UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

THIAGO FRANCISCO FELIX

PESQUISANDO A MELHORIA DE AULAS DE MATEMÁTICA SEGUINDO A PROPOSTA CURRICULAR DO ESTADO DE SÃO PAULO, COM A METODOLOGIA DA PESQUISA DE AULAS (*LESSON STUDY*)

São Carlos
2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

PESQUISANDO A MELHORIA DE AULAS DE MATEMÁTICA SEGUINDO A PROPOSTA CURRICULAR DO ESTADO DE SÃO PAULO, COM A METODOLOGIA DA PESQUISA DE AULAS (*LESSON STUDY*)

Thiago Francisco Felix

Orientadora: Profª. Dra. Yuriko Yamamoto Baldin

São Carlos
2010

PESQUISANDO A MELHORIA DE AULAS DE MATEMÁTICA SEGUINDO A PROPOSTA CURRICULAR DO ESTADO DE SÃO PAULO, COM A METODOLOGIA DA PESQUISA DE AULAS (*LESSON STUDY*)

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas do Centro de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal de São Carlos, como exigência parcial para a obtenção do título de mestre, sob orientação da Professora Doutora Yuriko Yamamoto Baldin.

São Carlos
2010

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

F316pa

Felix, Thiago Francisco.
Pesquisando a melhoria de aulas de matemática seguindo a proposta curricular do estado de São Paulo, com a metodologia da pesquisa de aulas (Lesson Study) / Thiago Francisco Felix. -- São Carlos : UFSCar, 2010.
137 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2010.

1. Matemática - estudo e ensino. 2. Lesson Study. 3. Educação - proposta curricular. 4. Metodologia da Pesquisa de Aula. 5. Aprendizagem Participativa. 6. Resolução de problemas. I. Título.

CDD: 510.7 (20ª)

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Yuriko Yamamoto Baldin
DM - UFSCar

Prof. Dr. Luiz Carlos Guimarães
IM - UFRJ

Prof. Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti
DM - UFSCar

Dedico este trabalho aos meus pais Edinho e Nenê, que em nenhum momento deixaram de me apoiar, e aos meus alunos, principais responsáveis pela minha dedicação à educação.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pelo apoio e conforto durante toda essa caminhada. Agradeço também a todos os professores que me acompanharam e se dedicaram a minha formação. Em especial agradeço a Prof. Dra. Yuriko Yamamoto Baldin, por sua ajuda, paciência, e extrema contribuição na realização desse trabalho, não há agradecimentos suficientes para expressar todo meu respeito, admiração e gratidão,você é um exemplo e um grande incentivo para mim.

No âmbito familiar, agradeço a minha irmã Patrícia, ao cunhado Weberton e sobrinhos Lucas e Giovanna (eu amo vocês). E em especial agradeço aos meus tios Armando e Tereza, e primos Juliana, Adgilson e Ana Beatriz, sem vocês essa caminha não seria possível.

Agradeço também aos meus grandes amigos Fabio, Cris, Santiago, Rique, Eduardo, Márcio, Fabiana, Fabio e minha afilhada Ianca, em especial aos grandes amigos Tiago, Rafael, Alexandre Rossi, Vinícius, Luiz Henrique e Robson pelo apoio à produção desse trabalho.

Ao Programa de Apoio ao Plano de Reestruturação e Expansão das Universidades Federais - REUNI - e ao Governo Federal agradeço pelo apoio financeiro, contribuição e confiança depositada em meu trabalho.

Assim como não poderia me esquecer de agradecer ao Junior (secretário PPGECE), a todos meus colegas e companheiros de turma, pelo auxílio em todo esse curso de mestrado e pela amizade cativante durante esses anos, em especial agradeço ao amigo Danilo Pimentel pela amizade, participação e ajuda na caminhada de realização desse trabalho.

A todos os companheiros da E. E. Major Telmo Coelho Filho, meu muito obrigado às equipes de direção, coordenação, professores e funcionários, é uma honra trabalhar com todos vocês.

Enfim, sou grato a todos que participaram direta ou indiretamente na realização desse trabalho e por algum motivo não tiveram seus nomes aqui registrados.

RESUMO

O presente projeto é um estudo que buscou uma reflexão sobre a prática docente do autor no ensino da matemática em escolas públicas do Estado de São Paulo, especialmente sobre o ensino nas séries iniciais do ciclo II do Ensino Fundamental (6º e 7º anos). Apoiamos na Metodologia de Pesquisa de Aula, uma metodologia de origem japonesa, que coloca o foco da pesquisa nas atividades investigativas do profissional docente para o aperfeiçoamento de suas práticas. A investigação passa pelas fases de planejamento e execução de aulas e reflexões pós-aula, que são primordiais para a busca da melhoria do ensino-aprendizagem da matemática. A Metodologia está sendo disseminada no Ocidente, sendo esse trabalho uma das primeiras experiências na tentativa de introduzir essa metodologia no Brasil, e seu conteúdo está explicado no Capítulo 2. Para garantir uma reflexão efetiva desse processo, buscamos estabelecer o olhar investigativo do professor em cada etapa da prática docente, baseando-nos no conceito de Conhecimento Pedagógico de Conteúdo (Schulman, 1986), que foi considerado no Capítulo 1. Como produto da pesquisa em Mestrado Profissional, elaboramos aulas e atividades baseadas na proposta curricular da Secretaria de Estado da Educação do Estado de São Paulo (SEE-SP), que está analisada no Capítulo 4, e seguimos a Metodologia de Resolução de Problemas (Polya, 1995) como uma estratégia para fundamentar a análise das atividades assim como as reflexões realizadas. A Metodologia de Resolução de Problemas foi estudada no Capítulo 3, comparando as fases da resolução dentro das atividades propostas no nosso estudo. Um dos resultados principais buscados e obtidos nesse projeto foi a aprendizagem participativa dos alunos na construção de seu conhecimento por meio das etapas da Metodologia de Resolução de Problemas. No capítulo 5, apresentamos algumas propostas de diferentes aulas, mostrando como os temas curriculares podem ser trabalhados sob tal enfoque. Apresentamos análises do preparo de aulas e expectativas do docente nesta fase, diversos problemas enfrentados com as dificuldades dos alunos, suas reações e participações. Além disso, comentamos as percepções didáticas do docente que permitiram conduzir a Pesquisa de Aula na fase de melhorar a aprendizagem com a participação ativa dos alunos. O resultado mais importante do trabalho foi conseguir executar as reflexões pós-aulas que, mediadas pela Metodologia da Pesquisa de Aula, permitiram um novo olhar nas análises das atividades feitas pelos alunos, implicando uma busca e compreensão mais acurada dos erros e acertos dos mesmos, o que trouxe um salto qualitativo nas avaliações da aprendizagem dos alunos. O Capítulo 6 contém uma síntese do nosso estudo relacionando as reflexões com as atividades executadas. O Apêndice deste trabalho consiste dos planos de aulas e atividades, e descrição das suas execuções, que podem ser destacados e utilizados por professores das escolas básicas ou por licenciandos em busca de sugestões e ideias para aperfeiçoar sua prática docente.

Palavras-Chaves: Lesson Study. Proposta Curricular. Metodologia da Pesquisa de Aula. Aprendizagem Participativa. Metodologia da Resolução de Problemas

ABSTRACT

This project is a study that seeks a reflection of author about classroom practices in teaching mathematics, at public schools of State of São Paulo, Brazil, especially with 6th and 7th grades of Basic School System. We adopted the Methodology of Lesson Study, a original Japanese Methodology, that focus the research on investigative activities of a teacher aiming at the improvement of his/her teaching practices. The phases of such investigative activities comprise the planning and the execution of the lessons, followed by the critical reflections after the lesson, that constitute fundamental steps to the search for the improvement of the teaching/learning process. This methodology is being disseminated in Western countries, and this work is one of the first adapted experiences as an attempt to introduce it in Brazil, and it is commented in Chapter 2. In order to secure an effective reflection of this process, we have established the investigative procedure at each stage of teacher´s practice, grounding the work on the concept of Pedagogical Content Knowledge (Schulman, 1986), discussed in Chapter 1. As main product of Master Program for Teachers, we have designed lessons and activities that consider the curriculum proposal of The Secretary of Education of the State of São Paulo and have followed the Methodology of Problem Solving of Polya, as a strategy to yield the analysis of lessons, activities and the following reflections. One main result sought and obtained in this work is the participative learning of students when building their own knowledge through the steps of Problem Solving Methodology, described in Chapter 3. In Chapter 5, we present some proposals for different types of lessons, describing the ways the curriculum recommendations can be worked out with our approach. We show analyses of lesson planning and the expectations of teacher about the executions of the plans at this stage, as well as about many problems come up with students´ difficulties, reactions and participations. Moreover, we comment the didactical perceptions of the author that have allowed conducting the Lesson Study in the stage of improving the learning with active participation of students. The most important achievement of this work is the execution of “after class reflections” mediated by Lesson Study Methodology, which has implicated a new vision of the assessment of students’ answers and questions/doubts. The work has permitted a more refined search and comprehension of the errors and the analyses of correct answers, which has brought a quality upgrade to the assessment. The Chapter 6 contains a synthesis of our reflections connected to the activities. The Appendix consists of detachable sheets with the lesson plans and steps of their execution, which can be used by basic school teachers as

well as by students of teacher preparation programs who seek ideas and suggestions to improve their classroom practice.

Keywords: Lesson Study. Curriculum Proposal. Methodology of Lesson Study. Participative Learning. Methodology of Problem Solving.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - A formação do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo – CPC..............................8

Figura 2 - O processo de formação do currículo e planejamento educacional..........................9

Figura 3 - Conteúdo curricular da 6ª série / 7º ano do ensino fundamental...............................9

Figura 4 - Terakoya para meninas: vários níveis e diferentes assuntos...................................14

Figura 5 - metodologia de ensino da escola elementar, da escola normal...............................15

Figura 6 - ciclo das etapas da metodologia de pesquisa de aula..17

Figura 7 - Etapas da metodologia de pesquisa de aula adaptada...20

Figura 8 - Uma solução esperada...29

Figura 9 - Outra solução esperada..29

Figura 10 - Representação entre as frações equivalentes..29

Figura 11 - trios de segmentos de medidas variáveis..31

Figura 12 - Exemplo de construção impossível do triângulo..32

Figura 13 - Outro exemplo de construção impossível do triângulo...33

Figura 14 - Uso do Geogebra na ilustração da construção do triângulo..................................34

Figura 15 - Atividade pré-aula, alunos fazem medições dos ângulos internos de triângulos...36

Figura 16 - recorte dos ângulos internos de um triângulo formando um ângulo raso.............38

Figura 17 - Dobra das pontas (ângulos internos) de um triângulo formando um ângulo raso..38

Figura 18 - Triângulo com o lado oposto a um ângulo não obtuso como base.......................39

Figura 19 - Achando uma altura do triângulo com dobraduras...39

Figura 20 - Dobrando a altura pela metade..39

Figura 21 - Sequência de dobraduras que fornece o ângulo raso...40

Figura 22 - Cadernos do Professor 7ª série do E. F. e 1º ano do E. M....................................42

Figura 23 - Cadernos do Aluno 5ª e 6ª séries do E. F...42

Figura 24 - Conteúdo programático 4º bimestre / 6ª série do ensino fundamental..................43

Figura 25 - Tabela da apresentação de uma situação de aprendizagem..................................44

Figura 26 - Atividade encontrada no caderno do aluno para fabricação de um transferidor....51

Figura 27 - Ilustrações da atividade “Anguloteria..53

Figura 28 - médias da escola acima do geral do estado..60

Figura 29 - Soluções dos alunos, repartições em 4, 8 e 16 partes...66

Figura 30 - A ilustrações mostra a equivalência entre as figuras independente da partilha...67

Figura 31 - Aluna expõe suas soluções (ao fundo). Alunos pouco preocupados com a atividade (à frente)..67

Figura 32 - Atividade “O que eu aprendi...” feita por aluna da Turma H................................70
Figura 33 - Atividade feita por aluna da Turma I..71
Figura 34 - Atividade feita por aluna da Turma H..72
Figura 35 - Figura 26 – Lição feita por aluna da 6ª I...72
Figura 36 - Atividade feita por aluna da Turma G..73
Figura 37 - Marcas feitas em retângulo para auxílio da divisão em partes iguais....................75
Figura 38 - Representações das frações 1/2 e 1/3..76
Figura 39 - A Ilustração mostra a comparação entre as frações...77
Figura 40 - A representação da fração ¾...78
Figura 41 - A representação da fração 2/3...78
Figura 42 - As figuras sobrepostas...79
Figura 43 - Uso do software Cabri 3D na obtenção de planificações de poliedros..................83
Figura 44 - Alunos fazem as marcas de cola nas planificações...83
Figura 45 - Construção dos poliedros pelos alunos (esquerda). E alguns poliedros prontos (direita)..84
Figura 46 - Construção com papel cartão representativa de uma porta...................................84
Figura 47 - Usando o retroprojetor..84
Figura 48 - O conceito de ângulos é explicado na atividade...85
Figura 49 - Sobra de retângulo obtida pela projeção de um prisma...86
Figura 50 - Sombra de um triângulo obtida pela projeção de um prisma de base triangular ...86
Figura 51 - Poliedros não convencionais também são trabalhados na aula.............................87
Figura 52 - Na sequência, a exploração de faces não perpendiculares à base de projeção.......87
Figura 53 - A importância do ângulo de projeção..88
Figura 54 - Alunos ilustram suas estimativas da projeção...88
Figura 55 - Usando poliedros de faces transparentes...89
Figura 56 - Construção onde a intersecção se dá sobre o segmento de 7 cm...........................93
Figura 57 - 1º Passo..93
Figura 58 - 2º Passo..94
Figura 59 - Aluno relata dúvida na atividade “O que eu aprendi...”..97
Figura 60 - O professor faz a tabela comparativa da soma dos ângulos obtida pelos alunos...99
Figura 61 - Ângulo de 180º..101
Figura 62 - Alunos fazem a atividade de recorte e formação do ângulo raso.........................102
Figura 63 - Construção da atividade feita em E.V.A. e fixada em isopor..............................102
Figura 64 - O professor faz um exemplo com um triângulo feito com cartolina....................103
Figura 65 - Dobradura feita por aluno...104

Figura 66 - Usando o resultado obtido (exercícios na lousa)...105
Figura 67 - Construindo o ângulo de 75° usando o Teorema Angular de Tales e as construções de ângulos com régua e compasso...106
Figura 68 - Atividade “O que eu aprendi...” feita por aluno da Turma G..............................112
Figura 69 - Atividade “O que eu aprendi...” feita por aluna da Turma H...............................117

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO..1

A estrutura do trabalho...2

CAPÍTULO 1 - CONHECIMENTO PEDAGÓGICO DO CONTEÚDO.................6

1.1 A importância do currículo escolar...8

1.2 Exemplo do uso do CPC no planejamento do professor.....................................10

CAPÍTULO 2 - METODOLOGIA DA PESQUISA DE AULA..............................12

2.1 Pesquisa de aula – Lesson Study...12

2.1.1 Pesquisa de aula na história educacional japonesa...13

2.2 Do que consiste a metodologia de pesquisa de aula...16

2.3 Aplicação da metodologia de pesquisa de aula no trabalho...............................18

CAPÍTULO 3 - APRENDIZAGEM PARTICIPATIVA E METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS..22

3.1 Metodologia de resolução de problemas..22

3.2 Uso da metodologia de resolução de problemas no processo de aprendizagem.............25

3.2.1 Exemplo de planejamento 1..27

3.2.2 Exemplo de planejamento 2..30

3.2.3 Exemplo de planejamento 3..34

CAPÍTULO 4 - ANÁLISE SOBRE A PROPOSTA CURRICULAR DO ESTADO DE SÃO PAULO..42

4.1 A estrutura do caderno no professor..43

4.2 A estrutura do caderno do aluno..47

4.3 Sobre o conteúdo encontrado nos cadernos da proposta.....................................49

4.3.1 Números negativos..50

4.3.2 Geometria dos ângulos...51

4.3.3 Estimando a medida de ângulos 53

4.3.4 A metodologia da régua e do compasso...54

4.4 Considerações finais do capítulo..58

CAPÍTULO 5 - APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES E PRÁTICAS DE AULA.....59

5.2 A escola e as turmas..59

5.3 Relatórios das atividades aplicadas...61

5.3.1 Atividade 1...62

5.3.2 Atividade 2..75
5.3.2.1 Continuação da atividade 2...78
5.3.3 Atividade 3..82
6.3.3.1 As aulas...85
5.3.4 Atividade 4..90
5.3.5 Atividade 5..98
CAPÍTULO - 6 ANÁLISES FINAIS E CONCLUSÕES...107
6.1 Análise e aplicação dos temas..107
6.1.1 Frações...107
6.1.2 Geometria..110
6.2 Conclusões Finais..112
REFERÊNCIAS...119
APÊNDICE...121
Atividade 1...121
Atividade 2...124
Atividade 3...127
Atividade 4...130
Atividade 5...133

INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, presenciamos entre os alunos brasileiros uma queda na aprendizagem matemática, especialmente em nível básico, sendo este fato verificado nos rendimentos dos alunos em avaliações regionais (como o Saresp), nacionais (Saeb, Enem) e internacionais (PISA). O rendimento insatisfatório da maior parte dos alunos está associado, entre outras coisas, ao raciocínio dedutivo precário, influenciado pela dependência de "fórmulas" nas quais os alunos resolvem contas de forma automática e sem reflexão.

Levando em consideração a importância do desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo, é preciso incentivar os alunos a pensar, para que eles possam desenvolver as competências e habilidades que se esperam dos mesmos e são previstas em documentos oficiais como os PCN´s e a Proposta Curricular do Estado de São Paulo.

Mas surgem questões que são levantadas considerando essa temática, como, por exemplo: Como podemos incentivar o aluno? Como podemos garantir que haja continuidade na busca do conhecimento pelo aluno? Qual o papel do professor nesse processo?

Obviamente essas questões não são fáceis de responder e possuem uma infinidade de aspectos que devem ser considerados na análise de possíveis respostas. Deixamos claro que o projeto aqui apresentado não tem a intenção de trazer nenhuma fórmula milagrosa que resolva os problemas da educação. No entanto, buscamos incentivos à pesquisa de aula, levando em consideração as obrigações curriculares e as dificuldades encontradas no ensino, sejam elas específicas em sala de aula ou de modo mais amplo. Para isso, consideramos importante que a pesquisa leve em consideração os dois agentes principais no ensino: o aluno e o professor.

Quando focamos o aluno, trazemos um olhar cuidadoso na aprendizagem do mesmo, que leve em consideração o meio social em que o aluno se encontra e suas dificuldades (individuais e coletivas). Quando consideramos o profissional docente, voltamos nossa atenção ao preparo das aulas, visando adequá-las ao currículo escolar e ao melhor aprendizado do aluno, e à análise das aulas propriamente ditas, observando os erros e acertos, aprimorando assim a metodologia de ensino aplicada que potencialize o aprendizado dos alunos.

Sendo o trabalho voltado ao Mestrado Profissional, trabalhamos na prática a proposta de planejamento e execução de aulas baseadas na Proposta Curricular do Estado de São Paulo, objetivando a produção de um material que possa ser apreciado e utilizado por profissionais da área educacional.

O produto do nosso trabalho consiste de cinco situações de aprendizagem, contendo o planejamento, o roteiro de aplicação na sala de aula e os passos da execução. Os temas são:

- ✓ Atividade de fração como divisão;
- ✓ Atividade de comparação de frações;
- ✓ Atividade de geometria: o conceito de ângulo, polígonos como projeções planares de objetos tridimensionais;
- ✓ Atividade de geometria: construções com régua e compasso e a desigualdade triangular;
- ✓ Atividade de geometria: O Teorema Angular de Tales.

Como um produto surgido durante o desenvolvimento do trabalho de pesquisa, destacamos o estudo crítico das atividades propostas no Caderno do Aluno, volume 2, 6ª série (7º ano) da Proposta Curricular da Secretária da Educação (2009). Tal estudo foi importante para nortear as nossas propostas de atividades.

A estrutura do trabalho

Em vista do enfoque dado ao trabalho que leva em consideração o aluno e o professor, é necessário fazermos uma análise sobre o conhecimento do professor, suas metodologias e o currículo escolar. Para isso é importante que não somente façamos uma reflexão, mas também estudemos diferentes autores que discutem o conhecimento do professor. Estudamos então o conceito de *conhecimento pedagógico do conteúdo* de Shulman (1986) e Veal; MaKister (1999), e a metodologia de *pesquisa de aula - Lesson Study* (Isoda et AL, 2007), Fernandez-Yoshida (2004). Tais metodologias nos serviram de alicerce para mostrarmos a importância do conhecimento específico do professor, desde o preparo de aulas e intervenções em sala de aula, ao processo de reflexão de sua própria prática didática. Deve-se destacar também o estudo da participação efetiva do aluno na obtenção de seu próprio conhecimento e suas consequências benéficas no processo de ensino e aprendizagem, em especial da geometria, que foi focada no nosso trabalho. Para tal proposta, usamos como ferramenta didática a metodologia de resolução de problemas Polya (1995) e sua interpretação no processo de ensino/aprendizagem sob perspectiva de BALDIN (2004).

Uma parte essencial do trabalho consiste das atividades que ilustram e exemplificam tais aspectos, assim como a análise das mesmas.

Sendo assim o trabalho está estruturado nos seguintes capítulos:

Capítulo 1: nesse capítulo refletimos sobre o conhecimento do profissional docente, por meio do conceito do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo de Shulman, (1986). Realizamos uma análise geral da necessidade do conhecimento específico do professor, fazendo uma reflexão sobre a formação sólida na matemática que o profissional deve ter (onde muitos licenciandos discutem sua validação). Fazemos uma análise do currículo escolar, desde o conteúdo mais amplo (disponibilizado pelos órgãos governamentais) ao currículo da escola e o currículo específico do professor que é capaz de perceber as dificuldades de cada turma.

Capítulo 2: aqui discutimos o conceito da pesquisa do professor, suas atividades, suas metodologias, as intervenções feitas por ele em sala de aula e as reflexões pós-aula que levem em consideração seus erros e acertos, que o ajudam na melhoria da aula e no preparo das atividades posteriores. A discussão está fundamentada na Metodologia de Pesquisa de Aula - Lesson Study de Isoda (2007) e Yoshida-Fernandez (2004), uma metodologia que há muito tempo vem sendo usada no Oriente e que alicerça uma análise das atividades do profissional docente.

Capítulo 3: nesse capítulo destacamos a Metodologia de Resolução de Problemas no ensino da matemática, e em especial no tópico de geometria. Como nossa proposta inicial é incentivar o aluno à participação ativa na obtenção de seu próprio conhecimento, a metodologia de resolução de problemas se mostra como ferramenta eficaz para tal proposta. Cabe então uma reflexão sobre a metodologia idealizada por George Polya, na qual o autor diz que:

> “uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O Problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus meios, experimenta o sentimento da autoconfiança e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade suscetível, poderão gerar o

> gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter". (POLYA, 1995, p.5)

Podemos perceber pelas palavras de Polya que os problemas são de grande valia no desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo e incentivam o aprendizado. Muitas de nossas atividades são baseadas nessa metodologia, por isso fazemos uma breve descrição do método e suas contribuições ao ensino de matemática e a esse trabalho, apresentando exemplos da interpretação dessa metodologia no trabalho com os planejamentos de algumas das atividades.

Capítulo 4: nesse capítulo nos referimos ao conteúdo específico da proposta curricular do Estado de São Paulo, sobretudo para a 6ª série (7º ano). Discutimos aqui as atividades apresentadas por esta proposta, fazendo uma análise crítica do conteúdo, as dificuldades no aprendizado e as adequações que foram trabalhadas para constituir parte essencial dessa dissertação.

Capítulo 5: nesse capítulo descrevemos as atividades que foram elaboradas seguindo a fundamentação teórica desse trabalho. Tratamos da importância da escolha do tema e do preparo das atividades, descrevemos a aplicação em sala de aula, as intervenções do professor e a visão do aluno como agente ativo na construção de seu próprio conhecimento, assim como a análise das avaliações do aprendizado, na qual obtivemos um ganho qualitativo no alcance das avaliações.

Capítulo 6: o capítulo final dessa dissertação é dedicado à análise das atividades realizadas e comparadas com a fundamentação do trabalho e tecemos as conclusões. Incluímos também uma análise sobre o desempenho do aluno, as mudanças provocadas na postura dos mesmos e do professor.

Apêndice: Ao final do trabalho disponibilizamos os planos de aula de todas as atividades descritas no capítulo 5. Em resumo, apresentamos roteiros de aplicação das aulas e os passos da execução que podem ser destacados e utilizados pelo professor ou licenciando.

O trabalho de um professor é aperfeiçoado quando aprendemos com a pesquisa, conectada com o cotidiano da prática docente. O objetivo final deste trabalho é oferecer um texto que possa ser divulgado aos colegas professores e aos pesquisadores do ensino de matemática, um trabalho de pesquisa que foi realizado dentro das propostas curriculares oficiais e da realidade social das escolas públicas do estado de São Paulo.

Esperamos que o nosso trabalho possa servir como auxiliar didático, tanto para alunos de licenciatura quanto para professores, ajudando assim no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem da matemática.

CAPÍTULO 1: CONHECIMENTO PEDAGÓGICO DO CONTEÚDO

Durante a formação acadêmica dos professores de matemática, é comum encontrarmos licenciandos que perguntam o porquê dos estudos de tal disciplina ou conteúdo, uma vez que, nos seus entendimentos, jamais farão uso ou ensinarão tal disciplina (ou conteúdo) para seus futuros alunos de nível básico. Geralmente, tais disciplinas se enquadram na chamada “disciplina dura”, voltada aos estudos da matemática pura e/ou aplicada, sendo essa a razão de seus questionamentos.

Por outro lado, vivenciamos momentos difíceis no ensino da matemática no Brasil, pois o desempenho dos alunos em relação à mesma é baixo, de acordo com as avaliações de desempenho (como PISA, Saresp, SAEB, ENEM, entre outras), evidenciando, entre outras coisas, o déficit de aprendizagem dos alunos em relação à disciplina.

Tendo em vista essa situação, nos cabem as seguintes perguntas:

1. Qual a importância do conteúdo ao futuro professor de nível básico?
2. Em relação ao baixo desempenho dos alunos, qual é a parcela de culpa dos professores?

Na tentativa de respondê-las precisamos entender que o professor necessita de conhecimentos para poder transmiti-los a seus alunos. O licenciando, quando questiona sobre a importância da “disciplina dura”, se esquece de dois importantes aspectos: o primeiro é que o professor da “disciplina dura” está lhe passando, além do conteúdo curricular, um jeito de transmitir determinado conhecimento que depende, por sua vez, do conceito aprofundado da teoria. Segundo, o estudante, muitas vezes, não percebe que ele fará uso dessas disciplinas no ensino, pois, embora ele possa não lecioná-las explicitamente no futuro, os conhecimentos adquiridos são essenciais para o melhor preparo de suas aulas; sabendo a estrutura e a base sobre as quais se constrói a matemática, o professor pode buscar a melhor maneira de expor, ensinar, tirar dúvidas, etc., de acordo com o nível de seus alunos.

Isso evidencia que o professor, independente do nível para o qual vai lecionar, necessita mais do que o conhecimento do conteúdo; torna-se necessário que saiba também como transmiti-lo, então é essencial que haja harmonia entre o conteúdo e a pedagogia.

É importante ressaltar que o primeiro contato do aluno com o novo conhecimento matemático é conduzido pelo professor, porém, não basta que o professor apenas saiba o conteúdo específico de determinada disciplina ou parte dela. É preciso que o docente seja capaz de trabalhar junto com o aluno, escolhendo a melhor metodologia e fazendo as intervenções necessárias nesse processo, garantindo assim a aprendizagem.

Nesse sentido, temos o "Conhecimento Pedagógico de Conteúdo", que iremos citar como CPC, introduzido por Shulman (1986). Segundo este conceito, o professor não somente deve dominar o conteúdo específico a ser ensinado, mas também deve saber articular a aula de forma que consiga transmitir o conhecimento aos alunos de maneira compreensível, levando em consideração o nível em que eles se encontram e as condições de ensino-aprendizagem. Isso deixa claro que apenas o conhecimento específico não é suficiente, assim como apenas o conhecimento pedagógico também não o é, tornando necessário um terceiro eixo do conhecimento que leve em consideração o contexto do ensino. Nas palavras de Veal e MaKinster (1999), o conhecimento pedagógico do conteúdo é formado pela síntese de três bases do conhecimento: o conhecimento específico da disciplina, o conhecimento pedagógico e o conhecimento do contexto (tradução livre).

- **Conhecimento do Conteúdo (ou Específico):** é o conjunto e a organização dos conhecimentos específicos de uma determinada disciplina na mente de um professor. Vai além do conhecimento de fatos e/ou domínios de conceitos, requer a compreensão da estrutura e formação dos temas e assuntos a serem estudados;
- **Conhecimento Pedagógico:** exigido para a mediação da transmissão do conhecimento. Incluem as inúmeras metodologias de aula, o conhecimento do processo cognitivo de aprendizagem, suas várias ramificações e etapas;
- **Conhecimento do Contexto:** é o conhecimento específico do ambiente escolar e os fatores que influenciam diretamente na aprendizagem dos alunos. Abrange o conhecimento específico das dificuldades/facilidades de aprendizagem dos alunos, indisciplina e problemas sociais dos alunos, as dificuldades estruturais da escola, etc.

Todos os conhecimentos citados são relacionados entre si, formando o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo – CPC.

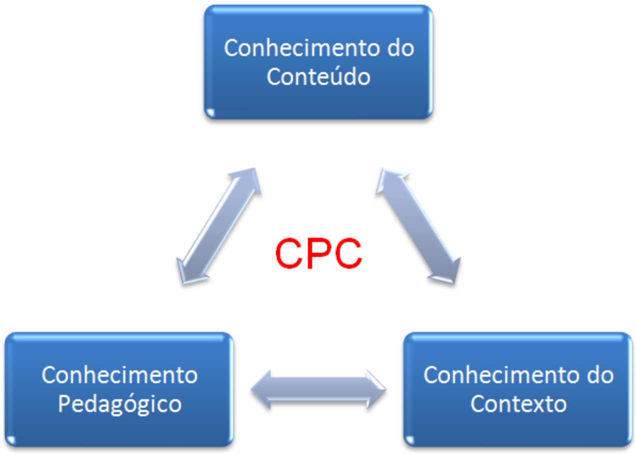


Figura 1 – A formação do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo – CPC

Para entendermos o CPC e como ele se enquadra nessa dissertação, fazemos uma análise da estrutura curricular vivenciada pelo professor, como segue.

1.1 **A importância do currículo escolar**

É corrente ao início do ano letivo ou início de bimestre que os professores se reúnam para traçar o planejamento escolar. Sendo uma obrigação e seguindo as propostas curriculares, os planejamentos são frequentemente registrados apenas em forma de tópicos e posteriormente ficam arquivados, e não é raro que muitas vezes o professor sequer volte a rever esse planejamento. O que chamamos a atenção aqui é o fato do currículo a ser seguido, que foi introduzido no planejamento, segue a mesma linha, podendo ser esquecido ou apenas seguido em forma de tópicos. No nosso entendimento, o currículo está inserido em três diferentes planejamentos: o planejamento da Secretaria da Educação (SEE), o planejamento da escola e o planejamento do professor, cada qual com sua importância, mas que devem ser todos tratados de maneiras diferentes sob o olhar do professor.

Acima desses planejamentos existem os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs); sua importância é percebida, pois neles são estabelecidos os princípios gerais e a importância de cada tópico de ensino, juntamente com as competências e habilidades que os alunos devem alcançar. Isto leva a considerar, para o planejamento do professor, o papel da proposta curricular estadual que reflete os PCNs, e que define o conteúdo mínimo a ser ensinado (a listagem de tópicos estabelece o conteúdo que deve ser trabalhado nas aulas).

No entanto, uma lista de conteúdos não basta para dar início a um processo de ensino aprendizagem, é necessário, além desses, que haja o planejamento escolar (elaborado em consenso entre os profissionais docentes da escola), no qual se estabelece o currículo escolar. Assim, o planejamento do professor, que se baseia neste encadeamento, destaca com relevância os três pilares formadores do CPC.

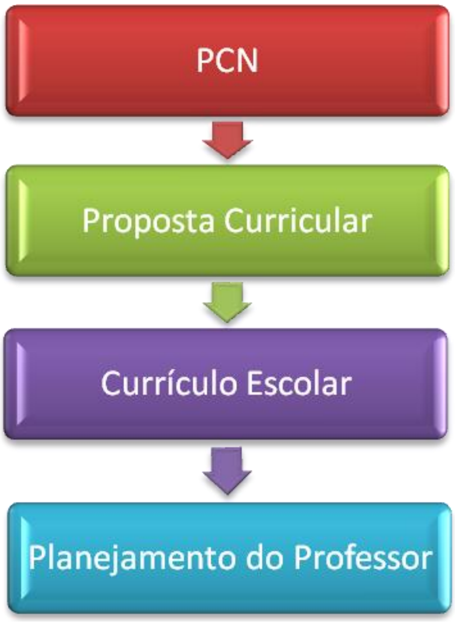


Figura 2 – O processo de formação do currículo e planejamento educacional.

Para exemplificar, tomemos a proposta curricular do Estado de São Paulo e o conteúdo curricular da 6ª série (7º ano). Nela, como conteúdos específicos da disciplina matemática no 2º bimestre, a secretaria da educação sugere em seu planejamento os conteúdos referentes à geometria, como segue:

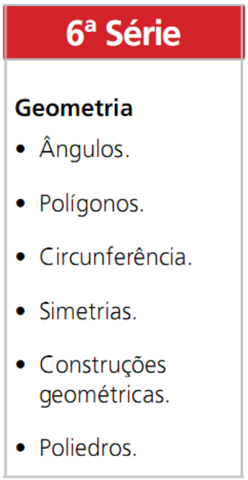


Figura 3 – Conteúdo curricular da 6ª série / 7º ano do ensino fundamental

Observamos que o conteúdo já é apresentado em tópicos, dando a falsa ilusão de fragmentação do currículo. Cabe então aos professores de matemática fazer uma análise da proposta e adequar o planejamento da SEE ao planejamento escolar. Contudo, no momento do planejamento anual, falta aos professores o conhecimento específico de uma turma e do grau das dificuldades encontradas pelos alunos, mesmo que o professor já os conheça de séries anteriores. De fato, devemos levar em consideração as mudanças de comportamento dos indivíduos envolvidos, pois os alunos mudam fisicamente e/ou intelectualmente, assim como os professores também mudam. Sem essas considerações, seria inútil falar sobre experiência na profissão.

Nessa nova percepção, o professor se encontra em uma situação em que tem em mãos o currículo oficial (PCN's e Proposta Curricular), e prepara juntamente com os colegas professores o currículo escolar. Mas como esses não são suficientes, é preciso que se faça planejamento específico para cada turma, considerando os aspectos que influenciam no aprendizado, tais como as dificuldades e déficits dos alunos, a indisciplina, os recursos didáticos disponíveis, entre outros. Uma maior garantia de aprendizagem pode ser obtida com um planejamento que inclui os pré-requisitos específicos para o ensino-aprendizagem de um determinado tópico, os materiais didáticos facilitadores do ensino do tema e as expectativas de possíveis intervenções a serem feitas durante o desenvolvimento na sala de aula.

1.2 **Exemplo do uso do CPC no planejamento do professor**

Para deixarmos mais claro o conceito do conhecimento pedagógico do conteúdo usado, tomemos como exemplo o ensino de ângulo na 6ª série. Esse conteúdo está no planejamento curricular da Secretaria da Educação, aparecendo sob forma de tópico. Com essa proposta em mãos, os professores devem fazer o planejamento anual da escola, tendo em mente o nível esperado para os alunos da 6ª série (7º ano). No entanto, quando o professor tiver contato com os alunos, ele pode perceber os déficits de aprendizado, a desmotivação, as dificuldades que os alunos têm com a geometria e as dificuldades operacionais que dificultam a transmissão do conhecimento. Nesse momento, é preciso mais que o conteúdo curricular estabelecido no planejamento anual, se torna necessária a percepção de como trabalhar esse assunto diante das dificuldades encontradas.

Nesse momento, encontramos a importância da formação sólida na matemática pura para o professor, pois entre todos os conhecimentos sobre ângulos, o professor deve ser capaz de escolher e adaptar aquele que melhor condiz com a situação encontrada em sala de aula. Isso mostra a importância do conteúdo no processo de ensino e aprendizagem e, principalmente, a importância que o profissional da educação deve dar a ele, considerando todos os aspectos que possa influenciar na formação do conhecimento.

Devemos destacar também a importância da experiência profissional do docente, seja ela adquirida pela prática como professor, seja pelo compartilhamento de vivência de colegas de profissão, pois a prática auxilia na formação de ideias e artifícios que irão contribuir para a consolidação do seu conhecimento pedagógico.

A escolha da metodologia de ensino que vise à aprendizagem do aluno também é de suma importância, uma vez que uma metodologia tem influência direta sobre a maneira com que se dará a aprendizagem do aluno sobre o tema trabalhado. No nosso exemplo, queremos dentro da aprendizagem do aluno, a sua participação nesse processo, portanto, devemos escolher uma metodologia facilitadora de tal objetivo, e escolhemos a Metodologia de Resolução de Problemas. Além disso, planejamos também como fazer as intervenções que facilitem o processo de aprendizagem e, por essa razão, estudamos os aspectos pedagógicos da metodologia escolhida, para auxiliar o professor na adaptação de diferentes enfoques para a mediação do conhecimento. No Capítulo 3 apresentaremos com mais detalhes a análise da metodologia de resolução de problemas no planejamento de aulas/atividades.

Portanto, com o conhecimento pedagógico e o conhecimento de conteúdo, o professor faz a escolha da melhor forma de transmissão de um tópico selecionado (no caso o ensino de ângulos) e, planeja para durante o desenvolvimento da aula, a melhor forma de intervenção para encaminhar o aluno à aquisição do conhecimento. De acordo com Schulman (1986, p.9), o professor deve ter em mãos um verdadeiro arsenal de formas alternativas de representação, alguns dos quais derivam da investigação, enquanto outros se originam na sabedoria prática. (tradução livre).

Portanto, devemos estar atentos ao conteúdo, à pedagogia e, principalmente, ao equilíbrio que precisa estar presente no planejamento das atividades e no contexto a ser apresentado nas atividades que serão direcionadas pelo professor.

CAPÍTULO 2: METODOLOGIA DA PESQUISA DE AULA

Em meados de 2008, houve na escola de aplicação da FEUSP, São Paulo- SP, e no Colégio Pedro II, Rio de Janeiro – RJ, um curso de curta duração intitulado Pesquisa de Aula de Matemática. O professor Tsubota, K. (Universidade de Tsukuba), que veio diretamente do Japão especialmente para o evento, ministrou uma aula em cada instituição, sendo a barreira lingüística quebrada pela tradução simultânea da professora Dra.Yuriko Y. Baldin. As aulas que foram acompanhadas por alguns professores observadores seguiram um padrão diferenciado do tradicional, com participação ativa dos alunos e, após as aulas, houve uma reunião de discussão sobre a aula com os professores que a acompanharam e o professor Tsubota. Na reunião houve levantamentos de pontos positivos e negativos da aula, comentários e reflexões sobre a participação e reação dos alunos.

Tivemos o privilégio de participar da aula na Escola de Aplicação da FEUSP e também na reunião entre professores, na qual pudemos acompanhar as reflexões sobre a aula. Percebemos então o quão rica é a reflexão da própria prática docente, e a importância das observações de terceiros, uma vez que muitas vezes não percebemos nossos erros ou acertos em aulas.

Esse capítulo visa apresentar a metodologia de pesquisa de aula e suas contribuições na melhoria da prática docente e no processo de participação efetiva dos alunos, para conectá-la ao desenvolvimento do nosso trabalho.

As referências principais deste capítulo são: Fernandez – Yoshida (Lesson Study, 2004), Isoda – Arcavi – Lorca (El Estudio de Clases Japonés em Matemática, 2007), Stigler – Hiebert (The Teaching Gap, 1999), além das informações históricas do site da comunidade japonesa Japão On Line (www.japaoonline.com.br, consultado em dezembro de 2009).

2.1 **Pesquisa de Aula – Lesson Study**

Pesquisa de Aula é uma tradução de Lesson Study que, por sua vez, se origina do termo japonês jugyokenkyu (jugyo = aula, kenkyu = pesquisa). Pesquisa de Aula é uma metodologia original do Japão. Para entender a origem da metodologia de pesquisa de aula apresentamos a seguir alguns fatos históricos da educação no Japão.

2.1.1 **Pesquisa de aula na história educacional japonesa**

O período feudal japonês (1603- 1868), que chamaremos de Período Edo, precedeu a Restauração Meiji (1868), e durante este período a educação no Japão, assim como a sociedade era estabelecida pelas classes sociais, e o surgimento de diversos estabelecimentos educacionais ocorria para suprir a necessidade das classes mais favorecidas, como os filhos de samurais e da classe dominante. Por volta do século XVII, surgem as Terakoya, uma forma de estabelecimento de ensino, que eram sediados em templos budistas, sendo esses acessíveis ao povo em geral. Durante o Período Edo houve um grande surgimento das Terakoya, sendo elas comuns nas grandes cidades como Edo (futura Tokio) e Osaka, mas também espalhadas nas regiões rurais e costeiras.

Hoje conhecemos uma forma de educação em que um professor é o elemento central em sala de aula, isto é, o professor se coloca à frente de uma sala e transmite expositivamente o conhecimento, e diversos alunos de mesma faixa etária e/ou nível prestam atenção no que está sendo dito e/ou ensinado. O ensino japonês no período Edo era muito diferente, o professor não ficava à frente da sala, este se sentava junto aos alunos e lhes ensinava de forma individual, sendo comum haver em uma mesma turma alunos de diferentes faixas etárias e diferentes níveis de aprendizado. Os assuntos também eram variados e o mesmo professor ensinava disciplinas diferentes a alunos diferentes em uma mesma turma. Tal método era a instrução individualizada.

Figura 4 – Terakoya para meninas: ensino individual, vários níveis e diferentes assuntos.
Fonte: http://chnm.gmu.edu/cyh/primary-sources/131

Outro fato importante é que durante o Período Edo (1603 – 1868), o Japão viveu um período de isolamento quase total do mundo exterior, aberto somente ao comércio com a China e com a Companhia Holandesa das Índias Orientais. Tal isolamento não permitiu a divulgação das ideias educacionais provenientes do ocidente, fato que não impediu que o Japão fosse, na época, um dos países mais educados do mundo, com cerca de 43% dos homens e 10% das mulheres alfabetizadas.

O período que se segue ao fim do Período Edo e início da Restauração Meiji (1868 - 1912), o Japão tem uma reabertura ao mundo e a educação sofre mudanças, o governo estabelece o Código de Educação e cria uma escola de formação para professores – escola normal – em Tókio no ano de 1872. Com o objetivo de difundir os conhecimentos ocidentais e a metodologia de ensino mais abrangente, o governo contratou professores estrangeiros para lecionar nessas escolas de formação para que, entre outras coisas, ensinem matérias da cultura ocidental e métodos pedagógicos de estilo ocidental, por exemplo, a aula expositiva. A figura a seguir ilustra uma sala de aula no início da Restauração Meiji: “metodologia de ensino da escola elementar, da escola normal”.

Figura 5 – metodologia de ensino da escola elementar, da escola normal.
Fonte: http://chnm.gmu.edu/cyh/primary-sources/131

Logo, os professores japoneses começaram a assistir às aulas dos professores ocidentais, aprendendo além do conteúdo, a lecionar à moda ocidental, uma vez que esses não ensinavam pelo método da instrução individualizada. Assim, os alunos e futuros professores estudavam o método de ensino buscando uma forma de adaptá-lo ao ensino japonês.

Posteriormente, os professores, que frequentaram a escola normal, em Tókio, partiam para o ensino na escola primária anexada à mesma e outras escolas de ensino fundamental espalhadas no país.

Suas aulas eram assistidas por outros docentes que faziam observações, anotações e comentários acerca de materiais didáticos e sobre a aula. Depois, tais anotações eram discutidas em sessões de críticas entre os professores participantes. Tal método foi incentivado pelo governo, sendo então implementado como modelo para todo o país.

Surge, então, a pesquisa de aula, que obviamente sofreu mudanças e aperfeiçoamentos ao longo dos anos, mas hoje é parte do cotidiano escolar japonês, principalmente nas escolas primárias e nas escolas de ensino médio, sendo que muitas escolas vêem a metodologia de pesquisa de aula como algo essencial.

2.2 **Do que consiste a metodologia de pesquisa de aula**

A metodologia da pesquisa de aula, como o nome sugere, é uma metodologia que está focada em pesquisar a aula, focando-se na prática docente, passando pelo planejamento, execução e, posteriormente, reflexão das aulas, buscando não só a melhoria específica da mesma, mas também o aprimoramento docente.

A metodologia, focada na prática docente, é realizada por um grupo de professores da escola, no qual praticamente todos profissionais da mesma área atuam para o bom funcionamento da metodologia. Seu desenvolvimento passa pelos planejamentos individuais e coletivos sobre determinados temas e pela execução das aulas planejadas, porém, após as aulas os professores realizam uma reflexão sobre as aulas realizadas, o que pode implicar mudanças nos planejamentos para novas aulas e de práticas pedagógicas para a execução.

O processo da metodologia de pesquisa de aula é dividido em etapas, como segue:

- **Etapa 1: Planejamento Colaborativo**

Na primeira etapa ocorre o planejamento conjunto das aulas. Uma vez especificado um conteúdo do currículo escolar já estabelecido, vários professores de uma mesma disciplina debatem ideias que ajudam o planejamento de aula(s) específica(s). Nesta etapa ocorre a troca de experiências, os professores se ajudam mutuamente, compartilham materiais, livros e outros recursos, sempre com o objetivo centrado na aprendizagem dos alunos de uma determinada série, na aquisição das competências e habilidades pelos alunos.

Em seguida, o professor que irá executar a aula planeja a sequência didática, considerando nela não apenas o ritmo temporal, mas também prevendo possíveis reações e eventuais dificuldades. Tal sequência é levada ao debate entre os colegas da equipe.

- **Etapa 2: colocando o planejamento em ação**

Nesta etapa ocorre a aula propriamente dita, trabalhando diretamente com os alunos na sala de aula. O planejamento das aulas feito na primeira etapa é colocado em ação, cabendo ao professor ficar atento ao andamento da aula, às dúvidas que eventualmente aparecerão, às falhas que podem surgir na transmissão do conhecimento, ao tempo necessário para a execução das atividades, etc. Destacamos que a aula é aberta a outros professores que colaboraram no planejamento, e também a outros interessados, cabendo a estes o papel de observadores do que ocorre na aula, observando desde os alunos até o professor, anotando os erros e acertos no andamento da aula.

- **Etapa 3: refletindo sobre a aula**

Na terceira etapa, tanto o professor como os professores observadores discutem sobre o andamento e a execução da aula, já que, após verem o andamento real em uma sala de aula, podem fornecer ideias e reflexões sobre a prática didática do docente, assim como sobre a sequência das atividades.

- **Etapa 4: replanejamento da aula**

Nesta etapa, chega o momento de replanejar a aula levando-se em consideração as reflexões e as ideias surgidas na etapa três. Aqui, a intenção é o aprimoramento da aula ministrada anteriormente e que, eventualmente poderá ser conduzida nas turmas dos professores que foram observadores na aula inicial. O próprio professor ministrante pode usar o replanejamento para conduzir aulas com o mesmo tema em outras turmas, ou em outros momentos, incorporando as mudanças e melhorias baseadas nas reflexões e ideias ocorridas na etapa três.

- **Etapa 5: colocando o replanejamento em ação**

Uma vez analisada a aula, que passou pelo processo de replanejamento na etapa quatro, o professor pode trabalhar com seus alunos uma aula que segue a já executada, aprimorada e atendendo as especificidades da turma. Assim também, os demais professores observadores podem aplicar a aula melhorada ou adaptada em suas instituições de origem, disseminando assim a aula pesquisada. Nas execuções das aulas replanejadas pode haver também a presença de professores observadores.

- **Etapa 6: refletindo sobre a “nova versão” da aula**

Similar à etapa três, os professores se reúnem para compartilhar ideias, comentários e observações. É feito, então, o registro da aula, tendo uma grande gama de ideias que se tornam um material valioso na aplicação e reflexão de aulas futuras.

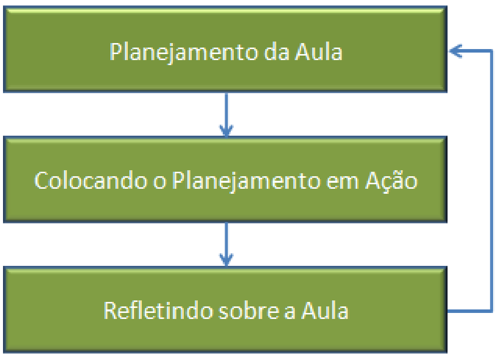


Figura 6 - No diagrama vemos o ciclo das etapas da metodologia de pesquisa de aula.

Observações: Segundo a referência (Fernandez – Yoshida, 2004):

- É comum às etapas quatro, cinco e seis serem opcionais a muitos professores observadores. Os objetivos desses consistem principalmente na aprendizagem de uma forma inovadora de aula e das reflexões críticas feitas pós-aula;
- Da mesma forma, não é comum observarmos professores reaplicando a mesma aula a uma mesma turma. Ao aplicar a aula replanejada, variando professores e consequentemente estilo de ensino, cria-se uma base mais ampla na experiência do processo de ensino/aprendizagem;
- No Japão é frequente a presença, nas aulas do Lesson Study, de professores universitários formadores de futuros professores, assim como a presença de supervisores de secretarias de educação, mostrando a importância dada à metodologia no âmbito educacional japonês.
- Raras vezes ocorre um replanejamento e reaplicação das aulas com uma sequencia já executada pela terceira ou quarta vez, pois é mais vantajoso na aprendizagem dos alunos que aborde um novo conteúdo progredindo no currículo escolar, além de que, ao mudar o enfoque, obtém-se mais dinamismo, pela novidade de um novo tema e conteúdo.

2.3 **Aplicação da metodologia de pesquisa de aula no trabalho**

Primeiramente, devemos destacar que a metodologia de pesquisa de aula está voltada ao trabalho coletivo do corpo docente da escola. No Japão, essa metodologia é muito eficaz, uma vez que há um consenso à sua aplicação, porém o mesmo não se pode dizer da realidade brasileira. Ensinar é uma atividade cultural, como diz Stigler & Hiebert (1999). No Brasil, por exemplo, culturalmente, o corpo docente é mais individualista, sendo não raro encontrarmos professores que não admitem que haja outros profissionais se “intrometendo” em sua prática docente.

O trabalho desta dissertação foi realizado na Escola Estadual Major Telmo Coelho Filho, onde encontramos a barreira da individualidade do corpo docente. Logo, para podermos trabalhar a metodologia de pesquisa de aula, foi preciso realizar adaptações da metodologia original japonesa, incorporando os princípios desta no trabalho individual.

Repensamos, então, a estrutura da metodologia, aproveitando ao máximo suas características. Reestruturamos as etapas da seguinte maneira:

- **Etapa 1: Refletir**

Nessa etapa reunimos um pequeno grupo de três pessoas (Baldin, Felix, Pimentel). Baldin (orientadora do trabalho) e Pimentel (colega de pesquisa no Programa de Mestrado) não são ligados diretamente à E. E. Major Telmo Coelho Filho, mas pesquisadores da Metodologia, o que possibilitou tornar essa etapa similar a Etapa 1 do Lesson Study. Aqui foram analisados o currículo escolar e os conteúdos específicos a serem trabalhados com os alunos em sala de aula. Em seguida, foram discutidas propostas de algumas atividades, tendo como base a Proposta Curricular do Estado de São Paulo. No entanto, não discutimos apenas o conteúdo e currículo. Além de estudar o planejamento das sequências didáticas a serem executadas, consideramos as turmas, suas dificuldades, o déficit de aprendizagem diagnosticado no início do ano letivo e a indisciplina ocasionada por inúmeros fatores, portanto cabendo o "refletir" nessa etapa.

- **Etapa 2: Planejar/Propor**

Após análises curriculares, estudo de temas, e feitas as escolhas de atividades e reflexões sobre o planejamento, fizemos adaptações nas atividades da proposta curricular estadual, tendo foco na aprendizagem participativa dos alunos. Novamente o grupo se reuniu e as discussões foram sobre a metodologia que será aplicada em sala de aula, isto é, a Metodologia da Resolução de Problemas. A palavra planejar está em um sentido mais amplo do que propor problemas, e sim em incluir também a expectativa do desenrolar das etapas da metodologia de resolução por alunos, no contexto da sala de aula, tendo em vista as dificuldades mencionadas acima. Pesquisamos também o tipo de material concreto e as atividades adequadas aos tópicos selecionados.

Uma vez discutidas as atividades, planejamos a sequência didática a ser levada à sala de aula, com o cuidado de promover a aprendizagem participativa dos alunos. Para isso planejamos situações que favoreçam a ação dos alunos, seguindo as etapas da Metodologia de Resolução de Problemas.

- **Etapa 3: Executar**

Na nossa adaptação de Lesson Study, não houve possibilidade de grupo de professores que acompanhe o andamento da aula durante aplicação das atividades. Porém, em alguns momentos, houve o acompanhamento das aulas da professora orientadora desse trabalho. Portanto, esta etapa foi trabalhada de maneira quase totalmente individual, e executamos o nosso plano de ação, de acordo com o planejamento.

Trabalhando de forma individual, ficamos atentos ao andamento das aulas, e fizemos anotações das ocorrências mais significativas em sala de aula, como perguntas dos alunos, métodos de resoluções usados por eles, o interesse pela aula, etc. Essas anotações constituíram um diário de bordo que serviu como subsídio para as reflexões posteriores. Em muitas ocasiões utilizamos também o recurso de gravar os diálogos durante a aula, para subsidiar o diário de bordo. Foi importante observarmos nossa própria conduta em sala de aula, e percebemos a atenção dada de forma individual e coletiva aos alunos, assim como o direcionamento que demos à resolução dos problemas por alunos. Isto nos ajudou a refletir após a aula, se a mesma ocorreu de acordo com o planejamento ou sobre onde surgiram dificuldades não previstas.

- **Etapa 4: Avaliar**

Esta etapa foi similar à etapa Refletindo sobre a aula do Lesson Study. Aqui analisamos as aulas lecionadas, os resultados dos alunos e a prática do professor, reunindo o grupo inicial da Etapa 1(Baldin, Felix e Pimentel). As aulas individuais foram reportadas ao grupo. Consideramos também na discussão, o contexto escolar em que as aulas foram trabalhadas e as turmas em questão (suas dificuldades, déficit e indisciplina). Avaliamos também as mudanças na relação professor-aluno, o pensamento crítico do aluno e a aprendizagem dos mesmos, mediante a análise dos erros e acertos dos alunos.

Em seguida, assim como na metodologia Lesson Study, houve uma retomada das etapas anteriores, por meio das quais refletimos e replanejamos a aula, com a intenção de melhorá-la e aperfeiçoar a prática docente. No nosso trabalho, as aulas “aperfeiçoadas” foram lecionadas em outras turmas, quando houve a possibilidade do efeito comparativo entre os desenvolvimentos de uma mesma aula.

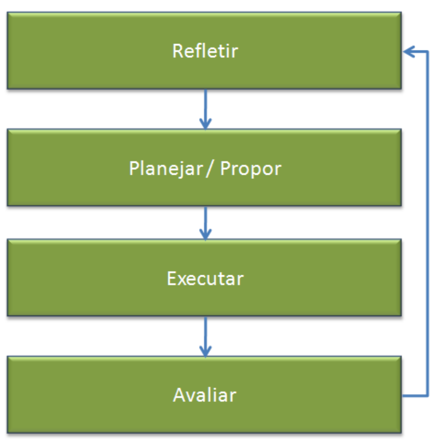


Figura 7 - Etapas da metodologia de pesquisa de aula adaptada.

É importante observar que qualquer que seja a metodologia utilizada na transmissão e mediação do conhecimento, o professor deve ficar atento para a eficácia de tal método, pois mesmo que um método seja aplicado de acordo com um planejamento prévio, não se tem de antemão a garantia de elevar o nível de aprendizagem dos alunos, como pretendido (STIGLER; HIEBERT, 1999). Por isso é importante a etapa de avaliar para voltar à etapa de refletir e replanejar, pois a repetição do ciclo permitirá o aperfeiçoamento da prática docente.

Lembramos que a Metodologia da Pesquisa de Aula (Lesson Study) vem sendo difundida no mundo, principalmente durante a última década, em países da Europa e América, gerando estudos sobre sua eficácia. Já temos estudos de experiências feitas nos EUA, na Alemanha e agora com este trabalho no Brasil.

CAPÍTULO 3: APRENDIZAGEM PARTICIPATIVA E A METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Não é preciso muito tempo de magistério para que um professor de matemática perceba que a grande maioria de seus alunos, seja de ensino fundamental ou médio, possui certa aversão à matemática. Muitos alunos desistem da matemática por acumularem anos de déficit na aprendizagem ou por não verem sentido na matemática escolar. Isso se dá principalmente pelo fato que muitos alunos não terem tido contato com a "verdadeira" matemática: em anos de estudos escolares ficaram presos a fórmulas e repetição de exemplos e exercícios, e lhes foi tirado o prazer da descoberta.

Por outro lado, é comum também ouvirmos relatos de professores que, em resumo, reclamam de seus alunos dizendo que os mesmos não estudam e que não têm interesse pela matemática (na maioria das vezes, apenas respondem às perguntas feitas de forma direta pelo professor).

Visando o aumento de interesse pela matemática, a participação dos alunos na construção de seus próprios conhecimentos pode se tornar uma ferramenta poderosa na reconquista do interesse pelo estudo da matemática. Tendo como tema principal a participação dos alunos, esse capítulo discute o processo da aprendizagem participativa pela metodologia de resolução de problemas.

3.1 **Metodologia de Resolução de Problemas**

A metodologia de resolução de problemas que foi trabalhada nesta dissertação, baseia-se na metodologia sistematizada por Polya, G. em "A arte de resolver problemas", (1978), onde, pelas próprias palavras de Polya temos que:

> "uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O Problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus meios, experimenta o sentimento da autoconfiança e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade suscetível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter". (POLYA, 1995, p. 5).

Podemos notar pelas palavras de Polya que os problemas são de grande valia no desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo, incentivam o aprendizado e nos mostram que a participação do indivíduo em seu próprio aprendizado é fundamental.

Além disso, vemos que resolver um problema não é apenas encontrar a reposta para a incógnita. Se assim o for e o professor partir desse princípio, abrirá mão de grandes oportunidades didáticas que um problema pode oferecer.

A metodologia de resolução de problemas é composta por quatro etapas, para cujo entendimento Polya lista uma série de indagações para cada uma das etapas. Na página 5 de seu livro, Polya apresenta o seguinte exemplo de exercício:

- “Calcular a diagonal de um paralelepípedo retângulo do qual são conhecidos o comprimento, a largura e a altura”.

Partindo então de um exercício proposto, seguem as etapas com suas referentes indagações, pelas quais será desenvolvida a metodologia (segundo a referência citada):

Compreensão do problema

“Qual é a incógnita?”. “Quais são os dados?”. “Qual é a condicionante?”. “É possível satisfazer a condicionante?”. “A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória?”. “Trace uma figura. Adote uma notação adequada.”. “Separe as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las?”

Estabelecimento de um plano

“Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente?”. “Conhece um problema correlato?”. “Conhece um problema que lhe poderia ser útil?”. “Considere a incógnita e procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante”. “Eis um problema correlato e já antes resolvido. É possível utilizá-lo? É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar o seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização? É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volte às definições.”

“Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver algum problema correlato. É possível imaginar algum problema correlato mais acessível? Um problema mais genérico? Um problema mais específico? Um problema análogo? É possível resolver uma parte do problema?”. “Mantenha apenas uma parte da condicionante, deixe a outra de lado; até que ponto fica assim determinada a incógnita? Como pode ela variar? É possível obter dos dados alguma coisa de útil? É possível pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita? É possível variar a incógnita, ou os dados, ou todos eles, se necessário, de tal maneira que fiquem mais próximos entre si?”

“Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? Levou em conta todas as noções essenciais implicadas no problema?”

Execução do plano

“Ao executar o seu plano de resolução, verifique cada passo. É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?”

Retrospecto

“É possível verificar o resultado?”. “É possível verificar o argumento?”. “É possível chegar ao resultado por um caminho diferente?”. “É possível perceber isto num relance?”. “É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?”.

É possível perceber pelas indagações sugeridas que existe um direcionamento na condução do raciocínio, evidenciando a importância desta lista nomeada pelo próprio Polya como “a lista”. Ressaltamos também que o autor começa partindo do suposto de que o problema possui alguma incógnita a ser determinada (no exemplo, encontrar a diagonal, e uma de suas primeiras indagações é: “qual é a incógnita?”). No entanto, nem sempre o problema trabalhado trata-se de alguma incógnita a ser encontrada. Muitas vezes trabalhamos com problemas que envolvem conceitos e/ou demonstrações, mas afirmamos que mesmo nesses casos podemos usar a metodologia de resolução de problemas, de tal modo que seguir suas etapas para conduzir e orientar os alunos potencializa a oportunidade de aprendizado e a participação dos mesmos em sala de aula na busca por conhecimentos.

A Metodologia do Polya que estabelece as etapas da Resolução de Problemas elucida a arte de resolver problemas como uma atividade matemática, e não discorre exatamente como uma Metodologia de Ensino por parte do professor. No nosso trabalho, introduzimos as ideias de Polya no planejamento de atividades. O trabalho de pesquisa desta dissertação nessa direção se baseia nas ideias didáticas contidas em Baldin (2004), que incorpora as etapas da resolução de problemas como formas de promover o protagonismo dos alunos na construção de conhecimento. Na referência citada, há uma classificação dos “problemas” que devem ser trabalhados nas aulas de matemática, entre os quais se enquadram as “situações problema” que são apresentadas e desenvolvidas por meio de sequencias didáticas, cujas soluções conduzem a resultados relevantes e construção de conceitos e de argumentações. Segundo a referência, os problemas de matemática no ensino básico podem ser de três tipos, variando de exercícios de fixação ou de aplicação imediata de técnicas, sequências de atividades que conduzem a construções de conceitos ou sistematização de propriedades, aos reais problemas que exigem a modelização e a montagem de estratégias específicas. Introduzir as etapas de Polya na condução de sequências didáticas pode parecer uma atividade indutora, conduzida pelo professor, mas tem o objetivo pedagógico de levar os alunos a vivenciarem as fases da resolução de problemas dentro da perspectiva de aprendizagem participativa. No planejamento das situações de aprendizagem pesquisadas nesta dissertação incorporamos a Metodologia de Resolução de Problemas como norteadora das atividades que visam à participação dos alunos na construção de seus conhecimentos, quer sejam nas situações de problema ou na síntese de resultados (teoremas) matemáticos.

Favorecer a mudança de atitude do aluno que o torne capaz de resolver problemas como meio de desenvolver a compreensão de conceitos matemáticos e raciocínios lógicos, assim como de estabelecer segurança e autonomia na elaboração de estratégias e na validação de resultados, são os objetivos deste trabalho ao adotar a metodologia de resolução de problemas sob a perspectiva de aprendizagem participativa.

3.2 **Uso da Metodologia de Resolução de Problemas no processo de aprendizagem**

Nosso objetivo principal ao usar a metodologia de resolução de problemas é a participação dos alunos em sala de aula, fazendo com que os mesmos sejam capazes de construir o próprio conhecimento. Para isso, atentamos a vários aspectos, uma vez que, escolher um problema e apenas executar (quem o executa? E como?) as etapas da metodologia não é suficiente para garantir a aprendizagem significativa esperada. Por exemplo, já discorremos no Capítulo 1 que necessitamos incorporar no planejamento de uma aula o currículo escolar, o currículo da sala de aula, a turma a ser aplicada (considerando o nível dos alunos, os déficit de aprendizagem, indisciplina, etc.), como o conhecimento pedagógico de conteúdo subjacente a este planejamento.

Lembramos então que o planejamento de uma aula deve conter, junto com o conteúdo, a expectativa da participação dos alunos e resultados almejados na aquisição de conhecimentos por eles. A integração e o contato do aluno com a matemática de forma mais participativa abrem espaços para a manifestação dos alunos e suas percepções. As observações destas manifestações permitem analisar, no retrospecto da aula, a eficácia da aula planejada mediante uma avaliação mais aprofundada do nível de aprendizagem.

Logo, a escolha adequada do problema e o planejamento da aula que permita o desenvolvimento das etapas da resolução de problemas pelos alunos se tornam eixos norteadores do nosso trabalho. Lembramos ainda que o nosso plano é seguir a Proposta Curricular do Estado de São Paulo e, portanto, o planejamento das atividades foi realizado analisando suas sugestões.

Apresentamos um exemplo da análise de uma atividade desta proposta, para ilustrar esta etapa de reflexão para o planejamento.

Exemplo:

Trabalhamos os conteúdos da 6ª série (7º ano) e analisamos a proposta curricular do estado de São Paulo, tanto o caderno do professor quanto o caderno do aluno. No caderno do professor, encontramos os assuntos a serem abordados em determinados exercícios e, principalmente, quais as competências e habilidades a serem desenvolvidas por cada tema apresentado. Já no caderno do aluno, encontramos os exercícios sugeridos e as chamadas Situações de Aprendizagem. O próximo capítulo deste trabalho traz uma análise mais específica da proposta curricular e concentramos nas linhas a seguir nos aspectos de planejamento.

Analisamos a seguinte situação de aprendizagem, constante no caderno do aluno e apresentada em forma de exercício. Mostramos como trabalhamos a metodologia de resolução de problemas para planejar a aula sobre esse exercício, na expectativa de conseguir os resultados desejados:

- Problema: Mostre, por meio de desenhos, que $\frac{2}{5}$ é equivalente a $2 \div 5$. (Para esse exercício, o aluno deverá ter visto antes a equivalência entre $\frac{3}{4}$ e $3 \div 4$ mediante figuras).

Percebemos que a ideia a ser trabalhada aqui é a de representação de uma fração como resultado da divisão do numerador pelo denominador. Analisando o caderno do professor, encontramos essa ideia e a importância de estabelecer esse conceito visando estudos posteriores na 7ª série (8° ano), sobretudo nos estudos de números racionais.

Procuramos então um modo de usar a metodologia de resolução de problemas para planejar a aula, ou ainda, seguindo a orientação dada, levar o aluno a estudar primeiro a equivalência entre $\frac{3}{4}$ e $3 \div 4$ utilizando figuras e, posteriormente, o aluno poderia usar a ideia trabalhada para resolver o problema proposto. Porém, percebemos que a sugestão da proposta curricular é que um modelo anterior seja imitado para resolver a situação problema apresentada.

Voltando novamente ao caderno do professor, encontramos a sugestão para usar a ideia, por meio de ilustrações, de três bolos repartidos entre quatro amigos em partes iguais e mostrando, posteriormente, a equivalência da situação com a fração $\frac{3}{4}$ também por meio de ilustrações. No entanto, para aproveitar a metodologia de resolução de problemas que vise à participação do aluno, o professor não pode simplesmente ir à lousa para fazer desenhos, e esperar que os alunos adquiram esse conhecimento ouvindo explicações do professor. Especialmente, quando se almeja que os alunos possam reconhecer problemas correlatos e raciocinar adequadamente.

Propomos então um problema que possa atender à metodologia e que use as orientações da proposta curricular:

- "Quatro amigos querem dividir três pizzas, de mesmo tamanho, igualmente entre eles. Como fazer essa divisão? Qual a fração que representa a parte que cada amigo comerá?"

Discutindo sob forma de uma situação problema, podemos explorar a equivalência entre fração e divisão com mais eficiência. Partimos então ao planejamento da aula em si, deixando claro o objetivo principal, os objetivos secundários, os materiais a serem usados, um roteiro do encaminhamento dos questionamentos e as expectativas de resoluções dos alunos. Uma vez que usamos a metodologia de resolução de problemas e pretendemos que haja participação do aluno, exploramos no planejamento as quatro etapas da metodologia com espaço para a participação do aluno.

Dessa forma, o planejamento para essa aula ficou como segue:

3.2.1 Exemplo de Planejamento 1

Tema: frações como divisão do numerador pelo denominador;

Problema: quatro amigos querem dividir três pizzas, de mesmo tamanho, igualmente entre eles. Como fazer essa divisão? Qual a fração que representa a parte que cada amigo comerá?

Objetivo Principal: participação dos alunos na construção de seu próprio conhecimento de tal forma que estabeleçam o significado entre frações como divisão do numerador pelo denominador;

Objetivos Secundários: que os alunos resgatem a ideia de frações como repartir em partes iguais e tomar certo número de partes, e que encontrem representações de frações equivalentes;

Material: placa de Isopor e E.V.A. cortado em forma de disco. O material de E.V.A. será usado para representar as pizzas enunciadas no problema, e as soluções encontradas pelos alunos serão mostradas fixando-as na placa de isopor expondo-as para classe.

A aula: primeiramente devemos expor o problema aos alunos. Uma vez que no problema há quatro amigos, simulamos a situação dividindo a turma em grupos de quatro amigos. Logo, planejamos as etapas da metodologia de resolução de problemas:

- **1ª etapa:** o aluno precisa entender o problema. Pediremos aos alunos que leiam e entendam o problema. O professor pode fazer as indagações *da lista* de Polya, para conduzi-los. Dado um tempo para que os alunos reflitam, pediremos aos mesmos que exponham seus entendimentos do problema e o professor anotará na lousa as informações relevantes coletadas, organizando assim a participação do aluno e de seus colegas na aula. Distribuiremos os modelos em E.V.A. para cada grupo para que eles possam explorar o problema e a situação apresentada;
- **2ª Etapa:** encontrar conexões entre os dados e a incógnita e traçar um plano de resolução. Nessa etapa diremos aos alunos que eles podem cortar o material em E.V.A., mas enfatizamos que eles devem ter certeza de que, ao cortarem, farão a divisão correta, pois não haverá outro material a ser distribuído. Com isso levaremos os alunos a pensar em um método de resolução para não errarem quando cortarem o material. O professor irá circular entre os grupos orientando-os;
- **3ª Etapa:** executar o plano de resolução. Aqui, os alunos, após terem estabelecido um plano de solução, recortarão o material E.V.A. A partir daí, o professor indagará a cada grupo sobre como chegaram à solução obtida e, após o grupo expor suas ideias para classe, o professor as anotará na lousa. Dessa forma, todos os grupos compartilharão suas ideias e contribuirão para o aprendizado coletivo. Uma vez que recortem o E.V.A., os alunos irão à lousa e explicar suas soluções para a classe na placa de isopor, fixando-as.

Espera-se que algumas soluções apareçam como no exemplo abaixo:

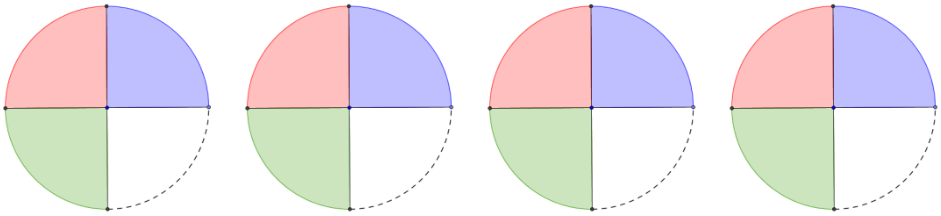


Figura 8 – Uma solução esperada.

Ou ainda:

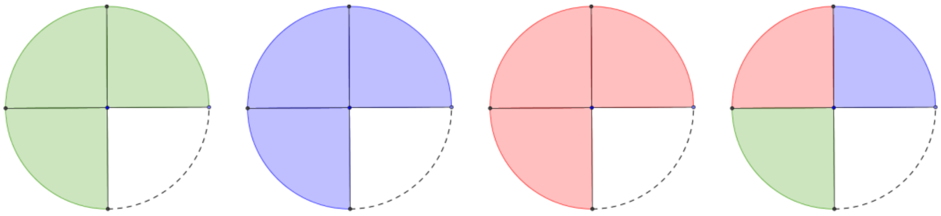


Figura 9 – Outra solução esperada.

Nessa etapa, será importante que o aluno perceba a relação entre as representações e as frações, o professor poderá pedir que eles escrevam matematicamente as etapas de solução conduzindo-os a essa percepção.

Espera-se também que, analisando os passos, os alunos possam encontrar relações entre frações equivalentes, como:

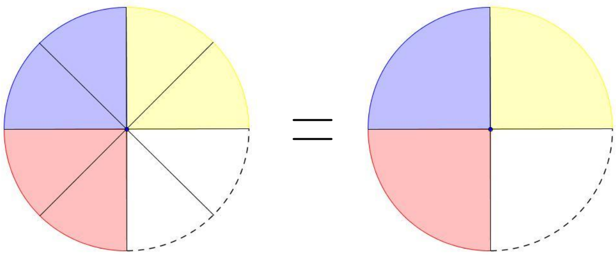


Figura 10 – A representação entre as frações equivalentes $\frac{6}{8}$ e $\frac{3}{4}$

- **4ª Etapa:** analisar a solução. Nessa etapa, faremos um apanhado geral sobre os conceitos envolvidos na solução do problema, de tal forma que os alunos exponham sobre a matemática envolvida no exercício e o que eles aprenderam nessa aula. Será importante que os alunos façam uma síntese da aula, expondo sobre o que aprenderam na aula e com o exercício. Em outras palavras, deverá aparecer claramente na síntese da aula que uma fração pode representar o resultado de uma divisão do numerador pelo denominador. Uma vez que possivelmente haverá dificuldades na exposição das ideias pelos alunos, o professor deverá auxiliá-los na formulação da síntese da aula.

É importante a análise ao final da aula, sendo que os estudantes já terão condições de resolver o problema do caderno do aluno, bastando que eles percebam a relação existente entre os exercícios do mesmo caderno. Como atividade para casa, o caderno do aluno traz a sessão “O que eu aprendi...” onde os alunos escrevem textos sobre o que eles viram e aprenderam na aula do dia. É muito importante que cada aluno faça essa atividade e o professor analise esse material, pois com isso é possível perceber o nível de aprendizagem dos alunos, quantos realmente entenderam o que foi trabalhado em sala de aula, suas dificuldades, ou ainda dúvidas pendentes, etc.

O replanejamento para aulas futuras continuará mediante reflexões sobre a aula e sobre a turma trabalhada: se será preciso uma retomada do conteúdo, se será necessária uma nova e diferente abordagem do mesmo assunto, aplicações de exercícios e estratégias que façam o aluno usar o conteúdo aprendido, etc.

3.2.2 Exemplo de Planejamento 2

Analisando o caderno do professor e o caderno do aluno referente ao 2º bimestre da 6ª série/7º ano, encontramos muito pouco (ou nada) sobre a metodologia da régua e do compasso. O grande problema é que, mesmo em séries posteriores, as construções geométricas com a metodologia da régua e do compasso não aparecem na proposta curricular, negando ao aluno o direito de aprender uma metodologia que por séculos faz parte do conhecimento matemático e que facilitaria o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

Por essa razão, resolvemos trabalhar essa metodologia durante algumas semanas com os alunos, apresentando as construções básicas e explorando posteriormente os conteúdos do caderno do aluno, onde as construções - que são feitas utilizando o transferidor ou esquadros - são substituídas ou acrescentadas pelas construções com régua e compasso.

Em alguns casos acrescentamos atividades que se adaptam à metodologia, atividades estas que não estão no caderno do professor ou do aluno.

No exemplo a seguir, trabalhamos o planejamento de uma atividade envolvendo as construções com régua e compasso, e exploramos um importante resultado matemático: a desigualdade triangular.

Tema: construções régua e compasso e a desigualdade triangular;

Objetivo Principal: trabalho coletivo e participação dos alunos na construção de seu próprio conhecimento de tal forma que consigam usar as ferramentas régua e compasso no entendimento da desigualdade triangular fazendo conjecturas;

Objetivo Secundário: entender as possibilidades de construções de um triângulo, dadas medidas de três segmentos;

Material: régua e compasso;

Pré-requisitos: nas sessões anteriores à essa aula, os alunos se familiarizam com o uso das ferramentas régua e compasso, com construções de triângulos dados três segmentos de medidas variáveis, estrategicamente escolhidos que possibilitem as construções;

Problema: dados três segmentos de medidas quaisquer, qual a condição para que possamos construir um triângulo?

A aula: o professor inicialmente desenhará algumas ternas de segmentos de medidas variáveis (sem medidas numéricas) na lousa:

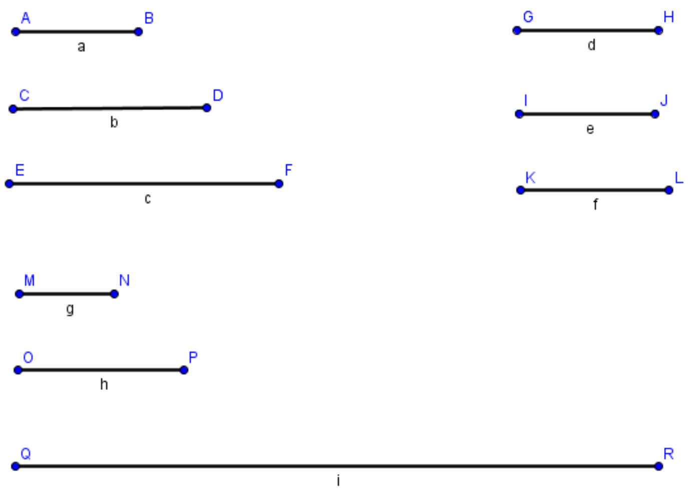


Figura 11 – ternas de segmentos de medidas variáveis.

Esses segmentos devem ser de tal forma que com algumas ternas de segmentos seja possível construir um triângulo, e com algumas outras não seja possível, para que os alunos percebam que nem sempre a construção é possível.

Após essas verificações passaremos ao problema principal:

- “Dados três segmentos de medidas quaisquer, qual a condição para que possamos construir um triângulo?”

Após isso, pela metodologia de resolução de problemas, teremos as seguintes etapas:

- **1º Etapa:** é preciso compreender o problema. É nesse momento que o aluno terá que entender quais são os dados do problema, e o que está sendo solicitado. Espera-se que eles comecem a raciocinar com a visualização do problema, tomando como base as situações das construções anteriores ou com material concreto, por exemplo, manipulando canudinhos ou palitos para simular as situações, para visualizar os possíveis triângulos.

Intervenção: se os alunos não pensarem sobre as construções desenhadas, o professor poderá sugerir-lhes a opção de trabalhar com material concreto, podendo trabalhar ele mesmo com lápis, canudos ou palitos junto com a classe.

- **2º Etapa:** levar os alunos a dar o passo seguinte. O que é possível fazer com os dados do problema? Existe algum meio de testar a viabilidade da construção? Utilizou todos os dados?

Os alunos deverão tentar construir alguns triângulos usando ternas de segmentos de medidas variáveis, percebendo que o uso do compasso permite analisar em que casos a construção é possível e, principalmente, observar quando a mesma não é possível. É o momento dos alunos perceberem a função do compasso e uso estratégico do mesmo, para analisar a situação problema.

Intervenção: o professor dará algumas medidas de segmentos para que os alunos tentem construir o triângulo e, estimular-lhes a percepção das somas de segmentos e a desigualdade.

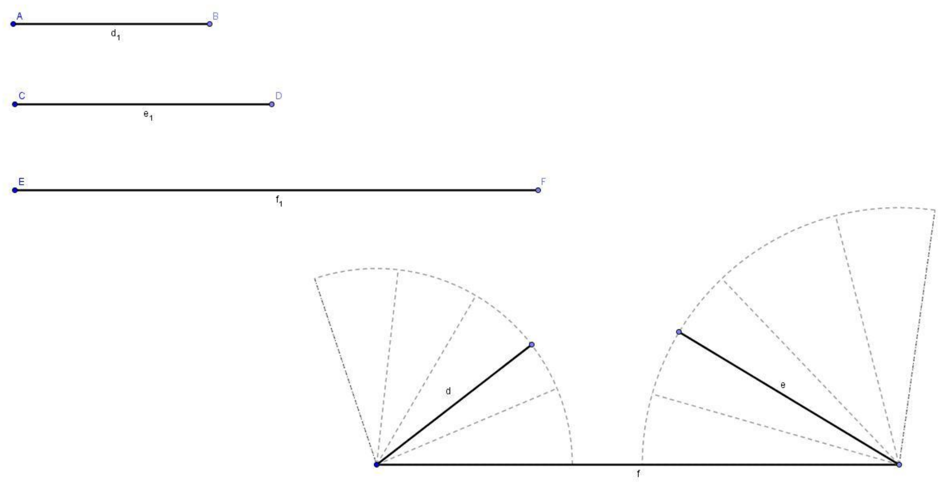


Figura 12 – Exemplo de construção impossível do triângulo.

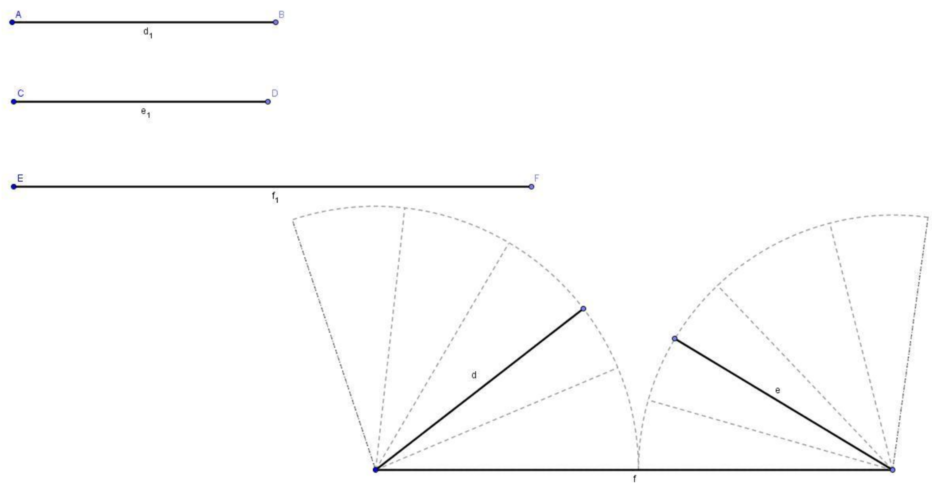


Figura 13 – Outro exemplo de construção impossível do triângulo.

➢ **3º Etapa**: executar o plano. O professor deverá coordenar as participações dos alunos e sugerir a organização das respostas para facilitar-lhes a conclusão final. Deverá verificar, obviamente, se está claro aos alunos que os passos levam à solução do problema.

Nessa etapa, os alunos, através de suas anotações e discussões, deverão estabelecer uma estratégia para organizar informações de modo que haja possibilidade de analisar quando é possível construir um triângulo, dadas medidas de três segmentos, e quando não é possível. Até o momento, estabelecemos a construção da ideia por trás desse importante resultado. O objetivo da aula é levar os alunos à síntese desse resultado matemático, utilizando as etapas da resolução de problemas no desenvolvimento da atividade dentro da sala de aula.

Expectativa: espera-se que os alunos consigam perceber que, para criar um triângulo, a medida de cada segmento (que será um lado do triângulo) deverá ser menor que a soma das medidas dos outros dois. E que finalizem estabelecendo como uma conjectura, a propriedade da desigualdade triangular:

➢ Em um triângulo o comprimento de um dos lados é sempre menor que a soma dos outros dois.

➢ **4ª Etapa:** os alunos deverão examinar a solução obtida e justificar seus argumentos. Nessa etapa o professor poderá conduzir os alunos a perceberem que o fato da colinearidade dos pontos na transposição das medidas é um dos casos que inviabiliza a construção do triângulo, e levá-los a uma argumentação. É importante que o aluno se convença que a possibilidade da construção está condicionada à soma das medidas de dois lados ser maior que a medida do terceiro lado restante, e portanto, três desigualdades necessitam ser satisfeitas. Se surgirem muitas dúvidas, por exemplo, ocasionadas pela imprecisão das ferramentas, o professor irá usar o computador, explorando as possibilidades do Geogebra e suas opções de geometria dinâmica.

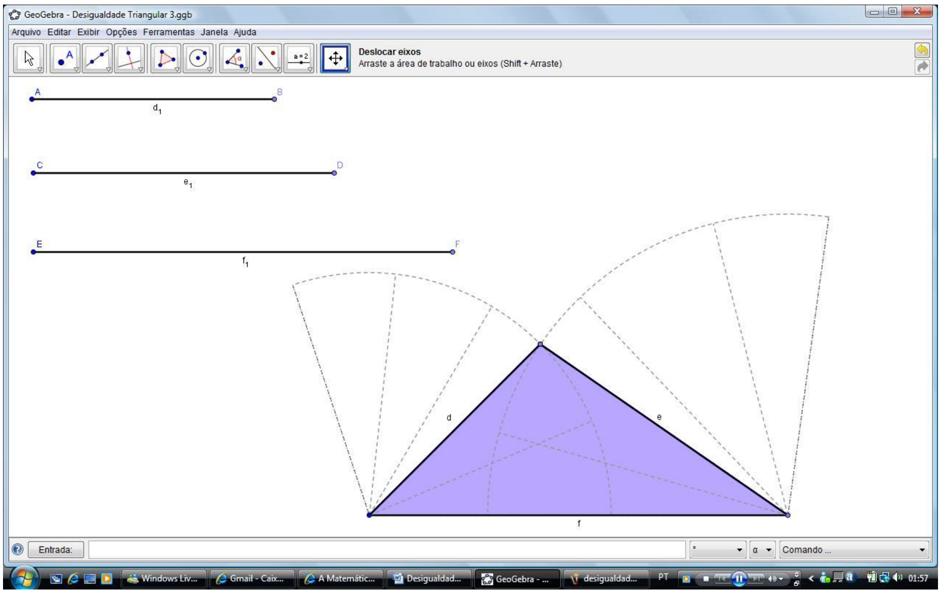


Figura 14 – Uso do Geogebra na ilustração da construção do triângulo.

Avaliações possíveis: os alunos farão uma atividade dizendo, com as próprias palavras, o que eles aprenderam na aula, seguindo os moldes das atividades do caderno do aluno, "O que eu aprendi..."

Como exercício, algumas medidas de três segmentos serão dadas para que os alunos analisem a possibilidade da construção de um triângulo com tais medidas, e consigam justificar as respostas.

Exemplo: "É possível construir um triângulo com medidas de lados respectivamente 5 cm, 7 cm e 12 cm? Justifique sua resposta."

Para tarefa de casa, o professor pedirá que os alunos criem exemplos envolvendo três segmentos e justificando se é possível ou não construir um triângulo com elas. Espera-se que o aluno utilize a desigualdade triangular aprendido nesta aula.

3.2.3 Exemplo de Planejamento 3

No volume dois da Proposta Curricular do Estado de São Paulo, dentro dos cadernos do professor e do aluno, encontramos algumas propostas de atividades referentes ao ensino do Teorema Angular de Tales: a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a dois ângulos retos. Os exercícios propostos para tal estudo são, respectivamente, os exercícios cinco e seis do caderno do aluno e aparecem na íntegra na página 6 do mesmo:

1. Construa com o auxílio de uma régua, um triângulo qualquer, meça cada um dos seus ângulos em tutis e, em seguida, calcule a soma das medidas dos ângulos internos do seu triângulo (em tutis).
2. Construa um triângulo diferente do que construiu na atividade anterior. Repita todos os passos e compare as somas das medidas dos ângulos internos dos triângulos construídos. O que você observou? Com base nos resultados de sua observação, levante uma hipótese a respeito da soma dos ângulos internos de qualquer triângulo e busque uma forma de justificá-las com argumentos lógicos.

Observação: A medida *tuti* é estabelecida no caderno do aluno, obtida pela construção de um transferidor de papel com dobradura em 16 subdivisões, cada divisão representa um *tuti*. Uma análise crítica desta proposta é feita no Capítulo 4, em que apontamos os defeitos da adoção desta medida.

Por uma maior facilidade no aprendizado, resolvemos mudar a atividade, não deixando de apresentá-la em forma de exercícios, mas sim, através de questionamentos em situações que direcionam os alunos na aprendizagem desse importante conteúdo. Uma das razões para tal se dá pela importância do Teorema e de suas inúmeras aplicações na geometria. Logo optamos por trabalhar a metodologia de resolução de problemas e a participação dos alunos.

Tema: Teorema Angular de Tales

Objetivo Principal: participação dos alunos na construção de seu próprio conhecimento de tal forma que consigam interpretar e reconhecer o Teorema Angular de Tales em diversas situações da geometria escolar e do cotidiano.

Objetivo Secundário: familiarizar os alunos com as validações e, através de experimentações, levá-los a entender que os resultados matemáticos possuem justificativas.

Pré-aula: alunos devem desenhar três triângulos em três folhas A4. Em um dos triângulos, deve-se medir com um transferidor os ângulos internos do triângulo e deixá-los anotados. Nos outros dois triângulos, devem fazer marcações nos ângulos e pintar essas marcações com cores diferentes.

Material: para facilitar a explicação, o professor pode confeccionar dois triângulos, ambos feitos em cartolina (em tamanhos grandes suficientes que ocupem boa parte da cartolina), fazendo a marcação dos ângulos e pintando como feito no material do aluno.

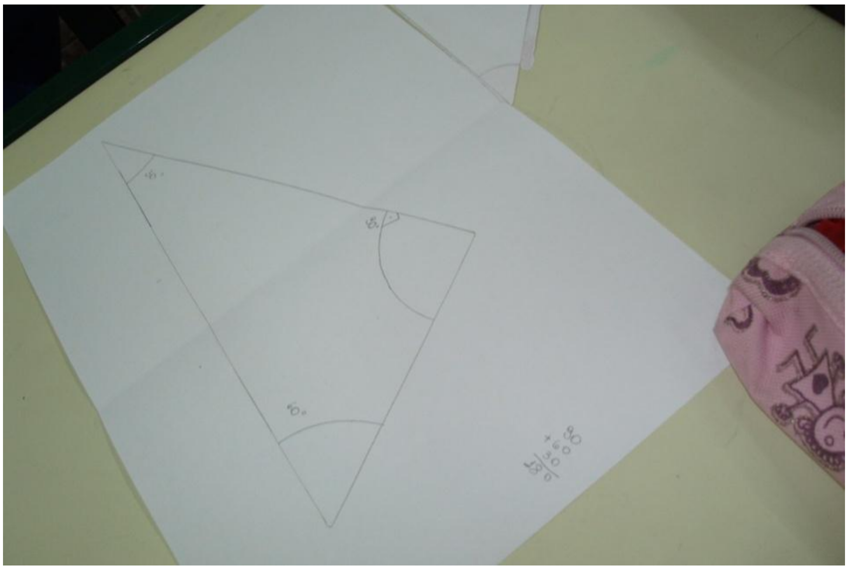


Figura 15 – Atividade pré-aula, alunos fazem medições dos ângulos internos de triângulos.

A aula: para essa aula, os alunos já devem estar familiarizados com o conceito de ângulo, ângulo reto, ângulo raso e ângulo interno de polígonos. É importante também que o aluno saiba manipular corretamente o transferidor, cabendo uma atenção especial para o uso de ferramentas na geometria. Uma vez estabelecidos esses conhecimentos, e com o material feito no pré-aula, começaremos a aula com um questionamento:

- “Por curiosidade, quanto deve dar a soma dos ângulos internos de nossos triângulos?”

Nesse momento não adiantaremos nada sobre o teorema, pois queremos que os alunos o descubram por si. O professor poderá direcionar os alunos, pedindo para que somem as três medidas dos ângulos internos dos triângulos feitos por eles. Então, o professor preparará uma tabela colocando o resultado encontrado por cada aluno.

Expectativas: Espera-se que na tabela apareçam valores próximos de 180º, ou exatamente 180º. Todavia, poderão aparecer valores muito diferentes desse valor e, então, o professor pedirá para que esses alunos refaçam as medições e coloquem o novo valor encontrado na tabela, dando a oportunidade para que o aluno aprenda a corrigir seus erros.

Seguirão mais questionamentos:

- “É possível perceber alguma relação na tabela?”

Expectativas: esperamos que os alunos percebam que a soma é 180º ou próxima de 180º. O professor anotará na lousa as afirmações feitas pelos alunos, sempre pedindo sua participação. Após as afirmações dos estudantes, podemos seguir com os questionamentos, conduzindo a uma formulação de situação problema que se relacione ao teorema:

- “Nessa afirmação (a soma é muito próxima de 180°), importa o tipo do triângulo?”

Aqui podemos pegar alguns triângulos feitos pelos alunos, e até mesmo os feitos pelo professor e compará-los, mostrando ao aluno que a afirmação tem indícios de ser verdadeira independentemente do tipo ou tamanho do triângulo.

- “Até aqui podemos fazer algum afirmação a respeito de triângulos?”

Expectativas: nesse momento esperamos que os alunos conjeturem alguma afirmação do tipo: “A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é (próxima de) 180º”. Espera-se que alguns alunos ainda tenham a ideia de proximidade, pois os valores da tabela feita não são todos iguais a 180º. Mais indagações:

- “Mas será que a soma não dará sempre 180°?”

Até esse momento estabelecemos a construção da ideia por trás desse importante teorema. Ao introduzir o problema principal (a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre 180?), começamos de fato a trabalhar a metodologia de resolução de problemas e seguimos suas etapas:

- **1ª Etapa:** esperamos que essa etapa esteja bem estabelecida, pois o problema foi formulado, induzido pelas indagações, pelas construções da tabela e pelas respostas dos alunos até então.

- **2ª Etapa:** nesse momento, os alunos terão várias ferramentas ao seu dispor: a tabela, as afirmações feitas por ele mesmo ou pelos colegas, os tipos de triângulos variados feitos por eles mesmos. Os alunos, entretanto, terão que estabelecer uma discussão sobre a questão: “Se a soma é sempre 180°, então porque algumas somas deram diferentes?”, “ Existe alguma evidência de que a soma é sempre 180º ?” Essas questões são complicadas para serem trabalhadas completamente nessa série, pelo fato da demonstração formal ser abstrata demais para o nível dos alunos, e logo, o professor poderá conduzir uma verificação informal que leve os alunos a confiarem na validade desse resultado. Pediremos aos estudantes que peguem o segundo triângulo feito de antemão por eles, no qual foram pintadas as marcações dos ângulos. Seguiremos então com a atividade clássica do recorte dos ângulos e junção formando um ângulo raso:

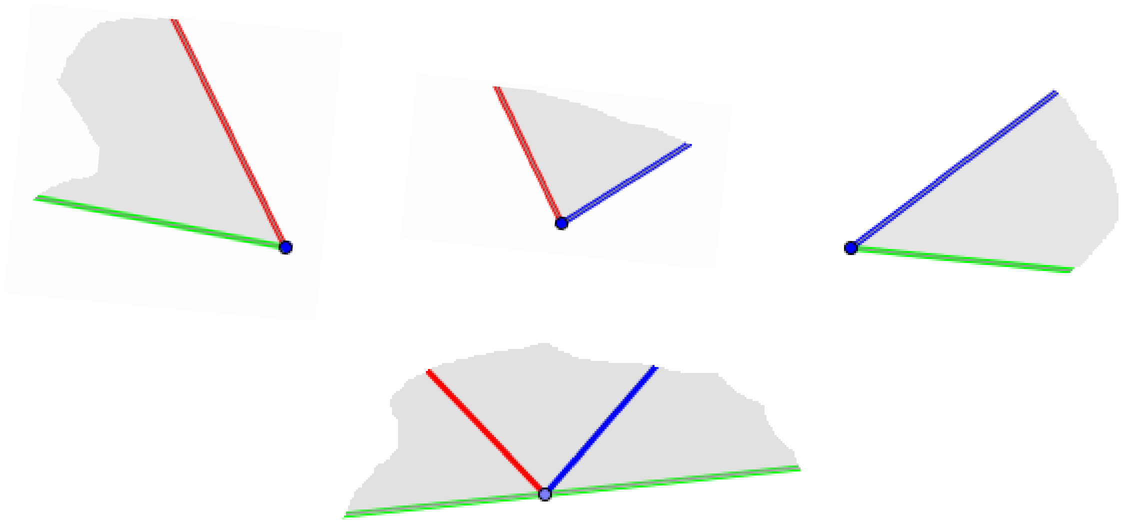


Figura 16 - recorte dos ângulos internos de um triângulo, e sua junção formando um ângulo raso.

Para ilustrar de outra forma o resultado, o professor pedirá que os alunos peguem o terceiro triângulo feito por eles e façam mais uma atividade, desta vez usando dobraduras, isto é, dobrando o triângulo de tal forma que os vértices se encontrem num mesmo ponto formando novamente um ângulo raso, como na figura:

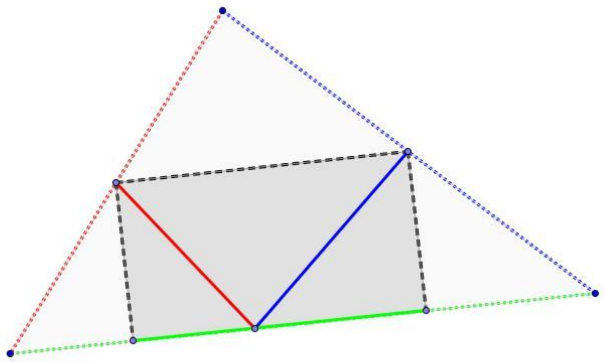


Figura 17 - Dobra das pontas (ângulos internos) de um triângulo formando um ângulo raso.

Em ambos casos, espera-se que os alunos consigam perceber experimentalmente que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo deve ser sempre 180º.

Observação:

Como o método da dobradura que forma o ângulo raso é único (salvo a escolha do lado do ponto de encontro dos vértices), forneceremos nesse momento a atividade passo-a-passo que poderá ser trabalhada com os alunos:

1º Passo: tomemos como base o lado do triângulo oposto a um ângulo não-obtuso:

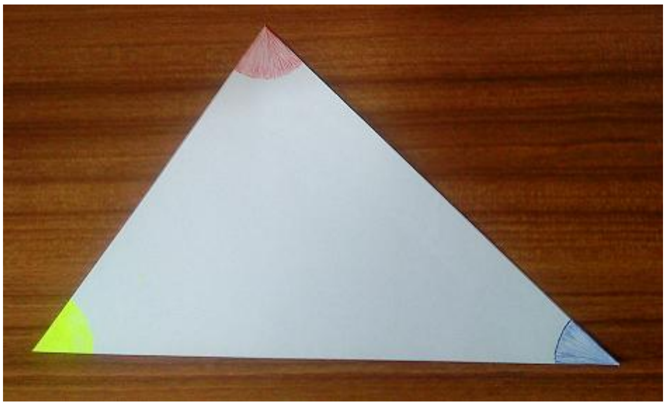


Figura 18 – Triângulo com o lado oposto a um ângulo não obtuso como base.

2º Passo: dobramos a base escolhida sobre ela mesma, de modo que a dobra passe pelo vértice oposto à base. A dobra obtida é a altura relativa a essa base. O ponto da altura sobre a base constitui o pé da altura. Lembramos que se um esquadro for alinhado à base do triângulo pelo ângulo reto e ao vértice oposto da base, ele se alinhará ao vinco da altura e passará pelo pé da altura.

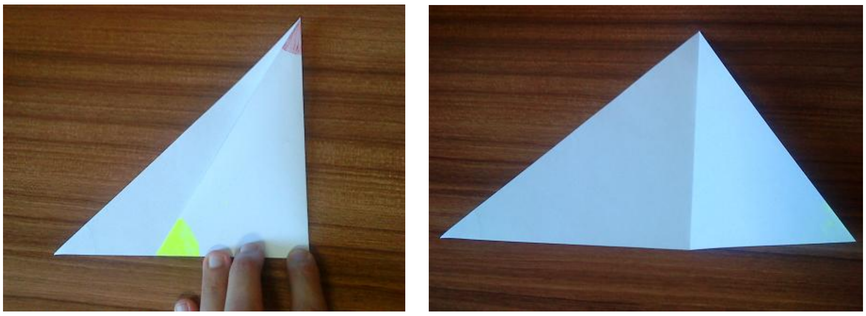


Figura 19 – Achando uma altura do triângulo com dobraduras.

3º Passo: Dobramos a altura pela metade, fazendo coincidir o vértice com o pé da altura. O novo vinco é paralelo à base.

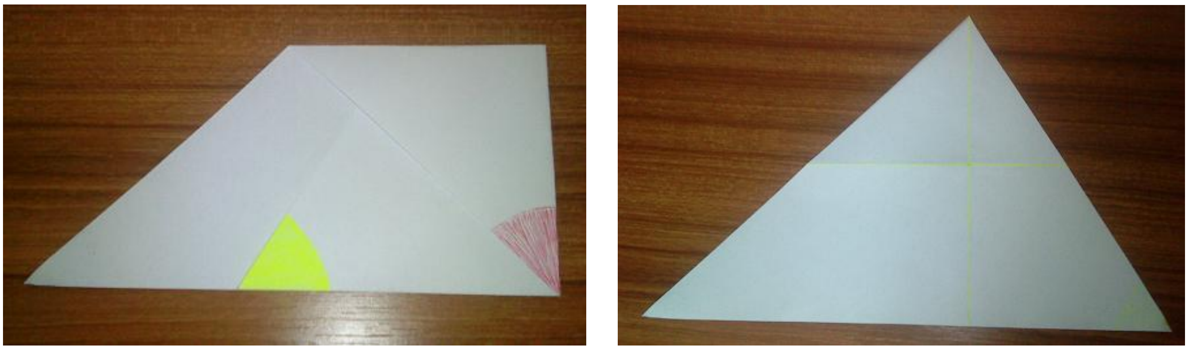


Figura 20 – Dobrando a altura pela metade.

4º Passo: Abrimos o triângulo e o dobramos segundo o vinco paralelo formado, de modo que o vértice oposto da base encontre o pé da altura. Dobramos a outras pontas do triângulo de modo que os vértices se encontrem todos no pé da altura.

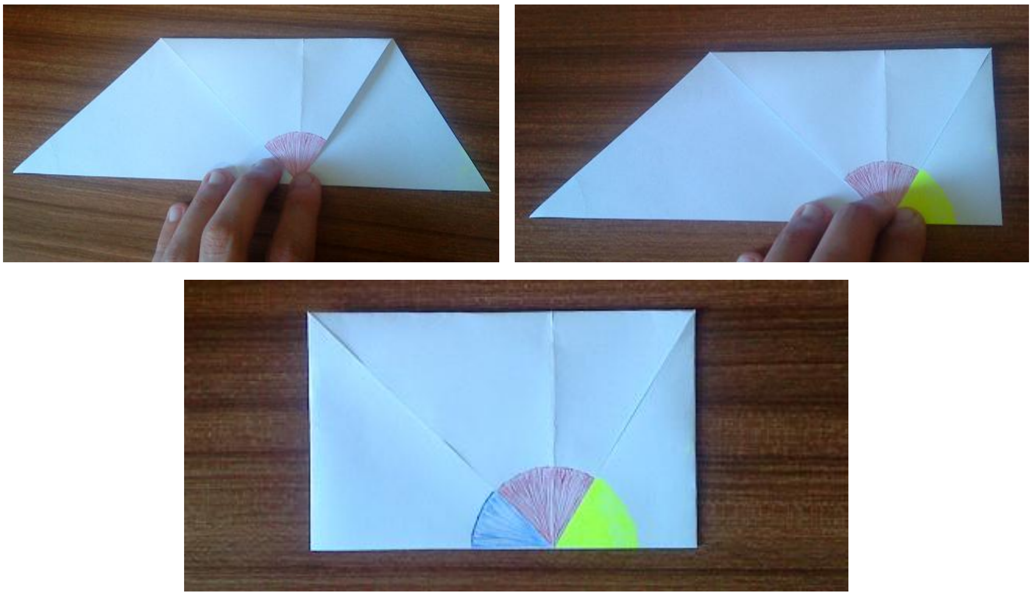


Figura 21: Sequência de dobraduras que fornece o ângulo raso

Voltemos às etapas da resolução de problemas dentro da aplicação da atividade:

- **3ª Etapa:** a partir de então, os alunos deverão ter condições necessárias para formular o teorema como uma sentença matemática, e deverão tentar explicar as razões pelas quais a soma dos ângulos obtida por alguns alunos pode ter sido diferente de 180° e, conforme casos, fazer novas medições.

O professor poderá auxiliar os alunos com maiores dificuldades com a precisão da medição feita por eles, e até mesmo poderá analisar com eles a precisão da ferramenta utilizada, levando-os a perceber que a falha em não obter a soma 180° é devido a erros de medição e limitação do método experimental. No final dessa etapa, o professor deve pedir aos alunos que façam a atividade “O que eu aprendi...”, o que possibilitará ao professor uma análise da aprendizagem geral da turma, podendo assim fazer as devidas intervenções e/ou retomada do conteúdo por novas abordagens.

- **4ª Etapa:** nessa etapa, podemos analisar as soluções encontradas alertando para a validação empírica realizada. Pode ser que algum aluno não se convença das “demonstrações” feitas empiricamente. Nesse caso, o professor pode usar um programa de geometria dinâmica (como o Geogebra) e fazer uma ilustração da demonstração por argumento do teorema dos ângulos alternos internos. Lembramos, no entanto, que esse teorema ou o conteúdo de semelhança de triângulos não são trabalhados nessa série de ensino, então, o docente deverá ter cuidado com esse tipo de abordagem, mas nada o impede de adiantar o conteúdo que virá no futuro.

No mais, exploraremos o conteúdo aprendido, explorando exercícios nos quais se use este resultado matemático, como por exemplo:

- “Em um triângulo retângulo qual é a soma dos outros dois ângulos internos?”
- “É possível ter um triângulo com dois ângulos retos?”
- “Qual o máximo de ângulos obtusos que um triângulo pode ter?”

Poderemos então explorar todo o conteúdo referente ao assunto no caderno do aluno, estabelecendo inclusive validações referentes à soma dos ângulos internos de outros polígonos convexos.

Observando os planejamentos, destacamos a participação dos alunos como fundamental e necessária para o desenvolvimento da aula. Lembramos que, sempre que possível, os alunos devem responder as próprias perguntas, ou um colega responder a pergunta de um outro. Também é importante que os alunos expressem verbalmente e por escrito suas conclusões e suas sínteses, compartilhando com a classe. Ao professor cabe o papel de orientador em sala de aula, alterando o panorama no qual o aluno apenas tem confiança em suas respostas mediante o aval do professor. Logo, teremos um grande avanço na participação dos alunos à medida que eles recuperam (ou adquirem) sua própria confiança.

CAPÍTULO 4 - ANÁLISE SOBRE A PROPOSTA CURRICULAR DO ESTADO DE SÃO PAULO

A nova proposta curricular do Estado de São Paulo, que faz parte de uma série de mudanças feitas pela Secretária de Educação do Estado (SEE-SP), foi elaborada em meados de 2007, sendo que seu primeiro ano de aplicação foi em 2008.

Tendo como objetivos principais a organização curricular e o desenvolvimento das competências e habilidades dos alunos em âmbito escolar e social, preconizadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), a proposta de 2008 baseava-se em cadernos para os professores, os quais traziam atividades docentes para todas as aulas, indicação das competências e habilidades que seriam desenvolvidas, sugestão de aulas e de materiais complementares, proposta de avaliação e recuperação paralela.

Cada disciplina recebeu, por série, quatro cadernos organizados por bimestre, identificados por cores, sendo que em primeiro momento não houve cadernos específicos para alunos.

Figura 22 – Cadernos do Professor 7ª série do E. F. e 1º ano do E. M.
Fonte: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, 2009.

Após 2008, a SEE, atendendo alguns pedidos dos docentes, revisou os cadernos dos professores e acrescentou o Caderno do Aluno, que também foi/é distribuído por bimestres e, em resumo, contém algumas atividades propostas pelo caderno do professor, lições de casa e materiais para serem trabalhados em sala de aula, como por exemplo, malhas quadriculadas, triangulares, planificações de poliedros, etc.

Figura 23 – Cadernos do Aluno 5ª e 6ª séries do E. F.
Fonte: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, 2009.

4.1 **A estrutura do Caderno do Professor**

O caderno do professor apresenta os conteúdos e temas subdivididos em “Situações de Aprendizagem”, nas quais são apresentadas atividades a serem trabalhadas com os alunos com o objetivo de desenvolver certas competências e habilidades. Para cada situação de aprendizagem, o caderno traz informações didáticas a respeito do conteúdo e as estratégias a serem usadas para o desenvolvimento das atividades.

Ao final de cada caderno do professor, encontramos o conteúdo programático de 5ª à 8ª série, no caso do ensino fundamental, e de 1º ao 3º ano, no caso do ensino médio. Esse conteúdo é estipulado em tópicos e são destacados os conteúdos trabalhados em cada bimestre, respeitando o nível de estudo em que se encontra. A seguir temos uma cópia do conteúdo programático por série/bimestre do caderno do professor referente ao 4º bimestre da 6ª série do ensino fundamental:

CONTEÚDOS DE MATEMÁTICA POR SÉRIE/BIMESTRE DO ENSINO FUNDAMENTAL

	5ª série	6ª série	7ª série	8ª série
1º bimestre	NÚMEROS NATURAIS - Múltiplos e divisores. - Números primos. - Operações. - Introdução às potências. FRAÇÕES - Representação. - Comparação e ordenação. - Operações.	NÚMEROS NATURAIS - Sistemas de numeração na Antiguidade. - O sistema posicional decimal. NÚMEROS INTEIROS - Representação. - Operações. NÚMEROS RACIONAIS - Representação fracionária e decimal. - Operações com decimais e frações.	NÚMEROS RACIONAIS - Transformação de decimais finitos em fração. - Dízimas periódicas e fração geratriz. POTENCIAÇÃO - Propriedades para expoentes inteiros. - Problemas de contagem. TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO - A linguagem das potências.	NÚMEROS REAIS - Conjuntos numéricos. - Números irracionais. - Potenciação e radiciação em $\mathbb{R}$. - Notação científica.
2º bimestre	NÚMEROS DECIMAIS - Representação. - Transformação em fração decimal. - Operações. SISTEMAS DE MEDIDAS - Comprimento, massa e capacidade. - Sistema métrico decimal.	GEOMETRIA/MEDIDAS - Ângulos. - Polígonos. - Circunferência. - Simetrias. - Construções geométricas. - Poliedros.	EXPRESSÕES ALGÉBRICAS - Equivalências e transformações de expressões algébricas. - Produtos notáveis. - Fatoração algébrica.	ÁLGEBRA - Equações de 2º grau: resolução e problemas. - Noções básicas sobre funções; a ideia de interdependência. - A ideia de variação. - Construção de tabelas e gráficos para representar funções de 1º e 2º graus.
3º bimestre	GEOMETRIA/MEDIDAS - Formas planas e espaciais. - Noção de perímetro e área de figuras planas. - Cálculo de área por composição e decomposição.	NÚMEROS/ PROPORCIONALIDADE - Proporcionalidade direta e inversa. - Razões, proporções, porcentagem. - Razões constantes na geometria: π. TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO - Gráficos de setores. - Noções de probabilidade.	ÁLGEBRA/EQUAÇÕES - Equações de 1º grau. - Sistemas de equações e resolução de problemas. - Inequações de 1º grau. - Sistemas de coordenadas (plano cartesiano).	GEOMETRIA/MEDIDAS - Proporcionalidade, noção de semelhança. - Relações métricas em triângulos retângulos. - Razões trigonométricas.
4º bimestre	TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO - Leitura e construção de gráficos e tabelas. - Média aritmética. - Problemas de contagem.	ÁLGEBRA - Uso de letras para representar um valor desconhecido. - Conceito de equação. - Resolução de equações. - Equações e problemas.	GEOMETRIA/MEDIDAS - Teoremas de Tales e Pitágoras: apresentação e aplicações. - Área de polígonos. - Volume do prisma.	GEOMETRIA/MEDIDAS - O número π; a circunferência, o círculo e suas partes; área do círculo. - Volume e área do cilindro. TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO - Contagem indireta e probabilidade.

Figura 24 - Conteúdo programático 4º bimestre / 6ª série do ensino fundamental.
Fonte: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, 2009.

Observando a tabela, percebemos os conteúdos em destaque que serão trabalhados no caderno em questão. Vemos também que tópicos introduzidos na 6ª série/7º ano, aparecem como conteúdos de anos posteriores. Logo, devemos ter cuidado nas abordagens feitas, respeitando o nível esperado dos alunos em cada série, de modo que a aprendizagem dos mesmos tópicos nas séries posteriores seja mais eficaz. Também são trabalhados assuntos de séries anteriores mostrando que há uma preocupação com a continuidade dos estudos.

Observamos nesse momento que é evidente a importância de termos um currículo escolar, pois é necessário que o professor consiga trabalhar diversos conteúdos, que vão desde séries iniciais até séries mais avançadas, sempre respeitando o nível de aprendizagem dos alunos e mantendo o foco no cumprimento do currículo mínimo estabelecido. Além do mais, o currículo escolar servirá como subsídio à elaboração do planejamento do professor, pois, uma vez que conheça a turma, seus potenciais e déficits, será possível identificar quais conteúdos anteriores (ou posteriores) poderão ser mais trabalhados, suprindo as necessidades de aprendizado da turma em questão.

O caderno do professor apresenta as propostas de atividades em “Situações de Aprendizagem”. Abaixo vemos a estrutura de uma dessas situações de aprendizagem presente no caderno do 4º bimestre da 6ª série/7º ano do ensino fundamental:

SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 2
EQUAÇÕES E FÓRMULAS

Tempo previsto: 2 semanas.

Conteúdos e temas: letras para representar números ou grandezas; valor numérico de uma fórmula/expressão algébrica.

Competências e habilidades: ler e interpretar enunciados; transpor linguagem escrita para algébrica e vice-versa; resolver equações.

Estratégias: resolução de problemas usando fórmulas relacionadas a diferentes contextos.

Figura 25 – Tabela da apresentação de uma situação de aprendizagem da proposta curricular.
Fonte: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, 2009.

A estrutura (Tempo previsto, Conteúdos e temas, Competências e habilidades, Estratégias) é a mesma para praticamente todas as situações problema apresentadas, dos conteúdos de todos os anos, da 5ª série do ensino fundamental ao 3º ano do ensino médio.

Analisando a estrutura das situações de aprendizagem, percebemos que há uma preocupação com o tempo de aplicação das atividades. No exemplo acima, vemos “Tempo previsto: 2 semanas”. Em alguns cadernos, outras situações de aprendizagem têm o tempo previsto em quantidade de aulas. Nesse momento, cabe nossa primeira crítica ao caderno do professor: o tempo previsto pode não respeitar o tempo de aprendizagem do aluno, fazendo com que, ao prosseguir com o conteúdo sem ter havido a assimilação adequada, surja lacuna na aprendizagem. Na compreensão matemática não pode haver “buracos”, pois os conteúdos se relacionam e muitas vezes se tornam pré-requisitos para conteúdos futuros.

Dessa forma, devemos ficar atentos à proposta de tempo, pois a importância se dá pelo período de desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem e não apenas na execução das atividades dos cadernos do professor e do aluno.

Devemos lembrar que, se por um lado a proposta de tempo não deve ser tomada como uma imposição, ela é de fato bom indicador, importante a ser considerado no planejamento escolar, propiciando uma discussão entre os profissionais envolvidos sobre a situação de aprendizagem, e isso fornece tema para a reflexão dos professores na montagem do planejamento de aulas. Entretanto, não devemos ficar limitados ao tempo proposto, assim como não podemos ficar presos a um único tema por períodos que extrapolem o planejamento, já que assim estaremos agindo em detrimento do conteúdo curricular.

Tomaremos como ponto pacífico que as crianças aprendem de forma diferente e em tempos diferentes. Nossa maior preocupação está no respeito com que o docente deve dar aos alunos em relação a essa aprendizagem, retomando conteúdos quando encontradas falhas no aprendizado de conteúdos anteriores, e minimizando os déficits de aprendizagem das aulas anteriores ou até mesmo de anos letivos inteiros.

Em virtude do conteúdo programático estipulado pela SEE e pela nossa proposta de aplicação das atividades no primeiro semestre desse ano, o trabalho foi centralizado nos estudos de geometria. Por essa razão, estudamos o modelo dos níveis de van Hiele (CROWLEY, 1994) para o aprendizado da mesma, que consiste na divisão dos níveis de conhecimento em geometria em cinco:

- **Nível 0: visualização**

O estudante reconhece figuras geométricas por sua visualização e contato com o mundo real, mas ainda é incapaz de reconhecer as propriedades dessas figuras;

- **Nível 1: análise**

O estudante analisa as propriedades geométricas e reconhecer propriedades dos objetos geométricos, mas não consegue estabelecer e explicar a relação entre essas propriedades;

- **Nível 2: dedução informal**

Aqui, o estudante consegue estabelecer relações internas de figuras, ou entre figuras. É capaz também de fazer análise e identificar partes de figuras, assim como identificar suas propriedades e identificar classes de figuras. É possível o acompanhamento de provas informais, mas o aluno não entende a dedução como um todo, não conseguindo perceber como a ordem lógica pode ser alterada e não entende os axiomas como parte fundamental em demonstrações;

- **Nível 3: dedução**

Neste nível, as demonstrações por deduções de um sistema axiomático fazem sentido ao aluno. Nesse momento a relação entre os termos indefinidos, os axiomas, definições, teoremas e provas formais são compreendidos. As provas são acompanhadas de mais de uma maneira e a recíproca também é compreendida;

- **Nível 4: rigor**

Aqui o estudante consegue trabalhar com sistemas axiomáticos distintos (geometria não euclidiana pode ser estudada). Geometria é vista abstratamente com nível alto de rigor matemático, mesmo sem exemplos concretos.

Observamos então a importância de se estabelecer uma aprendizagem sequencial. Mais precisamente, trabalhando com estudantes da 6ª série/7º ano, procuramos planejar as atividades para essa série (nas quais as resoluções não chegam ao nível três) de modo a propiciar aos alunos a passagem pelos níveis de van Hiele para a aprendizagem significativa.

O cuidado no estabelecimento de tal sequência gera as possibilidades numa aula de interpretação e resoluções adequadas para o problema. No entanto, cada nível deve estar consolidado antes de propor avanços, afinal não é possível, por exemplo, fazer uma análise de um problema geométrico sem antes reconhecer as figuras geométricas e suas propriedades. Os níveis de van Hiele são sequenciais nos níveis de aprendizagem, não podem pular etapas em qualquer série ou nível de ensino, ou seja, o ensino de geometria deve obedecer às etapas de assimilação de conceitos. O ideal seria que os alunos na 6ª série pudessem trabalhar em níveis posteriores ao nível zero de aprendizagem. No entanto, sabemos que essa pode não ser uma situação real. É comum encontrarmos alunos dessa série (e até mesmo de séries posteriores) que trabalham apenas no nível zero de aprendizado, não conseguindo prosseguir seus estudos com atividades que trabalhem níveis posteriores.

No nosso trabalho, encontramos na Metodologia de Resolução de Problemas um apoio ao desenvolvimento dos níveis de aprendizagem citados, pois a metodologia, também sequencial, explora as etapas que permitem o avanço no processo de assimilação dos métodos matemáticos de abstração, subjacentes nos avanços dos níveis de van Hiele para a aprendizagem da geometria. Para construir uma estratégia de resolução de problemas de contexto geométrico, os alunos dependem do conhecimento previamente adquirido, da percepção e visualização das propriedades geométricas para poderem prosseguir para as próximas etapas. Van Hiele, segundo (CROWLEY, 1994), propõe fases sequenciais de aprendizagem, que ao serem trabalhadas pelos professores, auxiliam os estudantes no avanço dos níveis. Por isso, a Metodologia de Resolução de Problemas como trabalhamos nessa dissertação oferece condições adequadas para a aprendizagem da geometria.

Voltamos ainda a comentar o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, discutido no primeiro capítulo desse trabalho, onde o destaque do conhecimento do conteúdo pelo professor está relacionado à capacidade de adaptar as atividades para que seja respeitada e estabelecida a sequencia dos níveis de aprendizagem citados. Além disso, CPC permite ao professor identificar os níveis dos alunos e trabalhar com eles de acordo com esses, sem pular etapas, podendo minimizar os déficits de aprendizagem, especialmente na área de geometria.

Por isso, precisamos respeitar o tempo de aprendizagem dos alunos, não basta estabelecermos um tempo para a aplicação de determinado conteúdo, pois muitas vezes precisamos voltar conteúdos, trabalhar novas abordagens (até mesmo fugindo daquelas feitas pela proposta curricular), acrescentando novas atividades, e/ou dando maiores ênfases a determinados conteúdos curriculares.

4.2 **Estrutura do caderno do aluno**

O caderno do aluno é um caderno de atividades que traz exatamente as atividades e exercícios sugeridos pelo caderno do professor, servindo como auxílio ao docente no preparo e aplicação das atividades, logo há uma harmonia entre os dois cadernos. As atividades são conduzidas de forma dirigida, pelas quais se espera desenvolver a percepção dos alunos em determinados conteúdos.

Devemos ficar atentos para que em nossa atividade docente não apenas resolvamos os exercícios e atividades para os alunos; se assim o fizermos estaremos conduzindo uma palestra sobre um assunto que os alunos não dominam e provavelmente não aprenderão. Lembramos que nossa proposta é a participação ativa dos alunos em sala de aula, com o objetivo de que os mesmos cheguem aos conhecimentos por si próprios. Portanto, o aluno deve resolver ou ao menos tentar resolver as atividades e/ou exercícios, cabendo ao professor o direcionamento do aluno, indagando-o de forma que ele chegue ao desenvolvimento dos exercícios, aprenda com seus erros e, consequentemente, alcance as habilidades e competências que se esperam.

Ainda sobre o material do aluno, este é focado em atividades; em algumas delas há anexos que podem ser destacados no final do caderno, por exemplo, modelos para recorte de polígonos regulares (que serão usados em atividades dirigidas do mesmo caderno) e, ao final de muitas atividades há um espaço reservado para que o aluno exponha com suas próprias palavras o que aprendeu na seção “O que eu aprendi...”

Se supusermos o caderno do aluno apenas como um anexo para aferir o conhecimento do aluno após as atividades propostas pelo caderno do professor, que facilitará o trabalho docente, isto limitaria o alcance pedagógico deste instrumento. Tal pressuposto estará valorizando apenas a aplicação das atividades e o cumprimento do conteúdo curricular, enquanto que nossa verdadeira meta é o aprendizado real dos alunos. Em nosso trabalho utilizamos o caderno do aluno como integrante da etapa de reflexão e validação da Metodologia de Resolução de Problemas, aumentando seu potencial didático.

Fizemos um estudo do caderno do aluno tendo em vista o planejamento e análise da própria sala de aula, valendo-nos novamente do CPC e, principalmente, da Metodologia de Pesquisa de Aula. De fato, nesse momento podemos fazer uma análise sobre a sala de aula, os níveis de aprendizagem dos alunos, as estratégias que podem ser adotadas em sala de aula e o estudo da própria prática docente por meio daquilo que a proposta curricular espera dos alunos.

Destacamos a seguir algumas falhas observadas no caderno que, em nossa visão, ao serem contornadas pelo professor, podem potencializar o aprendizado dos alunos. Analisando criticamente o caderno e destacando alguns pontos falhos, temos que:

- **O caderno do aluno não traz definições e/ou conteúdos**

Concordamos que o material, como já dito, se destina como um caderno de atividades, mas poderia conter ao menos as definições que serão usadas nos exercícios, os teoremas trabalhados, algum destaque ou lembrete importante, para quando o aluno for estudar e refizer os exercícios, ele ter uma fonte de referência no próprio caderno do aluno, facilitando os estudos.

- **Faltam atividades de fixação**

Em muitos momentos da aprendizagem matemática, os estudantes devem ter contatos com problemas que envolvem expressões numéricas e/ou algébricas através de exercícios simples ou correlatos aos resolvidos anteriormente, com ajuda do professor ou não. As atividades de fixação ajudam a desenvolver o conteúdo aprendido em sala de aula, auxiliam o aluno a aprender as regras e a usar resultados (como teoremas) para resolver problemas e exercícios, consolidando o conhecimento adquirido.

No caderno do aluno quase não há exercícios correlatos aos determinados pela proposta, e o que vemos é uma série de exercícios que muitas vezes não se relacionam, não possuem níveis gradativos de dificuldades (muitos alunos reclamam que alguns exercícios iniciais são mais difíceis que exercícios posteriores). Por exemplo, na pagina...

Obviamente, o material não se destina a substituição de livros didáticos, que se baseiem apenas em técnicas e resolução de exercícios. Porém, como se estuda matemática? A resposta será uma só: resolvendo problemas e exercícios, usando conceitos compreendidos com significado.

Para isso, o aluno precisa rever os conceitos trabalhados e ver também aplicações de teoremas deduzidos/trabalhados em sala de aula, e não deve ficar estático apenas vendo essa ou aquela atividade encontrada no caderno do aluno. É preciso que trabalhe exercícios correlatos aos vistos em atividades de sala de aula para perceber que um mesmo método de resolução pode ser aplicado em exercícios diferentes. Nesse sentido, o caderno do aluno falha, pois quase não há exercícios correlatos, apenas mais atividades que introduzem outros conteúdos, faltando também exercícios de fixação para que o aluno consolide seu conhecimento. O professor deve sempre ficar atento às complementações da aula, fornecendo exercícios e atividades para consolidar o processo de aprendizagem dos alunos. Vale lembrar que o professor que apenas segue a Proposta Curricular do Estado, com as atividades sugeridas pelos cadernos do professor e o do aluno sem complementá-las, corre o risco de formar alunos que conseguem resolver apenas determinados problemas, ou nem estes.

4.3 **Sobre o conteúdo encontrado nos cadernos da proposta**

Como já estabelecido no início, os estudos e atividades propostos nesse trabalho foram realizados seguindo a proposta curricular em turmas de 6ª série/7º ano do ensino fundamental. Por essa razão, faremos agora uma análise de algumas situações de aprendizagem e atividades propostas nos cadernos do professor e do aluno da respectiva série do ensino fundamental, abordando por conteúdos e temas encontrados nos cadernos referentes à proposta no 1º semestre de 2009.

4.3.1 Números Negativos

Nosso primeiro exemplo é a introdução aos números negativos, apresentados na Situação de Aprendizagem 4 do caderno do professor - volume 1, onde logo em sua introdução vemos o seguinte quadro:

Tempo previsto: duas semanas e meia.

Conteúdos e temas: números negativos e aplicações; números negativos: operações e representações.

Competências e habilidades: identificar a insuficiência dos naturais para a resolução de novos problemas; compreender significados associados à escrita dos números negativos, bem como operações e expressões envolvendo números negativos; compreender a ideia de ordenação com números negativos; estabelecer correspondência entre situações concretas e contextos matemáticos que justifiquem o uso de números negativos.

Estratégias: resolução de situações-problema; uso de jogos e recursos lúdicos.

Destacamos novamente o tempo previsto para essa situação de aprendizagem, pois, pela importância do conteúdo e a dificuldade encontrada pelos alunos, percebemos que o tempo é escasso, tratando-se de um conteúdo que envolve situações contrárias ao pensamento aritmético consolidado por eles até então.

Observando o caderno do aluno, encontramos ainda cerca de vinte tarefas, entre problemas e expressões numéricas, que devem ser trabalhadas com os alunos em sala de aula, o que torna evidente que o tempo previsto para a aplicação dessa situação de aprendizagem não condiz com o tempo necessário para a compreensão do conteúdo/tema pelos alunos. O tempo previsto leva apenas em consideração o tempo de aplicação e não respeita o tempo de aprendizagem dos alunos.

É certo que esses (e outros) conteúdos devem ser trabalhados de forma contínua no decorrer dos anos escolares, mas é preciso ter uma aprendizagem sólida do conteúdo. O professor que apenas seguir as metas de cumprimento de currículo pode deixar seus alunos com déficits na aprendizagem, dificultando o estudo da matemática em anos e até mesmo em conteúdos posteriores.

Nesse exemplo, infelizmente encontramos essa situação, em que o conteúdo é mais valorizado que o aprendizado. Há ocorrências semelhantes em outras situações de aprendizagem, de outras séries e níveis e, mais uma vez, chamamos a atenção ao fato de que na matemática não se aprende “dando saltos” e o professor deve ficar atento à aprendizagem contínua dos alunos. É mais valioso que haja uma aprendizagem sólida, pois no futuro podemos otimizar o alcance das metas curriculares, quando não houver necessidade de recuperar déficit de aprendizagem de conteúdos anteriores.

Nas práticas em sala de aula, fica evidente que o tempo estipulado no exemplo acima é muito escasso, uma vez que a proposta sugere duas semanas e meia, mas a realidade é muito diferente: as quatro turmas trabalhadas no ano letivo de 2009 precisaram de cerca de cinco semanas para compreender com mais clareza os números negativos e, mesmo assim, surgiram dúvidas em uma ou outra operação, por exemplo, aquelas que envolvem frações negativas. Então, ao trabalharmos assuntos posteriores, fizemos sempre referências ao conjunto trabalhado anteriormente, mantendo a continuidade dos estudos desse conjunto de números.

4.3.2 Geometria dos ângulos

Na situação de aprendizagem 1 – volume 2 do caderno do aluno, encontramos uma atividade na qual é pedido ao aluno que faça um instrumento de medição de ângulos, usando dobraduras de papel, de tal forma que esse instrumento esteja dividido em 16 partes iguais, ficando como na figura:

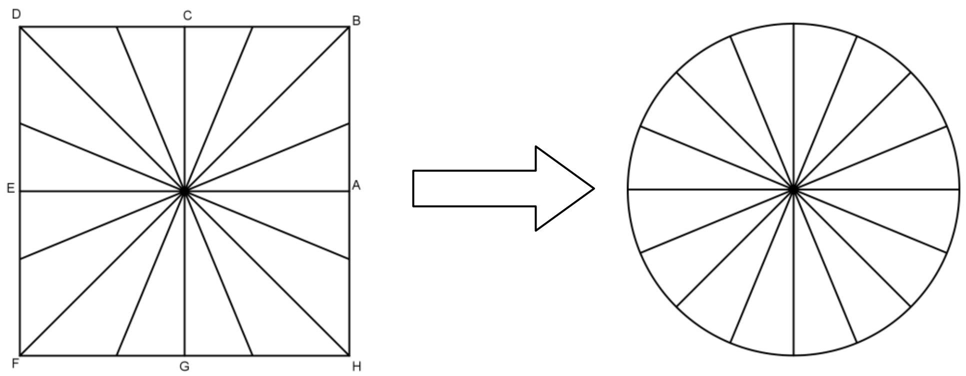


Figura 26 – Atividade encontrada no caderno do aluno para fabricação de um instrumento de medição.

Devemos destacar que, no caderno do aluno não há justificativa, na construção, do por que as divisões feitas com dobradura fazem todos os ângulos terem a mesma medida, e isso deveria ser trabalhado. Também chamamos a atenção para o exercício seguinte, após a construção desse instrumento, que é chamado de transferidor no caderno:

“Chamaremos cada uma das 16 subdivisões do transferidor de 1 ***tuti****, cuja abreviação será 1* ***t****. Meça cada um dos ângulos indicados nas figuras a seguir com seu transferidor e indique as medidas em* ***tutis****.”* (seguem alguns ângulos para serem medidos).

Observamos que a intenção de estabelecer um novo padrão de medida de ângulos é explorada nesses exercícios, mas nos perguntamos: Por que confundir o aluno quanto ao padrão de medida? Por que não estabelecer o grau como medida de ângulos?

No início dos estudos sobre geometria, começa a ser estabelecido a nomenclatura dos objetos, como segmentos, retas, semirretas, arestas, vértices, etc. Não é conveniente trazer ao aluno uma nova nomenclatura que somente será utilizada para resolver três ou quatro exercícios encontrados apenas no caderno do aluno. Isso confundirá o aluno, principalmente quando tivermos que trabalhar a forma padrão em graus, mas o caderno provoca essas confusões. Mais adiante, na página seis do caderno do aluno volume 2, temos os seguintes exercícios já apresentados no capítulo anterior:

5. Construa com o auxílio de uma régua, um triângulo qualquer, meça cada um dos seus ângulos em tutis e, em seguida, calcule a soma das medidas dos ângulos internos do seu triângulo (em tutis).

6. Construa um triângulo diferente do que construiu na atividade anterior. Repita todos os passos e compare as somas das medidas dos ângulos internos dos triângulos construídos. O que você observou? Com base nos resultados de sua observação, levante uma hipótese a respeito da soma dos ângulos internos de qualquer triângulo e busque uma forma de justificá-las com argumentos lógicos.

O exercício induz ao Teorema Angular de Tales, um dos mais (se não o mais) importantes teoremas da geometria estudados nesta série. Mas obviamente, ao desenhar um triângulo qualquer, os ângulos internos desse triângulo provavelmente não serão todos *tutis* inteiros, e seria preciso trabalhar subdivisões da medida *tuti*, medidas fracionárias e outras praticamente impossíveis de obter, devido à imprecisão do material concreto, e não estamos considerando aqui as medidas irracionais, já que estas não são trabalhadas nessa série.

Devemos nos atentar também que a transposição da medida *tuti* para a medida grau (ou vice-versa) no caderno também é feita de forma displicente. É feita apenas por meio de uma tabela que compara a medida em graus (obtida pela medição de um transferidor tradicional), com a medida *tuti* (medida pelo transferidor construído), sem ter as devidas preocupações com frações da medida *tuti* (afinal, quanto é 4,5° em tuti?). Fica evidente que ao trabalharmos com a medida *tuti* tiramos o foco sobre o teorema e confundimos o aluno, dificultando a aprendizagem. Por essa razão, resolvemos mudar o exercício, trabalhando com o transferidor, ensinando os alunos a manipular a ferramenta que, de forma universal, apresenta a medida em graus, falando a linguagem que será encontrada por eles nos diversos livros didáticos, na internet e em situações do cotidiano, deixando-os familiarizados com o assunto.

4.3.3 Estimando a medida de ângulos

Nas páginas 9, 10 e 11 do caderno do aluno encontra-se a atividade “Jogo Anguloteria” que, em resumo, traz aos alunos uma série de representações de ângulos que, por meio da visualização, eles devem estimar as medidas e, posteriormente, conferir essas com o uso de um transferidor. Seguem as representações dos ângulos apresentadas no caderno do aluno, página 10.

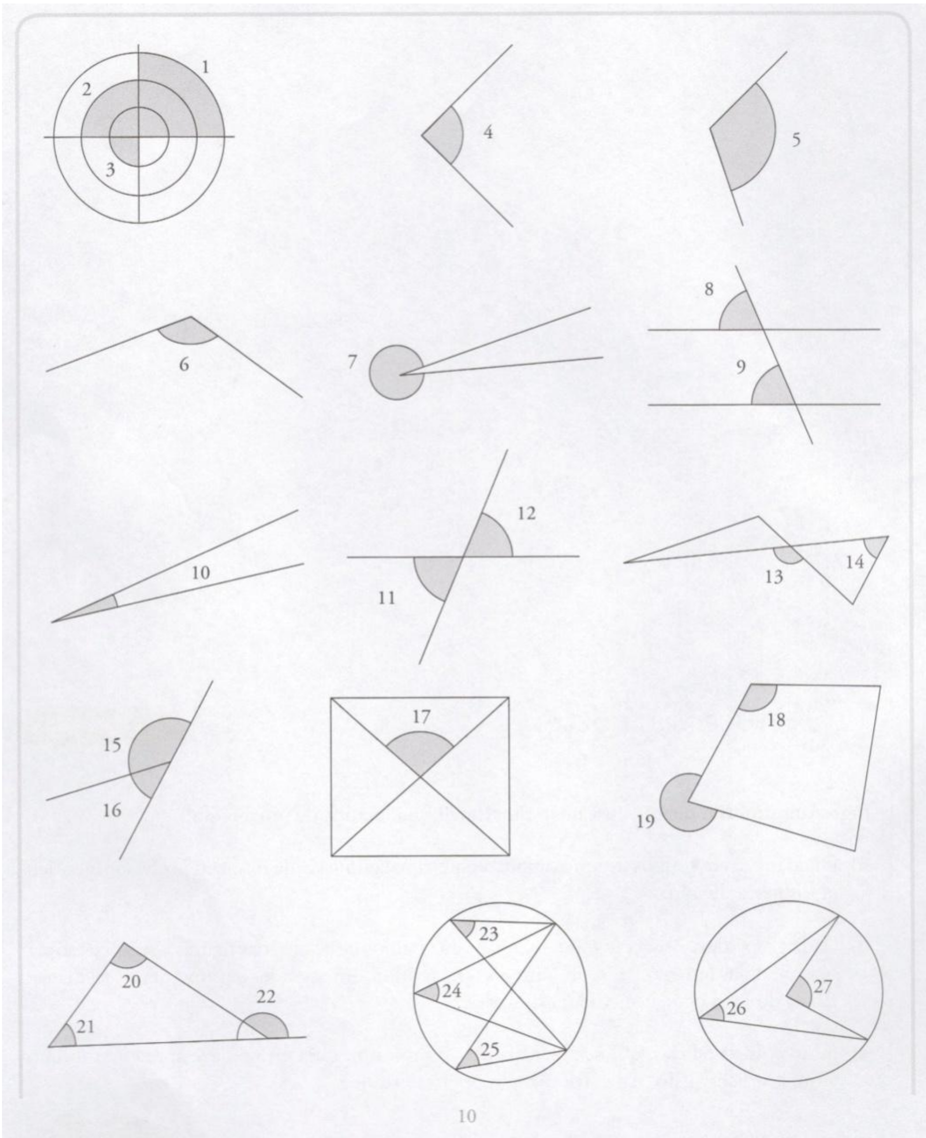


Figura 27 – Ilustrações da atividade “Anguloteria”.
Fonte: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, 2009.

Observamos o pouco cuidado referente a esse exercício. Primeiramente, o destaque feito pela marcação dos ângulos induz o aluno a pensar que o ângulo é a marcação feita (se no mesmo ângulo fizermos uma marcação maior, o aluno é induzido a pensar que um ângulo é maior que o outro), cabendo ao professor fazer as devidas intervenções.

Uma vivência em sala de aula mostrou outra problemática: no 1º semestre letivo de 2009, a atividade foi aplicada e acompanhada nas quatro turmas de 6ª série do ensino fundamental, sendo que, em duas turmas o exercício foi trabalhado como está no caderno do aluno, sem alterações. Em outras duas turmas, foi pedido ao aluno que, antes de começar o exercício, trocasse a numeração da marcação dos ângulos por letras do alfabeto.

Nas turmas nas quais houve a alteração de números por letras, a atividade ocorreu como se esperava, os alunos tentavam, por percepção, adivinhar a medida do ângulo correspondente a cada ilustração. Porém, nas turmas em que as ilustrações foram trabalhadas sem alteração, ocorreram muitas confusões, pois muitos alunos associaram o ângulo com a numeração indicativa, dizendo, por exemplo, que o ângulo com marcação 5 correspondia a um ângulo de grau 5, ficando evidente que a numeração dada a um ângulo induz o aluno a pensar que a marcação 1 corresponde a 1 grau (ou ainda 1 *tuti*), e assim sucessivamente. Embora pareça algo banal para nós professores, para o aluno em fase de aprendizado, e que está tendo os primeiros contatos com a geometria, esses pequenos detalhes fazem muita diferença em sua formação e aprendizagem, portanto, uma simples troca dos números por letras resolveria o problema.

4.3.4 A metodologia da régua e do compasso

A partir da LDB 5692/71, a disciplina Desenho Geométrico deixou de ser disciplina obrigatória no ensino fundamental, constituindo então apenas em conteúdo diversificado do currículo. Algumas escolas abriram mão da disciplina em prol de um espaço para a disciplina de Educação Artística (atual disciplina de Artes), outras optaram por incluir as construções geométricas nas aulas de Educação Artística.

Com o passar dos anos, os conteúdos referentes à metodologia da régua e do compasso, as construções geométricas e até mesmo as concepções artísticas propiciadas pelo uso das ferramentas caíram em desuso. Com a implementação dos PCNs foram estabelecidos os conteúdos básicos para as disciplinas de Artes e Matemática, sendo que os parâmetros de ambas as disciplinas não fazem menção ao uso de régua e/ou compasso. Cabe então ao professor da disciplina de matemática adaptar e trabalhar tais conteúdos com os alunos.

Porém, o trabalho realizado em relação à geometria sempre foi deixado em segundo plano por muitos professores, e até mesmo os livros didáticos de matemática não apresentam conteúdos suficientes de desenho geométrico. Os professores da disciplina de Artes, mesmo quando trabalham algumas construções que envolvem as ferramentas, sempre colocam um olhar mais artístico nas construções, não se preocupando muito com a lógica matemática envolvida em cada uma delas, e assim, reduzem, e muito, o tempo de estudo das construções geométricas.

Em relação à Proposta Curricular do Estado de São Paulo, a situação se mantém: o conteúdo programático (Figura 24, nesse capítulo) mostra que as construções geométricas devem ser exploradas no 2º bimestre da 6ª série do ensino fundamental, mas não há menção no currículo de outros bimestres em que tais construções sejam retomadas, muito menos em outras séries do ensino fundamental (e do ensino médio também). Isto tira a continuidade do trabalho realizado com o uso de régua e compasso que pode ser muito bem explorado de acordo com os níveis de estudo.

Analisando novamente o caderno do aluno, 6ª série do ensino fundamental, temos os conteúdos a serem trabalhados em construções geométricas. No entanto, esses conteúdos exploram outras ferramentas para construções, por exemplo, o transferidor e o esquadro, e a metodologia da régua e do compasso como foi concebida na Grécia Antiga e estudada por muitos matemáticos até os dias atuais, é pouquíssimo explorada. Na realidade, a metodologia aparece em apenas um exercício, no qual também é trabalhada a construção com transferidor e esquadro, quando não exploram o potencial didático e aprofundamento que a metodologia da régua e compasso ou uso de qualquer ferramenta oferece para o desenvolvimento de um raciocínio organizado e lógico.

No caderno do aluno, os conteúdos são trabalhados em forma de exercício e em a metodologia da régua e do compasso aparece especificamente em um exercício á página 18 :

➢ Construa os ângulos solicitados, nos itens a seguir, com os instrumentos geométricos indicados:

a) ...

b) Ângulo MÂR medindo 15º (com compasso e régua).

O caderno não apresenta sequer o modo de se fazer as construções básicas para resolver esse exercício, informando o aluno que o compasso, como ferramenta, só serve para desenhar circunferências e mais nada. Não é difícil encontrarmos até mesmo professores que não sabem usar a ferramenta e inventam pretextos para não usá-la. Uma das alegações, por exemplo, é que o compasso em sala de aula pode ser tornar uma arma nas mãos dos alunos ou desculpas semelhantes.

A metodologia da régua e do compasso é valiosíssima em um processo de ensino-aprendizagem que busca a participação dos alunos, pois propicia aos alunos a oportunidade de manusearem ferramentas para produzir seus próprios resultados/desenhos ao executarem construções, e perceber a lógica das construções por meio dos passos seguidos durante o procedimento. Até mesmo a beleza estética das criações e as possibilidades artísticas podem ser exploradas, além de motivar o aluno com nova forma de aprendizado, pois estaríamos fugindo da rotina giz-lousa. Esta percepção foi observada durante nossas experiências, quando notamos a satisfação dos alunos ao usarem as ferramentas.

Ao longo dos anos, a metodologia da régua e do compasso foi perdendo espaço no ensino público, deixando de ser disciplina obrigatória para conteúdo, e passou a ser trabalhada por não-matemáticos, foi esquecida para finais de anos letivos e chegou praticamente ao abandono total nos dias de hoje. Na contramão, em tempos recentes vimos o surgimento de softwares educativos magníficos (como o Geogebra, Régua e Compasso, Cabri Geométrè) que trabalham exatamente a metodologia que está sendo abandonada pelo ensino público. Um dado interessante é que um desses softwares, o Cabri Geométrè, é uma aquisição do estado de SP para o ensino da geometria sendo, portanto, o abandono uma contradição.

A SEE poderia aproveitar a oportunidade da reforma, possibilitada pela Proposta Curricular, para retomar o ensino das construções com régua e compasso, trabalhando em todos os níveis do ensino fundamental e médio. Isto iria possibilitar um grande avanço no ensino da geometria em geral, no desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo dos alunos e na efetiva e concreta participação do aluno na construção de seu próprio conhecimento.

Nos tempos atuais observa-se uma negligência com a metodologia que fez parte importante dos estudos da matemática e que, através de problemas de possibilidades (ou impossibilidades) de construções, ajudou o desenvolvimento da própria matemática. Logo, o professor tem muito a contribuir não omitindo, em sala de aula, as construções básicas e as justificativas matemáticas das mesmas.

O trabalho aqui realizado levou este aspecto em consideração e, no 2° bimestre, a metodologia da régua e do compasso foi trabalhada. Ensinamos os alunos a usar o compasso e também a régua para fazerem as construções básicas, que foram utilizadas em construções diversas dentro da Proposta Curricular e dos conteúdos estipulados para o 2° Bimestre da 6ª série/7º ano do ensino fundamental: ângulos de medidas especiais, polígonos, circunferência. O conteúdo curricular estipula ainda o estudo de simetrias e poliedros. O estudo teve aplicação nos bimestres posteriores quando possível, por exemplo, no ensino de razões e proporções.

A metodologia da régua e do compasso faz parte da história antiga da matemática e da retomada contemporânea no século XIX, com o papel da álgebra na resolução dos problemas clássicos de construtibilidade, assim como vem sendo revista sob ponto de vista pedagógico no século XX, com advento da informática. Logo, não devemos deixá-la no esquecimento, ou como uma vaga lembrança de uma disciplina que outrora foi ensinada, mas devemos dar a devida importância ao potencial didático da metodologia e das ferramentas régua e compasso pelo que fizeram e fazem ainda hoje pelo ensino da matemática.

Como referências sobre a revitalização do ensino de geometria no ensino básico com a utilização da metodologia de resolução de problemas e de construções geométricas, nos baseamos nos textos de Baldin (2004, 2005) e nas palestras da professora Yuriko Baldin, sobre este tema. Por exemplo, dentro da palestra "Ensino de geometria e construções geométricas", do Encontro de Professores Premiados da OBMEP, de julho de 2009, encontra-se uma afirmação que indica a vantagem de inserir as construções geométricas no contexto de ensino atual:

> "As construções geométricas:
>
> - favorecem as habilidades de: - observar, descobrir e interpretar propriedades de objetos geométricos; - raciocínio dedutivo por meio de etapas planejadas de construção;
> - ajudam a compreender problemas contextualizados por meio de modelagem geométrica e especular soluções em contexto real.
> - ajudam os alunos a compreender as etapas de resolução de problemas, em especial dos problemas em que não há fórmulas para copiar; não há contas para fazer com dados numéricos que não sabem interpretar dentro do enunciado." (BALDIN, 2009)

4.4 **Considerações finais do capítulo**

Tendo em vista as novas mudanças em relação à educação no Estado de São Paulo, os cadernos do professor e do aluno aparecem como ponto chave na tentativa de melhoria da educação como um todo.

Além das críticas feitas nesse capítulo, destacamos alguns pontos positivos da implementação da proposta, entre os quais enfatizamos:

- A padronização do ensino (através de um currículo base pré-estipulado) elimina desta maneira conteúdos diferentes para escolas diferentes, mesmo entre turmas de mesmas séries, implementando enfim o ensino comum às escolas da rede;
- A forma de abordagem dos exercícios foge do ensino baseado em fórmulas decoradas e tenta trazer ao aluno a construção do conhecimento;
- O estudo de geometria abordado em bimestres completos em todas as séries e níveis de ensino evita que a geometria seja deixada em segundo plano ou até mesmo “esquecida” de ser trabalhada no ano letivo;
- Diversos problemas elaborados levam em consideração o cotidiano dos alunos, aproximando assim a matemática escolar com a matemática encontrada no mundo real.

Destacamos mais uma vez a importância do currículo escolar, pois, estabelecido o currículo oficial da SEE, podemos filtrar, adaptar e acrescentar os conteúdos que supram as necessidades dos alunos, com vantagens para a aprendizagem e a construção do currículo mínimo. Lembramos mais uma vez que o planejamento do professor depende do currículo da escola, pois é sobre ele que, juntamente com o conhecimento da classe, podemos elaborar o planejamento mais eficaz para o ensino-aprendizagem.

Após a análise do material disponibilizado pela SEE, e observando os prós e contras, podemos trabalhar de forma crítica a proposta curricular, estudando e elaborando o planejamento das aulas, e aprimorando as ideias constantes nos cadernos do professor e do aluno. O ponto de partida da reflexão são os alunos e a condição da classe formada por eles, de modo a respeitar seus tempos de aprendizagem, suas dificuldades e seus avanços. Enfim, o foco do planejamento das aulas é a aprendizagem efetiva dos alunos, desenvolvendo do conteúdo proposto pela SEE.

5 APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES E PRÁTICAS DE AULA

Nesse capítulo serão apresentadas algumas propostas colocadas em prática no ensino de diferentes aulas, mostrando como as temáticas foram trabalhadas, apresentando o preparo das aulas e as expectativas do docente. Descrevemos também as dificuldades enfrentadas na aplicação, a reação e participação dos alunos e as percepções didáticas sob o olhar do professor.

Abordaremos as aplicações das atividades feitas em sala de aula, acompanhando os diálogos entre professor e aluno. Serão apresentados comentários quando forem convenientes dentro da nossa pesquisa.

A aplicação das aulas foi feita em quatro turmas de 6ª série/7º ano do ensino fundamental. Cada atividade foi aplicada em todas as turmas e, como uma forma de simplificar a nossa apresentação, apresentaremos os diálogos de cada atividade apenas em uma turma e, posteriormente, faremos comentários pertinentes na aplicação da mesma atividade nas outras turmas.

5.2 **A escola e as turmas**

As atividades foram aplicadas na Escola Estadual Major Telmo Coelho Filho, escola próxima a região central do município de Osasco, na Grande São Paulo. Com dezoito salas e cinquenta e quatro turmas (divididas em três períodos), a escola atende cerca de dois mil alunos distribuídos em turmas que vão de 5ª série / 6º ano do ensino fundamental ao 3º ano do ensino médio.

A escola possui parceria com a iniciativa privada e organizações não-governamentais, como o Projeto Trampolim Teens que visa o aprendizado e aperfeiçoamento da língua inglesa. Tal projeto possibilitou que dois alunos fizessem intercambio cultural e obtivessem bolsas em universidades americanas através do Programa Jovens Embaixadores, que é oferecido anualmente pela Embaixada dos Estados Unidos no Brasil para alunos de escolas públicas brasileiras. Eles passaram por um rigoroso processo seletivo, no qual competem mais de três mil alunos para vinte e cinco a trinta vagas. A escola citada é a única escola estadual a ter dois alunos selecionados (2006 e 2007).

Com a maioria do quadro docente constituída de professores efetivos, aliada a uma direção eficaz e participativa, a escola se encontra acima da média estadual na avaliação do Saresp de acordo com o próprio boletim informativo disponibilizado pela SEE.

MÉDIAS DO SARESP 2008

	Língua Portuguesa				Matemática				Ciências		
	4ª EF	6ª EF	8ª EF	3ª EM	4ª EF	6ª EF	8ª EF	3ª EM	6ª EF	8ª EF	3ª EM
ESTADO	180,0	206,0	231,7	272,5	190,5	209,1	245,7	273,8	226,9	250,0	274,4
COGSP	177,3	202,3	227,4	268,6	187,2	204,6	240,3	268,7	221,8	244,8	269,6
CEI	185,1	209,5	235,7	275,9	196,6	213,3	250,8	278,2	231,6	254,9	278,4
DIRETORIA	171,6	204,1	231,1	264,4	184,5	206,8	242,9	265,6	223,3	246,2	264,8
MUNICÍPIO	171,6	204,1	231,1	264,4	184,5	206,8	242,9	265,6	223,3	246,2	264,8
ESCOLA	-	**224,0**	**240,5**	**272,0**	-	**228,1**	**254,9**	**279,0**	**246,4**	**257,2**	**271,8**

Figura 28 – médias da escola acima do geral do estado.
Fonte: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, 2009.

Com as informações sobre a escola, podemos ter uma base do ambiente de trabalho propiciado ao docente. Tendo como alicerce o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo e a Metodologia de Pesquisa de Aula, discutidos respectivamente nos capítulos um e dois dessa dissertação, analisamos a situação encontrada no âmbito escolar e a melhor forma de ensino-aprendizagem. Para tanto, realizamos uma análise em conjunto das turmas trabalhadas, considerando algumas informações sobre as mesmas, todas de 6ª série/7º ano do ensino fundamental:

- **Turma F**

Nessa turma encontramos muitos alunos participativos e com gosto pela matemática, há uma interação muito boa entre professor e alunos. No entanto, há um fato preocupante: durante o ano de 2008 os alunos, então na 5ª série/6º ano, não tiveram uma educação matemática adequada, visto que o professor da disciplina, por algum motivo, teve que se afastar das aulas, e deixou os alunos com aulas ministradas por vários professores substitutos diferentes, ou até mesmo sem aulas pela falta desses. Logo, a defasagem da aprendizagem matemática era alta nessa turma no início do período letivo, gerando falta de atenção e indisciplina por parte de alguns alunos.

- **Turma G**

Turma muito parecida com a Turma F, pois vivenciou o mesmo problema da falta de professores no ano de 2008. Porém, percebe-se que o potencial dos alunos dessa sala é ligeiramente mais elevado do que os alunos da turma F. Os estudantes são mais concentrados e dispostos, e possuem maiores facilidades com o conteúdo apresentado. Poucas situações de indisciplina são encontradas, facilitando o processo de recuperação e de ensino-aprendizagem de matemática.

- **Turma H**

Nessa turma não encontramos o mesmo problema da falta de professores como nas turmas F e G. Na verdade, há um processo de continuidade dos estudos iniciados na 5ª série/6º ano. Embora o déficit de aprendizagem não seja tão grande quanto nas outras turmas, ela é complicada para se trabalhar, pelo fato da maioria ser falante e dispersa, não apenas nas aulas de matemática, mas em outras disciplinas também. Conhecendo a turma, percebemos que há falhas no aprendizado do conteúdo matemático das séries iniciais, o que acarreta dificuldade de compreensão da matemática por parte dos alunos, e consequentemente gerando os problemas mencionados.

- **Turma I**

Aqui encontramos uma situação mais tranqüila em relação à indisciplina, os alunos são participativos e demonstram maiores interesses pela matemática. Como na Turma H, há um processo de continuidade iniciado em 2008, facilitando o modo de trabalho e a relação professor-aluno, o que propicia uma superação mais eficaz dos pequenos déficits de aprendizagem, contornados mais facilmente em comparação com a Turma H.

5.3 **Relatórios das Atividades Aplicadas**

Iniciamos agora os relatórios das atividades aplicadas às turmas mencionadas. Trazemos a preparação da aula, considerando a escolha do tema de acordo com a proposta curricular e a aplicação das atividades em sala de aula, assim como os diálogos nas classes, provenientes de horas de gravações de áudio durante as aulas.

Para cada atividade, são apresentados os diálogos de apenas uma turma específica e posteriormente fazemos alguns comentários pertinentes na medida em que haja algum aspecto a ser destacado em relação à aplicação da mesma atividade nas outras turmas.

Ao final de cada atividade levantamos as conclusões obtidas na aplicação, apontando os pontos chaves que julgamos ter propiciado ou não a aprendizagem dos alunos e suas participações em sala de aula.

5.3.1 Atividade 1 – Aplicada em 08/04/2009

Tema: ideia de frações como uma divisão do numerador pelo denominador.

Tempo de Aplicação: duas aulas de 50 minutos cada.

Objetivo Principal: participação dos alunos na construção de seu próprio conhecimento de tal forma que estabeleçam o conceito de frações em situação de uma divisão do numerador pelo denominador.

Objetivos Secundários: os alunos devem rever a ideia de frações como repartir uma unidade em partes iguais e tomar certo número de partes; encontrar representações de frações equivalentes e relacionar o entendimento prévio com o contexto.

Turma trabalhada: Turma H

O preparo dessa aula foi descrito no capítulo três, onde abordamos a Metodologia de Resolução de Problemas, portanto, vamos nos ater à aplicação da aula e as observações em sala:

No início da aula pedimos aos alunos que formassem grupos de quatro pessoas. Após acalmarem os ânimos dos deslocamentos de carteiras e cadeiras, distribuímos para cada grupo uma tira de papel contendo o exercício a ser explorado, sob a forma de situação problema, como segue:

- Quatro amigos querem dividir três pizzas, de mesmo tamanho, igualmente entre eles. Como fazer essa divisão? Qual a fração que representa a parte que cada amigo comerá? (Introdutório ao exercício 2 da página 19 do caderno do aluno 1º bimestre).

Seguindo as quatro etapas da metodologia de resolução de problemas já planejadas, pedimos aos alunos que, antes de qualquer coisa, lessem o exercício, o interpretassem e discutissem sobre o que o problema estava pedindo. Andamos pela sala, passando por cada um dos grupos para saber como eles interpretaram o problema. Nessa hora começou a aparecer a grande dificuldade: os alunos estavam falantes e dispersos, não estavam muito interessados no problema, foi necessário pedir silêncio várias vezes. Trabalhando ainda a primeira etapa, fomos à lousa e questionamos os grupos sobre o que eles entenderam sobre o problema:

Professor: “O que vocês entenderam sobre o problema? O que vocês precisam descobrir?”

Alunos: “A gente tem que dividir três pizzas.”

Professor: “Dividir em quantas pessoas?”

Alunos: “Em quatro amigos.”

Professor: “As partes devem ser iguais?”

Alunos: “Sim.”

Professor: “O que o problema pede? Quais as perguntas do problema?”

Alunos: “Como fazer essa divisão e qual fração que representa o que cada amigo comeu”

Professor: “Então temos duas partes no problema, vamos tentar resolver a primeira. Imaginem então que vocês têm três pizzas e terão que dividi-las entre vocês. Como vocês acham que é possível fazer essa divisão?”

Alguns alunos começam a pensar sobre o assunto, e após aproximadamente cinco minutos, perguntamos:

Professor: “O que vocês podem fazer para ajudar na resolução desse problema?”

Alunos “...”

Professor: “Será que um desenho pode ajudar-lhes?”

Alunos: “Pode.”

Professor: “Então, desenhem.”

Deixamos os alunos pensando mais alguns minutos, refletindo sobre os desenhos de pizzas. Depois, distribuímos três círculos feitos de E.V.A. e dissemos para eles pensarem uma forma de resolver o problema. Explicamos que eles irão recortar o E.V.A., mostrando as soluções, por isso, não podem cortar de maneira errada. Eles precisam pensar e articular uma maneira correta para solucionar o problema.

Os alunos começaram a tentar solucionar o problema, embora muitos apenas conversassem e estivessem pouco interessados no exercício.

Andamos pela sala observando as soluções serem construídas. Não demorou muito e alguns alunos esboçaram e começaram a dividir os círculos sobre os quais desenharam.

A maioria dos alunos dividiu o círculo em oito partes, o que para nós foi uma surpresa. As divisões em oito partes estão claramente associadas ao costume brasileiro da divisão de pizzas em oito partes, algo não pensado no planejamento das aulas.

Mesmo dividindo os círculos em oito partes, os alunos perceberam que nessa divisão serão destinadas duas partes de cada pizza por amigo.

Começamos a fazer uma investigação pelos grupos, perguntando sobre como eles estão resolvendo a questão, e percebemos que os grupos, de forma geral, conseguiram perceber as divisões e distribuição em partes iguais. Nenhum grupo, no começo, conseguiu perceber que a solução 6/8 é a mesma que 3/4.

Chegando o momento de apresentar as soluções obtidas por cada grupo, solicitamos que cada grupo enviasse um representante à lousa e explicasse como foi encontrada a solução. Com isso foi trabalhada a habilidade de se expressar verbalmente. A exposição de uma solução na lousa para que todos compreendessem as várias soluções obtidas por diferentes grupos.

Segue uma das soluções apresentadas: Recordamos que a maioria dos grupos dividiu as pizzas em oito pedaços e distribuíram seis partes para cada amigo no total. Vale ressaltar também, que nessa hora foi muito visível e audível a conversa dos alunos, o que prejudicou muito a parte da metodologia que se refere à execução do plano de resolução e sua justificativa com participação ativa dos alunos, pois os alunos não se concentravam para ouvir os colegas.

Professor: “Grupo 1, como foi que vocês conseguiram resolver o problema?”

Grupo1: “Primeiro dividimos cada pizza em 8 pedaços, e distribuímos 2 pedaços para cada amigo. Repetimos a mesma coisa para as outras pizzas, e no final deu 6 pedaços para cada amigo”.

Professor: “Grupo 3, como foi que vocês fizeram?”

Grupo 3: “Dividimos as pizzas em 8 pedaços cada, juntamos todos os pedaços, tendo assim 24 pedaços no total, dividimos então por 4 e deu 6 pedaços para cada amigo.” Os alunos explicam que usaram a estratégia de dividir em 8 pedaços e enumerar os pedaços de acordo com cada amigo.

Professor: “Grupo 4, e vocês?”

Grupo 4: “Dividimos cada pizza em 4 pedaços e separamos 3 partes para cada amigo.”

Houve uma ligeira pausa, quando os alunos prestaram um pouco mais de atenção na resolução desse grupo, talvez por perceberem uma solução que fugiu da ideia que eles tiveram. Porém, o barulho recomeça.

Professor: “Grupo 5, como vocês resolveram?”

Grupo 5: "Dividimos as pizzas em 16 pedaços e de cada pizza demos 4 pedaços para cada amigo, aí deu 12 pedaços para cada amigo."

Uma vez que os alunos fizeram o raciocínio que os levaram a dividir as pizzas entre os amigos, é pedido para que eles tentem expressar o raciocínio utilizado na linguagem matemática.

Surgiram muitas dúvidas, poucos alunos perceberam de imediato que as frações seriam muito úteis nesse caso. Nessa hora foi preciso direcionar os alunos para que eles percebessem o uso das frações na questão. Foram feitas indagações do tipo:

Professor: "Olhe para a figura que você desenhou. Você repartiu em partes iguais e tomou algumas partes. Isso lembra alguma coisa?"

Aluno: "Frações."

Professor: "Certo. Então, como as frações podem ajudar você a responder a esse problema?"

A intenção inicial era que os alunos chegassem a essa conclusão por si, por isso o atendimento acabou individualizado, mas é provável que se houvesse um envolvimento maior com a classe, isso os teria ajudado mais. Outro fator importante é que os discos de E.V.A. não haviam sido utilizados até então, sendo os raciocínios conduzidos apenas pelas figuras desenhadas e as ideias verbalizadas em público.

Após certo tempo, os alunos começaram a trabalhar a questão usando frações e conseguiram concluir alguns fatos. É hora de novamente socializar as descobertas: voltamos à lousa, e convidamos novamente os grupos a apresentar suas conclusões:

Grupo 1: "Repartimos a pizza em 8 e cada amigo pegou 6 partes e isso dá a fração $\frac{6}{8}$, mas dá pra simplificar por 2 então descobrimos que $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$."

Professor: "Muito bem. Grupo 2."

Grupo 2: "Dividimos cada pizza em 8 partes, então cada pizza representa $\frac{8}{8}$, como tem 3 pizzas a gente soma: $\frac{8}{8} + \frac{8}{8} + \frac{8}{8} = \frac{24}{8}$, como temos que dividir em 4 amigos então dividimos 24 pedaços em 4 e deu $\frac{6}{8}$, simplificando por 2, porque o 6 e o 8 são pares, deu $\frac{3}{4}$."

Professor: "Muito bom. Grupo 3, sua vez."

Grupo 3: "Dividimos cada pizza em 4 e cada amigo pegou uma parte de cada pizza, então deu a fração $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$."

Professor: "Grupo 4."

Grupo 4: “Fizemos assim: $\frac{12}{16}$ e simplificamos por 2, deu $\frac{6}{8}$ e simplificamos por 2 mais uma vez deu $\frac{3}{4}$ e não dá mais pra simplificar.”

Sobre essa sequência de diálogo, fazemos uma autocrítica na análise pós-aula.

Para finalizar essa parte, pedimos aos alunos que recortassem o E.V.A. mostrando a solução obtida por cada grupo, seja ela dividida em 4, 8 ou 16 partes. Usando um isopor fixado na lousa, pedimos aos alunos que prendessem as partes do E.V.A., de forma que representasse a solução.

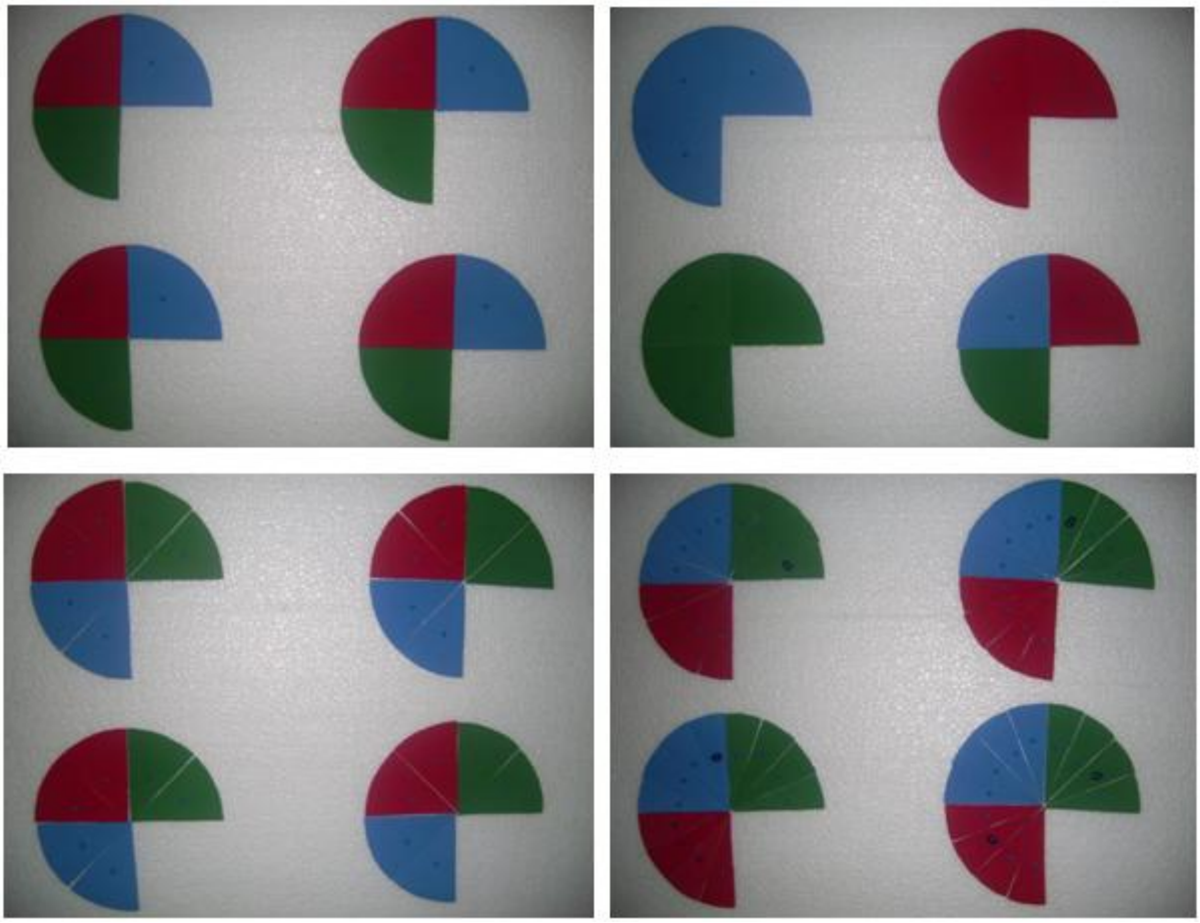


Figura 29 – Soluções dos alunos, repartições em 4, 8 e 16 partes.

Pelas soluções dos alunos compartilhadas com os colegas, foi possível levá-los à compreensão da equivalência entre as frações, visualizando as situações em que mesmo em divisões distintas de cada pizza a quantidade de cada um foi mantida.

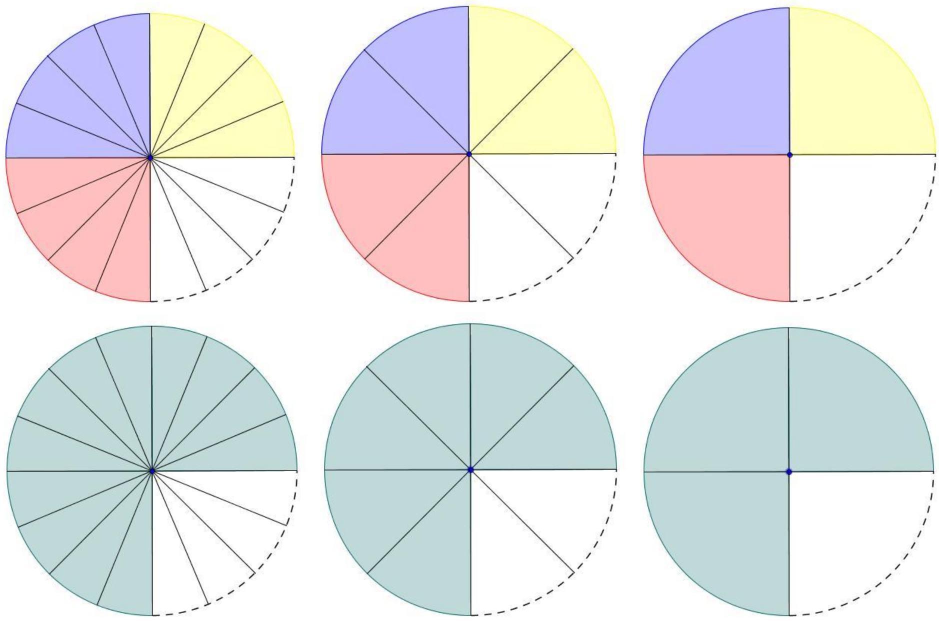


Figura 30 – A ilustração mostra a equivalência entre as figuras independente da partilha.

Observando a ilustração chegamos à conclusão de que os alunos compreenderam que as frações $\frac{12}{16}$, $\frac{6}{8}$ e $\frac{3}{4}$ são equivalentes.

Figura 31 – Aluna expõe suas soluções (ao fundo). Alunos pouco preocupados com a atividade (à frente).

A aula acabou sem tempo para passar uma tarefa planejada e sem chegar a uma síntese sobre frações e divisões.

Observações em sala de aula:

- **Turma H**

Embora a atividade estivesse bem preparada, a execução encontrou algumas barreiras ocasionadas principalmente pela indisciplina dos alunos, pois as conversas impediram que se gerasse uma interação entre os alunos, fato principalmente ocasionado pelo trabalho em grupos de última hora. Este fato evidenciou, portanto, a necessidade de um estudo mais detalhado da turma e das características de cada aluno, de modo que o rendimento individual e em grupos fossem mais proveitosos. Nesse sentido, houve uma retomada para que os alunos chegassem a uma síntese da aula e trabalhassem o exercício do caderno do aluno.

Analisando a aula realizada, a postura dos alunos e a prática docente, vemos que tentamos trabalhar a Metodologia de Resolução de Problemas para propiciar a aprendizagem participativa dos alunos e aprimorar o nível de compreensão de conceitos matemáticos. Entretanto, uma vez que percebemos a falha da dinâmica e disposição dos alunos em grupo, decidimos trabalhar a atividade nas outras turmas de forma individual e comparar as diferenças no rendimento. Esta reflexão está de acordo com a Metodologia de Pesquisa de Aula.

- **Turmas F e G**

Para ambas as turmas, foram trabalhadas anteriormente à aula, revisões do conceito de frações como parte de um todo, e suas operações com mesmo denominador, com o objetivo de suprir um pouco do déficit encontrado nas turmas e prepará-los para essa atividade. Lembramos que essas turmas não tiveram formação adequada de matemática no ano anterior.

No que diz respeito à atividade em si, podemos dizer que as dúvidas e soluções encontradas pelos alunos seguem, em geral, o mesmo padrão descrito na Turma H, porém, em ambas as turmas, trabalhamos de forma individual. Percebemos nitidamente uma melhora no comportamento dos alunos, menos dispersos e mais atenciosos, propiciando mais tempo para aula. Então foi possível fazer a síntese da aula e dar aos alunos a possibilidade de trabalhar o exercício proposto no caderno do aluno, assim como as atividades “O que eu aprendi...” do mesmo caderno, cumprindo assim o planejamento inicial.

- **Turma I**

Podemos dizer que essa turma foi a que obteve os resultados mais próximos aos esperados no planejamento, sem problema algum de indisciplina e participação satisfatória dos alunos. Aqui, trabalhamos de forma individual, porém, os alunos sempre se sentam em duplas, o que contribuiu para uma maior interação entre os mesmos sem gerar dispersão. Para uma primeira atividade, tivemos a participação de uns poucos alunos, porém surpreendeu o fato de alguns alunos com grande déficit de aprendizado, e até mesmo acanhados, que raramente se mostram participativos em sala de aula, se envolveram mais com a aplicação da atividade, apresentando suas soluções quando solicitados, indo à lousa por vontade própria, fazendo perguntas ao professor.

Notamos que os alunos começaram a adquirir segurança de si mesmos ao responderem às perguntas e expor suas opiniões.

Conclusões:

Foi preocupante o fator de indisciplina gerado na turma H, pois a situação esteve grave. De certo modo, a indisciplina coloca obstáculos a um dos objetivos do trabalho que é proporcionar a participação ativa dos alunos na construção de seus próprios conhecimentos. Além disso, a síntese da aula como planejado ficou prejudicada. Isto é, tínhamos como meta que os alunos chegassem à síntese da aula, concluindo que uma fração pode representar uma divisão do numerador pelo denominador.

Entretanto, este problema ocorreu na primeira execução, e conforme as reedições em outras turmas, o planejamento foi se aprimorando, ficamos mais atento às dificuldade encontradas, buscamos caminhos diferentes para promover maior participação dos alunos, e conseguimos ajustar a aula de acordo com o contexto. Foram trabalhadas alternativas para diminuir as conversas paralelas, por exemplo, uma nova disposição dos alunos e o trabalho de forma individual ao invés do trabalho em grupos. Esta percepção e atenção à aula estão de acordo com a Metodologia de Pesquisa de Aulas.

No final dessa aula, além das atividades do caderno do aluno, foi-lhes pedido que criassem e resolvessem um exercício correlato visto em sala de aula, para propiciar uma melhor análise do aprendizado gerado na aula. Em geral, as criações dos alunos vão de encontro ao esperado, embora muitos alunos ainda ficassem presos a exercícios muito similares ao visto, sendo alguns até mesmo cópias, com modificação de valores. Porém, encontramos muitas atividades que mostraram o entendimento do aluno e a aplicação do conhecimento adquirido na aula. A atividade de avaliação foi uma das mais importantes para os resultados de pesquisa deste trabalho, pois influenciou diretamente o olhar do professor sobre o conceito de avaliação, principalmente para subsidiar as reflexões pós-aula da Pesquisa de Aula e para melhorar qualitativamente a avaliação da real aprendizagem de cada aluno.

Analisemos agora um exemplo dessa atividade feita por uma aluna da Turma H:

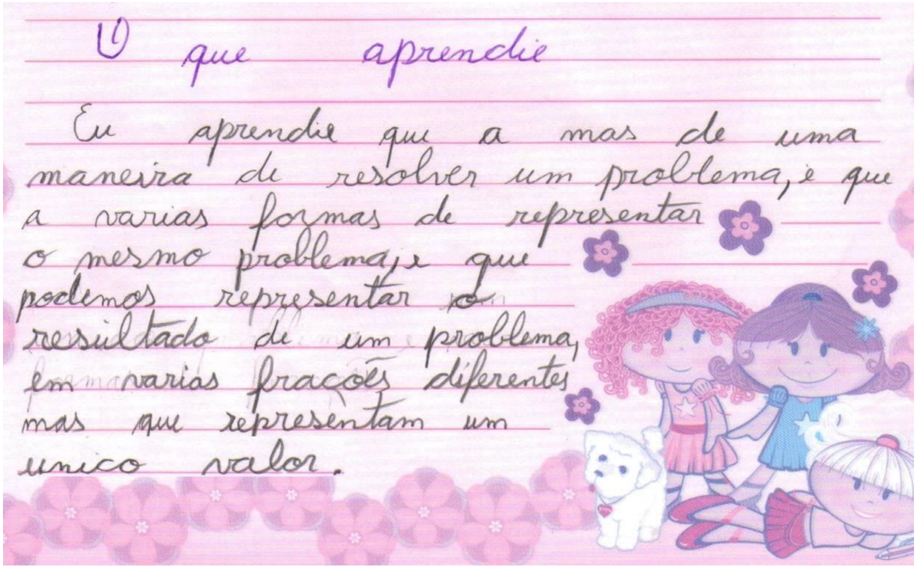


Figura 32 – Atividade “O que eu aprendi...” feita por aluna da Turma H.

Nessa atividade, além da dificuldade da escrita, detectamos que não houve a assimilação da síntese principal da aula. No entanto, vemos outros aspectos que foram destacados pela aluna, como o reconhecimento de várias formas de representar uma mesma fração. De modo geral, os pontos positivos foram enfatizados pelo professor, com palavras de incentivos, mas que também corrigiram e ajudaram a aluna a estabelecer a síntese da aula, posteriormente.

Como uma reflexão da prática docente, observamos nos diálogo da apresentação das soluções dos alunos, que não foram aprofundadas as soluções dos mesmos, no momento da apresentação, limitadas à exposição sem estímulo do professor para que as apresentações sejam acompanhadas de justificativas, sendo que tal recurso deveria ter sido mais explorado. Além disso, na exposição da solução do Grupo 2, onde encontramos “dividimos 24 pedaços em 4 e deu $\frac{6}{8}$”, onde o correto é “dividimos $\frac{24}{8}$ por 4 e deu $\frac{6}{8}$”. Na verdade, não foi percebido neste momento que o entendimento deste grupo era baseado em aritmética, divisão simples de 24 pedaços por 4, sem devida conexão com o conceito de fração. A justificativa desse ato falho pode ser o fato de ter sido a primeira vez que as etapas da Metodologia da Pesquisa de Aula estavam sendo aplicadas, e nós quisemos trazer a participação dos alunos em primeiro lugar, mas comentários adequados no momento da colocação pelo grupo, corrigindo-a, melhorariam a eficácia do recurso. Registramos nesse momento uma crítica pessoal. Destacamos mais uma vez a Metodologia de Pesquisa de Aula que é muito importante por permitir identificar os erros dos alunos e também por propiciar uma análise crítica da prática docente.

A seguir mostramos e analisaremos algumas dessas atividades comentando as falhas encontradas e o conhecimento adquirido pelos alunos durante a aplicação da atividade:

Lição 1

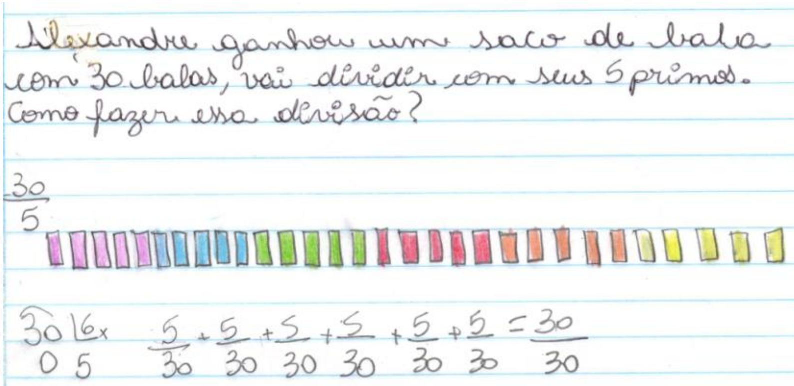


Figura 33 – Atividade feita por aluna da Turma I

Nessa lição, feita por uma aluna da Turma I, houve uma confusão entre o denominador da fração e a resposta que foi previamente gerada na mente da aluna para o exercício. Percebemos aqui que a ilustração que poderia ser usada como auxílio para resolução do problema, apenas é um reflexo do erro cometido previamente pela aluna, onde sua ideia fixa de trabalhar um problema, que envolva frações e representações gráficas, a induz ao erro previamente estabelecido em sua concepção. Não há, portanto, assimilação do novo conteúdo, assim como não houve a conexão entre esse e o conteúdo previamente aprendido.

Lição 2

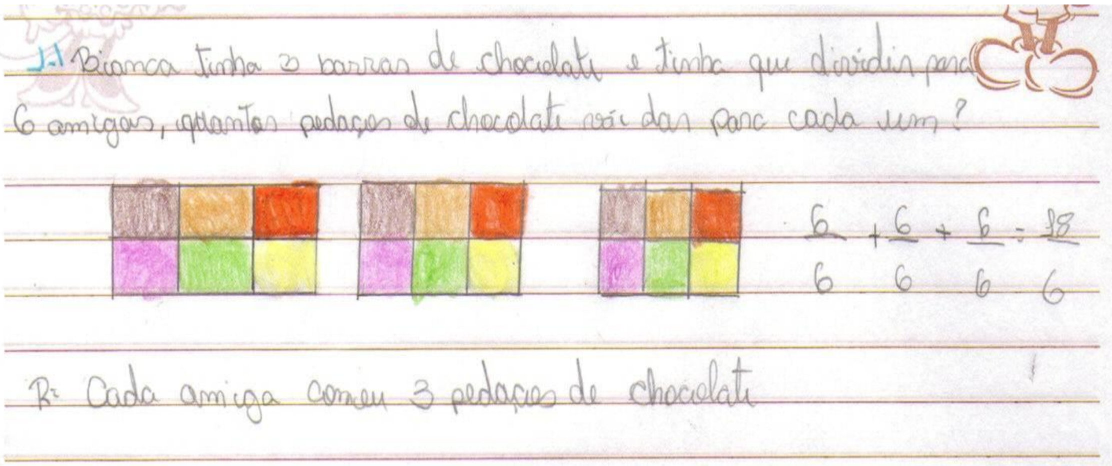


Figura 34 – Atividade feita por aluna da Turma H.

Nessa lição encontramos dificuldades da aluna em estabelecer uma conexão entre as frações e as representações gráficas. Para a aluna, é claro que cada amiga receberá uma das seis partes de cada chocolate. No entanto sua percepção para por aqui. A aluna não foi, nesse momento, capaz de associar a representação fracionária 1/6 destinada a cada amiga por barra de chocolate, assim como não estabelece a soma das três partes, pois não faz a conexão da soma fracionária aqui presente, o que a levaria à dedução de meia barra para cada amiga ao perceber a relação com frações equivalentes. O que percebemos é a presença de uma representação fracionária para cada barra (6/6) ao invés da representação fracionária de cada pedaço destinado a cada amiga por barra (1/6).

Percebemos ainda uma ambiguidade na resposta da aluna, pois de um lado ela aponta a solução na forma fracionária 18/6 (que está relacionada de acordo com sua resposta que cada amiga come três pedaços de chocolate), e de outro, ela dá como resposta que cada amiga comeu três pedaços de chocolate. À primeira vista, percebemos que o erro pode ter sido gerado pelo fato de que $\frac{18}{6} = 3$, indicando que a aluna confundiu a quantidade de barras pela quantidade de pedaços destinada a cada amiga. Porém, a aluna sequer estabelece a ligação entre a fração 18/6 e sua resposta, pois esta se baseia na interpretação incorreta de fração no problema sem relação com a representação gráfica. Isto mostra novamente que, como a aluna da Turma H, há a preocupação em trabalhar um problema que utilize frações de alguma forma e representações gráficas, não havendo uma preocupação com a conceituação. Em ambas situações analisadas, vemos que a transição da aritmética de números naturais para os números fracionários não foi completamente desenvolvida pelas alunas. Vejamos mais exemplos.

Lição 3

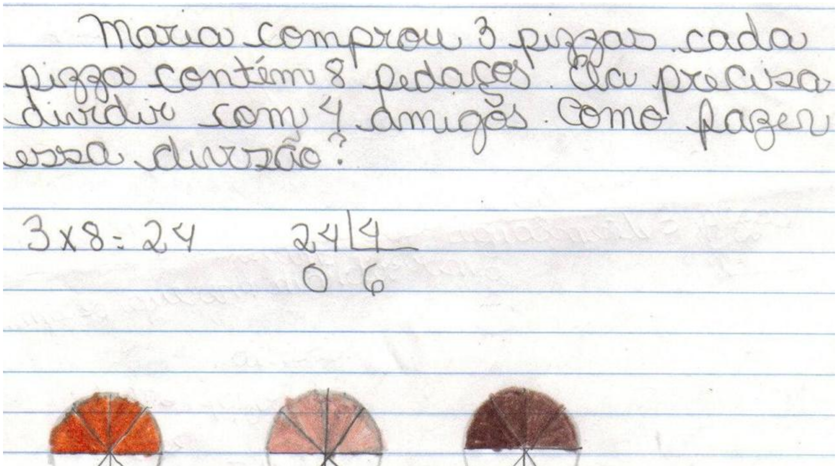


Figura 35 – Lição feita por aluna da 6ª I

Primeiramente temos uma ambiguidade no exercício criado pela aluna (Maria se inclui na partilha das pizzas? Se sim, a divisão seria entre cinco amigos e não entre quatro). E novamente percebemos a falha na representação na forma fracionária das respostas. A aluna estabelece uma resposta para a quantidade de pedaços de pizzas que cada amigo comerá, mas não consegue obter a representação da parte comida por cada amigo como um número fracionário.

A solução da aluna indica um raciocínio baseado em seu conhecimento aritmético, isto é, 3 x 8 = 24. Vinte e quatro pedaços divididos entre quatro amigos, resultando em seis pedaços, isto é, 24 ÷ 4 = 6. Tal procedimento não se conectou ao desenvolvimento do conceito de fração no contexto do problema, mostrando inclusive fragilidade sobre a condição dos pedaços serem necessariamente iguais. Também a aluna não consegue representar sua resposta (de 6 pedaços para cada amigo) no gráfico de pizza.

Lição 4

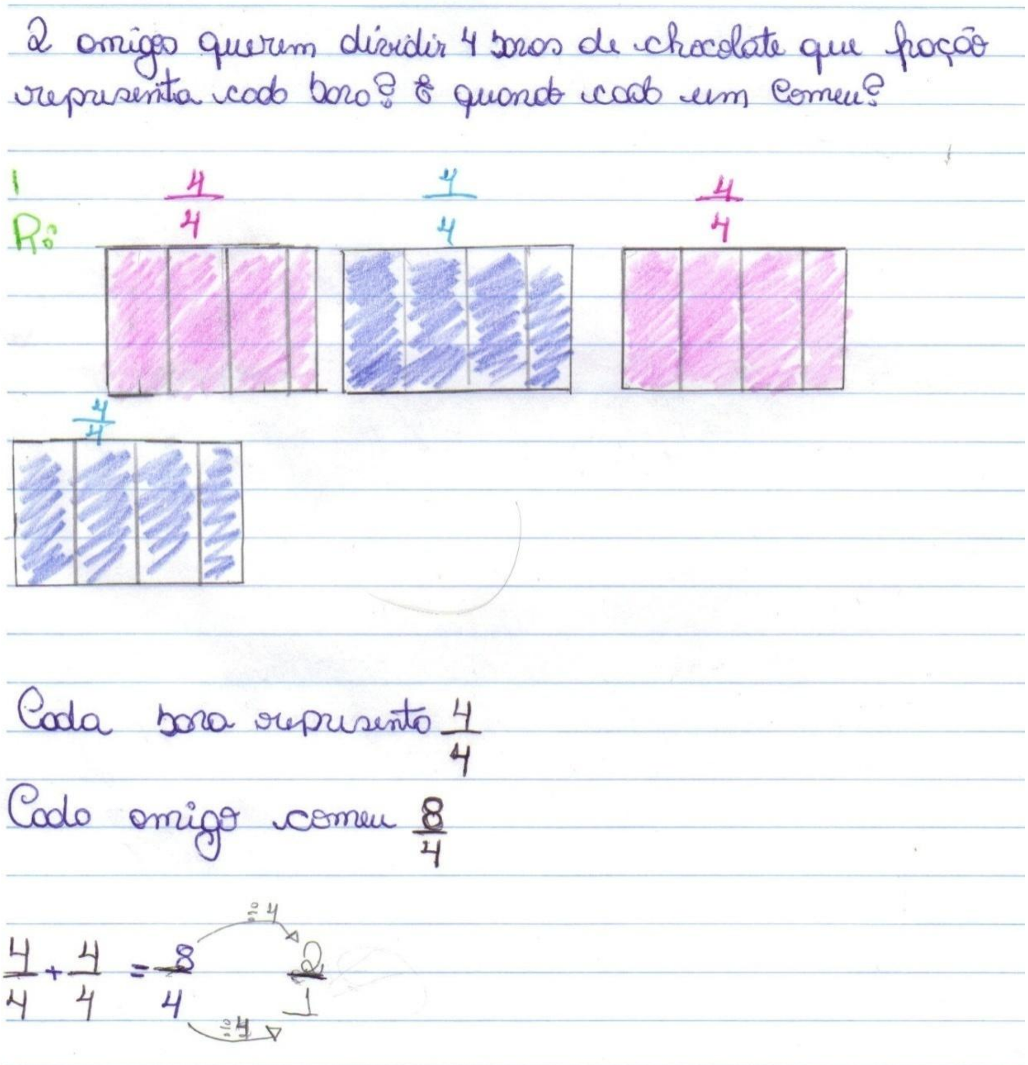


Figura 36 – Atividade feita por aluna da Turma G

Aqui observamos uma atividade, onde não há necessidade do uso de frações para a resolução. O enunciado elaborado força o uso da palavra fração, mas é inapropriado para o contexto. Encontramos a representação fracionária de cada barra correta, porém sem sentido, já que qualquer fração que represente um inteiro poderia estar associada a cada barra. Observamos também que a representação gráfica falha por não apresentar partes iguais na divisão. Percebemos que a aluna tenta usar o novo conhecimento forçando sua aparição em um exercício, mas não o conecta com o conhecimento prévio; não reflete sobre o problema que é resolvido por uma divisão elementar, em que não há a necessidade de representações fracionárias para sua solução.

Devemos lembrar ainda que muitos alunos apresentam dificuldades de expressar suas ideias consistentemente na forma escrita. No entanto, percebemos pelas análises das atividades feitas que podemos concentrar nossa atenção nas dificuldades diagnosticadas para planejar novas abordagens ou acréscimos ao tema, assim minimizando as dificuldades e garantindo uma aprendizagem efetiva dos conteúdos pelos alunos.

Lembramos mais uma vez a maneira como utilizamos a Metodologia de Resolução de Problemas como estratégia para uma participação dos alunos nas aulas, pois sendo trabalhado pelos alunos, teríamos condição de localizar onde ocorrem as dificuldades.

É importante ressaltarmos o ganho nas análises pelo professor das atividades feitas pelos alunos, não só pela verificação dos erros, mas também para um possível diagnóstico da origem desses, da percepção dada ao professor dos déficits da aprendizagem dos alunos, não somente individual, mas também como um todo. Isso permite ao professor um novo olhar sobre alunos, podendo então realizar intervenções que minimizem e/ou eliminem os erros que estão sendo cometidos, sejam conceituais ou técnicos. Isto permite adicionar qualidade à avaliação das atividades e aprendizagem dos alunos, como já dito antes. A análise das respostas aprimora a etapa de refletir da Metodologia de Pesquisa de Aula quando o professor investiga as ocorrências durante a aula e crítica a própria prática.

Nas escolas públicas é comum a manutenção dos alunos de uma mesma classe, de forma que os alunos que a compõem continuem na mesma turma com avanço das séries, com poucas alterações. Assim uma análise cuidadosa das atividades auxilia no acompanhamento das turmas à medida que avançam nas séries escolares.

Nos exemplos das atividades, citados acima, descrevemos exatamente essa percepção, onde identificamos falhas na aprendizagem, que permitiram um direcionamento ao professor para trabalhar, de forma mais efetiva, uma nova abordagem em relação ao tema apresentado, e uma possível retomada dos conteúdos anteriores, que muitas vezes são as causas das dificuldades apresentadas pelos alunos.

Enfatizamos novamente que a atividade, proposta nesse trabalho, propicia uma reflexão sobre o foco no aprendizado dos alunos, identificando as no processo de aprendizagem. O reconhecimento do aluno como indivíduo que apresenta as falhas específicas, indica caminhos na tentativa de saná-las e ajudar o aluno a prosseguir seus estudos.

Finalizando, de modo geral, percebeu-se nas quatro turmas que os alunos explicam ao professor e não para a classe, mostrando que os alunos precisam do aval do professor para sentir confiança. Muitas vezes a resolução do aluno está correta, mas mesmo assim o aluno precisa da aprovação do professor, para não haver qualquer dúvida sobre sua resposta. É preciso então, que seja restabelecida a autoconfiança dos alunos, para que esses possam acreditar que estejam no caminho certo da solução de um problema ou percebam que alguns caminhos não os levarão à resposta procurada.

A metodologia que valorize a participação do aluno em compartilhar sua resolução e suas aplicações pode fortalecer a confiança do mesmo.

5.3.2 Atividade 2 – Aplicada em 08/04/2009

Tema: Comparação de Frações

Tempo de Aplicação: duas aulas de 50 minutos cada.

Objetivo Principal: levar os alunos, através da participação e do trabalho coletivo, a estabelecer a relação de grandeza entre duas ou mais frações.

Objetivos Secundários: rever representações gráficas de frações.

Turma trabalhada: Turma G

Material: papéis vegetais nos quais estão desenhados retângulos com marcas de algumas subdivisões de seus lados, como na figura:

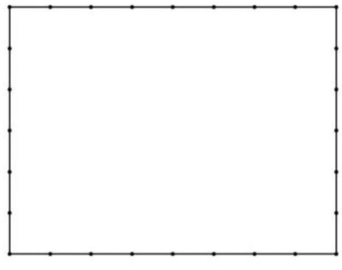


Figura 37 – Marcas feitas em retângulo para auxílio da divisão em partes iguais.

Inicialmente, essa era uma atividade prevista para uma aula simples de 50 minutos. No entanto, com as indagações feitas e a participação gradativa dos alunos, o tempo foi se tornando escasso e percebemos a necessidade de mais tempo para sua realização de modo satisfatório.

As atividades não foram realizadas em grupos, porém, os estudantes poderiam consultar os colegas, pois é costume, nas aulas, que os alunos se sentem em duplas.

No início da aula, foi proposto aos alunos um problema introdutório que visava à familiarização com o assunto a ser apresentado. Segue o problema:

- Problema inicial: "Dadas duas frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ qual representa a maior quantidade?"

Apresentamos o problema à sala, perguntamos sobre o que tratava e não foi preciso muito esforço por parte dos alunos em dizer que 1/2 é maior que 1/3.

Professor: "Por que 1/2 é o maior número?"

Alunos: "Porque 1/2 é metade" (observamos que os alunos possuem a noção de que 1/2 é maior que a terça parte).

Professor: "É possível verificar que 1/2 é realmente maior?".

De prontidão um aluno respondeu: "divide". Obviamente se referindo a divisão do numerador pelo denominador, no qual transforma a fração na sua representação decimal, e assim de fácil comparação entre dois ou mais números. Comentamos que ele estava correto. Uma possível verificação seria tomando 1/2 = 1 : 2 e 1/3 = 1 : 3, assim, pode-se conferir que 1/2 é maior.

Perguntamos se existia outro modo, pois queríamos uma verificação mais ilustrativa, e como ninguém se manifestou, desenhamos dois retângulos de mesmas medidas na lousa, conforme a figura:

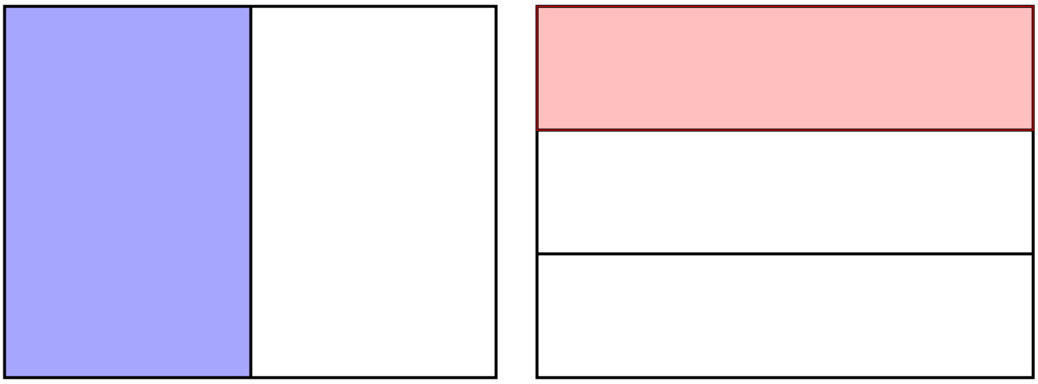


Figura 38 – Representações das frações 1/2 e 1/3.

Era visível para muitos alunos que a fração que representava a metade era maior, porém isso não resolvia o problema, uma vez que parecer não justificava o fato. Propusemos o seguinte problema correlato:

- "Qual a maior fração: 1/4 ou 3/4?"

Dissemos aos alunos que poderiam fazer a comparação entre as frações usando uma representação gráfica, usando duas figuras divididas igualmente. Um aluno sugeriu as representações abaixo:

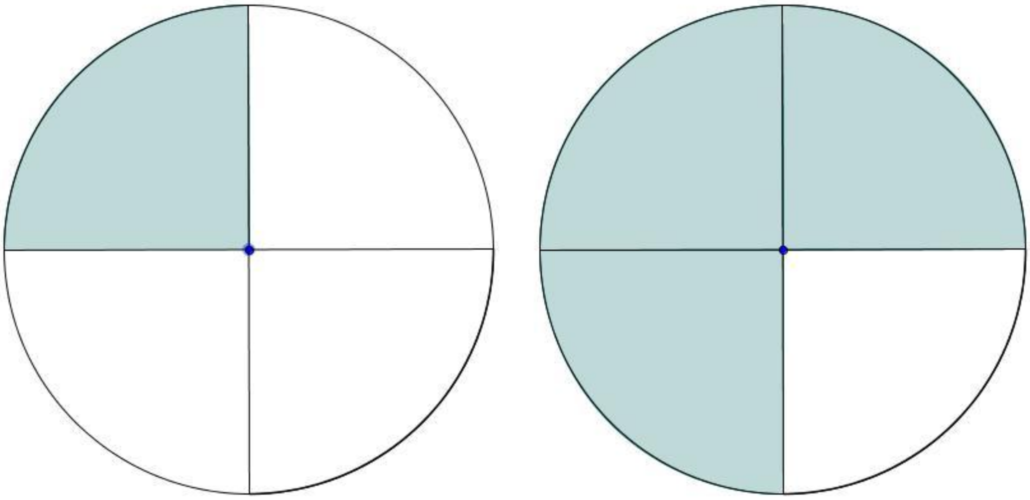


Figura 39 – A Ilustração mostra a comparação entre as frações.

Dessa forma é possível uma comparação imediata das representações das frações, bastando uma simples contagem das partes pintadas no interior da figura, e os alunos, sem muita demora, responderam 3/4 é maior que 1/4.

Professor: "Como poderíamos então saber qual dentre as duas é a maior fração sem precisar desenhar representações?"

Um aluno respondeu: "Se a fração tem o mesmo denominador então é só comparar o numerador."

Professor: "E quando as duas frações não possuem o mesmo denominador?"

Alunos: "..."

Professor: "Muito bem, então vamos fazer o seguinte problema: qual é a maior fração 3/4 ou 2/3?"

Professor: "Trouxe um retângulo marcado em papel vegetal, vou distribuir o papel para vocês e quero que representem a fração 3/4, dividindo em quatro partes. Façam as divisões por linhas verticais..."

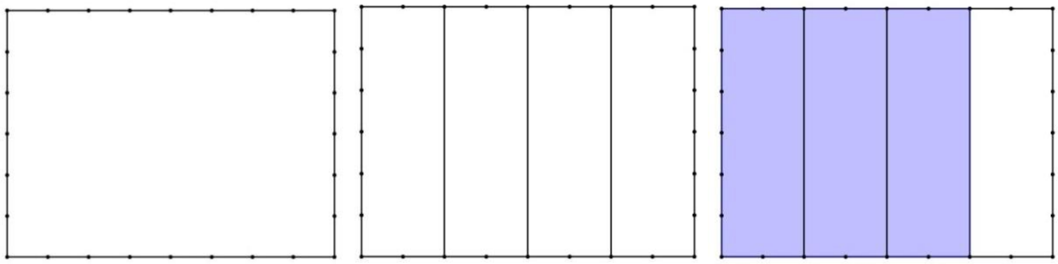


Figura 40 - A representação da fração 3/4.

Professor: “Muito bem, agora vou distribuir outra folha para vocês representarem a fração 2/3, mas dessa vez faça a divisão através de linhas horizontais...”

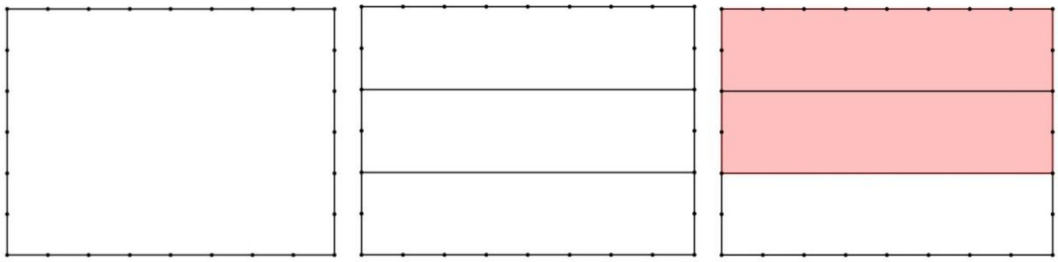


Figura 41 - A representação da fração 2/3

Após os alunos terminarem as representações, já não havia mais tempo para concluir a atividade, então os papéis vegetais foram recolhidos com a intenção de continuar o raciocínio na aula seguinte.

5.3.2.1 Continuação da atividade 2 – aplicada dia 09/04/2009

Primeiramente, fizemos um resumo da aula anterior, para restabelecer a conexão entre a aula passada e socializar as ideias com os alunos ausentes na aula anterior. Após distribuir os papéis vegetais, pedimos que os alunos posicionem um papel sobre o outro de forma que os retângulos se sobreponham como na figura:

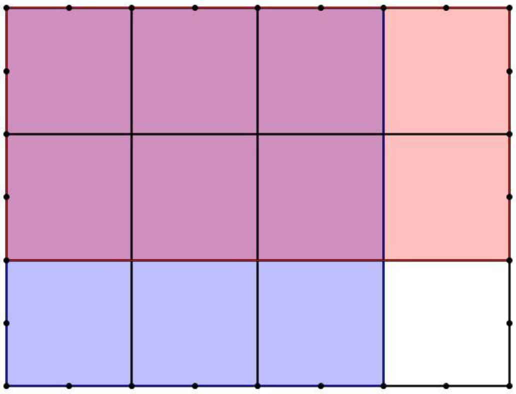


Figura 42 - As figuras sobrepostas

Perguntamos se era possível comparar as frações agora, alguns alunos responderam:

Aluno1: “Só contar os quadradinhos.”

Professor: “Então, conta e me responde.”

Aluno1: “A figura pintada de azul tem 9 e a pintada de vermelho tem 8, então a azul é a maior.”

Professor: “Então, qual fração é a maior?”

Aluno 1: “3/4 é maior porque é a parte azul”

Outro aluno concluiu o seguinte:

Aluno 2: “Da parte azul sobraram 3 e da parte vermelha sobraram 2, então a vermelha é menor.”

Professor: “E quanto às partes que estão com as duas cores ao mesmo tempo?”

Aluno: 2: “Não sei, mas não precisa contar.”

Indagamos a classe sobre o retângulo que representava a fração 3/4:

Professor: “Após a sobreposição das figuras, esse retângulo foi dividido em quantas partes?”

Os alunos não tiveram dificuldades em perceber que a fração 3/4 passou a ser a fração 9/12. Perguntamos para a classe o que poderíamos dizer sobre as duas frações:

Professor: “Então, o que podemos dizer sobre as frações 3/4 e 9/12?”

Alunos: “São equivalentes”

Professor: “Por quê?”

Aluno X: “A parte azul é a mesma.”

Aluno Y: “Dá pra simplificar por 3.”

Professor: “Muito bem, e quanto à fração 2/3?”

Alunos: “É a mesma coisa.”

Professor: “Que fração temos para a parte vermelha?”

Alunos: “8/12”

Professor: “O que podemos dizer sobre as frações 2/3 e 8/12?”

Alunos: “São equivalentes, dá pra dividir por 4.”

Professor: “Então, analisando somente as frações 3/4 e 2/3, o que fizemos para descobrir qual é a maior?”

Aluno 1: “Transformamos elas em frações equivalentes com o mesmo denominador, e depois, como disse ontem, é só comparar os números de cima.”

Professor: “Muito bem, isso mesmo.”

Após algumas considerações, foi feita a síntese final da aula pelos alunos, e mais alguns exemplos para a fixação das idéias foram discutidos, assim como foram passados exercícios para verificação da aprendizagem. Fim da aula.

Observações em sala de aula:

- **Turma F e G**

Em ambas as turmas, chamou muita a atenção o fato que poucos alunos conseguiram estabelecer as conclusões almejadas, e lembramos novamente que essas turmas, no ano anterior, enfrentaram muitas dificuldades em relação à matemática, pelo fato de não terem tido professor fixo para a disciplina durante todo o ano letivo.

Muitos alunos tiveram dificuldades em chegar sozinhos às conclusões estabelecidas. Foi preciso fazer mais exemplos para fixar a idéia, e explorar as representações gráficas das frações. Percebeu-se claramente que muitos alunos possuem dificuldades em fazer a transição das representações gráficas para a parte algébrica. Essa transição esbarra em dificuldades de muitos alunos que não conseguem passar da fase de aprendizagem empírica, com manipulações do concreto, para aprendizagem de representações por meio de números.

Para ambas as turmas foram trabalhadas revisões de frações e suas operações, a fim de suprir pouco do déficit encontrado pelos problemas já apontados.

No que diz respeito à atividade em si, podemos dizer que as dúvidas e soluções das duas turmas seguiram o mesmo padrão, sendo em ambas as turmas trabalhadas de forma individual. Percebemos nitidamente uma melhora no comportamento dos alunos, que se mostraram menos dispersos e mais atenciosos, proporcionando mais tempo para aula. Isto permitiu que a síntese da aula fosse feita e que os alunos trabalhassem o exercício correlato do caderno do aluno, assim como as atividades “O que eu aprendi...” no mesmo caderno. Cumprimos assim o planejamento inicial.

- **Turma I**

Novamente obtivemos os melhores resultados nessa turma, em contraste à situação encontrada nas turmas F e G. Houve mais participação dos alunos e começaram a aparecer sugestões e observações na tentativa de resolver os problemas (por exemplo, na comparação entre as frações 3/4 e 2/3, foi sugestão de um aluno que dividíssemos os retângulos em partes iguais). Quando apareceram as oportunidades, o professor pediu ao aluno que expusesse suas idéias e as socializasse para o restante da turma, e isso foi trabalhado nessa turma, aproximando cada vez mais dos objetivos da aula.

- **Turma H**

Para que pudéssemos dar continuidade no processo de ensino e aprendizagem, foi preciso mudar a postura dessa turma, pois a situação de conversa e indisciplina encontrada na atividade anterior não poderia mais acontecer. Os alunos devem saber ouvir e escutar, não somente o professor como também o colega de classe. Por essa razão, antes mesmo de iniciarmos outras atividades, tivemos uma conversa com os alunos e uma tomada de atitudes disciplinares, como a convocação de pais para os casos mais complicados, na expectativa de resgatar a participação dos estudantes.

Com as providências tomadas, aplicamos a atividade e percebemos um novo comportamento da sala. Os alunos estavam menos falantes, o que contribuiu para o andamento da aula, entretanto, a participação ficou restrita aos alunos que frequentemente são mais espontâneos e participam da aula.

Conclusões:

No caderno do aluno há pouco conteúdo relacionado com as comparações entre frações na 6ª série/7º ano do ensino fundamental, e as poucas atividades sugeridas estão propostas como exercícios. Logo, a atividade realizada se mostrou importante em todas as turmas, pois abriu as possibilidades de justificativas nas atividades de comparações e tivemos também a chance de estabelecer as relações entre a aritmética e a álgebra. Por exemplo, na resposta dos alunos, na página 75conferir, pudemos relacionar a contagem dos quadradinhos com a operação adição e subtração facilitados pela representação com mesmo denominador. De fato, estabelecer tais relações auxilia os estudos em séries posteriores, principalmente nas

7ª e 8ª séries do ensino fundamental, onde ocorrem os estudos iniciais da algebrização, cuja compreensão é fundamental aos estudos posteriores no ensino médio. Vimos a importância do processo de aprendizagem participativa, pois a oportunidade de dar voz aos alunos trouxe a chance de estabelecer tal continuidade.

As dificuldades encontradas em cada aula foram estudadas posteriormente, e buscamos alternativas para contornarmos os problemas, em um processo contínuo. Fundamentados na aplicação do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo e da Metodologia de Pesquisa de Aula pudemos estudar as ocorrências na aula, analisar a situação de dúvida ou erros e buscar tais alternativas.

No que diz respeito às turmas, encontramos um processo de continuidade entre as atividades executadas, e as reações das turmas refletiram tal processo. Porém, destacamos que muitos alunos ainda têm dificuldades em participar das aulas e expor suas idéias.

É comum encontrarmos alunos que chamam o professor para perto e perguntam se o que ele fez e/ou pensou está correto, não socializando com a turma ou ainda solicitando que o professor exponha sua idéia. No decorrer do semestre, durante a aplicação das atividades, procuramos ultrapassar essa barreira, dando voz ao aluno para expor suas idéias e participar das aulas como um todo.

5.3.3 Atividade 3 – Aplicada em 11/05/2009

Tema: o conceito de ângulos e polígonos como projeções planares de objetos tridimensionais.

Tempo de Aplicação: duas aulas de 50 minutos cada.

Metodologia: aula expositiva com participação ativa e trabalho coletivo**.**

Objetivos Principais: compreensão do conceito de ângulo; projeções planares ortogonais; associação entre objetos tridimensionais e planares; dependência da imagem projetada do ângulo de projeção.

Objetivos Secundários: trazer ao aluno construções matemáticas concretas, potencializando o gosto pela disciplina e sua participação na construção do conhecimento coletivo.

Materiais necessários: retroprojetor, papel cartão ou cartolina, poliedros construídos com cartolina ou similares. E poliedros construídos com material transparente.

Pré-aula: foi interessante trazer aos alunos planificações diversas de poliedros e pedimos que construíssem os poliedros a partir de tais planificações. Um programa que ajudou essa tarefa foi o Cabri 3D que possui opções para planificar poliedros convexos:

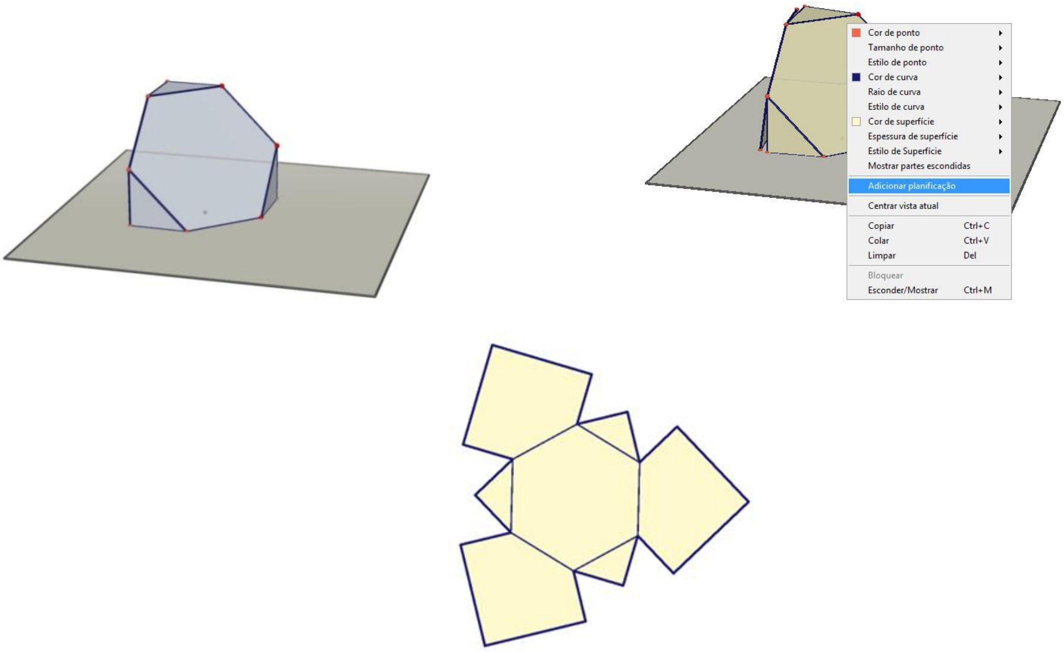


Figura 43 – Uso do software Cabri 3D na obtenção de planificações de poliedros.

Essa aula ainda serviu como base para os alunos perceberem que polígonos formam as faces de um poliedro. Para isso, pedimos que os alunos identifiquem os polígonos que formam cada planificação e os desenhem separadamente.

Logo após, explicamos sobre as marcas de cola que devem ser desenhadas, uma vez que, como essas marcas não fazem parte das planificações, o programa Cabri 3D não as representa, e isso consistiu em mais uma oportunidade didática na aula.

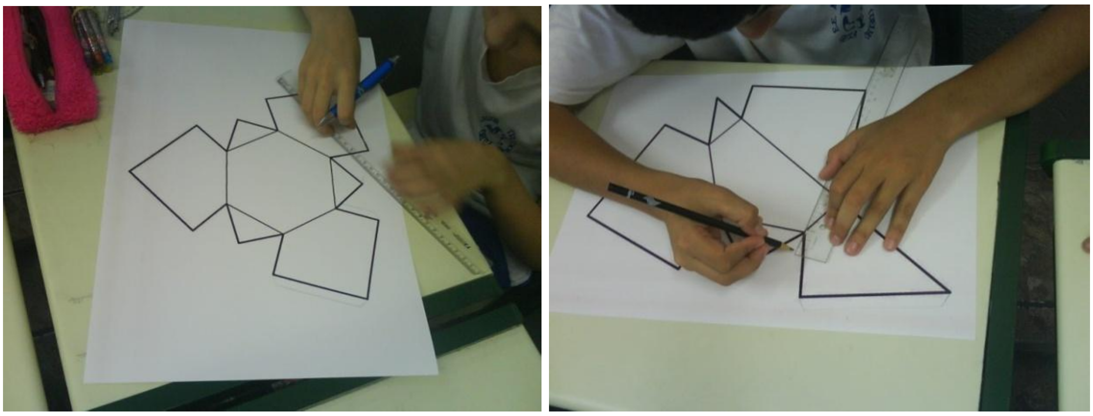


Figura 44 – Alunos fazem as marcas de cola nas planificações.

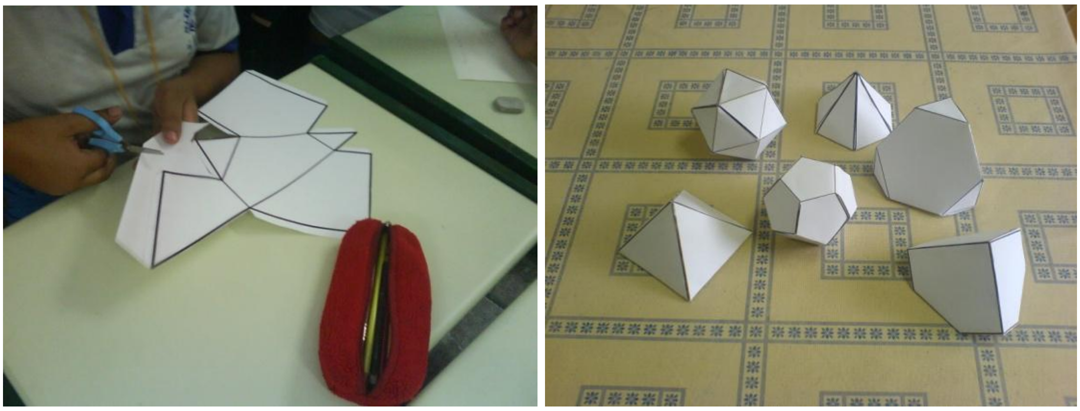


Figura 45 – Construção dos poliedros pelos alunos (esquerda). E alguns poliedros prontos (direita)

Para trabalhar o conceito de ângulo usamos dois pedaços retangulares de cartolina ou papelão, juntando-os com fita adesiva, de tal forma que lembre uma porta que possa ser aberta, como na figura:

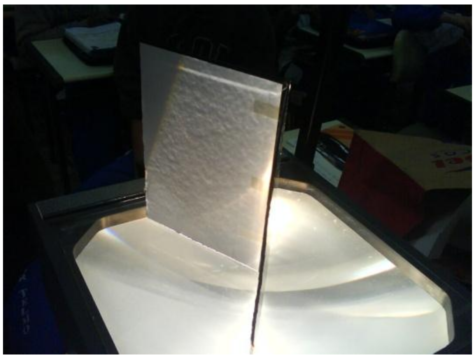


Figura 46 – Construção com papel cartão representativa de uma porta.

- Usando o retroprojetor

As escolas públicas estaduais do estado de São Paulo possuem retroprojetor. Porém, em muitas em que tivemos oportunidade de trabalhar, não havia a tela branca de projeção. Podemos, no entanto, improvisar uma tela com um mapa qualquer, pendurando-o na lousa usando a parte de trás como uma tela de projeção:

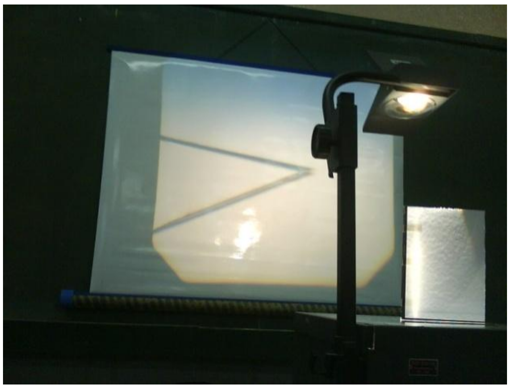


Figura 47 – Usando o retroprojetor.

O retroprojetor foi usado de maneira que projete as sombras dos objetos que são colocados nele, explorando a importância do ângulo de projeção e sua influência na sombra projetada. Devemos nos atentar que um objeto apoiado na base do retroprojetor possui como sombra projetada na tela a figura que é a projeção ortogonal do objeto sobre a base do equipamento.

5.3.3.1 - As aulas

Começamos por colocar o papelão que representa uma porta, de forma que fique “em pé” no projetor. Temos, então, como sombra projetada dois segmentos de mesma origem. Pode-se explicar fazendo uma analogia com uma lâmpada colocada exatamente acima de uma porta, a sombra aos pés da porta é similar à projeção que está sendo observada na tela.

Mexendo o papelão, fazendo movimentos como se estivesse abrindo uma porta, temos a noção de ângulo como a abertura formada por dois segmentos de mesma origem: quanto maior a abertura, maior o ângulo, e mostrando que ângulos não são as marcações que os representam.

Durante a apresentação, enfatizamos que estamos transportando uma situação tridimensional para um ambiente bidimensional, no caso a tela de projeção. Explicamos também que o retroprojetor “enxerga” as cartolinas como se estivesse vendo exatamente de baixo do objeto, mostrando, então, a importância do ângulo de projeção.

Quando movimentamos as cartolinas de forma que a base não fique inteiramente apoiada sobre o retroprojetor, alteramos a sombra da projeção. Surgiram casos em que não apareceram segmentos de mesma origem, indicando que o objeto não está mais situado adequadamente em relação ao ângulo de projeção.

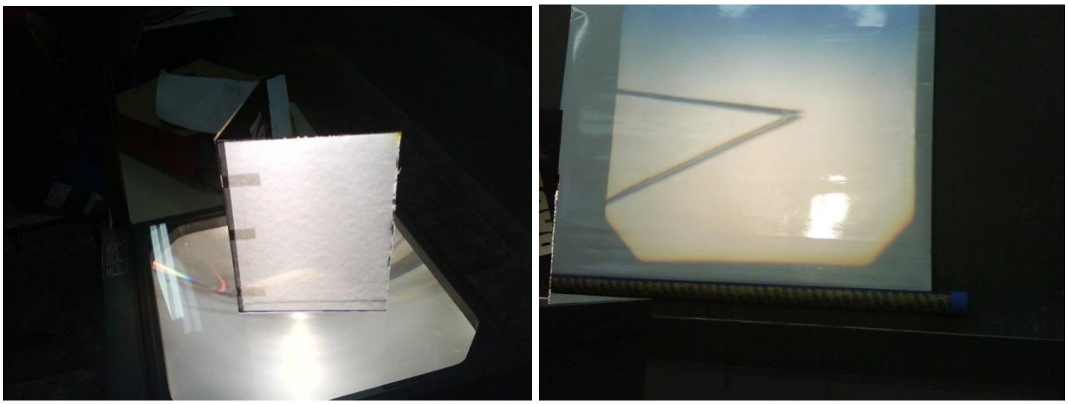


Figura 48 – O conceito de ângulos é explicado na atividade.

Partimos, então, para os poliedros. Colocamos um paralelepípedo apoiado completamente por uma das faces na base do retroprojetor, a figura formada como projeção é um retângulo, e os alunos podem distinguir ângulos, vértices e arestas do polígono formado e identificá-los como polígono semelhante à face apoiada. Então, indagamos os alunos sobre a razão pela qual apareceu um retângulo como sombra (projeção), e a resposta foi praticamente automática, como esperávamos: “Porque a parte que está apoiada é um retângulo” (fiz essa apresentação em quatro turmas distintas, todas de 6ª série do ensino fundamental, e sempre houve respostas similares). Aproveitamos para dar novamente ênfase ao fato de que o polígono está sendo obtido de um objeto tridimensional por meio da projeção ortogonal. Os alunos perceberam nesse momento que as faces do paralelepípedo formam respectivamente as sombras a serem projetadas (desde que os ângulos diedros entre a face apoiada e as faces laterais, sejam menores ou iguais a um ângulo reto).

Então, dissemos aos alunos que colocaríamos outra face do paralelepípedo na base do retro projetor, mas perguntando antes que figura eles acham que será projetada. A grande maioria percebeu que a projeção será dada pela face que irá ser apoiada, no caso um outro retângulo.

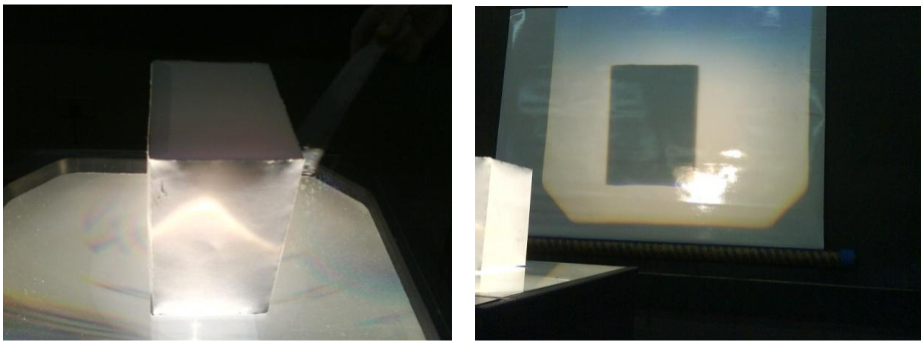


Figura 49 – Sombra de retângulo obtida pela projeção de um prisma.

Colocando um prisma reto de base triangular ou um cubo, o resultado esperado foi o mesmo, os alunos perceberam que a figura projetada pode ser um quadrado, retângulo ou um triângulo dependendo da face do prisma que será apoiada na base do retro projetor.

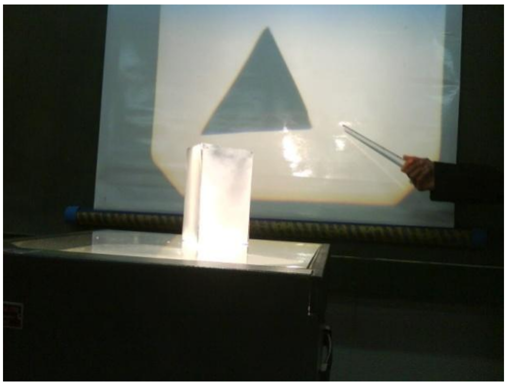


Figura 50 – Sombra de um triângulo obtida pela projeção de um prisma de base triangular.

Passamos, então, para um poliedro não convencional, formado por uma secção hexagonal do cubo, isto é, o poliedro obtido pela seção plana de um cubo pelo plano mediador de dois vértices opostos. Neste caso, dependendo da face apoiada temos a sombra da própria, enquanto que há outras faces que não são projetadas adequadamente, devido ao tipo de ângulos diedrais adjacentes a elas, e isto fornece uma oportunidade de olhar investigativo para os alunos.

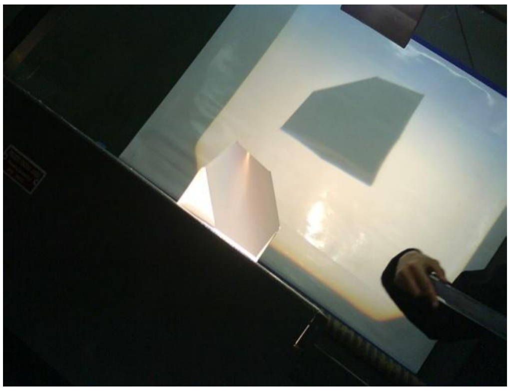


Figura 51 – Poliedros não convencionais também são trabalhados na aula.

Por exemplo, quando colocamos a face hexagonal na base do retroprojetor, vemos que a sombra projetada não é um hexágono regular, pois outras faces adjacentes à hexagonal se projetam também sobre a base do retroprojetor, formando uma figura cuja sombra é projetada na tela. Vemos a importância do plano de uma face ser perpendicular ou não à base do retroprojetor para examinar as interferências no estudo das sombras projetadas.

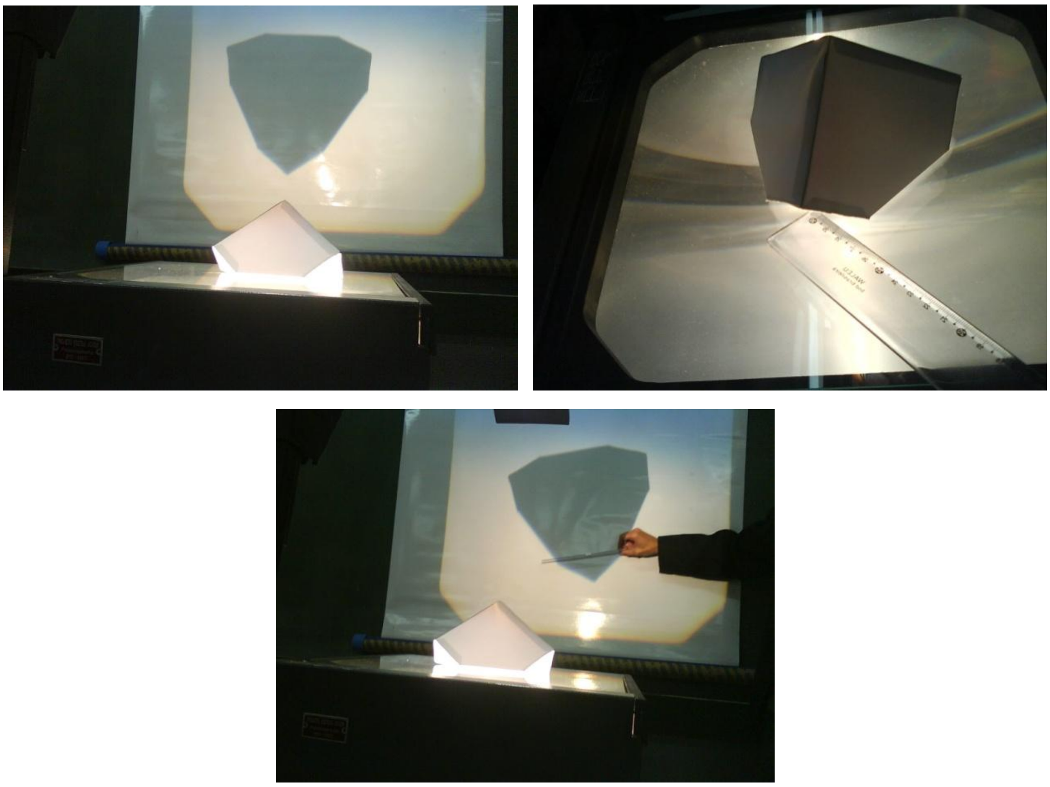


Figura 52 – Na sequência, a exploração de faces não perpendiculares à base de projeção.

Fizemos também outras intervenções movimentando os poliedros de tal forma que nenhuma face fique inteiramente apoiada sobre o plano do retroprojetor. Dessa maneira, pudemos gerar outras sombras que evidenciaram a importância da posição do objeto em relação à luz do retroprojetor. Outras sombras podem ser geradas com outros poliedros e relacioná-las com as faces poligonais, evidenciando novamente a importância do ângulo de projeção sobre a posição dos sólidos.

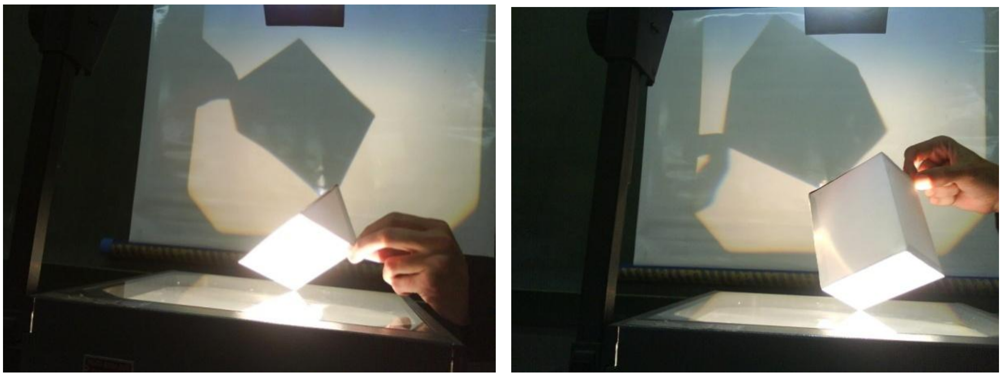


Figura 53 – A importância da posição do objeto em relação à projeção.

Por último, trabalhamos com os poliedros de faces transparentes. Mostramos inicialmente aos alunos os poliedros e pedimos que eles desenhassem o que acham que iria aparecer como sombra projetada:

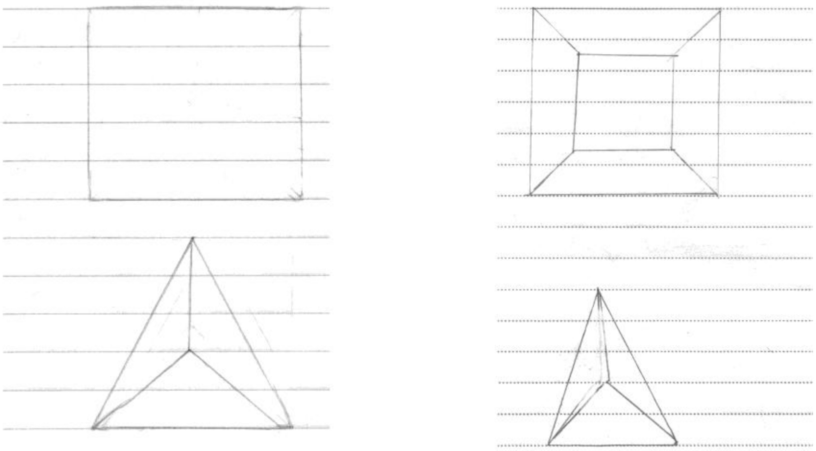


Figura 54 - Alunos ilustram suas estimativas da projeção

Nas experiências realizadas em sala de aula, os alunos sempre pediram para ver o poliedro pela visão frontal àquela que a luz do retroprojetor irá incidir, assim, eles tentaram enxergar o que a luz do retroprojetor "está vendo".

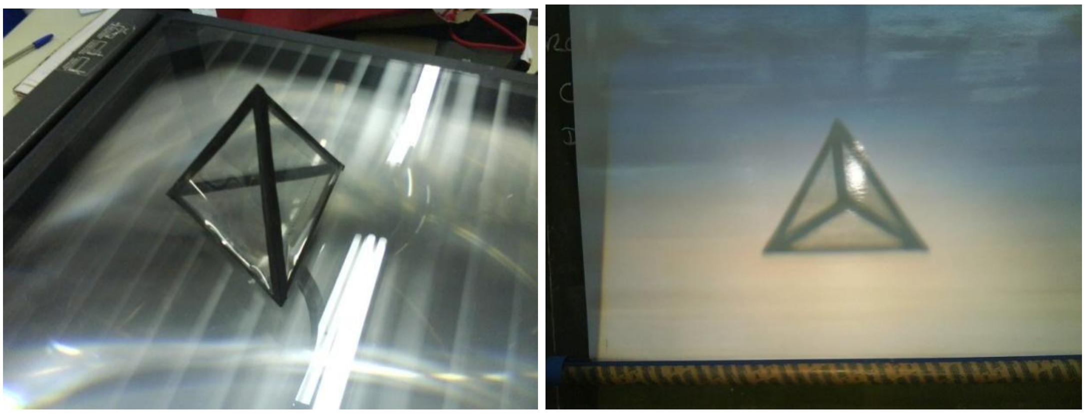


Figura 55 – Usando poliedros de faces transparentes.

Movimentamos também os poliedros transparentes sob a luz do aparelho, mostrando assim uma imagem projetada que indica a aparência tridimensional do objeto. Isto dá oportunidade para discutirmos que, embora a sombra projetada seja um objeto bidimensional, temos a representação de um objeto tridimensional, da mesma maneira que se representam nos desenhos em papéis, nas imagens em televisão e/ou em monitores de computadores.

Comentários sobre a aula:

Durante o período que antecedeu essa atividade trabalhamos outras atividades e problemas, alguns não relacionados com a geometria. Observamos que a atividade se passou após mais de um mês das primeiras situações de aprendizagem desse trabalho. Lembramos que nosso foco está no trabalho da geometria de acordo com a SEE, e que deve ser trabalhado no 2º bimestre. Por essa razão, tivemos uma pausa na aplicação de atividades para esse trabalho, o que não quer dizer que ficamos mais de um mês sem trabalhar o projeto com os alunos. Na verdade, usamos algumas atividades e problemas, não relacionados com a geometria, para trabalharmos a Metodologia de Resolução de Problemas e aumentarmos a participação individual e coletiva dos alunos.

Observamos que o interesse dos alunos aumenta quando apresentamos algum conteúdo de uma forma inovadora. Eles ficam mais atenciosos com o uso de materiais não convencionais. A participação é um fator considerável nesse momento e, em todas as quatro turmas que apresentei a atividade com o retroprojetor, não houve problema algum com indisciplina ou conversas paralelas que impedissem o bom andamento da aula. Ao contrário, muitos alunos que são considerados dispersos, participaram das aulas, seja desenhando figuras, respondendo perguntas feitas pelo professor ou até mesmo fazendo perguntas.

A aula ficou caracterizada pelo ângulo de projeção ao qual são submetidos os objetos, tendo como foco principal a projeção ortogonal, mas os alunos acabaram percebendo que a posição do objeto em relação ao ângulo de projeção altera as sombras projetadas diferentemente.

Lembramos que há duas projeções na atividade, a projeção ortogonal dada pelo objeto sobre a base iluminada do retroprojetor, e a projeção cônica dada pela lente que projeta e altera o tamanho das sombras na tela de projeção. Não exploramos a relação de semelhança entre o objeto e sua imagem projetada pela projeção cônica, mas identificamos o potencial didático que a atividade pode oferecer na retomada do assunto de semelhança de figuras planas na 7ª série/8º ano. A teoria de projeção e o conhecimento prévio do professor sobre o tema para transformar o conhecimento e transmiti-lo aos alunos de maneira adequada, foram fundamentados no CPC, e foram importantes nesse momento. Nesse nível, estamos preocupados em explorar a percepção espacial dos alunos e o professor que for usar essa atividade deve ter esse cuidado.

Outro fator importante a destacar é que os alunos acabaram por entender que a geometria que está sendo trabalhada na lousa (ou na tela de projeção) é uma geometria que está sendo transportada de um ambiente tridimensional para o bidimensional. Os estudantes perceberam que existe muita geometria no mundo que os cerca. Tal percepção foi evidenciada na turma F, quando uma aluna, ao observar a projeção de um tetraedro de faces transparentes (figura 46), levantou a seguinte questão: “Professor, o ponto no centro está na frente ou atrás?”. O fato provocou uma discussão em sala de aula, pois, ao mesmo tempo em que o ponto central era visível na figura plana, essa figura projetada gerava uma ilusão tridimensional. Por isso, para alguns o ponto central estava à frente (com a vista do tetraedro por cima) e para outros o ponto estava atrás (a vista por baixo de um tetraedro transparente). Tal fato evidencia que os alunos estão mudando seus pensamentos geométricos, associando figuras tridimensionais às suas representações no plano, e percebendo (e deduzindo) as características dos objetos reais em suas representações planas.

5.3.4 Atividade 4 – Aplicada em 11/05/2009

Tema: construções régua e compasso e a desigualdade triangular.

Objetivo Principal: entender as possibilidades de construções de um triângulo, dadas medidas de três segmentos.

Objetivo Secundário: trabalho coletivo e participação dos alunos na construção de seu próprio conhecimento de tal forma que consigam usar as ferramentas régua e compasso no entendimento da desigualdade triangular, fazendo conjecturas.

Material: régua e compasso.

Pré-requisitos: alunos devem estar familiarizados com o uso das ferramentas régua e compasso, à construção quando possível de triângulos com o compasso a partir de três segmentos com medidas variáveis.

Observação: lembramos que o planejamento dessa aula foi analisado nessa dissertação, no capítulo 3, que pode ser consultado para maiores referências e explicações.

A aula:

Iniciamos a aula colocando uma atividade de construção régua e compasso de um triângulo, dadas medidas de seus lados. Primeiramente desenhamos na lousa segmentos de tamanhos variados com as medidas 5 cm, 6 cm e 7 cm, pedindo, em seguida, que os alunos façam o triângulo com essas medidas. Essa atividade familiariza os alunos à construção já trabalhada nas aulas anteriores, corrigindo eventuais dúvidas.

Após cerca de cinco minutos, pedimos aos alunos para considerarem o seguinte problema:

- Problema: “construa um triângulo dados três segmentos de medidas 3 cm, 4 cm e 8 cm”.

Após dado o problema, aguardamos que apareçam as dúvidas:

Aluno 1: “Professor, não estou conseguindo”

Professor: “Por que não? Será que você fez a construção certa?”

Aluno 1: “Fiz certo, mas não fecha.”

Professor: “Interessante! Mas, então por que será que não foi possível construir? Pense um pouco sobre isso.”

Professor: “Alguém conseguiu fazer?”

Aluno 2: “eu consegui” (em todas as turmas, sempre houve alunos que alegaram ter conseguido fazer a construção. Nesse momento o professor precisou intervir para que todos os alunos tenham certeza de que a construção não é possível de ser realizada, não por incapacidade dos alunos e sim pela impossibilidade da construção).

Professor: “Uma perguntinha para vocês: dados três segmentos de tamanhos quaisquer, sempre é possível construir um triângulo com essas medidas?”

Alunos: “Não”

Aluna 3: “Se fosse possível dava pra construir esse último, mas não deu.”

Professor: “Exatamente. Então existem momentos em que podemos construir o triângulo e existem momentos onde não é possível, certo?”

Alunos: “Sim”

Professor: “Então pergunto: quando será que é possível construir o triângulo, isto é, existe alguma condição para que possamos construir o triângulo?”

Alunos: “?”

Professor: “o problema principal de hoje então é esse” (e escrevemos na lousa):

- Problema: “dados três segmentos de medidas quaisquer, qual a condição para que possamos construir um triângulo?”

Nesse momento iniciamos a Metodologia de Resolução de Problemas, como planejado, tendo como vantagem que a primeira etapa (entender o problema) já está encaminhada pelo trabalho realizado ao início da aula.

Dando continuidade à aula, sugerimos aos alunos que façam mais algumas construções com segmentos de tamanhos variados para ajudar a percepção dos mesmos. Os alunos escolheram uma terna de segmentos, cada um a seu gosto, é o momento de desenvolver a autonomia dos alunos.

Foi importante, logo em seguida, fazer a atividade onde a soma das medidas de dois segmentos dados seja igual à medida do terceiro segmento, por exemplo: “construa o triângulo com medidas 3 cm, 4 cm e 7 cm”.

Sabemos de antemão que essa construção é impossível, sendo que a construção com o compasso faz o encontro das circunferências cair exatamente sobre um ponto do segmento de 7 cm, tomado como base da construção:

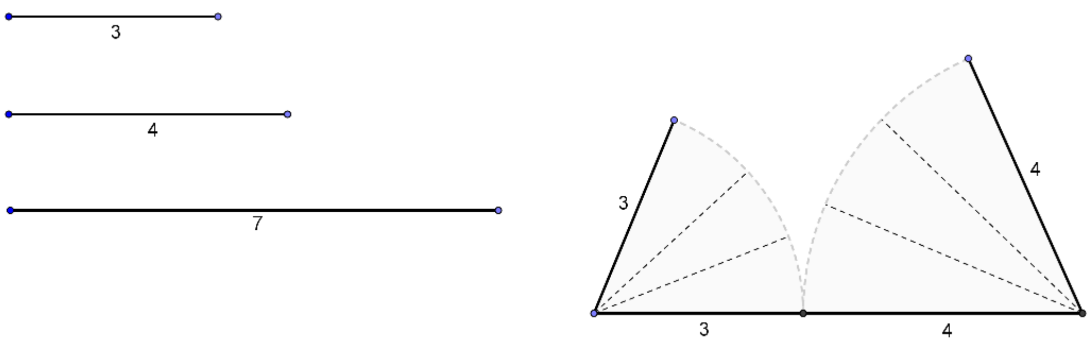


Figura 56 – Construção onde a intersecção se dá sobre o segmento de 7 cm.

Essa foi uma parte muito importante da aula, pois embora não seja possível formar um triângulo, muitos alunos fizeram a construção por erros de abertura do compasso e pelas imprecisões das ferramentas. Logo, a discussão na aula seguiu curso para o professor agir na correção desse erro e convencer os alunos que a construção é impossível. Fizemos a seguinte construção na lousa:

Construção:

1º Passo: Trace um segmento $\overline{AB}$ de medida 7 unidades na lousa, (no caso, sinalizando 7 cm para os alunos). Com ponta seca em A construa um arco de raio 3 unidades que intersecciona o segmento $\overline{AB}$ em um ponto P:

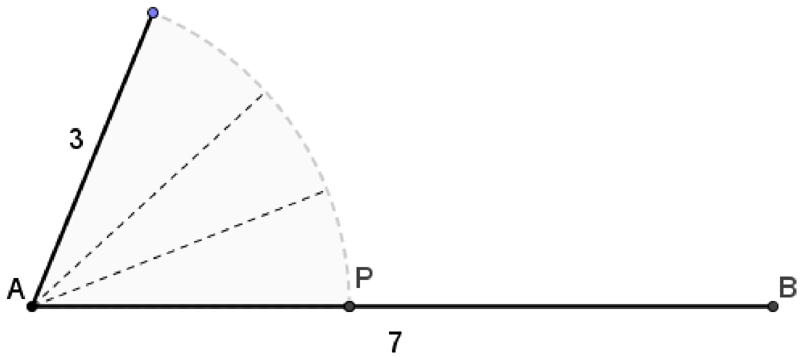


Figura 57 - 1º Passo

Nesse momento indagamos os alunos induzindo ao pensamento correto:

Professor: “Pela construção que fizemos, qual a medida da distância entre os pontos A e P?”

Alunos: “3 cm”

Professor: “Correto. Se a distância entre A e P é 3 cm, então quanto vale a distância entre P e B?”

Alunos: “4 cm”

Professor: “Por quê?”

Alunos “É quanto falta para completar 7 cm”

Professor: “Muito bem! Vamos fazer o restante da construção.”

2º Passo: Construa o arco com ponta seca em B e raio igual a 4 unidades.

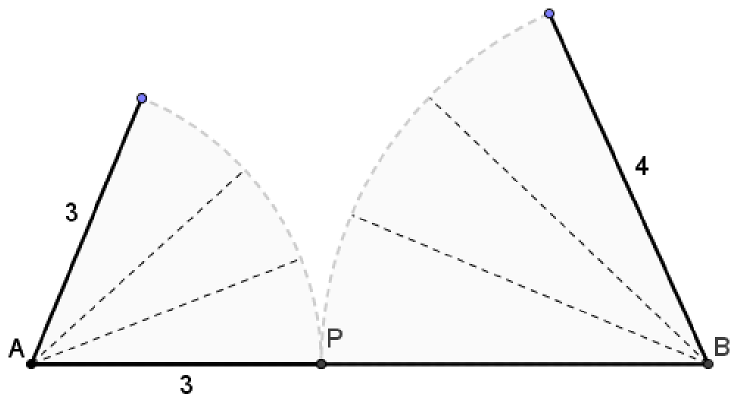


Figura 58 - 2º Passo

Professor: “Esse segundo arco vai cortar o segmento $\overline{AB}$ aonde?”

Aluno: “Exatamente no ponto P.”

Professor: “Exatamente. Ele corta o primeiro arco?”

Alunos: “Corta, mas corta no ponto P.”

Professor: “Na verdade os dois arcos se tocam em um único ponto, o ponto P. Se a intersecção é no ponto P podemos formar triângulo?”

Alunos: “?”

Professor: “Pensem bem, se traçarmos um segmento e escolhemos um ponto sobre esse segmento, se unimos os três pontos, formará um triângulo?”

Alunos: “Não”

Professor: “Aqui não é o mesmo caso?”

Alunos: “É”

Professor: “Então forma um triângulo?”

Alunos: “Não”

Professor: “Observe ainda, quanto é 3 + 4?”

Alunos: “Sete”

Professor: “3 + 4 é igual a 7?”

Alunos: “Sim”

Professor: “Interessante. Vamos usar isso para deduzirmos algumas coisas...”

A partir desse momento, levamos o aluno a pensar sobre a possibilidade da construção e sobre a desigualdade triangular.

Professor: “Dos exemplos que fizemos, o primeiro com segmentos de medidas 5 cm, 6 cm e 7 cm foi possível construir. O segundo exemplo com segmentos 3 cm, 4 cm e 8 cm, não foi possível. E esse último?”

Alunos: “Também não foi possível”

Professor: “Então um triângulo de lados 3 cm, 4 cm e 7 cm também não é possível. Olhando os três exemplos é possível dizer alguma coisa sobre quando é possível construir e quando não é possível?”

Observações: É muito raro até nesse momento que algum aluno consiga deduzir corretamente a desigualdade triangular. Na verdade, desde o planejamento, não esperávamos que nesse momento o aluno deduzisse a desigualdade triangular sem ajuda do professor. Mas com os questionamentos feitos, queríamos trazer a participação dos alunos, promovendo uma discussão dentro da sala de aula. Pode acontecer de algum aluno dizer coisas sem sentido sobre a desigualdade, por exemplo: “Só é possível construir se os tamanhos forem pares” ou “Se os segmentos têm um centímetro de diferença”. Mesmo nesses casos, é importante o incentivo à participação do aluno, quando o professor pode envolver a classe perguntando se acham que o colega está certo, ou ainda pedindo um contra exemplo que fure a afirmação desse aluno. É significativo dizer palavras de incentivo ao aluno, mesmo que ele esteja errado, pois é comum ao aluno que obtém uma resposta negativa do professor não responder mais às perguntas, com medo dos colegas. Logo, mesmo sendo uma afirmação errada, é interessante dizer frases do tipo: “Legal você ter perguntado isso”, “Gostei de sua afirmação, vamos pensar...”

Continuando a aula...

Professor: “Vamos construir uma tabela agora. Vamos observar o primeiro exemplo: 5 + 6 é maior, menor ou igual a 7?”

Alunos: “Maior”

Professor: “E 6 + 7 é maior, menor ou igual a 5?”

Alunos: “Maior”

Professor: “E 7 +5 é maior, menor ou igual a 6?”

Alunos: “Maior”

Professor: “Interessante. Façam o mesmo para os outros exemplos”

Nesse momento fizemos na lousa uma tabela solicitando aos alunos que completem a tabela com exemplos onde foi possível ou não as construções.

Exemplo 1	Exemplo 2	Exemplo 3
$5+6>7$	$3+4<8$	$3+4=7$
$6+7>5$	$4+8>3$	$4+7>3$
$7+5>6$	$8+3>4$	$7+3>4$
Construção Possível	Construção Impossível	Construção Impossível

Professor: “Analisando as tabelas o que podemos dizer sobre quando é possível e quando não é possível fazer a construção de um triângulo?”

A partir desse momento não demorou muito para os alunos perceberem que a construção só será possível se as somas das medidas dois a dois forem maiores que a medida restante, cabendo ao professor mediar a síntese da aula que foi feita pelos próprios alunos, terminando por sistematizar a propriedade da desigualdade triangular.

Trabalhamos o resultado obtido, solicitando aos alunos que resolvam exercícios de possibilidade de construções de triângulos dadas algumas medidas de segmentos e pedindo para justificar suas respostas sem utilizar o recurso da construção.

Para finalizar, pedimos aos alunos que façam e entreguem a atividade “O que eu aprendi...”.

Fim da aula.

Comentários sobre a aula:

Não detalharemos como se encaminhou a aula em cada turma, pois não houve muita diferença entre a aplicação em cada uma delas. Podemos dizer que no geral percebeu-se uma maior participação dos alunos, um aumento do interesse, principalmente pelo uso de ferramentas.

A aula foi conduzida como sequência didática, mas com o cuidado das etapas da Metodologia de Resolução de Problemas serem vivenciadas pelos alunos em cada momento, para trazer a aprendizagem participativa.

Destacamos mais uma vez a importância da Metodologia de Pesquisa de Aula, pois por ser uma aula que gera muitas dúvidas entre os alunos, foi possível melhorar as aulas subsequentes, trabalhando as dúvidas mais frequentes, observadas durante a aplicação, e dando maiores ênfases em partes da aula que geraram mais dúvidas.

Com referências às dúvidas surgidas, essa aula foi provavelmente a que mais gerou entre os alunos, independente da turma. A razão disso consiste desta aula trazer muitas informações novas aos alunos, inclusive abordagens diferentes para o raciocínio, e também pelo déficit prévio de aprendizagem de muitos alunos (por exemplo, muitos desconheciam a simbologia $<$ e $>$), e finalmente por erros de construção. Nos casos em que era impossível construir um triângulo, os alunos o "conseguiam", por erros de medição e imprecisão no manejo das ferramentas régua e compasso.

Um exemplo desse fato foi encontrado na atividade "O que eu aprendi..." feita por um aluno da turma H:

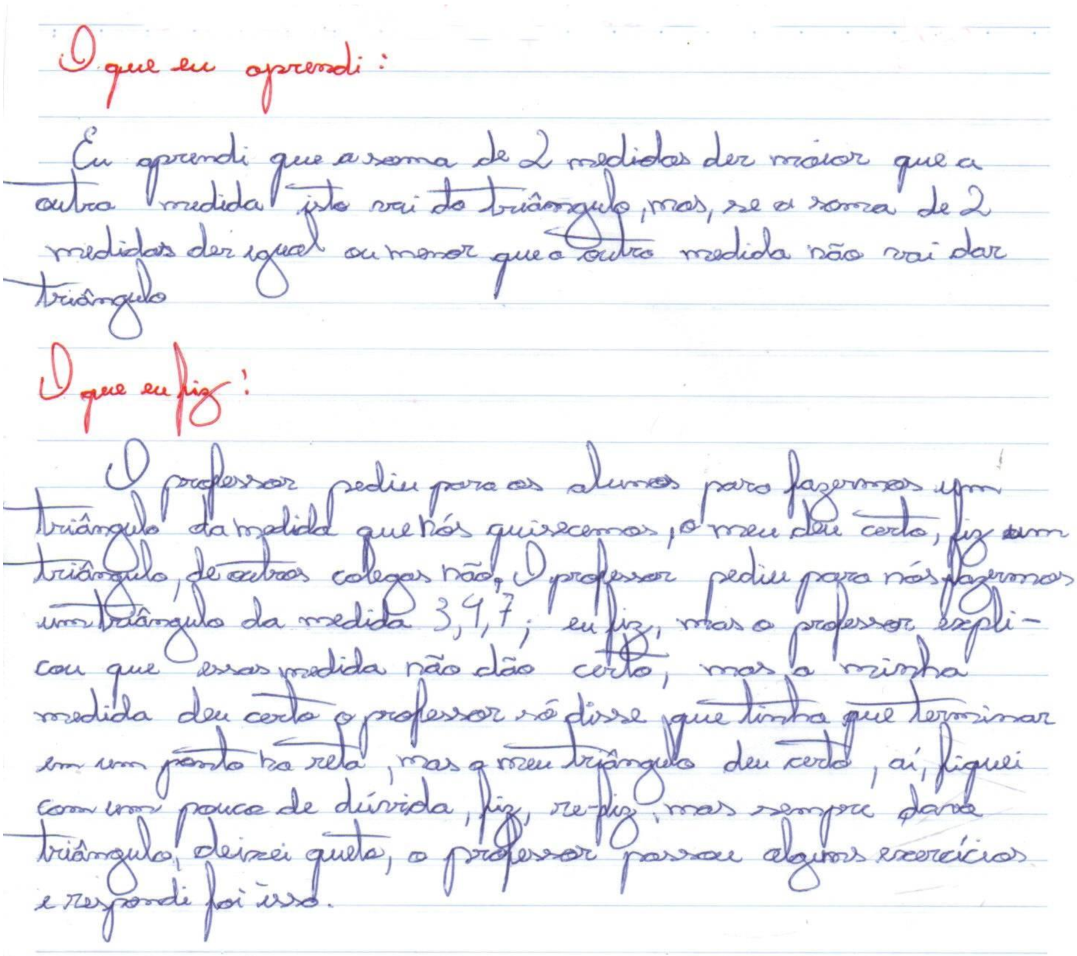

O que eu aprendi:
Eu aprendi que a soma de 2 medidas der maior que a outra medida isto vai do triângulo, mas, se a soma de 2 medidas der igual ou menor que a outra medida não vai dar triângulo
O que eu fiz:
O professor pediu para os alunos para fazermos um triângulo da medida que nós quisecemos, o meu deu certo, fiz um triângulo, de outros colegas não, O professor pediu para nós fazermos um triângulo da medida 3, 4, 7, eu fiz, mas o professor expli-cou que essas medida não dão certo, mas a minha medida deu certo o professor só disse que tinha que terminar em um ponto na reta, mas o meu triângulo deu certo, aí, fiquei com um pouco de dúvida, fiz, re-fiz, mas sempre dava triângulo, deixei quieto, o professor passou alguns exercícios e respondi foi isso.

Figura 59 - Aluno relata dúvida na atividade "O que eu aprendi..."

Percebemos que o aluno mantém sua dúvida mesmo que o professor tivesse mostrado na aula que ele está errado, porém ele ainda não adquiriu a confiança para questioná-lo. A atividade de avaliação pós-aula se torna eficaz, pois podemos intervir junto ao aluno para sanar sua dúvida, assim como a de outros alunos quando analisamos suas atividades entregues. Observamos a pouca familiaridade do aluno com o raciocínio dedutivo, mostrado pela argumentação falha.

Pela quantidade de dúvidas surgidas, resolvemos retomar o tema dando continuidade à aula, usando dessa vez o DataShow e o programa Geogebra. Basicamente revimos a mesma aula, mas com a agilidade da informática pudemos explorar mais casos, trabalhando assim os erros cometidos e sanando as dúvidas. A maior precisão pelo uso do programa favoreceu a aprendizagem, pois eles dão ampla confiança aos resultados gerados pela ferramenta computacional. Dessa forma foi possível, entre outras coisas, mostrar que as medições feitas com instrumentos de desenho podem gerar erros por meio de imprecisões, como os presenciados em sala de aula. Mas os resultados da matemática são exatos e provados por meio de argumentos.

Para finalizar, percebemos os ganhos referentes à participação dos alunos. Começaram a aparecer mais frequentemente alunos questionadores, assim como o bom trabalho contínuo realizado com a Pesquisa de Aula começa a render muitos resultados positivos no olhar investigativo da prática docente.

5.3.5 Atividade 5 – Aplicada em 28/05/2009

Tema: Teorema Angular de Tales

Objetivo Principal: participação dos alunos na construção de seu próprio conhecimento de tal forma que consigam interpretar e reconhecer o Teorema Angular de Tales em diversas situações da geometria escolar e do cotidiano.

Objetivo Secundário: familiarizar os alunos com as validações e levar o aluno a entender que as verdades matemáticas possuem justificativas.

Pré-aula: alunos devem desenhar três triângulos em três folhas A4. Em um dos triângulos, deve-se medir com um transferidor os ângulos internos do triângulo. Nos outros dois triângulos devem fazer marcações nos ângulos e pintar essas marcações com cores diferentes. Uma atividade foi realizada para a preparação da aula, usando dobraduras e o transferidor.

Material: para facilitar a explicação, o professor pode confeccionar dois triângulos, ambos feitos em cartolina (em tamanhos que ocupem boa parte da cartolina), fazendo a marcação dos ângulos e pintando como feito no material do aluno.

Observação: lembramos que o planejamento dessa aula foi feito nessa dissertação, maiores referências e explicações podem ser consultadas no capítulo três da mesma.

Na primeira parte da aula, usamos o triângulo, construído prévia e individualmente por cada aluno, medindo com o transferidor os seus ângulos internos. O professor lhes pediu que somassem as três medidas e anotou na lousa o resultado obtido por vários estudantes.

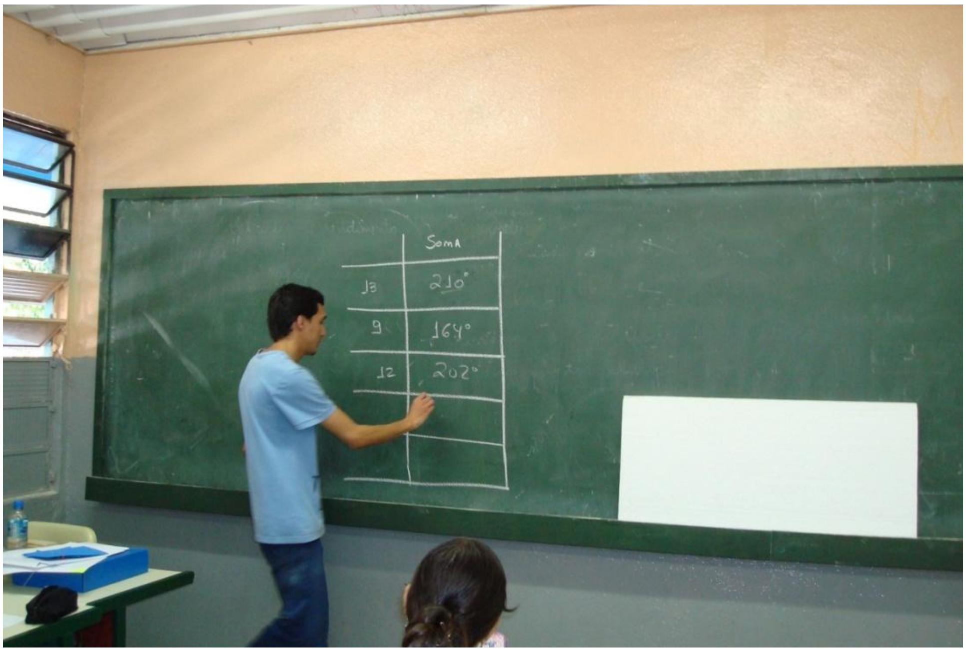


Figura 60 - O professor faz a tabela comparativa da soma dos ângulos obtida pelos alunos.

Observação: Apareceram resultados muito distantes de 180°, como esperados no planejamento. Nessa hora pedimos para que os alunos refaçam a medição com os transferidores de forma mais precisa. Nas turmas em que foram aplicadas as aulas, sempre houve alguma disparidade no resultado e esse acontecimento proporcionou o aprendizado da importância da utilização correta das ferramentas de medição e da imprecisão ocasionada em certas medições, até mesmo por defeitos da própria ferramenta.

Com a tabela construída, os alunos tiveram a oportunidade de perceber a relação entre os valores obtidos, sendo fundamental também que o professor tenha enfatizado que a soma fosse obtida utilizando os valores das medições dos <u>ângulos internos</u> do triângulo de cada aluno. Seguem os diálogos acontecidos na 6ª H:

Professor: “Pessoal, há alguma coisa que vocês conseguem perceber na tabela?”

Alunos: “Está tudo perto do 180, bem próximo.”

Professor: “Como você obteve esses valores?”

Alunos: “Somando.”

Professor: “Somando o quê?”

Alunos: “Os ângulos de dentro do triângulo.”

Professor: “Então vamos colocar algumas observações aqui [na lousa].”

Nesse momento o professor fez anotações na lousa de acordo com as respostas dos alunos, direcionando-os a uma discussão que convergisse para a conclusão desejada de que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°.

Professor: “Então, o que você fez para obter o valor?”

Alunos: “Somei os ângulos.”

Professor: “Olhando a tabela você percebeu o que?”

Alunos: “Na média dá 180°”

Professor: “Todos concordam? Alguém tem outra opinião?”

Aluno André: “Eu acho que depende do tamanho.”

Professor: “Você acha que depende do tamanho? Vou anotar isso aqui também. Como a gente não comprovou nada, vou colocar isso como uma pergunta, o André acha que depende do tamanho, será que depende?”

Professor: “Pessoal, os triângulos que vocês fizeram, vocês acham que são todos iguais?”

Alunos: “Não.”

Professor: “Então, deixe-me pegar alguns triângulos que vocês fizeram.” (nesse momento o professor escolheu aleatoriamente alguns dos triângulos feitos pelos alunos).

Professor: “Pessoal, prestem atenção, eu tenho aqui alguns triângulos e se vocês compararem com o de vocês, eles são diferentes, nem que sejam no tamanho. Os triângulos que eu tenho aqui (quatro triângulos) são todos totalmente diferentes, se eu pegar qualquer outro na sala, provavelmente será diferente. Mas vocês somaram os ângulos, o que aconteceu?”

Alunos: “Na média deu 180°.”

Professor: “Agora, será que essa soma não daria sempre um valor igual?”

Alunos: “...”

Professor: “Então, eu afirmo: a soma sempre é 180°, não importa o triângulo.”

Aluno: “Mas professor, então porque deu diferente?”

Professor: “Boa pergunta, mas são vocês quem vão responder essa pergunta. Por que vocês acham que o resultado foi diferente?”

Aluno 1: “Por causa da medição com o transferidor?”

Professor: “Muito bem! A medição com o transferidor não é muito precisa, percebam que quando usamos o transferidor percebemos que, às vezes, sobra um pouquinho ou falta um pouquinho e o próprio jeito que colocamos o transferidor pode ocasionar um erro na medição.”

Aluno 2: “E o transferidor pode ter sido feito errado também, não pode?”

Professor: “Exatamente, a fábrica que fez o transferidor pode ter feito com alguma imperfeição, o que pode gerar erros também. Entenderam?”

Alunos: “Sim!”

A partir desse momento, passamos às atividades para dar indícios da veracidade da afirmação dada. Não cabe para essa série uma demonstração formal do teorema, no entanto, é importante que o aluno tenha confiança no resultado e a afirmação não fique apenas “a soma é 180° porque o professor falou”, abrindo a mente dos alunos para críticas e questionamentos.

Voltamos à aula...

Professor: “Que ângulo é esse?” (mostrando um ângulo raso na lousa)

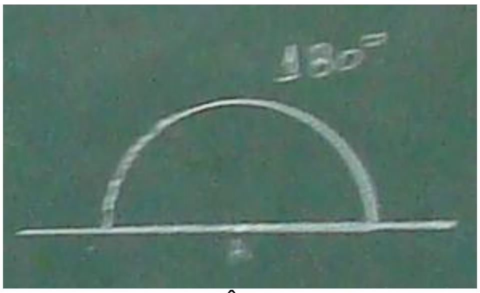


Figura 61 – Ângulo de 180º

Alunos: “Ângulo de meia-volta ou 180°.”

Professor: “Muito bem. Agora eu quero que vocês peguem uma das folhas na qual está desenhado outro triângulo. O que a gente vai fazer? Você vai recortar o triângulo com muito cuidado, e depois rasgar as pontas do triângulo, reservando-as.”

Os alunos começam a rasgar as pontas, uns usam a tesoura e recortam as pontas, outros usam a régua, o professor anda pela sala para verificar como eles estão fazendo e principalmente, se eles não jogaram as pontas fora. É bom enfatizar que as partes a serem usadas são as pontas marcadas com os ângulos internos.

Alunos: “Pronto professor.”

Professor: “Muito bem! Agora prestem atenção! O que vocês vão fazer? Vocês vão pegar as pontas recortadas e tentar montar essa figura (apontando para o ângulo raso desenhado na lousa)”.

Aluno A: “Olha professor, eu consegui.”

Aluno B: “Professor, o meu está certo?”

Professor: “Me diz você. Você conseguiu montar o ângulo raso?”

Aluno B: “Consegui.”

Professor: “Então, está certo?”

Aluno B: “Está.”

Professor: “Muito bem!”

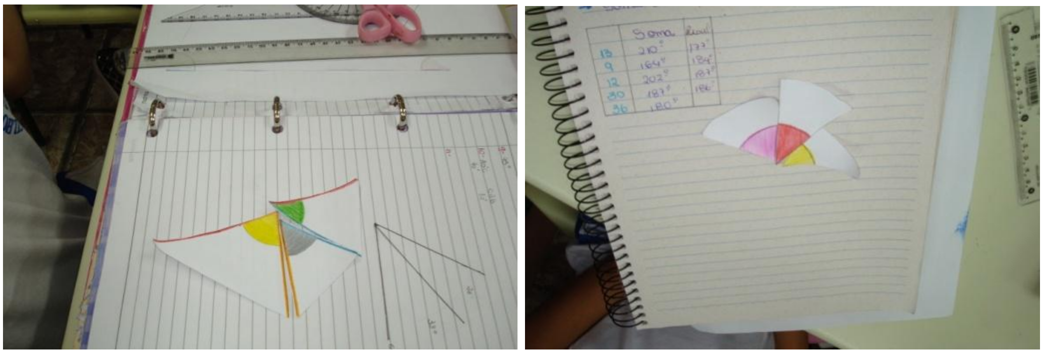


Figura 62 – Alunos fazem a atividade de recorte e formação do ângulo raso.

Após todos os alunos fazerem as montagens, o professor fez o mesmo na lousa, e assim os alunos tiveram confiança em seus feitos.

Nessa aula foi usado um triângulo construído em E.V.A. e fixado em um isopor, enfatizando a base reta feita com os lados dos ângulos.

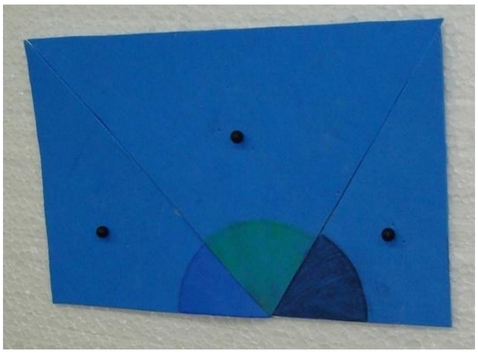


Figura 63 – Construção da atividade feita em E.V.A e fixada em isopor

Professor: “O detalhe é que os triângulos são diferentes. O meu triângulo não é diferente do seu?”

Alunos: “É.”

Professor: “O seu triângulo não era diferente do seu colega?”

Alunos: “Era.”

Professor: “Quando você recortou e juntou os ângulos, que operação matemática você fez?”

Alunos: “Soma.”

Professor: “Portanto, eu peguei esses ângulos e somei. Que ângulo formou?”

Alunos: “Ângulo de 180, ângulo raso.”

Professor: “Mas os ângulos que a gente juntou não são os ângulos internos do triângulo?”

Alunos: “São.”

Professor: “Então, juntando os três ângulos internos do triângulo formam o ângulo raso, o ângulo de 180°. O tipo do triângulo importa?”

Alunos: “Não.”

Professor: “Pode ser qualquer triângulo?”

Alunos: “Pode.”

Professor: “Então vamos fazer mais uma atividade para comprovar isso. Pegue o último triângulo que vocês têm aí, não corte nada, esse nós vamos dobrar. Vocês vão juntar os vértices do triângulo, dobrando-o e formando um retângulo assim.”

Figura 64 - O professor faz um exemplo com um triângulo feito com cartolina

Para essa atividade os alunos realizaram a dobradura descrita no planejamento, para a determinação do ponto sobre um dos lados do triângulo que será o vértice do ângulo raso. Os alunos fizeram a atividade, verificando que o ângulo formado é raso:

Figura 65 - Dobradura feita por aluno

Professor: “Pessoal, o que vocês fizeram? Vocês dobraram o triângulo e que ângulo foi formado?”

Alunos: “Ângulo de 180°.”

Professor: “O ângulo raso apareceu novamente. Agora esses ângulos que formaram o ângulo raso não são os ângulos do triângulo?”

Alunos: “São.”

Professor: “Então, como na atividade anterior, a soma também é 180°, não é?”

Alunos: “É.”

Professor: “Então, a que conclusão chegamos?”

Alunos: “Que a soma é 180°.”

Professor: “A soma de que?”

Alunos: “Dos ângulos de dentro do triângulo.”

Professor: “Importa o triângulo?”

Alunos: “Não, qualquer triângulo.”

Professor: “Então vamos escrever isso.”

Nesse momento, os alunos ajudam o professor a fazer a síntese principal da aula:

“A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre 180°.”

Professor: “Então, a partir de agora nós sabemos disso e vamos usar esse resultado quando for conveniente.”

Podemos, então, passar algumas atividades para que os alunos usem o resultado assimilado, por exemplo: em um triângulo retângulo a soma dos ângulos agudos é sempre 90° ou que, em um triângulo o número máximo de ângulos obtusos ou retos é um.

Figura 66 - Usando o resultado obtido (exercícios na lousa)

Ao final da aula os alunos fizeram a própria síntese da aula, através da atividade “O que eu aprendi...” seguindo os moldes da atividade do caderno do aluno, de acordo com a Proposta Curricular do Estado de São Paulo.

Comentários da aula:

Destacamos a mudança de comportamento verificada nessas últimas aulas. Os alunos que antes eram falantes, sem compromisso, agora se mostram mais atenciosos, participativos e ajudando a turma na construção coletiva do conhecimento.

O andamento da aula nas quatro turmas que leciono foi praticamente sem muitas alterações. No entanto, em uma das turmas, uma aluna questionou a verificação da soma dos ângulos internos, dizendo que o erro (no caso dela de um grau) não existia e a atividade apenas servia para verificar que não fora construído um ângulo de 180° perfeitamente. Sabemos que a demonstração correta exige o axioma das paralelas e o teorema dos ângulos alternos internos, e que nesse nível de ensino não pode ser tratado de forma completa. Para sanar sua dúvida, recorremos (em outro dia) ao uso da informática com programa Geogebra, onde através de uma atividade dinâmica, explicando e usando o axioma das paralelas, foi mostrada à aluna uma argumentação sobre o teorema. Valorizamos nesse momento a conquista da percepção crítica da aluna, onde esse acontecimento é um exemplo de que, no decorrer do bimestre, os alunos passam a ser mais questionadores, querem saber o porquê das afirmações e confiam mais em suas respostas, não dependendo única e exclusivamente das respostas dadas pelo professor.

Percebemos pelas atividades entregues que a maioria dos alunos assimilou bem o conteúdo apresentado, sendo que alguns desses alunos conseguem usar de maneira bastante satisfatória o resultado apresentado em outros conteúdos do bimestre. Por exemplo, na construção régua e compasso do ângulo de 75°, construíram um triângulo de ângulos internos 45° e 60°, logo aparecendo o ângulo de 75°.

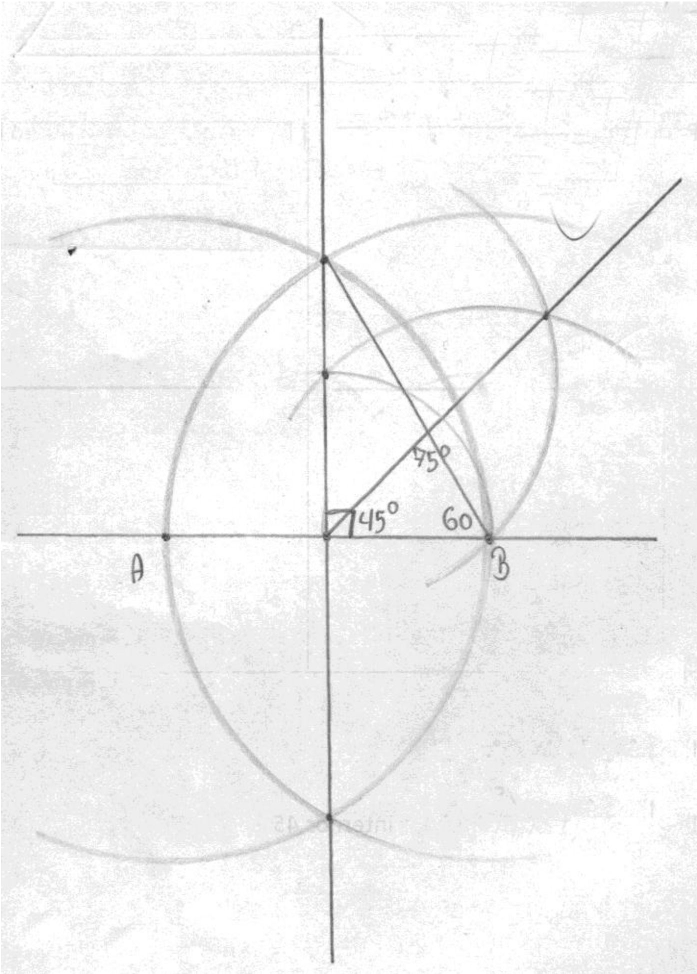


Figura 67 - Construindo o ângulo de 75° usando o Teorema Angular de Tales e as construções de ângulos com régua e compasso

CAPÍTULO 6 - ANÁLISES FINAIS E CONCLUSÕES

Em nosso último capítulo analisamos os temas abordados em nossas atividades, levantamos a importância dos estudos feitos em nosso embasamento teórico, sua presença na prática em sala de aula e no exercício docente tanto dentro quanto fora da sala de aula.

Abordamos também nesse capítulo as mudanças ocasionadas e presenciadas pela pesquisa realizada, analisando o desempenho dos alunos e as mudanças de conduta dos alunos e do professor.

Por fim, tecemos nossas conclusões finais, tendo em vista os objetivos iniciais, o andamento do projeto e os resultados obtidos no processo.

6.1 Análise e aplicação dos temas

Durante a realização desse trabalho nos focamos em dois temas principais, ambos em nível de estudos da 6ª série/7º ano do ensino fundamental:

- O estudo das frações e suas representações gráficas.
- O estudo da geometria plana e espacial.

Em ambos os temas, buscamos analisar cada atividade de acordo com a Proposta Curricular do Estado de São Paulo, seguindo nossa fundamentação teórica aliada à prática tanto em sala de aula como fora dela. Levamos sempre em consideração o objetivo principal que é a aprendizagem matemática através da participação ativa e trabalho coletivo dos alunos na obtenção de seus próprios conhecimentos.

Para mais clareza, faremos uma análise por tema, expondo o modo de trabalho aqui realizado, as etapas que consolidaram nossa pesquisa, passando pelo planejamento e a execução das atividades, aliando a teoria e prática aqui expostas.

6.1.1 Frações

As frações foram trabalhadas no 1º bimestre de 2009, seguindo as orientações da proposta curricular e trata-se de um tema onde muitos alunos possuem dificuldades, ocasionadas principalmente pelo déficit de aprendizagem acumulado em anos anteriores.

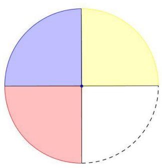
Além disso, o estudo de frações nos dá a oportunidade de trabalharmos com representações gráficas e contextualizações envolvendo a geometria (divisão de retângulos em partes iguais, por exemplo), servindo como ponto de partida para outro tema importante do trabalho, que é a geometria nas séries iniciais.

Uma vez escolhido o tema, pesquisamos o perfil das turmas a serem trabalhadas para considerar suas dificuldades e potenciais no planejamento de atividades. Recorremos aos PCN's e à Proposta Curricular do Estado de São Paulo para inserir suas recomendações no planejamento.

O planejamento foi elaborado segundo um conjunto de fatores: o curricular escolar, o currículo específico da turma, a aplicação das atividades que visam à participação dos alunos, seja ela pela metodologia de resolução de problemas ou aulas expositivas com participação ativa e trabalho coletivo dos alunos.

O planejamento está baseado no Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, segundo o qual o professor bem preparado seleciona entre seu rol de conhecimentos matemáticos específicos (que incluem neste tema o conhecimento sobre números racionais), a melhor abordagem para o desenvolvimento da aula, além de considerar o nível de aprendizagem que os alunos se encontram, suas dificuldades, déficits e os potenciais. Além disso, o professor deve escolher metodologias apropriadas (no caso foi escolhida a Metodologia de Resolução de Problemas) que desenvolvam a capacidade dos alunos e que auxiliem a participação do(s) aluno(s) na obtenção do próprio conhecimento.

A idéia principal foi levar os alunos inicialmente ao raciocínio de que se há uma unidade de pizza a ser dividida igualmente entre quatro amigos, então cada amigo comerá $\frac{1}{4}$ dessa unidade. Como foram comidas três pizzas, igualmente, cada amigo comeu $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, o que corresponde ao contexto de "três pizzas (unidades) divididas em quatro (partes iguais)", mas graficamente é reconhecida como a fração:

 $= \frac{3}{4}$ da unidade

Trabalhando a situação descrita no contexto os alunos associaram a fração $\frac{3}{4}$ como a divisão $3 \div 4$ e interpretaram-na também como parte fracionária da unidade. Um problema observado foi que o "meio caminho" no entendimento do problema, pelos alunos, ocasionou aprendizagem incompleta que foi detectado na avaliação das tarefas entregues, como descrito no capítulo 5.

Como resultados da resolução participativa de problema com discussão de soluções e estratégias pelos alunos, pudemos trabalhar com proveito os conceitos de frações equivalentes $\left(\frac{6}{8} = \frac{3}{4}\right)$ e adição de frações, assim como suas interpretações dentro do contexto.

A Metodologia de Pesquisa de Aula foi trabalhada da seguinte maneira: tendo em mãos o planejamento, com as expectativas da aplicação das atividades em aula, partimos para a prática no ambiente da classe, mantendo o foco na aprendizagem participativa. Nesse momento, além de transmitir e mediar o conhecimento, trabalhamos o olhar de pesquisador, observando o andamento da aula, a reação dos alunos, as dificuldades encontradas tanto na transmissão/mediação do conhecimento como na participação e aprendizagem dos alunos. Cuidamos também em observar se as etapas da Metodologia de Resolução de Problemas estavam sendo vivenciadas pelos alunos, mesmo durante aulas expositivas.

Trouxemos a importância da pesquisa sobre a própria prática docente, mantendo o olhar crítico sobre as aulas e após as mesmas, quando então pudemos destacar os pontos positivos e negativos da execução. A partir daí, coube uma revisão do planejamento, com o objetivo de procedermos ao aprimoramento da aula, para aplicações futuras em outras turmas ou retomadas de mesmo conteúdo, tornando um processo contínuo de ensino/aprendizagem.

Devemos enfatizar também o grande ganho pessoal na descoberta proporcionada pela análise e interpretação dos erros dos alunos, não apenas fazendo uma análise simplista de uma resolução como certa ou errada, tendo na Metodologia de Resolução de Problemas um auxiliar que, ao trabalhar suas etapas, conseguimos diagnosticar onde está o problema de aprendizagem. Entre outros ganhos, a metodologia propicia a interpretação dessas análises assim como auxilia os alunos na obtenção de um método próprio de resolução, evitando a cópia de modelos de resolução ou a imitação da resolução do professor. Na análise das atividades “O que eu aprendi...” descritas no capítulo 5, encontramos os erros das alunas ocasionados pela insistência em seguir um modelo prévio de resolução, não havendo o entendimento de fato do problema e por essa razão detectamos a falha conceitual, que evidencia a falha na conexão entre o novo conhecimento e o conhecimento prévio.

Criou-se a percepção da necessidade de sanarmos as dificuldades dos alunos, tendo para isso um grande auxílio propiciado pela Metodologia de Pesquisa de Aula, pois em nossas análises percebemos a natureza do erro que estava sendo cometido, as prováveis origens desses erros e principalmente como mediar a solução dos mesmos para tornar mais eficaz a aprendizagem dos alunos.

As sequências didáticas apresentadas foram trabalhadas em sala de aula de acordo com o planejamento e a aplicação descrita nos capítulos anteriores, e embora o tema “fração” seja um tema complicado de ser trabalhado, colhemos muitos resultados positivos como já descritos. Pessoalmente, queremos destacar o grande ganho na aplicação das metodologias, pois é surpreendente quando olhamos para nossa própria prática, identificando nossa postura em sala de aula, a visão que os alunos possuem da aula e do professor, e a maior percepção dos nossos erros e acertos como profissional da educação.

6.1.2 Geometria

O desenvolvimento do estudo da geometria espacial e plana é o tema principal do trabalho. Este tema foi escolhido pelas possibilidades de explorar maior interesse dos alunos, permitindo maiores facilidades no processo participativo esperado nessa pesquisa. Além do mais, a proposta das atividades foi aplicada durante o 1º semestre de 2009, onde encontramos os estudos da geometria recomendados pela SEE, através de sua proposta curricular, nos cadernos do professor e aluno do 2º bimestre do mesmo ano. Adequamos, portanto, o trabalho aqui realizado ao currículo oficial do Estado de São Paulo.

É importante destacar que as atividades realizadas, referentes à geometria, foram feitas após algumas atividades relacionadas às frações, dando continuidade às metodologias e o modo de trabalho adotado em nossos estudos. Desse modo, familiarizamos os alunos com a metodologia de resolução de problemas, e conseguimos identificar as maiores dificuldades da turma, quais são os alunos mais participativos e aqueles menos. Além disso, começamos a sentir os primeiros resultados da metodologia de pesquisa de aula, melhorando a prática de aula e explorando novas possibilidades, como citadas e apresentadas no capítulo anterior. No início da pesquisa não podíamos prever os efeitos da Pesquisa de Aula antes da efetiva execução das atividades planejadas.

O trabalho de pesquisa sobre esse tema seguiu a mesma linha adotada para o tema de Frações, primeiramente analisamos os PCN’s, Proposta Curricular e também o conhecimento do professor sobre a turma e do conteúdo a ser trabalhado. Com base no CPC elaboramos o planejamento da aula, levando em consideração o perfil e o aspecto pedagógico.

Ressaltamos que a geometria, nesse nível de ensino, possibilita o uso de materiais concretos, construção de polígonos e poliedros, por meio do manuseio de ferramentas (régua, compasso, transferidor, etc.). Este aspecto abre uma fase de exploração que é a experimentação, onde os alunos irão fazer suas descobertas, sejam elas por erros e suas correções ou por seus acertos. O tema Frações possibilita o uso de materiais concretos, mas é na geometria que podemos explorar mais o potencial didático de materiais manipulativos e de ferramentas de desenhos. O manuseio de ferramentas favorece a percepção de propriedades de figuras geométricas e raciocínio indutivo sobre resultados geométricos, sendo apoio útil no entendimento de situações problema.

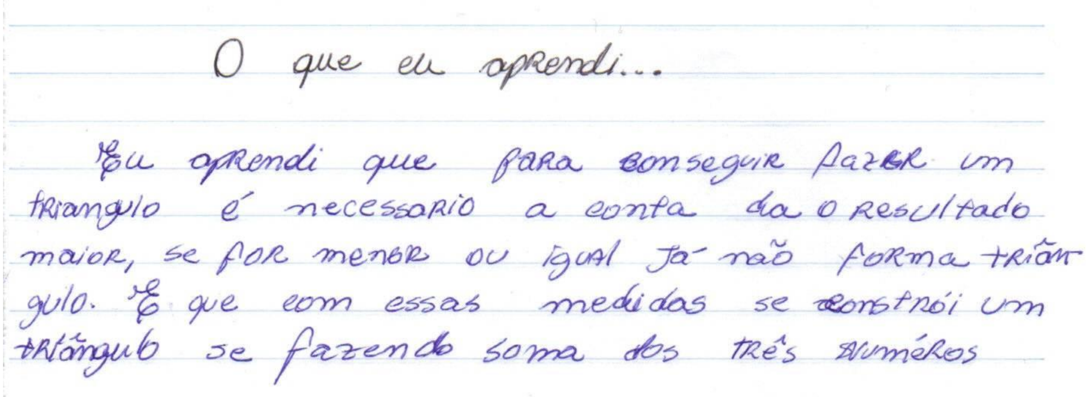
Outro grande ganho com o tema geometria é a possibilidade de explorarmos teoremas. Lembramos que, nesse nível de aprendizagem, ainda não podemos explorar uma atividade que promova um sentimento nos alunos que facilitem a aceitação de um resultado apresentado como verdadeiro. Este foi o caso da aula sobre o Teorema Angular de Tales, encaminhada por meio de atividades que convergiram para o resultado sintetizado formalmente. Um ganho foi observado quando alguns alunos começaram a entender a necessidade de questionar resultados percebidos apenas pela visualização, mostrando um avanço no desenvolvimento do raciocínio.

Após o planejamento partimos para a prática em sala de aula visando à aprendizagem por meio da participação do aluno. Conseguimos através das atividades experimentais e manipulativas resultados muitos satisfatórios: um maior interesse pelo tema, curiosidade pelo uso da ferramenta e suas possibilidades. Nessa fase, como mediador do conhecimento, ajudamos os alunos a chegarem à síntese da aula, utilizando todas as afirmações e resultados encontrados pelos alunos ao longo da aplicação da atividade. Veja os diálogos descritos no Capítulo 5.

Na fase da aplicação das atividades em sala, pela Metodologia de Pesquisa de Aula, o professor deve ficar atento com o andamento da aula e a interação com alunos que será tanto maior pelo grande interesse propiciado pelas atividades concretas e o uso do material apresentado, além do uso conveniente das tecnologias disponíveis. A escolha do retroprojetor como meio para instigar a percepção dos alunos sobre as diferenças entre as imagens bi-dimensionais projetadas e os objetos tridimensionais manipulados se refere ao conhecimento metodológico dentro do conceito de Conhecimento Pedagógico do Conteúdo. Para explorar as diferentes projeções foi muito útil o estudo das Projeções e Geometria Projetiva feito durante o curso de licenciatura.

Na reflexão pós-aula também foi importante coletar dados de verificação de aprendizagem. A atividade “O que eu aprendi...” do caderno de aluno é muito interessante nesse aspecto. Esta atividade dá indícios da aprendizagem e assimilação do conhecimento pelo aluno, das dificuldades apresentadas por ele, que até mesmo podem ser uma falta de entendimento da explicação, não resolvida no momento da aula. A atividade pode ser até mesmo usada para conhecer o aluno, pois podemos perceber as dificuldades de comunicação (leitura e escrita). Se o aluno apresentar dificuldades em expressar, podemos perceber quando o aluno entendeu o conteúdo e assimilou o conhecimento, mas que não consegue transcrevê-lo e nem socializá-lo durante a aula.

Abaixo vemos um exemplo da atividade “O que eu aprendi...” feita por um aluno da Turma G, seguida por comentários:


O que eu aprendi...

Eu aprendi que para conseguir fazer um triangulo é necessario a conta da o resultado maior, se for menor ou igual já não forma triângulo. É que com essas medidas se constrói um triângulo se fazendo soma dos três números

Figura 68 – Atividade “O que eu aprendi...” feita por aluno da Turma G.

Vemos nessa atividade que o aluno possui muita dificuldade em transcrever seus pensamentos. Conversando com o mesmo, percebemos que para ele estava claro o procedimento para detectar a possibilidade de construção de um triângulo quando são dadas três medidas candidatas para os lados, tendo sido o procedimento corretamente trabalhado em sala de aula.

Ainda pela metodologia de pesquisa de aula, o professor pode identificar e criticar seus atos, falhos ou não, durante a aula, possibilitando rever sua prática, melhorar as aulas futuras e/ou focar em determinadas dificuldades identificadas em sala de aula. Dessa forma aprimora-se como profissional docente, pois, os resultados obtidos em atividades anteriores, o ajuda a rever planejamentos de aulas futuras, reiniciando o ciclo de fases desta metodologia.

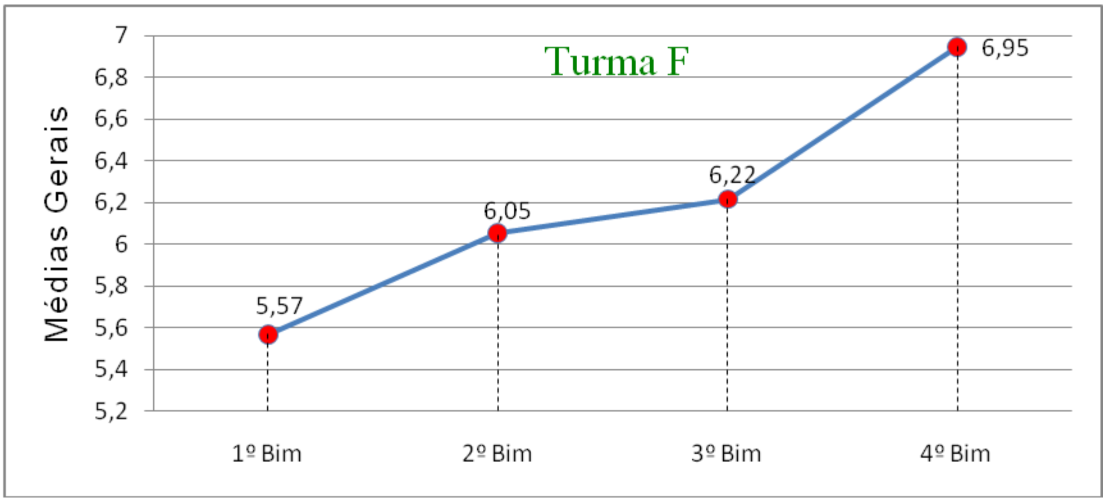
6.2 **Conclusões Finais**

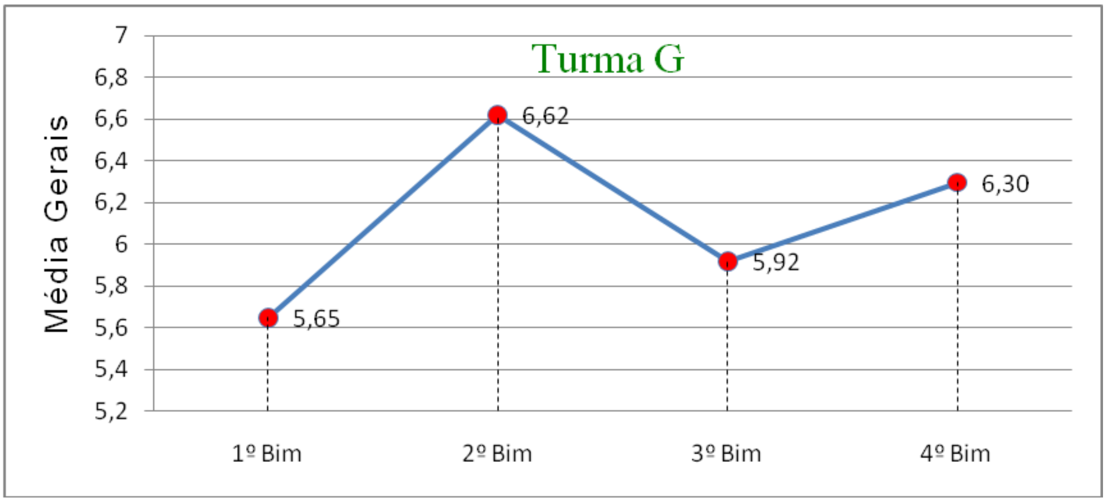
Em nossa pesquisa trabalhamos sempre com um objetivo maior: a participação do aluno na construção de seu próprio conhecimento. Durante os estudos tínhamos claro que deveríamos trabalhar nosso objetivo tendo como base a Nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo e a melhoria da prática docente tanto em sala de aula como fora dela.

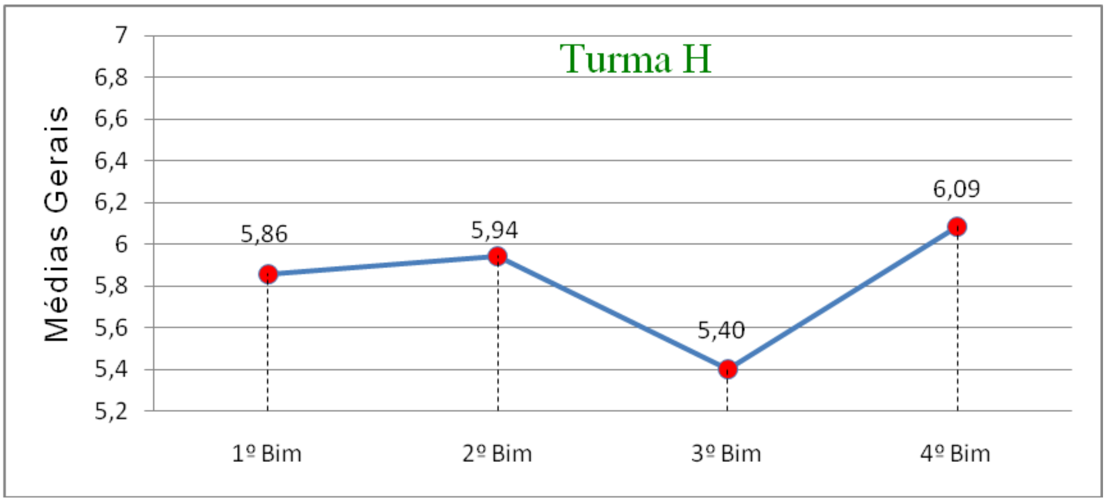
Buscamos então os estudos teóricos que nos ajudassem nessa missão e encontramos nossa base no Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, na Metodologia de Resolução de Problemas e na Metodologia da Pesquisa de Aula, além, é claro, da nossa experiência didática que contribui para a adequação dessas metodologias para o âmbito educacional no qual estamos inseridos.

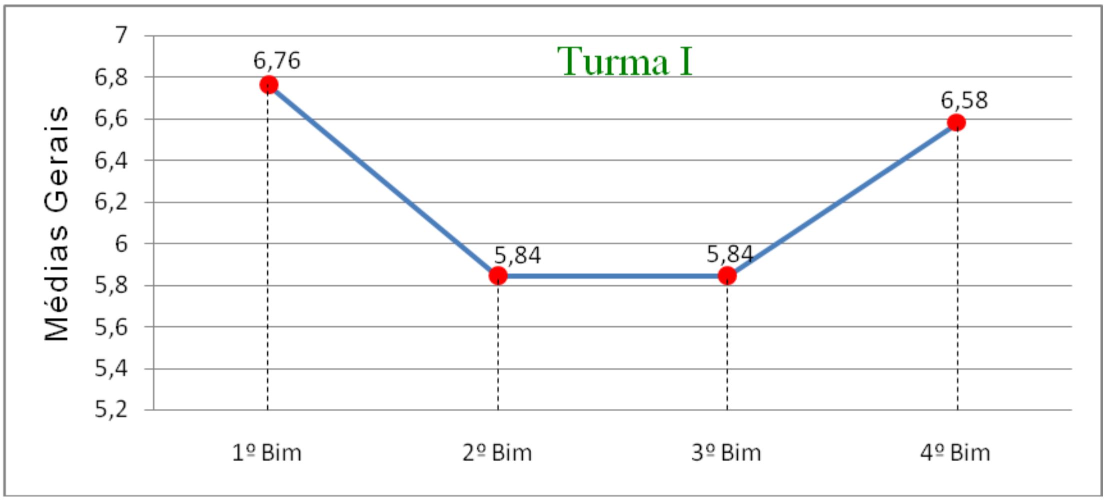
Com o desafio proposto, trabalhamos em ambiente escolar, e, apesar de vivenciarmos a dificuldade de aplicarmos projetos, como nosso, no sistema público de ensino (a tradição de aula sem a participação do aluno, o individualismo, etc.), conseguimos estabelecer resultados positivos evidenciados na pesquisa, que incluem: um maior interesse dos alunos em sala de aula, mudança de postura na relação professor-aluno, menor índice de indisciplina, melhoria gradativa de notas dos alunos, participação efetiva de alunos com maiores déficits de aprendizagem, maior confiança dos alunos em relação ao resultado obtido por eles mesmos.

Para ilustrar, analisamos os gráficos das médias gerais por bimestre de cada turma nas avaliações escritas formais elaboradas pelo professor:



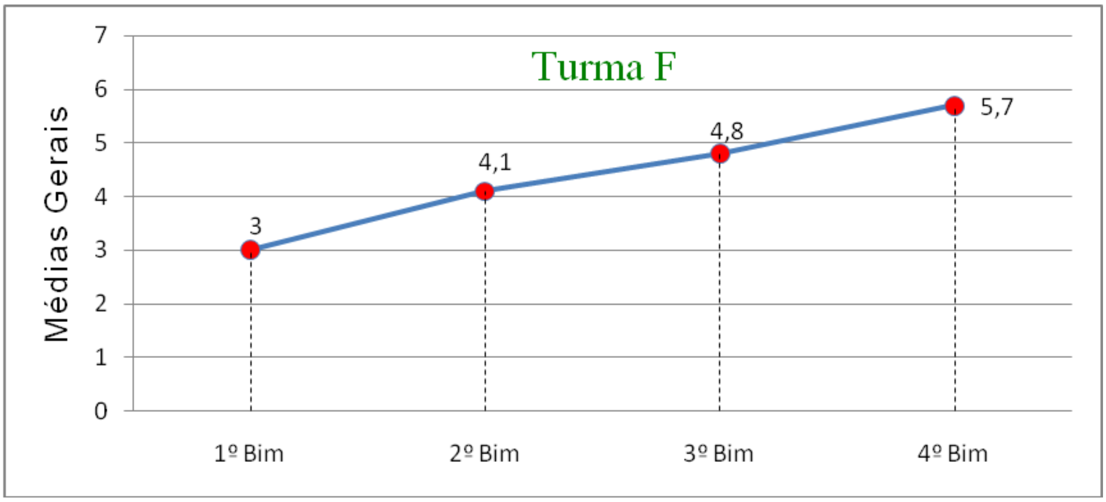


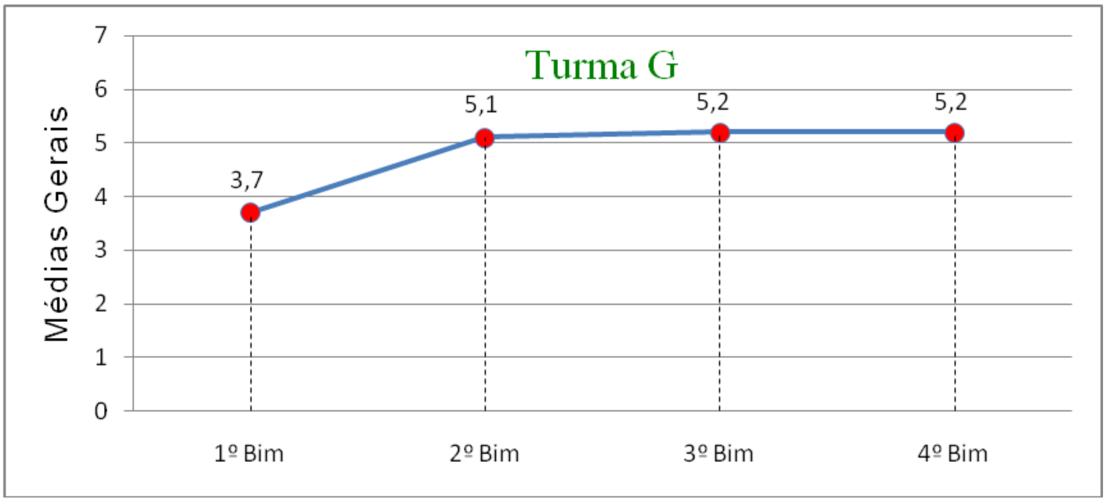


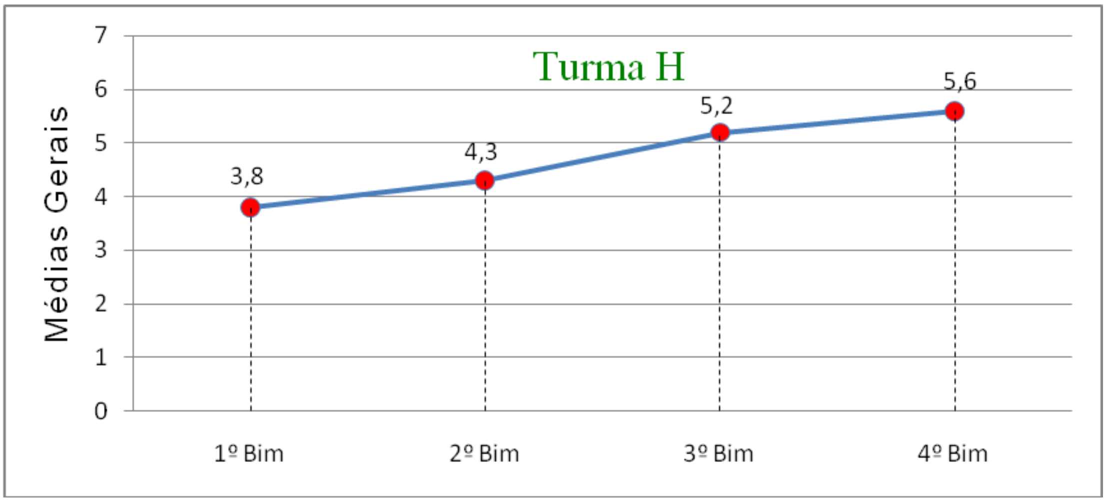


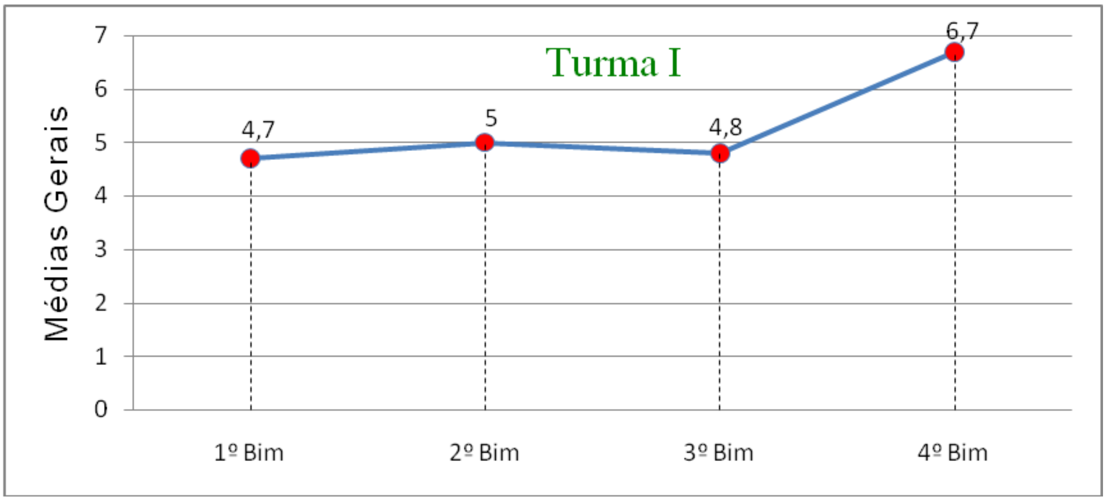
Analisando os gráficos percebemos que, com exceção da Turma F, não há uma ascensão contínua nas médias gerais. Entretanto, devemos lembrar que há muitos fatores envolvidos que influenciam na média geral das turmas, por exemplo, a influência sazonal de doenças como a gripe H1N1 ou o fato dos alunos com melhores médias usualmente manterem médias elevadas nos quatro bimestres, mascarando eventuais diferenças importantes nos dados sobre o aproveitamento da classe.

Por essa razão decidimos destacar as médias dos alunos com o menor índice de aproveitamento, onde focamos os alunos com maiores déficits e/ou mais indisciplinados. Para tal mostramos abaixo o gráfico com dez alunos de cada sala que se encontram nesse perfil, identificados pelo professor e seus colegas docentes de outras disciplinas:







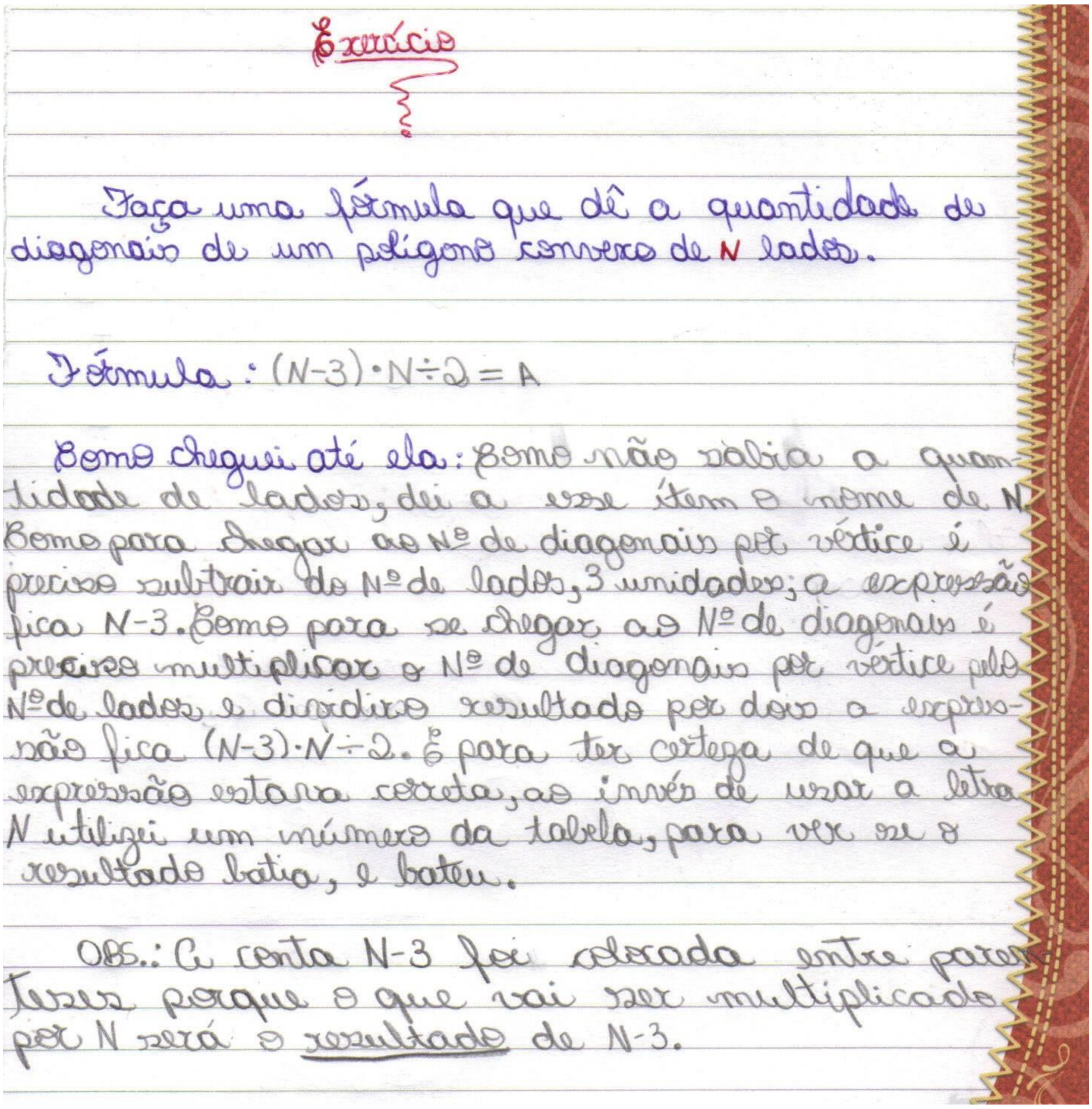


No geral, encontramos uma melhora significativa, pois vivenciamos a mudança de comportamento em sala de aula e na participação desses alunos, o que garantiu uma recuperação ao menos parcial dos mesmos.

Em particular, é com certa surpresa que observamos os gráficos das turmas F e H, pois na primeira há muitos alunos com déficits de aprendizado e na segunda há os problemas de indisciplina que foram amenizados (mas não extintos). Com a visão do professor que leciona a esses alunos, confessamos que esperava melhorias, mas não tão significativas como mostradas nos gráficos, principalmente naquele com as médias dos alunos com mais dificuldades.

Tais ganhos não se restringem aos dois primeiros bimestres, em que focamos nossa pesquisa, mas, como podemos perceber pelos gráficos apresentados, houve uma continuidade no processo durante os bimestres restantes, obviamente com a particularidade de mudanças de tópicos e assuntos. Porém, demos continuidade na metodologia de pesquisa de aula em ciclos (planejamento, execução, revisão da prática, reflexão), desfrutando de sua eficácia em termos de melhoria da prática docente. Também tentamos garantir a participação do aluno em seu aprendizado, sempre propiciando a ele a oportunidade de se expressar e socializar suas ideias em sala de aula.

Um exemplo de tal melhoria foi presenciado no 4º bimestre onde trabalhamos com a algebrização: em uma aula dupla, trabalhamos uma atividade tendo como exercício a obtenção de uma fórmula para o número de diagonais de um polígono convexo de n lados. Para tal, com ajuda do professor, os alunos construíram uma tabela com o número de lados de um polígono convexo, o número de diagonais que “saem” de cada vértice e o número total de diagonais. Então, analisando a tabela era pedido em forma de exercício para que o aluno criasse uma fórmula que desse o número total de diagonais para um polígono convexo de n lados e o mais importante: como o aluno chegou a tal fórmula. Abaixo temos a solução de uma aluna da Tuma F:


Exercício

Faça uma fórmula que dê a quantidade de diagonais de um polígono convexo de N lados.

Fórmula: $(N-3)\cdot N \div 2 = A$

Como cheguei até ela: Como não sabia a quantidade de lados, dei a esse item o nome de N. Como para chegar ao Nº de diagonais por vértice é preciso subtrair do Nº de lados, 3 unidades; a expressão fica N-3. Como para se chegar ao Nº de diagonais é preciso multiplicar o Nº de diagonais por vértice pelo Nº de lados e dividir o resultado por dois a expressão fica $(N-3)\cdot N \div 2$. E para ter certeza de que a expressão estava correta, ao invés de usar a letra N utilizei um número da tabela, para ver se o resultado batia, e bateu.

OBS.: A conta N-3 foi colocada entre parenteses porque o que vai ser multiplicado por N será o resultado de N-3.

Figura 69 - Solução da Atividade por aluna da Turma F.

Obviamente ainda não temos uma dedução formal, com todo rigor matemático, mas presenciamos a capacidade da aluna em obter uma fórmula correta, uma explicação plausível (ao menos para esse nível) e uma verificação para a fórmula, utilizando os dados disponíveis à aluna.

Outros ganhos que a pesquisa propiciou foram na própria prática docente, que teve melhorias, uma vez que a Metodologia de Pesquisa de Aula ajudou na identificação e superação de dificuldades ao focar o olhar na própria prática de aula.

É certo que a Metodologia de Pesquisa de Aula como foi estabelecida neste trabalho ainda se encontra incipiente no Brasil, mas podemos usar seus princípios básicos na melhoria educacional. Com o tempo poderemos mostrar aos nossos colegas docentes os resultados positivos que a metodologia agrega e permite trabalhar de forma conjunta na melhoria educacional, aumentando o diálogo entre os profissionais da educação, quando infelizmente no Brasil estes se mostram ainda muito individualizados.

Esperamos que o trabalho ajude professores e futuros docentes na melhoria da prática docente, sobretudo como auxiliar didático no uso da Proposta Curricular do Estado de São Paulo, dando alternativas e complementos às atividades propostas, sempre com a intenção da melhoria educacional.

Obviamente não podemos esquecer do incentivo que apresentamos para a busca da participação dos alunos, com a metodologia de resolução de problemas e suas alternativas, como ferramenta didática para tal. Também como as mudanças e melhorias ligadas à interação e construção do conhecimento coletivo da classe estão relacionadas com a aprendizagem participativa baseada em indagações e explorações. O professor atento a esse fato encontrará melhores alternativas de inserção de seus alunos no ensino/aprendizagem colhendo os frutos em curtos e médios prazos.

Outra contribuição que esperamos oferecer com esse trabalho consiste nas análises feitas para as atividades realizadas pelos alunos, na qual trabalhamos um olhar que busque além das avaliações de erros e acertos, a identificação dos erros, as causas que levaram o aluno a cometer tais erros, assim como possíveis alternativas para superarmos essas dificuldades e fornecermos aos alunos uma aprendizagem mais eficaz.

Ansiamos também que o professor tenha uma reflexão sobre sua classe, focando-se no âmbito específico em que ela se encontra, na identificação de dificuldades e potenciais, ajudando-o na melhoria e preparo de suas aulas, assim como o progresso ocasionado pela pesquisa de sua própria prática docente.

Lembramos ainda que os planejamentos e a sequência didática das atividades que compuseram este trabalho constituem folhas destacáveis para uso de professores, no Apêndice.

REFERÊNCIAS

1. BALDIN, Y. Y. *Texto de Mini-Curso "Resolução de Problemas e o Ensino de Geometria*". REUNIÃO REGIONAL DA SBPC, 2004, Teresina, PI.

2. BALDIN, Y. Y. *Texto de Mini-Curso "A Metodologia de Pogorelov para Resolução de Problemas de Construção Geométrica, Revista com Geometria Dinâmica*". 57ª REUNIÃO ANUAL DA SBPC, 2005, Fortaleza, CE.

3. BALDIN, Y. Y. *Palestra "Ensino de Geometria e Construções Geométricas"*, arquivo em PowerPoint. 2009, ENCONTRO DOS PROFESSORES PREMIADOS DA OBMEP, IMPA, Rio de Janeiro, RJ.

4. BRASIL. *Senado Federal.* Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional: nº 5692/71. Brasília, 1971. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 12 de Agosto. 1971.

5. CROWLEY, M. L. O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. In: LINDQUIST, M. L.; SHULTE, A. (orgs.). *Aprendendo e Ensinando Geometria*. Tradução de Hygino H. Domingos. São Paulo: Atual, 1994. 308p.

6. FERNANDEZ, C.; YOSHIDA, M. *Lesson Study: a Japanese Approach to Improving Mathematics Teaching and Learning*. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, 2004.

7. ISODA, M.; ARCAVI, A.; MENA LORCA, A. *El Estudio de Clases Japonés en Matemáticas*. Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso, 2007.

8. JAPÃO ON LINE. *História da Educação Japonesa*. Disponível em www.japaoonline.com.br. Acesso em dez./2009.

9. POLYA, G. *A Arte de Resolver Problemas*. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. 2ª ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. 179p.

10. SCHULMAN, L.S. Those Who Understand Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*. Washington, v. 15, n. 2, p.4-14, 1986.

11. SÃO PAULO. SECRETARIA DA EDUCAÇÃO. *Proposta Curricular do Estado de São Paulo Para o Ensino de Matemática Para o Ensino Fundamental Ciclo II e Ensino Médio.* São Paulo: SE, 2008.

12. BRASIL. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática* / 3° e 4° ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1998.

13. STIGLER, J.W.; HIEBERT, J. *The Teaching Gap*: best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom. Nova Iorque: The Free Press, 1999.

14. VEAL, W.R.; MAKINSTER, J.G. *Pedagogical Content Knowledge Taxonomies*.1999 Disponível em: <http//wolfweb.unr.edu/homepage/crowther/ejse/vealmak.html>. Acesso em: jan./2010.

APÊNDICE

ATIVIDADE 1

Tema: frações como divisão do numerador pelo denominador;

Tempo de Aplicação: duas aulas de 50 minutos cada.

Objetivo Principal: participação dos alunos na construção de seu próprio conhecimento de tal forma que estabeleçam o significado entre frações como divisão do numerador pelo denominador;

Objetivos Secundários: que os alunos resgatem a ideia de frações como repartir em partes iguais e tomar certo número de partes, e que encontrem representações de frações equivalentes;

Material Auxiliar: placa de Isopor e E.V.A. cortado em forma de disco. O material de E.V.A. será usado para representar as pizzas enunciadas no problema, e as soluções encontradas pelos alunos serão mostradas fixando-as na placa de isopor expondo-as para classe.

Metodologia: Metodologia da Resolução de Problemas

Roteiro de Aplicação:

- **Problema:** quatro amigos querem dividir três pizzas, de mesmo tamanho, igualmente entre eles. Como fazer essa divisão? Qual a fração que representa a parte que cada amigo comerá? (Introdutório ao exercício 2 da página 19 do caderno do aluno 1º Bimestre).

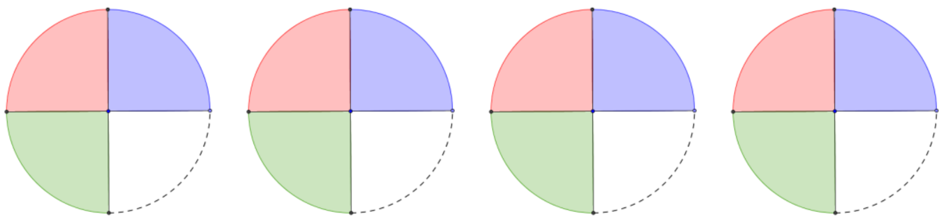
Desenvolvimento da aula: primeiramente devemos expor o problema aos alunos. E para a participação dos alunos, planejamos a aula segundo a Metodologia de Resolução de Problemas:

- **1ª etapa:** o aluno precisa entender o problema. O Professor deve pedir aos alunos que leiam e entendam o problema. O professor pode fazer as indagações *da lista* de Polya, para conduzí-los, dando um tempo para que os alunos reflitam. E posteriormente pedir aos mesmos que exponham seus entendimentos do problema. O professor anotará na lousa as informações relevantes coletadas, organizando assim a participação do aluno e de seus colegas na aula. Distribuir os modelos em E.V.A. para um grupo de alunos para que eles possam explorar o problema e a situação apresentada;

- **2ª Etapa:** encontrar conexões entre os dados e a incógnita e traçar um plano de resolução. Nessa etapa diga aos alunos que eles podem cortar o material em E.V.A., mas enfatizamos que eles devem ter certeza de que, ao cortarem, deverão fazer a divisão correta, pois não haverá outro material a ser distribuído. Com isso levaremos os alunos a pensar em um método de resolução para não errarem quando cortarem o material. O professor deve circular entre os grupos orientando-os;

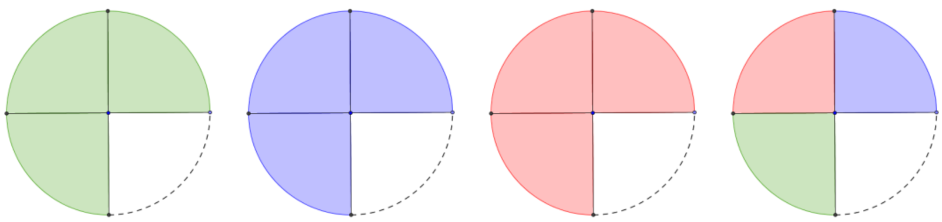
- **3ª Etapa:** executar o plano de resolução. Aqui, os alunos, após terem estabelecido um plano de solução, recortarão o material E.V.A. A partir daí, o professor indagará aos alunos sobre como chegaram à solução obtida e, após o algum grupo de alunos expor suas ideias, o professor as anotará na lousa. Dessa forma, todos compartilharão suas ideias e contribuirão para o aprendizado coletivo. Uma vez que recortem o E.V.A., os alunos irão à lousa e explicar suas soluções para a classe na placa de isopor, fixando-as.

Espera-se que algumas soluções apareçam como no exemplo abaixo:



Uma solução esperada.

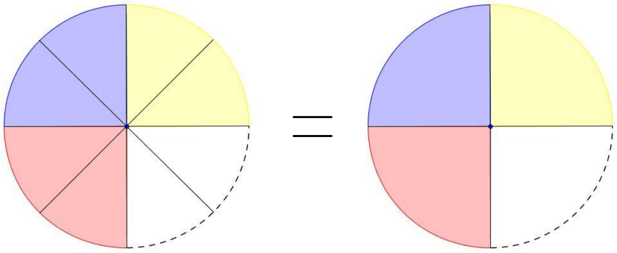
Ou ainda:



Outra solução esperada.

Nessa etapa, será importante que o aluno perceba a relação entre as representações e as frações, o professor poderá pedir que eles escrevam matematicamente as etapas de solução conduzindo-os a essa percepção.

Espera-se também que, analisando os passos, os alunos possam encontrar relações entre frações equivalentes, como:



A representação entre as frações equivalentes $\frac{6}{8}$ e $\frac{3}{4}$

- **4ª Etapa:** analisar a solução. Nessa etapa, faremos um apanhado geral sobre os conceitos envolvidos na solução do problema, de tal forma que os alunos exponham sobre a matemática envolvida no exercício e o que eles aprenderam nessa aula. Será importante que os alunos façam uma síntese da aula, expondo sobre o que aprenderam na aula e com o exercício. Em outras palavras, deverá aparecer claramente na síntese da aula que uma fração pode representar o resultado de uma divisão do numerador pelo denominador. Uma vez que possivelmente haverá dificuldades na exposição das ideias pelos alunos, o professor deverá auxiliá-los na formulação da síntese da aula.

É importante a análise ao final da aula, sendo que os estudantes já terão condições de resolver o problema do caderno do aluno, bastando que eles percebam a relação existente entre os exercícios do mesmo caderno. Como atividade para casa, o caderno do aluno traz a sessão “O que eu aprendi...” onde os alunos escrevem textos sobre o que eles viram e aprenderam na aula do dia. É muito importante que cada aluno faça essa atividade e o professor analise esse material, pois com isso é possível perceber o nível de aprendizagem dos alunos, quantos realmente entenderam o que foi trabalhado em sala de aula, suas dificuldades, ou ainda dúvidas pendentes, etc.

O replanejamento da mesma aula continuará mediante reflexões sobre a aula e sobre a turma trabalhada: se será preciso uma retomada do conteúdo, se será necessária uma nova e diferente abordagem do mesmo assunto, aplicações de exercícios e estratégias que façam o aluno usar o conteúdo aprendido, etc.

ATIVIDADE 2

Tema: Comparação de Frações

Tempo de Aplicação: duas aulas de 50 minutos cada.

Objetivo Principal: levar os alunos, através da participação e do trabalho coletivo, a estabelecer a relação de grandeza entre duas ou mais frações.

Objetivos Secundários: rever representações gráficas de frações.

Material: papéis vegetais nos quais estão desenhados retângulos com marcas de algumas subdivisões de seus lados, como na figura:

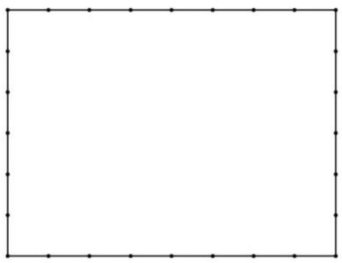


Figura - Marcas feitas em retângulo para auxílio da divisão em partes iguais.

Roteiro de aplicação:

Primeiramente o professor propõe aos alunos um problema introdutório que visa à familiarização com o assunto a ser apresentado:

- Problema inicial: “dadas duas frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ qual representa a maior quantidade?”

Após as reposta e interação com a turma, conduzi os alunos a uma verificação ilustrativa, por exemplo, desenhando dois retângulos de mesmas medidas conforme a figura abaixo:

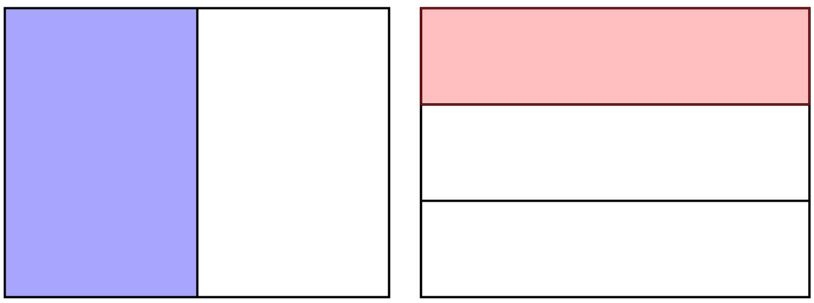


Figura - Representações das frações 1/2 e 1/3

Após as discussões geradas com as explicações, passamos ao segundo problema:

- “Qual a maior fração: 1/4 ou 3/4?”

Novamente conduzimos o aluno a pensar em uma verificação ilustrativa, dessa vez facilitada pela discussão do exercício anterior. Posteriormente indagamos a turma, perguntando como poderíamos saber qual é a maior fração sem desenhar as representações? Após possíveis respostas e a condução da resposta correta pelo professor, partimos ao problema principal da aula:

- “Qual é a maior fração: 3/4 ou 2/3?”

Até esse momento deve estar claro ao aluno que podemos comparar frações quando os denominadores são iguais. Após tentativas dos alunos em solucionar o problema principal, distribuímos o material de apoio (2 papéis vegetais) e conduzimos a seguinte atividade:

Representar graficamente a fração 3/4: no retângulo desenhado em papel vegetal, o dividimos em quatro partes iguais por linhas horizontais e pintamos três dessas partes:

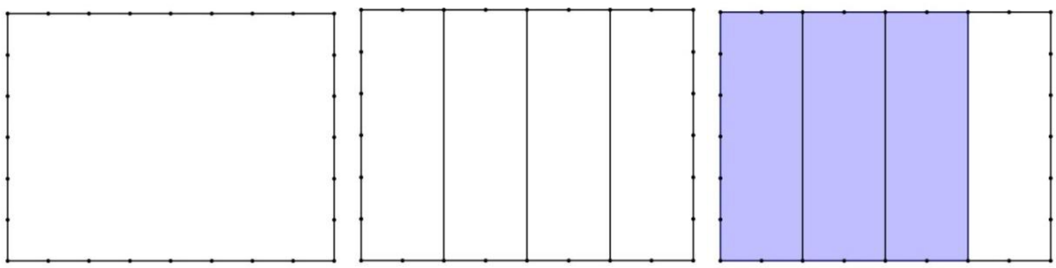


Figura – A representação da fração 3/4.

Representar graficamente a fração 2/3: em outro retângulo desenhado em papel vegetal o dividimos em três partes iguais por linhas verticais e pintamos duas dessas partes:

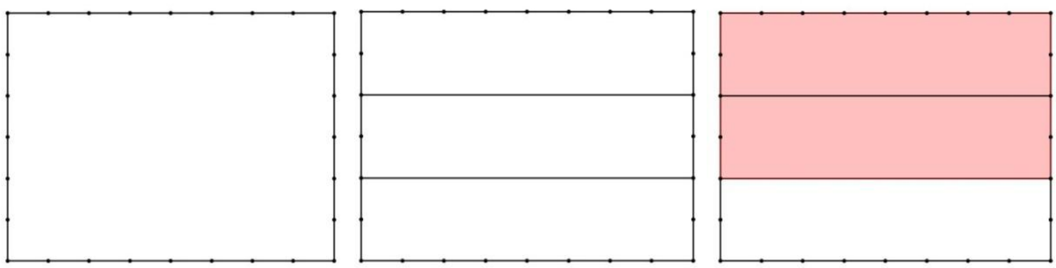


Figura - A representação da fração 2/3

Com as representações feitas pedimos aos alunos que colocassem um papel sobre o outro de forma que os retângulos se sobreponham como na figura:

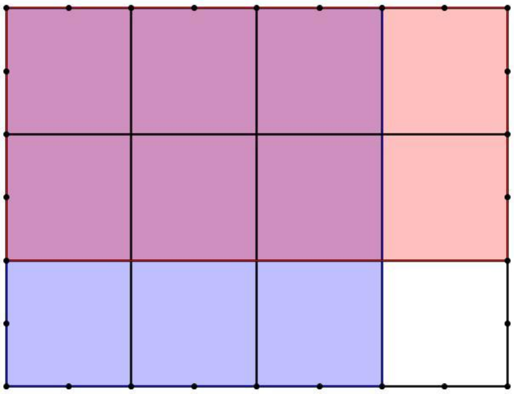


Figura - As figuras sobrepostas

Indagamos os alunos sobre a nova figura obtida. “Em quantas partes está dividida?”. “Em quantas partes cabem as frações 3/4 e 2/3, respectivamente, e quais frações representam esses valores na figura atual?”.

Com auxílio das frações equivalentes os alunos serão capazes de distinguir qual fração representa o maior valor e poderemos estabelecer através de alguns exercícios correlatos a síntese da aula, onde os alunos devem relatar que para comparar duas ou mais frações, devem transformá-las em frações equivalentes de mesmo denominador.

Como atividade, passamos exercícios correlatos que fixem a ideia apresentada e os alunos fazem a atividade “O que eu aprendi...”, relatando a experiência.

ATIVIDADE 3

Tema: o conceito de ângulos e polígonos como projeções planares de objetos tridimensionais.

Tempo de Aplicação: duas aulas de 50 minutos cada.

Metodologia: aula expositiva com participação ativa e trabalho coletivo

Objetivos Principais: compreensão do conceito de ângulo; projeções planares ortogonais; associação entre objetos tridimensionais e planares; dependência da imagem projetada do ângulo de projeção.

Objetivos Secundários: trazer ao aluno construções matemáticas concretas, potencializando o gosto pela disciplina e sua participação na construção do conhecimento coletivo.

Materiais necessários: retroprojetor, papel cartão ou cartolina, poliedros construídos com cartolina ou similares, poliedros construídos em material transparente.

Pré-aula: é interessante trazer aos alunos planificações diversas de poliedros e pedir a eles que construam os poliedros a partir de tais planificações, um programa que pode ajudar nessa tarefa é o Cabri 3D, que possui opções para planificar poliedros convexos:

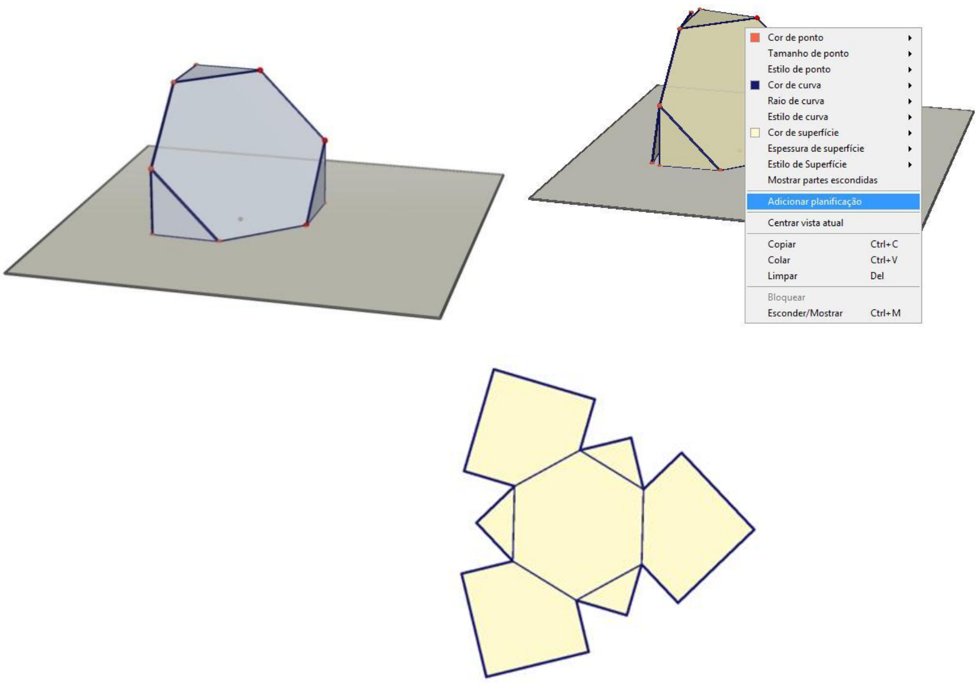


Figura - Uso do software Cabri 3D na obtenção de planificações de poliedros.

Com as planificações em mãos, os alunos são convidados e construírem os poliedros que elas originam, mas antes os alunos fazem a identificação dos polígonos presentes nas planificações e desenham a marcas de cola que não foram representadas pelo programa.

Outra pré-construção deve ser feita pelo professor usando dois pedaços de cartolina ou papelão, junte-os usando fita adesiva, de tal forma que possa ser aberta lembrando uma porta, como na figura:

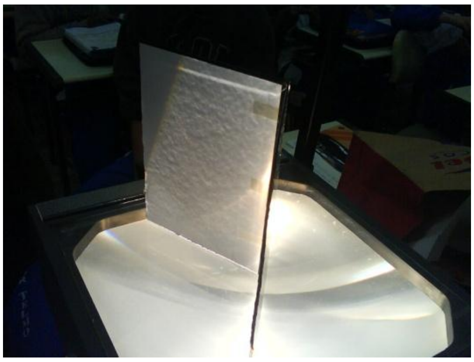


Figura - Construção com papel cartão representativa de uma porta.

Usando o retroprojetor

O retroprojetor será usado de maneira que projete as sombras dos objetos que serão colocados nele, explorando a importância do ângulo de projeção e sua influência na sombra projetada. Devemos nos atentar que um objeto apoiado na base do retroprojetor possui como sombra projetada na tela a figura que é a projeção ortogonal do objeto sobre a base do equipamento.

Roteiro de Aplicação:

Primeiramente trabalharemos o conceito de ângulo usando a construção feita com papelões, explorando a abertura entre eles na fixação dessa ideia.

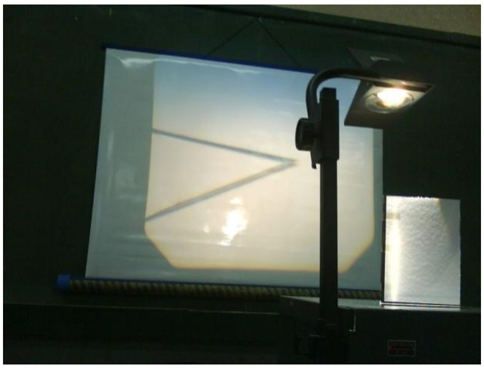


Figura - Usando o retroprojetor.

Posteriormente, trabalharemos com os poliedros colocando na base no retroprojetor de tal forma que esse represente as sobras como projeções ortogonais dos objetos tridimensionais, explorando as diversas faces dos poliedros. Como atividade podemos pedir aos alunos que desenhem a figura que eles desconfiam que irá ser projetada, antes mesmo do professor colocar o objeto na base do retroprojetor.

Enfatizamos aos alunos nesse momento a importância do ângulo de projeção, movimentando os poliedros de tal forma que uma das faces não fique inteiramente apoiada sobre a base do retroprojetor, isso mudará a sobra projetada, pois mudamos o plano de incidência da luz do aparelho.

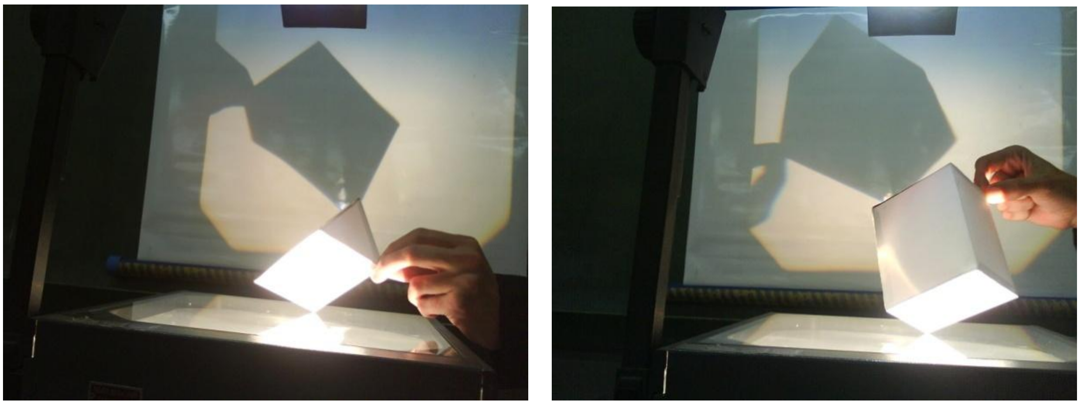


Figura - A importância do ângulo de projeção.

Por fim trabalhamos com os poliedros transparentes usando o mesmo princípio dos poliedros convencionais, explorando as sobras que agora representam a aparência tridimensional do objeto, mas sendo projetadas na tela bidimensional, assim como os desenhos em papéis, as imagens em televisão e/ou em monitores de computadores.

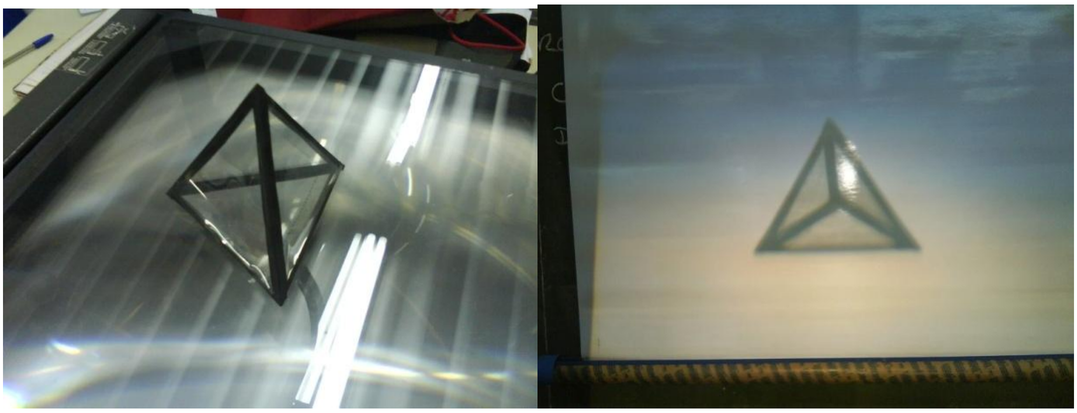


Figura - Usando poliedros de faces transparentes.

ATIVIDADE 4

Tema: construções régua e compasso e a desigualdade triangular.

Objetivo Principal: trabalho coletivo e participação dos alunos na construção de seu próprio conhecimento de tal forma que consigam usar as ferramentas régua e compasso no entendimento da desigualdade triangular fazendo conjecturas.

Objetivo Secundário: entender as possibilidades de construções de um triângulo, dadas medidas de três segmentos.

Material: régua e compasso.

Pré-requisitos: nas sessões anteriores à essa aula, os alunos se familiarizam com o uso das ferramentas régua e compasso, com construções de triângulos dados três segmentos de medidas variáveis, estrategicamente escolhidos que possibilitem as construções;

Problema: Dados três segmentos de medidas quaisquer, qual a condição para que possamos construir um triângulo?

Roteiro de aplicação:

No início da aula exploramos o exercício de familiarização com a construção, por meio de uma construção possível do triângulo dado as medidas de seus segmentos:

- Construa o triângulo de lados 5 cm, 6 cm e 7 cm.

Após a atividade, que servirá como tira dúvidas aos alunos, partimos para o exercício auxiliar ao problema principal:

- Problema: Construa um triângulo dados três segmentos de medidas 3 cm, 4 cm e 8 cm.

Após as dúvidas recorrentes, devemos conduzir os alunos a perceberem que nem sempre é possível construir um triângulo dado as medidas possíveis para os lados. Após passamos o problema principal da aula:

- Problema: Dados três segmentos de medidas quaisquer, qual a condição para que possamos construir um triângulo?

Exploramos então a aula usando a metodologia de resolução de problemas, onde pela sequência didática apresentada a primeira etapa (entender o problema) já estará bem encaminhada. Caso ainda haja dúvida o professor poderá explorar o entendimento com canudinhos ou lápis de cor.

Pediremos aos alunos que façam algumas construções dados três segmentos de medidas variadas, sendo algumas construções possíveis e outras não, ajudando assim a percepção dos alunos. Inclusive nesse momento, exploramos um exercício onde a soma das medidas de dois segmentos dados seja igual à medida do terceiro segmento, por exemplo: Construa o triângulo de medidas 3 cm, 4 cm e 7 cm.

Esse exercício deve ser bem trabalhado, pois, pelas falhas de medição, muitos alunos alegaram ter conseguido fazer o triângulo, logo todas as explicações devem ser exploradas, convencendo os alunos que a construção é impossível. Para finalizar o professor pode tentar fazer a construção tomando como base o segmento de maior medida e passando ao aluno que o encontro entre os arcos auxiliares na construção se dará exatamente no segmento de tamanho 7 cm, assim como esse ponto dividi o segmento em dois segmentos de lados 3 cm e 4 cm respectivamente e observando que 3 + 4 = 7.

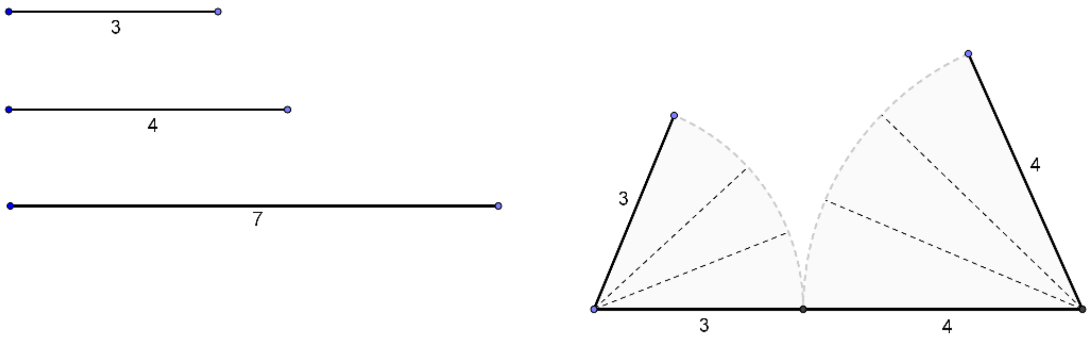


Figura - Construção onde a intersecção se dá sobre o segmento de 7 cm.

Para conduzir os alunos a síntese principal da aula, a partir desse momento construa com os alunos, tabelas auxiliares observando a soma dois a dois das medidas dos segmentos e comparando com a medida do segmento restante, além de observamos a possibilidade de construção para cada caso:

Exemplo 1	Exemplo 2	Exemplo 3
$5+6>7$	$3+4<8$	$3+4=7$
$6+7>5$	$4+8>3$	$4+7>3$
$7+5>6$	$8+3>4$	$7+3>4$
Construção Possível	Construção Impossível	Construção Impossível

Explorando vários exemplos os alunos serão capazes de chegar à síntese principal da aula ao perceberem que a construção só será possível se as somas das medidas dois a dois forem maiores que a medida restante, cabendo ao professor mediar a síntese da aula, que será feita pelos próprios alunos.

Trabalharemos o resultado obtido, dando como exercício algumas medidas de possíveis lados de triângulos e pedindo aos alunos que digam se é possível ou não construir um triângulo dado essas medidas, sem que para isso tentem construir o triângulo com régua e compasso. Nessa etapa o professor também poderá conduzir os alunos a perceberem que o fato da colinearidade dos pontos na transposição das medidas é um dos casos que inviabiliza a construção do triângulo, e levá-los a uma argumentação. É importante que o aluno se convença que a possibilidade da construção está condicionada à soma das medidas de dois lados ser maior que a medida do terceiro lado restante, e portanto, três desigualdades necessitam ser satisfeitas. Se surgirem muitas dúvidas, por exemplo, ocasionadas pela imprecisão das ferramentas, o professor irá usar o computador, explorando as possibilidades do Geogebra e suas opções de geometria dinâmica.

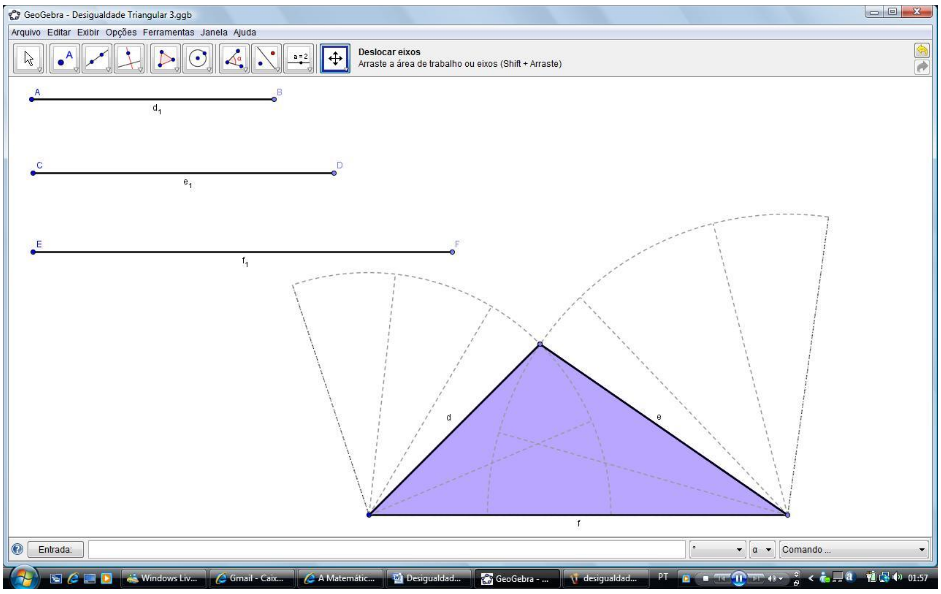


Figura – Uso do Geogebra na ilustração da construção do triângulo.

Para finalizar pedimos aos alunos que façam e entreguem a atividade “O que eu aprendi...”, analisando o material posteriormente, intervindo em aulas futuras, para sanar possíveis dúvidas.

ATIVIDADE 5

Tema: Teorema Angular de Tales

Objetivo Principal: Participação dos alunos na construção de seu próprio conhecimento de tal forma que consigam interpretar e reconhecer o Teorema Angular de Tales em diversas situações da geometria escolar e do cotidiano.

Objetivo Secundário: familiarizar os alunos com as validações e, através de experimentações, levá-los a entender que os resultados matemáticos possuem justificativas.

Pré-aula: alunos devem desenhar três triângulos em três folhas A4. Em um dos triângulos, deve-se medir com um transferidor os ângulos internos do triângulo e deixá-los anotados. Nos outros dois triângulos, devem fazer marcações nos ângulos e pintar essas marcações com cores diferentes.

Material: para facilitar a explicação, o professor pode confeccionar dois triângulos, ambos feitos em cartolina (em tamanhos grandes suficientes que ocupem boa parte da cartolina), fazendo a marcação dos ângulos e pintando como feito no material do aluno.

Roteiro de aplicação:

Na primeira parte da aula, usamos o triângulo, construído previamente e individualmente por cada aluno, medindo com o transferidor os seus ângulos internos. Peça aos alunos que somem as três medidas e faça uma tabela na lousa com os resultados obtidos por alguns estudantes.

Esperamos que apareçam resultados próximos a 180°, se não peça aos alunos que refaçam as medições e aproveite para dizer sobre a imprecisão das medições.

Com a tabela em mãos perguntamos a classe se eles percebem alguma coisa em relação aos valores obtidos, dando nesse momento muita ênfase ao resultado da soma e aos triângulos construídos por cada aluno da turma, que são diferentes, tanto no seu tamanho quanto em seu formato, isso ajudará os alunos a perceberem que não importa o tamanho ou formato do triângulo a soma dos ângulos internos é sempre 180º (ou no caso da tabela próxima de 180°).

Indague os alunos: “Será que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre 180°?”

Nesse momento já estamos inseridos na Metodologia de Resolução de Problemas, sendo que a primeira etapa já deve estar bem encaminhada devido às indagações feita e a tabela construída.

Na segunda etapa da resolução de problemas, os alunos terão uma boa gama de ferramentas para entender e começar a trabalhar no problema, porém com se trata um problema complexo para esse nível na obtenção da resposta para a pergunta “Se a soma é sempre 180°, então porque algumas somas deram diferentes?”, então partimos para algumas deduções informais que justifiquem a veracidade da afirmação:

Primeiramente peça aos estudantes que peguem um segundo triângulo feito de antemão por eles, no qual foram pintadas as marcações dos ângulos. Seguiremos então com a atividade clássica do recorte dos ângulos e junção formando um ângulo raso:

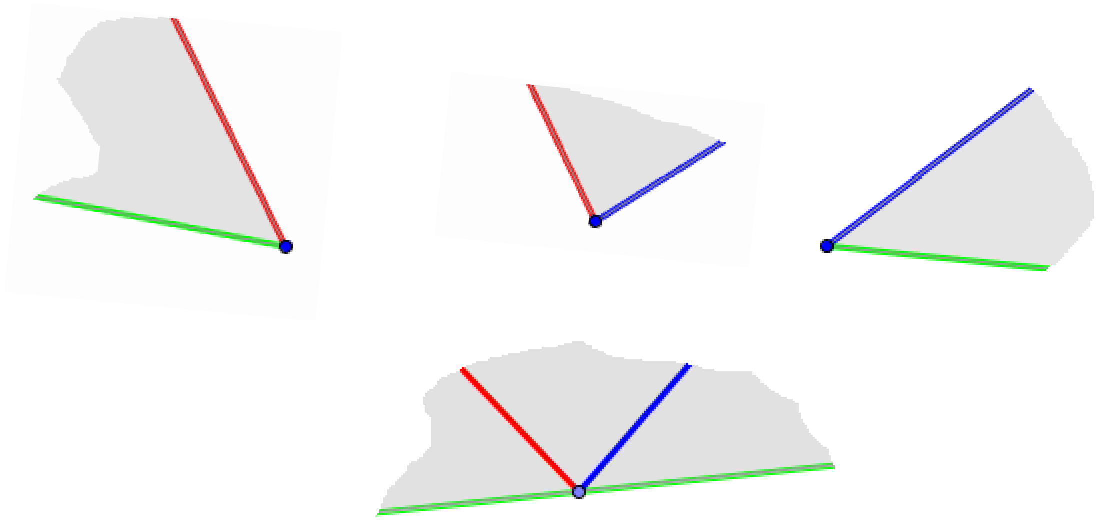


Figura - recorte dos ângulos internos de um triângulo formando um ângulo raso.

Para comprovar ainda mais o resultado o professor pedirá que os alunos peguem o terceiro triângulo feito por eles e façam mais uma atividade envolvendo o mesmo problema, só que desta vez usando dobraduras, isto é, dobrando o triângulo de tal forma que os vértices encontrem os lados opostos formando novamente um ângulo raso, como na figura:

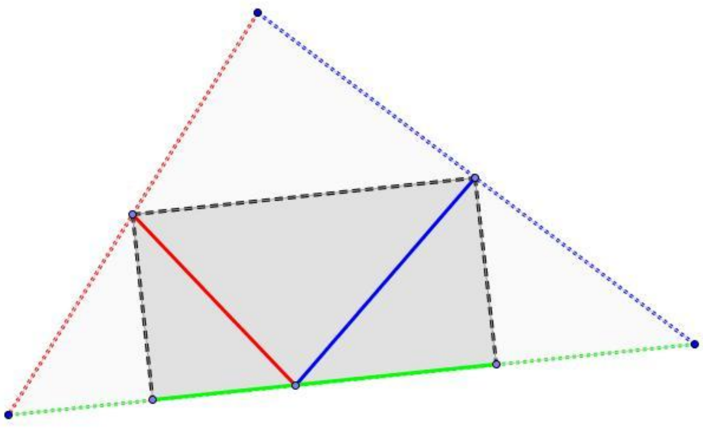


Figura: Dobra das pontas (ângulos internos) de um triângulo formando um ângulo raso.

Observação: Como o método da dobradura que forma o ângulo raso é único (salvo a escolha do lado do ponto de encontro dos vértices), forneceremos nesse momento a atividade passo-a-passo que poderá ser trabalhada com os alunos:

1º Passo: tomemos como base o lado do triângulo oposto a um ângulo não-obtuso:

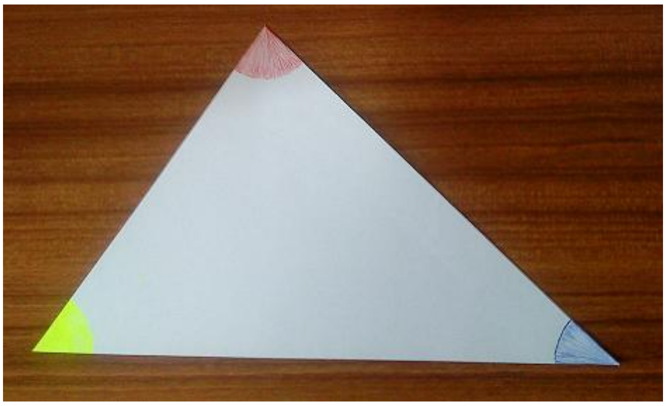


Figura – Triângulo com o lado oposto a um ângulo não obtuso como base.

2º Passo: dobramos a base escolhida sobre ela mesma, de modo que a dobra passe pelo vértice oposto à base. A dobra obtida é a altura relativa a essa base. O ponto da altura sobre a base constitui o pé da altura. Lembramos que se um esquadro for alinhado à base do triângulo pelo ângulo reto e ao vértice oposto da base, ele se alinhará ao vinco da altura e passará pelo pé da altura.

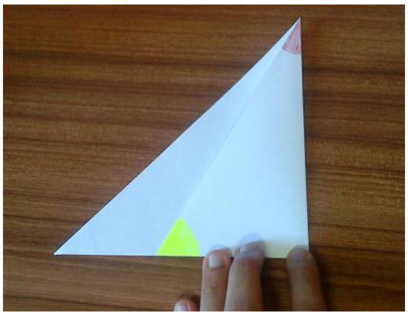
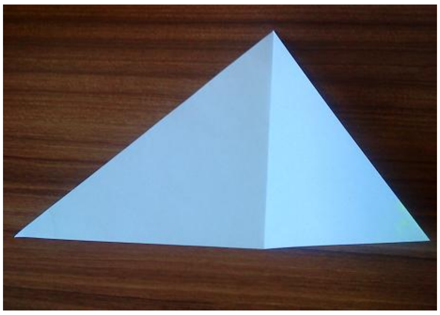



Figura – Achando uma altura do triângulo com dobraduras.

3º Passo: Dobramos a altura pela metade, fazendo coincidir o vértice com o pé da altura. O novo vinco é paralelo à base.

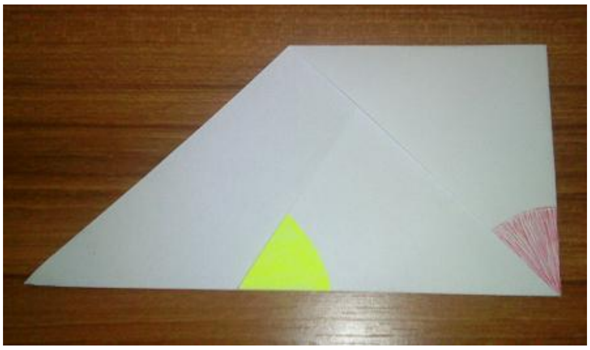
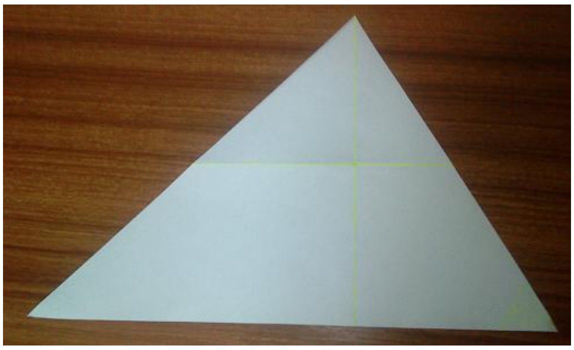



Figura – Dobrando a altura pela metade.

4º Passo: Abrimos o triângulo e o dobramos segundo o vinco paralelo formado, de modo que o vértice oposto da base encontre o pé da altura. Dobramos a outras pontas do triângulo de modo que os vértices se encontrem todos no pé da altura.

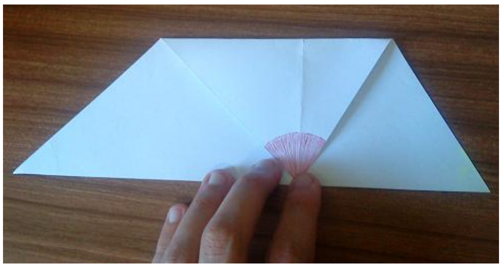
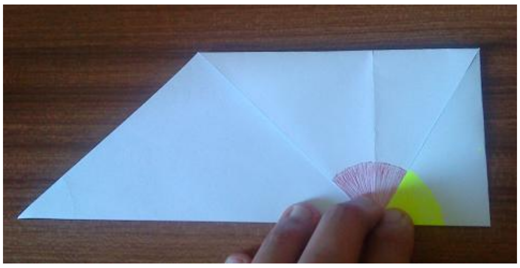
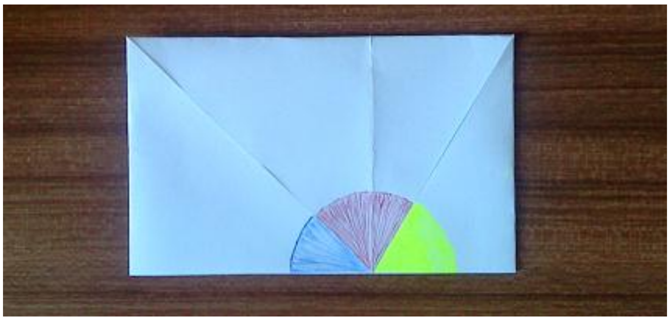




Figura - Sequência de dobraduras que fornece o ângulo raso

Em ambas as atividades, espera-se que os alunos consigam perceber que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre 180º.

Nas demais etapas da resolução de problemas os alunos terão condição de estabelecer a síntese principal da aula (A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre 180°) e podem trabalhar sobre o porquê de algumas medições deram valores distintos de 180° e descobrirem seus erros de medições.

Após a atividade trabalharemos os resultados obtidos, podendo então, passar algumas atividades para que os alunos usem o resultado assimilado, por exemplo, em um triângulo retângulo a soma dos adjacentes ao ângulo reto é sempre 90° ou o que, em um triângulo o número máximo de ângulos obtusos ou retos é um.

Para finalizar os alunos farão a atividade “O que eu aprendi...” explicando se possível o que eles fizeram na aula, ajudando-os assim a lembrar dos processos de construção do próprio conhecimento.