de objetos, e das restrições às quais cada problema deve atender.

O *objeto de estudo* deste trabalho é um problema combinado do Problema de Roteamento de Veículos (DANTZIG; RAMSER, 1959; BALINSKI; QUANDT, 1964; CLARKE; WRIGHT, 1964; GASKELL, 1967; KNIGHT; HOFER, 1968) com o Problema de Carregamento de Contêineres (GEORGE; ROBINSON, 1980; HAN *et al.*, 1989; BISCHOFF; MARRIOTT, 1990; GEHRING *et al.*, 1990; HAESSLER; TALBOT, 1990), tratado mais recentemente na literatura como Problema Integrado de Roteamento e Carregamento de Veículos (GENDREAU *et al.*, 2006; ARAUJO, 2006; CAMPOS, 2008; MOURA;

OLIVEIRA, 2009; TARANTILIS *et al.*, 2009; FUELLERER *et al.*, 2010; ZACHARIADIS *et al.*, 2012; ZHU *et al.*, 2012; BORTFELDT, 2012; RUAN *et al.* 2013; BORTFELDT; HOMBERGER, 2013). Neste problema, genericamente, busca-se otimizar simultaneamente o planejamento dos roteiros dos veículos e o arranjo da carga dentro dos mesmos, respeitando-se uma série de considerações práticas que advêm tanto do Problema de Roteamento de Veículos como do Problema de Carregamento de Contêineres. Até a presente data, não se tem conhecimento de trabalhos que tenham apresentado formulações matemáticas para este problema integrado, tendo a literatura tratado o problema predominantemente através de abordagens heurísticas e meta-heurísticas.

Os *objetivos* deste trabalho são: (i) estudar a integração do Problema de Roteamento de Veículos com o Problema de Carregamento de Contêineres; (ii) desenvolver modelos de programação matemática para representar Problemas Integrados de Roteamento e Carregamento de Veículos; (iii) desenvolver e implementar métodos heurísticos e meta-heurísticos para resolver alguns destes problemas; (iv) analisar e comparar o desempenho da solução dos modelos, via linguagens de modelagem e aplicativos de otimização, e dos métodos heurísticos desenvolvidos ao resolver exemplos extraídos da literatura e de situações reais em que este problema ocorre. Em particular, pretende-se visitar empresas em que este problema aparece, com o objetivo de entender melhor o problema na prática e coletar dados e informações.

Entre as principais *justificativas* deste estudo, destaca-se que são problemas difíceis e relativamente pouco estudados, além do que com métodos de solução eficazes para a otimização do roteamento dos veículos e do carregamento das cargas, decisões operacionais e táticas de uma empresa podem ser tomadas com maior segurança, acurácia, rapidez e menor incerteza, além de possibilitar um melhor desempenho do pessoal encarregado da montagem e descarregamento da carga. Por outro lado, estes métodos também podem ser úteis na redução de custos fixos e variáveis de uma empresa que venha a utilizá-los. Um aspecto importante é a motivação para analisar e comparar os resultados obtidos por métodos científicos e os obtidos da prática de sistemas reais de distribuição de mercadorias.

Em suma, as principais *contribuições* deste trabalho são: (i) a proposição de modelos de programação matemática para o Problema Integrado de Roteamento e Carregamento de Veículos (o autor não tem conhecimento de formulações matemáticas na literatura que tratem este problema); (ii) a investigação e a análise das soluções destes modelos via linguagens de modelagem e aplicativos de otimização; (iii) a pesquisa e o desenvolvimento de heurísticas e meta-heurísticas para resolução do problema.

Quanto à sua *abordagem* de pesquisa, este trabalho possui uma abordagem *quantitativa*, pois esta é particularmente mais apropriada para produzir descobertas em que relações de causa e efeito são estabelecidas, e em que o pesquisador manipula ativamente um cenário e observa os efeitos desta intervenção nas variáveis de interesse (BRYMAN, 1989).

Quanto ao seu *método* de pesquisa, este trabalho utiliza a *modelagem* (matemática) como método, pois este permite ao pesquisador manipular diretamente as variáveis independentes do problema em questão, e se basear em um conjunto de variáveis que variam dentro de um domínio específico, em que modelos de relações causais entre as variáveis independentes e dependentes são desenvolvidos, analisados e testados. Além disso, este método permite ao pesquisador se basear na construção de modelos objetivos que expliquem o comportamento de processos operacionais da vida real, ou que possam apreender os problemas de tomada de decisão (BERTRAND; FRANSOO, 2002; MORABITO; PUREZA, 2010). De acordo com a terminologia proposta por Meredith *et al.* (1989) *apud* Bertrand e Fransoo (2002), este trabalho possui um método de pesquisa *axiomático* e *normativo*. A Figura 1 ilustra o modelo de Mitroff *et al.* (1974) base para este trabalho.

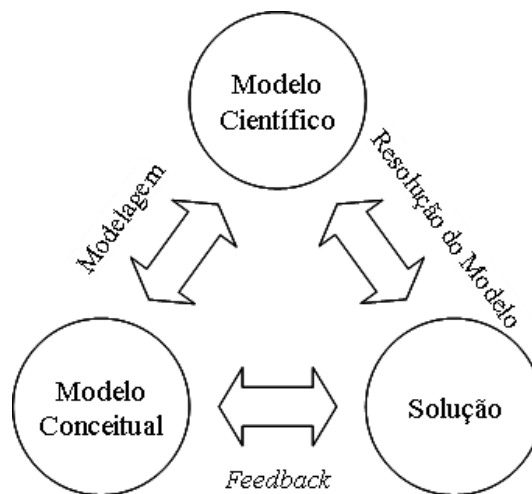


Figura 1. Modelo de Mitroff *et al.* (1974) base para este trabalho.  
Fonte: adaptado de Bertrand e Fransoo (2002).

Isto é, no “roteiro” deste trabalho está a aplicação da modelagem sobre um modelo conceitual inicial, a resolução do modelo científico obtido através da modelagem, e a realimentação da solução deste modelo científico no modelo conceitual inicial.

A *hipótese* principal deste trabalho é a de que é possível e vantajoso empregar modelos de programação matemática e métodos de otimização para modelar e resolver Problemas Integrados de Roteamento e Carregamento de Veículos. Pretende-se também

evidenciar o potencial de aplicação dos métodos aqui desenvolvidos em trazer benefícios aos sistemas reais de distribuição de mercadorias, quando comparados com as soluções práticas destes sistemas.

Este trabalho está estruturado em cinco capítulos.

No Capítulo 2 são apresentados os Problemas de Roteamento de Veículos e os Problemas de Carregamento de Contêineres, suas particularidades e principais variações. Em seguida, são revisados trabalhos que se propuseram a integrar estas duas classes de problemas com outros problemas da literatura de Pesquisa Operacional, tais como Localização de Facilidades, Controle de Estoques e Planejamento da Produção, Sequenciamento e Programação de Veículos e de Pessoal, seguindo uma revisão mais detalhada dos trabalhos que abordaram Problemas Integrados de Roteamento e Carregamento de Veículos. Por fim, é apresentada a descrição do problema estudado em uma situação real de distribuição de mercadorias.

No Capítulo 3 são propostas formulações matemáticas para Problemas Integrados de Roteamento e Carregamento de Veículos. Primeiramente, é apresentada uma formulação da literatura para o Problema do Caixeiro Viajante e a sua extensão direta para o Problema de Roteamento de Veículos Capacitado. Em seguida, com base nestas formulações, são apresentadas extensões diretas para problemas integrados com duas e três dimensões espaciais relevantes. Por fim, são apresentados os resultados obtidos com os experimentos computacionais realizados com algumas destas formulações. Os modelos para o Problema de Roteamento de Veículos Capacitado e para o Problema Integrado de Roteamento e Carregamento de Veículos foram implementados na linguagem de modelagem GAMS e o *solver* GUROBI foi utilizado para resolvê-los com exemplos gerados aleatoriamente.

No Capítulo 4 são apresentados métodos de solução para o Problema Integrado de Roteamento e Carregamento de Veículos. Os algoritmos são baseados em combinações de heurísticas clássicas das literaturas de Roteamento de Veículos e de Carregamento de Contêineres, bem como em duas estratégias meta-heurísticas e no uso delas em procedimentos mais elaborados. Em seguida, são apresentados os resultados obtidos com os experimentos computacionais realizados com estes métodos, implementados na linguagem C++. Foram considerados exemplos baseados na literatura de Roteamento de Veículos e em pedidos reais de cargas, bem como exemplos baseados em um caso real em que o problema ocorre.

No Capítulo 5, finalmente, são discutidas as conclusões deste trabalho e as perspectivas para pesquisas futuras.

## CAPÍTULO 2

# ROTEAMENTO E CARREGAMENTO DE VEÍCULOS

---

---

### 2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, primeiramente, é apresentado o contexto dos Problemas de Roteamento de Veículos em geral e sua relação com outros problemas logísticos. Os elementos básicos que compõem os Problemas de Roteamento de Veículos e as principais variações são apresentados. Em seguida, são revisados os Problemas de Carregamento de Contêineres, com destaque para as restrições práticas que podem ser levadas em consideração quando se deseja abordar estes problemas de maneira mais realista, e também as principais variações. São também revisados trabalhos que se propuseram a integrar estas duas classes de problemas com outros problemas da literatura de Pesquisa Operacional, tais como Localização de Facilidades, Controle de Estoques e Planejamento da Produção, Sequenciamento e Programação de Veículos e de Pessoal. Uma revisão mais detalhada dos trabalhos que abordaram Problemas Integrados de Roteamento e Carregamento de Veículos é então apresentada. Por fim, é apresentada a descrição do problema estudado em uma situação real de distribuição de mercadorias.

### 2.2 PROBLEMAS DE ROTEAMENTO DE VEÍCULOS

Problemas de Roteamento (*Routing Problems*), genericamente, consistem em determinar o número e/ou o itinerário detalhado de uma ou mais viagens que devem ser realizadas por um ou mais veículos com o menor custo possível ou outro critério (LARSON; ODONI, 1981). A origem “moderna” destes problemas remonta ao trabalho de Leonhard Paul Euler intitulado *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* (“A solução de um problema relacionado à geometria da posição”, em tradução livre), publicado em 1741. Deste trabalho resulta o problema que é conhecido como “Problema das Pontes de Königsberg”.

Gribkovskaia *et al.* (2007) fornecem informações históricas e geográficas sobre Königsberg (atualmente Kaliningrado, na Rússia) e suas pontes.

A etimologia da palavra veículo vem do latim *vehiculum* e é relativa a qualquer meio utilizado para transportar ou conduzir pessoas, objetos, etc., de um lugar para outro. Em particular, este trabalho considera apenas veículos autônomos, isto é, veículos terrestres que se deslocam sem dependência de trilhos ou de outras instalações fixas (FERREIRA, 1986). Neste caso, exemplos incluem apenas veículos que se utilizam do modal de transporte rodoviário, tais como carros, ônibus, caminhões, tratores, ambulâncias, carroças, motocicletas, bicicletas, patinetes, patins, skates, etc. Veículos que se utilizam de outros modais de transporte, tais como o ferroviário, o hidroviário e o aeroviário, não são considerados neste trabalho. Revisões, classificações e levantamentos sobre o estado da arte de problemas de roteamento relacionados a estes modais de transporte podem ser encontrados, por exemplo, em (trens) Haghani (1987) e Cordeau *et al.* (1998), (navios) Ronen (1983) e Christiansen *et al.* (2004), (aeronaves) Etschmaier e Mathaisel (1985) e Gopalan e Talluri (1998).

No roteamento de veículos, a atividade fundamental a ser planejada são os pedidos. Um pedido pode ser: (i) uma ordem de transporte, tal como a entrega de uma encomenda de um depósito central para um destinatário, a coleta de uma encomenda de um remetente para um depósito central, ou a coleta de uma encomenda de um local e o seu transporte para outro local; (ii) uma ordem de serviço, tal como a visita a um local para a realização de algum serviço, sem que haja coleta e/ou entrega de bens físicos. Roteamento de veículos significa agrupar pedidos em conjuntos e, para cada conjunto, determinar a sequência completa de visitas a serem realizadas por um único veículo. O objetivo é otimizar uma função objetivo, tal como minimizar o número de veículos necessários, minimizar a distância total percorrida, minimizar o custo total, etc.

Os Problemas de Roteamento de Veículos são normalmente divididos em Problemas de Roteamento em Nós e Problemas de Roteamento em Arcos. No primeiro caso, os pedidos estão localizados em nós, e os roteiros devem ser definidos sobre nós. No segundo caso, os pedidos estão localizados em arcos, e os roteiros devem ser definidos sobre arcos. Em particular, este trabalho trata apenas do primeiro caso. Orloff (1974) introduz os Problemas Gerais de Roteamento (*General Routing Problems - GRP*), em que os pedidos estão localizados em nós e em arcos, e os roteiros devem ser definidos sobre um misto de ambos. Laporte e Osman (1995) fornecem uma bibliografia de quatro problemas de roteamento clássicos: Problema do Caixeiro Viajante (*Traveling Salesman Problem - TSP*) e Problema de Roteamento de Veículos (*Vehicle Routing Problem - VRP*), no caso de problemas de

roteamento em nós, e Problema do Carteiro Chinês (*Chinese Postman Problem - CPP*) e Problema do Carteiro Rural (*Rural Postman Problem - RPP*), no caso de roteamento em arcos.

No Problema de Roteamento de Veículos Capacitado (*Capacitated Vehicle Routing Problem - CVRP*) (DANTZIG; RAMSER, 1959), um conjunto de veículos idênticos com uma dada capacidade está localizado em um depósito central. Estes veículos estão igualmente disponíveis para servir um conjunto de pedidos (apenas entregas, ou, alternativamente, apenas coletas) colocados por clientes dispersos geograficamente sobre uma área. Cada cliente tem uma localização e uma demanda conhecidas. Os custos de viagem entre o depósito e os clientes, e entre os clientes, são também conhecidos. O objetivo é então planejar um conjunto de rotas de custo mínimo para os veículos, de modo que o depósito seja o local de início e término de cada roteiro, cada cliente seja visitado uma única vez por um único veículo, a demanda de todos os clientes seja atendida e a capacidade de cada veículo seja respeitada.

Current e Marsh (1993) fornecem uma taxonomia que lista, em seu primeiro nível, o Problema de Roteamento de Veículos junto de outros problemas em redes de transporte multiobjetivo. Os problemas são diferenciados com base na estrutura matemática e/ou propósito subjacentes. Esta taxonomia é útil, pois ela apresenta um conjunto de problemas que abrange o Problema de Roteamento de Veículos e fornece uma ideia das fronteiras que separam este problema dos demais. A Figura 2 ilustra o primeiro nível desta taxonomia:

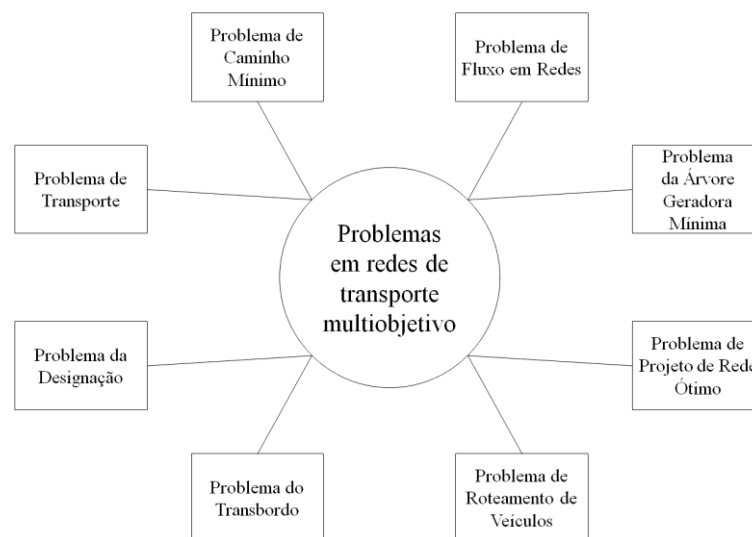


Figura 2. Problemas em redes de transporte multiobjetivo.  
Fonte: adaptado de Current e Marsh (1993).

Trabalhos pioneiros nesta ampla classe de problemas datam do final da década de 1950 e incluem, por exemplo, Dantzig e Ramser (1959), Balinski e Quandt (1964), Clarke e Wright (1964), Gaskell (1967), Knight e Hofer (1968), Christofides e Eilon (1969), Yellow (1970), Wren e Holliday (1972), Gillett e Miller (1974), Foster e Ryan (1976), Mole e Jameson (1976) e Golden *et al.* (1976). Revisões, classificações e levantamentos sobre o estado da arte desta classe de problemas podem ser encontrados, por exemplo, em Bodin (1975), Bodin e Golden (1981), Lenstra e Rinnooy Kan (1981), Golden e Assad (1988), Desrochers *et al.* (1990), Laporte (1992; 2009), Fisher (1995), Toth e Vigo (2002), Cordeau *et al.* (2007), Golden *et al.* (2008) e Eksioglu *et al.* (2009).

## 2.2.1 ELEMENTOS DO ROTEAMENTO DE VEÍCULOS

A literatura de Pesquisa Operacional compõe seus “problemas” com base em um conjunto de “elementos”, que diferem de um problema para outro. Os Problemas de Roteamento de Veículos podem ser descritos com base em dez elementos: veículos, motoristas, clientes, pedidos, depósitos, malha viária, roteiros, objetivos, horizonte de tempo e níveis de planejamento. As combinações entre estes elementos dão origem às diversas variações do problema original. Quanto maior o número de elementos presentes em um determinado problema, mais próxima da “realidade” a abordagem está. A estes problemas tem se atribuído o nome de “Problemas Ricos de Roteamento de Veículos” (*Rich Vehicle Routing Problems*). Os atributos dos elementos que compõem os Problemas de Roteamento de Veículos são apresentados a seguir (HASLE; KLOSTER, 2007; DREXL, 2012):

### **Veículos:**

- A frota de veículos pode ser homogênea (i.e., dimensões, capacidades e tipos iguais) ou heterogênea (i.e., dimensões e/ou capacidades e/ou tipos diferentes), própria ou terceirizada;
- A capacidade dos veículos pode ser definida em termos de uma ou mais dimensões (p.e., peso, volume, comprimento de carregamento, número de posições para paletes, número permitido de pessoas a bordo, etc.);
- Existem tipos de veículos projetados para servir a propósitos específicos (p.e., caminhão tanque no transporte de líquidos, gases ou grãos, caminhão frigorífico no transporte de



produtos perecíveis a temperaturas controladas, caminhão betoneira no transporte de concreto para a construção civil, caminhão de lixo na coleta e transporte de lixo, ônibus no transporte público de passageiros, ambulância no transporte de pessoas doentes ou feridas, carro de bombeiros para auxiliar no combate a incêndios e em outras emergências, etc.);

- Alguns veículos podem ser configurados com equipamento técnico especializado (p.e., sistema de refrigeração, empilhadeira frontal, elevador traseiro, sistema de compactação hidráulico, trilhos de rolagem, maca, mangueira, etc.), ou ainda possuir múltiplos compartimentos devido à necessidades específicas ou a incompatibilidades entre produtos (p.e., ao transportar em um mesmo veículo mercadorias secas e congeladas, diferentes derivados de petróleo, diferentes espécies de animais, etc.);
- Podem existir janelas de tempo relacionadas aos veículos (p.e., (in)utilização dos veículos devido à períodos de descanso dos motoristas, ao contrato de locação dos veículos, a operações de manutenção e reparo dos veículos, etc.);
- Alguns veículos podem ter que realizar mais de um roteiro em um único período, enquanto outros podem ter que interromper o roteiro e continuar no próximo período (p.e., com paradas durante a noite);
- Alguns veículos podem iniciar e/ou terminar o roteiro em locais que não o depósito (p.e., a residência do motorista);
- Podem existir custos associados à aquisições, depreciações, locações, seguros dos veículos, impostos, outras tarifas, etc..

### **Motoristas:**

- Os motoristas podem ser próprios ou terceirizados;
- Alguns motoristas podem precisar de habilitação e treinamentos específicos para determinados tipos de veículos, cargas e serviços, ou então conhecimento prévio de determinados clientes e familiaridade com certas regiões;
- Podem existir janelas de tempo relacionadas aos motoristas (p.e., a jornada de trabalho dos motoristas, períodos de descanso, etc.), em parte reguladas pela legislação trabalhista;
- Podem existir trocas de motoristas na condução dos veículos (p.e., devido ao término da jornada de trabalho de um, e início da jornada de trabalho de outro);

- Alguns veículos podem ser tripulados por mais de um motorista (p.e., para revezar a condução do veículo), ou por carregadores (ou “chapas”) adicionais (p.e., para auxiliar no carregamento ou descarregamento da carga, na origem ou no destino);
- Alguns motoristas podem iniciar e/ou terminar o roteiro em locais que não o depósito (p.e., a residência do motorista);
- Podem existir custos associados à contratações, salários, seguros dos motoristas, horas extras, subsídios, comissões, etc.;

**Clientes:**

- Podem existir uma ou mais janelas de tempo relacionadas aos clientes (p.e., devido ao número limitado de docas, à natureza das mercadorias, ou à conveniência dos clientes, que podem programar as visitas dos veículos para se adequarem à agenda de trabalho dos funcionários). Neste caso, as janelas de tempo podem ser rígidas (i.e., o serviço no cliente precisa obrigatoriamente iniciar após a abertura da janela de tempo e terminar antes do fechamento da janela de tempo), flexíveis (i.e., o serviço no cliente pode iniciar antes da abertura da janela de tempo ou terminar após o fechamento da janela de tempo, mas existem penalizações associadas), ou então um misto de ambas;
- Alguns veículos podem ser impedidos de realizar o serviço devido ao seu tipo, ao seu peso ou às suas dimensões (p.e., em alguns clientes, as rampas de acesso às docas podem excluir o uso de determinados tipos de veículos);
- Alguns clientes podem oferecer a possibilidade do serviço ser realizado em um dentre vários locais alternativos;
- Podem existir custos associados à penalizações por adiantamentos e/ou atrasos na execução dos serviços;

**Pedidos:**

- Os pedidos, em termos de quantidade requerida e/ou frequência e/ou tempo de serviço e/ou tempo de espera, podem ser conhecidos, parcialmente conhecidos (estimados ou dependentes de alguma função) ou desconhecidos;

- Os pedidos podem ser independentes ou interdependentes/sincronizados (p.e., na construção civil, uma obra pode requerer a presença de um caminhão betoneira e de um caminhão bomba de concreto no mesmo local e ao mesmo tempo);
- Alguns clientes podem requerer apenas entregas ou apenas coletas, ou então um misto de entregas e coletas. Outros clientes podem requerer a coleta de mercadorias em um ou mais locais e a sua entrega em outro local, ou então apenas visitas para serviços de assistência técnica ou obtenção de informações;
- Alguns clientes podem aceitar entregas e/ou coletas fracionadas;
- Alguns pedidos podem ter prioridades sobre os demais (p.e., devido à atrasos, pendências, indisponibilidade de veículos e/ou motoristas, etc.);
- Alguns pedidos podem ser formados por itens cujas dimensões espaciais são relevantes (p.e., itens bi ou tridimensionais) ou que tenham necessidades especiais (p.e., itens que não podem ser tombados, itens frágeis, etc.);
- Podem existir custos associados a fretes, seguros das mercadorias, impostos, outras tarifas, etc.;

**Depósitos:**

- Os depósitos podem servir a diferentes propósitos, como armazenamento ou atravessamento de mercadorias;
- Podem existir um ou mais depósitos (p.e., neste caso, os veículos podem ter que retornar para o mesmo depósito de partida ou para um outro depósito);
- Podem existir facilidades intermediárias (ou “satélites”) para servir a operações de conexão, troca, armazenamento, atravessamento, reabastecimento, transbordo, despejo, etc.;
- Podem existir janelas de tempo relacionadas aos depósitos e/ou facilidades (p.e., o início e o término das atividades no depósito, ou, devido ao número limitado de docas, alguns veículos podem precisar deixar o depósito para que outros veículos possam ser carregados ou descarregados);
- Podem existir custos associados à instalações, depreciações, segurança patrimonial, impostos, outras tarifas, etc.;

**Malha viária:**

- A malha viária pode ser descrita sobre áreas urbanas, rurais ou então um misto de ambas;
- A malha viária normalmente é definida no espaço Euclidiano através de um sistema de coordenadas Cartesianas. A métrica/distância utilizada pode ser Euclidiana (ou Pitagórica), de Manhattan (ou Ângulo Reto ou Retilínea ou “do Taxi”), etc.;
- As vias podem ser de mão dupla ou de mão única;
- Os tempos de viagem podem ser conhecidos, parcialmente conhecidos (estimados ou dependentes de alguma função) ou desconhecidos;
- A usabilidade de algumas vias pode depender da hora do dia, das condições de tráfego, da existência de congestionamentos e/ou acidentes, de interdições para realização de operações de manutenção e reparo, etc.;
- Podem existir janelas de tempo relacionadas ao tráfego em determinadas vias (p.e., para diminuir o tráfego de veículos e melhorar o trânsito e a qualidade do ar nos horários de pico);
- Alguns veículos podem ser impedidos de trafegar por determinadas vias devido ao seu tipo, ao seu peso ou às suas dimensões (p.e., em zonas urbanas centrais, veículos de grande porte possuem maiores dificuldades de locomoção do que veículos de pequeno porte);
- Os custos associados ao tráfego por uma determinada via podem depender ou não do sentido em que se trafega;

**Roteiros:**

- Os roteiros podem ser definidos sobre nós, arcos ou um misto de ambos;
- Os roteiros podem ser fechados (i.e., os locais de início e término necessariamente são os mesmos) ou abertos (i.e., os locais de início e término não necessariamente são os mesmos), independentes ou interdependentes/sincronizados (p.e., no transporte multimodal de cargas, operações de transbordo requerem a presença de dois veículos/modais diferentes no mesmo local e dentro de um intervalo de tempo determinado);
- O número de pedidos em um roteiro pode ser conhecido, parcialmente conhecido (estimado ou dependente de alguma função) ou desconhecido;

- Alguns roteiros podem ter limitações quanto à máxima distância percorrida, ao máximo tempo incorrido, ao número de pedidos servidos, ao tempo decorrido entre uma coleta e uma entrega, etc.;
- Podem existir relações de precedência entre os serviços no roteiro (p.e., realizar todas as entregas antes de realizar todas as coletas, ou então realizar a coleta de uma mercadoria em um local antes de realizar a sua entrega em outro local);
- Alguns roteiros podem ter que apresentar propriedades geográficas ou óticas especiais (p.e., áreas com roteiro fixo, roteiros que não se interseccionem, etc.);
- Podem existir custos associados à distância percorrida, ao tempo necessário, à pedágios, impostos, outras tarifas, etc.;

#### **Objetivos:**

- Podem existir um ou mais objetivos (p.e., minimização do número de veículos necessários, minimização da distância total percorrida, minimização do tempo total necessário, minimização dos custos totais de transporte, minimização da diferença entre o maior e o menor roteiro, maximização do número de clientes servidos, etc.);

#### **Horizonte de tempo:**

- O horizonte de tempo pode ser de um ou mais períodos, neste caso, podendo ser contínuo ou discreto, i.e., multiperíodo;

#### **Níveis de planejamento:**

- As decisões apoiadas pelos Problemas de Roteamento de Veículos podem ser definidas em nível estratégico, tático ou operacional, em termos da frequência com que são tomadas (longo, médio ou curto prazo, respectivamente);

Existem no mercado diversas empresas que se especializaram em desenvolver *softwares* específicos para Problemas de Roteamento de Veículos. A OR/MSToday (2012) fornece um levantamento bianual sobre alguns destes softwares disponíveis no mercado, muitos dos quais levam em consideração vários dos elementos apresentados anteriormente. A

edição mais recente faz um levantamento de doze fabricantes (oito na América do Norte e quatro na Europa) representando quinze produtos. O questionário é dividido em seções cobrindo as plataformas suportadas, capacidades algorítmicas, interface e características, integração com outras áreas e dispositivos, informações complementares, etc.

## 2.2.2 PRINCIPAIS VARIAÇÕES

O Problema de Roteamento de Veículos original, i.e., o Problema de Roteamento de Veículos Capacitado (CVRP), possui inúmeras variações. A seguir é apresentada uma lista não exaustiva destas variações, acompanhadas de uma breve descrição das particularidades de cada uma (HASLE; KLOSTER, 2007; DREXL, 2012).

**SCVRP** (*Symmetric Capacitated Vehicle Routing Problem*) e **ACVRP** (*Asymmetric Capacitated Vehicle Routing Problem*): duas extensões diretas do CVRP, relacionadas ao custo de se trafegar pelos sentidos da via. No primeiro caso, os custos de se trafegar em qualquer um dos dois sentidos são iguais (i.e., “simétricos”), enquanto no segundo caso os custos podem ser diferentes (i.e., “assimétricos”).

**DCVRP** (*Distance-constrained Vehicle Routing Problem*) e **TCVRP** (*Time-constrained Vehicle Routing Problem*): outras duas extensões diretas do CVRP, relacionadas à limitações quanto à distância máxima percorrida, no primeiro caso, e ao tempo máximo incorrido, no segundo caso, por cada veículo em cada roteiro.

**SDVRP** (*Site-dependent Vehicle Routing Problem*) e **TDVRP** (*Time-dependent Vehicle Routing Problem*): no primeiro caso, há clientes que podem ser servidos apenas por alguns tipos de veículos, enquanto no segundo caso os tempos de viagem dependem da hora do dia em que cada viagem ocorre.

**VRPTW** (*Vehicle Routing Problem with Time Windows*) e **PVRP** (*Periodic Vehicle Routing Problem*): no primeiro caso, os clientes especificam intervalos de tempo (i.e., “janelas de tempo”) dentro dos quais eles devem ser servidos. No segundo caso, os clientes tem que ser servidos uma ou mais vezes ao longo de um dado horizonte de tempo. Os dias de visita não são fixados *a priori*, mas há uma lista de possíveis dias associada à cada cliente.

**VRPB** (*Vehicle Routing Problem with Backhauls*), **VRPSPD** (*Vehicle Routing Problem with Simultaneous Pick-up and Delivery*) e **VRPMPD** (*Vehicle Routing Problem with Mixed Pick-up and Delivery*): nestas três variações, há em comum a existência de pontos de coleta e de entrega, e o transporte é realizado apenas entre o depósito e os pontos de coleta (i.e., *pick-up points*) e/ou os pontos de entrega (i.e., *delivery points*). No primeiro caso também há relações de precedência, i.e., o transporte é realizado, na primeira etapa do roteiro, entre o depósito e os pontos de entrega (i.e., *linehauls*), enquanto na segunda etapa do roteiro, entre os pontos de coleta e o depósito (i.e., *backhauls*). No segundo caso, um mesmo cliente é um ponto de entrega e também um ponto de coleta, enquanto no terceiro caso um cliente é ou um ponto de entrega ou um ponto de coleta.

**VRPPD** (*Vehicle Routing Problem with Pick-up and Delivery*) e **DARP** (*Dial-a-ride Problem*): nestas duas variações, há em comum a existência de pontos de coleta e de entrega, além de relações de precedência entre estas operações. Diferentemente das três variações anteriormente apresentadas, o transporte é realizado apenas entre os pontos de coleta (i.e., *pick-up points*) e os pontos de entrega (i.e., *delivery points*), não havendo transporte de e/ou para o depósito. A principal distinção entre os dois é que o VRPPD ocorre no transporte de mercadorias, enquanto o DARP ocorre no transporte de pessoas (p.e., pessoas idosas ou deficientes). Neste último, normalmente há também janelas de tempo e limitações quanto ao máximo tempo de viagem dos clientes nos veículos.

**SVRP** (*Stochastic Vehicle Routing Problem*) e **DVRP** (*Dynamic Vehicle Routing Problem*): nestas duas variações, há em comum o “conhecimento imperfeito” sobre alguma informação relacionada ao problema. No primeiro caso, alguns elementos do problema são variáveis aleatórias, e as informações relevantes são estimadas com base em distribuições de probabilidades. No segundo caso, as informações relevantes são disponibilizadas em tempo real, e o planejamento é realizado paralelamente à execução do plano.

**HFFVRP** (*Heterogeneous Fixed Fleet Vehicle Routing Problem*) e **FSMVRP** (*Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem*): nestas duas variações, há em comum a existência de veículos com dimensões e/ou capacidades diferentes (i.e., “heterogêneos”). No primeiro caso, há um número limitado de veículos de cada tipo, enquanto no segundo caso o número de veículos de cada tipo é ilimitado, estando relacionado à composição e roteamento da frota de veículos, com a inclusão de custos de aquisição e/ou depreciação dos veículos no objetivo.

**SDVRP** (*Split Delivery Vehicle Routing Problem*) e **OVRP** (*Open Vehicle Routing Problem*): nestas duas variações, há em comum a relaxação de restrições do CVRP. No primeiro caso, os clientes podem ser servidos mais de uma vez por mais de um veículo, e os veículos transportam frações das demandas dos clientes. No segundo caso, os veículos não precisam retornar para o depósito após visitarem todos os clientes de cada roteiro.

**MDVRP** (*Multi-depot Vehicle Routing Problem*): nesta variação, os veículos estão localizados em mais de um depósito, e cada veículo deve iniciar e terminar o roteiro no mesmo depósito.

## 2.3 PROBLEMAS DE CARREGAMENTO DE CONTÊINERES

Problemas de Carregamento de Contêineres são um caso particular dos Problemas de Corte e Empacotamento. Estes, por sua vez, podem ser divididos genericamente em *Problemas de Corte*, os quais consistem em cortar unidades maiores em unidades menores, e em *Problemas de Empacotamento*, os quais consistem em empacotar unidades menores dentro de unidades maiores. As unidades maiores são aqui denominadas *objetos*, e as unidades menores são aqui denominadas *itens*. Ambos os problemas se propõem a otimizar certos objetivos. Exemplos de aplicações de Problemas de Corte aparecem no corte de barras de aço, bobinas de papel, caixas de papelão, chapas metálicas ou de madeira, rolos de tecido, placas de vidro, etc. Exemplos de aplicações de Problema de Empacotamento aparecem no carregamento de caixas sobre paletes ou dentro de contêineres e caminhões.

Embora na prática sejam dois problemas muito distintos, do ponto de vista matemático não importa se o padrão obtido para um dado conjunto de unidades é interpretado como sendo um padrão de corte ou um padrão de empacotamento, o que implica na existência de uma “dualidade” entre os Problemas de Corte e os Problemas de Empacotamento, isto é, na dualidade entre cortar material/empacotar espaço e cortar espaço/empacotar material. A partir do início da década de 1990, além destas duas classes de problemas, outros problemas correlatos ou integrados, com estrutura lógica similar, passaram a ser tratados como Problemas de Corte e Empacotamento.

Livros relacionados ao tema Corte e Empacotamento podem ser encontrados em Brown (1971), Martello e Toth (1990), Dyckhoff e Finke (1992) e Dyckhoff *et al.* (1997). Artigos de revistas relacionados ao tema Corte e Empacotamento, contendo revisões,



levantamentos, tipologias e métodos de solução podem ser encontrados em Hinxman (1980), Dyckhoff (1990), Dowsland e Dowsland (1992), Morabito e Arenales (1992), Sweeney e Paternoster (1992), Cheng *et al.* (1994), Martello (1994a; 1994b), Arenales *et al.* (1999), Hifi (2002b), Lodi *et al.* (2002) e Wäscher *et al.* (2007).

Conforme mencionado, Problemas de Empacotamento (*Packing Problems*), genericamente, consistem em determinar como empacotar unidades menores (itens) dentro de unidades maiores (objetos) no menor custo possível. A origem “moderna” destes problemas remonta ao trabalho de Leonid Vitaliyevich Kantorovich intitulado *Математические методы организации и планирования производства* (“Métodos matemáticos de organização e planejamento da produção”, em tradução livre), publicado em 1939. Deste trabalho resultam algumas das bases da teoria que é conhecida como “Programação Linear”.

Dois exemplos desta ampla classe de problemas são os Problemas de Carregamento de Paletes (*Pallet Loading Problems* - PLP) e os Problemas de Carregamento de Contêineres (*Container Loading Problems* - CLP). O primeiro problema, basicamente, consiste em minimizar as áreas vazias resultantes do empacotamento ortogonal de caixas retangulares sobre a superfície plana de um palete, sem que haja sobreposição de caixas sobre o palete. Já o segundo problema, basicamente, consiste em minimizar os espaços vazios resultantes do empacotamento de caixas retangulares ortogonalmente dentro de um contêiner, sem que haja sobreposição de caixas dentro do contêiner.

Trabalhos pioneiros nos Problemas de Carregamento de Paletes datam do final da década de 1970 e incluem, por exemplo, Steudel (1979), Smith e De Cani (1980), Bischoff e Dowsland (1982), Hodgson (1982), Dowsland (1984) e Carpenter e Dowsland (1985). No caso dos Problemas de Carregamento de Contêineres, os trabalhos pioneiros datam do início da década de 1980 e incluem, por exemplo, George e Robinson (1980), Han *et al.* (1989), Bischoff e Marriott (1990), Gehring *et al.* (1990), Haessler e Talbot (1990) e Dowsland (1991). Revisões, classificações e levantamentos sobre o estado da arte destes dois problemas de empacotamento podem ser encontrados, por exemplo, em Dyckhoff (1990), Dowsland e Dowsland (1992), Sweeney e Paternoster (1992) e Wäscher *et al.* (2007).

### **2.3.1 CONSIDERAÇÕES PRÁTICAS NO CARREGAMENTO DE CONTÊINERES**

Os Problemas de Carregamento de Contêineres devem satisfazer duas considerações básicas: (i) as caixas devem ser empacotadas completamente dentro dos contêineres; (ii) as caixas empacotadas não devem se sobrepor, isto é, não devem ocupar um mesmo lugar dentro do contêiner. Estas duas considerações básicas definem o que se pode chamar de *restrições geométricas*. Os primeiros trabalhos a tratar Problemas de Carregamento de Contêineres tinham como meta contemplar estas duas considerações. No entanto, com o avanço das pesquisas, outras considerações (exigências) práticas também passaram a ter um apelo maior ao tratar Problemas de Carregamento de Contêineres. Bischoff e Ratcliff (1995) apresentam doze exigências práticas que podem ser levadas em consideração quando se deseja modelar Problemas de Carregamento de Contêineres mais realistas. A Tabela 1 apresenta estas doze considerações práticas acompanhadas de uma breve descrição.

Tabela 1. Considerações práticas apresentadas por Bischoff e Ratcliff (1995).

	<b>Consideração Prática</b>	<b>Descrição</b>
1	Orientação	Algumas caixas devem ser carregadas dentro do contêiner com orientações pré-estabelecidas.
2	Empilhamento	Um número máximo de caixas pode ser empilhado, umas sobre as outras, ou, mais genericamente, a pressão total exercida sobre a face superior de uma determinada caixa não deve exceder um limite máximo pré-estabelecido, para que não ocorram alterações na sua forma.
3	Manuseio	Algumas caixas, devido às suas dimensões, ao seu peso, ou ao equipamento que realiza o carregamento/descarregamento da carga, devem estar posicionadas em determinados lugares dentro do contêiner.
4	Estabilidade	Algumas caixas devem ter suas faces inferiores suportadas por faces superiores de outras caixas, e/ou suas faces laterais apoiadas nas faces laterais de outras caixas.
5	Agrupamento de itens	Caixas com um destino comum ou de um mesmo tipo devem ser posicionadas próximas dentro do contêiner.
6	Múltiplos Destinos	Caixas a serem entregues para diferentes destinos devem ser posicionadas próximas, umas das outras, dentro do contêiner, e devem ser carregadas de modo a considerar o roteiro a ser percorrido pelo contêiner e a ordem em que elas serão descarregadas.
7	Separação de itens	Caixas que não podem estar em contato, umas com as outras, devem ser posicionadas afastadas dentro do contêiner.
8	Carregamento completo de grupos de itens	As caixas contendo todos os componentes que fazem parte de uma mesma entidade funcional (por exemplo, um equipamento) devem estar presentes no mesmo carregamento.
9	Prioridades	Caixas com produtos com data de entrega ou prazo de validade próximos, por exemplo, podem ter maiores prioridades para estarem no carregamento, em detrimento de outras caixas com menores prioridades.
10	Complexidade do padrão de empacotamento	Caixas presentes em padrões de carregamento complexos podem demandar esforços maiores de manuseio, devido, por exemplo, às limitações do equipamento que realiza o carregamento/descarregamento da carga.
11	Limite de peso	Caixas bastante pesadas devem ser carregadas dentro do contêiner sem exceder o limite de peso máximo que o contêiner pode suportar.
12	Distribuição de peso dentro do contêiner	O centro de gravidade de um contêiner carregado deve estar localizado próximo do centro geométrico do plano que define a base.

Além das considerações ditas geométricas, as demais considerações tratadas neste trabalho são as de estabilidade, de empilhamento e de múltiplos destinos.

### Estabilidade do carregamento

A *estabilidade* do carregamento (GEHRING *et al.*, 1990; MORABITO; ARENALES, 1994; BISCHOFF; RATCLIFF, 1995; SCHEITHAUER *et al.*, 1996; TERNO *et al.*, 2000; BORTFELDT; GEHRING, 2001; PISINGER, 2002; SILVA *et al.*, 2003; JIN *et al.*, 2004; MOURA; OLIVEIRA, 2005; GENDREAU *et al.*, 2006; ARAUJO; ARMENTANO, 2007; JUNQUEIRA *et al.*, 2012b) pode ser dividida em duas componentes: a estabilidade vertical e a estabilidade horizontal. A estabilidade *vertical* está relacionada à capacidade das caixas em um carregamento de resistirem à atuação da aceleração da gravidade sobre seus corpos, isto é, de não se deslocarem em relação ao eixo  $z$ . Esta componente da estabilidade é também chamada de estabilidade *estática*, uma vez que trata o carregamento em situações em que o contêiner ou caminhão está parado. A estabilidade *horizontal*, por sua vez, está relacionada à capacidade das caixas em um carregamento de resistirem à atuação da inércia dos seus próprios corpos, isto é, de não se deslocarem em relação aos eixos  $x$  e  $y$ . Esta componente da estabilidade é também chamada de estabilidade *dinâmica*, uma vez que trata o carregamento em situações em que o contêiner ou caminhão está sendo deslocado horizontalmente, e fica, inevitavelmente, sujeito a variações na velocidade/aceleração do deslocamento. A Figura 3 ilustra à esquerda duas caixas empacotadas de maneira instável verticalmente dentro de um contêiner, enquanto à direita as mesmas duas caixas estão empacotadas de maneira estável verticalmente.

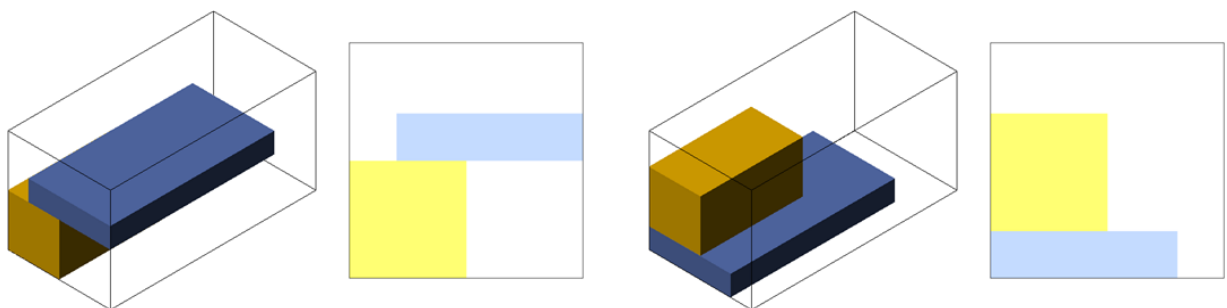


Figura 3. Duas caixas empacotadas de maneira instável e estável, respectivamente.

### Resistência das caixas ao empilhamento

A resistência das caixas ao *empilhamento* (SCHEITHAUER *et al.*, 1996; RATCLIFF; BISCHOFF, 1998; BORTFELDT; GEHRING, 2001; BISCHOFF, 2006; GENDREAU *et al.*, 2006; CHRISTENSEN; ROUSØE, 2009; JUNQUEIRA *et al.*, 2012b) trata situações em que o pessoal encarregado de fazer o carregamento das caixas dentro de um contêiner se depara, por exemplo, com instruções do tipo “empilhamento máximo: x caixas” escritas nas embalagens. Isto é, não é permitido empilhar sobre uma determinada caixa mais do que um número máximo estipulado de caixas (não apenas imediatamente acima), ou, de uma outra maneira, a pressão total exercida sobre uma determinada caixa não deve exceder um limite máximo permitido, sob o risco de ocorrerem alterações na forma da embalagem protetora e, conseqüente, possível avaria dos produtos dentro dela. A Figura 4 ilustra um conjunto de caixas posicionadas sobre uma caixa de referência, exercendo pressão sobre a mesma.

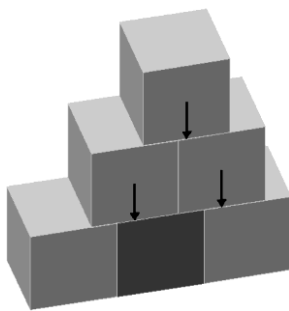


Figura 4. Conjunto de caixas posicionadas sobre uma caixa de referência.

### **Carga fracionada em múltiplos destinos**

A carga fracionada em *múltiplos destinos* (BISCHOFF; RATCLIFF, 1995; SCHEITHAUER *et al.*, 1996; TERNO *et al.*, 2000; JIN *et al.*, 2004; MOURA; OLIVEIRA, 2005; GENDREAU *et al.*, 2006; CHRISTENSEN; ROUSØE, 2009; JUNQUEIRA *et al.*, 2012a) trata situações em que um contêiner (ou caminhão, como é mais comum na prática) está carregado com caixas com produtos encomendados por diferentes clientes (destinos), que estão espalhados por uma região. O caminhão deve então percorrer um roteiro de entrega, saindo de um depósito (onde ele é carregado) e passando pelos diferentes destinos. Em cada destino, as caixas com produtos encomendados por aquele cliente devem ser descarregadas. Após realizar todas as entregas, o caminhão pode retornar, vazio, para o depósito. A questão que surge é como planejar o carregamento do caminhão de modo a considerar, na medida do possível, a ordem em que as caixas devem ser descarregadas, para evitar desperdícios de

tempo descarregando e recarregando as caixas dos destinos remanescentes. A Figura 5 ilustra um caminhão que parte (carregado) de um depósito e é descarregado ao longo de cinco destinos, retornando (vazio) para o depósito de partida (isto é, o roteiro depósito-1-2-3-4-5-depósito).

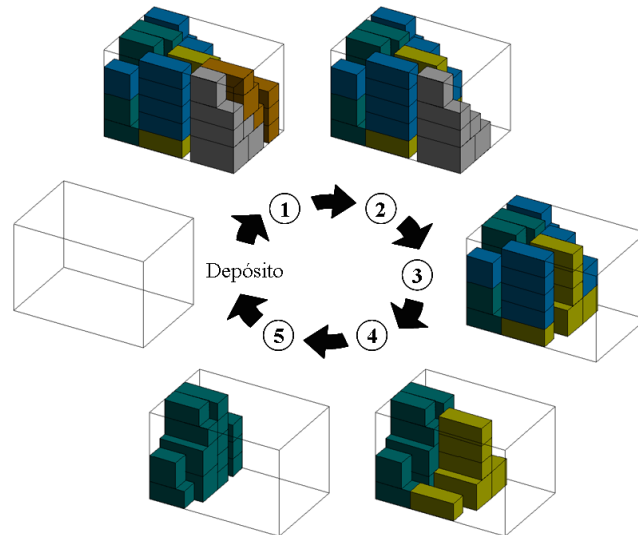


Figura 5. Caminhão sendo descarregado ao longo de cinco destinos.

Note que este problema, inversamente, pode ser visto como o problema de um caminhão de coleta que sai do depósito vazio, e, em cada destino do seu roteiro, as caixas são carregadas dentro do caminhão sem descarregar as caixas já carregadas dos destinos anteriores do roteiro. Note que o roteiro de coleta é o inverso do roteiro de entrega (isto é, o roteiro depósito-5-4-3-2-1-depósito na Figura 5).

### 2.3.2 PRINCIPAIS VARIAÇÕES

Problemas de Carregamento de Contêineres são referenciados na literatura de Corte e Empacotamento com uma grande diversidade de nomes. Alguns nomes (em inglês) mais comumente utilizados são: *Container Loading Problem*, *Container Packing Problem*, *Three-dimensional Cargo-loading Problem*, *Three-dimensional Packing Problem*, *Three-dimensional Knapsack Packing Problem*, *Three-dimensional Bin-packing Problem*, *Three-dimensional Strip Packing Problem*, *Single Container Loading Problem*, *Multiple Container Loading Problem*, *Three-dimensional Pallet Loading Problem*, *Multi-pallet Loading Problem*, *Multi-pallet Packing Problem*, *Three-dimensional Palletization Problem*, *Three-dimensional Cutting Problem*, etc.

Nestes problemas, genericamente, caixas retangulares devem ser empacotadas ortogonalmente dentro de um ou mais contêineres. No entanto, após esta operação, geralmente nem todos os espaços disponíveis conseguem ser preenchidos, gerando espaços ociosos que são, conseqüentemente, transportados juntamente com as caixas. Surge então a necessidade de planejar o empacotamento das caixas de modo a utilizar da melhor maneira os recursos (espaços ou contêineres) disponíveis.

Wäscher *et al.* (2007), baseados nas idéias originais de Dyckhoff (1990), apresentam uma nova tipologia para organizar e categorizar a literatura de Problemas de Corte e Empacotamento. Os autores distinguem cinco critérios para definir os tipos *refinados* de Problemas de Corte e Empacotamento. Os critérios *forma de alocação das unidades* (1) e *variedade de itens* (2) definem os tipos *básicos* de Problemas de Corte e Empacotamento. Com relação à *forma de alocação das unidades* (1), os autores distinguem entre *maximização (do valor) das saídas*, em que um subconjunto de todos os itens disponíveis deve ser selecionado de modo a ser alocado em todos os objetos, e *minimização (do valor) das entradas*, em que um subconjunto de todos os objetos disponíveis deve ser selecionado de modo que todos os itens sejam alocados. Estes dois critérios, juntamente com o critério *variedade de objetos* (3), definem os tipos *intermediários* de Problemas de Corte e Empacotamento. Com base nesta tipologia, é possível dividir os Problemas de Carregamento de Contêineres em quatorze tipos intermediários de problemas, ressaltando-se que são problemas com três dimensões (3D) e as formas dos itens são retangulares (R) (JUNQUEIRA, 2009; BORTFELDT; WÄSCHER, 2013):

#### **Tipos de problemas de carregamento de contêineres (maximização das saídas):**

**3D-R-IIPP** (*Identical Item Packing Problem*): um subconjunto de caixas *iguais* deve ser selecionado para ser carregado em um *único* contêiner, de modo a maximizar o volume (ou valor) total de caixas empacotadas dentro do contêiner.

**3D-R-SLOPP** (*Single Large Object Placement Problem*): um subconjunto de caixas *pouco diferentes* deve ser selecionado para ser carregado em um *único* contêiner, de modo a maximizar o volume (ou valor) total de caixas empacotadas dentro do contêiner.

**3D-R-MILOPP** (*Multiple Identical Large Object Placement Problem*): um subconjunto de caixas *pouco diferentes* deve ser selecionado para ser carregado em vários contêineres *iguais*,

de modo a maximizar o volume (ou valor) global de caixas empacotadas dentro dos contêineres.

**3D-R-MHLOPP** (*Multiple Heterogeneous Large Object Placement Problem*): um subconjunto de caixas *pouco diferentes* deve ser selecionado para ser carregado em vários contêineres *diferentes*, de modo a maximizar o volume (ou valor) global de caixas empacotadas dentro dos contêineres.

**3D-R-SKP** (*Single Knapsack Problem*): um subconjunto de caixas *muito diferentes* deve ser selecionado para ser carregado em um *único* contêiner, de modo a maximizar o volume (ou valor) total de caixas empacotadas dentro do contêiner.

**3D-R-MIKP** (*Multiple Identical Knapsack Problem*): um subconjunto de caixas *muito diferentes* deve ser selecionado para ser carregado em vários contêineres *iguais*, de modo a maximizar o volume (ou valor) global de caixas empacotadas dentro dos contêineres.

**3D-R-MHKP** (*Multiple Heterogeneous Knapsack Problem*): um subconjunto de caixas *muito diferentes* deve ser selecionado para ser carregado em vários contêineres *diferentes*, de modo a maximizar o volume (ou valor) global de caixas empacotadas dentro dos contêineres.

#### **Tipos de problemas de carregamento de contêineres (minimização das entradas):**

**3D-R-SSSCSP** (*Single Stock Size Cutting Stock Problem*): um subconjunto de contêineres *iguais* deve ser selecionado para ser carregado com caixas *pouco diferentes*, de modo a minimizar o número (ou custo) global de contêineres necessários para empacotar todas as caixas.

**3D-R-MSSCSP** (*Multiple Stock Size Cutting Stock Problem*): um subconjunto de contêineres *pouco diferentes* deve ser selecionado para ser carregado com caixas *pouco diferentes*, de modo a minimizar o número (ou custo) global de contêineres necessários para empacotar todas as caixas.

**3D-R-RCSP** (*Residual Cutting Stock Problem*): um subconjunto de contêineres *muito diferentes* deve ser selecionado para ser carregado com caixas *pouco diferentes*, de modo a

minimizar o número (ou custo) global de contêineres necessários para empacotar todas as caixas.

**3D-R-SBSBPP** (*Single Bin Size Bin Packing Problem*): um subconjunto de contêineres *iguais* deve ser selecionado para ser carregado com caixas *muito diferentes*, de modo a minimizar o número (ou custo) global de contêineres necessários para empacotar todas as caixas.

**3D-R-MBSBPP** (*Multiple Bin Size Bin Packing Problem*): um subconjunto de contêineres *pouco diferentes* deve ser selecionado para ser carregado com caixas *muito diferentes*, de modo a minimizar o número (ou custo) global de contêineres necessários para empacotar todas as caixas.

**3D-R-RBPP** (*Residual Bin Packing Problem*): um subconjunto de contêineres *muito diferentes* deve ser selecionado para ser carregado com caixas *muito diferentes*, de modo a minimizar o número (ou custo) global de contêineres necessários para empacotar todas as caixas.

**3D-R-ODP** (*Open Dimension Problem*): um *único* contêiner com duas dimensões fixas (por exemplo, a largura e a altura) e uma dimensão variável (por exemplo, o comprimento) deve ser carregado com caixas *diferentes*, de modo a minimizar a dimensão variável (o comprimento) necessária para empacotar todas as caixas.

## 2.4 INTEGRAÇÃO COM OUTROS PROBLEMAS

Alguns esforços têm sido feitos na direção de integrar Problemas de Roteamento de Veículo e Problemas de Corte e Empacotamento com outros problemas da literatura de Pesquisa Operacional, tais como Localização de Facilidades, Controle de Estoques e Planejamento da Produção, Sequenciamento e Programação de Veículos e de Pessoal. Estes esforços têm sido mais evidentes no caso dos Problemas de Roteamento de Veículos do que no caso dos Problemas de Corte e Empacotamento. A seguir são apresentadas brevemente uma descrição e referências de trabalhos de cada um destes problemas integrados.



## Problemas de localização de facilidades

Problemas de Localização de Facilidades (*Facility Location Problems*), genericamente, consistem em determinar o número e/ou a localização de pontos para a instalação de uma ou mais facilidades no menor custo possível. A origem “moderna” destes problemas remonta ao trabalho de Alfred Weber intitulado *Über den Standort der Industrien* (“Sobre a localização das indústrias”, em tradução livre), publicado em 1909. Deste trabalho resulta o problema que é conhecido como “Problema de Fermat-Weber”.

Trabalhos pioneiros nesta ampla classe de problemas datam do início da década de 1960 e incluem, por exemplo, Cooper (1963), Kuehn e Hamburger (1963), Hakimi (1964; 1965), Maranzana (1964) e Teitz e Bart (1968). Revisões, classificações e levantamentos sobre o estado da arte desta classe de problemas podem ser encontrados, por exemplo, em Brandeau e Chiu (1989), Drezner e Hamacher (2004), Reville e Eiselt (2005) e Reville *et al.* (2008).

Nos Problemas Integrados de Roteamento de Veículos e de Localização de Facilidades, o número e/ou a localização dos depósitos devem ser decididos simultaneamente à alocação de clientes a depósitos e ao roteamento dos veículos de cada depósito. Trabalhos pioneiros neste problema integrado datam do final da década de 1960 e incluem, por exemplo, Webb (1968), Christofides e Eilon (1969), Watson-Gandy e Dohrn (1973), Chan e Francis (1976), Chan e Hearn (1977) e Or e Pierskalla (1979). Revisões, classificações e levantamentos sobre o estado da arte deste problema integrado podem ser encontrados, por exemplo, em Balakrishnan *et al.* (1987), Laporte (1988), Min *et al.* (1998) e Nagy e Salhi (2007).

## Problemas de controle de estoques e de planejamento da produção

Problemas de Controle de Estoques (*Inventory Control Problems*) e de Planejamento da Produção (*Production Planning Problems*), genericamente, consistem em determinar políticas de reposição ou produção de uma ou mais mercadorias que definam quanto e/ou quando pedir ou produzir no menor custo possível. A origem “moderna” destes problemas remonta ao trabalho de Ford Whitman Harris intitulado *How many parts to make at once* (“Quantas peças fazer de uma só vez”, em tradução livre), publicado em 1913. Deste trabalho resulta a fórmula que é conhecida como “Fórmula do Lote Econômico de Compra”.

Trabalhos pioneiros nesta ampla classe de problemas datam do início da década de 1950 e incluem, por exemplo, Arrow *et al.* (1951), Dvoretzky *et al.* (1952a; 1952b), Bellmann *et al.* (1955), Manne (1958) e Wagner e Whitin (1958). Revisões, classificações e levantamentos sobre o estado da arte desta classe de problemas podem ser encontrados, por exemplo, em Silver (1981), Drexl e Kimms (1997), Zipkin (2000) e Karimi *et al.* (2003).

Nos Problemas Integrados de Roteamento de Veículos e de Controle de Estoques, os clientes consomem mercadorias a uma determinada taxa, e o depósito deve suprir os clientes com estas mercadorias ao longo de um dado horizonte de tempo, através de entregas com os veículos, para que não haja falta de estoque das mercadorias nos clientes. Trabalhos pioneiros neste problema integrado datam do início da década de 1980 e incluem, por exemplo, Bell *et al.* (1983), Federgruen e Zipkin (1984), Golden *et al.* (1984), Burns *et al.* (1985), Blumenfeld *et al.* (1985) e Dror e Ball (1987). Revisões, classificações e levantamentos sobre o estado da arte deste problema integrado podem ser encontrados, por exemplo, em Campbell *et al.* (1998; 2002), Moin e Salhi (2007) e Bertazzi *et al.* (2008).

Por outro lado, nos Problemas Integrados de Roteamento de Veículos e de Planejamento da Produção, os custos de estocagem podem ser desprezados pois não há estoque intermediário entre a produção e a distribuição (ambiente *make-to-order*), e o quanto e/ou quando produzir devem ser decididos simultaneamente ao roteamento dos veículos, de modo a balancear o nível de serviço ao cliente e os custos de distribuição. Trabalhos pioneiros neste problema integrado datam de meados da década de 1990 e incluem, por exemplo, Chandra e Fisher (1994), Hurter e Van Buer (1996), Fumero e Vercellis (1999), Van Buer *et al.* (1999), Chen e Vairaktarakis (2005) e Park (2005). Revisões, classificações e levantamentos sobre o estado da arte deste problema integrado podem ser encontrados, por exemplo, em Erenguc *et al.* (1999), Sarmiento e Nagi (1999) e Chen (2004; 2010).

Por fim, nos Problemas Integrados de Planejamento da Produção e de Corte de Estoque, a política de produção de uma ou mais mercadorias deve ser decidida atentando-se para os padrões de corte que serão executados após a produção dos itens, de modo a se balancear os custos de estocagem e de produção e o desperdício de material. Trabalhos pioneiros neste problema integrado datam do início da década de 1990 e incluem, por exemplo, Reinders (1992), Hendry *et al.* (1996), Nonas e Thorstenson (2000), Menon e Schrage (2002), Arbib e Marinelli (2005) e Gramani e França (2006).

## **Problemas de sequenciamento e de programação de veículos e de pessoal**

Problemas de Sequenciamento (*Sequencing Problems*) e de Programação (*Scheduling Problems*), genericamente, consistem em determinar seqüências e/ou instantes de início e término para operações no menor custo possível. A origem “moderna” destes problemas remonta ao trabalho de Henry Laurence Gantt intitulado *Work, wages, and profits* (“Trabalho, salários e lucros”, em tradução livre), publicado em 1916. Deste trabalho resulta a ferramenta que é conhecida como “Gráfico de Gantt”.

Dois exemplos desta ampla classe de problemas são os Problemas de Programação de Veículos (*Vehicle Scheduling Problems*) e os Problemas de Programação de Pessoal (*Crew Scheduling Problems*). O primeiro problema, basicamente, consiste em minimizar os custos de se atribuir seqüências de viagens com locais e instantes de início e término conhecidos, assim como os tempos de conexão entre viagens, a um conjunto de veículos localizados em um depósito central, de modo que cada viagem seja realizada uma única vez por um único veículo, e cada veículo utilizado realize uma seqüência possível de viagens. Já o segundo problema, basicamente, consiste em minimizar os custos de se atribuir seqüências de escalas de serviço (ou turnos de trabalho) com instantes de início e término conhecidos, a equipes de pessoas qualificadas, de modo que a jornada de trabalho e os períodos de descanso de cada equipe sejam respeitados.

Trabalhos pioneiros nos Problemas de Programação de Veículos datam do final da década de 1960 e incluem, por exemplo, Saha (1970), Wren (1972), Orloff (1976), Gavish *et al.* (1978), Gavish e Shlifer (1979) e Swersey e Ballard (1984). No caso dos Problemas de Programação de Pessoal, os trabalhos pioneiros datam de meados da década de 1950 e incluem, por exemplo, Dantzig (1954), Edie (1954), Bennett e Potts (1968), Tibrewala *et al.* (1972), Warner e Prawda (1972) e Abernathy *et al.* (1973). Revisões, classificações e levantamentos sobre o estado da arte destes dois problemas de programação podem ser encontrados, por exemplo, em Daduna e Pinto Paixão (1995), Ernst *et al.* (2004a; 2004b) e Bunte e Kliwer (2009).

Nos Problemas Integrados de Roteamento e Programação de Veículos, os clientes especificam intervalos de tempo (i.e., “janelas de tempo”) dentro dos quais eles devem ser servidos, ou então a frequência em que devem ser servidos ao longo de um dado horizonte de tempo. Trabalhos pioneiros neste problema integrado datam do final da década de 1960 e incluem, por exemplo, Newton e Thomas (1969; 1974), Angel *et al.* (1972), Verderber (1974), Bodin e Berman (1979) e Hargroves e Demetsky (1981).

Por outro lado, nos Problemas Integrados de Roteamento de Veículos e de Programação de Pessoal, as seqüências de escalas de serviço e os funcionários que as

realização, devem ser decididos simultaneamente ao roteamento dos veículos. Trabalhos pioneiros neste problema integrado datam do início da década de 1990 e incluem, por exemplo, Chung e Norback (1991), Bohoris e Thomas (1995), Recker (1995), Begur *et al.* (1997), Desaulniers *et al.* (1998) e Savelsbergh e Sol (1998).

Revisões, classificações e levantamentos sobre o estado da arte destes dois problemas integrados podem ser encontrados, por exemplo, em Bodin e Golden (1981), Desrochers *et al.* (1990), Bodin *et al.* (1983) e Desrosiers *et al.* (1995).

Por fim, nos Problemas Integrados de Corte de Estoque e de Sequenciamento de Padrões, antes de cortar os objetos é preciso decidir a sequência para o corte dos padrões, uma vez que estes padrões podem conter diferentes conjuntos de itens, e isso pode interferir no número máximo de pilhas abertas, nos níveis de estoque intermediário de itens, no manuseio de materiais, nos prazos de entrega de produtos, entre outros. Trabalhos pioneiros neste problema integrado datam do início da década de 2000 e incluem, por exemplo, Armbruster (2002), Pileggi *et al.* (2005; 2007), Belov e Scheithauer (2007), Yanasse e Lamosa (2007) e Reinertsen e Vossen (2010).

## **2.5 PROBLEMAS INTEGRADOS DE ROTEAMENTO E CARREGAMENTO DE VEÍCULOS**

No Roteamento de Veículos, geralmente, as demandas de clientes por mercadorias são expressas por números positivos, representando o peso ou o volume a ser entregue. Em alguns casos, no entanto, as demandas são compostas por itens discretos, como caixas retangulares. Quando as restrições de empacotamento (paletes/caminhões/veículos) são descritas como um problema unidimensional, assume-se implicitamente que cada demanda ocupa uma determinada seção do objeto, ou então que a carga molda-se de acordo com o formato do objeto. O primeiro caso pode levar a desperdícios dos espaços disponíveis, enquanto o segundo caso pode levar a soluções infactíveis quando a carga é formada por itens rígidos que não alteram a forma sob pressão (ARAUJO, 2006). Se outras restrições (exigências práticas) de empacotamento forem consideradas (BISCHOFF; RATCLIFF, 1995), a acoplagem das estruturas de carregamento e de roteamento geralmente torna-se mais complexa.

Nos Problemas Integrados de Roteamento de Veículos e de Carregamento de Paletes, os pedidos dos clientes são formados por itens que possuem duas dimensões espaciais

relevantes (i.e., itens bidimensionais), e a determinação dos roteiros deve ser decidida levando em consideração a acomodação dos itens dentro de cada veículo. Aspectos relacionados a não sobreposição dos itens dentro dos veículos e a ordem de descarregamento dos itens ao longo da sequência de visitas são relevantes. Trabalhos pioneiros neste problema integrado datam de meados da década de 2000 e incluem, por exemplo, Iori *et al.* (2007), Gendreau *et al.* (2008), Azevedo *et al.* (2009), Fuellerer *et al.* (2009), Zachariadis *et al.* (2009), Duhamel *et al.* (2011) e Leung *et al.* (2011).

Por outro lado, nos Problemas Integrados de Roteamento de Veículos e de Carregamento de Contêineres, os pedidos dos clientes são formados por itens que possuem três dimensões espaciais relevantes (i.e., itens tridimensionais), e a determinação dos roteiros deve ser decidida levando em consideração a acomodação dos itens dentro de cada veículo. Além da não sobreposição dos itens dentro dos veículos e a ordem de descarregamento dos itens ao longo da sequência de visitas, aspectos relacionados a estabilidade e a fragilidade do carregamento são também relevantes. Trabalhos pioneiros neste problema integrado datam de meados da década de 2000 e incluem, por exemplo, Gendreau *et al.* (2006), Araujo (2006), Campos (2008), Moura e Oliveira (2009), Tarantilis *et al.* (2009), Fuellerer *et al.* (2010), Bortfeldt (2012), Zhu *et al.* (2012), Bortfeldt e Homberger (2013) e Ruan *et al.* (2013).

Revisões, classificações e levantamentos sobre o estado da arte destes dois problemas integrados podem ser encontrados, por exemplo, em Wang *et al.* (2009) e Iori e Martello (2010).

A Figura 6 ilustra os padrões de empacotamento obtidos ao se arranjar volumes de cargas, em um mesmo contêiner, encomendados por três clientes diferentes (note que as cores diferenciam os clientes). Note as diferenças de arranjo obtidas no padrão à esquerda, em que as restrições de empacotamento tridimensional foram negligenciadas, e no padrão à direita, em que estas restrições foram levadas em consideração.

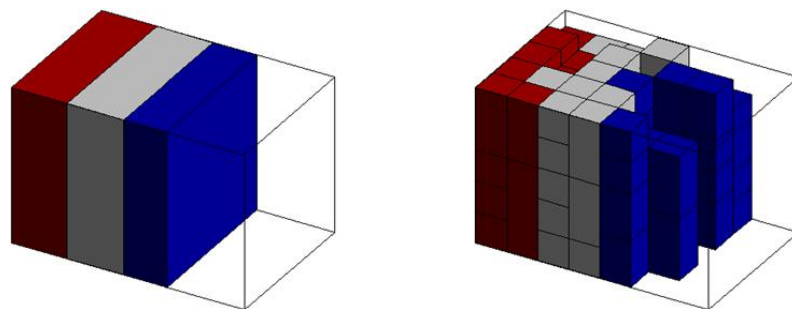


Figura 6. Exemplo de carregamento que não considera (esquerda) e que considera (direita) restrições de empacotamento tridimensional.

Da tentativa de abordar este caso mais realista é que surge a combinação (ou integração) do Roteamento de Veículos com o Carregamento de Contêineres. Existem poucos trabalhos na literatura que tratam dos Problemas Integrados de Roteamento de Veículos e de Carregamento de Contêineres, também chamados ao longo do texto como Problemas Integrados de Roteamento e Carregamento de Veículos. A Tabela 2 a seguir apresenta um resumo dos trabalhos da literatura que trataram Problemas Integrados de Roteamento e Carregamento de Veículos. Os problemas foram classificados quanto: (i) ao tipo de frota; (ii) às considerações práticas; (iii) ao método de solução; e (iv) à população de estudo. Nesta tabela as abreviações se referem a:

C1 – Frota homogênea	C8 – Janelas de tempo
C2 – Frota heterogênea	C9 – Método exato
C3 – Orientação das caixas	C10 – Métodos heurístico/meta-heurístico
C4 – Estabilidade do carregamento	C11 – Método híbrido
C5 – Empilhamento das caixas	C12 – Novos exemplos
C6 – Múltiplos destinos	C13 – Exemplos da literatura
C7 – Limite de peso	C14 – Exemplos de situações reais

Tabela 2. Resumo dos trabalhos que trataram Problemas Integrados de Roteamento e Carregamento de Veículos.

Trabalho	Frota		Considerações Práticas						Método			Exemplos		
	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12	C13	C14
Araujo (2006)														
Bortfeldt (2012)														
Bortfeldt e Homberger (2013)														
Campos (2008)														
Fuellerer <i>et al.</i> (2010)														
Gendreau <i>et al.</i> (2006)														
Moura e Oliveira (2009)														
Ruan <i>et al.</i> (2013)														
Tarantilis <i>et al.</i> (2009)														
Zachariadis <i>et al.</i> (2012)														
Zhu <i>et al.</i> (2012)														

Com relação à (i), apenas um trabalho se propôs a tratar frota heterogênea de veículos. Com relação à (ii), quatro trabalhos se propuseram a tratar considerações de janelas de tempo. Com relação à (iii), é possível notar que existe uma carência de trabalhos que propuseram abordagens exatas para resolver Problemas Integrados de Roteamento e Carregamento de Veículos. Com relação à (iv), apenas dois trabalhos se propuseram a tratar

situações reais em que estes problemas aparecem. Estas observações motivaram o desenvolvimento neste trabalho de modelos de programação matemática para representar Problemas Integrados de Roteamento e Carregamento de Veículos, bem como o desenvolvimento de métodos heurísticos e meta-heurísticos para resolver problemas mais realistas. Os algoritmos são baseados em combinações de heurísticas clássicas das literaturas de Roteamento de Veículos e de Carregamento de Contêineres, bem como em duas estratégias meta-heurísticas, e no uso delas em procedimentos mais elaborados. Embora não haja garantias de que as soluções obtidas para os respectivos problemas sejam ótimas, tratam-se de heurísticas relativamente simples, suficientemente rápidas para resolver problemas reais, razoavelmente flexíveis para incorporar aspectos práticos, e que normalmente garantem soluções relativamente boas em tempos computacionais aceitáveis na prática. A seguir é apresentada uma revisão mais detalhada dos trabalhos da literatura que propuseram abordagens de solução para o Problema Integrado de Roteamento e Carregamento de Veículos.

Gendreau *et al.* (2006) subdividem o problema integrado em um problema mestre (roteamento) e em um subproblema (carregamento). O problema mestre é resolvido através de um algoritmo Busca Tabu, utilizando dois algoritmos adaptados da literatura para gerar soluções iniciais (HGEN e HEUCL) e a heurística *4-Opt Generalized Insertion Procedure* (GENI) para reotimizar os roteiros após explorar a vizinhança. O subproblema é tratado como um *Strip Packing 3D* com o objetivo de minimizar o comprimento total necessário para empacotar todas as caixas dos destinos alocados em um determinado veículo. O subproblema também é resolvido através de um algoritmo Busca Tabu utilizando ainda duas heurísticas gulosas adaptadas do empacotamento bidimensional (*Bottom Left Algorithm* e *Touching Perimeter Algorithm*) para explorar a vizinhança. Os autores apresentam resultados computacionais para 27 exemplos derivados da literatura de roteamento de veículos com geração aleatória dos parâmetros de carregamento e outros parâmetros definidos após a calibração das heurísticas. Os autores também apresentam resultados computacionais para 5 exemplos obtidos com uma companhia italiana fabricante de móveis de madeira para quarto.

Araujo (2006) também subdivide o problema integrado em um problema mestre (roteamento) e em um subproblema (carregamento). O problema mestre é resolvido através de um algoritmo Busca Tabu, utilizando a heurística de Clark e Wright (1964) para gerar uma solução inicial. O subproblema também é tratado como um *Strip Packing 3D* com o objetivo de minimizar o comprimento total necessário para empacotar todas as caixas dos destinos alocados em um determinado veículo. O subproblema é resolvido através de um

algoritmo de múltiplos inícios. O autor apresenta resultados computacionais para os exemplos propostos por Gendreau *et al.* (2006), tendo obtido resultados melhores para 24 dos 27 exemplos (de acordo com os trabalhos conhecidos até a presente data, Araujo (2006) mantém 2 dos melhores resultados obtidos).

Moura e Oliveira (2009) propõem duas abordagens para resolver o problema. Na abordagem sequencial, restrições de entrega completa e de múltiplos destinos são relaxadas, enquanto na abordagem hierárquica o carregamento de contêineres (subproblema) deve ser resolvido após o roteamento de veículos (problema mestre). Esta última abordagem, em particular, é dividida em três etapas: a primeira (construtiva com GRASP) visa construir os roteiros (ignorando o carregamento da demanda de cada cliente) e minimizar o número total de veículos e o tempo total dos roteiros; a segunda (pós-construtiva) visa tentar reduzir o número total de veículos; e a terceira (busca local) visa tentar reduzir o tempo total dos roteiros. Uma heurística construtiva gulosa (a mesma da abordagem sequencial) faz o carregamento das demandas dos clientes. Caso a solução do roteamento seja infactível para o carregamento, os autores propõem dois algoritmos para tentar factibilizar a solução conjunta. Os autores apresentam resultados computacionais para 46 exemplos derivados com base nos exemplos de Solomon (1987) e Bischoff e Ratcliff (1995).

Campos (2008) propõe uma heurística que visa minimizar o número de veículos utilizados, minimizar a distância total percorrida pelos veículos e maximizar a ocupação média dos veículos (esta última devido à frota ser heterogênea). A estrutura geral da heurística está basicamente dividida em dois blocos. No primeiro bloco o algoritmo proposto (*k-IntensiveSwap*) realiza a construção e melhoria dos roteiros, enquanto no segundo bloco é feita a seleção e o carregamento dos veículos (carregamento em camadas). O autor apresenta resultados computacionais para os exemplos propostos por Gendreau *et al.* (2006), tendo obtido resultados melhores para 7 dos 27 exemplos (de acordo com os trabalhos conhecidos até a presente data, Campos (2008) mantém 1 dos melhores resultados obtidos). O autor também apresenta resultados computacionais para os exemplos propostos por Moura e Oliveira (2009), tendo obtido resultados melhores para 44 dos 46 exemplos (de acordo com os trabalhos conhecidos até a presente data, Campos (2008) mantém 25 dos melhores resultados obtidos).

Tarantilis *et al.* (2009) também subdividem o problema integrado em um problema mestre (roteamento) e em um subproblema (carregamento). O problema mestre é resolvido através de um algoritmo Busca Tabu híbrido com um algoritmo Busca Local Guiada. A escolha por estes métodos está em se querer balancear satisfatoriamente a



intensificação e a diversificação do processo de busca para explorar melhor o espaço de busca. O algoritmo Busca Local Guiada ajuda o algoritmo Busca Tabu a escapar dos ótimos locais, e modifica periodicamente a função objetivo para penalizar características de baixa qualidade das soluções candidatas. O subproblema é resolvido através de uma coleção de seis heurísticas, cada qual projetada para favorecer diferentes estruturas de empacotamento. Antes de aplicar as heurísticas, são feitos três ordenamentos, respectivamente, por ordem decrescente de volume (visando favorecer o empacotamento de itens maiores primeiro), de área da base e de altura (estes dois visando favorecer o empilhamento dos itens). As seis heurísticas são então aplicadas sequencialmente (de 1 a 6) da primeira até a terceira ordenação, até que uma solução que respeite as restrições de carregamento seja encontrada (só se passa para uma próxima heurística e ordenação se uma solução factível ainda não foi encontrada). A solução inicial é gerada através de uma heurística construtiva que procura respeitar tanto as restrições do carregamento quanto do roteamento (tamanho da frota). Caso não seja possível gerar uma solução factível inicial, novos veículos são tornados disponíveis. Os autores apresentam resultados computacionais para os exemplos propostos por Gendreau *et al.* (2006), tendo obtido resultados melhores para 21 dos 27 exemplos (de acordo com os trabalhos conhecidos até a presente data, Tarantilis *et al.* (2009) mantêm 2 dos melhores resultados obtidos). Os autores também apresentam resultados computacionais para 12 novos exemplos gerados.

Fuellerer *et al.* (2010) também subdividem o problema integrado em um problema mestre (roteamento) e em um subproblema (carregamento). O problema mestre é resolvido através de um algoritmo Colônia de Formigas baseado na heurística de Clark e Wright (1964) proposta por Reimann *et al.* (2004), modificada para incorporar medidas de visibilidade (densidade do carregamento obtido) relacionadas ao carregamento (no algoritmo Colônia de Formigas proposto por Reimann *et al.* (2004) a única medida considerada eram as economias). O algoritmo constrói soluções factíveis de alta qualidade através de chamadas aleatórias do algoritmo de economias com uma matriz de custos modificada e dois algoritmos de busca local. As soluções construídas são pós-otimizadas com vizinhanças do tipo *Move and Swap* (KINDERVATER; SAVELSBERGH, 1997) sobre os clientes. O algoritmo permite soluções parciais infactíveis (número de roteiros maior que o de veículos), cabendo ao algoritmo *Move and Swap* tornar os roteiros factíveis (reduzir o número de roteiros, o que é feito adicionando-se uma penalidade na função objetivo de avaliação dos algoritmos de busca local). O algoritmo também permite soluções com carregamentos que excedem o limite de peso do veículo, e são corrigidas como no caso anterior, penalizando-se a função objetivo de

avaliação dos algoritmos de busca local. O subproblema é tratado como um *Strip Packing* 3D com o objetivo de minimizar o comprimento total necessário para empacotar todas as caixas dos destinos alocados em um determinado veículo. O subproblema é resolvido semelhantemente à Gendreau *et al.* (2006), não fazendo uso de um algoritmo Busca Tabu, mas utilizando as mesmas duas heurísticas gulosas adaptadas do empacotamento bidimensional (*Bottom Left Algorithm* e *Touching Perimeter Algorithm*) para explorar a vizinhança. Os autores apresentam resultados computacionais para os exemplos propostos por Gendreau *et al.* (2006), tendo obtido resultados melhores para todos os 27 exemplos (de acordo com os trabalhos conhecidos até a presente data, Fuellerer *et al.* (2010) mantêm 1 dos melhores resultados obtidos).

Zhu *et al.* (2012) adaptaram duas conhecidas heurísticas de empacotamento (*Deepest-bottom-left-fill Heuristic* e *Maximum Touching Area Heuristic*) para o subproblema de carregamento tridimensional, e as embutiram em um algoritmo de busca local. Este algoritmo de busca local, por sua vez, é utilizado em um algoritmo Busca Tabu em duas fases, que emprega cinco operadores de vizinhança para resolver o problema integrado. Na primeira fase, o algoritmo tenta encontrar uma solução factível para o problema de carregamento e, na segunda fase, o algoritmo tenta minimizar a distância total percorrida mantendo a factibilidade da solução. O subproblema de empacotamento é tratado como um *Strip Packing* 3D com o objetivo de minimizar o comprimento total necessário para empacotar todas as caixas dos destinos alocados em um determinado veículo. O algoritmo de busca local tenta empacotar todos os itens e minimizar o comprimento total necessário. Se este comprimento não exceder o comprimento do veículo, então todas as caixas podem ser empacotadas no veículo. Para cada veículo uma sequência de empacotamento das caixas é gerada e uma ou outra heurística de empacotamento (i.e., *Deepest-bottom-left-fill Heuristic* ou *Maximum Touching Area Heuristic*) é utilizada. Os autores apresentam resultados computacionais para os exemplos propostos por Gendreau *et al.* (2006), tendo obtido resultados melhores para todos os 27 exemplos (de acordo com os trabalhos conhecidos até a presente data, Zhu *et al.* (2012) mantêm 4 dos melhores resultados obtidos). Os autores também apresentam resultados computacionais para os exemplos propostos por Tarantilis *et al.* (2009), tendo obtido resultados melhores para 9 dos 12 exemplos (de acordo com os trabalhos conhecidos até a presente data, Zhu *et al.* (2012) mantêm 9 dos melhores resultados obtidos).

Bortfeldt (2012) apresenta um algoritmo híbrido que inclui um algoritmo Busca Tabu para resolver o Problema de Roteamento de Veículos e um algoritmo de Busca em Árvore para resolver o Problema de Carregamento de Contêineres. Quatro operadores de

movimento são empregados pelo Algoritmo Busca Tabu (intra e inter-*Swap* e intra e inter-*Shift*). A solução inicial é obtida através de um algoritmo de economias aleatório de múltiplos inícios. O algoritmo é então dividido em duas fases. Na primeira fase, já de posse de uma solução inicial para o Problema de Roteamento de Veículos, o objetivo é tentar reduzir o número de veículos. Nesta fase são utilizados apenas os operadores inter-*Swap* e inter-*Shift*. Na segunda fase o objetivo é minimizar a distância total percorrida, e todos os quatro operadores são utilizados. Para verificar a factibilidade dos padrões de empacotamento, o algoritmo utiliza a estratégia “avaliar primeiro, empacotar depois”, ao invés da estratégia mais comumente utilizada “empacotar primeiro, avaliar depois”. As caixas são empacotadas tomando como referência o canto inferior de trás esquerdo, e o veículo é preenchido primeiro no sentido do fundo até a porta, depois no sentido do chão até o teto e por fim no sentido da esquerda para direita. O autor apresenta resultados computacionais para os exemplos propostos por Gendreau *et al.* (2006), tendo obtido resultados melhores para todos os 27 exemplos (de acordo com os trabalhos conhecidos até a presente data, Bortfeldt (2012) mantém 23 dos melhores resultados obtidos).

Ruan *et al.* (2013) apresentam um algoritmo que combina um algoritmo Infestação de Abelhas e as seis heurísticas de empacotamento utilizadas por Tarantilis *et al.* (2009), uma para o roteamento de veículos e as outras cinco para o empacotamento tridimensional das caixas, para resolver o problema integrado. O algoritmo utiliza um algoritmo GRASP com busca em vizinhança em múltiplas fases para gerar um conjunto de soluções factíveis iniciais para o Problema de Roteamento de Veículos considerando apenas restrições de capacidade (peso e volume). O algoritmo então aplica o algoritmo Infestação de Abelhas para tentar melhorar a melhor solução da lista restrita de candidatos, enquanto as seis heurísticas de empacotamento são chamadas para verificar a factibilidade do subproblema de carregamento. Se não for possível um empacotamento factível para a melhor solução da lista restrita de candidatos, então passa-se para a segunda melhor solução desta lista e tenta-se melhorá-la, ao mesmo tempo em que a factibilidade do subproblema de carregamento é verificada. O algoritmo continua até que tenha percorrido toda a lista restrita de candidatos. Os autores apresentam resultados computacionais para os exemplos propostos por Gendreau *et al.* (2006), tendo obtido resultados melhores para 26 dos 27 exemplos (de acordo com os trabalhos conhecidos até a presente data, Ruan *et al.* (2013) mantém 2 dos melhores resultados obtidos).

Bortfeldt e Homberger (2013) apresentam uma heurística em dois estágios que segue a estratégia “empacotar primeiro, rotar depois”. Os autores propõem uma abordagem

genérica que consiste basicamente em resolver separadamente um exemplo do Problema de Roteamento de Veículos com Janelas de Tempo mais  $n$  exemplos de um *Strip Packing* 3D com o objetivo de minimizar o comprimento total necessário para empacotar todas as caixas dos destinos alocados em um determinado veículo. Dois algoritmos da literatura são utilizados para resolver cada um destes problemas, respectivamente, embora os autores argumentem que também é possível incluir outros algoritmos para resolver os problemas separadamente. Os autores apresentam resultados computacionais para os exemplos propostos por Moura e Oliveira (2009), tendo obtido resultados melhores para 43 dos 46 exemplos (de acordo com os trabalhos conhecidos até a presente data, Bortfeldt e Homberger (2013) mantêm 20 dos melhores resultados obtidos). Os autores também apresentam resultados computacionais para 120 novos exemplos gerados.

Neste trabalho, o problema estudado considera frota homogênea e limitada de veículos. Cada veículo deve realizar um único roteiro, partindo e retornando para o único depósito, estando todos igualmente disponíveis para atender a demanda de um conjunto de clientes, desde que sua capacidade volumétrica não seja excedida. Cada cliente, por sua vez, possui localização e demanda conhecidas e deve ter sua demanda completamente atendida por um único veículo. As demandas dos clientes são compostas por caixas retangulares que devem ser empacotadas ortogonalmente dentro dos veículos. Os carregamentos são todos feitos do fundo em direção à porta de cada veículo, todos os carregamentos devem estar completamente estáveis verticalmente, o limite de empilhamento de cada caixa não deve ser excedido, e a carga de cada cliente deve estar empacotada de maneira a facilitar o descarregamento da mesma. Assume-se que há uma conexão direta entre cada par de clientes, e os custos (simétricos ou assimétricos) (ou as distâncias) de viagem entre o depósito e os clientes, e entre os clientes, são também conhecidos. O objetivo é então planejar um conjunto de roteiros de custo mínimo para os veículos (não necessariamente todos eles).

### **2.5.1 O PROBLEMA EM UMA SITUAÇÃO REAL**

No decorrer deste estudo foram realizadas diversas visitas a uma empresa transportadora de mercadorias com o objetivo de entender melhor o problema na prática e coletar dados e informações. Fundada em 1973, de capital fechado, a empresa visitada possui matriz em Contagem - MG e diversas unidades espalhadas por Minas Gerais (20 unidades), São Paulo (15 unidades), Rio de Janeiro (3 unidades), Espírito Santo (3 unidades), Bahia (12

unidades), Sergipe (1 unidade), Rio Grande do Sul (5 unidades), Paraná (2 unidades) e Santa Catarina (1 unidade). A área de atendimento da empresa abrange completamente as regiões Sul (Rio Grande do Sul, Santa Catarina e Paraná) e Sudeste (Minas Gerais, São Paulo, Rio de Janeiro e Espírito Santo), além dos estados da Bahia e de Sergipe na região Nordeste. A empresa possui frota própria de 700 veículos e frota terceirizada de 900 veículos, todos os quais incluem carretas, caminhões do tipo truque, toco e 3/4, e veículos leves.

A Figura 7 a seguir ilustra uma fotografia do terminal de cargas de Guarulhos - SP, unidade da empresa em que foram realizadas as visitas. Este terminal de cargas realiza operações de coleta e entrega da região da Grande São Paulo, e também operações de transferência entre outros terminais de cargas. Na Figura 7, os recebimentos são realizados nas docas à esquerda, enquanto as expedições são realizadas nas docas à direita. Nestas operações são utilizados veículos de menor porte, como os caminhões descritos anteriormente e veículos leves. As docas ao fundo são utilizadas para as transferências entre terminais de cargas, em que são utilizados veículos de maior porte, como carretas. O pátio central é utilizado para realizar a triagem das mercadorias, com base na relação origem-destino de cada uma delas. Nesta etapa as mercadorias normalmente ficam armazenadas em paletes.

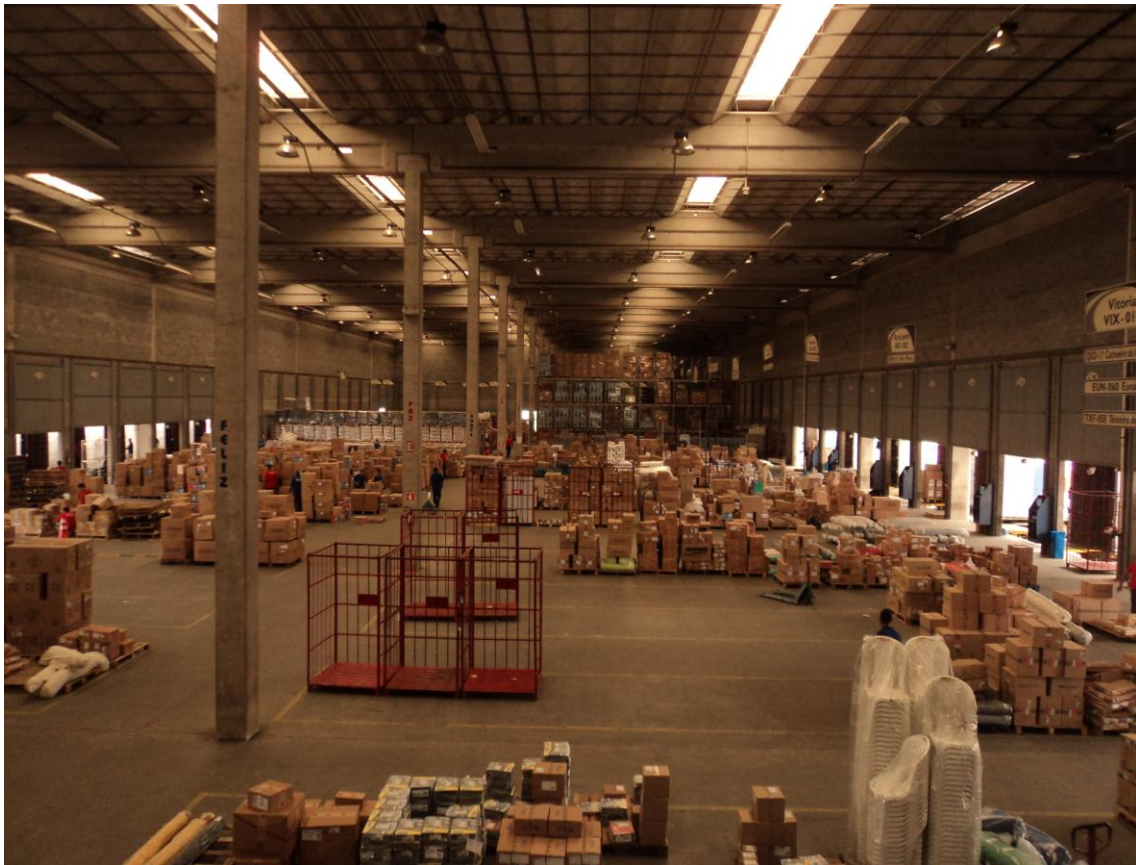


Figura 7. Visão geral da área de recebimento, triagem e expedição da transportadora visitada.

O foco deste estudo permaneceu nas operações de coleta e entrega de mercadorias na região de atendimento da unidade, o que configura operações de curta distância (*short-haul*). Trabalhos relacionados a operações de transferência entre terminais de cargas (*long-haul*) podem ser encontrados, por exemplo, em Crainic (2003) e Vasco (2012). A Figura 8 a seguir ilustra um caminhão do tipo toco (ou semi-pesado), tipicamente utilizado pela empresa para realizar operações de coleta e entrega de mercadorias na região de atendimento da unidade. Estes caminhões possuem um eixo simples na carroceria, i.e., um eixo frontal e outro traseiro de rodagem simples. Sua capacidade é de até 6 toneladas, possuindo peso bruto máximo de até 16 toneladas e comprimento máximo de até 14 metros.



Figura 8. Modelo de caminhão tipicamente utilizado pela transportadora visitada.

A empresa visitada utiliza um sistema automatizado para determinação do volume e do peso das mercadorias. Este sistema é composto por um quadro de dimensionamento e por uma balança para pesagem em movimento, ambos de fácil integração com transportadores já existentes na empresa. O equipamento efetua de forma automática o dimensionamento e a cubagem de qualquer item, independente de sua orientação ou posição (a maior dimensão do item apenas não pode exceder 3 metros). Sua capacidade de medição é de 600 a 15000 itens por hora. Os dados de volume e peso são transmitidos automaticamente a um microcomputador, o que permite a confrontação imediata das informações de embarque e viabiliza o melhor gerenciamento das cargas a serem transportadas. A Figura 9 a seguir ilustra este equipamento, conhecido como CargoScan.





Figura 9. Equipamento utilizado pela transportadora visitada para obter as dimensões e os pesos das caixas.

Nas visitas realizadas a este terminal de cargas da empresa, pode-se notar o alto volume de mercadorias transportadas todos os dias. O giro destas mercadorias também é alto, e elas raramente permanecem no terminal de cargas mais do que 24 horas. As mercadorias normalmente vêm embaladas em caixas retangulares e as operações de coleta e entrega na região de atendimento da unidade normalmente não envolvem caixas com formatos muito diferentes. As caixas coletadas na região de atendimento ou recebidas de outros terminais são triadas durante todo o dia e são entregues na região de atendimento ou expedidas para outros terminais no dia seguinte.

A definição dos roteiros que os veículos devem seguir no dia seguinte é feita durante a noite. A empresa adquiriu há alguns anos o *software* Roadnet<sup>®</sup>, um pacote de roteamento desenvolvido e comercializado pela Roadnet Technologies, que utiliza o estado da arte dos métodos de solução para Problemas de Roteamento de Veículos para auxiliar na tomada de decisão em situações reais. Os roteiros são então entregues para as equipes de arrumadores (ou “montadores”) de cargas ao longo da madrugada. Estas equipes são constituídas por arrumadores de cargas propriamente ditos, e por verificadores de etiquetas e códigos de barras das caixas, que são também responsáveis por emitir as notas fiscais para os motoristas. Uma vez carregado um veículo, o seu motorista pode então realizar o roteiro que lhe foi atribuído.

Já de posse do roteiro a ser realizado, os arrumadores de cargas normalmente procuram organizar o carregamento das caixas de acordo com as notas fiscais, i.e., procuram colocar as caixas dos clientes que serão visitados por último mais próximas do fundo do caminhão, e as caixas dos clientes que serão visitados primeiro mais próximas da porta do caminhão. Outras preocupações incluem seguir o que está rotulado nas caixas, como, por exemplo, se uma dada caixa só pode ser colocada com uma das faces voltada para cima ou o

limite máximo de caixas de uma dada mercadoria que podem ser empilhadas umas sobre as outras.

Embora os arrumadores de cargas tenham larga experiência nesta atividade, em alguns casos ocorre deles não conseguirem carregar completamente as caixas de um ou mais clientes dentro do caminhão. Nestes casos, o que normalmente ocorre é a empresa alocar um outro veículo menor para realizar a entrega das caixas que ficaram de fora do caminhão. É interessante notar que a Roadnet Technologies também desenvolve e comercializa um pacote de carregamento, o FleetLoader<sup>®</sup>, específico para auxiliar no carregamento de caminhões de bebidas. Até onde se tem conhecimento, estas duas ferramentas não estão integradas em um único pacote. Ou seja, as soluções obtidas pela empresa, apesar de serem de boa qualidade, não têm garantias de que os carregamentos resultantes serão factíveis na prática, como pôde ser verificado em alguns casos.



## CAPÍTULO 3

### FORMULAÇÕES MATEMÁTICAS

---

#### 3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, são apresentadas formulações matemáticas para Problemas Integrados de Roteamento e Carregamento de Veículos. Primeiramente, é apresentada uma formulação da literatura para o Problema do Caixeiro Viajante (TSP). Com base nesta formulação, uma extensão direta para o Problema de Roteamento de Veículos Capacitado (CVRP) é derivada. Em seguida, com base nestas formulações, são apresentadas extensões diretas para problemas integrados com duas dimensões espaciais relevantes, i.e., o 2L-TSP e o 2L-CVRP, e com três dimensões espaciais relevantes, i.e., o 3L-TSP e o 3L-CVRP. A distinção entre o TSP e o CVRP é dada pelas restrições de capacidade e pelo número de veículos. A distinção entre o TSP e o CVRP e os respectivos 2L-TSP e 2L-CVRP é dada pela integração das decisões de empacotamento, das restrições geométricas e das restrições de múltiplos destinos. Por fim, a distinção entre o TSP e o CVRP e os respectivos 3L-TSP e 3L-CVRP é dada pela integração, além das decisões de empacotamento e das restrições de múltiplos destinos, também das restrições de estabilidade vertical do carregamento e das restrições de resistência das caixas ao empilhamento (das quais restrições de fragilidade das caixas são um caso particular). As formulações derivadas podem ser obtidas a partir da formulação original para o TSP como ilustrado na Figura 10.

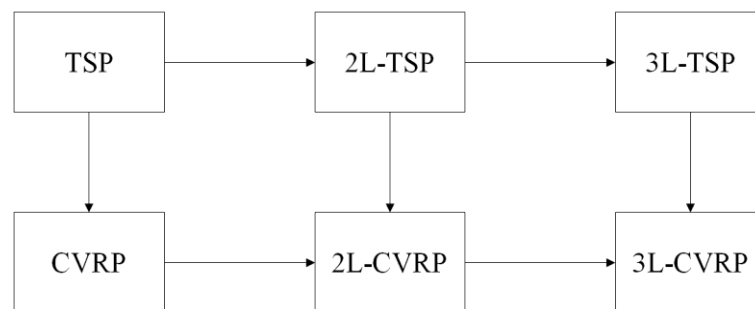


Figura 10. Derivação das formulações integradas a partir da formulação original para o TSP.

Destaca-se aqui que o foco deste trabalho é o 3L-CVRP, mas a apresentação de formulações para o 2L-CVRP, o 2L-TSP e o 3L-TSP, também pode ser útil para motivar pesquisas nestas variações. Até onde se tem conhecimento, não existem trabalhos na literatura que tenham apresentado formulações matemáticas para qualquer destes Problemas Integrados de Roteamento e Carregamento de Veículos, e uma das contribuições deste trabalho é propor formulações matemáticas envolvendo diversas considerações comumente encontradas na prática, e que, embora pouco realistas para serem aplicados em situações reais, representam os problemas tratados e as considerações envolvidas.

Por fim, são apresentados os resultados obtidos com os experimentos computacionais realizados. Os modelos apresentados na Seção 3.3 para o CVRP e na Seção 3.8 para o 3L-CVRP foram implementados na linguagem de modelagem GAMS (versão 23.0), convertidos em formato .lp, e o *solver* GUROBI (versão 5.0) foi utilizado para resolvê-los (veja o Apêndice A para uma implementação em GAMS para o 3L-CVRP). Todos os parâmetros do *solver* foram deixados como *default*. Todos os experimentos foram realizados em uma estação de trabalho HP Z800 com dois processadores Intel Xeon X5690 3.47 GHz com seis núcleos cada, 48.0 GB e sistema operacional Linux. Os modelos foram testados com exemplos gerados aleatoriamente.

## 3.2 FORMULAÇÃO PARA O TSP

Algumas formulações para o Problema de Roteamento de Veículos Capacitado (CVRP) poderiam ser utilizadas como ponto de partida para a modelagem de Problemas Integrados de Roteamento e Carregamento de Veículos. Neste trabalho, utiliza-se uma formulação dependente do tempo para o Problema do Caixeiro Viajante (TSP), proposta originalmente por Fox *et al.* (1980). O *Time-dependent Traveling Salesman Problem* (TDTSP) é uma generalização do TSP na qual o custo de viagem entre dois clientes depende da posição (ou estágio) de cada um na sequência de visitas (GOUVEIA; VOSS, 1995; MÉNDEZ-DÍAZ *et al.*, 2008; ÖNCAN *et al.*, 2009). A razão para a utilização de uma formulação dependente do tempo é ter a informação sobre a posição dos clientes em cada roteiro. Este artifício é importante para que problemas integrados com três dimensões espaciais relevantes, i.e., o 3L-TSP e o 3L-CVRP, possam ser adequadamente modelados, não se fazendo necessário no caso dos problemas integrados com duas dimensões espaciais

relevantes, i.e., o 2L-TSP e o 2L-CVRP. Sua necessidade ficará clara quando restrições de estabilidade vertical do carregamento forem consideradas.

Nesta formulação, assume-se que um único veículo com capacidade ilimitada está localizado em um depósito central. Este veículo está disponível para servir um conjunto de pedidos colocados por clientes dispersos geograficamente sobre uma área. Cada cliente tem uma localização conhecida. Os custos de viagem entre o depósito e os clientes, e entre os clientes, são também conhecidos. O objetivo é então planejar um roteiro de custo mínimo para o veículo, de modo que o depósito seja o local de início e término do roteiro e cada cliente seja visitado uma única vez pelo veículo. Seja o grafo direcionado completo  $G = (N, A)$ , em que  $N$  é o conjunto de nós correspondente ao depósito (nó 1) mais os clientes (nós  $2, \dots, n$ ), e  $A$  é o conjunto de arcos  $(k, l)$  conectando pares de nós. Seja  $c_{kl}$  o custo (ou a distância) do veículo ir diretamente do nó  $k$  para o nó  $l$ , tal que  $(k, l) \in A$ , e seja  $D_k$  a demanda requerida pelo cliente  $k$ , tal que  $k \in N \setminus \{1\}$ . Note que na formulação original proposta por Fox *et al.* (1980) o custo é definido como  $c_{kl}^t$ , i.e., o custo do veículo ir diretamente do nó  $k$  para o nó  $l$  na posição  $t$ , tal que  $(k, l) \in A$  e  $t \in N$ . O uso deste índice na definição do custo não se faz necessário no caso deste trabalho. De modo a simplificar a formulação, assume-se que o roteiro inicia no nó 1 (i.e., o depósito) na posição 0 e termina no nó 1 na posição  $n$ . As variáveis de decisão (de roteamento)  $d_{kl}^t$  do modelo são definidas como a seguir:

$d_{kl}^t$ : variável binária, que é igual a 1 se o veículo vai diretamente do nó  $k$  para o nó  $l$  na posição  $t$ , tal que  $(k, l) \in A$  e  $t \in N$ ; caso contrário, ela é igual a 0;

Assumindo que  $c_{kk} = \infty$  para todo  $(k, k) \in A$  (ou, alternativamente, que  $d_{kk}^t = 0$  para todo  $(k, k) \in A$ ,  $t \in N$ ), a formulação para o TSP pode ser escrita como a seguir:

$$\min \sum_{(k,l) \in A} \sum_{t \in N} c_{kl} \cdot d_{kl}^t \quad (1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{l \in N} \sum_{t \in N} d_{kl}^t = 1 \quad k \in N \quad (2)$$

$$\sum_{k \in N} \sum_{t \in N} d_{kl}^t = 1 \quad l \in N \quad (3)$$

$$\sum_{l \in N} \sum_{t \in N \setminus \{1\}} t \cdot d_{kl}^t - \sum_{p \in N} \sum_{t \in N} t \cdot d_{pk}^t = 1 \quad k \in N \setminus \{1\} \quad (4)$$

$$d_{kl}^t \in \{0,1\} \quad (k,l) \in A, t \in N \quad (5)$$

Na formulação (1)-(5), a função objetivo (1) visa minimizar o custo (ou a distância) total de visitar todos os clientes. As restrições (2)-(3) garantem que cada cliente é visitado uma única vez, e, portanto, permitem que haja roteiros disjuntos. As restrições (4) garantem a conectividade do roteiro ao forçar que todos os possíveis sub-roteiros contenham o nó 1 (i.e., o depósito), e, portanto, que haja apenas um único roteiro. Finalmente, as restrições (5) definem o domínio das variáveis de decisão. Esta formulação possui  $|N|^3$  variáveis binárias e  $2 \cdot |N| + (|N| - 1)$  restrições.

### 3.3 FORMULAÇÃO PARA O CVRP

A formulação (1)-(5) para o TSP pode ser estendida diretamente para modelar o CVRP. Nesta formulação, assume-se que um número limitado de veículos idênticos com uma dada capacidade está localizado em um depósito central. Estes veículos estão igualmente disponíveis para servir um conjunto de pedidos colocados por clientes dispersos geograficamente sobre uma área. Cada cliente tem uma localização e uma demanda conhecidas. Os custos de viagem entre o depósito e os clientes, e entre os clientes, são também conhecidos. O objetivo é então planejar um conjunto de roteiros de custo mínimo para os veículos (não necessariamente todos eles), de modo que o depósito seja o local de início e término de cada roteiro, cada cliente seja visitado uma única vez por um único veículo, a demanda de todos os clientes seja atendida e a capacidade de cada veículo seja respeitada. De modo a simplificar a formulação, assume-se que cada roteiro inicia no nó 1 (i.e., o depósito) na posição 0 e termina no nó 1 na posição  $n$ , na hipótese de apenas um veículo ser utilizado. Seja  $V$  o conjunto de veículos e  $C_v$  a capacidade do veículo  $v$ , tal que  $v \in V$ . As variáveis de decisão (de roteamento)  $d_{kl}^{tv}$  do modelo são redefinidas como a seguir:

$d_{kl}^{tv}$ : variável binária, que é igual a 1 se o veículo  $v$  vai diretamente do nó  $k$  para o nó  $l$  na posição  $t$ , tal que  $(k,l) \in A$ ,  $t \in N$  e  $v \in V$ ; caso contrário, ela é igual a 0;

Assumindo que  $d_{ll}^{lv} = 0$  para todo  $l \in N \setminus \{1\}$ ,  $t \in N \setminus \{1\}$ ,  $v \in V$ , a formulação para o CVRP pode ser escrita como uma extensão direta da formulação (1)-(5) para o TSP:

$$\min \sum_{(k,l) \in A} \sum_{t \in N} \sum_{v \in V} c_{kl} \cdot d_{kl}^{lv} \quad (6)$$

Sujeito a:

$$\sum_{l \in N} \sum_{t \in N} \sum_{v \in V} d_{kl}^{lv} = 1 \quad k \in N \setminus \{1\} \quad (7)$$

$$\sum_{l \in N} \sum_{t \in N \setminus \{1\}} \sum_{v \in V} t \cdot d_{kl}^{lv} - \sum_{p \in N} \sum_{t \in N} \sum_{v \in V} t \cdot d_{pk}^{lv} = 1 \quad k \in N \setminus \{1\} \quad (8)$$

$$\sum_{l \in N \setminus \{1\}} d_{ll}^{lv} \leq 1 \quad v \in V \quad (9)$$

$$\sum_{l \in N} d_{kl}^{(t+1)v} - \sum_{p \in N} d_{pk}^{tv} = 0 \quad k \in N \setminus \{1\}, t \in N \setminus \{n\}, v \in V \quad (10)$$

$$\sum_{k \in N \setminus \{1\}} \sum_{l \in N} \sum_{t \in N \setminus \{1\}} D_k \cdot d_{kl}^{lv} \leq C_v \quad v \in V \quad (11)$$

$$d_{kl}^{lv} \in \{0,1\} \quad (k,l) \in A, t \in N, v \in V \quad (12)$$

Na formulação (6)-(12), a função objetivo (6) visa minimizar o custo (ou a distância) total de visitar todos os clientes, as restrições (7) garantem que cada cliente é visitado uma única vez e as restrições (8) garantem a conectividade de cada roteiro. As restrições (9) garantem que cada veículo é utilizado no máximo uma vez (o número de veículos é limitado, mas não há obrigatoriedade quanto à utilização de todos). As restrições (10) garantem a conservação de fluxo de cada roteiro, i.e., garantem que se o veículo  $v$  viaja do cliente  $p$  para o cliente  $k$  na posição  $t$ , então na posição  $t+1$  o mesmo veículo deve viajar do cliente  $k$  para um outro cliente  $l$ . As restrições (11) garantem que a capacidade de cada veículo não é excedida. Finalmente, as restrições (12) definem o domínio das variáveis de decisão. Esta formulação possui  $|N|^3 \cdot |V|$  variáveis binárias e  $2 \cdot (|N| - 1) + 2 \cdot |V| + (|N| - 1)^2 \cdot |V|$  restrições.

### 3.4 PRÉ-DEFINIÇÕES PARA AS CONSIDERAÇÕES PRÁTICAS

Antes de passar às formulações integradas propriamente ditas, esta seção introduz as considerações práticas a serem incorporadas nas formulações (1)-(5) para o TSP e

(6)-(12) para o CVRP. A finalidade é reduzir a repetição de termos e conceitos. Os conceitos e a notação utilizados são baseados nos trabalhos de Junqueira (2009) e Junqueira *et al.* (2012a, 2012b, 2013b).

Para cada cliente  $k$  ( $k \in N \setminus \{1\}$ ), seja  $b_{ik}$  o número de itens do tipo  $i$  ( $i \in M$ ) que devem ser carregados dentro de um objeto, no caso um veículo. Note que  $\sum_{k \in N \setminus \{1\}} b_{ik} = b_i$ ,  $i \in M$ , em que  $b_i$  é o número total de itens do tipo  $i$  (em alguns casos, é possível ter  $b_{ik} = 0$ , para algum  $i$  e algum  $k$ ). Em problemas com duas dimensões espaciais relevantes (i.e., problemas bidimensionais - “2L”), os itens são aqui chamados indistintamente de “peças”, e possuem comprimento  $l_i$  e largura  $w_i$  (note que  $\sum_{i \in M} l_i \cdot w_i \cdot b_{ik} = D_k$ ,  $k \in N \setminus \{1\}$ ), assim como os veículos também possuem comprimento  $L_v$  e largura  $W_v$ . Por outro lado, em problemas com três dimensões espaciais relevantes (i.e., problemas tridimensionais - “3L”), os itens são aqui chamados indistintamente de “caixas”, com comprimento  $l_i$ , largura  $w_i$  e altura  $h_i$  (note que  $\sum_{i \in M} l_i \cdot w_i \cdot h_i \cdot b_{ik} = D_k$ ,  $k \in N \setminus \{1\}$ ), assim como os veículos também possuem comprimento  $L_v$ , largura  $W_v$  e altura  $H_v$ . Assume-se que itens e veículos são retangulares, que suas dimensões são números inteiros positivos, e que os itens devem ser empacotados ortogonalmente dentro dos veículos (i.e., com seus lados ou paralelos ou perpendiculares aos lados do veículo) e que a orientação dos itens é fixa (i.e., os itens não podem girar).

Para problemas tridimensionais, um sistema de coordenadas Cartesianas é adotado com sua origem no canto inferior frontal esquerdo de cada veículo, e sejam  $(x, y, z)$  as possíveis coordenadas em que o canto inferior frontal esquerdo de uma dada caixa pode ser posicionado. Estas possíveis posições ao longo dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  de cada veículo podem ser definidas por meio dos conjuntos  $X_v = \{0, 1, 2, \dots, L_v - \min_i(l_i)\}$ ,  $Y_v = \{0, 1, 2, \dots, W_v - \min_i(w_i)\}$  e  $Z_v = \{0, 1, 2, \dots, H_v - \min_i(h_i)\}$ , respectivamente. Sem perda de generalidade, estes conjuntos podem ser reduzidos aos chamados padrões normais ou combinações cônicas (HERZ, 1972; CHRISTOFIDES; WHITLOCK, 1977) como a seguir:

$$X_v = \{x : x = \sum_{i \in M} \varepsilon_i \cdot l_i, 0 \leq x \leq L_v - \min_i(l_i), 0 \leq \varepsilon_i \leq b_i \text{ e inteiro}, i \in M\}$$

$$Y_v = \{y : y = \sum_{i \in M} \varepsilon_i \cdot w_i, 0 \leq y \leq W_v - \min_i(w_i), 0 \leq \varepsilon_i \leq b_i \text{ e inteiro}, i \in M\}$$

$$Z_v = \{z : z = \sum_{i \in M} \varepsilon_i \cdot h_i, 0 \leq z \leq H_v - \min_i(h_i), 0 \leq \varepsilon_i \leq b_i \text{ e inteiro}, i \in M\}$$

Sejam ainda  $X_{iv} = \{x \in X_v : 0 \leq x \leq L_v - l_i\}$ ,  $Y_{iv} = \{y \in Y_v : 0 \leq y \leq W_v - w_i\}$  e  $Z_{iv} = \{z \in Z_v : 0 \leq z \leq H_v - h_i\}$ ,  $i \in M$ , definidos como subconjuntos de  $X_v$ ,  $Y_v$  e  $Z_v$ , respectivamente. Note que estes conjuntos, quando utilizados nas restrições dos modelos, garantem que cada caixa do tipo  $i$  é empacotada completamente dentro do veículo  $v$ . Analogamente, quando se tratar de um único veículo, é possível definir os conjuntos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  de maneira semelhante aos conjuntos  $X_v$ ,  $Y_v$  e  $Z_v$ , e os conjuntos  $X_i$ ,  $Y_i$  e  $Z_i$  de maneira semelhante aos conjuntos  $X_{iv}$ ,  $Y_{iv}$  e  $Z_{iv}$ . Assume-se ainda que a porta do veículo que dá acesso à carga se encontra na face entre as coordenadas  $(L_v, 0, 0)$ ,  $(L_v, W_v, 0)$ ,  $(L_v, W_v, H_v)$  e  $(L_v, 0, H_v)$  do sistema de coordenadas. Para problemas bidimensionais, basta restringir as definições anteriores às duas dimensões espaciais relevantes.

Em Problemas de Empacotamento, basicamente, itens devem ser empacotados completamente dentro de objetos, sem que dois ou mais itens se sobreponham, i.e., que ocupem os mesmos pontos de um objeto. Isto define as considerações básicas de Problemas de Empacotamento, as *restrições geométricas* (veja Seção 2.3.1), que ocorrem tanto em problemas bidimensionais quanto em problemas tridimensionais. No caso dos Problemas de Carregamento de Contêineres, Bischoff e Ratcliff (1995) apresentam um conjunto adicional de doze exigências práticas que podem ser levadas em consideração quando se pretende modelar problemas mais realistas. Estas exigências incluem considerações acerca de estabilidade do carregamento, resistência das caixas ao empilhamento e fragilidade das caixas, carga fracionada em múltiplos destinos, múltiplas orientações das caixas, limite de peso do contêiner, distribuição de peso dentro do contêiner, carregamento completo de grupos de caixas, agrupamento ou separação de caixas dentro do contêiner, caixas com prioridade, manuseio de caixas, e complexidade do padrão de empacotamento (veja Tabela 1). Neste trabalho, em particular, apenas as três primeiras exigências práticas citadas são consideradas, agora no contexto dos Problemas de Roteamento de Veículos.

As *restrições de estabilidade* (veja Seção 2.3.1) do carregamento podem ser divididas em duas componentes, vertical e horizontal. A estabilidade vertical (ou “estática”) ocorre apenas em problemas tridimensionais e está relacionada à capacidade das caixas em um carregamento resistirem à atuação da aceleração da gravidade sobre seus corpos, i.e., de não se deslocarem em relação ao eixo  $z$ . Esta componente impede que as caixas caiam umas sobre as outras ou sobre o piso do veículo. Por outro lado, a estabilidade horizontal (ou “dinâmica”) ocorre tanto em problemas bidimensionais quanto em problemas tridimensionais,

e está relacionada à capacidade dos itens em um carregamento de resistirem à atuação da inércia dos seus próprios corpos, isto é, de não se deslocarem em relação aos eixos  $x$  e  $y$ . Esta componente impede que os itens se choquem uns contra os outros dentro do veículo. Com base no trabalho de Junqueira *et al.* (2012b), apenas restrições para a estabilidade vertical são derivadas para os problemas integrados a seguir, mas restrições para a estabilidade horizontal podem ser também facilmente obtidas. Assume-se que os carregamentos devem ser 100% verticalmente estáveis, i.e., a área da face inferior de cada caixa deve estar completamente suportada pela face superior de uma ou mais caixas colocadas imediatamente abaixo dela (i.e., em contato direto com ela), ou pelo piso do veículo. A Figura 11 a seguir ilustra a área da face superior que uma caixa  $i$ , colocada na posição  $(x, y, z)$ , pode “oferecer” para suportar a face inferior de uma outra caixa  $j$ , colocada na posição  $(x'', y'', z'')$ , e imediatamente acima da caixa  $i$ .

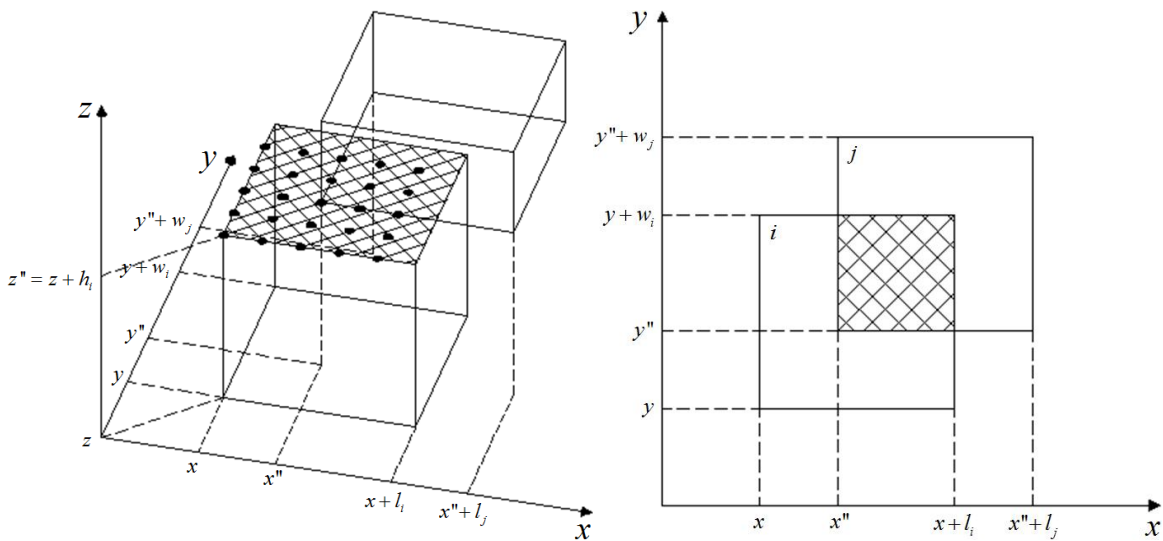


Figura 11. Posições relativas e área de contato de duas caixas dentro do veículo.

As *restrições de empilhamento* (veja Seção 2.3.1) estão relacionadas ao número máximo de caixas que podem ser empilhadas umas sobre as outras, ou, mais genericamente, à pressão total exercida sobre a face superior de uma dada caixa. Estas restrições, assim como as restrições de estabilidade vertical, ocorrem apenas em problemas tridimensionais. Estas restrições impedem que mercadorias sejam danificadas devido à deformações das embalagens protetoras. Com base no trabalho de Junqueira *et al.* (2012b), restrições de empilhamento são derivadas para os problemas integrados a seguir. Para tal, seja  $p_i$  o peso de uma caixa do tipo  $i$ , e  $\sigma_i$  a pressão máxima admissível (dada em termos de unidades de força por unidade de área) que cada ponto da face superior da caixa do tipo  $i$



pode suportar. Caixas *frágeis*, i.e., que não podem ter nenhuma outra caixa empilhada sobre elas, são um caso particular da situação descrita anteriormente. Para tratar este caso basta definir  $\sigma_i = 0$  para uma dada caixa do tipo  $i$  que seja frágil. A Figura 12 a seguir ilustra caixas quaisquer, colocadas acima de uma caixa maior tomada como referência, e que exercem pressão sobre pontos da face superior desta caixa. Admite-se aqui que qualquer ponto da face superior da caixa  $i$  suporta a mesma pressão admissível  $\sigma_i$ , e que a pressão exercida por caixas  $j$  quaisquer é uniformemente distribuída sobre a área  $l_j \cdot w_j$  da sua face inferior.

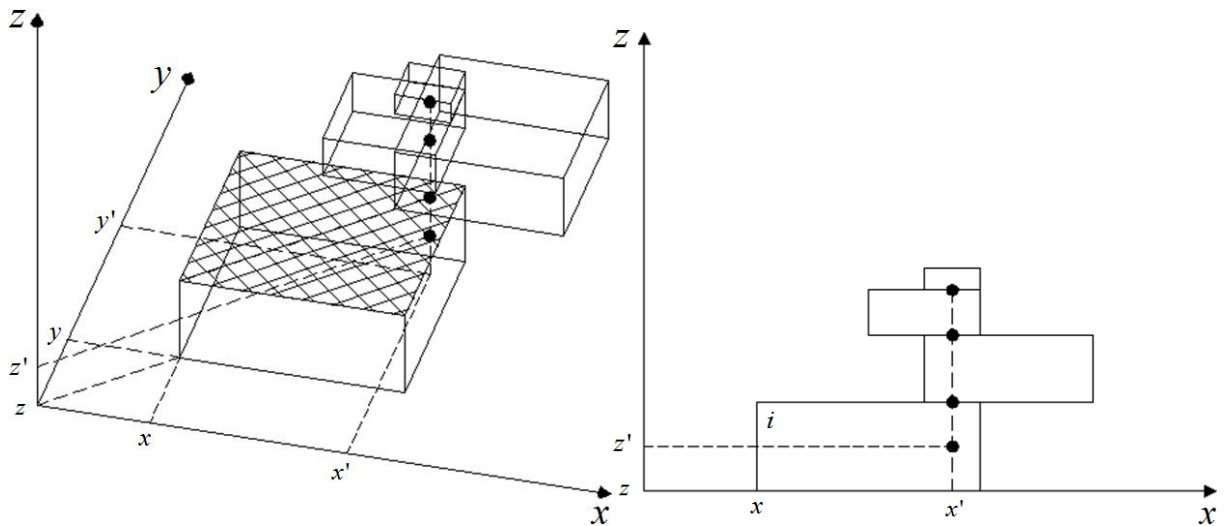


Figura 12. Conjunto de caixas empilhadas sobre uma caixa de referência.

As *restrições de múltiplos destinos* (veja Seção 2.3.1) estão relacionadas a situações em que conjuntos de caixas são requeridos por clientes, e as caixas de cada conjunto devem estar colocadas próximas umas às outras dentro do veículo. O padrão de empacotamento, portanto, deve levar em consideração o roteiro de entrega que cada veículo deve percorrer, em que a ordem de visita é inversa à ordem de carregamento (i.e., regra LIFO - *last in, first out*). Estas restrições impedem que um manuseio adicional e desnecessário seja incorrido quando cada cliente do roteiro é visitado, e, conseqüentemente, que uma quantidade adicional de tempo seja empregada descarregando e recarregando as caixas de clientes que são visitados posteriormente no roteiro. Estas restrições, assim como as restrições geométricas, ocorrem tanto em problemas bidimensionais quanto em problemas tridimensionais. Com base no trabalho de Junqueira *et al.* (2012a), restrições de múltiplos destinos são derivadas para os problemas integrados a seguir. Para tal, define-se o parâmetro  $\delta_{ik} \in [0, L]$  como o alcance máximo ou “comprimento flexível” (dado em termos de unidades

de comprimento do veículo) que um funcionário possui para empacotar manualmente os itens do tipo  $i$  requeridos pelo cliente  $k$  dentro do veículo (em alguns casos é possível ter  $\delta_{ik} = \delta_i = \delta$ , para todo  $i$  e todo  $k$ ). O conjunto de itens de um dado cliente (visitado posteriormente no roteiro), uma vez carregado, define uma fração do comprimento do veículo necessária para o empacotamento destes itens, e deixa para trás alguns espaços vazios que podem ser ocupados por itens de outros clientes (visitados anteriormente no roteiro). O comprimento flexível determina quantas unidades desta fração, para além da frente de carregamento, um funcionário pode utilizar para empacotar os itens de um cliente visitado anteriormente no roteiro. A frente de carregamento é definida após os conjuntos de itens de clientes visitados posteriormente no roteiro estarem carregados no veículo. Por exemplo, se  $\delta_{ik} = 0$  (i.e., a situação mais conservadora possível, ou menos flexível), um funcionário não pode aproveitar nenhum espaço vazio deixado para trás pelos itens de clientes já empacotados para empacotar itens de outros clientes. Por outro lado, se  $\delta_{ik} = L$  (ou se  $\delta_{ik} = \infty$ , i.e., a situação menos conservadora possível, ou mais flexível), um funcionário pode aproveitar qualquer espaço vazio deixado para trás pelos itens de clientes já empacotados para empacotar itens de outros clientes. Note que este parâmetro pode ser também representativo do alcance do braço de um funcionário ou então de algum equipamento utilizado para carregar/descarregar os itens, como por exemplo, uma empilhadeira. No caso de problemas tridimensionais, este parâmetro tem uma importância adicional, que é a de preservar a integridade das caixas, ao impedir que um funcionário indevidamente se apoie ou suba em caixas de clientes já empacotadas para empacotar ou desempacotar caixas de outros clientes. A Figura 13 (à esquerda) a seguir ilustra a frente de carregamento após o empacotamento das caixas do cliente  $k$ . A partir desta frente de carregamento um funcionário é permitido adentrar até  $\delta_{ik}$  unidades ao longo do comprimento do veículo de modo a empacotar as caixas do próximo cliente  $k+1$ . As caixas deste cliente, uma vez empacotadas, definem uma nova frente de carregamento, a partir da qual um funcionário é permitido adentrar até  $\delta_{i(k+1)}$  unidades ao longo do comprimento do veículo de modo a empacotar as caixas do próximo cliente  $k+2$  (Figura 13 à direita).

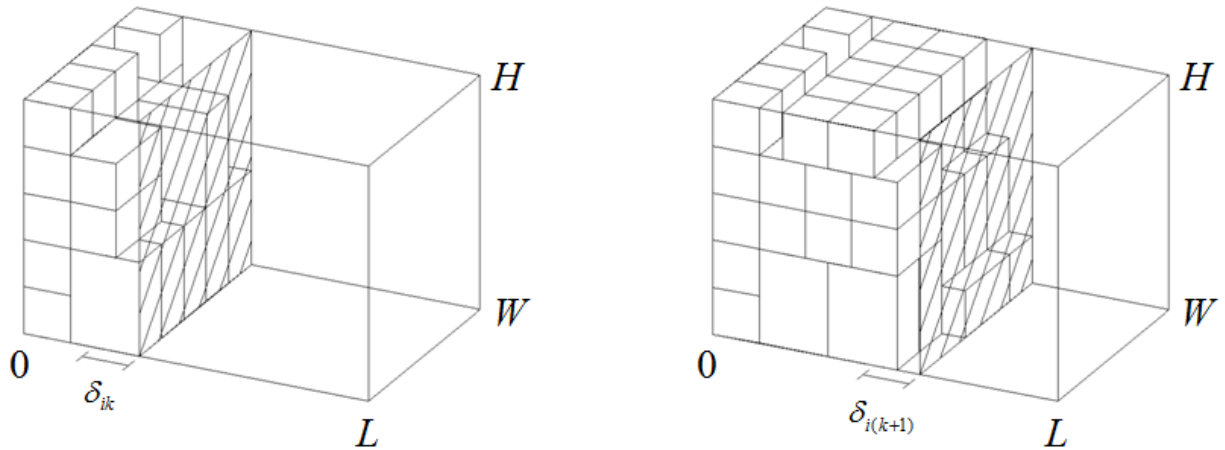


Figura 13. Alcance máximo (“comprimento flexível”) do funcionário.

### 3.5 FORMULAÇÕES PARA O 2L-TSP

Formulações para o 2L-TSP são obtidas diretamente da formulação para o TSP. A Figura 14 ilustra uma abstração de uma solução conceitual obtida com a formulação (1)-(5). Neste exemplo foi considerado um veículo com comprimento  $L = 24$  e largura  $W = 8$ , e três clientes com demandas  $D_2 = D_3 = D_4 = 52$ . O roteiro de visitas é 1-2-3-4-1, como ilustrado na Figura 14 (note que as cores também diferenciam os clientes). Note que um padrão de empacotamento como o ilustrado nesta figura é pouco provável do ponto de vista do empacotamento bidimensional, pois considera que as cargas acomodam-se perfeitamente de acordo com a forma do veículo.

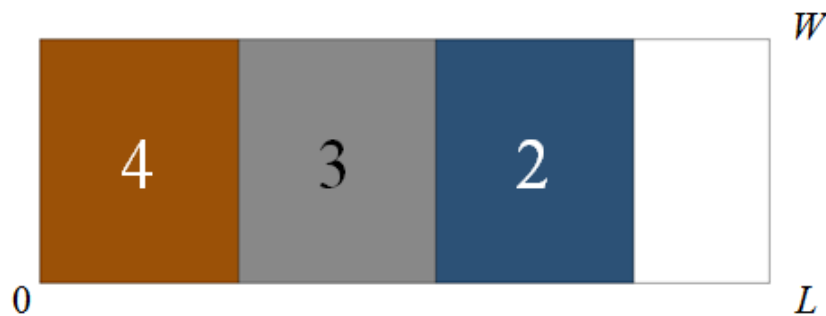


Figura 14. Abstração de uma solução conceitual obtida com a formulação (1)-(5).

Para estender a formulação (1)-(5) para considerar a existência de pedidos de clientes formados por itens bidimensionais, sejam as variáveis de decisão (de empacotamento)  $a_{xy}^{ikr}$  do modelo definidas como a seguir:

$a_{xy}^{ikt}$ : variável binária, que é igual a 1 se a peça do tipo  $i$  requerida pelo cliente  $k$  visitado na posição  $t$  pelo veículo, é empacotada com seu canto inferior esquerdo na posição  $(x, y)$ , tal que  $i \in M$ ,  $k \in N \setminus \{1\}$ ,  $t \in N \setminus \{n\}$ ,  $x \in X_i$  e  $y \in Y_i$ ; caso contrário, ela é igual a 0;

### Incorporando restrições geométricas

A formulação para o 2L-TSP, considerando apenas restrições geométricas, é composta pela função objetivo (1) e as expressões (2), (3), (4) e (5), além das seguintes expressões:

$$\sum_{i \in M} \sum_{x \in X_i} \sum_{y \in Y_i} a_{xy}^{ikt} = \sum_{i \in M} \sum_{l \in N} b_{ik} \cdot d_{lk}^t \quad k \in N \setminus \{1\}, t \in N \setminus \{n\} \quad (13)$$

$$\sum_{i \in M} \sum_{k \in N \setminus \{1\}} \sum_{t \in N \setminus \{n\}} \sum_{x \in X_i, x' - l_i + 1 \leq x \leq x'} \sum_{y \in Y_i, y' - w_i + 1 \leq y \leq y'} a_{xy}^{ikt} \leq 1 \quad x' \in X, y' \in Y \quad (14)$$

$$\sum_{t \in N \setminus \{n\}} \sum_{x \in X_i} \sum_{y \in Y_i} a_{xy}^{ikt} = b_{ik} \quad i \in M, k \in N \setminus \{1\} \quad (15)$$

$$a_{xy}^{ikt} \in \{0, 1\} \quad i \in M, k \in N \setminus \{1\}, t \in N \setminus \{n\} \\ x \in X_i, y \in Y_i \quad (16)$$

Na formulação (1)-(5) com as restrições (13)-(16), as restrições (13) garantem o acoplamento das estruturas de roteamento e de carregamento, i.e., se o veículo visita o cliente  $k$  na posição  $t$  após visitar o cliente  $l$ , então todas as peças requeridas pelo cliente  $k$  devem ser desempacotadas das posições  $(x, y)$  ocupadas por elas no veículo. Note que não é preciso considerar o depósito, i.e.,  $k \in N \setminus \{1\}$ , pois não há nenhuma demanda associada, nem a última posição no roteiro, i.e.,  $t \in N \setminus \{n\}$ , pois se refere ao próprio depósito. As restrições (14) garantem que as peças não se sobreponham dentro do veículo, i.e., se há uma peça que ocupa o ponto  $(x', y')$  (não considerando os pontos das bordas direita e de cima) no veículo, então apenas esta peça contém este ponto. As restrições (15) garantem o atendimento das demandas dos clientes e as restrições (16) definem o domínio das variáveis de decisão.

A Figura 15 ilustra, para o mesmo exemplo da Figura 14, uma solução ótima obtida com a formulação (1)-(5) e as restrições (13)-(16). Neste exemplo foi considerado o mesmo veículo com comprimento  $L = 24$  e largura  $W = 8$ , e os mesmos três clientes com demandas  $D_2 = D_3 = D_4 = 52$ . Estas demandas são agora compostas de quatro tipos de peças

retangulares (por simplicidade, assume-se que as peças têm orientação fixa, i.e., as peças não podem girar) com dimensões  $(l_1, w_1) = (2, 3)$ ,  $(l_2, w_2) = (4, 2)$ ,  $(l_3, w_3) = (4, 3)$  e  $(l_4, w_4) = (6, 2)$ , e quantidades  $b_{12} = 4$ ,  $b_{22} = 2$ ,  $b_{32} = 1$ ,  $b_{42} = 0$ ,  $b_{13} = 0$ ,  $b_{23} = 2$ ,  $b_{33} = 1$ ,  $b_{43} = 2$ ,  $b_{14} = 2$ ,  $b_{24} = 2$ ,  $b_{34} = 1$  e  $b_{44} = 1$ . O roteiro de visitas não é alterado, permanecendo 1-2-3-4-1, como no exemplo ilustrado na Figura 14. Note, no entanto, que com apenas estas restrições, para um dado roteiro, o padrão de empacotamento obtido pode não favorecer um fácil descarregamento do conjunto de peças requerido por cada cliente, quando o mesmo é visitado (assumindo que a porta do veículo se encontra no segmento de reta entre as coordenadas  $(L, 0)$  e  $(L, W)$  do sistema de coordenadas). Por exemplo, veja que peças dos clientes “3” e “4” obstruem a saída de peças do cliente “2”, o primeiro a ser visitado pelo veículo.

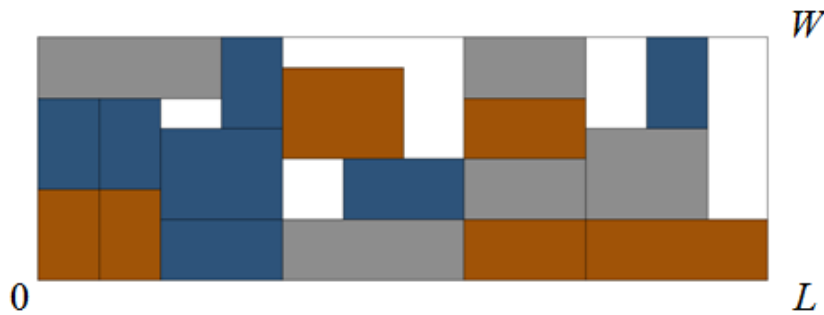


Figura 15. Exemplo de uma solução obtida com a formulação (1)-(5) e as restrições (13)-(16).

### Incorporando restrições de múltiplos destinos

Para contornar esta situação, sejam ainda as variáveis  $L'_k$ , definidas como variáveis reais auxiliares que indicam o comprimento necessário para empacotar todas as peças do cliente  $k$  mais as peças de outros clientes visitados posteriormente no roteiro (note que estas variáveis definem a frente de carregamento) dentro do veículo, e sejam  $M_1, M_2, M_3$  números suficientemente grandes. A formulação para o 2L-TSP, considerando restrições de múltiplos destinos, além de restrições geométricas, é composta pela função objetivo (1) e as expressões (2)-(5) e (13)-(16), além das seguintes expressões:

$$(x + l_i) \cdot \sum_{t \in N \setminus \{i\}} a_{xy}^{ikt} \leq L'_k \quad \begin{array}{l} i \in M, k \in N \setminus \{1\} \\ x \in X_i, y \in Y_i \end{array} \quad (17)$$

$$L'_t - \delta_{ik} \leq x \cdot \sum_{t \in N \setminus \{n\}} a_{xy}^{ikt} + (1 - \sum_{t \in N \setminus \{n\}} a_{xy}^{ikt}) \cdot M_1 + (1 - \sum_{t \in N \setminus \{n\}} d_{kl}^t) \cdot M_2 \quad \begin{array}{l} i \in M, k, l \in N \setminus \{1\} \\ x \in X_i, y \in Y_i \end{array} \quad (18)$$

$$L'_t \leq L'_k + (1 - \sum_{t \in N \setminus \{n\}} d_{kl}^t) \cdot M_3 \quad k, l \in N \setminus \{1\} \quad (19)$$

$$L'_k \leq L \quad k \in N \setminus \{1\} \quad (20)$$

Na formulação (1)-(5) com as restrições (13)-(16) e (17)-(20), as restrições (17)-(20) garantem um descarregamento mais fácil das peças quando o respectivo cliente é visitado, i.e., elas garantem que se o veículo visita o cliente  $k$  na posição  $t$  após visitar o cliente  $l$ , então as peças requeridas pelo cliente  $k$  devem ser empacotadas dentro dos limites  $L'_t - \delta_{ik}$  (pelas restrições (18)) e  $L'_k$  (pelas restrições (17)), e o comprimento necessário para empacotar todas as peças requeridas pelo cliente  $k$  deve estar dentro dos limites  $L'_t$  (pelas restrições (19)) e  $L$  (pelas restrições (20)). A Figura 16 ilustra, para o mesmo exemplo da Figura 14, uma solução ótima obtida com a formulação (1)-(5) e as restrições (13)-(16) e (17)-(20). O valor do comprimento flexível foi definido como  $\delta_{ik} = l_i$ ,  $i \in M$ ,  $k \in N \setminus \{1\}$ . O roteiro de visitas é agora alterado para 1-4-3-2-1. Note que as peças estão agora empacotadas de maneira mais conveniente, de modo a facilitar o descarregamento dos conjuntos de peças requeridos pelos clientes.

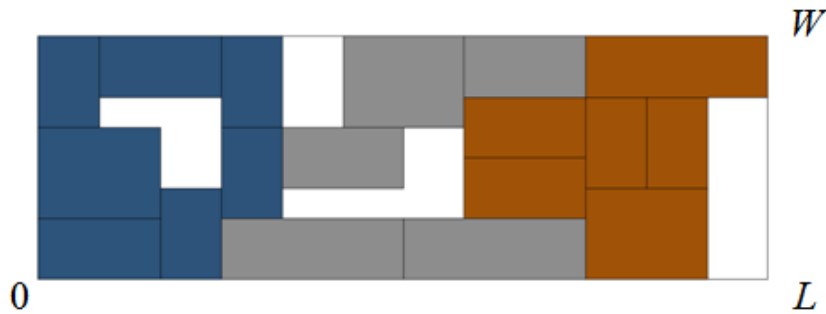


Figura 16. Exemplo de uma solução obtida com a formulação (1)-(5) e as restrições (13)-(16) e (17)-(20).

### Formulação completa para o 2L-TSP

A seguir é apresentada a formulação completa para o 2L-TSP. Esta formulação possui  $|N|^3 + (|N|-1)^2 \cdot \sum_{i=1}^m |X_i| \cdot |Y_i|$  variáveis binárias e  $2 \cdot |N| + (|N|-1) + (|N|-1)^2 + |X| \cdot |Y| + |M| \cdot (|N|-1) + (|N|-1) \cdot \sum_{i=1}^m |X_i| \cdot |Y_i| + (|N|-1)^2 \cdot \sum_{i=1}^m |X_i| \cdot |Y_i| + (|N|-1)^2 + (|N|-1)$  restrições.

$$\min \sum_{(k,l) \in A} \sum_{t \in N} c_{kl} \cdot d_{kl}^t \quad (1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{l \in N} \sum_{t \in N} d_{kl}^t = 1 \quad k \in N \quad (2)$$

$$\sum_{k \in N} \sum_{t \in N} d_{kl}^t = 1 \quad l \in N \quad (3)$$

$$\sum_{l \in N} \sum_{t \in N \setminus \{1\}} t \cdot d_{kl}^t - \sum_{p \in N} \sum_{t \in N} t \cdot d_{pk}^t = 1 \quad k \in N \setminus \{1\} \quad (4)$$

$$d_{kl}^t \in \{0,1\} \quad (k,l) \in A, t \in N \quad (5)$$

$$\sum_{i \in M} \sum_{x \in X_i} \sum_{y \in Y_i} a_{xy}^{ikt} = \sum_{i \in M} \sum_{l \in N} b_{ik} \cdot d_{lk}^t \quad k \in N \setminus \{1\}, t \in N \setminus \{n\} \quad (13)$$

$$\sum_{i \in M} \sum_{k \in N \setminus \{1\}} \sum_{t \in N \setminus \{n\}} \sum_{\{x \in X_i: x' - l_i + 1 \leq x \leq x'\}} \sum_{\{y \in Y_i: y' - w_i + 1 \leq y \leq y'\}} a_{xy}^{ikt} \leq 1 \quad x' \in X, y' \in Y \quad (14)$$

$$\sum_{t \in N \setminus \{n\}} \sum_{x \in X_i} \sum_{y \in Y_i} a_{xy}^{ikt} = b_{ik} \quad i \in M, k \in N \setminus \{1\} \quad (15)$$

$$a_{xy}^{ikt} \in \{0,1\} \quad i \in M, k \in N \setminus \{1\}, t \in N \setminus \{n\} \quad (16)$$

$$(x + l_i) \cdot \sum_{t \in N \setminus \{n\}} a_{xy}^{ikt} \leq L_k \quad i \in M, k \in N \setminus \{1\} \quad (17)$$

$$L_i - \delta_{ik} \leq x \cdot \sum_{t \in N \setminus \{n\}} a_{xy}^{ikt} + (1 - \sum_{t \in N \setminus \{n\}} a_{xy}^{ikt}) \cdot M_1 + (1 - \sum_{t \in N \setminus \{n\}} d_{kl}^t) \cdot M_2 \quad i \in M, k, l \in N \setminus \{1\} \quad (18)$$

$$L_i \leq L_k + (1 - \sum_{t \in N \setminus \{n\}} d_{kl}^t) \cdot M_3 \quad k, l \in N \setminus \{1\} \quad (19)$$

$$L_k \leq L \quad k \in N \setminus \{1\} \quad (20)$$

### 3.6 FORMULAÇÕES PARA O 2L-CVRP

Formulações para o 2L-CVRP podem ser obtidas diretamente da formulação para o CVRP ou das formulações para o 2L-TSP. A Figura 17 ilustra uma abstração de uma solução conceitual obtida com a formulação (6)-(12). Neste exemplo foram considerados dois veículos com capacidade  $L_v \cdot W_v = 12 \cdot 8 = 96$  cada, e quatro clientes com demandas  $D_2 = 46$ ,  $D_3 = 50$ ,  $D_4 = 34$  e  $D_5 = 26$ . Os roteiros de visitas são 1-2-3-1 e 1-4-5-1, como ilustrado na Figura 17 (note que as cores também diferenciam os clientes). Note que padrões de empacotamento como os ilustrados nesta figura são pouco prováveis do ponto de vista do

empacotamento bidimensional, pois consideram que as cargas acomodam-se perfeitamente de acordo com a forma dos veículos.

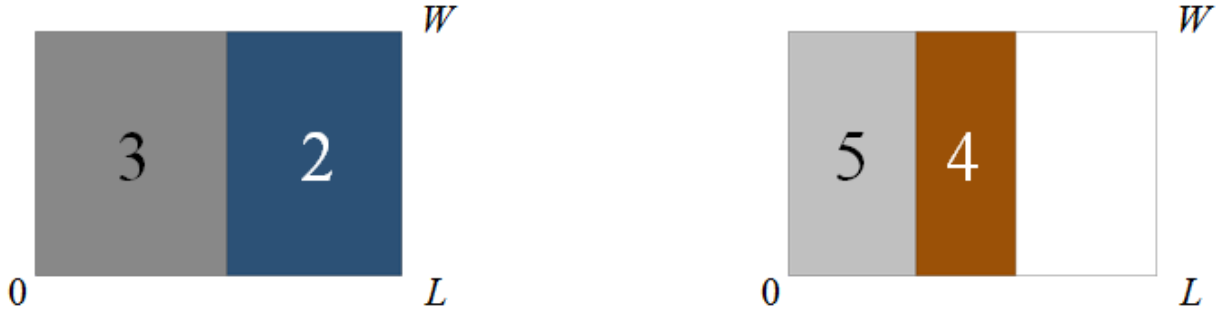


Figura 17. Abstração de uma solução conceitual obtida com a formulação (6)-(12).

Para estender a formulação (6)-(12) para considerar a existência de pedidos de clientes formados por itens bidimensionais, seja  $V$  o conjunto de veículos idênticos com dimensões  $(L_v, W_v)$ , com as quais se obtém a capacidade de cada veículo, dada em termos de unidades de área,  $C_v = L_v \cdot W_v$ . Sejam ainda as variáveis de decisão (de empacotamento)  $a_{xy}^{iktv}$  do modelo definidas como a seguir:

$a_{xy}^{iktv}$ : variável binária, que é igual a 1 se a peça do tipo  $i$  requerida pelo cliente  $k$  visitado na posição  $t$  pelo veículo  $v$ , é empacotada com seu canto inferior esquerdo na posição  $(x, y)$ , tal que  $i \in M$ ,  $k \in N \setminus \{1\}$ ,  $t \in N \setminus \{n\}$ ,  $v \in V$ ,  $x \in X_{iv}$  e  $y \in Y_{iv}$ ; caso contrário, ela é igual a 0;

### Incorporando restrições geométricas

A formulação para o 2L-CVRP, considerando apenas restrições geométricas, é composta pela função objetivo (6) e as expressões (7), (8), (9), (10) e (12), além das seguintes expressões:

$$\sum_{i \in M} \sum_{k \in N \setminus \{1\}} \sum_{t \in N} \sum_{l \in N \setminus \{1\}} l_i \cdot w_i \cdot b_{ik} \cdot d_{kl}^{tv} \leq L_v \cdot W_v \quad v \in V \quad (21)$$

$$\sum_{i \in M} \sum_{x \in X_{iv}} \sum_{y \in Y_{iv}} a_{xy}^{iktv} = \sum_{i \in M} \sum_{l \in N} b_{ik} \cdot d_{lk}^{tv} \quad k \in N \setminus \{1\}, t \in N \setminus \{n\}, v \in V \quad (22)$$

$$\sum_{i \in M} \sum_{k \in N \setminus \{1\}} \sum_{t \in N \setminus \{n\}} \sum_{\{x \in X_{iv} : x' - l_i + 1 \leq x \leq x'\}} \sum_{\{y \in Y_{iv} : y' - w_i + 1 \leq y \leq y'\}} a_{xy}^{iktv} \leq 1 \quad x' \in X_v, y' \in Y_v, v \in V \quad (23)$$



$$\sum_{t \in N \setminus \{n\}} \sum_{v \in V} \sum_{x \in X_{iv}} \sum_{y \in Y_{iv}} a_{xy}^{iktv} = b_{ik} \quad i \in M, k \in N \setminus \{1\} \quad (24)$$

$$a_{xy}^{iktv} \in \{0,1\} \quad i \in M, k \in N \setminus \{1\}, t \in N \setminus \{n\} \\ x \in X_{iv}, y \in Y_{iv}, v \in V \quad (25)$$

Na formulação (6)-(10) e (12) com as restrições (21)-(25), as restrições (21) substituem as restrições (11) para considerar os diferentes tipos de peças e suas áreas (note que  $\sum_{i \in M} l_i \cdot w_i \cdot b_{ik} = D_k$ ,  $k \in N \setminus \{1\}$ ). No entanto, observe que estas restrições se tornaram redundantes após a incorporação das restrições geométricas (compostas pelas restrições (23) e outras restrições em que os conjuntos  $X_{iv}$  e  $Y_{iv}$  são utilizados), que estão agora embutidas nesta formulação. No entanto, note que, mesmo redundantes, as restrições (21) ainda são desigualdades válidas para o problema e podem ser úteis na resolução dos modelos. As restrições (22) garantem o acoplamento das estruturas de roteamento e de carregamento, i.e., se o veículo  $v$  visita o cliente  $k$  na posição  $t$  após visitar o cliente  $l$ , então todas as peças requeridas pelo cliente  $k$  devem ser desempacotadas das posições  $(x, y)$  ocupadas por elas naquele veículo. Note que não é preciso considerar o depósito, i.e.,  $k \in N \setminus \{1\}$ , pois não há nenhuma demanda associada, nem a última posição no roteiro, i.e.,  $t \in N \setminus \{n\}$ , pois pode se referir ao próprio depósito, na hipótese de apenas um veículo ser utilizado. As restrições (23) garantem que as peças não se sobreponham dentro de cada veículo, i.e., se há uma peça que ocupa o ponto  $(x', y')$  (não considerando os pontos das bordas direita e de cima) no veículo  $v$ , então apenas esta peça contém este ponto. As restrições (24) garantem o atendimento das demandas dos clientes e as restrições (25) definem o domínio das variáveis de decisão. É importante notar que, mesmo se tratando de frota homogênea, não é possível definir as variáveis de decisão  $a_{xy}^{iktv}$  sem o índice  $v$ , pois embora os padrões normais (combinações cônicas) sejam iguais para todos os veículos, os padrões de empacotamento resultantes são diferentes.

A Figura 18 ilustra, para o mesmo exemplo da Figura 17, uma solução ótima obtida com a formulação (6)-(10) e (12) e as restrições (21)-(25). Neste exemplo foram considerados os mesmos dois veículos com capacidade  $L_v \cdot W_v = 96$  cada, e os mesmos quatro clientes com demandas  $D_2 = 46$ ,  $D_3 = 50$ ,  $D_4 = 34$  e  $D_5 = 26$ . Estas demandas são agora compostas de quatro tipos de peças retangulares (por simplicidade, assume-se que as peças têm orientação fixa, i.e., as peças não podem girar) com dimensões  $(l_1, w_1) = (2, 3)$ ,

$(l_2, w_2) = (4, 2)$ ,  $(l_3, w_3) = (4, 3)$  e  $(l_4, w_4) = (6, 2)$ , e quantidades  $b_{12} = 1$ ,  $b_{22} = 2$ ,  $b_{32} = 0$ ,  $b_{42} = 2$ ,  $b_{13} = 3$ ,  $b_{23} = 1$ ,  $b_{33} = 1$ ,  $b_{43} = 1$ ,  $b_{14} = 1$ ,  $b_{24} = 2$ ,  $b_{34} = 1$ ,  $b_{44} = 0$ ,  $b_{15} = 1$ ,  $b_{25} = 1$ ,  $b_{35} = 1$  e  $b_{45} = 0$ . Os roteiros de visitas não são alterados, permanecendo 1-2-3-1 e 1-4-5-1, como no exemplo ilustrado na Figura 17. Note, no entanto, que com apenas estas restrições, para alguns roteiros, os padrões de empacotamento obtidos podem não favorecer um fácil descarregamento do conjunto de peças requerido por cada cliente, quando o mesmo é visitado (assumindo que a porta de cada veículo se encontra no segmento de reta entre as coordenadas  $(L, 0)$  e  $(L, W)$  do sistema de coordenadas). Por exemplo, veja que peças do cliente “3” obstruem a saída de peças do cliente “2”, o primeiro a ser visitado, em um dos veículos.

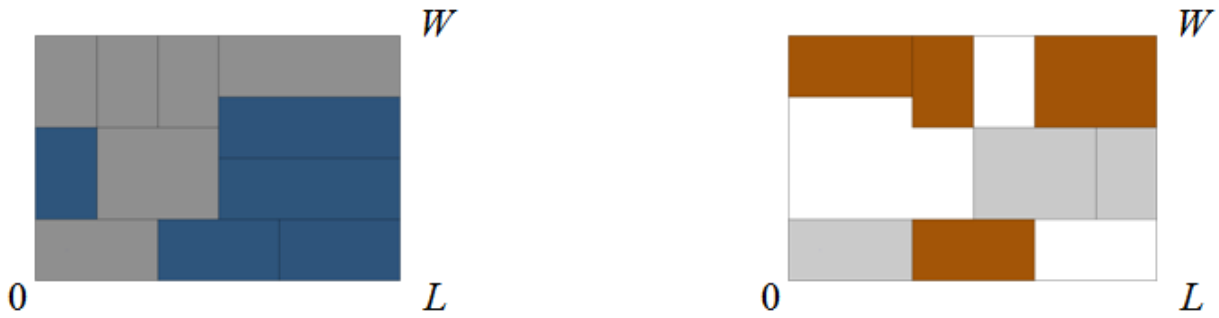


Figura 18. Exemplo de uma solução obtida com a formulação (6)-(10) e (12) e as restrições (21)-(25).

### Incorporando restrições de múltiplos destinos

Para contornar esta situação, sejam ainda as variáveis  $L'_{kv}$ , definidas como variáveis reais auxiliares que indicam o comprimento necessário para empacotar todas as peças do cliente  $k$  mais as peças de outros clientes visitados posteriormente no roteiro (note que estas variáveis definem a frente de carregamento) dentro do veículo  $v$ , e sejam  $M_1, M_2, M_3$  números suficientemente grandes. A formulação para o 2L-CVRP, considerando restrições de múltiplos destinos, além de restrições geométricas, é composta pela função objetivo (6) e as expressões (7)-(10), (12) e (21)-(25), além das seguintes expressões:

$$(x + l_i) \cdot \sum_{t \in N \setminus \{n\}} a_{xy}^{ikrv} \leq L'_{kv} \quad \begin{array}{l} i \in M, k \in N \setminus \{1\}, v \in V \\ x \in X_{iv}, y \in Y_{iv} \end{array} \quad (26)$$

$$L'_{lv} - \delta_{ik} \leq x \cdot \sum_{t \in N \setminus \{n\}} a_{xy}^{ikt} + (1 - \sum_{t \in N \setminus \{n\}} a_{xy}^{ikt}) \cdot M_1 + (1 - \sum_{t \in N \setminus \{n\}} d_{kl}^{tv}) \cdot M_2 \quad \begin{array}{l} i \in M, k, l \in N \setminus \{1\}, v \in V \\ x \in X_{iv}, y \in Y_{iv} \end{array} \quad (27)$$

$$L'_{lv} \leq L'_{kv} + (1 - \sum_{t \in N \setminus \{n\}} d_{kl}^{tv}) \cdot M_3 \quad k, l \in N \setminus \{1\}, v \in V \quad (28)$$

$$L'_{kv} \leq L_v \quad k \in N \setminus \{1\}, v \in V \quad (29)$$

Na formulação (6)-(10) e (12) com as restrições (21)-(25) e (26)-(29), as restrições (26)-(29) garantem um descarregamento mais fácil das peças quando o respectivo cliente é visitado, i.e., elas garantem que se o veículo  $v$  visita o cliente  $k$  na posição  $t$  após visitar o cliente  $l$ , então as peças requeridas pelo cliente  $k$  devem ser empacotadas dentro dos limites  $L'_{lv} - \delta_{ik}$  (pelas restrições (27)) e  $L'_{kv}$  (pelas restrições (26)), e o comprimento necessário para empacotar todas as peças requeridas pelo cliente  $k$  deve estar dentro dos limites  $L'_{lv}$  (pelas restrições (28)) e  $L_v$  (pelas restrições (29)). A Figura 19 ilustra, para o mesmo exemplo da Figura 17, uma solução ótima obtida com a formulação (6)-(10) e (12) e as restrições (21)-(25) e (26)-(29). O valor do comprimento flexível foi definido como  $\delta_{ik} = l_i$ ,  $i \in M$ ,  $k \in N \setminus \{1\}$ . Os roteiros de visitas são agora alterados para 1-2-5-1 e 1-4-3-1. Note que as peças estão agora empacotadas de maneira mais conveniente, de modo a facilitar o descarregamento dos conjuntos de peças requeridos pelos clientes.

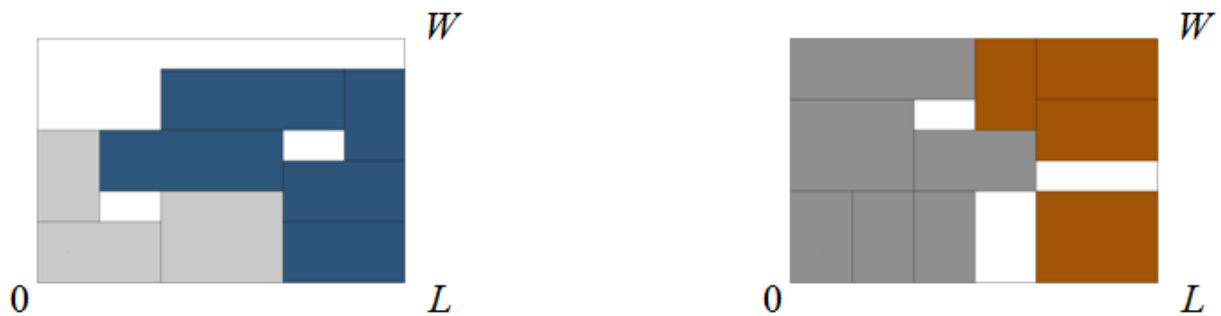


Figura 19. Exemplo de uma solução obtida com a formulação (6)-(10) e (12) e as restrições (21)-(25) e (26)-(29).

### Formulação completa para o 2L-CVRP

A seguir é apresentada a formulação completa para o 2L-CVRP. Esta formulação possui  $|N|^3 \cdot |V| + (|N|-1)^2 \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{v=1}^v |X_{iv}| \cdot |Y_{iv}|$  variáveis binárias e  $2 \cdot (|N|-1) + 2 \cdot |V| + 2 \cdot (|N|-1)^2 \cdot |V| + \sum_{v=1}^v |X_v| \cdot |Y_v| \cdot |Z_v| + |M| \cdot (|N|-1) + (|N|-1) \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{v=1}^v |X_{iv}| \cdot |Y_{iv}| + (|N|-1)^2 \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{v=1}^v |X_{iv}| \cdot |Y_{iv}| + (|N|-1)^2 \cdot |V| + (|N|-1) \cdot |V|$  restrições.

$$\min \sum_{(k,l) \in A} \sum_{t \in N} \sum_{v \in V} c_{kl} \cdot d_{kl}^{tv} \quad (6)$$

Sujeito a:

$$\sum_{l \in N} \sum_{t \in N} \sum_{v \in V} d_{kl}^{tv} = 1 \quad k \in N \setminus \{1\} \quad (7)$$

$$\sum_{l \in N} \sum_{t \in N \setminus \{1\}} \sum_{v \in V} t \cdot d_{kl}^{tv} - \sum_{p \in N} \sum_{t \in N} \sum_{v \in V} t \cdot d_{pk}^{tv} = 1 \quad k \in N \setminus \{1\} \quad (8)$$

$$\sum_{l \in N \setminus \{1\}} d_{ll}^{1v} \leq 1 \quad v \in V \quad (9)$$

$$\sum_{l \in N} d_{kl}^{(t+1)v} - \sum_{p \in N} d_{pk}^{tv} = 0 \quad k \in N \setminus \{1\}, t \in N \setminus \{n\}, v \in V \quad (10)$$

$$d_{kl}^{tv} \in \{0,1\} \quad (k,l) \in A, t \in N, v \in V \quad (12)$$

$$\sum_{i \in M} \sum_{k \in N \setminus \{1\}} \sum_{l \in N} \sum_{t \in N \setminus \{1\}} l_i \cdot w_i \cdot b_{ik} \cdot d_{kl}^{tv} \leq L_v \cdot W_v \quad v \in V \quad (21)$$

$$\sum_{i \in M} \sum_{x \in X_{iv}} \sum_{y \in Y_{iv}} a_{xy}^{iktv} = \sum_{i \in M} \sum_{l \in N} b_{ik} \cdot d_{lk}^{tv} \quad k \in N \setminus \{1\}, t \in N \setminus \{n\}, v \in V \quad (22)$$

$$\sum_{i \in M} \sum_{k \in N \setminus \{1\}} \sum_{t \in N \setminus \{n\}} \sum_{\{x \in X_{iv}: x'-l_i+1 \leq x \leq x'\}} \sum_{\{y \in Y_{iv}: y'-w_i+1 \leq y \leq y'\}} a_{xy}^{iktv} \leq 1 \quad x' \in X_v, y' \in Y_v, v \in V \quad (23)$$

$$\sum_{t \in N \setminus \{n\}} \sum_{v \in V} \sum_{x \in X_{iv}} \sum_{y \in Y_{iv}} a_{xy}^{iktv} = b_{ik} \quad i \in M, k \in N \setminus \{1\} \quad (24)$$

$$a_{xy}^{iktv} \in \{0,1\} \quad i \in M, k \in N \setminus \{1\}, t \in N \setminus \{n\} \quad (25)$$

$$(x+l_i) \cdot \sum_{t \in N \setminus \{n\}} a_{xy}^{iktv} \leq L'_{kv} \quad i \in M, k \in N \setminus \{1\}, v \in V \quad (26)$$

$$L'_{lv} - \delta_{ik} \leq x \cdot \sum_{t \in N \setminus \{n\}} a_{xy}^{iktv} + (1 - \sum_{t \in N \setminus \{n\}} a_{xy}^{iktv}) \cdot M_1 + (1 - \sum_{t \in N \setminus \{n\}} d_{kl}^{tv}) \cdot M_2 \quad i \in M, k, l \in N \setminus \{1\}, v \in V \quad (27)$$

$$L'_{lv} \leq L'_{kv} + (1 - \sum_{t \in N \setminus \{n\}} d_{kl}^{tv}) \cdot M_3 \quad k, l \in N \setminus \{1\}, v \in V \quad (28)$$

$$L'_{kv} \leq L_v \quad k \in N \setminus \{1\}, v \in V \quad (29)$$

### 3.7 FORMULAÇÕES PARA O 3L-TSP

Formulações para o 3L-TSP podem ser obtidas diretamente das formulações para o 2L-TSP. A Figura 20 ilustra uma abstração de uma solução conceitual obtida com a formulação (1)-(5). Neste exemplo foi considerado um veículo com comprimento  $L = 24$ , largura  $W = 8$  e altura  $H = 8$ , e três clientes com demandas  $D_2 = 368$ ,  $D_3 = 392$  e  $D_4 = 240$ .

O roteiro de visitas é 1-2-3-4-1, como ilustrado na Figura 20 (note que as cores também diferenciam os clientes). Note que um padrão de empacotamento como o ilustrado nesta figura é pouco provável do ponto de vista do empacotamento tridimensional, pois considera que as cargas acomodam-se perfeitamente de acordo com a forma do veículo.

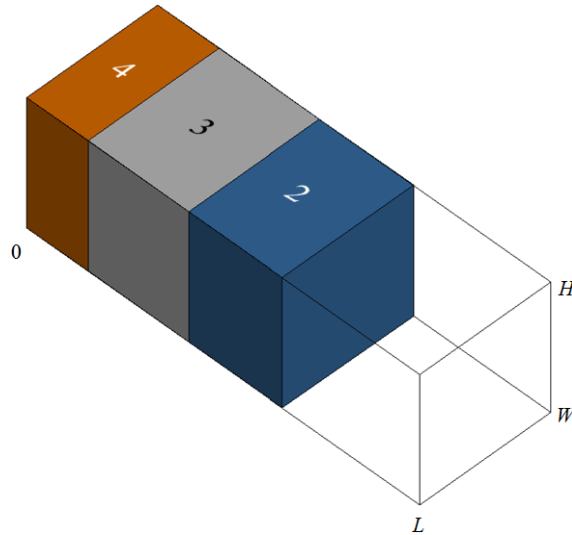


Figura 20. Abstração de uma solução conceitual obtida com a formulação (1)-(5).

Para estender a formulação (1)-(5) para considerar a existência de pedidos de clientes formados por itens tridimensionais, sejam as variáveis de decisão (de empacotamento)  $a_{xyz}^{ikt}$  do modelo definidas como a seguir:

$a_{xyz}^{ikt}$ : variável binária, que é igual a 1 se a caixa do tipo  $i$  requerida pelo cliente  $k$  visitado na posição  $t$  pelo veículo, é empacotada com seu canto inferior frontal esquerdo na posição  $(x, y, z)$ , tal que  $i \in M$ ,  $k \in N \setminus \{1\}$ ,  $t \in N \setminus \{n\}$ ,  $x \in X_i$ ,  $y \in Y_i$  e  $z \in Z_i$ ; caso contrário, ela é igual a 0;

### Incorporando restrições geométricas

A formulação para o 3L-TSP, considerando apenas restrições geométricas, é composta pela função objetivo (1) e as expressões (2), (3), (4) e (5), além das seguintes expressões:

$$\sum_{i \in M} \sum_{x \in X_i} \sum_{y \in Y_i} \sum_{z \in Z_i} a_{xyz}^{ikt} = \sum_{i \in M} \sum_{l \in N} b_{ik} \cdot d_{lk}^t \quad k \in N \setminus \{1\}, t \in N \setminus \{n\} \quad (30)$$

$$\sum_{i \in M} \sum_{k \in N \setminus \{1\}} \sum_{t \in N \setminus \{n\}} \sum_{\{x \in X_i: x' - l_i + 1 \leq x \leq x'\}} \sum_{\{y \in Y_i: y' - w_i + 1 \leq y \leq y'\}} \sum_{\{z \in Z_i: z' - h_i + 1 \leq z \leq z'\}} a_{xyz}^{ikt} \leq 1 \quad x' \in X, y' \in Y, z' \in Z \quad (31)$$

$$\sum_{t \in N \setminus \{n\}} \sum_{x \in X_i} \sum_{y \in Y_i} \sum_{z \in Z_i} a_{xyz}^{ikt} = b_{ik} \quad i \in M, k \in N \setminus \{1\} \quad (32)$$

$$a_{xyz}^{ikt} \in \{0, 1\} \quad i \in M, k \in N \setminus \{1\}, t \in N \setminus \{n\} \quad (33)$$

$$x \in X_i, y \in Y_i, z \in Z_i$$

Na formulação (1)-(5) com as restrições (30)-(33), as restrições (30) garantem o acoplamento das estruturas de roteamento e de carregamento, i.e., se o veículo visita o cliente  $k$  na posição  $t$  após visitar o cliente  $l$ , então todas as caixas requeridas pelo cliente  $k$  devem ser desempacotadas das posições  $(x, y, z)$  ocupadas por elas no veículo. Note que não é preciso considerar o depósito, i.e.,  $k \in N \setminus \{1\}$ , pois não há nenhuma demanda associada, nem a última posição no roteiro, i.e.,  $t \in N \setminus \{n\}$ , pois se refere ao próprio depósito. As restrições (31) garantem que as caixas não se sobreponham dentro do veículo, i.e., se há uma caixa que ocupa o ponto  $(x', y', z')$  (não considerando os pontos das faces superior, de trás e direita) no veículo, então apenas esta caixa contém este ponto. As restrições (32) garantem o atendimento das demandas dos clientes e as restrições (33) definem o domínio das variáveis de decisão.

A Figura 21 ilustra, para o mesmo exemplo da Figura 20, uma solução ótima obtida com a formulação (1)-(5) e as restrições (30)-(33). Neste exemplo foi considerado o mesmo veículo com comprimento  $L = 24$ , largura  $W = 8$  e altura  $H = 8$ , e os mesmos três clientes com demandas  $D_2 = 368$ ,  $D_3 = 392$  e  $D_4 = 240$ . Estas demandas são agora compostas de quatro tipos de caixas retangulares (por simplicidade, assume-se que as caixas têm orientação fixa, i.e., as caixas não podem girar) com dimensões  $(l_1, w_1, h_1) = (2, 3, 4)$ ,  $(l_2, w_2, h_2) = (4, 2, 4)$ ,  $(l_3, w_3, h_3) = (4, 3, 3)$  e  $(l_4, w_4, h_4) = (6, 2, 3)$ , e quantidades  $b_{12} = 4$ ,  $b_{22} = 4$ ,  $b_{32} = 3$ ,  $b_{42} = 1$ ,  $b_{13} = 2$ ,  $b_{23} = 4$ ,  $b_{33} = 3$ ,  $b_{43} = 3$ ,  $b_{14} = 4$ ,  $b_{24} = 0$ ,  $b_{34} = 1$  e  $b_{44} = 3$ . O roteiro de visitas não é alterado, permanecendo 1-2-3-4-1, como no exemplo ilustrado na Figura 20. Note, no entanto, que com apenas estas restrições, o padrão de empacotamento obtido não favorece um fácil descarregamento das caixas quando o respectivo cliente é visitado. Além disso, note que há caixas “flutuando” dentro do veículo, o que indica ausência de restrições que garantam a estabilidade vertical da carga. Neste contexto, em que a aceleração da gravidade atua sobre os corpos (i.e., as caixas), a importância destas últimas

restrições precede a das primeiras, pois não é concebível caixas flutuando ou o risco do carregamento “desmoronar”.

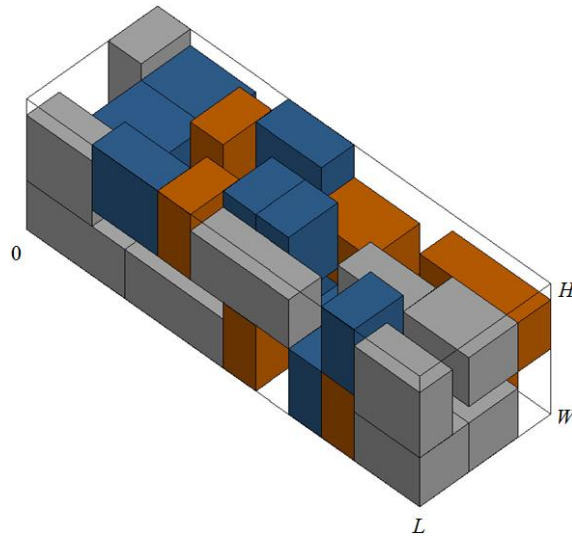


Figura 21. Exemplo de uma solução obtida com a formulação (1)-(5) e as restrições (30)-(33).

### Incorporando restrições de estabilidade vertical

A formulação para o 3L-TSP, considerando restrições de estabilidade vertical, além de restrições geométricas, é composta pela função objetivo (1) e as expressões (2)-(5) e (30)-(33), além da seguinte expressão:

$$\sum_{\{j \in M: z-h_j \geq 0\}} \sum_{l \in N \setminus \{1\}} \sum_{u \in N \setminus \{n\}} \sum_{\{x'' \in X_j: x-l_j+1 \leq x'' \leq x+l_i-1\}} \sum_{\{y'' \in Y_j: y-w_j+1 \leq y'' \leq y+w_i-1\}} L_{ij} \cdot W_{ij} \cdot a_{x''y''(z-h_j)}^{jlu} \geq l_i \cdot w_i \cdot a_{xyz}^{ikt}$$

$$\text{com} \begin{cases} L_{ij} = \min(x+l_i, x''+l_j) - \max(x, x'') \\ W_{ij} = \min(y+w_i, y''+w_j) - \max(y, y'') \end{cases} \quad \begin{matrix} i \in M, k \in N \setminus \{1\}, t \in N \setminus \{n\} \\ x \in X_i, y \in Y_i, z \in Z_i \setminus \{0\} \end{matrix} \quad (34)$$

Na formulação (1)-(5) com as restrições (30)-(33) e (34), as restrições (34) garantem que a área da face inferior de uma dada caixa (do tipo  $i$  requerida pelo cliente  $k$  visitado na posição  $t$ ) esteja completamente suportada pela face superior de uma ou mais caixas colocadas imediatamente abaixo dela (i.e., em contato direto com ela), ou pelo piso do veículo (veja Figura 11). A Figura 22 ilustra, para o mesmo exemplo da Figura 20, uma solução ótima obtida com a formulação (1)-(5) e as restrições (30)-(33) e (34). O roteiro de visitas é agora alterado para 1-4-3-2-1. Note, no entanto, que o padrão de empacotamento obtido, apesar de verticalmente estável, ainda não garante uma “solução completa” para o problema com base no roteiro de visitas do veículo. Por solução completa entende-se que, por se tratar de um roteiro de entregas, e, portanto, por envolver “perda de massa” ao longo do

mesmo, é preciso garantir que o padrão de empacotamento resultante após cada entrega seja também verticalmente estável. Em outras palavras, é preciso garantir que as caixas de um dado cliente que é visitado anteriormente no roteiro estejam sempre sobre outras caixas do mesmo cliente, ou sobre caixas de clientes que são visitados posteriormente no roteiro, ou sobre o piso do veículo. Por exemplo, veja que algumas caixas do cliente “4”, após serem descarregadas do veículo, tornam o padrão de empacotamento resultante instável.

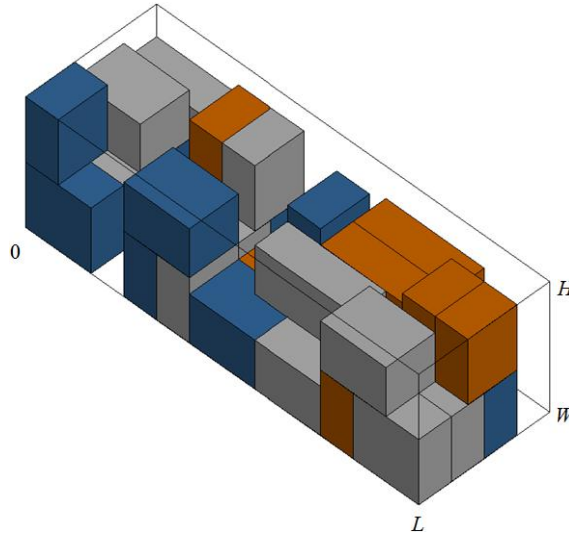


Figura 22. Exemplo de uma solução obtida com a formulação (1)-(5) e as restrições (30)-(33) e (34).

Uma maneira de obter um padrão de empacotamento que garanta uma solução completa para o problema consiste em reescrever as restrições (34), alterando no lado esquerdo da restrição o somatório  $\sum_{u \in N \setminus \{n\}}$  para  $\sum_{u \in N \setminus \{n\}; u \geq t}$ , com o que se obtém a expressão a seguir:

$$\sum_{\{j \in M: z - h_j \geq 0\}} \sum_{l \in N \setminus \{1\}} \sum_{\{u \in N \setminus \{n\}; u \geq t\}} \sum_{\{x'' \in X_j: x - l_j + 1 \leq x'' \leq x + l_j - 1\}} \sum_{\{y'' \in Y_j: y - w_j + 1 \leq y'' \leq y + w_j - 1\}} L_{ij} \cdot W_{ij} \cdot a_{x''y''(z-h_j)}^{jlu} \geq l_i \cdot w_i \cdot a_{xyz}^{ikt}$$

$$\text{com} \begin{cases} L_{ij} = \min(x + l_i, x'' + l_j) - \max(x, x'') \\ W_{ij} = \min(y + w_i, y'' + w_j) - \max(y, y'') \end{cases} \quad \begin{matrix} i \in M, k \in N \setminus \{1\}, t \in N \setminus \{n\} \\ x \in X_i, y \in Y_i, z \in Z_i \setminus \{0\} \end{matrix} \quad (35)$$

A Figura 23 ilustra, para o mesmo exemplo da Figura 20, uma solução ótima obtida com a formulação (1)-(5) e as restrições (30)-(33) e (35). O roteiro de visitas não é alterado, permanecendo 1-4-3-2-1. Note, no entanto, que com apenas estas restrições, para um dado roteiro, o padrão de empacotamento obtido, apesar de verticalmente estável e de garantir uma solução completa para o problema, pode não favorecer um fácil descarregamento do conjunto de caixas requerido por cada cliente, quando o mesmo é visitado (assumindo que a



porta do veículo se encontra na face entre as coordenadas  $(L,0,0)$ ,  $(L,W,0)$ ,  $(L,W,H)$  e  $(L,0,H)$  do sistema de coordenadas). Por exemplo, veja que caixas dos clientes “2” e “3” obstruem a saída de caixas do cliente “4”, o primeiro a ser visitado pelo veículo.

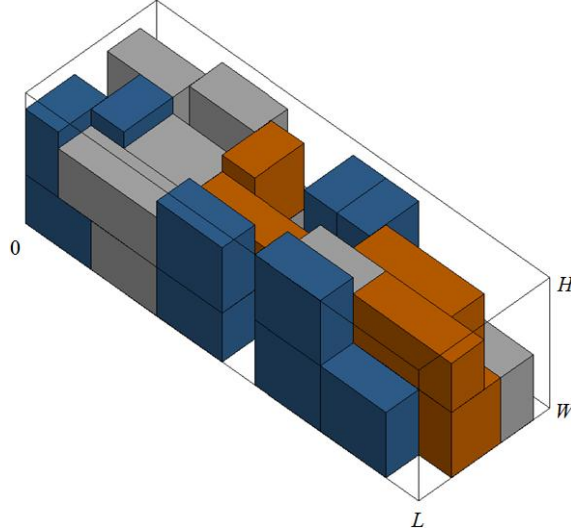


Figura 23. Exemplo de uma solução obtida com a formulação (1)-(5) e as restrições (30)-(33) e (35).

### Incorporando restrições de múltiplos destinos

Para contornar esta situação, sejam ainda as variáveis  $L'_k$ , definidas como variáveis reais auxiliares que indicam o comprimento necessário para empacotar todas as caixas do cliente  $k$  mais as caixas de outros clientes visitados posteriormente no roteiro (note que estas variáveis definem a frente de carregamento) dentro do veículo, e sejam  $M_1, M_2, M_3$  números suficientemente grandes. A formulação para o 3L-TSP, considerando restrições de múltiplos destinos, além de restrições geométricas e de estabilidade vertical, é composta pela função objetivo (1) e as expressões (2)-(5), (30)-(33) e (35), além das seguintes expressões:

$$(x + l_i) \cdot \sum_{t \in N \setminus \{n\}} a_{xyz}^{ikt} \leq L'_k \quad \begin{array}{l} i \in M, k \in N \setminus \{1\} \\ x \in X_i, y \in Y_i, z \in Z_i \end{array} \quad (36)$$

$$L'_l - \delta_{ik} \leq x \cdot \sum_{t \in N \setminus \{n\}} a_{xyz}^{ikt} + (1 - \sum_{t \in N \setminus \{n\}} a_{xyz}^{ikt}) \cdot M_1 + (1 - \sum_{t \in N \setminus \{n\}} d_{kl}^t) \cdot M_2 \quad \begin{array}{l} i \in M, k, l \in N \setminus \{1\} \\ x \in X_i, y \in Y_i, z \in Z_i \end{array} \quad (37)$$

$$L'_l \leq L'_k + (1 - \sum_{t \in N \setminus \{n\}} d_{kl}^t) \cdot M_3 \quad k, l \in N \setminus \{1\} \quad (38)$$

$$L'_k \leq L \quad k \in N \setminus \{1\} \quad (39)$$

Na formulação (1)-(5) com as restrições (30)-(33), (35) e (36)-(39), as restrições (36)-(39) garantem um descarregamento mais fácil das caixas quando o respectivo cliente é visitado, i.e., elas garantem que se o veículo visita o cliente  $k$  na posição  $t$  após visitar o cliente  $l$ , então as caixas requeridas pelo cliente  $k$  devem ser empacotadas dentro dos limites  $L_l - \delta_{ik}$  (pelas restrições (37)) e  $L_k'$  (pelas restrições (36)), e o comprimento necessário para empacotar todas as caixas requeridas pelo cliente  $k$  deve estar dentro dos limites  $L_l'$  (pelas restrições (38)) e  $L$  (pelas restrições (39)). A Figura 24 ilustra, para o mesmo exemplo da Figura 20, uma solução ótima obtida com a formulação (1)-(5) e as restrições (30)-(33), (35) e (36)-(39). O valor do comprimento flexível foi definido como  $\delta_{ik} = l_i$ ,  $i \in M$ ,  $k \in N \setminus \{1\}$ . O roteiro de visitas não é alterado, permanecendo 1-4-3-2-1. Note que as caixas estão agora empacotadas de maneira mais conveniente, de modo a facilitar o descarregamento dos conjuntos de caixas requeridos pelos clientes, além do carregamento estar estável verticalmente.

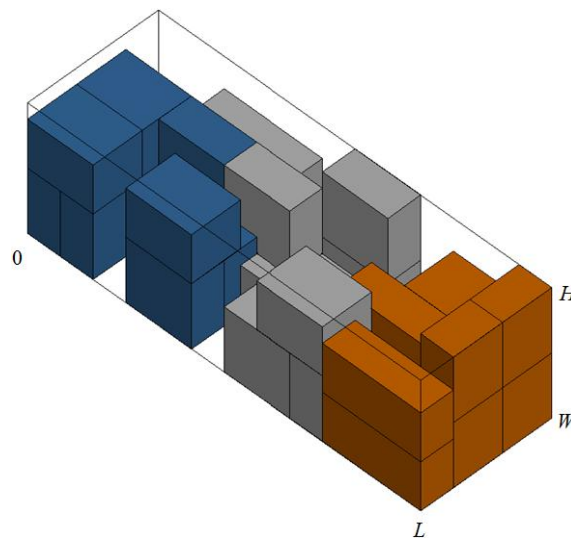


Figura 24. Exemplo de uma solução obtida com a formulação (1)-(5) e as restrições (30)-(33), (35) e (36)-(39).

### Incorporando restrições de empilhamento

As restrições de empilhamento (veja Figura 12) completam a modelagem do problema. A formulação para o 3L-TSP, considerando restrições de empilhamento, além de restrições geométricas, de estabilidade vertical e de múltiplos destinos, é composta pela função objetivo (1) e as expressões (2)-(5), (30)-(33), (35) e (36)-(39), além da seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j \in M} \sum_{l \in N \setminus \{1\}} \sum_{u \in N \setminus \{n\}} \sum_{\{x'' \in X_j; x' - l_j + 1 \leq x'' \leq x'\}} \sum_{\{y'' \in Y_j; y' - w_j + 1 \leq y'' \leq y'\}} \sum_{\{z'' \in Z_j; z' + 1 \leq z'' \leq H - h_j\}} \left( \frac{p_j}{l_j \cdot w_j} \right) \cdot a_{x''y''z''}^{jlu} \leq \\
& \sum_{i \in M} \sum_{k \in N \setminus \{1\}} \sum_{t \in N \setminus \{n\}} \sum_{\{x \in X_i; x' - l_i + 1 \leq x \leq x'\}} \sum_{\{y \in Y_i; y' - w_i + 1 \leq y \leq y'\}} \sum_{\{z \in Z_i; z' - h_i + 1 \leq z \leq z'\}} \sigma_i \cdot a_{xyz}^{ikt} \\
& x' \in X, y' \in Y, z' \in Z
\end{aligned} \tag{40}$$

Na formulação (1)-(5) com as restrições (30)-(33), (35), (36)-(39) e (40), as restrições (40) garantem que as caixas não são danificadas devido à pressão, i.e., garantem que, para um dado ponto  $(x', y', z')$  do veículo, se há uma caixa (do tipo  $i$  requerida pelo cliente  $k$  visitado na posição  $t$ ) que ocupa este ponto, então as demais caixas empilhadas sobre esta caixa (não necessariamente todas em contato direto com ela) não devem exceder a pressão máxima admissível  $\sigma_i$  que cada ponto da face superior da caixa pode suportar. A Figura 25 ilustra, para o mesmo exemplo da Figura 20, uma solução ótima obtida com a formulação (1)-(5) e as restrições (30)-(33), (35), (36)-(39) e (40). O valor do peso das caixas foi definido como  $p_i = l_i \cdot w_i \cdot h_i$ , e o valor da pressão máxima admissível foi definido como  $\sigma_i = h_i$ ,  $i \in M$  (por simplicidade, assume-se que todas as caixas possuem a mesma densidade e orientação fixa). O roteiro de visitas não é alterado, permanecendo 1-4-3-2-1. Note que não há uma diferença visual grande entre o padrão de empacotamento ilustrado nesta figura e o ilustrado na Figura 24, e isto se deve, em parte, à ausência de caixas frágeis neste exemplo.

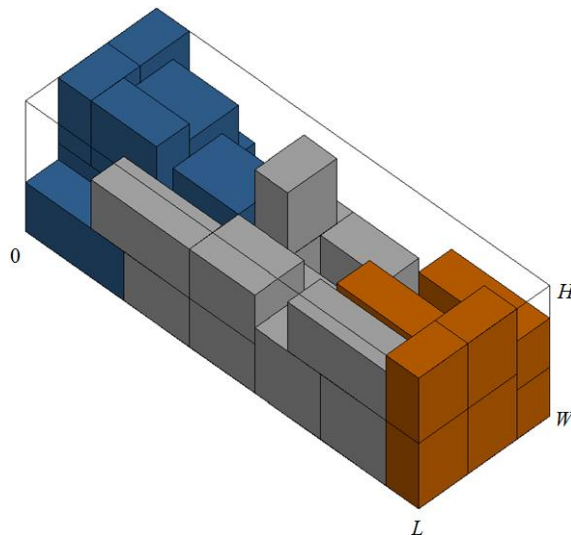


Figura 25. Exemplo de uma solução obtida com a formulação (1)-(5) e as restrições (30)-(33), (35), (36)-(39) e (40).

### Formulação completa para o 3L-TSP

A seguir é apresentada a formulação completa para o 3L-TSP. Esta formulação possui  $|N|^3 + (|N|-1)^2 \cdot \sum_{i=1}^m |X_i| \cdot |Y_i| \cdot |Z_i|$  variáveis binárias e  $2 \cdot |N| + (|N|-1) + (|N|-1)^2 + |X| \cdot |Y| \cdot |Z| + |M| \cdot (|N|-1) + (|N|-1)^2 \cdot \sum_{i=1}^m |X_i| \cdot |Y_i| \cdot (|Z_i|-1) + (|N|-1) \cdot \sum_{i=1}^m |X_i| \cdot |Y_i| \cdot |Z_i| + (|N|-1)^2 \cdot \sum_{i=1}^m |X_i| \cdot |Y_i| \cdot |Z_i| + (|N|-1)^2 + (|N|-1) + |X| \cdot |Y| \cdot |Z|$  restrições.

$$\min \sum_{(k,l) \in A} \sum_{t \in N} c_{kl} \cdot d_{kl}^t \quad (1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{l \in N} \sum_{t \in N} d_{kl}^t = 1 \quad k \in N \quad (2)$$

$$\sum_{k \in N} \sum_{t \in N} d_{kl}^t = 1 \quad l \in N \quad (3)$$

$$\sum_{l \in N} \sum_{t \in N \setminus \{1\}} t \cdot d_{kl}^t - \sum_{p \in N} \sum_{t \in N} t \cdot d_{pk}^t = 1 \quad k \in N \setminus \{1\} \quad (4)$$

$$d_{kl}^t \in \{0,1\} \quad (k,l) \in A, t \in N \quad (5)$$

$$\sum_{i \in M} \sum_{x \in X_i} \sum_{y \in Y_i} \sum_{z \in Z_i} a_{xyz}^{ikt} = \sum_{i \in M} \sum_{l \in N} b_{ik} \cdot d_{lk}^t \quad k \in N \setminus \{1\}, t \in N \setminus \{n\} \quad (30)$$

$$\sum_{i \in M} \sum_{k \in N \setminus \{1\}} \sum_{t \in N \setminus \{n\}} \sum_{\{x \in X_i; x-l_i+1 \leq x \leq x'\}} \sum_{\{y \in Y_i; y-w_i+1 \leq y \leq y'\}} \sum_{\{z \in Z_i; z-h_i+1 \leq z \leq z'\}} a_{xyz}^{ikt} \leq 1 \quad x' \in X, y' \in Y, z' \in Z \quad (31)$$

$$\sum_{t \in N \setminus \{n\}} \sum_{x \in X_i} \sum_{y \in Y_i} \sum_{z \in Z_i} a_{xyz}^{ikt} = b_{ik} \quad i \in M, k \in N \setminus \{1\} \quad (32)$$

$$a_{xyz}^{ikt} \in \{0,1\} \quad i \in M, k \in N \setminus \{1\}, t \in N \setminus \{n\} \quad (33)$$

$$x \in X_i, y \in Y_i, z \in Z_i$$

$$\sum_{\{j \in M; z-h_j \geq 0\}} \sum_{l \in N \setminus \{1\}} \sum_{\{u \in N \setminus \{n\}; u \geq t\}} \sum_{\{x'' \in X_j; x-l_j+1 \leq x'' \leq x+l_j-1\}} \sum_{\{y'' \in Y_j; y-w_j+1 \leq y'' \leq y+w_j-1\}} L_{ij} \cdot W_{ij} \cdot a_{x''y''z-h_j}^{jlu} \geq l_i \cdot w_i \cdot a_{xyz}^{ikt}$$

$$\text{com} \begin{cases} L_{ij} = \min(x+l_i, x''+l_j) - \max(x, x'') \\ W_{ij} = \min(y+w_i, y''+w_j) - \max(y, y'') \end{cases} \quad i \in M, k \in N \setminus \{1\}, t \in N \setminus \{n\} \quad (35)$$

$$x \in X_i, y \in Y_i, z \in Z_i \setminus \{0\}$$

$$(x+l_i) \cdot \sum_{t \in N \setminus \{n\}} a_{xyz}^{ikt} \leq L'_k \quad i \in M, k \in N \setminus \{1\} \quad (36)$$

$$x \in X_i, y \in Y_i, z \in Z_i$$

$$L'_l - \delta_{ik} \leq x \cdot \sum_{t \in N \setminus \{n\}} a_{xyz}^{ikt} + (1 - \sum_{t \in N \setminus \{n\}} a_{xyz}^{ikt}) \cdot M_1 + (1 - \sum_{t \in N \setminus \{n\}} d_{kl}^t) \cdot M_2 \quad i \in M, k, l \in N \setminus \{1\} \quad (37)$$

$$x \in X_i, y \in Y_i, z \in Z_i$$

$$L'_l \leq L'_k + (1 - \sum_{t \in N \setminus \{n\}} d_{kl}^t) \cdot M_3 \quad k, l \in N \setminus \{1\} \quad (38)$$

$$L'_k \leq L \quad k \in N \setminus \{1\} \quad (39)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j \in M} \sum_{l \in N \setminus \{1\}} \sum_{u \in N \setminus \{n\}} \sum_{\{x'' \in X_j; x' - l_j + 1 \leq x'' \leq x'\}} \sum_{\{y'' \in Y_j; y' - w_j + 1 \leq y'' \leq y'\}} \sum_{\{z'' \in Z_j; z' + 1 \leq z'' \leq H - h_j\}} \left( \frac{p_j}{l_j \cdot w_j} \right) \cdot a_{x''y''z''}^{jlu} \leq \\
& \sum_{i \in M} \sum_{k \in N \setminus \{1\}} \sum_{r \in N \setminus \{n\}} \sum_{\{x \in X_i; x' - l_i + 1 \leq x \leq x'\}} \sum_{\{y \in Y_i; y' - w_i + 1 \leq y \leq y'\}} \sum_{\{z \in Z_i; z' - h_i + 1 \leq z \leq z'\}} \sigma_i \cdot a_{xyz}^{ikt} \\
& x' \in X, y' \in Y, z' \in Z
\end{aligned} \tag{40}$$

### 3.8 FORMULAÇÕES PARA O 3L-CVRP

Formulações para o 3L-CVRP podem ser obtidas diretamente das formulações para o 2L-CVRP ou das formulações para o 3L-TSP. A Figura 26 ilustra uma abstração de uma solução conceitual obtida com a formulação (6)-(12). Neste exemplo foram considerados dois veículos com capacidade  $L_v \cdot W_v \cdot H_v = 12 \cdot 8 \cdot 8 = 768$  cada, e quatro clientes com demandas  $D_2 = 320$ ,  $D_3 = 312$ ,  $D_4 = 104$  e  $D_5 = 264$ . Os roteiros de visitas são 1-2-3-1 e 1-4-5-1, como ilustrado na Figura 26 (note que as cores também diferenciam os clientes). Note que padrões de empacotamento como os ilustrados nesta figura são pouco prováveis do ponto de vista do empacotamento tridimensional, pois consideram que as cargas acomodam-se perfeitamente de acordo com a forma dos veículos.

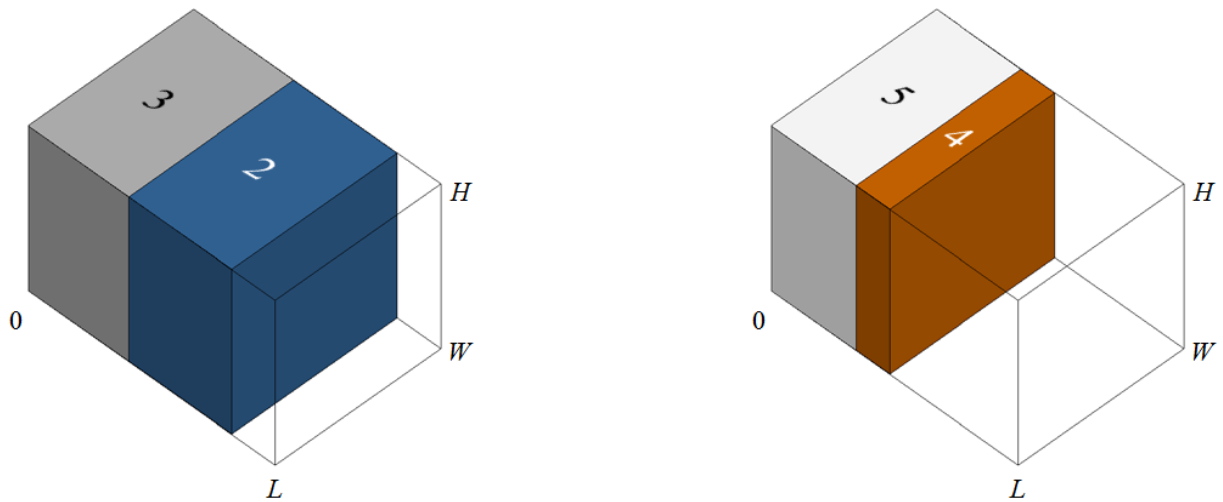


Figura 26. Abstração de uma solução conceitual obtida com a formulação (6)-(12).

Para estender a formulação (6)-(12) para considerar a existência de pedidos de clientes formados por itens tridimensionais, seja  $V$  o conjunto de veículos idênticos com dimensões  $(L_v, W_v, H_v)$ , com as quais se obtém a capacidade de cada veículo, dada em termos de unidades de volume,  $C_v = L_v \cdot W_v \cdot H_v$ . Sejam ainda as variáveis de decisão (de empacotamento)  $a_{xyz}^{ikrv}$  do modelo definidas como a seguir:

$a_{xyz}^{iktv}$ : variável binária, que é igual a 1 se a caixa do tipo  $i$  requerida pelo cliente  $k$  visitado na posição  $t$  pelo veículo  $v$ , é empacotada com seu canto inferior frontal esquerdo na posição  $(x, y, z)$ , tal que  $i \in M$ ,  $k \in N \setminus \{1\}$ ,  $t \in N \setminus \{n\}$ ,  $v \in V$ ,  $x \in X_{iv}$ ,  $y \in Y_{iv}$  e  $z \in Z_{iv}$ ; caso contrário, ela é igual a 0;

### Incorporando restrições geométricas

A formulação para o 3L-CVRP, considerando apenas restrições geométricas, é composta pela função objetivo (6) e as expressões (7), (8), (9), (10) e (12), além das seguintes expressões:

$$\sum_{i \in M} \sum_{k \in N \setminus \{1\}} \sum_{l \in N} \sum_{t \in N \setminus \{1\}} l_i \cdot w_i \cdot h_i \cdot b_{ik} \cdot d_{kl}^{tv} \leq L_v \cdot W_v \cdot H_v \quad v \in V \quad (41)$$

$$\sum_{i \in M} \sum_{x \in X_{iv}} \sum_{y \in Y_{iv}} \sum_{z \in Z_{iv}} a_{xyz}^{iktv} = \sum_{i \in M} \sum_{l \in N} b_{ik} \cdot d_{lk}^{tv} \quad k \in N \setminus \{1\}, t \in N \setminus \{n\}, v \in V \quad (42)$$

$$\sum_{i \in M} \sum_{k \in N \setminus \{1\}} \sum_{t \in N \setminus \{n\}} \sum_{\{x \in X_{iv} : x' - l_i + 1 \leq x \leq x'\}} \sum_{\{y \in Y_{iv} : y' - w_i + 1 \leq y \leq y'\}} \sum_{\{z \in Z_{iv} : z' - h_i + 1 \leq z \leq z'\}} a_{xyz}^{iktv} \leq 1 \quad x' \in X_v, y' \in Y_v, z' \in Z_v, v \in V \quad (43)$$

$$\sum_{t \in N \setminus \{n\}} \sum_{v \in V} \sum_{x \in X_{iv}} \sum_{y \in Y_{iv}} \sum_{z \in Z_{iv}} a_{xyz}^{iktv} = b_{ik} \quad i \in M, k \in N \setminus \{1\} \quad (44)$$

$$a_{xyz}^{iktv} \in \{0, 1\} \quad i \in M, k \in N \setminus \{1\}, t \in N \setminus \{n\} \\ x \in X_{iv}, y \in Y_{iv}, z \in Z_{iv}, v \in V \quad (45)$$

Na formulação (6)-(10) e (12) com as restrições (41)-(45), as restrições (41) substituem as restrições (11) para considerar os diferentes tipos de caixas e seus volumes (note que  $\sum_{i \in M} l_i \cdot w_i \cdot h_i \cdot b_{ik} = D_k$ ,  $k \in N \setminus \{1\}$ ). No entanto, observe que estas restrições se tornaram redundantes após a incorporação das restrições geométricas (compostas pelas restrições (43) e outras restrições em que os conjuntos  $X_{iv}$ ,  $Y_{iv}$  e  $Z_{iv}$  são utilizados), que estão agora embutidas nesta formulação. No entanto, note que, mesmo redundantes, as restrições (41) ainda são desigualdades válidas para o problema e podem ser úteis na resolução dos modelos. As restrições (42) garantem o acoplamento das estruturas de roteamento e de carregamento, i.e., se o veículo  $v$  visita o cliente  $k$  na posição  $t$  após visitar o cliente  $l$ , então todas as caixas requeridas pelo cliente  $k$  devem ser desempacotadas das posições  $(x, y, z)$  ocupadas por elas naquele veículo. Note que não é preciso considerar o depósito, i.e.,  $k \in N \setminus \{1\}$ , pois não há nenhuma demanda associada, nem a última posição no roteiro, i.e.,

$t \in N \setminus \{n\}$ , pois pode se referir ao próprio depósito, na hipótese de apenas um veículo ser utilizado. As restrições (43) garantem que as caixas não se sobreponham dentro de cada veículo, i.e., se há uma caixa que ocupa o ponto  $(x', y', z')$  (não considerando os pontos das faces superior, de trás e direita) no veículo  $v$ , então apenas esta caixa contém este ponto. As restrições (44) garantem o atendimento das demandas dos clientes e as restrições (45) definem o domínio das variáveis de decisão. É importante notar que, mesmo se tratando de frota homogênea, não é possível definir as variáveis de decisão  $a_{xyz}^{ikt v}$  sem o índice  $v$ , pois embora os padrões normais (combinações cônicas) sejam iguais para todos os veículos, os padrões de empacotamento resultantes são diferentes.

A Figura 27 ilustra, para o mesmo exemplo da Figura 26, uma solução ótima obtida com a formulação (6)-(10) e (12) e as restrições (41)-(45). Neste exemplo foram considerados os mesmos dois veículos com capacidade  $L_v \cdot W_v \cdot H_v = 768$  cada, e os mesmos quatro clientes com demandas  $D_2 = 320$ ,  $D_3 = 312$ ,  $D_4 = 104$  e  $D_5 = 264$ . Estas demandas são agora compostas de quatro tipos de caixas retangulares (por simplicidade, assume-se que as caixas têm orientação fixa, i.e., as caixas não podem girar) com dimensões  $(l_1, w_1, h_1) = (2, 3, 4)$ ,  $(l_2, w_2, h_2) = (4, 2, 4)$ ,  $(l_3, w_3, h_3) = (4, 3, 3)$  e  $(l_4, w_4, h_4) = (6, 2, 3)$ , e quantidades  $b_{12} = 3$ ,  $b_{22} = 1$ ,  $b_{32} = 2$ ,  $b_{42} = 4$ ,  $b_{13} = 0$ ,  $b_{23} = 3$ ,  $b_{33} = 4$ ,  $b_{43} = 2$ ,  $b_{14} = 3$ ,  $b_{24} = 1$ ,  $b_{34} = 0$ ,  $b_{44} = 0$ ,  $b_{15} = 4$ ,  $b_{25} = 3$ ,  $b_{35} = 1$  e  $b_{45} = 1$ . Os roteiros de visitas são agora alterados para 1-2-5-1 e 1-4-3-1. Note, no entanto, que com apenas estas restrições, os padrões de empacotamento obtidos não favorecem um fácil descarregamento das caixas quando o respectivo cliente é visitado. Além disso, note que há caixas “flutuando” dentro dos veículos, o que indica ausência de restrições que garantam a estabilidade vertical da carga. Neste contexto, em que a aceleração da gravidade atua sobre os corpos (i.e., as caixas), a importância destas últimas restrições precede a das primeiras, pois não é concebível caixas flutuando ou o risco dos carregamentos “desmoronarem”.

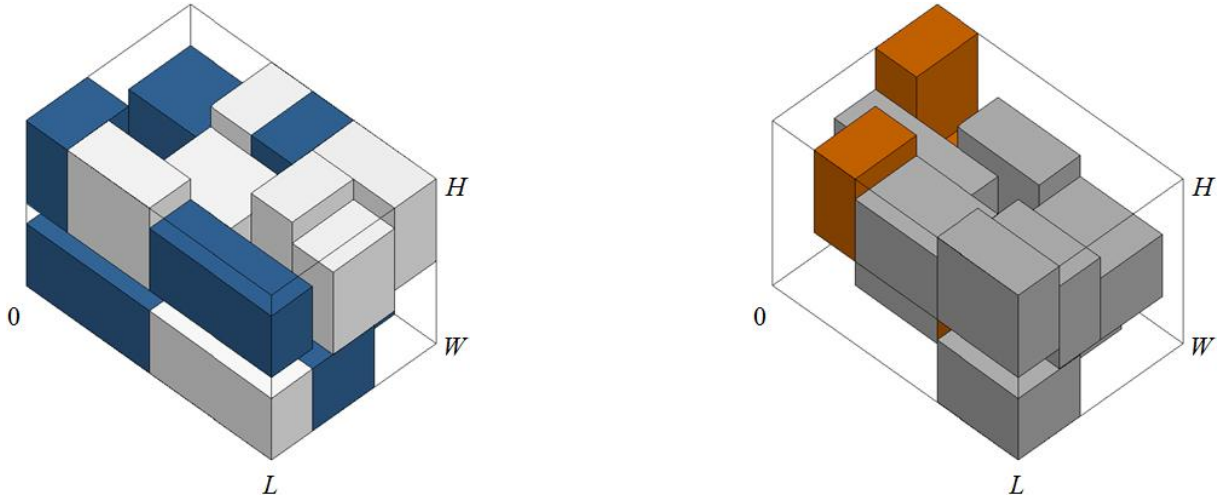


Figura 27. Exemplo de uma solução obtida com a formulação (6)-(10) e (12) e as restrições (41)-(45).

### Incorporando restrições de estabilidade vertical

A formulação para o 3L-CVRP, considerando restrições de estabilidade vertical, além de restrições geométricas, é composta pela função objetivo (6) e as expressões (7)-(10), (12) e (41)-(45), além da seguinte expressão:

$$\sum_{\{j \in M : z - h_j \geq 0\}} \sum_{l \in N \setminus \{1\}} \sum_{u \in N \setminus \{n\}} \sum_{\{x'' \in X_{ju} : x - l_j + 1 \leq x'' \leq x + l_j - 1\}} \sum_{\{y'' \in Y_{ju} : y - w_j + 1 \leq y'' \leq y + w_j - 1\}} L_{ij} \cdot W_{ij} \cdot a_{x''y''(z-h_j)}^{iluv} \geq l_i \cdot w_i \cdot a_{xyz}^{iktv}$$

com  $\begin{cases} L_{ij} = \min(x + l_i, x'' + l_j) - \max(x, x'') \\ W_{ij} = \min(y + w_i, y'' + w_j) - \max(y, y'') \end{cases} \quad \begin{matrix} i \in M, k \in N \setminus \{1\}, t \in N \setminus \{n\} \\ x \in X_{iv}, y \in Y_{iv}, z \in Z_{iv} \setminus \{0\}, v \in V \end{matrix} \quad (46)$

Na formulação (6)-(10) e (12) com as restrições (41)-(45) e (46), as restrições (46) garantem que a área da face inferior de uma dada caixa (do tipo  $i$  requerida pelo cliente  $k$  visitado na posição  $t$  pelo veículo  $v$ ) esteja completamente suportada pela face superior de uma ou mais caixas colocadas imediatamente abaixo dela (i.e., em contato direto com ela), ou pelo piso de um dos veículos (veja Figura 11). A Figura 28 ilustra, para o mesmo exemplo da Figura 26, uma solução ótima obtida com a formulação (6)-(10) e (12) e as restrições (41)-(45) e (46). Os roteiros de visitas não são alterados, permanecendo 1-2-5-1 e 1-4-3-1. Note, no entanto, que os padrões de empacotamento obtidos, apesar de verticalmente estáveis, ainda não garantem uma “solução completa” para o problema com base nos roteiros de visitas dos veículos. Por solução completa entende-se que, por se tratar de roteiros de entregas, e, portanto, por envolver “perda de massa” ao longo dos mesmos, é preciso garantir que os padrões de empacotamento resultantes após cada entrega sejam também verticalmente



estáveis. Em outras palavras, é preciso garantir que as caixas de um dado cliente que é visitado anteriormente em um roteiro estejam sempre sobre outras caixas do mesmo cliente, ou sobre caixas de clientes que são visitados posteriormente no roteiro, ou sobre o piso de um dos veículos. Por exemplo, veja que algumas caixas do cliente “2”, após serem descarregadas de um dos veículos, tornam o padrão de empacotamento resultante instável.

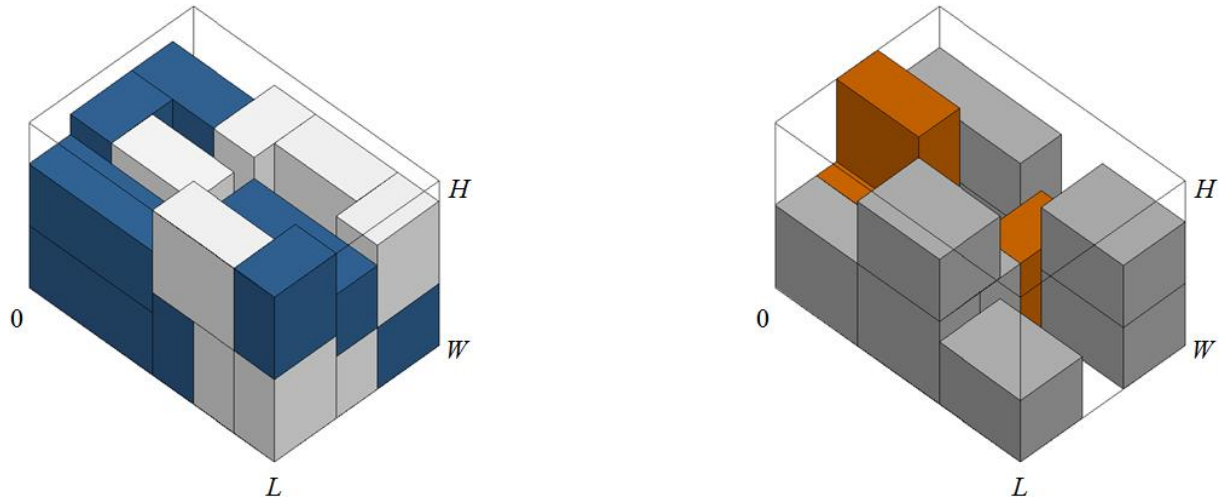


Figura 28. Exemplo de uma solução obtida com a formulação (6)-(10) e (12) e as restrições (41)-(45) e (46).

Uma maneira de obter padrões de empacotamento que garantam uma solução completa para o problema consiste em reescrever as restrições (46), alterando no lado esquerdo da restrição o somatório  $\sum_{u \in N \setminus \{n\}}$  para  $\sum_{u \in N \setminus \{n\}; u \geq t}$ , com o que se obtém a expressão a seguir:

$$\sum_{\{j \in M : z - h_j \geq 0\}} \sum_{l \in N \setminus \{1\}} \sum_{\{u \in N \setminus \{n\} : u \geq t\}} \sum_{\{x'' \in X_j, : x - l_j + 1 \leq x'' \leq x + l_i - 1\}} \sum_{\{y'' \in Y_j, : y - w_j + 1 \leq y'' \leq y + w_i - 1\}} L_{ij} \cdot W_{ij} \cdot a_{x'' y'' (z - h_j)}^{jhu} \geq l_i \cdot w_i \cdot a_{xyz}^{ikv}$$

$$\text{com} \begin{cases} L_{ij} = \min(x + l_i, x'' + l_j) - \max(x, x'') \\ W_{ij} = \min(y + w_i, y'' + w_j) - \max(y, y'') \end{cases} \quad \begin{matrix} i \in M, k \in N \setminus \{1\}, t \in N \setminus \{n\} \\ x \in X_{iv}, y \in Y_{iv}, z \in Z_{iv} \setminus \{0\}, v \in V \end{matrix} \quad (47)$$

A Figura 29 ilustra, para o mesmo exemplo da Figura 26, uma solução ótima obtida com a formulação (6)-(10) e (12) e as restrições (41)-(45) e (47). Os roteiros de visitas não são alterados, permanecendo 1-2-5-1 e 1-4-3-1. Note, no entanto, que com apenas estas restrições, para alguns roteiros, os padrões de empacotamento obtidos, apesar de verticalmente estáveis e de garantirem uma solução completa para o problema, podem não favorecer um fácil descarregamento do conjunto de caixas requerido por cada cliente, quando o mesmo é visitado (assumindo que a porta de cada veículo se encontra na face entre as coordenadas  $(L, 0, 0)$ ,  $(L, W, 0)$ ,  $(L, W, H)$  e  $(L, 0, H)$  do sistema de coordenadas). Por

exemplo, veja que caixas do cliente “3” obstruem a saída de caixas do cliente “4”, o primeiro a ser visitado, em um dos veículos.

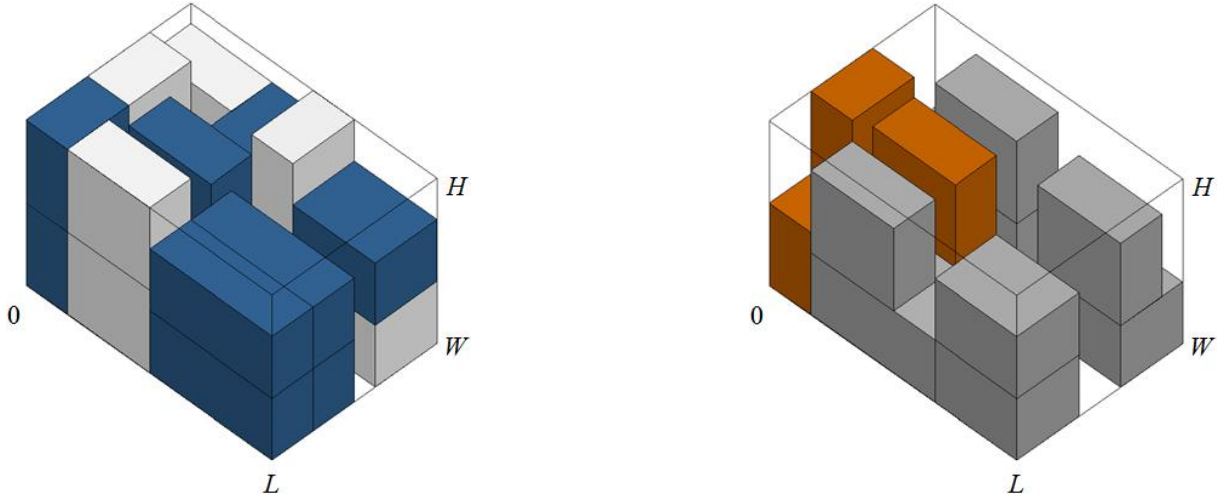


Figura 29. Exemplo de uma solução obtida com a formulação (6)-(10) e (12) e as restrições (41)-(45) e (47).

### Incorporando restrições de múltiplos destinos

Para contornar esta situação, sejam ainda as variáveis  $L'_{kv}$ , definidas como variáveis reais auxiliares que indicam o comprimento necessário para empacotar todas as caixas do cliente  $k$  mais as caixas de outros clientes visitados posteriormente no roteiro (note que estas variáveis definem a frente de carregamento) dentro do veículo  $v$ , e sejam  $M_1, M_2, M_3$  números suficientemente grandes. A formulação para o 3L-CVRP, considerando restrições de múltiplos destinos, além de restrições geométricas e de estabilidade vertical, é composta pela função objetivo (6) e as expressões (7)-(10), (12), (41)-(45) e (47), além das seguintes expressões:

$$(x + l_i) \cdot \sum_{t \in N \setminus \{n\}} a_{xyz}^{ikt} \leq L'_{kv} \quad \begin{array}{l} i \in M, k \in N \setminus \{1\}, v \in V \\ x \in X_{iv}, y \in Y_{iv}, z \in Z_{iv} \end{array} \quad (48)$$

$$L'_{iv} - \delta_{ik} \leq x \cdot \sum_{t \in N \setminus \{n\}} a_{xyz}^{ikt} + (1 - \sum_{t \in N \setminus \{n\}} a_{xyz}^{ikt}) \cdot M_1 + (1 - \sum_{t \in N \setminus \{n\}} d_{kl}^{tv}) \cdot M_2 \quad \begin{array}{l} i \in M, k, l \in N \setminus \{1\}, v \in V \\ x \in X_{iv}, y \in Y_{iv}, z \in Z_{iv} \end{array} \quad (49)$$

$$L'_{iv} \leq L'_{kv} + (1 - \sum_{t \in N \setminus \{n\}} d_{kl}^{tv}) \cdot M_3 \quad k, l \in N \setminus \{1\}, v \in V \quad (50)$$

$$L'_{kv} \leq L_v \quad k \in N \setminus \{1\}, v \in V \quad (51)$$

Na formulação (6)-(10) e (12) com as restrições (41)-(45), (47) e (48)-(51), as restrições (48)-(51) garantem um descarregamento mais fácil das caixas quando o respectivo

cliente é visitado, i.e., elas garantem que se o veículo  $v$  visita o cliente  $k$  na posição  $t$  após visitar o cliente  $l$ , então as caixas requeridas pelo cliente  $k$  devem ser empacotadas dentro dos limites  $L'_{lv} - \delta_{ik}$  (pelas restrições (49)) e  $L'_{kv}$  (pelas restrições (48)), e o comprimento necessário para empacotar todas as caixas requeridas pelo cliente  $k$  deve estar dentro dos limites  $L'_{lv}$  (pelas restrições (50)) e  $L_v$  (pelas restrições (51)). A Figura 30 ilustra, para o mesmo exemplo da Figura 26, uma solução ótima obtida com a formulação (6)-(10) e (12) e as restrições (41)-(45), (47) e (48)-(51). O valor do comprimento flexível foi definido como  $\delta_{ik} = l_i$ ,  $i \in M$ ,  $k \in N \setminus \{1\}$ . Os roteiros de visitas não são alterados, permanecendo 1-2-5-1 e 1-4-3-1. Note que as caixas estão agora empacotadas de maneira mais conveniente, de modo a facilitar o descarregamento dos conjuntos de peças requeridos pelos clientes, além dos carregamentos estarem estáveis verticalmente.

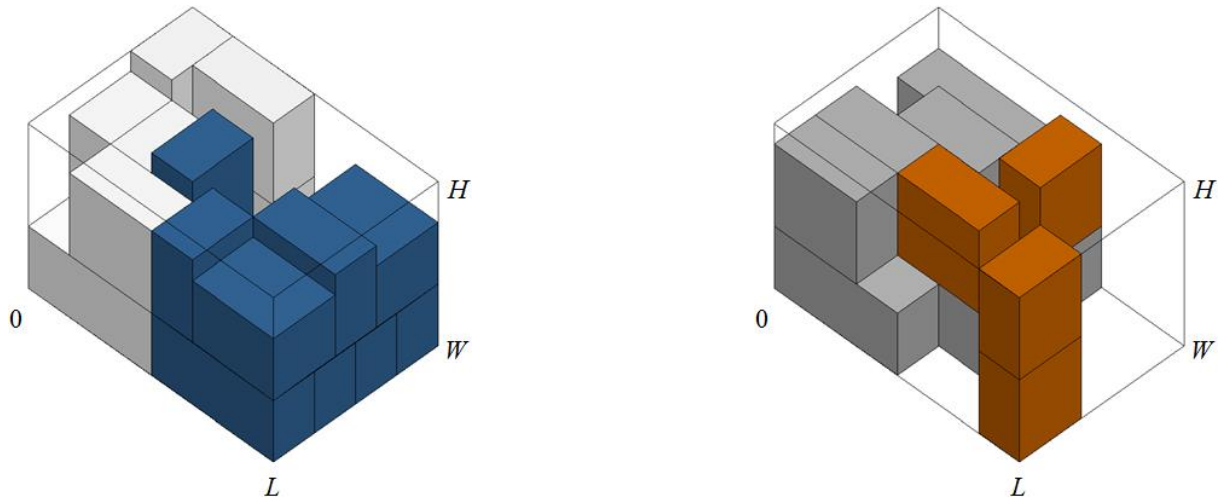


Figura 30. Exemplo de uma solução obtida com a formulação (6)-(10) e (12) e as restrições (41)-(45), (47) e (48)-(51).

### Incorporando restrições de empilhamento

As restrições de empilhamento (veja Figura 12) completam a modelagem do problema. A formulação para o 3L-CVRP, considerando restrições de empilhamento, além de restrições geométricas, de estabilidade vertical e de múltiplos destinos, é composta pela função objetivo (6) e as expressões (7)-(10), (12), (41)-(45), (47) e (48)-(51), além da seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j \in M} \sum_{l \in N \setminus \{1\}} \sum_{u \in N \setminus \{n\}} \sum_{\{x'' \in X_{ju}: x' - l_j + 1 \leq x'' \leq x'\}} \sum_{\{y'' \in Y_{ju}: y' - w_j + 1 \leq y'' \leq y'\}} \sum_{\{z'' \in Z_{ju}: z' + 1 \leq z'' \leq H - h_j\}} \left( \frac{p_j}{l_j \cdot w_j} \right) \cdot a_{x'' y'' z''}^{jluv} \leq \\
& \sum_{i \in M} \sum_{k \in N \setminus \{1\}} \sum_{t \in N \setminus \{n\}} \sum_{\{x \in X_{iv}: x' - l_i + 1 \leq x \leq x'\}} \sum_{\{y \in Y_{iv}: y' - w_i + 1 \leq y \leq y'\}} \sum_{\{z \in Z_{iv}: z' - h_i + 1 \leq z \leq z'\}} \sigma_i \cdot a_{xyz}^{ikt v} \\
& x' \in X_v, y' \in Y_v, z' \in Z_v, v \in V
\end{aligned} \tag{52}$$

Na formulação (6)-(10) e (12) com as restrições (41)-(45), (47), (48)-(51) e (52), as restrições (52) garantem que as caixas não são danificadas devido à pressão, i.e., garantem que, para um dado ponto  $(x', y', z')$  do veículo  $v$ , se há uma caixa (do tipo  $i$  requerida pelo cliente  $k$  visitado na posição  $t$  pelo veículo  $v$ ) que ocupa este ponto, então as demais caixas empilhadas sobre esta caixa (não necessariamente todas em contato direto com ela) não devem exceder a pressão máxima admissível  $\sigma_i$  que cada ponto da face superior da caixa pode suportar. A Figura 31 ilustra, para o mesmo exemplo da Figura 26, uma solução ótima obtida com a formulação (6)-(10) e (12) e as restrições (41)-(45), (47), (48)-(51) e (52). O valor do peso das caixas foi definido como  $p_i = l_i \cdot w_i \cdot h_i$ , e o valor da pressão máxima admissível foi definido como  $\sigma_i = h_i$ ,  $i \in M$  (por simplicidade, assume-se que todas as caixas possuem a mesma densidade e orientação fixa). Os roteiros de visitas não são alterados, permanecendo 1-2-5-1 e 1-4-3-1. Note que não há uma diferença visual grande entre os padrões de empacotamento ilustrados nesta figura e os ilustrados na Figura 30, e isto se deve, em parte, à ausência de caixas frágeis neste exemplo.

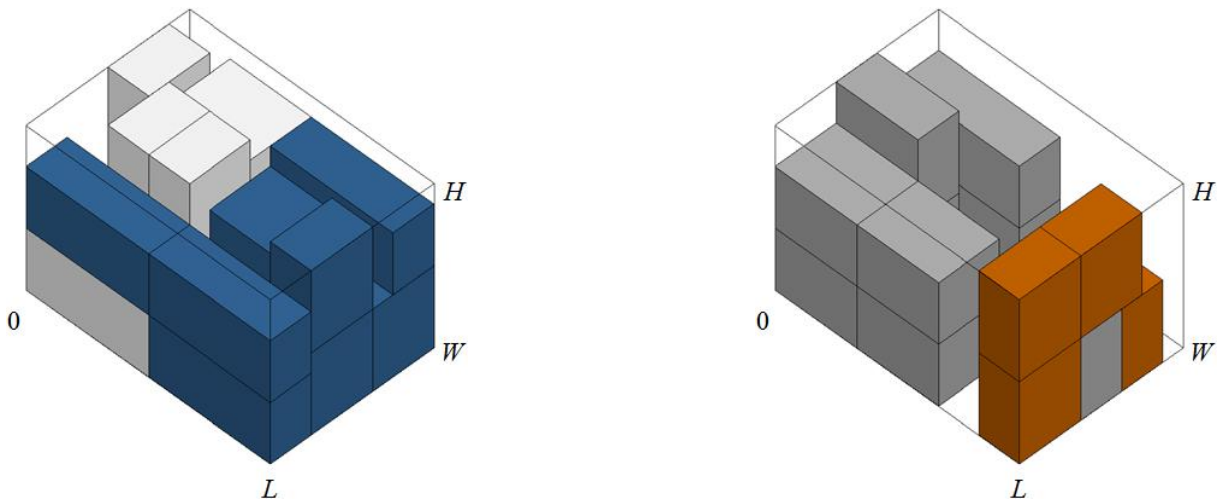


Figura 31. Exemplo de uma solução obtida com a formulação (6)-(10) e (12) e as restrições (41)-(45), (47), (48)-(51) e (52).

### Formulação completa para o 3L-CVRP

A seguir é apresentada a formulação completa para o 3L-CVRP. Esta formulação possui  $|N|^3 \cdot |V| + (|N|-1)^2 \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{v=1}^v |X_{iv}| \cdot |Y_{iv}| \cdot |Z_{iv}|$  variáveis binárias e  $2 \cdot (|N|-1) + 2 \cdot |V| + 2 \cdot (|N|-1)^2 \cdot |V| + \sum_{v=1}^v |X_v| \cdot |Y_v| \cdot |Z_v| + |M| \cdot (|N|-1) + (|N|-1)^2 \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{v=1}^v |X_{iv}| \cdot |Y_{iv}| \cdot (|Z_{iv}|-1) + (|N|-1) \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{v=1}^v |X_{iv}| \cdot |Y_{iv}| \cdot |Z_{iv}| + (|N|-1)^2 \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{v=1}^v |X_{iv}| \cdot |Y_{iv}| \cdot |Z_{iv}| + (|N|-1)^2 \cdot |V| + (|N|-1) \cdot |V| + \sum_{v=1}^v |X_v| \cdot |Y_v| \cdot |Z_v|$  restrições.

$$\min \sum_{(k,l) \in A} \sum_{t \in N} \sum_{v \in V} c_{kl} \cdot d_{kl}^{tv} \quad (6)$$

Sujeito a:

$$\sum_{l \in N} \sum_{t \in N} \sum_{v \in V} d_{kl}^{tv} = 1 \quad k \in N \setminus \{1\} \quad (7)$$

$$\sum_{l \in N} \sum_{t \in N \setminus \{1\}} \sum_{v \in V} t \cdot d_{kl}^{tv} - \sum_{p \in N} \sum_{t \in N} \sum_{v \in V} t \cdot d_{pk}^{tv} = 1 \quad k \in N \setminus \{1\} \quad (8)$$

$$\sum_{l \in N \setminus \{1\}} d_{1l}^{1v} \leq 1 \quad v \in V \quad (9)$$

$$\sum_{l \in N} d_{kl}^{(t+1)v} - \sum_{p \in N} d_{pk}^{tv} = 0 \quad k \in N \setminus \{1\}, t \in N \setminus \{n\}, v \in V \quad (10)$$

$$d_{kl}^{tv} \in \{0,1\} \quad (k,l) \in A, t \in N, v \in V \quad (12)$$

$$\sum_{i \in M} \sum_{k \in N \setminus \{1\}} \sum_{l \in N} \sum_{t \in N \setminus \{1\}} l_i \cdot w_i \cdot h_i \cdot b_{ik} \cdot d_{kl}^{tv} \leq L_v \cdot W_v \cdot H_v \quad v \in V \quad (41)$$

$$\sum_{i \in M} \sum_{x \in X_{iv}} \sum_{y \in Y_{iv}} \sum_{z \in Z_{iv}} a_{xyz}^{ikt} = \sum_{i \in M} \sum_{l \in N} b_{ik} \cdot d_{lk}^{iv} \quad k \in N \setminus \{1\}, t \in N \setminus \{n\}, v \in V \quad (42)$$

$$\sum_{i \in M} \sum_{k \in N \setminus \{1\}} \sum_{t \in N \setminus \{n\}} \sum_{\{x \in X_{iv} : x' - l_i + 1 \leq x \leq x'\}} \sum_{\{y \in Y_{iv} : y' - w_i + 1 \leq y \leq y'\}} \sum_{\{z \in Z_{iv} : z' - h_i + 1 \leq z \leq z'\}} a_{xyz}^{ikt} \leq 1 \quad x' \in X_v, y' \in Y_v, z' \in Z_v, v \in V \quad (43)$$

$$\sum_{t \in N \setminus \{n\}} \sum_{v \in V} \sum_{x \in X_{iv}} \sum_{y \in Y_{iv}} \sum_{z \in Z_{iv}} a_{xyz}^{ikt} = b_{ik} \quad i \in M, k \in N \setminus \{1\} \quad (44)$$

$$a_{xyz}^{ikt} \in \{0,1\} \quad i \in M, k \in N \setminus \{1\}, t \in N \setminus \{n\} \quad x \in X_{iv}, y \in Y_{iv}, z \in Z_{iv}, v \in V \quad (45)$$

$$\sum_{\{j \in M : z - h_j \geq 0\}} \sum_{l \in N \setminus \{1\}} \sum_{\{u \in N \setminus \{n\} : u \geq t\}} \sum_{\{x'' \in X_{iv} : x'' - l_i + 1 \leq x'' \leq x'' + l_i - 1\}} \sum_{\{y'' \in Y_{iv} : y'' - w_j + 1 \leq y'' \leq y'' + w_j - 1\}} L_{ij} \cdot W_{ij} \cdot a_{x''y''(z-h_j)}^{jltv} \geq l_i \cdot w_i \cdot a_{xyz}^{ikt} \quad i \in M, k \in N \setminus \{1\}, t \in N \setminus \{n\} \quad x \in X_{iv}, y \in Y_{iv}, z \in Z_{iv} \setminus \{0\}, v \in V \quad (47)$$

$$(x + l_i) \cdot \sum_{t \in N \setminus \{n\}} a_{xyz}^{ikt} \leq L'_{kv} \quad i \in M, k \in N \setminus \{1\}, v \in V \quad x \in X_{iv}, y \in Y_{iv}, z \in Z_{iv} \quad (48)$$

$$L'_{lv} - \delta_{ik} \leq x \cdot \sum_{t \in N \setminus \{n\}} a_{xyz}^{ikt} + (1 - \sum_{t \in N \setminus \{n\}} a_{xyz}^{ikt}) \cdot M_1 + (1 - \sum_{t \in N \setminus \{n\}} d_{kl}^{tv}) \cdot M_2 \quad \begin{array}{l} i \in M, k, l \in N \setminus \{1\}, v \in V \\ x \in X_{iv}, y \in Y_{iv}, z \in Z_{iv} \end{array} \quad (49)$$

$$L'_{lv} \leq L'_{kv} + (1 - \sum_{t \in N \setminus \{n\}} d_{kl}^{tv}) \cdot M_3 \quad k, l \in N \setminus \{1\}, v \in V \quad (50)$$

$$L'_{kv} \leq L_v \quad k \in N \setminus \{1\}, v \in V \quad (51)$$

$$\sum_{j \in M} \sum_{l \in N \setminus \{1\}} \sum_{u \in N \setminus \{n\}} \sum_{\{x'' \in X_{ju}, x' - l_j + 1 \leq x'' \leq x'\}} \sum_{\{y'' \in Y_{ju}, y' - w_j + 1 \leq y'' \leq y'\}} \sum_{\{z'' \in Z_{ju}, z' + 1 \leq z'' \leq H - h_j\}} \left( \frac{p_j}{l_j \cdot w_j} \right) \cdot a_{x''y''z''}^{jluv} \leq \sum_{i \in M} \sum_{k \in N \setminus \{1\}} \sum_{t \in N \setminus \{n\}} \sum_{\{x' \in X_{it}, x' - l_i + 1 \leq x' \leq x''\}} \sum_{\{y' \in Y_{it}, y' - w_i + 1 \leq y' \leq y''\}} \sum_{\{z' \in Z_{it}, z' - h_i + 1 \leq z' \leq z''\}} \sigma_i \cdot a_{xyz}^{ikt} \quad x' \in X_v, y' \in Y_v, z' \in Z_v, v \in V \quad (52)$$

### 3.9 RESULTADOS COMPUTACIONAIS E DISCUSSÃO

Nesta seção são apresentados e discutidos os resultados computacionais obtidos com as formulações apresentadas para o CVRP (Seção 3.3) e para o 3L-CVRP com restrições geométricas, de estabilidade vertical, de múltiplos destinos e de empilhamento (Seção 3.8).

#### 3.9.1 RESULTADOS DE EXEMPLOS GERADOS ALEATORIAMENTE

Nos experimentos a seguir, foi considerada uma matriz de custos assimétrica, com o número de nós  $n$  variando de 4 a 9 (veja a Figura 32). A coordenada do nó 1 (i.e., o depósito) foi definida na posição (100;100) de um sistema de coordenadas cartesianas. As coordenadas dos demais nós (i.e., os clientes) foram sorteadas aleatoriamente dentro da região definida pelas coordenadas (0;0), (200;0), (200;200) e (0;200). Os custos foram calculados com base nas coordenadas dos nós e, portanto, inicialmente simétricos, foram tornados assimétricos após a aleatorização dos valores da matriz triangular superior no intervalo  $[0, 8 \cdot c_{kl}; 1, 2 \cdot c_{kl}]$ ,  $k, l \in N \setminus \{1\}$ .

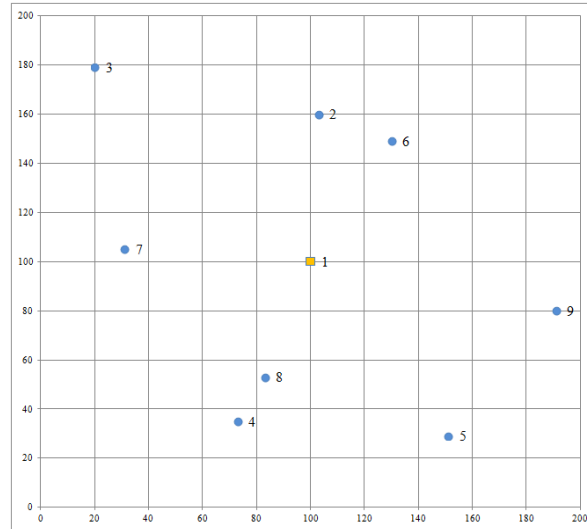


Figura 32. Depósito (1) e oito clientes (2-9) distribuídos geograficamente.

Foram considerados dois cenários, um em que havia disponíveis até dois veículos com dimensões  $(L, W, H) = (12, 8, 8)$ , e um em que havia disponíveis até três veículos com dimensões  $(L, W, H) = (8, 8, 8)$ . Em ambos os casos a capacidade total disponível é de 1536 unidades de volume. O número de tipos de caixas foi definido como 4 (por simplicidade, assume-se que as caixas não podem girar) com dimensões  $(l_1, w_1, h_1) = (2, 3, 4)$ ,  $(l_2, w_2, h_2) = (4, 2, 4)$ ,  $(l_3, w_3, h_3) = (4, 3, 3)$  e  $(l_4, w_4, h_4) = (6, 2, 3)$ , e quantidades disponíveis  $b_1 = 10$ ,  $b_2 = 8$ ,  $b_3 = 7$  e  $b_4 = 7$ , respectivamente, de modo tal que a demanda total por caixas é de 1000 unidades de volume. O número  $b_{ik}$  de caixas do tipo  $i$  requeridas pelo cliente  $k$  foi aleatoriamente distribuído entre os  $n-1$  clientes, tal que

$$\sum_{k \in N \setminus \{1\}} b_{ik} = b_i, \quad i \in M.$$

O valor do comprimento flexível  $\delta_{ik}$  foi arbitrariamente definido como sendo igual a  $l_i$  para cada cliente  $k$ ,  $k \in N \setminus \{1\}$ , i.e., um funcionário é permitido utilizar espaços vazios em até  $l_i$  unidades do comprimento obtido com as caixas de clientes já empacotas para empacotar caixas do tipo  $i$  requeridas pelo cliente  $k$ . O peso  $p_i$  de uma caixa do tipo  $i$  foi arbitrariamente definido como sendo o volume  $l_i \cdot w_i \cdot h_i$  de cada caixa, e a pressão máxima admissível  $\sigma_i$  que uma caixa do tipo  $i$  pode suportar em cada ponto da sua face superior foi definida como sendo a altura  $h_i$  de cada caixa (pois, por simplicidade, assume-se que todas as caixas possuem a mesma densidade e orientação fixa, i.e., as caixas não podem girar) (JUNQUEIRA, 2009).

As Tabelas 3 e 4 apresentam o número de variáveis binárias e de restrições para cada exemplo com até 2 e 3 veículos disponíveis, respectivamente. Estes números correspondem aos valores reportados pelo GUROBI após o pré-processamento dos modelos. Conforme o número de variáveis e restrições aumenta, a resolução dos modelos se torna significativamente mais demorada.

Tabela 3. Número de variáveis e restrições do CVRP e do 3L-CVRP para exemplos com até 2 veículos.

Ex.	Nº Cli.	Expressões (6)-(12)		Expressões (6)-(10), (12), com				
		Nº Var.	Nº Res.	Nº Var.	Nº Res.			
					(41)-(45)	(41)-(45), (47)	(41)-(45), (47), (48)-(51)	(41)-(45), (47), (48)-(51),(52)
1	3	96	29	5982	479	4403	10307	10727
2	4	200	45	10664	513	7489	17985	18405
3	5	360	65	16710	555	11455	27855	28275
4	6	588	89	24132	605	16301	39917	40337
5	7	896	117	32942	663	22027	54171	54591
6	8	1296	149	43152	729	28633	70617	71037

Tabela 4. Número de variáveis e restrições do CVRP e do 3L-CVRP para exemplos com até 3 veículos.

Ex.	Nº Cli.	Expressões (6)-(12)		Expressões (6)-(10), (12), com				
		Nº Var.	Nº Res.	Nº Var.	Nº Res.			
					(41)-(45)	(41)-(45), (47)	(41)-(45), (47), (48)-(51)	(41)-(45), (47), (48)-(51),(52)
1	3	145	40	5410	499	4009	9301	9721
2	4	301	63	9661	547	6787	16195	16615
3	5	541	92	15166	607	10357	25057	25477
4	6	883	127	21943	679	14719	35887	36307
5	7	1345	168	30010	763	19873	48685	49105
6	8	1945	215	39385	859	25819	63451	63871

Em todos os experimentos, o tempo computacional para resolver cada modelo foi limitado em 4 horas (14400 segundos) e os *gaps* de otimalidade foram calculados como:

$$Gap = \frac{(\text{melhor valor obtido} - \text{melhor limitante obtido})}{(\text{melhor limitante obtido})} \cdot 100\%$$

Assim, três situações são possíveis de ocorrer quanto à qualidade da solução obtida pelo aplicativo GUROBI: (i) solução ótima, com *Gap* igual a zero; (ii) solução inteira, com *Gap* maior que zero e com o limite de tempo excedido pelo GUROBI; (iii) sem solução,



sem *Gap* e com o limite de tempo excedido pelo GUROBI. Esta última situação está representada nas tabelas pelo símbolo “—”.

As Tabelas 5 e 6 apresentam, para cada exemplo com até 2 e 3 veículos, respectivamente, os valores para a função objetivo (FO), o *gap* de otimalidade (*Gap*, em %) e o tempo computacional (Temp., em segundos) utilizado para resolver cada exemplo. As Tabelas 5 e 6 também apresentam o roteiro que cada veículo percorre e a fração de volume (Vol., em %) ocupada pelas caixas carregadas em cada veículo nas soluções encontradas para o modelo CVRP e para o modelo 3L-CVRP com restrições geométricas.

Todos os exemplos foram resolvidos na otimalidade, com exceção do modelo 3L-CVRP com restrições geométricas e de estabilidade vertical (veja Tabela 6 com  $n = 9$ ), do modelo 3L-CVRP com restrições geométricas, de estabilidade vertical e de múltiplos destinos (veja Tabela 5 com  $n = 9$  e Tabela 6 com  $n = 7, 8, 9$ ), e do modelo 3L-CVRP com restrições geométricas, de estabilidade vertical, de múltiplos destinos e de empilhamento (veja Tabela 5 com  $n = 9$  e Tabela 6 com  $n = 8, 9$ ). Apenas este último modelo também não foi capaz de encontrar uma solução factível para o exemplo com  $n = 7$  (veja Tabela 6). Note que alguns valores de função objetivo se deterioram na transição do modelo CVRP para o modelo 3L-CVRP com restrições geométricas (veja na Tabela 5, com  $n = 4, 5, 6, 7$ , e na Tabela 6, com  $n = 6, 7, 8, 9$ ). Por outro lado, note que os valores de função objetivo, no caso dos exemplos com soluções comprovadamente ótimas, não se deterioram mais quando restrições de estabilidade vertical são embutidas no modelo 3L-CVRP com restrições geométricas. Isso também ocorre quando restrições de múltiplos destinos e de empilhamento são embutidas. A exceção é o modelo 3L-CVRP com restrições geométricas, de estabilidade vertical, de múltiplos destinos e de empilhamento ao resolver o exemplo com  $n = 6$  (veja Tabela 6).

As soluções do exemplo da Tabela 5 com  $n = 5$  são as que estão ilustradas nas Figuras 26 a 31. Note que o impacto das restrições de estabilidade vertical, de múltiplos destinos e de empilhamento, está mais relacionado com a acomodação da carga dentro dos veículos propriamente dita. Também é interessante notar que os exemplos da Tabela 6 com  $n = 7, 9$  necessitaram de 3 veículos quando o modelo 3L-CVRP com restrições geométricas foi resolvido, mas de apenas 2 veículos quando o modelo CVRP foi resolvido (note a elevada ocupação da capacidade em ambos os veículos).

É interessante destacar que, em um primeiro momento, durante o desenvolvimento deste trabalho, os modelos da Seção 3.3 para o CVRP e os modelos da Seção 3.8 para o 3L-CVRP, haviam sido implementados na linguagem de modelagem GAMS

(versão 23.0) e o *solver* CPLEX (versão 11.0) foi utilizado para resolvê-los em um microcomputador PC Core i7 2.80 GHz, 8.0 GB e sistema operacional Windows, com o que poucos exemplos das Tabelas 5 e 6 tiveram sua otimalidade provada ou mesmo uma solução factível encontrada, principalmente no caso dos modelos da Seção 3.8 para o 3L-CVRP. Em um intervalo de seis a doze meses migrou-se para as configurações de *software* e *hardware* descritas na Seção 3.1 e, como resultado, muitos exemplos tiveram sua otimalidade provada e para alguns deles foi possível encontrar ao menos uma solução factível.

De modo a melhor testar as limitações dos modelos, um segundo conjunto de experimentos foi executado. Neste conjunto de testes, ao invés de vários tipos de caixas, foi considerado apenas um único tipo de palete (*EuroPallet*) com dimensões  $(l, w, h) = (1200, 800, 1200)$  (os paletes têm orientação vertical fixa, i.e., podem girar horizontalmente). Cenários com até 2 e 3 veículos disponíveis foram considerados. As dimensões dos veículos  $(L, W, H) = (3200, 2200, 2400)$  são comumente encontradas em sistemas de distribuição urbana de carga (note que até duas camadas horizontais de paletes são possíveis em cada veículo). O número de nós  $n$  foi definido como 9, 11, 13 e 15, e o número de paletes requeridos por cada cliente foi aleatoriamente distribuído entre os  $n-1$  clientes. Havia 20 paletes no cenário com até 2 veículos e 30 paletes no cenário com até 3 veículos. Pelo menos 25% de todos os paletes considerados eram frágeis. Nestes experimentos, o tempo computacional para resolver cada modelo foi aumentado e limitado em 8 horas (28800 segundos).

As Tabelas 7 e 8 apresentam, para cada exemplo com até 2 e 3 veículos, respectivamente, os valores para a função objetivo (FO), o *gap* de otimalidade (*Gap*, em %) e o tempo computacional (Temp., em segundos) utilizado para resolver cada exemplo. Os resultados computacionais apresentados nas Tabelas 7 e 8 revelam o mesmo padrão do primeiro conjunto de experimentos, embora agora para problemas com até 15 nós. Mais uma vez foi possível resolver na otimalidade todos os exemplos dos modelos CVRP e 3L-CVRP com restrições geométricas, com até 2 e 3 veículos. Ao se incluírem restrições de estabilidade vertical, todos os exemplos com até 2 veículos foram resolvidos na otimalidade, bem como metade dos exemplos com até 3 veículos. Ao se incluírem restrições de múltiplos destinos, apenas o maior exemplo com até 2 veículos e os dois maiores exemplos com até 3 veículos não foram resolvidos na otimalidade. Note, no entanto, que os valores de *gaps* obtidos até então são todos menores que 13%. Como no primeiro conjunto de experimentos, ao se incluírem restrições de empilhamento, a resolução dos modelos se torna significativamente

mais difícil. Apenas dois exemplos com até 2 veículos foram resolvidos na otimalidade, e apenas um exemplo com até 3 veículos teve uma solução factível encontrada.

A Figura 33 ilustra as soluções ótimas obtidas para o exemplo com paletes, 14 clientes e até 2 veículos (veja a Tabela 7), respectivamente, com os modelos CVRP, 3L-CVRP com restrições geométricas, 3L-CVRP com restrições geométricas e de estabilidade vertical, 3L-CVRP com restrições geométricas, de estabilidade vertical e de múltiplos destinos, e 3L-CVRP com restrições geométricas, de estabilidade vertical, de múltiplos destinos e de empilhamento. Os roteiros de visitas são sempre os mesmos para cada um dos dois veículos.

Tabela 5. Resultados obtidos com o CVRP e o 3L-CVRP para exemplos com até 2 veículos.

Ex.	Nº Cli.	Expressões (6)-(12)					Expressões (6)-(10), (12), com (41)-(45) e														
		FO	Gap	Temp.	Rot.	Vol.	—					(47)			(47), (48)-(51)			(47), (48)-(51), (52)			
							FO	Gap	Temp.	Rot.	Vol.	FO	Gap	Temp.	FO	Gap	Temp.	FO	Gap	Temp.	
1	3	363	0,00	0,02	1-2-3-1 1-4-1	98,96 31,25	406	0,00	3,12	1-2-1 1-4-3-1	47,92 82,29	406	0,00	28,11	406	0,00	61,02	406	0,00	87,60	
2	4	426	0,00	0,02	1-2-3-1 1-4-5-1	82,29 47,92	585	0,00	3,52	1-2-5-1 1-4-3-1	76,04 54,17	585	0,00	169,15	585	0,00	645,32	585	0,00	363,80	
3	5	453	0,00	0,04	1-4-5-1 1-6-2-3-1	46,35 83,85	520	0,00	6,51	1-2-6-1 1-4-5-3-1	50,52 79,69	520	0,00	1408,34	520	0,00	3270,09	520	0,00	3784,13	
4	6	453	0,00	0,08	1-4-5-1 1-7-3-2-6-1	39,58 90,63	470	0,00	10,50	1-2-6-1 1-4-5-7-3-1	50,52 79,69	470	0,00	566,64	470	0,00	5709,04	470	0,00	3325,71	
5	7	460	0,00	0,22	1-4-5-8-1 1-7-3-2-6-1	65,63 64,58	460	0,00	8,56	1-4-5-8-1 1-7-3-2-6-1	65,63 64,58	460	0,00	1035,52	460	0,00	5768,20	460	0,00	6349,98	
6	8	550	0,00	0,67	1-4-8-9-5-1 1-7-3-2-6-1	64,58 65,63	550	0,00	41,59	1-4-8-9-5-1 1-7-3-2-6-1	64,58 65,63	550	0,00	3282,77	550	5,08	14400,00	550	4,31	14400,00	

Tabela 6. Resultados obtidos com o CVRP e o 3L-CVRP para exemplos com até 3 veículos.

Ex.	Nº Cli.	Expressões (6)-(12)					Expressões (6)-(10), (12), com (41)-(45) e														
		FO	Gap	Temp.	Rot.	Vol.	—					(47)			(47), (48)-(51)			(47), (48)-(51), (52)			
							FO	Gap	Temp.	Rot.	Vol.	FO	Gap	Temp.	FO	Gap	Temp.	FO	Gap	Temp.	
1	3	481	0,00	0,00	1-2-1 1-3-1 1-4-1	71,88 76,56 46,88	481	0,00	0,24	1-2-1 1-3-1 1-4-1	71,88 76,56 46,88	481	0,00	4,55	481	0,00	2,06	481	0,00	2,79	
2	4	544	0,00	0,00	1-2-1 1-3-1 1-4-5-1	62,50 60,94 71,88	544	0,00	0,34	1-2-1 1-3-1 1-4-5-1	62,50 60,94 71,88	544	0,00	10,97	544	0,00	40,55	544	0,00	50,51	
3	5	523	0,00	0,03	1-2-3-1 1-4-5-1 1-6-1	97,66 69,53 28,13	540	0,00	2,01	1-2-1 1-4-5-1 1-6-3-1	47,66 69,53 78,13	540	0,00	344,94	540	0,00	221,38	581	0,00	2444,21	
4	6	510	0,00	0,11	1-4-5-7-1 1-6-2-3-1	100,00 95,31	522	0,00	20,04	1-2-6-1 1-4-5-1 1-7-3-1	75,78 59,38 60,16	522	0,00	780,30	597	12,56	14400,00	—	—	14400,00	
5	7	460	0,00	0,19	1-2-6-1 1-4-5-8-1 1-7-3-1	39,06 98,44 57,81	538	0,00	23,81	1-2-6-1 1-4-5-1 1-7-3-8-1	39,06 70,31 85,94	538	0,00	1142,50	577	6,76	14400,00	605	17,02	14400,00	
6	8	550	0,00	0,46	1-4-8-9-5-1 1-7-3-2-6-1	96,88 98,44	638	0,00	59,63	1-2-6-1 1-4-7-3-1 1-9-5-8-1	51,56 67,97 75,78	638	3,92	14400,00	659	8,50	14400,00	708	20,06	14400,00	

Tabela 7. Resultados obtidos com o CVRP e o 3L-CVRP para exemplos com paletes e até 2 veículos.

Ex.	Nº Cli.	Expressões (6)-(12)			Expressões (6)-(10), (12), com (41)-(45) e											
					—			(47)			(47), (48)-(51)			(47), (48)-(51), (52)		
		FO	Gap	Temp.	FO	Gap	Temp.	FO	Gap	Temp.	FO	Gap	Temp.	FO	Gap	Temp.
1	8	550	0,00	0,55	550	0,00	1,97	550	0,00	258,52	550	0,00	350,56	583	0,00	21379,50
2	10	628	0,00	1,05	631	0,00	106,89	631	0,00	1223,87	631	0,00	2278,37	668	5,54	28800,00
3	12	706	0,00	3,00	728	0,00	369,17	728	0,00	1149,29	728	0,00	7322,19	848	14,15	28800,00
4	14	729	0,00	5,40	729	0,00	370,27	729	0,00	2883,82	751	2,93	28800,00	729	0,00	23643,13

Tabela 8. Resultados obtidos com o CVRP e o 3L-CVRP para exemplos com paletes e até 3 veículos.

Ex.	Nº Cli.	Expressões (6)-(12)			Expressões (6)-(10), (12), com (41)-(45) e											
					—			(47)			(47), (48)-(51)			(47), (48)-(51), (52)		
		FO	Gap	Temp.	FO	Gap	Temp.	FO	Gap	Temp.	FO	Gap	Temp.	FO	Gap	Temp.
1	8	631	0,00	1,17	631	0,00	9,29	631	0,00	2536,12	631	0,00	7064,87	739	14,61	28800,00
2	10	701	0,00	18,62	701	0,00	40,57	701	0,00	2446,51	701	0,00	17374,81	—	—	28800,00
3	12	801	0,00	4,30	801	0,00	37,18	807	0,74	28800,00	911	12,07	28800,00	—	—	28800,00
4	14	795	0,00	121,02	824	0,00	844,00	910	9,45	28000,00	944	12,71	28800,00	—	—	28800,00

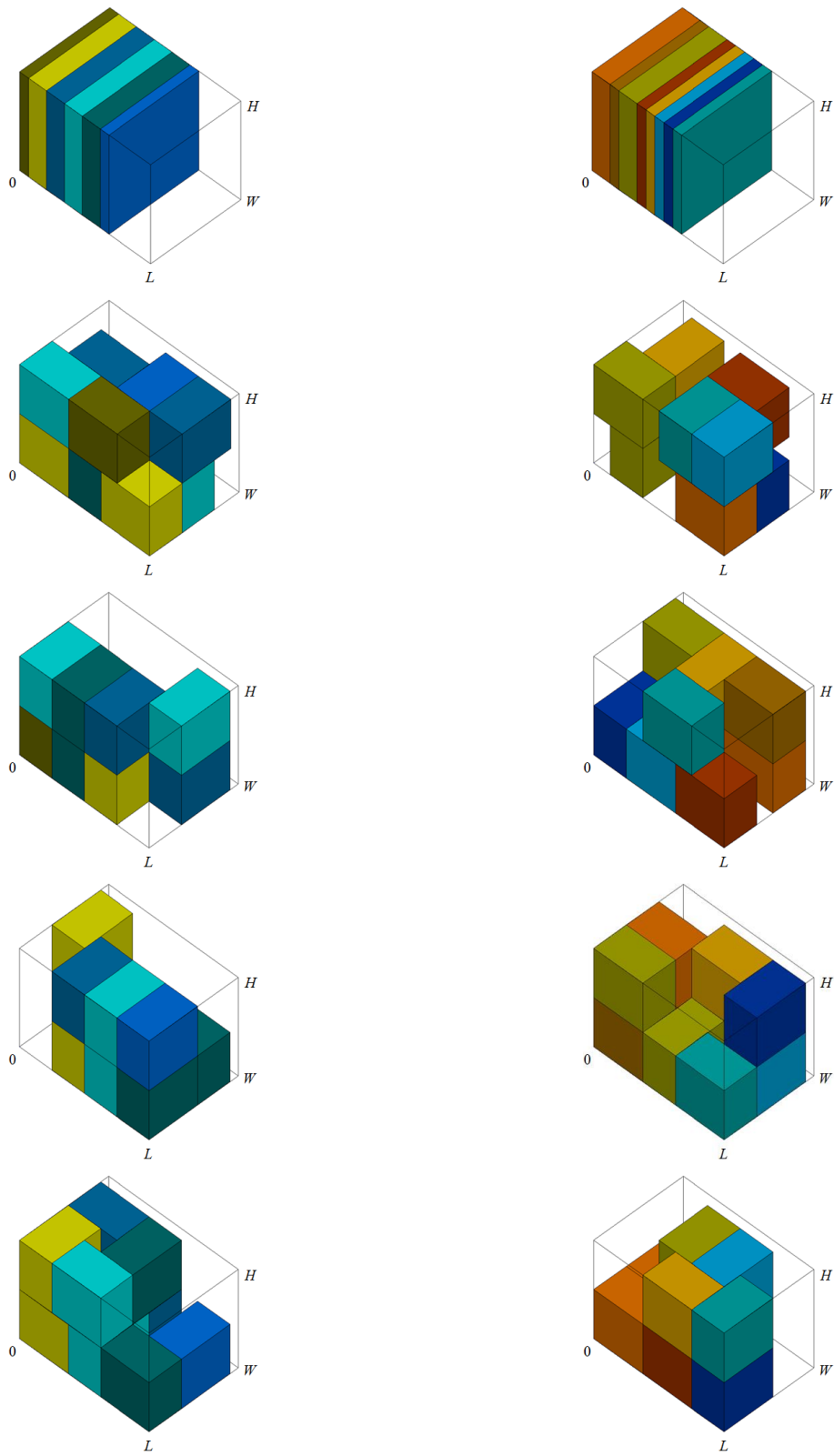


Figura 33. Padrões de empacotamento obtidos para o exemplo com paletes, 14 clientes e até 2 veículos.

## CAPÍTULO 4

### MÉTODOS DE SOLUÇÃO

---

#### 4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados métodos de solução desenvolvidos para o Problema Integrado de Roteamento e Carregamento de Veículos, o 3L-CVRP. Os algoritmos são baseados em combinações de heurísticas clássicas das literaturas de Roteamento de Veículos e de Carregamento de Contêineres. Para se resolver o Problema de Roteamento de Veículos, parte-se das clássicas heurísticas propostas por Clarke e Wright (1964) e Gillett e Miller (1974), e, para se resolver o Problema de Carregamento de Contêineres, parte-se da clássica heurística proposta por George e Robinson (1980) e de Variações desta propostas por Cecilio e Morabito (2004). Como tratam-se de algoritmos heurísticos, não há garantias de que as soluções obtidas para os respectivos problemas sejam ótimas. No entanto, estes algoritmos são capazes de resolver problemas envolvendo centenas de clientes e milhares de caixas de relativamente poucos tipos, que seriam intratáveis pelos modelos apresentados no Capítulo 3. Estas heurísticas também são utilizadas combinadas com dois algoritmos meta-heurísticos, *Simulated Annealing* e *Record-to-Record Travel*. A partir deste conjunto de algoritmos, três estratégias são então derivadas. Estas estratégias são suficientemente genéricas para permitir, por exemplo, que outros algoritmos não considerados neste trabalho sejam utilizados para resolver tanto o Problema de Roteamento de Veículos como o Problema de Carregamento de Contêineres.

Até onde se tem conhecimento, a literatura concentrou-se em apresentar métodos de solução capazes de resolver Problemas Integrados de Roteamento e Carregamento de Veículos com dezenas de clientes e dezenas de caixas de relativamente *muitos* tipos, o que configura a integração do CVRP com o 3D-R-SBSBPP (veja Seção 2.3.2). Não existem trabalhos na literatura que tenham apresentado métodos de solução capazes de resolver Problemas Integrados de Roteamento e Carregamento de Veículos com centenas de clientes e milhares de caixas de relativamente *poucos* tipos, o que configura a integração do CVRP com



o 3D-R-SSSCSP (veja Seção 2.3.2), e uma das contribuições deste trabalho é propor métodos de solução para tratar esta categoria específica de Problemas Integrados de Roteamento e Carregamento de Veículos, tendo como motivação visitas realizadas a uma empresa transportadora de mercadorias, em que esta configuração foi evidenciada (veja Seção 2.5.1).

Por fim, são apresentados os resultados obtidos com os experimentos computacionais realizados com estes métodos, implementados na linguagem C++. Os códigos de parte das implementações computacionais foram obtidos a partir de trabalhos desenvolvidos previamente em Groër (2008) e Cecilio (2003). Todos os experimentos foram realizados em um microcomputador PC Core i7 2.10 GHz, 8.0 GB e sistema operacional Windows. Foram considerados exemplos baseados na literatura de Roteamento de Veículos e em pedidos reais de cargas, bem como exemplos baseados em um caso real em que o problema ocorre. O capítulo termina com alguns resultados de exemplos gerados aleatoriamente, de natureza exploratória, de modo a verificar o comportamento dos métodos propostos diante do aumento da heterogeneidade da carga.

## 4.2 ALGORITMOS UTILIZADOS

Um dos algoritmos utilizados para se resolver o Problema de Roteamento de Veículos é o Algoritmo de Clarke & Wright (CLARKE; WRIGHT, 1964), também conhecido como Algoritmo das Economias (*Savings Algorithm*) (veja Apêndice B). Trata-se de um algoritmo heurístico construtivo que se baseia no conceito de “economias” (*savings*). Este conceito basicamente expressa as economias de custo obtidas ao se unir dois roteiros em um único roteiro. O outro algoritmo utilizado para se resolver o Problema de Roteamento de Veículos é o Algoritmo de Gillet & Miller (GILLET; MILLER, 1974), também conhecido como Algoritmo de Varredura (*Sweep Algorithm*) (veja Apêndice C). Trata-se de um algoritmo heurístico construtivo que se baseia no conceito de “agrupar primeiro, rotear depois” (*cluster first, route second*). Este conceito basicamente visa construir conjuntos de clientes, e então, para cada conjunto, construir um roteiro, o que equivale a resolver um Problema do Caixeiro Viajante. As estratégias desenvolvidas utilizam ora um ora outro destes algoritmos.

Um dos algoritmos utilizados para se resolver o Problema de Carregamento de Contêineres é o algoritmo de George & Robinson (GEORGE; ROBINSON, 1980) (veja Apêndice D). Trata-se de um algoritmo heurístico construtivo, que se baseia na construção de

“paredes virtuais” (camadas verticais). O algoritmo considera restrições geométricas e garante implicitamente restrições de estabilidade vertical. Não há restrições quanto à orientação das caixas, nem quanto ao empilhamento/fragilidade, embora o algoritmo possa ser facilmente adaptado para tratar estas situações. O algoritmo preenche o contêiner construindo camadas ao longo do comprimento  $L$ , do fundo até a entrada, combinando espaços vazios entre camadas para aumentar a utilização do espaço disponível. Uma camada é definida como uma seção de comprimento do contêiner na sua completa largura  $W$  e altura  $H$ . O comprimento de cada camada é determinado pelo comprimento do tipo de caixa escolhido para iniciar o preenchimento da camada.

Os outros algoritmos utilizados para se resolver o Problema de Carregamento de Contêineres foram propostos por Cecilio e Morabito (2004), que, baseando-se no trabalho de George e Robinson (1980), propuseram 5 Variações para este algoritmo (veja Apêndice E). A primeira variação, chamada “Refinamento”, consiste em uma simples alteração no Algoritmo Selecciona 2 original, que é o algoritmo que escolhe o tipo de caixa para os espaços que sobraram na camada. Ao se verificar se algum tipo de caixa não fechado preenche mais de uma coluna completa no espaço selecionado, ao invés de simplesmente escolher o tipo de caixa que melhor preenche a maior área da base do espaço, é verificado se pode ser feita uma combinação de caixas iguais ao longo do comprimento do espaço. A partir desta combinação, escolhe-se o tipo que resultar em uma melhor utilização da área da base do espaço. A segunda variação, chamada “Arranjo”, executa 60 vezes o Algoritmo de George & Robinson para determinar qual o melhor padrão de empacotamento para o contêiner todo, esgotando todas as possibilidades de arranjos, i.e., em cada iteração um arranjo diferente de três dos cinco critérios de prioridades é utilizado. O melhor resultado, em termos de volume total empacotado, é atualizado em cada iteração. A terceira variação consiste basicamente na segunda variação com o Algoritmo Selecciona 2 (refinamento). A quarta variação, chamada “Camada”, executa 60 vezes o Algoritmo de George & Robinson para determinar qual o melhor padrão de empacotamento para cada camada, esgotando todas as possibilidades de arranjos, i.e., em cada iteração um arranjo diferente de três dos cinco critérios de prioridades é utilizado. O melhor resultado, para cada camada, é determinado pela razão (volume de caixas empacotadas)/(volume parcial do contêiner utilizado), i.e., o resultado será tanto melhor quanto mais “densa” for a camada. A quinta variação consiste basicamente na quarta variação com o Algoritmo Selecciona 2 (refinamento).

É importante notar que, no caso da resolução do Problema Integrado de Roteamento e Carregamento de Veículos, o Algoritmo de George & Robinson e as 5

Variações de Cecilio & Morabito (2004) precisam ser adaptados para tratar considerações de múltiplos destinos. No caso do Algoritmo de George & Robinson, ele é chamado para verificar a factibilidade, do ponto de vista do empacotamento, para cada um dos roteiros gerados. O algoritmo é iniciado com o conjunto de caixas do último cliente a ser visitado no roteiro. Uma vez empacotado este conjunto de caixas, inicia-se o empacotamento do conjunto de caixas do penúltimo cliente a ser visitado no roteiro, e assim sucessivamente, até o conjunto de caixas do primeiro cliente a ser visitado no roteiro. Ao invés de iniciar sempre uma nova camada no veículo, é verificado se o conjunto de caixas de um determinado cliente cabe nos espaços vazios que sobraram na camada anterior. Se, ao final do empacotamento de qualquer dos clientes, o número de caixas empacotadas for menor que o número de caixas requeridas, então o empacotamento é infactível, e não é preciso considerar os conjuntos de caixas dos demais clientes.

No caso do Algoritmo Arranjo, a adaptação é semelhante a do Algoritmo de George & Robinson original, com a diferença que aquele é chamado 60 vezes para verificar a factibilidade, do ponto de vista do empacotamento, para cada um dos roteiros gerados. Se, em uma dada iteração, ao final do empacotamento de qualquer dos clientes, o número de caixas empacotadas for menor que o número de caixas requeridas, então o empacotamento é infactível, e não é preciso considerar os conjuntos de caixas dos demais clientes naquela iteração. Além disso, se, ao final de qualquer uma das 60 iterações, o número de caixas empacotadas for igual ao número de caixas requeridas, então o empacotamento é factível, e não é preciso considerar as demais iterações. No caso do Algoritmo Camada, a adaptação é um pouco mais complicada, pois cada camada pode conter caixas de mais de um cliente. Ou seja, se, por exemplo, após 60 iterações, a melhor primeira camada contiver todas as caixas do último cliente a ser visitado no roteiro mais uma parte das caixas do penúltimo cliente a ser visitado no roteiro, então a definição da segunda melhor camada precisa necessariamente iniciar com o restante das caixas que sobraram deste cliente. Isto é, a sequência de clientes precisa ser atualizada ao longo do preenchimento do veículo.

Com base nisto, a verificação da factibilidade do carregamento de cada veículo é feita por um conjunto de algoritmos baseados no Algoritmo de George & Robinson original. Ou seja, a factibilidade é verificada, em sequência, pelo Algoritmo de George & Robinson original, pelo Algoritmo de George & Robinson com o Algoritmo Selecciona 2 (refinamento), pelo Algoritmo Arranjo, pelo Algoritmo Arranjo com o Algoritmo Selecciona 2 (refinamento), pelo Algoritmo Camada, e pelo Algoritmo Camada com o Algoritmo Selecciona 2

(refinamento). Se a factibilidade do carregamento for verificada por qualquer um destes algoritmos, então os demais restantes não precisam ser chamados.

Neste trabalho são empregados dois operadores de busca local, que consideram estruturas de vizinhança apenas do Problema de Roteamento de Veículos isoladamente. Tratam-se dos operadores Movimento 1-Ponto e Movimento 2-Opt (veja Apêndice F). Ambos os operadores realizam tanto movimentos intra-roteiro quanto movimentos inter-roteiros.

Um dos algoritmos meta-heurísticos utilizados neste trabalho é o Algoritmo *Simulated Annealing*, proposto originalmente por Kirkpatrick *et al.* (1983) (veja Apêndice G). Este algoritmo tem como inspiração o processo metalúrgico do recozimento. Neste processo natural um material é aquecido e então resfriado lentamente sob condições controladas, de modo a aumentar o tamanho dos cristais no material e reduzir seus defeitos. Este processo melhora a resistência e a durabilidade do material. O aquecimento aumenta a energia dos átomos permitindo que eles se movam com maior liberdade, enquanto um programa de resfriamento lento permite que um estado de baixa energia seja atingido. Como analogia, o algoritmo tem como objetivo encontrar o estado de custo mínimo no espaço de busca. Para tal, a estratégia de aceitação de novas soluções utiliza uma função probabilística que se torna mais exigente com os custos das soluções conforme o tempo de execução do algoritmo avança.

O outro algoritmo meta-heurístico utilizado neste trabalho é o Algoritmo *Record-to-Record Travel*, proposto originalmente por Dueck (1993) (veja Apêndice H). Este algoritmo pode ser tratado como uma versão determinística do Algoritmo *Simulated Annealing*. O algoritmo alterna entre duas fases: uma fase de diversificação e uma fase de melhoria. Na fase de diversificação o objetivo é aceitar alguns movimentos que possam piorar (mas não muito) a melhor solução encontrada até então, e tentar explorar novas regiões do espaço de busca. Esta fase é seguida por uma fase de melhoria, em que apenas movimentos que melhorem a solução são permitidos, conforme busca-se por um mínimo local no espaço de busca. O algoritmo termina após ter sido incapaz de escapar de um mínimo local depois de algumas tentativas.

Os algoritmos descritos nesta seção e utilizados nas seções seguintes são capazes de resolver Problemas Integrados de Roteamento e Carregamento de Veículos com centenas de clientes e milhares de caixas de relativamente poucos tipos, são relativamente simples de serem implementados, razoavelmente flexíveis para poder incluir considerações comumente encontradas na prática, e normalmente garantem soluções relativamente boas em tempos computacionais aceitáveis em situações reais.

### 4.3 ESTRATÉGIA 1 – CARREGAMENTO APÓS O ROTEAMENTO

A primeira estratégia de solução avalia a geração dos roteiros e dos padrões de empacotamento separada e sequencialmente. O algoritmo desta estratégia é baseado na definição de um parâmetro de perda de estiva como um dado de entrada do problema. *Perda de estiva*  $\theta \in [0,1]$  é definida como sendo a fração de espaço vazio não preenchido do contêiner, e é naturalmente um dado de saída do Problema de Carregamento de Contêineres. Por outro lado, soluções do Problema de Roteamento de Veículos (resolvido, por exemplo, pelo Algoritmo de Clarke & Wright (Apêndice B), ou pelo Algoritmo de Gillett & Miller (Apêndice C)) que tenham veículos com elevada utilização de capacidade, provavelmente são infactíveis quando o respectivo Problema de Carregamento de Contêineres (resolvido, por exemplo, pelo Algoritmo de George & Robinson (Apêndice D) e as Variações de Cecilio & Morabito (Apêndice E)) for verificado. Como já comentado na Seção 2.5, isso ocorre pois as demandas são formadas por itens discretos, e é pouco provável que as cargas se acomodem perfeitamente de acordo com a forma dos veículos, além de haver restrições adicionais de estabilidade, múltiplos destinos, empilhamento, etc. Por exemplo, em Problemas de Carregamento de Contêineres, são comuns perdas de estiva de 10% ou mais da capacidade dos contêineres.

Uma estratégia seria se antecipar a possíveis soluções infactíveis e determinar *a priori* o valor da perda de estiva. Por exemplo, se os veículos possuem capacidade nominal  $C = 100$ , e acredita-se que a perda de estiva possa ser de 10%, em média, então o Algoritmo de Clarke & Wright (ou o Algoritmo de Gillett & Miller) passaria a gerar soluções considerando veículos com capacidade  $C' = 90$ , ao invés de  $C = 100$ , na tentativa de que os padrões de empacotamento obtidos pelo Algoritmo de George & Robinson sejam todos factíveis com capacidade nominal  $C = 100$ . Se ao menos um padrão de empacotamento obtido for infactível, então aumenta-se o valor da perda de estiva para, por exemplo, 15%, e o Algoritmo de Clarke & Wright (ou o Algoritmo de Gillett & Miller) passaria a gerar soluções considerando veículos com capacidade  $C'' = 85$ . Por outro lado, se todos os padrões de empacotamento obtidos pelo Algoritmo de George & Robinson forem factíveis, então diminui-se o valor da perda de estiva para, por exemplo, 5%, e o Algoritmo de Clarke & Wright (ou o Algoritmo de Gillett & Miller) passaria a gerar soluções considerando veículos com capacidade  $C'' = 95$ . Este procedimento de aumentar ou diminuir o valor da perda de estiva seria realizado para se tentar obter soluções factíveis cada vez melhores para o

problema integrado, ora tentando obter soluções factíveis ou de melhor qualidade para o Subproblema de Carregamento de Contêineres, ora tentando obter soluções factíveis ou de melhor qualidade para o Subproblema de Roteamento de Veículos. O procedimento teria fim após não ser mais possível melhorar localmente uma solução obtida para o Problema de Roteamento de Veículos sem obter uma solução inactível para o Problema de Carregamento de Contêineres. Note que a “adaptação” contínua do valor do parâmetro de perda de estiva tenta balancear o *trade-off* entre os dois problemas, de, por um lado, se tentar obter roteiros bons do ponto de vista da distância total percorrida, mas resultando eventualmente em padrões de empacotamento inactíveis, e, por outro lado, de se tentar obter padrões de empacotamento factíveis, mas em detrimento de roteiros ruins do ponto de vista da distância total percorrida. Sejam  $LSC$  o limite superior de capacidade,  $LIC$  o limite inferior de capacidade, e  $\varepsilon$  um valor suficientemente pequeno (p.e.,  $10^{-5}$ ). O pseudocódigo deste algoritmo para o 3L-CVRP é apresentado a seguir:

---

**Algoritmo 1:** Perda de Estiva

---

Entradas: Um conjunto de clientes, com posições e demandas conhecidas, e que devem ser visitados por um único veículo, com capacidade conhecida; Um conjunto de caixas disponíveis para serem empacotadas dentro dos veículos, com tipos, dimensões e quantidades (por cliente) conhecidos; Uma perda de estiva  $\theta$ .

Saídas: Uma solução factível para o 3L-CVRP.

1. Faça  $LSC$  igual a capacidade nominal  $C$  e  $LIC$  igual a 0.
  2. Gere um conjunto de roteiros usando o Algoritmo de Clarke & Wright ou o Algoritmo de Gillett & Miller.
  3. Aplique os operadores de Busca Local ou o Algoritmo *Simulated Annealing* ou o Algoritmo *Record-to-Record Travel* sobre a solução encontrada.
  4. **para** cada roteiro gerado **faça**
  5.     Gere o padrão de empacotamento usando o Algoritmo de George & Robinson e as Variações de Cecilio & Morabito.
  6. **fim para**
  7. **se** ao menos um dos padrões de empacotamento é inactível **então**
  8.      $C = (1 - \theta) \cdot C$ .
  9.     **enquanto**  $LSC - LIC > \varepsilon$  **faça**
  10.         Gere um conjunto de roteiros usando o Algoritmo de Clarke & Wright ou o Algoritmo de Gillett & Miller.
  11.         Aplique os operadores de Busca Local ou o Algoritmo *Simulated Annealing* ou o Algoritmo *Record-to-Record Travel* sobre a solução encontrada.
  12.         **para** cada roteiro gerado **faça**
  13.             Gere o padrão de empacotamento usando o Algoritmo de George & Robinson e as Variações de Cecilio & Morabito.
  14.         **fim para**
  15.         **se** ao menos um dos padrões de empacotamento é inactível **então**
  16.              $LSC = C$ .
  17.              $C = (LSC + LIC)/2$ .
-

---

```

18.     se não
19.          $LIC = C$  .
20.          $C = (LSC + LIC)/2$  .
21.     fim se
22. fim enquanto
23. fim se

```

---

Note que esta é a versão mais completa do Algoritmo 1. Isto é, após a resolução do Subproblema de Roteamento de Veículos (linhas 2 e 10), utilizando o Algoritmo de Clarke & Wright (Apêndice B) ou o Algoritmo de Gillett & Miller (Apêndice C), está incluída uma etapa de tentativa de melhoria da qualidade da solução gerada (linhas 3 e 11), utilizando os operadores de Busca Local com movimentos de 1-Ponto ou 2-Opt (Apêndice F), ou estes operadores em algoritmos meta-heurísticos como *Simulated Annealing* (Apêndice G) ou *Record-to-Record Travel* (Apêndice H).

A Figura 34 ilustra um exemplo com a Estratégia 1. No início, o Subproblema de Roteamento de Veículos é resolvido com valor de *perda de estiva*  $\theta = 0$ , o que equivale considerar 100,000% da capacidade de cada veículo (i.e., a capacidade nominal de cada um deles) (veja o ponto a). Para os roteiros obtidos, ao menos um dos respectivos padrões de empacotamento obtidos com o Subproblema de Carregamento de Contêineres é inactível. Com isso, resolve-se novamente o Subproblema de Roteamento de Veículos com valor de *perda de estiva*  $\theta = 0,50$ , o que equivale a considerar 50,000% da capacidade de cada veículo (veja o ponto b). O plano em vermelho indica uma abstração para o limite de capacidade considerado pelo Subproblema de Roteamento de Veículos. Para os roteiros obtidos, todos os respectivos padrões de empacotamento obtidos com o Subproblema de Carregamento de Contêineres são factíveis. Com isso, resolve-se novamente o Subproblema de Roteamento de Veículos com capacidade de  $(a + b)/2$ , o que equivale a considerar 75,000% da capacidade de cada veículo (veja o ponto c). Para os roteiros obtidos, ao menos um dos respectivos padrões de empacotamento obtidos com o Subproblema de Carregamento de Contêineres é inactível. Com isso, resolve-se novamente o Subproblema de Roteamento de Veículos com capacidade  $(b + c)/2$ , o que equivale a considerar 62,500% da capacidade de cada veículo (veja o ponto d). Para os roteiros obtidos, todos os respectivos padrões de empacotamento obtidos com o Subproblema de Carregamento de Contêineres são factíveis. Com isso, resolve-se novamente o Subproblema de Roteamento de Veículos com capacidade  $(c + d)/2$ , o que equivale a considerar 68,750% da capacidade de cada veículo (veja o ponto e). Para os roteiros obtidos, ao menos um dos respectivos padrões de empacotamento obtidos com o

Subproblema de Carregamento de Contêineres é infactível. Com isso, resolve-se novamente o Subproblema de Roteamento de Veículos com capacidade  $(d+e)/2$ , o que equivale a considerar 65,625% da capacidade de cada veículo (veja o ponto f). Para os roteiros obtidos, ao menos um dos respectivos padrões de empacotamento obtidos com o Subproblema de Carregamento de Contêineres é infactível. O algoritmo prossegue até que  $LSC - LIC \leq \varepsilon$ .

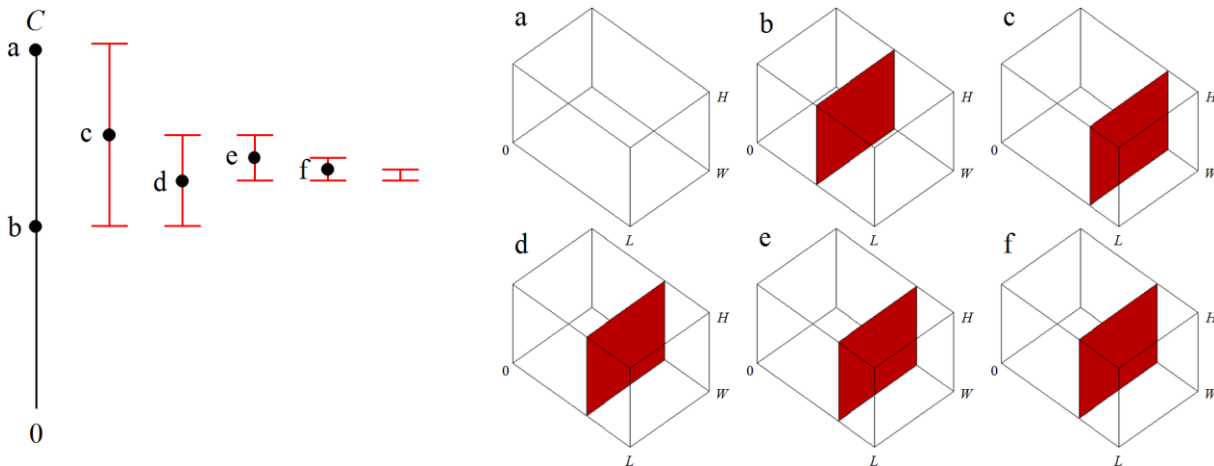


Figura 34. Estratégia 1- carregamento após o roteamento.

#### 4.4 ESTRATÉGIA 2 – CARREGAMENTO DURANTE O ROTEAMENTO

A segunda estratégia de solução avalia a geração dos roteiros simultaneamente à avaliação dos padrões de empacotamento. O algoritmo desta estratégia consiste em verificar, a cada tentativa de união de roteiros, no caso do Algoritmo de Clarke & Wright (Apêndice B), ou a cada tentativa de atribuição de clientes a veículos, no caso do Algoritmo de Gillett & Miller (Apêndice C), se o padrão de empacotamento obtido é factível ou não, para o que se utiliza o Algoritmo de George & Robinson (Apêndice D) e as Variações de Cecilio & Morabito (Apêndice E). No entanto, no início da construção dos roteiros, é pouco provável que os padrões de empacotamento obtidos sejam infactíveis, visto que os volumes dos veículos estão pouco ocupados e normalmente há espaço suficiente para a acomodação adequada das caixas. Portanto, para evitar que o Algoritmo de George & Robinson e as Variações de Cecilio & Morabito sejam chamados um número desnecessário de vezes, o que aumentaria os tempos computacionais, define-se um parâmetro de *tolerância*  $\tau \in [0,1]$  como sendo a fração de espaço preenchido dos veículos a partir da qual o Algoritmo de George & Robinson e as Variações de Cecilio & Morabito passam a ser chamados para verificar a factibilidade do empacotamento.



Isto é, se ao unir duas rotas, ou se um cliente for atribuído a um veículo, e o volume ocupado por toda a carga for maior que  $\tau \cdot C$ , então chama-se o Algoritmo de George & Robinson e as Variações de Cecilio & Morabito. Para uma dada tolerância de, por exemplo,  $\tau = 0,60$  (i.e, 60%), cada roteiro passa a ser verificado pelo Algoritmo de George & Robinson e as Variações de Cecilio & Morabito apenas após o seu volume (“líquido”) ocupado ultrapassar 60% da capacidade nominal  $C$  do veículo. Note que, em um extremo, se  $\tau = 0$ , o Algoritmo de George & Robinson e as Variações de Cecilio & Morabito são sempre chamados, e, no outro extremo, se  $\tau = 1$ , o Algoritmo de George & Robinson e as Variações de Cecilio & Morabito nunca são chamados, com o que tem-se a solução do Problema de Roteamento de Veículos sem nenhuma restrição de empacotamento tridimensional, o que provavelmente leva a uma solução infactível para o 3L-CVRP. O pseudocódigo deste algoritmo para o 3L-CVRP é apresentado a seguir, tanto para o Algoritmo de Clarke & Wright quanto para o Algoritmo de Gillett & Miller:

---

**Algoritmo 2:** Tolerância (para o Algoritmo de Clarke & Wright)

---

Entradas: Um conjunto de clientes, com posições e demandas conhecidas, e que devem ser visitados por um único veículo, com capacidade conhecida; Um conjunto de caixas disponíveis para serem empacotadas dentro dos veículos, com tipos, dimensões e quantidades (por cliente) conhecidos; Uma tolerância  $\tau$ .

Saídas: Uma solução factível para o 3L-CVRP.

1. Crie um roteiro para cada cliente.
  2. **para** todos os pares de clientes **faça**
  3.     Calcule os valores das economias e coloque-os em uma lista.
  4. **fim para**
  5. Coloque a lista em ordem não crescente dos valores das economias.
  6. **enquanto** for possível unir roteiros **faça**
  7.     Inicie no par de clientes com o maior valor de economia.
  8.     **se** o volume empacotado do roteiro resultante for maior que  $\tau \cdot C$  **então**
  9.         Gere o padrão de empacotamento usando o Algoritmo de George & Robinson e as Variações de Cecilio & Morabito.
  10.     **se** o padrão de empacotamento obtido é factível **então**
  11.         Junte os roteiros.
  12.     **fim se**
  13.     **se não**
  14.         Junte os roteiros.
  15.     **fim se**
  16.     Remova da lista o par de clientes e a respectiva economia.
  17. **fim enquanto**
  18. Aplique os operadores de Busca Local ou o Algoritmo *Simulated Annealing* ou o Algoritmo *Record-to-Record Travel* sobre a solução encontrada, mantendo-se a factibilidade dos padrões de empacotamento encontrados durante toda a execução.
-

---

**Algoritmo 3:** Tolerância (para o Algoritmo de Gillett & Miller)
 

---

Entradas: Um conjunto de clientes, com posições e demandas conhecidas, e que devem ser visitados por um único veículo, com capacidade conhecida; Um conjunto de caixas disponíveis para serem empacotadas dentro dos veículos, com tipos, dimensões e quantidades (por cliente) conhecidos; Uma tolerância  $\tau$ .

Saídas: Uma solução factível para o 3L-CVRP.

1. **enquanto** houver clientes não roteados **faça**
  2.     Escolha um veículo ainda não utilizado.
  3.     **enquanto** a capacidade do veículo não for excedida **faça**
  4.         Inicie no cliente ainda não roteado com o menor ângulo.
  5.         **se** o volume empacotado do roteiro resultante for maior que  $\tau \cdot C$  **então**
  6.             Gere o padrão de empacotamento usando o Algoritmo de George & Robinson e as Variações de Cecilio & Morabito.
  7.             **se** o padrão de empacotamento obtido é factível **então**
  8.                 Atribua o cliente ao veículo.
  9.             **fim se**
  10.         **se não**
  11.             Atribua o cliente ao veículo.
  12.         **fim se**
  13.     **fim enquanto**
  14. **fim enquanto**
  15. Aplique os operadores de Busca Local ou o Algoritmo *Simulated Annealing* ou o Algoritmo *Record-to-Record Travel* sobre a solução encontrada, mantendo-se a factibilidade dos padrões de empacotamento encontrados durante toda a execução.
- 

Note que estas são as versões mais completas dos Algoritmos 2 e 3. Isto é, após a resolução do Subproblema de Roteamento de Veículos (linha 17 no Algoritmo 2 e linha 14 no Algoritmo 3), utilizando o Algoritmo de Clarke & Wright (Apêndice B) ou o Algoritmo de Gillett & Miller (Apêndice C), está incluída uma etapa de tentativa de melhoria da qualidade da solução gerada (linha 18 no Algoritmo 2 e linha 15 no Algoritmo 3), utilizando os operadores de Busca Local com movimentos de 1-Ponto ou 2-Opt (Apêndice F), ou estes operadores em algoritmos meta-heurísticos como *Simulated Annealing* (Apêndice G) ou *Record-to-Record Travel* (Apêndice H).

A Figura 35 ilustra um exemplo com a Estratégia 2. No início, o Subproblema de Roteamento de Veículos é resolvido como se as demandas dos clientes fossem “líquidas” (i.e., unidimensionais). Com isso, são gerados dois roteiros R1 e R2. O plano em vermelho indica uma abstração para o limite de *tolerância* do carregamento que, uma vez ultrapassado, “ativa” o Subproblema de Carregamento de Contêineres. Neste caso, o valor de *tolerância* é de  $\tau = 0,50$ , o que equivale a “aguardar” cada veículo ficar 50% cheio para começar a verificar se o respectivo padrão de empacotamento é ou não factível. Esta situação perdura até o cliente 3 ser incluído no roteiro R1 e o cliente 5 ser incluído no roteiro R2. Neste momento

os roteiros são: R1 (1-3-11-2-14-1) e R2 (1-5-13-9-10-6-1) (veja os respectivos padrões de empacotamento intermediários). Por simplicidade, os arcos conectando os clientes e o depósito não estão ilustrados. A inclusão do cliente 15 no roteiro R1 faz com que a tolerância de 50% do valor da capacidade nominal seja ultrapassada, o que ativa o Subproblema de Carregamento de Contêineres para verificar se esta inclusão resulta em um padrão de empacotamento factível. O mesmo ocorre com a inclusão do cliente 4 no roteiro R2. Neste caso, ambos os padrões de empacotamento resultam factíveis (veja os respectivos padrões de empacotamento finais). Neste momento os roteiros são: R1 (1-15-3-11-2-14-1) e R2 (1-4-5-13-9-10-6-1). O algoritmo prossegue de acordo com cada algoritmo construtivo para o Subproblema de Roteamento de Veículos (i.e., Algoritmo de Clarke & Wright ou Algoritmo de Gillett & Miller), ou então com cada algoritmo de melhoria (i.e., operadores de Busca Local ou Algoritmo *Simulated Annealing* ou Algoritmo *Record-to-Record Travel*).

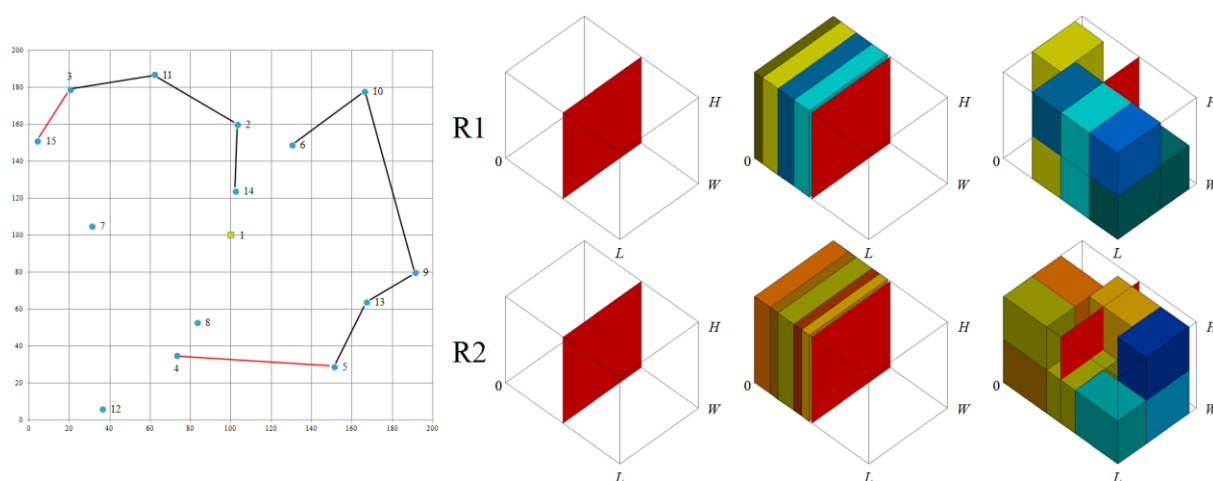


Figura 35. Estratégia 2- carregamento durante o roteamento.

## 4.5 ESTRATÉGIA 3 – MISTO ENTRE AS ESTRATÉGIAS 1 E 2

A terceira estratégia de solução consiste basicamente em utilizar a solução gerada pela Estratégia 1 dentro de um algoritmo meta-heurístico, como *Simulated Annealing* (Apêndice G) ou *Record-to-Record Travel* (Apêndice H), tendo-se a preocupação de manter a factibilidade dos padrões de empacotamento ao se aplicar os operadores de Busca Local (Apêndice F), para isso chamando-se o Algoritmo de George & Robinson e as Variações de Cecilio & Morabito sempre que o volume ocupado por toda a carga em cada veículo for maior que  $\tau \cdot C$ . O pseudocódigo deste algoritmo para o 3L-CVRP é apresentado a seguir:

---

**Algoritmo 4:** Perda de Estiva + Tolerância
 

---

Entradas: Um conjunto de clientes, com posições e demandas conhecidas, e que devem ser visitados por um único veículo, com capacidade conhecida; Um conjunto de caixas disponíveis para serem empacotadas dentro dos veículos, com tipos, dimensões e quantidades (por cliente) conhecidos; Uma perda de estiva  $\theta$ ; Uma tolerância  $\tau$ .

Saídas: Uma solução factível melhorada para o 3L-CVRP.

1. Faça  $LSC$  igual a capacidade nominal  $C$  e  $LIC$  igual a 0.
  2. Gere um conjunto de roteiros usando o Algoritmo de Clarke & Wright ou o Algoritmo de Gillett & Miller.
  3. Aplique o Algoritmo *Simulated Annealing* ou o Algoritmo *Record-to-Record Travel* sobre a solução encontrada.
  4. **para** cada roteiro gerado **faça**
  5.     Gere o padrão de empacotamento usando o Algoritmo de George & Robinson e as Variações de Cecilio & Morabito.
  6. **fim para**
  7. **se** ao menos um dos padrões de empacotamento é infactível **então**
  8.      $C = (1 - \theta) \cdot C$ .
  9.     **enquanto**  $LSC - LIC > \varepsilon$  **faça**
  10.         Gere um conjunto de roteiros usando o Algoritmo de Clarke & Wright ou o Algoritmo de Gillett & Miller.
  11.         Aplique o Algoritmo *Simulated Annealing* ou o Algoritmo *Record-to-Record Travel* sobre a solução encontrada.
  12.         **para** cada roteiro gerado **faça**
  13.             Gere o padrão de empacotamento usando o Algoritmo de George & Robinson e as Variações de Cecilio & Morabito.
  14.         **fim para**
  15.         **se** ao menos um dos padrões de empacotamento é infactível **então**
  16.              $LSC = C$ .
  17.              $C = (LSC + LIC) / 2$ .
  18.         **se não**
  19.              $LIC = C$ .
  20.              $C = (LSC + LIC) / 2$ .
  21.         **fim se**
  22.         **fim enquanto**
  23. **fim se**
  24. Aplique o Algoritmo *Simulated Annealing* ou o Algoritmo *Record-to-Record Travel* sobre a solução encontrada, mantendo-se a factibilidade dos padrões de empacotamento encontrados durante toda a execução.
- 

Note que nas primeiras aplicações dos Algoritmos *Simulated Annealing* ou do Algoritmo *Record-to-Record Travel* (linhas 3 e 11) não há a preocupação de manter ou mesmo de verificar a factibilidade da solução gerada sob o ponto de vista dos padrões de empacotamento, enquanto na última aplicação (linha 24) verifica-se e mantem-se a factibilidade da solução encontrada sempre que o volume ocupado por toda a carga em cada veículo for maior que  $\tau \cdot C$ .

## 4.6 RESULTADOS COMPUTACIONAIS E DISCUSSÃO

Nesta seção são apresentados e discutidos os resultados computacionais com as estratégias desenvolvidas, obtidos para o 3L-CVRP com restrições geométricas, de estabilidade vertical e de múltiplos destinos. Os experimentos computacionais tiveram como motivação a resolução de Problemas Integrados de Roteamento e Carregamento de Veículos com centenas de clientes e milhares de caixas de relativamente poucos tipos (veja Seção 2.5.1). Nas tabelas a seguir, as abreviações dos métodos se referem a:

CW64: Algoritmo de Clarke & Wright (Apêndice B)

GM74: Algoritmo de Gillett & Miller (Apêndice C)

CM04: Algoritmo de George & Robinson e Variações de Cecilio & Morabito (Apêndices D e E)

BL: Operadores de Busca Local (Apêndice F)

SA: Algoritmo *Simulated Annealing* (Apêndice G)

RTR: Algoritmo *Record-to-Record Travel* (Apêndice H)

Em todos os experimentos em que se fazem necessários, o valor de perda de estiva  $\theta$  utilizado foi de  $\theta = 0,50$  (Estratégias 1 e 3), enquanto o valor de tolerância  $\tau$  utilizado foi de  $\tau = 0,50$  (Estratégias 2 e 3). Da mesma forma, quando empregados, o Algoritmo *Simulated Annealing* (Apêndice G) é inicializado com os parâmetros  $\{T; L; I; \eta; N\} = \{2; 200; 2; 0,99; 10\}$ , enquanto o Algoritmo *Record-to-Record Travel* (Apêndice H) é inicializado com os parâmetros  $\{D; K; P; \delta; N\} = \{30; 5; 1; 0,01; 40\}$ . Os valores dos parâmetros utilizados nestes dois algoritmos meta-heurísticos são os valores *default* considerados em Groër (2008).

### 4.6.1 RESULTADOS DE EXEMPLOS BASEADOS NA LITERATURA

Em um primeiro conjunto de experimentos, foram considerados sete dos quatorze exemplos propostos por Christofides *et al.* (1979) para o Problema de Roteamento de Veículos Capacitado. Sete destes exemplos (os considerados neste trabalho) consideram apenas restrições de capacidade, enquanto os outros sete exemplos (que possuem o mesmo grafo dos anteriores) consideram, além das restrições de capacidade, restrições quanto a

máxima distância percorrida em cada roteiro. Os exemplos consideram matrizes de custos simétricas, com o número de nós  $n$  variando de 51 a 200. A coordenada do nó 1 (i.e., o depósito) é sempre a posição (0,0) de um sistema de coordenadas cartesianas. As coordenadas dos demais nós (i.e., os clientes) estão espalhadas em torno do depósito (com exceção do exemplo 6, em que os clientes estão mais concentrados em um dos lados do depósito).

Os veículos considerados possuem dimensões (em milímetros)  $(L, W, H) = (7320, 2480, 2630)$  e são equivalentes a um veículo do tipo toco (veja Figura 8) com capacidade até 6000 quilogramas (veja Seção 2.5.1). Os tipos de caixas e suas dimensões foram obtidos com a empresa transportadora visitada, que utiliza o equipamento CargoScan para obter as dimensões e o peso de cada caixa (veja Figura 9). Foram utilizados em todos os exemplos os mesmos 5 tipos de caixas (assume-se que as caixas podem ser posicionadas em qualquer orientação) com dimensões em milímetros. O número total de caixas varia de 2366 a 7731. A Tabela 9 apresenta, para cada exemplo, o número de clientes, o número de tipos de caixas e o número total de caixas. De modo a aproveitar os limitantes inferiores, conhecidos da literatura de Roteamento de Veículos, para cada um destes exemplos, traçou-se um paralelo entre a capacidade original dos veículos, como em Christofides *et al.* (1979), e o volume dos veículos do tipo toco anteriormente descritos. Com base nesta razão, para cada cliente, foi obtido um novo valor de demanda (em volume) que ultrapassasse minimamente o valor de demanda obtido a partir da proporção entre a capacidade original dos veículos, como em Christofides *et al.* (1979), e o volume dos veículos do tipo toco. O Apêndice I apresenta as dimensões e o número de caixas de cada tipo requeridas por cada cliente para o primeiro exemplo deste conjunto de experimentos.

Tabela 9. Resumo dos exemplos baseados em Christofides *et al.* (1979).

Ex.	Nº Cli.	Nº Tip.	Nº Cai.
1	50	5	2366
2	75	5	4751
3	100	5	3536
4	150	5	5417
5	199	5	7731
6	120	5	3335
7	100	5	4401

Além da ausência de restrições de orientação (i.e., as caixas podem girar livremente), define-se 100% de estabilidade vertical (o que é sempre garantido pelo

Algoritmo de George & Robinson e pelas Variações de Cecilio & Morabito), e valor de comprimento flexível  $\delta_{ik}$  infinito, desde que nenhuma caixa de um cliente que será visitado posteriormente no roteiro obstrua o acesso a uma caixa de qualquer cliente que será visitado anteriormente no roteiro. Não são consideradas restrições de empilhamento nem de fragilidade das caixas.

As Tabelas 10 e 11 apresentam os resultados obtidos com os algoritmos que tomam por base o Algoritmo de Clarke & Wright e o Algoritmo de Gillett & Miller, respectivamente, quando nenhuma restrição de empacotamento tridimensional é considerada (i.e., equivalente a resolver um Problema de Roteamento de Veículos com restrições de capacidade volumétrica apenas). Estas tabelas apresentam, para cada exemplo, o valor da função objetivo e o número de roteiros (ou veículos) presentes na melhor solução conhecida da literatura, segundo reportado por Cordeau *et al.* (2002). Ou seja, sem considerar o arranjo da carga dentro dos veículos e supondo, portanto, que a perda de estiva é igual a zero. Isso implica que as soluções obtidas pela literatura para estes exemplos não tem garantias de serem factíveis do ponto de vista do carregamento (e é bem provável que não sejam factíveis). Alguns tempos computacionais para os métodos da literatura obterem estas soluções, bem como algumas especificações dos microcomputadores utilizados, são também reportados por Cordeau *et al.* (2002). Também apresentam, para cada exemplo e para cada um dos algoritmos empregados, além do valor da função objetivo e do número de roteiros, o Gap (em %) obtido em relação à melhor solução conhecida da literatura para o Problema de Roteamento de Veículos, o tempo computacional (em segundos) e o valor de densidade máxima (em %) obtido (i.e., o veículo mais densamente empacotado). Estas tabelas também apresentam valores médios para este conjunto de exemplos, para o Gap, o tempo computacional e a densidade máxima de cada um dos algoritmos empregados.

Para este conjunto de exemplos, em termos de qualidade de solução, o algoritmo que teve o melhor desempenho foi o Algoritmo *Simulated Annealing* tomando por base o Algoritmo de Clarke & Wright, tendo obtido Gap médio de 2,78% em um tempo computacional médio de 4,46 segundos. Em seguida aparece o Algoritmo *Record-to-Record Travel* tomando por base o Algoritmo de Clarke & Wright, tendo obtido Gap médio de 3,24% em um tempo computacional médio de 2,03 segundos. Também é interessante notar os altos valores de densidade máxima obtidos em todos os exemplos, o que evidencia que estas soluções provavelmente não são factíveis do ponto de vista do carregamento.

As Tabelas 12 a 17 apresentam soluções obtidas para o 3L-CVRP com restrições geométricas, de estabilidade vertical e de múltiplos destinos. Elas apresentam, para cada exemplo e para cada um dos algoritmos empregados, o valor da função objetivo, o número de roteiros, o desvio (em %) obtido em relação às respectivas soluções sem considerar restrições de empacotamento tridimensional (arranjo da carga), o tempo computacional (em segundos) e o valor de densidade máxima (em %) obtido (i.e., o veículo mais densamente empacotado). Também apresentam valores médios para este conjunto de exemplos, para o desvio, o tempo computacional e a densidade máxima de cada um dos algoritmos empregados. As Tabelas 12, 14 e 16 apresentam os resultados que tomam por base o Algoritmo de Clarke & Wright, respectivamente para as Estratégias 1, 2 e 3, enquanto que, para as mesmas estratégias, as Tabelas 13, 15 e 17, respectivamente, apresentam os resultados que tomam por base o Algoritmo de Gillett & Miller.

Ainda, nas Tabelas 12 a 17, para cada um dos exemplos: (i) os resultados destacados em *itálico* denotam os melhores resultados obtidos dentro de cada estratégia, ora tomando por base o Algoritmo de Clarke & Wright, ora tomando por base o Algoritmo de Gillett & Miller; (ii) os resultados destacados em **negrito** denotam os melhores resultados gerais obtidos dentro de cada estratégia; (iii) os resultados marcados com um “\*” a sua frente denotam os melhores resultados gerais entre todas as estratégias.

No caso da Estratégia 1 (veja Tabelas 12 e 13, valores marcados em **negrito**), o Algoritmo *Simulated Annealing* foi responsável pela melhor solução encontrada para 1 dos 7 exemplos (1 tomando por base o Algoritmo de Clarke & Wright), enquanto o Algoritmo *Record-to-Record Travel* foi responsável pela melhor solução encontrada para 6 dos 7 exemplos (2 tomando por base o Algoritmo de Clarke & Wright e 4 tomando por base o Algoritmo de Gillett & Miller). Já no caso da Estratégia 2 (veja Tabelas 14 e 15, valores marcados em **negrito**), o Algoritmo *Simulated Annealing* foi responsável pela melhor solução encontrada para 3 dos 7 exemplos (2 tomando por base o Algoritmo de Clarke & Wright e 1 tomando por base o Algoritmo de Gillett & Miller), enquanto o Algoritmo *Record-to-Record Travel* foi responsável pela melhor solução encontrada para 4 dos 7 exemplos (3 tomando por base o Algoritmo de Clarke & Wright e 1 tomando por base o Algoritmo de Gillett & Miller). Por fim, no caso da Estratégia 3 (veja Tabelas 16 e 17, valores marcados em **negrito**), o Algoritmo *Simulated Annealing* foi responsável pela melhor solução encontrada para 1 dos 7 exemplos (1 tomando por base o Algoritmo de Clarke & Wright ou o Algoritmo de Gillett & Miller), enquanto o Algoritmo *Record-to-Record Travel* foi responsável pela melhor solução



encontrada para 6 dos 7 exemplos (4 tomando por base o Algoritmo de Clarke & Wright e 2 tomando por base o Algoritmo de Gillett & Miller).

Para este conjunto de experimentos, considerando todas as estratégias (soma das colunas “Intra” na Tabela 18, valores destacados em negrito nas Tabelas 12 a 17), o algoritmo que teve o melhor desempenho foi o Algoritmo *Record-to-Record Travel* tomando por base o Algoritmo de Clarke & Wright, tendo encontrado 9 melhores soluções (referentes a 7 dos 7 exemplos), seguido pelo Algoritmo *Record-to-Record Travel* tomando por base o Algoritmo de Gillett & Miller, tendo encontrado 7 melhores soluções (referentes a 5 dos 7 exemplos). Por outro lado, considerando todos os algoritmos (soma das linhas “Inter” na Tabela 18, valores marcados com “\*” nas Tabelas 12 a 17), a estratégia que teve melhor desempenho foi a Estratégia 2, tendo encontrado 5 melhores soluções (referentes a 5 dos 7 exemplos), seguida da Estratégia 3, tendo encontrado 2 melhores soluções (referentes a 2 dos 7 exemplos).

No caso da Estratégia 1, ainda é interessante notar que um método melhor para o Problema de Roteamento de Veículos não necessariamente leva a soluções melhores para o Problema Integrado de Roteamento e Carregamento de Veículos. Isto ocorre com o Algoritmo de Clarke & Wright com os operadores de Busca Local para os exemplos 4 e 5 (veja Tabela 12), cujos valores de função objetivo são piores do que os obtidos com o Algoritmo de Clarke & Wright (sem nenhuma melhoria). Isto se deve à natureza desta estratégia, uma vez que, ao variar a capacidade dos veículos, métodos diferentes podem gerar roteiros diferentes e, portanto, seguir por caminhos diferentes durante a construção da solução para o Problema Integrado de Roteamento e Carregamento de Veículos (veja Figura 34). Além disso, no caso da Estratégia 2, também é interessante notar a presença de um valor negativo para o desvio. Isso ocorre com o Algoritmo de Gillett & Miller (sem nenhuma melhoria) para o exemplo 1 (veja Tabela 15). Isto significa que a solução obtida por este algoritmo considerando restrições de empacotamento tridimensional é melhor que a respectiva solução obtida pelo mesmo algoritmo sem considerar restrições de empacotamento tridimensional, o que é possível de ocorrer devido ao fato do Algoritmo de Gillett & Miller normalmente gerar soluções ruins e facilmente suscetíveis a alterações.

Tabela 10. Resultados obtidos com os algoritmos baseados no Algoritmo de Clarke & Wright sem nenhuma restrição de empacotamento tridimensional para os exemplos baseados em Christofides *et al.* (1979).

Ex.	Melhor Sol.		CW64					CW64 + BL					CW64 + SA					CW64 + RTR				
	FO	Nº Rot.	FO	Nº Rot.	Gap	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Gap	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Gap	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Gap	Temp.	Dens. Máx.
1	524,61	5	592,09	6	12,86	0,00	99,74	572,40	6	9,11	0,00	99,74	537,76	6	2,51	1,00	99,73	538,50	6	2,65	0,56	98,51
2	835,26	10	936,33	11	12,10	0,00	99,94	921,33	11	10,30	0,02	99,94	858,52	11	2,78	2,12	99,80	863,80	11	3,42	1,40	99,86
3	826,14	8	877,36	8	6,20	0,00	99,63	867,69	8	5,03	0,03	99,63	832,25	8	0,74	3,52	99,93	843,26	8	2,07	1,92	99,59
4	1028,42	12	1144,58	12	11,29	0,00	99,92	1120,78	12	8,98	0,05	99,91	1042,48	12	1,37	6,77	99,48	1056,37	12	2,72	2,95	99,62
5	1291,29	16	1407,40	17	8,99	0,03	99,64	1397,52	17	8,23	0,08	99,64	1341,92	17	3,92	10,86	99,88	1342,87	17	3,99	4,70	99,85
6	1042,11	7	1090,15	8	4,61	0,01	99,46	1071,18	8	2,79	0,05	99,46	1066,80	8	2,37	3,85	99,28	1063,42	8	2,04	1,31	99,46
7	819,56	10	908,24	10	10,82	0,00	96,52	903,74	10	10,27	0,02	96,52	866,86	10	5,77	3,07	96,62	867,10	10	5,80	1,36	96,62
Méd.	—	—	—	—	9,55	0,01	99,26	—	—	7,82	0,04	99,26	—	—	2,78	4,46	99,25	—	—	3,24	2,03	99,07

Tabela 11. Resultados obtidos com os algoritmos baseados no Algoritmo de Gillett & Miller sem nenhuma restrição de empacotamento tridimensional para os exemplos baseados em Christofides *et al.* (1979).

Ex.	Melhor Sol.		GM74					GM74 + BL					GM74 + SA					GM74 + RTR				
	FO	Nº Rot.	FO	Nº Rot.	Gap	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Gap	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Gap	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Gap	Temp.	Dens. Máx.
1	524,61	5	719,37	6	37,12	0,00	98,85	570,12	6	8,68	0,01	98,85	538,50	6	2,65	1,06	98,51	533,40	5	1,68	0,55	99,94
2	835,26	10	1098,87	11	31,56	0,00	98,92	899,29	11	7,67	0,00	99,59	850,37	11	1,81	2,06	99,41	853,02	10	2,13	0,94	99,97
3	826,14	8	1181,86	8	43,06	0,00	96,68	856,89	8	3,72	0,03	99,70	830,08	8	0,48	3,51	99,84	830,13	8	0,48	2,09	99,27
4	1028,42	12	1697,59	13	65,07	0,00	98,67	1119,31	13	8,84	0,06	99,98	1048,48	13	1,95	6,82	99,82	1051,67	13	2,26	2,64	99,48
5	1291,29	16	2208,40	17	71,02	0,01	99,76	1428,91	17	10,66	0,11	99,89	1338,07	17	3,62	11,08	99,77	1338,47	17	3,65	5,57	99,50
6	1042,11	7	3003,99	8	188,26	0,00	99,15	1327,73	8	27,41	0,05	98,86	1174,42	8	12,70	3,79	99,98	1173,25	8	12,58	2,15	99,91
7	819,56	10	1244,28	10	51,82	0,00	96,32	994,47	10	21,34	0,02	96,32	874,78	10	6,74	3,03	96,31	866,60	10	5,74	2,04	96,62
Méd.	—	—	—	—	69,70	0,00	98,34	—	—	12,62	0,04	99,03	—	—	4,28	4,48	99,09	—	—	4,07	2,28	99,24

Tabela 12. Resultados obtidos com a Estratégia 1 com o Algoritmo de Clarke & Wright para os exemplos baseados em Christofides *et al.* (1979).

Ex.	CW64 + CM04					(CW64 + BL) + CM04					(CW64 + SA) + CM04					(CW64 + RTR) + CM04				
	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.
1	659,40	8	11,37	0,41	73,40	647,91	8	13,19	0,54	73,40	617,16	8	14,76	52,24	73,13	614,36	8	14,09	32,88	73,34
2	1008,78	14	7,74	0,58	77,83	996,99	14	8,21	0,81	78,75	974,09	14	13,46	107,63	77,03	<b>958,65</b>	14	10,98	63,41	78,29
3	1060,57	11	20,88	0,66	69,88	1052,51	11	21,30	1,23	69,89	966,46	11	16,13	179,22	71,35	965,82	11	14,53	112,40	70,74
4	1309,00	16	14,37	1,11	73,13	1332,04	17	18,85	2,15	70,99	<b>1295,98</b>	17	24,32	369,73	69,84	1297,93	17	22,87	201,16	69,38
5	1719,37	24	22,17	1,69	70,87	1755,59	25	25,62	3,67	68,18	<i>1648,90</i>	24	22,88	598,95	71,40	1658,81	24	23,53	223,24	70,54
6	1505,35	11	38,09	0,82	69,38	1488,59	11	38,97	1,88	67,69	1466,29	11	37,45	214,38	67,97	<b>1455,34</b>	11	36,85	113,75	68,50
7	1215,08	15	33,78	0,67	70,42	1179,82	15	30,55	1,23	70,74	1128,05	14	30,13	159,69	71,36	<i>1124,66</i>	14	29,70	85,64	71,16
Méd.	—	—	21,20	0,85	72,13	—	—	22,38	1,64	71,38	—	—	22,73	240,26	71,73	—	—	21,79	118,93	71,71

Tabela 13. Resultados obtidos com a Estratégia 1 com o Algoritmo de Gillett & Miller para os exemplos baseados em Christofides *et al.* (1979).

Ex.	GM74 + CM04					(GM74 + BL) + CM04					(GM74 + SA) + CM04					(GM74 + RTR) + CM04				
	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.
1	840,61	7	16,85	0,33	76,23	617,30	7	8,28	0,62	75,88	614,12	8	14,04	51,81	73,14	<b>610,87</b>	7	14,52	33,90	74,72
2	1170,02	13	6,47	0,41	81,39	1053,59	15	17,16	0,98	76,44	987,24	15	16,10	111,33	77,21	967,82	14	13,46	61,76	77,13
3	1343,12	12	13,64	0,37	71,50	1010,64	11	17,94	1,52	70,83	963,67	11	16,09	185,91	72,37	<b>962,07</b>	11	15,89	126,97	72,81
4	1861,71	18	9,67	0,45	71,74	1347,19	18	20,36	3,35	71,74	1310,37	19	24,98	369,70	69,28	<i>1307,48</i>	17	24,32	189,22	68,72
5	2441,65	24	10,56	0,56	72,61	1811,90	25	26,80	5,53	71,03	1667,80	25	24,64	607,51	70,70	<b>1646,81</b>	24	23,04	299,70	70,22
6	3189,82	11	6,19	0,39	70,76	1719,13	11	29,48	2,85	66,36	<i>1543,58</i>	11	31,43	203,18	68,47	1545,58	11	31,73	130,25	67,62
7	1375,18	12	10,52	0,38	81,33	1169,48	14	17,60	1,57	71,26	1126,38	14	28,76	160,14	71,36	<b>1118,70</b>	13	29,09	112,02	71,36
Méd.	—	—	10,56	0,41	75,08	—	—	19,66	2,35	71,93	—	—	22,29	241,37	71,79	—	—	21,72	136,26	71,80

Tabela 14. Resultados obtidos com a Estratégia 2 com o Algoritmo de Clarke & Wright para os exemplos baseados em Christofides *et al.* (1979).

Ex.	CW64 + CM04					(CW64 + CM04) + BL					(CW64 + CM04) + SA					(CW64 + CM04) + RTR				
	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.
1	636,25	7	7,46	0,06	77,41	620,98	7	8,49	4,78	77,41	601,01	7	11,76	1155,09	79,62	<b>*595,44</b>	7	10,57	930,28	77,69
2	1003,99	13	7,23	0,10	79,94	1001,55	13	8,71	8,23	79,94	<b>959,86</b>	13	11,80	2392,17	81,94	963,97	13	11,60	1865,33	80,75
3	1013,33	11	15,50	0,13	77,24	1001,33	11	15,40	23,84	77,24	942,89	11	13,29	4510,44	76,20	949,02	11	12,54	2847,31	74,11
4	1288,88	16	12,61	0,22	76,26	1279,09	16	14,12	52,09	76,26	1242,67	16	19,20	9751,78	76,09	<b>*1223,45</b>	16	15,82	5480,90	78,75
5	1659,05	22	17,88	0,38	78,69	1652,31	22	18,23	68,37	78,69	1574,26	22	17,31	18249,83	78,84	<b>1567,67</b>	22	16,74	7293,93	78,84
6	1458,65	10	33,80	0,28	74,50	1444,44	10	34,85	37,38	75,08	<b>*1421,68</b>	10	33,27	6793,13	76,77	1434,43	10	34,89	3773,92	73,89
7	1134,32	13	24,89	0,13	75,67	1115,47	13	23,43	21,11	75,88	1055,29	13	21,74	3649,52	80,91	1055,48	13	21,73	2080,32	80,91
Méd.	—	—	17,05	0,19	77,10	—	—	17,60	30,83	77,21	—	—	18,34	6643,14	78,62	—	—	17,70	3698,61	77,85

Tabela 15. Resultados obtidos com a Estratégia 2 com o Algoritmo de Gillett & Miller para os exemplos baseados em Christofides *et al.* (1979).

Ex.	GM74 + CM04					(GM74 + CM04) + BL					(GM74 + CM04) + SA					(GM74 + CM04) + RTR				
	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.
1	689,94	7	-4,09	0,04	77,67	619,88	7	8,73	7,56	76,99	602,15	7	11,82	1143,08	77,12	609,24	7	14,22	762,94	77,69
2	1252,89	13	14,02	0,08	80,78	1045,68	13	16,28	24,18	80,63	980,93	13	15,35	2384,86	81,39	971,78	13	13,92	3147,63	79,29
3	1391,65	11	17,75	0,09	75,97	1003,97	11	17,16	52,33	74,92	<b>*932,18</b>	11	12,30	4669,83	76,20	943,10	11	13,61	4805,44	76,06
4	1838,56	16	8,30	0,14	77,76	1305,57	16	16,64	88,55	76,37	1231,52	16	17,46	10668,92	79,55	1235,94	16	17,52	5612,73	78,94
5	2389,52	23	8,20	0,16	76,44	1728,05	23	20,93	183,31	76,39	1580,44	23	18,11	17331,73	78,84	1589,47	23	18,75	6738,40	78,70
6	3045,62	10	1,39	0,10	72,08	1813,33	10	36,57	101,85	73,32	1507,10	10	28,33	7172,39	76,18	1422,91	10	21,28	7020,55	76,18
7	1442,64	14	15,94	0,09	75,88	1149,47	14	15,59	43,38	75,99	1069,64	14	22,28	3668,18	80,91	<b>*1050,92</b>	13	21,27	3931,22	80,91
Méd.	—	—	8,79	0,10	76,65	—	—	18,84	71,59	76,37	—	—	17,95	6719,86	78,60	—	—	17,22	4574,13	78,25

Tabela 16. Resultados obtidos com a Estratégia 3 com o Algoritmo de Clarke & Wright para os exemplos baseados em Christofides *et al.* (1979).

Ex.	[(CW64 + SA) + CM04] + SA					[(CW64 + RTR) + CM04] + RTR				
	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.
1	<b>596,04</b>	8	10,84	1094,76	77,69	613,31	8	13,89	822,84	77,69
2	959,82	14	11,80	2533,43	78,29	<b>*957,65</b>	14	10,86	2799,50	80,75
3	946,53	11	13,73	4946,01	78,26	<b>936,55</b>	11	11,06	2550,28	77,79
4	1239,34	17	18,88	10696,02	79,55	1237,78	17	17,17	6076,35	78,25
5	1588,63	24	18,38	17105,95	78,80	1580,90	22	17,73	8252,41	80,21
6	1428,43	11	33,90	6977,80	75,28	<b>1427,59</b>	10	34,25	4428,19	74,90
7	1072,43	14	23,71	3921,44	75,98	<b>1057,78</b>	13	21,99	2297,19	75,98
Méd.	—	—	18,75	6753,63	77,69	—	—	18,14	3889,54	77,94

Tabela 17. Resultados obtidos com a Estratégia 3 com o Algoritmo de Gillett & Miller para os exemplos baseados em Christofides *et al.* (1979).

Ex.	[(GM74 + SA) + CM04] + SA					[(GM74 + RTR) + CM04] + RTR				
	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.
1	<b>596,04</b>	8	10,69	1091,67	77,69	603,69	7	13,18	1153,94	77,11
2	973,88	15	14,52	2449,31	78,29	967,82	14	13,46	2225,35	77,13
3	946,64	11	14,04	4665,56	77,05	948,89	11	14,31	3223,59	74,37
4	1257,90	19	19,97	10198,14	79,55	<b>1233,33</b>	16	17,27	5676,53	78,95
5	1590,69	25	18,88	17410,00	78,45	<b>*1567,52</b>	23	17,11	8963,77	78,45
6	1484,92	11	26,44	6813,68	75,25	1434,63	10	22,28	4675,54	78,34
7	1069,07	14	22,21	3863,37	80,91	1058,48	13	22,14	4589,50	75,98
Méd.	—	—	18,11	6641,68	78,17	—	—	17,11	4358,32	77,19

Tabela 18. Resumo dos resultados obtidos para os exemplos baseados em Christofides *et al.* (1979).

Algoritmo baseado em		Estratégia						Total Intra
		1		2		3		
		Intra	Inter	Intra	Inter	Intra	Inter	
Clarke & Wright	<i>Simulated Annealing</i>	1	0	2	1	1	0	4
	<i>Record-to-Record Travel</i>	2	0	3	2	4	1	9
Gillett & Miller	<i>Simulated Annealing</i>	0	0	1	1	1	0	2
	<i>Record-to-Record Travel</i>	4	0	1	1	2	1	7
Total Inter		—	0	—	5	—	2	—

Por fim, é interessante destacar as diferenças dos tempos computacionais entre as Estratégias 1 e 2, sendo substancialmente maior na segunda, o que se deve ao grande número de avaliações realizadas ao se de verificar a factibilidade dos movimentos nas etapas de tentativa de melhoria da qualidade das soluções. Também é interessante notar os valores menores de densidade máxima obtidos em todos os exemplos das Tabelas 12 a 17, cuja queda em relação às Tabelas 10 e 11 se deve ao impacto das restrições de empacotamento tridimensional.

#### 4.6.2 RESULTADOS DE EXEMPLOS BASEADOS EM UM CASO REAL

Em um segundo conjunto de experimentos, foram considerados sete exemplos obtidos com a empresa transportadora visitada (veja Seção 2.5.1). Estes exemplos, na verdade, consideram a unidade da empresa localizada em Contagem-MG, bem como os clientes atendidos pertencem à região da Grande Belo Horizonte. Os exemplos consideram matrizes de custos simétricas, com o número de nós  $n$  variando de 16 a 98. A coordenada do nó 1 (i.e., o depósito) e as coordenadas dos demais nós (i.e., os clientes) são coordenadas geográficas (i.e., latitudes e longitudes). O depósito não necessariamente está centralizado em relação aos clientes.

Os veículos considerados possuem dimensões (em milímetros)  $(L, W, H) = (7320, 2480, 2630)$  e são equivalentes a um veículo do tipo toco (veja Figura 8) com capacidade até 6000 quilogramas (veja Seção 2.5.1). Os tipos de caixas e suas dimensões foram obtidos também com a empresa transportadora visitada, que utiliza o equipamento CargoScan para obter as dimensões e o peso de cada caixa (veja Figura 9). Os tipos de caixas utilizados variam de 2 a 8 (assume-se que as caixas podem ser posicionadas em qualquer orientação) com dimensões em milímetros, e não há tipos repetidos entre os exemplos. Os valores de demanda, para cada um destes tipos, também foram obtidos com a empresa transportadora visitada. O número total de caixas varia de 1683 a 29580. A Tabela 19 apresenta, para cada exemplo, o número de clientes, o número de tipos de caixas e o número total de caixas. O Apêndice I apresenta as dimensões e o número de caixas de cada tipo requeridas por cada cliente para o primeiro exemplo deste conjunto de experimentos.

Tabela 19. Resumo dos exemplos baseados em um caso real.

Ex.	Nº Cli.	Nº Tip.	Nº Cai.
1	15	4	1720
2	29	8	8024
3	36	7	1683
4	57	3	20405
5	73	2	3916
6	86	5	10696
7	97	6	29580

Além da ausência de restrições de orientação (i.e., as caixas podem girar livremente), define-se 100% de estabilidade vertical (o que é sempre garantido pelo

Algoritmo de George & Robinson e pelas Variações de Cecilio & Morabito), e valor de comprimento flexível  $\delta_{ik}$  infinito, desde que nenhuma caixa de um cliente que será visitado posteriormente no roteiro obstrua o acesso a uma caixa de qualquer cliente que será visitado anteriormente no roteiro. Não são consideradas restrições de empilhamento nem de fragilidade das caixas.

As Tabelas 20 e 21 apresentam os resultados obtidos com os algoritmos que tomam por base o Algoritmo de Clarke & Wright e o Algoritmo de Gillett & Miller, respectivamente, quando nenhuma restrição de empacotamento tridimensional é considerada (i.e., equivalente a resolver um Problema de Roteamento de Veículos com restrições de capacidade volumétrica apenas). Estas tabelas apresentam, para cada exemplo, o valor da função objetivo e o número de roteiros (ou veículos) presentes na solução reportada pela empresa transportadora visitada, que utiliza o *software* Roadnet<sup>®</sup> (veja Seção 2.5.1). Ou seja, sem considerar ao arranjo da carga dentro dos veículos e supondo, portanto, que a perda de estiva é igual a zero. Isso implica que as soluções obtidas pelo Roadnet<sup>®</sup> para estes exemplos não tem garantias de serem factíveis do ponto de vista do carregamento (e é bem provável que não sejam factíveis). Os tempos computacionais para o Roadnet<sup>®</sup> obter estas soluções, bem como as especificações do microcomputador utilizado, não foram fornecidos pela empresa. Também apresentam, para cada exemplo e para cada um dos algoritmos empregados, além do valor da função objetivo e do número de roteiros, o Gap (em %) obtido em relação à solução reportada pela empresa transportadora visitada, o tempo computacional (em segundos) e o valor de densidade máxima (em %) obtido (i.e., o veículo mais densamente empacotado). Estas tabelas também apresentam valores médios para este conjunto de exemplos, para o Gap, o tempo computacional e a densidade máxima de cada um dos algoritmos empregados.

Para este conjunto de exemplos, em termos de qualidade de solução, o algoritmo que teve o melhor desempenho foi o Algoritmo *Record-to-Record Travel* tomando por base o Algoritmo de Clarke & Wright, tendo obtido Gap médio de 10,29% em um tempo computacional médio de 0,64 segundo. Em seguida aparece o Algoritmo *Simulated Annealing* tomando por base o Algoritmo de Clarke & Wright, tendo obtido Gap médio de 10,79% em um tempo computacional médio de 0,84 segundo. Também é interessante notar os altos valores de densidade máxima obtidos em todos os exemplos, o que evidencia que estas soluções provavelmente não são factíveis do ponto de vista do carregamento.

As Tabelas 22 a 27 apresentam soluções obtidas para o 3L-CVRP com restrições geométricas, de estabilidade vertical e de múltiplos destinos. Elas apresentam, para

cada exemplo e para cada um dos algoritmos empregados, o valor da função objetivo, o número de roteiros, o desvio (em %) obtido em relação às respectivas soluções sem considerar restrições de empacotamento tridimensional (arranjo da carga), o tempo computacional (em segundos) e o valor de densidade máxima (em %) obtido (i.e., o veículo mais densamente empacotado). Também apresentam valores médios para este conjunto de exemplos, para o desvio, o tempo computacional e a densidade máxima de cada um dos algoritmos empregados. As Tabelas 22, 24 e 26 apresentam os resultados que tomam por base o Algoritmo de Clarke & Wright, respectivamente para as Estratégias 1, 2 e 3, enquanto que, para as mesmas estratégias, as Tabelas 23, 25 e 27, respectivamente, apresentam os resultados que tomam por base o Algoritmo de Gillett & Miller.

Ainda, nas Tabelas 22 a 27, para cada um dos exemplos: (i) os resultados destacados em *itálico* denotam os melhores resultados obtidos dentro de cada estratégia, ora tomando por base o Algoritmo de Clarke & Wright, ora tomando por base o Algoritmo de Gillett & Miller; (ii) os resultados destacados em **negrito** denotam os melhores resultados gerais obtidos dentro de cada estratégia; (iii) os resultados marcados com um “\*” a sua frente denotam os melhores resultados gerais entre todas as estratégias.

No caso da Estratégia 1 (veja Tabelas 22 e 23, valores marcados em **negrito**), o Algoritmo *Simulated Annealing* foi responsável pela melhor solução encontrada para 3 dos 7 exemplos (2 tomando por base o Algoritmo de Clarke & Wright e 2 tomando por base o Algoritmo de Gillett & Miller), enquanto o Algoritmo *Record-to-Record Travel* foi responsável pela melhor solução encontrada para 5 dos 7 exemplos (1 tomando por base o Algoritmo de Clarke & Wright e 4 tomando por base o Algoritmo de Gillett & Miller). Já no caso da Estratégia 2 (veja Tabelas 24 e 25, valores marcados em **negrito**), o Algoritmo *Simulated Annealing* foi responsável pela melhor solução encontrada para 3 dos 7 exemplos (3 tomando por base o Algoritmo de Clarke & Wright e 2 tomando por base o Algoritmo de Gillett & Miller), enquanto o Algoritmo *Record-to-Record Travel* foi responsável pela melhor solução encontrada para 5 dos 7 exemplos (3 tomando por base o Algoritmo de Clarke & Wright e 2 tomando por base o Algoritmo de Gillett & Miller). Por fim, no caso da Estratégia 3 (veja Tabelas 26 e 27, valores marcados em **negrito**), o Algoritmo *Simulated Annealing* foi responsável pela melhor solução encontrada para 3 dos 7 exemplos (2 tomando por base o Algoritmo de Clarke & Wright e 3 tomando por base o Algoritmo de Gillett & Miller), enquanto o Algoritmo *Record-to-Record Travel* foi responsável pela melhor solução encontrada para 6 dos 7 exemplos (1 tomando por base o Algoritmo de Clarke & Wright e 5 tomando por base o Algoritmo de Gillett & Miller).



Para este conjunto de experimentos, considerando todas as estratégias (soma das colunas “Intra” na Tabela 28, valores destacados em negrito nas Tabelas 22 a 27), o algoritmo que teve o melhor desempenho foi o Algoritmo *Record-to-Record Travel* tomando por base o Algoritmo de Gillett & Miller, tendo encontrado 11 melhores soluções (referentes a 5 dos 7 exemplos), seguido pelo Algoritmo *Simulated Annealing* tomando por base o Algoritmo de Clarke & Wright, tendo encontrado 7 melhores soluções (referentes a 4 dos 7 exemplos), e pelo Algoritmo *Simulated Annealing* tomando por base o Algoritmo de Gillett & Miller, tendo encontrado 7 melhores soluções (referentes a 3 dos 7 exemplos). Por outro lado, considerando todos os algoritmos (soma das linhas “Inter” na Tabela 28, valores marcados com “\*”) nas Tabelas 22 a 27), as estratégias que tiveram melhor desempenho foram as Estratégias 2 e 3, tendo encontrado 6 melhores soluções cada (referentes a 4 dos 7 exemplos).

No caso dos experimentos com os algoritmos sem considerar restrições de empacotamento tridimensional, ainda é interessante notar a presença de alguns valores negativos para o Gap. Isso ocorre com o Algoritmo de Clarke & Wright (sem nenhuma melhoria), com o Algoritmo de Clarke & Wright com os operadores de Busca Local, com o Algoritmo *Simulated Annealing* tomando por base o Algoritmo de Clarke & Wright e com o Algoritmo *Record-to-Record Travel* tomando por base o Algoritmo de Clarke & Wright para o exemplo 1 (veja Tabela 20), e também com o Algoritmo de Gillett & Miller com os operadores de Busca Local, com o Algoritmo *Simulated Annealing* tomando por base o Algoritmo de Gillett & Miller e com o Algoritmo *Record-to-Record Travel* tomando por base o Algoritmo de Gillett & Miller para o exemplo 1 (veja Tabela 21). Isto significa que, para este exemplo apenas, as soluções encontradas por estes métodos são melhores do que as reportadas pela empresa transportadora visitada. Além disso, no caso das Estratégias 1 e 2, também é interessante notar a presença de valores negativos para o desvio. Isso ocorre com o Algoritmo de Gillett & Miller (sem nenhuma melhoria) para os exemplos 1, 2, 3, 4 e 6 resolvidos com a Estratégia 1 (veja Tabela 23) e para os exemplos 2 e 6 resolvidos com a Estratégia 2 (veja Tabela 25). Como já observado na Seção 4.6.1, isto significa que a solução obtida por este algoritmo considerando restrições de empacotamento tridimensional é melhor que a respectiva solução obtida pelo mesmo algoritmo sem considerar restrições de empacotamento tridimensional, o que é possível de ocorrer devido ao fato do Algoritmo de Gillett & Miller normalmente gerar soluções ruins e facilmente suscetíveis a alterações.

Tabela 20. Resultados obtidos com os algoritmos baseados no Algoritmo de Clarke & Wright sem nenhuma restrição de empacotamento tridimensional para os exemplos baseados em um caso real.

Ex.	Melhor Sol.		CW64					CW64 + BL					CW64 + AS					CW64 + RTR				
	FO	Nº Rot.	FO	Nº Rot.	Gap	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Gap	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Gap	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Gap	Temp.	Dens. Máx.
1	155,03	3	151,28	3	-2,42	0,01	94,25	151,28	3	-2,42	0,02	94,25	134,83	3	-13,03	0,14	94,25	135,84	3	-12,38	0,09	98,07
2	203,39	5	246,35	5	21,12	0,01	98,56	246,35	5	21,12	0,01	98,56	217,63	5	7,00	0,33	98,56	217,63	5	7,00	0,30	98,56
3	199,38	4	247,86	4	24,32	0,01	98,48	246,07	4	23,42	0,01	90,91	215,99	4	8,33	0,44	98,48	216,06	4	8,37	0,37	98,48
4	259,49	7	359,16	7	38,41	0,02	99,14	356,92	7	37,55	0,02	99,14	308,76	7	18,99	0,78	99,14	307,40	7	18,26	0,47	99,14
5	327,68	8	443,56	8	35,36	0,02	99,58	441,88	8	34,85	0,02	99,58	373,21	8	13,89	1,14	99,58	372,33	8	13,63	1,11	99,58
6	371,45	10	531,20	10	43,01	0,02	98,80	528,30	10	42,23	0,02	98,80	457,12	10	23,06	1,42	98,80	447,37	10	20,44	1,00	98,80
7	590,47	19	770,32	19	30,46	0,02	97,54	770,01	19	30,41	0,03	97,54	691,95	19	17,19	1,64	97,54	688,02	19	16,52	1,12	97,54
Méd.	—	—	—	—	27,29	0,02	98,05	—	—	26,85	0,02	96,97	—	—	10,79	0,84	98,05	—	—	10,29	0,64	98,60

Tabela 21. Resultados obtidos com os algoritmos baseados no Algoritmo de Gillett & Miller sem nenhuma restrição de empacotamento tridimensional para os exemplos baseados em um caso real.

Ex.	Melhor Sol.		GM74					GM74 + BL					GM74 + AS					GM74 + RTR				
	FO	Nº Rot.	FO	Nº Rot.	Gap	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Gap	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Gap	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Gap	Temp.	Dens. Máx.
1	155,03	3	184,77	3	19,18	0,01	94,25	148,86	3	-3,98	0,01	94,25	134,83	3	-13,03	0,16	94,25	134,83	3	-13,03	0,12	94,25
2	203,39	5	333,68	5	64,06	0,01	98,56	259,44	5	27,56	0,01	95,22	217,63	5	7,00	0,34	98,56	217,63	5	7,00	0,34	98,56
3	199,38	4	349,39	5	75,24	0,01	98,48	274,29	5	37,57	0,01	98,48	226,22	5	13,46	0,42	98,48	226,22	5	13,46	0,56	98,48
4	259,49	7	463,12	7	78,47	0,01	99,14	358,67	7	38,22	0,02	99,14	311,47	7	20,03	0,80	98,07	306,36	7	18,06	0,61	99,14
5	327,68	8	582,53	9	77,77	0,02	98,81	455,46	9	39,00	0,03	98,81	385,32	9	17,59	1,12	99,58	368,47	8	12,45	1,12	99,58
6	371,45	10	757,35	11	103,89	0,01	98,80	551,66	11	48,52	0,03	98,80	457,64	11	23,20	1,47	98,80	449,06	10	20,89	1,31	98,80
7	590,47	19	879,32	20	48,92	0,02	97,54	814,59	20	37,96	0,03	97,54	704,96	20	19,39	1,62	97,54	691,48	19	17,11	1,04	97,54
Méd.	—	—	—	—	68,05	0,01	97,94	—	—	32,51	0,02	97,46	—	—	12,41	0,85	97,90	—	—	10,95	0,73	98,05

Tabela 22. Resultados obtidos com a Estratégia 1 com o Algoritmo de Clarke & Wright para os exemplos baseados em um caso real.

Ex.	CW64 + CM04					(CW64 + BL) + CM04					(CW64 + AS) + CM04					(CW64 + RTR) + CM04				
	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.
1	154,44	3	2,09	0,30	78,96	154,44	3	2,09	0,31	78,96	<b>*143,37</b>	3	6,33	5,26	80,24	143,44	3	5,59	3,98	78,96
2	266,36	5	8,12	0,50	81,86	261,74	5	6,25	0,55	81,86	237,76	5	9,25	13,40	80,19	236,12	5	8,49	13,04	83,53
3	297,12	6	19,87	0,31	73,23	295,03	6	19,90	0,42	73,23	261,52	6	21,08	17,60	73,23	<b>260,35</b>	6	20,50	18,75	75,76
4	382,68	8	5,96	0,64	88,48	376,45	8	4,89	0,84	88,48	<b>326,16</b>	8	5,54	36,47	89,54	329,95	8	7,34	30,28	88,48
5	506,53	11	14,20	0,37	77,97	505,49	11	14,40	0,61	77,97	440,54	11	18,04	52,28	77,97	440,77	11	18,38	59,58	77,97
6	603,21	13	13,56	0,64	79,04	599,94	13	13,56	1,11	79,04	521,98	13	14,19	69,08	79,04	526,75	13	17,74	46,74	79,04
7	854,61	22	10,94	1,26	85,35	852,88	22	10,76	1,64	85,35	763,17	22	10,29	80,14	85,35	766,10	22	11,35	61,00	85,35
Méd.	—	—	10,68	0,57	80,70	—	—	10,26	0,78	80,70	—	—	12,10	39,18	80,79	—	—	12,77	33,34	81,30

Tabela 23. Resultados obtidos com a Estratégia 1 com o Algoritmo de Gillett & Miller para os exemplos baseados em um caso real.

Ex.	GM74 + CM04					(GM74 + BL) + CM04					(GM74 + AS) + CM04					(GM74 + RTR) + CM04				
	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.
1	178,07	3	-3,62	0,22	75,14	158,50	3	6,47	0,25	82,78	<b>*143,37</b>	3	6,33	5,37	80,24	<b>*143,37</b>	3	6,33	4,21	80,24
2	293,78	5	-11,96	0,47	86,87	262,00	5	0,99	0,59	83,53	<b>233,52</b>	5	7,30	13,18	85,20	235,22	5	8,08	13,09	81,86
3	341,00	6	-2,40	0,28	70,71	293,77	6	7,10	0,47	78,28	261,52	6	15,60	17,95	73,23	271,53	6	20,03	24,62	70,71
4	428,41	8	-11,84	0,53	89,54	391,52	8	7,04	1,00	90,61	326,50	8	5,51	37,24	89,54	326,24	8	5,88	37,58	89,54
5	611,02	11	4,89	0,28	79,51	492,33	10	8,09	0,91	81,83	436,01	11	13,16	52,06	79,51	<b>423,25</b>	10	14,87	58,64	79,51
6	699,67	13	-7,62	0,47	79,04	604,09	13	9,50	1,34	79,04	522,31	13	14,13	69,17	79,04	<b>519,30</b>	13	15,64	58,81	79,04
7	952,08	23	8,27	1,06	85,35	883,95	23	8,51	1,81	85,35	775,14	23	9,95	81,07	85,35	<b>757,12</b>	21	9,49	78,28	85,35
Méd.	—	—	-3,47	0,47	80,88	—	—	6,82	0,91	83,06	—	—	10,28	39,43	81,73	—	—	11,47	39,32	80,89

Tabela 24. Resultados obtidos com a Estratégia 2 com o Algoritmo de Clarke &amp; Wright para os exemplos baseados em um caso real.

Ex.	CW64 + CM04					(CW64 + CM04) + BL					(CW64 + CM04) + AS					(CW64 + CM04) + RTR				
	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.
1	154,44	3	2,09	0,02	78,96	154,44	3	2,09	0,23	78,96	<b>*143,37</b>	3	6,33	78,86	80,24	143,44	3	5,59	58,22	78,96
2	266,52	5	8,19	0,08	83,53	258,34	5	4,87	6,99	83,53	<b>229,51</b>	5	5,46	658,68	88,54	234,68	5	7,83	794,50	85,20
3	283,09	5	14,22	0,06	80,81	282,74	5	14,90	2,58	80,81	<b>*254,09</b>	5	17,64	772,13	80,81	<b>*254,09</b>	5	17,60	590,49	80,81
4	382,59	8	5,93	0,08	91,68	376,37	8	4,86	15,32	91,68	324,67	8	5,06	1670,58	90,61	325,73	8	5,96	1438,62	90,61
5	492,08	10	10,94	0,08	83,37	491,24	10	11,17	6,02	83,37	426,98	10	14,41	879,78	84,14	<b>*418,00</b>	10	12,27	1326,28	85,69
6	581,66	12	9,50	0,12	83,98	581,24	12	10,02	14,68	83,98	505,27	12	10,53	2977,86	83,98	<b>*504,13</b>	12	12,69	2667,98	83,98
7	854,61	22	10,94	0,31	85,35	852,88	22	10,76	16,43	85,35	767,65	22	10,94	2516,49	85,35	753,26	21	9,48	1575,51	91,44
Méd.	—	—	8,83	0,11	83,95	—	—	8,38	8,89	83,95	—	—	10,05	1364,91	84,81	—	—	10,20	1207,37	85,24

Tabela 25. Resultados obtidos com a Estratégia 2 com o Algoritmo de Gillett &amp; Miller para os exemplos baseados em um caso real.

Ex.	GM74 + CM04					(GM74 + CM04) + BL					(GM74 + CM04) + AS					(GM74 + CM04) + RTR				
	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.
1	189,53	3	2,58	0,01	85,33	175,66	3	18,01	0,72	80,24	<b>*143,37</b>	3	6,33	73,37	80,24	143,44	3	6,39	62,40	78,96
2	293,78	5	-11,96	0,06	86,87	272,99	5	5,22	7,24	86,87	<b>229,51</b>	5	5,46	661,18	88,54	234,68	5	7,83	667,35	85,20
3	377,90	6	8,16	0,04	78,28	303,94	6	10,81	4,63	73,23	260,32	6	15,07	431,04	78,28	259,81	6	14,85	539,41	78,28
4	487,05	8	0,22	0,09	84,21	394,40	8	7,83	21,78	90,61	327,39	8	5,79	1682,93	90,61	<b>314,55</b>	7	2,08	2072,67	90,61
5	609,53	10	4,64	0,08	85,69	500,17	10	9,82	12,09	83,37	427,02	10	10,82	872,40	81,83	419,95	10	13,97	916,75	82,60
6	684,20	12	-9,66	0,08	83,98	599,62	12	8,69	48,33	83,98	505,78	12	10,52	2991,67	83,98	505,82	12	12,64	1826,53	83,98
7	954,95	23	8,60	0,16	85,35	895,77	23	9,97	34,68	85,35	781,50	23	10,86	2392,75	91,44	<b>752,94</b>	21	8,89	2294,51	91,44
Méd.	—	—	0,37	0,07	84,24	—	—	10,05	18,50	83,38	—	—	9,27	1300,76	84,99	—	—	9,52	1197,09	84,44

Tabela 26. Resultados obtidos com a Estratégia 3 com o Algoritmo de Clarke &amp; Wright para os exemplos baseados em um caso real.

Ex.	[(CW64 + AS) + CM04] + AS					[(CW64 + RTR) + CM04] + RTR				
	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.
1	<b>*143,37</b>	3	6,33	86,78	80,24	143,44	3	5,59	61,61	78,96
2	229,51	5	5,46	734,50	88,54	235,72	5	8,31	788,70	88,54
3	<b>255,70</b>	6	18,39	484,13	78,28	<b>255,70</b>	6	18,35	485,33	75,76
4	326,16	8	5,54	1822,91	89,54	324,93	8	5,70	2815,74	90,61
5	439,64	11	17,80	857,47	85,69	421,09	10	13,10	736,84	84,14
6	510,67	13	11,71	2901,80	83,98	505,61	12	13,02	1516,68	83,98
7	762,92	22	10,26	2735,80	85,35	754,56	21	9,67	1462,32	91,44
Méd.	—	—	10,78	1374,77	84,52	—	—	10,53	1123,89	84,78

Tabela 27. Resultados obtidos com a Estratégia 3 com o Algoritmo de Gillett &amp; Miller para os exemplos baseados em um caso real.

Ex.	[(GM74 + AS) + CM04] + AS					[(GM74 + RTR) + CM04] + RTR				
	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.
1	<b>*143,37</b>	3	6,33	87,18	80,24	<b>*143,37</b>	3	6,33	67,15	80,24
2	<b>*228,57</b>	5	5,03	721,96	88,54	234,82	5	7,90	734,55	88,54
3	<b>255,70</b>	6	13,03	17,95	78,28	259,93	6	14,90	774,82	78,28
4	326,50	8	5,51	1796,04	89,54	<b>*313,45</b>	7	1,73	2291,86	90,61
5	436,01	11	13,16	847,82	79,51	<b>420,37</b>	10	14,09	1100,90	84,91
6	513,80	13	12,27	2960,58	83,98	<b>505,55</b>	12	12,58	3459,99	83,98
7	775,14	23	9,95	2446,58	85,35	<b>*751,40</b>	21	8,67	3240,55	91,44
Méd.	—	—	9,33	1268,30	83,63	—	—	9,46	1667,12	85,43

Tabela 28. Resumo dos resultados obtidos para os exemplos baseados em um caso real.

Algoritmo baseado em		Estratégia						Total Intra
		1		2		3		
		Intra	Inter	Intra	Inter	Intra	Inter	
Clarke & Wright	<i>Simulated Annealing</i>	2	1	3	2	2	1	7
	<i>Record-to-Record Travel</i>	1	0	3	3	1	0	5
Gillett & Miller	<i>Simulated Annealing</i>	2	1	2	1	3	2	7
	<i>Record-to-Record Travel</i>	4	1	2	0	5	3	11
Total Inter		—	3	—	6	—	6	—

Por fim, é interessante destacar as diferenças dos tempos computacionais entre as Estratégias 1 e 2, sendo substancialmente maior na segunda, o que se deve ao grande número de avaliações realizadas ao se de verificar a factibilidade dos movimentos nas etapas de tentativa de melhoria da qualidade das soluções. Também é interessante notar os valores menores de densidade máxima obtidos em todos os exemplos das Tabelas 22 a 27, cuja queda em relação às Tabelas 20 e 21 se deve ao impacto das restrições de empacotamento tridimensional.

### 4.6.3 RESULTADOS DE EXEMPLOS GERADOS ALEATORIAMENTE

Em um último conjunto de experimentos, foram considerados sete exemplos gerados aleatoriamente para que se pudesse avaliar a robustez dos métodos propostos quando o número de tipos de caixas presentes em um conjunto de pedidos é aumentado para valores muito além dos encontrados na situação real da empresa transportadora visitada. Os exemplos consideram matrizes de custos simétricas, com o número de nós  $n$  sempre igual a 26. A coordenada do nó 1 (i.e., o depósito) é a posição (0,0) de um sistema de coordenadas cartesianas. As coordenadas dos demais nós (i.e., os clientes) estão espalhadas em torno do depósito.

Os veículos considerados possuem dimensões (em milímetros)  $(L,W,H) = (7320,2480,2630)$  e são equivalentes a um veículo do tipo toco (veja Figura 8) com capacidade até 6000 quilogramas (veja Seção 2.5.1). Os tipos de caixas e suas dimensões foram obtidos também com a empresa transportadora visitada, que utiliza o equipamento CargoScan para obter as dimensões e o peso de cada caixa (veja Figura 9). Nestes exemplos, o número de tipos de caixas foi aumentado de 5 em 5 unidades, mantendo-se os mesmos clientes, e as respectivas demandas aproximadamente também as mesmas. O número total de caixas varia de 2076 a 3338. A Tabela 29 apresenta, para cada exemplo, o número de clientes, o número de tipos de caixas e o número total de caixas. Como mencionado na Seção 4.1, estes experimentos são de natureza exploratória, de modo a verificar o comportamento dos métodos propostos diante do aumento da heterogeneidade da carga.

Tabela 29. Resumo dos exemplos com aumento da heterogeneidade da carga.

Ex.	Nº Cli.	Nº Tip.	Nº Cai.
1	25	5	2464
2	25	10	3338
3	25	15	2076
4	25	20	2415
5	25	25	2742
6	25	30	2540
7	25	35	2568

Além da ausência de restrições de orientação (i.e., as caixas podem girar livremente), define-se 100% de estabilidade vertical (o que é sempre garantido pelo Algoritmo de George & Robinson e pelas Variações de Cecilio & Morabito), e valor de

comprimento flexível  $\delta_{ik}$  infinito, desde que nenhuma caixa de um cliente que será visitado posteriormente no roteiro obstrua o acesso a uma caixa de qualquer cliente que será visitado anteriormente no roteiro. Não são consideradas restrições de empilhamento nem de fragilidade das caixas.

As Tabelas 30 e 31 apresentam os resultados obtidos com os algoritmos que tomam por base o Algoritmo de Clarke & Wright e o Algoritmo de Gillett & Miller, respectivamente, quando nenhuma restrição de empacotamento tridimensional é considerada (i.e., equivalente a resolver um Problema de Roteamento de Veículos com restrições de capacidade volumétrica apenas). Também apresentam, para cada exemplo e para cada um dos algoritmos empregados, além do valor da função objetivo e do número de roteiros, o tempo computacional (em segundos) e o valor de densidade máxima (em %) obtido (i.e., o veículo mais densamente empacotado). Estas tabelas também apresentam valores médios para este conjunto de exemplos, para o tempo computacional e a densidade máxima de cada um dos algoritmos empregados. Note que, diferentemente das tabelas equivalentes das Seções 4.6.1 e 4.6.2, aqui não faz sentido apresentar, para cada exemplo, o valor da função objetivo e o número de roteiros (ou veículos) presentes em uma solução de referência, assim como o Gap (em %) obtido pelos algoritmos empregados em relação a esta solução. No entanto, os respectivos campos foram mantidos para que isso ficasse destacado nestas tabelas. Note ainda que, apesar de se tratarem dos mesmos clientes, devido ao fato das demandas não serem exatamente as mesmas entre os exemplos, os valores de função objetivo também não têm sempre o mesmo valor, embora as divergências sejam relativamente pequenas. Também é interessante notar os altos valores de densidade máxima obtidos em todos os exemplos, o que evidencia que estas soluções provavelmente não são factíveis do ponto de vista do carregamento.

As Tabelas 32 a 37 apresentam soluções obtidas para o 3L-CVRP com restrições geométricas, de estabilidade vertical e de múltiplos destinos. Elas apresentam, para cada exemplo e para cada um dos algoritmos empregados, o valor da função objetivo, o número de roteiros, o desvio (em %) obtido em relação às respectivas soluções sem considerar restrições de empacotamento tridimensional (arranjo da carga), o tempo computacional (em segundos) e o valor de densidade máxima (em %) obtido (i.e., o veículo mais densamente empacotado). Também apresentam valores médios para este conjunto de exemplos, para o desvio, o tempo computacional e a densidade máxima de cada um dos algoritmos empregados. As Tabelas 32, 34 e 36 apresentam os resultados que tomam por base o

Algoritmo de Clarke & Wright, respectivamente para as Estratégias 1, 2 e 3, enquanto que, para as mesmas estratégias, as Tabelas 33, 35 e 37, respectivamente, apresentam os resultados que tomam por base o Algoritmo de Gillett & Miller. Note que, conforme o número de tipos de caixas aumenta, os valores de função objetivo se deterioram (veja que os desvios também aumentam), bem como os tempos computacionais também aumentam (embora isto seja menos perceptível no caso da Estratégia 1). Por outro lado, é interessante notar que, conforme o número de tipos de caixas aumenta, os valores de densidade máxima obtidos em todos os exemplos tendem a diminuir. Estas observações evidenciam a dificuldade do Algoritmo de George & Robinson e das Variações de Cecilio & Morabito em tratar estes carregamentos, à medida que o número de tipos de caixas aumenta.



Tabela 30. Resultados obtidos com os algoritmos baseados no Algoritmo de Clarke & Wright sem nenhuma restrição de empacotamento tridimensional para os exemplos gerados aleatoriamente.

Ex.	Melhor Sol.		CW64					CW64 + BL					CW64 + AS					CW64 + RTR				
	FO	Nº Rot.	FO	Nº Rot.	Gap	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Gap	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Gap	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Gap	Temp.	Dens. Máx.
1	—	—	352,20	4	—	0,00	93,84	352,20	4	—	0,01	93,84	352,20	4	—	0,39	93,84	352,20	4	—	0,20	93,84
2	—	—	352,20	4	—	0,00	93,84	352,20	4	—	0,00	93,84	352,20	4	—	0,34	93,84	352,20	4	—	0,22	93,84
3	—	—	352,20	4	—	0,01	94,14	352,20	4	—	0,01	94,14	352,20	4	—	0,35	94,14	352,20	4	—	0,23	94,14
4	—	—	352,20	4	—	0,01	94,40	352,20	4	—	0,01	94,40	352,20	4	—	0,34	94,40	352,20	4	—	0,19	94,40
5	—	—	352,20	4	—	0,01	94,09	352,20	4	—	0,01	94,09	352,20	4	—	0,36	94,09	352,20	4	—	0,20	94,09
6	—	—	352,20	4	—	0,01	94,39	352,20	4	—	0,01	94,39	352,20	4	—	0,36	94,39	352,20	4	—	0,20	94,39
7	—	—	352,20	4	—	0,01	93,97	352,20	4	—	0,01	93,97	352,20	4	—	0,36	93,97	352,20	4	—	0,20	93,97
Méd.	—	—	—	—	—	0,01	94,09	—	—	—	0,01	94,09	—	—	—	0,36	94,09	—	—	—	0,21	94,09

Tabela 31. Resultados obtidos com os algoritmos baseados no Algoritmo de Gillett & Miller sem nenhuma restrição de empacotamento tridimensional para os exemplos gerados aleatoriamente.

Ex.	Melhor Sol.		GM74					GM74 + BL					GM74 + AS					GM74 + RTR				
	FO	Nº Rot.	FO	Nº Rot.	Gap	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Gap	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Gap	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Gap	Temp.	Dens. Máx.
1	—	—	406,89	4	—	0,00	97,93	373,47	4	—	0,01	98,84	352,20	4	—	0,39	93,84	354,00	4	—	0,20	95,09
2	—	—	406,89	4	—	0,01	97,48	373,47	4	—	0,01	98,72	352,20	4	—	0,34	93,84	352,38	4	—	0,23	98,29
3	—	—	406,89	4	—	0,01	98,45	373,47	4	—	0,01	98,45	352,20	4	—	0,36	94,14	352,20	4	—	0,26	94,14
4	—	—	406,89	4	—	0,01	97,65	373,47	4	—	0,01	99,48	352,20	4	—	0,39	94,40	352,20	4	—	0,22	94,40
5	—	—	406,89	4	—	0,01	98,34	373,47	4	—	0,01	98,43	352,20	4	—	0,37	94,09	352,38	4	—	0,23	98,67
6	—	—	406,89	4	—	0,01	97,57	373,47	4	—	0,01	99,35	352,38	4	—	0,39	98,03	357,59	4	—	0,20	96,87
7	—	—	406,89	4	—	0,01	98,46	373,47	4	—	0,01	98,55	352,38	4	—	0,36	98,93	352,38	4	—	0,25	98,93
Méd.	—	—	—	—	—	0,01	97,98	—	—	—	0,01	98,83	—	—	—	0,37	95,32	—	—	—	0,23	96,62

Tabela 32. Resultados obtidos com a Estratégia 1 com o Algoritmo de Clarke &amp; Wright para os exemplos gerados aleatoriamente.

Ex.	CW64 + CM04					(CW64 + BL) + CM04					(CW64 + AS) + CM04					(CW64 + RTR) + CM04				
	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.
1	403,02	5	14,43	0,28	74,86	403,02	5	14,43	0,32	74,86	387,28	5	9,96	15,26	74,86	387,28	5	9,96	10,17	74,86
2	404,06	5	14,72	0,40	73,60	404,06	5	14,72	0,42	73,60	387,28	5	9,96	15,45	75,04	382,30	5	8,55	9,76	82,97
3	419,45	6	19,09	0,42	70,39	419,45	6	19,09	0,41	70,39	410,43	6	16,53	14,57	70,39	413,46	6	17,39	9,62	70,39
4	419,45	6	19,09	0,46	69,84	419,45	6	19,09	0,50	69,84	407,89	5	15,81	14,19	71,18	412,80	6	17,21	9,47	70,08
5	422,23	6	19,88	0,55	68,45	422,23	6	19,88	0,64	68,45	412,80	6	17,21	15,06	69,63	412,80	6	17,21	9,04	69,63
6	441,31	6	25,30	0,61	65,82	434,78	6	23,45	0,64	65,82	419,16	6	19,01	15,35	68,09	429,82	6	22,04	10,06	62,19
7	441,31	6	25,30	0,72	65,38	434,78	6	23,45	0,75	65,38	423,17	6	20,15	15,30	65,29	429,82	6	22,04	9,98	62,80
Méd.	—	—	14,43	0,28	69,76	—	—	19,16	0,53	69,76	—	—	15,52	15,03	70,64	—	—	16,34	9,73	70,42

Tabela 33. Resultados obtidos com a Estratégia 1 com o Algoritmo de Gillett &amp; Miller para os exemplos gerados aleatoriamente.

Ex.	GM74 + CM04					(GM74 + BL) + CM04					(GM74 + AS) + CM04					(GM74 + RTR) + CM04				
	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.
1	408,90	5	0,49	0,27	74,03	390,86	5	4,66	0,34	74,03	387,28	5	9,96	14,86	74,86	387,28	5	9,40	9,98	74,86
2	408,90	5	0,49	0,34	73,60	390,86	5	4,66	0,43	73,60	387,28	5	9,96	14,97	75,04	390,86	5	10,92	8,86	73,60
3	450,73	6	10,77	0,39	68,47	412,80	6	10,53	0,45	70,39	408,85	5	16,08	14,24	71,75	412,25	6	17,05	9,21	71,75
4	450,73	6	10,77	0,45	68,09	412,80	6	10,53	0,52	70,08	410,43	6	16,53	14,74	69,84	403,46	5	14,55	9,41	72,20
5	456,36	6	12,16	0,54	69,57	412,80	6	10,53	0,60	69,63	412,80	6	17,21	14,45	69,63	412,80	6	17,15	10,18	69,63
6	451,96	6	11,08	0,63	67,73	423,16	6	13,30	0,71	68,74	430,24	6	22,10	14,75	63,47	420,70	6	17,65	10,39	68,09
7	442,13	6	8,66	0,70	64,60	424,97	6	13,79	0,76	67,33	429,82	6	21,98	15,04	62,80	423,17	6	20,09	9,90	65,29
Méd.	—	—	7,78	0,47	69,44	—	—	9,71	0,54	70,54	—	—	16,26	14,72	69,63	—	—	15,26	9,70	70,77

Tabela 34. Resultados obtidos com a Estratégia 2 com o Algoritmo de Clarke & Wright para os exemplos gerados aleatoriamente.

Ex.	CW64 + CM04					(CW64 + CM04) + BL					(CW64 + CM04) + AS					(CW64 + CM04) + RTR				
	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.
1	405,15	5	15,03	0,03	79,41	405,15	5	15,03	0,80	79,41	382,30	5	8,55	296,07	83,17	394,77	5	12,09	204,25	77,34
2	408,45	5	15,97	0,05	79,25	394,63	5	12,05	2,17	79,25	388,38	5	10,27	569,30	82,97	387,28	5	9,96	527,02	75,04
3	427,53	5	21,39	0,06	71,71	402,27	5	14,22	2,54	73,85	390,60	5	10,90	723,00	73,85	390,60	5	10,90	532,46	73,85
4	428,41	6	21,64	0,07	71,46	428,41	6	21,64	2,53	71,46	410,43	6	16,53	860,08	69,84	422,43	6	19,94	591,47	69,84
5	422,23	6	19,88	0,12	68,45	422,23	6	19,88	2,60	68,45	414,47	6	17,68	1182,15	74,19	422,23	6	19,88	753,13	68,45
6	441,31	6	25,30	0,13	65,82	434,78	6	23,45	3,94	65,82	413,20	6	17,32	1398,08	71,46	413,57	6	17,42	1075,03	70,24
7	443,69	6	25,98	0,17	71,13	443,53	6	25,93	4,77	71,13	410,96	6	16,68	1664,86	69,71	438,29	6	24,44	1043,03	63,95
Méd.	—	—	20,74	0,09	72,46	—	—	18,89	2,76	72,76	—	—	13,99	956,22	75,03	—	—	16,38	675,20	71,24

Tabela 35. Resultados obtidos com a Estratégia 2 com o Algoritmo de Gillett & Miller para os exemplos gerados aleatoriamente.

Ex.	GM74 + CM04					(GM74 + CM04) + BL					(GM74 + CM04) + AS					(GM74 + CM04) + RTR				
	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.
1	422,82	5	3,92	0,04	74,03	382,30	5	2,36	1,73	83,17	382,30	5	8,55	295,89	83,17	382,30	5	7,99	188,59	83,17
2	408,90	5	0,49	0,09	73,60	390,86	5	4,66	3,00	73,60	382,30	5	8,55	553,28	82,97	388,82	5	10,34	401,33	82,97
3	457,45	6	12,43	0,07	72,43	431,28	6	15,48	4,18	69,07	412,80	6	17,21	604,65	70,39	413,58	6	17,43	457,42	70,39
4	457,45	6	12,43	0,07	71,89	431,28	6	15,48	5,50	68,84	410,43	6	16,53	853,93	69,84	414,67	6	17,74	585,97	69,84
5	480,80	6	18,16	0,08	70,19	423,27	6	13,33	8,58	69,63	412,96	6	17,25	1196,87	72,81	415,39	6	17,88	793,81	72,81
6	484,87	6	19,16	0,09	70,67	432,87	6	15,90	9,19	65,97	414,23	6	17,55	1400,01	70,24	423,16	6	18,34	869,76	68,74
7	468,90	6	15,24	0,13	67,33	433,75	6	16,14	8,25	69,71	419,35	6	19,01	1448,06	69,71	420,39	6	19,30	1049,59	70,30
Méd.	—	—	11,69	0,08	71,45	—	—	11,91	5,78	71,43	—	—	14,95	907,53	74,16	—	—	15,57	620,92	74,03

Tabela 36. Resultados obtidos com a Estratégia 3 com o Algoritmo de Clarke &amp; Wright para os exemplos gerados aleatoriamente.

Ex.	[(CW64 + AS) + CM04] + AS					[(CW64 + RTR) + CM04] + RTR				
	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.
1	382,30	5	8,55	316,87	83,17	382,30	5	8,55	213,84	83,17
2	382,30	5	8,55	599,38	82,97	382,30	5	8,55	475,59	82,97
3	410,43	6	16,53	562,97	70,39	413,07	6	17,28	540,50	71,75
4	407,63	5	15,74	956,30	71,18	405,86	5	15,24	741,02	72,20
5	412,80	6	17,21	1241,78	69,63	412,80	6	17,21	937,85	69,63
6	414,10	6	17,58	1462,97	69,68	427,80	6	21,47	931,28	69,58
7	423,10	6	20,13	1486,57	68,46	421,67	6	19,72	1142,13	69,71
Méd.	—	—	14,90	946,69	73,64	—	—	15,43	711,74	74,14

Tabela 37. Resultados obtidos com a Estratégia 3 com o Algoritmo de Gillett &amp; Miller para os exemplos gerados aleatoriamente.

Ex.	[(GM74 + AS) + CM04] + AS					[(GM74 + RTR) + CM04] + RTR				
	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.	FO	Nº Rot.	Desv.	Temp.	Dens. Máx.
1	382,30	5	8,55	305,74	83,17	382,30	5	7,99	212,80	83,17
2	382,30	5	8,55	598,58	82,97	390,86	5	10,92	409,28	73,60
3	406,08	5	15,30	725,02	73,70	412,25	6	17,05	472,62	71,75
4	410,19	6	16,47	899,42	73,54	403,46	5	14,55	873,00	72,20
5	412,80	6	17,21	1241,95	69,63	412,80	6	17,15	943,30	69,63
6	420,28	6	19,27	1407,37	68,09	415,98	6	16,33	1069,39	72,25
7	413,20	6	17,26	1684,01	70,94	423,17	6	20,09	1109,70	65,29
Méd.	—	—	14,66	980,30	74,58	—	—	14,87	727,16	72,56

## CAPÍTULO 5

### CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

---

Neste trabalho foi estudada a integração do Problema de Roteamento de Veículos com o Problema de Carregamento de Contêineres. Em uma primeira etapa deste trabalho, foram apresentados modelos de programação matemática para representar Problemas Integrados de Roteamento e Carregamento de Veículos. Experimentos computacionais foram realizados com alguns destes modelos utilizando o aplicativo GUROBI e exemplos gerados aleatoriamente. Os resultados mostraram que os modelos são coerentes e representam adequadamente as situações tratadas, embora esta abordagem (na sua versão atual) esteja limitada a resolver otimamente apenas problemas de tamanho bem moderado, isto é, em que haja poucos clientes, poucos veículos, e, principalmente, em que o número de possíveis posições para se arranjar as caixas dentro de cada veículo seja relativamente pequeno.

No entanto, acredita-se que os modelos apresentados possam ser úteis para motivar pesquisas futuras explorando desigualdades válidas, métodos de decomposição, métodos de relaxação, métodos heurísticos, entre outros, para resolver problemas mais realistas de roteamento e carregamento de veículos. Os modelos também podem ser úteis como ponto de partida para modelar outras variações do problema, tais como quando há janelas de tempo, pontos de coleta e entrega, frota heterogênea, múltiplos depósitos, entre outras. E também como ponto de partida para modelar o problema mais geral de carregamento de caixas sobre paletes e destes em veículos, somando-se as decisões de roteamento destes, como estudado em Zachariadis *et al.* (2012). Outra linha de pesquisa interessante seria tentar partir de outras formulações existentes na literatura para tentar integrar os dois problemas.

Em uma segunda etapa deste trabalho, foram desenvolvidos métodos heurísticos e meta-heurísticos para resolver problemas de tamanhos mais realistas de roteamento e carregamento de veículos. Os algoritmos são baseados na combinação de heurísticas clássicas das literaturas de Roteamento de Veículos e de Carregamento de Contêineres, bem como em duas estratégias meta-heurísticas e nos uso delas em procedimentos mais elaborados. Embora não haja garantias de que as soluções obtidas para os

respectivos problemas sejam ótimas, tratam-se de heurísticas relativamente simples, suficientemente rápidas para resolver problemas reais, razoavelmente flexíveis para incorporar aspectos práticos, e que normalmente garantem soluções relativamente boas em tempos computacionais aceitáveis na prática. Experimentos computacionais foram realizados com estes métodos, implementados na linguagem C++, considerando exemplos baseados na literatura de Roteamento de Veículos e em pedidos reais de cargas, bem como exemplos baseados em um caso real em que o problema ocorre. Embora preliminares, os experimentos realizados foram capazes de resolver exemplos reais com centenas de clientes e milhares de caixas. Pretende-se futuramente investigar o desempenho das estratégias propostas em um conjunto maior de exemplos, o que não pôde ser feito neste trabalho devido aos prazos para conclusão do mesmo.

Num futuro próximo pretende-se também estender estes algoritmos para tratar outras variações do Problema de Roteamento de Veículos, tais como quando há janelas de tempo, pontos de coleta e entrega, frota heterogênea, múltiplos depósitos, entre outras. Outras extensões interessantes incluem: (i) considerar uma “fórmula de economias generalizada” (GASKELL, 1967; YELLOW, 1970), no contexto do Algoritmo de Clarke & Wright, que inclui um “parâmetro de forma” do roteiro, de modo a propiciar a geração de roteiros mais compactos; (ii) considerar a geração de “1-Petal” ou “2-Petal” (FOSTER; RYAN, 1976; RENAUD *et al.*, 1996), no contexto do Algoritmo de Gillett & Miller, que envolve a geração de vários roteiros factíveis, chamados de “pétalas”, e então a determinação da melhor combinação entre as soluções através da resolução de um Problema de Partição de Conjuntos; (iii) desenvolver operadores de busca local que considerem explicitamente aspectos relacionados tanto ao roteamento de veículos quanto ao carregamento de contêineres; (iv) estender e desenvolver outros métodos, além do Algoritmo de George & Robinson, para tratar o carregamento de cargas dentro dos veículos, em particular abordagens que permitam tratar cargas fortemente heterogêneas, como as presentes nos exemplos propostos por Gendreau *et al.* (2006), para o que se candidatam, por exemplo, a “abordagem em grafo E/OU” (MORABITO *et al.*, 1992; MORABITO; ARENALES, 1994), a estratégia de empacotamento em pontos de canto (*corner points*) (MARTELLO *et al.*, 2000), e a representação de espaços maximais (*maximal-spaces*) para gerenciar os espaços vazios dentro dos veículos (LAI; CHAN, 1997; GONÇALVES; RESENDE, 2012); (v) estender as abordagens propostas em Queiroz e Miyazawa (2013) para resolver Problemas Integrados de Roteamento e Carregamento de Veículos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

---

ABERNATHY, W. J.; BALOFF, N.; HERSHEY, J. C.; WANDEL, S. A three-stage manpower planning and scheduling model – a service-sector example. **Operations Research**, v. 21, n. 3, p. 693-711, 1973.

ANGEL, R. D.; CAUDLE, W. L.; NOONAN, R.; WHINSTON, A. Computer-assisted school bus scheduling. **Management Science**, v. 18, n. 6, p. 279-288, 1972.

ARAÚJO, O. C. B. **Problemas de corte e empacotamento tridimensional e integração com roteamento de veículos**. 2006. 171p. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas – SP, 2006.

ARAÚJO, O. C. B.; ARMENTANO, V. A. A multi-start random constructive heuristic for the container loading problem. **Pesquisa Operacional**, v. 27, n. 2, p. 311-331, 2007.

ARBIB, C.; MARINELLI, F. Integrating process optimization and inventory planning in cutting-stock with skiving option: an optimization model and its application. **European Journal of Operational Research**, v. 163, n. 3, p. 617-630, 2005.

ARENALES, M.; MORABITO, R.; YANASSE, H. Cutting and packing problems. **Pesquisa Operacional**, v. 19, n. 2, p. 107-299, 1999.

ARMBRUSTER, M. A solution procedure for a pattern sequencing problem as part of a one-dimensional cutting stock problem in the steel industry. **European Journal of Operational Research**, v. 141, n. 2, p. 328-340, 2002.

ARROW, K.; HARRIS, T.; MARSCHAK, J. Optimal inventory policy. **Econometrica**, v. 19, n. 3, p. 250-272, 1951.

AZEVEDO, B. L. P.; HOKAMA, P. H.; MIYAZAWA, F. K.; XAVIER, E. C. A branch-and-cut approach for the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. In: XLI SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL, 2009, Porto Seguro. **Anais...** Rio de Janeiro: SOBRAPO, 2009. P. 1-12.

BALAKRISHNAN, A.; WARD, J. E.; WONG, R. T. Integrated facility location and vehicle routing models: recent work and future prospects. **American Journal of Mathematical and Management Sciences**, v. 7, n. 1-2, p. 35-61, 1987.

BALINSKI, M.; QUANDT, R. On an integer program for a delivery problem. **Operations Research**, v. 12, n. 2, p. 300-304, 1964.

BEGUR, S.; MILLER, D.; WEAVER, J. An integrated spatial DSS for scheduling and routing home-health-care nurses. **Interfaces**, v. 27, n. 4, p. 35-48, 1997.

BELL, W.; DALBERTO, L.; FISHER, M.; GREENFIELD, A.; JAIKUMAR, R.; KEDIA, P.; MACK, R.; PRUTZMAN, P. Improving the distribution of industrial gases with an on-line computerized routing and scheduling optimizer. **Interfaces**, v. 13, n. 6, p. 4-23, 1983.

BELLMANN, R.; GLICKSBERG, J.; GROSS, O. On the optimal inventory equation. **Management Science**, v. 2, n. 1, p. 83-104, 1955.

BELOV, G.; SCHEITHAUER, G. Setup and open stacks minimization in one-dimensional stock cutting. **INFORMS Journal on Computing**, v. 19, n. 1, p. 27-35, 2007.

BENNETT, B. T.; POTTS, R. B. Rotating roster for a transit system. **Transportation Science**, v. 2, n. 1, p. 14-34, 1968.

BERTAZZI, L.; SAVELSBERGH, M. W. P.; SPERANZA, M. G. Inventory routing. In: GOLDEN, B. L.; RAGHAVAN, S.; WASIL, E. A. **The vehicle routing problem: latest advances and new challenges**. Berlin: Springer-Verlag, 2008. P. 49-72.

BERTRAND, J. W. M.; FRANSOO, J. C. Operations management research methodologies using quantitative modeling. **International Journal of Operations & Production Management**, v. 22, n. 2, p. 241-264, 2002.

BISCHOFF, E. E. Three-dimensional packing of items with limited load bearing strength. **European Journal of Operational Research**, v. 168, n. 3, p. 952-966, 2006.

BISCHOFF, E. E.; DOWSLAND, W. B. An application of the micro to product design and distribution. **Journal of the Operational Research Society**, v. 33, n. 3, p. 271-280, 1982.

BISCHOFF, E. E.; MARRIOTT, M. D. A comparative evaluation of heuristics for container loading. **European Journal of Operational Research**, v. 44, n. 2, p. 267-276, 1990.



BISCHOFF, E. E.; RATCLIFF, M. S. W.; Issues in the development of approaches to container loading, **Omega**, v. 23, n. 4, p. 377-390, 1995.

BODIN, L. D. A taxonomic structure for vehicle routing and scheduling problems. **Computers and Urban Society**, v. 1, n. 1, p. 11-29, 1975.

BODIN, L. D.; BERMAN, L. Routing and scheduling of school buses by computer. **Transportation Science**, v. 13, n. 2, p. 113-129, 1979.

BODIN, L. D.; GOLDEN, B. Classification in vehicle routing and scheduling. **Networks**, v. 11, n. 2, p. 97-108, 1981.

BODIN, L.; GOLDEN, B.; ASSAD, A.; BALL, M. Routing and scheduling of vehicles and crews – the state of the art. **Computers and Operations Research**, v. 10, n. 2, p. 63-212, 1983.

BOHORIS, G.; THOMAS, J. A heuristic for vehicle routing and depot staffing. **Journal of the Operational Research Society**, v. 46, n. 10, p. 1184-1191, 1995.

BORTFELDT, A. A hybrid algorithm for the capacitated vehicle routing problem with three-dimensional loading constraints. **Computers and Operations Research**, v. 39, n. 9, p. 2248-2257, 2012.

BORTFELDT, A.; GEHRING, H. A hybrid genetic algorithm for the container loading problem. **European Journal of Operational Research**, v. 131, n. 1, p. 143-161, 2001.

BORTFELDT, A.; HOMBERGER, J. Packing first, routing second – a heuristic for the vehicle routing and loading problem. **Computers and Operations Research**, v. 40, n. 3, p. 873-885, 2013.

BORTFELDT, A.; WÄSCHER, G. Constraints in container loading – a state-of-the-art review. **European Journal of Operational Research**, v. 229, n. 1, p. 1-20, 2013.

BRANDEAU, M. L.; CHIU, S. S. An overview of representative problems in location research. **Management Science**, v. 35, n. 6, p. 645-674, 1989.

BROWN, A. R. **Optimum packing and depletion: the computer in space – and resource-usage problems**. London: Macdonald and Co.; New York: American Elsevier, 1971. 107p. (Computer Monographs, 14).

BRYMAN, A. **Research methods and organization studies**. London: Unwin Hyman, 1989. 300p.

BUNTE, S.; KLIOWER, N. An overview on vehicle scheduling models. **Public Transport**, v. 1, n. 4, p. 299-317, 2009.

BURNS, L. D.; HALL, R. W.; BLUMENFELD, D. E.; DAGANZO, C. F. Distribution strategies that minimize transportation and inventory costs. **Operations Research**, v. 33, n. 3, p. 469-490, 1985.

CAMPBELL, A. M.; CLARKE, L. W.; KLEYWEGT, A.; SAVELSBERGH, M. W. P. The inventory routing problem. In: CRAINIC, T.; LAPORTE, G. **Fleet management and logistics**. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1998. P. 95-113.

CAMPBELL, A. N.; CLARKE, L. W.; SAVELSBERGH, M. W. P. Inventory routing in practice. In: TOTH, P.; VIGO, D. **The vehicle routing problem** (SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications). Philadelphia: SIAM, 2002. P. 309-330.

CAMPOS, D. S. **Integração dos problemas de carregamento e roteamento de veículos com janela de tempo e frota heterogênea**. 2008. 119p. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) – Departamento de Engenharia de Produção, Universidade de São Paulo, São Paulo – SP, 2008.

CARPENTER, H.; DOWSLAND, W. B. Practical considerations of the pallet-loading problem. **Journal of the Operational Research Society**, v. 36, n. 6, p. 489-497, 1985.

CECILIO, F. O. **Heurísticas para o problema de carregamento de carga dentro de contêineres**. 2003. 100p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Departamento de Engenharia de Produção, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos – SP, 2003.

CECILIO, F. O.; MORABITO, R. Refinamentos na heurística de George e Robinson para o problema de carregamento de caixas dentro de contêineres. **Revista Transportes**, v. 11, n. 2, p. 32-45, 2004.

CHAN, A. W.; FRANCIS, R. L. A round-trip location problem on a tree graph. **Transportation Science**, v. 10, n. 1, p. 35-51, 1976.

CHAN, A. W.; HEARN, D. W. A rectilinear distance round-trip location problem. **Transportation Science**, v. 11, n. 2, p. 107-123, 1977.

CHANDRA, P.; FISHER, M. L. Coordination of production and distribution planning. **European Journal of Operational Research**, v. 72, n. 3, p. 503-517, 1994.

CHEN, Z.-L. Integrated production and distribution operations: taxonomy, models, and review. In: SIMCHI-LEVI, D.; WU, S. D.; SHEN, Z.-J. **Handbook of quantitative supply chain analysis: modeling in the e-business era**. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2004. P. 711-746.

CHEN, Z.-L. Integrated production and outbound distribution scheduling: review and extensions. **Operations Research**, v. 58, n. 1, p. 130-148, 2010.

CHEN, Z.-L.; VAIRAKTARAKIS, G. L. Integrated scheduling of production and distribution operations. **Management Science**, v. 51 n. 4, p. 614-628, 2005.

CHENG, C. H.; FEIRING, B. R.; CHENG, T. C. E. The cutting stock problem – a survey. **International Journal of Production Economics**, v. 36, n. 3, p. 291-305, 1994.

CHRISTENSEN, S. G.; ROUSØE, D. M. Container loading with multi-drop constraints. **International Transactions in Operational Research**, v. 16, n. 6, p. 727-743, 2009.

CHRISTIANSEN, M.; FAGERHOLT, K.; RONEN, D. Ship routing and scheduling: status and perspectives. **Transportation Science**, v. 38, n. 1, p. 1-18, 2004.

CHRISTOFIDES, N.; MINGOZZI, A.; TOTH, P. The vehicle routing problem. In: CHRISTOFIDES, N.; MINGOZZI, A.; TOTH, P.; SANDI, C. **Combinatorial optimization**. Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 1979. P. 315-338.

CHRISTOFIDES, N.; EILON, S. Expected distances in distribution problems. **Operational Research Quarterly**, v. 20, n. 4, p. 437-443, 1969.

CHRISTOFIDES, N.; WHITLOCK, C. An algorithm for two-dimensional cutting problems. **Operations Research**, v. 25, n. 1, p. 30-44, 1977.

CHUNG, H.; NORBACK, J. A clustering and insertion heuristic applied to a large routing problem in food distribution. **Journal of the Operational Research Society**, v. 42, n. 7, p. 555-564, 1991.

CLARKE, G.; WRIGHT, J. W. Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points. **Operations Research**, v. 12, n. 4, p. 568-581, 1964.

COOPER, L. Location-allocation problems. **Operations Research**, v. 11, n. 3, p. 331-343, 1963.

CORDEAU, J. -F.; TOTH, P.; VIGO, D. A survey of optimization models for train routing and scheduling. **Transportation Science**, v. 32, n. 4, p. 380-404, 1998.

CORDEAU, J. -F.; GENDREAU, M.; LAPORTE, G.; POTVIN, J. -Y.; SEMET, F. A guide to vehicle routing heuristics. **Journal of the Operational Research Society**, v. 53, n. 5, p. 512-522, 2002.

CORDEAU, J. -F.; LAPORTE, G.; SAVELSBERGH, M. W. P.; VIGO, D. Vehicle routing. In: BARNHART, C.; LAPORTE, G. **Transportation** (Handbooks in Operations Research and Management Science). New York: Elsevier, 2007. P. 367-428.

CRAINIC, T. G. Long-haul freight transportation. In: HALL, R. W. **Handbook of Transportation Science** (International Series in Operations Research and Management Science). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. P. 450-516.

CURRENT, J. R.; MARSH, M. Multiobjective transportation network design and routing problems: taxonomy and annotation. **European Journal of Operational Research**, v. 65, n. 1, p. 4-19, 1993.

DADUNA, J. R.; PINTO PAIXÃO, J. M. Vehicle scheduling for public mass transit – an overview. In: DADUNA, J. R.; BRANCO, I.; PINTO PAIXÃO, J. M. **Computer-aided transit scheduling: proceedings of the sixth international workshop on computer-aided scheduling of public transport** (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems). Berlin: Springer-Verlag, 1995. P. 76-90.

DANTZIG, G. A comment on Edie's traffic delay at toll booths. **Operations Research**, v. 2, n. 3, p. 339-341, 1954.

DANTZIG, G. B.; RAMSER, J. H. The truck dispatching problem. **Management Science**, v. 6, n. 1, p. 80-91, 1959.

DESAULNIERS, G.; DESROSIERS, J.; IOACHIM, I.; SOLOMON, M.; SOUMIS, F. A unified framework for deterministic time constrained vehicle routing and crew scheduling problems. In: CRAINIC, T.; LAPORTE, G. **Fleet management and logistics**. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1998. P. 57-93.

DESROCHERS, M.; LENSTRA, J. K.; SAVELSBERGH, M. W. P. A classification scheme for vehicle routing and scheduling problems. **European Journal of Operational Research**, v. 46, n. 3, p. 322-332, 1990.

DESROSIERS, J.; DUMAS, Y.; SOLOMON, M. M.; SOUMIS, F. Time constrained routing and scheduling. In: BALL, M. O.; MAGNANTI, T. L.; MONMA, C. L.; NEMHAUSER, G. L. **Network Routing** (Handbooks in Operations Research and Management Science). New York: Elsevier, 1995. P. 35-139.

DOWSLAND, K. A. The three-dimensional pallet chart: an analysis of the factors affecting the set of feasible layouts for a class of two-dimensional packing problems. **Journal of the Operational Research Society**, v. 35, n. 10, p. 895-905, 1984.

DOWSLAND, W. B. Three-dimensional packing – solution approaches and heuristic development. **International Journal of Production Research**, v. 29, n. 8, p. 1673-1685, 1991.

DOWSLAND, K. A.; DOWSLAND, W. B. Packing problems. **European Journal of Operational Research**, v. 56, n. 1, p. 2-14, 1992.

DREXL, M. Rich vehicle routing in theory and practice. **Logistics Research**, v. 5, n. 1-2, p. 47-63, 2012.

DREXL, A.; KIMMS, A. Lot sizing and scheduling – survey and extensions. **European Journal of Operational Research**, v. 99, n. 2, p. 221-235, 1997.

DREZNER, Z.; HAMACHER, H. W. **Facility location**: applications and theory. New York: Springer-Verlag, 2004. 457p.

DROR, M.; BALL, M. O. Inventory/routing: reduction from an annual to a short period problem. **Naval Research Logistics Quarterly**, v. 34, n. 6, p. 891-905, 1987.

DUECK, G. New optimization heuristics: the great deluge algorithm and the *record-to-record travel*. **Journal of Computational Physics**, v. 104, n. 1, p. 86-92, 1993.

DUHAMEL, C.; LACOMME, P.; QUILLIOT, A.; TOUSSAINT, H. A multi-start evolutionary local search for the two-dimensional loading capacitated vehicle routing problem. **Computers and Operations Research**, v. 38, n. 3, p. 617-640, 2011.

DVORETZKY, A.; KIEFER, J.; WOLFOWITZ, J. The inventory problem: I. case of known distributions of demand. **Econometrica**, v. 20, n. 2, p. 187-222, 1952.

DVORETZKY, A.; KIEFER, J.; WOLFOWITZ, J. The inventory problem: II. Case of unknown distributions of demand. **Econometrica**, v. 20, n. 3, p. 450-466, 1952.

DYCKHOFF, H. A typology of cutting and packing problems. **European Journal of Operational Research**, v. 44, n. 2, p. 145-159, 1990.

DYCKHOFF, H.; FINKE, U. **Cutting and packing in production and distribution: typology and bibliography**. 1. Ed. Heidelberg: Springer-Verlag, 1992. 248p.

DYCKHOFF, H.; SCHEITHAUER, G.; TERNO, J. Cutting and packing. In: DELL'AMICO, M.; MAFFIOLI, F.; MARTELLO, S. **Annotated bibliographies in combinatorial optimization**. New York: John Wiley & Sons, 1997. P. 393-414.

EDIE, L. Traffic delays at toll booths. **Operations Research**, v. 2, n. 2, p. 107-138, 1954.

EKSIOGLU, B.; VURAL, A. V.; REISMAN, A. The vehicle routing problem: a taxonomic review. **Computers and Industrial Engineering**, v. 57, n. 4, p. 1472-1483, 2009.

ERENGUC, S. S.; SIMPSON, N. C.; VAKHARIA, A. J. Integrated production/distribution planning in supply chains: an invited review. **European Journal of Operational Research**, v. 115, n. 2, p. 219-236, 1999.

ERNST, A. T.; JIANG, H.; KRISHNAMOORTHY, M.; OWENS, B.; SIER, D. An annotated bibliography of personnel scheduling and rostering. **Annals of Operations Research**, v. 127, n. 1-4, p. 21-144, 2004.

ERNST, A. T.; JIANG, H.; KRISHNAMOORTHY, M.; SIER, D. Staff scheduling and rostering: a review of applications, methods and models. **European Journal of Operational Research**, v. 153, n. 1, p. 3-27, 2004.

ETSCHMAIER, M. M.; MATHAISEL, D. F. X. Airline scheduling: an overview. **Transportation Science**, v. 19, n. 2, p. 127-138, 1985.

FEDERGRUEN, A.; ZIPKIN, P. H. A combined vehicle routing and inventory allocation problem. **Operations Research**, v. 32, n. 5, p. 1019-1037, 1984.

FERREIRA, A. B. H. **Novo dicionário da língua portuguesa**. 2. a. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1986. 1838p.

FISHER, M. Vehicle routing. In: BALL, M. O.; MAGNANTI, T. L.; MONMA, C. L.; NEMHAUSER, G. L. **Network Routing** (Handbooks in Operations Research and Management Science). New York: Elsevier, 1995. P. 1-33.

FOSTER, B. A.; RYAN, D. M. An integer programming approach to the vehicle scheduling problem. **Operational Research Quarterly**, v. 27, n. 2, p. 367-384, 1976.

FOX, K. R.; GAVISH, B.; GRAVES, S. C An n-constraint formulation of the (time-dependent) traveling salesman problem. **Operations Research**, v. 28, n. 4, p. 1018-1021, 1980.

FUELLERER, G.; DOERNER, K. F.; HARTL, R. F.; IORI, M. Ant colony optimization for the two-dimensional loading vehicle routing problem. **Computers and Operations Research**, v. 36, n. 3, p. 655-673, 2009.

FUELLERER, G.; DOERNER, K. F.; HARTL, R. F.; IORI, M. Metaheuristics for vehicle routing problems with three-dimensional loading constraints. **European Journal of Operational Research**, v. 201, n. 3, p. 751-759, 2010.

FUMERO, F.; VERCELLIS, C. Synchronized development of production, inventory, and distribution schedules. **Transportation Science**, v. 33, n. 3, p. 330-340, 1999.

GASKELL, T. J. Bases for vehicle fleet scheduling. **Operational Research Quarterly**, v. 18, n. 3, p. 281-295, 1967.

GAVISH, B.; SHLIFER, E. An approach for solving a class of transportation scheduling problems. **European Journal of Operational Research**, v. 3, n. 2, p. 122-134, 1979.

GAVISH, B.; SCHWEITZER, P.; SHLIFER, E. Assigning buses to schedules in a metropolitan area. **Computers and Operations Research**, v. 5, n. 2, p. 129-138, 1978.

GEHRING, H.; MENSCHNER, K.; MEYER, M. A computer-based heuristic for packing pooled shipment containers. **European Journal of Operational Research**, v. 44, n. 2, p. 277-288, 1990.

GENDREAU, M.; IORI, M.; LAPORTE, G.; MARTELLO, S. A tabu search algorithm for a routing and container loading problem. **Transportation Science**, v. 40, n. 3, p. 342-350, 2006.

GENDREAU, M.; IORI, M.; LAPORTE, G.; MARTELLO, S. A tabu search heuristic for the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. **Networks**, v. 51, n. 1, p. 4-18, 2008.

GEORGE, J. A.; ROBINSON, D. F. A heuristic for packing boxes into a container. **Computers and Operations Research**, v. 7, n. 3, p. 147-156, 1980.

GILLETT, B. E.; MILLER, L. R. A heuristic algorithm for the vehicle-dispatch problem. **Operations Research**, v. 22, n. 2, p. 340-349, 1974.

GOLDEN, B. L.; ASSAD, A. A. **Vehicle routing: methods and studies**. Amsterdam: North-Holland, 1988. 479p.

GOLDEN, B. L.; MAGNANTI, T. L.; NGUYEN, H. Q. Implementing vehicle routing algorithms. **Networks**, v. 7, n. 2, p. 113-148, 1977.

GOLDEN, B. L.; ASSAD, A. A.; DAHL, R. Analysis of a large scale vehicle routing problem with an inventory component. **Large Scale Systems**, v. 7, n. 2-3, p. 181-190, 1984.

GOLDEN, B. L.; RAGHAVAN, S.; WASIL, E. A. **The vehicle routing problem: latest advances and new challenges**. Berlin: Springer-Verlag, 2008. 589p.

GONÇALVES, J. F.; RESENDE, M. G. C. A parallel multi-population biased random-key genetic algorithm for a container loading problem. **Computers and Operations Research**, v. 39, n. 2, p. 179-190, 2012.

GOPALAN, R.; TALLURI, K. T. Mathematical models in airline schedule planning: a survey. **Annals of Operations Research**, v. 76, n. 1, p. 155-185, 1998.

GOUVEIA, L.; VOSS, S. A classification of formulations for the (time-dependent) traveling salesman problem. **European Journal of Operational Research**, v. 83, n. 1, p. 69-82, 1995.

GRAMANI, M. C. N.; FRANÇA, P. M. The combined cutting stock and lot-sizing problem in industrial processes. **European Journal of Operational Research**, v. 174, n. 1, p. 509-521, 2006.



GRIBKOVSKAIA, I.; HALSKAU, Ø.; LAPORTE, G. The bridges of Königsberg – a historical perspective. **Networks**, v. 49, n. 3, p. 199–203, 2007.

GROËR, C. S. **Parallel and serial algorithms for vehicle routing problems**. 2008. 429p. Tese (Doctor of Philosophy) – Faculty of the Graduate School, University of Maryland, College Park – MD, 2008.

HAESSLER, R. W.; TALBOT, F. B. Load planning for shipments of low density products. **European Journal of Operational Research**, v. 44, n. 2, p. 289-299, 1990.

HAGHANI, A. E. Rail freight transportation: a review of recent optimization models for train routing and empty car distribution. **Journal of Advanced Transportation**, v. 21, n. 2, p. 147-172, 1987.

HAKIMI, S. L. Optimum locations of switching centers and the absolute centers and medians of a graph. **Operations Research**, v. 12, n. 3, p. 450-459, 1964.

HAKIMI, S. L. Optimum distribution of switching centers in a communication network and some related graph theoretic problems. **Operations Research**, v. 13, n. 3, p. 462-475, 1965.

HAN, C. P.; KNOTT, K.; EGBELU, P. J. A heuristic approach to the three-dimensional cargo-loading problem. **International Journal of Production Research**, v. 27, n. 5, p. 757-774, 1989.

HARGROVES, B. T.; DEMETSKY, M. J. A computer assisted school bus routing strategy: a case study. **Socio-Economic Planning Sciences**, v. 15, n. 6, p. 341-345, 1981.

HASLE, G.; KLOSTER, O. Industrial vehicle routing. In: HASLE, G.; LIE, K.-A.; QUAK, E. **Geometric modeling, numerical simulation, and optimization: applied mathematics at SINTEF**. Berlin: Springer-Verlag, 2007. P. 397-435.

HENDRY, L. C.; FOK, K. K.; SHEK, K. W. A cutting stock and scheduling problem in the copper industry. **Journal of the Operational Research Society**, v. 47, n. 1, p. 38-47, 1996.

HERZ, J. C. Recursive computational procedure for two-dimensional stock cutting. **IBM Journal of Research and Development**, v. 16, n. 5, p. 462-469, 1972.

HIFI, M. Cutting and packing problems. **Studia Informatica Universalis**, v. 2, n. 1, p. 1-161, 2002. (Special Issue).

HINXMAN, A. I. The trim-loss and assortment problems: a survey. **European Journal of Operational Research**, v. 5, n.1, p. 8-18, 1980.

HODGSON, T. J. A combined approach to the pallet loading problem. **IIE Transactions**, v. 14, n. 3, p. 175-182, 1982.

HURTER, A. P.; VAN BUER, M. G. The newspaper production/distribution problem. **Journal of Business Logistics**, v. 17, n. 1, p. 85-107, 1996.

IORI, M.; MARTELLO, S. Routing problems with loading constraints. **TOP**, v. 18, n. 1, p. 4-27, 2010.

IORI, M.; SALAZAR-GONZALEZ, J.-J.; VIGO, D. An exact approach for the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. **Transportation Science**, v. 41, n. 2, p. 253-264, 2007.

JIN, Z.; OHNO, K.; DU, J. An efficient approach for the three-dimensional container packing problem with practical constraints. **Asia-Pacific Journal of Operational Research**, v. 21, n. 3, p. 279-295, 2004.

JUNQUEIRA, L. **Modelos de programação matemática para problemas de carregamento de caixas dentro de contêineres**. 2009. 134p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Departamento de Engenharia de Produção, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos – SP, 2009.

JUNQUEIRA, L.; MORABITO, R.; YAMASHITA, D. S. MIP-based approaches for the container loading problem with multi-drop constraints. **Annals of Operations Research**, v. 199, n. 1, p. 51-75, 2012a.

JUNQUEIRA, L.; MORABITO, R.; YAMASHITA, D. S. Three-dimensional container loading models with cargo stability and load bearing constraints. **Computers and Operations Research**, v. 39, n. 1, p. 74-85, 2012b.

JUNQUEIRA, L.; OLIVEIRA, J. F.; CARRAVILLA, M. A.; MORABITO, R. An optimization model for the vehicle routing problem with practical three-dimensional loading constraints. **International Transactions in Operational Research**, 2013a. (doi: 10.1111/j.1475-3995.2012.00872.x)

JUNQUEIRA, L.; MORABITO, R.; YAMASHITA, D. S.; YANASSE, H. H. Optimization models for the three-dimensional container loading problem with practical constraints. In:

FASANO, G.; PÍNTER, J. D. **Modeling and Optimization in Space Engineering** (Springer Optimization and Its Applications). New York: Springer-Verlag, 2013b. p. 271-293.

KARIMI, B.; FATEMI GHOMI, S. M. T.; WILSON, J. M. The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms. **Omega**, v. 31, n. 5, p. 365-378, 2003.

KINDERVATER, G. A. P.; SAVELSBERGH, M. W. P. Vehicle routing: handling edges exchanges windows. In: AARTS, E. H. L.; LENSTRA, J. K. **Local search in combinatorial optimization**. Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 1997. P. 337-360.

KIRKPATRICK, S.; GELATT, C. D.; VECCHI, M. P. Optimization by simulated annealing. **Science**, v. 220, n. 4598, p. 671-680, 1983.

KNIGHT, K. W.; HOFER, J. P. Vehicle scheduling with timed and connected calls: a case study. **Operational Research Quarterly**, v. 19, n. 3 p. 299-310, 1968.

KUEHN, A. A.; HAMBURGER, M. J. A heuristic program for locating warehouses. **Management Science**, v. 9, n. 4, p. 643-666, 1963.

LAI, K. K.; CHAN, J. W. M. Developing a simulated annealing algorithm for the cutting stock problem. **Computers and Industrial Engineering**, v. 32, n. 1, p. 115-127, 1997.

LAPORTE, G. Location-routing problems. In: GOLDEN, B. L.; ASSAD, A. A. **Vehicle routing: methods and studies**. Amsterdam: North-Holland, 1988. P. 163-198.

LAPORTE, G. The vehicle routing problem: an overview of exact and approximate algorithms. **European Journal of Operational Research**, v. 59, n. 3, p. 345-358, 1992.

LAPORTE, G. Fifty years of vehicle routing. **Transportation Science**, v. 43, n. 4, p. 408-416, 2009.

LAPORTE, G.; OSMAN, I. H. Routing problems: a bibliography. **Annals of Operations Research**, v. 61, n. 1, p. 227-262, 1995.

LARSON, R. C.; ODONI, A. R. **Urban operations research**. New Jersey: Prentice-Hall, 1981. 573p.

LENSTRA, J. K.; RINNOOY KAN, A. H. G. Complexity of vehicle routing and scheduling problems. **Networks**, v. 11, n. 2, p. 221-227, 1981.

LEUNG, S. C. H.; ZHOU, X.; ZHANG, D.; ZHENG, J. Extended guided tabu search and a new packing algorithm for the two-dimensional loading vehicle routing problem. **Computers and Operations Research**, v. 38, n. 1, p. 205-215, 2011.

LODI, A.; MARTELLO, S.; MONACI, M. Two-dimensional packing problems: a survey. **European Journal of Operational Research**, v. 141, n. 2, p. 241-252, 2002.

MANNE, A. S. Programming of economic lot sizes. **Management Science**, v. 4, n. 2, p. 115-135, 1958.

MARANZANA, F. E. On the location of supply points to minimize transport costs. **Operational Research Quarterly**, v. 15, n. 3, p. 261-270, 1964.

MARTELLO, S. Knapsack, packing and cutting, Part I: one-dimensional knapsack problems. **INFOR**, v. 32, n. 3, 1994a. (Special Issue).

MARTELLO, S. Knapsack, packing and cutting, Part II: multidimensional knapsack and cutting stock problems. **INFOR**, v. 32, n. 4, 1994b. (Special Issue).

MARTELLO, S.; TOTH, P. **Knapsack problems: algorithms and computer implementations**. West Sussex: John Wiley & Sons, 1990. 296p.

MARTELLO, S.; PISINGER, D.; VIGO, D. The three-dimensional bin packing problem. **Operations Research**, v. 48, n. 2, p. 256-267, 2000.

MÉNDEZ-DÍAZ, I.; ZABALA, P.; LUCENA, A. A new formulation for the traveling deliveryman problem. **Discrete Applied Mathematics**, v. 156, n. 17, p. 3223-3237, 2008.

MENON, S.; SCHRAGE, L. Order allocation for stock cutting in the paper industry. **Operations Research**, v. 50, n. 2, p. 324-332, 2002.

MIN, H.; JAYARAMAN, V.; SRIVASTAVA, R. Combined location-routing problems: a synthesis and future research directions. **European Journal of Operational Research**, v. 108, n. 1, p. 1-15, 1998.

MOIN, N. H.; SALHI, S. Inventory routing problems: a logistical overview. **Journal of the Operational Research Society**, v. 58, n. 9, p. 1185-1194, 2007.

MOLE, R. H.; JAMESON, S. R. A sequential route-building algorithm employing a maximum savings criterion. **Operational Research Quarterly**, v. 27, n. 2, p. 503-511, 1976.

MORABITO, R.; ARENALES, M. Um exame dos problemas de corte e empacotamento. **Pesquisa Operacional**, v. 12, n. 1, p. 1-20, 1992.

MORABITO, R.; ARENALES, M. An And/Or-graph approach to the container loading problem. **International Transactions in Operational Research**, v. 1, n. 1, p. 59-73, 1994.

MORABITO, R.; PUREZA, V. Modelagem e simulação. In: MIGUEL, P. A. C. **Metodologia de pesquisa em engenharia de produção e gestão de operações**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010. P. 165-194.

MORABITO, R.; ARENALES, M.; ARCARO, V. An And/Or-graph approach for two-dimensional cutting problems. **European Journal of Operational Research**, v. 58, n. 2, p. 263-271, 1992.

MOURA, A.; OLIVEIRA, J. F. A GRASP approach to the container-loading problem. **IEEE Intelligent Systems**, v. 4, n. 20, p. 50-57, 2005.

MOURA, A.; OLIVEIRA, J. F. An integrated approach to the vehicle routing and container loading problems. **OR Spectrum**, v. 31, n. 4, p. 775-800, 2009.

NAGY, G.; SALHI, S. Location-routing: issues, models and methods. **European Journal of Operational Research**, v. 177, n. 2, p. 649-672, 2007.

NEWTON, R. M.; THOMAS, W. H. Design of school bus routes by computer. **Socio-Economic Planning Sciences**, v. 3, n. 1, p. 75-85, 1969.

NEWTON, R. M.; THOMAS, W. H. Bus routing in a multi-school system. **Computers and Operations Research**, v. 1, n. 2, p. 213-222, 1974.

OR, I.; PIERSKALLA, W. P. A transportation location-allocation model for regional blood banking. **AIIE Transactions**, v. 11, n. 2, p. 86-94, 1979.

NONAS, S. L.; THORSTENSON, A. A combined cutting-stock and lot-sizing problem. **European Journal of Operational Research**, v. 120, n. 2, p. 327-342, 2000.

ORLOFF, C. S. A fundamental problem in vehicle routing. **Networks**, v. 4, n. 1, p. 35-64, 1974.

ORLOFF, C. S. Route constrained fleet scheduling. **Transportation Science**, v. 10, n. 2, p. 149-168, 1976.

OR/MSToday **Software survey: vehicle routing**. Disponível em: < [ax ://www.orms-today.org/surveys/Vehicle\\_Routing/vrss.html](http://www.orms-today.org/surveys/Vehicle_Routing/vrss.html)>. Acesso em: 01 março 2012.

ÖNCAN, T.; ALTINEL, I. K.; LAPORTE, G. A comparative analysis of several asymmetric traveling salesman problem formulations. **Computers and Operations Research**, v. 36, n. 3, p. 637-654, 2009.

PARK, Y. B. An integrated approach for production and distribution planning in supply chain management. **International Journal of Production Research**, v. 43, n. 6, p. 1205-1224, 2005.

PILEGGI, G. C. F.; MORABITO, R.; ARENALES, M. N. Abordagens para otimização integrada dos problemas de geração e sequenciamento de padrões de corte: caso unidimensional. **Pesquisa Operacional**, v. 25, n. 3, p. 417-447, 2005.

PILEGGI, G. C. F.; MORABITO, R.; ARENALES, M. N. Heurísticas para os problemas de geração e sequenciamento de padrões de corte bidimensionais. **Pesquisa Operacional**, v. 27, n. 3, p. 549-568, 2007.

PISINGER, D. Heuristics for the container loading problem. **European Journal of Operational Research**, v. 141, n. 2, p. 382-392, 2002.

QUEIROZ, T. A.; MIYAZAWA, F. K. Two-dimensional strip packing problem with load balancing, load bearing and multi-drop constraints. **International Journal of Production Economics**, 2013. (doi: 10.1016/j.ijpe.2013.04.032)

RATCLIFF, M. S. W.; BISCHOFF, E. E. Allowing for weight considerations in container loading. **OR Spektrum**, v. 20, n. 1, p. 65-71, 1998.

RECKER, W. The household activity pattern problem: general formulation and solution. **Transportation Research Part B: Methodological**, v. 29, n. 1, p. 61-77, 1995.

REIMANN, M.; DOERNER, K. F.; HARTL, R. F. D-ants: savings based ants divide and conquer the vehicle routing problem. **Computers and Operations Research**, v. 31, n. 4, p. 563-591, 2004.

REINDERS, M. P. Cutting stock optimization and integral production planning for centralized wood processing. **Mathematical and Computer Modelling**, v. 16, n. 1, p. 37-55, 1992.

REINERTSEN, H.; VOSSEN, T. W. M. The one-dimensional cutting stock problem with due dates. **European Journal of Operational Research**, v. 201, n. 3, p. 701-711, 2010.

RENAUD, J.; BOCTOR, F. F.; LAPORTE, G. An improved petal heuristic for the vehicle routing problem. **Journal of the Operational Research Society**, v. 47, n. 2, p. 329-336, 1996.

REVELLE, C. S.; EISELT, H. A. Location analysis: a synthesis and survey. **European Journal of Operational Research**, v. 165, n. 1, p. 1-19, 2005.

REVELLE, C. S.; EISELT, H. A.; DASKIN, M. S. A bibliography for some fundamental problem categories in discrete location science. **European Journal of Operational Research**, v. 184, n. 3, p. 817-848, 2008.

RONEN, D. Cargo ships routing and scheduling: survey of models and problems. **European Journal of Operational Research**, v. 12, n. 2, p. 119-126, 1983.

RUAN, Q.; ZHANG, Z.; MIAO, L.; SHEN, H. A hybrid approach for the vehicle routing problem with three-dimensional loading constraints. **Computers and Operations Research**, v. 40, n. 6, p. 1579-1589, 2013.

SAHA, J. L. An algorithm for bus scheduling problems. **Operational Research Quarterly**, v. 21, n. 4, p. 463-474, 1970.

SARMIENTO, A. M.; NAGI, R. A review of integrated analysis of production-distribution systems. **IIE Transactions**, v. 31, n. 1061-1074, p. 1061-1074, 1999.

SAVELSBERGH, M.; SOL, M. Drive: dynamic routing of independent vehicles. **Operations Research**, v. 46, n. 4, p. 474-490, 1998.

SCHEITHAUER, G.; TERNO, J., RIEHME, J.; SOMMERWEISS, U. **A new heuristic approach for solving the multi-pallet packing problem**. Dresden: Technische Universität Dresden, 1996. Technical Report.

SILVA, J. L. C.; SOMA, N. Y.; MACULAN, N. A greedy search for the three-dimensional bin packing problem: the packing static stability case. **International Transactions in Operational Research**, v. 10, n. 2, p. 141-153, 2003.

SILVER, E. A. Operations research in inventory management: a review and critique. **Operations Research**, v. 29, n. 4, p. 628-645, 1981.

SMITH, A.; DE CANI, P. An algorithm to optimize the layout of boxes in pallets. **Journal of the Operational Research Society**, v. 31, n. 7, p. 573-578, 1980.

SOLOMON, M. M. Algorithms for the vehicle routing and scheduling problems with time window constraints. **Operations Research**, v. 35, n. 2, p. 254-265, 1987

STEUDEL, H. J. Generating pallet loading patterns: a special case of the two-dimensional cutting stock problem. **Management Science**, v. 25, n. 10, p. 997-1004, 1979.

SWEENEY, P. E.; PATERNOSTER, E. R. Cutting and packing problems: a categorized, application-orientated research bibliography. **Journal of the Operational Research Society**, v. 43, n. 7, p. 691-706, 1992.

SWERSEY, A. J.; BALLARD, W. Scheduling school buses. **Management Science**, v. 30, n. 7, p. 844-853, 1984.

TARANTILIS, C. D.; ZACHARIADIS, E. E.; KIRANOUDIS, C. T. A hybrid metaheuristic algorithm for the integrated vehicle routing and three-dimensional container-loading problem. **IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems**, v. 10, n. 2, p. 255-271, 2009.

TEITZ, M. B.; BART, P. Heuristic methods for estimating generalized vertex median of a weighted graph. **Operations Research**, v. 16, n. 5, p. 955-961, 1968.



TERNO, J.; SCHEITHAUER, G.; SOMMERWEISS, U.; RIEHME, J. An efficient approach for the multi-pallet loading problem. **European Journal of Operational Research**, v. 123, n. 2, p. 372-381, 2000.

TIBREWALA, R.; PHILIPPE, D.; BROWNE, J. Optimal scheduling of two consecutive idle periods. **Management Science**, v. 19, n. 1, p. 71-75, 1972.

TOTH, P.; VIGO, D. **The vehicle routing problem** (SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications). Philadelphia: SIAM, 2002. 363p.

VAN BUER, M. G.; WOODRUFF, D. L.; OLSON, R. T. Solving the medium newspaper production/distribution problem. **European Journal of Operations Research**, v. 115, n. 2, p. 237-253, 1999.

VASCO, R. A. **Otimização na alocação dinâmica de veículos no transporte rodoviário de cargas completas entre terminais**. 2012. 347p. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) – Departamento de Engenharia de Produção, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos – SP, 2012.

VERDERBER, W. J. Automated pupil transportation. **Computers and Operations**, v. 1, n. 2, p. 235-245, 1974.

WAGNER, H. M.; WHITIN, T. M. Dynamic version of the economic lot size model. **Management Science**, v. 5, n. 1, p. 89-96, 1958.

WANG, F.; TAO, Y.; SHI, N.; A survey on vehicle routing problem with loading constraints. In: 2009 INTERNATIONAL JOINT CONFERENCE ON COMPUTATIONAL SCIENCES AND OPTIMIZATION, 2009, Sanya. **Proceedings...** Washington: IEEE Computer Society, 2009, p. 602–606.

WARNER, D.; PRAWDA, J. A mathematical programming model for scheduling nursing personnel in a hospital. **Management Science**, v. 19, n. 4, p. 411-422, 1972.

WATSON-GANDY, C. D. T.; DOHRN, P. J. Depot location with van salesmen – a practical approach. **Omega**, v. 1, n. 3, p. 321-329, 1973.

WÄSCHER, G.; HAUSSNER, H.; SCHUMANN, H. An improved typology of cutting and packing problems. **European Journal of Operational Research**, v. 183, n. 3, p. 1109-1130, 2007.

WEBB, M. H. J. Cost functions in the location of depots for multiple-delivery journeys. **Operational Research Quarterly**, v. 19, n. 3, p. 311-320, 1968.

WREN, A. Bus scheduling: an interactive computer method. **Transportation Planning and Technology**, v. 1, n. 2, p. 115-122, 1972.

WREN, A.; HOLLIDAY, A. Computer scheduling of vehicles from one or more depots to a number of delivery points. **Operational Research Quarterly**, v. 23, n. 3, p. 333-344, 1972.

YANASSE, H. H.; LAMOSA, M. J. P. An integrated cutting stock and sequencing problem. **European Journal of Operational Research**, v. 183, n. 3, p. 1353-1370, 2007.

YELLOW, P. C. A computational modification to the savings method of vehicle scheduling. **Operational Research Quarterly**, v. 21, n. 2 p. 281-283, 1970.

ZACHARIADIS, E. E.; TARANTILIS, C. D.; KIRANOUDIS, C. T. A guided tabu search for the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. **European Journal of Operational Research**, v. 195, n. 3, p. 729-743, 2009.

ZACHARIADIS, E. E.; TARANTILIS, C. D.; KIRANOUDIS, C. T. The pallet-packing vehicle routing problem. **Transportation Science**, v. 46, n. 3, p. 341-358, 2012.

ZHU, W.; QIN, H.; LIM, A.; WANG, L. A two-stage tabu search algorithm with enhanced packing heuristics for the 3L-CVRP and M3L-CVRP. **Computers and Operations Research**, v. 39, n. 9, p. 2178-2195, 2012.

ZIPKIN, P. H. **Foundations of inventory management**. New York: McGraw-Hill, 2000. 524p.

## APÊNDICE A

### MODELOS EM GAMS

---

O modelo a seguir para o Problema Integrado de Roteamento e Carregamento de Veículos está implementado na linguagem de modelagem GAMS e considera combinações cônicas (padrões normais), orientação fixa para as caixas, estabilidade em relação ao eixo z (vertical), múltiplos destinos e empilhamento.

- \* integrated model vrpiclp
- \* oriented graph (mandatorily), symmetric or asymmetric
- \* extension of the tsp formulation of fox, gavish and graves (1980)
- \* node 1 is assumed to be the depot
- \* the cargo is assumed to completely fit inside all the vehicles

OPTION OPTCR = 0.0, ITERLIM = 1000000000, RESLIM = 14400, SOLPRINT = OFF;

#### SCALARS

MM sufficiently large number /10000/,  
 L0 vehicle length /12/,  
 W0 vehicle width /8/,  
 H0 vehicle height /8/;

#### SETS

k index for nodes /1\*5/,  
 v index for vehicles /1\*2/,  
 I index for boxes types /1\*4/,  
 x0 index for L0 /0\*12/,  
 y0 index for W0 /0\*8/;

$z_0$  index for  $H_0 / 0^*8/$ ,

$x(x_0)$  index for normal patterns along x-axis (length)  $/0^*6/$ ,

$y(y_0)$  index for normal patterns along y-axis (width)  $/0^*7/$ ,

$z(z_0)$  index for normal patterns along z-axis (height)  $/0^*5/$ ;

ALIAS(k,k1,t,t1)

ALIAS(i,j)

ALIAS(x,x1,x2)

ALIAS(y,y1,y2)

ALIAS(z,z1,z2);

## PARAMETERS

$L(i)$  length of a box of type i

/

(1 2

2 4

3 4

4 6

/,

$W(i)$  width of a box of type i

/

(1 3

2 2

3 3

4 2

/,

$H(i)$  height of a box of type i

/

(1 4

2 4

3 3

4 3

/,

$m(x)$  normal patterns along x-axis (length)

/

(1 0

(1 2

2 4

3 6

4 8

5 10

6 12

/,

n(y) normal patterns along y-axis (width)

/

(1 0

(1 2

2 3

3 4

4 5

5 6

6 7

7 8

/,

o(z) normal patterns along z-axis (height)

/

(1 0

(1 3

2 4

3 6

4 7

5 8

/,

sigma(i) maximum admissible pressure that a box of type I can stand

/

(1 4

2 4

3 3

4 3  
/;

## TABLE

$c(k,k1)$  cost (or distance) to go directly from node  $k$  to node  $k1$

	1	2	3	4	5
1	10000	42	158	36	85
2	61	10000	101	100	152
3	113	86	10000	123	217
4	71	129	154	10000	46
5	88	140	200	79	10000;

## TABLE

$b(I,k)$  number of boxes of type  $I$  required by customer  $k$

	1	2	3	4	5
1	0	3	0	3	4
2	0	1	3	1	3
3	0	2	4	0	1
4	0	4	2	0	1;

## PARAMETERS

$\delta(I,k)$  multi-drop parameter;

\* defining the multi-drop parameter

LOOP((I,k),

$\delta(I,k) = L(i);$

);

## VARIABLES

$d(k,k1,t,v)$  1 if vehicle  $v$  goes directly from node  $k$  to node  $k1$  in stage  $t$  e 0 cc,  
 $a(I,k,t,v,x,y,z)$  1 if a box of type  $I$  required by customer  $k$  visited in stage  $t$  by vehicle  $v$  is placed with its front-left-bottom corner at positions  $m(x)$  and  $n(y)$  and  $o(z)$  and 0 cc,  
 $L1(k,v)$  the necessary length to pack all boxes of customer  $k$  inside vehicle  $v$ ,  
 zz objective ax tion;  
 BINARY VARIABLES  $d,a$ ;  
 POSITIVE VARIABLES  $L1$ ;

\* preprocessing of variables

```

LOOP((k,k1,t,v),
  IF ( (ORD(k) = 1),
    IF ( (ORD(t) <> 1),
      d.fx(k,k1,t,v) = 0;
    );
  );
);

```

```

LOOP((I,k,t,v,x,y,z),
  IF ( (m(x) > L0 - L(i)) OR (n(y) > W0 - W(i)) OR (o(z) > H0 - H(i)),
    a.fx(I,k,t,v,x,y,z) = 0;
  );
);

```

```

LOOP((k,k1,t,v),
  d.prior(k,k1,t,v) = 1;
);

```

```

LOOP((I,k,t,v,x,y,z),
  a.prior(I,k,t,v,x,y,z) = 2;
);

```

EQUATIONS

OF,  
 ASSIGNMENT(k),  
 SUBTOURS(k),  
 DEPOT(v),  
 FLOW(k,t,v),  
 CAPACITY(v),  
 COUPLING(k,t,v),  
 OVERLAPPING(x1,y1,z1,v),  
 DEMAND(I,k),  
 STABILITYZ(I,k,t,v,x,y,z),  
 MULTIDROP1(i,k,v,x,y,z),  
 MULTIDROP2(i,k,k1,v,x,y,z),  
 MULTIDROP3(k,k1,v),  
 MULTIDROP4(k,v),  
 LOADBEARING(x1,y1,z1,v);

\*\*\*\*\* objective function \*\*\*\*\*

OF .. zz =e=  
 SUM(k,  
 SUM(k1\$( ORD(k1) <> ORD(k) ),  
 SUM(t,  
 SUM(v, c(k,k1)\*d(k,k1,t,v) )));

\*\*\*\*\* assignment constraints \*\*\*\*\*

ASSIGNMENT(k)\$( ORD(k) <> 1 ) ..  
 SUM(k1\$( ORD(k1) <> ORD(k) ),  
 SUM(t,  
 SUM(v, d(k,k1,t,v) ))) =e= 1;

\*\*\*\*\* subtours elimination constraints \*\*\*\*\*

SUBTOURS(k)\$( ORD(k) <> 1 ) ..



$$\text{SUM}(k1\$(\text{ORD}(k1) \diamond \text{ORD}(k) ),$$

$$\text{SUM}(t\$(\text{ORD}(t) \diamond 1 ),$$

$$\text{SUM}(v, \text{ORD}(t)*d(k,k1,t,v) ))) -$$

$$\text{SUM}(k1\$(\text{ORD}(k1) \diamond \text{ORD}(k) ),$$

$$\text{SUM}(t,$$

$$\text{SUM}(v, \text{ORD}(t)*d(k1,k,t,v) ))) =e= 1;$$

\*\*\*\*\* depot leaving constraints \*\*\*\*\*

$$\text{DEPOT}(v) .. \text{SUM}(k1\$(\text{ORD}(k1) \diamond 1 ), d('1',k1,'1',v) ) =l= 1;$$

\*\*\*\*\* flow conservation constraints \*\*\*\*\*

$$\text{FLOW}(k,t,v)\$( \text{ORD}(k) \diamond 1 ) \text{ AND } ( \text{ORD}(t) \diamond \text{CARD}(t) ) ..$$

$$\text{SUM}(k1\$(\text{ORD}(k1) \diamond \text{ORD}(k) ), d(k1,k,t,v) ) =e=$$

$$\text{SUM}(k1\$(\text{ORD}(k1) \diamond \text{ORD}(k) ), d(k,k1,t + 1,v) );$$

\*\*\*\*\* capacity constraints \*\*\*\*\*

$$\text{CAPACITY}(v) ..$$

$$\text{SUM}(I,$$

$$\text{SUM}(k\$(\text{ORD}(k) \diamond 1 ),$$

$$\text{SUM}(k1\$(\text{ORD}(k1) \diamond \text{ORD}(k) ),$$

$$\text{SUM}(t\$(\text{ORD}(t) \diamond 1 ), l(i)*w(i)*h(i)*b(I,k)*d(k,k1,t,v) ))) =l= L0*W0*H0;$$

\*\*\*\*\* coupling constraints \*\*\*\*\*

$$\text{COUPLING}(k,t,v)\$( \text{ORD}(k) \diamond 1 ) \text{ AND } ( \text{ORD}(t) \diamond \text{CARD}(t) ) ..$$

$$\text{SUM}(i,$$

$$\text{SUM}(x\$(\text{m}(x) \leq L0 - L(i) ),$$

$$\text{SUM}(y\$(\text{n}(y) \leq W0 - W(i) ),$$

$$\text{SUM}(z\$(\text{o}(z) \leq H0 - H(i) ), a(i,k,t,v,x,y,z) ))) =e=$$

$$\text{SUM}(I,$$

$$\text{SUM}(k1\$(\text{ORD}(k1) \diamond \text{ORD}(k) ), b(I,k)*d(k1,k,t,v) ));$$

\*\*\*\*\* non-overlapping constraints \*\*\*\*\*

OVERLAPPING(x1,y1,z1,v) ..

SUM(I,  
SUM(k\$( ORD(k) <> 1 ),  
SUM(t\$( ORD(t) <> CARD(t) ),  
SUM(x\$( (m(x) <= L0 - L(i)) AND (m(x) <= m(x1)) AND (m(x1) <= m(x) + L(i) - 1) ),  
SUM(y\$( (n(y) <= W0 - W(i)) AND (n(y) <= n(y1)) AND (n(y1) <= n(y) + W(i) - 1) ),  
SUM(z\$( (o(z) <= H0 - H(i)) AND (o(z) <= o(z1)) AND (o(z1) <= o(z) + H(i) - 1) ),  
a(i,k,t,v,x,y,z) )))) = 1;

\*\*\*\*\* demand satisfiability constraints \*\*\*\*\*

DEMAND(I,k\$( ORD(k) <> 1 ) ..

SUM(t\$( ORD(t) <> CARD(t) ),  
SUM(v,  
SUM(x\$( m(x) <= L0 - L(i) ),  
SUM(y\$( n(y) <= W0 - W(i) ),  
SUM(z\$( o(z) <= H0 - H(i) ), a(i,k,t,v,x,y,z) )))) = e= b(i,k);

\*\*\*\*\* vertical stability constraints \*\*\*\*\*

STABILITYZ(I,k,t,v,x,y,z\$( (ORD(k) <> 1) AND (ORD(t) <> CARD(t)) AND

(m(x) <= L0 - L(i)) AND (n(y) <= W0 - W(i)) AND (o(z) <= H0 - H(i)) AND (o(z) > 0) ) ..

SUM(j\$( o(z) - H(j) >= 0 ),  
SUM(k1\$( ORD(k1) <> 1 ),  
SUM(t1\$( (ORD(t1) <> CARD(t1)) AND (ORD(t1) >= ORD(t)) ),  
SUM(x2\$( (m(x2) <= L0 - L(j)) AND (m(x) - L(j) + 1 <= m(x2)) AND  
(m(x2) <= m(x) + L(i) - 1) ),  
SUM(y2\$( (n(y2) <= W0 - W(j)) AND (n(y) - W(j) + 1 <= n(y2)) AND  
(n(y2) <= n(y) + W(i) - 1) ),  
SUM(z2\$( (o(z2) <= H0 - H(j)) AND (o(z) = o(z2) + H(j)) ),  
( min(m(x) + L(i),m(x2) + L(j)) - ax(m(x),m(x2)) )\*)

$$( \min(n(y) + W(i), n(y2) + W(j)) - ax(n(y), n(y2)) ) * \\ a(j, k1, t1, v, x2, y2, z2) ) ) ) ) = g = L(i) * W(i) * a(i, k, t, v, x, y, z);$$

\*\*\*\*\* multi-drop constraints \*\*\*\*\*

$$\text{MULTIDROP1}(I, k, v, x, y, z) \$ ( \text{ORD}(k) <> 1 ) \text{ AND } ( m(x) \leq L0 - L(i) ) \text{ AND} \\ ( n(y) \leq W0 - W(i) ) \text{ AND } ( o(z) \leq H0 - H(i) ) .. \\ ( m(x) + L(i) ) * \text{SUM}(t \$ ( \text{ORD}(t) <> \text{CARD}(t) ), a(I, k, t, v, x, y, z) ) \neq L1(k, v);$$

$$\text{MULTIDROP2}(I, k, k1, v, x, y, z) \$ ( \text{ORD}(k) <> 1 ) \text{ AND } ( \text{ORD}(k1) <> 1 ) \text{ AND} \\ ( \text{ORD}(k1) <> \text{ORD}(k) ) \text{ AND } ( m(x) \leq L0 - L(i) ) \text{ AND } ( n(y) \leq W0 - W(i) ) \text{ AND} \\ ( o(z) \leq H0 - H(i) ) .. \\ L1(k1, v) - \text{delta}(i, k) \neq m(x) * \text{SUM}(t \$ ( \text{ORD}(t) <> \text{CARD}(t) ), a(i, k, t, v, x, y, z) ) + \\ ( 1 - \text{SUM}(t \$ ( \text{ORD}(t) <> \text{CARD}(t) ), a(I, k, t, v, x, y, z) ) ) * MM + \\ ( 1 - \text{SUM}(t \$ ( \text{ORD}(t) <> \text{CARD}(t) ), d(k, k1, t, v) ) ) * MM;$$

$$\text{MULTIDROP3}(k, k1, v) \$ ( \text{ORD}(k) <> 1 ) \text{ AND } ( \text{ORD}(k1) <> 1 ) \text{ AND} \\ ( \text{ORD}(k1) <> \text{ORD}(k) ) .. \\ L1(k1, v) \neq L1(k, v) + ( 1 - \text{SUM}(t \$ ( \text{ORD}(t) <> \text{CARD}(t) ), d(k, k1, t, v) ) ) * MM;$$

$$\text{MULTIDROP4}(k, v) \$ ( \text{ORD}(k) <> 1 ) .. L1(k, v) \neq L0;$$

\*\*\*\*\* load bearing constraints \*\*\*\*\*

$$\text{LOADBEARING}(x1, y1, z1, v) .. \\ \text{SUM}(j, \\ \text{SUM}(k1 \$ ( \text{ORD}(k1) <> 1 ), \\ \text{SUM}(t1 \$ ( \text{ORD}(t1) <> \text{CARD}(t1) ), \\ \text{SUM}(x2 \$ ( ( m(x2) \leq L0 - L(j) ) \text{ AND } ( m(x1) - L(j) + 1 \leq m(x2) ) \text{ AND } ( m(x2) \leq \\ m(x1) ) ) ), \\ \text{SUM}(y2 \$ ( ( n(y2) \leq W0 - W(j) ) \text{ AND } ( n(y1) - W(j) + 1 \leq n(y2) ) \text{ AND } ( n(y2) \leq n(y1) ) \\ ), \\ \text{SUM}(z2 \$ ( ( o(z2) \leq H0 - H(j) ) \text{ AND } ( o(z1) + 1 \leq o(z2) ) ) ), \\ H(j) * a(j, k1, t1, v, x2, y2, z2) ) ) ) ) ) \neq$$

```

SUM(I,
SUM(k$( ORD(k) <> 1 ),
SUM(t$( ORD(t) <> CARD(t) ),
SUM(x$( (m(x) <= L0 - L(i)) AND (m(x1) - L(i) + 1 <= m(x)) AND (m(x) <= m(x1)) ),
SUM(y$( (n(y) <= W0 - W(i)) AND (n(y1) - W(i) + 1 <= n(y)) AND (n(y) <= n(y1)) ),
SUM(z$( (o(z) <= H0 - H(i)) AND (o(z1) - H(i) + 1 <= o(z)) AND (o(z) <= o(z1)) ),
sigma(i)*a(i,k,t,v,x,y,z )))))));

```

.....

```

MODEL VRPiCLP /all/;
OPTION limrow = 0, limcol = 0;
SOLVE VRPiCLP using MIP minimizing zz;
OPTION d:0:0:5,a:0:0:5,L1:0:0:5;
DISPLAY d.l,a.l,L1.l;

```

## APÊNDICE B

### ALGORITMO DE CLARKE & WRIGHT

---

O Algoritmo de Clarke & Wright (CLARKE; WRIGHT, 1964), também conhecido como Algoritmo das Economias (*Savings Algorithm*), trata-se de um algoritmo heurístico construtivo que se baseia no conceito de “economias” (*savings*). Este conceito basicamente expressa as economias de custo obtidas ao se unir dois roteiros em um único roteiro. Por exemplo, inicialmente, considere que os clientes  $k$  e  $l$  estão em roteiros diferentes,  $1-k-1$  e  $1-l-1$ . Uma alternativa é que os dois clientes estejam em um mesmo roteiro,  $1-k-l-1$  (ou  $1-l-k-1$ ). Para verificar se esta alternativa é vantajosa, em termos de custos, é preciso avaliar se há economias incorridas. Seja  $d_a = c_{1k} + c_{kl} + c_{l1} + c_{11}$  o custo de transporte da primeira configuração, e  $d_b = c_{1k} + c_{kl} + c_{l1}$  o custo de transporte da configuração alternativa. Ao se subtrair a segunda alternativa da primeira, obtêm-se as economias resultantes,  $s_{kl} = d_a - d_b = c_{k1} + c_{l1} - c_{kl}$ . Quanto maior for o valor de  $s_{kl}$ , mais atrativo é visitar os clientes  $k$  e  $l$  no mesmo roteiro, tal que o cliente  $l$  é visitado imediatamente após o cliente  $k$ . O algoritmo de Clarke & Wright possui duas versões, uma sequencial e uma paralela. Na versão sequencial, apenas um roteiro é construído de cada vez (desconsiderando roteiros com apenas um cliente), enquanto na versão paralela mais de um roteiro pode ser construído de cada vez.

No início do algoritmo, são criados  $n-1$  roteiros, um para cada cliente. O próximo passo consiste em calcular as economias obtidas com todos os pares de clientes, e ordenar todos os pares de clientes em ordem decrescente de valor de economias. Em seguida, percorrendo-se esta lista do maior para o menor valor, cada par de clientes é considerado de cada vez. Quando um par de clientes  $k-l$  é considerado, os dois roteiros aos quais eles pertencem são unidos (considerando que  $l$  é visitado imediatamente após  $k$  no novo roteiro). No entanto, esta união só é permitida (i) se nenhuma união já realizada entre dois clientes é desfeita (i.e., um cliente  $m$  que esteja no interior de um dado roteiro, por exemplo,  $1-k-m-l-1$ , não pode ser envolvido em uniões com clientes de outros roteiros), (ii) se o par de clientes já não estiver em um mesmo roteiro (para que não haja formação de subciclos),

e (iii) se a demanda total do roteiro resultante não excede a capacidade do veículo. Na versão sequencial do algoritmo, a cada união realizada entre dois clientes, deve-se percorrer a lista novamente do início até que não seja mais possível unir novos clientes aos clientes já incluídos no roteiro. Por outro lado, na versão paralela do algoritmo, é preciso percorrer a lista apenas uma vez. O pseudocódigo da versão paralela do Algoritmo de Clarke & Wright é apresentado a seguir:

---

**Algoritmo 5:** Clarke & Wright

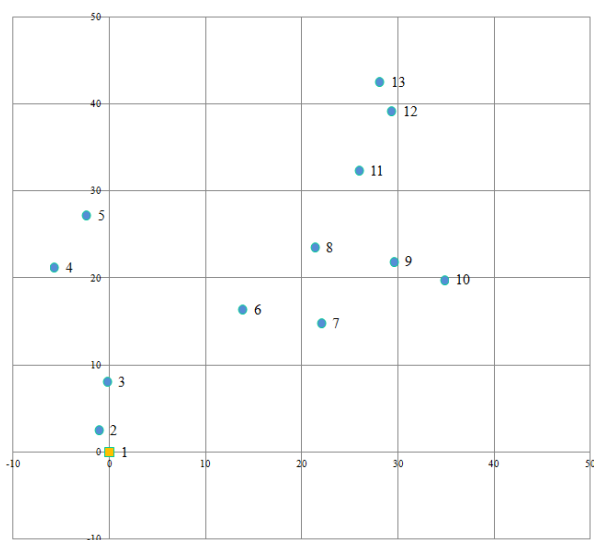
---

Entradas: Um conjunto de clientes, com posições e demandas conhecidas, e que devem ser visitados por um único veículo, com capacidade conhecida.

Saídas: Uma solução factível para o CVRP.

1. Crie um roteiro para cada cliente.
  2. **para** todos os pares de clientes **faça**
  3.     Calcule os valores das economias e coloque-os em uma lista.
  4. **fim para**
  5. Coloque a lista em ordem não crescente dos valores das economias.
  6. **enquanto** for possível unir roteiros **faça**
  7.     Inicie no par de clientes com o maior valor de economia e junte os roteiros.
  8.     Remova da lista o par de clientes e a respectiva economia.
  9. **fim enquanto**
- 

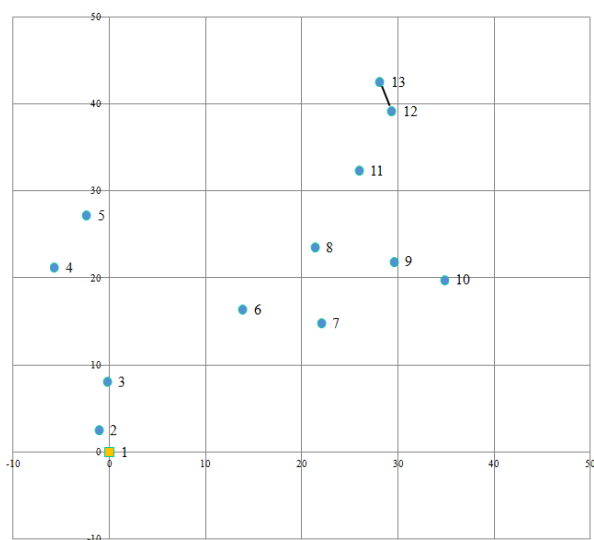
A seguir é apresentado um exemplo didático que ilustra a execução deste algoritmo. Neste exemplo, apresentado no artigo original de Dantzig e Ramser (1959), há 12 clientes com demandas  $D_2 = 1200$ ,  $D_3 = 1700$ ,  $D_4 = 1500$ ,  $D_5 = 1400$ ,  $D_6 = 1700$ ,  $D_7 = 1400$ ,  $D_8 = 1200$ ,  $D_9 = 1900$ ,  $D_{10} = 1800$ ,  $D_{11} = 1600$ ,  $D_{12} = 1700$  e  $D_{13} = 1100$ , e os veículos tem capacidade  $C = 6000$ . A Figura 36 ilustra a disposição destes 12 clientes, do depósito (1) e a lista das economias para execução do Algoritmo de Clarke & Wright. Nesta lista também está presente a razão para união ou não dos roteiros, seguindo a seguinte terminologia: (i) união factível dos roteiros; (ii) união infactível dos roteiros devido à pelo menos um dos clientes ser interior no roteiro; (iii) união infactível dos roteiros devido à formação de subciclo; (iv) união infactível dos roteiros devido à capacidade do veículos ser excedida. Por simplicidade, os arcos conectando os clientes e o depósito não estão ilustrados. As Figuras 37 a 44 ilustram o passo a passo da execução deste algoritmo.



$k$	$l$	$s_{kl}$	#
12	13	92	—
11	12	84	—
11	13	84	—
10	12	76	—
9	11	72	—
9	12	72	—
9	13	72	—
10	13	70	—
9	10	68	—
10	11	68	—
8	11	64	—
8	12	64	—
8	13	64	—
...	...	...	...

$k$	$l$	$s_{kl}$	#
...	...	...	...
8	9	58	—
8	10	54	—
7	8	50	—
7	9	50	—
7	10	50	—
7	11	50	—
7	12	50	—
7	13	50	—
5	13	46	—
6	8	44	—
6	11	44	—
6	12	44	—
...	...	...	...

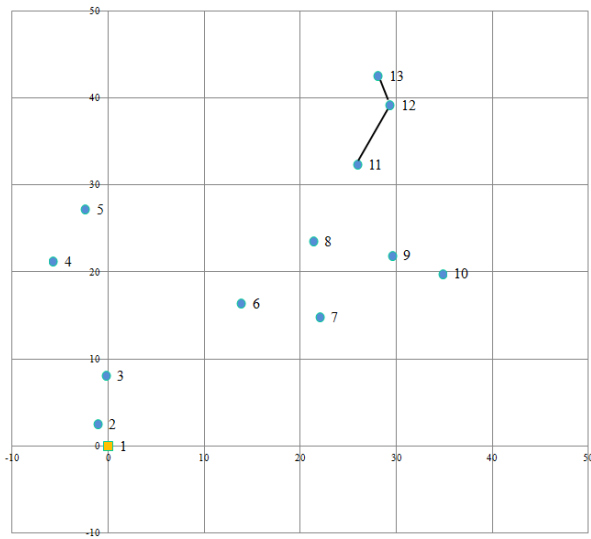
Figura 36. Os 12 clientes, o depósito (1) e a lista das economias para execução do Algoritmo de Clarke & Wright.



$k$	$l$	$s_{kl}$	#
12	13	92	i
11	12	84	—
11	13	84	—
10	12	76	—
9	11	72	—
9	12	72	—
9	13	72	—
10	13	70	—
9	10	68	—
10	11	68	—
8	11	64	—
8	12	64	—
8	13	64	—
...	...	...	...

$k$	$l$	$s_{kl}$	#
...	...	...	...
8	9	58	—
8	10	54	—
7	8	50	—
7	9	50	—
7	10	50	—
7	11	50	—
7	12	50	—
7	13	50	—
5	13	46	—
6	8	44	—
6	11	44	—
6	12	44	—
...	...	...	...

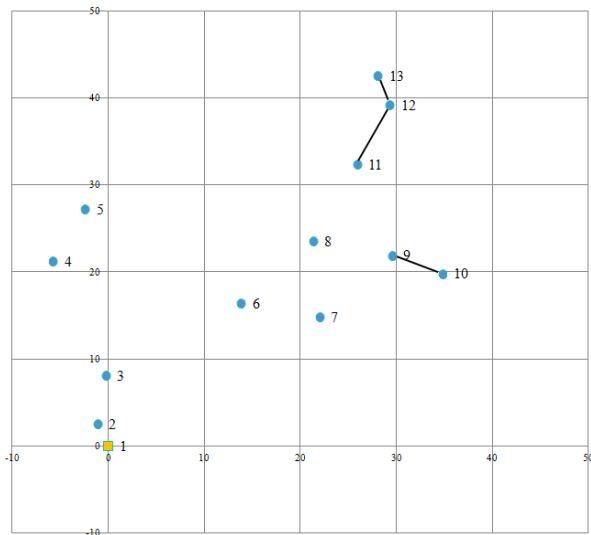
Figura 37. Primeira união de roteiros – clientes 12 e 13.



$k$	$l$	$s_{kl}$	#
12	13	92	i
11	12	84	i
11	13	84	—
10	12	76	—
9	11	72	—
9	12	72	—
9	13	72	—
10	13	70	—
9	10	68	—
10	11	68	—
8	11	64	—
8	12	64	—
8	13	64	—
...	...	...	...

$k$	$l$	$s_{kl}$	#
...	...	...	...
8	9	58	—
8	10	54	—
7	8	50	—
7	9	50	—
7	10	50	—
7	11	50	—
7	12	50	—
7	13	50	—
5	13	46	—
6	8	44	—
6	11	44	—
6	12	44	—
...	...	...	...

Figura 38. Segunda união de roteiros – clientes 11 e 12.

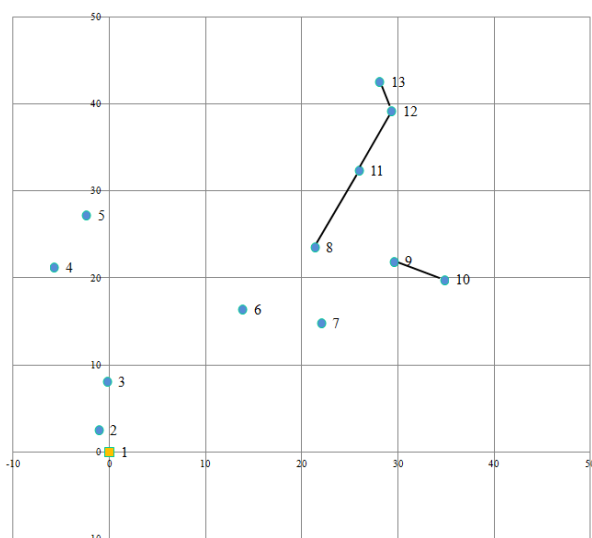


$k$	$l$	$s_{kl}$	#
12	13	92	i
11	12	84	i
11	13	84	iii
10	12	76	ii
9	11	72	iv
9	12	72	ii
9	13	72	iv
10	13	70	iv
9	10	68	i
10	11	68	—
8	11	64	—
8	12	64	—
8	13	64	—
...	...	...	...

$k$	$l$	$s_{kl}$	#
...	...	...	...
8	9	58	—
8	10	54	—
7	8	50	—
7	9	50	—
7	10	50	—
7	11	50	—
7	12	50	—
7	13	50	—
5	13	46	—
6	8	44	—
6	11	44	—
6	12	44	—
...	...	...	...

Figura 39. Terceira união de roteiros – clientes 9 e 10.

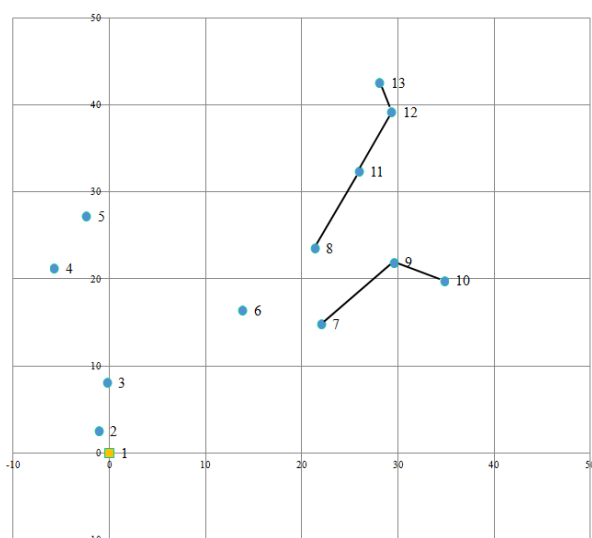




$k$	$l$	$s_{kl}$	#
12	13	92	i
11	12	84	i
11	13	84	iii
10	12	76	ii
9	11	72	iv
9	12	72	ii
9	13	72	iv
10	13	70	iv
9	10	68	i
10	11	68	iv
8	11	64	i
8	12	64	—
8	13	64	—
...	...	...	...

$k$	$l$	$s_{kl}$	#
...	...	...	...
8	9	58	—
8	10	54	—
7	8	50	—
7	9	50	—
7	10	50	—
7	11	50	—
7	12	50	—
7	13	50	—
5	13	46	—
6	8	44	—
6	11	44	—
6	12	44	—
...	...	...	...

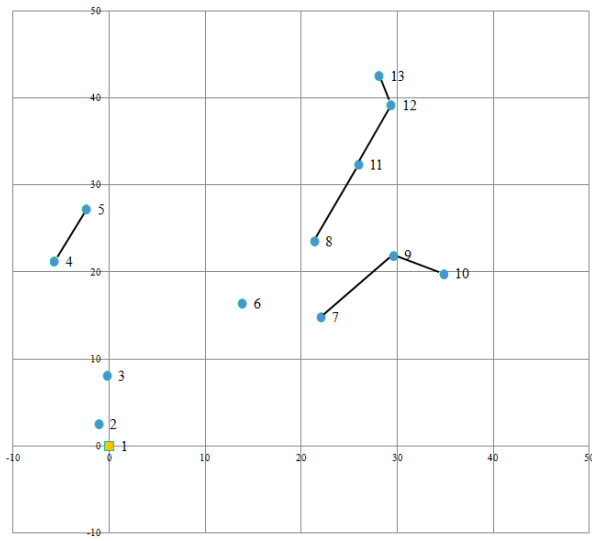
Figura 40. Quarta união de roteiros – clientes 8 e 11.



$k$	$l$	$s_{kl}$	#
12	13	92	i
11	12	84	i
11	13	84	iii
10	12	76	ii
9	11	72	iv
9	12	72	ii
9	13	72	iv
10	13	70	iv
9	10	68	i
10	11	68	iv
8	11	64	i
8	12	64	ii
8	13	64	iii
...	...	...	...

$k$	$l$	$s_{kl}$	#
...	...	...	...
8	9	58	iv
8	10	54	Iv
7	8	50	Iv
7	9	50	i
7	10	50	—
7	11	50	—
7	12	50	—
7	13	50	—
5	13	46	—
6	8	44	—
6	11	44	—
6	12	44	—
...	...	...	...

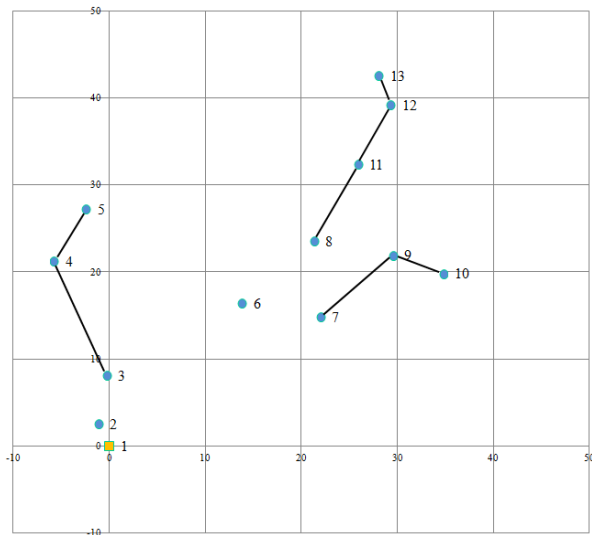
Figura 41. Quinta união de roteiros – clientes 7 e 9.



$k$	$l$	$s_{kl}$	#
...	...	...	...
8	9	58	iv
8	10	54	Iv
7	8	50	Iv
7	9	50	i
7	10	50	iii
7	11	50	ii
7	12	50	ii
7	13	50	iv
5	13	46	iv
6	8	44	iv
6	11	44	ii
6	12	44	ii
...	...	...	...

$k$	$l$	$s_{kl}$	#
...	...	...	...
6	13	44	iv
5	12	42	ii
6	9	42	ii
6	7	38	iv
6	10	38	iv
5	11	36	ii
4	5	34	i
4	12	34	—
4	13	34	—
4	11	32	—
5	8	30	—
3	4	28	—
...	...	...	...

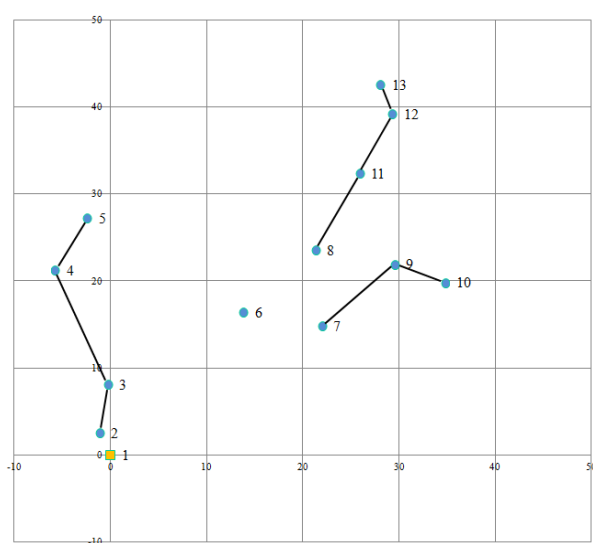
Figura 42. Sexta união de roteiros – clientes 4 e 5.



$k$	$l$	$s_{kl}$	#
...	...	...	...
6	13	44	iv
5	12	42	ii
6	9	42	ii
6	7	38	iv
6	10	38	iv
5	11	36	ii
4	5	34	i
4	12	34	ii
4	13	34	iv
4	11	32	ii
5	8	30	iv
3	4	28	i
...	...	...	...

$k$	$l$	$s_{kl}$	#
...	...	...	...
4	8	26	—
5	6	26	—
5	9	24	—
4	6	22	—
3	5	20	—
3	6	20	—
3	8	20	—
3	9	20	—
3	11	20	—
3	12	20	—
3	13	20	—
4	9	20	—
...	...	...	...

Figura 43. Sétima união de roteiros – clientes 3 e 4.



$k$	$l$	$s_{kl}$	#
...	...	...	...
4	8	26	ii
5	6	26	iv
5	9	24	ii
4	6	22	ii
3	5	20	iii
3	6	20	iv
3	8	20	iv
3	9	20	ii
3	11	20	ii
3	12	20	ii
3	13	20	iv
4	9	20	ii
...	...	...	...

$k$	$l$	$s_{kl}$	#
...	...	...	...
5	7	20	iv
5	10	20	iv
2	3	18	i
2	4	18	—
3	7	16	—
3	10	16	—
4	7	16	—
4	10	16	—
2	5	10	—
2	6	10	—
2	7	10	—
2	8	10	—
...	...	...	...

Figura 44. Oitava união de roteiros – clientes 2 e 3.

Ao final do percorrimento da lista das economias, foram definidos os seguintes roteiros: 1-2-3-4-5-1, 1-6-1, 1-7-9-10-1 e 1-8-11-12-13-1. Neste exemplo, a distância total percorrida pelos quatro veículos, encontrada pelo Algoritmo de Clarke & Wright é de 290, que também é a solução ótima.

## APÊNDICE C

### ALGORITMO DE GILLETT & MILLER

---

O Algoritmo de Gillet & Miller (GILLETT; MILLER, 1974), também conhecido como Algoritmo de Varredura (*Sweep Algorithm*), trata-se de um algoritmo heurístico construtivo que se baseia no conceito de “agrupar primeiro, rotear depois” (*cluster first, route second*). Este conceito basicamente visa construir conjuntos de clientes, e então, para cada conjunto, construir um roteiro, o que equivale a resolver um Problema do Caixeiro Viajante. Uma das premissas deste algoritmo é que todas as distâncias envolvidas sejam Euclidianas, o que equivale a se visualizar todos os clientes como estando no mesmo plano. Normalmente inicia-se no cliente com menor ângulo em relação ao eixo horizontal do plano, e, movendo-se no sentido anti-horário, atribuem-se clientes ao veículo, enquanto a capacidade deste não for excedida. Uma vez excedida, então está gerado o primeiro conjunto de clientes, ainda não roteados. Então utiliza-se um novo veículo e continua-se a atribuição de clientes ainda não roteados. Esta atribuição angular de clientes confere o nome popular a este algoritmo.

Uma vez concluída a atribuição de clientes a veículos, tem-se os conjuntos de clientes, e é preciso então gerar um roteiro para cada conjunto. Como mencionado, esta etapa equivale a resolver um Problema do Caixeiro Viajante para cada conjunto de clientes. Algoritmos normalmente utilizados incluem, por exemplo, o Algoritmo da Inserção mais Próxima (ou do Vizinho mais Próximo ou da Inserção mais Barata). Neste trabalho, simplificada, cada roteiro é gerado conforme os clientes vão sendo atribuídos ao veículo, i.e., o roteiro entre os clientes equivale à sequência de atribuição destes ao veículo. O pseudocódigo do Algoritmo de Gillett & Miller é apresentado a seguir:

---

**Algoritmo 6:** Gillett & Miller
 

---

Entradas: Um conjunto de clientes, com posições e demandas conhecidas, e que devem ser visitados por um único veículo, com capacidade conhecida.

Saídas: Uma solução factível para o CVRP.

1. **enquanto** houver clientes não roteados **faça**
  2.     Escolha um veículo ainda não utilizado.
  3.     **enquanto** a capacidade do veículo não for excedida **faça**
  4.         Inicie no cliente ainda não roteado com o menor ângulo e atribua o cliente ao veículo.
  5.     **fim enquanto**
  6. **fim enquanto**
- 

A seguir é apresentado um exemplo didático que ilustra a execução deste algoritmo. Trata-se do mesmo exemplo apresentado para execução do Algoritmo de Clarke & Wright (Apêndice B). A Figura 45 ilustra a disposição destes 12 clientes, do depósito (1) e o raio de varredura para execução do Algoritmo de Gillett & Miller. Por simplicidade, os arcos conectando os clientes e o depósito não estão ilustrados. As Figuras 46 a 53 ilustram o passo a passo da execução deste algoritmo.

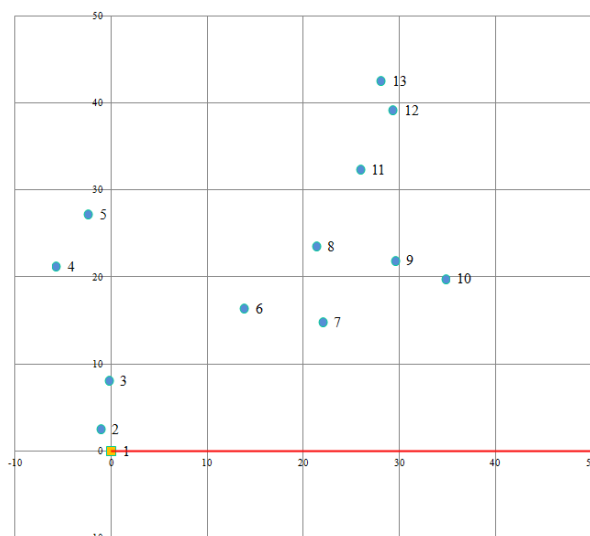


Figura 45. Os 12 clientes, o depósito (1) e o raio de varredura para execução do Algoritmo de Gillett & Miller.

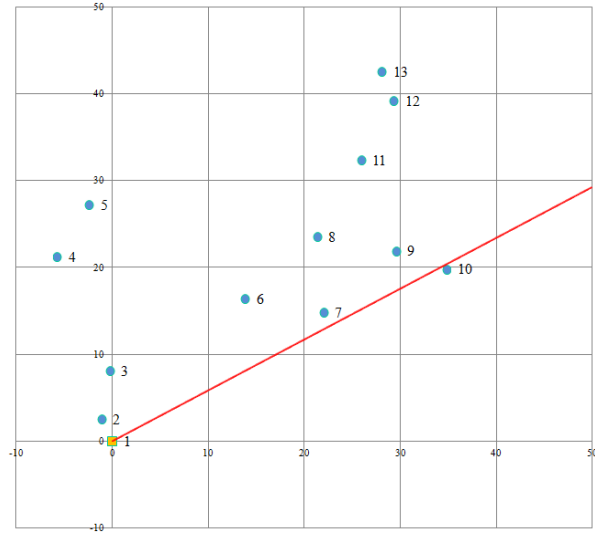


Figura 46. Primeiro cliente (10) atribuído ao primeiro veículo.

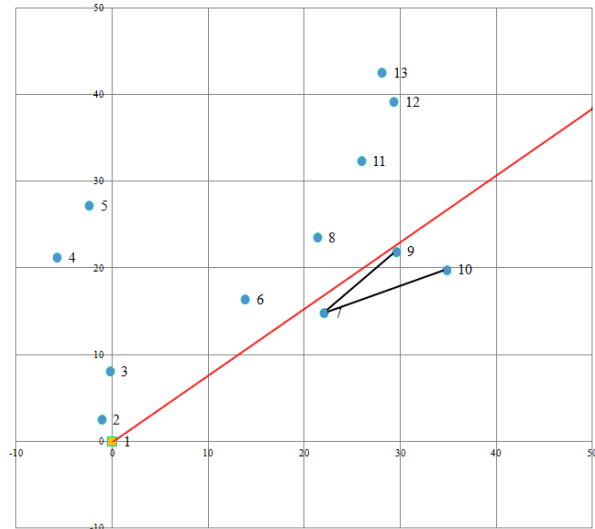


Figura 47. Primeiro roteiro concluído.

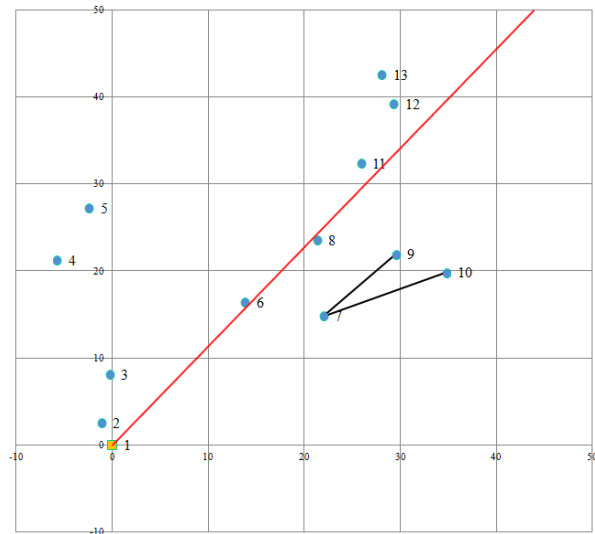


Figura 48. Primeiro cliente (8) atribuído ao segundo veículo.

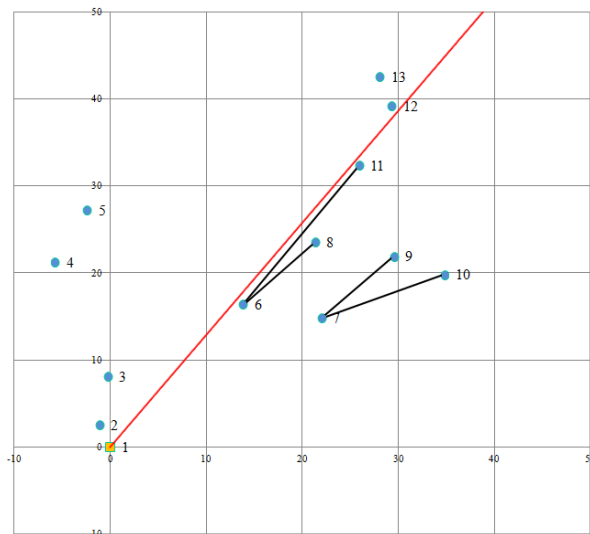


Figura 49. Segundo roteiro concluído.

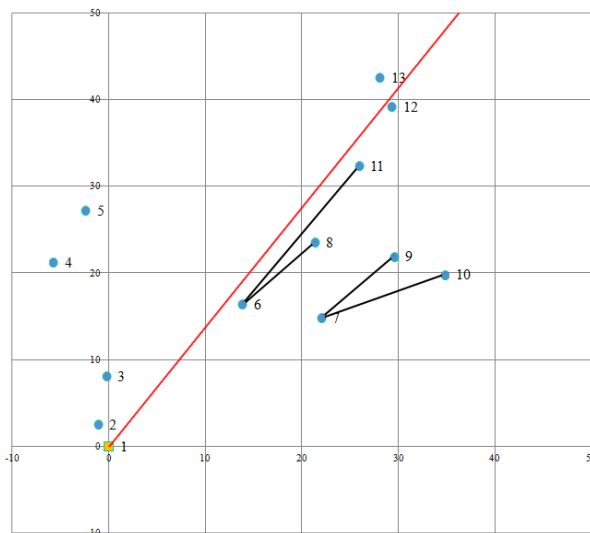


Figura 50. Primeiro cliente (12) atribuído ao terceiro veículo.

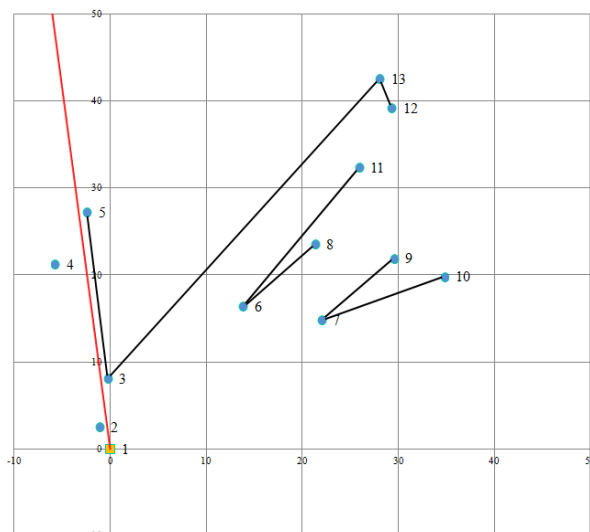


Figura 51. Terceiro roteiro concluído.

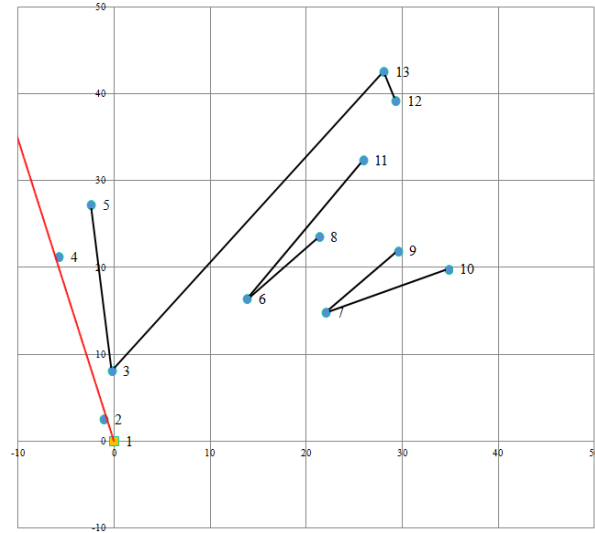


Figura 52. Primeiro cliente (4) atribuído ao quarto veículo.

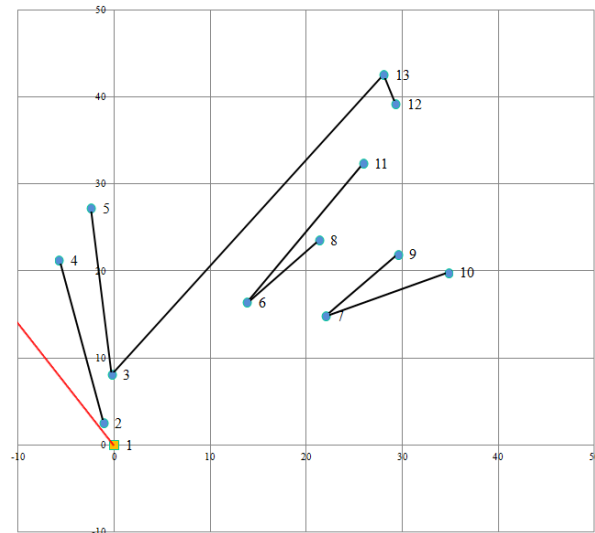


Figura 53. Quarto roteiro concluído.

Ao final da varredura dos clientes, foram definidos os seguintes roteiros: 1-2-4-1, 1-5-3-13-12-1, 1-8-6-11-1 e 1-9-7-10-1. Neste exemplo, a distância total percorrida pelos quatro veículos, encontrada pelo Algoritmo de Gillett & Miller, é de 390, que é pior que a solução encontrada pelo Algoritmo de Clarke & Wright (Apêndice B).



## APÊNDICE D

### ALGORITMO DE GEORGE & ROBINSON

---

O algoritmo de George & Robinson (GEORGE; ROBINSON, 1980) trata-se de um algoritmo heurístico construtivo, que se baseia na construção de “paredes virtuais” (camadas verticais). O algoritmo considera restrições geométricas e garante implicitamente restrições de estabilidade vertical. Não há restrições quanto à orientação das caixas, nem quanto ao empilhamento/fragilidade, embora o algoritmo possa ser facilmente adaptado para tratar estas situações. O algoritmo preenche o contêiner construindo camadas ao longo do comprimento  $L$ , do fundo até a entrada, combinando espaços vazios entre camadas para aumentar a utilização do espaço disponível. Uma camada é definida como uma seção de comprimento do contêiner na sua completa largura  $W$  e altura  $H$ . O comprimento de cada camada é determinado pelo comprimento do tipo de caixa escolhido para iniciar o preenchimento da camada. O algoritmo carrega colunas compostas de caixas do mesmo tipo. Cada vez que um tipo é utilizado, a ele é dada prioridade sobre os demais, o que induz que caixas iguais sejam empacotadas próximas umas das outras. Os tipos de caixas são classificados em “abertos” (*open*), se o tipo já foi utilizado, ou “fechados” (*closed*), se o tipo ainda não foi utilizado. Quando há tipos abertos, aquele com maior prioridade é selecionado para iniciar uma camada. Caso não haja tipos abertos, seleciona-se aquele com maior prioridade entre todas as caixas disponíveis. Os critérios de prioridades são: (i) tipo de caixa com a maior das menores dimensões, (ii) tipo de caixa com a maior quantidade disponível, e (iii) tipo de caixa com a maior das maiores dimensões. Utiliza-se (i) preferencialmente, e (ii) e (iii) em casos de empate.

Uma característica importante do algoritmo é introduzir a ideia de “largura flexível”, que é utilizada ao considerar o aproveitamento de espaços não preenchidos de camadas anteriores na construção de novas camadas. Espaços disponíveis da camada atual podem ser unidos (ou “amalgamados”) a espaços não preenchidos da camada anterior. A largura flexível determina a extensão ao longo da largura em que este novo espaço aumentado pode ser preenchido com caixas. Esta limitação permite tentativas sucessivas de se aproveitar espaços não preenchidos de camadas anteriores. Com isso, mantém-se o “contorno” da

camada anterior e evita-se que espaços vazios não sejam preenchidos. Os pseudocódigos que compõem o Algoritmo de George & Robinson são apresentados a seguir:

---

**Algoritmo 7:** Selecciona 1 (escolha do tipo de caixa para uma nova camada)

---

Entradas: Um conjunto de tipos de caixas *não fechados* e as prioridades de cada tipo de acordo com cada critério de prioridades.

Saídas: O tipo de caixa que iniciará a camada e a dimensão deste tipo que definirá o comprimento da nova camada.

1. **se** algum tipo de caixa for *aberto* **então**
  2.     Escolha o tipo de caixa *aberto* com maior prioridade.
  3. **se não**
  4.     Escolha o tipo de caixa *não aberto* com maior prioridade.
  5. **fim se**
  6. Dimensão de comprimento recebe a maior dimensão do tipo de caixa selecionado.
  7. Comprimento da camada recebe a dimensão de comprimento.
- 

---

**Algoritmo 8:** Selecciona 2 (escolha do tipo de caixa para os espaços que sobraram na camada)

---

Entradas: Um conjunto de tipos de caixas *não fechados*.

Saídas: O tipo de caixa que preencherá o espaço selecionado e a dimensão deste tipo que será posicionada ao longo do comprimento deste espaço.

1. **se** algum tipo de caixa *não fechado* couber no espaço selecionado **então**
  2.     **se** algum tipo de caixa *não fechado* preencher mais de uma coluna completa **então**
  3.         Escolha o tipo de caixa *não fechado* que melhor preenche o comprimento do espaço a partir de uma combinação de uma de suas dimensões.
  4.     **se não**
  5.         Escolha o tipo de caixa *não fechado* que melhor preenche a área da base do espaço.
  6.     **fim se**
  7. **se não**
  8.     Coloque o espaço selecionado na lista de espaços rejeitados.
  9. **fim se**
- 

---

**Algoritmo 9:** Dimensões (escolha das dimensões de largura e altura e quantidade de caixas)

---

Entradas: O tipo de caixa selecionado e a dimensão deste tipo que será posicionada ao longo do comprimento.

Saídas: As dimensões do tipo que serão posicionadas ao longo da largura e da altura do espaço, bem como a quantidade de caixas que comporão a coluna.

1. **se** ambas as dimensões restantes do tipo de caixa selecionado forem possíveis tanto na altura quanto na largura do espaço selecionado **então**
  2.     **se** a quantidade de caixas ainda disponíveis do tipo de caixa selecionado for insuficiente para uma coluna completa usando qualquer uma das duas dimensões restantes **então**
  3.         Largura do espaço recebe a maior dentre as duas dimensões restantes.
  4.     **se não**
  5.         Altura do espaço recebe a dimensão restante cuja combinação ao longo da altura do espaço resultar na menor perda.
  6.     **fim se**
  7. **se não**
-

- 
8. Largura e altura do espaço recebem as dimensões possíveis.
  9. **fim se**
  10. **se** a quantidade de caixas ainda disponíveis do tipo selecionado for suficiente para um coluna completa **então**
  11. **se** o número de colunas exceder a largura flexível **então**
  12.     Empacote um conjunto de colunas completas que ultrapasse minimamente a largura flexível.
  13. **se não**
  14.     Empacote tantas colunas completas quanto possível.
  15. **fim se**
  16. **se não**
  17.     Empacote a quantidade completa.
  18. **fim se**
  19. Revise as quantidades de caixas disponíveis e o *status* do tipo de caixa.
  20. Imprima mapas de carregamento.
- 

---

**Algoritmo 10:** Cria Espaços (criação de novos espaços)

---

Entradas: As caixas já empacotadas.

Saídas: A lista atualizada de espaços disponíveis.

1. Crie o espaço ao longo do comprimento.
  2. Coloque o espaço no estoque de espaços.
  3. Crie o espaço ao longo da largura.
  4. **se** a largura do espaço for maior ou igual que a menor dimensão de pelo menos um tipo de caixa *não fechado* **então**
  5.     Coloque o espaço no estoque de espaços.
  6. **fim se**
  7. Crie o espaço ao longo da altura.
  8. **se** a altura do espaço for maior ou igual que a menor dimensão de pelo menos um tipo de caixa *não fechado* **então**
  9.     Coloque o espaço no estoque de espaços.
  10. **fim se**
- 

---

**Algoritmo 11:** Novo Espaço (escolha de um novo espaço)

---

Entradas: A lista atualizada de espaços disponíveis.

Saídas: O espaço candidato a ser preenchido.

1. Selecione o último espaço do estoque de espaços.
  2. **enquanto** existir um espaço rejeitado para ser unido **faça**
  3.     **se** a altura do espaço for menor ou igual que a altura do espaço rejeitado **então**
  4.         **se** a largura do espaço for menor ou igual que a largura do espaço rejeitado **então**
  5.             Junte os espaços.
  6.         **se não**
  7.             Calcule o valor da largura flexível.
  8.         **fim se**
  9.     **fim se**
  10. **fim enquanto**
-

**Algoritmo 12:** George & Robinson

Entradas: Um conjunto de caixas disponíveis para serem empacotadas dentro do contêiner, com tipos, dimensões e quantidades conhecidos.

Saídas: Um conjunto de caixas empacotadas dentro do contêiner, com posições e orientações determinadas.

1. Aplique o Algoritmo Selecciona 1.
2. **enquanto** sobrar alguma caixa e algum espaço **faça**
3.     **se** algum tipo de caixa *não fechado* couber no espaço selecionado **então**
4.         Aplique o Algoritmo Dimensões.
5.         Aplique o Algoritmo Cria Espaços.
6.     **fim se**
7.     Aplique o Algoritmo Novo Espaço.
8.     **se** for uma nova camada **então**
9.         Aplique o Algoritmo Selecciona 1.
10.     **se** não for possível inserir uma nova camada **então**
11.         Aplique o Algoritmo Selecciona 2.
12.     **fim se**
13.     **se não**
14.         Aplique o Algoritmo Selecciona 2.
15.     **fim se**
16. **fim enquanto**

A seguir é apresentado um exemplo didático que ilustra a execução deste algoritmo. Neste exemplo, apresentado no artigo original de George e Robinson (1980), o único contêiner possui dimensões “úteis”  $(L, W, H) = (5793, 2236, 2261)$ , e há 8 tipos de caixas disponíveis, totalizando 784 caixas. A Tabela 38 apresenta as dimensões de comprimento, largura e altura, bem como as quantidades disponíveis e prioridades para cada tipo de caixa para o exemplo de George e Robinson (1980).

Tabela 38. Tipos, dimensões, quantidades e prioridades das caixas do exemplo de George e Robinson (1980).

Tipo	Dimensão			Quant.	Prioridade		
	Comp.	Larg.	Alt.		1	2	3
1	785	139	273	400	5	1	3
2	901	185	195	160	4	2	2
3	901	195	265	40	3	4	2
4	1477	135	195	40	6	4	1
5	614	480	185	8	4	6	4
6	400	400	135	16	6	5	5
7	264	400	400	80	2	3	5
8	385	365	290	40	1	4	6

A Figura 54 ilustra estes 8 tipos de caixas. Nas Figuras 55 a 74, as imagens a esquerda ilustram o contêiner visto da perspectiva do fundo para frente (onde está a porta), enquanto as imagens a direita ilustram o contêiner visto da perspectiva do alto. Estas figuras

também apresentam uma pequena tabela contendo, para cada tipo de caixa, a quantidade disponível, a quantidade empacotada e o *status* ao término do preenchimento de cada camada. As camadas são ilustradas na parte lateral das imagens a direita por setas na cor vermelha e, quando relevante, a largura flexível é indicada na parte superior desta mesma imagem por uma seta na cor azul.



Figura 54. Os 8 tipos de caixas presentes no exemplo de George e Robinson (1980).

(Figura 55) No início do algoritmo todos os tipos tem *status* “não aberto”. Para iniciar a primeira camada do contêiner é selecionado e aberto o tipo  $i=8$ , pois é o tipo (dentre os não abertos) com maior prioridade (maior das menores dimensões, i.e.,  $h_8 = 290$ ). A maior dimensão deste tipo (i.e.,  $l_8 = 385$ ) define o comprimento da primeira camada. Como o número de caixas disponível é suficiente para preencher ao menos uma coluna completa usando qualquer uma das duas dimensões restantes, uma combinação de  $w_8 = 365$  permite mínima perda ao longo da altura do espaço. Como o número de colunas não excede a largura flexível neste momento (+inf), são empacotadas tantas colunas completas quanto possível (i.e., 6 colunas, 36 caixas).

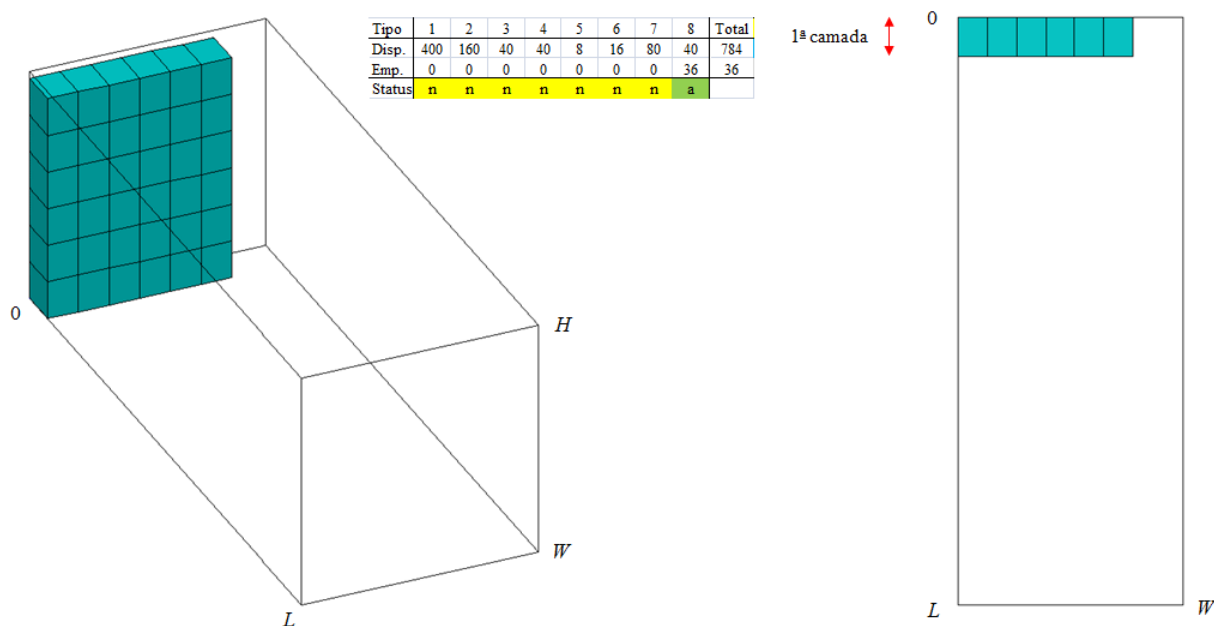


Figura 55. Após iniciar o preenchimento da primeira camada.

(Figura 56) Para os espaços que sobraram na primeira camada, é selecionado e aberto o tipo  $i = 2$ , pois é o tipo (dentre os não abertos e os abertos) que melhor preenche o comprimento do espaço a partir de uma combinação de uma de suas dimensões (i.e.,  $w_2 = 185$ ). Como uma das duas dimensões restantes (i.e.,  $l_2 = 901$ ) não é possível ao longo da largura do espaço, as caixas são ajustadas como possível. Como o número de colunas não excede a largura flexível neste momento (+inf), são empacotadas tantas colunas completas quanto possível (i.e., 4 colunas, 8 caixas).

Em seguida é selecionado o tipo  $i = 8$ , pois é o tipo (dentre os não abertos e os abertos) que melhor preenche a área da base do espaço. Como o número de colunas não excede a largura flexível neste momento (+inf), são empacotadas tantas colunas completas quanto possível (i.e., 1 coluna, 1 caixa).

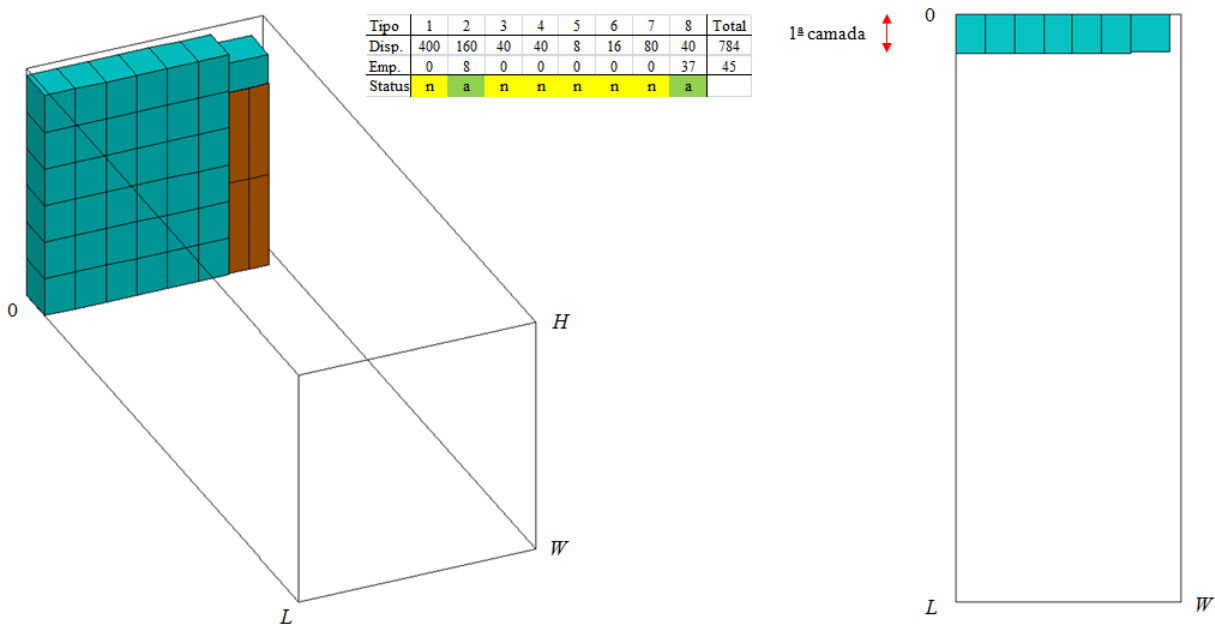


Figura 56. Após terminar o preenchimento da primeira camada.

(Figura 57) Como não é possível incluir mais nenhuma caixa na primeira camada, é selecionado o tipo  $i = 8$  para iniciar a segunda camada do contêiner, pois é o tipo (dentre os abertos) com maior prioridade (maior das menores dimensões, i.e.,  $h_8 = 290$ ). A maior dimensão deste tipo (i.e.,  $l_8 = 385$ ) define o comprimento da segunda camada. Como o número de caixas disponível não é suficiente para preencher ao menos uma coluna completa usando qualquer uma das duas dimensões restantes, a maior dimensão (i.e.,  $w_8 = 365$ ) é posicionada ao longo da largura do espaço, e é empacotada a quantidade completa (3 caixas), com o que o tipo é fechado.

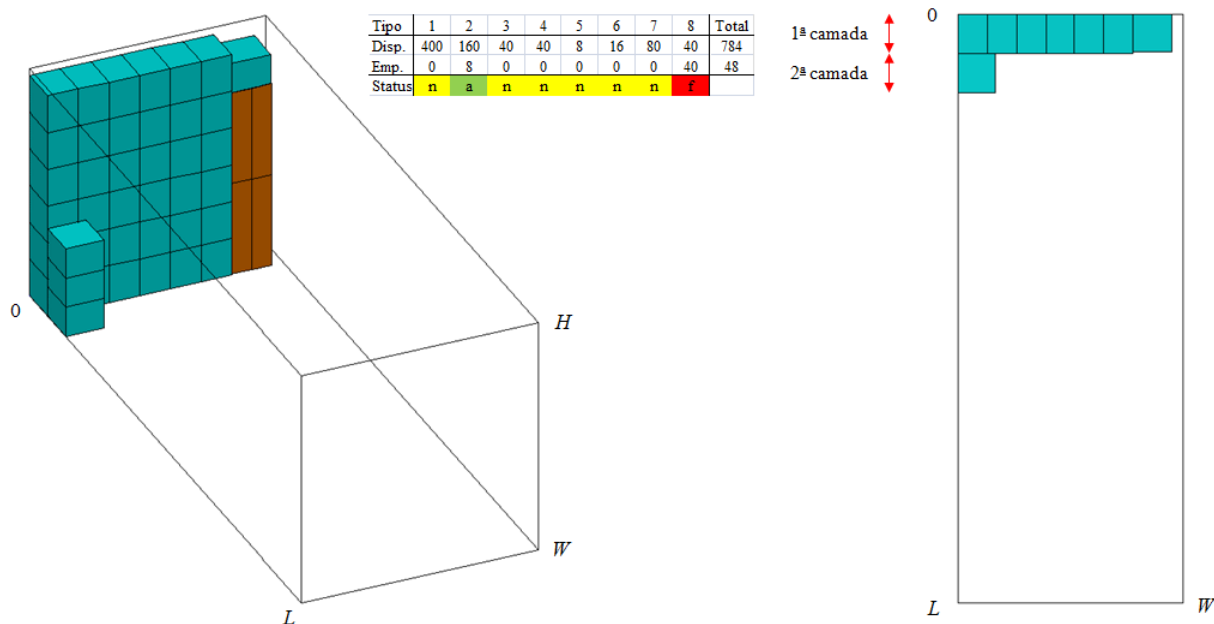


Figura 57. Após iniciar o preenchimento da segunda camada.

(Figura 58) Para os espaços que sobraram na segunda camada, é selecionado e aberto o tipo  $i = 1$ , pois é o tipo (dentre os não abertos e os abertos) que melhor preenche o comprimento do espaço a partir de uma combinação de uma de suas dimensões (i.e.,  $h_1 = 273$ ). Como uma das duas dimensões restantes (i.e.,  $l_1 = 785$ ) não é possível ao longo da largura do espaço, as caixas são ajustadas como possível. Como o número de colunas não excede a largura flexível neste momento (+inf), são empacotadas tantas colunas completas quanto possível (i.e., 2 colunas, 2 caixas).

Em seguida é selecionado o tipo  $i = 2$ , pois é o tipo (dentre os não abertos e os abertos) que melhor preenche o comprimento do espaço a partir de uma combinação de uma de suas dimensões (i.e.,  $w_2 = 185$ ). Como o número de caixas disponível é suficiente para preencher ao menos uma coluna completa usando qualquer uma das duas dimensões restantes, uma combinação de  $h_2 = 195$  permite mínima perda ao longo da altura do espaço. Como o número de colunas excede a largura flexível neste momento (i.e., 1375), é empacotado um conjunto de colunas completas que ultrapassa minimamente este valor de largura flexível (i.e., 4 colunas, 44 caixas).

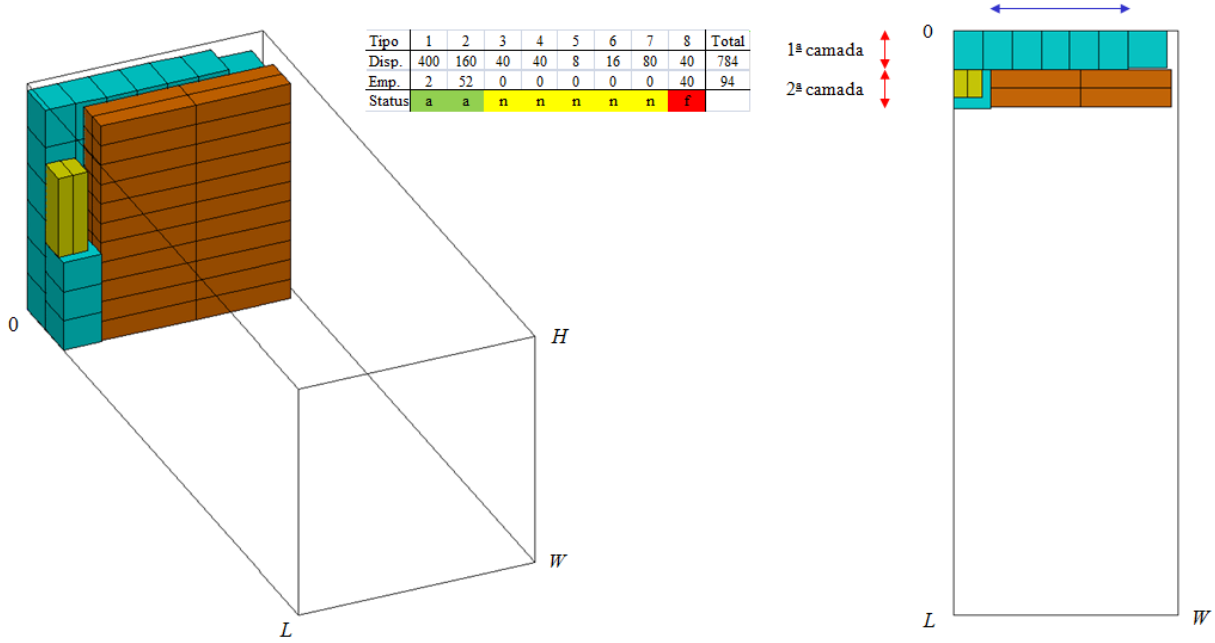


Figura 58. Após terminar o preenchimento da segunda camada.

(Figura 59) Como não é possível incluir mais nenhuma caixa na segunda camada, é selecionado o tipo  $i = 2$  para iniciar a terceira camada do contêiner, pois é o tipo (dentre os abertos) com maior prioridade (maior das menores dimensões, i.e.,  $w_2 = 185$ ). A maior dimensão deste tipo (i.e.,  $l_2 = 901$ ) define o comprimento da terceira camada. Como o número de caixas disponível é suficiente para preencher ao menos uma coluna completa usando qualquer uma das duas dimensões restantes, uma combinação de  $w_2 = 185$  permite mínima perda ao longo da altura do espaço. Como o número de colunas excede a largura flexível neste momento (i.e., 365), é empacotado um conjunto de colunas completas que ultrapassa minimamente este valor de largura flexível (i.e., 2 colunas, 24 caixas).



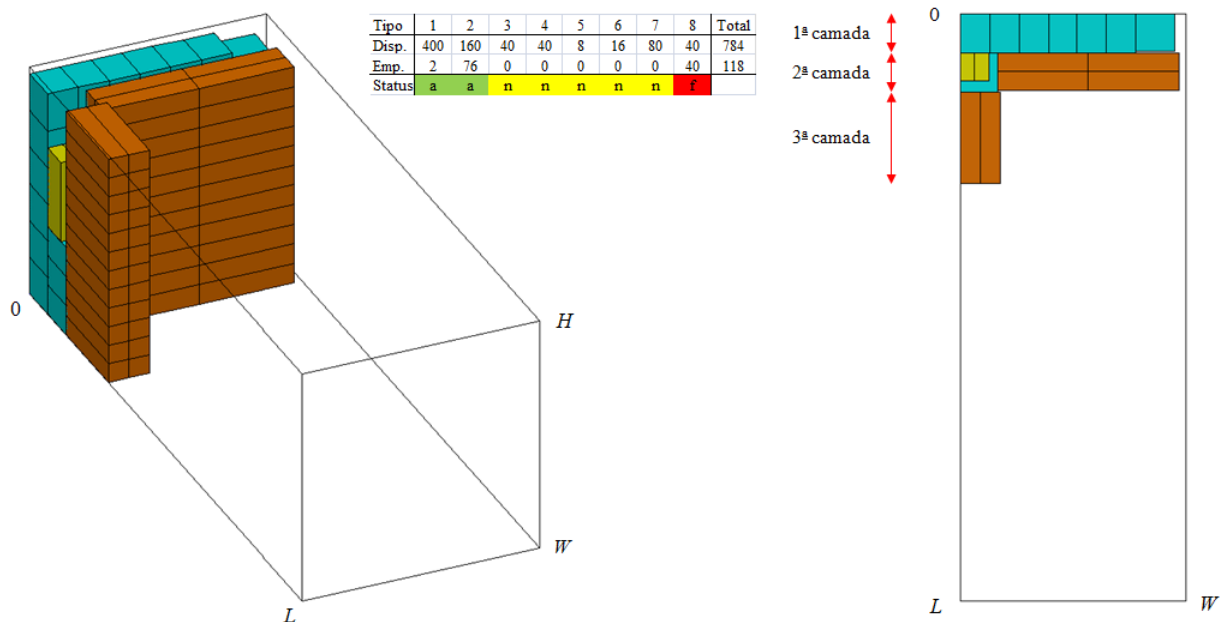


Figura 59. Após iniciar o preenchimento da terceira camada.

(Figura 60) Para os espaços que sobraram na terceira camada, é selecionado e aberto o tipo  $i = 3$ , pois é o tipo (dentre os não abertos e os abertos) que melhor preenche o comprimento do espaço a partir de uma combinação de uma de suas dimensões (i.e.,  $l_3 = 901$ ). Como o número de caixas disponível é suficiente para preencher ao menos uma coluna completa usando qualquer uma das duas dimensões restantes, uma combinação de  $w_3 = 195$  permite mínima perda ao longo da altura do espaço. Como o número de colunas não excede a largura flexível neste momento (+inf), são empacotadas tantas colunas completas quanto possível (i.e., 3 colunas, 33 caixas) (note que aqui ocorre uma “amalgamação” com a camada anterior – 15 unidades são “empurradas” para trás).

Em seguida é selecionado o tipo  $i = 3$ , pois é o tipo (dentre os não abertos e os abertos) que melhor preenche o comprimento do espaço a partir de uma combinação de uma de suas dimensões (i.e.,  $l_3 = 901$ ). Como o número de caixas disponível não é suficiente para preencher ao menos uma coluna completa usando qualquer uma das duas dimensões restantes, a maior dimensão (i.e.,  $h_3 = 265$ ) é posicionada ao longo da largura do espaço, e é empacotada a quantidade completa (7 caixas), com o que o tipo é fechado.

Em seguida é selecionado o tipo  $i = 2$ , pois é o tipo (dentre os não abertos e os abertos) que melhor preenche a área da base do espaço. Como o número de colunas não excede a largura flexível neste momento (+inf), são empacotadas tantas colunas completas quanto possível (i.e., 1 coluna, 4 caixas).

Em seguida é selecionado o tipo  $i = 2$ , pois é o tipo (dentre os não abertos e os abertos) que melhor preenche o comprimento do espaço a partir de uma combinação de uma de suas dimensões (i.e.,  $l_2 = 901$ ). Como o número de caixas disponível é suficiente para preencher ao menos uma coluna completa usando qualquer uma das duas dimensões restantes, uma combinação de  $w_2 = 185$  permite mínima perda ao longo da altura do espaço. Como o número de colunas não excede a largura flexível neste momento (+inf), são empacotadas tantas colunas completas quanto possível (i.e., 4 colunas, 48 caixas).

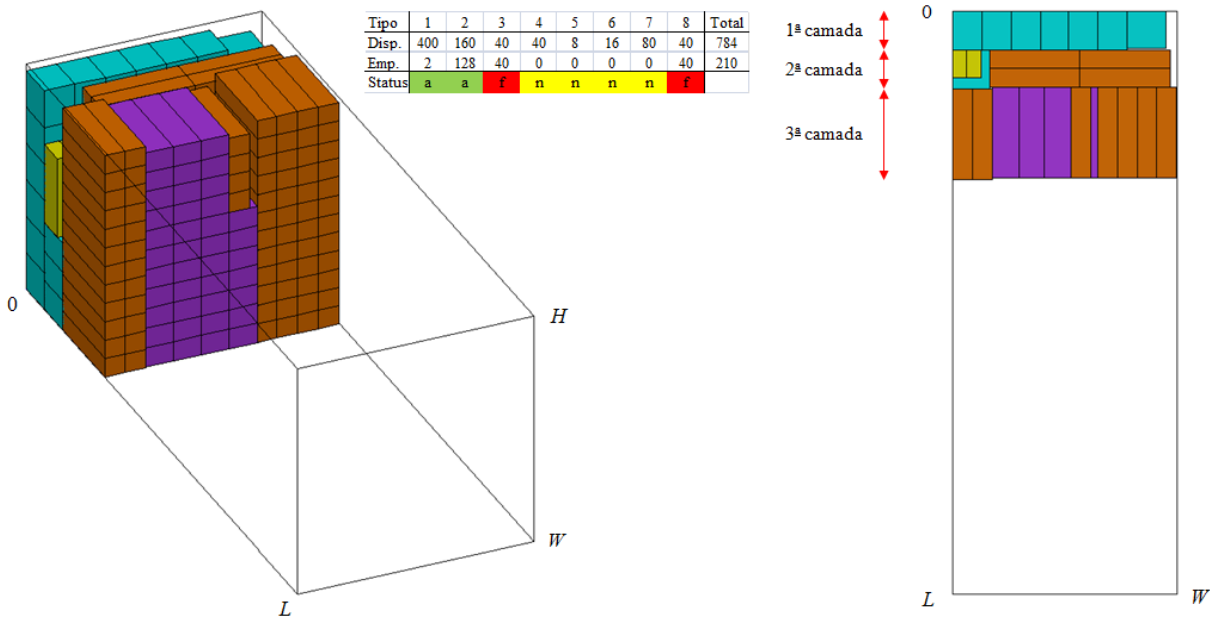


Figura 60. Após terminar o preenchimento da terceira camada.

(Figura 61) Como não é possível incluir mais nenhuma caixa na terceira camada, é selecionado o tipo  $i = 2$  para iniciar a quarta camada do contêiner, pois é o tipo (dentre os abertos) com maior prioridade (maior das menores dimensões, i.e.,  $w_2 = 185$ ). A maior dimensão deste tipo (i.e.,  $l_2 = 901$ ) define o comprimento da quarta camada. Como o número de caixas disponível é suficiente para preencher ao menos uma coluna completa usando qualquer uma das duas dimensões restantes, uma combinação de  $w_2 = 185$  permite mínima perda ao longo da altura do espaço. Como o número de colunas não excede a largura flexível neste momento (i.e., 390), são empacotadas tantas colunas completas quanto possível (i.e., 2 colunas, 24 caixas).

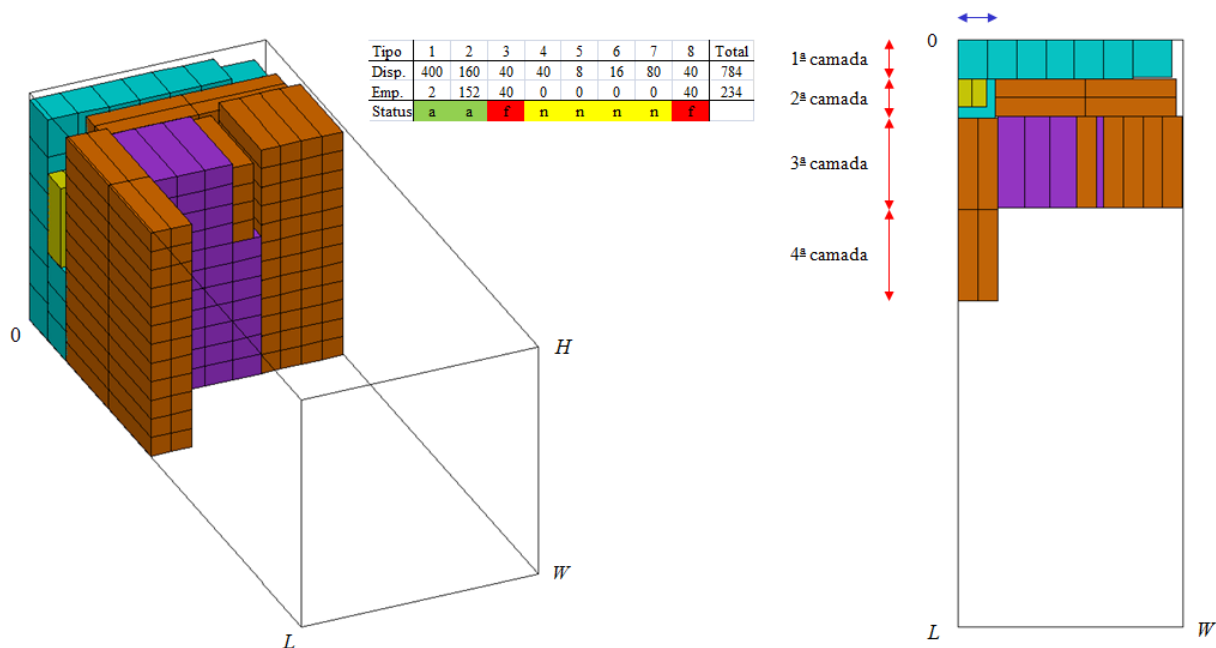


Figura 61. Após iniciar o preenchimento da quarta camada.

(Figura 62) Para os espaços que sobraram na quarta camada, é selecionado o tipo  $i = 2$ , pois é o tipo (dentre os não abertos e os abertos) que melhor preenche o comprimento do espaço a partir de uma combinação de uma de suas dimensões (i.e.,  $l_2 = 901$ ). Como o número de caixas disponível não é suficiente para preencher ao menos uma coluna completa usando qualquer uma das duas dimensões restantes, a maior dimensão (i.e.,  $h_2 = 195$ ) é posicionada ao longo da largura do espaço, e é empacotada a quantidade completa (8 caixas), com o que o tipo é fechado (note que aqui ocorre uma “amalgamação” com a camada anterior – 15 unidades são “empurradas” para trás).

Em seguida é selecionado o tipo  $i = 5$ , pois é o tipo (dentre os não abertos e os abertos) que melhor preenche a área da base do espaço. Como o número de colunas não excede a largura flexível neste momento (+inf), são empacotadas tantas colunas completas quanto possível (i.e., 1 coluna, 1 caixa).

Em seguida é selecionado o tipo  $i = 1$ , pois é o tipo (dentre os não abertos e os abertos) que melhor preenche o comprimento do espaço a partir de uma combinação de uma de suas dimensões (i.e.,  $w_1 = 139$ ). Como o número de caixas disponível é suficiente para preencher ao menos uma coluna completa usando qualquer uma das duas dimensões restantes, uma combinação de  $h_1 = 273$  permite mínima perda ao longo da altura do espaço. Como o número de colunas não excede a largura flexível neste momento (+inf), são empacotadas tantas colunas completas quanto possível (i.e., 12 colunas, 96 caixas).

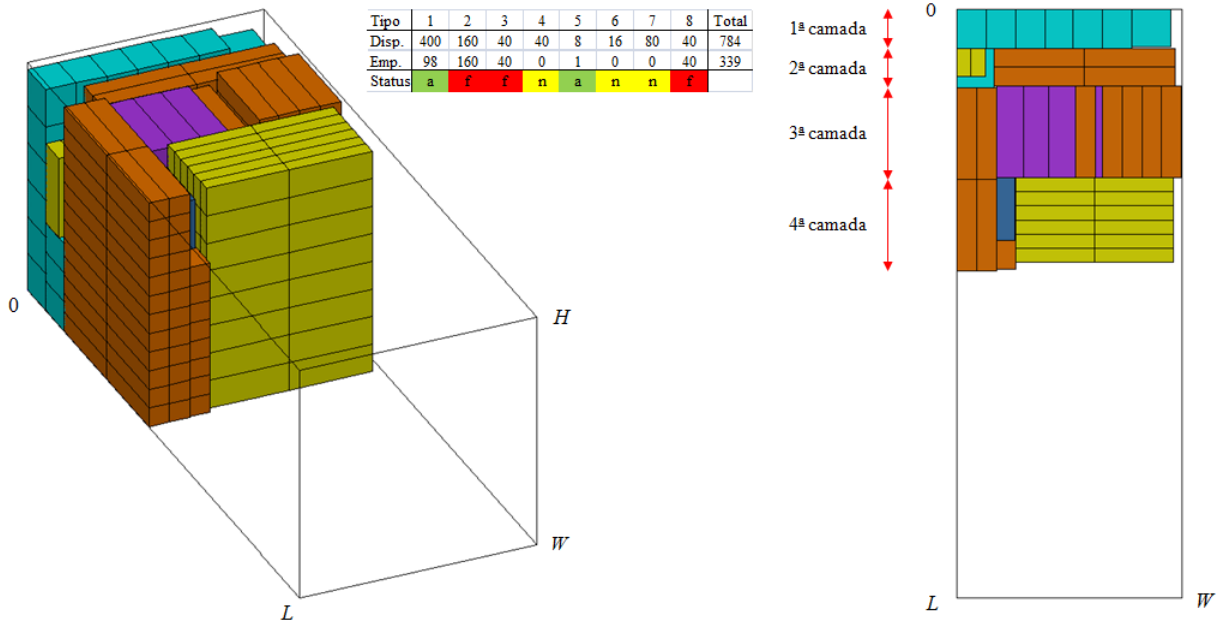


Figura 62. Após terminar o preenchimento da quarta camada.

(Figura 63) Como não é possível incluir mais nenhuma caixa na quarta camada, é selecionado o tipo  $i=5$  para iniciar a quinta camada do contêiner, pois é o tipo (dentre os abertos) com maior prioridade (maior das menores dimensões, i.e.,  $h_5 = 185$ ). A maior dimensão deste tipo (i.e.,  $l_5 = 614$ ) define o comprimento da quinta camada. Como o número de caixas disponível é suficiente para preencher ao menos uma coluna completa usando qualquer uma das duas dimensões restantes, uma combinação de  $w_5 = 480$  permite mínima perda ao longo da altura do espaço. Como o número de colunas não excede a largura flexível neste momento (i.e., 390), são empacotadas tantas colunas completas quanto possível (i.e., 1 coluna, 4 caixas).

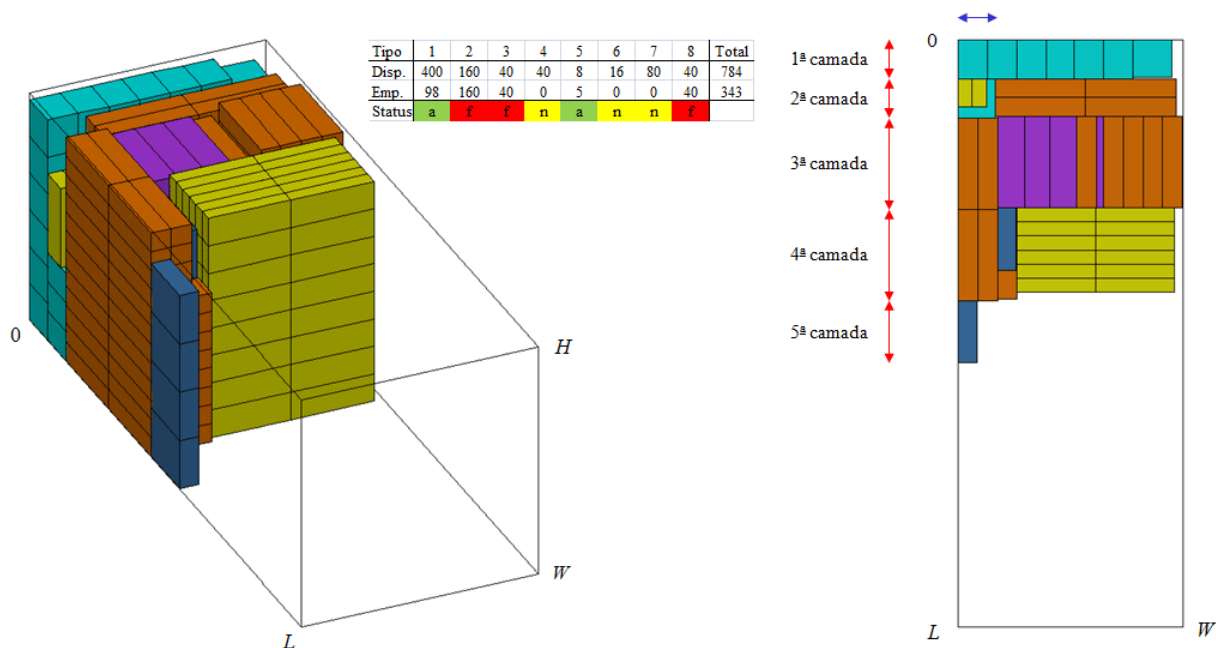


Figura 63. Após iniciar o preenchimento da quinta camada.

(Figura 64) Para os espaços que sobraram na quinta camada, é selecionado o tipo  $i=5$ , pois é o tipo (dentre os não abertos e os abertos) que melhor preenche o comprimento do espaço a partir de uma combinação de uma de suas dimensões (i.e.,  $l_2 = 901$ ). Como o número de caixas disponível não é suficiente para preencher ao menos uma coluna completa usando qualquer uma das duas dimensões restantes, a maior dimensão (i.e.,  $w_5 = 480$ ) é posicionada ao longo da largura do espaço, e é empacotada a quantidade completa (3 caixas), com o que o tipo é fechado.

Em seguida é selecionado e aberto o tipo  $i=4$ , pois é o tipo (dentre os não abertos e os abertos) que melhor preenche o comprimento do espaço a partir de uma combinação de uma de suas dimensões (i.e.,  $h_4 = 195$ ). Como uma das duas dimensões restantes (i.e.,  $l_4 = 1477$ ) não é possível ao longo da largura do espaço, as caixas são ajustadas como possível. Como o número de colunas não excede a largura flexível neste momento (+inf), são empacotadas tantas colunas completas quanto possível (i.e., 9 colunas, 9 caixas).

Em seguida é selecionado e aberto o tipo  $i=6$ , pois é o tipo (dentre os não abertos e os abertos) que melhor preenche a área da base do espaço. Como o número de colunas não excede a largura flexível neste momento (+inf), são empacotadas tantas colunas completas quanto possível (i.e., 1 coluna, 1 caixa).

Em seguida é selecionado o tipo  $i=1$ , pois é o tipo (dentre os não abertos e os abertos) que melhor preenche o comprimento do espaço a partir de uma combinação de uma

de suas dimensões (i.e.,  $w_1 = 139$ ). Como o número de caixas disponível é suficiente para preencher ao menos uma coluna completa usando qualquer uma das duas dimensões restantes, uma combinação de  $h_1 = 273$  permite mínima perda ao longo da altura do espaço. Como o número de colunas não excede a largura flexível neste momento (+inf), são empacotadas tantas colunas completas quanto possível (i.e., 10 colunas, 80 caixas) (note que aqui ocorre uma “amalgamação” com a camada anterior – 82 unidades são “empurradas” para trás).

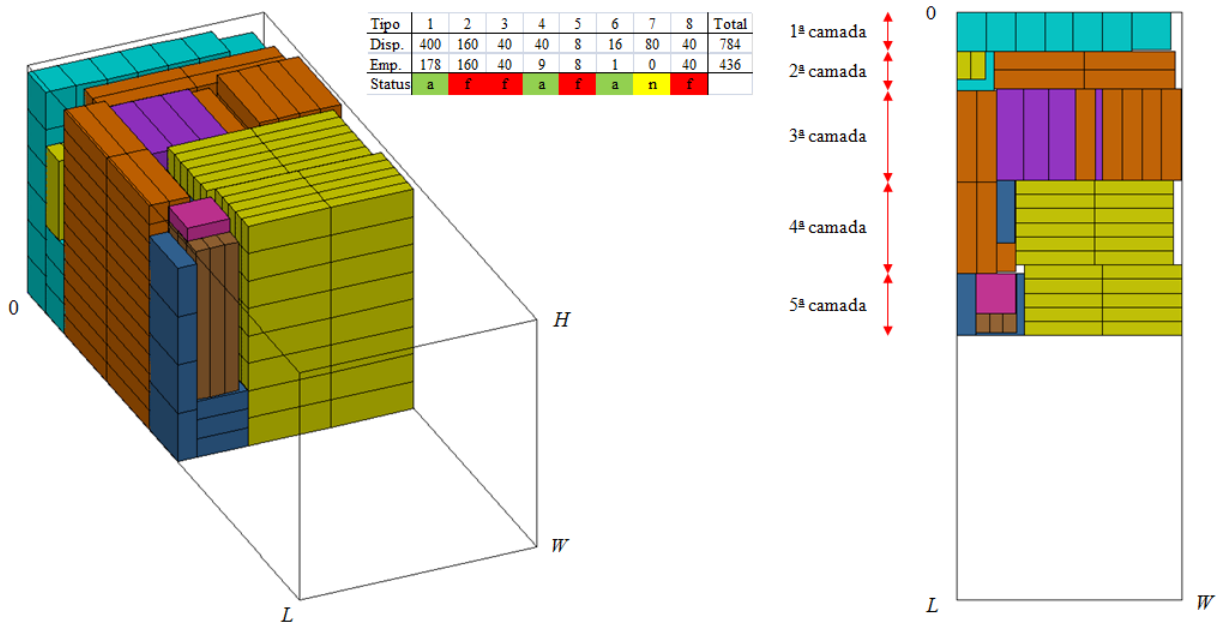


Figura 64. Após terminar o preenchimento da quinta camada.

(Figura 65) Como não é possível incluir mais nenhuma caixa na quinta camada, é selecionado o tipo  $i = 1$  para iniciar a sexta camada do contêiner, pois é o tipo (dentre os abertos) com maior prioridade (maior das menores dimensões, i.e.,  $w_1 = 139$ ). A maior dimensão deste tipo (i.e.,  $l_1 = 785$ ) define o comprimento da sexta camada. Como o número de caixas disponível é suficiente para preencher ao menos uma coluna completa usando qualquer uma das duas dimensões restantes, uma combinação de  $w_1 = 139$  permite mínima perda ao longo da altura do espaço. Como o número de colunas excede a largura flexível neste momento (i.e., 665), é empacotado um conjunto de colunas completas que ultrapassa minimamente este valor de largura flexível (i.e., 3 colunas, 48 caixas).

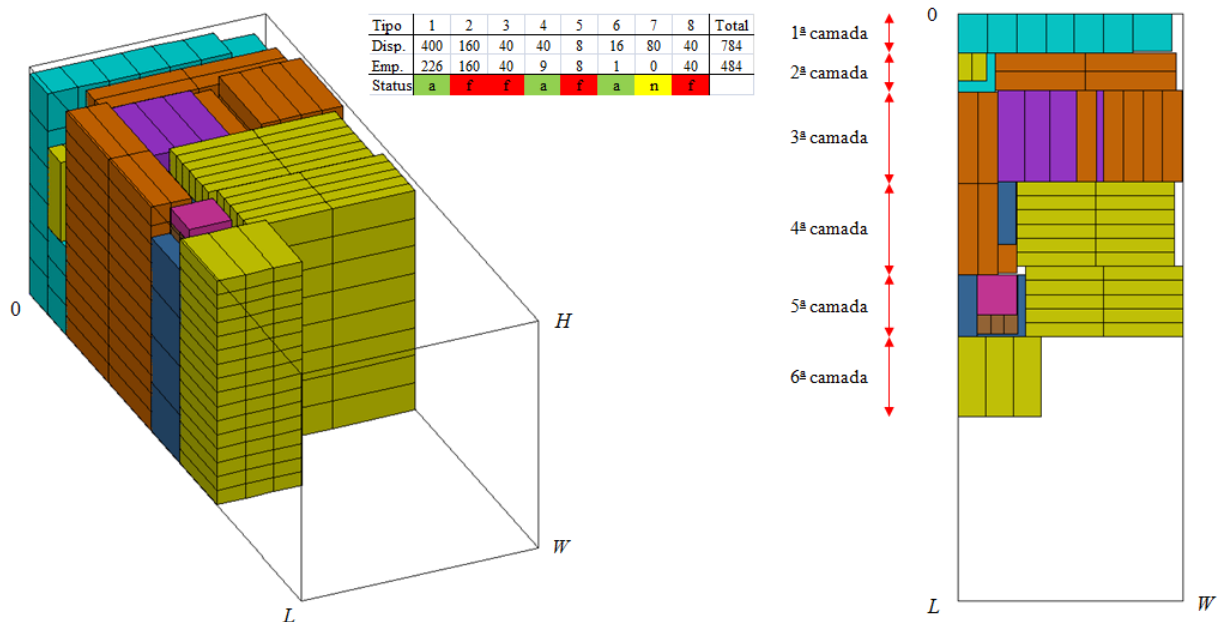


Figura 65. Após iniciar o preenchimento da sexta camada.

(Figura 66) Para os espaços que sobraram na sexta camada, é selecionado o tipo  $i=1$ , pois é o tipo (dentre os não abertos e os abertos) que melhor preenche o comprimento do espaço a partir de uma combinação de uma de suas dimensões (i.e.,  $l_1 = 785$ ). Como o número de caixas disponível é suficiente para preencher ao menos uma coluna completa usando qualquer uma das duas dimensões restantes, uma combinação de  $w_1 = 139$  permite mínima perda ao longo da altura do espaço. Como o número de colunas não excede a largura flexível neste momento (+inf), são empacotadas tantas colunas completas quanto possível (i.e., 5 colunas, 80 caixas) (note que aqui ocorre uma “amalgamação” com a camada anterior – 1 unidade é “empurrada” para trás).

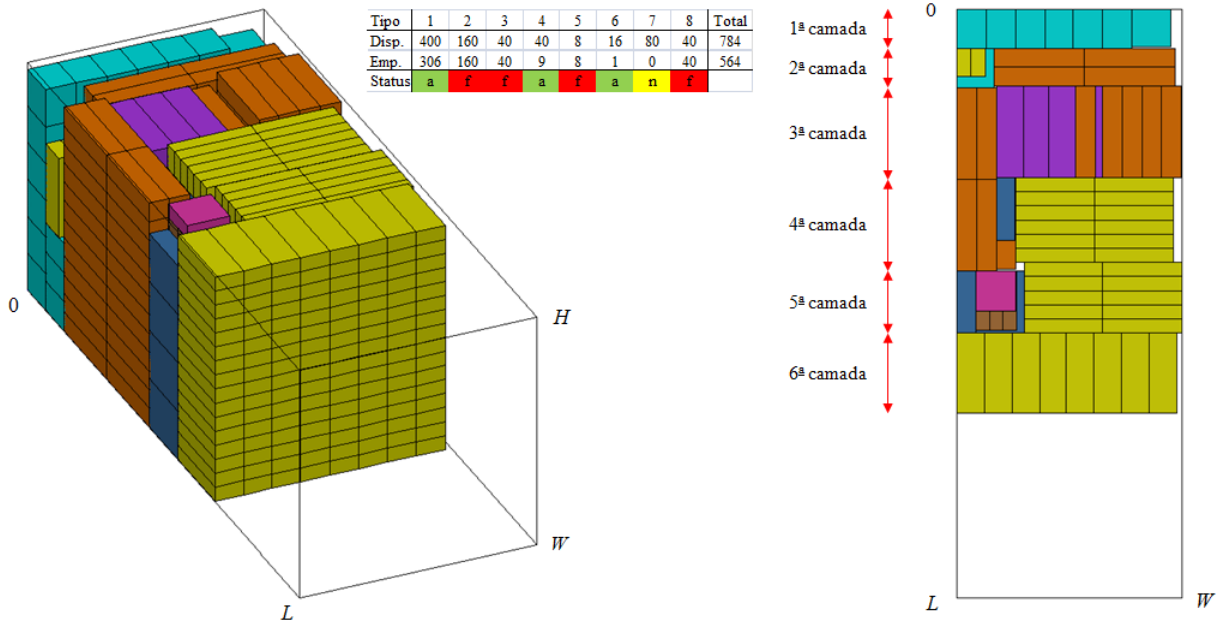


Figura 66. Após terminar o preenchimento da sexta camada.

(Figura 67) Como não é possível incluir mais nenhuma caixa na sexta camada, é selecionado o tipo  $i = 1$  para iniciar a sétima camada do contêiner, pois é o tipo (dentre os abertos) com maior prioridade (maior das menores dimensões, i.e.,  $w_1 = 139$ ). A maior dimensão deste tipo (i.e.,  $l_1 = 785$ ) define o comprimento da sétima camada. Como o número de caixas disponível é suficiente para preencher ao menos uma coluna completa usando qualquer uma das duas dimensões restantes, uma combinação de  $w_1 = 139$  permite mínima perda ao longo da altura do espaço. Como o número de colunas excede a largura flexível neste momento (i.e., 819), é empacotado um conjunto de colunas completas que ultrapassa minimamente este valor de largura flexível (i.e., 3 colunas, 48 caixas).



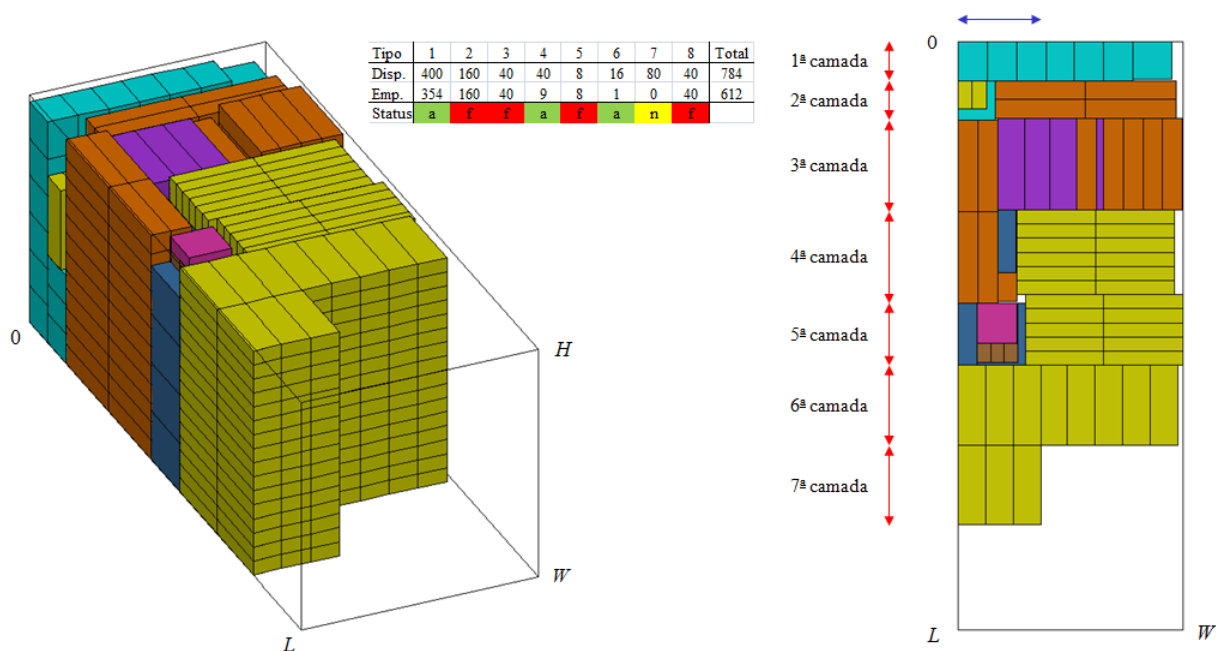


Figura 67. Após iniciar o preenchimento da sétima camada.

(Figura 68) Para os espaços que sobraram na sétima camada, é selecionado o tipo  $i=1$ , pois é o tipo (dentre os não abertos e os abertos) que melhor preenche o comprimento do espaço a partir de uma combinação de uma de suas dimensões (i.e.,  $l_1 = 785$ ). Como o número de caixas disponível é suficiente para preencher ao menos uma coluna completa usando qualquer uma das duas dimensões restantes, uma combinação de  $w_1 = 139$  permite mínima perda ao longo da altura do espaço. Como o número de colunas não excede a largura flexível neste momento (+inf), são empacotadas tantas colunas completas quanto possível (i.e., 2 colunas, 32 caixas) (note que aqui ocorre uma “amalgamação” com a camada anterior – 1 unidade é “empurrada” para trás).

Em seguida é selecionado o tipo  $i=1$ , pois é o tipo (dentre os não abertos e os abertos) que melhor preenche o comprimento do espaço a partir de uma combinação de uma de suas dimensões (i.e.,  $l_1 = 785$ ). Como o número de caixas disponível é suficiente para preencher ao menos uma coluna completa usando qualquer uma das duas dimensões restantes, uma combinação de  $w_1 = 139$  permite mínima perda ao longo da altura do espaço. Como o número de colunas não excede a largura flexível neste momento (+inf), são empacotadas tantas colunas completas quanto possível (i.e., 1 coluna, 8 caixas).

Em seguida é selecionado o tipo  $i=1$ , pois é o tipo (dentre os não abertos e os abertos) que melhor preenche o comprimento do espaço a partir de uma combinação de uma de suas dimensões (i.e.,  $l_1 = 785$ ). Como o número de caixas disponível não é suficiente para

preencher ao menos uma coluna completa usando qualquer uma das duas dimensões restantes, a maior dimensão (i.e.,  $h_1 = 273$ ) é posicionada ao longo da largura do espaço, e é empacotada a quantidade completa (6 caixas), com o que o tipo é fechado.

Em seguida é selecionado o tipo  $i = 6$ , pois é o tipo (dentre os não abertos e os abertos) que melhor preenche o comprimento do espaço a partir de uma combinação de uma de suas dimensões (i.e.,  $l_6 = w_6 = 400$ ). Como uma das duas dimensões restantes (i.e.,  $l_6 = w_6 = 400$ ) não é possível ao longo da largura do espaço, as caixas são ajustadas como possível. Como o número de colunas não excede a largura flexível neste momento (+inf), são empacotadas tantas colunas completas quanto possível (i.e., 2 colunas, 6 caixas).

Em seguida é selecionado o tipo  $i = 4$ , pois é o tipo (dentre os não abertos e os abertos) que melhor preenche o comprimento do espaço a partir de uma combinação de uma de suas dimensões (i.e.,  $h_4 = 195$ ). Como uma das duas dimensões restantes (i.e.,  $l_4 = 1477$ ) não é possível ao longo da largura do espaço, as caixas são ajustadas como possível. Como o número de colunas não excede a largura flexível neste momento (+inf), são empacotadas tantas colunas completas quanto possível (i.e., 12 colunas, 12 caixas).

Em seguida é selecionado o tipo  $i = 6$ , pois é o tipo (dentre os não abertos e os abertos) que melhor preenche o comprimento do espaço a partir de uma combinação de uma de suas dimensões (i.e.,  $l_6 = w_6 = 400$ ). Como uma das duas dimensões restantes (i.e.,  $l_6 = w_6 = 400$ ) não é possível ao longo da largura do espaço, as caixas são ajustadas como possível. Como o número de colunas não excede a largura flexível neste momento (+inf), são empacotadas tantas colunas completas quanto possível (i.e., 3 colunas, 3 caixas).

Em seguida é selecionado e aberto o tipo  $i = 7$ , pois é o tipo (dentre os não abertos e os abertos) que melhor preenche a área da base do espaço. Como o número de colunas não excede a largura flexível neste momento (+inf), são empacotadas tantas colunas completas quanto possível (i.e., 1 coluna, 1 caixa).

Em seguida é selecionado e aberto o tipo  $i = 7$ , pois é o tipo (dentre os não abertos e os abertos) que melhor preenche a área da base do espaço. Como o número de colunas não excede a largura flexível neste momento (+inf), são empacotadas tantas colunas completas quanto possível (i.e., 1 coluna, 1 caixa).

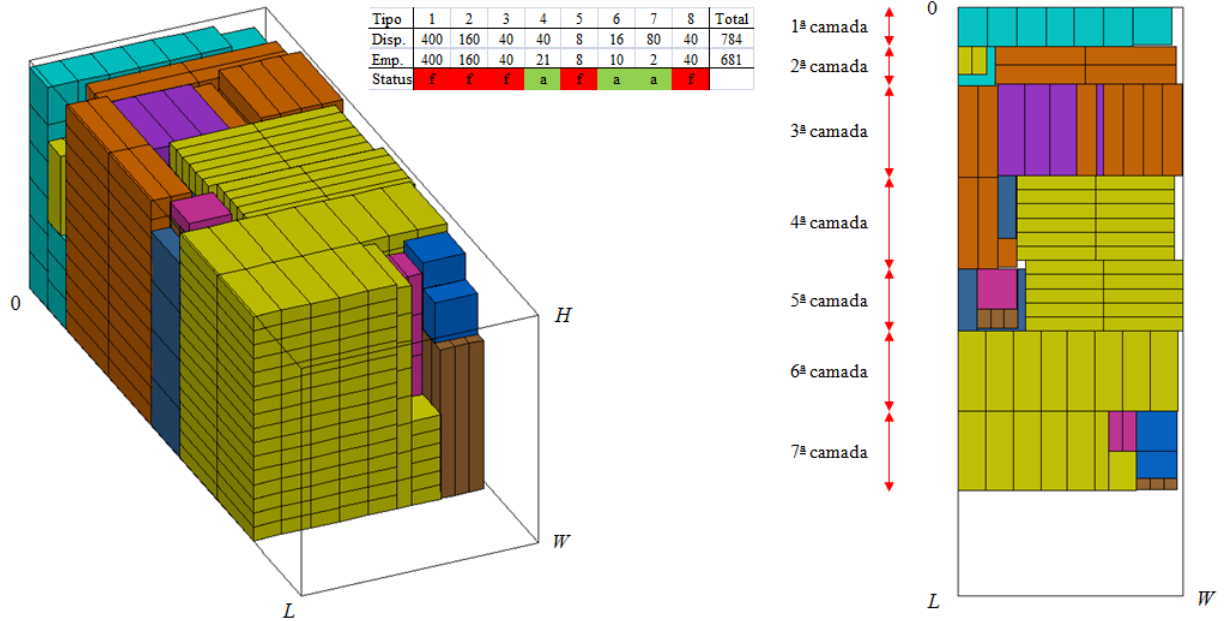


Figura 68. Após terminar o preenchimento da sétima camada.

(Figura 69) Como não é possível incluir mais nenhuma caixa na sétima camada, é selecionado o tipo  $i = 7$  para iniciar a oitava camada do contêiner, pois é o tipo (dentre os abertos) com maior prioridade (maior das menores dimensões, i.e.,  $l_7 = 264$ ). A maior dimensão deste tipo (i.e.,  $w_7 = h_7 = 400$ ) define o comprimento da oitava camada. Como o número de caixas disponível é suficiente para preencher ao menos uma coluna completa usando qualquer uma das duas dimensões restantes, uma combinação de  $l_7 = 264$  permite mínima perda ao longo da altura do espaço. Como o número de colunas excede a largura flexível neste momento (i.e., 819), é empacotado um conjunto de colunas completas que ultrapassa minimamente este valor de largura flexível (i.e., 3 colunas, 24 caixas).

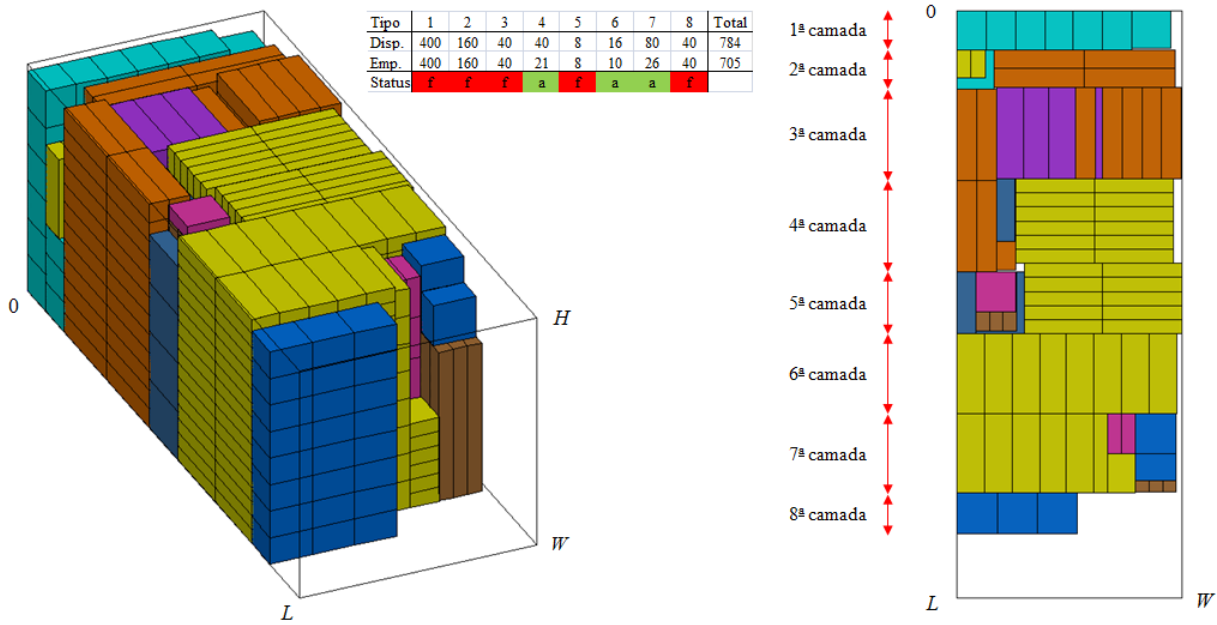


Figura 69. Após iniciar o preenchimento da oitava camada.

(Figura 70) Para os espaços que sobraram na oitava camada, é selecionado o tipo  $i=6$ , pois é o tipo (dentre os não abertos e os abertos) que melhor preenche o comprimento do espaço a partir de uma combinação de uma de suas dimensões (i.e.,  $l_6 = w_6 = 400$ ). Como uma das duas dimensões restantes (i.e.,  $l_6 = w_6 = 400$ ) não é possível ao longo da altura do espaço, as caixas são ajustadas como possível. Como o número de colunas não excede a largura flexível neste momento (+inf), são empacotadas tantas colunas completas quanto possível (i.e., 3 colunas, 3 caixas).

Em seguida é selecionado o tipo  $i=7$ , pois é o tipo (dentre os não abertos e os abertos) que melhor preenche o comprimento do espaço a partir de uma combinação de uma de suas dimensões (i.e.,  $w_7 = h_7 = 400$ ). Como o número de caixas disponível é suficiente para preencher ao menos uma coluna completa usando qualquer uma das duas dimensões restantes, uma combinação de  $l_7 = 264$  permite mínima perda ao longo da altura do espaço. Como o número de colunas excede a largura flexível neste momento (i.e., 577), é empacotado um conjunto de colunas completas que ultrapassa minimamente este valor de largura flexível (i.e., 2 colunas, 16 caixas) (note que aqui ocorre uma “amalgamação” com a camada anterior – 1 unidade é “empurrada” para trás).

Em seguida é selecionado o tipo  $i=6$ , pois é o tipo (dentre os não abertos e os abertos) que melhor preenche o comprimento do espaço a partir de uma combinação de uma de suas dimensões (i.e.,  $l_6 = w_6 = 400$ ). Como uma das duas dimensões restantes (i.e.,

$l_6 = w_6 = 400$ ) não é possível ao longo da altura do espaço, as caixas são ajustadas como possível. Como o número de colunas não excede a largura flexível neste momento (+inf), são empacotadas tantas colunas completas quanto possível (i.e., 2 colunas, 2 caixas).

Em seguida é selecionado o tipo  $i = 6$ , pois é o tipo (dentro os não abertos e os abertos) que melhor preenche a área da base do espaço. Como o número de caixas disponível não é suficiente para preencher ao menos uma coluna completa, é empacotada a quantidade completa (1 caixa), com o que o tipo é fechado (note que aqui ocorre uma “amalgamação” com a camada anterior – 5 unidades são “empurradas” para trás).

Em seguida é selecionado o tipo  $i = 4$ , pois é o tipo (dentro os não abertos e os abertos) que melhor preenche a área da base do espaço. Como o número de colunas não excede a largura flexível neste momento (+inf), são empacotadas tantas colunas completas quanto possível (i.e., 1 coluna, 1 caixa).

Em seguida é selecionado o tipo  $i = 4$ , pois é o tipo (dentro os não abertos e os abertos) que melhor preenche a área da base do espaço. Como o número de colunas não excede a largura flexível neste momento (+inf), são empacotadas tantas colunas completas quanto possível (i.e., 1 coluna, 1 caixa).

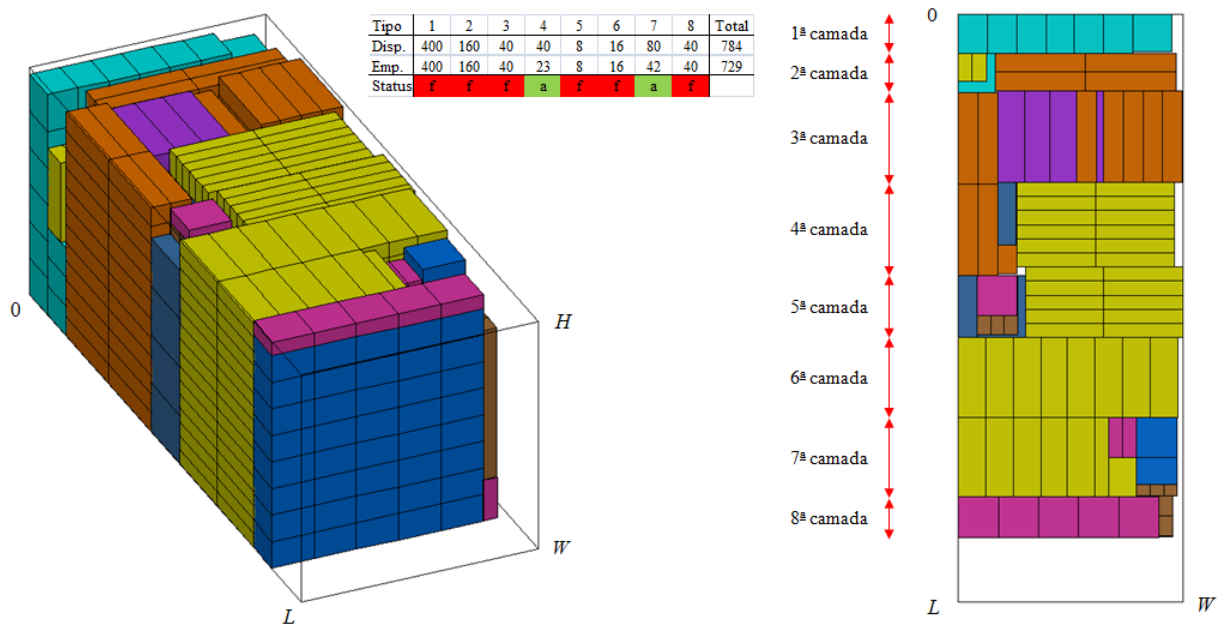


Figura 70. Após terminar o preenchimento da oitava camada.

(Figura 71) Como não é possível incluir mais nenhuma caixa na oitava camada, é selecionado o tipo  $i = 7$  para iniciar a nona camada do contêiner, pois é o tipo (dentro os abertos) com maior prioridade (maior das menores dimensões, i.e.,  $l_7 = 264$ ). A maior

dimensão deste tipo (i.e.,  $w_7 = h_7 = 400$ ) define o comprimento da nona camada. Como o número de caixas disponível é suficiente para preencher ao menos uma coluna completa usando qualquer uma das duas dimensões restantes, uma combinação de  $l_7 = 264$  permite mínima perda ao longo da altura do espaço. Como o número de colunas excede a largura flexível neste momento (i.e., 1200), é empacotado um conjunto de colunas completas que ultrapassa minimamente este valor de largura flexível (i.e., 3 colunas, 24 caixas).

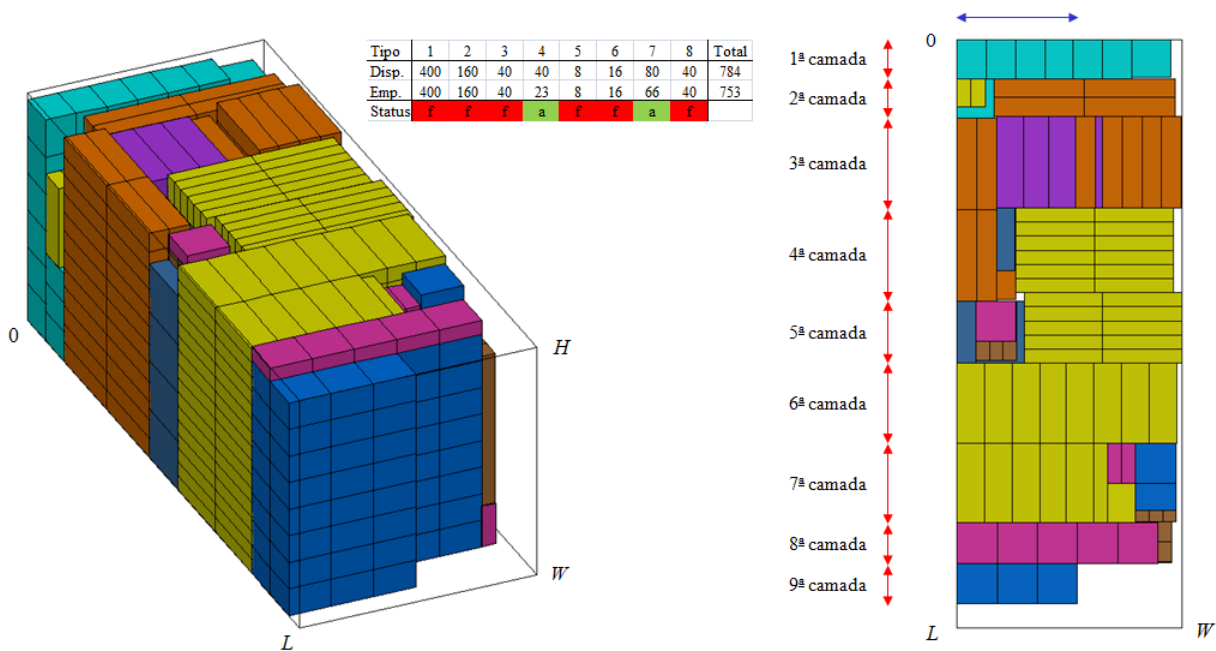


Figura 71. Após iniciar o preenchimento da nona camada.

(Figura 72) Para os espaços que sobraram na nona camada, é selecionado o tipo  $i = 7$ , pois é o tipo (dentre os não abertos e os abertos) que melhor preenche o comprimento do espaço a partir de uma combinação de uma de suas dimensões (i.e.,  $l_7 = 264$ ). Como o número de caixas disponível é suficiente para preencher ao menos uma coluna completa usando qualquer uma das duas dimensões restantes, uma combinação de  $l_7 = 264$  permite mínima perda ao longo da altura do espaço. Como o número de colunas não excede a largura flexível neste momento (i.e., 800), são empacotadas tantas colunas completas quanto possível (i.e., 1 coluna, 8 caixas) (note que aqui ocorre uma “amalgamação” com a camada anterior – 1 unidade é “empurrada” para trás).

Em seguida é selecionado o tipo  $i = 7$ , pois é o tipo (dentre os não abertos e os abertos) que melhor preenche o comprimento do espaço a partir de uma combinação de uma de suas dimensões (i.e.,  $w_7 = h_7 = 400$ ). Como uma das duas dimensões restantes (i.e.,

$w_7 = h_7 = 400$ ) não é possível ao longo da largura do espaço, as caixas são ajustadas como possível. Como o número de colunas não excede a largura flexível neste momento (i.e., 400), são empacotadas tantas colunas completas quanto possível (i.e., 1 coluna, 5 caixas).

Em seguida é selecionado o tipo  $i = 4$ , pois é o tipo (dentre os não abertos e os abertos) que melhor preenche o comprimento do espaço a partir de uma combinação de uma de suas dimensões (i.e.,  $h_4 = 195$ ). Como uma das duas dimensões restantes (i.e.,  $l_4 = 1477$ ) não é possível ao longo da largura do espaço, as caixas são ajustadas como possível. Como o número de colunas excede a largura flexível neste momento (i.e., 136), é empacotado um conjunto de colunas completas que ultrapassa minimamente este valor de largura flexível (i.e., 4 colunas, 4 caixas).

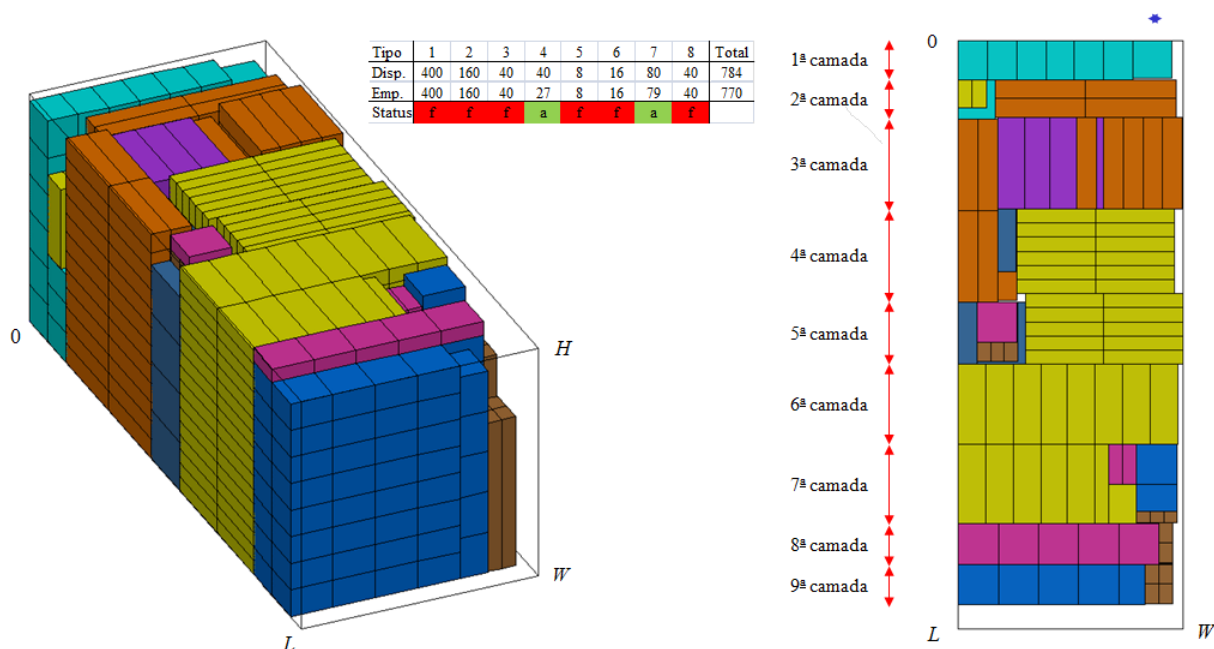


Figura 72. Após terminar o preenchimento da nona camada.

(Figura 73) Como não é possível incluir mais nenhuma caixa na nona camada, é selecionado o tipo  $i = 7$  para iniciar a décima camada do contêiner, pois é o tipo (dentre os abertos) com maior prioridade (maior das menores dimensões, i.e.,  $l_7 = 264$ ). No entanto, nenhuma das dimensões deste tipo é possível ao longo do comprimento do espaço. Com isso, é selecionado o tipo  $i = 4$ , pois é o tipo (dentre os não abertos e os abertos) que melhor preenche o comprimento do espaço a partir de uma combinação de uma de suas dimensões (i.e.,  $h_4 = 195$ ). Esta dimensão define o comprimento da décima camada. Como uma das duas dimensões restantes (i.e.,  $l_4 = 1477$ ) não é possível ao longo da largura do espaço, as caixas

são ajustadas como possível. Como o número de colunas excede a largura flexível neste momento (i.e., 1200), é empacotado um conjunto de colunas completas que ultrapassa minimamente este valor de largura flexível (i.e., 9 colunas, 9 caixas).

Em seguida é selecionado o tipo  $i = 4$ , pois é o tipo (dentre os não abertos e os abertos) que melhor preenche o comprimento do espaço a partir de uma combinação de uma de suas dimensões (i.e.,  $h_4 = 195$ ). Como uma das duas dimensões restantes (i.e.,  $l_4 = 1477$ ) não é possível ao longo da largura do espaço, as caixas são ajustadas como possível. Como o número de colunas não excede a largura flexível neste momento (i.e., 649), são empacotadas tantas colunas completas quanto possível (i.e., 4 colunas, 4 caixas), com o que o tipo é fechado (note que aqui ocorre uma “amalgamação” com a camada anterior – 1 unidade é “empurrada” para trás).

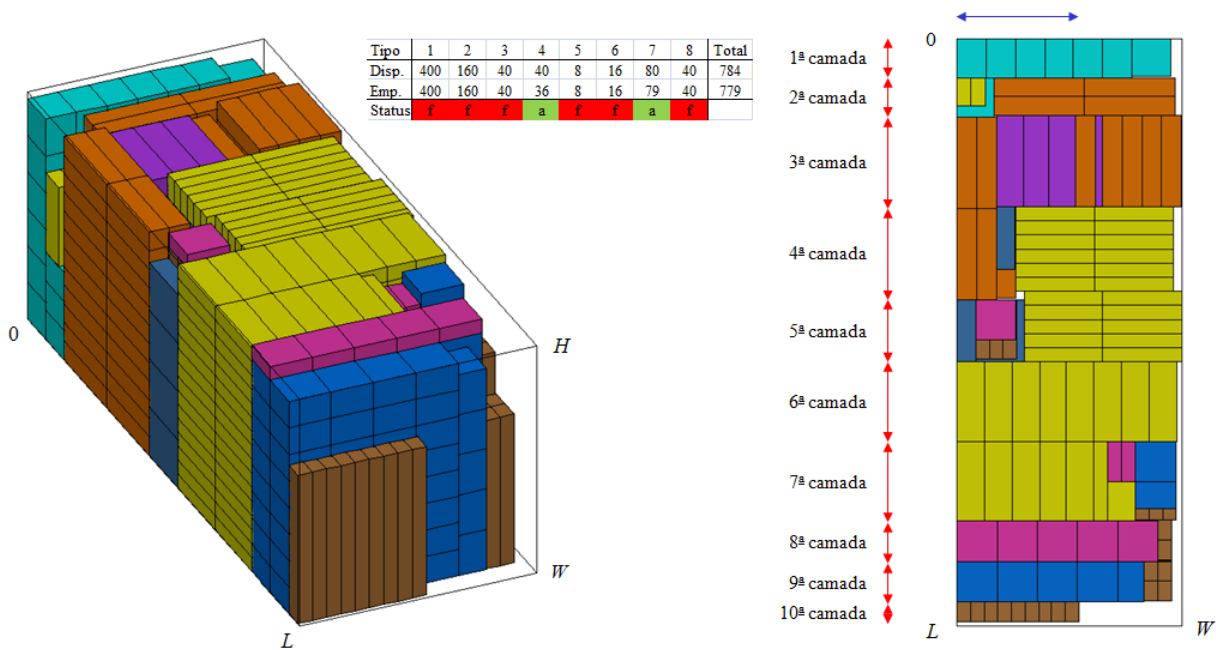


Figura 73. Após iniciar o preenchimento da décima camada.

(Figura 74) Ao final do procedimento, são empacotadas 783 das 784 caixas disponíveis, restando uma caixa do tipo 7 fora do carregamento. Ao todo foram abertas 10 camadas e o volume total empacotado é de 89,74%.



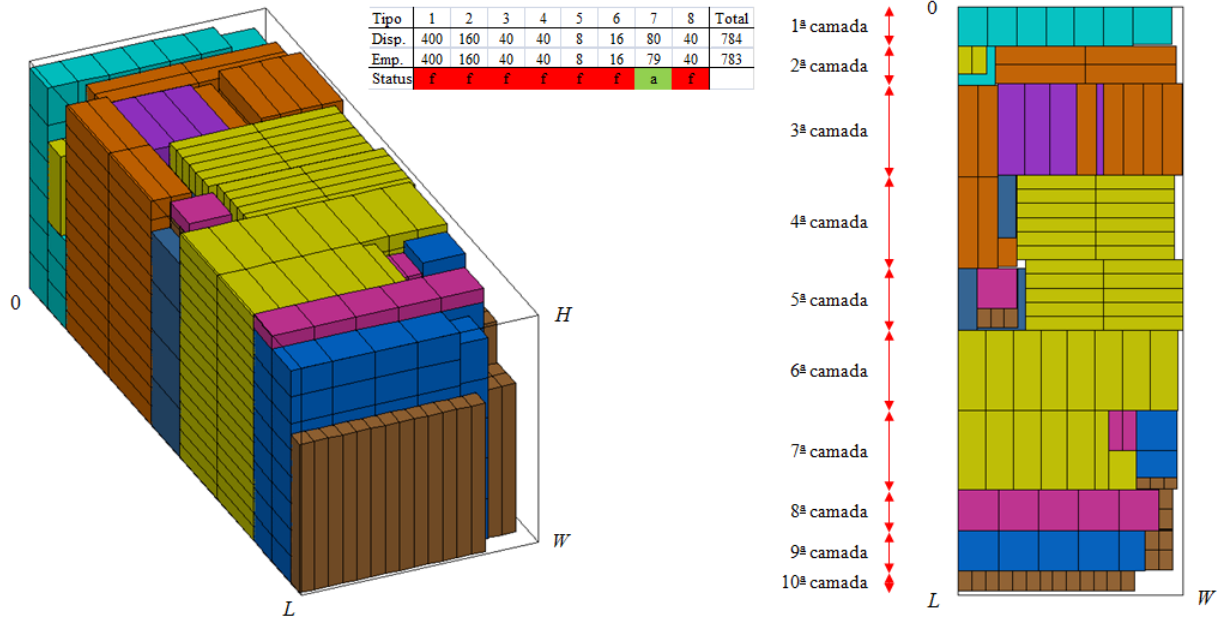


Figura 74. Após terminar o preenchimento da décima camada.

## APÊNDICE E

### VARIAÇÕES DO ALGORITMO DE GEORGE & ROBINSON

---

Cecilio e Morabito (2004), baseando-se no trabalho de George e Robinson (1980), propuseram 5 variações para este algoritmo. A primeira variação, chamada “Refinamento”, consiste em uma simples alteração no Algoritmo Selecciona 2 original, que é o algoritmo que escolhe o tipo de caixa para os espaços que sobraram na camada. Ao se verificar se algum tipo de caixa não fechado preenche mais de uma coluna completa no espaço selecionado, ao invés de simplesmente escolher o tipo de caixa que melhor preenche a maior área da base do espaço, é verificado se pode ser feita uma combinação de caixas iguais ao longo do comprimento do espaço. A partir desta combinação, escolhe-se o tipo que resultar em uma melhor utilização da área da base do espaço. O pseudocódigo do Algoritmo Selecciona 2 (refinamento) é apresentado a seguir (os demais algoritmos que compõem o Algoritmo de George & Robinson original permanecem inalterados):

---

**Algoritmo 13:** Selecciona 2 (escolha do tipo de caixa para os espaços que sobraram na camada)

---

Entradas: Um conjunto de tipos de caixas *não fechados*.

Saídas: O tipo de caixa que preencherá o espaço selecionado e a dimensão deste tipo que será posicionada ao longo do comprimento deste espaço.

1. **se** algum tipo de caixa *não fechado* couber no espaço selecionado **então**
  2.     **se** algum tipo de caixa *não fechado* preencher mais de uma coluna completa **então**
  3.         Escolha o tipo de caixa *não fechado* que melhor preenche o comprimento do espaço a partir de uma combinação de uma de suas dimensões.
  4.     **se não**
  5.         Escolha o tipo de caixa *não fechado* que melhor preenche a área da base do espaço a partir de uma combinação (independente) de duas de suas dimensões.
  6.     **fim se**
  7. **se não**
  8.     Coloque o espaço selecionado na lista de espaços rejeitados.
  9. **fim se**
- 

A segunda e quarta variações do Algoritmo de George & Robinson consistem basicamente em alterar a sequência de critérios de prioridades que são aplicados na escolha de um tipo de caixa para preencher uma nova camada. Para tal, além dos três critérios de

prioridades apresentados no Apêndice D, i.e., (i) tipo de caixa com a maior das menores dimensões, (ii) tipo de caixa com a maior quantidade disponível, e (iii) tipo de caixa com a maior das maiores dimensões, são incluídos os critérios de prioridades (iv) tipo de caixa com maior volume e (v) tipo de caixa com a maior razão (maior dimensão)/(menor dimensão). Ambas as variações utilizam um arranjo de três dos cinco critérios de prioridades, i.e.,  $A_{5,3} = 5!/3!$ , que resulta em 60 diferentes sequências de critérios de prioridades.

A segunda variação, chamada “Arranjo”, executa 60 vezes o Algoritmo de George & Robinson para determinar qual o melhor padrão de empacotamento para o contêiner todo, esgotando todas as possibilidades de arranjos, i.e., em cada iteração um arranjo diferente de três dos cinco critérios de prioridades é utilizado. O melhor resultado, em termos de volume total empacotado, é atualizado em cada iteração. A terceira variação consiste basicamente na segunda variação com o Algoritmo Selecciona 2 (refinamento). O pseudocódigo do Algoritmo Arranjo é apresentado a seguir:

---

**Algoritmo 14: Arranjo**

---

Entradas: Um conjunto de caixas disponíveis para serem empacotadas dentro do contêiner, com tipos, dimensões e quantidades conhecidos.

Saídas: Um conjunto de caixas empacotadas dentro do contêiner, com posições e orientações determinadas.

1. **faça**
  2.     Novo padrão: muda critério de prioridades.
  3.     Algoritmo George & Robinson.
  4.     Atualiza melhor padrão de empacotamento.
  5. **enquanto** todos os 60 arranjos não forem verificados
- 

A quarta variação, chamada “Camada”, executa 60 vezes o Algoritmo de George & Robinson para determinar qual o melhor padrão de empacotamento para cada camada, esgotando todas as possibilidades de arranjos, i.e., em cada iteração um arranjo diferente de três dos cinco critérios de prioridades é utilizado. O melhor resultado, para cada camada, é determinado pela razão (volume de caixas empacotadas)/(volume parcial do contêiner utilizado), i.e., o resultado será tanto melhor quanto mais “densa” for a camada. A quinta variação consiste basicamente na quarta variação com o Algoritmo Selecciona 2 (refinamento). O pseudocódigo do Algoritmo Camada é apresentado a seguir:

---

**Algoritmo 15:** Camada

---

Entradas: Um conjunto de caixas disponíveis para serem empacotadas dentro do contêiner, com tipos, dimensões e quantidades conhecidos.

Saídas: Um conjunto de caixas empacotadas dentro do contêiner, com posições e orientações determinadas.

1. **enquanto** sobrar alguma caixa e algum espaço **faça**
  2.     **faça**
  3.         Mesma camada: muda critério de prioridades.
  4.         **enquanto** não for uma nova camada **faça**
  5.             Algoritmo George & Robinson.
  6.         **fim enquanto**
  7.         Atualiza melhor camada.
  8.     **enquanto** todos os 60 arranjos não forem verificados
  9.     Nova camada: zera contador e atualiza contêiner.
  10. **fim enquanto**
-

## APÊNDICE F

### OPERADORES DE BUSCA LOCAL

---

Neste trabalho são empregados dois operadores de busca local, que consideram estruturas de vizinhança apenas do Problema de Roteamento de Veículos isoladamente. Tratam-se dos operadores Movimento 1-Ponto e Movimento 2-Opt. Ambos os operadores realizam tanto movimentos intra-roteiro quanto movimentos inter-roteiros. As Figuras 75 a 78 ilustram exemplos de como estes movimentos operam, respectivamente para o Movimento 1-Ponto e o Movimento 2-Opt. As imagens a esquerda ilustram o(s) roteiro(s) antes da aplicação do movimento, enquanto as imagens a direita ilustram o(s) roteiro(s) após a aplicação do movimento. Em vermelho estão ilustrados os arcos que são desconstruídos, enquanto em azul estão ilustrados os arcos que são construídos.

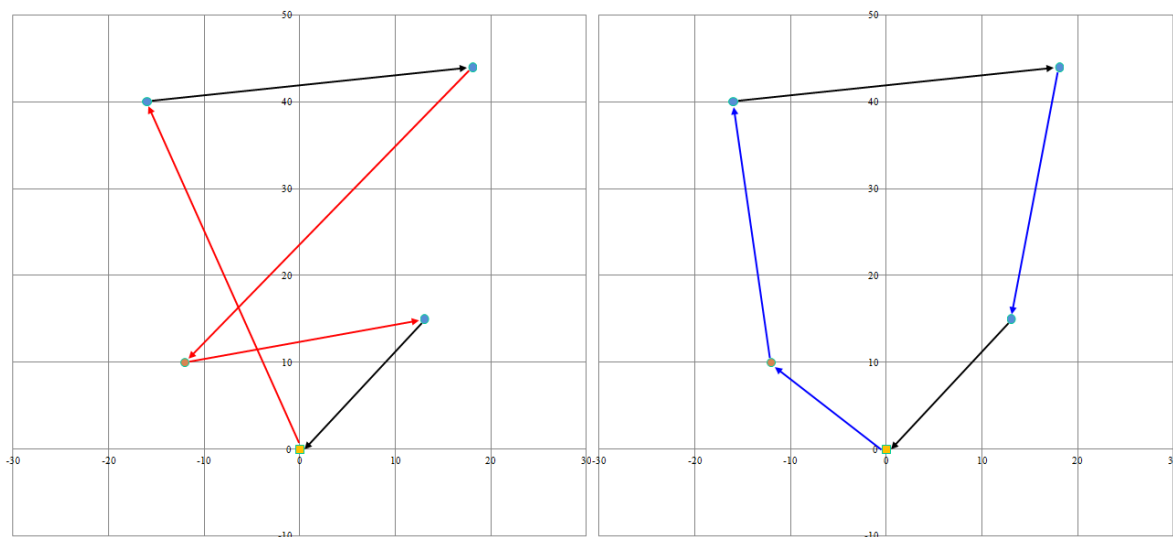


Figura 75. Movimento 1-Ponto intra-roteiro.

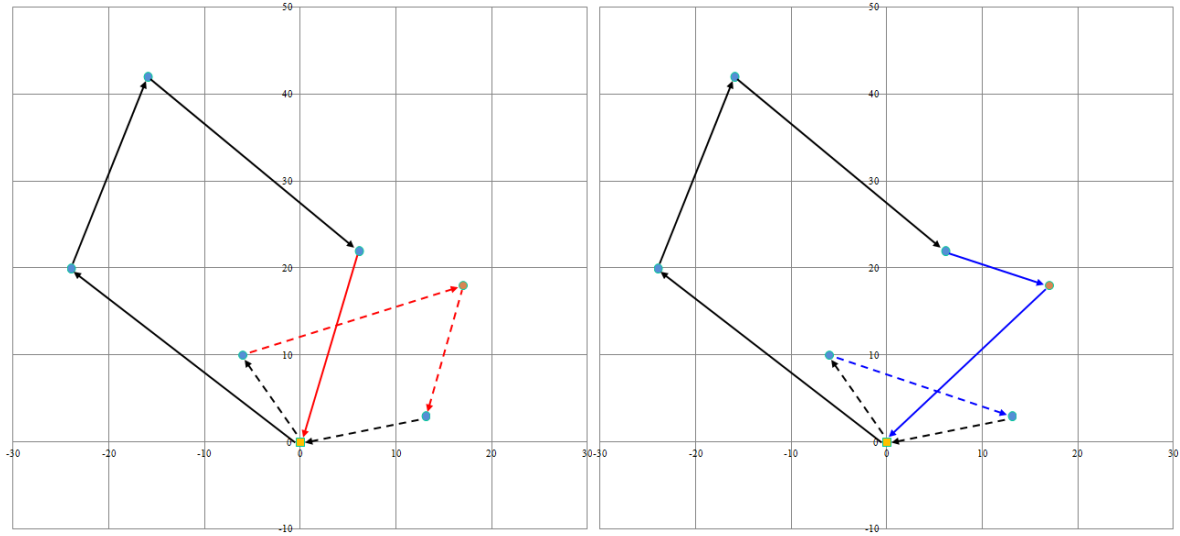


Figura 76. Movimento 1-Ponto inter-roteiros.

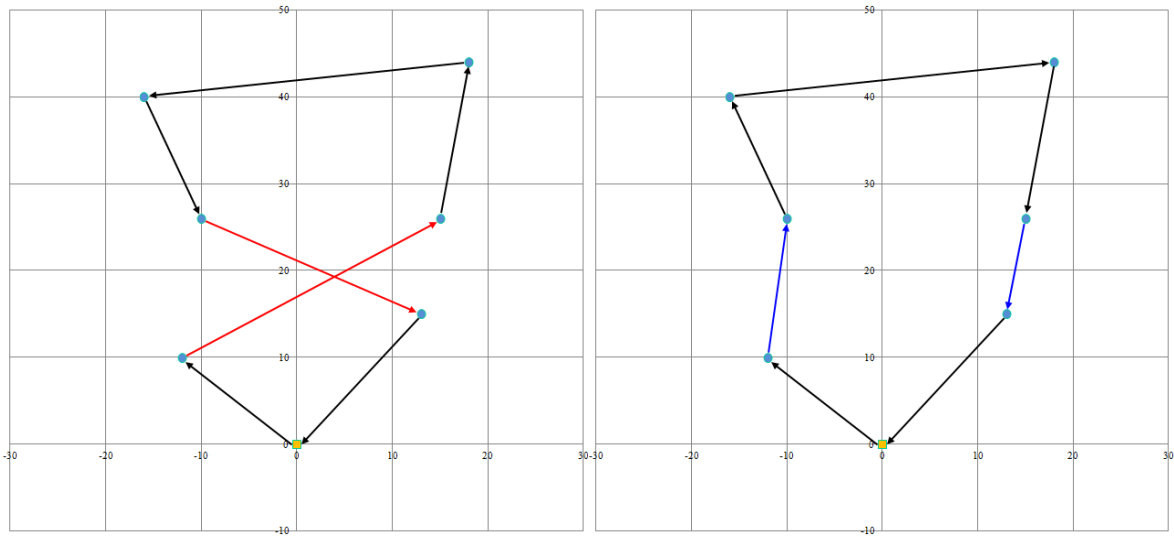


Figura 77. Movimento 2-Opt intra-roteiro.

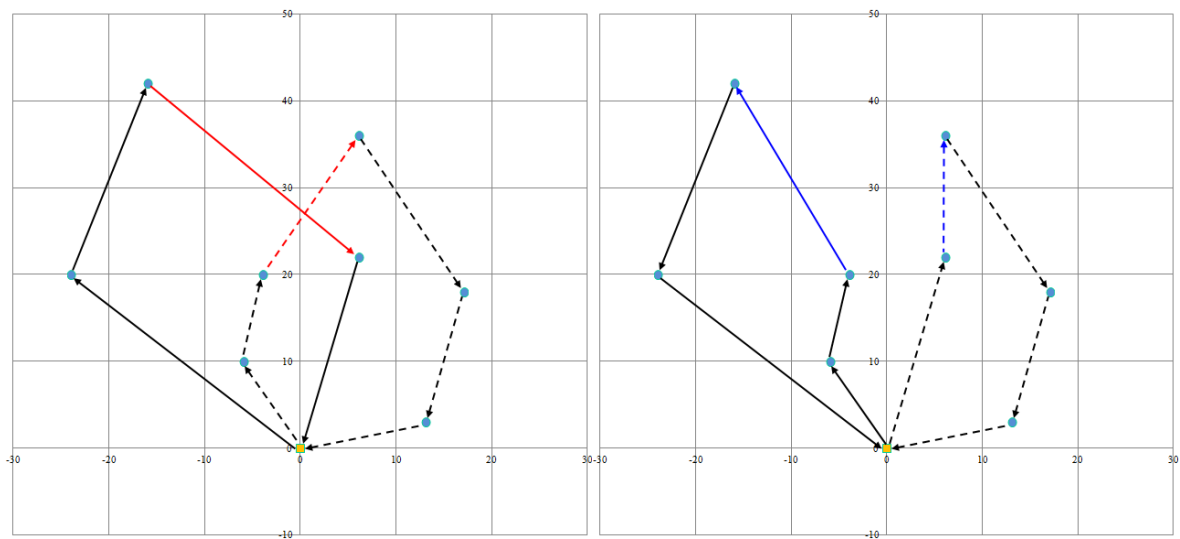


Figura 78. Movimento 2-Opt inter-roteiros.

## APÊNDICE G

### ALGORITMO *SIMULATED ANNEALING*

---

O Algoritmo *Simulated Annealing*, proposto originalmente por Kirkpatrick *et al.* (1983), tem como inspiração o processo metalúrgico do recozimento. Neste processo natural um material é aquecido e então resfriado lentamente sob condições controladas, de modo a aumentar o tamanho dos cristais no material e reduzir seus defeitos. Este processo melhora a resistência e a durabilidade do material. O aquecimento aumenta a energia dos átomos permitindo que eles se movam com maior liberdade, enquanto um programa de resfriamento lento permite que um estado de baixa energia seja atingido. Como analogia, o algoritmo tem como objetivo encontrar o estado de custo mínimo no espaço de busca. Para tal, a estratégia de aceitação de novas soluções utiliza uma função probabilística que se torna mais exigente com os custos das soluções conforme o tempo de execução do algoritmo avança.

Este algoritmo requer os seguintes parâmetros:

$T$  : a temperatura inicial.

$L$  : o tamanho do laço.

$I$  : o número de iterações por laço.

$\delta$  : a taxa de resfriamento.

$N$  : o tamanho da lista de vizinhos que é inspecionada ao executar os operadores de busca local. Um valor maior aumenta o tempo de execução do algoritmo, mas também permite mais possibilidades a serem consideradas.

O pseudocódigo do Algoritmo de *Simulated Annealing* é apresentado a seguir:

---

**Algoritmo 16: Simulated Annealing**


---

Entradas: Uma solução inicial factível para o CVRP.

Saídas: Uma solução factível melhorada para o CVRP.

1. Sejam  $\{T; L; I; \eta; N\} = \{-; -; -; -; -\}$ .
  2. Seja  $U = \{1\text{-Ponto}, 2\text{-Opt}\}$  o conjunto de operadores de busca local.
  3. Faça  $S$  igual a atual distância total percorrida.
  4. **para**  $j = 1, \dots, L$  **faça**
  5.      $T = \eta \cdot T$ .
  6.     **para**  $k = 1, \dots, I$  **faça**
  7.         **para** todos os operadores de busca local  $u \in U$  **faça**
  8.             **para** todos os nós  $j$  na solução **faça**
  9.                 Aplique o operador de busca local  $u$  no nó  $j$ .
  10.                 **se** a solução gerada é melhor que a solução atual **então**
  11.                     Aceite a solução gerada como nova solução atual.
  12.                 **se não**
  13.                     Aceite a solução gerada como nova solução atual **se**  
 $e^{(\text{distância da solução candidata} - \text{distância da solução atual})/T}$  for maior que um número aleatório sorteado no intervalo (0;1).
  14.                 **fim se**
  15.             **fim para**
  16.         **fim para**
  17.     **fim para**
  18. **fim para**
-



## APÊNDICE H

### ALGORITMO *RECORD-TO-RECORD TRAVEL*

---

O Algoritmo *Record-to-Record Travel*, proposto originalmente por Dueck (1993), pode ser tratado como uma versão determinística do Algoritmo *Simulated Annealing*. O algoritmo alterna entre duas fases: uma fase de diversificação e uma fase de melhoria. Na fase de diversificação o objetivo é aceitar alguns movimentos que possam piorar (mas não muito) a melhor solução encontrada até então, e tentar explorar novas regiões do espaço de busca. Esta fase é seguida por uma fase de melhoria, em que apenas movimentos que melhorem a solução são permitidos, conforme busca-se por um mínimo local no espaço de busca. O algoritmo termina após ter sido incapaz de escapar de um mínimo local depois de algumas tentativas.

Este algoritmo requer os seguintes parâmetros:

$D$ : o tamanho do laço na fase de diversificação.

$K$ : o número de mínimos locais que devem ser buscados antes de perturbar a solução ou terminar o algoritmo.

$P$ : o número de vezes que a solução é perturbada uma vez que a busca esteja estagnada em um mínimo local.

$\delta$ : o quanto de deterioração do valor da função objetivo é permitido na fase de diversificação.

$N$ : o tamanho da lista de vizinhos que é inspecionada ao executar os operadores de busca local. Um valor maior aumenta o tempo de execução do algoritmo, mas também permite mais possibilidades a serem consideradas.

O pseudocódigo do Algoritmo de *Record-to-Record Travel* é apresentado a seguir:

---

**Algoritmo 17: Record-to-Record Travel**


---

Entradas: Uma solução inicial factível para o CVRP.

Saídas: Uma solução factível melhorada para o CVRP.

1. Sejam  $\{D; K; P; \delta; N\} = \{-; -; -; -; -\}$ .
  2. Seja  $U = \{1\text{-Ponto}, 2\text{-Opt}\}$  o conjunto de operadores de busca local.
  3. Faça o registro  $R$  igual a atual distância total percorrida, faça a tolerância  $T = (1 + \delta) \cdot R$ , e faça  $k = p = 0$ .
  4. **enquanto**  $p < P$  **faça**
  5.     **para**  $i = 1, \dots, D$  **faça**
  6.         **para** todos os operadores de busca local  $u \in U$  **faça**
  7.             **para** todos os nós  $j$  na solução **faça**
  8.                 Aplique o operador de busca local  $u$  no nó  $j$  aceitando movimentos de melhoria, ou, caso nenhum exista, aceita o movimento menos pior desde que o valor da função objetivo seja menor que  $T$ .
  9.             **fim para**
  10.         **fim para**
  11.     **fim para**
  12.     **enquanto** movimentos de melhoria puderem ser encontrados **faça**
  13.         **para** todos os operadores de busca local **faça**
  14.             **para** todos os nós  $j$  na solução **faça**
  15.                 Aplique o operador de busca local  $u$  no nó  $j$  aceitando apenas movimentos de melhoria.
  16.             **fim para**
  17.         **fim para**
  18.     **fim enquanto**
  19.     **se** a solução atual é um novo registro **então**
  20.         Atualize  $R$  e  $T$  e faça  $k = 0$ .
  21.     **fim se**
  22.      $k = k + 1$ .
  23.     **se**  $k = K$  **então**
  24.         Perturbe a solução.
  25.          $p = p + 1$ .
  26.     **fim se**
  27. **fim enquanto**
-

## APÊNDICE I

### DADOS DE ALGUNS EXEMPLOS

As Tabelas 39 a 42 a seguir apresentam, respectivamente para o exemplo 1 dos experimentos baseados em um caso real e para o exemplo 1 dos experimentos baseados na literatura, os tipos de caixas, bem como suas dimensões de comprimento, largura e altura (veja Tabelas 39 e 41), o número de caixas de cada tipo requerido por cada cliente e o número total de caixas requerido por cada cliente (veja Tabelas 40 e 42).

Tabela 39. Tipos e dimensões das caixas do exemplo 1 dos experimentos baseados em um caso real.

Tipo	Dimensão		
	Comp.	Larg.	Alt.
1	642	527	523
2	487	474	293
3	367	308	322
4	501	255	243

Tabela 40. Número de caixas de cada tipo requeridas por cada cliente do exemplo 1 dos experimentos baseados em um caso real.

Cliente	Tipo				Total
	1	2	3	4	
1	9	36	9	36	90
2	7	28	7	28	70
3	8	32	8	32	80
4	14	56	14	56	140
5	6	24	6	24	60
6	11	44	11	44	110
7	4	16	4	16	40
8	15	60	15	60	150
9	3	12	3	12	30
10	14	56	14	56	140
11	19	76	19	76	190
12	20	80	20	80	200
13	10	40	10	40	100
14	19	76	19	76	190
15	13	52	13	52	130

Tabela 41. Tipos e dimensões das caixas do exemplo 1 dos experimentos baseados em Christofides *et al.* (1979).

Tipo	Dimensão		
	Comp.	Larg.	Alt.
1	738	498	391
2	573	472	442
3	579	502	411
4	664	355	333
5	532	377	342

Tabela 42. Número de caixas de cada tipo requeridas por cada cliente do exemplo 1 dos experimentos baseados em Christofides *et al.* (1979).

Cliente	Tipo					Total	Cliente	Tipo					Total
	1	2	3	4	5			1	2	3	4	5	
1	3	4	4	2	8	21	26	3	4	4	2	8	21
2	10	19	18	9	36	92	27	5	10	10	4	16	45
3	5	10	10	5	19	49	28	5	10	8	4	16	43
4	3	6	6	3	9	27	29	2	4	4	2	6	18
5	7	14	13	6	24	64	30	6	12	12	6	22	58
6	5	10	10	4	16	45	31	4	8	6	3	12	33
7	6	12	12	6	22	58	32	4	8	8	4	12	36
8	8	14	14	7	28	71	33	8	14	14	7	28	71
9	4	8	6	3	12	33	34	8	16	16	8	32	80
10	2	4	4	1	4	15	35	6	11	10	5	20	52
11	6	12	12	6	22	58	36	2	4	4	2	6	18
12	9	18	18	9	35	89	37	3	6	6	3	9	27
13	8	14	14	7	28	71	38	5	10	10	4	16	45
14	7	14	13	6	24	64	39	5	10	8	4	16	43
15	4	6	6	3	12	31	40	3	4	4	2	8	21
16	5	10	10	4	16	45	41	9	17	16	8	32	82
17	1	2	2	1	3	9	42	4	8	8	4	16	40
18	13	26	26	12	48	125	43	4	8	6	3	12	33
19	3	6	6	3	9	27	44	5	10	10	5	19	49
20	9	18	18	8	32	85	45	4	6	6	3	12	31
21	3	6	5	2	8	24	46	2	4	4	1	4	15
22	3	6	5	2	8	24	47	8	16	16	8	28	76
23	5	10	10	5	19	49	48	6	11	10	5	20	52
24	4	6	6	3	12	31	49	6	12	11	5	20	54
25	9	18	18	8	32	85	50	4	6	6	3	12	31