

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS PARA A SUSTENTABILIDADE
CAMPUS DE SOROCABA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

JONATHAN JUSTEN DE LA VEGA MARTÍNEZ

OTIMIZAÇÃO ESTOCÁSTICA NA PROGRAMAÇÃO DE BOMBAS EM REDES DE
ABASTECIMENTO URBANO

Sorocaba

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS PARA A SUSTENTABILIDADE
CAMPUS DE SOROCABA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

JONATHAN JUSTEN DE LA VEGA MARTÍNEZ

OTIMIZAÇÃO ESTOCÁSTICA NA PROGRAMAÇÃO DE BOMBAS EM REDES DE
ABASTECIMENTO URBANO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de São Carlos como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção para a obtenção do título de mestre em Engenharia de Produção, área de concentração: Gestão de Operações.

Orientador: Prof. Dr. Douglas José Alem Junior.

Financiamento: Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES.

Sorocaba

2014

M385o Martínez, Jonathan Justen De La Vega
Otimização estocástica na programação de bombas em redes de
abastecimento urbano / Jonathan Justen De La Vega Martínez. - - 2014.

126 f. : cm.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de São Carlos, *campus*
Sorocaba, Sorocaba, 2014
Orientador: Douglas José Alem Junior
Banca examinadora: Franklina Maria Bragion de Toledo, Eli Angela Vitor
Toso, Fabrício Carlos Pinheiro de Oliveira
Bibliografia

1. Processo estocástico. 2. Monte Carlo, Método de. 3. Abastecimento de
água nas cidades. I. Título. II. Sorocaba-Universidade Federal de São Carlos.

CDD 519.23

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do *Campus* de Sorocaba.

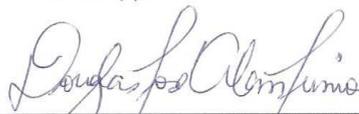
JONATHAN JUSTEN DE LA VEGA MARTÍNEZ

**"OTIMIZAÇÃO ESTOCÁSTICA NA PROGRAMAÇÃO DE
BOMBAS EM REDES DE ABASTECIMENTO URBANO"**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção do Centro de Ciências e Tecnologias para a Sustentabilidade da Universidade Federal de São Carlos para obtenção do título de mestre em Engenharia de Produção, Área de Concentração: Gestão de Operações.

Sorocaba, 14 de março de 2014

Orientador (a):

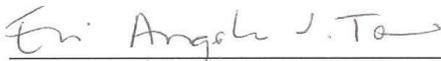


Prof. (a). Dr. (a). Douglas José Alem Júnior
DEPS/UFSCar

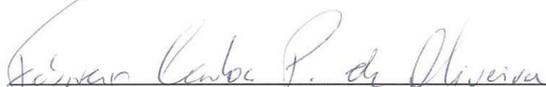
Examinadores (as):



Prof. Dr. Franklina Maria Bragion de Toledo
USP - ICMC



Prof. (a). Dr. (a). Eli Angela Vitor Toso
DEPS/UFSCar



Prof. (a). Dr. (a). Fabrício Carlos Pinheiro de Oliveira
PUC-Rio

*Dedico este trabalho a Deus, aos meus pais, Dimas
Manuel De La Vega Pestana e Noris del Carmen
Martínez Guevara e à minha família toda.*

Agradecimentos

Antes de tudo, gostaria de agradecer primeiramente a Deus, pois devo a vida a ele, pela oportunidade de estar fazendo o que gosto, pela chance de cumprir um objetivo em minha carreira e pela família que tenho. Família esta, que também dedico meu trabalho, pois é composta de pessoas muito queridas, que sempre estiveram ao meu lado quando me sentia desanimado, quando acreditava que nada mais poderia dar certo, foram meus companheiros, sempre me incentivando e dizendo que devemos correr atrás de nossos sonhos, e aqui estou, com um deles se realizando.

A minha gratidão é muito grande à muitas pessoas. Se eu esquecer algum nome, com certeza você que está lendo minha dissertação compreenderá. Primeiramente, agradeço profundamente ao meu orientador, Professor Doutor Douglas José Alem Junior, que sempre me deu o apoio desde o começo, conseguiu compreender e contornar minhas dificuldades, mostrou-me o caminho certo a seguir, guiando meus passos em um território obscuro até então para mim.

Esta dissertação foi feita dentro de um período que me encontrava no Brasil, portanto há várias pessoas a quem gostaria de agradecer. Primeiramente ao Professor Doutor José Geraldo Vidal Vieira e à Professora Doutora Rosane Nunes de Faria, pois foram eles quem me ajudaram a dar os primeiros passos para alcançar esta minha meta, dando-me conselhos, apoio e pela amizade neste período tão complicado.

Quando comecei a morar fora do meu país, acabei criando laços maternos com alguém. Este alguém é Maria Luísa Liesack de Carvalho Liate, uma mulher que foi como uma mãe para mim neste período, mostrando-se presente em momentos difíceis, dando-me apoio nas horas de desespero, sendo a figura em quem me inspirei para dar mais um passo a frente rumo a um ponto final no qual não tinha muitas expectativas, portanto devo a ela boa parte desta dissertação.

Além do Professor Doutor José Geraldo Vidal Vieira, seria impossível não agradecer à

Professora Doutora Eli Ângela Vitor Toso, à Professora Doutora Juliana Veiga Mendes, ao Professor Doutor João Eduardo Azevedo Ramos da Silva pela dedicação, pela ajuda, pelos exemplos, pela motivação, por várias atitudes que me deram razões para seguir em frente. Agradeço também ao Professor Doutor Pedro Munari pela grande contribuição no desenvolvimento deste trabalho. Jamais deixaria de agradecer a todos os docentes da Universidad de Córdoba que, direta ou indiretamente, proporcionaram-me esperanças e caminhos a se atingir êxito na área de estudos acadêmicos, motivando-me sempre que possível.

Assim como ninguém consegue atingir seus objetivos sozinho, agradeço do fundo de meu coração a todos meus amigos da República Diretoria, da Rep., aos meus conterrâneos, a todos os parceiros que de maneira direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste projeto. A finalização desta dissertação não seria possível se não fosse pelo financiamento da CAPES, portanto agradeço a todos os envolvidos nesta parte.

Lista de Figuras

1.1	Topologia de Sistema de Abastecimento de Água. (Fonte: SABESP (2004)).	2
3.1	Exemplo de árvore de cenários. (Fonte: Kaut, 2011).	30
4.1	Exemplo de uma rede de abastecimento urbano de água (Adaptado de Toledo et al. (2008)).	36
4.2	Árvores de 27, 64 e 125 cenários.	50
4.3	Representação dos cenários para cada período do horizonte temporal referente a 2 dias.	51
4.4	Gráficos de controle para a análise de estabilidade interna para as distribuições de probabilidades uniforme, empírica, triangular e lognormal.	54
4.5	Curvas de estabilidade para cada uma das distribuições usadas no método de geração de cenários, considerando árvores de 8, 27, 64, 125, 216 e 363 cenários.	56
4.6	Gráficos de controle para a análise da estabilidade externa e do erro para as distribuições de probabilidade uniforme, empírica, triangular e lognormal.	57
4.7	Política de ativação de bomba para o reservatório 1.	60
4.8	Política de ativação de bombas para o reservatório 2.	61
4.9	Política de ativação de bomba para o reservatório 3.	62
4.10	Volume de água nos reservatórios 1, 2 e 3 para as distribuições de probabilidade uniforme, empírica, triangular e lognormal, considerando o cenário de valor esperado.	63
4.11	Volume de água nos reservatórios nos dias 1, 2, 9, 10, 19, 20, 29 e 30, de um horizonte de planejamento de 30 dias.	64
4.12	Comportamento do volume de água no reservatório 1 para os cenários de melhor caso, de valor esperado e de pior caso.	65

4.13	Curvas de <i>trade-off</i> para ilustrar o conflito existente entre o custo total esperado com: (1) Valor esperado dos excessos e falta de água nos reservatórios (curva acima) e (2) valor esperado dos desvios positivos e negativos dos custos de segundo estágio (curva abaixo).	70
4.14	Comportamento das variáveis de decisão referentes à captação de água para variações crescentes do parâmetro λ no intervalo $[0, 000; 0, 050]$	72
4.15	Comportamento das variáveis de decisão referentes à transferência de água entre reservatórios para variações crescentes do parâmetro λ no intervalo $[0, 000; 0, 050]$	72
4.16	Comportamento das variáveis de decisão referentes ao volume de água nos reservatórios para variações crescentes do parâmetro λ no intervalo $[0, 000; 0, 050]$	73
4.17	Comportamento das variáveis de decisão referentes à captação de água para variações crescentes do parâmetro γ no intervalo $[0, 000; 0, 300]$	74
4.18	Comportamento das variáveis de decisão referentes à transferência de água entre reservatórios para variações crescentes do parâmetro γ no intervalo $[0, 000; 0, 300]$	75
4.19	Comportamento das variáveis de decisão referentes ao volume de água nos reservatórios para variações crescentes do parâmetro γ no intervalo $[0, 000; 0, 300]$	75
5.1	Fuxograma da heurística híbrida proposta para resolver o PSP com custo fixo e demanda estocástica.	87
5.2	Gráficos de Gantt associados às políticas de ativação de bombas para uma instância das classes 2/27/0%, 2/27/10% e 2/27/20%.	91
5.3	Volume de água armazenada nos reservatórios (em m^3) durante os períodos de planejamento para uma instância das classes 2/27/0% (gráfico superior), 2/27/10% (gráfico centar) and 2/27/20% (gráfico inferior).	93
5.4	<i>trade-off</i> entre o custo total esperado e os excessos e/ou faltas de água nos reservatórios conforme a variações crescentes do parâmetro γ e para um valor fixo de $\lambda = 0.05$	97

5.5	<i>trade-off</i> entre o custo total esperado e os desvios positivos e negativos conforme a variações crescentes do parâmetro λ e para um valor fixo de $\gamma = 0.075$	97
5.6	Perfil de desempenho sobre 270 instâncias das duas estratégias de solução em relação ao <i>gap</i> de otimalidade.	100
B.1	k valores para os limites de tolerância bilaterais para amostras distribuídas normalmente.	123
C.1	Gráficos <i>box-plots</i> para os valores da função objetivo de uma instância da classe 2/27/0% e para as distribuições de probabilidade: (1) uniforme; (2) empírica, (3) triangular e (4) lognormal.	126

Lista de Tabelas

2.1	Principais características dos trabalhos que abordam o OCP em redes de abastecimento urbano.	16
4.1	Notação matemática para a modelagem determinística do OCP em redes de abastecimento urbano.	37
4.2	Notação adicional para a modelagem matemática do PSP com demanda estocástica.	40
4.3	Demandas mínimas e máximas por água em cada reservatório.	49
4.4	Análise de valores de κ para quatro combinações dos parâmetros ϕ e ϑ com uma amostra igual a 25: estabilidade interna.	53
4.5	Porcentagem esperada e real dos dados cobertos pelos limites de tolerância para cada uma das distribuições: análise da estabilidade interna.	55
4.6	Valores de κ para quatro combinações dos parâmetros ϕ e ϑ com uma amostra igual a 25: estabilidade externa.	57
4.7	Porcentagem esperada e real dos dados cobertos pelos limites de tolerância para cada uma das distribuições: estabilidade externa.	58
4.8	Valores associados ao nível de serviço, $\mathcal{B}(\omega)\%$, ao excesso de água, $\mathcal{E}^+(\omega)$, e às faltas de água, $\mathcal{E}^-(\omega)$, nos reservatórios para cada uma das distribuições de probabilidade uniforme, empírica, triangular e lognormal, e para cada cenário ω	66
4.9	Valores associados à média dos níveis de serviços, $\mathcal{B}(\omega)\%$, dos excessos, \mathcal{E}^+ , e falta de água nos reservatórios, \mathcal{E}^- , e do tempo de resolução (em segundos), e o desvio padrão para todas as classes consideradas e para uma distribuição uniforme ou situação equiprovável.	67

4.10	Valores associados ao custo total esperado (CTE), ao excesso de água (\mathcal{E}^+) e à falta de água (\mathcal{E}^-) nos reservatórios para cada uma das distribuições uniforme, empírica, triangular e log-normal conforme o parâmetro de γ varia em forma crescente no intervalo $[0,000; 0,300]$ e para $\lambda = 0,05$	68
4.11	Valores associados ao custo total esperado (CTE), aos desvios positivos (Δ^+) e aos desvios negativos (Δ^-) para uma das distribuições uniforme, empírica, triangular e lognormal conforme o parâmetro de λ varia em forma crescente no intervalo $[0,000; 0,050]$ e para $\gamma = 0,3$	69
4.12	Cálculo do EVPI.	76
4.13	Cálculo do VSS.	78
4.14	Média dos indicadores EVPI e VSS de todas as 270 instâncias resolvidas para as quatro distribuições de probabilidade utilizadas.	78
5.1	Características da matriz tecnológica do PSP estocástico com custo fixo.	86
5.2	Resultados em média das ANOVAS para 10 instâncias da classe 2/27/0%.	89
5.3	Volume de água transferido (em m^3) entre os reservatórios nos períodos críticos para uma instância das classes 2/27/0%, 2/27/10% e 2/27/20%.	91
5.4	Resultados de uma instância da classe 7/64/10% para γ variando no intervalo $[0; 0,075]$ e para um valor fixo de λ igual a 0,05.	95
5.5	Resultados de uma instância da classe 7/64/10% para λ variando no intervalo $[0; 0,050]$ e para um valor fixo de γ igual a 0,075.	96
5.6	Average values of EVPI and VSS.	99
5.7	Average computation time (in seconds) of the MIP and HH strategies to find a feasible solution for the ISPSP instances.	101
A.1	Resultados dos testes de normalidade para uma instância de 2 dias, uma árvore de 27 cenários e vazamento de água nos reservatórios de 0%.	120
C.1	Resultados das ANOVAS para uma instância da classe 2/27/0%.	124
C.2	Resultados dos testes de Duncan para uma instância da classe 2/27/0%.	125

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Metodologia	6
1.2	Organização da Dissertação	7
2	Revisão da Literatura	8
2.1	Modelo Hidráulico da Rede	9
2.1.1	Modelo de Balanço de Massa	9
2.1.2	Modelo de Regressão	9
2.1.3	Modelo Hidráulico Completo	10
2.1.4	Modelo Hidráulico Simplificado	11
2.2	Modelos de Previsão de Demanda	11
2.3	Modelo de Controle Ótimo	12
3	Conceitos Básicos de Programação Estocástica	19
3.1	Programação Estocástica de Dois Estágios com Recurso	19
3.2	Programação Estocástica com Aversão ao Risco	24
3.3	Valor Esperado de Informação Perfeita (EVPI) e Valor da Solução Estocástica (VSS)	28
3.4	Representação e Geração de Cenários	30
3.5	Métodos de Geração de Árvores de Cenários	32
4	O Problema de Programação de Bombas com Demanda Estocástica e sem Custo Fixo	35
4.1	Programação de Bombas com Demanda Determinística e sem Custo Fixo	36
4.2	Programação de Bombas sem Custo Fixo com Demanda Estocástica	38
4.3	Modelo de Programação Estocástica com Restrições de Satisfação Robusta	42

4.4	Modelo de Programação Estocástica com Restrições de Satisfação Robusta e Aversão ao Risco	44
4.5	Método proposto para a Geração de Cenários	45
4.6	Resultados Computacionais	48
4.6.1	Descrição dos Dados	49
4.7	Avaliação do Método de Geração de Cenários	52
4.7.1	Avaliação da Estabilidade Interna	52
4.7.2	Avaliação da Estabilidade Externa e do Erro	55
4.8	Análise dos Resultados do Modelo de Programação Estocástica	58
4.8.1	Efeito das Diferentes Probabilidades de Ocorrências dos Cenários	58
4.8.2	Análise das Variáveis de Primeiro e Segundo Estágio	59
4.8.3	Análise dos Níveis de Serviço	62
4.8.4	Sensibilidade da Solução e do Modelo com os Parâmetros λ e γ	68
4.8.5	Análise do EVPI e VSS	76
4.9	Sumário e Considerações Finais	77
5	O Problema de Programação de Bombas com Demanda Estocástica e Custo Fixo	80
5.1	Modelo Matemático para o Problema de Programação de Bombas com Custo Fixo e Demanda Estocástica	81
5.2	Método de Solução para o Problema de Programação Bombas com Custo Fixo e Demanda Estocástica	83
5.2.1	Heurística Construtiva (HC) para o Problema 0 – 1 de Primeiro Estágio	83
5.2.2	Solução do Problema Linear de Segundo Estágio	85
5.3	Resultados Computacionais	88
5.3.1	Efeitos das Probabilidades no modelo do PSP com custo fixo e demanda estocástica	88
5.3.2	Análises das Políticas de Primeiro e Segundo estágio	89
5.3.3	Sensibilidade da Solução e do Modelo conforme os Parâmetros λ e γ aumentam	92
5.3.4	Valor Esperado de Informação Perfeita e Valor da Solução Estocástica	98
5.3.5	Desempenho da Heurística Híbrida	99

5.4	Sumário e Considerações Finais	102
6	Conclusões	103
7	Pesquisas Futuras	106
7.1	Geração de Cenários	106
7.2	Métodos de Decomposição	107
7.3	Medidas de Aversão ao Risco	107
7.4	Formulação Multiestágios	108
7.5	Otimização Robusta	108
	Referências Bibliográficas	110
A	Testes de Normalidade	119
B	Metodologia para Avaliar o Método de Geração de Cenários Proposto	121
C	Resultados das ANOVAS	124

Resumo

Esse estudo apresenta um problema de programação de bombas para a captação, armazenamento e transferência de água em sistemas de abastecimentos de água em redes urbanas, cujo objetivo é minimizar o custo de energia elétrica associado às operações de bombeamento. Para lidar com a natureza dinâmica e aleatória da demanda por água, foram propostos modelos de programação estocástica de dois estágios com recurso, em que a variável aleatória é representada por um conjunto finito de realizações ou cenários. Os modelos matemáticos desenvolvidos são extensões de modelos determinísticos da literatura e refletem a suposição básica de que é possível se incorrer em um custo fixo pelas atividades de liga/desliga das bombas hidráulicas. Para controlar as violações das restrições de demanda por água na presença de múltiplos cenários diferentes, considerou-se também uma técnica de robustez na tentativa de gerar soluções “quase” factíveis. Por último, mas não menos importante, adotou-se um critério de aversão ao risco denominado desvio médio absoluto para obter custos de segundo estágio menos dependentes das realizações dos cenários. Os cenários foram gerados de acordo com um procedimento baseado em simulação Monte-Carlo que pode utilizar qualquer distribuição de probabilidade para produzir as probabilidades empíricas das variáveis aleatórias. Como o problema de programação de bombas com custo fixo proposto é um programa inteiro misto 0 – 1 estocástico, desenvolve-se uma heurística híbrida eficiente para obter soluções de boa qualidade de instâncias práticas em um tempo computacional plausível. Os resultados evidenciam a estabilidade do método de geração de cenários, a sensibilidade da solução de acordo com parâmetros-chave do modelo matemático, e a eficiência da heurística na resolução de instâncias de grande porte. Finalmente, foi demonstrado que é possível poupar recursos pela resolução do modelo de programação estocástica, em vez de adotar abordagens mais simples baseadas no valor esperado.

Palavras-chave: Programação de Bombas; Sistemas de Abastecimento de Água em Redes Urbanas; Demanda por Água Estocástica; Programação Estocástica; Análise de Robustez; Desvio Médio Absoluto; Simulação Monte-Carlo.

Abstract

This study presents a pump scheduling problem for the capture, transfer and storage of water supply systems in urban networks, whose objective is to minimize the electricity cost associated to the pumping operations. To deal with the dynamic and random nature of the water-demand, we propose two-stage stochastic programming with recourse models, where the random variables are represented by a finite and discrete set of realizations or scenarios. The developed mathematical models are extensions of previous deterministic models of the literature and they reflect the basic assumption that a fixed cost could be incurred by the turn on/ turn off activities of the hydraulic pumps. In order to control violations of the water-demand constraints in the presence of multiple different scenarios, we also consider a robustness technique in an attempt to obtain “almost” feasible solutions. Last, but not least, we adopt a risk-aversion criteria so-called mean absolute deviation to obtain second-stage costs less dependent on the realizations of the scenarios. The scenarios were generated according to a Monte-Carlo simulation procedure that may use any probability distributions to produce the empirical probabilities of the random variables. As the proposed pump scheduling problem with fixed cost is a two-stage stochastic mixed 0 – 1 program, we develop a efficient hybrid heuristic to obtain good-quality solutions of practical instances in a plausible running time. Overall results evidence the stability of the scenario generation method, the sensitivity of the solution according to the key parameters of the mathematical model, and the efficiency of the heuristic in solving large instances. Finally, we show that is possible to save resources by solving the stochastic programming model instead of adopting simpler approaches based on the expected value.

Keywords: Pump Scheduling; Water Supply Systems in Urban Networks; Stochastic Water-Demand; Stochastic Programming; Robustness Anlysis; Mean Absolute Deviation; Monte-Carlo Simulation.

Capítulo 1

Introdução

A preservação dos recursos energéticos e hídricos para a sua disponibilização às gerações futuras é um tema que tem causado uma considerável preocupação mundial. Tal preocupação origina esforços na proposição de novas técnicas de manejo eficiente de água e uso racional de energia elétrica. No Brasil, o setor de abastecimento de água e de tratamento de esgoto é responsável por 3% do consumo de eletricidade, sendo que mais de 90% desse consumo é destinado apenas às operações de bombeamento de água. Além disso, estima-se que 35% a 42% da água tratada é perdida no vazamento da rede (PROSAB, 2009), o que compromete o abastecimento e contribui para o aumento do custo das operações de bombeamento e distribuição de água em redes urbanas. Desta forma, programar a ativação de bombas para a captação de água e planejar as atividades de armazenamento e distribuição de água, convertem-se em atividades indispensáveis nos sistemas de abastecimento de água (SAA) para minimizar os custos de energia elétrica, perda de água e manter a eficiência dos sistemas de abastecimento urbano.

Suprir a necessidade de água aos consumidores com níveis de pressão especificados é a função dos sistemas de abastecimento de água (SAA). Um sistema de abastecimento de água consiste em um conjunto de bombas, tubos, válvulas, reservatórios e outros elementos hidráulicos. A fim de analisar as interações entre as componentes, é comum que os SAA sejam representados numa rede, denominada *rede de abastecimento ou de distribuição de água* (AMIT; RAMACHANDRAN, 2009).

Basicamente, o funcionamento de um SAA consiste na ativação de bombas hidráulicas de modo a transportar a água aos reservatórios e, posteriormente, através da rede de distribuição, a água é transferida para os diferentes centros de consumo. Um exemplo

de topologia de uma rede de abastecimento de água pode ser vista na Figura 1.1. Em tal rede, a água é captada a partir de poços ou represas, cujas capacidades são consideradas ilimitadas. Após ter passado pela estação de tratamento, a água é transferida aos reservatórios através da rede de abastecimento. Tais reservatórios, por sua vez, podem distribuir a água somente às zonas baixas de consumo ou às torres que apresentam ligações diretas com eles. Além disso, cada torre só pode distribuir água às zonas altas de consumo relacionadas. A localização de bombas entre duas estações indica que operações de bombeamento devem ser realizadas para a captação ou distribuição de água. Em contrapartida, a ausência de bombas entre duas estações da rede especificam que o transporte de água é realizado por força gravitacional, i.e., sem consumo de energia elétrica.

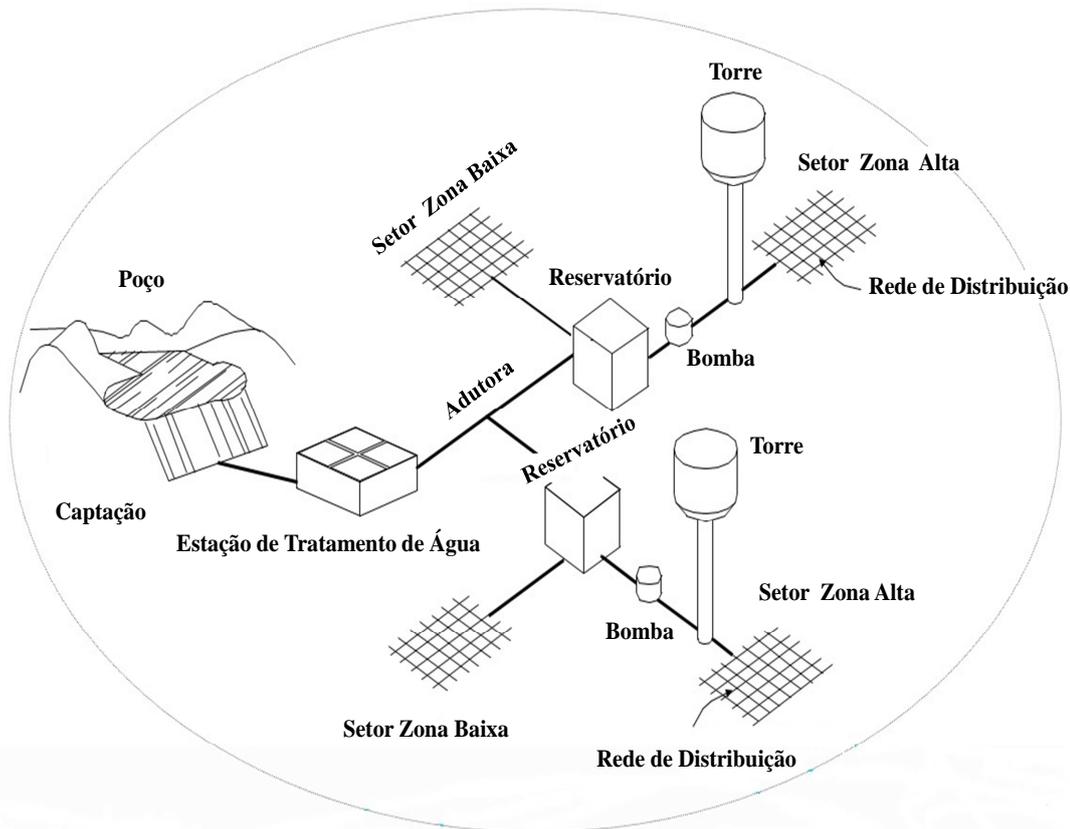


Figura 1.1: Topologia de Sistema de Abastecimento de Água. (Fonte: SABESP (2004)).

Para funcionar de forma eficiente, o setor responsável pelo planejamento dos SAAs deve tomar uma série de decisões relacionadas às políticas de ativação de bombas hidráulicas, às quantidades de água a movimentar na rede e aos volumes de água a serem mantidos nos reservatórios ao longo dos períodos do horizonte de planejamento. Para isso, é preciso

considerar a disponibilidade de bombas hidráulicas no sistema, a estrutura tarifária do consumo de energia elétrica, os padrões de consumo de água em reservatórios (demanda), a perda de água ocasionada pelo vazamento na rede e as capacidades dos reservatórios.

No Brasil, a Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL) é a responsável pela definição dos critérios de classificação dos consumidores de energia elétrica e, dependendo dessa classificação, as tarifas de consumo são atribuídas de forma diferenciada. Um dos critérios adotados pela ANEEL para classificar os consumidores relaciona-se ao padrão de consumo de energia elétrica em suas atividades diárias, sendo que no momento do faturamento, os consumidores são classificados como de alta tensão ou de baixa tensão. Os SAAs são classificados como consumidores de alta tensão devido ao alto consumo de energia e à demanda de potência elétrica necessários nas operações de bombeamento. Para essa classificação, a estrutura tarifária do consumo de energia elétrica e da demanda de potência reside na aplicação de cobranças diferenciadas ao longo das horas do dia, sendo essa tarifa maior para os períodos denominados de ponta, que são os períodos compreendidos entre as 18h e 21h.

Em geral, o vazamento na rede é proporcional ao volume de água mantido nos reservatórios. Assim, deve-se também definir níveis apropriados de estoques de água em reservatórios de modo a minimizar essa perda. Por essa razão, é importante programar a ativação de bombas e planejar a distribuição de água em redes de abastecimento urbano a fim de minimizar os custos de consumo de energia elétrica associados às atividades de bombeamento e, simultaneamente, minimizar a perda por água, satisfazendo a demanda por água em reservatórios e ainda respeitando as restrições relevantes do sistema.

A programação das bombas indica quais delas serão usadas e em que períodos do dia as mesmas serão ligadas. O planejamento da distribuição de água em redes de abastecimento consiste em definir a fração do tempo em que as bombas serão mantidas ligadas para captar a água e atender uma expectativa de demanda. O problema de programar a ativação de bombas hidráulicas e planejar a distribuição de água em redes de abastecimento para otimizar os custos associado à energia elétrica, é conhecido na literatura como *Optimal Control Problem* (OCP), ou Problema de Controle Ótimo (ZESSLER; SHAMIR, 1989; ORMSBEE; LANSEY, 1994). Para abordar o OCP, geralmente, o horizonte de planejamento é dividido em intervalos discretos de 1 hora de duração. Com isso, em cada intervalo as decisões ótimas de programação de bombas e de transporte de água são

determinadas. Tipicamente, o OCP envolve diversas restrições hidráulicas, como conservação de massa, conservação de energia e critérios de performance do sistema (limitação de pressões e velocidades), e operacionais, como atendimento da demanda, volume dos reservatórios, frequência máxima de ligação de bombas, entre outras.

Dependendo das variáveis de decisão do modelo de otimização, o OCP associado aos SAAs pode ser formulado usando uma abordagem direta ou indireta (ORMSBEE; LANSEY, 1994; ORMSBEE; LINGIREDDY; CHASE, 2009). A formulação direta do problema de controle ótimo é obtida quando, em cada intervalo discreto do horizonte de planejamento, uma variável de decisão é designada a cada bomba da rede, indicando a fração de tempo em que esta será mantida ligada (MACKLE; SAVIC; WALTERS, 1995; SAVIC; WALTERS; SCHWAB, 1997; BAGIROV et al., 2013). Por outro lado, a formulação indireta do OCP resulta quando, em cada intervalo discreto do horizonte de planejamento, o volume de água nos reservatórios corresponde à variável de decisão do problema (ORMSBEE et al., 1989; FANG; ZHANG; GAO, 2010; IKONEN; SELEK; BENE, 2012). Para diferenciar essas duas formulações, o problema de controle ótimo associado à formulação direta, é comumente citado na literatura como *Pump Scheduling Problem* (PSP) ou problema de programação de bombas. Nesta dissertação, serão usados os termos OCP ou PSP para designar o problema de captação, armazenagem e transferência de água em redes de abastecimento urbano.

Para definir uma política ótima de captação, armazenagem e transferência de água, entretanto, é necessário conhecer a demanda por água da rede de abastecimento. Na prática, é comum que tal demanda seja especificada em horas, pois ela apresenta, indiscutivelmente, um ciclo diário importante e as tarifas são diferenciadas ao longo das horas do dia. Porém, mesmo a demanda de *curtíssimo prazo* apresenta uma natureza dinâmica e difícil de ser prevista, pois depende de diversos fatores inerentemente aleatórios, como temperatura, precipitação e umidade. Além disso, a demanda também depende do dia da semana, do mês, estação, perfil socioeconômico e cultural da população e do próprio custo de utilização da água (SHVARTSER; SHAMIR; FELDMAN, 1993; ODAN; REIS, 2012).

Tipicamente, a natureza aleatória da demanda por água é tratada via o desenvolvimento de métodos de previsão, que podem ser de longo- ou de curto-prazo (ZHOU et al., 2000; JAIN; JOSHI; VARSHNEY, 2001; SJOBOM; ASSFALK, 2005; ZHANG et al., 2006; ALVISI; FRANCHINI; MARINELLI, 2007; ADAMOWSKI, 2008; HERRERA et

al., 2010; NASSERI; MOEINI; TABESH, 2011; ODAN; REIS, 2012). Assim, as políticas ótimas de controle podem ser acionadas para os perfis de demanda gerados pelos métodos de previsão. Todavia, se em algum momento, for constatada uma diferença significativa entre a demanda estimada e a que de fato se materializou ao longo das horas do dia, é necessário reotimizar o modelo de controle ótimo com os dados atualizados, ainda assim assumindo as estimativas sobre as demandas futuras (ALVISI; FRANCHINI; MARINELLI, 2007). Uma possível desvantagem em acionar as políticas de controle ótimo com as demandas estimadas é a ineficiência das atividades de captação, armazenagem e transferência de água se as estimativas não forem muito precisas. Se, por um lado, a estimativa da demanda ignorar as realizações históricas pessimistas, i.e., realizações altas da demanda, será necessário realizar operações extras de bombeamento nos períodos críticos em que o custo de energia elétrica é mais elevado. Se, por outro lado, a estimativa da demanda for muito pessimista, provavelmente as bombas hidráulicas serão mantidas ligadas em intervalos maiores de tempo do que o necessário, incorrendo num aumento significativo e desnecessário no consumo de energia elétrica.

Uma maneira de tornar as políticas ótimas de controle menos dependentes de *uma única demanda estimada* é considerar um conjunto de possíveis realizações para a mesma, ponderando-as de acordo com a chance de ocorrência. Assim, parte dessas políticas serão “obrigadas” a satisfazer todos os perfis de demanda simultaneamente, gerando decisões *razoavelmente boas* ou mesmo subótimas para o problema. Dentre as técnicas de otimização que são baseadas nesse paradigma, tem-se a Programação Estocástica de dois Estágios, que é uma das técnicas de otimização sob incertezas mais difundida na literatura para lidar de forma explícita com as incertezas envolvidas em um problema. Nesse caso, as políticas de controle que devem satisfazer todas as realizações da demanda ao mesmo tempo são denominadas decisões de *primeiro estágio*. Ainda, associa-se a cada possível realização da demanda um conjunto de variáveis de decisão denominadas de *segundo estágio*, cujo objetivo é corrigir as inviabilidades que surgem após a materialização das variáveis aleatórias, dada a escolha de primeiro estágio.

Nesse contexto, a presente dissertação de mestrado tem como objetivo principal propor modelos de programação estocástica de dois estágios para o problema de captação, armazenamento e transferência de água em redes urbanas, considerando a demanda por água uma variável aleatória que pode ser razoavelmente aproximada por um conjunto de

realizações. Os modelos matemáticos desenvolvidos são extensões do modelo determinístico proposto no trabalho de Toledo et al. (2008) e refletem as suposições básicas de que pode haver ou não um custo fixo incorrido pelas atividades de liga/desliga das bombas hidráulicas. Na programação estocástica baseada em cenários, um conjunto de realizações da variável aleatória são consideradas de forma simultânea no modelo de otimização. Por essa razão, medidas de aversão ao risco e medidas para quantificar situações de “déficits” e “superávits” são incorporadas ao problema de otimização a fim de tornar a solução e o modelo do problema de programação estocástica menos sensível às diferentes realizações da variável aleatória. As possíveis realizações da variável aleatória foram geradas por um método de amostragem baseada em simulação de Monte-Carlo. Como o modelo matemático com custo fixo é um problema de programação estocástica 0-1 de grande porte, propôs-se um algoritmo heurístico baseado em Soler (2008) para obter soluções de boa qualidade num tempo computacional aceitável.

Após realizar uma ampla revisão da literatura, foi possível identificar a escassez de trabalhos que abordam o problema de programação de bombas com demanda estocástica. Portanto, a contribuição desta dissertação de mestrado à literatura reside no uso de uma metodologia para lidar com a aleatoriedade da demanda de forma explícita no modelo de otimização, sendo esta a programação estocástica de dois estágios com recurso. Adicionalmente, o uso de uma medida de aversão ao risco para tornar a solução do modelo menos sensível às possíveis realizações da demanda e o desenvolvimento de uma metodologia de solução capaz de determinar soluções eficientes em um tempo computacional plausível para instâncias práticas do problema, convertem-se também em mais duas contribuições desta dissertação à literatura.

1.1 Metodologia

Para desenvolver o trabalho, utilizou-se a metodologia de Pesquisa Axiomática Quantitativa Normativa, comum na área de pesquisa operacional. A pesquisa axiomática quantitativa visa entender o comportamento de algumas variáveis de um modelo quantitativo (matemático) que descreve um problema idealizado, cuja solução pode ainda ajudar a esclarecer a estrutura (ou parte) do problema descrito pelo modelo. A pesquisa axiomática é *normativa* por se basear em modelos matemáticos que prescrevem uma decisão para o

problema, além de desenvolver normas, políticas, estratégias e ações, a fim de melhorar os resultados disponíveis na literatura ou encontrar uma solução ótima para um problema novo (BERTRAND; FRANSOO, 2002). Neste caso, os modelos utilizados são modelos de programação estocástica de dois estágios com recurso.

1.2 Organização da Dissertação

O restante dessa dissertação está organizado da seguinte maneira. O Capítulo 2 descreve a revisão bibliográfica dos principais trabalhos na literatura que abordam o problema de programação de bombas. As principais características desses trabalhos foram compiladas numa tabela com as informações associadas à configuração da rede urbana, tipo do modelo hidráulico, tipo do modelo de demanda, tipo do algoritmo de controle e políticas de controle realizada. O Capítulo 3 apresenta a fundamentação teórica relacionada ao paradigma da programação estocástica de dois estágios com recurso, incluindo algumas técnicas de controle de robustez, aversão ao risco, métodos de geração de cenários e indicadores de qualidade da solução estocástica. O Capítulo 4.9 desenvolve um modelo de programação estocástica de dois estágios com recurso para o problema de programação de bombas com demanda estocástica. Além disso, um método de geração de cenários baseado em amostragem por simulação Monte Carlo também é proposto. Os testes computacionais do modelo estocástico possibilitam acessar o valor esperado de informação perfeita (EVPI) e ao valor da solução estocástica (VSS) para avaliar o impacto de utilizar o modelo estocástico em detrimento a abordagens mais simples de valor esperado. Além disso, os testes computacionais ilustram o desempenho dos problemas à medida que a solução torna-se mais aversa ao risco. O capítulo 5 apresenta um modelo de programação estocástica 0-1 para o problema de programação de bombas com custo fixo associado às atividades de liga/desliga das bombas hidráulicas. Para obter soluções de boa qualidade num tempo computacional aceitável, propôs-se um método de solução duas fases, que combina uma heurística construtiva e métodos de programação linear. O Capítulo 6 apresenta as considerações finais e, finalmente, as perspectivas de continuidade da presente pesquisa são descritas no Capítulo 7.

Capítulo 2

Revisão da Literatura

Sistemas de abastecimento de água são controlados para satisfazer diversos objetivos, entre eles desempenhos hidráulicos da rede e eficiência econômica. Medidas de desempenho hidráulico envolvem níveis de pressão nos nós e reservatórios. A eficiência econômica é influenciada pelos custos de consumo de energia elétrica e de manutenção de bombas. Em um SAA, os custos de consumo de energia elétrica associados às atividades de bombeamento representam a maior parte dos custos totais de operação. Por essa razão, a maioria dos trabalhos encontrados na literatura que abordam o OCP visam minimizar tais custos (ORMSBEE; LINGIREDDY; CHASE, 2009).

Um sistema de controle ótimo em SAAs consiste em definir as atividades de programação das bombas sobre um período de tempo predefinido, tal que a demanda por água seja atendida sem atrasos, as condições hidráulicas da rede sejam satisfeitas e o custo total de consumo de energia elétrica seja minimizado (ZESSLER; SHAMIR, 1989). Ormsbee e Lansey (1994) ressaltam que um sistema de controle ótimo em um SAA deve conter, principalmente, três componentes: (1) Um modelo hidráulico da rede, o qual garante que as condições hidráulicas de operação da rede sejam satisfeitas; (2) Um modelo de previsão de demanda que forneça uma estimativa dos padrões de consumo de água em reservatórios ao longo dos períodos do horizonte de planejamento e (3) Um modelo de controle ótimo do sistema no qual as decisões referentes às políticas de operação do sistema que minimizam um determinado custo sejam determinadas.

2.1 Modelo Hidráulico da Rede

O modelo hidráulico da rede pode ser representado por modelos de balanço de massa (BM), modelos de regressão (MR), modelos hidráulicos simplificados (HS) e modelos hidráulicos completo (HC) (ORMSBEE; LANSEY, 1994). A seguir cada uns destes modelos são detalhados.

2.1.1 Modelo de Balanço de Massa

Nos modelos de balanço de massa, a vazão no interior do sistema é determinada a partir da demanda por água mais a taxa de variação dos níveis de água em reservatórios. Os requerimentos de pressão para atingir o fluxo de água nos reservatórios são negligenciados e, assume-se que, para atingir o nível desejado de volume de água nos reservatórios, tem-se uma combinação de bomba disponível. Além disso, se os níveis de água nos reservatórios permanecem entre uma variação especificada *a priori*, os requerimentos de pressão nos nós da rede são também omitidos.

Modelos multidimensionais de BM também têm sido desenvolvidos (STERLING; COULBECK, 1975a; FALLSIDE; PERRY, 1975; TOLEDO et al., 2008; SOLER, 2008; IKONEN; SELEK; BENE, 2012). Tais modelos incorporam importantes relações funcionais entre o nível dos reservatórios e a vazão bombeada. Uma vez que as características hidráulicas da rede nos modelos de BM são contempladas somente pelas restrições de balanço de água nos reservatórios, os modelos multidimensionais de BM convertem-se em programas de otimização linear. Assim, a principal vantagem dos modelos de balanço de massa reside, basicamente, na relativa facilidade de resolução do problema de otimização resultante.

2.1.2 Modelo de Regressão

Diferentemente dos modelos de balanço de massa, os modelos de regressão são usados para representar de forma mais precisa as características hidráulicas da rede. Nesses modelos, os requerimentos de pressão nos nós e nos reservatórios são considerados de forma explícita e modelados via um conjunto de equações não lineares. Diversas estratégias podem ser usadas para modelar as equações não lineares que representam as condições hidráulicas da rede. Por exemplo, para diferentes volumes de água nos reservatórios e estimativas

da demanda, pode-se realizar simulações para cada possível combinação de bomba da rede a fim de determinar sob que condições hidráulicas as bombas devem operar. Os resultados dessas simulações podem ser representadas graficamente e são denominadas como curvas de operação de bomba, uma vez que estas aproximam os requerimentos hidráulicos associados a uma operação particular de bomba (ORMSBEE; LANSEY, 1994).

Os trabalhos Ormsbee et al. (1989), Awumah e Lansey (1992), Beckwith e Wong (1995) e Eker, Grimble e Kara (2003) usaram curvas de regressão para aproximar as restrições hidráulicas de operação de redes de abastecimento. As curvas ilustram, para diferentes níveis de água em reservatórios e para uma série da demanda, os requerimentos hidráulicos de operação para cada combinação possível de bombas no sistema de abastecimento. Uma vez definidas estas curvas, as informações contidas nelas são utilizadas como *inputs* no modelo de otimização.

Outra forma de se gerar as curvas de operação é usar simuladores hidráulicos. Nos trabalhos Magalhaes e Holanda (2010), Fang, Zhang e Gao (2010) e Bagirov et al. (2013), foram desenvolvidos algoritmos que combinam técnicas de otimização com modelos de simulação hidráulica para determinar as políticas de controle ótimo que minimizem os custos de consumo de energia elétrica em SAAs. O modelo de simulação usado corresponde ao simulador EPANET. Este simulador é um programa computacional que permite determinar sob que condições hidráulicas a rede deve operar. Uma vez definidas as condições hidráulicas de operação da rede, utiliza-se um modelo de otimização para determinar as políticas de controle ótimo. O leitor interessado em se aprofundar sobre o simulador EPANET, pode consultar Rossman (2002).

A principal vantagem dos modelos de regressão é a possibilidade de incorporação da não linearidade da rede hidráulica. No entanto, as curvas de regressão apenas apresentam informações para a configuração da rede sob controle e para uma determinada série de demanda. Qualquer alteração da configuração da rede ou variação da série de demanda pode resultar em políticas de controle ineficientes (ORMSBEE et al., 1989; ORMSBEE; LANSEY, 1994).

2.1.3 Modelo Hidráulico Completo

Nos modelos hidráulicos completo, os requerimentos hidráulicos de operação da rede são considerados de forma explícita no modelo de otimização através de um conjunto de equa-

ções não lineares e, portanto, modelos de programação não linear são obtidos. As equações que representam as condições hidráulicas da rede incluem balanço de massa e de conservação de energia (ALMEIDA; BARBOZA, 2002). Os modelos de simulação completa são mais adaptáveis a mudanças no sistema de abastecimento e variações da demanda, em contraste aos modelos de balanço de massa e de regressão, que requerem mais dados em sua formulação, o que ocasiona um trabalho extra de calibração dos mesmos.

Os autores Brion e Mays (1991) e Almeida e Barboza (2002) usaram um modelo hidráulico completo e desenvolveram um modelo de programação não linear inteira mista 0-1 para determinar as políticas de controle ótimo de uma rede de abastecimento de água que minimiza os custos de consumo de energia elétrica. A configuração dessa rede consiste em múltiplos reservatórios e uma única estação de tratamento de água que os abastece.

2.1.4 Modelo Hidráulico Simplificado

O modelo hidráulico simplificado é definido como um modelo intermediário entre o de regressão e o hidráulico completo. Neste modelo, a rede pode ser aproximada ou analisada usando um modelo de rede macroscópico, o qual usa um sistema de equações hidráulicas linearizadas. Modelos macroscópicos representam o sistema pelo uso de uma rede simplificada. Em geral, com o uso de modelos simplificados, pode ser possível representar as condições hidráulicas de operação da rede através de equações lineares e, desta forma, modelos de programação linear podem ser construídos. Jowitt et al. (1988), Little e McCrodden (1989), Jowitt e Germanopoulos (1992), Pasha e Lansey (2009) e Price e Ostfeld (2013) desenvolveram modelos de programação linear para tratar do problema de controle ótimo de sistemas de abastecimento de água.

2.2 Modelos de Previsão de Demanda

A demanda por água é um fator determinante nas políticas ótimas de controle em sistemas de abastecimento de água. Uma vez que esta, na maioria dos casos, não é conhecida no instante em que as políticas de controle dos SAAs são implementadas, é comum estimá-la via métodos de previsão. Segundo Ormsbee e Lansey (1994), a demanda prevista por água pode ser incorporada aos modelos de controle ótimo mediante as seguintes abordagens: (1) agregada, no qual a demanda do sistema é, tipicamente, representada por um único

valor agregado; (2) proporcional, em que relações de regressão são derivadas a partir de um único padrão de demanda que pode variar proporcionalmente para a demanda total do sistema; e (3) distribuída, no qual a demanda agregada é distribuída tanto espacial quanto temporalmente aos diferentes pontos de demanda da rede.

McCormick e Powell (2004) propuseram análises de regressão linear para estimar a demanda por água, e revelaram que demandas futuras dependem somente das demandas dos períodos imediatamente anteriores. Assim, esses autores usaram um processo de Markov para modelá-la. Para se determinar as políticas de controle que minimizam os custos esperados de operação, os autores utilizaram programação dinâmica estocástica. Um conjunto discreto de possíveis estados da demanda foi assumido a partir dos resultados da análise de regressão, que permitiu também estimar as probabilidades de transição dos estados.

2.3 Modelo de Controle Ótimo

Finalmente, a terceira componente de um sistema de controle ótimo corresponde ao modelo de otimização. Em tal modelo, as políticas de controle ótimo são definidas com o intuito de otimizar algum objetivo operacional dos SAAs, respeitando as restrições relevantes do sistema. Em geral, o objetivo do problema de controle ótimo é minimizar o consumo de energia incorrido com as operações de um conjunto de bombas ao longo do horizonte de planejamento. O consumo de energia elétrica associado às atividades de bombeamento depende, principalmente, da duração do bombeamento e do custo unitário de eletricidade (ORMSBEE; LINGIREDDY; CHASE, 2009). Grande parte dos trabalhos encontrados na literatura do problema de controle ótimo em SAAs visam minimizar tais custos.

Além do custo de energia elétrica, alguns trabalhos consideram o custo de manutenção de bombas (LANSEY; AWUMAH, 1994; BARAN; LUCKEN; SOTELO, 2005). Um programa de operação no qual as bombas são ligadas e desligadas com alta frequência pode reduzir o consumo de energia. No entanto, tal programa pode aumentar o desgaste das bombas e, portanto, custos de manutenção de bombas são incorridos. Lansey e Awumah (1994) ressaltam que o custo de manutenção de bombas é difícil de ser medido, mas pode ser assumido que tal custo é proporcional à frequência de ativação de bombas.

Desta forma, o número de ligações de bombas no período de planejamento pode ser usado como medida substituta ao custo intangível associado ao desgaste das bombas.

Geralmente, as restrições do sistema compreendem limitações do volume de água armazenado nos reservatórios, quantidades que podem ser supridas a partir de uma estação de tratamento, configurações das bombas e válvulas, frequência máxima de ligação de bombas, entre outras. Dependendo das variáveis de decisão envolvidas no modelo de otimização, incorre-se em formulações diretas ou indiretas do problema de controle ótimo (ORMSBEE; LANSEY, 1994; ORMSBEE; LINGIREDDY; CHASE, 2009). A formulação direta resulta quando, em cada período do horizonte especificado, a variável de decisão corresponde à fração do tempo em que as bombas serão mantidas ligadas (MACKLE; SAVIC; WALTERS, 1995; SAVIC; WALTERS; SCHWAB, 1997; BAGIROV et al., 2013). Nessa abordagem, a política de controle ótima pode ser classificada como explícita (ORMSBEE; LANSEY, 1994). A formulação indireta é utilizada quando o nível de água nos reservatórios é usado como variável de controle (ORMSBEE et al., 1989; FANG; ZHANG; GAO, 2010; IKONEN; SELEK; BENE, 2012). Portanto, o objetivo do problema é determinar a trajetória ótima que define os níveis ótimos de armazenamento de água nos reservatórios (ORMSBEE et al., 1989). A política de operação de bombas geradas a partir dessas formulações é classificada como implícita (ZESSLER; SHAMIR, 1989; ORMSBEE; LANSEY, 1994).

A formulação implícita tipicamente requer a solução de dois subproblemas. O primeiro subproblema envolve a determinação da trajetória ótima de decisão. A trajetória ótima de decisão pode ser definida como os volumes de água a serem armazenados nos reservatórios ao longo do horizonte de planejamento, tal que o custo de energia elétrica seja mínimo. O segundo problema corresponde determinar as políticas de operação de bombas que produzem a trajetória ótima de decisão. A dificuldade associada à formulação implícita está relacionada ao fato de que existe um número considerável de combinações de bombas para produzir a trajetória desejada. Além disso, a partir de todas as combinações de bombas que produzem a trajetória ótima de decisão, deve-se escolher aquela que incorra em um custo mínimo (ORMSBEE; LINGIREDDY; CHASE, 2009).

O problema de controle ótimo para sistemas de abastecimento de água com múltiplos reservatórios, estações de tratamento e bombas é um problema de otimização não linear de grande porte com variáveis discretas e contínuas, que representa um dos problemas mais

difíceis de resolver (ORMSBEE; LINGIREDDY; CHASE, 2009; FANG; ZHANG; GAO, 2010; BAGIROV et al., 2013). Desta forma, algoritmos de controle ótimo eficientes devem ser propostos para resolver este problema. Técnicas de programação dinâmica têm sido utilizadas com sucesso para solucionar o problema de controle ótimo de SAAs com um único reservatório (ORMSBEE; LANSEY, 1994). Por exemplo, os autores dos trabalhos Sterling e Coulbeck (1975a), Coulbeck (1984), Solanos e Montoliu (1988), Ormsbee et al. (1989), Lansey e Awumah (1994), Zhuan e Xia (2013a, 2013b) desenvolveram algoritmos de controle baseados em programação dinâmica para determinar as políticas de operação ótima dos sistemas de abastecimento de água em tempo real. No entanto, extensões dessas abordagens para sistemas com múltiplos reservatórios são limitadas devido à explosão combinatória do problema.

Outras técnicas de pesquisa operacional para abordar o problema de controle ótimo em sistemas de abastecimento de água também têm sido usadas, e.g.: programação linear (JOWITT et al., 1988; JOWITT; GERMANOPOULOS, 1992; TOLEDO et al., 2008; PASHA; LANSEY, 2009; PRICE; OSTFELD, 2013), programação linear inteira mista (LITTLE; MCCRODDEN, 1989; AWUMAH; LANSEY, 1992; TOLEDO et al., 2008) e programação não linear (STERLING; COULBECK, 1975b; WHALEY; HUME, 1986; BRION; MAYS, 1991; CHASE; ORMSBEE, 1993; YU; POWELL; STERLING, 1994; ALMEIDA; BARBOZA, 2002; CEMBRANO et al., 2000; EKER; GRIMBLE; KARA, 2003). As diferenças entre esses trabalhos reside, basicamente, na dimensão física da rede, em termos do número de estações de tratamento e de reservatórios, no tipo de modelo hidráulico usado, na forma em que a demanda foi incorporada ao modelo de otimização, no algoritmo de controle e no objetivo a ser minimizado. A similaridade desses trabalhos é que as políticas de controle utilizadas podem ser consideradas explícitas. A desconsideração da aleatoriedade inerente da demanda no problema também é mais uma característica comum desses trabalhos.

Além disso, métodos baseados em algoritmos evolutivos tanto mono-objetivo quanto multi-objetivos também foram desenvolvidos para abordar o problema de controle ótimo em SAAs. Os autores dos trabalhos Beckwith e Wong (1995), Mackle, Savic e Walters (1995), Savic, Walters e Schwab (1997), Baran, Lucken e Sotelo (2005), Lopez-Ibanez e Devi (2005), Magalhaes e Holanda (2010), Fang, Zhang e Gao (2010) e Kougiass e Theodossiou (2012) desenvolveram algoritmos evolutivos (AE) para determinar as políticas

de ativação de bombas que minimizem os custos de consumo de energia elétrica ou de manutenção de bombas. A maioria desses trabalhos usam algoritmos genéticos (AG) como algoritmos de controle. Por outro lado, heurísticas construtivas baseadas em análises simples das políticas de funcionamento dos SAAs, com o intuito de determinar as condições de operação e identificar estratégias de redução de custos, também têm sido usadas para resolver o problema em estudo (SOLER, 2008; GERGELY; JÁNOS, 2012; IKONEN; SELEK; BENE, 2012).

Existem algumas topologias de redes abordadas nos estudos anteriores com a particularidade de transferência de água entre reservatórios (TOLEDO et al., 2008; SOLER, 2008)). A particularidade de transferência de água entre reservatórios incita a um melhor aproveitamento dos SAAs, uma vez que tal particularidade torna-se mais uma decisão a ser definida no problema de controle ótimo e auxilia no planejamento da distribuição de água nas redes. Sistemas de abastecimento de água com essa particularidade foram objetivos de estudos nos trabalhos de Toledo et al. (2008) e Soler (2008). Os autores do primeiro trabalho apresentaram um modelo de programação linear inteira mista 0-1 para abordar o problema de controle ótimo do sistema de abastecimento de água da cidade de São Carlos, cujo objetivo foi a minimização dos custos de energia elétrica acarretados ao transporte de água. Devido à dificuldade de se resolver instâncias reais do modelo inteiro misto 0 – 1 proposto por Toledo et al. (2008), Soler (2008) propuseram um método heurístico baseado nas características do problema para obter soluções do ambiente real.

A Tabela 2.1 resume as características mais relevantes de alguns dos principais trabalhos citados anteriormente. Essa tabela é uma extensão da tabela apresentada no trabalho Ormsbee e Lansey (1994). Os trabalhos foram classificados de acordo com os seguintes critérios: (1) dimensão física da rede, isto é, número de estações de bombeamento e reservatórios (colunas 2 e 3); (2) o tipo de modelo hidráulico (coluna 4); (3) tipo de modelo de demanda (coluna 5); (4) representação da demanda (coluna 6); (5) medida de risco (coluna 7); (6) algoritmo de controle (coluna 8); (7) política de controle (coluna 9) e (8) objetivos sob otimização (coluna 10).

Tabela 2.1: Principais características dos trabalhos que abordam o OCP em redes de abastecimento urbano.

Referências.	Rservatórios	Estações de Tratamento	Modelo Hidráulico	Modelo de Demanda	Representação da Demanda	Medida de Risco	Algoritmo de Controle	Política de Controle	Objetivo Minimizado
Sterling e Coulbeck (1975a)	Único	Múltiplas	BM	Agregada	Determinística	Não Aplica	PD	Implícita	Energia Elétrica
Sterling e Coulbeck (1975b)	Múltiplos	Múltiplas	BM	Agregada	Determinística	Não Aplica	PNL	Implícita	Energia Elétrica
Coulbeck (1984)	Único	Único	HS	Agregada	Determinística	Não Aplica	PD	Implícita	Energia Elétrica
Whaley e Hume (1986)	Múltiplos	Múltiplas	HC	Proporcional	Determinística	Não Aplica	PNL	Explícita	Energia Elétrica
Solanos e Montoliu (1988)	Múltiplos	Múltiplas	BM	Agregada	Determinística	Não Aplica	PD	Implícita	Energia Elétrica
Jowitz et al. (1988)	Múltiplos	Múltiplas	BM	Agregada	Determinística	Não Aplica	PL	Explícita	Energia Elétrica
Ormsbee et al. (1989)	Único	Múltiplas	MR	Proporcional	Determinística	Não Aplica	PD	Explícita	Energia Elétrica
Little e McCrodden (1989)	Único	Único	HS	Agregada	Determinística	Não Aplica	PLIM	Explícita	Energia Elétrica
Brion e Mays (1991)	Múltiplos	Múltiplas	HC	Agregada	Determinística	Não Aplica	PNL	Explícita	Energia Elétrica
Chase e Ormsbee (1993)	Múltiplos	Múltiplas	HC	Distribuída	Determinística	Não Aplica	PNL	Explícita	Energia Elétrica
Jowitz e Germanopoulos (1992)	Múltiplos	Múltiplas	HS	Distribuída	Determinística	Não Aplica	PL	Explícita	Energia Elétrica
Awumah e Lansley (1992)	Único	Múltiplas	MR	Proporcional	Determinística	Não Aplica	PLIM	Explícita	Energia Elétrica
Lansley e Awumah (1994)	Múltiplos	Única	MR	Proporcional	Determinística	Não Aplica	PD	Implícita	Energia Elétrica e Manutenção
Yu, Powell e Sterling (1994)	Múltiplos	Múltiplas	HC	Distribuída	Determinística	Não Aplica	PNL	Explícita	Energia Elétrica
Beckwith e Wong (1995)	Múltiplos	Múltiplas	MR	Proporcional	Determinística	Não Aplica	AE	Explícita	Energia Elétrica
Mackle, Savic e Walters (1995)	Único	Único	BM	Proporcional	Determinística	Não Aplica	AE	Explícita	Energia Elétrica
Savic, Walters e Schwab (1997)	Único	Único	BM	Proporcional	Determinística	Não Aplica	AE	Explícita	Energia Elétrica e Manutenção
Cembrano et al. (2000)	Múltiplos	Múltiplas	BM	Distribuída	Determinística	Não Aplica	PNL	Explícita	Energia Elétrica
Almeida e Barboza (2002)	Múltiplos	Único	HC	Distribuída	Determinística	Não Aplica	PNL	Explícita	Energia Elétrica
Eker, Grimble e Kara (2003)	Múltiplos	Múltiplas	MR	Proporcional	Determinística	Não Aplica	PNL	Explícita	Energia Elétrica
McCormick e Powell (2004)	Único	Único	MR	Proporcional	Estocástica	Não Aplica	PDE	Implícita	Energia Elétrica
Baran, Lucken e Sotelo (2005)	Único	Único	HS	Proporcional	Determinística	Não Aplica	AE	Explícita	Energia Elétrica e Manutenção
Lopez-Ibanez e Devi (2005)	Único	Múltiplas	HC	Distribuída	Determinística	Não Aplica	AE	Explícita	Energia Elétrica e Manutenção

Referências.	Número de Reservatórios	Número de Estações de Tratamento	Modelo Hidráulico	Modelo de Demanda	Representação da Demanda	Medida de Risco	Algoritmo de Controle	Política de Controle	Objetivo
Toledo et al. (2008)	Múltiplos	Múltiplas	BM	Distribuída	Determinística	Não Aplica	PLIM	Explícita	Energia Elétrica e Manutenção
Soler (2008)	Múltiplos	Múltiplas	BM	Distribuída	Determinística	Não Aplica	AH	Explícita	Energia Elétrica e Manutenção
Pasha e Lansey (2009)	Único	Único	HS	Proporcional	Determinística	Não Aplica	PL	Explícita	Energia Elétrica
Magalhaes e Holanda (2010)	Múltiplos	Múltiplas	MR	Proporcional	Determinística	Não Aplica	AE	Explícita	Energia Elétrica
Fang, Zhang e Gao (2010)	Múltiplos	Múltiplas	MR	Distribuída	Determinística	Não Aplica	AE	Implícita	Energia Elétrica
Gergely e János (2012)	Único	Único	HS	Proporcional	Determinística	Não Aplica	AH	Explícita	Energia Elétrica
Kougias e Theodossiou (2012)	Única	Única	BM	Distribuída	Determinística	Não Aplica	AE	Explícita	Energia Elétrica e Manutenção
Ikonen, Selek e Bene (2012)	Múltiplos	Múltiplas	BM	Distribuída	Determinística	Não Aplica	AH	Implícita	Energia Elétrica
Bagirov et al. (2013)	Múltiplos	Múltiplas	MR	Distribuída	Determinística	Não Aplica	PNL	Explícita	Energia Elétrica
Zhuan e Xia (2013a)	Único	Único	BM	Proporcional	Determinística	Não Aplica	PD	Implícita	Energia Elétrica
Zhuan e Xia (2013b)	Múltiplos	Único	BM	Distribuída	Determinística	Não Aplica	PD	Implícita	Energia Elétrica e Manutenção
Price e Ostfeld (2013)	Múltiplos	Múltiplas	BM	Distribuída	Determinística	Não Aplica	PL	Explícita	Energia Elétrica
Este estudo	Múltiplos	Múltiplas	BM	Distribuída	Estocástica	Desvio Médio Absoluto	AH	Explícita	Energia Elétrica e Manutenção

BM: Balanço de massa; MR: Modelo de Regressão; HS: Hidráulico Simplificado; HC: Hidráulico Completo. PD: Programação Dinâmica; PNL: Programação Não Linear
 Pl: Programação Linear; PLIM: Programação Linear Inteira Mista; AE: Algoritmos Evolutivos; PDE: Programação Dinâmica Estocástica; AH: Algoritmos Heurísticos

A partir da Tabela 2.1 é possível inferir que a maioria dos trabalhos citados abordam o problema de controle ótimo sob a política de controle explícita. Além disso, são poucos os trabalhos em que o modelo hidráulico da rede é completo, isso se dá porque os modelos de otimização resultantes são não lineares, o que limita a utilização de algoritmos de controle eficientes. Assim, existe uma tendência pela utilização dos modelos hidráulicos, balanço de massa e de regressão, uma vez que os resultantes modelos de otimização podem ser lineares.

A maioria dos trabalhos citados também desconsideram a natureza dinâmica e aleatória da demanda, na tentativa de obter modelos matemáticos mais simples e/ou implementáveis. Em alguns trabalhos, a natureza aleatória da demanda é tratada via métodos de previsão. No entanto, previsões errôneas da demanda por água podem ocasionar políticas de captação, armazenamento e transferência de água ineficientes. Uma maneira de considerar a aleatoriedade da demanda por água de forma explícita no problema de programação de bombas é descrevê-la a partir de um conjunto finito de realizações ou cenários. Assim, sob a suposição de que todas as possíveis ocorrências da demanda (ou as mais prováveis) são consideradas no modelo matemático, é possível estabelecer políticas de controle factíveis qualquer que seja a realização da variável aleatória. Além disso, é ainda possível incorporar a esse modelo medidas de aversão ao risco para gerar políticas factíveis menos sensíveis às inúmeras realizações da demanda, na tentativa de reduzir a reprogramação de bombas para cada nova realização da demanda. Até o término dessa dissertação, não foram encontrados trabalhos da literatura que consideram medidas de aversão ao risco e/ou robustez no problema de programação de bombas e seus correlatos.

Capítulo 3

Conceitos Básicos de Programação Estocástica

Este capítulo tem como objetivo principal definir os principais conceitos de programação estocástica que serão usados nesta dissertação. Para tanto, o presente capítulo foi organizado da seguinte maneira. Na Seção 3.1, é descrita de forma sucinta a teoria relacionada ao paradigma de programação estocástica. Na Seção 3.2, são abordadas as noções de risco, medidas de risco/variabilidade e programação estocástica com aversão ao risco. A Seção 3.3 ilustra alguns indicadores para avaliar a qualidade de um problema de programação estocástica. A Seção 3.4 resume como medir o valor da solução estocástica. Finalmente, a Seção 3.5 descreve os indicadores de qualidade dos métodos de geração de cenários.

3.1 Programação Estocástica de Dois Estágios com Recurso

Programação estocástica é um conjunto de técnicas de programação matemática para modelar e resolver problemas de otimização que envolvem incertezas. Considerar as incertezas no modelo de otimização significa que os parâmetros incertos são formulados como variáveis aleatórias em um espaço de probabilidade $(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, em que \mathcal{W} , \mathcal{A} e \mathbb{P} descrevem, na mesma ordem, o conjunto de todas as possíveis realizações das variáveis aleatórias, o conjunto dos possíveis eventos resultantes de combinar tais realizações e a função de probabilidade que associa a cada evento $A \in \mathcal{A}$ um valor escalar $0 \leq P(A) \leq 1$ que representa as chances desse evento materializar-se. Nesta dissertação, assume-se que

as variáveis aleatórias podem ser representadas por um conjunto discreto e finito de estados da natureza ou cenários $\omega \in \mathcal{W}$.

Em problemas multiperíodos formulados sob o paradigma de programação estocástica, os períodos indicam o horizonte temporal no qual partes das decisões devem ser tomadas, ao passo que os estágios indicam os momentos em que as incertezas do problema serão reveladas no decorrer do tempo. Em um modelo de programação estocástica, pode-se considerar que as incertezas são reveladas: (1) em diferentes momentos ao longo do horizonte temporal; ou (2) em único momento dentro do horizonte de tempo. Ao passo que os modelos de otimização sob a consideração (1), são denominados de modelos de programação estocástica multiestágios; os modelos sob a consideração (2), são chamados de modelos de programação estocástica de dois estágios. Neste trabalho, somente a teoria relacionada à programação estocástica de dois estágios será explicada.

Na programação estocástica de dois estágios, tem-se um conjunto de variáveis de decisão de primeiro estágio que devem ser determinadas antes da realização das variáveis aleatórias. Por esse motivo, é comum atribuir a essas variáveis a denominação de decisões “aqui e agora” (*here and now*). Após a realização das variáveis aleatórias, determinam-se as variáveis de decisão de segundo estágio, que são ações corretivas tomadas para adaptar ou finalizar as decisões feitas no primeiro estágio, de acordo com a realização das variáveis aleatórias. As variáveis de decisão de segundo estágio são comumente chamadas de decisões “espere e veja” (*wait and see*) ou decisões de recurso (*recourse decisions*). A política ótima dos problemas de programação estocástica de dois estágios consiste de uma única decisão de primeiro estágio e uma coleção de decisões de recurso, definindo as ações que deveriam ser tomadas como respostas a cada cenário. Seja $E_\xi(\cdot)$ uma função que define o valor esperado em termos da variável aleatória ξ . Então, um modelo geral de programação estocástica de dois estágios com recurso pode ser formulado como:

$$\min \quad c^T x + E_\xi[\min q(\omega)^T y(\omega)] \quad (3.1)$$

$$\text{s.a.:} \quad Ax = b \quad (3.2)$$

$$T(\omega)x + W(\omega)y(\omega) = h(\omega), \quad \forall \omega \in \mathcal{W} \quad (3.3)$$

$$x \geq 0, \quad y(\omega) \geq 0, \quad \forall \omega \in \mathcal{W}. \quad (3.4)$$

No modelo (3.1)–(3.4), as decisões de primeiro estágio são representadas pelo vetor x . Os vetores c e b , e a matriz tecnológica A descrevem os parâmetros determinísticos do problema. Para uma dada realização ω , o vetor aleatório $\xi^T(\omega) = [q(\omega), T(\omega), W(\omega), h(\omega)]$ torna-se conhecido e, então, as decisões de segundo estágio $y(\omega)$ podem ser tomadas. Finalmente, a função objetivo é composta pelo custo de primeiro estágio $c^T x$ e pelo custo esperado de segundo estágio $E_\xi[q(\omega)^T y(\omega)]$ sobre todas as realizações ω da variável aleatória ξ .

De uma perspectiva computacional, pode ser bastante custoso obter o termo de segundo estágio na função objetivo (3.1), uma vez que, para cada realização ω , a decisão de segundo estágio $y(\omega)$ é a solução de um problema de programação matemática. Para observar esse fato, o modelo (3.1)–(3.4) pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + Q(x) \\ \text{s.a.:} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{3.5}$$

em que $Q(x) = E_\xi Q[x, \xi(\omega)]$ e, para todo $\omega \in \mathscr{W}$,

$$Q[x, \xi(\omega)] = \min_{y(\omega) \geq 0} \{q(\omega)^T y(\omega) \mid T(\omega)x + W(\omega)y(\omega) = h(\omega)\}. \tag{3.6}$$

O modelo (3.5) descreve o problema de primeiro estágio e o modelo (3.6) define o problema de segundo estágio. O problema de segundo estágio pode ser visto como um problema de otimização em que a sua solução é considerada como uma ação de recurso e, dessa forma, o termo $W(\omega)y(\omega)$ “compensa” as possíveis inconsistências do sistema $T(\omega)x = h(\omega)$ e $q(\omega)^T y(\omega)$ é o custo dessa ação de recurso. Por sua vez, o intuito do problema de primeiro estágio é encontrar uma solução x que proporcione uma consistência no sistema $T(\omega)x + W(\omega)y(\omega) = h(\omega)$ para todas as possíveis realizações ω da variável aleatória ξ , de modo a otimizar os custos de primeiro estágio e a expectativa dos custos de segundo estágio.

A matriz $W(\omega)$ é denominada matriz de recurso, já que está associada às decisões de recurso $y(\omega)$. Um caso especial surge quando $W(\omega) = W$, i.e. a matriz associada às decisões de recurso $y(\omega)$ não depende de ω . Quando isso acontece, o modelo resultante é denominado modelo de programação estocástica com recurso fixo. Por sua vez,

estes modelos podem ser classificados como modelos com recurso relativamente completo, completo ou simples.

Seja $K_1 = \{x | Ax = b, x \geq 0\}$ o conjunto de decisões x que satisfazem as decisões de primeiro estágio e $K_2 = \{x | Q(x) < \infty\}$ o conjunto de decisões x de primeiro estágio para as quais o valor esperado é finito, isto é, o problema de segundo estágio é factível. Diz-se que o modelo de recurso (3.1)–(3.4) tem recurso relativamente completo se toda escolha de x que satisfaz as restrições de primeiro estágio também satisfaz as restrições de segundo estágio. Em outras palavras, um modelo é dito possuir recurso relativamente completo, se e somente se, $K_1 \subseteq K_2$. Note que é necessário ter um conhecimento prévio dos conjuntos K_1 e K_2 para identificar se um programa possui recurso relativamente completo.

Um problema de programação estocástica de dois estágios é dito ter recurso completo se o problema de segundo estágio for factível para qualquer escolha do valor das variáveis de primeiro estágio. Finalmente, outra situação especial é a de recurso simples. Ela ocorre quando a matriz W é da forma $[+I; -I]$, sendo I a matriz identidade, e o vetor $y(\omega)$ das decisões de segundo estágio é particionado em $[y(\omega)^+, y(\omega)^-]$ com o vetor $[q(\omega)^+, q(\omega)^-]$ sendo o custo associado a essas decisões, respectivamente. A partir da classificação anterior, é possível observar que recurso relativamente completo e simples são casos especiais de recurso completo. Para maiores detalhes sobre programação estocástica de dois estágios com recurso, recomenda-se ao leitor ver Birge e Louveaux (1997), Kall e Wallace (1994), Shapiro e Philpott (2007) e Shapiro, Dentcheva e Ruszcynski (2009), entre outros.

Mesmo que as variáveis de decisão de segundo estágio $y(\omega)$ não consigam manter a consistência do sistema $T(\omega)x = h(\omega)$ para todo $\omega \in \mathcal{W}$ (e, nesse caso, a solução do problema de otimização seria infactível), é possível garantir a factibilidade do problema de segundo estágio pela incorporação de variáveis de decisão auxiliares *irrestritas em sinal* às restrições *hard* do problema. Mulvey, Vanderbei e Zenios (1995) definem estas variáveis auxiliares como *variáveis de erro*, uma vez que estas assumem as violações positivas e negativas dessas restrições. As variáveis de erro são penalizadas na função objetivo do modelo de otimização e são ponderadas por um peso multicritério que controla o *trade-off* entre o custo total esperado e as infactibilidades do modelo. O modelo (3.1)–(3.4) reescrito para incorporar as variáveis de erro pode ser colocado da seguinte forma:

$$\min \quad c^T x + E_\xi[\min q(\omega)^T y(\omega)] + \gamma \rho E_\xi[\mathcal{E}(\omega)] \quad (3.7)$$

$$\text{s.a.} \quad Ax = b \quad (3.8)$$

$$T(\omega)x + W(\omega)y(\omega) + \mathcal{E}(\omega) = h(\omega), \quad \forall \omega \in \mathcal{W} \quad (3.9)$$

$$x \geq 0, \quad y(\omega) \geq 0 \quad (3.10)$$

$$\mathcal{E}(\omega) \text{ livre}, \quad (3.11)$$

em que ρ é a penalidade devido às violações (positivas e negativas) da restrição estocástica; γ representa um peso não negativo que controla o *trade-off* entre o custo total esperado e as infactibilidades do modelo; e $\mathcal{E}(\omega)$ são as variáveis de erro que assumem as infactibilidades da restrição $T(\omega)x + W(\omega)y(\omega) = h(\omega)$ para todo $\omega \in \mathcal{W}$.

Com a incorporação das variáveis auxiliares $\mathcal{E}(\omega)$, o termo $\mathcal{Q}(x)$ é sempre finito. Logo, tem-se um modelo de programação estocástica de dois estágios com recurso completo, dado que, para qualquer decisão x e para qualquer cenário $\omega \in \mathcal{W}$, o sistema $T(\omega)x + W(\omega)y(\omega) + \mathcal{E}(\omega) = h(\omega)$ é consistente, i.e., o problema de segundo estágio é factível (SHAPIRO; PHILPOTT, 2007; SHAPIRO; DENTCHEVA; RUSZCZYNSKI, 2009).

Para um ρ fixo, se $\gamma = 0$, permite-se obter soluções com um alto grau de infactibilidade a um custo baixo; por outro lado, se γ é suficientemente grande, é possível obter soluções com pouca infactibilidade, isto é, soluções “quase” factíveis para todos os cenários, mas o custo total esperado pode se deteriorar em demasia.

A noção de *quase factível* advém do conceito de *robustez do modelo* preconizado por Mulvey, Vanderbei e Zenios (1995). Segundo tais autores, a solução ótima de um modelo de programação estocástica é robusta em relação à factibilidade se ela for “quase” factível para todo cenário $\omega \in \mathcal{W}$. Ainda no trabalho de Mulvey, Vanderbei e Zenios (1995), os autores propõem a noção de robustez da solução. A solução ótima de um modelo de programação estocástica é robusta em relação à otimalidade se ela permanece “perto” da solução ótima para todo cenário $\omega \in \mathcal{W}$. A quantificação dos termos “quase” e “perto” é feita de acordo com escolha da norma apropriada ($\|\cdot\|_\infty$, por exemplo).

Quando um problema de otimização estocástica considera explicitamente os dois tipos de robustez, o paradigma resultante para abordar tal problema é denominado como otimização robusta (MULVEY; VANDERBEI; ZENIOS, 1995; SNIEDOVICH, 2012). O

objetivo dessa metodologia é imunizar um problema de otimização contra os parâmetros incertos do problema (BEN-TAL; HERTOOG; VIAL, 2012), i.e., identificar uma solução ótima (ou perto da ótima) que não seja excessivamente sensível a qualquer realização específica da incerteza (BAI; CARPENTER; MULVEY, 1997; GABREL; MURAL; THIELE, 2012). A partir das definições anteriores, o modelo (3.7)–(3.11) visa unicamente determinar soluções robustas em relação à factibilidade e, segundo Sniedovich (2012), este pode ser denominado como modelo de *satisfação robusta*. Mais recentemente, há uma tendência em denominar de programação estocástica com “aversão ao risco” o conjunto de técnicas de programação matemática cujo objetivo é mitigar o risco associado, por exemplo, à dispersão dos custos de segundo-estágio. Embora o conceito de solução robusta em relação à otimalidade possa fazer sentido nesse contexto, o termo solução *aversa ao risco* é mais geral e pressupõe que as preferências do decisor são consideradas de forma explícita no modelo. Assim, na presente dissertação, a robustez da solução será referenciada como risco.

3.2 Programação Estocástica com Aversão ao Risco

Dada uma solução x do problema de primeiro estágio, o valor da função objetivo do modelo (3.7)–(3.11) é uma variável aleatória, já que depende das realizações de ξ . Tal variável aleatória é caracterizada apenas em termos do valor esperado e, por essa razão, a formulação (3.7)–(3.11) é dita ser um programa *neutro em relação ao risco*, no sentido otimiza um objetivo *em média*, mas não considera critérios para medir o risco baseado na dispersão da variável aleatória. Entretanto, considerar somente o valor esperado como alternativa para quantificar o objetivo aleatório implica que a decisão obtida pode ser implementada repetidamente sob condições idênticas ou similares (também conhecido como suposição de longo-prazo ou Leis dos Grandes Números), e que a variabilidade ou a dispersão das realizações da variável aleatória não é significativa (PRÉKOPA, 1995; KROKHMAL; ZABARANKIN; URYASEV, 2011). Nas situações em que os pressupostos anteriores não se aplicam, é importante incorporar *medidas de aversão ao risco* aos modelos de programação estocástica. O risco pode ser definido como um sistema de atitudes ou de preferências em relação à variabilidade ou dispersão de um conjunto de realizações aleatórias (KROKHMAL; ZABARANKIN; URYASEV, 2011).

Há diversas maneiras de se considerar o risco em problemas de programação estocástica. Uma abordagem comumente utilizada baseia-se na ponderação entre a expectância e o risco na função objetivo, com pesos apropriados para refletir o grau de aversão ao risco do decisor. Seja $\mathbb{D}[\cdot]$ uma medida de risco que controla a dispersão da variável aleatória. Assim, um modelo geral de programação estocástica com aversão ao risco pode ser formulado como:

$$\min \quad c^T x + E_{\xi}[\min q(\omega)^T y(\omega)] + \gamma \rho E_{\xi}[\mathcal{E}(\omega)] + \lambda \mathbb{D}[\cdot] \quad (3.12)$$

$$\text{s.a.} \quad \text{Restrições (3.8)–(3.11),} \quad (3.13)$$

em que λ é um peso não negativo para controlar o *trade-off* entre custo esperado e risco. Por exemplo, se $\lambda = 0$, o objetivo é minimizar a expectância dos custos de segundo estágio, ignorando sua dispersão ou variabilidade. Nesse caso, diz-se que o decisor é neutro em relação ao risco. Em contrapartida, se o decisor é avesso ao risco, deve-se atribuir $\lambda > 0$, de modo que seja tão importante minimizar a média do objetivo quanto a sua variabilidade. Também, pode-se ser mais importante minimizar o risco do que a expectância; para tanto, altos valores de λ devem ser atribuídos.

Na literatura, existem diversas alternativas matemáticas para descrever a medida de dispersão $\mathbb{D}[\cdot]$. O clássico modelo de média-variância, proposto por Markowitz (1959), é um exemplo de uma medida de dispersão baseado na variância. Nesse caso, $\mathbb{D}[\cdot] = E[q(\omega)^T y(\omega) - E[q(\omega)^T y(\omega)]]^2$. Uma desvantagem prática da variância como medida de dispersão é que ambas as violações positivas e negativas são tratadas da mesma maneira. Além disso, os problemas de otimização resultantes podem se tornar computacionalmente intratáveis pela não linearidade da função objetivo, especialmente se o problema possuir variáveis de decisão discretas.

Por outro lado, existem também outras medidas referentes aos desvios positivos e negativos que podem ser usadas como medidas de dispersão. Tais medidas são definidas a seguir:

$$\sigma_p^+ = (E[(q(\omega)^T y(\omega) - E[q(\omega)^T y(\omega)])_+]^p)^{\frac{1}{p}} \quad (3.14)$$

$$\sigma_p^- = (E[(E[q(\omega)^T y(\omega)] - q(\omega)^T y(\omega))_+]^p)^{\frac{1}{p}} \quad (3.15)$$

As equações (3.14) e (3.15) descrevem os desvios positivos e negativos em relação ao custo esperado, respectivamente, sendo $p \in [1, \infty)$ um parâmetro a ser fixado. Um caso especial surge quando o parâmetro p assume o valor 1; nesse caso, os semidesvios são relacionados ao *Mean Absolute Deviation* (MAD) ou Desvio Médio Absoluto. De acordo com a formulação MAD, a função σ_p^+ é dada por:

$$\sigma_p^+ = E|q(\omega)^T y(\omega) - E[q(\omega)^T y(\omega)]| \quad (3.16)$$

Para evitar formulações não lineares, é possível linearizar a equação (3.16) a partir da definição de duas variáveis positivas $\Delta^+(\omega)$ e $\Delta^-(\omega)$. Assim, uma nova restrição $q(\omega)^T y(\omega) - E[q(\omega)^T y(\omega)] = \Delta^+(\omega) - \Delta^-(\omega)$ é adicionada no programa (3.12)-(3.11), minimizando $\lambda E[\Delta^+(\omega) + \Delta^-(\omega)]$ na função objetivo do mesmo programa (KONNO; YAMAZAKI, 1991). O modelo resultante pode ser escrito como:

$$\min \quad c^T x + E_\xi[\min q(\omega)^T y(\omega)] + \gamma \rho E_\xi[\mu(\omega)] + \lambda E[\Delta^+(\omega) + \Delta^-(\omega)] \quad (3.17)$$

$$\text{s.a.:} \quad \text{Restrições (3.8)–(3.10)} \quad (3.18)$$

$$q(\omega)^T y(\omega) - E[q(\omega)^T y(\omega)] = \Delta^+(\omega) - \Delta^-(\omega). \quad (3.19)$$

em que $\Delta^+(\omega)$ e $\Delta^-(\omega)$ representam variáveis auxiliares para quantificar os desvios tanto positivos e negativos dos custos associados a cada cenário $\omega \in \Omega$ em relação ao custo esperado.

Nesta dissertação, admite-se que o vetor aleatório ξ tem suporte finito Ξ , i.e., o vetor aleatório ξ é representado por um conjunto finito e discreto de realizações. Seja $\omega = 1, \dots, |\mathcal{W}|$ os índices das possíveis realizações denominados de cenários e seja $\pi(\omega)$ a probabilidade de ocorrência do cenário ω . Para mensurar o risco segundo a medida baseada no desvio médio absoluto (MAD), o programa equivalente determinístico em sua forma extensiva pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) q(\omega)^T y(\omega) + \gamma \rho \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) \mathcal{E}(\omega) \\ & + \lambda \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) [\Delta^+(\omega) + \Delta^-(\omega)] \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\text{s.a.} \quad Ax = b \quad (3.21)$$

$$T(\omega)x + W(\omega)y(\omega) + \mathcal{E}(\omega) = h(\omega), \quad \forall \omega \in \mathcal{W} \quad (3.22)$$

$$q(\omega)^T y(\omega) - \sum_{\underline{\omega} \in \mathcal{W}} \pi(\underline{\omega}) q(\underline{\omega})^T y(\underline{\omega}) = \Delta^+(\omega) - \Delta^-(\omega), \quad \forall \omega \in \mathcal{W} \quad (3.23)$$

$$x \geq 0, \quad y(\omega) \geq 0 \quad (3.24)$$

$$\mathcal{E}(\omega) \text{ livre} \quad (3.25)$$

$$\Delta^+(\omega) \geq 0 \quad \Delta^-(\omega) \geq 0. \quad (3.26)$$

O modelo de otimização (3.20)–(3.24) minimiza os custos de primeiro estágio (parcela 1), os custos de segundo estágio (parcela 2), as violações (parcela 3), e o risco associado à dispersão das variáveis aleatórias (parcela 4). O conjunto de restrições (3.21) está associado ao problema de primeiro estágio. As restrições (3.22)–(3.24) pertencem ao problema de segundo estágio. Particularmente, as restrições (3.23) são adicionadas ao modelo de otimização para mensurar o risco associado à dispersão dos custos de segundo estágio. As restrições (3.24) indicam o domínio das variáveis de decisão dos problemas de primeiro e segundo estágio. Finalmente, as restrições 3.25 e 3.26 definem o domínio das variáveis de erros e desvios, respectivamente.

Na literatura, existem outras medidas que podem ser usadas para mensurar o risco das variáveis aleatórias, entre as quais se destacam: *Value-at-Risk* (VaR) e as medidas coerentes de risco, *Conditional-Value-at-Risk* (CVaR) (ARTZNER et al., 1999; ROCKAFELLAR; URYASEV, 2002; SARYKALIN; SERRAINO; URYASEV, 2008). Uma medida coerente de risco é qualquer medida que satisfaz os axiomas de monotonicidade, invariância sobre translações, homogeneidade positiva e subaditividade (convexidade).

A programação estocástica com aversão ao risco tem ganhado uma especial atenção nos últimos anos. De fato, uma grande coleção de trabalhos práticos nesse campo foram desenvolvidos, por exemplo, nos problemas de expansão da capacidade (LAGUNA, 1998), planejamento tático e agregado (LEUNG; WU, 2004; LEUNG et al., 2007; AGHEZZAF; SITOMPUL; NAJID, 2010; HASHEM; ARYANEZHAD; SADJADI, 2012; BARREIROS;

ALEM; TOSO, 2013), planejamento da produção com perecibilidade (AMORIM; ALEM; ALMADA-LOBO, 2013), planejamento da produção em serrarias (ZANJANI; AIT-KADI; NOURELFATH, 2010), planejamento da produção na indústria de móveis (ALEM; MORABITO, 2012), planejamento de médio alcance na extração de cobre (ALONSO-AYUSO et al., 2014; CONSIGLIO; STAINO, 2010; MANSINI; OGRYCZAK; SPERANZA, 2006; PINAR, 2005), planejamento operacional de produção multi-local e redes de distribuição (VERDERAMA; FLOUDAS, 2011), planejamento e programação da produção em indústrias químicas e refinarias de óleo (SHU; LEE, 2001; JIA; LERAPETRITOU, 2004; LI; LERAPETRITOU, 2008; KHOR et al., 2008; OLIVEIRA et al., 2013), cadeia de suprimentos em manufatura ágil (PAN; NAGI, 2010), programação de ônibus (YAN; TANG, 2009), gestão financeira (LAI; NG, 2005; PINAR, 2005; MANSINI; OGRYCZAK; SPERANZA, 2006; LAI; WANG; LIANG, 2007; CONSIGLIO; STAINO, 2010; ESCUDERO et al., 2012), localização de facilidades (TOSO; ALEM, 2014), gestão de desastres (BOZORGI-AMIRI; JABALAMELI; MIRZAPOUR, 2011; NOYAN, 2012), entre muitos outros.

3.3 Valor Esperado de Informação Perfeita (EVPI) e Valor da Solução Estocástica (VSS)

Embora muitos problemas do mundo real envolvam parâmetros incertos, é comum a utilização de estratégias para aboli-las, no intuito de simplificar o processo de tomada de decisão. Por exemplo, substituir as variáveis aleatórias por seus respectivos valores esperados é uma estratégia comum para aproximar tais incertezas. Outra estratégia consiste na resolução vários programas determinísticos, correspondentes a possíveis realizações das variáveis aleatórias, e combinar estas soluções por meio de regras heurísticas. Uma questão que surge é: quão boa é a solução fornecida por tais abordagens aproximadas? De uma perspectiva teórica, essa questão pode ser elucidada pelos conceitos de valor esperado de informação perfeita (EVPI) e de valor da solução estocástica (VSS).

O EVPI reflete a quantidade máxima que um tomador de decisão estaria disposto a pagar para ter informação completa e precisa sobre o futuro. Esse conceito exprime também quanto seria possível poupar na presença de informação perfeita. O EVPI pode ser determinado da seguinte maneira: (1) Resolva os problemas determinísticos (problemas

wait and see) associados a cada cenário ω , e defina $WS^*(\omega)$ a correspondente solução ótima. (2) Determine o valor esperado das soluções *wait and see* da seguinte forma: $WS = \sum_{\omega \in \mathcal{W}} \pi(\omega) WS^*(\omega)$. (3) Finalmente, a solução WS pode ser comparada à solução aqui e agora do problema estocástico (RP). O valor esperado de informação perfeita pode ser determinado como a diferença entre as soluções *wait and see* e *here and now*, i.e., $EVPI = RP - WS$. Quanto maior é o valor do EVPI, maior é o impacto da incerteza no problema.

Uma vez que a estratégia WS fornece um conjunto de soluções correspondentes aos vários cenários, tal estratégia, na prática, não é implementável. Todavia, regras heurísticas para combinar as soluções WS podem ser usadas como estratégias para obter uma única política factível que seja implementável. Uma possível estratégia envolve considerar o valor esperado da variável aleatória, ou o cenário de valor médio, $\bar{\xi} = \sum_{\omega \in \mathcal{W}} \pi(\omega) \xi(\omega)$, e resolver o correspondente problema determinístico. Esse problema é conhecido na literatura como o *problema de valor esperado* (EV). Seja $x^*(\bar{\xi})$ a solução ótima desse problema, geralmente denominada como solução de valor esperado.

Uma questão de especial interesse surge diante a possibilidade de usar a solução $x^*(\bar{\xi})$: quão boa ou ruim é tal decisão em relação à decisão do problema estocástico. Para isso, defina o *resultado esperado de usar a solução EV*, ou simplesmente, EEV . O problema EEV é o próprio problema estocástico RP, no qual as variáveis de primeiro estágio foram previamente fixadas de acordo com a solução do problema EV, i.e. $x^*(\bar{\xi})$. O problema resultante é resolvido apenas nas variáveis de segundo estágio e, por essa razão, o problema EEV é dito ser *decomponível em cenários*. A solução do problema EEV exprime como as decisões de segundo estágio são definidas otimamente como função de $x^*(\bar{\xi})$ e ξ . Finalmente, o valor da solução estocástica é definido como $VSS = EEV - RP$ e seu valor revela o ganho obtido por considerar as incertezas de forma explícita, em detrimento à utilização da estratégia aproximada de valor esperado. Além disso, o VSS também indica o custo por ignorar a aleatoriedade. O problema EV pode ser definido a partir do cenário de valor esperado, do cenário mais provável, ou do cenário de pior caso. No entanto, o cálculo do VSS é realizado de maneira análoga.

3.4 Representação e Geração de Cenários

Em geral, a qualidade e a complexidade de um modelo de programação estocástica estão relacionadas à forma de modelar as incertezas (HOYLAND; WALLACE, 2001; HOYLAND; MICHAL; WALLACE, 2002; HOYLAND; KAUT; WALLACE, 2003; KAUT; WALLACE, 2007). Estas podem ser representadas por variáveis aleatórias e descritas por um número finito de eventos discretos gerados a partir de distribuições de probabilidade discretas ou contínuas. Os eventos podem ainda ser combinados para evidenciar correlações entre as variáveis aleatórias por meio de árvores de cenários, especialmente em problemas de múltiplos estágios (DUPACOVÁ; CONSIGLI; WALLACE, 2000).

Para ilustrar o conceito de *árvore de cenários*, considere um problema de programação estocástica em que três parâmetros aleatórios são considerados. Assuma que a distribuição de probabilidade marginal de cada variável aleatória é conhecida e que a distribuição marginal das três variáveis aleatórias é composta por 2, 3 e 3 realizações ou eventos, respectivamente. Combinando os eventos das variáveis aleatórias, têm-se a árvore de cenários ilustrada na Figura 3.1. Essa árvore de cenários é representada por um conjunto finito de nós. O nó inicial corresponde ao nó raiz e os demais são denominados de nós filhos. Cada nó possui um único nó predecessor, mas possivelmente vários sucessores. Com exceção do nível do nó raiz, para cada nível da árvore, uma variável aleatória é associada.

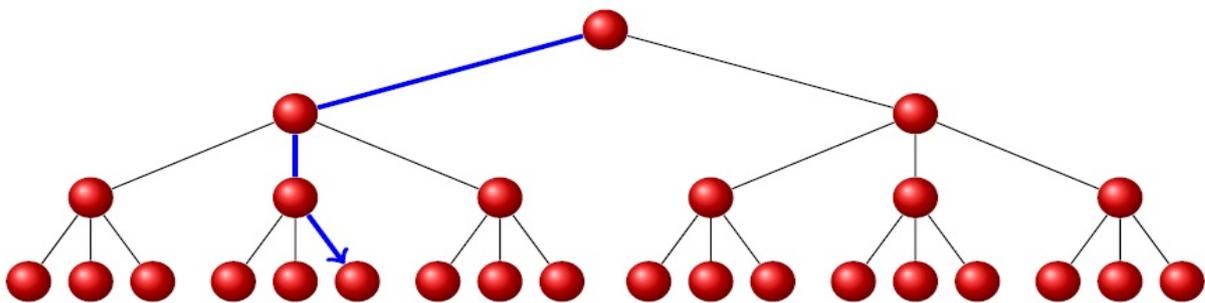


Figura 3.1: Exemplo de árvore de cenários. (Fonte: Kaut, 2011).

Essa árvore de cenários representa a distribuição conjunta das variáveis aleatórias envolvidas em um dado modelo de programação estocástica (ROSS, 2007). Note que a árvore ramifica-se para cada possibilidade da realização da variável aleatória, totalizando $2 \times 3 \times 3 = 18$ cenários. Em modelos de programação estocástica baseada em cenários, as

decisões são tomadas nos nós e os arcos representam as realizações das variáveis aleatórias. Um caminho nessa árvore é chamado de cenário e consiste de realizações de todas as variáveis aleatórias (ROSS, 2007).

Sob a suposição de que as variáveis aleatórias são estatisticamente independentes, a probabilidade de ocorrência de um cenário corresponde ao produto das probabilidades de ocorrência dos eventos de cada variável aleatória através do caminho. Também é possível notar da Figura 1 que a dimensão da árvore aumenta conforme o número de variáveis aleatórias envolvidas no problema e o número de eventos considerados para representar as distribuições marginais dessas variáveis. Desta forma, uma desvantagem de se representar a distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias através de árvores de cenários é que a dimensão da árvore ocasiona um aumento na complexidade de resolução do modelo de otimização resultante (SHAPIRO; PHILPOTT, 2007).

Uma das propriedades mais importantes de representação em árvore é a manutenção da implementabilidade (ou não antecipatividade) das decisões obtidas. Esta propriedade reflete que, sob incerteza, as decisões devem ser tomadas antes da realização das variáveis aleatórias e, portanto, não pode ser baseada em qualquer realização da variável aleatória (BIRGE; LOUVEAUX, 1997; KALL; WALLACE, 1994). A propriedade de não antecipatividade é uma característica inerente dos programas estocásticos multiestagiados.

A construção da árvore de cenários constitui uma etapa muito importante no desenvolvimento de um modelo de programação estocástica. Durante este processo, duas questões principais devem ser analisadas (HOYLAND; KAUT; WALLACE, 2003): (i) O número de cenários gerados deve ser suficientemente pequeno para que o modelo de programação estocástica seja computacionalmente tratável. Essa questão está relacionada à *complexidade do modelo* de programação estocástica. (ii) Por outro lado, o número de cenários gerados deve ser suficientemente grande para garantir a convergência da árvore à distribuição conjunta de probabilidade real das variáveis aleatórias. Esta questão está relacionada à *qualidade da solução* do modelo de programação estocástica. Assim, a geração da árvore de cenários em um modelo de programação estocástica ocasiona um compromisso entre eficiência computacional e qualidade da solução. Por essa razão, os métodos de geração de cenários tendem a encontrar um equilíbrio entre essas duas medidas.

3.5 Métodos de Geração de Árvores de Cenários

Na literatura existem diversos métodos para a geração de cenários. O intuito desses métodos é construir a distribuição conjunta das variáveis aleatórias envolvidas no problema de programação estocástica, i.e., determinar os valores dos eventos finitos e discretos que representam a distribuição dessas variáveis. Uma vez que estes eventos tenham sido determinados, os mesmos são combinados a fim de obter a árvore de cenários. Dentre os diferentes métodos de geração de cenários, encontram-se os seguintes:

- *Métodos baseados nas propriedades estatísticas:* Tais métodos são usados quando a distribuição de probabilidade marginal das variáveis aleatórias não é conhecida, caracterizando-se por determinar algumas propriedades estatísticas dos dados e a partir delas, utilizar procedimentos heurísticos para gerar um conjunto de eventos que as reproduzam. Geralmente, essas propriedades estatísticas correspondem aos momentos das variáveis aleatórias (esperança, variância, entre outras). Um dos métodos baseados nas propriedades estatísticas mais usados é *moment matching*, desenvolvido por Hoyland, Kaut e Wallace (2003). Esse método consiste em calcular os momentos necessários para a determinação da matriz de correlação de modo a estimar os eventos finitos e discretos das variáveis aleatórias do problema e, posteriormente, construir a árvore de cenários. Outras abordagens pertencentes a este tipo de métodos são as baseadas em regressão linear e em análises de componentes principais (HONG et al., 2010; PFLUG, 2012).
- *Métodos de Simulação por Amostragem:* Tais métodos são utilizados para casos em que as distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias são conhecidas. Basicamente, esses métodos consistem em gerar os eventos através de amostras obtidas das distribuições reais, de forma que, para cada ω obtido, associa-se uma probabilidade $\pi(\omega)$. Os métodos mais usados são amostragem por simulação Monte Carlo e quase Monte Carlo (SHAPIRO, 2003; LINDEROTH; SHAPIRO; WRIGHT, 2006; LEMIEUX, 2009).
- *Modelos Econométricos e de Séries Temporais:* A ideia principal desses modelos reside no uso de informações obtidas a partir dos valores da série a fim de inferir sobre o seu comportamento futuro. Dado um conjunto de dados históricos, estes modelos tentam capturar as características empíricas relevantes da série e em seguida,

descrevê-las e gerar os eventos a partir destas. Alguns dos modelos vastamente estudados para esse fim são os modelos de Box & Jenkins, ARMA e ARIMA (e seus derivados) (VANDAELE, 1983; LIU et al., 2006).

Outros métodos de geração de cenários incluem aqueles baseados em redes neurais e clusterização (ROSS, 2007; MITRA; DOMENICA, 2010). Alguns métodos ainda utilizam uma combinação de mais de uma técnica, e por este motivo, são chamados de métodos híbridos. Para o leitor interessado em métodos de geração de cenários, sugere-se ler Dupacová, Consigli e Wallace (2000), Hoyland, Kaut e Wallace (2003), Ross (2007), Mitra e domenica (2010), Kaut (2011).

Segundo Kaut (2003), quando são comparados diferentes métodos na geração de cenários, deve-se focar no desempenho prático dos mesmos, e não em suas propriedades teóricas. Isso significa que um método pode aproximar perfeitamente a distribuição de probabilidade da variável aleatória quando o número de cenários tende ao infinito, mas isso não significa que o mesmo método seja bom para gerar uma árvore com apenas poucos cenários. Contrariamente, um método pode não apresentar convergência para a distribuição de probabilidade verdadeira da variável aleatória quando o número de cenários tende ao infinito, mas pode ter bom desempenho para problemas práticos. Assim, os mesmos autores propuseram dois indicadores de desempenho que os métodos de geração de cenários devem satisfazer para gerar cenários com boa qualidade: a estabilidade (interna e externa) e o erro.

Nesta dissertação, a notação $\hat{\xi}$ descreve a distribuição conjunta das variáveis aleatórias gerada a partir da discretização da distribuição de probabilidade ξ (discreta ou contínua), i.e., $\hat{\xi}$ representa a árvore de cenários. A estabilidade interna consiste na geração de K árvores de cenários da mesma dimensão e posterior resolução dos K problemas de programação estocástica resultantes. Seja x_k^* o valor ótimo das variáveis de decisão do problema k , com $k = 1, \dots, K$. Se o método de geração de cenários for estável, espera-se obter, aproximadamente, o mesmo valor da função objetivo para os K problemas, isto é:

$$F(x_k^*; \hat{\xi}_k) \approx F(x_l^*; \hat{\xi}_l), \quad \forall k, l = 1, \dots, K \quad k \neq l. \quad (3.27)$$

A estabilidade externa consiste em obter a solução ótima x^* do problema de programação estocástica com conhecimento completo da distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias envolvidas no problema, e compará-la às soluções ótimas dos proble-

mas resultantes da discretização de ξ . Se o modelo for estável, o valor ótimo da função objetivo do problema original é aproximadamente igual à função objetivo dos K problemas aproximados, isto é:

$$F(x^*; \xi) \approx F(x_k^*; \hat{\xi}_k), \quad \text{com } k = 1, \dots, K. \quad (3.28)$$

A propriedade referente ao erro é definida como a distância entre o valor ótimo da função objetivo do problema estocástico original e as K soluções ótimas dos problemas estocásticos aproximados. O erro é dado por:

$$e(\xi; \hat{\xi}_k) \approx F(x^*; \xi) - F(x_k^*; \hat{\xi}_k), \quad \text{com } k = 1, \dots, K. \quad (3.29)$$

Dado um método de geração de cenários, busca-se minimizar tal erro. No melhor dos casos, espera-se que esse erro seja nulo. No entanto, na maioria dos casos, esta propriedade é difícil de ser medida, pois encontrar a solução ótima do problema original significa resolver o problema de programação estocástica com o conhecimento completo da distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias envolvidas (KAUT, 2003; KAUT; WALLACE, 2007). Para superar tal dificuldade, pode-se gerar uma árvore de cenários suficientemente grande de tal forma que o problema de programação estocástica associado possa ser resolvido até sua otimalidade. Essa estratégia é usada nessa dissertação para avaliar as propriedades de estabilidade externa e do erro.

Vale destacar ainda que, uma vez gerada a árvore de cenários, é possível *reduzi-la* para melhorar o desempenho do método de solução do modelo de programação estocástica resultante (GRÖWE-KUSKA; HEITSCH; RÖMISCH, 2003; HEITSCH; RÖMISCH, 2008; RÖMISCH, 2009). Seja q o número de variáveis aleatórias consideradas em um dado modelo de programação estocástica e $\hat{\xi}$ a árvore de cenários com suporte finito, $\text{sup}(\hat{\xi}) = N$, associada a essas variáveis. A ideia básica da redução de cenários consiste em determinar uma árvore consistindo de n cenários, a qual seja a melhor aproximação de $\hat{\xi}$ em relação a uma métrica de distância p definida a priori, tal que $n < N$ e $\sum_{\omega=1}^n \pi(\omega) = 1$ (GRÖWE-KUSKA; HEITSCH; RÖMISCH, 2003; HEITSCH; RÖMISCH, 2008; RÖMISCH, 2009).

Capítulo 4

O Problema de Programação de Bombas com Demanda Estocástica e sem Custo Fixo

Este capítulo têm o objetivo de apresentar uma extensão do modelo de Toledo et al. (2008) para considerar a demanda de água estocástica. Tal demanda é modelada como uma variável aleatória cuja distribuição de probabilidade consiste de um conjunto finito e discreto de realizações. O modelo de otimização resultante visa determinar a melhor programação de bombas diante de todas as possíveis realizações consideradas da demanda, minimizando os custos esperados de consumo de energia elétrica associados às atividades de bombeamento. As realizações da demanda por água foram geradas via amostragem por simulação Monte Carlo. O capítulo está organizado da seguinte maneira. A Seção 4.1 define o modelo de otimização determinística de Toledo et al. (2008) para o problema de programação de bombas em sistemas de abastecimento urbano. A Seção 4.2 desenvolve um modelo de programação estocástica de dois estágios com recurso para incorporar a demanda aleatória. Na Seção 4.3 é apresentado um modelo de programação estocástica com restrições de satisfação robusta e na Seção 4.4, um modelo de programação estocástica com restrições de satisfação robusta e aversão ao risco é formulado. A Seção 4.5 descreve o método de geração de cenários desenvolvido neste trabalho. As Seções 4.6–4.8 ilustram os resultados computacionais. Finalmente, a Seção 4.9 apresenta o sumário e as considerações finais.

4.1 Programação de Bombas com Demanda Determinística e sem Custo Fixo

Nesta seção, é apresentado o modelo de programação linear determinístico proposto no trabalho de Toledo et al. (2008) para o problema de programação de bombas em redes de abastecimento urbano. O objetivo principal desse modelo é determinar o volume de água a ser armazenado nos reservatórios ao longo do horizonte de planejamento a fim de atender a demanda por água e minimizar os custos de consumo de energia elétrica associado às operações de bombeamento. A fim de facilitar a descrição do modelo matemático, considere a rede de abastecimento urbano ilustrada na Figura 4.1.

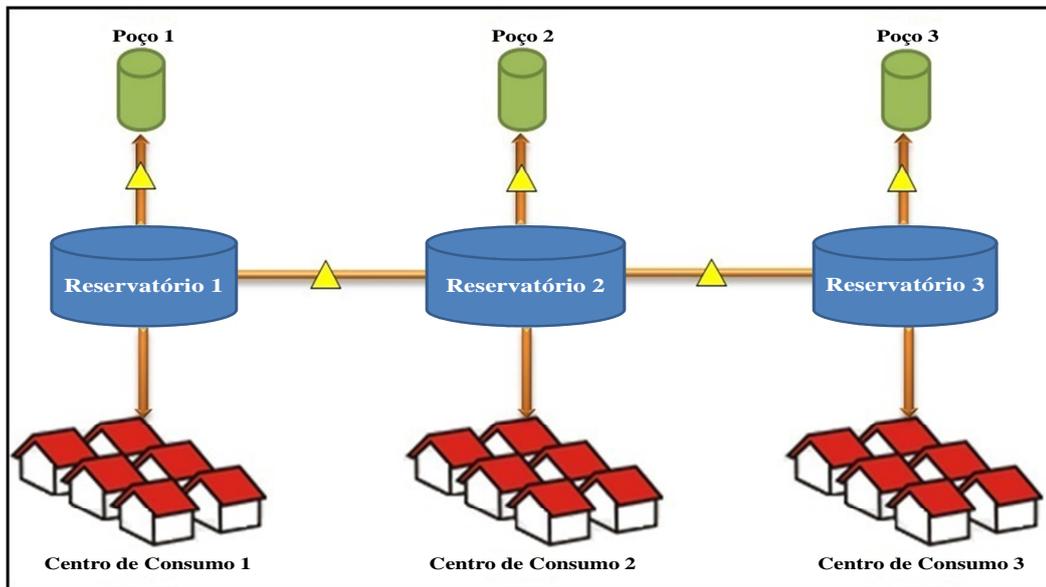


Figura 4.1: Exemplo de uma rede de abastecimento urbano de água (Adaptado de Toledo et al. (2008)).

Nessa rede, cada poço pode abastecer somente o reservatório com o qual apresenta ligação direta. Do mesmo modo, cada reservatório pode suprir o centro de consumo relacionado. No entanto, como os reservatórios estão localizados em partes altas da cidade, não é necessária a designação de bombas entre eles a seu centro de consumo, uma vez que a distribuição de água é feita por força gravitacional. Além disso, existem bombas entre os diferentes reservatórios para indicar a existência de abastecimento de água entre os mesmos. Porém, como podem existir pares de reservatórios que não apresentam ligação direta, então, necessariamente, a vazão de água entre um par de reservatórios deve passar

pelos reservatórios alocados entre eles.

Uma vez que a cada poço está associado um único reservatório e uma única bomba, sem perda de ambiguidade, um mesmo índice para referenciar às bombas e reservatórios pode ser usado. Para descrever o modelo matemático de otimização, considere a notação descrita na Tabela 4.1:

Tabela 4.1: Notação matemática para a modelagem determinística do OCP em redes de abastecimento urbano.

	<i>Índices</i>
$(j, \ell) \in \mathcal{R}$	Índice dos reservatórios e bombas.
$k \in \mathcal{K}$	Índice dos centros de consumo.
$t \in \mathcal{T}$	Índice dos períodos.
	<i>Conjuntos</i>
\mathcal{K}_j	$= \{k, \text{ tal que o centro de consumo } k \text{ é suprido pelo reservatório } j\}.$
\mathcal{R}_j	$= \{\ell, \text{ tal que } \ell \text{ é um reservatório que pode receber água do reservatório } j\}.$
\mathcal{R}_j^*	$= \{\ell, \text{ tal que } \ell \text{ é um reservatório que pode enviar água ao reservatório } j\}.$
	<i>Parâmetros</i>
d_{kt}	Demanda do centro consumidor k durante o período t .
α_{jt}	Custo de manter a bomba j em operação durante o período t .
$\delta_{j\ell t}$	Custo de transferência de água do reservatório j para ℓ durante o período t .
q_{jt}	Vazão da bomba j durante o período t .
$\nu_{j\ell t}$	Vazão da bomba para transportar água do reservatório j para ℓ durante o período t .
h_j^{\min}	Volume mínimo do reservatório j .
h_j^{\max}	Volume máximo do reservatório j .
h_j^0	Volume de água no reservatório j no início do planejamento.
θ_{jt}	Fração de água perdida por vazamento no reservatório j no período t
	<i>Variáveis de Decisão</i>
X_{jt}	Fração do período t no qual a bomba j permanece em operação.
I_{jt}	Volume de água no reservatório j no final do período t .
$V_{j\ell t}$	Fração do período t no qual a água é transferida do reservatório j para ℓ .

O modelo de programação linear para minimizar os custos de consumo de energia elétrica associados às operações de bombeamento de água em uma rede de abastecimento urbano é descrito a seguir.

$$\min \quad \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{j \in \mathcal{R}} \alpha_{jt} X_{jt} + \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{j \in \mathcal{R}} \sum_{l \in \mathcal{R}_j} \delta_{jlt} V_{jlt} \quad (4.1)$$

$$\text{s.a.:} \quad I_{jt} = (1 - \theta_{jt}) I_{j,t-1} + q_{jt} X_{jt} + \sum_{l \in \mathcal{R}_j^*} \nu_{jlt} V_{jlt} - \sum_{l \in \mathcal{R}_j} \nu_{jlt} V_{jlt} - \sum_{k \in \mathcal{K}_j} d_{kt}, \quad j \in \mathcal{R}, \quad t \in \mathcal{T} \quad (4.2)$$

$$h_j^{\min} \leq I_{jt} \leq h_j^{\max}, \quad j \in \mathcal{R}, \quad t \in \mathcal{T} \quad (4.3)$$

$$0 \leq x_{jt} \leq 1, \quad j \in \mathcal{R}, \quad t \in \mathcal{T} \quad (4.4)$$

$$0 \leq V_{jlt} \leq 1, \quad j \in \mathcal{R}, \quad l \in \mathcal{R}_j, \quad t \in \mathcal{T} \quad (4.5)$$

$$I_{j0} = h_j^0, \quad j \in \mathcal{R} \quad (4.6)$$

A função objetivo (4.1) visa minimizar os custos de consumo de energia elétrica associados às atividades de captação de água entre poços e reservatórios (parcela 1) e de transferência de água entre os reservatórios (parcela 2). Ao passo que as restrições (4.2) representam o balanço do volume de água armazenado nos reservatórios, as restrições (4.3) asseguram que tal volume não exceda as capacidades mínima e máxima dos mesmos. As restrições (4.4) indicam que as bombas hidráulicas para a captação de água dos poços podem ser operadas em todo o período ($X_{jt} = 1$) ou em parte dele ($X_{jt} < 1$) ou podem não ser operadas ($X_{jt} = 0$). Uma vez que as variáveis de decisão V_{jlt} representam a fração do tempo em que as bombas serão mantidas ligadas entre reservatórios, as restrições (4.12) indicam que tais bombas podem transferir água em todo o período ($V_{jlt}(\omega) = 1$) ou em parte dele ($V_{jlt}(\omega) < 1$) ou podem não transferir água ($V_{jlt}(\omega) = 0$). Finalmente, as restrições (4.6) expressam o volume de água armazenado nos reservatórios no início do horizonte de planejamento. Para maiores detalhes sobre esse modelo de otimização, sugere-se ao leitor ver o trabalho de Toledo et al. (2008).

4.2 Programação de Bombas sem Custo Fixo com Demanda Estocástica

A demanda de água em cada centro de consumo k durante o período t foi modelada como uma variável aleatória em um espaço de probabilidade $(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, em que \mathcal{W} é o conjunto dos cenários (com uma realização específica $\xi(\omega)$ para cada cenário $\omega \in \mathcal{W}$) equipado

com um σ -álgebra de eventos \mathcal{A} com uma medida de probabilidade denotada por \mathbb{P} . Assume-se também que a demanda estocástica para cada cenário ω é representado pelo vetor aleatório $\boldsymbol{\xi}^T = \{\xi(\omega = 1), \xi(\omega = 2), \dots, \xi(\omega = |\mathcal{W}|)\}$ com uma probabilidade de ocorrência $\pi(\omega)$, tal que $\pi(\omega) > 0$ e $\sum_{\omega \in \mathcal{W}} \pi(\omega) = 1$. Cada componente do vetor aleatório $\boldsymbol{\xi}$ pode ser escrito como a matrix aleatória a seguir:

$$\boldsymbol{\xi}(\omega) = \begin{pmatrix} d_{11}(\omega) & d_{12}(\omega) & \cdots & d_{1|\mathcal{T}|}(\omega) \\ d_{21}(\omega) & d_{22}(\omega) & \cdots & d_{2|\mathcal{T}|}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{|\mathcal{K}|1}(\omega) & d_{|\mathcal{K}|2}(\omega) & \cdots & d_{|\mathcal{K}||\mathcal{T}|}(\omega) \end{pmatrix},$$

em que $|\mathcal{K}|$ e $|\mathcal{T}|$ representam o número de centros de consumo e o número de períodos de tempo, respectivamente.

Todos os cenários $\omega \in \mathcal{W}$ são considerados simultaneamente no modelo de otimização usando a metodologia de programação estocástica de dois estágios com o paradigma de recurso. Sob esse paradigma, é necessário particionar as variáveis de decisão do problema em primeiro e segundo estágio. As variáveis independente dos cenários ou de primeiro estágio são decisões que devem ser tomadas sem a informação completa das variáveis aleatórias. As variáveis dependentes dos cenários ou de segundo estágio são decisões corretivas que servem para ajustar as decisões de primeiro estágio para cada cenário da demanda.

Na prática, como o objetivo principal dos sistemas de abastecimento de água é satisfazer a demanda de água dos centros de consumo, então é preciso fazer a captação de água entre os poços e os reservatórios, mesmo com conhecimento parcial da demanda. Esperar a realização da demanda por água para em seguida tomar as decisões sobre a captação de água, pode ocasionar uma demanda reprimida muito elevada ou o funcionamento das bombas hidráulicas em horários de pico, o que eleva em demasia o custo de energia elétrica. Quando as decisões de captação de água dos poços para os reservatórios são tomadas antes que a demanda se materialize, há armazenamento de água nos reservatórios, o que aumenta as chances de atender a demanda. Desta forma, as decisões que definem a captação de água ou a transferência de água entre poços e reservatórios, X_{jt} , são definidas como variáveis de decisão de primeiro estágio.

O impacto das decisões de primeiro estágio, determinadas com conhecimento parcial

da demanda por água, pode ser minimizado com as decisões de recurso ou de segundo estágio. Por exemplo, suponha que a realização da demanda seja elevada e, além disso, a água captada dos poços não consiga atender tal demanda. Para atender a demanda restante, as seguintes decisões de recurso podem ser tomadas: manter um volume de água adequado nos reservatórios no período anterior; e/ou incorrer na transferência de água dos reservatórios com menor demanda (ou com maior volume de água) para aqueles com demanda reprimida. Assim, é suficiente definir as seguintes decisões de recurso: (1) Volume de água armazenado no reservatório j ao final do período t no cenário ω ($I_{jt}(\omega)$), e (2) Fração do período t em que a água é transferida do reservatório j para o ℓ no cenário ω ($V_{j\ell t}(\omega)$).

Tabela 4.2: Notação adicional para a modelagem matemática do PSP com demanda estocástica.

<i>Índices</i>	
$\omega \in \mathcal{W}$	Cenários.
<i>Parâmetros Estocásticos</i>	
$d_{kt}(\omega)$	Demanda do centro consumidor k no período t no cenário ω .
$\pi(\omega)$	Probabilidade de ocorrência do cenário ω .
<i>Variáveis de Decisões de Primeiro Estágio</i>	
X_{jt}	Fração do período t em que a bomba j permanece em operação.
<i>Variáveis de Decisões de Segundo Estágio</i>	
$I_{jt}(\omega)$	Volume de água do reservatório j no final do período t no cenário ω .
$V_{j\ell t}(\omega)$	Fração do período t no qual existe transferência de água do reservatório j para ℓ no cenário ω .

Para formular o modelo de programação estocástica considere a notação matemática adicional da Tabela (4.2). Adicionalmente, defina $\mathcal{X} = \{X_{jt}, \forall j \in \mathcal{R}, \forall t \in \mathcal{T}\}$, $\mathbf{I} = \{I_{jt}(\omega), \forall j \in \mathcal{R}, \forall t \in \mathcal{T}, \forall \omega \in \mathcal{W}\}$ e $\mathbf{V} = \{V_{j\ell t}(\omega), \forall j \in \mathcal{R}, \forall \ell \in \mathcal{R}_j, \forall t \in \mathcal{T}, \forall \omega \in \mathcal{W}\}$. O modelo de programação estocástica de dois estágios com recurso em sua forma equivalente determinística para o problema de programação de bombas com demanda estocástica pode ser escrito como:

$$\min \quad \sum_{j \in \mathcal{R}} \sum_{t \in \mathcal{T}} \alpha_{jt} X_{jt} + \mathcal{Q}[\mathcal{X}, \boldsymbol{\xi}] \quad (4.7)$$

$$\text{s.a.:} \quad 0 \leq X_{jt} \leq 1, \quad j \in \mathcal{R}, \quad t \in \mathcal{T}. \quad (4.8)$$

em que $\mathcal{Q}[\mathcal{X}, \boldsymbol{\xi}]$ é o valor ótimo do problema de segundo estágio (4.9)–(4.13).

$$\min_{\omega \in \mathcal{W}} \sum_{\omega \in \mathcal{W}} \pi(\omega) \left(\sum_{j \in \mathcal{R}} \sum_{\ell \in \mathcal{R}_j} \sum_{t \in \mathcal{T}} \delta_{j\ell t} V_{j\ell t}(\omega) \right) \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.:} \quad I_{jt}(\omega) &= (1 - \theta_{j(t-1)}) I_{j(t-1)}(\omega) + q_{jt} X_{jt} + \sum_{\ell \in \mathcal{R}_j^*} \nu_{\ell jt} V_{\ell jt}(\omega) - \\ &\quad - \sum_{\ell \in \mathcal{R}_j} \nu_{j\ell t} V_{j\ell t}(\omega) - \sum_{k \in \mathcal{K}_j} d_{kt}(\omega), j \in \mathcal{R}, t \in \mathcal{T}, \omega \in \mathcal{W} \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$h_j^{\min} \leq I_{jt}(\omega) \leq h_j^{\max}, j \in \mathcal{R}, t \in \mathcal{T}, \omega \in \mathcal{W} \quad (4.11)$$

$$0 \leq V_{j\ell t}(\omega) \leq 1, j \in \mathcal{R}, \ell \in \mathcal{R}_j, t \in \mathcal{T}, \omega \in \mathcal{W} \quad (4.12)$$

$$I_{j0}(\omega) = h_j^0, j \in \mathcal{R}, \omega \in \mathcal{W} \quad (4.13)$$

O problema (4.7)–(4.8) envolve todas as decisões de primeiro estágio que devem ser definidas otimamente para minimizar os custos associados à captação de água (parcela 1) e os custos incorridos pelas decisões de segundo estágio (parcela 2). As restrições (4.8) de primeiro estágio indicam que as bombas hidráulicas para a captação de água dos poços podem ser operadas em todo o período ($x_{jt} = 1$) ou em parte dele ($x_{jt} < 1$) ou podem não ser operadas ($X_{jt} = 0$).

No problema de segundo estágio (4.9)–(4.13), as variáveis de decisões e as restrições dependem do cenário ω e, portanto, o custo total depende da expectância dos custos de segundo estágio, i.e., os custos associados à transferência de água entre os reservatórios (parcela 1). As restrições (4.10) expressam o balanço do volume de água armazenado nos reservatórios, ao passo que as restrições (4.11) garantem que a capacidade mínima e máxima de armazenamento de água de cada reservatório seja respeitada para todo par (j, t) e todo cenário $\omega \in \mathcal{W}$. Uma vez que as variáveis de decisão $V_{j\ell t}(\omega)$ representam a fração do tempo em que as bombas serão mantidas ligadas entre reservatórios, as restrições (4.12) indicam que tais bombas podem transferir água em todo o período ($V_{j\ell t}(\omega) = 1$) ou em parte dele ($V_{j\ell t}(\omega) < 1$) ou podem não transferir água ($V_{j\ell t}(\omega) = 0$). Por último, as restrições (4.13) ilustram o volume de água armazenado nos reservatórios ao início do horizonte de planejamento, i.e., no período $t = 0$.

4.3 Modelo de Programação Estocástica com Restrições de Satisfação Robusta

Para o problema de programação de bombas, é desejável que qualquer solução \mathcal{X}^* que satisfaz as restrições de primeiro estágio (4.8), também satisfaça as restrições do problema de segundo estágio (4.10)–(4.13). Isto é, garantir que qualquer política operacional implementável relacionada à captação de água possa ser ajustada independente do comportamento da demanda de água usando armazenamento de água e/ou transferência de água entre os reservatórios. Um problema de programação estocástica com essa propriedade é dito ter *recurso relativamente completo*.

No entanto, note que o modelo (4.7)–(4.13) não tem recurso relativamente completo, a não ser que qualquer volume de água possa ser armazenado nos reservatórios e/ou transferida entre eles. Desta forma, para construir um modelo com recurso relativamente completo, é suficiente permitir que a variável de decisão $I_{jt}(\omega)$ possa violar as restrições (4.11), sendo tais violações compensadas via penalização na função objetivo.

Para construir um modelo de recurso relativamente completo, basta definir as variáveis auxiliares $\mathcal{E}_{jt}^+(\omega) \geq 0$ como o excesso de água no reservatório j durante o período t no cenário ω e $\mathcal{E}_{jt}^-(\omega) \geq 0$ como a falta de água no reservatório j durante o período t no cenário ω e adicioná-las nas restrições (4.10). A partir das restrições (4.11), é possível notar que $\mathcal{E}_{jt}^-(\omega) = h_j^{\min} - I_{jt}(\omega)$ e $\mathcal{E}_{jt}^+(\omega) = I_{jt}(\omega) - h_j^{\max}$, para todo $j \in \mathcal{R}$, $t \in \mathcal{T}$, $\omega \in \mathcal{W}$. Com isso, os níveis mínimos e máximos de armazenamento de água nos reservatórios sempre são respeitados. Desta forma, o problema de segundo estágio pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\min \sum_{\omega \in \mathcal{W}} \pi(\omega) \left(\sum_{j \in \mathcal{R}} \sum_{\ell \in \mathcal{R}_j} \sum_{t \in \mathcal{T}} \delta_{j\ell t} V_{j\ell t}(\omega) + \gamma \sum_{j \in \mathcal{R}} \sum_{t \in \mathcal{T}} [\rho_{jt}^+ \mathcal{E}_{jt}^+(\omega) + \rho_{jt}^- \mathcal{E}_{jt}^-(\omega)] \right) \quad (4.14)$$

$$\text{s.a.:} \quad \text{restrições (4.11), (4.12), (4.13)} \quad (4.15)$$

$$I_{jt}(\omega) - (1 - \theta_{j(t-1)})I_{j(t-1)}(\omega) - q_{jt}X_{jt} - \sum_{\ell \in \mathcal{R}_j^*} \nu_{\ell jt} V_{\ell jt}(\omega) + \quad (4.16)$$

$$+ \sum_{\ell \in \mathcal{R}_j} \nu_{j\ell t} V_{j\ell t}(\omega) + \sum_{k \in \mathcal{K}_j} d_{kt}(\omega) = \mathcal{E}_{jt}^+(\omega) - \mathcal{E}_{jt}^-(\omega), j \in \mathcal{R}, t \in \mathcal{T}, \omega \in \mathcal{W}$$

$$\mathcal{E}_{jt}^+(\omega), \mathcal{E}_{jt}^-(\omega) \geq 0, j \in \mathcal{R}, t \in \mathcal{T}, \omega \in \mathcal{W}. \quad (4.17)$$

A função objetivo (4.14) do problema de segundo estágio (4.14)–(4.17), além de mini-

mizar o valor esperado dos custos de consumo de energia elétrica relacionados às atividades de bombeamento entre os reservatórios (parcela 1), também minimiza a expectativa matemática dos custos associados à penalização por excesso e escassez de água nos reservatórios (parcela 2). As restrições (4.17) ilustram o domínio das variáveis auxiliares $\mathcal{E}_{jt}^+(\omega)$ e $\mathcal{E}_{jt}^-(\omega)$. As restrições (4.15) já foram elucidadas na Seção 4.2.

Finalmente, as restrições (4.16) expressam o balanço do volume de água armazenado nos reservatórios. Nessas restrições, as variáveis de decisão auxiliares, denotadas no trabalho de Mulvey, Vanderbei e Zenios (1995) como *variáveis de erros*, assumem o excesso e a escassez de água nos reservatórios. Para valores fixos de uma solução de primeiro estágio \mathcal{X}^* e para um conjunto finito de realizações ω da demanda $d_{kt}(\omega)$, a satisfação das restrições (4.11) é garantida uma vez que o excesso e a escassez de água nos reservatórios são assumidas pelas variáveis de erros $\mathcal{E}_{jt}^+(\omega)$ e $\mathcal{E}_{jt}^-(\omega)$, respectivamente. Desta forma, para uma solução de primeiro estágio \mathcal{X}^* que satisfaça as restrições (4.8), a factibilidade do problema (4.14)–(4.17) é garantida, tornando a formulação resultante um modelo de programação estocástica com *recurso relativamente completo*. Todavia essa formulação pode ser classificado como modelo de programação estocástica com *recurso completo*, pois para qualquer valor das variáveis de primeiro estágio \mathcal{X}^* , o problema de segundo estágio é factível.

O modelo de programação estocástica (4.14)–(4.17) está preocupado em determinar soluções “quase factíveis”. Como já foi elucidado na Seção 3.1, a noção “quase factíveis” advém do conceito de robustez preconizado por Mulvey, Vanderbei e Zenios (1995), particularmente do conceito de *robustez do modelo*. Segundo os autores do trabalho Sniedovich (2012), o modelo (4.14)–(4.17) pode ser denominado como de *satisfação robusta*. Tal robustez é controlada pelo parâmetro γ . *A priori*, não existe um valor máximo para γ . Simplesmente, pode-se dizer que para valores altos desse parâmetro, soluções “quase factíveis” podem ser obtidas, mas o custo total esperado pode crescer em demasia. Por essa razão, é importante determinar valores plausíveis para γ , de modo a obter um bom compromisso entre factibilidade da solução e custo total. Os parâmetros ρ_{jt}^+ e ρ_{jt}^- representam a penalidade incorrida pela violação dos níveis máximos e mínimos de armazenamento de água do reservatório j durante o período t .

4.4 Modelo de Programação Estocástica com Restrições de Satisfação Robusta e Aversão ao Risco

Uma questão importante do problema de programação de bombas em sistemas de abastecimento urbano advém do risco de não atendimento da demanda de água. Como já mencionado, para reduzir esse risco, pode-se incorrer na transferência de água entre reservatórios. Entretanto, essa decisão pode variar bastante entre os cenários, fazendo com que seja necessário reprogramar a ligação das bombas para a transferência de água entre reservatórios a cada nova realização da demanda. Como isso pode ser operacionalmente infactível e/ou muito custoso, é possível diminuir a variabilidade de tal decisão, obrigando os custos dessa decisão a variarem pouco, ou de acordo com o grau de tolerância do decisor. Com isso, espera-se que as decisões de transferência de água tenham uma maior estabilidade entre os diversos cenários.

Uma alternativa para conseguir estabilidade nas decisões de segundo estágio relacionadas à transferência de água entre os reservatórios, é usar uma medida de aversão ao risco que penalize na função objetivo os desvios tanto positivos quanto negativos dos custos associados a essas decisões em cada cenário em relação ao custo médio das mesmas decisões. Uma das medidas de aversão ao risco encontradas na literatura que penaliza tanto os desvios positivos quanto os negativos corresponde ao desvio médio absoluto (MAD). Por essa razão, nesta dissertação, utilizou-se o MAD para reduzir a variabilidade das decisões de transferência de água entre reservatórios. Para o problema de programação de bombas investigado nesta dissertação, o MAD pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{j \in \mathcal{R}} \sum_{l \in \mathcal{R}_j} \delta_{jlt} V_{jlt}(\omega) - \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{j \in \mathcal{R}} \sum_{l \in \mathcal{R}_j} \sum_{\underline{\omega} \in \mathcal{W}} \pi(\underline{\omega}) \delta_{jlt} V_{jlt}(\underline{\omega}) = \Delta^+(\omega) - \Delta^-(\omega), \quad \omega \in \mathcal{W}. \quad (4.18)$$

Os desvios positivos e negativos $\Delta^+(\omega)$ e $\Delta^-(\omega)$ são minimizados na função objetivo e ponderados pelo parâmetro de risco λ , que controla o conflito existente entre o custo total esperado e o risco. Quanto mais avesso ao risco é o decisor, maior é o valor que ele deverá atribuir para λ . O problema de segundo estágio com restrições de satisfação robusta e aversão ao risco (4.19) pode ser formulado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{\omega \in \mathcal{W}} \pi(\omega) \left(\sum_{j \in \mathcal{R}} \sum_{\ell \in \mathcal{R}_j} \sum_{t \in \mathcal{T}} \delta_{j\ell t} V_{j\ell t}(\omega) + \gamma \sum_{j \in \mathcal{R}} \sum_{t \in \mathcal{T}} [\rho_{jt}^+ \mathcal{E}_{jt}^+(\omega) + \rho_{jt}^- \mathcal{E}_{jt}^-(\omega)] \right) \\
& \sum_{\omega \in \mathcal{W}} \pi(\omega) \left(\lambda [\Delta^+(\omega) + \Delta^-(\omega)] \right) \\
\text{s.a.:} \quad & I_{jt}(\omega) - (1 - \theta_{j(t-1)}) I_{j(t-1)}(\omega) - q_{jt} X_{jt} - \sum_{\ell \in \mathcal{R}_j^*} \nu_{\ell jt} V_{\ell jt}(\omega) + \\
& + \sum_{\ell \in \mathcal{R}_j} \nu_{j\ell t} V_{j\ell t}(\omega) + \sum_{k \in \mathcal{K}_j} d_{kt}(\omega) = \mathcal{E}_{jt}^+(\omega) - \mathcal{E}_{jt}^-(\omega), j \in \mathcal{R}, t \in \mathcal{T}, \omega \in \mathcal{W} \\
& \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{j \in \mathcal{R}} \sum_{\ell \in \mathcal{R}_j} \delta_{j\ell t} V_{j\ell t}(\omega) - \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{j \in \mathcal{R}} \sum_{\ell \in \mathcal{R}_j} \sum_{\omega \in \mathcal{W}} \pi(\omega) \delta_{j\ell t} V_{j\ell t}(\omega) = \Delta^+(\omega) - \Delta^-(\omega), \omega \in \mathcal{W} \\
& h_j^{\min} \leq I_{jt}(\omega) \leq h_j^{\max}, j \in \mathcal{R}, t \in \mathcal{T}, \omega \in \mathcal{W} \tag{4.19} \\
& 0 \leq V_{j\ell t}(\omega) \leq 1, j \in \mathcal{R}, \ell \in \mathcal{R}, t \in \mathcal{T}, \omega \in \mathcal{W} \\
& I_{j0}(\omega) = h_j^0, j \in \mathcal{R}, \omega \in \mathcal{W} \\
& \mathcal{E}_{jt}^+(\omega), \mathcal{E}_{jt}^-(\omega) \geq 0, j \in \mathcal{R}, t \in \mathcal{T}, \omega \in \mathcal{W} \\
& \Delta^+(\omega), \Delta^-(\omega) \geq 0, \omega \in \mathcal{W}.
\end{aligned}$$

Note que, para cada cenário ω , o risco do tipo desvio médio absoluto (MAD) é definido como a diferença entre o custo associado à transferência de água entre reservatórios e a esperança matemática desse custo baseado em todos os cenários. A função objetivo reformulada de (4.19) minimiza o valor esperado dos custos de segundo estágio relacionados às decisões de transferência de água entre reservatórios (parcela 1), das penalizações associadas ao excesso e à escassez de água nos reservatórios (parcela 2) e ao risco (parcela 3). Note que as variáveis que quantificam o desvio são não negativas.

4.5 Método proposto para a Geração de Cenários

Nesse trabalho, é proposto um método de geração de cenários baseado em amostragem por simulação de Monte Carlo (MC). O objetivo principal dessa metodologia é determinar as realizações das variáveis aleatórias envolvidas no problema de otimização, i.e., construir a distribuição de probabilidade discreta dos parâmetros incertos (SHAPIRO, 2003). Tal distribuição representa uma aproximação da distribuição marginal das variáveis aleatórias. Posteriormente, pode-se combinar as realizações geradas numa estrutura de árvore de cenários para analisar a correlação entre os eventos, por exemplo.

A utilização de métodos de simulação MC permite que as probabilidades das realizações das variáveis aleatórias sejam estimadas a partir do cálculo das frequências relativas e, desta forma, as mesmas não são atribuídas de forma subjetiva. Também é importante mencionar que, a partir de estudos prévios, as estimativas mínimas e máximas da demanda por água em cada hora do dia nos reservatórios são conhecidas, informação que facilita o desenvolvimento desta metodologia.

Basicamente, o método de geração de cenários proposto neste trabalho é composto por duas etapas. Na primeira etapa, as realizações das variáveis aleatórias envolvidas no problema de otimização são determinadas. Na segunda etapa, as probabilidades de ocorrência de tais realizações são calculadas. A seguir o procedimento realizado para o desenvolvimento da primeira etapa da metodologia proposta é explicado.

A partir das estimativas mínimas e máximas da demanda por água, determina-se a amplitude do intervalo como a diferença entre as estimativas máxima e mínima. Em seguida, determina-se o número de intervalos menores pertencentes às estimativas. Estes intervalos menores são denominados de classes. O número de classes é atribuído de acordo com o número de eventos discretos da variável aleatória a ser gerada e, juntamente, com a amplitude, convertem-se em parâmetros suficientes para calcular o tamanho do passo. Este último é determinado como a fração entre a amplitude e o número de classes totais (número de eventos). O tamanho do passo reflete a distância entre os limites de cada classe. Em seguida, $|\mathcal{W}|$ números aleatórios são gerados. Os passos para o desenvolvimento do método de geração de cenários são descritos a seguir:

Passo 1 Determinar $|\mathcal{W}|$ intervalos de classes a partir das estimativas mínimas e máximas do consumo de água.

Passo 2 Para cada classe definida no passo anterior, um número aleatório uniformemente distribuído é gerado entre os limites de cada classe a fim de atribuir um valor numérico à realização associada.

Passo 3 Uma vez que os valores numéricos das realizações definidas no passo 2 são discriminados em ordem crescente, novamente $|\mathcal{W}|$ intervalos de classes são gerados, com a diferença que, nesse caso, os limites inferior e superior da classe ω correspondem às realizações das classes $\omega - 1$ e ω , respectivamente.

Passo 4 Gerar N números aleatórios φ seguindo uma distribuição de probabilidade \mathcal{D} entre os valores nominais mínimos e máximos das realizações definidos no passo 2. Este

passo corresponde ao desenvolvimento da simulação Monte-Carlo.

Passo 5 Quantificar a frequência relativa para cada classe ω . Tal frequência determina a probabilidade de uma dada realização entre os limites dessa classe materializar-se.

Passo 6 Finalmente, construir a árvore de cenários através da combinação das realizações e o produto das probabilidades assumindo independência estatística entre as variáveis aleatórias.

Note que os dois primeiros passos correspondem à primeira etapa do método de geração de cenários, enquanto que os passos restantes decrevem o desenvolvimento da segunda etapa. Para gerar os números aleatórios seguindo uma distribuição de probabilidade \mathcal{D} , o método de transformação inversa foi usado. O desenvolvimento deste método requer os seguintes passos: (1) Geração de números aleatórios φ uniformemente distribuídos no intervalo $[0, 1]$ e (2) Resolver o sistema $X = F^{-1}(\varphi)$, em que F^{-1} representa a inversa da função de probabilidade da variável aleatória X .

Neste trabalho, foram utilizadas as seguintes distribuições de probabilidades para gerar os números aleatórios φ : uniforme, triangular e log-normal. Tais distribuições foram usadas por serem comuns em estatística, mas outras distribuições de probabilidade também poderiam ter sido usadas, pois o método proposto não depende da distribuição de φ .

O método de geração de cenários proposto neste trabalho gera a distribuição de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias envolvidas no problema (demanda). Neste trabalho, 4 situações referentes às distribuições de probabilidade geradas no método de geração de cenários são obtidas:

1. **Situação Equiprovável:** Tal situação é dada quando os cenários apresentam a mesma probabilidade de ocorrência e tais probabilidades são determinadas como $\pi(\omega) = \frac{1}{|\mathcal{W}|}$.
2. **Situação Moderada:** Esta situação se apresenta quando as probabilidades de ocorrência dos cenários são atribuídas de uma forma mais uniforme. Tal situação resulta ao gerar os números aleatórios φ no método de geração de cenários com uma distribuição uniforme.
3. **Situação Pessimista:** Na situação pessimista, probabilidades mais altas aos cenários baixos são atribuídas. Esta situação é obtida quando uma distribuição lognor-

mal é usada para gerar os números aleatórios φ no método de geração de cenários.

4. **Situação Otimista:** Finalmente, na situação otimista, os cenários médios apresentam uma maior probabilidade. Para obter esta situação, os números aleatórios φ devem ser gerados no método de geração de cenários através de uma distribuição triangular.

As situações equiprovável, moderada, pessimista e otimista serão referenciadas nesta dissertação como distribuição uniforme, empírica, lognormal e triangular, respectivamente.

4.6 Resultados Computacionais

Os experimentos computacionais tiveram o objetivo de: (1) identificar se, efetivamente, o método de geração de cenários proposto fornece árvores de cenários que descrevam boas aproximações da distribuição das variáveis aleatórias; (2) investigar se a forma em que são atribuídas as probabilidades aos cenários influenciam no valor ótimo dos custos esperados e nas decisões de primeiro e de segundo estágio; (3) analisar as decisões de primeiro e de segundo estágio e os níveis de serviços de modo a obter *insights* que sejam úteis na prática de tomada de decisões desse problema; (4) determinar a sensibilidade dos custos esperados e das variáveis de decisão em relação a variações dos parâmetros λ e γ ; (5) finalmente, determinar o impacto das incertezas no problema, com o cálculo do EVPI e VSS.

Para fins de análise, considerou-se uma parte da topologia da rede de abastecimento urbano da cidade de São Carlos-SP. A rede é composta por 3 reservatórios e pode ser vista na Figura 4.1. Porém, outras topologias poderiam ter sido usadas, pois o modelo proposto poderia ser facilmente adaptado. Os modelos matemáticos foram codificados no Sistema Geral de Modelagem Algébrica (GAMS) e resolvidos pelo solver CPLEX 11.2. Para a realização dos experimentos computacionais, foi utilizado um PC Intel(R) i7 com processador Core (TM) com 16 GB de memória RAM sob a plataforma Windows 7.

4.6.1 Descrição dos Dados

O modelo (4.19) de programação estocástica de dois estágios com recurso com restrições de satisfação robusta e aversão ao risco proposto foi testado para: (1) Horizontes de planejamento de 2, 7 e 30 dias; (2) árvores de cenários de 27, 64 e 125 cenários; e (3) níveis de vazamento na rede de 0%, 10% e 20%. Portanto, há 27 classes de exemplares gerados a partir da combinação dos parâmetros anteriores. Para facilitar a descrição de cada classe, esta foi descrita pela tripla $|\mathcal{T}|/|\mathcal{W}|/\theta$, em que $|\mathcal{T}|$ e $|\mathcal{W}|$ representam na mesma ordem a cardinalidade dos conjuntos que representam o número de dias do horizonte de planejamento e as possíveis realizações da variável aleatória e , finalmente, θ descreve a porcentagem do vazamento na rede.

Uma vez que as estimativas de demanda por água em cada reservatório estão dadas em períodos de uma hora, cada dia do horizonte de planejamento foi dividido em 24 subperíodos correspondentes a uma hora, gerando subperíodos de 48, 168 e 720 horas, para os horizontes de planejamento de 2, 7 e 30 dias, respectivamente. A demanda de água para o reservatório 1 varia no intervalo $[0 - 270]$, ao passo que para os reservatórios restantes a demanda de água varia de acordo com os intervalos apresentados na Tabela 4.3. Tais intervalos descrevem as estimativas mínimas e máximas de consumo de água em cada hora do dia.

Tabela 4.3: Demandas mínimas e máximas por água em cada reservatório.

Hora	0-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14
Min	10	90	105	121	190	152	167	183	198
Max	30	110	125	141	210	172	187	203	218
Hora	14-15	15-16	16-17	17-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-24
Min	214	229	245	260	198	135	73	10	5
Max	234	249	265	270	218	155	93	30	20

A demanda de água em cada reservatório foi considerada como uma variável aleatória. As possíveis realizações destas variáveis foram determinadas a partir do método de geração de cenários baseado em amostragem por simulação MC. Uma vez determinadas tais realizações, as mesmas foram combinadas entre os três reservatórios para gerar a árvore de cenários. De modo a ilustrar a construção da árvore de cenários, cada variável aleatória associada aos reservatórios foi descrita, qualitativamente, por três, quatro e cinco possíveis realizações para as árvores de 27, 64 e 125 cenários, respectivamente, sendo tais

realizações: (1) baixa, média e alta, para a árvore de 27 cenários (3^3); (2) relativamente baixa, baixa, média e alta, para a árvore de 64 cenários (4^3); e (3) relativamente baixa, baixa, média, alta e relativamente alta para a árvore de 125 cenários (5^3). A essas realizações qualitativas foram associados os valores numéricos obtidos pelo método de geração de cenários. A Figura 4.2 ilustra as árvores de cenários para 3, 4 e 5 realizações e 3 reservatórios, totalizando 27, 64 e 125 cenários.

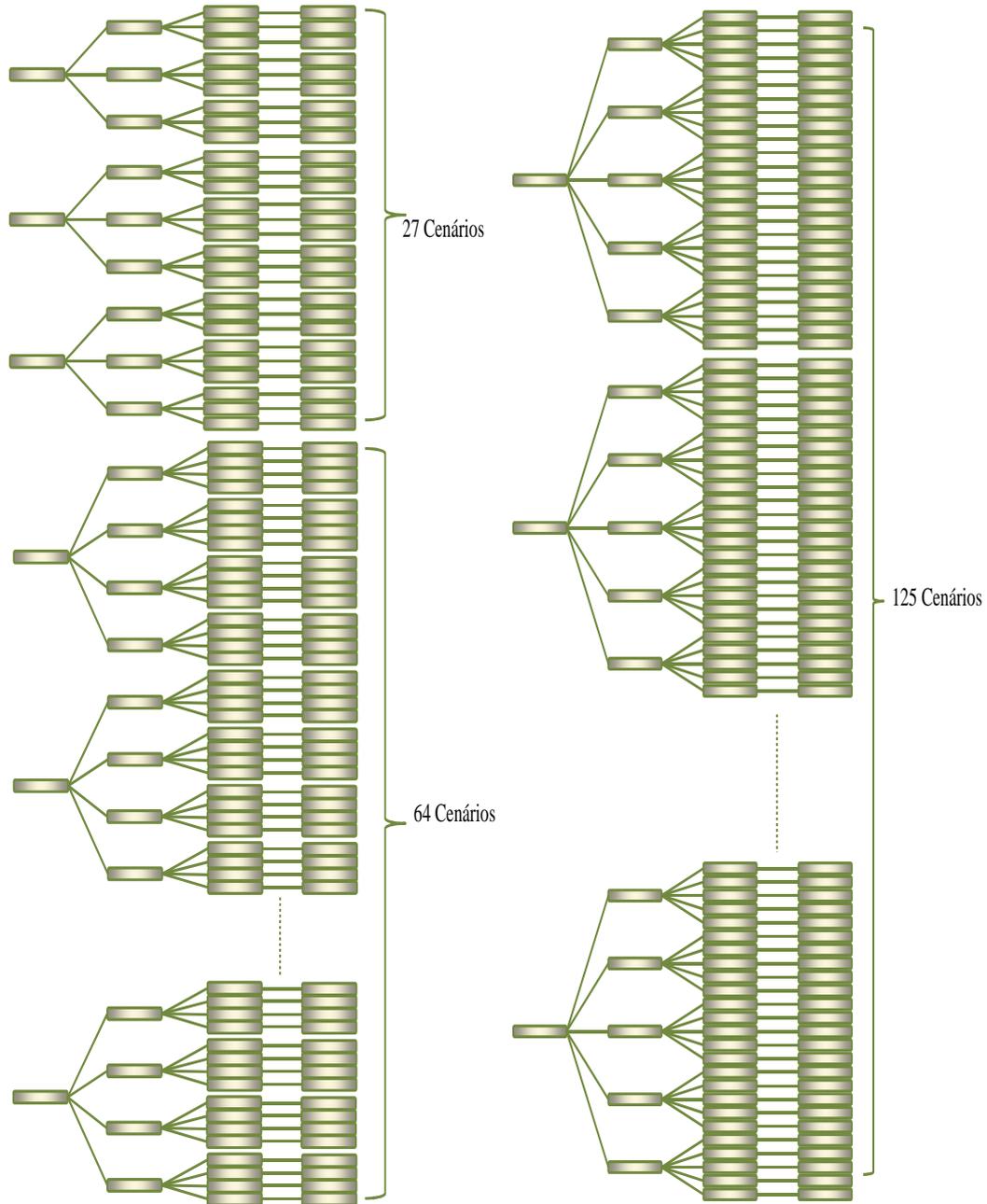


Figura 4.2: Árvores de 27, 64 e 125 cenários.

O problema abordado nesta dissertação é um problema multiperíodo. Por exemplo,

suponha que um horizonte de dois dias é considerado. Uma vez que o dia é dividido em intervalos discretos de uma hora de duração, um total de 48 intervalos (períodos) é obtido para o horizonte de dois dias. Para cada período do horizonte de planejamento, valores numéricos são atribuídos aos cenários com o procedimento elucidado na Seção 4.5 (veja Figura 4.3).

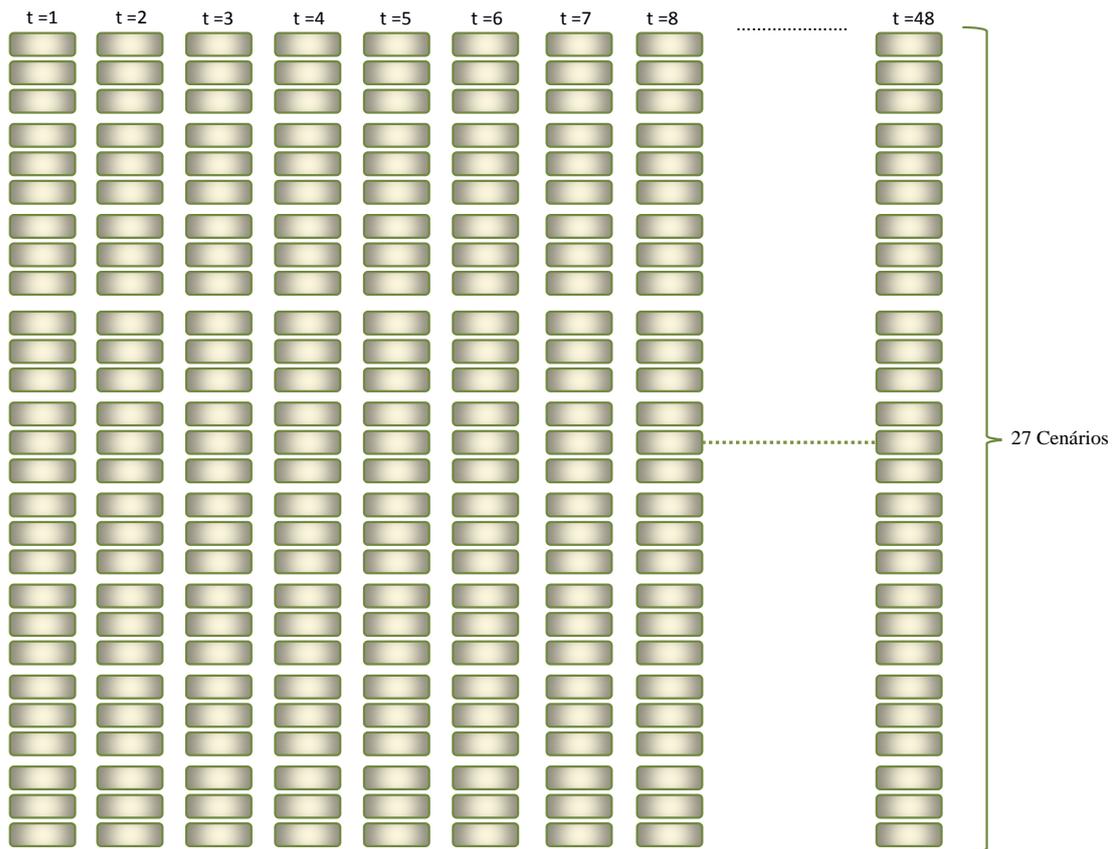


Figura 4.3: Representação dos cenários para cada período do horizonte temporal referente a 2 dias.

Para cada um das classes consideradas nesta dissertação, as capacidades mínima e máxima de água em cada reservatório é 270 m^3 e 2000 m^3 para o primeiro, e 270 m^3 e 1000 m^3 para os demais. Considerou-se que no início do horizonte de planejamento o reservatório 1 contém 1000 m^3 de água, e os reservatório 2 e 3, 500 m^3 . A vazão das bombas hidráulicas localizadas entre poços e reservatórios é de 300 m^3 por hora. Para as bombas localizadas entre reservatórios, a vazão é de 60 m^3 por hora. A capacidade dos poços é considerada ilimitada. O custo de manter ligadas as bombas durante cada subperíodo dentro do horizonte de planejamento é de 30 unidades monetárias (u.m.), exceto para os

períodos de ponta, 19 h, 20 h e 21 h, em que o custo é dobrado. O custo de consumo de energia elétrica referente à transferência de água entre reservatórios é de 3 u.m. Cabe salientar que os valores dos dados usados nesta dissertação foram disponibilizados pelos autores do trabalho Toledo et al. (2008). Testes preliminares sugerem que os intervalos de variação para os parâmetros λ , γ e $\rho = \rho_{jt}^+ = \rho_{jt}^-$ foram assumidos iguais a $[0; 0,05]$, $[0; 0,3]$ e $[0; 50]$, respectivamente.

4.7 Avaliação do Método de Geração de Cenários

A codificação do algoritmo do método de geração de cenários foi realizada no *software* MATLAB versão 2012a. Para avaliar a qualidade do método de geração de cenários, foram utilizados os indicadores propostos por Kaut (2003) (veja a Seção 3.5 para maiores detalhes). Esses indicadores correspondem à estabilidade (interna e externa) e ao erro. Para analisar tais indicadores, utilizou-se a ferramenta estatística denominada *limites de tolerância*. Esta ferramenta é usada no controle estatístico de processos, a partir da análise dos gráficos de controle. Por sua vez, estes são usados para controlar ou monitorar a média e a variabilidade de um processo ao longo do tempo ou de um conjunto de amostras.

A metodologia de limites de tolerância pode ser usada independentemente da distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias dos atributos que se pretendem controlar. Porém, se as variáveis aleatórias dos atributos não são distribuídas normalmente, então o procedimento para calcular os limites de tolerância é diferente. Uma vez que, neste caso, o valor da função objetivo corresponde ao atributo, então, antes de encontrar os limites de tolerância, é necessário determinar se a variável aleatória associada à função objetivo é distribuída normalmente. Os testes de normalidade são apresentados no Apêndice A. A explanação da abordagem a usar para avaliar o método de geração de cenários é descrita no Apêndice B.

4.7.1 Avaliação da Estabilidade Interna

Além de avaliar a estabilidade do método de geração de cenários, também se pretende avaliar a robustez do mesmo. Ao passo que a estabilidade é medida por um grau aceitável de variabilidade dos dados, a robustez é medida pelo comportamento dessa variabilidade à medida que os limites de tolerância aproximam-se da média. Logo, é necessário determinar

limites de tolerância para diferentes valores do parâmetro κ , o que significa combinar valores dos parâmetros ϕ e ϑ e manter o tamanho da amostra. O tamanho da amostra foi fixado a fim de avaliar essa propriedade para um tamanho particular da mesma. Os parâmetros κ , ϕ e ϑ representam a distância dos limites de tolerância do valor esperado, o coeficiente de confiança e o alcance da distribuição ou quantidade esperada de dados, respectivamente.

De acordo com a metodologia desenvolvida em Canavos (1988) (veja apêndice B), um número de amostra do mesmo tamanho n devem ser geradas. Para fins de análises, 4 amostras de tamanho $n = 25$ foram geradas. Portanto, 100 árvores de cenários foram gerados e, por conseguinte, o mesmo número de soluções do modelo de programação estocástica foi obtido. Com esse tamanho da amostra e com a ajuda da tabela apresentada no apêndice B, é possível determinar os distintos valores de κ , para valores fixos de ϕ e ϑ . A Tabela 4.4 apresenta quatro combinações desses parâmetros com seu respectivo valor de κ para o tamanho da amostra considerada.

Tabela 4.4: Análise de valores de κ para quatro combinações dos parâmetros ϕ e ϑ com uma amostra igual a 25: estabilidade interna.

Coeficiente de Confiança (ϕ)	Alcance da Distribuição (ϑ)	Valor de κ
0,75	0,75	1,317
0,95	0,75	1,545
0,75	0,90	1,883
0,95	0,90	2,208

Da Tabela 4.4, pode-se inferir que, para uma porcentagem de ϕ dos limites de tolerância, espera-se que pelo menos $100\vartheta\%$ dos dados estejam dentro dos limites de tolerâncias estabelecidos. Para concluir se o método apresenta estabilidade interna ou não, compara-se esse valor esperado ao valor real. Caso o valor real seja maior ou igual ao esperado, então o método é estável. Caso contrário, o método não apresenta estabilidade e, portanto, uma estratégia para estabilizá-la deve ser realizada, por exemplo, aumentar o tamanho da amostra.

Na Figura 4.4 são ilustrados os gráficos de controle para cada distribuição de probabilidade usada. Lembrando que tais distribuições correspondem à uniforme, empírica, triangular e lognormal. A partir da Figura 4.4, pode-se determinar em cada gráfico de controle a porcentagem real de dados cobertos pelos limites de tolerância. Essas porcentagens são apresentadas na Tabela 4.5. Observa-se nessa tabela que, independente

da distribuição de probabilidade, a porcentagem real dos dados entre os limites de tolerância do gráfico de controle é sempre maior do que a porcentagem esperada. Portanto, conclui-se que o método de geração de cenários apresenta a característica de estabilidade interna. Além disso, independente dos valores de κ tabelados, e conseqüentemente, da proximidade dos limites à média, pode-se inferir que o método não deixa de ser estável. Desse modo, pode-se inferir também que o método proposto de geração de cenários pode ser considerado robusto para tal propriedade.

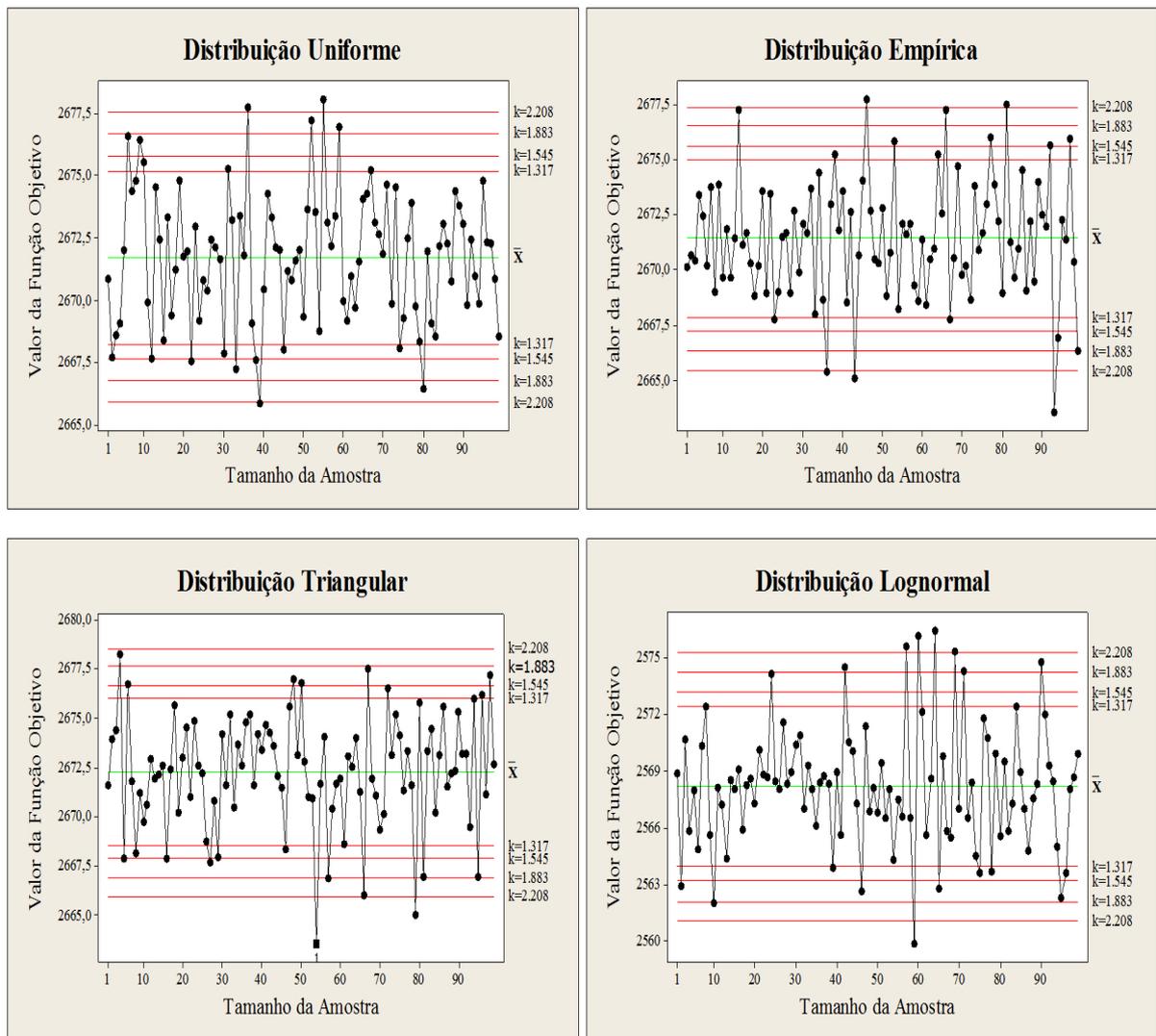


Figura 4.4: Gráficos de controle para a análise de estabilidade interna para as distribuições de probabilidades uniforme, empírica, triangular e lognormal.

Tabela 4.5: Porcentagem esperada e real dos dados cobertos pelos limites de tolerância para cada uma das distribuições: análise da estabilidade interna.

Porcentagem Esperada (%)	Porcentagem Real (%)			
	Uniforme	Empírica	Triangular	Lognormal
75	85	86	87	84
75	93	88	98	88
90	95	96	99	95
90	95	99	99	99

4.7.2 Avaliação da Estabilidade Externa e do Erro

Em relação à avaliação da estabilidade externa e do erro, o mesmo método de gráficos de controle com limites de tolerância foi usado, com a diferença que, neste caso, a média amostral \bar{x} foi substituída pela média dos erros \bar{e} . Uma vez que os erros representam a proximidade das soluções do problema estocástico aproximado da solução do problema estocástico original, os indicadores de desempenhos foram analisados de forma simultânea no mesmo gráfico de controle. Portanto, os novos limites de tolerância superior e inferior são dados por $\bar{e} \pm \kappa\sigma_{\bar{e}}$, respectivamente, em que $\sigma_{\bar{e}}$ nesse caso representa o desvio padrão dos erros. Desta forma, os novos limites são denominados limites de erros aceitáveis.

Para determinar esses erros, é necessário calcular a solução do problema original, i.e., com a distribuição de probabilidade real das variáveis aleatórias. Dada a dificuldade de se obter a distribuição real das variáveis aleatórias, uma estratégia para aproximá-la consiste em gerar uma árvore de cenários suficientemente grande de modo que esta seja uma boa aproximação da distribuição real e, ao mesmo tempo, suficientemente pequena de modo a que uma solução factível do problema possa ser encontrada. Para lidar com esse *tradeoff*, foram geradas 20 árvores com 8, 27, 64, 125, 216 e 363 cenários e, posteriormente, os problemas de programação estocástica resultantes foram resolvidos.

A Figura 4.5 exhibe as curvas de estabilidade obtidas para cada uma das distribuições de probabilidade, considerando a variação do número de cenários. Os gráficos do tipo *box-plot* foram construídos a partir das seguintes informações: (1) valor mínimo; (2) primeiro quartil $Q1$; (3) segundo quartil ou a mediana $Q2$; (4) terceiro quartil $Q3$; e (5) valor máximo. O gráfico é formado por uma caixa construída paralelamente ao eixo da escala dos dados (nesse caso vertical). Essa caixa vai desde o primeiro quartil até o terceiro quartil e nela traça-se uma linha na posição da mediana. Continua-se a construção do *box-plot* traçando-se uma linha paralela à escala que vai de cada extremidade da caixa

ao correspondente valor extremo dos dados. Além de apresentar a estabilidade entre os conjuntos de dados, os gráficos também apresentam a variabilidade dos mesmos para cada conjunto.

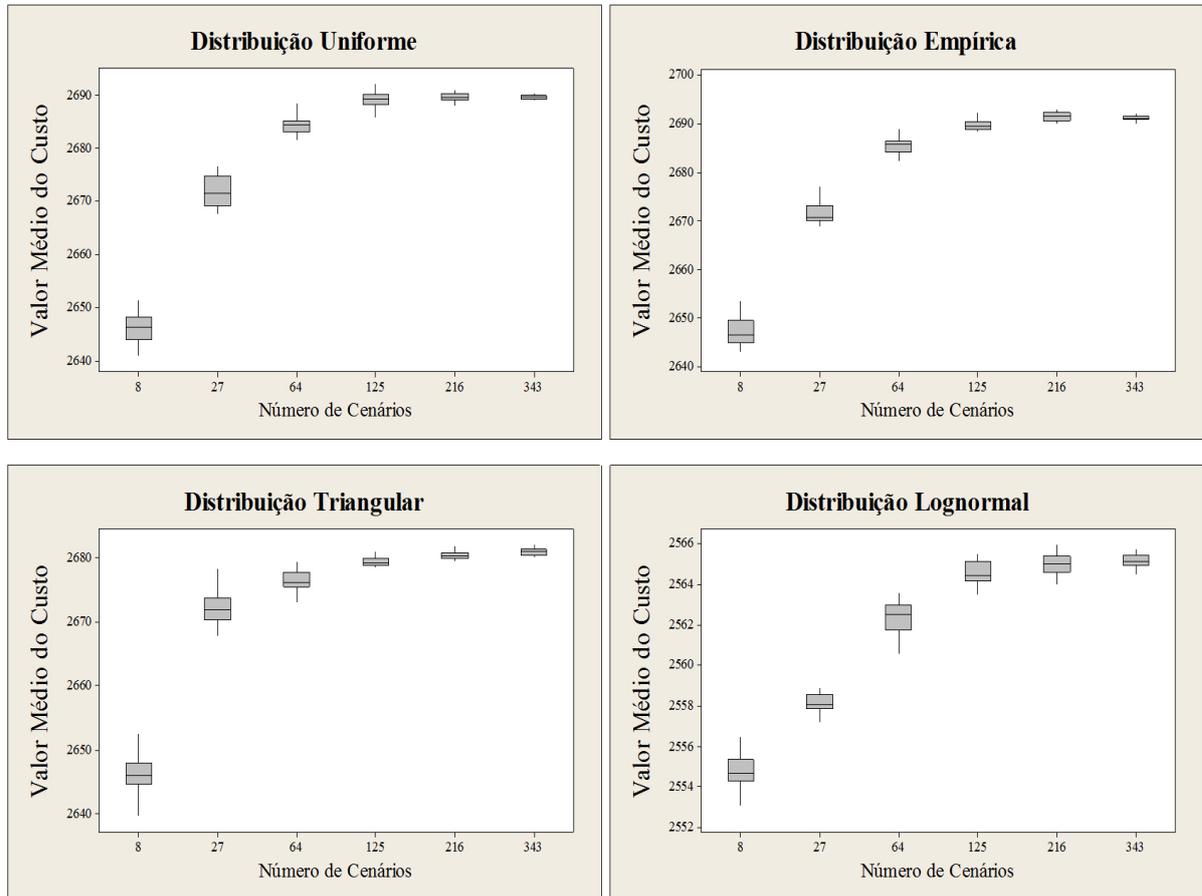


Figura 4.5: Curvas de estabilidade para cada uma das distribuições usadas no método de geração de cenários, considerando árvores de 8, 27, 64, 125, 216 e 363 cenários.

A partir das curvas da Figura 4.5, pode-se inferir que, independente da distribuição de probabilidade, existe uma estabilidade no valor da função objetivo para $|\mathcal{W}| \geq 125$. Desta forma, uma árvore de 125 cenários pode ser usada como uma possível aproximação da distribuição de probabilidade real das variáveis aleatórias.

Na Tabela 4.6, são apresentados os valores de κ para combinações de valores dos parâmetros ϕ e ϑ , e para um valor fixo atribuído ao tamanho da amostra de $n = 25$. Com esses valores, os respectivos gráficos de controle foram gerados (ver Figura 4.6).

A Tabela 4.7 mostra as porcentagens reais dos dados cobertos pelos limites de tolerância. Observa-se que, independente da distribuição de probabilidade e dos limites de tolerância, o método de geração de cenários também apresenta estabilidade externa.

Tabela 4.6: Valores de κ para quatro combinações dos parâmetros ϕ e ϑ com uma amostra igual a 25: estabilidade externa.

Coefficiente de Confiança (ϕ)	Alcance da Distribuição (ϑ)	Valor de κ
0,75	0,75	1,317
0,95	0,75	1,545
0,75	0,90	1,883
0,95	0,90	2,631

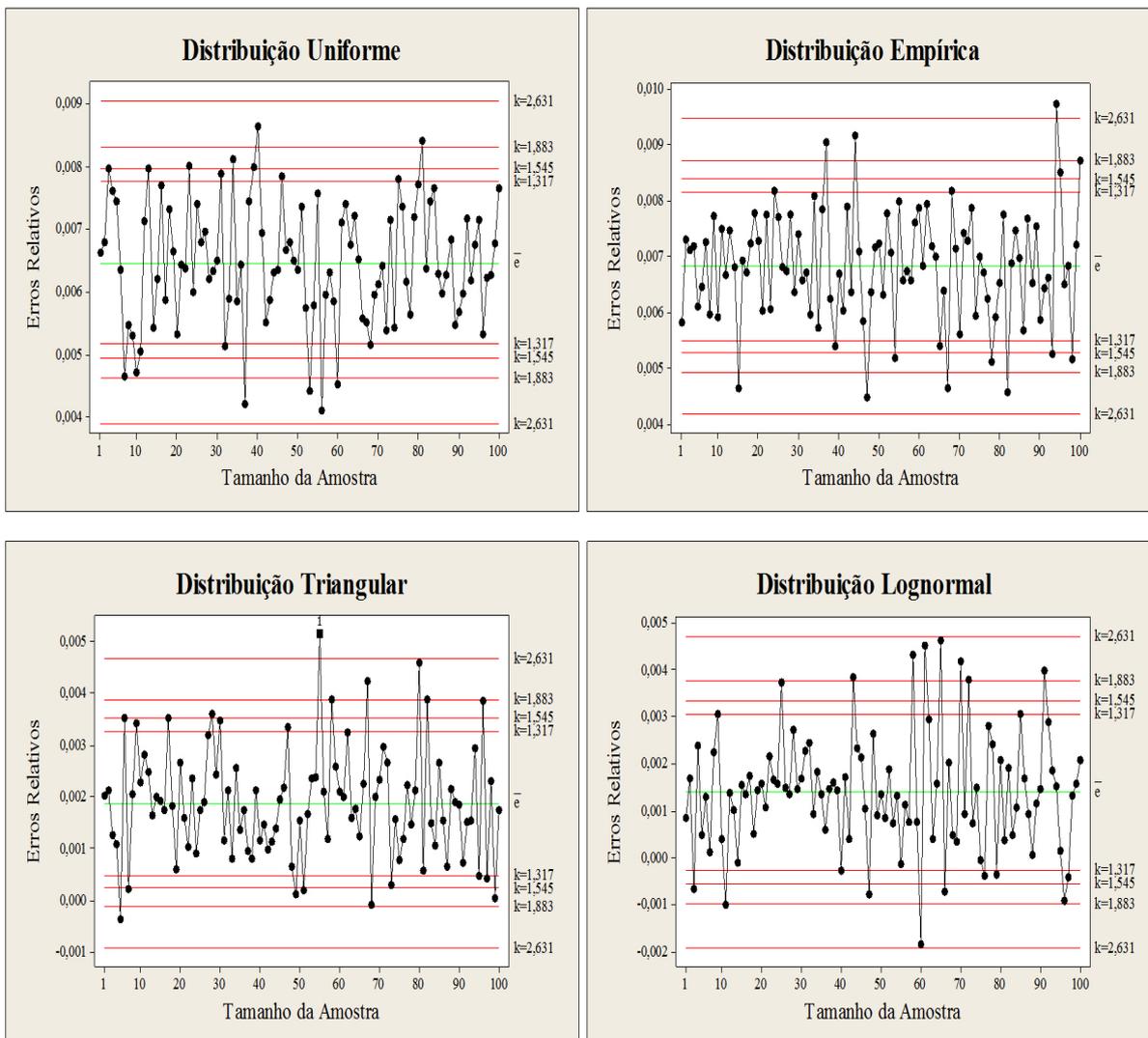


Figura 4.6: Gráficos de controle para a análise da estabilidade externa e do erro para as distribuições de probabilidade uniforme, empírica, triangular e lognormal.

Ainda, independente da distribuição de probabilidade, também é possível inferir que, conforme os limites de tolerância, associado a cada valor de κ , aproximam-se do erro médio, o método não deixa de ser estável (Figura 4.6). Portanto, pode-se concluir que além do método ser estável, é robusto para a propriedade de estabilidade externa e o erro. Como os

erros estão muito próximos do 0, o método de geração de cenários fornece boas aproximações da distribuição real com apenas poucos cenários. Com isso, é possível concluir que, independente da distribuição de probabilidade, o método de geração de cenários proposto não gera vieses significativos entre as soluções aproximadas e a solução real.

Tabela 4.7: Porcentagem esperada e real dos dados cobertos pelos limites de tolerância para cada uma das distribuições: estabilidade externa.

Porcentagem Esperada (%)	Porcentagem Real(%)			
	Uniforme	Empírica	Triangular	Lognormal
75	82	77	79	82
75	90	91	90	91
90	94	96	95	96
90	99	100	98	99

4.8 Análise dos Resultados do Modelo de Programação Estocástica

4.8.1 Efeito das Diferentes Probabilidades de Ocorrências dos Cenários

Nesta seção, foram realizadas análises de variâncias simples (ANOVA) a fim de determinar se, estatisticamente, existe diferença entre resolver o modelo de programação estocástica com uma das quatro distribuições de probabilidade obtidas no método de geração de cenários. As variáveis de respostas das ANOVAS correspondem aos seguintes atributos: (1) o valor da função objetivo; (2) a variável de primeiro estágio X_{jt} ; (3) as variáveis de segundo estágio $I_{jt}(\omega)$ e $V_{jlt}(\omega)$ e (4) as variáveis auxiliares $\mathcal{E}_{jt}^-(\omega)$ e $\mathcal{E}_{jt}^+(\omega)$. Os resultados das ANOVAS podem ser vistos no Apêndice C.

Tais resultados revelam que, ao nível de confiança de 95%, há evidência para afirmar que existe diferença estatisticamente significativa em resolver o problema de programação estocástica representando a variável aleatória através das quatro distribuições de probabilidade consideradas. Além das ANOVAS, foram realizados testes de Duncan com o intuito de investigar entre que pares de distribuições de probabilidade existe diferença estatisticamente significativas (Apêndice C). Os resultados desses testes sugerem que a forma em que são atribuídas as probabilidades dos cenários acarreta uma variação signi-

ficativa no valor ótimo da função objetivo e nas variáveis de decisão. Logo, deve-se ter cautela no momento de escolher a distribuição que será usada para descrever a variável aleatória do problema, i.e., a demanda de água.

4.8.2 Análise das Variáveis de Primeiro e Segundo Estágio

No modelo estocástico proposto, as variáveis referentes à fração de tempo em que existe transferência de água entre poços e reservatórios, X_{jt} , descrevem as decisões de primeiro estágio. Na prática, estas variáveis representam as políticas de ativação de bombas. Para cada um dos reservatórios, as Figuras 4.7, 4.8 e 4.9 ilustram tal política para os primeiros 48 períodos dos horizontes de 2, 7 e 30 dias, considerando uma árvore de 27 cenários. Essas figuras foram desenhadas para cada uma das distribuições de probabilidade usadas para descrever a variável aleatória.

Observe que, independente, da distribuição de probabilidade seguida pela variável aleatória, a política de ativação das bombas apresenta um comportamento similar para os reservatórios 1 e 2. Nos períodos em que o custo de consumo de eletricidade é mais elevado (períodos de ponta), praticamente não há captação de água, i.e., as bombas hidráulicas não são ligadas. Desta forma, espera-se uma racionalização do consumo de energia elétrica e, conseqüentemente, um custo total menor. Entretanto, um aumento mais significativo de captação de água nos períodos de ponta ocorre no reservatório 3. Uma vez que não existe ligação direta entre o reservatório de maior capacidade e este, necessariamente a vazão de água deve passar pelo reservatório 2 para, posteriormente, ir ao 3, caso exista uma decisão de transferência de água entre tais reservatórios. Isso significa que as bombas localizadas entre os reservatórios 1-2 e 2-3 devem ser ligadas e, portanto, é mais barato atender parte da demanda diretamente da bomba localizada entre o poço e o reservatório 3.

As decisões sobre o volume de água armazenado nos reservatórios ao final de cada período do dia são representadas pelas variáveis de segundo estágio $I_{jt}(\omega)$. A Figura 4.10, ilustra o cenário de valor esperado dessas decisões ao longo de um horizonte de

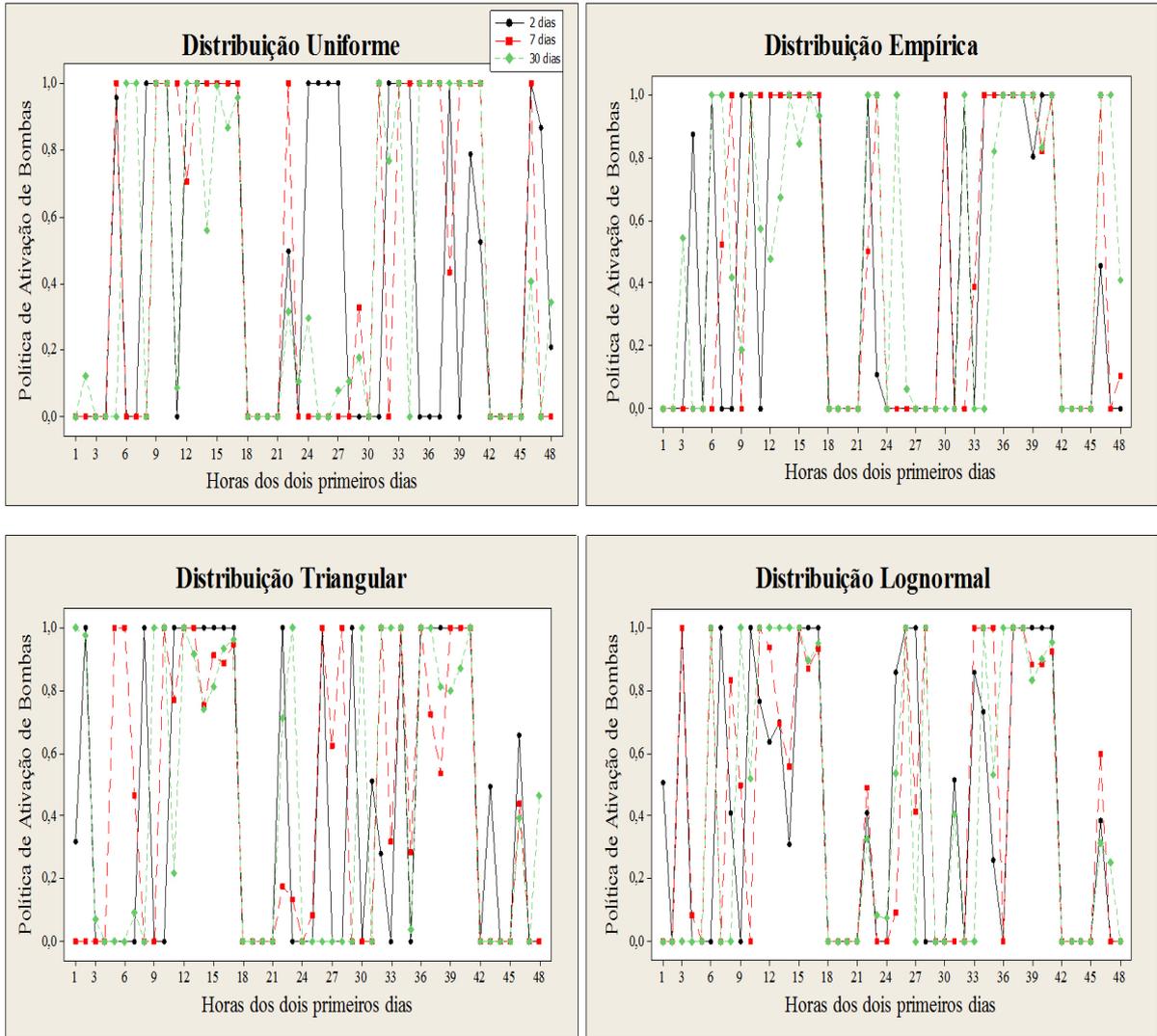


Figura 4.7: Política de ativação de bomba para o reservatório 1.

planejamento de dois dias nos reservatórios 1, 2 e 3, considerando uma árvore de 27 cenários e as quatro distribuições de probabilidade consideradas. O comportamento de tais variáveis é similar para as outras árvores de cenários investigadas. Note que, independente da distribuição de probabilidade usada para descrever a variável aleatória, as soluções apresentam um padrão similar em relação ao volume de água armazenado nos reservatórios ao longo do horizonte de planejamento. Em geral, os reservatórios armazenam um volume de água elevado nos períodos que antecedem os períodos de ponta. Dessa forma, as bombas hidráulicas não são ligadas ou são ligadas em uma pequena fração durante tais períodos.

A Figura 4.11 apresenta os valores esperados do volume de água armazenado em cada reservatório para os dias 1, 2, 9, 10, 19, 20, 29 e 30 de um horizonte de planejamento de 30 dias para uma árvore de 27 cenários gerada a partir de uma distribuição empírica.

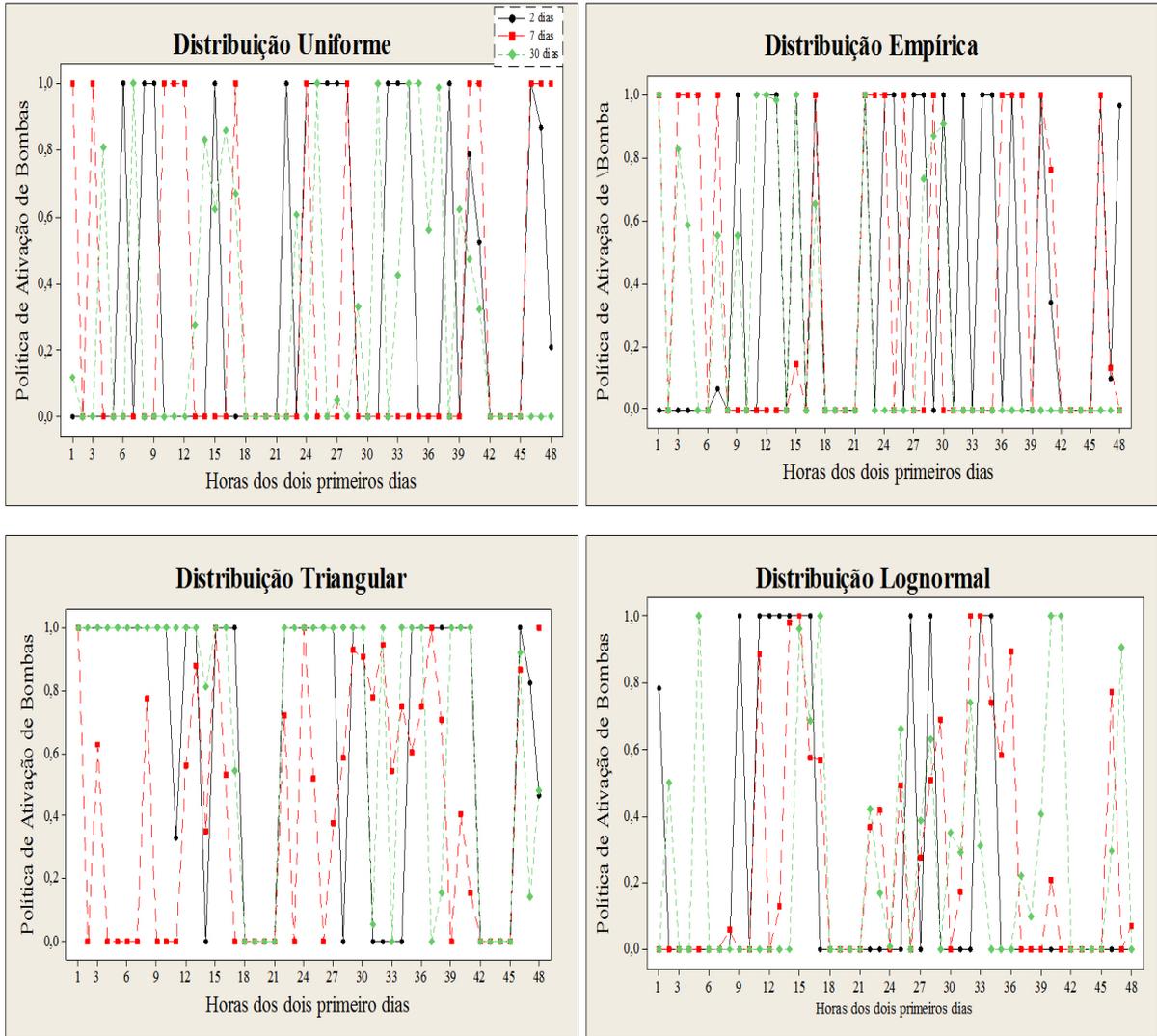


Figura 4.8: Política de ativação de bombas para o reservatório 2.

Os resultados sugerem que as decisões associadas ao nível de água nos reservatórios são repetidas em ciclos de um dia do horizonte de planejamento. Isso ocorre porque os períodos de alta demanda não variam para cada dia do horizonte de planejamento e, uma vez que os custos de energia elétrica nesses períodos se mantêm, o modelo de otimização visa padronizar as decisões referentes aos níveis de água em reservatórios por dia. Cabe ressaltar que resultados similares foram obtidos com as distribuições de probabilidade remanescentes.

Finalmente, a Figura 4.12 apresenta o comportamento das decisões associadas aos níveis de água no reservatório 1 para os cenários de pior caso, de valor esperado e melhor caso. Observe que, independente da realização da demanda, tais decisões apresentam um comportamento similar. Para os períodos que antecedem aos de alta demanda, níveis altos

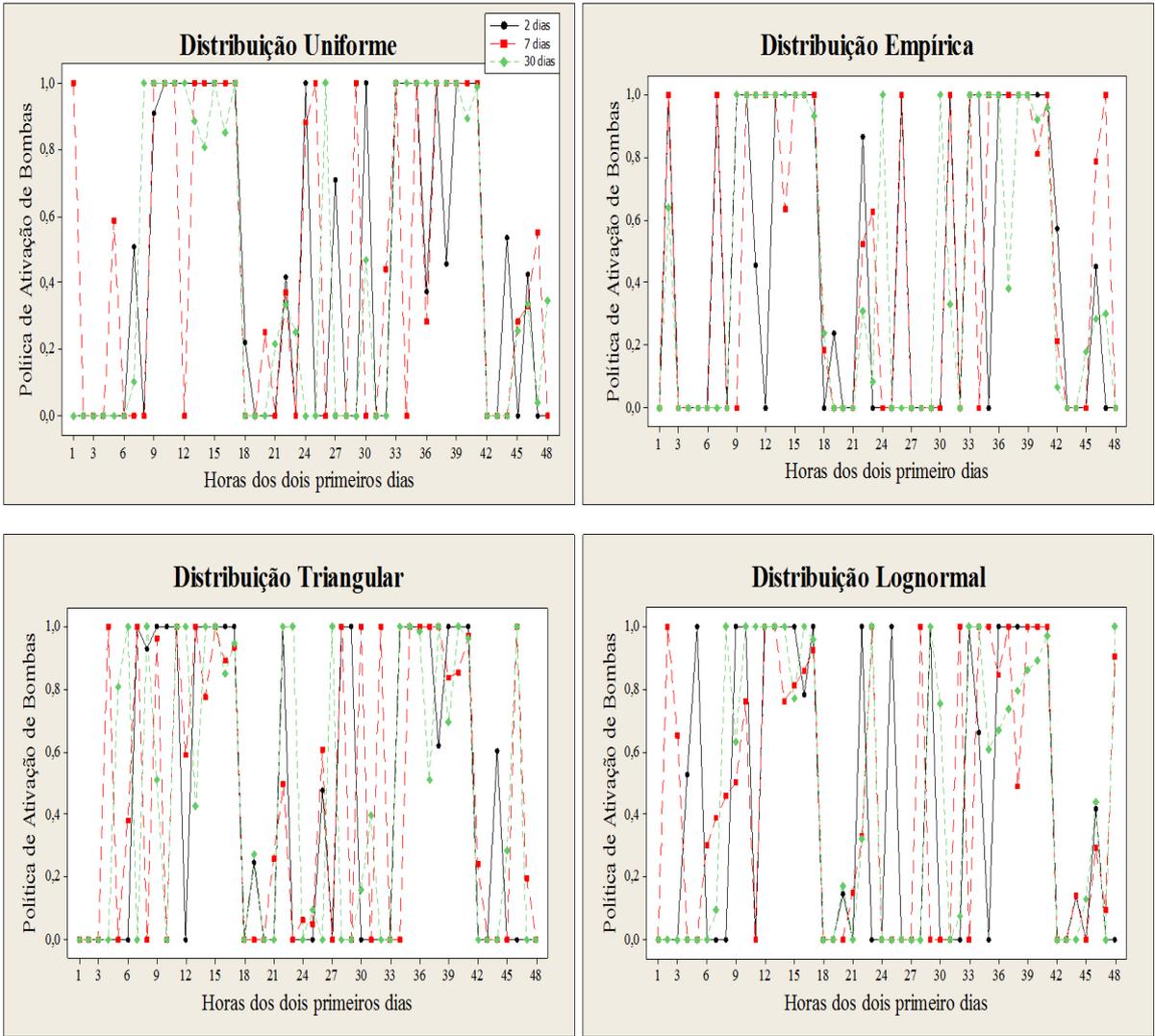


Figura 4.9: Política de ativação de bomba para o reservatório 3.

de água são armazenados nos reservatórios a fim de evitar atividades de bombeamento nesses períodos que acarretam um consumo significativo de energia elétrica. Resultados similares foram obtidos para os reservatórios restantes.

4.8.3 Análise dos Níveis de Serviço

Para analisar o nível de serviço $\mathcal{B}(\omega)$ referente à porcentagem da demanda total por água atendida em cada cenário ω , considerou-se: $\mathcal{B}(\omega) = \left(1 - \frac{I^-(\omega)}{D(\omega)}\right)$, em que $D(\omega) = \sum_{kt} d_{kt}(\omega)$ é a demanda total de água no cenário ω e $I^-(\omega) = \sum_{jt} I_{jt}^-(\omega)$ é o volume de água não atendido no cenário ω , tal que $I_{jt}^-(\omega) = d_{kt}(\omega) - I_{jt}(\omega)$, se $d_{kt}(\omega) > I_{jt}(\omega)$ e

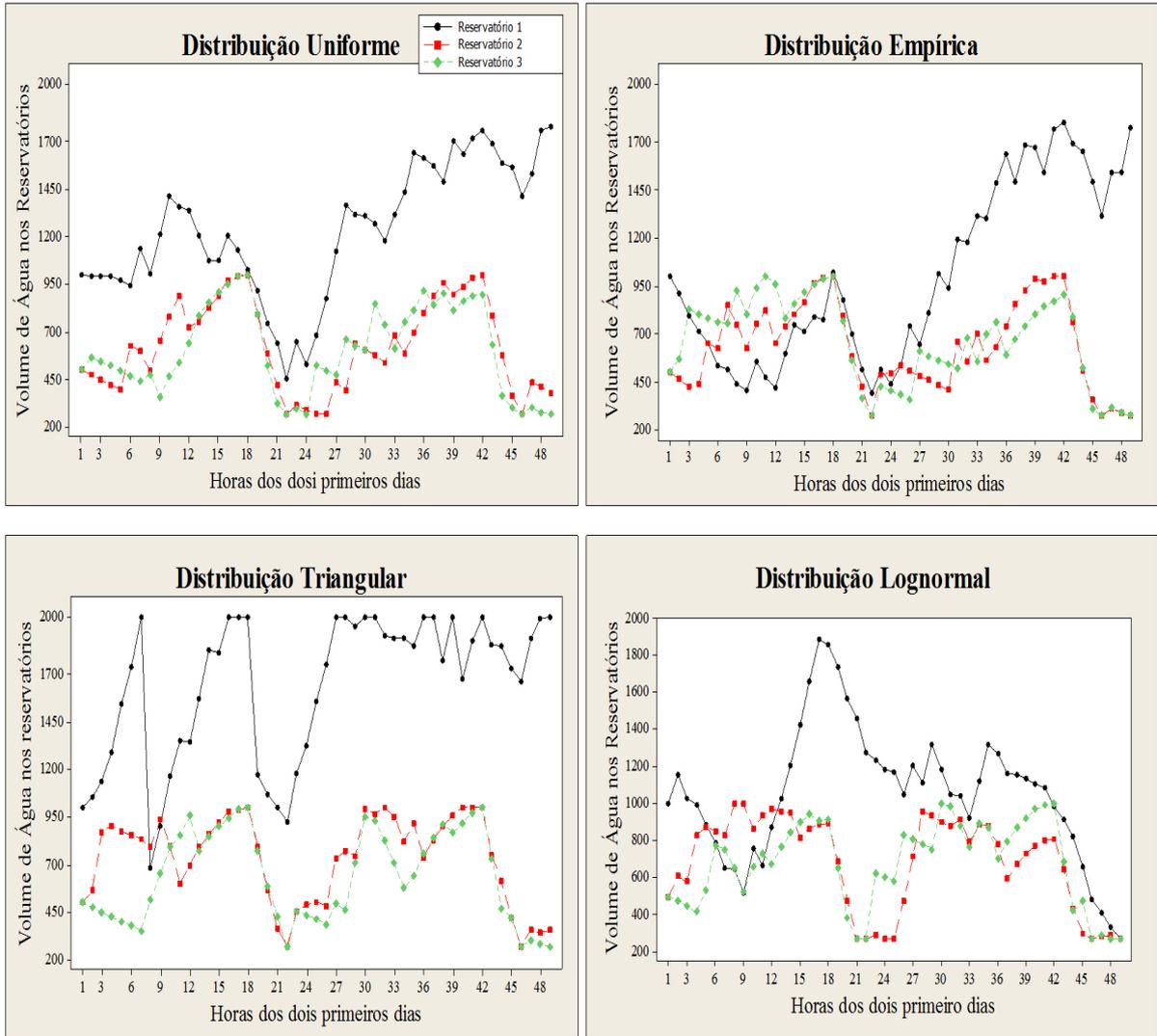


Figura 4.10: Volume de água nos reservatórios 1, 2 e 3 para as distribuições de probabilidade uniforme, empírica, triangular e lognormal, considerando o cenário de valor esperado.

0, outro caso. A Tabela 4.8 apresenta os valores referentes ao nível de serviço $\mathcal{B}(\omega)$, ao excesso, $\mathcal{E}^+(\omega) = \sum_{jt} \mathcal{E}_{jt}^+(\omega)$, e escassez, $\mathcal{E}^-(\omega) = \sum_{jt} \mathcal{E}_{jt}^-(\omega)$, de água nos reservatórios, para cada cenário ω e para cada distribuição de probabilidade.

Os níveis de serviço nos cenários 1–9, de baixa demanda por água nos três reservatórios, atingem 100%, uma vez que a demanda em cada reservatório é atendida em todos os períodos do horizonte de planejamento. No entanto, há volume em excesso de água nos reservatórios, como se pode identificar nas colunas $\mathcal{E}^+(\omega)$. Os excessos de água são menos evidenciados para as distribuições uniforme, empírica e log-normal, sendo tal proporção em média de 5,4% em relação ao valor total das violações ($\mathcal{E} = \sum_{\omega \in \mathcal{W}} [\mathcal{E}_{jt}^+(\omega) + \mathcal{E}_{jt}^-(\omega)]$).

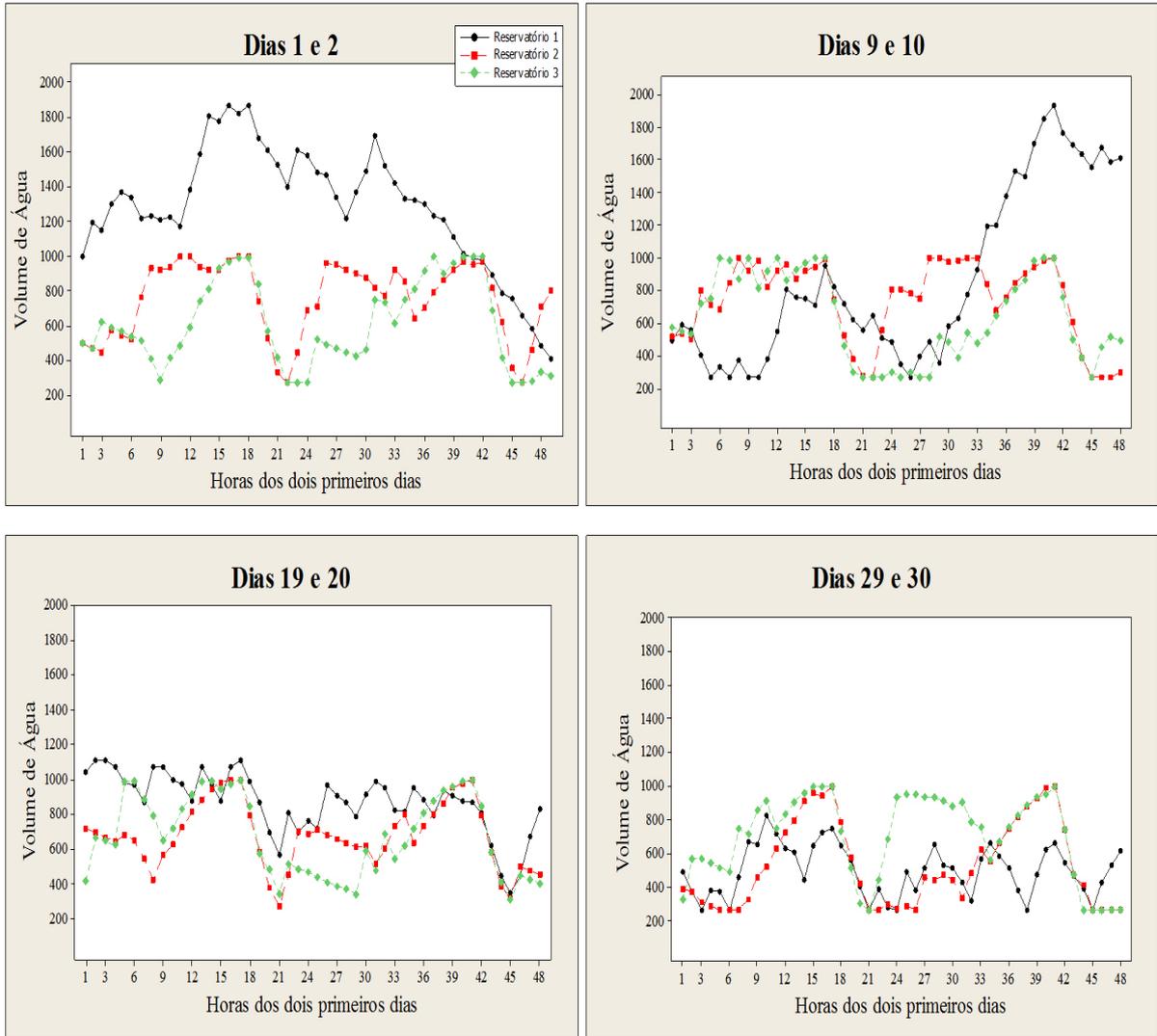


Figura 4.11: Volume de água nos reservatórios nos dias 1, 2, 9, 10, 19, 20, 29 e 30, de um horizonte de planejamento de 30 dias.

Uma vez que o objetivo é em termos de valor esperado, a variação das probabilidades ocasiona uma alteração na contribuição de cada cenário no custo total esperado e, consequentemente, no valor das variáveis de decisão de segundo estágio. As distribuições de probabilidade uniforme, empírica e log-normal atribuem maiores probabilidade de ocorrências aos cenários baixos, o que ocasiona menores violações por excesso de água nos reservatórios para tais distribuições. Em contrapartida, a distribuição triangular atribui probabilidades muito baixas para os cenários mais otimistas, i.e., aqueles com demanda baixa de água. Logo, as variáveis referentes ao excesso de água nos reservatórios assumem valores mais altos, representando o 46,53% em relação às violações totais \mathcal{E} .

Em relação aos cenários de demanda média 10–18, os níveis de serviço são dete-

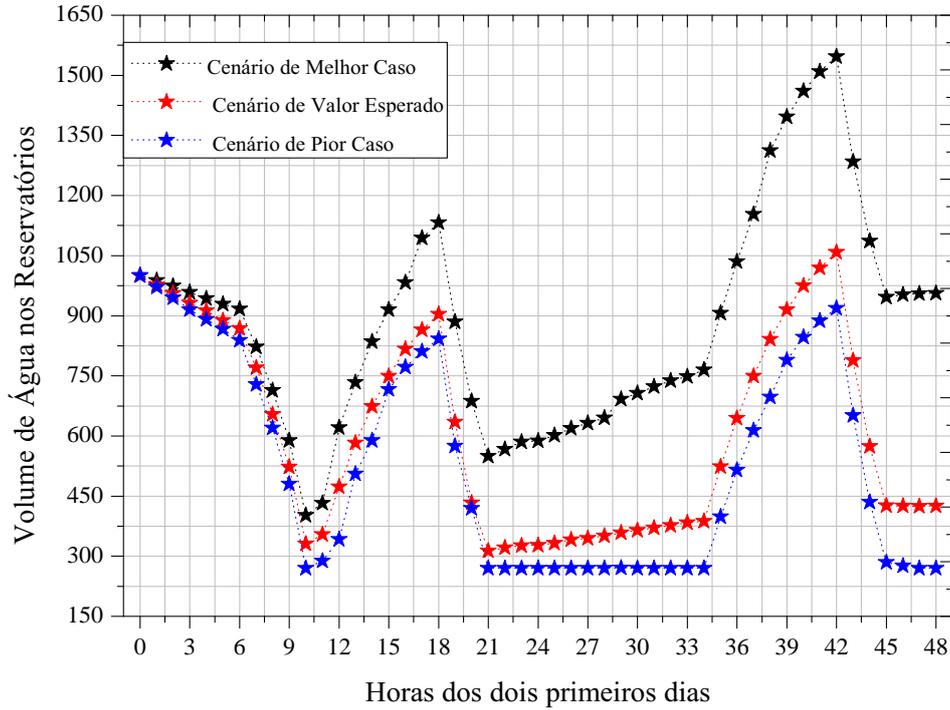


Figura 4.12: Comportamento do volume de água no reservatório 1 para os cenários de melhor caso, de valor esperado e de pior caso.

riorados em média 18,8%, 15,0%, 6,5% e 22,6% para as distribuições de probabilidade uniforme, empírica, triangular e log-normal, respectivamente. Além disso, independente da distribuição de probabilidade, há somente violação por escassez de água nos reservatórios, indicando que há demanda reprimida, ou seja, a demanda por água de alguns bairros não é atendida.

Como era de se esperar, nos cenários de demanda alta 19–27, há uma queda acentuada dos níveis de serviço em comparação aos cenários de demanda média. Nesses cenários, o nível de serviço médio é 66,0%, 69,0%, 79,0% e 78,7%, para as distribuições de probabilidade uniforme, empírica, triangular e log-normal, respectivamente. Além disso, observou-se também um aumento, em relação aos cenários de demanda média, na violação da restrição de balanço de água nos reservatórios, indicado pelo aumento da escassez de água nos reservatórios (veja coluna $\mathcal{E}^-(\omega)$) em média 64,6%, 67,1%, 93,6% e 48,9% para as quatro distribuições de probabilidade já mencionadas.

A Tabela 4.9 ilustra a média dos níveis de serviços, dos excessos e falta de água nos reservatórios para todas as classes consideradas nesta dissertação. Essa tabela foi cons-

Tabela 4.8: Valores associados ao nível de serviço, $\mathcal{B}(\omega)\%$, ao excesso de água, $\mathcal{E}^+(\omega)$, e às faltas de água, $\mathcal{E}^-(\omega)$, nos reservatórios para cada uma das distribuições de probabilidade uniforme, empírica, triangular e lognormal, e para cada cenário ω .

ω	Uniforme			Empírica			Triangular			Lognormal		
	$\mathcal{B}(\omega)$	$\mathcal{E}^+(\omega)$	$\mathcal{E}^-(\omega)$									
1	100	807	0,00	100	756	0,00	100	3814	0,00	100	0,00	0,00
2	100	569	0,00	100	482	0,00	100	3559	0,00	100	254	0,00
3	100	304	0,00	100	232	0,00	100	3354	0,00	100	565	0,00
4	100	549	0,00	100	494	0,00	100	3531	0,00	100	301	0,00
5	100	320	0,00	100	237	0,00	100	3276	0,00	100	572	0,00
6	100	263	0,00	100	232	0,00	100	3353	0,00	100	884	0,00
7	100	274	0,00	100	249	0,00	100	3286	0,00	100	6218	0,00
8	100	80,0	0,00	100	246	0,00	100	3071	0,00	100	892	0,00
9	100	263	0,00	100	280	0,00	100	3373	0,00	100	1203	0,00
10	84	0,00	1837	86	0,00	1403	96	0,00	215	95	0,00	4209
11	82	0,00	2100	85	0,00	1695	95	0,00	0,00	92	0,00	4480
12	81	0,00	2383	83	0,00	1981	94	0,00	104	92	0,00	4792
13	83	0,00	2120	85	0,00	1690	95	0,00	103	92	0,00	4528
14	81	0,00	2383	83	0,00	1984	93	0,00	102	91	0,00	4799
15	80	0,00	2666	82	0,00	2270	92	0,00	404	90	0,00	5110
16	81	0,00	2417	83	0,00	1952	93	0,00	103	90	0,00	4848
17	80	0,00	2680	82	0,00	2246	92	0,00	340	89	0,00	5119
18	79	0,00	2975	81	0,00	2542	91	0,00	698	88	0,00	5430
19	68	0,00	6221	71	0,00	5434	81	0,00	3226	81	0,00	8820
20	67	0,00	6456	70	0,00	5694	80	0,00	3340	79	0,00	9090
21	66	0,00	6752	69	0,00	5990	79	0,00	3648	81	0,00	9402
22	67	0,00	6472	70	0,00	5687	80	0,00	3362	78	0,00	9139
23	66	0,00	6755	69	0,00	5999	79	0,00	3657	78	0,00	9410
24	65	0,00	7050	68	0,00	6295	78	0,00	3964	79	0,00	9721
25	66	0,00	6781	69	0,00	5965	79	0,00	3656	78	0,00	9458
26	65	0,00	7064	68	0,00	6277	78	0,00	3950	78	0,00	9729
27	64	0,00	7359	67	0,00	6573	77	0,00	4258	76	0,00	10041

truída com os valores obtidos depois de resolver 10 instâncias de cada classe considerada neste trabalho. A partir dessa tabela, é possível notar que sempre haverá bairros com demanda reprimida, pois o nível de serviço é menor do que 100%. Isso pode ser corroborado com a alta utilização das variáveis auxiliares que representam a falta de água nos reservatórios. Essa alta utilização de tais variáveis pode ser justificada pelos altos níveis de perda ocasionadas pelo vazamento na rede urbana. Note que, quando há um nível de perda por água na rede, as variáveis relacionadas à falta de água nos reservatórios assumem os valores mais altos.

Finalmente, as variáveis que representam os excessos de água nos reservatórios aparecem em maior proporção para as instâncias nas quais não existe perda de água. Os resultados referentes aos níveis de serviços sugerem que é necessário desenvolver estratégias para evitar o não atendimento da demanda por água dos bairros. Do ponto de

Tabela 4.9: Valores associados à média dos níveis de serviços, $\mathcal{B}(\omega)\%$, dos excessos, \mathcal{E}^+ , e falta de água nos reservatórios, \mathcal{E}^- , e do tempo de resolução (em segundos), e o desvio padrão para todas as classes consideradas e para uma distribuição uniforme ou situação equiprovável.

Classe	$ \mathcal{T} / \mathcal{W} /\theta$	$\mathcal{B}(\omega)\%$	\mathcal{E}^+	\mathcal{E}^-	Tempo (s)	Desvio Padrão
1	2/27/0	92,34	1530	3565	1,450	0,089
2	2/27/10	85,63	465,0	8960	3,200	0,066
3	2/27/20	78,56	45,00	22230	5,450	0,082
4	2/64/0	88,45	2550	5368	8,470	0,067
5	2/64/10	85,37	589,0	15240	10,15	0,088
6	2/64/20	78,90	78,00	36890	15,89	0,073
7	2/125/0	80,12	3368	25200	17,20	0,068
8	2/125/10	76,89	264,0	36800	20,30	0,086
9	2/125/20	75,50	125,0	47500	35,60	0,070
10	7/27/0	85,50	5430	68700	85,96	0,099
11	7/27/10	80,52	1150	78900	115,3	0,060
12	7/27/20	78,40	58,00	98750	250,6	0,094
13	7/64/0	81,10	8970	98650	321,1	0,086
14	7/64/10	75,40	2320	115800	456,3	0,080
15	7/64/20	68,90	23,00	321000	568,8	0,064
16	7/125/0	78,80	10232	33500	789,6	0,090
17	7/125/10	70,48	3560	458256	985,4	0,093
18	7/125/20	62,30	15,00	589700	1215	0,071
19	30/27/0	83,40	15890	79800	1329	0,091
20	30/27/10	78,10	5632	897564	1533	0,097
21	30/27/20	62,50	521,0	1156800	1896	0,100
22	30/64/0	79,80	20530	95879	1957	0,073
23	30/64/10	68,35	4320	1135782	2146	0,072
24	30/64/20	65,30	110,0	1578654	2742	0,090
25	30/125/0	72,57	30530	1515836	2895	0,080
26	30/125/10	58,96	2350	2420985	3214	0,086
27	30/125/20	55,64	32,00	3256890	3568	0,094

vista prático, pode-se conjecturar aumentar a capacidade dos reservatórios e o número de reservatórios, aumentar a vazão das bombas, reduzir o problema de vazamento, entre outros.

Os tempos médios de resolução para obter o certificado de otimalidade de todas as classes e os respectivos desvios-padrões são exibidos nas colunas 4 e 5 da Tabela 4.9. O tempo computacional eleva-se significativamente conforme o número de cenários e o horizonte de planejamento aumentam. Ainda, o problema de programação de bombas torna-se mais difícil quando se assume o vazamento na rede. Esses resultados indicam que o problema de programação de bombas com demanda estocástica sem custo fixo é difícil ser resolvido, o que sugere o desenvolvimento futuro de métodos eficientes de resolução, e.g., decomposição de Benders, *progressive hedging*, etc.

4.8.4 Sensibilidade da Solução e do Modelo com os Parâmetros

λ e γ

Esta seção tem o objetivo de analisar o *trade-off* entre o custo total esperado, a variabilidade dos custos de segundo estágio (controlada pelo parâmetro de risco λ) e da escassez/excesso de água nos reservatórios (controlada pelo parâmetro γ). Para observar tal comportamento, fixou-se um parâmetro e variou-se o outro. Testes computacionais preliminares sugeriram que a variação dos parâmetros λ e γ é bem representada nos intervalos $[0; 0,05]$ e $[0; 0,3]$, respectivamente. As tabelas 4.10 e 4.11 ilustram na mesma ordem o *trade-off* entre o custo total esperado (CTE) com o valor esperado dos excessos e/ou das faltas de água nos reservatórios (\mathcal{E}_{jt}^+ e \mathcal{E}_{jt}^-) e a variabilidade dos custos de segundo estágios (Δ^+ e Δ^-) de acordo com o aumento nos parâmetros γ e λ , e para valores fixos de $\lambda = 0,05$ e $\gamma = 0,3$. Para cada uma das distribuições de probabilidade consideradas, a instância correspondente 2/27/0% foi selecionada para apresentar tal análise.

Tabela 4.10: Valores associados ao custo total esperado (CTE), ao excesso de água (\mathcal{E}^+) e à falta de água (\mathcal{E}^-) nos reservatórios para cada uma das distribuições uniforme, empírica, triangular e log-normal conforme o parâmetro de γ varia em forma crescente no intervalo $[0,000; 0,300]$ e para $\lambda = 0,05$.

$\lambda = 0,05$	Uniforme			Empírica			Triangular			Lognormal		
	γ	CTE	\mathcal{E}^+	\mathcal{E}^-	CTE	\mathcal{E}^+	\mathcal{E}^-	CTE	\mathcal{E}^+	\mathcal{E}^-	CTE	\mathcal{E}^+
0,000	0,000	8196	13955	0,000	8612	13911	0,000	7934	14054	0,000	6498	11883
0,015	256,1	6148	12929	255,7	6650	11766	262,1	6640	14054	198,0	5280	9108
0,030	512,3	6148	12929	511,5	6650	11766	524,2	6640	14054	396,0	5280	9108
0,045	768,4	6148	12929	767,3	6650	11766	786,3	6640	14054	594,0	5280	9108
0,060	1025	6148	12929	1023	6650	11766	1048	6640	14054	792,0	5280	9108
0,075	1281	6148	12929	1279	6650	11766	1311	6640	14054	990,0	5280	9108
0,090	1537	6148	12929	1535	6650	11766	1573	6640	14054	1188	5280	9108
0,105	1793	6148	12929	1790	6650	11766	1835	6640	14054	1386	5280	9108
0,120	1995	1921	3915	1995	1934	3691	2012	2021	3824	1475	345,9	620,9
0,135	2075	1659	3682	2074	1687	3554	2094	1639	3769	1488	292,7	594,3
0,150	2155	1655	3445	2153	1687	3301	2166	1241	2327	1501	283,8	585,4
0,165	2229	1629	3161	2225	1462	3269	2220	1177	2261	1513	250,2	437,9
0,180	2295	1480	2221	2285	1316	2106	2272	1114	2128	1523	243,9	437,9
0,195	2349	1267	2220	2335	1308	2102	2322	1108	2092	1532	193,9	412,8
0,210	2401	1250	2121	2384	1213	2102	2361	854,1	1316	1542	187,7	406,6
0,225	2453	1152	2120	2433	1175	2088	2393	744,0	1314	1548	135,4	249,5
0,240	2504	1143	2118	2481	1136	2051	2422	637,4	1201	1553	124,7	245,9
0,255	2554	1060	2110	2528	1070	2028	2450	634,2	1123	1559	124,7	242,4
0,270	2604	976,1	1996	2574	1061	1971	2476	626,8	1116	1564	124,7	224,5
0,285	2652	955,2	1989	2620	1012	1958	2502	535,7	1089	1569	117,6	221,0
0,300	2710	932,5	1851	2664	900,9	1812	2528	518,4	1089	1575	114,0	217,4

Como era de se esperar, independente da distribuição de probabilidade, o custo total

Tabela 4.11: Valores associados ao custo total esperado (CTE), aos desvios positivos (Δ^+) e aos desvios negativos (Δ^-) para uma das distribuições uniforme, empírica, triangular e lognormal conforme o parâmetro de λ varia em forma crescente no intervalo $[0,000; 0,050]$ e para $\gamma = 0,3$.

$\gamma = 0.3$ λ	Uniforme			Empírica			Triangular			Lognormal		
	CTE	Δ^+	Δ^-	CTE	Δ^+	Δ^-	CTE	Δ^+	Δ^-	CTE	Δ^+	Δ^-
0,0000	2680	4,546	14,34	2643	5,551	15,12	2506	4,425	11,66	1571	1,632	4,298
0,0025	2682	4,417	12,81	2645	4,560	13,59	2508	4,278	11,36	1572	1,578	4,189
0,0050	2683	3,906	12,81	2647	4,019	12,32	2510	3,984	11,06	1573	1,360	4,080
0,0075	2685	3,588	11,08	2649	3,954	11,40	2512	3,688	10,80	1573	1,251	3,862
0,0100	2687	3,588	10,94	2651	3,800	10,66	2513	3,399	10,49	1574	1,142	3,808
0,0125	2689	3,588	10,21	2653	3,680	10,64	2515	3,393	10,47	1575	0,000	0,000
0,0150	2690	2,898	10,00	2654	3,608	10,03	2517	3,225	10,33	1575	0,000	0,000
0,0175	2692	2,498	9,67	2656	3,226	9,226	2518	3,100	9,296	1575	0,000	0,000
0,0200	2694	2,364	9,62	2657	3,183	8,832	2520	2,789	8,321	1575	0,000	0,000
0,0225	2695	2,300	8,84	2659	2,667	8,294	2521	2,691	6,862	1575	0,000	0,000
0,0250	2696	2,300	8,84	2660	2,460	5,740	2523	2,668	6,422	1575	0,000	0,000
0,0275	2697	1,940	4,86	2661	2,424	5,656	2524	2,550	6,279	1575	0,000	0,000
0,0300	2698	1,620	4,54	2662	1,635	4,507	2525	2,028	5,950	1575	0,000	0,000
0,0325	2699	0,602	1,63	2662	1,423	3,815	2525	1,563	3,647	1575	0,000	0,000
0,0350	2699	0,513	1,26	2663	0,647	1,942	2526	1,092	3,108	1575	0,000	0,000
0,0375	2700	0,271	1,22	2663	0,548	1,843	2526	0,790	2,675	1575	0,000	0,000
0,0400	2701	0,260	1,22	2664	0,484	1,384	2527	0,755	2,256	1575	0,000	0,000
0,0425	2703	0,250	0,92	2664	0,405	1,355	2527	0,649	2,256	1575	0,000	0,000
0,0450	2704	0,246	0,90	2664	0,381	1,349	2527	0,620	2,200	1575	0,000	0,000
0,0475	2705	0,230	0,88	2664	0,346	1,246	2528	0,564	2,171	1575	0,000	0,000
0,0500	2710	0,203	0,86	2664	0,268	1,072	2528	0,564	2,030	1575	0,000	0,000

esperado aumenta e o valor esperado das variáveis de risco (Δ^+ e Δ^-) diminuem conforme a solução se torna mais aversa ao risco, i.e., na medida em que o parâmetro λ aumenta. Um comportamento similar pode ser notado entre o custo esperado e o valor esperado dos excessos e/ou as faltas de água nos reservatórios. De acordo com variações crescentes do parâmetro γ , i.e., conforme o modelo se torna mais robusto, o custo total esperado aumenta, mas o valor esperado dos excessos e/ou as faltas diminuem. A Figura 4.13 descreve para a situação equiprovável (distribuição uniforme) tais comportamentos. Em tal figura, pode-se observar dois gráficos. O gráfico acima ilustra a *trade-off* entre o custo total esperado e o valor esperado dos excessos (curva vermelha) e das faltas (curva preta) de água nos reservatórios. O gráfico abaixo apresenta também o *trade-off* entre o custo total esperado e o valor esperado dos custos de segundo estágios Δ^+ (curva vermelha) e Δ^- (curva preta).

As curvas da Figura 4.13 podem ser denominadas também de curvas Pareto-Ótimos, uma vez que elas fornecem um conjunto de soluções ótimas, no qual a escolha de uma solução depende do quão averso ao risco é o decisor. Por exemplo, se o decisor é averso

ao risco, então dela deve selecionar soluciones localizadas à direita de cada curva, i.e., soluções nas quais os parâmetros λ e γ assumem seus valores mais altos. Contrariamente, as soluções localizadas à esquerda de cada curva podem ser escolhidas pelo decisor que seja neutro ou indiferente ao risco, pois nessas soluções os valores mais baixos são assumidos pelos parâmetros λ e γ .

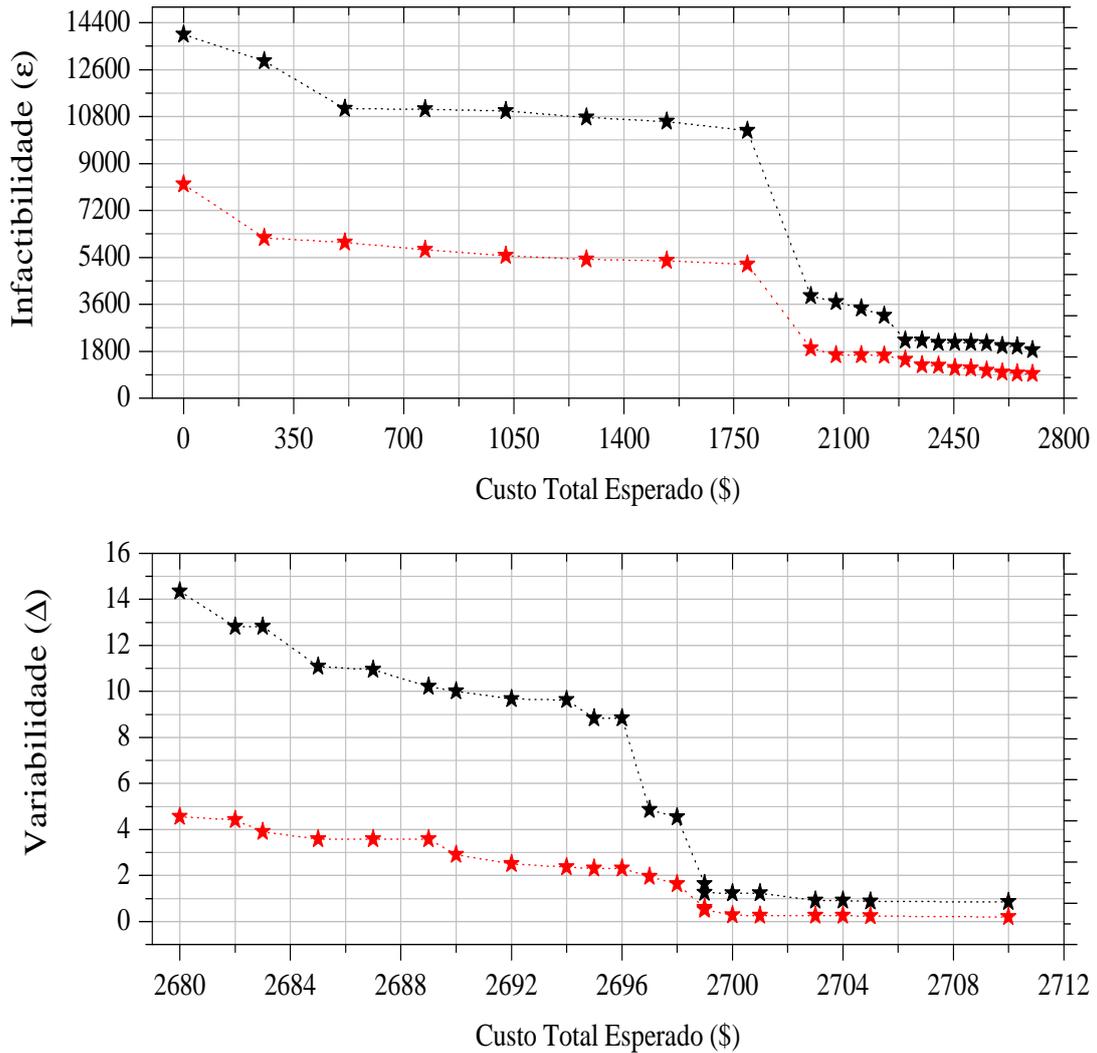


Figura 4.13: Curvas de *trade-off* para ilustrar o conflito existente entre o custo total esperado com: (1) Valor esperado dos excessos e falta de água nos reservatórios (curva acima) e (2) valor esperado dos desvios positivos e negativos dos custos de segundo estágio (curva abaixo).

Também das Tabelas 4.10 e 4.11 é possível observar que, quando $\gamma = 0$ e $\lambda = 0$, \mathcal{E} e Δ alcançam o máximo valor, dado que o risco, as faltas e os excessos não são penalizados e, desta forma, a preocupação está concentrada em minimizar somente o valor esperado.

Nessa situação, a solução coincide com o valor da solução do problema de programação estocástica tradicional neutro ao risco.

Para $0.015 \leq \gamma \leq 0.105$, independente da distribuição de probabilidade, existe um aumento significativo no custo total esperado de 85%, enquanto as ineficiências associadas à escassez ou excesso de água nos reservatórios praticamente não variam. O intervalo $0.120 \leq \gamma \leq 0.300$ representa outra fase, na qual o custo total esperado aumenta e o excesso e/ou escassez de água nos reservatórios diminui conforme o parâmetro γ varia em forma crescente nesse intervalo. Finalmente, em $\gamma = 0.12$, as ineficiências \mathcal{E} cai em torno de 70% para as distribuições de probabilidade uniforme, empírica e triangular, e de 93% para a distribuição lognormal, ao passo que um aumento é registrado no custo total esperado (ao redor de 6%). Portanto, atribuir tal valor ao parâmetro γ poderia ocasionar um compromisso entre os custos esperados e as ineficiências relacionadas à escassez e ao excesso dos volumes de água nos reservatórios.

Em relação ao parâmetro de risco λ e para a distribuição lognormal, existem duas fases $0.0000 \leq \lambda \leq 0.0100$ e $0.0125 \leq \lambda \leq 0.0500$. Ao variar o parâmetro de risco λ na primeira fase, o risco associado à variabilidade Δ mantém-se fixo, ao passo que o custo total esperado varia. Finalmente, ao variar esse parâmetro na segunda fase, tanto o custo esperado quanto o nível de risco não são sensíveis a tais variações. Já para as distribuições restantes, o custo total esperado aumenta e o nível de risco Δ diminui conforme γ aumenta.

Os gráficos da Figura 4.14, 4.15 e 4.16 ilustram o comportamento das variáveis de primeiro e segundo estágio de acordo com as variações do fator de risco λ para cada uma das distribuições de probabilidades consideradas. Note que as variáveis referentes à fração de tempo em que existe transferência de água X_{jt} (poços - reservatórios) não são influenciadas pela variação de tal parâmetro de risco, exceto quando a distribuição empírica é usada para atribuir a probabilidade das realizações, passando de 58,02 em $\lambda = 0,0325$ a 57,12 em $\lambda = 0,035$. A partir do anterior, quando é usada a distribuição de probabilidade empírica para gerar as probabilidades de ocorrências dos cenários, é possível inferir que para valores de $\lambda > 0,0325$, soluções com menor risco podem ser determinadas, i.e, soluções nas quais as decisões de transferência de água entre os reservatórios são mais estável entre os cenários.

Além disso, as variáveis que representa as decisões dos volumes de água armazenados nos reservatórios $I_{jt}(\omega)$ não são influenciadas pelo aumento de λ quando as distribuições

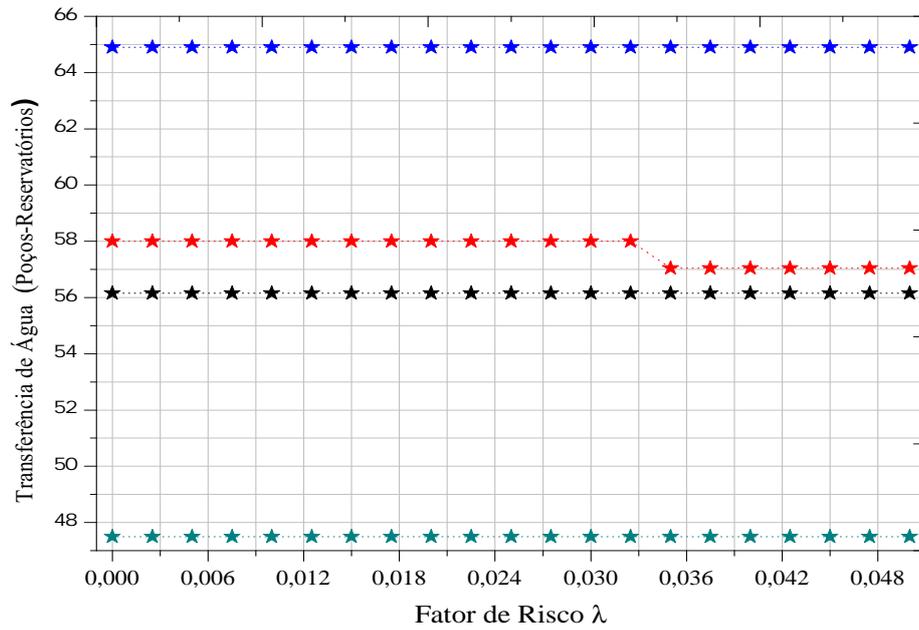


Figura 4.14: Comportamento das vari6veis de decis6o referentes 6 captaç6o de 6gua para variaç6es crescentes do par6metro λ no intervalo $[0,000; 0,050]$.

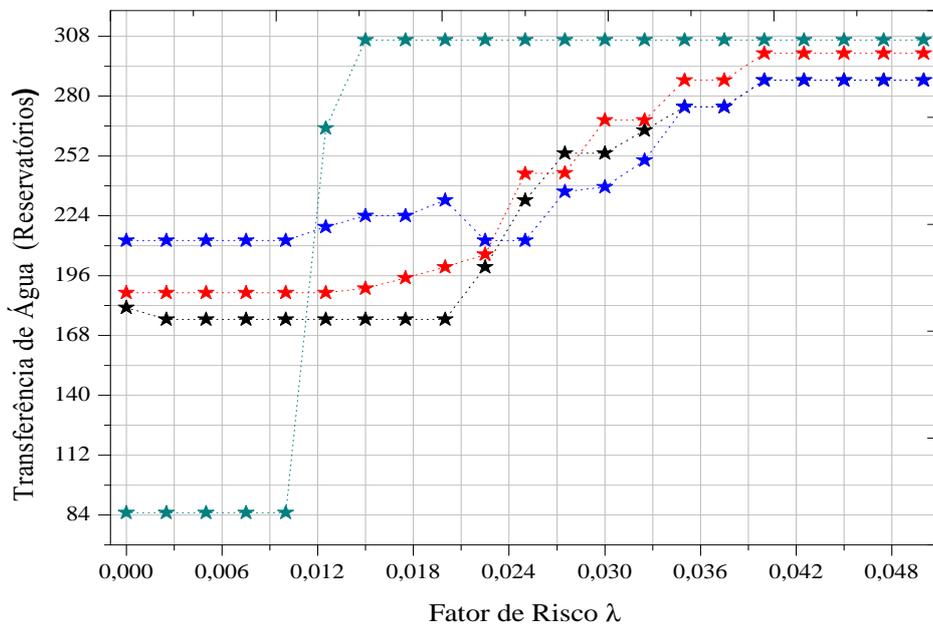


Figura 4.15: Comportamento das vari6veis de decis6o referentes 6 transfêrência de 6gua entre reservat6rios para variaç6es crescentes do par6metro λ no intervalo $[0,000; 0,050]$.

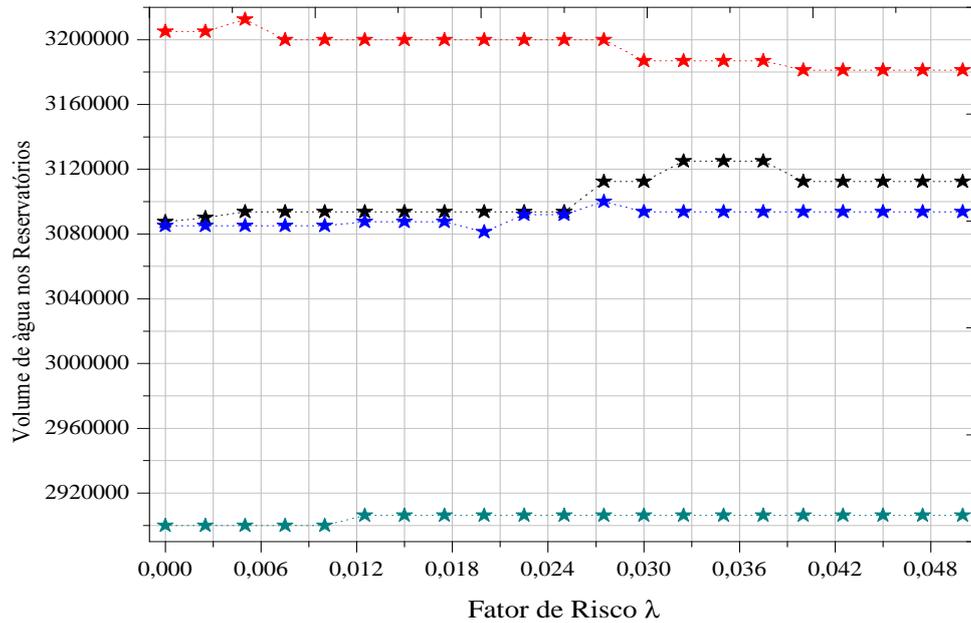


Figura 4.16: Comportamento das variáveis de decisão referentes ao volume de água nos reservatórios para variações crescentes do parâmetro λ no intervalo $[0, 000; 0, 050]$.

de probabilidade triangular e lognormal são utilizadas para designar as probabilidades de ocorrências dos cenários. Para as distribuições de probabilidade uniforme e empírica, variações no parâmetro de risco λ ocasionam um aumento de 0.72% e uma diminuição de 0.62%, respectivamente, passando em $\lambda = 0.025$ a $\lambda = 0.05$. Convém ressaltar que do ponto de vista estatístico, ao nível de confiança de 95%, pode-se inferir que tais decisões não são influenciadas pelas variações do parâmetro λ . No entanto, no contexto operacional pequenos aumentos ou diminuições no nível de utilização dessas variáveis podem ocasionar consideráveis gastos ou economias nos custos totais de consumo de energia elétrica, uma vez que tais decisões estão ligadas diretamente às atividades de bombeamento. Finalmente, as variáveis que descrevem a fração de tempo em que existe transferência de água entre reservatórios $V_{j\ell t}(\omega)$ apresentam um grau de sensibilidade maior quando $\lambda = 0.010$.

As Figuras 4.17, 4.18 e 4.19 ilustram o comportamento das variáveis de decisão relacionadas à fração de tempo em que existe transferência de água entre poços-reservatórios, à transferência de água entre reservatórios e ao volume de água armazenado nos reservatórios conforme o parâmetro γ aumenta. Tais figuras indicam que, as variáveis referentes à

fração de tempo em que existe transferência de água entre poços-reservatórios, à transferência de água entre reservatórios e ao volume de água nos reservatórios não são sensíveis à medida que o parâmetro γ é variado no intervalo $0.000 \leq \gamma \leq 0.105$, respectivamente. No intervalo $0.0120 \leq \gamma \leq 0.210$, independente da distribuição de probabilidade, as variáveis associadas à fração de tempo em que existe transferência de água entre poço-reservatório não são influenciadas com o aumento de γ . No entanto, existe uma tendência positiva de cada curva dos gráficos correspondentes às variáveis de transferência de água entre reservatórios e armazenamento de água nos reservatórios. Essa tendência indica a sensibilidade dessas variáveis conforme γ aumenta.

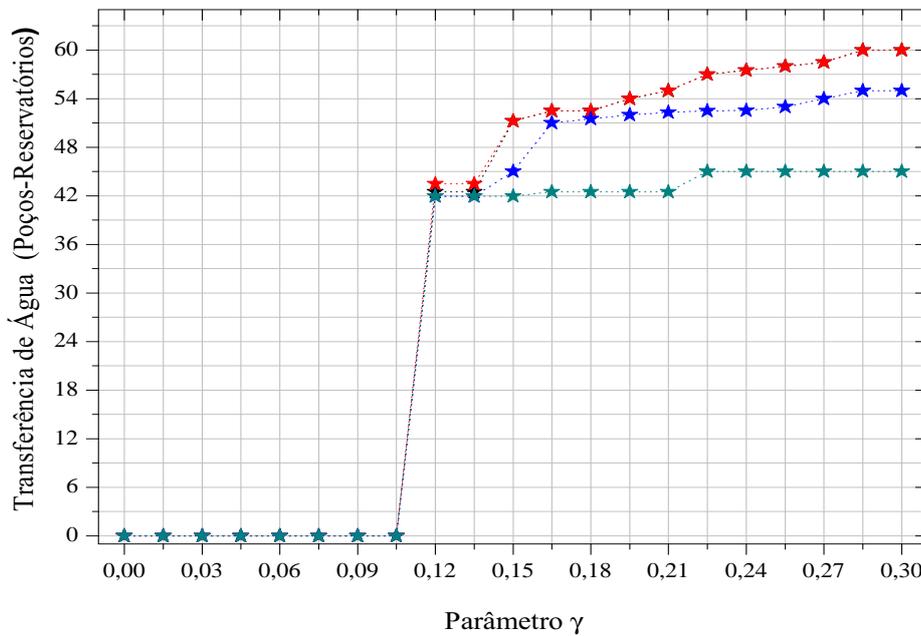


Figura 4.17: Comportamento das variáveis de decisão referentes à captação de água para variações crescentes do parâmetro γ no intervalo $[0, 000; 0, 300]$.

Já para o último intervalo de variação $0.225 \leq \gamma \leq 0.300$, existe um aumento considerável na transferência de água entre reservatórios em relação ao segundo intervalo de variação. Na mesma ordem das distribuições uniforme, empírica, triangular e lognormal, tais aumentos correspondem 45%, 45%, 40% e 76%. Ao passo que para as variáveis que descrevem as políticas de ativação de bombas, independente da distribuição de probabilidade, praticamente não existe aumento na utilização das mesmas. Finalmente, os níveis de estoques aumentam 2, 0%, 2, 5%, 0, 02% e 0, 07% para as distribuições de probabilidade

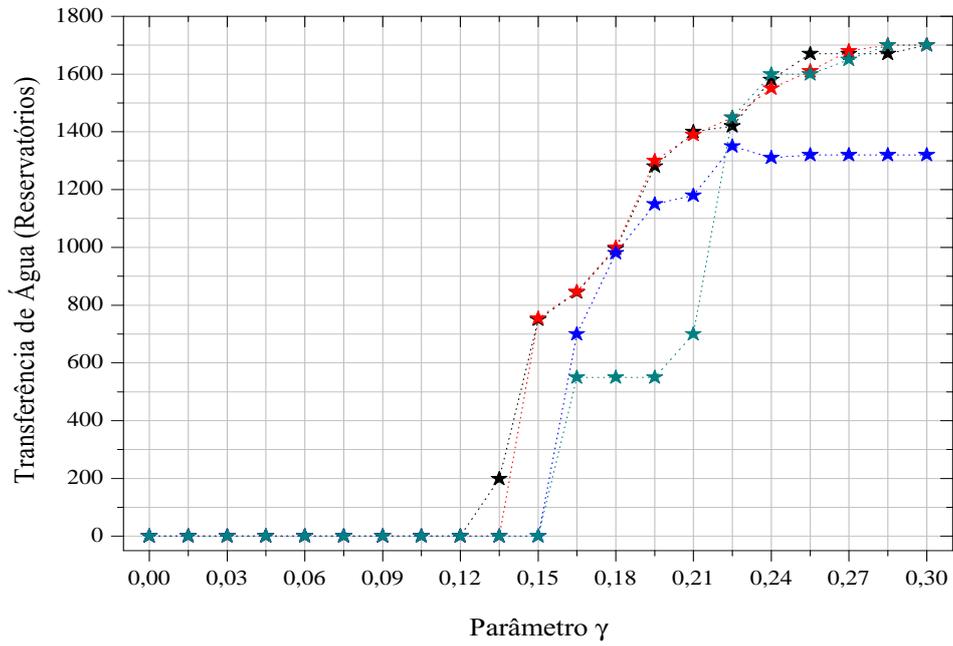


Figura 4.18: Comportamento das variáveis de decisão referentes à transferência de água entre reservatórios para variações crescentes do parâmetro γ no intervalo $[0, 000; 0, 300]$.

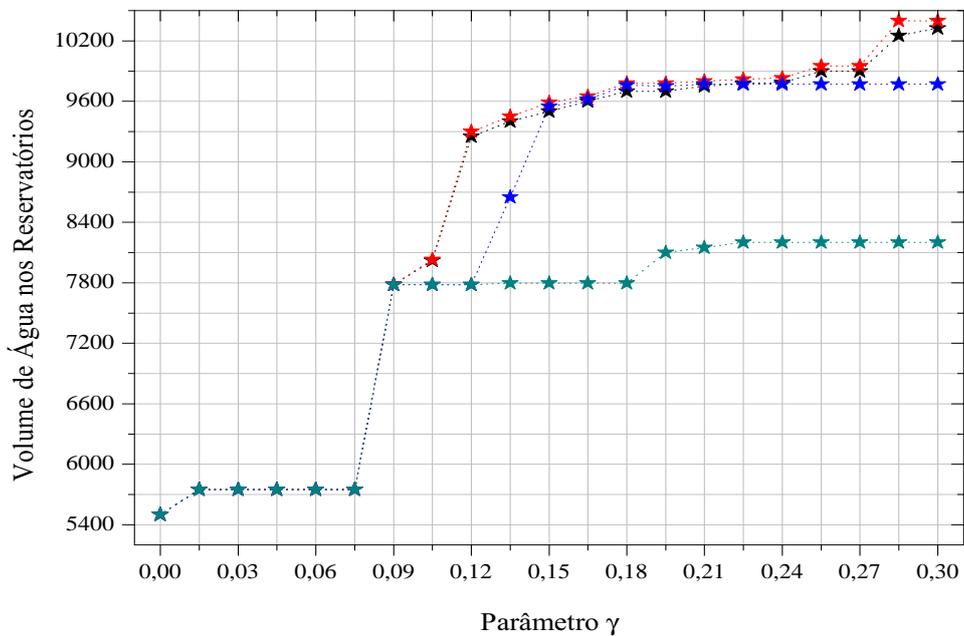


Figura 4.19: Comportamento das variáveis de decisão referentes ao volume de água nos reservatórios para variações crescentes do parâmetro γ no intervalo $[0, 000; 0, 300]$.

uniforme, empírica, triangular e lognormal, respectivamente.

4.8.5 Análise do EVPI e VSS

Para ilustrar o EVPI, foi selecionada a instância 7/27/0%. Desta forma, 27 problemas *wait-and-see* foram resolvidos. A Tabela 4.12 ilustra as soluções $WS(\omega)^*$, a solução do modelo estocástico RP, o EVPI absoluto e seu respectivo valor relativo $EVPI\% = \frac{RP-WS}{RP} * 100\%$, considerando as diferentes distribuições de probabilidade em cada cenário $\omega \in \mathcal{W}$.

Tabela 4.12: Cálculo do EVPI.

ω	Uniforme		Empírica		Triangular		Lognormal	
	$WS(\omega)^*$	$\pi(\omega)$	$WS(\omega)^*$	$\pi(\omega)$	$WS(\omega)^*$	$\pi(\omega)$	$WS(\omega)^*$	$\pi(\omega)$
1	5444	0,0370	5438	0,0395	5475	0,0378	5522	0,722
2	5572	0,0370	5567	0,0387	5610	0,0582	5654	0,089
3	5707	0,0370	5693	0,0399	5742	0,0412	5787	0,006
4	5563	0,0370	5561	0,0396	5599	0,0627	5638	0,081
5	5691	0,0370	5689	0,0386	5734	0,0981	5771	0,010
6	5825	0,0370	5816	0,0400	5865	0,0613	5903	0,001
7	5692	0,0370	5687	0,0391	5727	0,0342	5768	0,006
8	5820	0,0370	5815	0,0382	5862	0,0528	5901	0,001
9	5954	0,0370	5942	0,0394	5994	0,0308	6033	0,000
10	7150	0,0370	7175	0,0364	7082	0,0325	7214	0,064
11	7278	0,0370	7304	0,0356	7217	0,0501	7347	0,008
12	7413	0,0370	7430	0,0367	7348	0,0354	7479	0,001
13	7269	0,0370	7298	0,0364	7205	0,0539	7330	0,007
14	7397	0,0370	7427	0,0356	7340	0,0843	7463	0,001
15	7532	0,0370	7553	0,0369	7472	0,0527	7596	0,000
16	7398	0,0370	7424	0,0360	7334	0,0294	7460	0,001
17	7526	0,0370	7553	0,0351	7469	0,0454	7593	0,000
18	7660	0,0370	7679	0,0363	7601	0,0264	7725	0,000
19	8917	0,0370	8920	0,0361	8879	0,0090	8893	0,002
20	9045	0,0370	9049	0,0353	9014	0,0138	9026	0,000
21	9180	0,0370	9175	0,0364	9146	0,0098	9158	0,000
22	9041	0,0370	9049	0,0361	9008	0,0149	9014	0,000
23	9169	0,0370	9178	0,0353	9143	0,0232	9147	0,000
24	9304	0,0370	9304	0,0365	9275	0,0145	9279	0,000
25	9175	0,0370	9181	0,0356	9142	0,0081	9149	0,000
26	9303	0,0370	9309	0,0348	9277	0,0125	9282	0,000
27	9303	0,0370	9309	0,0348	9277	0,0125	9282	0,000
RP	8080	—	8356	—	7428	—	6895	—
WS	7424	—	7377	—	6772	—	5698	—
EVPI	656,4	—	979,1	—	656,1	—	1196	—
EVPI%	8,120	—	11,72	—	8,830	—	17,35	—

Como era de se esperar, as soluções *wait-and-see* possuem um desempenho similar às soluções RP, no sentido em que o custo total dos cenários 1–9 é o mais baixo, seguido pelos custos dos cenários médio 10–18 e, finalmente, pelos custos dos cenários de demanda

alta 19–27. Além disso, é possível notar que a distribuição lognormal geram os maiores EVPI, seguida pelas distribuições empírica, uniforme e triangular, respectivamente. Isso ocorre porque, a distribuição lognormal atribui probabilidades significativamente altas aos cenários mais favoráveis, mas, como pode ser visto na Tabela 4.12, o valor das soluções $WS(\omega)^*$ para estes cenários é relativamente baixo em comparação com os cenários restantes, levando isso a que a contribuição destes cenários à solução WS e RP seja baixa. Uma vez que a probabilidade dos cenários restantes é praticamente nula, os valores das soluções WS e RP geradas pela distribuição lognormal são mais baixos em relação às mesmas soluções obtidas a partir das outras distribuições de probabilidade. Com isso, é altamente provável que os valores obtidos do EVPI sejam maiores. Esses resultados confirmam o efeito das probabilidades sobre o EVPI.

De acordo aos valores relativos do EVPI, é possível inferir que, independente da forma em que são atribuídas as probabilidades dos cenários, é possível economizar somas consideráveis de dinheiro sob informação perfeita, i.e., se as realizações da demanda por água fossem conhecidas *a priori*. Na primeira linha da Tabela 4.14, a média dos valores relativos do EVPI das classes sob análises para cada distribuição de probabilidade são ilustradas. Tais valores confirmam o resultado descrito anteriormente. Além disso, os altos valores do EVPI também indicam que a aleatoriedade desempenha um papel importante no problema em estudo.

O problema EV foi determinado de acordo com a estratégia de valores médios $d_{kt} = \sum \pi(\omega)d_{kt}(\omega)$. Como foi mencionado, para qualquer solução de primeiro estágio, independente da realização da variável aleatória $d_{kt}(\omega)$, a factibilidade do problema EEV é garantida. Portanto, a solução VSS é bem definida e finita, i.e., $VSS < \infty$. Na segunda linha da Tabela 4.14 apresenta, para cada distribuição de probabilidade, a média dos valores relativos do $VSS = \frac{EEV-RP}{EEV} * 100\%$. Esses resultados sugerem que é possível ter um ganho adicional em resolver o problema considerando-se a aleatoriedade de forma explícita, em vez de adotar abordagens de valor esperado para abolir as incertezas.

4.9 Sumário e Considerações Finais

Nesse capítulo, foi desenvolvido um modelo matemático de otimização linear estocástica com restrições de satisfação robusta para o problema de programação de bombas em

Tabela 4.13: Cálculo do VSS.

	Uniforme	Empírica	Triangular	Lognormal
EV	6251	6261	6010	6130
EEV	7950	8765	7852	6850
RP	6550	6589	6320	5430
VSS	1400	2176	1532	1420
%VSS	17,61	24,82	19,51	20,73

Tabela 4.14: Média dos indicadores EVPI e VSS de todas as 270 instâncias resolvidas para as quatro distribuições de probabilidade utilizadas.

	Uniforme	Empírica	Triangular	Lognormal
EVPI (%)	11,0	12,6	11,1	14,2
VSS (%)	16,0	17,7	18,6	19,0

sistemas de abastecimento urbano com demanda estocástica. Para reduzir a variabilidade dos custos de segundo estágio associados à transferência de água entre reservatórios, incorporou-se ao modelo uma medida de risco do tipo desvio médio absoluto. Tal medida penaliza de forma simétrica os custos acima e abaixo do custo esperado. Para a geração dos cenários, desenvolveu-se um método de amostragem por simulação de Monte Carlo, em que as probabilidades de ocorrências associadas às variáveis foram calculadas a partir das distribuições uniforme, empírica, triangular e log-normal.

Os resultados mostraram que o método de geração de cenários satisfaz as propriedades de estabilidade e do erro, independente da distribuição de probabilidade utilizada. Desta forma, o método proposto garante convergência à distribuição de probabilidade real com apenas poucos cenários, considerando um nível de confiança de 95%. Inferiu-se também que tanto as variáveis de primeiro estágio quanto as de segundo estágio são sensíveis à variação da probabilidade e, além disso, as variáveis de erro que assumem a falta e excesso da quantidade de água em reservatórios também o são. Esta análise foi corroborada com os resultados das análises de variância. Desta forma, deve-se ter precaução no momento de escolher a distribuição marginal para atribuir as probabilidades.

Os resultados referentes aos níveis de serviço sugerem que estratégias para evitar o não atendimento da demanda por água dos bairros devem ser realizadas. Aumentar a capacidade dos reservatórios e a vazão das bombas hidráulicas podem ser consideradas como possíveis estratégias para garantir o atendimento da demanda por água. Aumentando a capacidade dos reservatórios, maiores volumes de água podem ser armazenados e, desta

forma, a demanda faltante pode ser satisfeita. Por outro lado, aumentando a vazão das bombas hidráulicas da rede incita a que maiores volumes de água sejam bombeados aos reservatórios, levando isso a maior satisfação da demanda.

As decisões de segundo estágio associadas à transferência de água entre reservatórios $V_{jlt}(\omega)$, independente da forma em que são atribuídas as probabilidades dos cenários, são sensíveis a variações do parâmetro de risco λ . Entretanto, as decisões de primeiro estágio X_{jt} não são sensíveis à variação de λ quando as distribuições de probabilidade uniforme, triangular e lognormal são usadas para designar probabilidades, ao passo que com a distribuição empírica o são. Em relação às decisões de segundo estágio associadas ao volume de água nos reservatórios $I_{jt}(\omega)$ são sensíveis a tais variações quando as distribuições de probabilidade uniforme e empírica são usadas para gerar probabilidades, enquanto que para as distribuições restantes, as variações no parâmetro λ não provocam alterações nessas decisões.

Por outro lado, variações do parâmetro γ em intervalos menores provocam alterações significativas nas decisões tanto de primeiro estágio quanto de segundo estágio. Entretanto, os níveis de escassez e excesso de água nos reservatórios, nível de risco esperado e o custo total esperado são sensíveis às variações dos parâmetros de risco λ e γ . Assim, pode-se inferir que é importante determinar valores plausíveis para os parâmetros λ e γ para controlar o conflito existente entre o custo total esperado, a satisfação robusta e a medida de risco.

Os altos valores do EVPI e do VSS para as instâncias consideradas nesse trabalho justificam que o problema de programação de bombas com demanda estocástica é bastante influenciado pelas incertezas. Dessa forma, conjectura-se que qualquer abordagem para abolir as incertezas pode ser não adequada para aproximar o problema estocástico. Portanto, a consideração da demanda como parâmetro incerto é justificada pelos resultados destas medidas.

Capítulo 5

O Problema de Programação de Bombas com Demanda Estocástica e Custo Fixo

No Capítulo anterior foi apresentado um modelo de programação estocástica em que o custo de consumo de energia elétrica associado à ativação de bombas foi desconsiderado. Em algumas situações práticas, entretanto, as operações de ligar as bombas incorrem em gastos significativos de energia elétrica, assim como também em custos de manutenção associados ao desgaste das bombas (LANSEY; AWUMAH, 1994; TOLEDO et al., 2008). Nesses casos, é importante decidir em que períodos do horizonte de planejamento as bombas devem ser ligadas para minimizar os custos de consumo de energia e de manutenção de bombas, e evitar soluções intermitentes que dificulte a implementação da solução na prática. Para considerar essa decisão, este capítulo tem o objetivo principal propor um modelo de programação estocástica inteira mista 0 – 1 para o problema de programação de bombas em redes de abastecimento urbano, considerando a demanda de água uma variável aleatória. Tal modelo é uma extensão da versão determinística desenvolvida no trabalho Toledo et al. (2008).

5.1 Modelo Matemático para o Problema de Programação de Bombas com Custo Fixo e Demanda Estocástica

Para considerar de forma explícita o custo de consumo de energia elétrica associada às atividades de liga e desliga das bombas hidráulicas, é preciso definir variáveis de decisão adicionais do tipo 0 – 1. Então, seja Y_{jt} a variável de decisão binária que assume o valor de 1, se a bomba j é usada no período t , e 0, caso contrário. Desta forma, as variáveis X_{jt} e Y_{jt} podem ser relacionadas matematicamente pela expressão $X_{jt} \leq Y_{jt}$. A partir dessa relação é possível notar que, para $X_{jt} > 0$, a variável Y_{jt} é ativada, ou seja, se há captação de água (transferência entre poços e reservatórios), então a bomba precisa, necessariamente, ser usada. Observe que a expressão matemática $X_{jt} \leq Y_{jt}$ unicamente informa se a bomba j é usada ou não no período t , mas não se a mesma é ligada.

Para saber se a bomba j é ligada ou não no período t , deve-se conhecer o estado da bomba no período imediatamente anterior, i.e., o valor assumido pela variável de decisão $X_{j(t-1)}$. Seja Z_{jt} a variável binária que assume o valor de 1 se a bomba j é ligada no período t , e 0, caso contrário. Assim, a relação matemática que fornece a informação se a bomba j é ativada ou não no período t é $Z_{jt} \geq Y_{jt} - X_{j(t-1)}$. A partir dessa relação matemática, é possível notar que, se a variável binária Y_{jt} assume o valor de 1 e a bomba j não foi ligada durante todo o período imediatamente anterior, a variável Z_{jt} é ativada e, portanto, incorre-se aos custos de ativação de bombas β_{jt} . Uma vez que as variáveis adicionais Y_{jt} e Z_{jt} são definidas em função das variáveis de primeiro estágio X_{jt} , então, as mesmas também são assumidas como de primeiro estágio. As outras variáveis de decisão são de segundo estágio.

Assim, o modelo de programação estocástica de dois estágios com recurso para o problema de programação de bombas com custo fixo associados às operações de liga/desliga das bombas hidráulicas pode ser escrito da seguinte forma:

$$\min \quad \sum_{j \in \mathcal{R}} \sum_{t \in \mathcal{T}} \alpha_{jt} X_{jt} + \sum_{j \in \mathcal{R}} \sum_{t \in \mathcal{T}} \beta_{jt} Z_{jt} + \sum_{\omega \in \mathcal{W}} \mathcal{Q}[\mathcal{X}, \boldsymbol{\xi}] \quad (5.1)$$

$$\text{s.t.} \quad X_{jt} \leq Y_{jt}, \quad j \in \mathcal{R}, \quad t \in \mathcal{T} \quad (5.2)$$

$$Z_{jt} \geq Y_{jt} - X_{j(t-1)}, \quad j \in \mathcal{R}, \quad t \in \mathcal{T} \quad (5.3)$$

$$0 \leq X_{jt} \leq 1, \quad j \in \mathcal{R}, \quad t \in \mathcal{T} \quad (5.4)$$

$$Y_{jt} \in \{0, 1\}, \quad j \in \mathcal{R}, \quad t \in \mathcal{T} \quad (5.5)$$

$$Z_{jt} \in \{0, 1\}, \quad j \in \mathcal{R}, \quad t \in \mathcal{T}, \quad (5.6)$$

em que $\mathcal{Q}[\mathcal{X}, \boldsymbol{\xi}]$ é o valor ótimo do problema de segundo estágio (4.19) para cada $\omega \in \mathcal{W}$.

Uma vez que o problema de programação de bombas com custo fixo determinístico pertence à classe \mathcal{NP} (TOLEDO et al., 2008), conjectura-se que a versão de programação estocástica de dois estágios é, pelo menos, \mathcal{NP} . Isso significa que é improvável obter soluções de boa qualidade em um tempo computacional plausível. Testes preliminares indicaram que para $J = 3$ e $T = 720$ (30 dias de planejamento, considerando que a programação diária das bombas deve ser especificada nas 24 horas de cada dia) o *solver* comercial CPLEX 11.2 na plataforma GAMS (testes executados numa máquina PC Core i7 2.8 GHz, 8.0 GB RAM e sistema operacional Windows 7) não é capaz de fornecer uma solução factível em 2 horas de processamento. Assim, essa dissertação propôs uma extensão da heurística desenvolvida em (SOLER, 2008) para resolver o problema com múltiplos cenários.

Basicamente, a heurística consiste no desenvolvimento de um algoritmo híbrido de duas fases. As variáveis binárias são definidas na primeira fase a partir de uma heurística construtiva que percorre todos os períodos do horizonte de planejamento e “liga” as bombas nos períodos mais baratos. Definidas as variáveis de primeiro estágio, resta um problema de otimização linear com variáveis contínuas para ser resolvido na segunda fase. Na próxima seção, o algoritmo heurístico desenvolvido é detalhado.

5.2 Método de Solução para o Problema de Programação Bombas com Custo Fixo e Demanda Estocástica

Em geral, o método consiste em resolver o problema de primeiro estágio através de uma heurística construtiva. Uma vez resolvido este problema, os valores das variáveis de decisão associadas a esse problema são fixadas no problema de segundo estágio. Em seguida, métodos de programação matemática, e.g., *simplex* e pontos interiores, podem ser usados para resolver este último problema.

5.2.1 Heurística Construtiva (HC) para o Problema 0 – 1 de Primeiro Estágio

A HC que serviu como base para esse estudo foi desenvolvida no trabalho de Soler (2008) com o intuito de obter soluções do ambiente real do problema de programação de bombas determinístico de Toledo et al. (2008). Antes de explicar o desenvolvimento da HC, é necessário classificar os períodos do horizonte de planejamento como críticos, pré-críticos e não críticos. Os períodos críticos são aqueles em que o custo de consumo de energia elétrica neles é mais caro. No entanto, tais períodos são conhecidos *a priori* e são os períodos compreendidos entre às 18 e 21 h do dia. Dado um nível de vazamento de água nos reservatórios, θ , é oportuno definir em que períodos do horizonte é mais conveniente armazenar água para atender a demanda dos períodos críticos, evitando atividades de bombeamento nesses períodos, cujo custo de eletricidade é maior. Esses períodos são denominados de pré-críticos e eles antecedem aos períodos críticos. Finalmente, os períodos não classificados como críticos ou pré-críticos são definidos como não críticos.

Para cada tipo de período, existe uma estratégia operacional de bombeamento. Para os períodos não críticos, se o volume de água armazenado nos reservatórios no final do período t seja maior ou igual ao nível mínimo permitido, as bombas permanecerão desligadas. Caso contrário, são definidas duas estratégias, das quais escolher-se-á aquela que incorra em um menor custo:

- Atender a demanda a partir da ativação da bomba nesse período. Neste caso, se a bomba não estiver ligada durante todo o período imediatamente anterior, custos de

ativação de bombas são incorridos.

- Atender a demanda do período durante o último período precedente no qual a bomba estava ligada. Neste caso, custos de ativação de bombas não são incorridos, mas custos de eletricidade associados às perdas de água o são.

A estratégia operacional para os períodos pré-críticos consiste em manter as bombas ligadas enquanto a capacidade dos reservatórios não é atingida, a fim de armazenar água e atender a demanda dos períodos críticos. Finalmente, se a água acumulada nos reservatórios não for suficiente para atender a demanda dos períodos críticos, então se incorre às transferências de água entre reservatórios. Se ainda assim a demanda não for satisfeita, deve-se ligar a bomba o suficiente para atender a demanda. Caso a transferência de água entre reservatórios seja requerida, o custo de consumo de eletricidade entre cada par de reservatórios deve ser conhecido. Com isso, em cada decisão de transferência, escolhe-se o reservatório que incorra em um menor custo de eletricidade. O algoritmo de Floyd foi usado para determinar os custos de eletricidade entre cada par de reservatórios. Tal algoritmo determina o caminho mínimo entre todos os pares de nós de um grafo. O leitor interessado em se aprofundar sobre o funcionamento do algoritmo, recomenda-se ver Arenales et al. (2007). O algoritmo foi implementado no *software* MATLAB 2012a.

A HC proposta no trabalho da Soler (2008) pode ser explanada da seguinte forma: uma vez que os períodos do horizonte de planejamento tenham sido classificados como críticos, pré-críticos e não críticos, a heurística consiste em percorrer todos os períodos do horizonte e, dependendo do tipo de período, defini-se uma estratégia operacional de bombeamento de menor custo, de modo atender a demanda desse período. Para maiores detalhes dessa heurística, sugere-se ao leitor ver o trabalho de Soler (2008).

Na HC desenvolvida no trabalho de Soler (2008), a alternativa de atender a demanda por água dos períodos pré-críticos a partir dos períodos não críticos não é avaliada. Ao se avaliar essa alternativa, existe a possibilidade de que nos períodos pré-críticos, maiores volumes de água sejam armazenados nos reservatórios. Com isso, atividades extras de bombeamento para atender a demanda por água dos períodos críticos são evitadas. Tal alternativa foi incorporada na heurística construtiva desenvolvida nesta dissertação da seguinte maneira: os períodos pré-críticos são percorridos e analisados como se fossem não críticos. Desse modo, as estratégias operacionais destes últimos períodos são avaliadas nos pré-críticos. O percorrimento é realizado até que a estratégia relacionada ao atendimento

da demanda a partir da ativação de bomba no período em análise (estratégia 1) for mais barata em detrimento à estratégia de atender a demanda durante o último período precedente no qual a bomba estava ligada (estratégia 2). Uma vez que a estratégia 1 tenha sido selecionada, deve-se retornar ao primeiro período pré-crítico e realizar a estratégia correspondente a esse período. Com essa alternativa, os testes preliminares indicaram uma melhoria no *gap* de otimalidade da heurística em torno de 5% em relação à proposta original de Soler (2008).

Uma vez que a HC foi desenhada para definir a melhor política de ativação de bombas para uma única realização da demanda (problema com demanda por água determinística), esta não pode ser usada diretamente no problema com múltiplas realizações da demanda. Por essa razão, é necessário desenvolver uma estratégia para abolir as incertezas no problema do segundo estágio. Por exemplo, é possível utilizar cenários de melhor caso, de valor esperado e/ou de pior caso para “aproximar” o problema estocástico, assim como o problema EEV. Dada uma distribuição discreta de probabilidade de uma variável aleatória ξ ; (1) o cenário de melhor caso corresponde à realização cujo valor $\xi(\omega)$ é o mínimo de todas as realizações; (2) o cenário de valor esperado corresponde à média ponderada baseada em todos os valores das realizações, i.e., $\bar{\xi} = \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega)\xi(\omega)$; (3) finalmente, a realização $\xi(\omega)$ cujo valor é superior ao valor das realizações restantes corresponde ao cenário de pior caso. Nesta dissertação, as três estratégias foram utilizadas nos testes computacionais com o intuito de determinar aquela de melhor desempenho para resolver o problema de primeiro estágio.

5.2.2 Solução do Problema Linear de Segundo Estágio

Em programação estocástica, o número de linhas e colunas da matriz tecnológica cresce significativamente com o número cenários, fazendo com que a forma equivalente determinística dos problemas seja, frequentemente, um problema de otimização de grande porte e a matriz tecnológica, bastante esparsa. Uma forma de melhorar a eficiência dos métodos de programação linear para os problemas de programação estocástica é usar técnicas que exploram a esparsidade da matriz, por exemplo, métodos do tipo barreira. Tal método gera uma sequência de soluções primal e dual estritamente positivas para um problema e termina quando o *gap* dessas soluções está dentro de um limite de tolerância pré-determinado. Se a solução encontrada pelo método barreira não é a ótima, um proce-

dimento denominado *crossover* pode ser realizado. Este procedimento consiste em aplicar o método *simplex*, a partir da solução básica factível encontrada no método de barreira, para então determinar a solução ótima do problema.

Para definir o método de programação linear a usar na resolução do problema de segundo estágio, é necessário investigar se a matriz de restrições do problema estocástico com custo fixo é esparsa ou não. A Tabela 5.1 apresenta, para cada combinação dos fatores, horizonte e número de cenários, a dimensão do modelo associado em relação ao número de restrições (m), ao número de variáveis contínuas (nc), ao número de variáveis discretas (nd) e ao número de elementos diferentes de zeros (ndz) na matriz de coeficientes tecnológicos. Com isso, pode-se determinar a densidade da matriz tecnológica ($Denem\%$) da seguinte maneira: (1) obtenha o número de variáveis totais pela soma do número de variáveis contínuas e discretas; (2) determine o número de elementos da matriz tecnológica como o produto entre o número variáveis totais e número de restrições; e (3) finalmente, calcule a densidade como a fração entre o número de elementos diferentes de zeros e o número de elementos da matriz de coeficientes tecnológicos.

Tabela 5.1: Características da matriz tecnológica do PSP estocástico com custo fixo.

Horizonte	Cenários	m	nc	nd	ndz	$Den(\%)$
2	27	4204	17689	288	184123	0,248
	64	9569	41332	288	889713	0,225
	125	18414	80311	288	3200759	0,216
7	27	14644	60889	1008	643483	0,072
	64	33329	14252	1008	3111753	0,067
	125	64134	276391	1008	11198279	0,063
30	27	62668	259609	4320	2756539	0,019
	64	142625	606484	4320	13333140	0,015
	125	274446	1178359	4320	47986870	0,014

A partir da Tabela 5.1, é possível notar como o número de variáveis e restrições do problema aumenta com o tamanho do horizonte, $|\mathcal{T}|$, e o número de cenários, $|\mathcal{W}|$. Da mesma tabela, pode-se inferir que, independente da combinação dos fatores, horizonte e número de cenários, a matriz de coeficiente associada pode ser considerada esparsa, pois a sua densidade é bastante baixa. Desta forma, optou-se pela utilização do método de barreira como metodologia de solução do problema de segundo estágio. A fim de evitar que o método *simplex* seja executado no final do algoritmo de barreira, o *crossover* foi desativado. Assim, a solução do problema foi unicamente encontrada pelo método de barreira.

A metodologia de solução desenvolvida nesta dissertação é sintetizada na Figura 5.1. Tal metodologia de solução é denominada heurística híbrida uma vez que combina métodos heurísticos e métodos exatos de programação linear. Uma vez definida a estratégia para aproximar as incertezas do problema de segundo estágio, a partir da Figura 5.1 é possível notar que, as variáveis de primeiro estágio são definidas através de uma heurística construtiva, logo ao fixar os valores dessas variáveis no modelo de programação estocástica, o método de barreira sem *crossover* é usado para resolver o modelo linear resultante. Convém salientar que E1 corresponde à estratégia operacional 1 dos períodos não críticos.

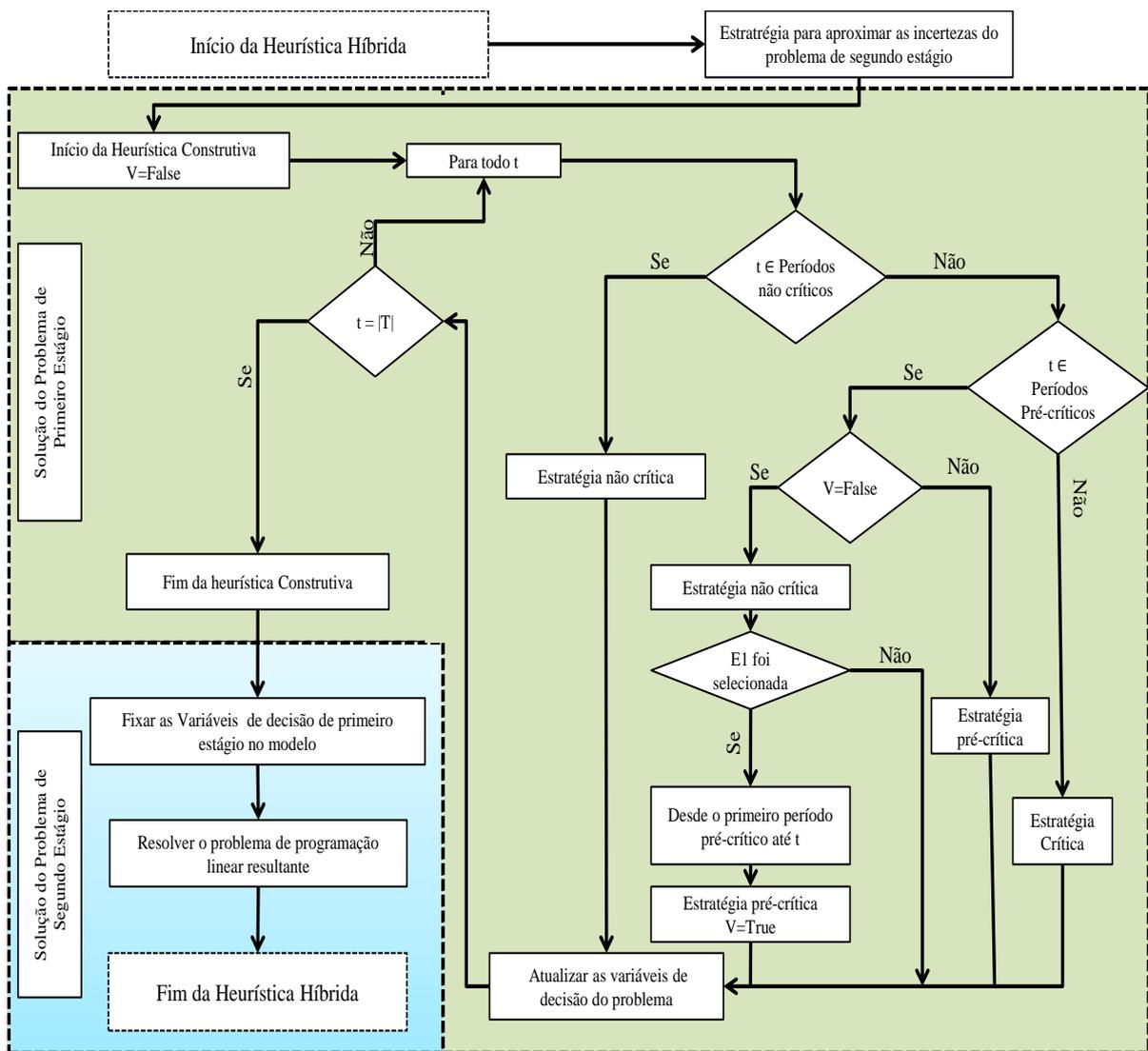


Figura 5.1: Fluxograma da heurística híbrida proposta para resolver o PSP com custo fixo e demanda estocástica.

5.3 Resultados Computacionais

Nesta seção, são apresentados os resultados computacionais referentes ao desempenho da metodologia de solução desenvolvida na presente dissertação. Tais resultados tiveram o objetivo de: (1) Investigar se a forma em que são atribuídas as probabilidades aos cenários influem no valor ótimo dos custos esperados e das decisões de primeiro e segundo estágio; (2) Analisar as decisões de primeiro e segundo estágio para obter *insights* que sejam úteis na prática; (3) Determinar a sensibilidade do custo total esperado e das variáveis de decisão em relação a variações crescentes dos parâmetros λ e γ ; (4) Determinar o impacto das incertezas no problema de programação de bombas com custo fixo pelo cálculo do EVPI e VSS e (5) Avaliar o desempenho da heurística híbrida (HB) tanto em qualidade da solução quanto na eficiência computacional em relação ao *solver* CPLEX 11.2. A heurística híbrida foi codificada no Sistema de Modelagem Algébrica GAMS e resolvida pelo *software* CPLEX 11.2, usando-se o método de barreira sem *crossover* para resolver os problemas lineares. Os detalhes do ambiente computacional podem ser vistos na Seção 4.6.

Para fins de análise, considerou-se o mesmo sistema de abastecimento de água abordado na Seção 4.1. No entanto, um custo de 1 u.m. foi atribuído para o custo fixo de ativação de bombas, uma vez que este valor é suficiente para impedir soluções intermitentes. Os resultados deste capítulo foram baseados na distribuição de probabilidade uniforme ou situação equiprovável, mas os resultados para as outras distribuições ou situações são similares. Testes computacionais preliminares sugerem que os intervalos de variação dos parâmetros λ , γ e ρ são $[0, 00; 0, 05]$, $[0, 000; 0, 075]$ e $[0; 50]$, respectivamente. Neste estudo, o *gap* de otimalidade foi determinado com base na relaxação linear do problema em análise.

5.3.1 Efeitos das Probabilidades no modelo do PSP com custo fixo e demanda estocástica

Análises de variância (ANOVA) foram realizados com o intuito de determinar se existe diferença estatisticamente significativas em resolver o modelo de programação estocástica com restrições de satisfação robusta e aversão ao risco com cada uma das quatro distribuições de probabilidade consideradas para descrever a variável aleatória do problema.

As variáveis de respostas das ANOVAs correspondem aos seguintes atributos: (1) O valor da função objetivo; (2) As variáveis de primeiro estágio X_{jt} , Y_{jt} e Z_{jt} ; (3) As variáveis de segundo estágio $I_{jt}(\omega)$ e $V_{j\ell t}(\omega)$; e (4) As variáveis auxiliares $\mathcal{E}_{jt}^-(\omega)$ and $\mathcal{E}_{jt}^+(\omega)$.

Tabela 5.2: Resultados em média das ANOVAS para 10 instâncias da classe 2/27/0%. .

	Valor Objetivo	X_{jt}	Y_{jt}	Z_{jt}	$I_{jt}(\omega)$	$V_{j\ell t}(\omega)$	$\mathcal{E}_{jt}^+(\omega)$	$\mathcal{E}_{jt}^-(\omega)$
p -value	0.00021	0.1683	0.2919	0.2919	0.00055	0.00360	0.00010	0.00015

Os valores descritos na Tabela 5.2 ilustram que as distribuições de probabilidades usadas no método de geração de cenários não proporcionam efeitos estatisticamente significativas em relação às variáveis de primeiro estágio ao nível de confiança 95% (p -valores entre 0.1683 e 0.2919). A vantagem prática desses resultados reside essencialmente no fato de que a informação imprecisa sobre as demandas não causa graves perturbações nas atividades implementáveis de programação de bombas, que na maioria dos casos devem ser tomadas antes da realização da demanda.

Em contrapartida, como era de se esperar, a forma em que as probabilidades dos cenários são atribuídas resulta em variações significativas no valor ótimo da função objetivo e nas variáveis de decisão de segundo estágio (p -valores entre 0.0001 e 0.0036). Portanto, é necessário ter cuidado na escolha da distribuição de probabilidade que será utilizada para representar as variáveis aleatórias. Por uma questão de brevidade, os próximos resultados computacionais são baseados na distribuição uniforme ou situação equiprovável, no entanto, tais resultados para as distribuições restantes são similares.

5.3.2 Análises das Políticas de Primeiro e Segundo estágio

Esta subseção descreve de forma sucinta o comportamento das políticas relacionadas a: (1) Captação de água a partir dos poços (X_{jt}); (2) Ativação de bombas (Z_{jt}); (3) Transferência de água entre os reservatórios ($V_{j\ell t}(\omega)$); e (4) Armazenamento de água nos reservatórios ($I_{jt}(\omega)$).

Políticas de Captação de Água: Quando não existe perda de água na rede, independente do número de períodos e cenários, durante os períodos críticos, ou não existe captação de água ou volumes baixos de água são captados dos poços. Consequentemente, as bombas hidráulicas não são operadas ou são operadas em uma pequena fração dos períodos críticos, reduzindo assim o custo de consumo de energia elétrica. Em contrapartida,

quando existe perda de água na rede, i.e., para as classes $|\mathcal{T}|/|\mathcal{W}|/10\%$ e $|\mathcal{T}|/|\mathcal{W}|/20\%$, os resultados indicam que é mais barato atender a demanda de água durante os períodos críticos com a água captada dos poços durante esses períodos do que com a água armazenada nos reservatórios durante períodos anteriores.

Políticas de Ativação de Bombas: Embora exista captação de água durante os períodos críticos, as bombas hidráulicas não necessariamente tem que ser ligadas para realizar tal captação, pois isso depende do estado das bombas no período imediatamente anterior. Os resultados revelam que, independente da classe $|\mathcal{T}|/|\mathcal{W}|/0\%$, durante os períodos críticos, as bombas permanecem em operação na maior parte do tempo, evitando assim os custos fixos de operação de bombas (see Figures 5.2). Adicionalmente, a frequência de ativação de bombas diária permanece constante conforme o número de períodos e cenários aumenta. Em contrapartida, a frequência de ativação de bombas aumenta significativamente conforme o nível de perda de água aumenta. Por exemplo, a frequência de ativação da bomba 1 incrementa de 7 (em $\theta = 0$) para 21 (em $\theta = 10\%$), chegando a 23 ativações para $\theta = 20\%$. Desde a perspectiva prática, a vantagem de se usar variáveis binárias para definir tais decisões reside na relativa facilidade da implementação do programa de ativação de bombas por qualquer operador do sistema, pois basta analisar a frequência de ativação de bombas e a fração do intervalo de tempo em que as bombas serão mantidas ligadas. É claro que um *software* com uma interface amigável deve ser necessário para essa tarefa.

Políticas de transferência de água entre os reservatórios: Independente da classe, o volume de água transferido entre reservatórios exibe um comportamento similar. O reservatório de maior capacidade (reservatório 1) transfere água para o reservatório 2. Parte da água transferida para o reservatório 2 é usada para atender parte da demanda desse reservatório e o volume de água restante é transferido para o reservatório 3. Da Figura 4.1 é possível notar que uma vez o reservatório 1 não tem ligação direta com o reservatório 3, a água deve necessariamente passar pelo reservatório 2. Finalmente, é importante mencionar que o volume de água a ser transferido entre os reservatórios diminui conforme o nível de perda de água aumenta (see Table 5.3), com isso a perda de água na rede é mitigada.

Volumes de água armazenados nos reservatórios: Como mostrado na Figura 5.3, a água armazenada em cada reservatório ao final de cada hora durante os pe-

ríodos de programação apresenta um comportamento similar. Em geral, os reservatórios armazenam um volume adequado de água nos períodos anteriores aos períodos críticos para atender parte da demanda destes últimos períodos. Assim, as bombas hidráulicas não são operados ou são operadas por um curto período de tempo durante os períodos críticos. No entanto, o volume de água armazenado nos reservatórios varia acorde ao nível de perda de água na rede. Por exemplo, quando não existe perda de água na rede, i.e., para as classes $|\mathcal{T}|/|\mathcal{W}|/0\%$, altos volumes de água são armazenados nos reservatórios. Em contrapartida, baixos volumes de água são armazenados nos reservatórios durante os períodos precedentes aos períodos críticos, quando um nível de perda de água na rede é atribuído. Em tais casos, a solução é manter níveis de água nos reservatórios próximos a sua capacidade mínima, tal que a perda de água na rede possa ser minimizada

5.3.3 Sensibilidade da Solução e do Modelo conforme os Parâmetros λ e γ aumentam

Essa subseção investiga a sensibilidade do valor da função objetivo e das variáveis de decisão de segundo estágio conforme λ e γ variam. Por simplicidade, unicamente os resultados de uma instância da classe 7/64/10% serão apresentados. Testes computacionais preliminares sugerem que λ e γ variam no intervalo $[0, 0.05]$ e $[0, 0.075]$, respectivamente. As Tabelas 5.4 e 5.5 apresentam os principais resultados, considerando o valor objetivo; preço à robustez, definida como a diferença relativa entre o valor objetivo para $\gamma = 0$ ($\lambda = 0$) e o valor da função objetivo para os problemas robustos (avesso ao risco); volume de água transferido $V = \sum_{jlt\omega} \pi(\omega) V_{jlt}(\omega)$; volume de água armazenado nos reservatórios $I = \sum_{jt\omega} \pi(\omega) I_{jt}(\omega)$; desvio positivo total $\Delta^+ = \sum_{\omega} \pi(\omega) \Delta(\omega)^+$; desvio negativo total $\Delta^- = \sum_{\omega} \pi(\omega) \Delta(\omega)^-$; excesso de água total nos reservatórios $\mathcal{E}^+ = \sum_{j\omega t} \pi(\omega) \mathcal{E}_{jt}(\omega)^+$; falta de água total nos reservatórios $\mathcal{E}^- = \sum_{j\omega t} \pi(\omega) \mathcal{E}_{jt}(\omega)^-$; e a redução relativa correspondente às violações (desvios) conforme γ (λ) aumentam.

As observações baseadas na Tabela 5.4 e na Figura 5.4 são sintetizadas a seguir: Como era de se esperar, conforme γ aumenta ao passo de 0.00375 no intervalo $[0, 0.0750]$, o custo total esperado aumenta, mas os excessos/falta de água nos reservatórios diminuem. Para $\gamma = 0$, devido à minimização do custo total esperado, volumes de água não são captados dos poços e, conseqüentemente, o excesso e a falta de água armazenados nos reservatórios são maximizados. Note que essa solução é inútil na prática. Quando γ

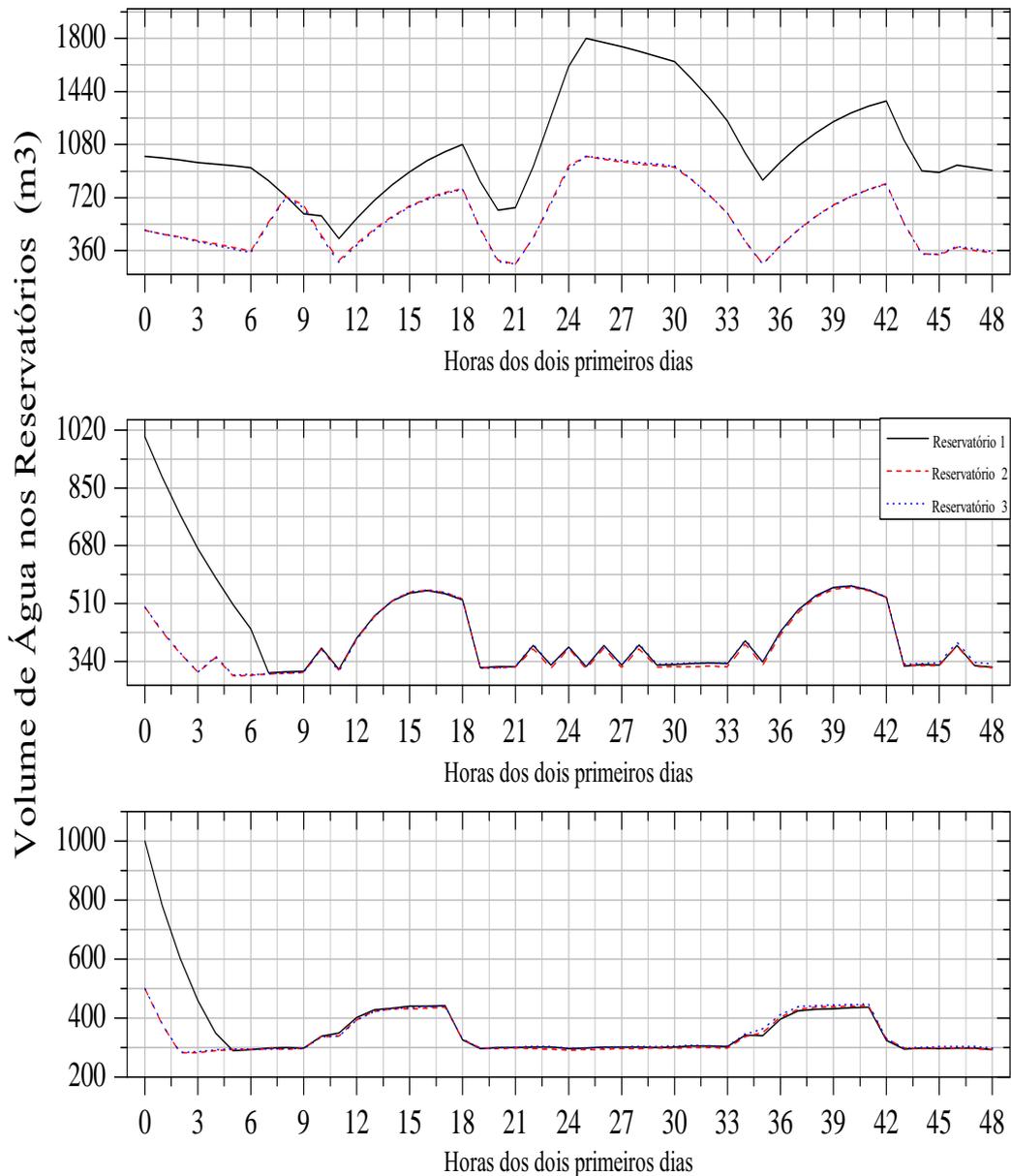


Figura 5.3: Volume de água armazenada nos reservatórios (em m^3) durante os períodos de planejamento para uma instância das classes 2/27/0% (gráfico superior), 2/27/10% (gráfico centar) and 2/27/20% (gráfico inferior).

aumenta de 0 para 0.00375, existe uma redução significativa nas violações totais, $\approx 98\%$, à custa de um pequeno aumento no custo total esperado de 2%. Posteriormente, o preço de robustez aumenta substancialmente, chegando a 20% para $\gamma = 0,0675$, embora sem levar a uma melhoria significativa do excesso ou escassez de água. Conforme o parâmetro de robustez γ aumenta, existe uma clara tendência em ambas decisões referentes ao volume de água armazenados nos reservatórios e ao volume de água transferidos entre os

reservatórios como uma forma de reduzir o número de violações. A partir de $\gamma = 0.03375$, o volume de água transferido aumenta por mais de 27% e o volume de água armazenado nos reservatórios aumentam em quase 29% comparado com a primeira solução útil para $\gamma = 0.00375$.

A partir da Tabela 5.5 e da Figura 5.5, note que há um claro fenômeno de transição de três fases conforme a solução se torna mais avessa ao risco. Na primeira fase, de 0 a 0.0075, os desvios positivos e negativos são insesíveis para λ , mas o valor objetivo aumenta consequentemente. Na segunda fase, de 0.01 a 0.045, os desvios são altamente reduzidas - em torno de 81% a um preço negligenciável inferior a 0.5% no valor objetivo. Adicionalmente, as atividades de transferências de água aumentam, aproximadamente, em um 88%. Finalmente, na terceira fase, os desvios diminuem cerca de 100% sem resultar em aumentos consideráveis nos custos, mas o volume de água transferido continua aumentando em um ratio de três vezes maior do que na segunda fase.

Tabela 5.4: Resultados de uma instância da classe 7/64/10% para γ variando no intervalo $[0; 0, 075]$ e para um valor fixo de λ igual a 0,05.

γ	Valor	Objetivo	Preço (%)	V	I	Δ^+	Δ^-	\mathcal{E}^+	\mathcal{E}^+ Red. (%)	\mathcal{E}^-	\mathcal{E}^- Red. (%)
0.00000	9,489		-	0.00	141,270	0.0000	0.0000	5,796	-	21,630	-
0.00375	9,645	1,644	1.644	16.35	182,191	0.0000	0.0000	150.2	97.41	422.1	98.05
0.00750	9,751	2,761	2.761	17.10	182,103	0.0000	0.0000	147.9	97.45	415.2	98.08
0.01125	9,857	3,878	3.878	17.31	182,091	0.0000	0.0000	147.6	97.45	414.3	98.08
0.01500	9,962	4,985	4.985	17.75	182,071	0.0000	0.0000	145.5	97.49	414.2	98.09
0.01875	10,067	6,091	6.091	17.86	182,067	0.0000	0.0000	145.2	97.49	414.1	98.09
0.02250	10,172	7,198	7.198	17.99	182,064	0.0000	0.0000	145.0	97.50	414.0	98.09
0.02625	10,276	8,294	8.294	18.26	182,057	0.0000	0.0000	144.5	97.51	413.8	98.09
0.03000	10,381	9,400	9.400	18.62	182,050	0.0000	0.0000	144.3	97.51	413.3	98.09
0.03375	10,484	10,49	10.49	27.46	181,890	0.0000	0.0000	144.3	97.51	396.6	98.17
0.03750	10,585	11,55	11.55	27.46	181,878	0.1800	0.0800	144.2	97.51	395.4	98.17
0.04125	10,686	12,61	12.61	27.46	181,878	0.1800	0.0800	144.2	97.51	395.4	98.17
0.04500	10,788	13,69	13.69	27.46	181,878	0.1800	0.0800	144.2	97.51	395.4	98.17
0.04875	10,889	14,75	14.75	27.46	181,878	0.1800	0.0800	144.2	97.51	395.4	98.17
0.05250	10,990	15,82	15.82	27.46	181,878	0.1800	0.0800	144.2	97.51	395.4	98.17
0.05625	11,091	16,88	16.88	27.46	181,878	0.1800	0.0800	144.2	97.51	395.4	98.17
0.06000	11,192	17,95	17.95	27.46	181,878	0.1800	0.0800	144.2	97.51	395.4	98.17
0.06375	11,293	19,01	19.01	27.46	181,878	0.1800	0.0800	144.2	97.51	395.4	98.17
0.06750	11,395	20,09	20.09	27.46	181,878	0.1800	0.0800	144.2	97.51	395.4	98.17
0.07125	11,496	21,15	21.15	27.46	181,878	0.1800	0.0800	144.2	97.51	395.4	98.17
0.07500	11,597	22,22	22.22	27.46	181,877	0.1800	0.0800	144.2	97.51	395.4	98.17

Tabela 5.5: Resultados de uma instância da classe 7/64/10% para λ variando no intervalo $[0; 0,050]$ e para um valor fixo de γ igual a 0,075.

λ	Valo	Objetivo	Preço (%)	V	I	Δ^+	Δ^+ Red. (%)	Δ^-	Δ^- Red. (%)	\mathcal{E}^+	\mathcal{E}^-
0.0000	11,541	-	-	9.640	181,877	15.26	-	5.380	-	144.1	395.5
0.0025	11,550	0.0780	0.0780	9.640	181,877	15.26	0.000	5.380	0.000	144.1	395.5
0.0050	11,559	0.1560	0.1560	9.640	181,877	15.26	0.000	5.380	0.000	144.1	395.5
0.0075	11,567	0.2253	0.2253	9.640	181,877	15.26	0.000	5.380	0.000	144.1	395.5
0.0100	11,572	0.2686	0.2686	16.90	181,877	3.850	74.77	1.450	73.05	144.1	395.5
0.0125	11,574	0.2859	0.2859	17.10	181,877	3.600	76.41	1.360	74.72	144.1	395.5
0.0150	11,576	0.3033	0.3033	17.31	181,877	3.410	77.65	1.290	76.02	144.1	395.5
0.0175	11,578	0.3206	0.3206	17.75	181,877	3.100	79.69	1.150	78.62	144.1	395.5
0.0200	11,580	0.3379	0.3379	17.86	181,877	3.020	80.21	1.120	79.18	144.1	395.5
0.0225	11,582	0.3553	0.3553	18.24	181,878	2.700	82.31	1.070	80.11	144.1	395.5
0.0250	11,583	0.3639	0.3639	18.24	181,878	2.700	82.31	1.070	80.11	144.2	395.5
0.0275	11,585	0.3812	0.3812	18.26	181,878	2.700	82.31	1.060	80.30	144.2	395.5
0.0300	11,586	0.3899	0.3899	18.31	181,878	2.680	82.44	1.040	80.67	144.2	395.5
0.0325	11,588	0.4072	0.4072	18.34	181,878	2.670	82.50	1.030	80.86	144.2	395.5
0.0350	11,590	0.4246	0.4246	18.34	181,878	2.670	82.50	1.030	80.86	144.2	395.5
0.0375	11,591	0.4332	0.4332	18.53	181,878	2.650	82.63	0.960	82.16	144.2	395.5
0.0400	11,593	0.4506	0.4506	18.62	181,878	2.630	82.77	0.950	82.34	144.2	395.5
0.0425	11,594	0.4592	0.4592	19.11	181,877	2.500	83.62	0.890	83.46	144.2	395.4
0.0450	11,596	0.4766	0.4766	19.11	181,877	2.500	83.62	0.890	83.46	144.2	395.4
0.0475	11,597	0.4852	0.4852	27.46	181,877	0.180	98.82	0.080	98.51	144.2	395.4
0.0500	11,597	0.4852	0.4852	27.46	181,877	0.180	98.82	0.080	98.51	144.2	395.4

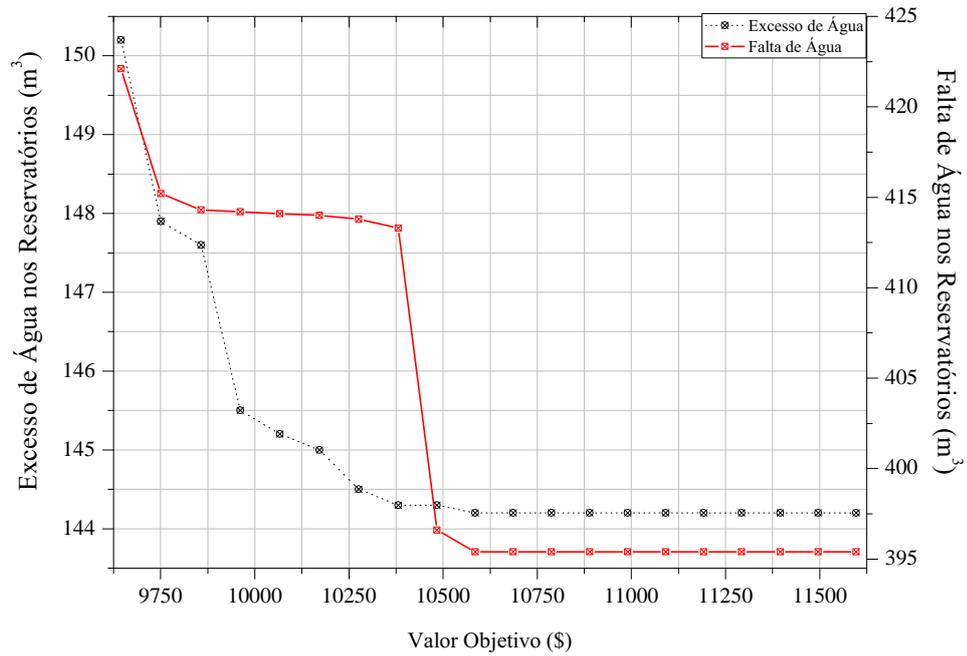


Figura 5.4: *trade-off* entre o custo total esperado e os excessos e/ou faltas de água nos reservatórios conforme a variações crescentes do parâmetro γ e para um valor fixo de $\lambda = 0.05$.

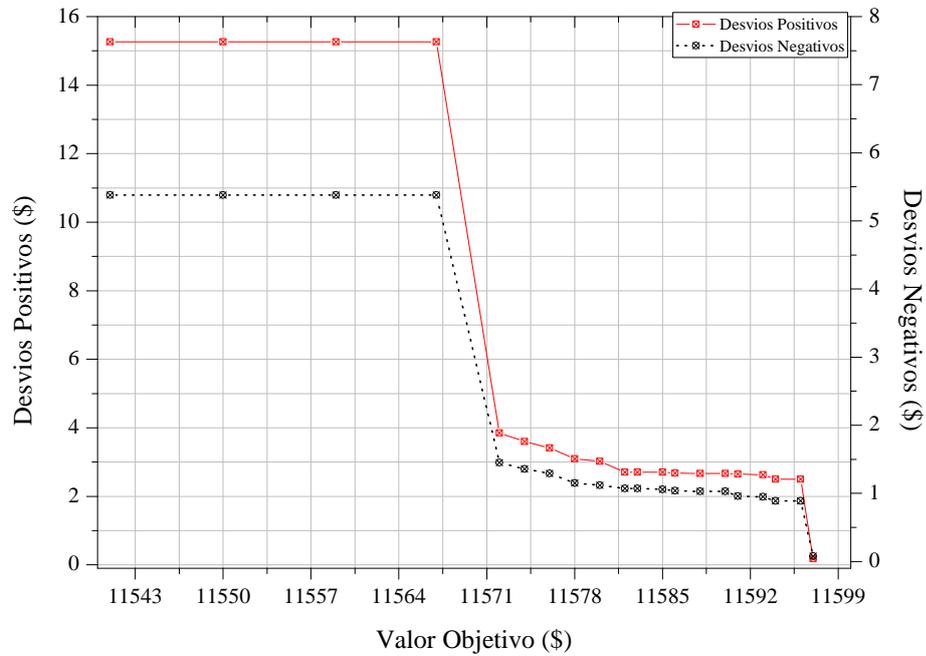


Figura 5.5: *trade-off* entre o custo total esperado e os desvios positivos e negativos conforme a variações crescentes do parâmetro λ e para um valor fixo de $\gamma = 0.075$.

5.3.4 Valor Esperado de Informação Perfeita e Valor da Solução Estocástica

Para apresentar os valores do EVPI e VSS, 10 instâncias para cada uma das classes do problema em estudo foram resolvidas. A Tabela 5.6 apresenta os valores médios da solução RP, solução WS, absolutos do EVPI, relativos do EVPI $EVPI\% = (EVPI/RP) \times 100\%$, solução EV, solução EEV, absolutos do VSS e relativos do VSS $VSS\% = (VSS/RP) \times 100\%$ para cada classe. Os resultados do EVPI indicam que seria possível economizar somas consideráveis de dinheiro – em média, 6,631, ou 33.33% – se a informação perfeita sobre os parâmetros aleatórios são conhecidos quando o problema é resolvido. Além disso, os resultados sugerem que, conforme o número de períodos e cenários aumenta, a aleatoriedade desempenha um papel muito importante no problema de programação de bombas em redes urbanas.

A análise dos problemas *wait-and-see* indicam que, em geral, as economias mais significativas obtidas por resolver o problema com informação perfeita são dadas pelos custos de captação de água ($\approx 65\%$), seguida pelos custos fixos de ativação de bombas ($\approx 20\%$) e, finalmente, pelos custos de transferência de água entre reservatórios ($\approx 5\%$). O restante das economias nos custos é produto das penalidades relacionadas a excesso/escassez.

Embora a solução do problema de primeiro estágio do problema EEV gera menores custos de captação de água e de ativação de bombas comparados com o problema RP, tal solução do problema de primeiro estágio do problema EEV não consegue atender todas as possíveis realizações da demanda por água. Isso leva a que o problema de segundo estágio do problema EEV seja altamente infactível e, portanto, os custos associados às penalidades cresçam em um ratio considerável ($\approx 75\%$). O restante ($\approx 25\%$) está relacionado ao custo de transferência de água entre os reservatórios.

Em relação ao VSS, é possível ter um indicio do ganho adicional obtido em média, 3.195 ou 14.13% - pela solução do problema estocástico em vez de adotar uma estratégia para abolir as incertezas. Nesse caso, pode-se dizer que ganhos significativos são alcançados uma vez que altos valores do VSS e VSS% foram obtidos. Portanto, é mais pertinente resolver o problema pela consideração das incertezas inerentes do que adotar a solução aproximada do problema EV.

Tabela 5.6: Average values of EVPI and VSS.

Class	$ \mathcal{T} / \mathcal{N} /\theta$	RP	WS	EVPI	EVPI%	EV	EEV	VSS	VSS%
1	2/27/0	1,918	1,392	526.5	27.45	1,250	2,262	343.8	15.20
2	2/27/10	2,756	1,824	932.2	33.82	1,530	3,289	532.1	16.18
3	2/27/20	2,767	1,825	942.1	34.05	1,856	3,320	553.1	16.66
4	2/64/0	2,658	2,171	486.9	18.32	1,256	3,170	511.9	16.15
5	2/64/10	2,776	1,826	949.2	34.20	1,540	3,311	535.4	16.17
6	2/64/20	3,310	2,053	1,257	37.97	1,861	3,748	438.1	11.69
7	2/125/0	3,325	2,244	1,081	32.50	1,259	3,919	594.1	15.16
8	2/125/10	3,336	2,052	1,284	38.48	1,545	3,788	451.5	11.92
9	2/125/20	3,341	2,052	1,289	38.57	1,858	3,788	447.0	11.80
10	7/27/0	9,845	7,138	2,707	27.50	5,560	11,205	1,360	12.14
11	7/27/10	9,909	6,696	3,214	32.43	5,568	11,901	1,992	16.74
12	7/27/20	9,942	6,696	3,246	32.65	5,570	11,926	1,984	16.64
13	7/64/0	9,752	6,290	3,462	35.50	5,562	11,294	1,542	13.65
14	7/64/10	9,868	6,696	3,172	32.14	5,569	11,856	1,988	16.77
15	7/64/20	11,800	7,418	4,383	37.14	5,572	13,477	1,677	12.44
16	7/125/0	10,568	7,863	2,705	25.60	5,558	11,801	1,233	10.45
17	7/125/10	11,844	7,415	4,428	37.39	5,564	13,534	1,690	12.49
18	7/125/20	11,897	7,421	4,476	37.62	5,571	13,525	1,628	12.04
19	30/27/0	36,890	24,274	12,616	34.20	20,550	41,712	4,822	11.56
20	30/27/10	42,580	29,099	13,481	31.66	20,567	51,080	8,500	16.64
21	30/27/20	42,785	29,102	13,683	31.98	20,630	51,560	8,776	17.02
22	30/64/0	38,980	26,000	12,980	33.30	20,558	44,472	5,492	12.35
23	30/64/10	42,905	29,102	13,803	32.17	20,570	51,537	8,633	16.75
24	30/64/20	50,764	32,098	18,666	36.77	20,680	58,082	7,318	12.60
25	30/125/0	47,515	32,263	15,252	32.10	20,561	56,337	8,822	15.66
26	30/125/10	51,025	32,100	18,925	37.09	20,572	58,300	7,276	12.48
27	30/125/20	51,191	32,107	19,084	37.28	20,578	58,324	7,133	12.23

5.3.5 Desempenho da Heurística Híbrida

A técnica de perfil de desempenho proposta por Dolan e More (2002) foi usada para comparar as soluções dadas pela heurística híbrida (HB) proposta com as obtidas pelo *solver* comercial CPLEX 12.3 (MIP). A grosso modo, um perfil de desempenho de um *solver* pode ser definida como a função de distribuição acumulada para uma dada métrica de desempenho. O desempenho das estratégias HB e MIP foram avaliadas e comparadas em base na métrica *gap* de otimalidade. O critério de parada para ambas estratégias foi um tempo de execução de 3600 segundos. Se uma das estratégias não encontrou uma solução para um determinado problema durante esse tempo, diz-se que a estratégia falhou na resolução desse problema.

Na Figura 5.6, tem-se um gráfico do perfil de desempenho das duas estratégias de solução em relação ao *gap*. Para a confecção desse gráfico, 270 instâncias do problema em estudo foram resolvidas para cada uma das estratégias e, posteriormente, os perfis de

desempenho foram desenhados. As 270 instâncias foram obtidas a partir de resolução de 10 exemplares do problema para cada uma das 27 classes discriminadas por $|\mathcal{T}|/|\mathcal{W}|/\theta$.

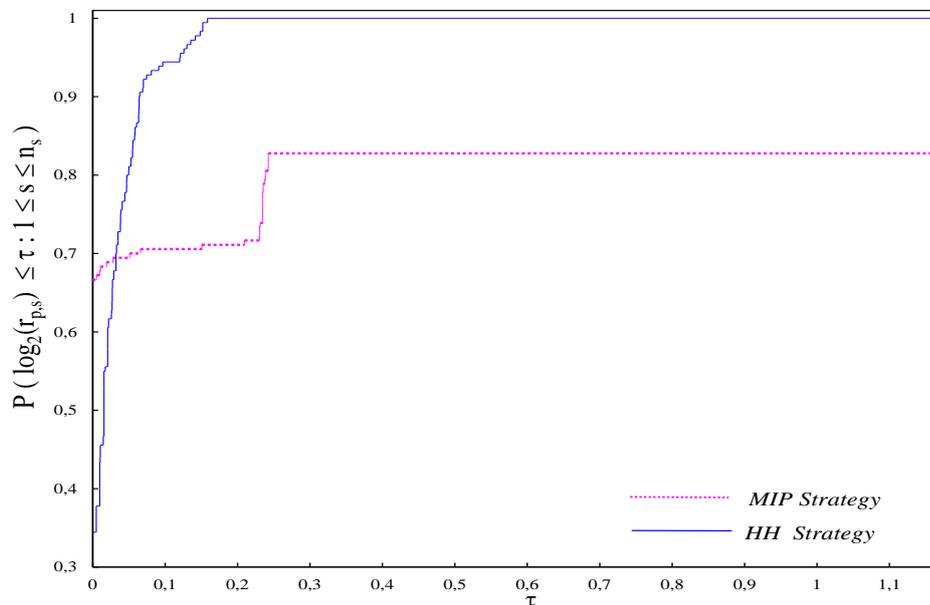


Figura 5.6: Perfil de desempenho sobre 270 instâncias das duas estratégias de solução em relação ao *gap* de otimalidade.

A partir da Figura 5.6, observa-se que a curva do perfil de desempenho da estratégia MIP obteve o melhor desempenho em relação à estratégia HB em quase 66% dos problemas ($\tau = 0$). No entanto, essa estratégia não conseguiu resolver todos os problemas uma vez que a curva de desempenho não atingiu o valor de 1 para $\tau \in [0, r_M]$. A estratégia MIP resolveu o $\approx 82\%$ dos problemas, o qual significa que a probabilidade da estratégia MIP determinar uma solução é 82%. Entretanto, a estratégia HB conseguiu resolver todos os problemas, dado que a curva de seu perfil de desempenho atingiu o valor de 1, como pode ser notado para um τ próximo de 0,15. Desta forma, pode-se inferir que a estratégia HB foi capaz de resolver cada um dos problemas, dentro de um fator próximo de $2^{0,15}$ do melhor desempenho das estratégias.

Convém salientar que a curva da distribuição acumulada relacionada à métrica tempo de execução do algoritmo não foi possível desenhar, uma vez que as diferenças entre os tempos para encontrar uma solução factível por ambas estratégias foram significativamente grandes. A Tabela 5.7 apresenta, para cada uma das classes consideradas neste trabalho, os tempos médios para encontrar uma solução factível por parte das estratégias

MIP e HB. O símbolo “–” na tabela indica que uma solução factível não foi encontrada depois de um tempo de execução de 3600 segundos. Para as instâncias em que a estratégia MIP conseguiu encontrar uma solução factível, o tempo de execução do algoritmo para encontrar tal solução foi excessivamente alto em relação à estratégia HB que tardou, em média, 15 segundos para encontrar uma solução. Note que não unicamente o aumento no número de períodos e de cenários deterioram o desempenho de ambas estratégias (como era de esperar-se), mas o nível de perda de água na rede também. A partir desses resultados, a heurística híbrida proposta foi provada ser eficiente na resolução de problemas práticos.

Tabela 5.7: Average computation time (in seconds) of the MIP and HH strategies to find a feasible solution for the ISPSP instances.

Class	$ \mathcal{T} / \mathcal{W} /\theta$	MIP	HH
1	2/27/0%	7.550	0.100
2	2/27/10%	13.03	0.220
3	2/27/20%	100.8	0.270
4	2/64/0%	120.7	0.650
5	2/64/10%	252.7	0.700
6	2/64/20%	458.9	0.780
7	2/125/0%	1,817	1.170
8	2/125/10%	2,017	1.330
9	2/125/20%	2,396	1.560
10	7/27/0%	2,634	1.890
11	7/27/10%	2,849	2.480
12	7/27/20%	3,048	2.750
13	7/64/0%	3,234	2.800
14	7/64/10%	3,568	3.000
15	7/64/20%	–	3.330
16	7/125/0%	–	3.370
17	7/125/10%	–	4.000
18	7/125/20%	–	4.250
19	30/27/0%	–	5.220
20	30/27/10%	–	5.760
21	30/27/20%	–	6.980
22	30/64/0%	–	7.250
23	30/64/10%	–	10.15
24	30/64/20%	–	15.32
25	30/125/0%	–	74.56
26	30/125/10%	–	77.84
27	30/125/20%	–	86.02

5.4 Sumário e Considerações Finais

Nesse capítulo, foi proposto um modelo de programação estocástica 0–1 para o problema de programação de bombas em sistemas de abastecimento urbano, considerando o custo fixo de ligar e desligar as bombas, e a demanda por água uma variável aleatória. Devido à natureza combinatória desse problema, propôs-se um algoritmo heurístico para encontrar soluções de boa qualidade com tempos de execução razoáveis. Tal método resolve o problema de primeiro estágio por uma heurística construtiva e, em seguida, fixa as variáveis de primeiro estágio na formulação matemática do PSP estocástico com custo fixo. Para resolver o problema de segundo estágio, utilizou-se o método barreira modificado sem *crossover* do solver CPLEX 11.2.

Os resultados indicaram que a heurística híbrida resolve todas as classes consideradas neste trabalho, ao passo que o CPLEX 11.2 resolve apenas o 82%. No entanto, 66% dos problemas resolvidos, o CPLEX obtém um melhor *gap* de otimalidade. Ainda, o tempo de execução do solver para encontrar uma solução factível é muito elevado em relação à heurística, que encontra as soluções em torno de 15 segundos. Uma vez que os parâmetros de riscos λ e γ controlam o compromisso entre o custo total esperado e a dispersão dos custos de segundo estágio e inactibilidades, a metodologia de solução proposta neste trabalho não gera soluções totalmente conservadoras. Isso pode ser corroborado com a sensibilidade da solução conforme os parâmetros de riscos variam. Assim, independente da escolha do valor dos parâmetros de riscos λ e γ , i.e., dependendo do nível de risco por parte do decisor, o método de solução é capaz de fornecer soluções adequadas. Finalmente, as medidas EVPI e VSS sugerem que, além do problema ser muito influenciado pelas incertezas, o cenário de valor esperado não é uma estratégia adequada para aproximar o problema estocástico.

Capítulo 6

Conclusões

Esse trabalho investigou um problema de programação de bombas em redes de abastecimento urbano, cujo objetivo é definir as políticas ótimas de captação, armazenamento e transferência de água na rede a fim de minimizar os custos de consumo de energia elétrica e, ainda, respeitando as restrições relevantes da rede. A revisão da literatura indica a existência de uma vasta gama de trabalhos que abordam esse problema. As diferenças entre esse trabalhos reside, basicamente, na dimensão física da rede, em termos do número de estações de tratamento e de reservatórios, no tipo de modelo hidráulico usado, na forma em que a demanda foi incorporada ao modelo de otimização, no algoritmo de controle e no objetivo a ser minimizado. A partir da revisão da literatura, pode-se concluir que os métodos de programação dinâmica e programação não linear são eficientes quando unicamente um reservatório é considerado. Portanto, a tendência é usar métodos heurísticos e evolutivos para lidar com redes de grande porte. Também é possível concluir que a maioria dos trabalhos desconsideram a natureza dinâmica e aleatória da demanda, na tentativa de obter modelos matemáticos mais simples e/ou implementáveis. Por essa razão, considerar a aleatoriedade da demanda de forma explícita no problema converteu-se numa contribuição relevante da presente dissertação e abriu novos campos para trabalhos futuros.

Neste trabalho, a aleatoriedade inerente da demanda de água foi considerada no problema de programação de bombas em redes de abastecimento urbano via o paradigma da programação estocástica de dois estágios. A demanda por água foi modelada como uma variável aleatória e aproximada por um conjunto finito e discreto de realizações ou cenários. Em muitas situações práticas, a distribuição real das variáveis aleatórias não é

conhecida, o que motiva o desenvolvimento de métodos de geração de cenários na tentativa de determinar uma aproximação da distribuição de probabilidade real das variáveis aleatórias. Esse estudo propôs um método baseado em simulação Monte Carlo, que foi provado possuir as propriedades de estabilidade e o erro ao nível de confiança 95%. Assim, pode-se concluir que tal método constrói uma boa aproximação da distribuição real com apenas poucos cenários.

Dois modelos de programação estocástica de dois estágios foram desenvolvidos para lidar de forma explícita com a natureza aleatória da demanda. Os modelos matemáticos desenvolvidos são extensões do modelo determinístico proposto no trabalho Toledo et al. (2008) e refletem as suposições básicas de que pode haver ou não um custo fixo incorrido pelas atividades de liga/desliga das bombas hidráulicas. O elevado tempo computacional para resolver o problema de programação de bombas com demanda estocástica sem custo fixo (problema de otimização linear) sugere o desenvolvimento futuro de métodos eficientes de resolução, por exemplo, decomposição de *Benders*, *progressive hedging*, etc. Ainda essa dificuldade pode aumentar se os custos fixos são considerados. Por essa razão, uma heurística híbrida foi desenvolvida para resolver o problema de programação de bombas com demanda estocástica com custo fixo. Os resultados obtidos a partir da ferramenta *perfis de desempenho* sugerem que o método de solução proposto para resolver o problema de programação de bombas com custo fixo fornece bom resultados em tempos computacionais razoáveis.

A análise das variáveis de decisão sugerem que, em geral, quando não existe perda de água na rede, praticamente não existe captação de água dos poços durante os períodos críticos, o qual reduz a frequência de ativação de bombas e, conseqüentemente, os custos totais de consumo de energia elétrica e de manutenção. Em contrapartida, os níveis de perda de água na rede causam o aumento de ativação de bombas, o qual incorre em custos adicionais de manutenção de bombas como consequência do desgaste das mesmas. Por essa razão, de uma perspectiva prática, é muito pertinente investigar estratégias de redução de perda em redes de abastecimento urbano.

Resultados da análise dos níveis de serviços sugerem que estratégias para se atender a demanda de água dos centros de consumo devem ser estudadas, pois há uma demanda reprimida relevante, principalmente quando o vazamento da rede excede 10%. Uma possível estratégia é aumentar a capacidade dos reservatórios, o número de reservatórios e a

vazão das bombas hidráulicas, com isso, maiores volumes de água são captadas ao longo dos períodos do dia aumentando as chances de atender a demanda faltante. Uma vez que os parâmetros de riscos λ e γ controlam o compromisso entre o custo total esperado e a dispersão dos custos de segundo estágio e infactibilidades, os resultados sugerem que é importante determinar valores plausíveis para esses parâmetros para controlar o conflito existente entre o custo total esperado, a satisfação robusta e a medida de risco. Finalmente, os altos valores do EVPI e VSS revelam que o problema é altamente influenciado pelas incertezas na demanda. Dessa forma, pode-se concluir que qualquer abordagem para abolir as incertezas pode ser não adequada para aproximar o problema estocástico. Portanto, a consideração da demanda como parâmetro incerto é justificada pelos resultados destas medidas.

Capítulo 7

Pesquisas Futuras

Há diversas perspectivas de continuidade do presente estudo. Aquelas que parecem mais promissoras são descritas a seguir.

7.1 Geração de Cenários

Nesta dissertação, um modelo de programação estocástica de dois estágios com recurso com restrições de satisfação robusta e aversão ao risco foi desenvolvido para abordar o problema de programação de bombas com demanda estocástica. Considerar a demanda estocástica indica que a mesma pode ser modelada como uma variável aleatória, a qual pode ser representada por uma distribuição discreta de probabilidade que descreve as possíveis realizações da variável aleatória. Na prática, tal distribuição de probabilidade, geralmente, não é conhecida. Por essa razão, técnicas de geração de cenários podem ser abordadas a fim de encontrar uma aproximação da distribuição de probabilidade da variável aleatória. A qualidade de um problema de programação estocástica depende diretamente de quão boa é a distribuição de probabilidade aproximada da variável aleatória. Neste trabalho, uma metodologia baseada em amostragem por simulação Monte-Carlo foi desenvolvida para construir a distribuição de probabilidade da variável aleatória. Mas, outros métodos também poderiam ter sido usados, como por exemplo, os baseados nas propriedades estatísticas e/ou nos modelos econométricos e de séries temporais (veja a Seção 3.5). Com isso, talvez seja possível obter soluções mais eficientes para o problema de programação de bombas com demanda estocástica.

Ainda, a construção da distribuição de probabilidade pode ser melhorada se métodos

de previsão de curto- ou longo-prazo são usados para determinar estimativas da demanda e a partir dessas estimativas, construir a distribuição de probabilidade da variável aleatória através dos métodos de geração de cenários. Dentre os métodos de previsão destacam-se: regressão linear múltipla, séries temporais (suavização exponencial e modelos ARIMA), redes neurais, entre outros.

7.2 Métodos de Decomposição

O elevado tempo computacional para resolver o problema de programação de bombas com demanda estocástica sem custo fixo (problema de otimização linear) sugere o desenvolvimento futuro de métodos eficientes de resolução, como por exemplo, métodos de decomposição. Dentre os métodos de decomposição, encontram-se decomposição de *Benders*, *progressive hedging*, entre outros.

7.3 Medidas de Aversão ao Risco

Neste trabalho, o MAD foi usado como medida de aversão ao risco. No entanto, outras medidas podem ser usadas para mensurar o risco associado à dispersão dos custos de segundo estágio, entre as quais se destacam: *Value-at-Risk* (VaR) e as medidas coerentes de risco, *Conditional-Value-at-Risk* (CVaR).

Seja X uma variável aleatória com distribuição de probabilidade cumulada $F_x(z) = P\{X \leq z\}$. A variável aleatória X pode ter significado de perda ou ganho. Para uma distribuição de perda, o VaR de X ao nível de significância $\alpha \in [0, 1]$ pode ser definido como:

$$\text{VaR}_{(\alpha)}(X) = \min\{z | F_X(z) \geq \alpha\} \quad (7.1)$$

A partir da equação (7.1), pode-se inferir que o $\text{VaR}_{(\alpha)}(X)$ representa o menor α -percentil da variável aleatória X , i.e., perdas maiores a $\text{VaR}_{(\alpha)}(X)$ ocorrem com probabilidade não maior a α (SARYKALIN et al., 2008; SHAPIRO, 2009). Embora, o VaR seja uma medida de risco, ela apresenta uma série de deficiências. Uma destas é que o VaR não fornece nenhuma informação a respeito das perdas que o excedem. Além disso, para distribuições discretas, o VaR é uma função não convexa e não continua, o qual pode

tornar ao modelo de otimização intratável computacionalmente. Para uma discussão das dificuldades numéricas de otimização do VaR, sugere-se ao leitor ver Rockafaller e Uryasev (2001), Rockafaller (2007), Krokmal et al., (2010), entre outros.

Para superar as deficiências relacionadas ao VaR, novas medidas de aversão ao risco foram propostas, entre elas o CVaR. Similarmente ao VaR, o CVaR também é uma medida de risco baseada no α -percentil da variável aleatória X e pode ser definido como a esperança matemática da variável de perda X sujeito a $X \geq \text{VaR}_{(\alpha)}(X)$, i.e., o CVaR é a expectativa das perdas que superam ao VaR, e portanto, é mais conservativa do que o VaR.

7.4 Formulação Multiestágios

No modelo de programação estocástica de dois estágios, assume-se que as incertezas na demanda unicamente ocorrem uma única vez durante todo o horizonte de tempo. Entretanto, em situações práticas, isso não é verdade, uma vez que as incertezas da demanda estão inerentes em cada período do horizonte de planejamento. Desta forma, para se obter uma melhor aproximação da realidade do problema de programação de bombas com demanda estocástica, a formulação de dois estágios podem ser estendida à multiestágios. Em programação estocástica multiestágios, as decisões em cada estágio são definidas unicamente com a informação disponível até esse momento. Nesse contexto, restrições de não antecipação devem ser incorporadas, tornando à formulação resultante um problema de grande porte e difícil de ser resolvido. Por essa razão, métodos de solução eficientes também devem ser propostos.

7.5 Otimização Robusta

A partir de estudos prévios, as estimativas mínimas e máximas da demanda por água em cada hora do dia nos reservatórios são conhecidas. Isso incita a que o problema de programação de bombas possa ser abordado também sob o enfoque de otimização robusta preconizado no trabalho Ben-Tal e Nemirovski (2000). Diferentemente aos modelos de programação estocástica, nos modelos de otimização robusta os parâmetros incertos são representados por variáveis aleatórias simétricas, independente e limitadas num suporte definido a priori e otimizam o problema em uma perspectiva de pior caso intervalar. Por

essa razão, medidas para se evitar soluções totalmente conservadoras também devem ser propostas.

Referências Bibliográficas

- ADAMOWSKI, J. F. Peak Daily Water Demand Forecast Modeling Using Artificial Neural Networks. *Journal of Water Resources Planning and Management*, v. 134, n. 2, p. 119–128, 2008.
- AGHEZZAF, E.-H.; SITOMPUL, C.; NAJID, N. M. Models for robust tactical planning in multi-stage production systems with uncertain demands. *Computers & Operations Research*, New York, v. 37, n. 5, p. 880–889, 2010.
- ALEM, D.; MORABITO, R. Risk-averse two-stage stochastic programs in furniture plants. *OR Spectrum*, Springer Berlin Heidelberg, v. 35, n. 4, p. 773–806, 2012.
- ALMEIDA, R.; BARBOZA, P. S. F. Efeito da reservação inicial sobre o desempenho operacional de sistemas de abastecimento de água. In: *Seminário Internacional sobre Projeto e Operação de Sistemas de Abastecimento de Água*. João Pessoa: [s.n.], 2002.
- ALONSO-AYUSO, A. et al. Medium range optimization of copper extraction planning under uncertainty in future copper prices. *European Journal of Operational Research*, Amsterdam, v. 233, n. 3, p. 711 – 726, 2014.
- ALVISI, S.; FRANCHINI, M.; MARINELLI, A. A short-term, pattern-based model for water-demand forecasting. *Journal of Hydroinformatics*, IWA Publishing Online Journals, v. 9, n. 1, p. 39, 2007.
- AMIT, R. K.; RAMACHANDRAN, P. *Optimal design of water distribution networks a review*. 2009. The Selected Works of R K Amit.
- AMORIM, P.; ALEM, D.; ALMADA-LOBO, B. Risk management in production planning of perishable goods. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, Washington, v. 52, n. 17538–17553, 2013.
- ARENALES, M. et al. *Pesquisa Operacional*. [S.l.]: Elsevier Brasil, 2007. 523 p.
- ARTZNER, P. et al. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, Blackwell Publishers Inc, v. 9, n. 3, p. 203–228, 1999.
- AWUMAH, K.; LANSEY, K. Energy efficient pump station operation with a pump switching constraint. *Water resources Planning and Management: ASCE*, New York, p. 604–609, 1992.
- BAGIROV et al. An algorithm for minimization of pumping costs in water distribution systems using a novel approach to pump scheduling. *Mathematical and Computer Modelling*, Oxford, v. 57, n. 3-4, p. 873–886, fev. 2013.

- BAI, D.; CARPENTER, T.; MULVEY, J. Making a Case for Robust Optimization Models. *Management Science*, Providence, v. 43, n. 7, 1997.
- BARAN, B.; LUCKEN, C. V.; SOTELO, A. Multi-objective pump scheduling optimisation using evolutionary strategies. *Advances in Engineering Software*, Elsevier, v. 36, n. 1, p. 39–47, 2005.
- BARREIROS, D. A.; ALEM, D.; TOSO, E. A. V. Planejamento agregado na indústria de nutrição animal sob incertezas. *Produção*, 2013. (em revisão).
- BECKWITH, S.; WONG, K. A genetic algorithm approach for electric pump scheduling in water supply systems. In: *Evolutionary Computation, 1995., IEEE International Conference on*. [S.l.: s.n.], 1995. v. 1, p. 21–.
- BEN-TAL, A.; HERTOOG, D. D.; VIAL, J.-P. Deriving counterparts by deriving robust counterparts of nonlinear uncertain inequalities. *CentER Discussion Paper Series No. 2012-053*, Available at SSRN, 2012.
- BEN-TAL, A.; NEMIROVSKI, A. Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data. *Mathematical Programming Series B*, Amsterdam, v. 88, p. 411–424, 2000.
- BERTRAND, J. W. M.; FRANSOO, J. C. Operations management research methodologies using quantitative modeling. *International Journal of Operations & Production Management*, Emerald, v. 22, n. 2, p. 241–264, 2002.
- BIRGE, J. R.; LOUVEAUX, F. *Introduction to stochastic programming*. New York: Springer, 1997. 421 p.
- BOZORGI-AMIRI, A.; JABALAMELI, M. S.; MIRZAPOUR, S. M. J. A multi-objective robust stochastic programming model for disaster relief logistics under uncertainty. *OR Spectrum*, Springer, 2011.
- BRION, L. M.; MAYS, L. W. Methodology for Optimal Operation of Pumping Stations in Water Distribution Systems. *Journal of Hydraulic Engineering*, New York, v. 117, n. 11, p. 1551–1569, 1991.
- CANAVOS, G. *Probabilidade y estadística: Aplicaciones y métodos*. [S.l.: s.n.], 1988.
- CEMBRANO, G. et al. Optimal control of a water distribution network in a supervisory control system. *Control Engineering Practice*, Oxford, v. 8, p. 1177–1188, 2000.
- CHASE, D.; ORMSBEE, L. Computer-generated pumping schedules for satisfying operational objectives. *Journal / American Water Works Association*, New York, v. 85, n. 7, p. 54–61, 1993.
- CONSIGLIO, A.; STAINO, A. A stochastic programming model for the optimal issuance of government bonds. *Annals of Operations Research*, Amsterdam, v. 193, n. 1, p. 159–172, 2010.
- COULBECK, B. Optimisation of Water Networks. *Institute of Measurement and Control*, London, v. 6, n. 5, p. 271–279, 1984.

- DOLAN, E. D.; MORE, J. J. Benchmarking optimization software with performance profiles. *Mathematical Programming Series A*, Amsterdam, v. 91, p. 201–213, 2002.
- DUPACOVÁ, J.; CONSIGLI, G.; WALLACE, S. W. Scenarios for Multistage Stochastic Programs. *Annals of Operations Research*, Amsterdam, n. 1, p. 25–53, 2000.
- EKER, .; GRIMBLE, M.; KARA, T. Operation and simulation of city of Gaziantep water supply system in Turkey. *Renewable Energy*, Oxford, v. 28, n. 6, p. 901–916, 2003.
- ESCUDERO, L. F. et al. Expected Future Value Decomposition Based Bid Price Generation for Large-Scale Network Revenue Management. *Transportation Science*, Baltimore, 2012.
- FALLSIDE, F.; PERRY, P. Hierarchical optimisation of a water-supply network. *Electrical Engineers, Proceedings of the Institution of*, IEEE Xplore, v. 122, n. 2, p. 202–208, 1975.
- FANG, H.-e.; ZHANG, J.; GAO, J.-l. Optimal operation of multi-storage tank multi-source system based on storage policy. *Journal of Zhejiang University SCIENCE A*, SP Zhejiang University Press, v. 11, n. 8, p. 571–579, 2010.
- GABREL, V.; MURAL, C.; THIELE, A. Recent Advances in Robust Optimization and Robustness : An Overview Theory of Robust Optimization and Robustness. *Technical Report*, New York, p. 1–25, 2012.
- GERGELY, J.; JÁNOS, C. Finding Least-Cost Pump Schedules for Reservoir Filling with a Variable Speed Pump. *Journal of Water Resources Planning and Management* , ASCE, v. 138, n. 6, p. 682–686, 2012.
- GRÖWE-KUSKA, N.; HEITSCH, H.; RÖMISCH, W. Scenario Reduction and Scenario Tree Construction for Power Management Problems. *Power Tech Conference Proceedings*, IEEE Bologna, v. 3, p. 7, 2003.
- HASHEM, S. M. J. M. Al-e; ARYANEZHAD, M. B.; SADJADI, S. J. An efficient algorithm to solve a multi-objective robust aggregate production planning in an uncertain environment. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Springer-Verlag, v. 58, n. 5-8, p. 765–782, 2012.
- HEITSCH, H.; RÖMISCH, W. Scenario tree reduction for multistage stochastic programs. *Computational Management Science*, Springer-Verlag, v. 6, n. 2, p. 117–133, 2008.
- HERRERA, M. et al. Predictive models for forecasting hourly urban water demand. *Journal of Hydrology*, Amsterdam, v. 387, n. 1-2, p. 141–150, 2010.
- HONG, T. et al. Modeling and Forecasting Hourly Electric Load by Multiple Linear Regression with Interactions. *Power and Energy Society General Meeting*, IEE, p. 1–8, 2010.
- HOYLAND, K.; KAUT, M.; WALLACE, S. W. A Heuristic for Moment-Matching Scenario Generation. *Computational Optimization and Applications*, Hingham, v. 24, p. 169–185, 2003.

- HOYLAND, K.; MICHAL; WALLACE, S. W. A Heuristic for Moment-matching Scenario Generation. *Computational Optimization and Applications.*, Hingham, v. 24, n. 2-3, p. 169–185, 2002.
- HOYLAND, K.; WALLACE, S. W. Generating Scenario Trees for Multistage Decision Problems. *Management Science, INFORMS*, Providence, v. 47, n. 2, p. 295–307, 2001.
- IKONEN, E.; SELEK, I.; BENE, J. Optimization of Pumping Schedules Using the Genealogical Decision Tree Approach. *Chemical Product and Process Modeling*, Published Online, v. 7, n. 1, p. Article 1, 2012.
- JAIN, A.; JOSHI, U. C.; VARSHNEY, A. K. S hort-Term Water Demand Forecasting Using Artificial Neural Networks : IIT Kanpur Experience. *Water Resources Management*, Amsterdam, v. 15, p. 459–462, 2001.
- JIA, Z.; LERAPETRITOU, M. Short-Term Scheduling under Uncertainty Using MILP Sensitivity Analysis. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, Washington, v. 43, n. 14, p. 3782–3791, 2004.
- JOWITT, P. et al. Real-time Forecasting and Control for Water Distribution. *Computer Applications in Water Supply*, New York, v. 2, p. 329–355, 1988.
- JOWITT, P.; GERMANOPOULOS, G. Optimal pump scheduling in water-supply networks. *Journal of Water Resources Planning and Management*, New York, v. 118, n. 4, p. 406–422, 1992.
- KALL, P.; WALLACE, S. *Stochastic Programming*. New York: Wiley, 1994.
- KAUT, M. *Scenario tree generation for stochastic programming : Cases from finance*. Tese (Doutorado) — Norwegian University of Science and Technology, 2003.
- KAUT, M. Scenario Generation for Stochastic Programming. A practical introduction. *Molde university college*, Haholmen, 2011.
- KAUT, M.; WALLACE, S. Evaluation of scenario-generation methods for stochastic programming. *Pacific Journal of Optimization*, Lysaker, v. 3, n. 2, p. 257–271, 2007.
- KHOR, C. S. et al. Two-stage stochastic programming with fixed recourse via scenario planning with economic and operational risk management for petroleum refinery planning under uncertainty. *Chemical Engineering and Processing: Process Intensification*, Elsevier, v. 47, n. 9-10, p. 1744–1764, 2008.
- KONNO, H.; YAMAZAKI, H. Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to tokyo stock market. *Management Science*, Providence, v. 37(5), p. 519–531, 1991.
- KOUGIAS, I. P.; THEODOSSIOU, N. P. Multiobjective Pump Scheduling Optimization Using Harmony Search Algorithm (HSA) and Polyphonic HSA. *Water Resources Management*, Amsterdam, v. 27, n. 5, p. 1249–1261, 2012.
- KROKHMAL, P.; ZABARANKIN, M.; URYASEV, S. Modeling and optimization of risk. *Surveys in Operations Research and Management Science*, Elsevier, v. 16, n. 2, p. 49–66, 2011.

- LAGUNA, M. Applying robust optimisation to capacity expansion of one location in telecommunications with demand uncertainty. *Management Science*, Providence, v. 44, n. 11, p. 101–110, 1998.
- LAI, K.; WANG, M.; LIANG, L. A stochastic approach to professional services firms revenue optimization. *European Journal of Operational Research*, Amsterdam, v. 182, n. 3, p. 971–982, 2007.
- LAI, K.-K.; NG, W.-L. A stochastic approach to hotel revenue optimization. *Computers & Operations Research*, New York, v. 32, n. 5, p. 1059–1072, 2005.
- LANSEY, K.; AWUMAH, K. Optimal Pump Operations Considering Pump Switches. *Journal of Water Resources Planning and Management*, New York, v. 120, n. 1, p. 17–35, 1994.
- LEMIEUX, C. *Monte carlo and Quasi- Monte Carlo Sampling*. [S.l.]: Springer Series in Statistics, 2009.
- LEUNG, S. C. et al. A robust optimization model for multi-site production planning problem in an uncertain environment. *European Journal of Operational Research*, Amsterdam, v. 181, n. 1, p. 224–238, 2007.
- LEUNG, S. C.; WU, Y. A robust optimization model for stochastic aggregate production planning. *Production Planning & Control: The Management of Operations*, London, v. 15, n. 5, p. 502–514, 2004.
- LI, Z.; LERAPETRITOU, M. Robust optimization for process scheduling under uncertainty. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, Washington, v. 47, n. 12, p. 4148–4157, 2008.
- LINDEROTH, J.; SHAPIRO, A.; WRIGHT, S. The empirical behavior of sampling methods for stochastic programming. *Annals of Operations Research*, Amsterdam, v. 142, n. 1, p. 215–241, 2006.
- LITTLE, K. W.; MCCRODDEN, B. J. Minimization of Raw Water Pumping Costs Using MILP. *Journal of Water Resources Planning and Management*, New York, v. 115, n. 4, p. 511–522, jul. 1989.
- LIU, J. M. et al. A semi-parametric time series approach in modeling hourly electricity loads. *Journal of Forecasting*, Chichester, v. 25, n. 8, p. 537–559, 2006.
- LOPEZ-IBANEZ, M.; DEVI. Multi-Objective Optimisation of the Pump Scheduling Problem using SPEA2. *Evolutionary Computation*, Cambridge, v. 1, p. 435–442, 2005.
- MACKLE, G.; SAVIC, D.; WALTERS, G. Application of Genetic Algorithms to Pump Scheduling for Water Supply. *Genetic Algorithm in Engineering Systems: Innovations and Applications*, GALEZIA. First International Conference on (Conf. Publ. No. 414), n. 414, p. 400–405, 1995.
- MAGALHAES, L.; HOLANDA, M. Utilização de um algoritmo genético híbrido para operação ótima de sistemas de abastecimento de água. *Engenharia Sanitária e Ambiental*, Rio de Janeiro, v. 15, n. 2, p. 187–196, 2010.

- MANSINI, R.; OGRYCZAK, W.; SPERANZA, M. G. Conditional value at risk and related linear programming models for portfolio optimization. *Annals of Operations Research*, Amsterdam, v. 152, n. 1, p. 227–256, 2006.
- MARKOWITZ, H. *Portfolio selection: efficient diversification of investments*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1959.
- MCCORMICK, G.; POWELL, R. S. Optimal Pump Scheduling in Water Supply Systems with Maximum Demand Charges. *Journal of water resources planning and management*, New York, v. 129, n. 5, p. 372–379, 2004.
- MITRA, S.; DOMENICA, N. D. A review of scenario generation methods. *International Journal of Computing Science and Mathematics (IJCSM)*, Geneva, v. 3, n. 3, p. 226–244, 2010.
- MULVEY, J.; VANDERBEI, R.; ZENIOS, S. Robust optimization of large-scale systems. *Operations Research*, v. 43, p. 264–281, 1995.
- NASSERI, M.; MOEINI, A.; TABESH, M. Forecasting monthly urban water demand using Extended Kalman Filter and Genetic Programming. Elsevier Ltd, v. 38, n. 6, p. 7387–7395, 2011.
- NOYAN, N. Risk-averse two-stage stochastic programming with an application to disaster management. *Computers & Operations Research*, New York, v. 39, n. 3, p. 541–559, 2012.
- ODAN, F. K.; REIS, L. F. R. Hybrid water demand forecasting model associating artificial neural network with fourier series. *Journal of Water Resources Planning and Management*, New York, v. 138, p. 245–256, 2012.
- OLIVEIRA, F. et al. A lagrangean decomposition approach for oil supply chain investment planning under uncertainty with risk considerations. *Computers & Chemical Engineering*, New York, v. 50, n. 0, p. 184–195, 2013.
- ORMSBEE, L.; LANSEY, K. Optimal Control of Water Supply Pumping Systems. *Journal of Water Resources Planning and Management*, New York, v. 120, n. 2, p. 237–252, 1994.
- ORMSBEE, L.; LINGIREDDY, S.; CHASE, D. Optimal Pump Scheduling for Water Distribution Systems. *Multidisciplinary International Conference on Scheduling : Theory and Applications*, Dublin, 2009.
- ORMSBEE, L. et al. Methodology for Improving Pump Operation Efficiency. *Journal of Water Resources Planning and Management*, New York, v. 115, n. 2, p. 148–164, mar. 1989.
- PAN, F.; NAGI, R. Robust supply chain design under uncertain demand in agile manufacturing. *Computers & Operations Research*, New York, v. 37, n. 4, p. 668–683, 2010.
- PASHA, M.; LANSEY, K. Optimal Pump Scheduling by Linear Programming. *World Environmental and Water Resources Congress American Society of Civil Engineers*, Kansas City, p. 1–10, 2009.

- PFLUG, G. Shape restricted nonparametric regression with overall noisy measurements. *Journal of Nonparametric Statistics, forthcoming*, Taylor Francis Online, p. 1–13, 2012.
- PINAR, M. Ç. Robust scenario optimization based on downside-risk measure for multi-period portfolio selection. *Operations Research-Spektrum*, Published Online, v. 2, p. 295–309, 2005.
- PRÉKOPA, A. *Stochastic Programming*. [S.l.: s.n.], 1995. 624 p.
- PRICE, E.; OSTFELD, A. Iterative Linearization Scheme for Convex Nonlinear Equations: Application to Optimal Operation of Water Distribution Systems. *Journal of Water Resources Planning and Management, ASCE*, New York, v. 139, n. 3, p. 299–312, 2013.
- PROSAB. *Uso racional de água e energia: Conservação de água e energia em sistemas prediais e públicos de abastecimento de água*. [S.l.], 2009. Programa de pesquisa em saneamento básico.
- ROCKAFELLAR, R.; URYASEV, S. Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking & Finance*, Elsevier, v. 26, n. 7, p. 1443–1471, 2002.
- RÖMISCH, W. Scenario Reduction Techniques in Stochastic Programming. *Stochastic Algorithms: Foundations and Applications*, Berlin, n. 2, p. 1–14, 2009.
- ROSS, O. *Interest Rate Scenario Generation for Stochastic Programming*. Tese (Doutorado) — The Technical University of Denmark, 2007.
- ROSSMAN, . Epanet 2 User's Manual. *Water supply and Water Resources Division, National Risk Management Research Laboratory*., Cincinnati, 2002.
- SABESP. *Programa de Controle e Redução de Perda*. [S.l.], 2004. Cia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo.
- SARYKALIN, S.; SERRAINO, G.; URYASEV, S. Value-at-Risk vs . Conditional Value-at-Risk in Risk Management and Optimization Tutorials in Operations Research. *Tutorials in Operations Research*, INFORMS, p. 270–294, 2008.
- SAVIC, D. A.; WALTERS, G. A.; SCHWAB, M. Multiobjective Genetic Algorithms for Pump Scheduling in Water Supply by. *Evolutionary Computing*, Springer Berlin Heidelberg, v. 1305, p. 227–235, 1997.
- SHAPIRO, A. Monte Carlo sampling Methods. In: *Stochastic Programming: Handbook in Operations Research and Management Science*. [S.l.: s.n.], 2003.
- SHAPIRO, A.; DENTCHEVA, D.; RUSZCZYNSKI, A. *Lectures on Stochastic Programming*. [S.l.: s.n.], 2009.
- SHAPIRO, A.; PHILPOTT, A. *A Tutorial on Stochastic Programming*. [S.l.: s.n.], 2007.
- SHU, M.-h.; LEE, T.-y. Robust optimization method for the economic term in chemical process design and planning. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, Washington, v. 40, n. 25, p. 5950–5959, 2001.

- SHVARTSER, L.; SHAMIR, U.; FELDMAN, M. Forecasting hourly water demands by pattern recognition approach. *Journal of Water Resources Planning and Management*, New York, v. 119, p. 611–627, 1993.
- SJOBOM, A.; ASSFALK, M. XII-008 - Ferramenta para a Previsão de Nível de Reservatórios em Sistemas de Abastecimento de Água. In: *23 Congresso Brasileiro de Engenharia Sanitária e Ambiental*. [S.l.: s.n.], 2005. p. 1–8.
- SNIEDOVICH, M. Robust-optimization – the elephant in the robust-satisficing room. *Working Paper*, p. 1–35, 2012.
- SOLANOS, J.; MONTOLIU, J. The optimal operation of water system. *Computer applications in water supply*, Tauton, v. 2, p. 356–375, 1988.
- SOLER, E. M. *Otimização dos custos de energia elétrica na programação do armazenamento e distribuição de água em redes urbanas*. Dissertação (Mestrado em Ciência de Computação e Matemática Computacional) — Universidade de São Paulo, Instituto de Ciências Matemáticas e Computação, São Carlos, 2008.
- STERLING, M.; COULBECK, B. A dynamic Programming Solution to Optimization of Pumping Costs. *Institution of Civil Engineers*, London, v. 59, n. 4, p. 813–818, 1975.
- STERLING, M. J. H.; COULBECK, B. Optimization of Water Pumping Costs by Hierarchical Methods. *ICE proceedings*, v. 59, n. 4, p. 789–797, 1975.
- TOLEDO, F. M. B. et al. Logística de Distribuição de Água em Redes Urbanas - Racionalização Energética. *Anales del XIII Congreso Latino- Iberoamericano de Investigación Operativa*, n. Pesquisa Operacional, p. 1–6, 2008.
- TOSO, E. A. V.; ALEM, D. Effective location models for sorting recyclables in public management. *European Journal of Operational Research*, Amsterdam, v. 234, n. 3, p. 839 – 860, 2014.
- VANDAELE, W. *Applied time series and Box-Jenkins models*. [S.l.: s.n.], 1983. 417 p.
- VERDERAMA, P. M.; FLOUDAS, C. A. Multisite planning under demand and transportation time uncertainty: robust optimization and conditional value-at-risk frameworks. *Industrial and Engineering Chemical Research*, Washington, v. 50, n. 9, p. 4959–4982, 2011.
- WHALEY, R. S.; HUME, R. An Optimization Algorithm for Looped Water Networks. *Pipeline Simulation Interest Group*, Baltimore, p. 1–19, 1986.
- YAN, S.; TANG, C. Inter-city bus scheduling under variable market share and uncertain market demands. *Omega*, Elmsford, NY, v. 37, n. 1, p. 178–192, 2009.
- YU, G.; POWELL, S.; STERLING, M. Optimized Pump Scheduling in Water Distribution Systems. *Journal of Optimization theory and Applications*, New York, v. 83, n. 3, p. 463–488, 1994.
- ZANJANI, M.; AIT-KADI, D.; NOURELFATH, M. Robust production planning in a manufacturing environment with random yield: A case in sawmill production planning. *European Journal of Operational Research*, Amsterdam, v. 201, n. 3, p. 882–891, 2010.

ZESSLER, U.; SHAMIR, U. Optimal operation of water distribution systems. *Journal of Water Resources Planning and Management, ASCE.*, New York, v. 115, n. 6, p. 735–752, 1989.

ZHANG, J. et al. Short-term water demand forecasting: A case study. In: _____. *Water Distribution Systems Analysis Symposium 2006*. Cincinnati: [s.n.], 2006. cap. 48, p. 1–14.

ZHOU, S. et al. Forecasting daily urban water demand: a case study of Melbourne. *Journal of Hydrology*, Amsterdam, v. 236, n. 3-4, p. 153–164, 2000.

ZHUAN, X.; XIA, X. Development of Efficient Model Predictive Control Strategy for Cost-Optimal Operation of a Water Pumping Station. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, New York, v. 21, n. 4, p. 1449–1454, 2013.

ZHUAN, X.; XIA, X. Optimal operation scheduling of a pumping station with multiple pumps. *Applied Energy*, London, v. 104, p. 250–257, 2013.

Apêndice A

Testes de Normalidade

Uma das formas para testar se, efetivamente, a distribuição de probabilidade em que se realiza a amostragem é normalmente distribuída, é fazer um teste de normalidade para uma amostra de tamanho \mathcal{N} , de tal forma que esta deva ser suficientemente grande para que a amostra seja representativa e descreva a população. A hipótese nula dos testes de normalidade é que os dados da amostra seguem um padrão de comportamento de uma distribuição normal $N(\mu, \sigma^2)$. Para corroborar com essa hipótese, são usados os testes de normalidade Chi-Quadrado e Shapiro-Will. O leitor interessado em se aprofundar nesses testes pode consultar Canavos (1988).

Para a realização dos testes de normalidade, é necessário obter o tamanho da amostra \mathcal{N} . Esta pode ser determinada usando a seguinte equação:

$$\mathcal{N} = \left(\frac{\mathcal{Z}_{\frac{\alpha}{2}} * \sigma}{e} \right)^2, \quad (\text{A.1})$$

em que $\mathcal{Z}_{\frac{\alpha}{2}}$, σ e e representam, o valor crítico que corresponde ao nível de confiança desejado, o desvio padrão populacional e o erro máximo aceitável, respectivamente. Uma vez que para aplicar tal equação é necessário conhecer o desvio padrão populacional, então um método de estimação pontual ou por intervalo deve ser utilizado. Uma vez estimado o desvio padrão μ , para um nível de confiança de 95% e para um erro aceitável, a equação (A.1) fornece um tamanho da amostra, aproximadamente, igual a 100. Convém salientar que, diferentes amostras do mesmo tamanho \mathcal{N} foram geradas e, a partir delas, obteve-se uma estimativa do erro $e = 11.70$.

Para obter os dados da amostra, foram geradas 100 árvores de cenários de igual di-

mensão. Cada problema de programação estocástica resultante foi então resolvido e, com isso, foram obtidos 100 valores de função objetivo correspondentes à amostra. O procedimento anterior foi realizado para cada uma das distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias obtidas no método de geração de cenários: uniforme, empírica, triangular e log-normal. Das 27 classes consideradas neste trabalho, uma destas foi selecionada para ilustrar os resultados dos testes. Essa instância corresponde a um horizonte de planejamento de 2 dias, uma árvore de 27 cenários e perdas de água de 0%. Cabe ressaltar que resultados similares foram obtidos para as instâncias restantes.

Os resultados dos testes Chi-Quadrado e Shapiro-Will são mostrados na Tabela A.1. Os resultados mostram que, para um nível de significância α de 5% não há evidência estatisticamente significativa para rejeitar a hipótese nula, pois o p – *valor* dos testes realizados para cada uma das amostras é maior que α . Logo, os dados das amostras seguem um padrão de comportamento de uma distribuição normal $N(\mu, \sigma^2)$.

Tabela A.1: Resultados dos testes de normalidade para uma instância de 2 dias, uma árvore de 27 cenários e vazamento de água nos reservatórios de 0%.

	Uniforme	Empírica	Triangular	Lognormal
Teste	p – <i>valor</i>	p – <i>valor</i>	p – <i>valor</i>	p – <i>valor</i>
χ^2	0,0585	0,3009	0,6439	0,5826
Shapiro Will	0,2698	0,6674	0,4276	0,0345

Apêndice B

Metodologia para Avaliar o Método de Geração de Cenários Proposto

Corroborada a normalidade da função objetivo, o procedimento necessário para determinar os limites de tolerância do gráfico de controle é descrito a seguir. Dada uma amostra de tamanho n , determinam-se os dois primeiros momentos da distribuição de probabilidade da variável aleatória, isto é, a média μ , e a variância σ^2 . Em seguida, encontram-se os limites de tolerância inferior e superior do gráfico de controle, cujo limite inferior e superior são dados por $\mu - \kappa\sigma$, e $\mu + \kappa\sigma$, respectivamente, em que κ é um parâmetro que reflete a distância dos limites de tolerância do valor esperado e é determinado usando-se os níveis de significância α e os valores da distribuição normal padrão.

Finalmente, os dados da amostra são inseridos no gráfico de controle e são analisados à luz dos limites de tolerância. Se os dados estão dentro dos limites de controle, então o processo (ou a amostra) é denominado (a) estável para o nível de significância α . Caso contrário, deve-se estabilizar o processo ou a amostra. Observando-se que os limites de tolerância são determinados quando os parâmetros populacionais da distribuição são conhecidos, que não é o caso neste trabalho, estes devem ser estimados usando-se qualquer método de estimação pontual ou de intervalo de confiança. Neste trabalho, é usado um método de estimação pontual, no qual a partir de uma amostra representativa da variável aleatória f_o , a média \bar{f}_o e a variância $\sigma_{\bar{f}_o}^2$ dessa amostra podem ser usadas como estimadores pontuais dos parâmetros populacionais μ e σ^2 .

Portanto, os novos limites de tolerância são dados por $\bar{f}_o \pm \kappa\sigma_{\bar{f}_o}$, em que κ é uma constante apropriada pertencente à distribuição conjunta de \bar{f}_o e $\sigma_{\bar{f}_o}$. No entanto, isso

gera um problema, no sentido em que ambos os parâmetros são variáveis aleatórias, já que variam para cada conjunto de dados amostrados. Assim, não é possível afirmar que para certo nível de confiança α , os dados estejam dentro dos limites $\bar{f}_o \pm \kappa \sigma_{\bar{f}_o}$, devido também à variação dos limites de tolerância (CANAVOS, 1988). Porém, é possível selecionar um valor de κ que, após gerar de forma repetida amostras do mesmo tamanho n de uma distribuição normal, uma proporção fixa ϕ desses limites conterà pelo menos $100\vartheta\%$ dos valores da distribuição. Canavos (1988) denomina ambos os parâmetros ϕ e ϑ como coeficiente de confiança e alcance da distribuição ou quantidade esperada de dados (por estar entre os limites), respectivamente. O mesmo autor apresenta uma tabela para determinar os valores de κ para valores fixos de n , ϕ e ϑ . Essa tabela é apresentada na Figura B.1.

n	ϕ	$\vartheta = 0.75$					$\vartheta = 0.90$				
		0.75	0.90	0.95	0.99	0.999	0.75	0.90	0.95	0.99	0.999
6	1.704	2.429	2.889	3.779	4.802	2.196	3.131	3.723	4.870	6.188	
7	1.624	2.318	2.757	3.611	4.593	2.034	2.902	3.452	4.521	5.750	
8	1.568	2.238	2.663	3.491	4.444	1.921	2.743	3.264	4.278	5.446	
9	1.525	2.178	2.593	3.400	4.330	1.839	2.626	3.125	4.098	5.220	
10	1.492	2.131	2.537	3.328	4.241	1.775	2.535	3.018	3.959	5.046	
11	1.465	2.093	2.493	3.271	4.169	1.724	2.463	2.933	3.849	4.906	
12	1.443	2.062	2.456	3.223	4.110	1.683	2.404	2.863	3.758	4.792	
13	1.425	2.036	2.424	3.183	4.059	1.648	2.355	2.805	3.682	4.697	
14	1.409	2.013	2.398	3.148	4.016	1.619	2.314	2.756	3.618	4.615	
15	1.395	1.994	2.375	3.118	3.979	1.594	2.278	2.713	3.562	4.545	
16	1.383	1.977	2.355	3.092	3.946	1.572	2.246	2.676	3.514	4.484	
17	1.372	1.962	2.337	3.069	3.917	1.552	2.219	2.643	3.471	4.430	
18	1.363	1.948	2.321	3.048	3.891	1.535	2.194	2.614	3.433	4.382	
19	1.355	1.936	2.307	3.030	3.867	1.520	2.172	2.588	3.399	4.339	
20	1.347	1.925	2.294	3.013	3.846	1.506	2.152	2.564	3.368	4.300	
21	1.340	1.915	2.282	2.998	3.827	1.493	2.135	2.543	3.340	4.264	
22	1.334	1.906	2.271	2.984	3.809	1.482	2.118	2.524	3.315	4.232	
23	1.328	1.898	2.261	2.971	3.793	1.471	2.103	2.506	3.292	4.203	
24	1.322	1.891	2.252	2.959	3.778	1.462	2.089	2.489	3.270	4.176	
25	1.317	1.883	2.244	2.948	3.764	1.453	2.077	2.474	3.251	4.151	
26	1.313	1.877	2.236	2.938	3.751	1.444	2.065	2.460	3.232	4.127	
27	1.309	1.871	2.229	2.929	3.740	1.437	2.054	2.447	3.215	4.106	
28	1.305	1.865	2.222	2.920	3.728	1.430	2.044	2.435	3.199	4.085	
29	1.301	1.860	2.216	2.911	3.718	1.423	2.034	2.424	3.184	4.066	
30	1.297	1.855	2.210	2.904	3.708	1.417	2.025	2.413	3.170	4.049	
31	1.294	1.850	2.204	2.896	3.699	1.411	2.017	2.403	3.157	4.032	
32	1.291	1.846	2.199	2.890	3.690	1.405	2.009	2.393	3.145	4.016	
33	1.288	1.842	2.194	2.883	3.682	1.400	2.001	2.385	3.133	4.001	
34	1.285	1.838	2.189	2.877	3.674	1.395	1.994	2.376	3.122	3.987	
35	1.283	1.834	2.185	2.871	3.667	1.390	1.988	2.368	3.112	3.974	
36	1.280	1.830	2.181	2.866	3.660	1.386	1.981	2.361	3.102	3.961	
37	1.278	1.827	2.177	2.860	3.653	1.381	1.975	2.353	3.092	3.949	
38	1.275	1.824	2.173	2.855	3.647	1.377	1.969	2.346	3.083	3.938	
39	1.273	1.821	2.169	2.850	3.641	1.374	1.964	2.340	3.075	3.927	
40	1.271	1.818	2.166	2.846	3.635	1.370	1.959	2.334	3.066	3.917	
41	1.269	1.815	2.162	2.841	3.629	1.366	1.954	2.328	3.059	3.907	
42	1.267	1.812	2.159	2.837	3.624	1.363	1.949	2.322	3.051	3.897	
43	1.266	1.810	2.156	2.833	3.619	1.360	1.944	2.316	3.044	3.888	
44	1.264	1.807	2.153	2.829	3.614	1.357	1.940	2.311	3.037	3.879	
45	1.262	1.805	2.150	2.826	3.609	1.354	1.935	2.306	3.030	3.871	
46	1.261	1.802	2.148	2.822	3.605	1.351	1.931	2.301	3.024	3.863	
47	1.259	1.800	2.145	2.819	3.600	1.348	1.927	2.297	3.018	3.855	
48	1.258	1.798	2.143	2.815	3.596	1.345	1.924	2.292	3.012	3.847	
49	1.256	1.796	2.140	2.812	3.592	1.343	1.920	2.288	3.006	3.840	

Figura B.1: k valores para os limites de tolerância bilaterais para amostras distribuídas normalmente.

Apêndice C

Resultados das ANOVAS

Os resultados das análises de variância (ANOVAS) simples podem ser visto na Tabela C.1. Nota-se que o p -valor, para cada uma das ANOVAS realizadas, é menor que o nível de significância assumido $\alpha = 5\%$. Portanto, ao nível de confiança de 95%, há evidência para afirmar que existe diferença estatisticamente significativa entre resolver o problema de programação estocástica com cada uma das distribuições de probabilidade obtidas no método de geração de cenários.

Tabela C.1: Resultados das ANOVAS para uma instância da classe 2/27/0%.

	Valor Objetivo	X_{jt}	$I_{jt}(\omega)$	$V_{jlt}(\omega)$	$\mathcal{E}_{jt}^-(\omega)$	$\mathcal{E}_{jt}^+(\omega)$
p -valor	0,00001	0,00020	0,00015	0,00550	0,00000	0,00000

O teste anterior especifica se há diferença entre as médias, mas não descreve quais médias são diferentes. Dessa forma, o teste de Duncan foi realizado para responder essa questão. Na Tabela C.2, encontram-se os resultados desse teste para a função objetivo, variáveis de primeiro e segundo estágio. O teste de Duncan aplica um procedimento de comparação múltipla para determinar quais médias são significativamente diferentes das outras. Foram identificados quatro grupos, correspondentes às distribuições de probabilidade, segundo o alinhamento das letras χ . Existem diferenças estatisticamente significativas se, e somente se, dois níveis do fator não compartilharem uma mesma coluna de χ .

Segundo o alinhamento dessas letras, pode-se concluir que existem diferenças significativas entre cada par de níveis, ao nível de confiança de 95%, para a função objetivo, ao passo que, para a variável de primeiro estágio X_{jt} , é totalmente indiferente resolver o

Tabela C.2: Resultados dos testes de Duncan para uma instância da classe 2/27/0%.

Nível	$\psi(x, \xi(\omega))$			X_{jt}			$I_{jt}(\omega)$			$V_{j\ell t}(\omega)$			$\mathcal{E}_{jt}^-(\omega)$			$\mathcal{E}_{jt}^+(\omega)$		
Uniforme	χ			χ			χ			χ	χ	χ	χ			χ		
Empírica		χ		χ				χ		χ	χ		χ			χ		
Triangular			χ		χ				χ			χ		χ			χ	
Lognormal			χ			χ	χ			χ					χ			χ

problema com as variáveis aleatórias descritas por distribuições de probabilidade uniforme e empírica. Entretanto, para a variável de segundo estágio $I_{jt}(\omega)$, que descreve o volume de água armazenado nos reservatórios, existe diferença estatisticamente significativa entre cada par de níveis, exceto no par uniforme/lognormal. Em relação à variável que descreve a transferência de água entre reservatórios $V_{j\ell t}(\omega)$, não existe evidência, ao nível de confiança de 95%, para inferir se é indiferente resolver o modelo de programação estocástica entre os pares uniforme/lognormal, empírica/triangular e triangular/lognormal. Finalmente, para as variáveis que descrevem as faltas e excesso de água $\mathcal{E}_{jt}^-(\omega)$ e $\mathcal{E}_{jt}^+(\omega)$, somente não existe diferença estaticamente significativa quando uma distribuição uniforme ou empírica é usada para descrever as variáveis aleatórias do problema.

A Figura C.1 ilustra a distância do valor ótimo da função objetivo do modelo programação estocástica para as quatro distribuições usadas para atribuir as probabilidades de ocorrência dos cenários. A partir dessa figura, é possível notar que existe uma diferença considerável no valor da função objetivo da distribuição lognormal com o valor da função objetivo das distribuições de probabilidade restantes. Além disso, é possível inferir que, graficamente, não existe diferença significativa entre os valores das funções objetivos das distribuições de probabilidade uniforme, empírica e triangular. No entanto, da perspectiva estatística, existe tal diferença. Note também que existe uma dispersão muito baixa entre os valores da função objetivo para cada uma das distribuições de probabilidade. Desse modo, esse gráfico também evidencia que o método de geração de cenários baseado em simulação Monte Carlo satisfaz a propriedade de estabilidade interna.

Conforme aos resultados obtidos, pode-se inferir que a forma como são atribuídas as probabilidades a cada cenário acarreta uma variação significativa no valor ótimo da função objetivo e das variáveis de decisão. Essas atribuições são realizadas da seguinte forma: para uma distribuição uniforme, cada cenário possui igual probabilidade de acontecimento (situação equiprovável), enquanto que, uma atribuição da probabilidade de acontecimento

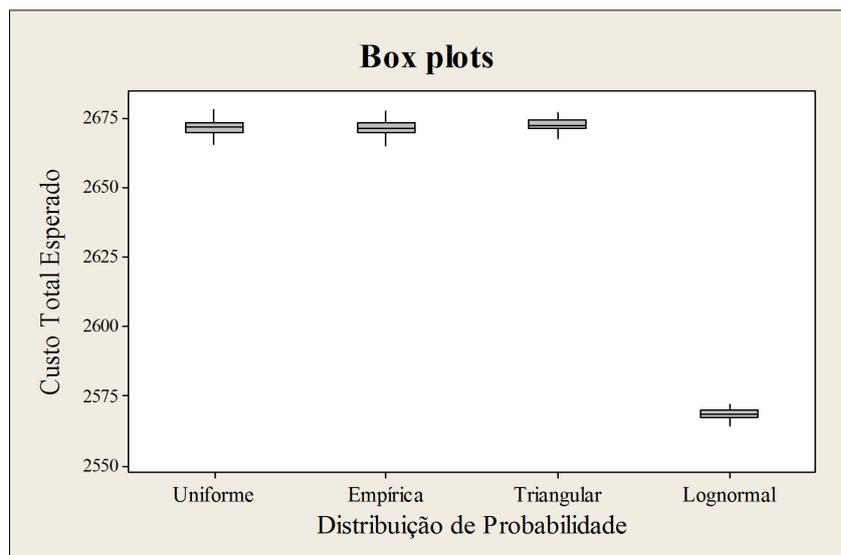


Figura C.1: Gráficos *box-plots* para os valores da função objetivo de uma instância da classe 2/27/0% e para as distribuições de probabilidade: (1) uniforme; (2) empírica, (3) triangular e (4) lognormal.

de cada cenário é mais uniforme quando uma distribuição empírica é usada (situação moderada). Em relação à distribuição triangular e log-normal, os cenários médios (situação pessimista) e baixos (situação otimista) apresentam uma maior probabilidade de ocorrência, respectivamente.