

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE  
PRODUÇÃO

**Aplicação do Método de Decomposição de Benders para o  
Problema de Carregamento de Paletes**

Ana Gabriela Rocha

São Carlos  
2008

**Aplicação do Método de Decomposição de Benders para o  
Problema de Carregamento de Paletes**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

**Aplicação do Método de Decomposição de Benders para o  
Problema de Carregamento de Paletes**

**Ana Gabriela Rocha**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Produção.

**Orientador:** Professor Reinaldo Morabito

São Carlos  
2008

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

R672am

Rocha, Ana Gabriela.

Aplicação do método de decomposição de Benders para o problema de carregamento de paletes / Ana Gabriela Rocha. -- São Carlos : UFSCar, 2009.  
129 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2008.

1. Paletes. 2. Decomposição de Benders. 3. Programação inteira mista. 4. Unitização de carga. 5. Logística. I. Título.


CDD: 674.82 (20<sup>a</sup>)



FOLHA DE APROVAÇÃO


Aluno(a): Ana Gabriela Rocha

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DEFENDIDA E APROVADA EM 11/12/2008 PELA  
COMISSÃO JULGADORA:

  
Prof. Dr. Reinaldo Morabito Neto  
Orientador(a) PPGE/UFSCar

  
Prof. Dr. Heracio Hideki Yanasse  
LAC/INPE

  
Prof. Dr. Alysson Machado Costa  
ICMC/USP

  
Prof. Dr. Mário Otávio Batalha  
Coordenador do PPGE/UFSCar

“O verdadeiro lugar de nascimento é aquele em que lançamos pela primeira vez um olhar inteligente sobre nós mesmos.”

Marguerite Yourcenar.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me guiado e dado forças para superar os obstáculos encontrados pelo caminho.

Ao Prof. Dr. Reinaldo Morabito pela orientação, confiança, dedicação e conselhos fornecidos durante o desenvolvimento desta pesquisa.

Um agradecimento mais que especial aos meus pais, pelo incentivo e confiança sempre depositados em mim.

Agradeço à minha família, pelo amor, presença e paciência em todos os anos de minha vida.

Aos amigos que fazem parte da minha vida, mesmo os mais distantes.

Aos professores e funcionários do DEP-UFSCar pelo apoio.

Gostaria de agradecer aos professores Horácio Yanasse e Alysson Costa pelos comentários e sugestões feitos durante este trabalho.

Agradeço à DPaschoal. Em especial à Malu, que me inspirou para dar início a este trabalho e que, no fim dele, me incentivou a terminá-lo.

À CAPES pelo apoio financeiro.

E finalmente a todos que colaboraram indiretamente na realização deste trabalho.

## Resumo

Os problemas de corte e empacotamento são importantes no planejamento da produção de vários segmentos industriais envolvendo objetivos como, por exemplo, minimizar os efeitos negativos gerados por desperdício de materiais ou espaços ociosos. As perdas de material, devido a uma programação pouco adequada dos padrões de corte ou empacotamento, podem ser substanciais, sendo que, em geral, parte destas perdas pode ser evitada apenas com uma programação da produção mais eficiente, não implicando em investimentos adicionais nos processos de produção.

O objetivo deste estudo é verificar o desempenho do método de decomposição de Benders aplicado a modelos de carregamento de paletes do produtor e do distribuidor. O problema de carregamento de paletes do produtor envolve empacotar caixas iguais sobre um palete, de maneira a otimizar o aproveitamento deste. O problema de carregamento de paletes do distribuidor envolve empacotar caixas de tamanhos diferentes sobre um palete, também de maneira a otimizar o aproveitamento deste.

A abordagem baseada na reformulação de Benders define um algoritmo de relaxação que particiona o problema original em dois outros problemas mais simples de serem resolvidos. Para verificar a eficiência da abordagem, realizaram-se testes computacionais, comparando os resultados obtidos com os obtidos pelo pacote computacional composto de uma linguagem de modelagem (GAMS) e um *software* de otimização de última geração (CPLEX).

**Palavras-chave:** Problema de carregamento de paletes do produtor e do distribuidor; Método de decomposição de Benders; Problema inteiro misto; Unitização de carga; Logística.



## **Abstract**

Cutting and packing problems are important in the production planning of various industrial segments involving goals such as minimizing the negative effects generated by waste of materials or idle spaces. The loss of material due to an inadequate programming of the cutting or packing patterns, can be substantial, and, in general, parts of these losses can be avoided only with a more efficient production planning, not resulting in additional investments in production processes.

This study aimed at evaluating the performance of the Benders decomposition method, applied to the manufacturer and distributor pallet loading models. The manufacturer pallet loading model involves packing equal boxes on a pallet, so as to optimize its use. The distributor pallet loading model involves packing boxes of different sizes on a pallet, also a way to optimize its use.

The approach based on Benders decomposition, defines a relaxation algorithm that partitions the original problem in two other problems easier to be solved. To check the effectiveness of the approach, computational tests were carried out by comparing the results with those obtained by a computational package composed of a modeling language (GAMS) and a last generation optimization solver (CPLEX ).

**Keywords:** Manufacturer and distributor pallet loading models; Benders decomposition method; Mixed Integer Programming; Cargo unitization; Logistics.

## Lista de Tabelas

Tabela 1. Restrições disjuntivas para o caso bidimensional .....	30
Tabela 2. Restrições disjuntivas para o caso tridimensional .....	34
Tabela 3. Restrições de sobreposição das caixas .....	41
Tabela 4. Relação de variáveis .....	55
Tabela 5. Limitantes gerados no exemplo .....	65
Tabela 6. Exemplos do Grupo 1 .....	70
Tabela 7. Exemplos do Grupo 2 .....	70
Tabela 8. Exemplos do Grupo 3 .....	70
Tabela 9. tsai x tsai modificado - grupo 1 - GAMS/CPLEX .....	71
Tabela 10. tsai x tsai modificado - grupo 2 - GAMS/CPLEX .....	71
Tabela 11. tsai x tsai modificado - grupo 3 - GAMS/CPLEX .....	72
Tabela 12. GAMS/CPLEX X Benders clássico - grupo 1 .....	73
Tabela 13. GAMS/CPLEX X Benders clássico - grupo 2 .....	73
Tabela 14. GAMS/CPLEX X Benders clássico - grupo 3 .....	74
Tabela 15. Benders clássico X Benders relaxado - grupo 1 .....	75
Tabela 16. Benders clássico X Benders relaxado - grupo 2 .....	76
Tabela 17. Benders clássico X Benders relaxado - grupo 3 .....	76
Tabela 18. Fixando 1 caixa .....	78
Tabela 19. Fixando 4 caixas - exemplo M4 .....	80
Tabela 20. Fixando 4 caixas - exemplo D3 .....	80
Tabela 21. Carregamentos de Paletes do Produtor Tridimensional .....	82
Tabela 22. Carregamentos de Paletes do Distribuidor .....	83

## Lista de Figuras

Figura 1. Exemplos de paletes .....	16
Figura 2. Palete padrão PBR .....	16
Figura 3. Plano de corte ou empacotamento unidimensional .....	21
Figura 4. Plano de corte ou empacotamento bidimensional .....	21
Figura 5. Palete do produtor bidimensional .....	24
Figura 6. Palete do produtor tridimensional .....	24
Figura 7. Palete do distribuidor bidimensional .....	25
Figura 8. Exemplo didático adaptado de Tsai <i>et al.</i> (1993) .....	33
Figura 9. Posição $(r,s)$ não permitida em função da colocação de uma caixa na posição $(p,q)$ com orientação $i$ .....	39
Figura 10. Solução do exemplo do Beasley (1985b) .....	41
Figura 11. Sobreposição .....	43
Figura 12. Ilustração do exemplo .....	67

Figura 13. Solução do exemplo M9 .....	74
Figura 14. 4 caixas horizontais .....	79
Figura 15. 1 caixa vertical e 3 horizontais .....	79
Figura 16. 2 caixas verticais e 2 caixas horizontais (3 casos) .....	79
Figura 17. 3 caixas verticais e 1 horizontal .....	79
Figura 18. 4 caixas verticais .....	79
Figura 19. Solução do exemplo M4 .....	80
Figura 20. Exemplo aleatório tridimensional .....	82
Figura 21. Exemplo 1 na empresa .....	82
Figura 22. Exemplo 2 na empresa .....	82
Figura 23. Exemplo do carregamento de paletes do distribuidor .....	84

## Sumário

<b>Capítulo 1. Introdução</b> .....	10
1.1 Objetivo e Justificativa .....	12
1.2 Estrutura do texto .....	13
<b>Capítulo 2. Paletização de Cargas e os Problemas do Carregamento de Paletes do Produtor e do Distribuidor</b> .....	15
2.1 Unitização de Cargas .....	15
2.2 Paletes .....	15
2.3 O Problema de Carregamento de Paletes .....	20
2.4 Revisão Bibliográfica sobre PCP do Produtor .....	25
<b>Capítulo 3. Modelagem dos Problemas de Carregamento de Paletes do Produtor e do Distribuidor</b> .....	28
3.1 Formulação de Tsai <i>et al.</i> (1993) .....	28
3.2 Formulação de Chen <i>et al.</i> (1995) .....	36
3.3 Formulação de Beasley (1985b) .....	38
3.4 Formulação de Martins (2002) .....	42
<b>Capítulo 4. Métodos de Solução para os Problemas do Carregamento de Paletes do Produtor e do Distribuidor e Decomposição de Benders</b> .....	47
4.1 Revisão dos Métodos da Literatura .....	47
4.2 Decomposição de Benders .....	48
4.2.1 Extensões, variações e aplicações do método de decomposição de Benders .....	51
4.3 Aplicação de decomposição de Benders no Modelo de Tsai <i>et al.</i> (1993) .....	53
4.3.1 Carregamento de Paletes do Produtor .....	53
4.4 Exemplo Ilustrativo .....	59
4.5 Alterações no método de Benders clássico .....	68
<b>Capítulo 5. Resultados Computacionais</b> .....	69
5.1 Experimentos com Carregamentos de Paletes do Produtor (Bidimensional) .....	69
5.1.1 Testes iniciais com GAMS/CPLEX .....	69
5.1.2 Testes com método B.class .....	72
5.1.3 Testes com método B.relax .....	75
5.1.4 Testes com corte de Pareto .....	77
5.1.5 Testes adicionais fixando caixas nos cantos do palete .....	78
5.2 Experimentos com Carregamentos de Paletes do Produtor (Tridimensional) .....	81
5.3 Experimentos com Carregamentos de Paletes do Distribuidor .....	83

<b>Capítulo 6. Conclusões e Perspectivas para Pesquisas Futuras</b> .....	84
6.1 Conclusões .....	84
6.2 Perspectivas para Pesquisas Futuras .....	87
<b>Referências Bibliográficas</b> .....	89
<b>Apêndice</b> .....	96
Apêndice A - Modelo GAMS adaptado de Tsai <i>et al.</i> (1993) .....	96
Apêndice B - Modelo GAMS para decomposição de Benders clássico para o carregamento do palete do produtor bidimensional (adaptado de Tsai <i>et al.</i> (1993)) .....	98
Apêndice C - Modelo GAMS para decomposição de Benders relaxado para o carregamento do palete do produtor bidimensional (adaptado de Tsai <i>et al.</i> (1993)) .....	105
Apêndice D - Modelo GAMS para decomposição de Benders para o carregamento do palete do produtor tridimensional (adaptado de Tsai <i>et al.</i> (1993)) .....	113
Apêndice E - Modelo GAMS para decomposição de Benders para o carregamento do palete do distribuidor bidimensional (adaptado de Tsai <i>et al.</i> (1993)) .....	122

## 1 Introdução

Unitização é o agrupamento de itens ou embalagens em uma unidade apropriada para facilitar a movimentação mecânica. Assim, uma carga unitizada é aquela em que todas as embalagens são reunidas em uma ou mais unidades, por meio de cintagem, amarração ou outros. A unitização pode ainda ser definida como o conjunto ou grupo de objetos mantidos como uma unidade de carga em um transporte entre uma origem e um destino (MOURA, 1998).

Diz-se que a carga é unitizada quando há o agrupamento de caixas numa carga única, formando um só volume (SULE, 1988). A paletização de carga tem como característica reunir vários itens em uma plataforma, disposta horizontalmente, a fim de que a carga possa ser empilhada e estabilizada (MORALES *et al.*, 1997), facilitando, assim, o transporte por empilhadeiras e caminhões, evitando danos físicos e roubos e diminuindo o tempo de carga e descarga. A unitização de carga tem sido usada com frequência nas indústrias para armazenagem e distribuição de produtos.

Um dispositivo de unitização de carga normalmente usado no manuseio de materiais na manufatura e distribuição de produtos é o palete. Itens são colocados em caixas que, por sua vez, são empacotadas nos paletes, formando unidades de carga que facilitam a movimentação, o manuseio e a armazenagem dos mesmos. O processo de empacotamento pode ser feito manualmente ou mecanicamente, sendo o objetivo maximizar o espaço utilizado do palete, maximizando, assim, o número de itens empacotados.

No dia-a-dia de uma empresa, a tarefa de unitizar a carga, tanto sobre o palete quanto dentro de caminhões, pode não ser fácil, dependendo da quantidade de itens, formato e dimensões dos mesmos. Os carregamentos de produtos sobre paletes ou dentro de contêineres são exemplos de problemas de empacotamento que consistem, genericamente, em empacotar unidades menores (itens) dentro de unidades maiores (objetos), de maneira a otimizar certos objetivos, por exemplo, o custo ou a quantidade de espaço utilizado.

Similarmente, problemas de corte consistem em determinar a “melhor” forma de cortar unidades de material (objetos), de maneira a produzir um conjunto de unidades menores (itens). Tais problemas aparecem em diversos processos industriais de corte em que os objetos, que em geral estão disponíveis em estoque com dimensões padronizadas,

correspondem a barras de aço, bobinas de papel e alumínio, placas metálicas e de madeira, placas de circuito impresso, chapas de vidro e fibra de vidro, peças de couro etc., e os itens, com dimensões especificadas pelos clientes, são encomendados através de uma carteira de pedidos.

Gilmore e Gomory (1965) observaram que empacotar caixas em vagões de carga ferroviários poderia ser visto como cortar pequenos paralelepípedos a partir de grandes paralelepípedos. Dyckhoff *et al.* (1985), Dyckhoff (1990) e Dyckhoff e Finke (1992) procuraram integrar estes problemas numa única notação, denominada problemas de corte e empacotamento (PCE). Os PCE's são bem conhecidos na literatura de pesquisa operacional e gestão da produção. Centenas de artigos tratando tais problemas podem ser encontrados, conforme indicam os trabalhos de Dowsland e Dowsland (1992), Dyckhoff e Finke (1992), Sweeney e Paternoster (1992), Morabito e Arenales (1992), Bischoff e Waescher (1995), Waescher *et al.* (2006) ou de diversos grupos de pesquisa no assunto, como o ESICUP (2008).

Os PCE's, em geral, são NP-difíceis e, portanto, de difícil solução exata (GAREY e JOHNSON, 1979) nas situações práticas. Diversos métodos têm sido empregados para resolvê-los, porém, devido à complexidade computacional destes problemas, não existem métodos de soluções gerais e eficientes. Em geral, as abordagens são centradas em estudos de caso, o que resulta em muitos métodos heurísticos na literatura.

Devido à grande variedade de problemas de corte e empacotamento ocorridos na prática, estudos analisaram diversos problemas da área (DYCKHOFF e FINKE, 1992; WAESCHER *et al.*, 2006). Segundo esses estudos, a determinação do tipo de um PCE se dá baseado em aspectos básicos respeitando a sua estrutura lógica: dimensionalidade, tipo de seleção de objetos/itens, características dos objetos/itens, entre outros. Dentre estes tipos, o problema de carregamento de paletes (PCP) do produtor consiste em organizar o maior número possível de itens, de dimensões  $(l \times w)$ , em um retângulo maior (paleta), de dimensões  $(L \times W)$ , ou seja, os itens são arranjados em camadas sobre a superfície do paleta. Os itens devem estar completamente contidos na camada do paleta e não é permitida a superposição de itens em cada camada.

Já o PCP do distribuidor consiste em organizar o maior número possível de caixas de tamanhos diferentes  $(l_i \times w_i)$  em uma unidade maior, por exemplo, o paleta  $(L \times W)$ , buscando-se a maximização da utilização do espaço disponível. As caixas também devem

ser arranjadas em camadas sobre o palete, devem estar completamente contidas no palete e não é permitida a superposição dessas caixas em cada camada. Este tipo de problema pode ser modelado por meio de programação inteira conforme, por exemplo, Tsai *et al.* (1993), Chen *et al.* (1995) e Martins (2002).

Diferentes formulações matemáticas podem ser utilizadas para o problema de carregamento de paletes. Entre as formulações encontradas na literatura, tem-se adaptações dos modelos de corte bidimensional de Beasley (1985b) e Hadjiconstantinou e Christofides (1995), e os modelos de empacotamento tridimensional de Tsai *et al.* (1993), Chen *et al.* (1995) e Martins (2002).

## 1.1 Objetivo e Justificativa

Conforme mencionado, o objetivo deste trabalho é aplicar o método de decomposição de Benders (BENDERS, 1962) para resolver os problemas de carregamento de paletes do produtor e do distribuidor.

Uma das motivações para a escolha do método de decomposição de Benders se deve ao fato de o método ter tido bons resultados quando aplicado a vários outros problemas; vide, por exemplo, Geoffrion e Graves (1974), Magnanti *et al.* (1986), Heragu e Chen (1998), Cordeau *et al.* (2000, 2001), Randazzo e Luna (2001), Cai *et al.* (2001) e de Miranda (2004).

Uma das justificativas para este estudo é a importância técnica e econômica das aplicações industriais. Esses tipos de problemas (corte e empacotamento) são fundamentais no planejamento da produção de vários segmentos industriais, cujo objetivo é minimizar os efeitos negativos gerados por desperdício de materiais, espaços vazios, etc.

As perdas de material, devido a uma programação pouco adequada dos padrões de corte e empacotamento, podem ser substanciais. Parte destas perdas poderia ser evitada apenas com uma programação da produção mais eficiente, não implicando em quaisquer investimentos adicionais em processos de produção.

Outra justificativa é a motivação para tratar problemas de natureza combinatória de difícil solução exata.

Salientamos que, de nosso conhecimento, não existem trabalhos na literatura que apliquem o método de decomposição de Benders aos problemas de carregamento de paletes.



Para avaliar o desempenho do método, os resultados encontrados nesta pesquisa são comparados com os resultados obtidos utilizando o pacote GAMS/CPLEX 7.0 com parâmetros *default*. Neste trabalho tratamos o caso do problema de carregamento de paletes (PCP) do produtor bidimensional, e o caso do problema de carregamento de paletes do distribuidor bidimensional. Em ambos os casos os itens são arranjados em camadas iguais sobre a superfície do palete. Também consideramos o caso de carregamento de paletes do produtor tridimensional, em que os itens (todos idênticos) podem ser arranjados de maneira mais genérica sobre o palete.

Para o problema do produtor bidimensional foram testados exemplos gerados com dados aleatórios e foi feita a comparação entre o resultado, utilizando o método de decomposição de Benders e o pacote GAMS/CPLEX 7.0 com parâmetros *default*. No caso do produtor tridimensional, resolvemos um exemplo com dados aleatórios e dois exemplos com dados reais de uma empresa varejista. Para o problema de distribuidor bidimensional foi feito um exemplo com dados aleatórios e também comparamos o resultado utilizando o método de decomposição de Benders e o pacote GAMS/CPLEX 7.0 com parâmetros *default*.

Neste trabalho foi usado o modelo do Tsai *et al.* (1993) adaptado ao problema do carregamento de paletes do produtor (bidimensional e tridimensional) e do distribuidor (bidimensional). A escolha deste modelo foi pelo fato de ser possível separar as variáveis inteiras das contínuas, o que facilita a aplicação do método clássico de decomposição de Benders.

## 1.2 Estrutura do texto

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

No capítulo 2, é apresentada uma breve revisão da literatura, mostrando a taxonomia dos problemas de corte e empacotamento. Discutimos a importância da unitização de carga, conceituamos a unitização de carga, apresentamos os tipos e modelos de paletes existentes, além de apresentarmos as vantagens da paletização de cargas. É mostrado também o problema de carregamento de paletes (PCP) do produtor e do distribuidor.

No capítulo 3, apresentamos modelos matemáticos para o PCP do produtor, adaptados dos modelos em Beasley (1985b), Tsai *et al.* (1993), Chen *et al.* (1995) e

Martins (2002).

No capítulo 4 apresentamos uma revisão da literatura dos métodos de solução para problemas de corte e empacotamento (PCE) e do método de decomposição de Benders, e aplicamos este método ao modelo adaptado de Tsai *et al.* (1993). No capítulo 5 apresentamos os resultados computacionais obtidos com este método.

Conforme mencionado anteriormente, os modelos são resolvidos por meio de uma linguagem de modelagem (GAMS) usando um *software* de otimização (CPLEX) (BROOKE *et al.*, 1998). Finalmente, no capítulo 6 são apresentadas as conclusões deste trabalho e as perspectivas para pesquisa futura.

## **2 Paletização de Cargas e os Problemas do Carregamento de Paletes do Produtor e do Distribuidor**

### **2.1 Unitização de cargas**

Toda empresa tem que carregar, descarregar e movimentar materiais, o que, em geral, gera um grande esforço e tempo gasto durante essas atividades. Estas operações podem não agregar valor ao produto, podem ter custos elevados e por isso a empresa tem que desenvolver um bom trabalho durante esse processo, pois é um fator importante na competitividade das empresas. Conforme mencionado antes, para tentar minimizar os custos desse processo, utiliza-se a unitização de cargas, o que traz vantagens adicionais como melhoria no manuseio e aprimoramento da segurança.

Sule (1988) define uma carga unitizada como sendo vários itens arranjados que podem ser manuseados em um único volume. É mais fácil movimentar itens e materiais em grupos, do que individualmente. Assim, a paletização e a containerização são amplamente utilizadas pelas empresas.

A unitização de cargas no Brasil envolve dois conceitos. O primeiro, a logística que estuda o suprimento e a distribuição de mercadorias e, o segundo, é o conceito de embalagens de transporte. Para melhorar a produtividade e a eficácia da logística, a junção da unitização de cargas com a movimentação mecanizada passa a ser uma alternativa muito estudada. Apesar de existirem várias formas de unitização de cargas para o transporte no mundo, talvez a utilização de paletes seja a mais comum na prática.

### **2.2 Paletes**

Paletes ou estrados (figura 1) são plataformas, geralmente feitos de madeira, destinado a suportar cargas empilhadas, permitindo a movimentação por meio de garfo, nos quais os produtos podem ser unitizados. Os paletes têm como função a movimentação de grande escala. Paletes são dispositivos de unitização de cargas criados para dinamizar a movimentação mecânica na produção industrial, nos depósitos, e tendem a agilizar os meios de transportes no momento de carregamento e descarga. O palete é uma alternativa eficiente de unitização que facilita a movimentação, o transporte e a armazenagem das cargas.

Não conhecemos estudos que se aprofundaram sobre questões como, por exemplo,

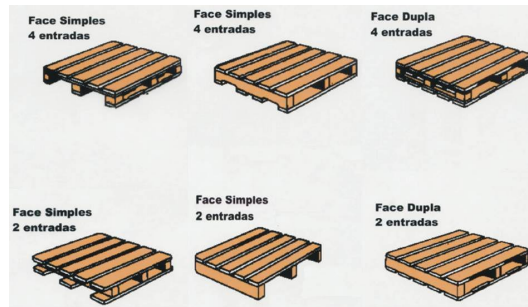


Figura 1: exemplos de paletes

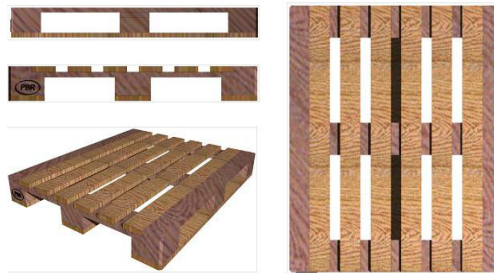


Figura 2: paleta padrão PBR

quanto de carga a ser movimentada é necessária para a implantação de um sistema unitizado.

Como o custo da implantação do sistema paletizado em diversos casos é maior que o custo de manutenção do sistema convencional, os dois sistemas convivem simultaneamente no Brasil (INTERLOGIS, 2008).

Os modelos de paletes são muitos, podendo, por exemplo, ter entrada para os garfos da empilhadeira em dois ou quatro dos seus lados. O paleta é normalmente usado para movimentação de grande escala. Pode ser encontrado confeccionado com aço, plástico, papelão, fibra de madeira moldada e outros, mas em um mercado menor. A maioria dos paletes encontrados nas empresas é feito de madeira.

O modelo de paleta padrão brasileiro (PBR) (figura 2) é um paleta face dupla não-reversível, 4 entradas, de madeira e com dimensões 120x100 centímetros (MORALES, 1995).

De uma forma geral, as empresas que recebem produtos e mercadorias paletizados durante a operação normal ou de movimentação de materiais estão notando as várias vantagens desta operação.

A NWPMA (“National Wooden Pallet and Container Association”) norte americana aponta dezesseis vantagens de um programa de paletização (OLIVEIRA, 2004;

INTERLOGIS, 2008):

1. A melhor utilização dos espaços verticais, pois um programa de paletização possibilita uma quantidade maior de armazenagem em uma dada área.
2. Redução de acidentes pessoais na substituição da movimentação manual pela movimentação mecânica.
3. Economia de 40% a 45% no custo da movimentação devido a paletização.
4. O tempo de movimentação fica reduzido. Economia por homens/horas na eliminação dos sobretempos ociosos.
5. Os paletes carregados permitem a ventilação entre as mercadorias tanto nos depósitos como durante o transporte.
6. A paletização simplifica o controle de inventário.
7. Casos demonstraram que a adoção de métodos de movimentação mecânica e de carregamento paletizado resultaram na eliminação quase total de danos aos produtos.
8. A unitização de cargas sobre paletes reduz o tempo de rotulagem e as despesas operacionais deste item. Um ou dois rótulos por unidade de carga elimina a necessidade de identificar cada embalagem do produto.
9. O furto é reduzido quando itens individuais são unitizados por cintas, faixas ou filmes.
10. A paletização permite uniformizar o local de estocagem, resultando em áreas com aproveitamento racional.
11. Os paletes são a forma natural de subpisos para o qual cintas de aço podem ser usadas facilmente na ancoragem segura das mercadorias.
12. O uso do palete elimina freqüentes custeios do sistema de transporte e permite entregas, cargas e descargas dentro de qualquer ponto acessível por equipamentos de movimentação.

13. Paletes bem adequados na linha de produção eliminam interrupções e gargalos e proporcionam maior produtividade.
14. Operários não precisam perder seu tempo para dar apoio na movimentação de materiais.
15. O palete corta pela metade o tempo de carga e descarga de caminhões:
  - reduzindo os custos de prorrogação no tempo de embarque e eliminando sobretaxas;
  - melhorando a utilização dos equipamentos de carga e descarga;
  - aumentando o ganho de frete tendo em vista a otimização no uso de caminhões.
16. Tempo de carga e descarga pode ser reduzido com o uso do palete, resultando em:
  - rapidez no retorno do caminhão;
  - redução de custos. Economias são claramente visualizadas quando realizadas pelo custo de carga e descarga de mercadorias, pois, muitas vezes, são maiores naquelas que envolvem operação de transbordo.

Os paletes podem ser classificados de vários modos. A Norma de Terminologia para paletes, NBR 8254, editada em novembro de 1983, classifica os tipos de paletes da seguinte forma:

#### **Quanto ao tipo de operação:**

- Palete descartável - é aquele destinado a uma única operação de transporte e/ou armazenagem.
- Palete de uso repetitivo - destinado a várias operações de transporte e/ou armazenamento.
- Palete sem retorno - é aquele descartável ou de uso repetitivo, mas que não retornam necessariamente à origem da operação de transporte.

O palete descartável surge como alternativa ao palete circulante por ser mais barato, uma vez que é feito de um material menos resistente. Entretanto, este tipo de

palete gera um custo ecológico, já que tem que ser descartado em um curto período de tempo.

O palete de uso repetitivo também é conhecido como palete circulante ou retornável. Um dos maiores usuários de cargas paletizadas são as indústrias de bens de consumo que distribuem seus produtos através dos supermercados. Desta forma, a Associação Brasileira de Supermercados (ABRAS) tem procurado a padronização dos paletes em função da qualidade, dimensões e projeto.

#### **Quanto ao modelo:**

- Palete de duas entradas - é aquele que permite a introdução de garfo somente por dois lados opostos. É normalmente utilizado quando a movimentação ou a armazenagem da carga tem uma restrição imposta pelo equipamento utilizado ou pelo tipo de operação pretendida.
- Palete de quatro entradas - é aquele que permite a introdução de garfos pelos quatro lados. Este tipo de palete pode ser movimentado por paleteira e empilhadeira. Quando a carga é descarregada do caminhão com empilhadeira e depois precisa ser movimentada dentro do armazém por uma paleteira, o palete de quatro entradas apresenta uma maior versatilidade. Este tipo de palete também permite a movimentação em cargas bloqueadas e possibilita arranjos de forma alternada nos meios de transportes.
- Palete face simples - é aquele com apenas uma face destinada a receber a carga. É geralmente utilizado em movimentações internas. É de fácil manipulação por paleteiras, mas necessita de estrutura porta-palete para armazenamento vertical. Devido ao seu projeto, não é indicado para cargas pesadas.
- Palete face dupla - é aquele que possui uma face superior para receber carga e outra inferior para apoio. É o mais utilizado no mercado.
- Palete reversível - é aquele que possui duas faces iguais. Utilizado principalmente para cargas bloqueadas. Usuários de sacarias dão preferência a este tipo de palete, pois é o que menos danifica a carga de suporte e permite a melhor estabilidade da pilha.

- Palete com abas - é aquele cuja face superior (ou ambas) se projeta além dos apoios em lados opostos, de forma a permitir a inserção de barras ou cabos de içamento.
- Palete desquidados - são aqueles com os cantos cortados ou arredondados, o que evita esforços perfurantes nas cargas.
- Caixa-Palete - é aquele, com três ou quatro paredes que podem ser removíveis, ou com tampa. Este tipo contém determinadas mercadorias, suporta certa compressão do empilhamento e proporciona maior proteção mecânica ao conjunto. É normalmente utilizado para produtos que não oferecem regularidade na pilha ou com dimensões muito pequenas.

### 2.3 O Problema de Carregamento de Paletes

O problema de carregamento de paletes pode ser visto como um caso particular do problema de empacotamento (GILMORE e GOMORY, 1965). O problema de empacotamento consiste, genericamente, em empacotar unidades pequenas dentro de uma unidade grande, de forma que certo objetivo seja otimizado. Um exemplo desse problema consiste em arranjar o maior volume possível de caixas dentro de um contêiner. Por outro lado, o problema de corte, de forma genérica, consiste em cortar uma unidade grande (objeto), que esteja disponível, para a produção de um conjunto de unidades pequenas (itens) que estão sendo requisitadas.

Cortar unidades maiores em unidades menores ou empacotar unidades menores dentro de unidades maiores são problemas similares, considerando que um item cortado de uma certa posição pode ser pensado como alocado àquela posição. Por isto, problemas desta classe são referidos como problemas de corte e empacotamento - PCE (DYCKHOFF, 1990).

Planos de corte são combinações de itens dentro de um objeto, respeitando-se um conjunto de restrições do processo de cortagem. Essas combinações podem ser feitas de inúmeras maneiras. O plano de corte ótimo é aquele que produz, por exemplo, a menor perda. O número de planos de corte possíveis pode ser, na prática, muito elevado, exigindo que técnicas bem elaboradas sejam desenvolvidas para determinar o plano ótimo. Dentre essas técnicas podemos citar: enumeração implícita, programação dinâmica, relaxação lagrangiana, busca em grafos e heurísticas. Na figura 3 podemos visualizar um exemplo



de plano de corte ou empacotamento gerado em um objeto unidimensional.

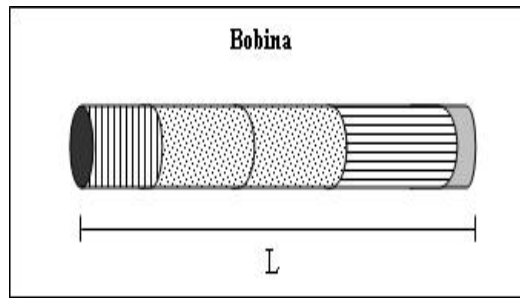


Figura 3: plano de corte ou empacotamento unidimensional

Um problema é dito unidimensional quando apenas uma dimensão é relevante no processo de cortagem ou empacotamento (veja figura 3). Como casos típicos de problemas de cortes unidimensionais, podemos citar o corte de materiais como papel, tecido, plástico e aço para serem utilizados nos mais diversos setores.

Um problema é dito bidimensional quando duas dimensões (comprimento e largura) são relevantes na obtenção da solução (enquanto a espessura é constante). As dificuldades aumentam bastante para se gerar arranjos sem que ocorra sobreposição de itens nos planos de corte ou empacotamento. A figura 4, a seguir, exibe uma representação de problemas de corte em duas dimensões. Entre os problemas bidimensionais podemos citar alguns já bastante estudados, como o corte de placas de madeira na indústria de móveis, chapas de aço, placas de vidro, entre outros.

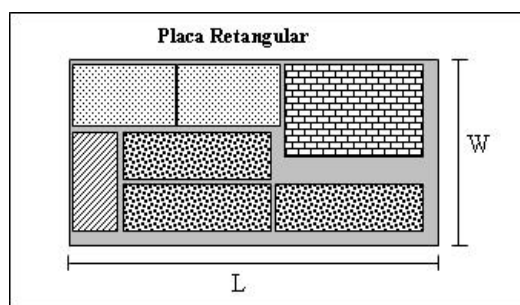


Figura 4: plano de corte ou empacotamento bidimensional

Quando três dimensões (comprimento, largura e altura) são relevantes para a obtenção da solução temos o problema de corte ou empacotamento tridimensional. Basicamente, trata-se de arranjar itens espaciais, sem sobrepô-los, dentro de objetos maiores. Podemos citar como exemplos de problemas tridimensionais o problema de carregamento de contêineres, o problema de corte de espumas em indústrias de colchões,

entre outros.

O problema de carregamento de paletes consiste em carregar produtos (caixas) sobre um palete retangular, tentando otimizar o aproveitamento do palete. Pressupõe-se que as caixas devam ser arranjadas ortogonalmente, ou seja, com seus lados paralelos aos lados do palete. Hodgson (1982), ao estudar o problema de carregamento de paletes, dividiu-o em dois possíveis casos: o problema de carregamento de paletes do produtor e o problema de carregamento de paletes do distribuidor.

As caixas que embalam os produtos no problema de carregamento de paletes do produtor são todas iguais, ou seja, existe somente um tipo de caixa. Quando as caixas são carregadas sob qualquer uma de suas faces, o problema é decomposto em dois subproblemas:

- para cada face das caixas, o problema bidimensional de arranjar ortogonalmente o máximo número de retângulos dentro de um retângulo maior;
- o problema unidimensional de arranjar o conjunto mais valioso de camadas ao longo da altura máxima permitida sobre o palete. Este é um problema da mochila (MARTELLO e TOTH, 1990).

No PCP do produtor com orientação vertical fixada, como já dito, as caixas a serem colocadas no palete devem ter dimensões idênticas, ou seja, caixas de dimensões  $(l, w)$  devem ser arranjadas sobre superfície  $(L, W)$  do palete resultando em uma camada de altura  $h$ . Supõe-se que as condições  $l \leq L$ ,  $w \leq W$ ,  $l \leq W$  e  $w \leq L$  sejam satisfeitas. Em geral é fixado que as caixas sejam colocadas com o lado  $l$  paralelo ao lado  $L$  ou  $W$  do palete, ou seja, ortogonalmente. A orientação vertical impõe que as caixas sejam colocadas sobre o palete, sempre com a face  $(l, w)$  voltada para cima.

Um palete carregado sob essas condições consiste de camadas horizontais iguais de altura  $h$ , por sua vez empilhadas umas sobre as outras, ao longo de uma altura  $H$  fixada para o palete. Essas considerações práticas fazem com que o problema original de gerar um arranjo ótimo de três dimensões seja reduzido a um problema de determinar um padrão ótimo para cada camada, tornando-se assim um arranjo bidimensional de retângulos menores dentro de um retângulo maior, sem sobreposição. Sabemos que, ao contrário de muitos equipamentos de corte, as operações com os equipamentos de empacotamento não impõem muitas restrições nos padrões produzidos.

Nos processos de cortes, unidades são cortadas para produzirem unidades menores. Por outro lado, nos problemas de empacotamento, unidades são empacotadas para formar unidades maiores. Em ambos os problemas podemos pensar em unidades pequenas sendo agrupadas para formar unidades grandes. Pelo menos duas formas de alocações são possíveis: seleção de unidades pequenas e seleção de unidades grandes. No problema de seleção de unidades grandes, supomos que todas as unidades grandes sejam suficientes para alocar todas as unidades pequenas. O objetivo é escolher o conjunto ótimo de unidades grandes para alocar todas as unidades pequenas. No problema de seleção de unidades pequenas supomos que todas as unidades pequenas sejam suficientes para utilizar todas as unidades grandes. Neste caso, o objetivo passa a ser a escolha de um conjunto ótimo de unidades pequenas utilizando todas as unidades grandes.

O interesse neste trabalho é a seleção de unidades pequenas quando temos somente uma unidade grande disponível. Assim sendo, o objetivo é carregar, da melhor maneira possível, um único palete e depois repetirmos este padrão ao longo da cadeia logística. Neste trabalho não consideramos restrições referentes às propriedades dos materiais que compõem os produtos e os paletes, tais como: peso, densidade, fragilidade etc.

Dyckhoff (1990) apresentou uma tipologia fundamentada na estrutura lógica dos problemas de corte e empacotamento. Nesta tipologia, o problema de carregamento de paletes do produtor bidimensional é classificado com a seguinte notação: 2/B/O/C que representa um problema bidimensional (2), tendo como forma de alocação a seleção de unidades pequenas (B), com uma única unidade grande (O) e unidades pequenas de tamanhos iguais (C).

Já no problema de carregamento de paletes do distribuidor, o distribuidor recebe vários bens de diversos fornecedores e estes bens estão embalados em caixas de diversos tamanhos. O distribuidor então carrega essas caixas sobre paletes em camadas ou de forma genérica. No caso mais geral, o problema de carregamento de paletes do distribuidor pode ser visto como um problema tridimensional de carregamento de contêineres (BISCHOFF e RATCLIFF, 1995; MORABITO e ARENALES, 1994).

No problema de carregamento de paletes do distribuidor bidimensional, em particular, caixas de dimensões  $(l_i, w_i, h_i)$  são arranjadas em camadas ou em colunas sobre a superfície  $(L, W)$  do paletes. Na prática, o problema de carregamento de paletes do

distribuidor bidimensional consiste em selecionar caixas com a mesma altura  $h$  e arranjá-las inicialmente em camadas e depois, empilhar essas camadas umas sobre as outras, ao longo de uma altura  $H$  fixada para o paleta. Este problema pode ser considerado uma generalização do problema do produtor, porém mais complexo e envolvendo maiores dificuldades de solução. Quanto à tipologia Dyckhoff (1990), este problema pode ser classificado como 2/B/O/M, onde M indica que podemos ter unidades pequenas (caixas) de tamanhos diferentes.

Na figura 5 e 6 temos um paleta do produtor bidimensional e um paleta do produtor tridimensional, respectivamente. Na figura 7 temos a ilustração de um PCP do distribuidor bidimensional.

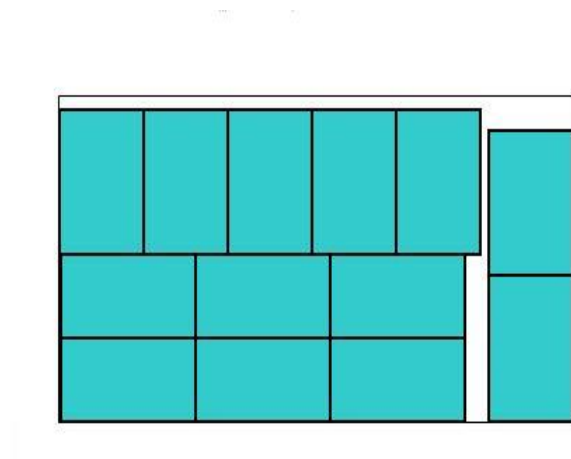


Figura 5: paleta do produtor bidimensional

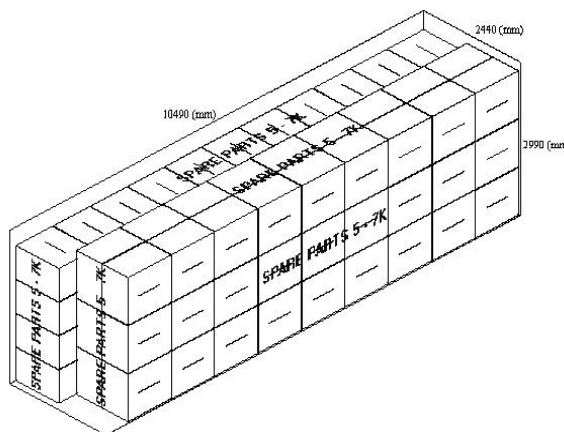


Figura 6: paleta do produtor tridimensional

Note-se que as figuras 5 e 7 são representadas como se a folha fosse o paleta, ou seja, as caixas tem todas a mesma altura e são carregadas em camadas.

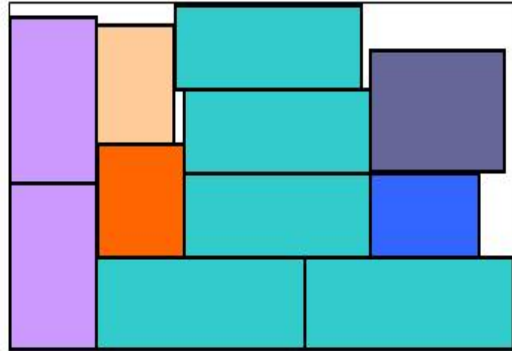


Figura 7: palete do distribuidor bidimensional

## 2.4 Revisão Bibliográfica sobre PCP do Produtor

A maioria dos trabalhos encontrados na literatura de problemas de corte e carregamento abordam problemas bidimensionais. Nas últimas décadas, foram propostos diversos métodos para resolver problemas de carregamento de paletes 2D, baseados em programação inteira (BEASLEY, 1985b e 1985c; TSAI *et al.*, 1985 e 1988; MARTINS, 2002) e programação dinâmica (ISRANI e SANDERS, 1982; HODGSON, 1982; HODGSON *et al.*, 1983; ROBERTS, 1984; STEUDEL, 1984 e BEASLEY, 1985a).

Oliveira (2004) estudou métodos exatos baseados em relaxação lagrangiana e *surrogate* para o problema de carregamento de paletes do produtor e mostrou uma relação existente entre as formulações de Tsai *et al.* (1993) e de Chen *et al.* (1995). Outros detalhes de estudos do PCP podem ser encontrados em Lins *et al.* (2002, 2003) e Birgin *et al.* (2005 e 2008). Limitantes superiores para este problema foram estudados, por exemplo, em Morabito e Farago (2002), Nelissen (1995) e Letchford e Amaral (2001). Pureza e Morabito (2006) propuseram uma abordagem baseada na incorporação de busca tabu simples em heurísticas de bloco.

Ribeiro e Lorena (2005) abordaram o problema da estivagem de unidades de celulose (PEUC) em porões de navios dedicados para o transporte marítimo internacional. O PEUC pode ser visto como PCP do produtor. Considerando isto e que o grafo de conflitos, associado ao problema, pode ser particionado, Ribeiro e Lorena (2005) apresentaram uma formulação para o PEUC e propuseram uma relaxação lagrangeana com divisão em *clusters* para o problema apresentado. A técnica adotada foi testada em exemplos da literatura e em exemplos obtidos em alguns portos brasileiros e obtiveram-

se resultados superiores aos obtidos na prática, aumentando o número de unidades transportadas por camadas nos navios. Estes resultados foram ainda melhorados em Birgin *et al.* (2008), usando um procedimento recursivo de partição.

De forma geral, o trabalho de Beasley (1985b) considera o problema bidimensional de cortar um número de peças retangulares de um único retângulo maior de forma a maximizar o valor das peças cortadas. É aplicada a técnica de relaxação lagrangiana (sobre restrições *surrogate*) na formulação de programação inteira 0-1 e o limitante obtido é usado no procedimento de busca em árvore (*branch and bound*). O procedimento de otimização do subgradiente é utilizado para otimizar o limitante obtido por relaxação lagrangiana. Esta abordagem pode ser adaptada para resolver o caso particular do PCP, conforme Oliveira e Morabito (2006).

Hadjiconstantinou e Christofides (1995) apresentam um procedimento exato de busca em árvore para a resolução do problema de corte bidimensional, no qual um número de peças retangulares pequenas, cada uma com um dado tamanho e valor, são cortadas de uma peça retangular maior. O objetivo é minimizar a sobra. É considerado o número máximo de vezes que uma peça pode ser usada em um padrão de corte. O algoritmo utilizado limita o tamanho da busca em árvore usando um limitante obtido através da aplicação de relaxação lagrangiana de uma formulação de programação inteira 0-1 e, para otimizar este limitante, é utilizado o procedimento de otimização do subgradiente. Esta abordagem também pode ser utilizada para resolver o PCP.

Tsai *et al.* (1993) formularam um modelo de programação inteira mista 0-1 para o problema de empacotamento de paletes e contêineres. O modelo consiste de restrições disjuntivas e é resolvido por algoritmos do tipo *branch and bound* explorando a estrutura particular do modelo. Porém, o número destas restrições cresce exponencialmente com o número de caixas disponíveis, tornando o algoritmo inviável para problemas de grande porte. Chen *et al.* (1995) consideraram o problema de carregamento de contêineres com caixas de tamanhos não uniformes e apresentaram um modelo misto 0-1 para este problema, similar ao modelo de Tsai *et al.* (1993). Outras formulações relacionadas com a de Tsai *et al.* (1993) e Chen *et al.* (1995) podem ser encontradas em Martins (2002).

Martins (2002) discutiu diferentes problemas de empacotamento multidimensional. Ele considerou exemplos em 2 e 3 dimensões, com diferentes funções-objetivo. Em todos os exemplos considerados, os itens e as caixas têm dimensões

retangulares. Martins e Dell (2007) definem uma instância de tamanho mínimo (MSI) de uma classe de equivalência dos problemas de carregamento de paletes (PLP), e mostram que cada classe de problemas tem uma e só uma MSI. Isto faz com que a MSI seja útil na distinção das classes de equivalência.

### 3 Modelagem dos Problemas de Carregamentos de Paletes do Produtor e do Distribuidor

Neste capítulo são apresentadas diferentes formulações matemáticas que podem ser utilizadas para o problema de carregamento de paletes, encontradas na literatura. A seguir revisamos o trabalho de Tsai *et al.* (1993), Chen *et al.* (1995), Beasley (1985b), Martins (2002).

#### 3.1 Formulação de Tsai *et al.* (1993)

O modelo proposto por Tsai *et al.* (1993) permite que várias caixas de diversos tamanhos sejam colocadas no mesmo palete. É um problema que também leva em consideração a altura das caixas, pois elas podem ser armazenadas em mais de uma camada e cada carregamento pode ter mais de um tipo de caixa (PCP do distribuidor). As soluções do modelo tridimensional não têm garantia de serem carregamentos estáveis.

A seguir o modelo original de Tsai *et al.* (1993) é adaptado a um modelo bidimensional do PCP do produtor. Desta maneira, consideraremos que podemos ter apenas caixas de dimensões  $(l \times w)$  ou  $(w \times l)$  para serem carregadas num palete  $(L \times W)$ , não considerando a altura das caixas. O problema é formulado como um problema de programação inteira mista 0-1.

No modelo original é considerada uma proporção pré-determinada entre o número de caixas de cada tipo e o total de caixas carregadas no palete, o que não é considerado neste trabalho.

Os parâmetros do modelo para o PCP do produtor, caso bidimensional, são:

- $S$ : conjunto de  $n$  caixas a serem consideradas, todas com dimensões  $(l \times w)$  ou  $(w \times l)$ ;
- $(l_i, w_i)$ : dimensões da caixa  $i$ , no conjunto  $S$  (note que se  $l_i = l$ , então  $w_i = w$ , e vice-versa);
- $(L, W)$ : dimensões do palete, comprimento e largura;
- $(X^0, Y^0)$ : canto inferior do palete no plano cartesiano ao longo dos eixos  $x$  e  $y$ ;
- $M$ : número suficientemente grande.

Note que  $(X^0, Y^0)$  é definido para que todas as caixas em  $S$  caibam entre  $(0, 0)$  e  $(X^0, Y^0)$ . O valor de  $n$  é de  $2 * \lfloor \frac{LW}{lw} \rfloor$ , onde metade deles, isto é,  $\lfloor \frac{LW}{lw} \rfloor$ , tem tamanho  $(l \times w)$  e a outra metade tem tamanho  $(w \times l)$ .

E as variáveis são:



- $(x_i, y_i)$ : variáveis de decisão (coordenadas  $x$  e  $y$  do canto inferior esquerdo da caixa  $i$ );
- $P_i$  : variável de decisão binária associada à  $i$ -ésima caixa do conjunto  $S$ . A caixa  $i$  é colocada no palete se  $P_i = 1$ . A caixa  $i$  é descartada se  $P_i = 0$ .

Temos então o seguinte modelo:

$$\text{Max } Z = \sum_{i=1}^n P_i \quad (1)$$

sujeito a

$$x_j - x_i \leq -l_j \quad \forall i < j \quad \text{ou} \quad (2)$$

$$x_i - x_j \leq -l_i \quad \forall i < j \quad \text{ou} \quad (3)$$

$$y_j - y_i \leq -w_j \quad \forall i < j \quad \text{ou} \quad (4)$$

$$y_i - y_j \leq -w_i \quad \forall i < j \quad \text{ou} \quad (5)$$

$$x_i \geq X^0 P_i \quad \forall i \quad (6)$$

$$y_i \geq Y^0 P_i \quad \forall i \quad (7)$$

$$x_i \leq (X^0 + L) - l_i \quad \forall i \quad (8)$$

$$y_i \leq (Y^0 + W) - w_i \quad \forall i \quad (9)$$

$$P_i \in \{0, 1\}$$

$$x_i, y_i \geq 0$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

As restrições (2) a (5) são restrições disjuntivas para evitar sobreposição das caixas. Para delimitar a colocação das caixas no palete tem-se as restrições (6) a (9). A função objetivo (1) maximiza o número total de caixas no palete. A solução deste modelo fornece o número máximo de caixas e suas localizações no palete.

As restrições disjuntivas de sobreposição podem ser convertidas para restrições padrões do tipo “e”, introduzindo-se 2 conjuntos de variáveis binárias:  $u_{i,j}^1, u_{i,j}^2$ . Tem-se, então, 4 possíveis combinações dessas variáveis binárias. Assim, as restrições (2) a (5) são equivalentes a (Tsai *et al.*, (1993)):

$$x_j - x_i \leq -l_j + M(u_{i,j}^1 + u_{i,j}^2) \quad \forall i < j \quad (10)$$

$$x_i - x_j \leq -l_i + M(1 - (u_{i,j}^2 - u_{i,j}^1)) \quad \forall i < j \quad (11)$$

$$y_j - y_i \leq -w_j + M(1 - (u_{i,j}^1 - u_{i,j}^2)) \quad \forall i < j \quad (12)$$

$$y_i - y_j \leq -w_i + M[2 - (u_{i,j}^1 + u_{i,j}^2)] \quad \forall i < j \quad (13)$$

$$u_{i,j}^1, u_{i,j}^2 \in \{0, 1\}$$

Desde que  $M$  seja suficientemente grande, o valor resultante do lado direito das equações está indicado somente como  $M$  na tabela 1. Nesta tabela, uma das 4 restrições originais não deverá mudar e o restante não terá efeito por causa do valor suficientemente grande do lado direito das equações.

variáveis binárias		valor das equações (lado direito)				equações de
$u_{i,j}^1$	$u_{i,j}^2$	eq. (10)	eq. (11)	eq. (12)	eq. (13)	restrições aplicáveis
0	0	$-l_j$	$M$	$M$	$M$	eq. (10)
0	1	$M$	$-l_i$	$M$	$M$	eq. (11)
1	0	$M$	$M$	$-w_j$	$M$	eq. (12)
1	1	$M$	$M$	$M$	$-w_i$	eq. (13)

Tabela 1: Restrições disjuntivas para o caso bidimensional

Para cada par  $(i, j)$  com  $i < j$  e  $M$  suficientemente grande, tem-se 4 possibilidades: se  $u_{i,j}^1 = u_{i,j}^2 = 1$ , a restrição que ficará válida é a restrição (13); se  $u_{i,j}^1 = u_{i,j}^2 = 0$ , a restrição que não será redundante é a restrição (10); se  $u_{i,j}^1 = 0$  e  $u_{i,j}^2 = 1$ , a restrição que ficará válida é a restrição (11); se  $u_{i,j}^1 = 1$  e  $u_{i,j}^2 = 0$ , a restrição que não será redundante é a restrição (12).

Note que o número de restrições deste modelo aumenta exponencialmente com o número de caixas  $n$ . Como ilustração, segue um exemplo didático desta adaptação:

Dados  $(L, W) = (5, 4)$ ,  $n = 4$ ,  $(l_1, w_1) = (3, 2)$ ,  $(l_2, w_2) = (2, 3)$ ,  $(l_3, w_3) = (3, 2)$  e  $(l_4, w_4) = (2, 3)$ , ou seja, seja  $(X^0, Y^0) = (\sum_i^4 l_i, \sum_{i=1}^4 w_i) = (10, 10)$  e  $M = \max\{X^0 + L, Y^0 + W\} = 15$ . Note que o par  $(X^0, Y^0)$  é calculado de uma forma simples e respeitando o princípio de que se deve ter a opção de colocar todas as caixas no espaço entre  $(0, 0)$  e  $(X^0, Y^0)$ . Já o número  $M$  foi definido de maneira a ser o menor número suficientemente grande para satisfazer a lógica das inequações (10)-(13).

Função objetivo:

$$\text{Max } + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \quad (14)$$

Restrições para evitar sobreposição:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq -2 + 15u_{1,2}^1 + 15u_{1,2}^2 \\ -x_1 + x_3 &\leq -3 + 15u_{1,3}^1 + 15u_{1,3}^2 \\ -x_1 + x_4 &\leq -2 + 15u_{1,4}^1 + 15u_{1,4}^2 \\ -x_2 + x_3 &\leq -3 + 15u_{2,3}^1 + 15u_{2,3}^2 \\ -x_2 + x_4 &\leq -2 + 15u_{2,4}^1 + 15u_{2,4}^2 \\ -x_3 + x_4 &\leq -2 + 15u_{3,4}^1 + 15u_{3,4}^2 \\ +x_1 - x_2 &\leq +12 + 15u_{1,2}^1 - 15u_{1,2}^2 \\ +x_1 - x_3 &\leq +12 + 15u_{1,3}^1 - 15u_{1,3}^2 \\ +x_1 - x_4 &\leq +12 + 15u_{1,4}^1 - 15u_{1,4}^2 \\ +x_2 - x_3 &\leq +13 + 15u_{2,3}^1 - 15u_{2,3}^2 \\ +x_2 - x_4 &\leq +13 + 15u_{2,4}^1 - 15u_{2,4}^2 \\ +x_3 - x_4 &\leq +12 + 15u_{3,4}^1 - 15u_{3,4}^2 \\ +y_1 - y_2 &\leq +12 - 15u_{1,2}^1 + 15u_{1,2}^2 \\ +y_1 - y_3 &\leq +13 - 15u_{1,3}^1 + 15u_{1,3}^2 \\ +y_1 - y_4 &\leq +12 - 15u_{1,4}^1 + 15u_{1,4}^2 \\ +y_2 - y_3 &\leq +13 - 15u_{2,3}^1 + 15u_{2,3}^2 \\ +y_2 - y_4 &\leq +12 - 15u_{2,4}^1 + 15u_{2,4}^2 \\ +y_3 - y_4 &\leq +12 - 15u_{3,4}^1 + 15u_{3,4}^2 \\ -y_1 + y_2 &\leq +28 - 15u_{1,2}^1 - 15u_{1,2}^2 \\ -y_1 + y_3 &\leq +28 - 15u_{1,3}^1 - 15u_{1,3}^2 \\ -y_1 + y_4 &\leq +28 - 15u_{1,4}^1 - 15u_{1,4}^2 \\ -y_2 + y_3 &\leq +27 - 15u_{2,3}^1 - 15u_{2,3}^2 \\ -y_2 + y_4 &\leq +27 - 15u_{2,4}^1 - 15u_{2,4}^2 \\ -y_3 + y_4 &\leq +28 - 15u_{3,4}^1 - 15u_{3,4}^2 \end{aligned}$$

Restrições para delimitar a colocação das caixas no palete:

$$\begin{aligned}
 x_1 &\geq +10P_1 \\
 x_2 &\geq +10P_2 \\
 x_3 &\geq +10P_3 \\
 x_4 &\geq +10P_4 \\
 y_1 &\geq +10P_1 \\
 y_2 &\geq +10P_2 \\
 y_3 &\geq +10P_3 \\
 y_4 &\geq +10P_4 \\
 -x_1 &\geq -12 \\
 -x_2 &\geq -13 \\
 -x_3 &\geq -12 \\
 -x_4 &\geq -13 \\
 -y_1 &\geq -12 \\
 -y_2 &\geq -11 \\
 -y_3 &\geq -12 \\
 -y_4 &\geq -11
 \end{aligned}$$

O valor da função objetivo encontrada pelo pacote GAMS/CPLEX ao resolver este modelo é 3, em que  $P_1 = P_3 = P_4 = 1$  e  $P_2 = 0$ . A localização no palete das caixas é  $(x_1, y_1) = (10, 12)$ ,  $(x_3, y_3) = (10, 10)$  e  $(x_4, y_4) = (13, 10)$ . O valor de  $u^1$  e  $u^2$  é  $u_{1,3}^1 = u_{2,3}^1 = 1, u_{1,4}^2 = u_{2,3}^2 = u_{2,4}^2, u_{3,4}^2 = 1$ , e o restante é zero. A figura 8 ilustra a solução encontrada.

Outras mudanças no modelo original foram testadas: (i) PCP do produtor tridimensional e (ii) PCP do distribuidor bidimensional restrito.

(i) PCP do produtor para o caso tridimensional

As variáveis e os parâmetros que mudam para este caso são:

- $(l_i, w_i, h_i)$ : dimensões da caixa  $i$ , no conjunto  $S$ ;
- $(L, W, H)$ : dimensões do palete, comprimento, largura e altura;
- $(X^0, Y^0, Z^0)$ : canto inferior esquerdo do palete no plano cartesiano ao longo dos eixos



Figura 8: exemplo didático adaptado de Tsai *et al.* (1993)

$x$ ,  $y$  e  $z$ ;

-  $(x_i, y_i, z_i)$ : variáveis de decisão (coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  do canto inferior esquerdo da caixa  $i$ );

-  $u_{i,j}^3$ : conjunto de variáveis binárias.

A função objetivo fica então da seguinte forma:

$$\text{Max } Z = \sum_{i=1}^n P_i \quad (15)$$

E as restrições são da forma:

$$x_j - x_i \leq -l_j + M(u_{i,j}^2 + u_{i,j}^3) \quad \forall i < j \quad (16)$$

$$x_i - x_j \leq -l_i + M(u_{i,j}^1 + u_{i,j}^3) \quad \forall i < j \quad (17)$$

$$y_j - y_i \leq -w_j + M(u_{i,j}^1 + u_{i,j}^2) \quad \forall i < j \quad (18)$$

$$y_i - y_j \leq -w_i + M[2 - (u_{i,j}^1 + u_{i,j}^2)] \quad \forall i < j \quad (19)$$

$$z_j - z_i \leq -h_j + M[2 - (u_{i,j}^2 + u_{i,j}^3)] \quad \forall i < j \quad (20)$$

$$z_i - z_j \leq -h_i + M[2 - (u_{i,j}^1 + u_{i,j}^3)] \quad \forall i < j \quad (21)$$

$$x_i \geq X^0 P_i \quad \forall i \quad (22)$$

$$y_i \geq Y^0 P_i \quad \forall i \quad (23)$$

$$z_i \geq Z^0 P_i \quad \forall i \quad (24)$$

$$x_i \leq (X^0 + L) - l_i \quad \forall i \quad (25)$$

$$y_i \leq (Y^0 + W) - w_i \quad \forall i \quad (26)$$

$$z_i \leq (Z^0 + H) - h_i \quad \forall i \quad (27)$$

$$1 \leq u_{i,j}^1 + u_{i,j}^2 + u_{i,j}^3 \leq 2 \quad (28)$$

$$u_{i,j}^1, u_{i,j}^2, u_{i,j}^3 \in \{0, 1\}.$$

$$P_i \in \{0, 1\}$$

$$x_i, y_i, z_i \geq 0$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

As restrições disjuntivas de sobreposição podem ser convertidas para restrições padrões do tipo “e”, introduzindo-se, agora, 3 conjuntos de variáveis binárias:  $u_{i,j}^1, u_{i,j}^2, u_{i,j}^3$ . Tem-se, então, 6 possíveis combinações dessas variáveis binárias (Tsai *et al.*, 1993).

Desde que  $M$  seja suficientemente grande, o valor resultante do lado direito das equações está indicado somente como  $M$  na tabela 2. Note que para os últimos dois casos da tabela 2, as restrições seriam inválidas; por isso foi adicionada a restrição (28) no modelo. Convém salientar que este modelo não garante que a solução tridimensional corresponde a um carregamento estável.

variáveis binárias			valor das equações (lado direito)						equações de
$u_{i,j}^1$	$u_{i,j}^2$	$u_{i,j}^3$	eq.(16)	eq.(17)	eq.(18)	eq.(19)	eq.(20)	eq.(21)	restrições aplicáveis
1	0	0	$-l_j$	$M$	$M$	$M$	$M$	$M$	eq. (16)
0	1	0	$M$	$-l_i$	$M$	$M$	$M$	$M$	eq. (17)
0	0	1	$M$	$M$	$-w_j$	$M$	$M$	$M$	eq. (18)
1	1	0	$M$	$M$	$M$	$-w_i$	$M$	$M$	eq. (19)
0	1	1	$M$	$M$	$M$	$M$	$-h_j$	$M$	eq. (20)
1	0	1	$M$	$M$	$M$	$M$	$M$	$-h_i$	eq. (21)
1	1	1	$M$	$M$	$M$	$-w_i$	$-h_j$	$-h_i$	(19), (20) e (21)
0	0	0	$-l_j$	$-l_i$	$-w_j$	$M$	$M$	$M$	(16), (17) e (18)

Tabela 2: Restrições disjuntivas para o caso tridimensional

(ii) PCP do distribuidor para o caso bidimensional restrito

Os parâmetros do modelo para o PCP do distribuidor, caso bidimensional, são:

- $S$ : conjunto de  $n$  caixas a serem consideradas;
- $(l_i, w_i)$ : dimensões da caixa  $i$ , no conjunto  $S$  (note que se  $l_i = l$ , então  $w_i = w$ , e vice-versa);
- $b_i$ : quantidade de caixas  $i$  disponível;
- $(L, W)$ : dimensões do palete, comprimento e largura;
- $(X^0, Y^0)$ : canto inferior do palete no plano cartesiano ao longo dos eixos  $x$  e  $y$ ;
- $M$ : número suficientemente grande.

E as variáveis são:

- $(x_i, y_i)$ : variáveis de decisão (coordenadas  $x$  e  $y$  do canto inferior esquerdo da caixa  $i$ );
- $P_i$  : variável de decisão binária associada à  $i$ -ésima caixa do conjunto  $S$ . A caixa  $i$  é colocada no palete se  $P_i = 1$ . A caixa  $i$  é descartada se  $P_i = 0$ .

A restrição de número máximo de cada tipo de caixas que se tem disponível é adicionada ao modelo. Consideramos 2 tipos de caixas. Suponha que temos  $b_1 = 2$  caixas  $(l_1, w_1)$  e  $b_2 = 1$  caixa  $(l_2, w_2)$ . Ao colocar esses dados, temos que duplicar este número. É importante observar que apesar de termos 6 caixas ( $n = 6$ ) escritas nos dados iniciais do modelo, estão realmente disponíveis apenas 3 caixas.

Dado que as caixas 1 e 5 têm dimensões  $(l_1, w_1)$ , as caixas 2 e 6 têm dimensões  $(w_1, l_1)$ , a caixa 3 tem dimensões  $(l_2, w_2)$  e a caixa 4 tem dimensões  $(w_2, l_2)$ . As restrições

$$P_1 + P_2 + P_5 + P_6 \leq b_1 = 2 \quad (29)$$

$$P_3 + P_4 \leq b_2 = 1 \quad (30)$$

são então adicionados ao problema.

Temos então o seguinte modelo:

$$\text{Max } Z = \sum_{i=1}^n P_i \quad (31)$$

sujeito a

$$x_j - x_i \leq -l_j + M(u_{i,j}^1 + u_{i,j}^2) \quad i < j \quad (32)$$

$$x_i - x_j \leq -l_i + M(1 - (u_{i,j}^2 - u_{i,j}^1)) \quad i < j \quad (33)$$

$$y_j - y_i \leq -w_j + M(1 - (u_{i,j}^1 - u_{i,j}^2)) \quad i < j \quad (34)$$

$$y_i - y_j \leq -w_i + M[2 - (u_{i,j}^1 + u_{i,j}^2)] \quad i < j \quad (35)$$

$$x_i \geq X^0 P_i \quad \forall i \quad (36)$$

$$y_i \geq Y^0 P_i \quad \forall i \quad (37)$$

$$x_i \leq (X^0 + L) - l_i \quad \forall i \quad (38)$$

$$y_i \leq (Y^0 + W) - w_i \quad \forall i \quad (39)$$

$$P_1 + P_2 + P_5 + P_6 \leq b_1 \quad (40)$$

$$P_3 + P_4 \leq b_2 \quad (41)$$

$$\begin{aligned}
u_{i,j}^1, u_{i,j}^2, P_i &\in \{0, 1\} \\
x_i, y_i &\geq 0 \\
i &= 1, 2, \dots, n \\
j &= 1, 2, \dots, n
\end{aligned}$$

As restrições (32) a (35) são restrições disjuntivas para evitar sobreposição das caixas. Para delimitar a colocação das caixas no palete tem-se as restrições (36) a (39). A função objetivo (31) maximiza o número total de caixas no palete. As restrições (40) e (41) determinam o número máximo de cada tipo de caixas que se tem disponível. A solução deste modelo fornece o número máximo de caixas e suas localizações no palete.

### 3.2 Formulação de Chen *et al.* (1995)

Chen *et al.* (1995) consideram o problema de carregamento tridimensional de contêineres com caixas de tamanho não uniforme e o formulam como um problema de programação mista 0-1, considerando múltiplos contêineres, vários tamanhos de caixas, a orientação e a sobreposição das caixas. As soluções tridimensionais não têm garantia de serem carregamentos estáveis.

Os parâmetros do modelo para o caso bidimensional são:

- $N$ : número total de caixas a serem empacotadas;
- $m$ : número total de contêineres disponíveis;
- $M$ : número suficientemente grande;
- $(L_j, W_j)$ : dimensões do contêiner  $j$ , comprimento e largura;
- $(p_i, q_i)$ : dimensões da caixa  $i$ .

E as variáveis são:

- $s_{ij}$ : variável binária, é igual a 1 se a caixa  $i$  está localizada no contêiner  $j$  e é igual a 0, caso contrário;
- $n_j$ : variável binária, é igual a 1 se o contêiner  $j$  é usado e é igual a 0 caso contrário;
- $(x_i, y_i)$ : variáveis de decisão (coordenadas  $x$  e  $y$  do canto inferior esquerdo frontal da caixa  $i$ );
- $(l_{xi}, l_{yi})$ : variáveis binárias indicando se o comprimento da caixa  $i$  é paralelo ao eixo  $X$  ou  $Y$  (isto é, o valor de  $l_{xi}$  é igual a 1 se o comprimento da caixa  $i$  é paralelo ao eixo  $X$ , caso contrário é 0);



-  $(w_{xi}, w_{yi})$ : variáveis binárias indicando se a largura da caixa  $i$  é paralelo ao eixo  $X$  ou  $Y$  (isto é, o valor de  $w_{xi}$  é igual a 1 se a largura da caixa  $i$  é paralela ao eixo  $X$ , caso contrário é 0);

-  $a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}, d_{ik}$ : variáveis binárias definidas para indicar a localização das caixas em relação umas às outras. A variável  $a_{ik}$  é igual a 1 se a caixa  $i$  está do lado esquerdo da caixa  $k$ . Similarmente, as variáveis  $b_{ik}, c_{ik}, d_{ik}$  definem se a caixa  $i$  está do lado direito, atrás ou em frente da caixa  $k$ , respectivamente. Estas variáveis são necessárias e definidas apenas quando  $i < k$ .

O programa 0-1 para o caso bidimensional é formulado a seguir:

$$\text{Min } \sum_{j=1}^m L_j W_j n_j - \sum_{i=1}^N p_i q_i \quad (42)$$

sujeito a

$$x_i + p_i \cdot l_{xi} + q_i \cdot w_{xi} \leq x_k + (1 - a_{ik}) \cdot M \quad \forall i, k, i < k, \quad (43)$$

$$x_k + p_k \cdot l_{xk} + q_k \cdot w_{xk} \leq x_i + (1 - b_{ik}) \cdot M \quad \forall i, k, i < k, \quad (44)$$

$$y_i + q_i \cdot w_{yi} + p_i \cdot l_{yi} \leq y_k + (1 - c_{ik}) \cdot M \quad \forall i, k, i < k, \quad (45)$$

$$y_k + q_k \cdot w_{yk} + p_k \cdot l_{yk} \leq y_i + (1 - d_{ik}) \cdot M \quad \forall i, k, i < k, \quad (46)$$

$$a_{ik} + b_{ik} + c_{ik} + d_{ik} \geq s_{ij} + s_{kj} - 1 \quad \forall i, k, j, i < k, \quad (47)$$

$$\sum_{j=1}^m s_{ij} = 1 \quad \forall i, \quad (48)$$

$$\sum_{i=1}^N s_{ij} \leq M \cdot n_j \quad \forall j, \quad (49)$$

$$x_i + p_i \cdot l_{xi} + q_i \cdot w_{xi} \leq L_j + (1 - s_{ij}) \cdot M \quad \forall i, j, \quad (50)$$

$$y_i + q_i \cdot w_{yi} + p_i \cdot l_{yi} \leq W_j + (1 - s_{ij}) \cdot M \quad \forall i, j, \quad (51)$$

$$l_{xi}, l_{yi}, w_{xi}, w_{yi}, a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}, d_{ik}, s_{ij}, n_j \in \{0, 1\},$$

$$x_i, y_i \geq 0$$

As restrições (43) a (47) são para evitar a sobreposição das caixas. Para garantir que cada caixa esteja associada a só um contêiner e quais os contêineres que serão utilizados, são usadas as restrições (48) e (49). Para delimitar a colocação das caixas no palete temos as restrições (50) e (51). A função objetivo deste problema minimiza o espaço total não utilizado dos contêineres utilizados. A solução fornece quais caixas serão

empacotadas em quais contêineres e também fornece suas localizações no contêiner.

Como as variáveis  $l_{xi}, l_{yi}, w_{xi}, w_{yi}$  são dependentes, então existe uma relação entre elas, o que faz com que o modelemos com 5 variáveis a menos  $(l_{yi}, w_{xi}, w_{zi})$ , o que resulta na diminuição do tamanho do problema.

Oliveira (2004) mostrou que as formulações de Tsai *et al.* (1993) e Chen *et al.* (1995) estão relacionadas.

### 3.3 Formulação de Beasley (1985b)

O modelo de corte bidimensional de Beasley (1985b) pode ser adaptado ao problema de carregamentos de paletes do produtor, como visto em Oliveira (2004). Considere que  $P$  e  $Q$  são o número mínimo e máximo de caixas por camada respectivamente, a serem colocadas sobre o palete ( $0 \leq P \leq Q$ );  $(l, w)$  são as dimensões (comprimento e largura) da caixa;  $(L, W)$  são as dimensões (comprimento e largura) do palete. O palete será carregado com caixas iguais.

Admitimos que  $L, W, l$  e  $w$  são números inteiros, e que  $l \geq w$  e  $l \leq \min\{L, W\}$ . Por simplicidade, definimos  $(l_1, w_1) = (l, w)$  e  $(l_2, w_2) = (w, l)$ , assim,  $(l_i, w_i), i = 1, 2$  correspondem ao comprimento e largura da face de uma caixa com orientação  $i$ . O problema consiste em encontrar um arranjo de caixas em camadas horizontais tal que a utilização da superfície do palete seja a máxima possível.

A origem do sistema cartesiano é no canto inferior esquerdo do palete. As caixas podem ser colocadas em várias posições ao longo do comprimento  $L$  e  $W$  do palete. Sejam:

$$X = \{p | 0 \leq p \leq L - w, \text{inteiro}\} \text{ e}$$

$$Y = \{q | 0 \leq q \leq W - w, \text{inteiro}\}$$

os conjuntos das coordenadas  $(p, q)$ , respectivamente, para se colocar o canto inferior esquerdo da face  $(l, w)$  de uma caixa dentro do palete.

Sem perda de generalidade, podemos restringir os conjuntos  $X$  e  $Y$  para os conjuntos normais:

$$X = \{p | p = \sum_{i=1}^2 l_i b_i, 0 \leq p \leq L - w, b_i \geq 0 \text{ e inteiro}, i = 1, 2\} \text{ e}$$

$$Y = \{q | q = \sum_{i=1}^2 w_i b_i, 0 \leq q \leq W - w, b_i \geq 0 \text{ e inteiro}, i = 1, 2\}$$

Definimos a função  $a$  que é útil para descrever restrições de sobreposição de caixas sobre o palete e que pode ser computada com antecedência para cada posição  $(p, q)$ , cada posição  $(r, s)$  e cada orientação  $i$  onde

$p \in X$  tal que  $p \leq L - l_i$ ,  
 $q \in Y$  tal que  $q \leq W - w_i$ ,  
 $r \in X, s \in Y$  e  $i = 1, 2$ .

Assim, a função  $a$  é descrita como:

$a_{ipqrs} = 1$ , se  $0 \leq p \leq r \leq p + l_i - 1 \leq L - 1$  e  $0 \leq q \leq s \leq q + w_i - 1 \leq W - 1$ .

Caso contrário,  $a_{ipqrs} = 0$ .

Note que  $a_{ipqrs} = 1$  indica que a coordenada  $(r, s)$  fica coberta ao se colocar uma caixa com orientação  $i$  na coordenada  $(p, q)$  do palete.

Para todo  $p \in X$  tal que  $p \leq L - l_i$ ,  $q \in Y$  tal que  $q \leq W - w_i$ ,  $r \in X, s \in Y$  e  $i = 1, 2$ , definimos a variável de decisão  $x_{ipq}$ :

$x_{ipq} = 1$  se uma caixa é colocada na posição  $(p, q)$  do palete, com orientação  $i$ .

Caso contrário,  $x_{ipq} = 0$  (figura 9).

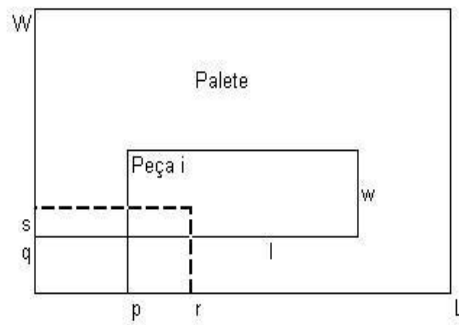


Figura 9: posição  $(r, s)$  não permitida em função da colocação de uma caixa na posição  $(p, q)$  com orientação  $i$ .

O PCP do produtor pode então ser formulado pelo seguinte problema linear 0-1, que é um caso particular do modelo proposto por Beasley (1985b):

$$\text{Max} \sum_{i=1}^2 \sum_{\{p \in X / p \leq L - l_i\}} \sum_{\{q \in Y / q \leq W - w_i\}} X_{ipq} \quad (52)$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^2 \sum_p \sum_q a_{ipqrs} X_{ipq} \leq 1 \quad \forall r \in X, s \in Y \quad (53)$$

$$P \leq \sum_{i=1}^2 \sum_p \sum_q X_{ipq} \leq Q \quad (54)$$

$$\begin{aligned}
x_{ipq} &\in \{0, 1\} \\
p &\in X \text{ tal que } p \leq L - l_i \\
q &\in Y \text{ tal que } q \leq W - w_i \\
i &= 1, 2
\end{aligned}$$

A função objetivo maximiza o número de caixas colocadas sobre o palete. A primeira restrição garante que cada par  $(r, s)$  seja ocupado por, no máximo, uma caixa e, desta maneira, evita sobreposição no arranjo de caixas. A segunda restrição garante que o número de caixas arranjadas esteja dentro do intervalo  $[P, Q]$ . para os casos em que se procura uma solução não homogênea, define-se  $P = 0$  e  $Q$  é um limitante superior para o problema.

Um exemplo didático é mostrado a seguir:

Seja  $(L, W) = (5, 4)$ ,  $(l_1, w_1) = (3, 2)$  e  $(l_2, w_2) = (2, 3)$  As posições onde são possíveis colocar o canto inferior esquerdo das caixas são dadas pelos conjuntos  $X$  e  $Y$ :  $X = \{0, 1, 2, 3\}$  e  $Y = \{0, 1, 2\}$ .

Consideramos  $(p, q)$  a posição onde colocamos o canto inferior esquerdo da caixa, dentro do palete  $(L, W)$ , com  $p \in X$  e  $q \in Y$ .

Dado  $X = \{p/p = \sum_{i=1}^2 l_i b_i, 0 \leq p \leq L - w, b_i \geq 0 \text{ e inteiro}, i = 1, 2\}$  temos que  $X = \{p/p = 3b_1 + 2b_2, 0 \leq p \leq 5 - 2, b_i \geq 0 \text{ e inteiro}, i = 1, 2\}$ . Portanto,  $X = \{0, 2, 3\}$  é o conjunto normalizado.

Dado  $Y = \{q/q = \sum_{i=1}^2 w_i b_i, 0 \leq q \leq W - w, b_i \geq 0 \text{ e inteiro}, i = 1, 2\}$  temos que  $Y = \{q/q = 2b_1 + 3b_2, 0 \leq q \leq 4 - 2, b_i \geq 0 \text{ e inteiro}, i = 1, 2\}$ . Portanto,  $Y = \{0, 2\}$  é o conjunto normalizado.

Para  $i = 1$  temos que  $p \leq L - l_1$  e  $p \in X = \{0, 2, 3\}$ . Assim,  $p \leq 5 - 3 = 2$ . Portanto,  $p = \{0, 2\}$ . Para  $i = 2$  temos que  $p \leq L - l_2$  e  $p \in X = \{0, 2, 3\}$ . Assim,  $p \leq 5 - 2 = 3$ . Portanto,  $p = \{0, 2, 3\}$ .

Para  $i = 1$  temos que  $q \leq W - w_1$  e  $q \in Y = \{0, 2\}$ . Assim,  $q \leq 4 - 2 = 2$ . Portanto,  $q = \{0, 2\}$ . Para  $i = 2$  temos que  $q \leq W - w_2$  e  $q \in Y = \{0, 2\}$ . Assim,  $q \leq 4 - 3 = 1$ . Portanto,  $q = \{0\}$ .

Com isso, os valores da função  $a$  estão definidos na tabela 1.

Como  $r \in X$ ,  $s \in Y$ , temos que  $r = \{0, 2, 3\}$ ,  $s = \{0, 2\}$ . Temos então, para este exemplo, a seguinte formulação:

$$\text{Max } x_{100} + x_{102} + x_{120} + x_{122} + x_{200} + x_{220} + x_{230}$$

sujeito a

Caso	$p$	$q$	$i$
$a$	0	0	1
$b$	0	0	2
$c$	2	0	1
$d$	2	0	2
$e$	3	0	2
$f$	0	2	1
$g$	2	2	1

Tabela 3: Restrições de sobreposição das caixas

para  $(r, s) = (0, 0)$ :  $x_{100} + x_{200} \leq 1$

para  $(r, s) = (0, 2)$ :  $x_{102} + x_{200} \leq 1$

para  $(r, s) = (2, 0)$ :  $x_{100} + x_{120} + x_{220} \leq 1$

para  $(r, s) = (2, 2)$ :  $x_{102} + x_{122} + x_{220} \leq 1$

para  $(r, s) = (3, 0)$ :  $x_{120} + x_{220} + x_{230} \leq 1$

para  $(r, s) = (3, 2)$ :  $x_{122} + x_{220} + x_{230} \leq 1$

Para o limitante inferior  $P = 0$  e o limitante superior  $Q = \lfloor \frac{LW}{lw} \rfloor = 3$ :  $x_{100} + x_{102} + x_{120} + x_{122} + x_{200} + x_{230} \leq 3$ , em que  $x_{ipq} \in \{0, 1\}$

Este problema foi resolvido no pacote GAMS/CPLEX e a solução ótima encontrada foi:  $x_{100} = x_{102} = x_{230} = 1$  e  $x_{122} = x_{200} = x_{220} = 0$  e  $FO = 3$ . Esta solução está ilustrada na figura 10.

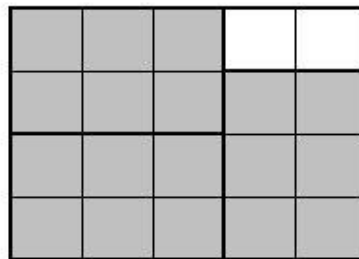


Figura 10: solução do exemplo do Beasley (1985b)

Note que tanto a solução encontrada usando a formulação de Beasley (1985b), quanto a encontrada usando o modelo adaptado de Tsai *et al.* (1993), são ótimas para o PCP do produtor.

### 3.4 Formulação de Martins (2002)

Martins (2002) propõe um modelo similar a Chen *et al.* (1995), ou seja, considera a posição relativa entre itens para evitar a sobreposição, porém resolve modelos em duas dimensões. Ele usa este modelo para verificar como se comportam algumas técnicas de modelagem no desempenho computacional.

Seja  $x_i, i \in I$ , a posição horizontal do canto esquerdo do item dentro do contêiner e seja  $y_i, i \in I$ , a posição vertical do lado inferior do item dentro do contêiner, sendo a origem no canto inferior esquerdo do contêiner. Neste modelo permite-se uma rotação dos itens de  $90^\circ$ .

#### a. Indicando se um item é empacotado ou não

Utiliza-se variáveis binárias  $ln_i$ , para cada item  $i \in I$ , para indicar se o item  $i$  é colocado no contêiner.

#### b. Indicando rotação

Rotacionar um item significa que as dimensões são trocadas: comprimento se torna largura e vice-versa. Para indicar esta rotação usa-se uma variável  $r_i$ . Esta variável será 1 se o item é rotacionado. Assim, o canto superior direito do item  $i$ , dentro do contêiner, é dado por:

$$x_i + l_i(r_i) + w_i(1 - r_i) \tag{55}$$

$$y_i + l_i(1 - r_i) + w_i(r_i) \tag{56}$$

#### c. Todos os itens empacotados estão totalmente dentro do contêiner

Temos as restrições de não negatividade em  $x_i$  e  $y_i$ , e limitante superior para a posição do canto superior direito do item dentro do contêiner:

$$x_i + l_i(1 - r_i) + w_i(r_i) \leq L \tag{57}$$

$$y_i + l_i(r_i) + w_i(1 - r_i) \leq W \tag{58}$$

$$i \in I$$

#### d. Restrição para a não sobreposição dos itens

Para dois itens se sobreporem, digamos  $i$  e  $j$ , quatro condições têm que acontecer simultaneamente, como mostra a figura 11:

- O lado direito de  $i$  deve estar à direita do lado esquerdo de  $j$ ;

- O lado superior de  $j$  deve estar acima do lado inferior  $i$ ;
- O lado direito de  $j$  deve estar à direita do lado esquerdo de  $i$ ;
- O lado superior de  $i$  deve estar acima do lado inferior  $j$ .

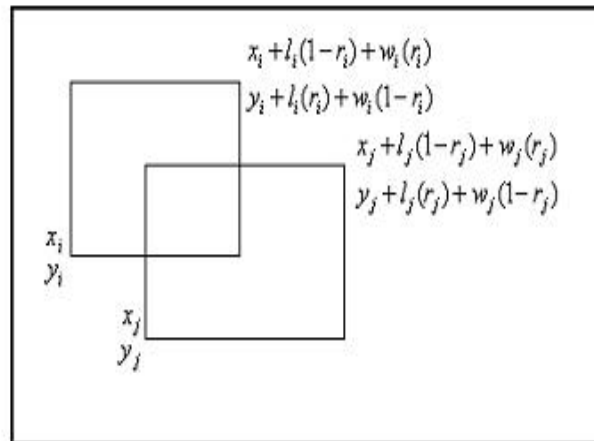


Figura 11: sobreposição

Quando três ou menos condições destas acima ocorrem, os itens não se sobrepõem. São usados quatro conjuntos de variáveis binárias,  $px_{ij}$ ,  $px_{ji}$ ,  $py_{ij}$  e  $py_{ji}$ , para representar o resultado de cada uma das quatro comparações, entre os itens  $i$  e  $j$ , com 1 representando verdadeiro e 0 falso.

Desde que  $L$  e  $W$  são limitantes superiores na horizontal (vertical) da distância entre os itens dentro do contêiner, define-se o seguinte conjunto de restrições para o problema:

$$[x_i + l_i(1 - r_i) + w_i(r_i)] - x_j \leq L px_{ij}, \quad \forall i \in I, \forall j \in I, i \neq j \quad (59)$$

$$[y_i + l_i(r_i) + w_i(1 - r_i)] - y_j \leq W py_{ij}, \quad \forall i \in I, \forall j \in I, i \neq j \quad (60)$$

$$px_{ij} + py_{ij} + px_{ji} + py_{ji} \leq 5 - ln_i - ln_j, \quad \forall i \in I, j \in I, j > i \quad (61)$$

A restrição (59) garante que o lado direito do item  $i$  estará à direita do lado esquerdo do item  $j$ , somente se  $px_{ij} = 1$ . A restrição (60) é necessária para comparações da vertical. A restrição (61) é a restrição de cardinalidade, e assegura que, pelo menos, três variáveis binárias têm valor 1.

### e. Problema Inteiro Misto

Formulação:

$$\text{Max} \sum_{i \in I} v_i l n_i \quad (62)$$

sujeito a

$$x_i + l_i(1 - r_i) + w_i(r_i) \leq L \quad \forall i \in I \quad (63)$$

$$y_i + l_i(r_i) + w_i(1 - r_i) \leq W \quad \forall i \in I \quad (64)$$

$$[x_i + l_i(1 - r_i) + w_i(r_i)] - x_j \leq L p x_{ij}, \quad \forall i \in I, \forall j \in I \quad (65)$$

$$[y_i + l_i(r_i) + w_i(1 - r_i)] - y_j \leq W p y_{ij}, \quad \forall i \in I, \forall j \in I \quad (66)$$

$$p x_{ij} + p y_{ij} + p x_{ji} + p y_{ji} \leq 5 - l n_i - l n_j, \quad \forall i \in I, j \in I, j > i \quad (67)$$

$$l n_i, r_i \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in I$$

$$p x_{ij}, p y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in I, \forall j \in I$$

$$x_i, y_i \geq 0, \quad \forall i \in I$$

em que

$i, j$ : índices dos itens a serem empacotados,  $i \in I$  e  $j \in I$ .

Parâmetros:

$L$ : comprimento do contêiner;

$W$ : largura do contêiner;

$v_i$ : valor do item  $i$ ,  $i \in I$ ;

$l_i$ : comprimento do item  $i$ ,  $i \in I$ ;

$w_i$ : largura do item  $i$ ,  $i \in I$ .

Variáveis:

$p x_{ij}$ : igual a 1 se o lado direito do item  $j$  está à direita do lado esquerdo do item  $i$ ; igual a 0, caso contrário;

$p y_{ij}$ : igual a 1 se o topo do item  $j$  está acima da parte inferior do item  $i$ ; igual a 0, caso contrário;

$l n_i$ : igual a 1 se o item  $i$  está dentro do contêiner; igual a 0, caso contrário;

$r_i$ : igual a 1 se o item  $i$  é rotacionado; igual a 0, caso contrário;

$x_i$ : posição horizontal do lado esquerdo do item  $i$  no contêiner;

$y_i$ : posição vertical da parte inferior do item  $i$  no contêiner.



A função objetivo (62) maximiza o valor dos itens dentro do contêiner. As restrições (63) e (64) limitam o topo e o lado direito do contêiner para cada item. As restrições (65) e (66) são usadas para verificar as posições relativas dos itens dentro do contêiner. Se o item não é empacotado, não nos preocuparemos com o valor de  $px_{ij}$  e  $py_{ij}$ . As restrições (67) garantem a não sobreposição entre dois itens somente se ambos são empacotados.

Martins (2002) observa que o *solver* (Cplex 6.6) é capaz de resolver todos os exemplos da literatura testados, porém, em muitos deles, o tempo computacional necessário é grande. Por causa disso, algumas mudanças são testadas no modelo com o objetivo de reduzir a simetria e obter relaxações lineares mais fortes do problema inteiro misto. Martins introduz as seguintes restrições:

- A área coberta por todos os itens empacotados não pode ser maior que a área do contêiner. Essa restrição torna a relaxação linear mais forte.
- Tipo de item: determina a ordem em que os itens serão empacotados e leva em consideração quando tem dois itens com dimensões iguais.
- Força o item de maior ordem a ser empacotado em uma posição que tenha a maior soma das coordenadas.
- Força a soma de duas das quatro variáveis binárias,  $px_{ij}$ ,  $px_{ji}$ ,  $py_{ij}$  e  $py_{ji}$ , em cada dimensão, ser ao menos 1.
- Se dois itens tem o comprimento (ou largura) maior que a metade do comprimento (ou largura) do contêiner, e ambos são empacotados, então esses itens tem que ser colocados lado a lado na largura (ou comprimento). Neste caso, a soma de todos os itens empacotados, com comprimento (ou largura) maior que  $X/2$  (ou  $Y/2$ ), tem que ser menor que a largura (ou comprimento) do contêiner.
- O item com maior valor que for empacotado deverá estar no primeiro quadrante do contêiner.

Resolvendo com estas restrições, Martins (2002) percebeu que as soluções foram encontradas mais rapidamente quando os problemas são orientados. Foi feito então mais alguns ajustes na formulação. O indicador de rotação é inserido no problema e a restrição

de itens “grandes” é removida. É incluída também uma restrição que só permite a rotação de um item se ele é empacotado.

O *solver* foi capaz de resolver na otimalidade, dentro do tempo estipulado, 9 dos 14 exemplos do modelo ortogonal, e nos 5 exemplos que não foram resolvidos na otimalidade, o *gap* foi de menos de 10%.

Para PCE's existem vários métodos de solução que são normalmente usados. Por exemplo, no artigo de Beasley (1985) foi explorado o uso de relaxação Lagrangeana combinada com relaxação *surrogate*. Existem também outros artigos explorando heurísticas, metaheurísticas, geração de colunas, entre outros (ver, por exemplo, Pureza e Morabito (2003, 2006) e Álvarez-Valdés *et al.* (2007), e as referências no próximo capítulo).

Como já citado anteriormente, uma das motivações da escolha do método de decomposição de Benders é ele ter tido bons resultados quando aplicado a vários outros problemas; vide, por exemplo, Geoffrion e Graves (1974), Magnanti *et al.* (1986), Cordeau *et al.* (2000, 2001), Cai *et al.* (2001), Heragu e Chen (1998), Miranda (2004) e de Randazzo e Luna (2001). Outra motivação para a escolha do método é que, até onde temos conhecimento, ele nunca foi aplicado nos problemas de carregamento de paletes.

## 4 Métodos de Solução para os Problemas do Carregamento de Paletes do Produtor e do Distribuidor e Decomposição de Benders

### 4.1 Revisão dos Métodos da Literatura

Hodgson (1982), Sweeney e Parternoster (1992), Dyckhoff e Finke (1992), Martello (1994), Cheng *et al.* (1994), Bischoff e Waescher (1995), Dyckhoff *et al.* (1997), Arenales *et al.* (1999), Wang e Waescher (2002), Hifi (2002) e ESICUP (2008) são exemplos de artigos e edições especiais em que uma revisão do problema do carregamento de paletes pode ser encontrada.

Os modelos que descrevem problemas reais como os ilustrados no capítulo anterior são complexos, contendo várias restrições e variáveis. Como estes problemas são NP-difíceis, resolvê-los encontrando uma solução suficientemente boa e rápida pode ser uma tarefa difícil (GAREY e JOHNSON, 1979; ARENALES *et al.*, 1999).

Dowland (1987), Tsai *et al.* (1993) e Battacharya *et al.* (1998) apresentaram métodos exatos explorando conhecimentos específicos do problema para resolver o PCP do produtor. Battacharya *et al.* (1998) propuseram um algoritmo de busca em árvore baseado em empacotar caixas não individuais, mas em *partições eficientes* (isto é, combinações lineares das dimensões das caixas em que as sobras são menores que a menor dimensão das caixas que podem ser empacotadas) do problema parcial, em cada passo da busca. Martins (2002) mostrou que o método proposto por Battacharya *et al.* (1998) não é exato. Outro método exato baseado em relaxação lagrangiana e surrogate foi apresentado por Oliveira e Morabito (2006).

Devido à dificuldade com os métodos exatos, diversas heurísticas têm sido propostas na literatura para resolver o PCP do produtor e do distribuidor. Exemplos de heurísticas para o PCP do produtor podem ser encontradas em Steudel (1979), Bischoff e Dowland (1982), Dowland (1993), Nelissen (1994, 1995), Arenales e Morabito (1995), Morabito e Morales (1998, 1999), Farago e Morabito (2000), Martins (2002), Lins *et al.* (2003), Pureza e Morabito (2003, 2006), Birgin *et al.* (2005, 2008). Nos trabalhos de Cecílio (2003) e Cecílio e Morabito (2004) foram estudadas heurísticas para o problema de carregamento tridimensional de cargas dentro de contêineres. Outras referências podem ser encontradas em Araújo (2006). Já exemplos de heurísticas para o PCP do distribuidor podem ser encontradas em Bischoff *et al.* (1995), Bischoff e Ratcliff (1995), Morabito e

Arenales (1997), Terno *et al.* (2000), entre outros.

## 4.2 Decomposição de Benders

Benders (1962) propõe um método de particionamento para resolução de problemas de programação inteira mista linear. A abordagem de Benders define um algoritmo de relaxação que particiona o problema original em dois problemas mais simples: o problema mestre e o subproblema (Benders, 1962; Costa, 2005).

O subproblema é o problema linear obtido quando se fixam as variáveis inteiras no problema original. O problema mestre se forma com um subconjunto das variáveis originais e as restrições associadas. O algoritmo resolve cada um dos dois problemas iterativamente, um de cada vez. A cada iteração, uma nova restrição, conhecida como corte de Benders, é adicionada ao problema mestre. Quando o problema original é de minimização, a resolução do novo problema mestre, originado a partir da resolução do subproblema, permite estimar limites inferiores para o problema original. O algoritmo envolve iterações até que o limitante superior do problema seja igual ao limitante inferior do problema. A solução do problema mestre é o limitante inferior (LB). Já o limitante superior (UB) é obtido pela melhor solução completa do problema, obtido pela junção do conjunto de variáveis do mestre com o conjunto de variáveis de uma solução factível do subproblema associado. Ao final do processo, tem-se a solução ótima do problema inteiro misto original.

Mais especificamente, considere o problema inteiro misto (PIM):

$$\text{Min } cx + dy \tag{68}$$

$$s.a. \ Ax + By \geq b \tag{69}$$

$$Dy \geq e \tag{70}$$

$$x \geq 0 \tag{71}$$

$$y \geq 0 \text{ e inteiro} \tag{72}$$

Este problema pode ser escrito na forma:

$$\min_{\bar{y} \in Y} \{d\bar{y} + \min_{x \geq 0} \{cx : Ax \geq b - B\bar{y}\}\} \tag{73}$$

em que  $Y = \{y \mid Dy \geq e, y \geq 0 \text{ e inteiro}\}$ . O problema dentro de (73) de minimizar

$cx$  é um problema linear. Para escrevermos a versão dual deste problema linear, basta associar as variáveis duais  $u$  às restrições  $Ax \geq b - B\bar{y}$ . Segue o problema dual:

$$\max_{u \geq 0} \{u(b - B\bar{y}) : uA \leq c\} \quad (74)$$

O problema (74) é o subproblema no método de decomposição de Benders. Usando este subproblema, podemos reescrever o problema (73) como:

$$\min_{\bar{y} \in Y} \{d\bar{y} + \max_{u \geq 0} \{u(b - B\bar{y}) : uA \leq c\}\} \quad (75)$$

O poliedro convexo  $U = \{u \geq 0 : uA \leq c\}$  é independente de  $y$ . Note que o mesmo não ocorre com o poliedro convexo  $\{x \geq 0, Ax \geq b - B\bar{y}\}$  em (73), que depende de  $y$ . Sejam  $u^p (p = 1, \dots, P)$  os pontos extremos de  $U$  e  $v^s (s = 1, \dots, S)$  os raios extremos de  $U$ . A solução do subproblema pode ser limitada ou ilimitada. Se for limitada, a solução é um ponto extremo  $u^p$ . No segundo caso, existe uma direção  $v^s$  para a qual  $v^s(b - B\bar{y}) > 0$ . Esta solução ilimitada resulta em um problema primal infactível e, por isso, deve ser evitada. Assim, devemos eliminar os valores de  $\bar{y}$  que causam esta solução ilimitada. Isto pode ser feito considerando as restrições:

$$v^s(b - B\bar{y}) \leq 0 \quad (s = 1, \dots, S) \quad (76)$$

Com essas restrições, o valor máximo do problema interno de maximização em (75) é o valor de um dos pontos extremos de  $U$ . Assim,

$$\min_{\bar{y} \in Y} \{d\bar{y} + \max_{u \geq 0} \{u^p(b - B\bar{y}) : p = 1, \dots, P\}\} \quad (77)$$

$$s.a. \quad v^s(b - B\bar{y}) \leq 0 : s = 1, \dots, S \quad (78)$$

Fazendo uso da variável auxiliar  $z$ , temos então o problema mestre:

$$\text{Min} \quad dy + z \quad (79)$$

$$s.a. \quad z \geq u^p(b - B\bar{y}), \quad p = 1, \dots, P \quad (80)$$

$$v^s(b - B\bar{y}) \leq 0, \quad s = 1, \dots, S \quad (81)$$

$$y \in Y, \quad z \geq 0 \quad (82)$$

Substituindo  $dy + z$  por  $z$ , o problema mestre acima pode então ser reescrito na forma:

$$\text{Min } z_0 \quad (83)$$

$$s.a. \ z_0 \geq dy + u^p(b - By), \quad p = 1, \dots, P \quad (84)$$

$$v^s(b - By) \leq 0, \quad s = 1, \dots, S \quad (85)$$

$$y \in Y \quad (86)$$

O número de pontos e raios extremos pode ser muito grande. Para trabalhar com esta limitação, Benders propôs atraso na geração das restrições de ponto extremo e raio extremo, (84) e (85). O problema mestre relaxado fica então da forma:

$$\text{Min } z_0 \quad (87)$$

$$s.a. \ y \in Y \quad (88)$$

e em cada iteração  $k$ , o problema acima agrega um novo corte do tipo (84) ou (85).

O subproblema serve para testar a factibilidade/otimalidade de uma proposta  $[y^k, z_0^k]$  do problema mestre ((83)-(86)), em que  $k$  é a  $k$ -ésima iteração (isto é, com  $1, 2, \dots, k$  cortes). O problema mestre é um problema nas variáveis  $y$  e gera propostas de  $y$  para o subproblema. O subproblema testa as propostas do problema mestre e é um problema nas variáveis  $u$ :

$$\text{problema mestre} \begin{array}{c} \xrightarrow{\bar{y}_k} \\ \xleftarrow{\text{corte}} \end{array} \text{subproblema}$$

Considerando  $UB$  o limitante superior,  $LB$  o limitante inferior e  $\varepsilon$  a precisão desejada, o algoritmo de decomposição de Benders clássico pode ser escrito da seguinte forma:

Passo 1: faça  $UB = \infty, LB = -\infty$ ;

Passo 2: resolva o problema mestre relaxado ((87)-(88)), obtendo, assim, um valor inicial para  $y$ ;

Passo 3: com os valores de  $y$  fixados, resolva o subproblema (74) para obter  $u^*$ . Caso o subproblema seja factível, atualize o valor do  $UB = \min\{UB, d\bar{y} + u^*(b - B\bar{y})\}$  (isto é, o valor da melhor solução factível até então);

Passo 4: gere uma nova restrição para o problema mestre (ponto extremo (84) ou raio extremo (85));

Passo 5: resolva o problema mestre (87)-(88) com o corte do Passo 4 adicionado,

para obter  $y^*, z0^*$ . Calcule o novo  $LB = z0^*$ ;

Passo 6:  $UB - LB \leq \varepsilon$ ? Se sim, FIM. Senão, volte ao passo 3.

O sucesso computacional da decomposição de Benders na resolução de problemas de larga escala pode ser verificado desde o trabalho de Geoffrion e Graves (1974), no problema de projeto de redes não capacitadas de Magnanti *et al.* (1986), no problema de atribuição de vagões e locomotivas de Cordeau *et al.* (2000, 2001), no problema de gerenciamento de recursos hídricos não convexos de Cai *et al.* (2001), no projeto de manufaturas celular de Heragu e Chen (1998) e no projeto de redes *multicasting* de Randazzo e Luna (2001) e de Miranda (2004). Costa (2005) faz um levantamento de problemas de projeto de rede com custo fixo em que a decomposição de Benders foi aplicada.

#### 4.2.1 Extensões, variações e aplicações do método de decomposição de Benders

##### - Extensões e Variações do Método de Decomposição de Benders:

Geoffrion (1972) estende o método de decomposição de Benders clássico para lidar com problemas inteiros mistos não-lineares, o que resulta no método de decomposição de Benders generalizado. O método de decomposição de Benders generalizado tem sido usado em diferentes problemas, tais como no gerenciamento de recursos hídricos (CAI *et al.*, 2001), no projeto de redes baseadas em modelos não-lineares (HOANG, 2005) e na atribuição de capacidades e fluxo em redes de telecomunicações (MAHEY *et al.*, 2001).

Geoffrion e Graves (1974) apresentam uma variante do método de decomposição de Benders aplicado ao problema de projeto de sistemas de distribuição multiproduto. Esta variante é conhecida como algoritmo de decomposição de Benders  $\varepsilon$ -Ótimo. O artigo mostra que não é necessário resolver o problema mestre à óptimalidade a cada iteração; basta pará-lo toda vez que uma solução viável, melhor do que a solução anterior, é obtida. O problema mestre é então transformado em um problema de busca de viabilidade. Nesta variação do método de decomposição de Benders, um limite inferior não é mais obtido para o valor da solução ótima do problema original, o que obriga a adoção de uma abordagem alternativa para o critério de parada do algoritmo. Esse novo critério de parada envolve a reformulação do corte de Benders através da introdução de um erro marginal predeterminado e aceitável  $\varepsilon > 0$ , e da remoção da variável contínua do problema

mestre.

Magnanti e Wong (1981) propõem meios de melhorar o desempenho da decomposição de Benders quando aplicada a problemas inteiros mistos. No artigo eles mostram uma nova técnica para acelerar a convergência do algoritmo. A técnica de aceleração é baseada na seleção criteriosa de um ótimo alternativo para o subproblema de Benders para gerar cortes mais fortes, ou seja, ótimo de pareto. Esta estratégia será considerada com mais detalhes na seção 4.5.

Birge e Louveaux (1988) reformulam o corte de Benders, o que faz com que o subproblema seja dividido em problemas menores, originando, assim, um conjunto de, e não apenas um, cortes de Benders por iteração (decomposição de Benders multicorte).

#### **- Aplicações do método de decomposição de Benders:**

França e Luna (1982) resolvem um problema estocástico de localização e transporte, que é um problema inteiro misto não linear, via decomposição de Benders.

Haffner *et al.* (1999) utilizam a decomposição de Benders em planejamento dinâmico para expandir sistemas de transmissão de energia elétrica considerando múltiplos estágios. Em Mantovani *et al.* (2001) verifica-se o uso de decomposição de Benders em planejamento de fontes reativas em sistemas de energia elétrica.

Cordeau *et al.* (2000) usam o método de decomposição de Benders em um problema de designação de locomotivas e vagões para trens de passageiros. Os autores mostraram que o método usado encontra soluções ótimas em um curto espaço de tempo. Neste caso, o modelo tem variáveis inteiras e binárias, o que faz com que as variáveis binárias sejam fixadas para se construir um problema inteiro linear. O dual foi construído em cima deste problema inteiro linear. Convém notar que esta é uma versão heurística do método de Benders para casos em que não há variáveis reais.

O problema de roteamento integrado de aviões e o problema da programação da tripulação consiste em determinar um conjunto de custos mínimos de rotas de aeronaves e tripulações, tal que cada rota esteja coberta por uma aeronave e uma tripulação. Mercier *et al.* (2005) comparam duas técnicas de decomposição de Benders neste problema. Em uma delas o problema de roteamento é o problema mestre enquanto que na outra, o problema mestre é o problema da programação da tripulação.

Wongprakornkul (2005) propõe dois métodos baseados na técnica de decomposição de Benders para resolver um problema integrado de transporte e corte



de estoque unidimensional. O uso da técnica de decomposição de Benders passa a ser mais interessante para resolver este tipo de problema se os computadores paralelos forem capazes de trabalhar conjuntamente.

Camargo (2007) emprega o método de decomposição de Benders generalizado em um problema de localização de concentradores com atribuição múltipla e considera os custos de congestionamento. O problema mestre escolhe uma estrutura de concentradores a ser instalada. O subproblema resulta em um problema de transporte não-linear.

Zhang *et al.* (2007) analisa um modelo de programação inteira e as relaxações do problema de planejamento de bases de estação de *Wideband Code Division Multiple Access* (WCDMA) para *Up-Link* com restrições não-lineares e inteiras. A aplicação do algoritmo de decomposição de Benders clássico no problema de planejamento de bases de estação de acesso múltiplo na seção de código de banda larga (WCDMA em inglês) resulta no atendimento das exigências das aplicações práticas. Hamdouni *et al.* (2007) estudam a minimização de problemas ao se designar ônibus de diferentes tipos a rotas que requerem um determinado tipo de ônibus.

Fuller e Chung (2008) fazem uso da decomposição de Benders para uma classe de problemas de desigualdade variacional. Este tipo de problema é usado em modelo de equilíbrio econômico, jogos e equilíbrio de tráfico. O método de Benders é derivado da decomposição de Dantzig-Wolfe aplicado ao dual deste problema. O projeto de um sistema de manufatura celular que tem três aspectos críticos: utilização de recursos, rotas alternadas e restrições práticas, é apresentado por Heragu e Chen (1998). O modelo escolhido pelo autores, além de ser um problema linear inteiro misto com menos variáveis inteiras que a maioria dos modelos encontrados na literatura, também permite usar o método de decomposição de Benders para resolvê-lo na otimalidade.

Não foram encontrados trabalhos na literatura aplicando o método de Benders a problemas de empacotamento, ou carregamento de paletes e contêineres.

### **4.3 Aplicação de decomposição de Benders no Modelo de Tsai *et al.* (1993)**

#### **4.3.1 Carregamento de Paletes do Produtor**

Neste estudo, sem perda de generalidade, modificamos a função objetivo (1) do modelo de Tsai *et al.* (1993) por:

$$\text{Min} - \sum_{i=1}^n P_i + \frac{(x_1 + y_1 + x_2 + y_2)}{n * (X^0 + L + Y^0 + W)} \quad (89)$$

para que ela também envolva variáveis contínuas do problema. A peça 1 tem dimensões  $l \times w$  e a peça 2,  $w \times l$ . O segundo termo da função objetivo faz com que, sem perda de generalidade, ou a peça 1 ou a peça 2 seja colocada na origem do palete. Além disso, o segundo termo é sempre menor que 1 (isto é, um número fracionário), o que o torna de segunda ordem com relação ao primeiro termo (que sempre é um número inteiro). O denominador do segundo termo da função objetivo é multiplicado por  $n$  (número de caixas), mas poderia ser multiplicado por dois, também sem perda de generalidade, já que no numerador há as coordenadas de duas caixas ( $i = 1$  e  $i = 2$ ).

As restrições também são modificadas em relação ao modelo original para que sejam válidas somente se as caixas forem empacotadas no palete. Caso contrário, as caixas são todas colocadas na origem  $(0, 0)$  (vide equações (94) e (96)), pois não importa se haverá sobreposições ou não, já que o que importa é somente a disposição das caixas no palete. Assim, o valor de  $X^0$  e  $Y^0$  será o máximo entre  $l_i$  e  $w_i$ . As restrições ficam então da seguinte forma:

$$x_i - x_j \geq l_j P_j - M(u_{i,j}^1 + u_{i,j}^2) \quad \forall i < j \quad (90)$$

$$x_j - x_i \geq l_i P_i - M[1 - (u_{i,j}^2 - u_{i,j}^1)] \quad \forall i < j \quad (91)$$

$$y_i - y_j \geq w_j P_j - M[1 - (u_{i,j}^1 - u_{i,j}^2)] \quad \forall i < j \quad (92)$$

$$y_j - y_i \geq w_i P_i - M[2 - (u_{i,j}^1 + u_{i,j}^2)] \quad \forall i < j \quad (93)$$

$$x_i \geq X^0 P_i \quad \forall i \quad (94)$$

$$y_i \geq Y^0 P_i \quad \forall i \quad (95)$$

$$-x_i \geq -(X^0 + L) + l_i P_i \quad \forall i \quad (96)$$

$$-y_i \geq -(Y^0 + W) + w_i P_i \quad \forall i \quad (97)$$

$$P_1 + P_2 \geq 1 \quad (98)$$

$$\sum_i P_i \geq \max\{\lfloor L/l \rfloor \times \lfloor W/w \rfloor, \lfloor L/w \rfloor \times \lfloor W/l \rfloor\} \quad (99)$$

$$-\sum_i P_i \geq -\left\lfloor \frac{L \times W}{l \times w} \right\rfloor \quad (100)$$

$$\begin{aligned}
u_{i,j}^1, u_{i,j}^2, P_i &\in \{0, 1\} \\
x_i, y_i &\geq 0 \\
i &= 1, 2, \dots, n \\
j &= 1, 2, \dots, n
\end{aligned}$$

Note que as restrições (90)-(93) são ligeiramente diferentes das restrições originais (10)-(13) (observe os termos com as variáveis  $P_i$  e  $P_j$ ). Note também as diferenças entre as restrições (96)-(97) e (8)-(9). A restrição (98) garante que ou a peça 1 ou a 2 esteja no palete fazendo com que a mudança na função objetivo seja válida. Ao modelo formado pelas equações (89) a (98) daremos o nome de *tsaimod*. Para melhorar os limitantes inferiores e superiores iniciais do número de caixas, as restrições (99) e (100) também foram incluídas.

Nossa motivação para mudanças deste tipo é melhorar o desempenho do método de Benders, com funções objetivos contendo variáveis inteiras e contínuas e concentrando os esforços nas caixas que serão empacotadas dentro do palete.

A tabela abaixo é usada para mostrar as variáveis usadas na descrição do método de Benders na seção anterior e as usadas no problema de Tsai *et al.* (1993).

Original	PCP	tipo
$y$	$P, u$	<i>inteiras</i>
$x$	$x, y$	<i>contínuas</i>
$u$	$v1, v2, \dots, v8$	<i>duais</i>

Tabela 4: Relação de variáveis

Dados  $u$  e  $P$  fixos (notação  $\bar{u}$  e  $\bar{P}$ ), e sendo  $v1_{i,j}, v2_{i,j}, v3_{i,j}, v4_{i,j}, v5_i, v6_i, v7_i$  e  $v8_i$  as variáveis duais associadas, respectivamente, às restrições (90), (91), (92), (93), (94), (95), (96) e (97), o subproblema dual é dado por:

$$\begin{aligned}
\text{Max } &\sum_{i,j:i < j} (v1_{i,j}(l_j \cdot \bar{P}_j - M(\bar{u}_{i,j}^1 + \bar{u}_{i,j}^2))) \\
&+ \sum_{i,j:i < j} (v2_{i,j}(l_i \cdot \bar{P}_i - M(1 + \bar{u}_{i,j}^1 - \bar{u}_{i,j}^2))) + \sum_{i,j:i < j} (v3_{i,j}(w_j \cdot \bar{P}_j - M(1 - \bar{u}_{i,j}^1 + \bar{u}_{i,j}^2))) \\
&+ \sum_{i,j:i < j} (v4_{i,j}(w_i \cdot \bar{P}_i - M(2 - \bar{u}_{i,j}^1 - \bar{u}_{i,j}^2))) + \sum_i X^0 \cdot \bar{P}_i \cdot v5_i + \sum_i Y^0 \cdot \bar{P}_i \cdot v6_i \\
&+ \sum_i (-X^0 - L + l_i) \cdot \bar{P}_i \cdot v7_i + \sum_i (-Y^0 - W + w_i) \cdot \bar{P}_i \cdot v8_i \quad (101)
\end{aligned}$$

As restrições são descritas a seguir. O primeiro conjunto de restrições para os

casos de  $i = 1, 2$ :

$$\begin{aligned}
& \sum_{j:i<j} 1 \cdot v1_{i,j} + \sum_{j:i>j} -1 \cdot v1_{j,i} + \sum_{j:i<j} -1 \cdot v2_{i,j} + \sum_{j:i>j} 1 \cdot v2_{j,i} \\
& + \sum_{j:i<j} 0 \cdot v3_{i,j} + \sum_{j:i>j} 0 \cdot v3_{j,i} + \sum_{j:i<j} 0 \cdot v4_{i,j} + \sum_{j:i>j} 0 \cdot v4_{j,i} \\
& + v5_i + 0 \cdot v6_i - v7_i - 0 \cdot v8_i \leq \frac{1}{n \cdot (X^0 + Y^0 + L + W)}
\end{aligned} \tag{102}$$

O primeiro conjunto de restrições para os casos  $i = 3, 4, \dots, n$ :

$$\begin{aligned}
& \sum_{j:i<j} 1 \cdot v1_{i,j} + \sum_{j:i>j} -1 \cdot v1_{j,i} + \sum_{j:i<j} -1 \cdot v2_{i,j} + \sum_{j:i>j} 1 \cdot v2_{j,i} \\
& + \sum_{j:i<j} 0 \cdot v3_{i,j} + \sum_{j:i>j} 0 \cdot v3_{j,i} + \sum_{j:i<j} 0 \cdot v4_{i,j} + \sum_{j:i>j} 0 \cdot v4_{j,i} \\
& + v5_i + 0 \cdot v6_i - v7_i - 0 \cdot v8_i \leq 0
\end{aligned} \tag{103}$$

O segundo conjunto de restrições para os casos em que  $i = 1, 2$ :

$$\begin{aligned}
& \sum_{j:i<j} 0 \cdot v1_{i,j} + \sum_{j:i>j} 0 \cdot v1_{j,i} + \sum_{j:i<j} 0 \cdot v2_{i,j} + \sum_{j:i>j} 0 \cdot v2_{j,i} \\
& + \sum_{j:i<j} 1 \cdot v3_{i,j} + \sum_{j:i>j} -1 \cdot v3_{j,i} + \sum_{j:i<j} -1 \cdot v4_{i,j} + \sum_{j:i>j} 1 \cdot v4_{j,i} \\
& + 0 \cdot v5_i + v6_i - 0 \cdot v7_i - 1 \cdot v8_i \leq \frac{1}{n \cdot (X^0 + Y^0 + L + W)}
\end{aligned} \tag{104}$$

O segundo conjunto de restrições para os casos  $i = 3, 4, \dots, n$ :

$$\begin{aligned}
& \sum_{j:i<j} 0 \cdot v1_{i,j} + \sum_{j:i>j} 0 \cdot v1_{j,i} + \sum_{j:i<j} 0 \cdot v2_{i,j} + \sum_{j:i>j} 0 \cdot v2_{j,i} \\
& + \sum_{j:i<j} 1 \cdot v3_{i,j} + \sum_{j:i>j} -1 \cdot v3_{j,i} + \sum_{j:i<j} -1 \cdot v4_{i,j} + \sum_{j:i>j} 1 \cdot v4_{j,i} \\
& + 0 \cdot v5_i + v6_i - 0 \cdot v7_i - 1 \cdot v8_i \leq 0
\end{aligned} \tag{105}$$

em que  $v1_{i,j} \geq 0, v2_{i,j} \geq 0, v3_{i,j} \geq 0, v4_{i,j} \geq 0, v5_i \geq 0, v6_i \geq 0, v7_i \geq 0, v8_i \geq 0$ .

Resolvendo o subproblema dual (101)-(105), encontramos os pontos ou raios extremos que são adicionados ao problema mestre. As restrições (99) e (100) são adicionadas ao problema mestre e a restrição (100) é trocada pela restrição (106):

$$z_0 \geq - \left\lfloor \frac{L \times W}{l \times w} \right\rfloor \quad (106)$$

No problema mestre, esta mudança faz com que a variável da função objetivo do problema mestre não fique totalmente livre.

Do corte de Benders tipo ponto extremo (restrição (113) a seguir) podemos dizer, sem perda de generalidade, que

$$z_0 \geq - \sum_{i=1}^n P_i \quad (107)$$

Como a restrição abaixo é um limitante do número de caixas,

$$\sum_{i=1}^n P_i \leq \left\lfloor \frac{L \times W}{l \times w} \right\rfloor \quad (108)$$

e tendo as equações (107) e (108) em vista, é correto que

$$z_0 \geq - \sum_{i=1}^n P_i \geq - \left\lfloor \frac{L \times W}{l \times w} \right\rfloor \quad (109)$$

ou seja, a restrição de limitante superior (106) do número de caixas adicionada está correta.

O problema mestre fica então da seguinte forma:

$$\text{Min } z_0 \quad (110)$$

sujeito a

$$z0 \geq - \left\lfloor \frac{L \times W}{l \times w} \right\rfloor \quad (111)$$

$$\sum_i P_i \geq \max\{ \lfloor L/l \rfloor \times \lfloor W/w \rfloor, \lfloor L/w \rfloor \times \lfloor W/l \rfloor \} \quad (112)$$

$$\begin{aligned} z0 &\geq \sum_i -P_i + const1 + \sum_i coef3 \cdot P_i \\ &\quad + \sum_{i,j:i < j} [coef1 \cdot u_{i,j}^1 + coef2 \cdot u_{i,j}^2] \\ &\quad + \sum_{i,j:i < j} [coef4 \cdot P_i] + \sum_{i,j:i < j} [coef5 \cdot P_j] \end{aligned} \quad (113)$$

$$\begin{aligned} 0 &\geq const1 \sum_i coef3 \cdot P_i \\ &\quad + \sum_{i,j:i < j} [coef1 \cdot u_{i,j}^1 + coef2 \cdot u_{i,j}^2] \\ &\quad + \sum_{i,j:i < j} [coef4 \cdot P_i] + \sum_{i,j:i < j} [coef5 \cdot P_j] \end{aligned} \quad (114)$$

em que

$$const1 = \sum_{i,j:i < j} M \cdot (-v2_{i,j} - v3_{i,j} - 4v4_{i,j}) \quad (115)$$

$$coef1 = M(-v1_{i,j} - v2_{i,j} + v3_{i,j} + v4_{i,j}) \quad \forall i < j \quad (116)$$

$$coef2 = M(-v1_{i,j} + v2_{i,j} - v3_{i,j} + v4_{i,j}) \quad \forall i < j \quad (117)$$

$$\begin{aligned} coef3 &= X^0 \cdot v5_i + Y^0 \cdot v6_i + (-X^0 - L + l_i) \cdot v7_i \\ &\quad + (-Y^0 - W + w_i) \cdot v8_i \quad \forall i \end{aligned} \quad (118)$$

$$coef4 = v2_{i,j} \cdot l_i + v4_{i,j} \cdot w_i \quad \forall i \quad (119)$$

$$coef5 = v1_{i,j} \cdot l_j + v3_{i,j} \cdot w_j \quad \forall i \quad (120)$$

sendo que  $v1_{i,j}$ ,  $v2_{i,j}$ ,  $v3_{i,j}$ ,  $v4_{i,j}$ ,  $v5_i$ ,  $v6_i$ ,  $v7_i$  e  $v8_i$  são fixados pelo último valor encontrado no subproblema dual.

As restrições de limites iniciais para o número de caixas foram adicionadas ao problema mestre. O problema mestre inicial tem então um limitante inferior e superior

inicial. As soluções obtidas pelo problema mestre são limites inferiores do valor da função objetivo do problema original. Este limite inferior é melhorado a cada nova adição do corte de Benders. Ao convergir para o limite superior, tem-se a solução ótima do problema original.

A eficiência computacional do algoritmo anterior depende principalmente de três questões: o número de iterações necessárias para convergência global; o tempo gasto na resolução do subproblema em cada iteração; o tempo e o esforço computacional demandados para resolução do problema mestre.

Para diminuir o número de iterações necessárias para a convergência global, pode-se adicionar mais de um corte de Benders por iteração (método de decomposição de Benders multicorte). Isso pode ser feito quando o problema dual possui múltiplas soluções ótimas e consegue-se adicionar cortes que não são dominados por nenhuma outra restrição presente no problema mestre (MAGNANTI *et al.*, 1986), ou quando se consegue reformular o corte de Benders, decompondo-o.

É importante frisar que o método de decomposição de Benders é sensível às escolhas dos valores das variáveis duais. Além disso, a seleção dos cortes iniciais são importantes no desempenho do método de Benders (MEVERT, 1977).

#### 4.4 Exemplo Ilustrativo

A título de demonstração, segue um exemplo do uso de decomposição de Benders clássico, com até quatro caixas sendo colocadas em um palete. O modelo deverá colocar no palete  $(L, W)$ , da melhor forma possível, até duas caixas  $(l, w)$  e duas caixas  $(w, l)$ . A caixa 1 e 4 têm dimensões  $(l, w) = (2, 1)$  e as caixas 2 e 3 têm dimensões  $(w, l) = (1, 2)$ . As caixas 1 e 2 estão com dimensões trocadas porque, necessariamente, uma delas estará na origem, já que ao menos uma caixa cabe no palete. Assim, para diminuir ainda mais a função objetivo, o modelo faz com que ou a primeira caixa ou a segunda esteja na origem do palete. E a que não estiver na origem, estará no ponto mais próximo possível da origem do palete.

Dados  $(L, W) = (2, 2)$ . Seja  $(X^0, Y^0) = (\max\{l_i, w_i\}, \max\{l_i, w_i\}) = (2, 2)$  e  $M = \max\{X^0 + L, Y^0 + W\} = 4$ . O problema inteiro misto (PIM) inicial fica da seguinte forma:

$$\text{Min} - \sum_{i=1}^4 P_i + \frac{(\bar{P}_1(x_1 + y_1) + \bar{P}_2(x_2 + y_2))}{32}$$

A multiplicação por  $\bar{P}_1$  e por  $\bar{P}_2$  no segundo termo da função objetivo foi utilizada para que a função objetivo seja calculada somente com as caixas que realmente serão empacotadas, ou seja,  $\bar{P}_i$  é igual a 0 se a caixa  $i$  não for empacotada. Com isso, o termo  $\bar{P}_i(x_i + y_i)$  é 0 e, portanto, não adicionará nada no cálculo da função objetivo. E as restrições ficam da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\geq 1P_2 - 4(u_{1,2}^1 + u_{1,2}^2) \\ x_1 - x_3 &\geq 1P_3 - 4(u_{1,3}^1 + u_{1,3}^2) \\ x_1 - x_4 &\geq 2P_4 - 4(u_{1,4}^1 + u_{1,4}^2) \\ x_2 - x_3 &\geq 1P_3 - 4(u_{2,3}^1 + u_{2,3}^2) \\ x_2 - x_4 &\geq 2P_4 - 4(u_{2,4}^1 + u_{2,4}^2) \\ x_3 - x_4 &\geq 2P_4 - 4(u_{3,4}^1 + u_{3,4}^2) \\ x_2 - x_1 &\geq 2P_1 - 4(1 - (u_{1,2}^2 - u_{1,2}^1)) \\ x_3 - x_1 &\geq 2P_1 - 4(1 - (u_{1,3}^2 - u_{1,3}^1)) \\ x_3 - x_2 &\geq 1P_2 - 4(1 - (u_{2,3}^2 - u_{2,3}^1)) \\ x_4 - x_1 &\geq 2P_1 - 4(1 - (u_{1,4}^2 - u_{1,4}^1)) \\ x_4 - x_2 &\geq 1P_2 - 4(1 - (u_{2,4}^2 - u_{2,4}^1)) \\ x_4 - x_3 &\geq 1P_3 - 4(1 - (u_{3,4}^2 - u_{3,4}^1)) \\ y_1 - y_2 &\geq 2P_2 - 4(1 - (u_{1,2}^1 - u_{1,2}^2)) \\ y_1 - y_3 &\geq 2P_3 - 4(1 - (u_{1,3}^1 - u_{1,3}^2)) \\ y_1 - y_4 &\geq 1P_4 - 4(1 - (u_{1,4}^1 - u_{1,4}^2)) \end{aligned}$$



$$y_2 - y_3 \geq 2P_3 - 4(1 - (u_{2,3}^1 - u_{2,3}^2))$$

$$y_2 - y_4 \geq 1P_4 - 4(1 - (u_{2,4}^1 - u_{2,4}^2))$$

$$y_2 - y_1 \geq 1P_1 - 4[2 - (u_{1,2}^1 + u_{1,2}^2)]$$

$$y_3 - y_1 \geq 1P_1 - 4[2 - (u_{1,3}^1 + u_{1,3}^2)]$$

$$y_3 - y_2 \geq 2P_2 - 4[2 - (u_{2,3}^1 + u_{2,3}^2)]$$

$$y_4 - y_1 \geq 1P_1 - 4[2 - (u_{1,4}^1 + u_{1,4}^2)]$$

$$y_4 - y_2 \geq 2P_2 - 4[2 - (u_{2,4}^1 + u_{2,4}^2)]$$

$$y_4 - y_3 \geq 2P_3 - 4[2 - (u_{3,4}^1 + u_{3,4}^2)]$$

$$x_1 \geq 2P_1$$

$$x_2 \geq 2P_2$$

$$x_3 \geq 2P_3$$

$$x_4 \geq 2P_4$$

$$y_1 \geq 2P_1$$

$$y_2 \geq 2P_2$$

$$y_3 \geq 2P_3$$

$$y_4 \geq 2P_4$$

$$-x_1 \geq [-(2 + 2) + 2]P_1$$

$$-x_2 \geq [-(2 + 2) + 1]P_2$$

$$-x_3 \geq [-(2 + 2) + 1]P_3$$

$$-x_4 \geq [-(2 + 2) + 2]P_4$$

$$-y_1 \geq [-(2 + 2) + 1]P_1$$

$$-y_2 \geq [-(2 + 2) + 2]P_2$$

$$-y_3 \geq [-(2 + 2) + 2]P_3$$

$$-y_4 \geq [-(2 + 2) + 1]P_4$$

$$P_1 + P_2 \geq 1$$

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \geq \max\{\lfloor 2/2 \rfloor \cdot \lfloor 2/1 \rfloor, \lfloor 2/1 \rfloor \cdot \lfloor 2/2 \rfloor\}$$

$$-(P_1 + P_2 + P_3 + P_4) \geq -\left\lfloor \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 1} \right\rfloor$$

$$\begin{aligned}
P_i, u_{i,j}^1, u_{i,j}^2 &\in \{0, 1\} \\
x_i, y_i &\geq 0 \\
i &= 1, 2, 3, 4 \\
j &= 1, 2, 3, 4
\end{aligned}$$

Os valores iniciais  $P_i, u_{i,j}^1, u_{i,j}^2$  podem ser calculados inicialmente pelo sistema formado por (87) e (88). Como este é um exemplo ilustrativo, consideramos  $P_i, u_{i,j}^1, u_{i,j}^2$  fixos e iguais a 0, o que nos permite ter um problema linear com variáveis contínuas  $x_i$  e  $y_i$ . Note que  $\bar{P}_1$  e  $\bar{P}_2$  são os últimos valores encontrados, o que garante que o valor de  $x_1, y_1, x_2, y_2$  só entrará no cálculo da função objetivo se a caixa estiver dentro do palete.

O subproblema dual fica, então, da forma:

$$\begin{aligned}
\text{Max } &-4v_{2,2} - 4v_{2,3} - 4v_{2,4} - 4v_{2,3} - 4v_{2,4} - 4v_{2,3,4} \\
&-4v_{3,2} - 4v_{3,3} - 4v_{3,4} - 4v_{3,2,3} - 4v_{3,2,4} - 4v_{3,3,4} \\
&-8v_{4,2} - 8v_{4,3} - 8v_{4,4} - 8v_{4,2,3} - 8v_{4,2,4} - 8v_{4,3,4}
\end{aligned}$$

sujeito a

$$\begin{aligned}
v_{1,2} + v_{1,3} + v_{1,4} - v_{2,2} - v_{2,3} + v_{2,4} + v_{5_1} - v_{7_1} &\leq 0.0312 \\
-v_{1,2} + v_{2,3} + v_{2,4} + v_{2,2} - v_{2,3} - v_{2,4} + v_{5_2} - v_{7_2} &\leq 0.0312 \\
-v_{1,3} - v_{2,3} + v_{3,4} + v_{2,3} + v_{2,3} - v_{2,3,4} + v_{5_3} - v_{7_3} &\leq 0 \\
-v_{1,4} - v_{2,4} + v_{3,4} + v_{2,4} + v_{2,4} - v_{2,3,4} + v_{5_4} - v_{7_4} &\leq 0 \\
v_{3,2} + v_{3,3} + v_{3,4} - v_{4,2} - v_{4,3} - v_{4,4} + v_{6_1} - v_{8_1} &\leq 0.0312 \\
-v_{3,2} + v_{3,3} + v_{3,4} + v_{4,2} - v_{4,2,3} - v_{4,2,4} + v_{6_2} - v_{8_2} &\leq 0.0312 \\
-v_{3,3} - v_{3,3} + v_{3,4} + v_{4,3} + v_{4,2,3} - v_{4,3,4} + v_{6_3} - v_{8_3} &\leq 0 \\
-v_{3,4} - v_{3,4} - v_{3,4} + v_{4,4} + v_{4,2,4} + v_{4,3,4} + v_{6_3} - v_{8_3} &\leq 0
\end{aligned}$$

Resolvendo este problema linear, encontramos o valor da solução ótima igual a 0; com  $v_{5_1} = 0.031$ ;  $v_{5_2} = 0.031$ ;  $v_{6_1} = 0.031$ ;  $v_{6_2} = 0.031$ . O restante,  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_7, v_8$ , é igual a zero. Assim, temos um ponto extremo para ser adicionado ao problema mestre.

O problema mestre fica então da seguinte forma:

$$\text{Min } z_0$$

$$P_1 + P_2 \geq 1$$

$$z_0 \geq -2$$

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \geq 2$$

$$z_0 \geq 0 - 0.875P_1 - 0.875P_2 - P_3 - P_4$$

A solução do PI é:  $z_0 = -2$ ,  $P_1 = P_3 = P_4 = 1$  e  $P_2 = 0$ . Os conjuntos de variáveis  $u_{i,j}^1$  e  $u_{i,j}^2$  são iguais a zero. Atualizando o valor do limitante superior e inferior, temos que eles valem agora  $UB = 0$  e  $LB = -2$ . Colocando os valores encontrados para as variáveis do problema mestre no subproblema dual:

$$\begin{aligned} \text{Max } & +v_{1,3} + 2v_{1,4} + v_{2,3} + 2v_{2,4} + 2v_{3,4} - 2v_{2,2} - 2v_{2,3} \\ & -2v_{2,4} - 4v_{2,3} - 4v_{2,4} - 3v_{2,3,4} - 4v_{3,1,2} - 2v_{3,1,3} - 3v_{3,1,4} - 2v_{3,2,3} - 3v_{3,2,4} \\ & -3v_{3,3,4} - 7v_{4,1,2} - 7v_{4,1,3} - 7v_{4,1,4} - 8v_{4,2,3} - 8v_{4,2,4} - 6v_{4,3,4} + 2v_{5_1} + 2v_{5_3} \\ & +2v_{5_4} + 2v_{6_1} + 2v_{6_3} + 2v_{6_4} - 2v_{7_1} - 3v_{7_3} - 2v_{7_4} - 3v_{8_1} - 2v_{8_3} - 3v_{8_4} \end{aligned}$$

sujeito a

$$\begin{aligned} v_{1,2} + v_{1,3} + v_{1,4} - v_{2,1,2} - v_{2,1,3} - v_{2,1,4} + v_{5_1} - v_{7_1} & \leq 0.0312 \\ -v_{1,2} + v_{2,3} + v_{2,4} + v_{2,1,2} - v_{2,2,3} - v_{2,2,4} + v_{5_2} - v_{7_2} & \leq 0.0312 \\ -v_{1,3} - v_{2,3} + v_{3,4} + v_{2,1,3} + v_{2,2,3} - v_{2,3,4} + v_{5_3} - v_{7_3} & \leq 0 \\ -v_{1,4} - v_{2,4} - v_{3,4} + v_{2,1,4} + v_{2,2,4} + v_{2,3,4} + v_{5_4} - v_{7_4} & \leq 0 \\ v_{3,1,2} + v_{3,1,3} + v_{3,1,4} - v_{4,1,2} - v_{4,1,3} - v_{4,1,4} + v_{6_1} - v_{8_1} & \leq 0.0312 \\ -v_{3,1,2} + v_{3,2,3} + v_{3,2,4} + v_{4,1,2} - v_{4,2,3} - v_{4,2,4} + v_{6_2} - v_{8_2} & \leq 0.0312 \\ -v_{3,1,3} - v_{3,2,3} + v_{3,3,4} + v_{4,1,3} + v_{4,2,3} - v_{4,3,4} + v_{6_3} - v_{8_3} & \leq 0 \\ -v_{3,1,4} - v_{3,2,4} - v_{3,3,4} + v_{4,1,4} + v_{4,2,4} + v_{4,3,4} + v_{6_4} - v_{8_4} & \leq 0 \end{aligned}$$

que, depois de resolvido, nos fornece os valores das variáveis duais. Estas iterações são resolvidas no pacote GAMS/CPLEX em 43 iterações, até que é encontrado o valor de  $LB = UB = -1.875$ . O valor das variáveis inteiras encontradas na última iteração é então substituído no PIM inicial.

Os valores das variáveis inteiras do problema mestre na última iteração é  $z_0 = -1.875$ ,  $P_2 = P_3 = 1$ ,  $u_{1,2}^1 = u_{1,3}^1 = u_{1,4}^1 = u_{2,4}^1 = 1$ ,  $u_{1,2}^2 = u_{1,3}^2 = u_{1,4}^2 = u_{2,3}^2 = 1$ .

Os cortes do tipo ponto extremo são gerados nas iterações 1, 42 e 43. Nas outras iterações foram gerados cortes do tipo raio extremo. Os cortes do tipo ponto extremo gerados são:

$$\text{iter1} \Rightarrow +0.875P_1 + 0.875P_2 + P_3 + P_4 + z_0 \geq 0$$

$$\text{iter42} \Rightarrow +0.125u_{2,3}^1 + 0.125u_{2,3}^2 + 0.875P_1 + 0.9375P_2 + 0.9062P_3 + P_4 + z_0 \geq 0$$

$$\text{iter43} \Rightarrow 0.875P_1 + 0.875P_2 + P_3 + P_4 + z_0 \geq 0$$

E os raios extremos gerados são os seguintes:

$$\text{iter2} \Rightarrow 4u_{1,3}^1 + 4u_{2,3}^1 - 4u_{1,3}^2 + 4u_{2,3}^2 - 4P_1 + 3P_2 - P_3 \geq -4$$

$$\begin{aligned} \text{iter3} \Rightarrow & 1.3333u_{1,2}^1 + 1.3333u_{2,4}^1 + 1.3333u_{1,2}^2 + 1.3333u_{2,4}^2 + 0.6667P_1 \\ & - 0.3333P_2 - 1.3333P_4 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{iter4} \Rightarrow -0.8u_{1,2}^1 - 0.8u_{1,3}^1 - 0.8u_{1,2}^2 + 0.8u_{1,3}^2 - 0.2P_1 + 0.4P_2 - 0.8P_3 \geq -2.4$$

$$\text{iter5} \Rightarrow -2u_{2,3}^1 - 2u_{2,3}^2 - 2P_2 + P_3 \geq -4$$

$$\text{iter6} \Rightarrow 0.8u_{2,3}^1 + 0.8u_{3,4}^1 + 0.8u_{2,3}^2 + 0.8u_{3,4}^2 + 0.6P_2 - 0.2P_3 - 0.8P_4 \geq 0$$

$$\text{iter7} \Rightarrow 1.3333u_{2,3}^1 + 1.3333u_{2,3}^2 + P_2 - P_3 \geq 0$$

$$\text{iter8} \Rightarrow 2u_{1,4}^1 + 2u_{1,4}^2 + P_1 - 2P_4 \geq 0$$

$$\text{iter9} \Rightarrow 4u_{1,2}^1 + 4u_{1,2}^2 + 2P_1 - 3P_2 \geq 0$$

$$\text{iter10} \Rightarrow -u_{2,3}^1 + u_{2,3}^2 + 0.5P_2 - P_3 \geq -1$$

$$\text{iter11} \Rightarrow 4u_{1,3}^1 + 4u_{1,3}^2 + 2P_1 - 3P_3 \geq 0$$

$$\text{iter12} \Rightarrow -2u_{1,3}^1 - 2u_{1,4}^1 - 2u_{2,4}^1 + 2u_{1,3}^2 - 2u_{1,4}^2 + 2u_{2,4}^2 - 0.5P_1 + P_2 - 2P_3 - 0.5P_4 \geq -8$$

$$\text{iter13} \Rightarrow -2u_{1,4}^1 - 2u_{3,4}^1 + 2u_{1,4}^2 - 2u_{3,4}^2 + 1.5P_1 - 2P_3 - 0.5P_4 \geq -6$$

$$\text{iter14} \Rightarrow -2u_{1,3}^1 - 2u_{3,4}^1 + 2u_{1,3}^2 + 2u_{3,4}^2 + 1.5P_1 - P_3 - 1.5P_4 \geq -4$$

$$\text{iter15} \Rightarrow 4u_{3,4}^1 + 4u_{3,4}^2 + 3P_3 - 4P_4 \geq 0$$

$$\text{iter16} \Rightarrow -2u_{1,3}^1 - 2u_{1,4}^1 - 2u_{2,3}^1 - 2u_{1,3}^2 + 2u_{1,4}^2 + 2u_{2,3}^2 - 0.5P_1 + P_2 - P_3 - 1.5P_4 \geq -8$$

$$\text{iter17} \Rightarrow -2u_{1,3}^1 - 2u_{1,4}^1 - 2u_{1,3}^2 + 2u_{1,4}^2 - 0.5P_1 + P_3 - 1.5P_4 \geq -6$$

$$\text{iter18} \Rightarrow 2u_{2,3}^1 + 2u_{2,4}^1 + 2u_{2,3}^2 - 2u_{2,4}^2 - 0.5P_2 - 1.5P_3 + P_4 \geq -2$$

$$\text{iter19} \Rightarrow -1.3333u_{3,4}^1 + 1.3333u_{3,4}^2 + 0.6667P_3 - P_4 \geq -1.3333$$

$$\text{iter20} \Rightarrow 4u_{2,4}^1 + 4u_{2,4}^2 + 3P_2 - 4P_4 \geq 0$$

$$\text{iter21} \Rightarrow 2u_{1,4}^1 - 2u_{1,4}^2 - 2P_1 + P_4 \geq -2$$

$$\text{iter22} \Rightarrow -2u_{1,2}^1 - 2u_{2,4}^1 + 2u_{1,2}^2 + 2u_{2,4}^2 + 1.5P_1 - P_2 - 1.5P_4 \geq -4$$

$$\begin{aligned}
\text{iter23} &\Rightarrow -2u_{1,4}^1 - 2u_{2,4}^1 + 2u_{1,4}^2 - 2u_{2,4}^2 + 1.5P_1 - 2P_2 - 0.5P_4 \geq -6 \\
\text{iter24} &\Rightarrow -4u_{1,2}^1 + 4u_{1,2}^2 + 3P_1 - 4P_2 \geq -4 \\
\text{iter25} &\Rightarrow 4u_{2,3}^1 - 4u_{2,3}^2 - P_2 + 3P_3 \geq -4 \\
\text{iter26} &\Rightarrow 4u_{3,4}^1 - 4u_{3,4}^2 - 3P_3 + 2P_4 \geq -4 \\
\text{iter27} &\Rightarrow -2u_{1,3}^1 - 2u_{2,4}^1 - 2u_{3,4}^1 - 2u_{1,3}^2 + 2u_{2,4}^2 - 2u_{3,4}^2 - 1.5P_1 + P_2 - P_3 - 0.5P_4 \geq -10 \\
\text{iter28} &\Rightarrow 4u_{1,3}^1 - 4u_{1,3}^2 - 4P_1 + 3P_3 \geq -4 \\
\text{iter29} &\Rightarrow -2u_{1,3}^1 - 2u_{3,4}^1 - 2u_{1,3}^2 - 2u_{3,4}^2 - 1.5P_1 - P_3 + 1.5P_4 \geq -8 \\
\text{iter30} &\Rightarrow -4u_{2,4}^1 - 4u_{2,4}^2 - 4P_2 + 3P_4 \geq -8 \\
\text{iter31} &\Rightarrow -2u_{1,2}^1 - 2u_{1,4}^1 - 2u_{1,2}^2 + 2u_{1,4}^2 - 0.5P_1 + P_2 - 1.5P_4 \geq -6 \\
\text{iter32} &\Rightarrow 4u_{1,2}^1 + 4u_{2,4}^1 - 4u_{1,2}^2 - 4u_{2,4}^2 - 4P_1 - P_2 + 2P_4 \geq -8 \\
\text{iter33} &\Rightarrow -2u_{1,3}^1 - 2u_{1,4}^1 + 2u_{1,3}^2 - 2u_{1,4}^2 - 0.5P_1 - 2P_3 + 1.5P_4 \geq -6 \\
\text{iter34} &\Rightarrow -1.3333u_{2,4}^1 - 1.3333u_{3,4}^1 + 1.3333u_{2,4}^2 - 1.3333u_{3,4}^2 \\
&\quad + 0.6667P_2 - 1.3333P_3 - 0.3333P_4 \geq -4 \\
\text{iter35} &\Rightarrow 4u_{1,2}^1 - 4u_{1,2}^2 - 4P_1 + 3P_2 \geq -4 \\
\text{iter36} &\Rightarrow -2u_{1,4}^1 - 2u_{2,4}^1 - 2u_{1,4}^2 + 2u_{2,4}^2 - 1.5P_1 + P_2 - 0.5P_4 \geq -6 \\
\text{iter37} &\Rightarrow -1.3333u_{1,3}^1 - 1.3333u_{1,3}^2 - P_1 + 0.6667P_3 \geq -2.6667 \\
\text{iter38} &\Rightarrow -4u_{1,2}^1 - 4u_{1,2}^2 - 3P_1 + 2P_2 \geq -8 \\
\text{iter39} &\Rightarrow 4u_{2,4}^1 - 4u_{2,4}^2 - 3P_2 + 2P_4 \geq -4 \\
\text{iter40} &\Rightarrow -4u_{2,3}^1 - 4u_{2,4}^1 - 4u_{2,3}^2 + 4u_{2,4}^2 - 2P_2 + 2P_3 - 3P_4 \geq -12 \\
\text{iter41} &\Rightarrow -4u_{2,4}^1 + 4u_{2,4}^2 + 2P_2 - 3P_4 \geq -4
\end{aligned}$$

É importante ressaltar que quando é gerado um raio extremo, o valor de  $UB$  não é atualizado, o que podemos notar na tabela 5 que contém os valores de  $LB$  e  $UB$  que são atualizados em cada iteração:

Iteração	$LB$	$UB$
1 a 38	-2.000	0
39 a 41	-1.875	0
42	-1.875	-1.844
43	-1.875	-1.875

Tabela 5: Limitantes gerados no exemplo

O PIM fica da seguinte forma:

$$\text{Min } Z = -3 + 0.0312 \cdot x_2 + 0.0312 \cdot y_2$$

sujeito a

$$x_1 - x_2 \geq -7$$

$$x_1 - x_3 \geq -7$$

$$x_1 - x_4 \geq -8$$

$$x_2 - x_3 \geq -3$$

$$x_2 - x_4 \geq -4$$

$$x_3 - x_4 \geq 0$$

$$-x_1 + x_2 \geq -4$$

$$-x_1 + x_3 \geq -4$$

$$-x_1 + x_4 \geq -4$$

$$-x_2 + x_3 \geq 1$$

$$-x_2 + x_4 \geq -7$$

$$-x_3 + x_4 \geq -3$$

$$y_1 - y_2 \geq -2$$

$$y_1 - y_3 \geq -2$$

$$y_1 - y_4 \geq -4$$

$$y_2 - y_3 \geq -6$$

$$y_2 - y_4 \geq 0$$

$$y_3 - y_4 \geq -4$$

$$-y_1 + y_2 \geq 0$$

$$-y_1 + y_3 \geq 0$$

$$-y_1 + y_4 \geq 0$$

$$-y_2 + y_3 \geq -2$$

$$-y_2 + y_4 \geq -2$$

$$-y_3 + y_4 \geq -6$$

$$\begin{aligned}
 x_1 &\geq 0 \\
 x_2 &\geq 2 \\
 x_3 &\geq 2 \\
 x_4 &\geq 0 \\
 y_1 &\geq 0 \\
 y_2 &\geq 2 \\
 y_3 &\geq 2 \\
 y_4 &\geq 0 \\
 -x_1 &\geq 0 \\
 -x_2 &\geq -3 \\
 -x_3 &\geq -3 \\
 -x_4 &\geq 0 \\
 -y_1 &\geq 0 \\
 -y_2 &\geq -2 \\
 -y_3 &\geq -2 \\
 -y_4 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Resolvendo este modelo linear, encontramos o valor da função objetivo como sendo  $-1.875$ , com a posição das caixas no palete sendo  $(X_2, Y_2) = (2, 2)$  e  $(X_3, Y_3) = (3, 2)$ . A figura 12 ilustra a solução deste exemplo (as caixas são colocadas em camadas e considera que a folha é o palete):

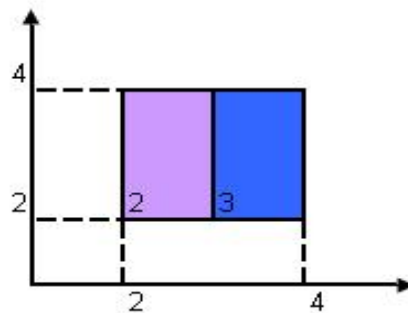


Figura 12: ilustração do exemplo

Também estendemos o modelo resolvido com Benders para o PCP do produtor tridimensional (apêndice D) e para o PCP do distribuidor bidimensional (apêndice E), similarmente ao que foi apresentado para o PCP do produtor bidimensional.

#### 4.5 Alterações no método de Benders clássico

A fim de tentar melhorar o desempenho método de Benders, foram ainda realizadas duas mudanças no método.

A primeira mudança consiste em fazer com que o problema mestre seja resolvido relaxado até que um *gap* pré-definido do problema de Benders seja alcançado, para só então resolver o problema mestre inteiro. Quando o *gap* é atingido, os limitantes superiores e inferiores começam a ser calculados novamente a partir de um novo limitante inicial. Para distinguir esta mudança, este método modificado aplicado ao modelo do Tsai *et al.* (1993) é chamado de *B.relax*, enquanto que o método clássico é chamado de *B.class*.

A segunda mudança consiste no uso do corte de Pareto. Este caso é chamado de *B.pareto*. Neste método, quando se encontra um ponto extremo ao ser resolvido o subproblema dual (equação 74), o limitante superior não é atualizado. No lugar de atualizar este limitante superior, o método de Pareto resolve um outro subproblema chamado de problema de Pareto, e só depois de resolvido este problema de Pareto, é que é atualizado o limitante superior. O problema de Pareto fornece cortes mais fortes para o problema mestre, podendo melhorar o limitante superior. O problema de Pareto é apresentado a seguir:

$$\text{Max}_{u \geq 0} \quad u(b - By^0) \quad (121)$$

sujeito a

$$uA \leq c \quad (122)$$

$$u(b - B\bar{y}) = S \quad (123)$$

Em que  $S$  é o valor da função objetivo do subproblema dual (eq.74) e  $y^0$  é um ponto pertencente ao interior do conjunto formado pelos limites das variáveis  $y$ . Portanto, se o conjunto de variáveis  $y$  é binário, então  $y^0$  pode ser qualquer valor entre 0 e 1.



## 5 Resultados Computacionais

Neste capítulo descrevemos os resultados de alguns testes realizados com o objetivo de avaliar o método de decomposição de Benders aplicado aos problemas de carregamento de paletes. Escolhemos um pacote que contivesse uma linguagem de modelagem algébrica em programação matemática que facilitasse sua implementação e resolução, ao invés de apenas utilizar um *solver*. Os tempos computacionais não são baixos com esta escolha, pois esta escolha envolve uma linguagem de alto nível, baseada em um interpretador que compila e resolve modelos em cada iteração do método de Benders. Se o método fosse implementado em uma linguagem procedural como Pascal ou C++, os tempos seriam provavelmente bem menores. Optou-se pelo pacote computacional GAMS/CPLEX versão 7.0. Todos os resultados apresentados nas próximas seções foram obtidos em um Pentium DualCore com processador de 3.00 GHz.

### 5.1 Experimentos com Carregamentos de Paletes do Produtor (Bidimensional)

Geramos exemplos aleatórios em 3 intervalos de dados: com caixas de dimensões entre 50 e 100, entre 33 e 50 e entre 10 e 33. Consideramos para todos os exemplos aleatórios, paletes com tamanho  $100 \times 100$ . Cada grupo de exemplos foi composto por 10 exemplos aleatórios. Os intervalos foram definidos levando em conta a dificuldade da solução, isto é, no primeiro intervalo, 50 a 100, é possível colocar no máximo quatro caixas e no mínimo uma caixa no palete. Já no intervalo entre 33 e 50, o número máximo de caixas a ser colocado é nove e o mínimo é quatro. O terceiro intervalo, 10 a 33, comporta no máximo 100 caixas e no mínimo nove caixas. Esse último intervalo é o que tem o maior número de variáveis devido ao número de caixas que podem chegar a ser empacotadas. Portanto, este último intervalo gera instâncias mais difíceis de resolver.

O tempo máximo de execução do pacote GAMS/CPLEX em todas as instâncias foi definido de 1000 segundos. Os detalhes dos exemplos estão nas tabelas 6, 7 e 8.

#### 5.1.1 Testes iniciais com GAMS/CPLEX

Inicialmente foram testados os modelos “tsai” formado pelas restrições 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 e 98 e pela função objetivo 89; e “tsai modificado” formado pelas restrições 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97 e 98 e pela função objetivo 89, usando o *default* do pacote

Exemplo	$(l, w)$	$n.(l, w)$	$n.(w, l)$
L1	(56,63)	1	1
L2	(69,54)	1	1
L3	(91,94)	1	1
L4	(83,65)	1	1
L5	(54,51)	1	1
L6	(92,78)	1	1
L7	(68,75)	1	1
L8	(50,60)	2	2
L9	(51,83)	1	1
L10	(98,54)	1	1

Tabela 6: Exemplos do Grupo 1

Exemplo	$(l, w)$	$n.(l, w)$	$n.(w, l)$
M1	(41,38)	4	4
M2	(37,43)	4	4
M3	(36,43)	4	4
M4	(47,50)	4	4
M5	(38,46)	4	4
M6	(40,35)	4	4
M7	(41,40)	4	4
M8	(41,39)	4	4
M9	(33,36)	6	6
M10	(46,49)	4	4

Tabela 7: Exemplos do Grupo 2

Exemplo	$(l, w)$	$n.(l, w)$	$n.(w, l)$
D1	(28,29)	9	9
D2	(30,10)	33	33
D3	(30,27)	9	9
D4	(28,24)	12	12
D5	(40,15)	14	14
D6	(16,26)	24	24
D7	(36,16)	18	18
D8	(21,11)	40	40
D9	(19,21)	25	25
D10	(26,11)	30	30

Tabela 8: Exemplos do Grupo 3

GAMS/CPLEX. A idéia é escolher um dos modelos para se aplicar o método de Benders com base nestes experimentos.

Os resultados listados na tabela 9 mostram que todos os exemplos do grupo L

Exemplo	tsai		tsai modificado	
	tempo (seg)	FO	tempo (seg)	FO
L1	0.078	-0.807	0.062	-0.807
L2	0.016	-0.796	0.016	-0.796
L3	0.047	-0.758	0.016	-0.758
L4	0.063	-0.773	0.015	-0.773
L5	0.032	-0.825	0.016	-0.825
L6	0.062	-0.760	0.015	-0.760
L7	0.062	-0.786	0.015	-0.786
L8	0.062	-1.906	0.015	-1.906
L9	0.031	-0.773	0.031	-0.773
L10	0.062	-0.753	0.015	-0.753

Tabela 9: tsai x tsai modificado - grupo 1 - GAMS/CPLEX

foram resolvidos na otimalidade, mas os tempos, em geral, foram menores para o modelo “tsai modificado”.

Exemplo	tsai		tsai modificado	
	tempo (seg)	FO	tempo (seg)	FO
M1	1000	-3.905	1000	-3.964
M2	1000	-3.905	1000	-3.962
M3	1000	-3.905	1000	-3.962
M4	0.062	-3.958	0.110	-3.958
M5	1000	-3.904	1000	-3.961
M6	1000	-3.906	1000	-3.964
M7	1000	-3.904	1000	-3.964
M8	1000	-3.905	1000	-3.964
M9	1000	-5.882	1000	-5.978
M10	0.109	-3.959	0.078	-3.959

Tabela 10: tsai x tsai modificado - grupo 2 - GAMS/CPLEX

Na tabela 10 é possível notar que a resolução de quase todos os exemplos do grupo M foi interrompida porque ultrapassou o limite de tempo pré-definido (1000 seg). Porém, em todos eles obteve-se uma solução inteira mesmo não sendo possível provar sua otimalidade. Duas exceções foram os exemplos M4 e M10.

Nos exemplos que estão marcados com 1000\*, obteve-se uma solução inteira, mas não foi possível provar sua otimalidade.

Na tabela 11 temos que a solução de todos os exemplos do grupo 3 foi interrompida porque ultrapassou o limite de tempo pré-definido (1000 seg). Nos exemplos que estão marcados com 1000\*, obteve-se uma solução inteira, mas não foi possível provar sua

Exemplo	tsai		tsai modificado	
	tempo (seg)	FO	tempo (seg)	FO
D1	1000*	-8.953	1000*	-8.987
D2	1000	**	1000	**
D3	1000*	-8.904	1000*	-8.981
D4	1000*	-11.964	1000*	-11.991
D5	1000*	-14.902	1000*	-14.989
D6	1000*	-18.981	1000*	-17.995
D7	1000	**	1000*	-11.987
D8	1000	**	1000	**
D9	1000	**	1000	**
D10	1000	**	1000	**

Tabela 11: tsai x tsai modificado - grupo 3 - GAMS/CPLEX

otimalidade.

Dados os resultados das tabelas 9, 10 e 11, escolheu-se trabalhar com o modelo “tsai modificado” por apresentar melhores resultados, mesmo usando o *default* do pacote GAMS/CPLEX.

Convém salientar que o desempenho do modelo de Tsai *et al.* (1993) (modificado ou não), usando o GAMS/CPLEX, comparado com o modelo de Beasley (1985) não foi bem, já que o modelo de Beasley (1985) resolve esses exemplos em bem menos que 1000 seg., usando o mesmo pacote GAMS/CPLEX.

Uma mudança no modelo “tsai modificado” no sentido de ordenar as caixas que forem empacotadas no modelo de Tsai *et al.* (1993) foi feita. O intuito era verificar se os resultados seriam melhores que sem considerar a ordenação das caixas. Assim, as caixas com menores índices deveriam ser empacotadas mais próximas da origem do palete. Foram testados 6 exemplos e comparados com os resultados obtidos sem a ordenação, em ambos os casos foram utilizados o *default* do pacote GAMS/CPLEX. Dos 6 exemplos, somente 1 teve resultado melhor utilizando a ordenação; nos demais, os resultados foram piores. Devido a isso, não foram feitos mais testes e nem utilizado esta ordenação no método de Benders.

### 5.1.2 Testes com método B.class

Foi aplicado o método de decomposição de Benders clássico no modelo “tsai modificado”. Os resultados podem ser vistos nas tabelas 12, 13, 14 sendo comparados

com os resultados utilizando o *default* do pacote GAMS/CPLEX.

Exemplo	GAMS/CPLEX		B.class	
	tempo (seg)	FO	tempo (seg)	FO
L1	0.062	-0.807	0.265	-0.807
L2	0.016	-0.796	0.155	-0.796
L3	0.016	-0.758	0.422	-0.758
L4	0.015	-0.773	0.374	-0.773
L5	0.016	-0.825	0.220	-0.825
L6	0.015	-0.760	0.218	-0.760
L7	0.015	-0.786	0.298	-0.786
L8	0.015	-1.906	1.73	-1.906
L9	0.031	-0.773	0.171	-0.773
L10	0.015	-0.753	0.407	-0.753

Tabela 12: GAMS/CPLEX X Benders clássico - grupo 1

Os exemplos do grupo 1 (tabela 12), quando resolvidos pelo método de Benders clássico, resultaram numa solução ótima, mas em um tempo maior do que o *default* do pacote GAMS/CPLEX.

Todos os exemplos do grupo 2 (tabela 13), quando resolvidos com o método de Benders clássico, têm sua solução interrompida no limite de tempo, sem encontrar uma solução e com os limitantes apresentados na tabela 13. Esses exemplos quando resolvidos usando o *default* do pacote GAMS/CPLEX (modelo “tsai modificado”) são interrompidos por causa do limite de tempo e a otimalidade da solução não é provada, mas a última solução encontrada é inteira (coluna FO da tabela 13).

Exemplo	GAMS/CPLEX		B.class	
	tempo (seg)	FO	tempo(seg)	FO
M1	1000	-3.964	1000	-6 / 0
M2	1000	-3.962	1000	-6 / 0
M3	1000	-3.962	1000	-6 / 0
M4	0.110	-3.958	1000	-4 / 0
M5	1000	-3.961	1000	-5 / 0
M6	1000	-3.964	1000	-7 / 0
M7	1000	-3.964	1000	-6 / 0
M8	1000	-3.964	1000	-6 / 0
M9	1000	-5.978	1000	-8 / 0
M10	0.078	-3.959	1000	-4 / 0

Tabela 13: GAMS/CPLEX X Benders clássico - grupo 2

Como ilustração, a figura 13 mostra a solução do exemplo M9 quando resolvido

utilizando GAMS/CPLEX. Neste exemplo, as caixas também são colocadas em camadas e a figura mostra uma perspectiva como se a folha fosse o palete.

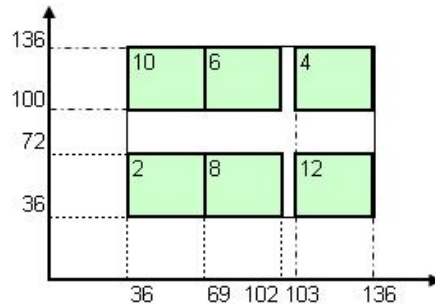


Figura 13: Solução do exemplo M9

Exemplo	GAMS/CPLEX		B.class	
	tempo (seg)	FO	tempo (seg)	FO
D1	1000*	-8.987	1000	-12 / 0
D2	1000	**	1000	-12 / 0
D3	1000*	-8.981	1000	-12 / 0
D4	1000*	-11.991	1000	-14 / 0
D5	1000*	-14.989	1000	-16 / 0
D6	1000*	-17.995	1000	-24 / 0
D7	1000*	-11.987	1000	-17 / 0
D8	1000	**	1000	-43 / 0
D9	1000	**	1000	-25 / 0
D10	1000	**	1000	-34 / 0

Tabela 14: GAMS/CPLEX X Benders clássico - grupo 3

Os exemplos do grupo 3 (tabela 14), quando resolvidos com o método de Benders clássico, também têm sua resolução interrompida no limite de tempo, sem encontrar uma solução e com os limitantes apresentados na tabela 14. Esses exemplos da tabela 14, quando resolvidos usando o *default* do pacote GAMS/CPLEX (modelo “tsai modificado”), são interrompidos por causa do limite de tempo e não tem a otimalidade da solução provada, mas a última solução encontrada nos exemplos D1, D3, D4, D5, D6 e D7 é inteira (coluna FO da tabela 14). Nos outros exemplos, D2, D8, D9 e D10, o GAMS/CPLEX não encontra solução inteira antes do tempo limite.

### 5.1.3 Testes com método B.relax

Também foi comparado o desempenho do método de Benders relaxado no “tsai modificado” com o método de Benders clássico (tabelas 15, 16, 17). O método de Benders relaxado difere do clássico ao resolver o problema mestre relaxado até que um certo *gap* seja alcançado, e só então o problema mestre é resolvido como um problema inteiro. O *gap* adotado neste trabalho foi de 1% da solução ótima. Outros *gaps* foram testados, menores e maiores que 1%, mas não houve melhoras nos resultados dentro do tempo estipulado de 1000 segundos, por isso, como padronização, foi escolhido trabalhar com *gap* de 1%.

Exemplo	B.class			B.relax			
	n. iter	tempo (seg)	FO	n. iter relax	n. iter inteira	tempo (seg)	FO
L1	6	0.265	-0.807	4	4	0.235	-0.807
L2	6	0.155	-0.796	4	4	1.049	-0.796
L3	6	0.422	-0.758	4	4	0.418	-0.758
L4	6	0.374	-0.773	4	4	0.191	-0.773
L5	6	0.220	-0.825	4	4	0.282	-0.825
L6	6	0.218	-0.760	4	3	0.376	-0.760
L7	6	0.298	-0.786	4	3	0.327	-0.786
L8	46	1.73	-1.906	8	43	2.092	-1.906
L9	6	0.171	-0.773	4	4	0.216	-0.773
L10	6	0.407	-0.753	4	3	0.219	-0.753

Tabela 15: Benders clássico X Benders relaxado - grupo 1

Os exemplos do grupo 1 (tabela 15), quando resolvidos com o método de Benders clássico, resultaram numa solução ótima com o número de iterações menores que quando resolvido usando o método de Benders relaxado, que também obteve solução ótima. Porém, o tempo do solução foi menor em 6 exemplos (L2, L5, L6, L7, L8, L9) usando o método de Benders clássico. Nos outros 4 exemplos, apesar do número de iterações ser maior, o tempo de solução foi menor usando o método de Benders relaxado.

Os exemplos do grupo 2 (tabela 16), quando resolvidos com o método de Benders relaxado, foram interrompidos no limite de iteração (a soma do número de iterações relaxadas e inteiras na tabela 16 é 1000) sem encontrar solução e com os limitantes apresentados na tabela 16. Note que LB/UB são iguais para ambos os métodos. A diferença do método de Benders relaxado é que, ao invés de resolver 1000 iterações inteiras como no método de benders clássico, resolve um pouco menos de iterações só com variáveis inteiras.

Exemplo	B.class		B.relax		
	n. iter	LB/UB	n. iter relax	n. iter inteira	LB/UB
M1	1000	-6 / 0	94	906	-6 / 0
M2	1000	-6 / 0	40	960	-6 / 0
M3	1000	-6 / 0	35	965	-6 / 0
M4	1000	-4 / 0	85	915	-4 / 0
M5	1000	-5 / 0	90	910	-5 / 0
M6	1000	-7 / 0	29	971	-7 / 0
M7	1000	-6 / 0	49	951	-6 / 0
M8	1000	-6 / 0	98	902	-6 / 0
M9	1000	-8 / 0	141	859	-8 / 0
M10	1000	-4 / 0	22	978	-4 / 0

Tabela 16: Benders clássico X Benders relaxado - grupo 2

Exemplo	B.class		B.relax		
	n. iter	LB/UB	n. iter relax	n. iter inteira	LB/UB
D1	1000	-12 / 0	687	313	-12 / 0
D2	1000	-12 / 0	1000	0	-33 / 0
D3	1000	-12 / 0	469	531	-12 / 0
D4	1000	-14 / 0	648	352	-14 / 0
D5	1000	-16 / 0	1000	0	-16 / 0
D6	1000	-24 / 0	1000	0	-24 / 0
D7	1000	-17 / 0	1000	0	-17 / 0
D8	1000	-43 / 0	1000	0	-43 / 0
D9	1000	-25 / 0	1000	0	-25 / 0
D10	1000	-34 / 0	1000	0	-34 / 0

Tabela 17: Benders clássico X Benders relaxado - grupo 3

Os exemplos do grupo 3 (tabela 17), quando resolvidos com o método de Benders relaxado, foram interrompidos no limite de iteração sem encontrar solução e com os limitantes apresentados na tabela 16. Note que LB/UB são iguais para ambos os métodos com exceção do exemplo D2. O método de Benders relaxado resolve um pouco menos de 1000 iterações só com variáveis inteiras em 3 exemplos (D1, D3 e D4), enquanto que o método de Benders clássico resolve todas as iterações do problema mestre com variáveis inteiras.

É interessante notar que como as variáveis  $u_{i,j}^1$ ,  $u_{i,j}^2$  e  $P_i$  são binárias no problema original, quando o problema mestre é resolvido relaxado, estas variáveis que antes eram binárias, passam a tomar valor entre 0 e 1 e esses valores são utilizados no subproblema dual.



Mas como o subproblema dual foi obtido a partir do problema linear que continha restrições disjuntivas, ao usarmos as variáveis que eram inicialmente binárias como contínuas, todas as restrições disjuntivas se tornam redundantes, prejudicando o resultado do método relaxado.

Com esses resultados, é verificado que o desempenho dos métodos de decomposição de Benders, nas suas versões B.class e B.relax, não foram bons se comparados com o GAMS/CPLEX aplicado ao modelo de Tsai *et al.* (1993), ou outros métodos exatos, como o de Oliveira e Morabito (2006), capaz de resolver todos esses exemplos em bem menos que 1000 segundos.

#### 5.1.4 Testes com corte de Pareto

O método de decomposição de Benders clássico foi implementado fazendo algumas mudanças para que o corte de Pareto fosse considerado. Os resultados obtidos não foram melhores que os obtidos com o B.class ou com o B.relax. Ao aprofundar o estudo do por que desta não melhora, foi percebido que o modelo adotado neste trabalho (Tsai *et al.* (1993)), ao adotar restrições disjuntivas, faz com que o corte de Pareto seja inviável para este caso.

Como os conjuntos de variáveis  $u_{i,j}^1$ ,  $u_{i,j}^2$  e  $P_i$  são binárias, quando o subproblema original de Benders (subproblema 74) gera um corte do tipo ponto extremo, essas variáveis binárias tomarão valores entre 0 e 1 e então será gerado um novo corte do tipo ponto extremo (corte de Pareto), corte este que seria mais “forte” que o gerado pelo subproblema original de Benders.

Mas como as restrições são disjuntivas, toda vez que os conjuntos de variáveis  $u_{i,j}^1$ ,  $u_{i,j}^2$  tomam valor 0 ou 1, somente uma das restrições fica ativa. As outras restrições passam a ser redundantes. Quando usamos o corte de Pareto, esses conjuntos de variáveis tomarão valores entre 0 e 1, o que faz com que todas as restrições disjuntivas se tornem redundantes, prejudicando o método que usaria o corte de Pareto.

Supondo que tomemos  $u_{i,j}^1 = 0.7$  e  $u_{i,j}^2 = 0.3$ , as restrições 10 a 13 serão dadas por:

$$x_j - x_i \leq -l_j + M(u_{i,j}^1 + u_{i,j}^2) \leq -l_j + M(0.7 + 0.3) \quad (124)$$

$$x_i - x_j \leq -l_i + M(1 - (u_{i,j}^2 - u_{i,j}^1)) \leq -l_i + M(1 - (0.3 - 0.7)) \quad (125)$$

$$y_j - y_i \leq -w_j + M(1 - (u_{i,j}^1 - u_{i,j}^2)) \leq -w_j + M(1 - (0.7 - 0.3)) \quad (126)$$

$$y_i - y_j \leq -w_i + M[2 - (u_{i,j}^1 + u_{i,j}^2)] \leq -w_i + M[2 - (0.7 + 0.3)] \quad (127)$$

Ou seja, sempre haverá um número maior que zero para multiplicar  $M$ . Por isso, devido à escolha do modelo de Tsai *et al.* (1993), que tem esta particularidade das restrições disjuntivas, não foi possível obter resultados satisfatórios com o corte de Pareto.

### 5.1.5 Testes adicionais fixando caixas nos cantos do palete

Foram feitos alguns testes no modelo “tsai fix 1 cx”, ou seja, no modelo “tsai modificado” foi fixado uma caixa na origem do palete e resolvido usando o *default* do pacote GAMS/CPLEX. A motivação é reduzir o tamanho do problema por meio dessa fixação de uma caixa no canto do palete. Para manter a generalidade, cada exemplo foi subdividido em dois outros exemplos: um com uma caixa  $(l, w)$  fixada, onde  $l > w$ , e o outro com uma caixa  $(w, l)$  fixada, no canto inferior esquerdo do palete.

Exemplo	caso $l > w$			caso $l < w$		
	tempo (seg)	gap	FO	tempo (seg)	gap	FO
M4	950	0	-3,958	1000	0,391	-3,958
M9	1000	0,998	-5,968	1000	0,999	-5,968

Tabela 18: Fixando 1 caixa

O exemplo M4 no caso  $l > w$  foi o único da tabela 18 que foi resolvido provando a otimalidade de sua solução. O exemplo M4 em que  $l < w$  foi interrompido, pois ultrapassou o limite de tempo sem provar a otimalidade da solução. A tabela 18 também apresenta os resultados do exemplo M9, em que os exemplos  $(l > w$  e  $l < w)$  foram interrompidos sem provar a otimalidade da solução.

Foi também testado o modelo “tsai fix 4 cxs”, ou seja, no modelo “tsai modificado” foram fixadas quatro caixas no palete (nos cantos do palete). Para que não houvesse perda de generalidade, as caixas fixadas foram combinadas para que todas as combinações possíveis sejam realizadas e levando em conta os casos de simetria.

Considerando que a caixa pode ser  $(l, w)$  ou  $(w, l)$ , teremos 7 combinações possíveis conforme figuras 14, 15, 16, 17 e 18 a seguir:

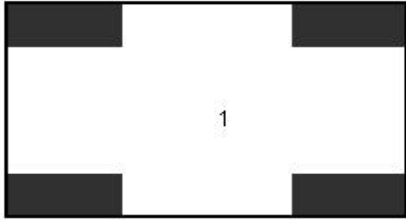


Figura 14: 4 caixas horizontais

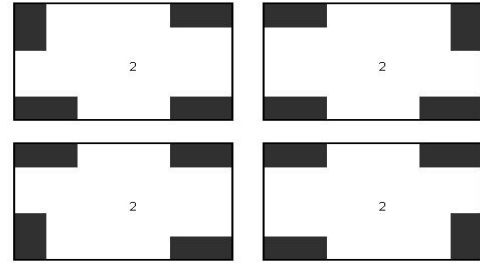


Figura 15: 1 caixa vertical e 3 horizontais

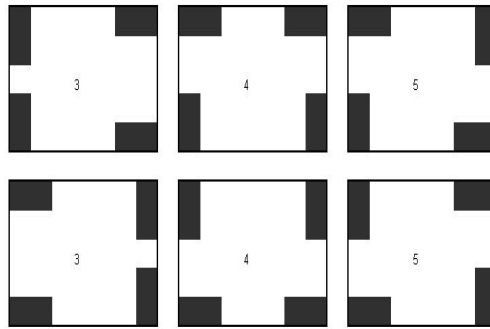


Figura 16: 2 caixas verticais e 2 caixas horizontais (3 casos)

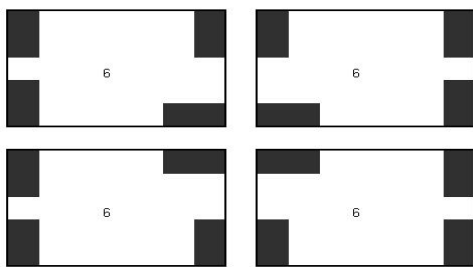


Figura 17: 3 caixas verticais e 1 horizontal

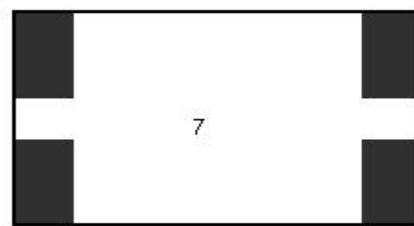


Figura 18: 4 caixas verticais

Assim, foram resolvidos 7 instâncias correspondentes, para que não houvesse perda de generalidade, usando o *default* do pacote GAMS/CPLEX.

Na tabela 19 é possível notar que todos os casos foram resolvidos otimamente dentro dos limites de tempo e iterações estabelecidos, enquanto que pela tabela 13 o exemplo M4 é interrompido por causa do limite de tempo e sem provar a otimalidade da solução, apesar da última solução encontrada ser inteira.

Casos	n. iter	tempo (seg)	FO
Caso 1	66	0.109	-3.896
Caso 2	68	0.047	-3.896
Caso 3	74	0.031	-3.896
Caso 4	72	0.063	-3.896
Caso 5	68	0.032	-3.895
Caso 6	72	0.031	-3.895
Caso 7	62	0.094	-3.896
Total	482	0.407	-

Tabela 19: Fixando 4 caixas - exemplo M4

A solução ótima do exemplo M4 é mostrado na figura 19. Nesta solução, as caixas também são colocadas em camadas e a figura 19 também mostra uma perspectiva como se a folha fosse o palete.

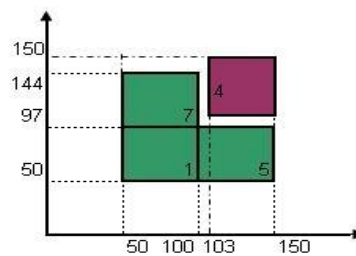


Figura 19: Solução do exemplo M4

Note que neste exemplo (figura 19), o valor de  $X^0$  e  $Y^0$  seria maior se não tivéssemos alterado o modelo de Tsai *et al.* (1993) para que fosse considerado a não sobreposição das caixas somente quando elas são empacotadas.

Casos	n. iter	tempo (seg)	FO
Caso 1	9932340	1000	-8,959
Caso 2	9407842	1000	-8,959
Caso 3	11411196	1000	-8,959
Caso 4	10635524	1000	-8,959
Caso 5	12127198	1000	-8,959
Caso 6	10624949	1000	-8,959
Caso 7	8141600	1000	-6,959
Total D3	72280649	7000	-

Tabela 20: Fixando 4 caixas - exemplo D3

Um outro experimento foi realizado com o exemplo D3. A tabela 20 mostra que para todos os 7 casos o modelo foi interrompido pelo tempo, mas mesmo assim a última solução encontrada foi uma solução inteira, enquanto que pela tabela 17 o exemplo D3 é interrompido sem encontrar uma solução inteira. A soma do número de iterações quando fixado 4 caixas é maior que 1000 iterações, mas ao menos é encontrada uma solução inteira em cada caso.

## 5.2 Experimentos com Carregamentos de Paletes do Produtor (tridimensional)

Inicialmente, a título de ilustração, um exemplo gerado aleatoriamente com apenas duas caixas sendo colocadas em um palete é analisado para o problema de carregamento de paletes do produtor tridimensional (apêndice D).

Consideramos  $(L, W, H) = (50, 50, 37)$  e  $(l, w, h) = (37, 43, 16)$ . Como dado inicial do modelo, são consideradas 2 caixas - caixas 1 e 6 -  $(l, w, h) = (37, 43, 16)$ , 2 caixas - caixas 2 e 5 -  $(w, l, h) = (43, 37, 16)$ , 1 caixa - caixa 3 -  $(h, w, l) = (16, 43, 37)$ , 1 caixa - caixa 4 -  $(h, w, l) = (43, 16, 37)$ .

Vale lembrar que o cálculo dos parâmetros  $M, X^0, Y^0, Z^0$  são obtidos da seguinte forma:  $X^0 = Y^0 = Z^0 = \max\{l_1, w_1, h_1\}$  e  $M = \max\{X^0 + L, Y^0 + W, Z^0 + H\}$ . Com isso,  $M = 210$  e  $(X^0, Y^0, Z^0) = (43, 43, 43)$ .

Para diminuir ainda mais a função objetivo, o modelo faz com que uma das quatro primeiras caixas esteja na origem do palete (isso se elas forem empacotadas). E a que não estiver na origem, estará no ponto mais próximo possível da origem do palete.

Resolvendo o exemplo aleatório tanto com o método de Benders quanto com o *default* do pacote GAMS/CPLEX, encontramos o valor da função objetivo como sendo  $-1.919$ . E a posição das caixas no palete é dada por:  $(x_1, y_1, z_1) = (43, 43, 43)$  e  $(x_5, y_5, z_5) = (43, 43, 59)$ . Veja figura 20 a seguir com a solução do exemplo aleatório.

Além do exemplo aleatório, fizemos dois experimentos com dados reais de uma empresa. Colocamos como limite no pacote GAMS/CPLEX o tempo de 15 minutos. O palete usado nesta empresa é padrão PBR, ou seja, tamanho de  $120 \times 100$ .

No exemplo 1 com os dados da empresa,  $(X^0, Y^0, Z^0) = (70.5, 70.5, 70.5)$ ,  $(L, W, H) = (120, 100, 100)$ , 40 caixas  $(l, w, h) = (70.5, 17, 17)$ , 40 caixas  $(w, l, h) = (17, 70.5, 17)$  e 40 caixas  $(w, l, h) = (17, 17, 70.5)$ .

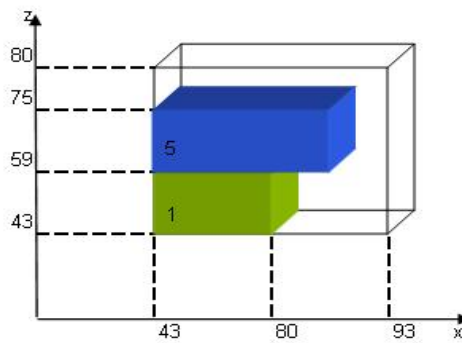


Figura 20: exemplo aleatório tridimensional

No exemplo 2 com os dados da empresa,  $(X^0, Y^0, Z^0) = (43, 43, 43)$ ,  $(L, W, H) = (120, 100, 100)$ , 120 caixas  $(l, w, h) = (43, 10, 17)$ , 120 caixas  $(w, l, h) = (10, 43, 17)$ , 120 caixas  $(w, l, h) = (17, 43, 10)$ , 120 caixas  $(w, l, h) = (43, 17, 10)$ , 120 caixas  $(w, l, h) = (17, 10, 43)$  e 120 caixas  $(w, l, h) = (10, 17, 43)$ .

As soluções encontradas na prática pela empresa para os exemplos 1 e 2 estão nas figuras 21 e 22, respectivamente. A empresa adota o empacotamento por camada. No desenho está a primeira camada vista de cima. As outras quatro camadas são idênticas à primeira.

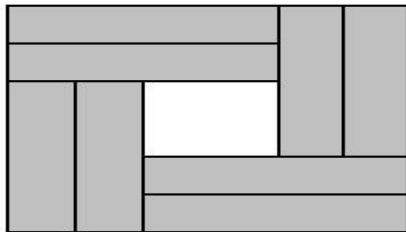


Figura 21: exemplo 1 na empresa

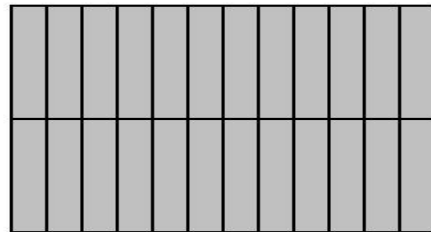


Figura 22: exemplo 2 na empresa

A tabela 21 mostra os resultados dos exemplos aleatórios, exemplo 1 da empresa e exemplo 2 da empresa.

	B.class		GAMS/CPLEX	
	tempo (seg)	gap abs/rel	tempo (seg)	gap abs/rel
o ex aleatório	5.171	0/0	0.078	0/0
ex 1	**	**	> lim iter	**
ex 2	**	**	> lim iter	**

Tabela 21: Carregamentos de Paletes do Produtor Tridimensional

Vemos pela tabela 21 que tanto o *default* do GAMS/CPLEX aplicado ao modelo “tsai modificado”, quanto o método de Benders clássico encontraram solução ótima para o exemplo aleatório (vide figura 20), com poucas caixas e, portanto, poucas variáveis. A solução deste exemplo aleatório já foi mostrada nas figura 20. O método de Benders não encontrou, dentro do tempo estipulado, solução inteira para os dois experimentos com dados reais de uma empresa. O número de iterações permitidas pelo *default* do pacote computacional foi ultrapassado usando o *default* do pacote GAMS/CPLEX no primeiro e segundo exemplos. Como este era um critério de parada, não foi encontrada, então, nenhuma solução inteira factível.

### 5.3 Experimentos com Carregamentos de Paletes do Distribuidor

Consideramos um exemplo em que o distribuidor tem disponível 3 caixas, sendo de 2 tipos: 2 caixas (2, 3) e 1 caixa (2, 1) (apêndice E). Com isso, nos dados do exemplo foram colocados 6 caixas, sendo que: 2 (caixas 1 e 5) são (2, 3), 2 (caixas 2 e 6) são (3, 2), 1 (caixa 3) é (2, 1) e a outra (caixa 4) é (1, 2). O tamanho do palete é de  $5 \times 3$ . Abaixo segue tabela 22 com os resultados obtidos.

	B.class		GAMS/CPLEX	
	tempo (seg)	gap abs/rel	tempo (seg)	gap abs/rel
exemplo	1.437	0/0	0.094	0/0

Tabela 22: Carregamentos de Paletes do Distribuidor

Os dois métodos de solução encontraram a solução ótima. A função objetivo encontrada nos dois casos foi  $-13.929$ . O tempo computacional foi bem menor usando o GAMS/CPLEX. Os resultados encontrados podem ser vistos na figura 23 (as caixas são colocadas em camadas e a figura 23 também mostra uma perspectiva como se a folha fosse o palete). No método de Benders clássico e usando o *default* do pacote GAMS/CPLEX para resolver “tsai modificado”, as caixas que foram colocadas dentro do palete são as caixas 3, 5 e 6.

Os experimentos numéricos deste capítulo mostram as limitações dos métodos de decomposição de Benders, nas suas versões atuais, mesmo quando aplicados em exemplos relativamente pequenos de carregamento de paletes (produtor e distribuidor).

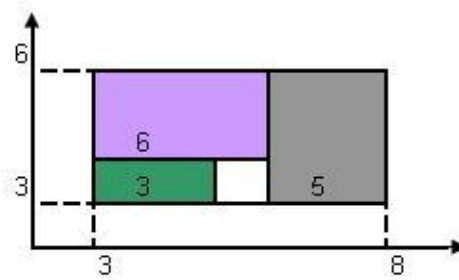


Figura 23: Exemplo do carregamento de paletes do distribuidor

## 6 Conclusões e Perspectivas para Pesquisas Futuras

### 6.1 Conclusões

Com o objetivo de verificar o desempenho do método de decomposição de Benders aplicado a modelos de carregamento de paletes do produtor e do distribuidor, foi escolhido um modelo de carregamento de paletes no qual fosse possível utilizar este método.

A escolha do modelo de Tsai *et al.* (1993) se deveu ao fato de as variáveis inteiras e contínuas serem facilmente separáveis, facilitando a aplicação do método de decomposição de Benders. Algumas mudanças foram feitas no modelo de Tsai *et al.* (1993) para tentar diminuir o tempo de solução. A inclusão de duas restrições (limitantes superiores e inferiores para o número de caixas que inicialmente podem ser empacotadas) foi uma delas. A outra mudança no modelo foi fazer com que só fossem consideradas as restrições de não sobreposição quando as caixas fossem de fato empacotadas no palete. Uma terceira mudança foi a inclusão de um segundo termo na função objetivo para simplificar o uso do método de decomposição de Benders.

A escolha do método de decomposição de Benders vem do fato de o método ter tido bons resultados quando aplicado a vários outros problemas (vide 1.1). O fato de não conhecermos outros trabalhos na literatura que tenham aplicado o método de decomposição de Benders aos problemas de carregamento de paletes também foi uma motivação para a escolha deste método.

Algumas modificações também foram feitas no método de decomposição de Benders para verificar se haveria melhora nas soluções em relação ao método clássico. A primeira modificação foi o método de decomposição de Benders relaxado em que o problema mestre é resolvido inicialmente relaxado, ou seja, com variáveis contínuas, e



somente depois de um *gap* pré-determinado o problema mestre passa a ser resolvido como um problema inteiro. A segunda mudança foi a inclusão do corte de Pareto. Neste caso, a geração de um corte de Pareto é feita toda vez que o subproblema de Benders fornecer como resultado a inclusão de um corte do tipo ponto extremo no problema mestre.

A variação do valor de *big M* nas restrições disjuntivas não teve mudanças significativas nos resultados, por isso foi adotado um valor padrão de  $M = \max(X^0 + L, Y^0 + W)$  para cada instância.

As mudanças no modelo de Tsai *et al.* (1993) trouxeram uma pequena melhora em relação ao modelo de Tsai *et al.* (1993) original. Tanto no modelo original quanto no modelo modificado, todas as soluções das instâncias do grupo 1 (tabela 9 do capítulo 5.1.1) foram resolvidos otimamente, porém os tempos foram menores para o modelo modificado. Nos exemplos do grupo 2 (tabela 10 do capítulo 5.1.1), somente dois exemplos encontraram solução ótima dentro do tempo estipulado. E em um deles o tempo foi menor para o modelo modificado e no outro o tempo foi menor para o modelo de Tsai *et al.* (1993) original. Já nos exemplos do grupo 3 (tabela 11 do capítulo 5.1.1), nenhum exemplo foi resolvido na otimalidade, mas enquanto que o modelo modificado encontrou uma solução inteira para 60% exemplos, o modelo original encontrou soluções inteiras para 50% dos exemplos.

Apesar de a expectativa inicial ter sido de que o método de Benders fosse dar resultados melhores que o uso do *default* do pacote GAMS/CPLEX, isso não ocorreu. Os exemplos do grupo 1 (tabela 12 do capítulo 5.1.2) foram resolvidos na otimalidade, mas o tempo necessário para a solução utilizando o método *B.class* foi bem maior. Para os outros exemplos (tabelas 13 e 14 do capítulo 5.1.2), nenhuma solução inteira foi encontrada dentro do tempo limite de 1000 segundos.

As variações exploradas no método de Benders clássico também não resultaram em resultados muito melhores que o método clássico.

Para os exemplos do grupo 1 (tabela 15 no capítulo 5.1.3), o método de Benders relaxado teve suas solução obtidas com um número maior de iterações quando comparado ao método de Benders clássico. Além disso, o tempo gasto para obter a solução foi menor usando o método de Benders clássico em 6 dos 10 exemplos. Os exemplos maiores (tabelas 16 e 17 no capítulo 5.1.3) foram interrompidos no limite de iteração, mas é possível dizer que o método de Benders relaxado tem um “ganho”, pois em algumas iterações ele é

resolvido como um problema linear, obtendo vantagem computacional por causa disso.

Cale notar que o desempenho do método de decomposição de Benders relaxado se mostrou prejudicado devido à particularidade das restrições disjuntivas do modelo de Tsai *et al.* (1993).

Com base nesses resultados, o desempenho do método de decomposição de Benders (clássico ou relaxado) aplicado ao modelo de Tsai *et al.* (1993) não se mostrou superior ao uso do *default* do pacote GAMS/CPLEX para resolver o mesmo modelo. Outros métodos exatos, como o de Oliveira e Morabito (2006) também são capazes de resolver esses exemplos em bem menos tempo que 1000 segundos.

O uso do corte de Pareto (capítulo 5.1.4) também foi insatisfatório devido à particularidade das restrições disjuntivas do modelo de Tsai *et al.* (1993).

Também foi testado fixar uma caixa no modelo de Tsai *et al.* (1993) e resolvê-lo, sem perda de generalidade. Os resultados encontrados (tabela 18 no capítulo 5.1.5) não foram melhores que sem fixar nenhuma caixa e não estimularam experimentos adicionais.

Já quando são fixadas 4 caixas no modelo de Tsai *et al.* (1993) e resolvidas todas as possíveis combinações em um exemplo que tem como solução quatro caixas empacotadas e 8 caixas como dado inicial do problema, é obtida a solução ótima. Na tabela 19 do capítulo 5.1.5 é possível notar que todos os casos foram resolvidos otimamente dentro dos limites de tempo e iterações estabelecidos, enquanto que pela tabela 13 do capítulo 5.1.2 o exemplo M4 é interrompido quando resolvido pelo método de Benders, por causa do limite de tempo e sem provar a otimalidade da solução. Neste caso, quando as caixas são fixadas, é obtida a solução ótima.

Para o experimento fixando 4 caixas no exemplo D3, a tabela 20 (capítulo 5.1.5) mostra que para todos os 7 casos o modelo foi interrompido pelo tempo, mas mesmo assim a última solução encontrada foi inteira, enquanto que pela tabela 17 (capítulo 5.1.3) o exemplo D3 é interrompido sem encontrar solução inteira.

Foram realizados alguns experimentos preliminares com exemplos ilustrativos para os casos de carregamento de paletes do produtor tridimensional e do distribuidor bidimensional.

Nos experimentos com carregamentos de paletes do produtor tridimensional, os resultados com exemplos reais não foram satisfatórios, ou seja, não foi encontrada solução ótima nem usando o *default* do pacote GAMS/CPLEX nem usando o método de Benders

clássico. Para os exemplos aleatórios com poucas caixas foram obtidas uma solução ótima e o *default* do pacote GAMS/CPLEX obteve a solução em um tempo menor.

No experimento com carregamentos de paletes do distribuidor, o *default* do pacote GAMS/CPLEX aplicado para resolver o modelo de Tsai *et al.* (1993) obteve a solução ótima em um tempo menor que quando resolvido o modelo de Tsai *et al.* (1993) usando o método de decomposição de Benders clássico.

Desta forma, todos estes experimentos mostraram as limitações do método de decomposição de Benders, nas suas versões atuais, quando aplicadas para resolver problemas de carregamento de paletes do produtor e distribuidor. Esse desempenho não era esperado no início desta pesquisa.

## 6.2 Perspectivas para Pesquisas Futuras

Na tentativa de acelerar a obtenção de soluções ótimas (ou subótimas) no pacote GAMS/CPLEX para a abordagem de decomposição de Benders, baseada no modelo de Tsai *et al.* (1993), uma perspectiva para pesquisa futura é investigar o uso de soluções factíveis iniciais (limitantes inferiores). Como, por exemplo, a heurística em Morabito e Morales (1998). A inclusão de restrições redundantes no modelo de Tsai *et al.* (1993) para tentar tornar o modelo mais apertado (por exemplo, restrições do modelo de Chen *et al.* (1995) e Martins (2002)) também é uma alternativa interessante para ser explorada.

Como a linguagem de modelagem adotada neste trabalho é de alto nível, usar uma linguagem de programação de mais baixo nível, como Pascal ou  $C^{++}$ , pode melhorar significativamente as soluções dentro do tempo limite, já que o pacote usado (GAMS/CPLEX) leva mais tempo nas iterações ao resolver, a cada iteração de Benders, o modelo completo.

Pesquisas futuras podem ainda serem feitas para verificar se, sem utilizar o método de decomposição de Benders, mas tentando melhorar os recursos oferecidos pelo pacote computacional, a solução do modelo de Tsai *et al.* (1993) pode ser encontrada mais rapidamente. Para isso, pode-se mudar o *default* do pacote GAMS/CPLEX, modificando os parâmetros de pacote.

Também na tentativa de acelerar a obtenção de soluções ótimas com o pacote GAMS/CPLEX para os modelos de Beasley (1985b), Tsai *et al.* (1993), Chen *et al.* (1995) e de Martins (2002), pode-se investigar o uso de soluções factíveis iniciais e bons

limitantes superiores. Também pode ser considerado comparar as soluções de relaxação linear destes modelos no pacote GAMS/CPLEX, para verificar empiricamente qual dos modelos é mais apertado, ou seja, qual deles fornece os melhores limitantes superiores de relaxação linear.

## Referências Bibliográficas

- ARAÚJO, O.C.B. (2006) Problemas de Corte e Empacotamento tridimensional e integração com roteamentos de veículos. *Tese de Doutorado*, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas.
- ÁLVAREZ-VALDÉS, R.; MARTÍ, R.; PARAJÓN, A.; TAMARIT, J.M. (2007) GRASP and Path Relinking for the two-dimensional two-staged cutting stock problem. *INFORMS Journal on Computing*, v.19, n.2, p.1-12.
- ARENALES, M.; MORABITO, R. (1995) An and/or-graph approach to the solution of two-dimensional non-guillotine cutting problems. *European Journal of Operational Research*, v.84, p.599-617.
- ARENALES, M.; MORABITO, R.; YANASSE, H. (1999) Cutting and packing problems. *Pesquisa Operacional*, v. 19, n.2, p.107-299.
- BHATTACHARYA, S.; ROY, R.; BHATTACHARYA, S. (1998) An exact depth-first algorithm for the pallet loading problem. *European Journal of Operations Research*, v.110, p.610-625.
- BEASLEY, J. (1985a) Algorithms for unconstrained two-dimensional guillotine cutting. *Journal of the Operational Research Society*, v. 36, n.4, p. 297-306.
- BEASLEY, J. (1985b) An exact two-dimensional non guillotine cutting tree search procedure. *Journal of the Operational Research Society*, v. 36, n.4, p. 297-306.
- BEASLEY, J. (1985c) Bounds for two-dimensional cutting. *Operations Research*, v. 36,n.1, p. 71-74.
- BENDERS, J. (1962) Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. *Numerisch Mathematik*, v.4, p.238-252.
- BIRGE, J. R.; LOUVEAUX, F. V. (1988). A multicut algorithm for two-stage stochastic linear programs. *European Journal of Operational Research*, v. 34, p. 384-392.
- BIRGIN, E.; MORABITO, R.; NISHIHARA, F. (2005) A note on an L-approach for solving the manufacturer's pallet loading problem. *Journal of the Operational Research Society*, v.56, p.1448-1451.
- BIRGIN, E.; LOBATO, R.D.; MORABITO, R. (2008) An effective recursive partitioning approach for the packing of identical rectangles in a rectangle. *Aceito para publicação no Journal of the Operational Research Society*.
- BISCHOFF, E.; DOWSLAND, W. (1982) An application of the micro to product design and distribution. *Journal of the Operational Research Society*, v.33, p. 271-280.
- BISCHOFF, E.E.; JANETZ, F.; RATCLIFF, M.S.W. (1995) Loading pallets with non-identical items. *European Journal of Operational Research*, v.84, p.681-692.
- BISCHOFF, E.; RATCLIFF, M. (1995) Loading multiple pallets. *Journal of the Operational Research Society*, v. 46, p. 1322-1336.

- BISCHOFF, E.; WAESCHER, G. (1995) Special issue: Cutting and packing. *European Journal of Operational Research*, v.84, n.3.
- BROOKE, A.; KENDRIK, D.; MEERAUS, A.; ROSENTHAL, R. (1998) GAMS: A User's Guide. GAMS Development Co., Washington.
- CAI, X.; MCKINNEY, D.C.; JR., L.S.L.D.W.W. (2001) Solving large nonconvex water resources management models using generalized Benders decomposition. *Operations Research*, v.49,n.2, p.235-245.
- CAMARGO, S.C. (2007), Sistemas eixo-raio de múltipla atribuição: modelos e algoritmos. *Tese de Doutorado*, Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais.
- CECILIO, F. (2003) Heurística para o problema de carregamento de carga dentro de contêineres. *Dissertação de Mestrado*, Departamento de Engenharia de Produção, Universidade Federal de São Carlos.
- CECILIO, F.; MORABITO, R. (2004) Refinamentos na heurística de George e Robinson para o problema de carregamento de caixas dentro de contêineres. *Transportes*, v.12, n.1, p.32-45.
- CHEN, C.S.; LEE, S.M.; SHEN, Q.S. (1995) An analytical model for the container loading problem. *European Journal of Operational Research*, v.80, p.68-76.
- CHENG, C.H.; FEIRING, B.R.; CHENG, T.C.E. (1994) The Cutting stock Problem - A Survey. *International Journal of Production Economics*, v.36, p. 291-305.
- CORDEAU, J.F.; SOUMIS, F.; DESROSIEERS, J. (2000) A Benders decomposition approach for the locomotive and car assignment problem. *Transportation Science*, v.34,p.133-149.
- CORDEAU, J.F.; SOUMIS, F.; DESROSIEERS, J. (2001) Simultaneous assignment of locomotives and cars to passenger trains. *Operations Research*, v.49,n.4, p.531-548.
- COSTA, A.M. (2005) A survey on benders decomposition applied to fixed-charge network design problems. *Computers & Operations Research*, v.32, p.1429-1450.
- DOWSLAND, K. (1987) An exact algorithm for the pallet loading problem. *European Journal of Operational Research*, v.31, p.78-84.
- DOWSLAND, K. (1993) Some experiments with simulated annealing techniques for packing problems. *European Journal of Operational Research*, v.68, p.389-399.
- DOWSLAND, K.; DOWSLAND, W. (1992) Packing problems. *European Journal of Operational Research*, v.56, p.2-14.
- DYCKHOFF, H. (1990). A Typology of Cutting and Packing Problems. *European Journal of Operational Research*, v.44, p.145-159.
- DYCKHOFF, H.; FINKE, U. (1992) Cutting and packing in production and distribution: Typology and bibliography. *Springler-Verlag Co*, Heidelberg.
- DYCKHOFF, H.; KRUSE, H.J.; ABEL, D.; GAL, T. (1985) Trim loss and related problems. *Omega*,

v.13, p.59-72.

DYCKHOFF, H.; SCHEITHAUER, G.; TERNO, J. (1997) Cutting and Packing in Annotated bibliographies en combinatoriaç optimasation, edited by M. Amico, F. Maffioli e S. Martello (New York, NY: Wiley), p.393-414.

ESICUP, Special Interest Group on Cutting and Packing, online library, disponível em <http://www.apdio.pt/sicup/index.html>. Acesso em 2008

FARAGO, R.; MORABITO, R. (2000) Um método heurístico baseado em relaxação Lagrangiana para o problema do carregamento de paletes do produtor. *Pesquisa Operacional*, v.20, n.2, p.197-212.

FRANÇA, P.M.; LUNA, H.P.L. (1982) Solving stochastic transportation-location problems by generalized Benders decomposition. *Transportation Science*, v.16, n.2, p.113-126.

FULLER, J.D.; CHUNG, W. (2008) Benders decomposition for a class of variational inequalities. *European Journal of Operational Research*, v. 185, ISSUE 1, p. 76-91.

GAREY, M.R.; JOHNSON, D.S. (1979) Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness. W. H. Freeman and Company.

GEOFFRION, A.M. (1972) Generalized Benders decomposition. *Journal of optimization Theory and Applications*, v.10, n.4, p.237-260.

GEOFFRION, A.M.; GRAVES, G.W. (1974) Multicommodity distribution system design by Benders decomposition. *Management Science*, v.20,p.822-844.

GILMORE, P.; GOMORY, R. (1965). Multistage Cutting Stock Problems of Two and More Dimensions. *Operations Research*, v.14, p.94-120.

HADJICONSTANTINOU, E.; CHRISTOFIDES, N. (1995) An exact algorithm for general, orthogonal, two-dimensional knapsack problems. *European Journal of Operations Research*, v.83, p.39-56.

HAFFNER, S.L.; GARCIA, A.L.; MONTICELLI, A.J.; LAZARO, R.A.R. (1999) Planejamento dinâmico da expansão de sistemas de transmissão de energia elétrica considerando múltiplos estágios. *XV SNPTEE - Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica*, p.1-6, Foz de Iguaçu,PR.

HAMDOUNI, M.; DESAULNIERS, G.; SOUMIS, F. (2007) Parking buses in a depot using block patterns: A Benders decomposition approach for minimizing type mismatches. *Computers & Operations Research*, v. 34, ISSUE 11, p. 3362-3379.

HERAGU, S.S.; CHEN, J.S. (1998) Optimal solution of cellular manufacturing system design: Benders decomposition approach. *European Journal of Operational Research*, v.107, p.175-192.

HIFI, M. (2002) Special Issue: cutting and packing problems. *Studia Informatica Universalis*, v.2, p.1-161.

HOANG, H.H. (2005). Topological optimization of networks: A nonlinear mixed integer model employing generalized benders decomposition. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-v. 27, p. 164-169.

- HODGSON, T.J. (1982) A combined approach to the pallet loading problem. *IIE Transactions*, v.14, n.3, p.175-182.
- HODGSON, T.J.; HUGHES, D.S.; MARTIN-VEGA, L.A. (1983) A note on a combined approach to the pallet loading problem. *IIE Transactions*, v.15, n.3, p.268-271.
- INTERLOGIS, disponível em <http://www.interlogis.com.br/artigos/tecnica-unitizacao2.htm>. Acesso em 2008.
- ISRANI, S.; SANDERS, J. (1982) Two-dimensional cutting stock problem research: a review and a new rectangular layout algorithm. *Journal of Manufacturing Systems*, v.1, n.2, p.169-182.
- LETCHFORD, A.; AMARAL, A. (2001) Analysis of upper bounds for the pallet loading problem. *European Journal of Operational Research*, v.132, p.582-593.
- LINS, L.; LINS, S.; MORABITO, R. (2002) An n-tet graph approach for non-guillotine packings of n-dimensional boxes into an n-container. *European Journal of Operational Research*, v.141, p.421-439.
- LINS, L.; LINS, S.; MORABITO, R. (2003) An L-approach for packing (l,w)-rectangles into rectangular and L-shaped pieces. *Journal of the Operational Research Society*, v.54, p.777-789.
- MAGNANTI, T.L; MIRCHANDANI, P.; WONG, R.T. (1986) Tailoring benders decomposition for uncapacitated network design. *Mathematical Programming Study*, v.26, p.112-154.
- MAGNANTI, T.; WONG, R.T. (1981) Accelerating Benders decomposition: algorithmic enhancement and model selection criteria. *Operations Research*, v.23, p.464-484.
- MAHEY, P.; BENCHAKROUN, A.; BOYER, F. (2001). Capacity and flow assignment of data networks by generalized benders decomposition. *Journal of Global Optimization*, v. 20, n.2, p.169-189.
- MARTELLO, S. (ed.) (1994). Special issue: Knapsack, Packing and Cutting - Part I: One Dimensional Knapsack Problems. *Infor*, v.32, n.2.
- MARTELLO, S.; TOTH, P. (1990). Knapsack problems: algorithms and computer implementations. Chichester: John Wiley & Sons.
- MARTINS, G.H.A. (2002) Packing in Two and Three Dimensions. *Tese de Doutorado*, Naval Postgraduate School, Monterey, California.
- MARTINS, G.H.A.; DELL, R.F. (2007) The minimum size instance of a pallet loading problem equivalence class. *European Journal of Operational Research*, v.179, p.17-26.
- MANTOVANI, J.R.S.; SCUCUGLIA, J.W.; ROMERO, R.; GARCIA, A.V. (2001) Planejamento de fontes reativas em sistemas de energia elétrica utilizando a técnica de decomposição de Benders e o algoritmo de branch and bound. *Revista Brasileira de Controle & Automação (SBA)*. Brasil, v.12, n.02, p.131-140.
- MERCIER, A . ; CORDEAU, J.F.; SOUMIS, F. (2005) A computational study of Benders decomposition for the integrated aircraft routing and crew scheduling problem. *Computers & Operations Research*, v.



32, n.6, p. 1451-1476.

MEVERT, P. (1977) Fixed Charge Network Flow Problems: Applications and Methods of Solution, presented at Large Scale and Hierarchical Systems Workshop, Brussels (May).

MIRANDA, G.J. (2004) Facility Location and Network Design with Congestion Costs and Interdependency. *Tese de Doutorado*, Departamento de Ciência da Computação, Universidade Federal de Minas Gerais.

MORABITO, R.; ARENALES, M. (1992) Um exame dos problemas de corte e empacotamento. *Pesquisa Operacional*, v.12, n.1, p.1-20.

MORABITO, R.; ARENALES, M. (1994) An and/or-graph approach to the container loading problem. *International Transactions in Operational Research*, v.1, n.1, p.59-73.

MORABITO, R.; ARENALES, M. (1997) Abordagens para o problema do carregamento de contêineres. *Pesquisa Operacional*, v.17, n.1, p.29-56.

MORABITO, R.; FARAGO, R. (2002) A tight Lagrangean relaxation bound for the manufacturer's pallet loading problem. *Studia Informatica Universalis*, v.2, n.1, p.57-76.

MORABITO, R.; MORALES, S. (1998) A simple and effective recursive procedure to the manufacturer's pallet loading problem. *Journal of the Operational Research Society*, v.49, p.819-828.

MORABITO, R.; MORALES, S. (1999) Errata A simple and effective recursive procedure to the manufacturer's pallet loading problem. *Journal of the Operational Research Society*, v.50, p.876.

MORALES, S.R. (1995) Otimização no Carregamento de Paletes: Uma Abordagem Heurística para Resolver o Problema do Produtor. *Dissertação de Mestrado*, Departamento de Engenharia de Produção, Universidade Federal de São Carlos.

MORALES, S.R.; MORABITO, R.; WIDMER, J.A. (1997) Otimização do Carregamento de Produtos Paletizados em Caminhões. *Gestão & Produção*, v.4, n.2, p. 234-250.

MOURA, R. A. Check sua logística interna. São Paulo: Imam, 1998.

NELISSEN, J. (1994). Solving the pallet loading problem more efficiently. Working Paper, Graduiertenkolleg Informatik und Technik, Aachen.

NELISSEN, J. (1995) How to use structural constraints to compute an upper bound for the pallet loading problem. *European Journal of Operational Research*, v.84, p.662-680.

OLIVEIRA, L. K. (2004) Métodos exatos baseados em relaxação lagrangiana e surrogate para o problema de carregamento de paletes do produtor. *Tese de Doutorado*, Departamento de Engenharia de Produção, Universidade Federal de São Carlos.

OLIVEIRA, L. K.; MORABITO, R. (2006). Métodos exatos baseados em relaxações Lagrangiana e *surrogate* para o problema de carregamento de paletes do produtor. *Pesquisa Operacional*, v. 26, n.2, p. 403-432.

- PUREZA, V.; MORABITO, R. (2003) Uma heurística de busca tabu simples para o problema de carregamento de paletes do produtor. *Pesquisa Operacional*, v.23, n.2, p.259-378.
- PUREZA, V.; MORABITO, R. (2006) Some experiments with a simple tabu search algorithm for the manufacturer's pallet loading problem. *Computers & Operations Research*, v.33, p.804-819.
- RANDAZZO, C.; LUNA, H. (2001) A comparison of optimal methods for local access uncapacitated network design. *The Annals of Operations Research*, v.106, p.263-286.
- RIBEIRO, G.M.; LORENA, L.A.N. (2005) Análise da estivagem de unidades de celulose usando relaxação lagrangeana. In: XIX ANPET - CONGRESSO DE PESQUISA E ENSINO EM TRANSPORTES. Recife - Pernambuco.
- ROBERTS, S.A. (1984) Application of heuristic techniques to the cutting-stock program for worktops. *Journal of the Operational Research Society*, v. 35, n.5, p. 369-377.
- STEUDEL, H. (1979) Generating pallet loading patterns: a special case of the two-dimensional cutting stock problem. *Management Science*, v.10, p.997-1004.
- STEUDEL, H. (1984) Generating pallet loading patterns with considerations of item stocking on end and side surfaces. *Journal of Manufacturing Systems*, v. 3, n.2, p. 9135-143.
- SULE, D.R. (1988) Manufacturing Facilities - Location, Planning and Design. PWS-ENT Publishing Company.
- SWEENEY, P.; PATERNOSTER, E. (1992) Cutting and packing problems: A categorised, application-oriented research bibliography. *Journal of the Operational Research Society*, v.43, p.691-706.
- TERNÓ, J.; SCHEITHAUER e G.; SOMMERWEIÂ, J. R. (2000) An efficient approach for tehe multi-pallet loading problem. *European Journal of Operational Research*, v.123, p.372-381.
- TSAI, R. D.; MALSTROM, E. M.; KUO, W. (1993) Three Dimensional Palletization of Mixed Box Sizes. *IIE Transactions*, v.25, n.4, p.64-75.
- TSAI, D.M.; MALSTROM, E.M.; MEEKS, H.D. (1985) Robotic unitization of pallet loads. *Proceedings of the Fall Annual Conference*, Institute of Industrial Engineers, Chicago, Illinois.
- TSAI, D.M.; MALSTROM, E.M.; MEEKS, H.D. (1988) Modelling and analysis of robotic palletizing cell. *IIE Transactions*, v.20, n.4.
- ZHANG, H.Y.; GU, H.Y.; XI,Y.G. (2007) A Benders decomposition algorithm for base station planning problem in WCDMA networks. *Computers & Operations Research*, v. 34, ISSUE 6, p. 1674-1687.
- WANG,P.Y.; WÄSCHER, G. (2002). Cutting and Packing (special issue). *European Journal of Operational Research*, v. 141.
- WÄSCHER, G.; HAUSSNER, H.; SCHUMANN, H. (2006). An improved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research, Amsterdam*. 2006. This paper was accepted for publication.

WONGPRAKORNKUL, S. (2005) Comparison two methods by applied column generation technique and Benders' Partitioning algorithm in an integrated one-dimensional cutting stock and transportation problem. *OR-CRN Conference*, p.12-27.

## APÊNDICE

### APÊNDICE A - Modelo GAMS adaptado de Tsai *et al.* (1993)

```

$offlisting
option solprint=off;
sets
i numero de caixas /1*2/
alias (i,j);

scalars
L0 compr paleta /100/
W0 larg paleta /100/;

parameters
L(i) larg caixa
/1 63
2 56/
W(i) compr caixa
/1 56
2 63/;

scalar X0,Y0,M;
X0 = L('1');
Y0 = W('2');
M = max(X0+L0,Y0+W0);

variables
u1(i,j)
u2(i,j)
P(i)
X(i)
Y(i)
FO valor total das pecas empacotadas;
positive variables X,Y;
binary variables P,u1,u2;

```

```

equations
OBJFUN funcao objetivo
restr1(i,j)
restr2(i,j)
restr3(i,j)
restr4(i,j)
INFPAL1(i)
INFPAL2(i)
SUPPAL1(i)
SUPPAL2(i)
LI
LS
fact;

OBJFUN.. FO =e= -sum(i,P(i))+((X('1')+Y('1')+X('2')+Y('2'))/(card(i)*(L0+W0+
X0+Y0)));
restr1(i,j)$ (ord(i) lt ord(j)).. -1*(X(j)-X(i))=g=-1*(-L(j)*P(j)+M*(u1(i,j)+u2(i,j)));
restr2(i,j)$ (ord(i) lt ord(j)).. -1*(X(i)-X(j))=g=-1*(-L(i)*P(i)+M*(1+u1(i,j)-u2(i,j)));
restr3(i,j)$ (ord(i) lt ord(j)).. -1*(Y(j)-Y(i))=g=-1*(-W(j)*P(j)+M*(1-u1(i,j)+u2(i,j)));
restr4(i,j)$ (ord(i) lt ord(j)).. -1*(Y(i)-Y(j))=g=-1*(-W(i)*P(i)+M*(2-u1(i,j)-u2(i,j)));
INFPAL1(i).. X(i)=g=X0*P(i);
INFPAL2(i).. Y(i)=g=Y0*P(i); SUPPAL1(i).. -1*(X(i))=g=-1*(X0+L0-L(i))*P(i);
SUPPAL2(i).. -1*(Y(i))=g=-1*(Y0+W0-W(i))*P(i);
fact.. P('1')+P('2')=g=1;
LI.. sum(i,P(i))=g=max(floor(L0/L('1'))*floor(W0/W('1')),
floor(L0/W('1'))*floor(W0/L('1')));
LS.. sum(i,P(i))=l=floor((L0*W0)/(L('1')*W('1')));

option optcr=0;
option limrow=0;
option limcol=0;
model tsai /all/;
solve tsai minimizing FO using mip;
display "TSAI", P.l ,X.l ,Y.l, FO.l, u1.l, u2.l;
display "parametros", M, X0, Y0;

```

**APÊNDICE B - Modelo GAMS para decomposição de Benders clássico para o carregamento do palete do produtor bidimensional (adaptado de Tsai *et al.* (1993))**

```

$offlisting
option solprint=off;

sets
i numero de caixas /1*2/
alias (i,j);

*data
scalars
L0 compr palete /100/
W0 larg palete /100/;

parameters
L(i) larg caixa
/1 63
2 56/

W(i) compr caixa
/1 56
2 63/;

scalar X0,Y0,M;
X0 = L('1');
Y0 = W('2');
M = max(X0+L0,Y0+W0);

variables
u1(i,j)
u2(i,j)
P(i);
binary variables P,u1,u2;

display "Algoritmo Benders Classico";
scalar UB 'upperbound' /INF/;
scalar LB 'lowerbound' /-INF/;

```

\* Benders Subproblema - DUAL

P.l(i)=0;  
u1.l(i,j)=0;  
u2.l(i,j)=0;

variables

v1(i,j)  
v2(i,j)  
v3(i,j)  
v4(i,j)  
v5(i)  
v6(i)  
v7(i)  
v8(i)

z ;

positive variables v1,v2,v3,v4,v5,v6,v7,v8;

scalars unbounded /1.0e6/;

z.up = unbounded;

equations

subobj

sub1(i)

sub2(i);

subobj.. z=e= sum((i,j)\$ (ord(i) lt ord(j)),v1(i,j)\*(L(j)\*P.l(j)-M\*(u1.l(i,j)+u2.l(i,j))))+  
sum((i,j)\$ (ord(i) lt ord(j)),v2(i,j)\*(L(i)\*P.l(i)-M\*(1+u1.l(i,j)-u2.l(i,j))))+  
sum((i,j)\$ (ord(i) lt ord(j)),v3(i,j)\*(W(j)\*P.l(j)-M\*(1-u1.l(i,j)+u2.l(i,j))))+  
sum((i,j)\$ (ord(i) lt ord(j)),v4(i,j)\*(W(i)\*P.l(i)-M\*(2-u1.l(i,j)-u2.l(i,j))))+  
sum(i,X0\*P.l(i)\*v5(i))+ sum(i,Y0\*P.l(i)\*v6(i))+ sum(i,(-X0-L0+L(i))\*P.l(i)\*v7(i))+  
sum(i,(-Y0-W0+W(i))\*P.l(i)\*v8(i));

sub1(i).. sum(j\$(ord(i) lt ord(j)),1\*v1(i,j))+ sum(j\$(ord(i) gt ord(j)),-1\*v1(j,i))  
+sum(j\$(ord(i) lt ord(j)),-1\*v2(i,j))+ sum(j\$(ord(i) gt ord(j)),1\*v2(j,i))  
+sum(j\$(ord(i) lt ord(j)),0\*v3(i,j))+ sum(j\$(ord(i) gt ord(j)),0\*v3(j,i))  
+sum(j\$(ord(i) lt ord(j)),0\*v4(i,j))+ sum(j\$(ord(i) gt ord(j)),0\*v4(j,i))  
+v5(i)+0\*v6(i)-v7(i)-0\*v8(i)=l=(1/(card(i)\*(X0+Y0+L0+W0)))\$((ord(i) eq 1) or  
(ord(i) eq 2)) + 0\$(ord(i) gt 2));

```

sub2(i).. sum(j$(ord(i) lt ord(j)),0*v1(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),0*v1(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)),0*v2(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),0*v2(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)),1*v3(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),-1*v3(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)),-1*v4(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),+1*v4(j,i))
+0*v5(i)+v6(i)-0*v7(i)-1*v8(i)=l=(1/(card(i)*(X0+Y0+L0+W0)))$(ord(i) eq 1) or
(ord(i) eq 2)) + 0$(ord(i) gt 2);

```

```

option optcr=0.1;
option limrow=0;
option limcol=0;
model subproblem /subobj, sub1, sub2/;

```

\* Benders Subproblema modificado para encontrar raio extremo

```

variable dummy;
equations
modifiedsubobj
modifsub1(i)
modifsub2(i)
edummy;

```

```

modifiedsubobj..sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)),v1(i,j)*(L(j)*P.l(j)-M*(u1.l(i,j)+u2.l(i,j))))+
sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)),v2(i,j)*(L(i)*P.l(i)-M*(1+u1.l(i,j)-u2.l(i,j))))+
sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)),v3(i,j)*(W(j)*P.l(j)-M*(1-u1.l(i,j)+u2.l(i,j))))+
sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)),v4(i,j)*(W(i)*P.l(i)-M*(2-u1.l(i,j)-u2.l(i,j))))+
sum(i,X0*P.l(i)*v5(i))+ sum(i,Y0*P.l(i)*v6(i))+ sum(i,(-X0-L0+L(i))*P.l(i)*v7(i))+
sum(i,(-Y0-W0+W(i))*P.l(i)*v8(i))=e=1;

```

```

modifsub1(i).. sum(j$(ord(i) lt ord(j)),1*v1(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),-1*v1(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)),-1*v2(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),1*v2(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)),0*v3(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),0*v3(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)),0*v4(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),0*v4(j,i))
+v5(i)+0*v6(i)-v7(i)-0*v8(i)=l=0;

```

```

modifsub2(i).. sum(j$(ord(i) lt ord(j)),0*v1(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),0*v1(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)),0*v2(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),0*v2(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)),1*v3(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),-1*v3(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)),-1*v4(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),+1*v4(j,i))

```



```
+0*v5(i)+v6(i)-0*v7(i)-1*v8(i)=l=0;
```

```
edummy.. dummy =e= 0;
```

```
model modifiedsubproblem /modifiedsubobj,modifsub1,modifsub2,edummy/;
```

```
* Benders - problema mestre
```

```
set iter /iter1*iter1000/;
```

```
set cutset(iter) 'dynamic set';
```

```
cutset(iter)=no;
```

```
set unbcutset(iter) 'dynamic set';
```

```
unbcutset(iter)=no;
```

```
variable
```

```
z0;
```

```
equations
```

```
fact
```

```
LS
```

```
LI
```

```
cut(iter)
```

```
unboundedcut(iter);
```

```
parameters
```

```
cutconst1(iter)
```

```
cutconst2(iter)
```

```
cutcoeff1(iter,i,j)
```

```
cutcoeff2(iter,i,j)
```

```
cutcoeff3(iter,i)
```

```
cutcoeff4(iter,i,j)
```

```
cutcoeff5(iter,i,j);
```

```
fact.. P('1')+P('2')=g=1;
```

```
LS.. z0 =g= -floor((L0*W0)/(L('1')*W('1')));
```

```
LI.. sum(i,P(i))=g=max(floor(L0/L('1'))*floor(W0/W('1')),  
floor(L0/W('1'))*floor(W0/L('1')));
```

```
cut(cutset).. z0 =g= sum(i,-P(i))+ cutconst1(cutset)
```

```
+sum((i,j)$ (ord(i) lt ord(j)),cutcoeff1(cutset,i,j)*u1(i,j))
```

```

+sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)),cutcoeff2(cutset,i,j)*u2(i,j))
+sum(i,cutcoeff3(cutset,i)*P(i))
+sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)),cutcoeff4(cutset,i,j)*P(i))
+sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)),cutcoeff5(cutset,i,j)*P(j));

```

```

unboundedcut(unbcutset)..0 =g= cutconst1(unbcutset)
+sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)),cutcoeff1(unbcutset,i,j)*u1(i,j))
+sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)),cutcoeff2(unbcutset,i,j)*u2(i,j))
+sum(i,cutcoeff3(unbcutset,i)*P(i))
+sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)),cutcoeff4(unbcutset,i,j)*P(i))
+sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)),cutcoeff5(unbcutset,i,j)*P(j));

```

```

model master /fact,LS,LI,cut,unboundedcut/;
master.optcr=0;

```

\* Algoritmo de Benders

```

scalar converged /0/;

```

```

scalar iteration;

```

```

scalar bound;

```

```

parameter Pbest(i);

```

```

parameter log(iter,*) 'logging info';

```

```

loop(iter$(not converged),

```

```

solve subproblem maximizing z using lp;

```

```

display "Dual solucao", z.l,v1.l,v2.l,v3.l,v4.l,v5.l,v6.l,v7.l,v8.l;

```

```

abort$(subproblem.modelstat>=2) "Subproblem not solved to optimality";

```

```

if (z.l+1 < unbounded,

```

```

bound = sum(i,-P.l(i)) + z.l;

```

```

if (bound < UB,

```

```

UB = bound;

```

```

Pbest(i) = P.l(i);

```

```

display Pbest;

```

```

);

```

\* e adicione corte de Benders ao problema mestre

```

cutset(iter) = yes;

```

```

else solve modifiedsubproblem maximizing dummy using lp;

```

```

display "Dummy solucao",modifiedsubobj.l,edummy.l,v1.l,v2.l,v3.l,v4.l,v5.l,v6.l,v7.l,v8.l;

```

```

abort$(modifiedsubproblem.modelstat>=2)
“Modified subproblem not solved to optimality”;
* e adicione corte de Benders ao problema mestre
unbcutset(iter) = yes;
);

*cut data
cutconst1(iter) = sum((i,j)$ (ord(i) lt ord(j)), M*(-v2.l(i,j)-v3.l(i,j)-2*v4.l(i,j)));
cutcoeff1(iter,i,j) = M * (-v1.l(i,j)-v2.l(i,j)+v3.l(i,j)+v4.l(i,j));
cutcoeff2(iter,i,j) = M * (-v1.l(i,j)+v2.l(i,j)-v3.l(i,j)+v4.l(i,j));
cutcoeff3(iter,i) = X0*v5.l(i)+ Y0*v6.l(i)+ (-X0-L0+L(i))*v7.l(i)+(-Y0-
W0+w(i))*v8.l(i);
cutcoeff4(iter,i,j)= v2.l(i,j)*L(i)+ v4.l(i,j)*W(i);
cutcoeff5(iter,i,j) = v1.l(i,j)*L(j)+ v3.l(i,j)*W(j);

option optcr=10;
solve master minimizing z0 using mip;
display “solucao inteira”,P,l,u1.l,u2.l,z0.l;
abort$(master.modelstat=4) “Relaxed Master is infeasible”;
abort$(master.modelstat>=2) “Masterproblem not solved to optimality”;
LB = z0.l;
log(iter,'LB') = LB;
log(iter,'UB') = UB;
iteration = ord(iter);
display iteration,LB,UB;
converged$((UB-LB)<0.0001) = 1;
display$converged “Converged”;
);
display log;
abort$(not converged) “No convergence”;

* Solucao do PIM depois de convergido por Benders

variables
X(i)
Y(i)
FOPI total value of placed pieces;
positive variables X,Y;

```

```

equations
OBJFUN
restr1(i,j)
restr2(i,j)
restr3(i,j)
restr4(i,j)
INFPAL1(i)
INFPAL2(i)
SUPPAL1(i)
SUPPAL2(i);

OBJFUN.. FOPIM =e= -sum(i,P.l(i))
+((P.l('1')*(X('1')+Y('1'))+ P.l('2')*(X('2')+Y('2')))/(card(i)*(L0+W0+X0+Y0)));
restr1(i,j)$ (ord(i) lt ord(j)).. -1*(X(j)-X(i))=g=-1*(-L(j)*P.l(j)+M*(u1.l(i,j)+u2.l(i,j)));
restr2(i,j)$ (ord(i) lt ord(j)).. -1*(X(i)-X(j))=g=-1*(-L(i)*P.l(i)+M*(1+u1.l(i,j)-
u2.l(i,j)));
restr3(i,j)$ (ord(i) lt ord(j)).. -1*(Y(j)-Y(i))=g=-1*(-W(j)*P.l(j)+M*(1-
u1.l(i,j)+u2.l(i,j)));
restr4(i,j)$ (ord(i) lt ord(j)).. -1*(Y(i)-Y(j))=g=-1*(-W(i)*P.l(i)+M*(2-u1.l(i,j)-
u2.l(i,j)));
INFPAL1(i).. X(i)=g=X0*P.l(i);
INFPAL2(i).. Y(i)=g=Y0*P.l(i);
SUPPAL1(i).. -1*(X(i))=g=-1*(X0+L0-L(i))*P.l(i);
SUPPAL2(i).. -1*(Y(i))=g=-1*(Y0+W0-W(i))*P.l(i);

display "solucao depois de convergido";
option optcr=0;
option limrow=0;
option limcol=0;
model B.class /OBJFUN,restr1,restr2,restr3,restr4,INFPAL1,INFPAL2,SUPPAL1,SUPPAL2/;
solve B.class minimizing FOPIM using mip;
display "solucao PIM com Benders",FOPIM.l,X.l,Y.l;
display "parametros", M, X0, Y0;

```

**APÊNDICE C - Modelo GAMS para decomposição de Benders relaxado para o carregamento do palete do produtor bidimensional (adaptado de Tsai *et al.* (1993))**

```

$offlisting
option solprint=off;

sets
i numero de caixas /1*2/
alias (i,j);

*data
scalars
L0 compr palete /100/
W0 larg palete /100/;

parameters
L(i) larg caixa
/1 63
2 56/

W(i) compr caixa
/1 56
2 63/;

scalar X0,Y0,M;
X0 = L('1');
Y0 = W('2');
M = max(X0+L0,Y0+W0);

variables
u1(i,j)
u2(i,j)
P(i);
binary variables P,u1,u2;

display "algoritmo Benders";

scalar UB 'upperbound' /INF/;
scalar LB 'lowerbound' /-INF/;

```

\* Benders Subproblema - DUAL

P.l(i)=0;  
u1.l(i,j)=0;  
u2.l(i,j)=0;

variables

v1(i,j) 'var dual'  
v2(i,j)  
v3(i,j)  
v4(i,j)  
v5(i)  
v6(i)  
v7(i)  
v8(i)

z 'funcao obj subproblema dual';  
positive variables v1,v2,v3,v4,v5,v6,v7,v8;  
scalars unbounded /1.0e6/;  
z.up = unbounded;

equations

subobj 'objective'  
sub1(i) 'restricao dual relacionada ao x'  
sub2(i) 'restricao dual relacionada ao y';

subobj.. z=e= sum((i,j)\$ (ord(i) lt ord(j)),v1(i,j)\*(L(j)\*P.l(j)-M\*(u1.l(i,j)+u2.l(i,j))))+  
sum((i,j)\$ (ord(i) lt ord(j)),v2(i,j)\*(L(i)\*P.l(i)-M\*(1+u1.l(i,j)-u2.l(i,j))))+  
sum((i,j)\$ (ord(i) lt ord(j)),v3(i,j)\*(W(j)\*P.l(j)-M\*(1-u1.l(i,j)+u2.l(i,j))))+  
sum((i,j)\$ (ord(i) lt ord(j)),v4(i,j)\*(W(i)\*P.l(i)-M\*(2-u1.l(i,j)-u2.l(i,j))))+  
sum(i,X0\*P.l(i)\*v5(i))+ sum(i,Y0\*P.l(i)\*v6(i))+ sum(i,(-X0-L0+L(i))\*P.l(i)\*v7(i))+  
sum(i,(-Y0-W0+W(i))\*P.l(i)\*v8(i));

sub1(i).. sum(j\$(ord(i) lt ord(j)),1\*v1(i,j))+ sum(j\$(ord(i) gt ord(j)),-1\*v1(j,i))  
+sum(j\$(ord(i) lt ord(j)),-1\*v2(i,j))+ sum(j\$(ord(i) gt ord(j)),1\*v2(j,i))  
+sum(j\$(ord(i) lt ord(j)),0\*v3(i,j))+ sum(j\$(ord(i) gt ord(j)),0\*v3(j,i))  
+sum(j\$(ord(i) lt ord(j)),0\*v4(i,j))+ sum(j\$(ord(i) gt ord(j)),0\*v4(j,i))  
+v5(i)+0\*v6(i)-v7(i)-0\*v8(i)=l=(1/(card(i)\*(X0+Y0+L0+W0)))\$((ord(i) eq 1) or  
(ord(i) eq 2)) + 0\$(ord(i) gt 2));

```

sub2(i).. sum(j$(ord(i) lt ord(j)),0*v1(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),0*v1(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)),0*v2(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),0*v2(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)),1*v3(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),-1*v3(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)),-1*v4(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),+1*v4(j,i))
+0*v5(i)+v6(i)-0*v7(i)-1*v8(i)=l=(1/(card(i)*(X0+Y0+L0+W0)))$(ord(i) eq 1) or
(ord(i) eq 2)) + 0$(ord(i) gt 2);

```

```

option optcr=0.1;
option limrow=0;
option limcol=0;
model subproblem /subobj, sub1, sub2/;

```

\* Benders Subproblema modificado para encontrar raio extremo

variable dummy 'dummy objective variable';

equations

modifiedsubobj 'objetivo'

modifsub1(i) 'restricao dual x'

modifsub2(i) 'restricao dual y'

edummy;

```

modifiedsubobj..sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)),v1(i,j)*(L(j)*P.l(j)-M*(u1.l(i,j)+u2.l(i,j))))+
sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)),v2(i,j)*(L(i)*P.l(i)-M*(1+u1.l(i,j)-u2.l(i,j))))+
sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)),v3(i,j)*(W(j)*P.l(j)-M*(1-u1.l(i,j)+u2.l(i,j))))+
sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)),v4(i,j)*(W(i)*P.l(i)-M*(2-u1.l(i,j)-u2.l(i,j))))+
sum(i,X0*P.l(i)*v5(i))+ sum(i,Y0*P.l(i)*v6(i))+ sum(i,(-X0-L0+L(i))*P.l(i)*v7(i))+
sum(i,(-Y0-W0+W(i))*P.l(i)*v8(i))=e=1;

```

```

modifsub1(i).. sum(j$(ord(i) lt ord(j)),1*v1(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),-1*v1(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)),-1*v2(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),1*v2(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)),0*v3(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),0*v3(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)),0*v4(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),0*v4(j,i))
+v5(i)+0*v6(i)-v7(i)-0*v8(i)=l=0;

```

```

modifsub2(i).. sum(j$(ord(i) lt ord(j)),0*v1(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),0*v1(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)),0*v2(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),0*v2(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)),1*v3(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),-1*v3(j,i))

```

```
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)),-1*v4(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),+1*v4(j,i))
+0*v5(i)+v6(i)-0*v7(i)-1*v8(i)=1=0;
```

```
edummy.. dummy =e= 0;
```

```
model modifiedsubproblem /modifiedsubobj,modifsub1,modifsub2,edummy/;
```

```
* Benders - problema mestre
```

```
set iter /iter1*iter1000/;
```

```
set cutset(iter) 'dynamic set';
```

```
cutset(iter)=no;
```

```
set unbcutset(iter) 'dynamic set';
```

```
unbcutset(iter)=no;
```

```
variable
```

```
z0 ;
```

```
equations
```

```
fact LS
```

```
LI
```

```
cut(iter)
```

```
unboundedcut(iter);
```

```
parameters
```

```
cutconst1(iter)
```

```
cutconst2(iter)
```

```
cutcoeff1(iter,i,j)
```

```
cutcoeff2(iter,i,j)
```

```
cutcoeff3(iter,i)
```

```
cutcoeff4(iter,i,j)
```

```
cutcoeff5(iter,i,j);
```

```
fact.. P('1')+P('2')=g=1;
```

```
LS.. z0 =g= -floor((L0*W0)/(L('1')*W('1')));
```

```
LI.. sum(i,P(i))=g=max(floor(L0/L('1'))*floor(W0/W('1')),
```

```
floor(L0/W('1'))*floor(W0/L('1')));
```

```
cut(cutset).. z0 =g= sum(i,-P(i))+ cutconst1(cutset)
```



```

+sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)),cutcoeff1(cutset,i,j)*u1(i,j))
+sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)),cutcoeff2(cutset,i,j)*u2(i,j))
+sum(i,cutcoeff3(cutset,i)*P(i))
+sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)),cutcoeff4(cutset,i,j)*P(i))
+sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)),cutcoeff5(cutset,i,j)*P(j));

```

```

unboundedcut(unbcutset)..0 =g= cutconst1(unbcutset)
+sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)),cutcoeff1(unbcutset,i,j)*u1(i,j))
+sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)),cutcoeff2(unbcutset,i,j)*u2(i,j))
+sum(i,cutcoeff3(unbcutset,i)*P(i))
+sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)),cutcoeff4(unbcutset,i,j)*P(i))
+sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)),cutcoeff5(unbcutset,i,j)*P(j));

```

```

model master /fact,LS,LI,cut,unboundedcut/;
master.optcr=0;

```

\* Algoritmo Benders

```

scalar converged /0/;
scalar iteration;
scalar bound;
parameter Pbest(i);
parameter log(iter,*) 'logging info';
scalar PAR /1/;

```

```

loop(iter$(not converged), solve subproblem maximizing z using lp;

```

```

display "Dual solucao", z.l,v1.l,v2.l,v3.l,v4.l,v5.l,v6.l,v7.l,v8.l;
abort$(subproblem.modelstat>=2) "Subproblem not solved to optimality";

```

```

if (z.l+1 < unbounded,
bound = sum(i,-P.l(i)) + z.l;
if (bound < UB,
UB = bound;
Pbest(i) = P.l(i);
display Pbest;
);

```

\* e adicione corte de Benders ao problema mestre

```

cutset(iter) = yes;
else
solve modifiedsubproblem maximizing dummy using lp;

display "Dummy solucao",modifiedsubobj.l,edummy.l,v1.l,v2.l,v3.l,v4.l,v5.l,v6.l,v7.l,v8.l;
abort$(modifiedsubproblem.modelstat>=2)
"Modified subproblem not solved to optimality";

* e adicione corte de Benders ao problema mestre
unbcutset(iter) = yes;
);

*cut data
cutconst1(iter) = sum((i,j)$ (ord(i) lt ord(j)), M*(-v2.l(i,j)-v3.l(i,j)-2*v4.l(i,j)));
cutcoeff1(iter,i,j) = M * (-v1.l(i,j)-v2.l(i,j)+v3.l(i,j)+v4.l(i,j));
cutcoeff2(iter,i,j) = M * (-v1.l(i,j)+v2.l(i,j)-v3.l(i,j)+v4.l(i,j));
cutcoeff3(iter,i) = X0*v5.l(i)+ Y0*v6.l(i)+ (-X0-L0+L(i))*v7.l(i)+(-Y0-
W0+w(i))*v8.l(i) ;
cutcoeff4(iter,i,j)= v2.l(i,j)*L(i)+ v4.l(i,j)*W(i);
cutcoeff5(iter,i,j) = v1.l(i,j)*L(j)+ v3.l(i,j)*W(j);

option optcr=10;

* inicio do teste de relaxacao dos primeiros problemas inteiros

if (PAR > 0,
if ( abs(UB-LB) <= (0.01*card(i))/2,
LB=-card(i);
UB=card(i);
PAR=0;
);
);

if (PAR>0,
solve master minimizing z0 using rmip;
else
solve master minimizing z0 using mip; );

display "solucao inteira",P.l,u1.l,u2.l,z0.l;

```

```

abort$(master.modelstat=4) "Relaxed Master is infeasible";
abort$(master.modelstat>=2) "Masterproblem not solved to optimality";

```

```

LB = z0.l;
log(iter,'LB') = LB;
log(iter,'UB') = UB;
iteration = ord(iter);
display iteration,LB,UB,PAR;
converged$((UB-LB)<0.0001) = 1;
display$converged "Converged";
);
display log;
abort$(not converged) "No convergence";

```

\* Solucao do PIM depois de convergido por Benders

variables

X(i)

Y(i)

FO ;

positive variables X,Y;

equations

OBJFUN funcao objetivo

restr1(i,j)

restr2(i,j)

restr3(i,j)

restr4(i,j)

INFPAL1(i)

INFPAL2(i)

SUPPAL1(i)

SUPPAL2(i);

OBJFUN.. FO =e= -sum(i,P.l(i))

+((P.l('1')\*(X('1')+Y('1')) + P.l('2')\*(X('2')+Y('2')))/(card(i)\*(L0+W0+X0+Y0)));

restr1(i,j)\$ (ord(i) lt ord(j)).. -1\*(X(j)-X(i))=g=-1\*(-L(j)\*P.l(j)+M\*(u1.l(i,j)+u2.l(i,j)));

restr2(i,j)\$ (ord(i) lt ord(j)).. -1\*(X(i)-X(j))=g=-1\*(-L(i)\*P.l(i)+M\*(1+u1.l(i,j)-u2.l(i,j)));

restr3(i,j)\$ (ord(i) lt ord(j)).. -1\*(Y(j)-Y(i))=g=-1\*(-W(j)\*P.l(j)+M\*(1-u1.l(i,j)+u2.l(i,j)));

```

restr4(i,j)$ (ord(i) < ord(j)).. -1*(Y(i)-Y(j))=g=-1*(-W(i)*P.l(i)+M*(2-u1.l(i,j)-
u2.l(i,j)));
INFPAL1(i).. X(i)=g=X0*P.l(i);
INFPAL2(i).. Y(i)=g=Y0*P.l(i);
SUPPAL1(i).. -1*(X(i))=g=-1*(X0+L0-L(i))*P.l(i);
SUPPAL2(i).. -1*(Y(i))=g=-1*(Y0+W0-W(i))*P.l(i);

display "solucao depois de convergido";
option optcr=0;
option limrow=0;
option limcol=0;
model B.relaxado /OBJFUN,restr1,restr2,restr3,restr4,INFPAL1,INFPAL2,SUPPAL1,
SUPPAL2/;
solve B.relaxado minimizing FO using mip;
display "solucao benders relaxado",FOPIM.l,X.l,Y.l;
display "parametros", M, X0, Y0;

```

**APÊNDICE D - Modelo GAMS para decomposição de Benders para o carregamento do palete do produtor tridimensional**

```
$offlisting
option solprint=off;

sets i numero de caixas /1*4/
alias (i,j);

*data scalars
L0 compr palete /50/
W0 larg palete /50/
H0 altura palete /32/;

parameters
L(i) compr caixa
/1 37
2 43
3 37
4 43/

W(i) larg caixa
/1 43
2 37
3 43
4 37/

H(i) altura caixa
/1 16
2 16
3 16
4 16/;

scalar X0,Y0,Z0,M;
X0 = max(L('1'),W('1'),H('1'));
Y0 = max(L('1'),W('1'),H('1'));
Z0 = max(L('1'),W('1'),H('1'));
M = max(X0+L0,Y0+W0,Z0+H0);
```

variables

u1(i,j)

u2(i,j)

u3(i,j)

P(i);

binary variables P,u1,u2,u3;

display “ Algoritmo Benders”;

scalar UB 'upperbound' /INF/;

scalar LB 'lowerbound' /-INF/;

\* Benders Subproblema - DUAL

P.l(i)=0;

u1.l(i,j)=0;

u2.l(i,j)=0;

u3.l(i,j)=0;

variables

v1(i,j) 'var dual'

v2(i,j)

v3(i,j)

v4(i,j)

v5(i,J)

v6(i,J)

v7(i)

v8(i)

v9(i)

v10(i)

v11(i)

v12(i)

FOdual 'funcao obj subproblema dual';

positive variables v1,v2,v3,v4,v5,v6,v7,v8,v9,v10,v11,v12;

scalars unbounded /1.0e6/;

FOdual.up = unbounded;

equations

subobj 'objective'

sub1(i) 'restricao dual relacionada ao x'

sub2(i) 'restricao dual relacionada ao y'

sub3(i) 'restricao dual relacionada ao z';

subobj.. FOdual=e=

$$\begin{aligned} & \text{sum}((i,j)\$(\text{ord}(i) \text{ lt } \text{ord}(j)),v1(i,j)*(L(j)*P.l(j)-M*(u2.l(i,j)+u3.l(i,j))))+ \\ & \text{sum}((i,j)\$(\text{ord}(i) \text{ lt } \text{ord}(j)),v2(i,j)*(L(i)*P.l(i)-M*(u1.l(i,j)+u3.l(i,j))))+ \\ & \text{sum}((i,j)\$(\text{ord}(i) \text{ lt } \text{ord}(j)),v3(i,j)*(W(j)*P.l(j)-M*(u1.l(i,j)+u2.l(i,j))))+ \\ & \text{sum}((i,j)\$(\text{ord}(i) \text{ lt } \text{ord}(j)),v4(i,j)*(W(i)*P.l(i)-M*(2-u1.l(i,j)-u2.l(i,j))))+ \\ & \text{sum}((i,j)\$(\text{ord}(i) \text{ lt } \text{ord}(j)),v5(i,j)*(H(j)*P.l(j)-M*(2-u2.l(i,j)-u3.l(i,j))))+ \\ & \text{sum}((i,j)\$(\text{ord}(i) \text{ lt } \text{ord}(j)),v6(i,j)*(H(i)*P.l(i)-M*(2-u1.l(i,j)-u3.l(i,j))))+ \\ & \text{sum}(i,X0*P.l(i)*v7(i))+ \text{sum}(i,Y0*P.l(i)*v8(i))+ \text{sum}(i,Z0*P.l(i)*v9(i))+ \\ & \text{sum}(i,(-X0-L0+L(i))*P.l(i)*v10(i))+ \text{sum}(i,(-Y0-W0+W(i))*P.l(i)*v11(i))+ \\ & \text{sum}(i,(-Z0-H0+H(i))*P.l(i)*v12(i)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{sub1}(i).. \text{sum}(j\$(\text{ord}(i) \text{ lt } \text{ord}(j)),1*v1(i,j))+ \text{sum}(j\$(\text{ord}(i) \text{ gt } \text{ord}(j)),-1*v1(j,i)) \\ & +\text{sum}(j\$(\text{ord}(i) \text{ lt } \text{ord}(j)),-1*v2(i,j))+ \text{sum}(j\$(\text{ord}(i) \text{ gt } \text{ord}(j)),1*v2(j,i)) \\ & +\text{sum}(j\$(\text{ord}(i) \text{ lt } \text{ord}(j)),0*v3(i,j))+ \text{sum}(j\$(\text{ord}(i) \text{ gt } \text{ord}(j)),0*v3(j,i)) \\ & +\text{sum}(j\$(\text{ord}(i) \text{ lt } \text{ord}(j)),0*v4(i,j))+ \text{sum}(j\$(\text{ord}(i) \text{ gt } \text{ord}(j)),0*v4(j,i)) \\ & +\text{sum}(j\$(\text{ord}(i) \text{ lt } \text{ord}(j)),0*v5(i,j))+ \text{sum}(j\$(\text{ord}(i) \text{ gt } \text{ord}(j)),0*v5(j,i)) \\ & +\text{sum}(j\$(\text{ord}(i) \text{ lt } \text{ord}(j)),0*v6(i,j))+ \text{sum}(j\$(\text{ord}(i) \text{ gt } \text{ord}(j)),0*v6(j,i)) \\ & +v7(i)+0*v8(i)+0*v9(i)-v10(i)-0*v11(i)-0*v12(i)=l= \\ & (1/(\text{card}(i)*(X0+Y0+Z0+L0+W0+H0)))\$(\text{ord}(i) \text{ eq } 1) \text{ or } (\text{ord}(i) \text{ eq } 2)) + 0\$(\text{ord}(i) \text{ gt } \\ & 2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{sub2}(i).. \text{sum}(j\$(\text{ord}(i) \text{ lt } \text{ord}(j)),0*v1(i,j))+ \text{sum}(j\$(\text{ord}(i) \text{ gt } \text{ord}(j)),0*v1(j,i)) \\ & +\text{sum}(j\$(\text{ord}(i) \text{ lt } \text{ord}(j)),0*v2(i,j))+ \text{sum}(j\$(\text{ord}(i) \text{ gt } \text{ord}(j)),0*v2(j,i)) \\ & +\text{sum}(j\$(\text{ord}(i) \text{ lt } \text{ord}(j)),1*v3(i,j))+ \text{sum}(j\$(\text{ord}(i) \text{ gt } \text{ord}(j)),-1*v3(j,i)) \\ & +\text{sum}(j\$(\text{ord}(i) \text{ lt } \text{ord}(j)),-1*v4(i,j))+ \text{sum}(j\$(\text{ord}(i) \text{ gt } \text{ord}(j)),+1*v4(j,i)) \\ & +\text{sum}(j\$(\text{ord}(i) \text{ lt } \text{ord}(j)),0*v5(i,j))+ \text{sum}(j\$(\text{ord}(i) \text{ gt } \text{ord}(j)),0*v5(j,i)) \\ & +\text{sum}(j\$(\text{ord}(i) \text{ lt } \text{ord}(j)),0*v6(i,j))+ \text{sum}(j\$(\text{ord}(i) \text{ gt } \text{ord}(j)),0*v6(j,i)) \\ & +0*v7(i)+v8(i)+0*v9(i)-0*v10(i)-1*v11(i)-0*v12(i)=l= \\ & (1/(\text{card}(i)*(X0+Y0+Z0+L0+W0+H0)))\$(\text{ord}(i) \text{ eq } 1) \text{ or } (\text{ord}(i) \text{ eq } 2)) + 0\$(\text{ord}(i) \text{ gt } \\ & 2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{sub3}(i).. \text{sum}(j\$(\text{ord}(i) \text{ lt } \text{ord}(j)),0*v1(i,j))+ \text{sum}(j\$(\text{ord}(i) \text{ gt } \text{ord}(j)),0*v1(j,i)) \\ & +\text{sum}(j\$(\text{ord}(i) \text{ lt } \text{ord}(j)),0*v2(i,j))+ \text{sum}(j\$(\text{ord}(i) \text{ gt } \text{ord}(j)),0*v2(j,i)) \\ & +\text{sum}(j\$(\text{ord}(i) \text{ lt } \text{ord}(j)),0*v3(i,j))+ \text{sum}(j\$(\text{ord}(i) \text{ gt } \text{ord}(j)),0*v3(j,i)) \\ & +\text{sum}(j\$(\text{ord}(i) \text{ lt } \text{ord}(j)),0*v4(i,j))+ \text{sum}(j\$(\text{ord}(i) \text{ gt } \text{ord}(j)),0*v4(j,i)) \\ & +\text{sum}(j\$(\text{ord}(i) \text{ lt } \text{ord}(j)),1*v5(i,j))+ \text{sum}(j\$(\text{ord}(i) \text{ gt } \text{ord}(j)),-1*v5(j,i)) \end{aligned}$$

```
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)), -1*v6(i,j)) + sum(j$(ord(i) gt ord(j)), 1*v6(j,i))
+0*v7(i)+0*v8(i)+1*v9(i)-0*v10(i)-0*v11(i)-1*v12(i)=l=
1/(card(i)*(X0+Y0+Z0+L0+W0+H0))$( (ord(i) eq 1) or (ord(i) eq 2) ) + 0$(ord(i) gt 2);
```

```
option optcr=0.1;
option limrow=0;
option limcol=0;
model subproblem /subobj, sub1, sub2, sub3/;
```

\* Benders subproblema modificado para encontrar raio extremo

```
variable dummy 'dummy objective variable';
```

```
equations
```

```
modifiedsubobj 'objective'
```

```
modifsub1(i) 'dual constraint x'
```

```
modifsub2(i) 'dual constraint y'
```

```
modifsub3(i) 'dual constraint z'
```

```
edummy;
```

```
modifiedsubobj..sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)), v1(i,j)*(L(j)*P.l(j)-M*(u2.l(i,j)+u3.l(i,j))))+
sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)), v2(i,j)*(L(i)*P.l(i)-M*(u1.l(i,j)+u3.l(i,j))))+
sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)), v3(i,j)*(W(j)*P.l(j)-M*(u1.l(i,j)+u2.l(i,j))))+
sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)), v4(i,j)*(W(i)*P.l(i)-M*(2-u1.l(i,j)-u2.l(i,j))))+
sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)), v5(i,j)*(H(j)*P.l(j)-M*(2-u2.l(i,j)-u3.l(i,j))))+
sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)), v6(i,j)*(H(i)*P.l(i)-M*(2-u1.l(i,j)-u3.l(i,j))))+
sum(i, X0*P.l(i)*v7(i)) + sum(i, Y0*P.l(i)*v8(i)) + sum(i, Z0*P.l(i)*v9(i)) +
sum(i, (-X0-L0+L(i))*P.l(i)*v10(i)) + sum(i, (-Y0-W0+W(i))*P.l(i)*v11(i)) +
sum(i, (-Z0-H0+H(i))*P.l(i)*v12(i))=e=1;
```

```
modifsub1(i).. sum(j$(ord(i) lt ord(j)), 1*v1(i,j)) + sum(j$(ord(i) gt ord(j)), -1*v1(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)), -1*v2(i,j)) + sum(j$(ord(i) gt ord(j)), 1*v2(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)), 0*v3(i,j)) + sum(j$(ord(i) gt ord(j)), 0*v3(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)), 0*v4(i,j)) + sum(j$(ord(i) gt ord(j)), 0*v4(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)), 0*v5(i,j)) + sum(j$(ord(i) gt ord(j)), 0*v5(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)), 0*v6(i,j)) + sum(j$(ord(i) gt ord(j)), 0*v6(j,i))
+v7(i)+0*v8(i)+0*v9(i)-v10(i)-0*v11(i)-0*v12(i)=l=0;
```

```
modifsub2(i).. sum(j$(ord(i) lt ord(j)), 0*v1(i,j)) + sum(j$(ord(i) gt ord(j)), 0*v1(j,i))
```



```

+sum(j$(ord(i) lt ord(j)),0*v2(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),0*v2(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)),1*v3(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),-1*v3(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)),-1*v4(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),+1*v4(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)),0*v5(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),0*v5(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)),0*v6(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),0*v6(j,i))
+0*v7(i)+v8(i)+0*v9(i)-0*v10(i)-1*v11(i)-0*v12(i)=1=0;

```

```

modifsub3(i).. sum(j$(ord(i) lt ord(j)),0*v1(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),0*v1(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)),0*v2(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),0*v2(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)),0*v3(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),0*v3(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)),0*v4(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),0*v4(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)),1*v5(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),-1*v5(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)),-1*v6(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),1*v6(j,i))
+0*v7(i)+0*v8(i)+1*v9(i)-0*v10(i)-0*v11(i)-1*v12(i)=1=0;

```

```

edummy.. dummy =e= 0;

```

```

model modifiedsubproblem /modifiedsubobj,modifsub1,modifsub2,modifsub3,edummy/;

```

```

* Benders problema mestre relaxado

```

```

set iter /iter1*iter1000/;
set cutset(iter) 'dynamic set';
cutset(iter)=no;
set unbcutset(iter) 'dynamic set';
unbcutset(iter)=no;

```

```

variable
FOmestre ;

```

```

equations
fact
r1(i,j)
r2(i,j)
LIMSUP
cut(iter)
unboundedcut(iter);

```

```

parameters

```

```

cutconst1(iter)
cutcoeff1(iter,i,j)
cutcoeff2(iter,i,j)
cutcoeff3(iter,i,j)
cutcoeff4(iter,i)
cutcoeff5(iter,i,j)
cutcoeff6(iter,i,j);

fact.. P('1')+P('2')=g=1;
r1(i,j)$(ord(i) lt ord(j)).. u1(i,j)+u2(i,j)+u3(i,j)=l=2;
r2(i,j)$(ord(i) lt ord(j)).. u1(i,j)+u2(i,j)+u3(i,j)=g=1;
LIMSUP.. FOMestre =g= -floor((L0*W0*H0)/(L('1')*W('1')*H('1')));

cut(cutset).. FOMestre =g= sum(i,-P(i))+ cutconst1(cutset)
+sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)),cutcoeff1(cutset,i,j)*u1(i,j))
+sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)),cutcoeff2(cutset,i,j)*u2(i,j))
+sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)),cutcoeff3(cutset,i,j)*u3(i,j))
+sum(i,cutcoeff4(cutset,i)*P(i))
+sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)),cutcoeff5(cutset,i,j)*P(i))
+sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)),cutcoeff6(cutset,i,j)*P(J));

unboundedcut(unbcutset).. 0 =g= cutconst1(unbcutset)
+sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)),cutcoeff1(unbcutset,i,j)*u1(i,j))
+sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)),cutcoeff2(unbcutset,i,j)*u2(i,j))
+sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)),cutcoeff3(unbcutset,i,j)*u3(i,j))
+sum(i,cutcoeff4(unbcutset,i)*P(i))
+sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)),cutcoeff5(unbcutset,i,j)*P(i))
+sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)),cutcoeff6(unbcutset,i,j)*P(J));

model master /fact,r1,r2,LIMSUP,cut,unboundedcut/;
master.optcr=0;

* Benders Algoritmo
scalar converged /0/;
scalar iteration;
scalar bound;
parameter Pbest(i);
parameter log(iter,*) 'logging info';

```

```

loop(iter$(not converged),
solve subproblem maximizing FOdual using lp;
display "Dual solucao",FOdual.l,v1.l,v2.l,v3.l,v4.l,v5.l,v6.l,v7.l,v8.l,v9.l,v10.l,v11.l,v12.l;
abort$(subproblem.modelstat>=2) "Subproblem not solved to optimality";

if (FOdual.l+1 < unbounded,
bound = sum(i,-P.l(i)) + FOdual.l;
if (bound < UB,
UB = bound;
Pbest(i) = P.l(i);
display Pbest;
);
* e adicione corte de Benders ao problema mestre
cutset(iter) = yes;
else
solve modifiedsubproblem maximizing dummy using lp;
display "Dummy solucao",modifiedsubobj.l,edummy.l,v1.l,v2.l,v3.l,v4.l,v5.l,v6.l,v7.l,
v8.l,v9.l,v10.l,v11.l,v12.l;

abort$(modifiedsubproblem.modelstat>=2) "Modified subproblem not solved to
optimality";
* e adicione corte de Benders ao problema mestre
unbcutset(iter) = yes;
);
*cut data
cutconst1(iter) = sum((i,j)$ (ord(i) lt ord(j)), 2*M*(-v4.l(i,j)-v5.l(i,j)-v6.l(i,j)));
cutcoeff1(iter,i,j) = M * (-v2.l(i,j)-v3.l(i,j)+v4.l(i,j)+v6.l(i,j));
cutcoeff2(iter,i,j) = M * (-v1.l(i,j)-v3.l(i,j)+v4.l(i,j)+v5.l(i,j));
cutcoeff3(iter,i,j) = M * (-v1.l(i,j)-v2.l(i,j)+v5.l(i,j)+v6.l(i,j));
cutcoeff4(iter,i) = X0*v7.l(i) + Y0*v8.l(i)+
Z0*v9.l(i)+(-X0-L0+L(i))*v10.l(i)+(-Y0-W0+W(i))*v11.l(i)+(-Z0-H0+H(i))*v12.l(i);
cutcoeff5(iter,i,j)= v2.l(i,j)*L(i)+ v4.l(i,j)*W(i)+v6.l(i,j)*H(i);
cutcoeff6(iter,i,j) = v1.l(i,j)*L(j)+ v3.l(i,j)*W(j)+v5.l(i,j)*H(j);

option optcr=10;
solve master minimizing FOmestre using mip;
display "solucao inteira",P.l,u1.l,u2.l,u3.l,FOmestre.l;
abort$(master.modelstat=4) "Relaxed Master is infeasible";
abort$(master.modelstat>=2) "Masterproblem not solved to optimality";

```

```

LB = FOmestre.l;
log(iter,'LB') = LB;
log(iter,'UB') = UB;
iteration = ord(iter);
display iteration,LB,UB;
converged$((UB-LB)<0.0001) = 1;
display$converged "Converged";
);
display log;
abort$(not converged) "No convergence";

```

\* Solucao do PIM depois de convergido por Benders

variables

X(i)

Y(i)

Z(i)

FOPIM ;

positive variables X,Y,Z;

equations

OBJFUN funcao objetivo

restr1(i,j)

restr2(i,j)

restr3(i,j)

restr4(i,j)

restr5(i,j)

restr6(i,j)

INFPAL1(i)

INFPAL2(i)

INFPAL3(i)

SUPPAL1(i)

SUPPAL2(i)

SUPPAL3(i);

OBJFUN.. FOPIM=e=sum(i,-P.l(i))+((P.l('1')\*(X('1')+Y('1')+Z('1'))+  
P.l('2')\*(X('2')+Y('2')+Z('2')))/(card(i)\*(L0+W0+H0+X0+Y0+Z0)));

restr1(i,j)\$ (ord(i) lt ord(j)).. X(J)-X(I)=l=-L(J)\*P.l(j)+M\*(U2.l(I,J)+U3.l(I,J));

```

restr2(i,j)$ (ord(i) lt ord(j)).. X(I)-X(J)=l=-L(I)*P.l(i)+M*(U1.l(I,J)+U3.l(I,J));
restr3(i,j)$ (ord(i) lt ord(j)).. Y(J)-Y(I)=l=-W(J)*P.l(j)+M*(U1.l(I,J)+U2.l(I,J));
restr4(i,j)$ (ord(i) lt ord(j)).. Y(I)-Y(J)=l=-W(I)*P.l(i)+M*(2-(U1.l(I,J)+U2.l(I,J)));
restr5(i,j)$ (ord(i) lt ord(j)).. Z(J)-Z(I)=l=-H(J)*P.l(j)+M*(2-(U2.l(I,J)+U3.l(I,J)));
restr6(i,j)$ (ord(i) lt ord(j)).. Z(I)-Z(J)=l=-H(I)*P.l(i)+M*(2-(U1.l(I,J)+U3.l(I,J)));
INFPAL1(i).. X(i)=g=X0*P.l(i);
INFPAL2(i).. Y(i)=g=Y0*P.l(i);
INFPAL3(i).. Z(i)=g=Z0*P.l(i);
SUPPAL1(i).. -1*(X(i))=g=-1*(X0+L0-L(i))*P.l(i);
SUPPAL2(i).. -1*(Y(i))=g=-1*(Y0+W0-W(i))*P.l(i);
SUPPAL3(i).. -1*(Z(i))=g=-1*(Z0+H0-H(i))*P.l(i);

```

```
display "solucao depois de convergido;
```

```
option optcr=0;
```

```
option limrow=0;
```

```
option limcol=0;
```

```
model tsaiSol.3dim /OBJFUN,restr1,restr2,restr3,restr4,restr5,restr6,INFPAL1,INFPAL2,
INFPAL3,SUPPAL1,SUPPAL2,SUPPAL3/;
```

```
solve tsaiSol.3dim minimizing FOPIM using mip;
```

```
display "solucao PIM com benders",FOPIM.l, X.l, Y.l, Z.l;
```

```
display X0,Y0,Z0,M;
```

## APÊNDICE E - Modelo GAMS para decomposição de Benders para o carregamento do palete do distribuidor bidimensional

```
$offlisting
option solprint=off;

sets
i numero de caixas /1*6/
alias (i,j);

*data
scalars
X0 /3/
Y0 /3/
L0 compr palete /5/
W0 larg palete /3/;

parameters
L(i) compr caixa
/1 2
2 3
3 2
4 1
5 2
6 3/

W(i) larg caixa
/1 3
2 2
3 1
4 2
5 3
6 2/;

scalar M;
M = max(X0+L0,Y0+W0);

variables
u1(i,j)
```

```

u2(i,j)
P(i);
binary variables P,u1,u2;

display "Algoritmo de Benders";
scalar UB 'upperbound' /INF/;
scalar LB 'lowerbound' /-INF/;

* Benders Subproblema - DUAL

P.l(i)=0;
u1.l(i,j)=0;
u2.l(i,j)=0;

variables
v1(i,j) 'var dual'
v2(i,j)
v3(i,j)
v4(i,j)
v5(i)
v6(i)
v7(i)
v8(i)
z 'funcao obj subproblema dual';
positive variables v1,v2,v3,v4,v5,v6,v7,v8;
scalars unbounded /1.0e6/;
z.up = unbounded;

equations
subobj 'objetivo'
sub1(i) 'restricao dual relacionada ao x'
sub2(i) 'restricao dual relacionada ao y';

subobj.. z=e=
sum((i,j)$ (ord(i) lt ord(j)),v1(i,j)*(L(j)*P.l(j)-M*(u1.l(i,j)+u2.l(i,j))))+
sum((i,j)$ (ord(i) lt ord(j)),v2(i,j)*(L(i)*P.l(i)-M*(1+u1.l(i,j)-u2.l(i,j))))+
sum((i,j)$ (ord(i) lt ord(j)),v3(i,j)*(W(j)*P.l(j)-M*(1-u1.l(i,j)+u2.l(i,j))))+
sum((i,j)$ (ord(i) lt ord(j)),v4(i,j)*(W(i)*P.l(i)-M*(2-u1.l(i,j)-u2.l(i,j))))+
sum(i,X0*P.l(i)*v5(i))+ sum(i,Y0*P.l(i)*v6(i))+ sum(i,(-X0-L0+L(i))*P.l(i)*v7(i))+

```

```
sum(i,(-Y0-W0+W(i))*P.l(i)*v8(i));
```

```
sub1(i).. sum(j$(ord(i) lt ord(j)),1*v1(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),-1*v1(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)),-1*v2(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),1*v2(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)),0*v3(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),0*v3(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)),0*v4(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),0*v4(j,i))
+v5(i)+0*v6(i)-v7(i)-0*v8(i)=l=(1/(card(i)*(X0+Y0+L0+W0)))$(ord(i) eq 1) or
(ord(i) eq 2)) + 0$(ord(i) gt 2);
```

```
sub2(i).. sum(j$(ord(i) lt ord(j)),0*v1(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),0*v1(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)),0*v2(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),0*v2(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)),1*v3(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),-1*v3(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)),-1*v4(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),+1*v4(j,i))
+0*v5(i)+v6(i)-0*v7(i)-1*v8(i)=l=(1/(card(i)*(X0+Y0+L0+W0)))$(ord(i) eq 1) or
(ord(i) eq 2)) + 0$(ord(i) gt 2);
```

```
option optcr=0.1;
```

```
option limrow=0;
```

```
option limcol=0;
```

```
model subproblem /subobj, sub1, sub2/;
```

\* Benders Subproblema modificado para encontrar raio extremo

```
variable dummy 'dummy objective variable';
```

```
equations
```

```
modifiedsubobj 'objective'
```

```
modifsub1(i) 'dual constraint x'
```

```
modifsub2(i) 'dual constraint y'
```

```
edummy;
```

```
modifiedsubobj..sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)),v1(i,j)*(L(j)*P.l(j)-M*(u1.l(i,j)+u2.l(i,j))))+
sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)),v2(i,j)*(L(i)*P.l(i)-M*(1+u1.l(i,j)-u2.l(i,j))))+
sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)),v3(i,j)*(W(j)*P.l(j)-M*(1-u1.l(i,j)+u2.l(i,j))))+
sum((i,j)$(ord(i) lt ord(j)),v4(i,j)*(W(i)*P.l(i)-M*(2-u1.l(i,j)-u2.l(i,j))))+
sum(i,X0*P.l(i)*v5(i))+ sum(i,Y0*P.l(i)*v6(i))+ sum(i,(-X0-L0+L(i))*P.l(i)*v7(i))+
sum(i,(-Y0-W0+W(i))*P.l(i)*v8(i))=e=1;
```

```
modifsub1(i).. sum(j$(ord(i) lt ord(j)),1*v1(i,j))+ sum(j$(ord(i) gt ord(j)),-1*v1(j,i))
```



```

+sum(j$(ord(i) lt ord(j)), -1*v2(i,j)) + sum(j$(ord(i) gt ord(j)), 1*v2(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)), 0*v3(i,j)) + sum(j$(ord(i) gt ord(j)), 0*v3(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)), 0*v4(i,j)) + sum(j$(ord(i) gt ord(j)), 0*v4(j,i))
+v5(i) + 0*v6(i) - v7(i) - 0*v8(i) = 1 = 0;

```

```

modifsub2(i).. sum(j$(ord(i) lt ord(j)), 0*v1(i,j)) + sum(j$(ord(i) gt ord(j)), 0*v1(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)), 0*v2(i,j)) + sum(j$(ord(i) gt ord(j)), 0*v2(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)), 1*v3(i,j)) + sum(j$(ord(i) gt ord(j)), -1*v3(j,i))
+sum(j$(ord(i) lt ord(j)), -1*v4(i,j)) + sum(j$(ord(i) gt ord(j)), +1*v4(j,i))
+0*v5(i) + v6(i) - 0*v7(i) - 1*v8(i) = 1 = 0;

```

```

edummy.. dummy =e= 0;

```

```

model modifiedsubproblem /modifiedsubobj,modifsub1,modifsub2,edummy/;

```

```

* Benders problema mestre

```

```

set iter /iter1*iter1000/;
set cutset(iter) 'dynamic set';
cutset(iter)=no;
set unbcutset(iter) 'dynamic set';
unbcutset(iter)=no;

```

```

variable

```

```

z0;

```

```

equations

```

```

fact

```

```

restrito1

```

```

restrito2

```

```

cut(iter)

```

```

unboundedcut(iter);

```

```

parameters

```

```

cutconst1(iter)

```

```

cutconst2(iter)

```

```

cutcoeff1(iter,i,j)

```

```

cutcoeff2(iter,i,j)

```

```

cutcoeff3(iter,i)

```

```

cutcoeff4(iter,i,j)
cutcoeff5(iter,i,j);

restrito1.. P('1')+P('2')+P('5')+P('6')=l=2;
restrito2.. P('3')+P('4')=l=1;
fact.. P('1')+P('2')+P('3')+P('4')=g=1;

cut(cutset).. z0 =g= sum(i,-L(i)*W(i)*P(i))+ cutconst1(cutset)
+sum((i,j)$ (ord(i) lt ord(j)),cutcoeff1(cutset,i,j)*u1(i,j))
+sum((i,j)$ (ord(i) lt ord(j)),cutcoeff2(cutset,i,j)*u2(i,j))
+sum(i,cutcoeff3(cutset,i)*P(i))
+sum((i,j)$ (ord(i) lt ord(j)),cutcoeff4(cutset,i,j)*P(i))
+sum((i,j)$ (ord(i) lt ord(j)),cutcoeff5(cutset,i,j)*P(j));

unboundedcut(unbcutset)..0 =g= cutconst1(unbcutset)
+sum((i,j)$ (ord(i) lt ord(j)),cutcoeff1(unbcutset,i,j)*u1(i,j))
+sum((i,j)$ (ord(i) lt ord(j)),cutcoeff2(unbcutset,i,j)*u2(i,j))
+sum(i,cutcoeff3(unbcutset,i)*P(i))
+sum((i,j)$ (ord(i) lt ord(j)),cutcoeff4(unbcutset,i,j)*P(i))
+sum((i,j)$ (ord(i) lt ord(j)),cutcoeff5(unbcutset,i,j)*P(j));

model master /fact,restrito1,restrito2,cut,unboundedcut/;
master.optcr =0;

* Benders Algoritmo

scalar converged /0/;
scalar iteration;
scalar bound;
parameter Pbest(i);
parameter log(iter,*) 'logging info';

loop(iter$(not converged),
solve subproblem maximizing z using lp;

display "Dual solucao", z.l,v1.l,v2.l,v3.l,v4.l,v5.l,v6.l,v7.l,v8.l;
abort$(subproblem.modelstat>=2) "Subproblem not solved to optimality";

if (z.l+1 j unbounded,

```

```

bound = sum(i,-L(i)*W(i)*P.l(i)) + z.l;
if (bound < UB,
UB = bound;
Pbest(i) = P.l(i);
display Pbest;
);
* e adicione corte de Benders ao problema mestre
cutset(iter) = yes;
else
solve modifiedsubproblem maximizing dummy using lp;

display "Dummy solucao",modifiedsubobj.l,edummy.l,v1.l,v2.l,v3.l,v4.l,v5.l,v6.l,v7.l,v8.l;
abort$(modifiedsubproblem.modelstat<=2) "Modified subproblem not solved to
optimality";
* e adicione corte de Benders ao problema mestre
unbcutset(iter) = yes;
);

*cut data
cutconst1(iter) = sum((i,j)$ (ord(i) lt ord(j)), M*(-v2.l(i,j)-v3.l(i,j)-2*v4.l(i,j)));
cutcoeff1(iter,i,j) = M * (-v1.l(i,j)-v2.l(i,j)+v3.l(i,j)+v4.l(i,j));
cutcoeff2(iter,i,j) = M * (-v1.l(i,j)+v2.l(i,j)-v3.l(i,j)+v4.l(i,j));
cutcoeff3(iter,i) = X0*v5.l(i)+ Y0*v6.l(i)+ (-X0-L0+L(i))*v7.l(i)+(-Y0-
W0+w(i))*v8.l(i);
cutcoeff4(iter,i,j)= v2.l(i,j)*L(i)+ v4.l(i,j)*W(i);
cutcoeff5(iter,i,j) = v1.l(i,j)*L(j)+ v3.l(i,j)*W(j);

option optcr=10;
solve master minimizing z0 using mip;

display "solucao inteira",P.l,u1.l,u2.l,z0.l;
abort$(master.modelstat=4) "Relaxed Master is infeasible";
abort$(master.modelstat>=2) "Masterproblem not solved to optimality";

LB = z0.l;
log(iter,'LB') = LB;
log(iter,'UB') = UB;
iteration = ord(iter);
display iteration,LB,UB;

```

```

converged$((UB-LB)<0.0001) = 1;
display$converged “Converged”);

```

```

display log;
abort$(not converged) “No convergence”;

```

\* Solucao do PIM depois de convergido por Benders

```

variables

```

```

X(i)

```

```

Y(i)

```

```

FO ;

```

```

positive variables X,Y;

```

```

equations

```

```

OBJFUN funcao objetivo

```

```

restr1(i,j)

```

```

restr2(i,j)

```

```

restr3(i,j)

```

```

restr4(i,j)

```

```

INFPAL1(i)

```

```

INFPAL2(i)

```

```

SUPPAL1(i)

```

```

SUPPAL2(i);

```

```

OBJFUN..          FO    =e=   -sum(i,L(i)*W(i)*P.l(i))+((P.l('1')*(X('1')+Y('1'))+
P.l('2')*(X('2')+Y('2'))
+P.l('3')*(X('3')+Y('3'))+P.l('4')*(X('4')+Y('4')))/(card(i)*(L0+W0+X0+Y0)));

```

```

restr1(i,j)$ (ord(i) lt ord(j)).. -1*(X(j)-X(i))=g=-1*(-L(j)*P.l(j)+M*(u1.l(i,j)+u2.l(i,j)));

```

```

restr2(i,j)$ (ord(i) lt ord(j)).. -1*(X(i)-X(j))=g=-1*(-L(i)*P.l(i)+M*(1+u1.l(i,j)-
u2.l(i,j)));

```

```

restr3(i,j)$ (ord(i) lt ord(j)).. -1*(Y(j)-Y(i))=g=-1*(-W(j)*P.l(j)+M*(1-
u1.l(i,j)+u2.l(i,j)));

```

```

restr4(i,j)$ (ord(i) lt ord(j)).. -1*(Y(i)-Y(j))=g=-1*(-W(i)*P.l(i)+M*(2-u1.l(i,j)-
u2.l(i,j)));

```

```

INFPAL1(i).. X(i)=g=X0*P.l(i);

```

```

INFPAL2(i).. Y(i)=g=Y0*P.l(i);

```

```

SUPPAL1(i).. -1*(X(i))=g=-1*(X0+L0-L(i))*P.l(i);

```

```
SUPPAL2(i).. -1*(Y(i))=g=-1*(Y0+W0-W(i))*P.l(i);
```

```
display “ solucao depois de convergido ”;
```

```
option optcr=0;
```

```
option limrow=0;
```

```
option limcol=0;
```

```
model tsai.tri OBJFUN,restr1,restr2,restr3,restr4,INFPAL1,INFPAL2,SUPPAL1,  
SUPPAL2/;
```

```
solve tsai.tri minimizing FO using mip;
```

```
display “solucao PIM com benders”,FOPIM.l,X.l,Y.l;
```

```
display “parametros”, M, X0, Y0;
```