UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCAR

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – PPGECE

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA – DM

ATIVIDADES PARA APRENDIZAGEM DO CONCEITO MATEMÁTICO DE FUNÇÃO

RITA SANTOS GUIMARÃES

SÃO CARLOS

2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCAR
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – PPGECE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA – DM

RITA SANTOS GUIMARÃES
ORIENTADOR: PROF. DR. ROBERTO RIBEIRO PATERLINI

ATIVIDADES PARA APRENDIZAGEM DO CONCEITO MATEMÁTICO DE FUNÇÃO

Dissertação de mestrado profissional elaborada junto ao Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos, como exigência parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas.

SÃO CARLOS
2010

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar

G963aa

Guimarães, Rita Santos.
Atividades para aprendizagem do conceito matemático de função / Rita Santos Guimarães. -- São Carlos : UFSCar, 2010.
201 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2010.

1. Matemática - estudo e ensino. 2. Funções. 3. Resolução de problemas. 4. Estudantes - atividades. 5. Material didático - matemática. I. Título.

CDD: 510.7 (20ª)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Roberto Ribeiro Paterlini
DM - UFSCar

Prof. Dr. Antonio Carlos Patrocínio
IM - UNICAMP

Profa. Dra. Edna Maura Zuffi
ICMSC - USP

Aos meus pais,

Berenice e Guimarães,

pelo apoio incondicional,

amo vocês.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Prof. Dr. Roberto Ribeiro Paterlini, por toda a paciência, toda dedicação e toda a calma em me auxiliar na elaboração deste trabalho.

Aos meus familiares, que sempre me incentivaram e festejaram minhas conquistas. Principalmente meu pai, Guimarães, minha mãe, Berenice, e meu irmão, Tiago, por tantos momentos de felicidade.

Aos professores que me ensinaram tanto nos cursos que frequentei durante os últimos dois anos: Pedro, João, Yuriko, Caetano, Salvador, Maria do Carmo, Marcos e Dulcinei.

À Fátima e à Patrícia que gentilmente cederam suas classes para que eu aplicasse minhas atividades. O apoio e o suporte de vocês foi indispensável, agradeço do fundo do coração.

Ao Paulo, pelos três anos de muito carinho e companheirismo, pelas noites de trabalho e também pelas lindas ilustrações.

Ao Tulé e ao Lemão, meus treinadores queridos, pelos momentos que eu precisava espairecer.

Ao pessoal do projeto M³, principalmente ao Leo e ao Samuel, por acreditarem em mim, por me darem tantas oportunidades e por tudo que aprendi com a nossa convivência.

Às minhas melhores amigas Mari Loira, Mari Morena, Claudinha e Catê, que sempre me deram razões para que eu acredite na humanidade e ainda tenha fé no mundo.

Aos amigos do LEM que foram os primeiros a me incentivar nessa jornada. Por toda a confiança e por todo o companheirismo!

Aos colegas de curso! O mestrado não seria o mesmo sem as conversas de corredor, sem os 3 milhões de e-mails trocados, sem as histórias hilárias ou seja, sem vocês! Obrigada!

A todos os amigos que eu amo tanto, do Objetivo, da Unicamp, de São Paulo, de Campinas, de Oliveira, de Belo Horizonte, dos que estão longe e dos que estão perto. Obrigada por fazerem parte da minha vida.

E finalmente, o Quinteto Fantástico: Patrícia, Rodrigo, Thais, Toninho e Eu! Vocês estão para sempre no meu coração, aqui vai meu MUITO OBRIGADO por todas as risadas, todos os estudos, todas as conversas, todas as listas, todos os recados, todos os e-mails etc. Você são as pessoas que eu adoraria encontrar todo dia!

RESUMO

A escolha do conteúdo matemático deste trabalho veio da constatação das dificuldades dos estudantes do 1° ano do Ensino Médio com o tema funções, através das experiências vividas por essa pesquisadora em suas práticas de ensino. Com o objetivo de facilitar o ensino e a aprendizagem do conceito matemático de função propusemos folhas de atividades, que mesclam textos explicativos e problemas, para usarmos o conceito espontâneo de relação como base para a construção do conceito científico de função. As atividades ainda apresentam a linguagem científica básica necessária para a compreensão do conceito, para isso fazemos uso de situações de percepção de padrões para que os estudantes construam funções representadas por fórmulas, exploramos a passagem do discreto para o contínuo e abordamos algumas situações de representação gráfica de funções. As atividades foram resolvidas em grupos pequenos de estudantes de duas escolas do primeiro ano do Ensino Médio, uma pública e outra cooperativa. As aplicações duraram uma semana em cada escola. Todos os dados recolhidos foram analisados e comparados com as observações prévias, seguindo a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa. Assim, pudemos reformular alguns trechos das folhas de atividades para que os resultados de sua aplicação fossem ainda mais positivos. Pois, constatamos que a dinâmica, em geral, estimulou e incentivou a participação dos estudantes no seu próprio processo de aprendizagem. A impossibilidade de acompanhar por mais tempo uma mesma turma nos impediu de obter informações mais precisas sobre os efeitos das folhas. De qualquer forma, acreditamos que o material elaborado pode auxiliar outros profissionais da área, mesmo que seja necessário fazer pequenas alterações para torná-lo compatível com cada realidade.

Palavras-chave: Relação, função, ensino através de problemas, folhas de atividades

ABSTRACT

The choice of the mathematical content of this work came from the identification of the difficulties of students in High School 1st year with the theme functions through the experiences of this researcher in her teaching practices. In order to facilitate the teaching and learning of the mathematical concept of function, some proposed activities mixed scripts and problems, to use the concept of spontaneous relationship as the basis for the construction of the scientific concept of function. The activities also have the language necessary for basic scientific understanding of the concept that we use to situations of perceived patterns for students to build functions represented by formulas. We explored the transition from discrete to continuous and covered some graphical situations for functions. The activities were settled in small groups of students from two schools in the first year of High School, one public and thr other on a cooperative style. Applications took a week in each school. All data collected were analyzed and compared with the previous observations, following Didactic Engineering as research methodology. So we could reformulate some parts of the sheets of activities to obtain more positive results of its application. We found that these dynamics in general stimulated and encouraged the participation of students in their own learning process. As it was not possible to follow any longer the same class, this prevented us from obtaining more precise information on the effects of the activites. Anyway, we believe that the produced material produced can help other professionals, even if they have to suffer minor changes to be compatible with each situation.

Keywords: Relation, function, teaching through problems, activity sheets

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Apresentamos nossa dissertação de mestrado profissional realizada junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar). Descrevemos o trabalho que fizemos em duas escolas do Ensino Médio, quando desenvolvemos e aplicamos folhas de atividades em sala de aula com o objetivo de facilitar aos estudantes a construção do conceito matemático de função e algumas de suas formas de representação.

Como resultado de nosso trabalho, obtivemos três conjuntos de folhas de atividades sequenciais sobre o conceito de função. Essas atividades foram objeto de uma minuciosa preparação. Com a análise e avaliação de sua aplicação em quatro classes de estudantes do Ensino Médio pudemos reformular essas atividades, obtendo um produto final, que apresentamos no Apêndice C.

A função tem presença marcante na Matemática contemporânea, e constitui uma de suas principais linguagens. Ela é utilizada para descrever relações entre conjuntos, regularidades, analogias, propriedades em geral do mundo dos números e da forma. É usada também para construção de modelos de fenômenos naturais e sociais.

Diversas competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática no Ensino Básico tem importante participação das funções. Dessa forma as funções constituem um dos principais temas do currículo escolar, sendo, em geral, abordadas nos anos finais do Ensino Fundamental ou no início do Ensino Médio.

Nessa proposta adotamos como principal pressuposto teórico a metodologia Ensino da Matemática através de Problemas, pois acreditamos ser a mais adequada para a construção desse conceito. A estratégia que escolhemos para criar cenários para aplicação dessa metodologia foi a aplicação de Folhas de Atividades, por entendermos que sua constituição se encontra em um ponto intermediário entre as diversas estratégias em Resolução de Problemas.

A sequência didática adotada nas Folhas de Atividades foi escolhida de acordo com a construção psicológica do conceito de função, gerada a partir do conceito espontâneo de relação. Consideramos que a opção alternativa, a da construção histórica, é de difícil implementação.

As Folhas foram aplicadas em duas escolas de Ensino Médio, uma pública e outra cooperativa. Analisamos as respostas e as anotações feitas durante a aplicação para que fosse possível a reelaboração de alguns trechos da proposta.

As Folhas de Atividades assim construídas, juntamente com sua análise, constituem o produto final de nosso curso de mestrado profissional realizado junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da UFSCar.

Essa dissertação foi dividida em seis capítulos. Os três primeiros foram utilizados para a delimitação do assunto considerado e para a descrição dos pressupostos epistemológicos e pedagógicos adotados no trabalho. Os dois capítulos seguintes descrevem a preparação das atividades e sua aplicação, apresentando as análises *a priori* e *a posteriori*. O último capítulo traz as conclusões que obtivemos. A dissertação é complementada pelos Apêndice A, com as folhas de atividades conforme foram aplicadas, e o Apêndice B, com as folhas de atividades resolvidas e o Apêndice C, com as folhas de atividades reformuladas.

Segue uma breve descrição de cada capítulo da dissertação.

No Capítulo 1 delimitamos o contexto matemático em que se insere nosso trabalho, o das funções. Explicamos como o conceito de função é imprescindível na Matemática contemporânea e por que é importante seu ensino. Descrevemos alguns aspectos da evolução histórica do conceito de função, como esse conceito e suas representações são adotados hoje na Matemática, e quais são os principais tipos de funções e suas propriedades que são estudadas no Ensino Médio.

No Capítulo 2 apresentamos um breve panorama sobre o estado atual do ensino de funções. Descrevemos as propostas colocadas por especialistas nos documentos oficiais e em artigos especializados. Fazemos também um estudo de alguns livros didáticos para termos uma descrição das linhas adotadas pelos autores.

Iniciamos o Capítulo 3 com uma visão geral dos pressupostos epistemológicos e pedagógicos adotados no trabalho e, em seguida, apresentamos a metodologia Ensino da Matemática através de Problemas, que utilizamos para a construção das Folhas de Atividades. Como essas atividades obedecem a uma sequência pré-determinada, comentamos aqui alguns aspectos da Engenharia Didática que serviram de norte para essa construção. Terminamos o capítulo com uma descrição mais particular do significado dessas folhas, explicando como devem ser construídas e o que se espera alcançar com sua aplicação.

O Capítulo 4 é o primeiro dos três capítulos em que efetivamente descrevemos o trabalho que desenvolvemos nas escolas. Depois de fazermos uma apresentação dos aspectos gerais da proposta, dos conceitos e das técnicas abordadas, analisamos detalhadamente as três folhas de atividades que foram aplicadas nas escolas. Essas folhas são assim denominadas:

Folhas de Atividades 1: Famílias, relações e funções
Folhas de Atividades 2: Fórmulas para funções
Folhas de Atividades 3: Gráficos e funções

No Capítulo 5 descrevemos as aplicações dessas atividades nas classes de estudantes e os resultados conseguidos por eles. Consideramos essas aplicações um teste para nossa proposta. Através delas pudemos reformular alguns pontos das folhas de atividades que julgamos não estavam muito claros. As aplicações das folhas de atividades nas classes de estudantes com que trabalhamos nos dá, ainda, um diagnóstico localizado do ensino da Matemática, pois pudemos constatar situações de facilidade ou de dificuldade em que se encontram os estudantes quanto aos pré-requisitos necessários para a realização das atividades.

As conclusões dos nossos trabalhos se encontram no Capítulo 6. Segundo nossa avaliação as folhas de atividades que propusemos atingiram seu objetivo, que era o de facilitar o ensino e a aprendizagem do conceito matemático de função. Os textos explicativos e as atividades estimularam os estudantes a interligar o conceito espontâneo de relação com o conceito científico de função. Além disso apresentamos a linguagem científica básica necessária para a aplicação do conceito, usamos atividades de percepção de padrões para que os estudantes construíssem funções representadas por fórmulas, exploramos a passagem do discreto para o contínuo e abordamos algumas situações de representação gráfica de funções. A forma de aplicação das folhas de atividades que adotamos foi o trabalho em pequenos grupos, o que encorajou a discussão entre seus componentes. A análise das soluções produzidas pelos estudantes nos permitiu a reformulação das folhas de atividades e apresentamos, na Apêndice C, seu formato final. Encerramos o Capítulo 6 com comentários da autora sobre suas impressões pessoais durante todas as fases de elaboração deste trabalho.

As folhas de atividades são apresentadas em sua íntegra no Apêndice A, conforme foram aplicadas nas classes. No apêndice B apresentamos essas folhas de atividades resolvidas e no Apêndice C as atividades reformuladas. Assim encerramos nossa dissertação.

A principal motivação da pesquisadora para realizar este trabalho veio da constatação das dificuldades dos estudantes do 1° ano do Ensino Médio com o tema funções. A pesquisadora teve experiências com estudantes ao lecionar como professora da rede pública de ensino e como plantonista de uma escola particular. Quando trabalhava com funções os estudantes apresentavam muitas dúvidas. Essas dúvidas tinham características diversas, mas todas remetiam à não compreensão plena do conceito matemático de função. Sendo assim, decidimos pela elaboração de atividades que ajudassem na construção desse conceito. A preparação deste trabalho nos mostrou as sutilezas envolvidas com o ensino de um conceito científico. Não é suficiente o enunciado da definição para que um conceito possa de fato ser compreendido. Temos que apoiá-lo em outros conceitos mais intuitivos. No caso das funções o apoio veio do conceito espontâneo de relação.

Achamos que esse trabalho pode ser uma contribuição para nossos colegas professores, pois as folhas de atividades, que constituem nosso produto final, podem ser utilizadas diretamente em sala de aula, eventualmente com pequenas adaptações para cada situação.

A elaboração dessa pesquisa permitiu o amadurecimento da autora como profissional da área de educação. As iniciativas de conhecer e analisar outros trabalhos, discutir ideias, julgar propostas de atividades, escrever e corrigir textos contribuíram de forma singular para a constante formação a que um bom profissional deve sempre se submeter.

CAPÍTULO 1

FUNÇÕES NA MATEMÁTICA CONTEMPORÂNEA

1.1 Introdução

O capítulo inicial dessa dissertação apresenta os fundamentos científicos do conceito de função, constata sua importância para a Matemática e faz uma breve descrição de sua gênese histórica.

Primeiramente apresentamos justificativas, do ponto de vista da Matemática atual, para a relevância do conceito de função. Através da citação de uso desse conceito em diversas áreas avançadas do conhecimento Matemático esperamos convencer o leitor da atenção que o tema merece.

Os aspectos históricos são apontados em seguida e, embora incompletos, já são suficientes para evidenciar as barreiras epistemológicas da evolução do conceito de função. As dificuldades sofridas pelos pensadores envolvidos com a elucidação do conceito nos fazem ver que esse foi um caminho difícil, que só deve ser trabalhado com estudantes em situações especiais. No Ensino Básico, que atende estudantes com múltiplos interesses, preferimos abordar o conceito de função através de sua gênese psicológica, partindo do conceito espontâneo de relação.

Finalmente, na última seção, tratamos dos conteúdos Matemáticos do tema funções. Deste modo destacamos as definições e propriedades básicas relacionadas com o conceito de função naqueles aspectos que interessam ao Ensino Básico. Neste momento apenas delimitamos nosso campo de ação, descrito conforme a linguagem científica, sem nos preocupar com a transposição dessa linguagem para as situações de aprendizagem.

Em resumo, neste capítulo justificamos a escolha do tema funções para nosso trabalho apresentando sua importância para a Matemática atual e descrevendo a linguagem formal com que ela é utilizada pela ciência.

1.2 Importância das funções na Matemática

A Matemática Contemporânea se desdobra em diversos campos distintos entre si. E o conceito de função é fundamental em vários deles. Por exemplo, a Análise faz uso de funções reais de uma ou mais variáveis, estudando suas propriedades do ponto de vista de convergência; já o estudo de Equações Diferenciais se dedica à resolução equações cujas incógnitas são funções; a Análise Funcional trata de espaços cujos elementos são funções; e a Análise Numérica estuda o processo de controlar erros na avaliação de todos os tipos de funções. Ainda podemos citar a Álgebra como campo que se dedica às leis e aos processos formais de operações com entidades abstratas que são generalizações de funções, e não podemos deixar de mencionar a Lógica que faz uso de funções recursivas.

Mas esse conceito, largamente utilizado, não foi concebido da forma como se apresenta hoje. Inicialmente a noção de função era tida apenas como uma expressão analítica que relacionava grandezas observadas na natureza. A motivação da criação inicial do conceito foi a de descrever experiências e observações sobre o movimento dos corpos e de outros fenômenos naturais. Assim as funções serviam de modelo matemático que os cientistas usavam para descrever as relações entre as variáveis envolvidas nos fenômenos observados.

Entretanto, já no século XIX, notou-se diversas incoerências e limitações nessa definição. O aperfeiçoamento das interpretações do conceito de função devido principalmente, à Teoria dos Conjuntos de George Cantor do final do século XIX e também a associação às noções de continuidade e de desenvolvimento em série, ampliaram enormemente sua natureza e seu significado.

O conceito de função tornou-se, assim, uma das pedras angulares da Matemática atual. Sua importância não é apenas teórica, já que é utilizado também para modelar fenômenos naturais e sociais.

1.3 Evolução do conceito de função na história da Matemática

A formulação do conceito de função como é apresentado hoje no ensino básico é bastante recente, datando do final do século XIX. Porém, mesmo sem uma formalização abrangente e aceita universalmente, as noções ligadas ao conceito já eram largamente utilizadas desde épocas antigas, como por exemplo, na contagem, que pode ser interpretada como a relação entre um conjunto de objetos e um conjunto de símbolos (números).

As noções relativas ao conceito de função são extremamente básicas e usadas nas mais diversas áreas da Matemática. Nesta seção vamos apontar alguns episódios da evolução do uso deste conceito e de sua transformação até firmar-se como um objeto matemático bem definido.

A definição atual do objeto função permite que inúmeros outros conteúdos da Matemática sejam interligados, sendo este uma de suas características mais marcantes, a de ser um princípio central e unificador na organização dos cursos elementares de matemática (EVES, 2004, p. 661). Inclusive conceitos simples como, por exemplo, sequências e contagem atualmente podem ser interpretados como funções. Porém, não é prudente supor que o conceito de função já estava sendo formado quando tabletes babilônicos do século XV a. C. apresentavam regras gerais para a área de algumas figuras geométricas. O que podemos afirmar é que o instinto de funcionalidade já se fazia útil, presente e necessário há muitos séculos.

Na Idade Média, Nicole Oresme (1323-1382), nascido na Normandia, é considerado o primeiro matemático a contribuir efetivamente para a obtenção da representação gráfica de uma função. Mesmo tendo vivido no século da Peste Negra, quando as produções científicas foram escassas, Nicole Oresme publicou “De configurationibus qualitatum et motuum” onde explica seu método de representar, através de uma figura geométrica, as características mutáveis de grandezas como velocidade e tempo. Um dos objetivos era permitir a percepção visual da natureza das variações. Porém, ele nunca usou de fato funções. Suas representações eram meramente qualitativas, não sendo realizadas medições para confeccionar os desenhos.

Sua teoria de localização de pontos por coordenadas, latitude e longitude, influenciou o trabalho de outros matemáticos, principalmente daqueles que contribuíram para o surgimento da Geometria Analítica, como René Descartes e Pierre de Fermat.

Já na Era Moderna, com Galileu Galilei (1564-1642), surgiram as primeiras leis quantitativas que expressam regularidades de um fenômeno natural, ou seja, estabelecem relações entre quantidades medidas de fenômenos observáveis.

As medições fazem com que o quantitativo seja introduzido nas representações gráficas. Tais avanços foram possíveis graças aos instrumentos já existentes na época, permitindo assim um largo uso da experimentação.

A relação funcional passou a se estabelecer entre a causa e o efeito de acontecimentos naturais. Assim, através da análise experimental, surgiu a noção de variável dependente.

O século XVII iniciou-se com importantes descobertas vindas do final do século anterior, como a introdução da álgebra simbólica para expressar equações algébricas, sugeridas pelo matemático francês François Viète (1540-1603), e ainda com o aprimoramento das técnicas de cálculo com números hindu-arábicos, a aceitação dos números negativos, os avanços nas resoluções de equações cúbicas e quadráticas, etc (EVES, 2004, p. 314).

Assim, René Descartes (1596-1650), teve respaldo para declarar que uma equação de duas variáveis (representando uma curva) indica uma relação de dependência entre quantidades variáveis. Deste modo usava equações em x e y para representar tais relações. O forte caráter geométrico do trabalho de Descartes o inclui como um dos criadores da Geometria Analítica.

O estudo do cálculo infinitesimal, que só foi possível com a introdução de funções como incógnitas de equações, foi objeto de trabalho de dois importantes autores da história das funções: Isaac Newton e Gottfried von Leibniz.

Isaac Newton (1642-1727) foi o primeiro a usar termos específicos para indicar variáveis independentes (“fluent”) e dependentes (“relata quantitas”). Através da representação de funções como expansões em séries infinitas de potência, Newton abriu campo para o estudo de processos infinitos.

Contemporâneo de Isaac Newton e seu “rival” na disputa da invenção do cálculo, Gottfried von Leibniz (1646-1716) foi o primeiro a usar o termo “função” no manuscrito “Methodus tangentium inversa seu de fonctionibus”, de 1673. Foi sua também a primeira definição formal do conceito de função em artigos publicados em 1692 e 1694. Outros termos adotados até hoje como variável e parâmetro tiveram seus significados atribuídos por Leibniz.

Outro grande nome dentre os envolvidos com a evolução do conceito de função é o de Jean Bernoulli (1667-1748), que introduziu várias notações, entre elas “fx”. Na definição do conceito de função, dada por Jean Bernoulli, transparece uma fascinação pelas expressões algébricas que a descrevem: *“função de uma quantidade variável é uma quantidade composta de alguma maneira dessa variável e de quantidades constantes”*. Bernoulli contribuiu também para o estudo de funções contínuas, aprimorou a regra de L´Hôpital e trabalhou com geodésicas, ampliando o campo da Geometria Diferencial.

Discípulo de Jean Bernoulli, Leonard Euler (1707-1793) foi um estudioso com contribuições nos mais diversos campos da Matemática. Em relação às funções, ele estabeleceu as diferenças entre os termos “variáveis” e “constantes” e entre funções “contínuas” e “descontínuas”. Introduziu a notação com parênteses para designar uma função. A definição de Leonard Euler é: *“uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de qualquer modo que seja, desta quantidade e números ou quantidades constantes”*. A maior diferença dessa proposta de definição em relação à de seu mestre Jean Bernoulli é a troca do termo “quantidade” por “expressão analítica”.

As definições dessa época logo mostraram suas limitações e incoerências pois uma mesma função poderia ser representada por expressões analíticas distintas. Além disso, uma classe muito pequena do que atualmente chamamos de função, era englobada pela definição. Por exemplo, a definição de Euler inclui apenas as funções analíticas (um subconjunto restrito da pequena classe das funções contínuas). Ao notar tais restrições Leonard Euler propôs uma definição alternativa que não atraiu a atenção dos matemáticos na época. Durante todo o século XVIII a definição de função como expressão analítica ficou imutável (PONTE,1992, p. 5).

O problema das cordas vibrantes, explorado por Jean-le-Rond d´Alembert (1717-1783), foi um dos primeiros estímulos para a generalização da definição do conceito (PONTE,1992, p. 6).

Vários outros estudiosos podem ser citados por suas contribuições fundamentais para a construção do conceito de função como Daniel Bernoulli (1700-1782), Joseph Fourier (1768-1830), Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), Bernhard Bolzano (1781-1848), etc. Todos eles trabalharam durante os século XVIII e XIX para formalização e fundamentação desse conceito.

Destacaremos Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) que, em meados do século XIX, apresentou uma generalização da definição de função (EVES, 2004, p. 661). O elemento novo nesta definição é o fato de que ela elimina a necessidade da existência de uma expressão algébrica e se baseia na correspondência entre variáveis, que são elementos de conjuntos.

Matemáticos do século XIX como Karl Weierstrass (1815-1897), Richard Dedekind (1831-1916), Georg Cantor (1845-1918) e Giuseppe Peano (1858-1932) contribuíram de alguma forma para a maior incorporação do conceito de função em diversas áreas da Matemática. Com a Teoria de Conjuntos de George Cantor foi possível atribuir uma interpretação funcional a correspondências arbitrárias entre conjuntos de qualquer natureza, numéricos ou não.

Uma definição significativa para o nosso trabalho é a do grupo Bourbaki (BOURBAKI, 1939, p. 6), que diz que (tradução livre da autora):

> *Sejam* E *e* F *dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável* x *de* E *e uma variável* y *de* F *é dita uma relação funcional em* y *, ou relação funcional de* E *em* F *, se, qualquer que seja* $x \in E$ *, existe um e somente um elemento* y *de* F *que está na na relação considerada com* x *.*

Conhecer a evolução da noção de função e as mudanças sofridas por esse conceito ao longo dos tempos permite que os professores de Matemática façam uso das condições mais adequadas a cada momento da aprendizagem dos estudantes.

Existem definições mais avançadas de função, mas que exigem um alto nível de abstração, pois usam o mínimo possível de conceitos não definidos, por exemplo: dados conjuntos não vazios A e B e dados elementos a de A e b de B, chamaremos de par ordenado ao símbolo (a,b) submetido à seguinte condição de identidade: se a e c são elementos de A e b e d são elementos de B, então: $(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow a=c$ e $b=d$. Indicaremos por $A \times B$ o conjunto de todos os pares ordenados (a,b) com a em A e b em B. Uma relação é um subconjunto não vazio qualquer de $A \times B$. Dados conjuntos não vazios A e B, uma função com domínio A e contradomínio B é uma relação $f \subset A \times B$ que satisfaz à seguinte condição: para todo $a \in A$ existe um único $b \in B$ tal que $(a,b) \in f$.

Provavelmente, essa não é a mais indicada para iniciar o aprendizado de um conteúdo que levou séculos para ter sua abrangência definida.

1.4 O campo conceitual contemporâneo de função

Apresentamos nessa seção a definição, notações e propriedades básicas das funções conforme são hoje utilizadas na Matemática, particularmente aquelas relacionadas com o ensino básico. O contexto lógico e representacional é o da Teoria dos Conjuntos, de modo que iniciaremos com uma revisão de conjuntos e suas propriedades principais. Nesse momento estamos delimitando nosso campo de estudo e não temos a preocupação de transpor esse campo para o estudante do Ensino Médio.

A seguir alguns tópicos com uma breve revisão dos conceitos essenciais que se farão necessários para a compreensão do tema função.

Conjunto

O campo da Matemática que estuda a Teoria dos Conjuntos, em um contexto rigoroso, é bastante abstrato e não se apresenta como um pré-requisito para a compreensão dos conceitos que iremos abordar. Neste trabalho veremos conceitos da Teoria Ingênua dos Conjuntos que são aceitos sem definição, assim como ponto, reta e plano o são em Geometria Euclidiana.

Um conjunto é uma coleção de determinados objetos denominados elementos desse conjunto. Aqui serão largamente utilizados os conjuntos numéricos como o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ e o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$.

Um conjunto pode ser caracterizado por uma propriedade P se todos os seus elementos satisfazem tal propriedade e vice-versa, isto é, todo objeto que satisfaz P pertence ao conjunto. Por exemplo, $\mathbb{R}^+$ é o conjunto dos elementos $x\in\mathbb{R}$ tais que $x>0$ ou $\mathbb{R}^+=\{x\in\mathbb{R}/x>0\}$ em linguagem algébrica.

Dado um conjunto A , chamamos de subconjunto de A qualquer conjunto B contido em A, em outras palavras, se todos os elementos de B estão em A . Simbolicamente, $B\subset A$ (lê-se B está contido em A), ou $A\supset B$ (lê-se A contém B).

A notação para designar o conjunto dos elementos que estão em A ou em B é $A\cup B$ (A união B), para designar os elementos que estão ao mesmo tempo em A e em B é $A\cap B$ (A intersecção B) e para designar o conjunto dos elementos que estão em A mas não estão em B usamos $A\setminus B$ ou $A-B$ (A menos B).

Os conjuntos A e B são iguais quando possuem os mesmos elementos, e nesse caso escrevemos $A=B$. Se A não é igual a B , dizemos que A é diferente de B e escrevemos $A\neq B$

Um conjunto interessante é o conjunto vazio, cuja notação é $\emptyset$. Um exemplo pode ser um conjunto com uma propriedade contraditória.

Produto cartesiano

Dados os conjuntos A e B , um par ordenado é o símbolo (a,b) , com $a\in A$ e $b\in B$ submetido à seguinte condição de identidade: $(a,b)=(c,d)$ se e somente se $a=c$ e $b=d$ quaisquer que sejam a e c em A e b e d em B . O produto cartesiano de conjuntos não vazios A e B é o conjunto formado pelos pares ordenados (x, y) tais que o primeiro elemento do par pertence ao conjunto A e o segundo pertence ao conjunto B. Simbolicamente temos $A \times B = \{(x, y) / x \in A \; e \; y \in B\}$.

Relação binária

Dados os conjuntos A e B, chama-se relação binária de A em B todo subconjunto R de $A \times B$. Tal relação é uma condição ou um conjunto de condições que permitem determinar, dados $x \in A$ e $y \in B$, se x está ou não relacionado com y, ou seja, se $(x, y) \in R$ ou não.

Função

Dados os conjuntos não vazios A e B, uma relação f de $A \times B$ recebe o nome de função definida em A com imagem em B se, e somente, se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

Notação: Para indica que $(x, y) \in f$, escreve-se $y = f(x)$, $x \in A$.

As afirmações e definições anteriores serão usadas daqui em diante sem mais explicações.

Quando for abordar o tópico funções, com seus estudantes de qualquer série, o professor deve ter em mente que este tema pode causar grandes confusões. Por isso é bom trabalhar com muita clareza, inclusive com a linguagem. Por exemplo, um estudante pode interpretar f(x) como se fosse o produto de uma variável f por uma variável x. Nestes casos a notação, que deveria simplificar os estudos, pode atrapalhar.

Representações e linguagem

Alguns estudos históricos afirmam que os primeiros registros de escrita humana eram quantidades (ou números). A necessidade de guardar valores fez com que o homem procurasse uma forma de registrar tal informação, dando assim os primeiros passos para a invenção da escrita.

O poder de registrar informações constituiu um grande salto na evolução da humanidade e possibilitou inúmeros avanços nas mais diversas áreas. A escrita matemática tem uma história paralela e seu aprimoramento também revolucionou as descobertas dessa ciência. Porém, essa evolução desenvolveu-se de tal forma que a linguagem matemática forma um conjunto de regras e símbolos que constituem uma linguagem independente.

Essa liberdade permite que artigos e estudos matemáticos sejam praticamente universais. Ao mesmo tempo que possuímos essa poderosa ferramenta, para que ela seja bem utilizada, é necessário que se domine um grande conjunto de regras e símbolos. Este conhecimento deve ser adquirido de alguma forma e a escola é o meio mais natural e prático de obtê-lo.

Para representar as funções, além da linguagem algébrica, existem outras muito relevantes como tabelas, diagramas e gráficos. Essas ferramentas constituem elementos importantes pois podem servir como ligação entre conhecimentos já adquiridos e novos conteúdos a serem aprendidos.

No Ensino Básico são mais frequentes as funções em que os conjuntos de partida e chegada são conjuntos numéricos. Essas funções são melhor representadas em gráficos com eixos numéricos, chamados sistemas cartesianos.

Domínio e imagem de uma função

Dada uma função $f: A \rightarrow B$, o conjunto A é chamado de ***domínio*** e o conjunto B é chamado de ***contra-domínio*** da função f . Os elementos do contra-domínio que estão relacionados com algum elemento do domínio formam o conjunto ***imagem***.

Propriedades de funções reais

As definições a seguir são específicas para funções reais de uma variável real, isto é, funções cujo domínio e contra-domínio são subconjuntos dos números reais.

A fim de simplificar as próximas definições empregaremos letras do final do alfabeto para designar variáveis e letras do início para as constantes. As funções serão representadas pelas letras “f”, “g”, “p” e “q”.

Antes de enunciar algumas propriedades vamos definir o significado de ***raízes da função*** f como sendo os valores reais r , pertencentes ao domínio de f , tais que $f(r)=0$.

Uma função f é dita ***crescente*** quando, para quaisquer números x_1 e x_2 do domínio, ocorre que $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$ e ***monótona não-decrescente*** quando $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geqslant f(x_1)$. Analogamente, as funções ***decrescentes*** são aquelas para as quais $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$ para quaisquer x_1 e x_2 do domínio e ***monótonas não-crescentes*** quando $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leqslant f(x_1)$.

Uma função $f : AtendeaB$ é ***sobrejetora*** se, e somente se, para todo $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Equivalente é dizer que o conjunto imagem de f é igual ao seu contra-domínio.

As funções $f : A \rightarrow B$ são chamadas de ***injetoras*** se, e somente se, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a A. Ou seja, elementos distintos do domínio de f terão também imagens distintas. Uma função $f : A \rightarrow B$ é dita ***bijetora*** se e,somente se, f é sobrejetora e injetora.

A função $f : A \rightarrow B$ é ***par*** se $f(x) = f(-x)$ para todo x do domínio de f. Essa característica fica marcante no gráfico da função pois o eixo vertical é um eixo de simetria. Já nas funções ímpares, para as quais $f(x) = -f(x)$ para todo x do domínio de f, podemos notar uma simetria em relação à origem das coordenadas.

Uma função $f : A \rightarrow B$ é ***periódica*** quando existe um valor P tal que $f(x+P) = f(x)$ para todo $x \in A$. Essa característica também pode ser observada no gráfico, que tem um formato repetido a cada intervalo de tamanho P do domínio de f.

Quando temos uma função $f : A \rightarrow B$, bijetora, podemos definir a ***função inversa*** $g : B \rightarrow A$ da seguinte forma: dado $b \in B$ seja $a \in A$ o único elemento tal que
$f(a) = b$; então $g(b) = a$. É usual a notação f^{-1} para denotar a função inversa de f.

Funções Elementares

Exibiremos a seguir as chamadas ***funções elementares***, que são as tradicionalmente estudadas no Ensino Básico.

As primeiras funções estudadas de forma rigorosa são as ***funções polinomiais.*** Dizemos que $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função polinomial quando existem números reais $a_o, a_{1,} \dots, a_n$ tais que $p(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_o$ para todo $x \in \mathbb{R}$. O grau de um polinômio é o valor máximo de n tal que $a_n \neq 0$.

O estudo de funções, no Ensino Básico, começa com um caso particular das funções polinomiais, aquelas que têm grau um. O nome mais comum para esses polinômios é ***função afim***. Elas merecem destaque por serem largamente exploradas neste nível de ensino. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada afim quando existem números $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \neq 0$ e $f(x)=a.x+b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Alguns casos particulares da função afim merecem destaque como a *função linear* cuja a fórmula é dada por $f(x)=a.x$ e serve de modelo matemático para problemas de proporcionalidade; a *função identidade* dada por $f(x)=x$; as *translações* que são do tipo $f(x)=x+b$; e a *função constante* que tem a fórmula $f(x)=b$.

Após o estudo das funções afins os currículos passam para as ***funções quadráticas***, que são os polinômios de grau dois. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ da forma $f(x)=ax^2+bx+c$ é chamada ***função quadrática*** com números reais a, b, c sendo $a \neq 0$. Os problemas enunciados no Ensino Médio que recaem em funções quadráticas sugerem que os estudantes tratem dos conceitos de raízes da função, gráfico (parábola), vértice da parábola, concavidade da parábola, problemas de máximos e mínimos, etc.

As funções polinomiais são usadas ainda para definir as funções racionais. Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma ***função racional*** se $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios com q não identicamente nulo e $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $q(x) \neq 0$. Isto é, f é uma razão entre polinômios. Embora seja uma classe importante de funções em níveis mais avançados da Matemática, tais funções são pouco abordadas no Ensino Médio. Na maior parte dos livros didáticos aparecem apenas como casos para o estudo de domínio de uma função e de função inversa.

Outra classe de funções muito exploradas no Ensino Médio são as ***funções exponenciais***. Chamamos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ de função exponencial de base $a \in \mathbb{R}^+$,com $a \neq 1$, quando $f(x)=a^x$. As funções exponenciais são os modelos mais indicados para diversos problemas elementares que tratam de cálculo de capitais aplicados a taxas fixas, de desintegração radioativa, alguns casos de crescimentos populacionais, etc.

Vamos tratar agora da ***função logarítmica***, que nada mais é do que a inversa da função exponencial. Note que a função exponencial de base $a \in \mathbb{R}^+$ e $a \neq 1$ definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^+$ é bijetora e portando admite inversa. Assim a função $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é a inversa da função exponencial de base a que associa a cada número real positivo x o número real $\log_a x$, chamado de logaritmo de x na base a .

A definição de função inversa nos garante que $a^{\log_a x} = x$ e $\log_a(a^x) = x$. Em outras palavras, podemos enunciar que $\log_a x$ é o expoente ao qual devemos elevar a base a para obter o número x .

Por fim no Ensino Básico são muito estudadas as funções trigonométricas. Elas constituem o maior exemplo de função periódica e têm inúmeras aplicações.

Nesse capítulo introdutório da dissertação procuramos fundamentar a escolha do tema apresentando aspectos de sua importância atual e também de sua trajetória histórica. Mostramos, ainda, parte do conteúdo formal sobre o assunto sem preocupação com a transposição desses conceitos para as situações de aprendizagem. A seguir faremos uma breve reflexão sobre a situação do Ensino Médio no Brasil, já que este é o nível no qual focamos esse trabalho, analisando documentos oficiais e pesquisas especializadas da área de educação.

CAPÍTULO 2

PRESENÇA DAS FUNÇÕES NO ENSINO ATUAL DA MATEMÁTICA

2.1 Introdução

Nesse segundo capítulo vamos discorrer sobre alguns documentos oficiais como a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional de 1996 e a Lei 10.172, de 2001, que aprova o Plano Nacional de Educação. Vamos analisar também os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de 1998, o Programa Ensino Médio Inovador de 2009 e a Proposta Curricular lançada pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo em 2008. Todas essas publicações devem servir de base para a concepção dos currículos escolares. Ao analisá-las notamos que ressaltam as deficiências e dificuldades do Ensino Médio atual.

A seguir verificamos como o tema funções é tratado nesses documentos e procuramos destacar sua importância na formação dos estudantes.

Fazemos também uma breve descrição de alguns livros didáticos do Ensino Fundamental e, principalmente, do Ensino Médio. Nosso objetivo é verificar se existem variações na abordagem adotada por cada autor para o tema funções.

Por fim, analisaremos alguns trabalhos desenvolvidos atualmente por especialistas da área de educação matemática em artigos, teses e dissertações especializados.

Este capítulo fornece um panorama geral sobre a situação do Ensino Médio no Brasil destacando o ensino de funções e o que vem sendo feito para buscar uma melhoria na qualidade do ensino.

2.2 O Ensino Médio do Brasil

As obrigatoriedades, finalidades e objetivos atribuídos ao Ensino Médio são regidos, inicialmente, de acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) de 20 de Dezembro de 1996. Tal lei afirma que:

> *Artigo 21. A educação escolar compõe-se de:*
>
> *I - educação básica, formada pela educação infantil, ensino fundamental e ensino médio;*
>
> *II - educação superior.*

A LDB também previa a possibilidade de que o Ensino Médio poderia preparar o estudante para exercer profissões técnicas, mas esse parágrafo foi revogado em 2008. Outros parágrafos foram também retirados ou alterados. De qualquer forma o documento apresenta instruções muito gerais sobre os níveis de ensino. Não existe uma subdivisão por disciplinas, tanto que o capítulo destinado ao Ensino Médio ocupa cerca de uma página apenas.

Uma das únicas orientações sobre o currículo na LDB (1996, s/p) é:

> *Os currículos a que se refere o caput devem abranger, obrigatoriamente, o estudo da língua portuguesa e da matemática, o conhecimento do mundo físico e natural e da realidade social e política, especialmente do Brasil.*

O documento em vigor é o Plano Nacional de Educação, de janeiro de 2001, que define, em resumo, diretrizes e metas para cada nível e modalidade de ensino, para a formação e valorização de todos os profissionais da educação e ainda determina rumos para gestão e financiamento da educação nos próximos dez anos.

Especificamente sobre o Ensino Médio o texto da lei (2001, s/p) observa que:

> *... no caso do ensino médio, não se trata apenas de expansão. Entre os diferentes níveis de ensino, esse foi o que enfrentou, nos últimos anos, a maior crise em termos de ausência de definição dos rumos que deveriam ser seguidos em seus objetivos e em sua organização. Um aspecto que deverá ser superado com a implementação das Novas Diretrizes Curriculares para o ensino médio e com programas de formação de professores, sobretudo nas áreas de Ciências e Matemática.*

No decorrer dos dez anos de vigência do plano, ou seja, até 2011, é estabelecido que haverá oferta de vagas a 100% da demanda para o Ensino Médio e que todas as escolas devem dispor de equipamentos de informática, inclusive para o apoio do ensino e da aprendizagem.

Além disso, num prazo de cinco anos, todos os professores em atividade deverão possuir diploma de nível superior. Vemos que o texto ressalta vários problemas estruturais das escolas, além de problemas de formação de profissionais para atuar na área.

Em 1998 foram publicados os Parâmetros Curriculares Nacionais, que servem de referência para que cada escola elabore seus próprios currículos. Para o Ensino Médio o conhecimento escolar foi dividido em três áreas. Essa divisão considerou conhecimentos que apresentam objetos de estudo em comum, visando facilitar a prática escolar interdisciplinar. As três grandes áreas são:

- Linguagens, códigos e suas tecnologias;
- Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias;
- Ciências Humanas e suas Tecnologias.

A justificativa e importância da área Linguagens, códigos e suas tecnologias pode ser resumida nos PCN do Ensino Médio (2000a, p. 20) por:

> *No mundo contemporâneo, marcado por um apelo informativo imediato, a reflexão sobre a linguagem e seus sistemas, que se mostram articulados por múltiplos códigos e sobre os processos e procedimentos comunicativos, é, mais do que uma necessidade, uma garantia de participação ativa na vida social, a cidadania desejada.*

Já a área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, (PCN, 2000a, p. 20):

> *...indica a compreensão e a utilização dos conhecimentos científicos, para explicar o funcionamento do mundo, bem como planejar, executar e avaliar as ações de intervenção na realidade.*

E Ciência Humanas e suas Tecnologias é a área, (PCN, 2000a, p. 21):

> *...que engloba também a Filosofia, deve-se desenvolver a tradução do conhecimento das Ciências Humanas em consciências críticas e criativas, capazes de gerar respostas adequadas a problemas atuais e a situações novas. Dentre estes, destacam-se a extensão da cidadania, que implica o conhecimento, o uso e a produção histórica dos direitos e deveres do cidadão e o desenvolvimento da consciência cívica e social, que implica a consideração do outro em cada decisão e atitude de natureza pública ou particular.*

Mesmo com as orientações do PCN e ainda dentro do prazo de vigência do documento de 2001 a Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Concepções e

Orientações Curriculares para a Educação Básica Coordenação Geral de Ensino Médio publicou o “Programa: Ensino Médio Inovador - Documento Orientador” com objetivo de determinar novas diretrizes específicas para esse nível de ensino.

O parecer que aprovou a proposta afirma que, (2009, p. 3):

> *No item Ensino Médio no Brasil, o documento destaca que, após 12 anos da LDB, ainda não foi possível superar a dualidade histórica que tem prevalecido no Ensino Médio, tampouco garantir sua universalização, assim como a permanência e a aprendizagem significativa para a maioria de seus estudantes, pois não há um currículo capaz de promover uma aprendizagem que lhes faça sentido.*

Em 2008 a secretaria de educação do Estado de São Paulo distribuiu à todas as escolas de ensino básico a “Proposta Curricular” de cada uma das disciplinas. Essa ação gerou polêmica entre professores e diretores, pois anulou a autonomia de cada escola em decidir seu próprio currículo.

O texto de apresentação da Proposta Curricular vem assinado pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, Maria Helena Guimarães de Castro (SEE/SP, 2008a, s/p.), que justifica a necessidade de uma Proposta Curricular com a seguinte frase:

> *A criação da Lei de Diretrizes e Bases (LDB), que deu autonomia às escolas para que definissem seus próprios projetos pedagógicos, foi um passo importante. Ao longo do tempo, porém, essa tática descentralizada mostrou-se ineficiente.*

A leitura desses documentos nos levaram a concluir que há muito tempo temos a informação de que a educação tem uma papel primordial na sociedade e que o Ensino Médio é parte essencial dessa educação. Porém, ainda não foram atingidos níveis satisfatórios de abrangência, pois apenas metade dos jovens com idade entre 15 e 17 anos estão matriculados no Ensino Médio segundo pesquisa realizada pelo IPEA – Instituto de Pesquisas Econômicas Aplicadas em 15/12/2009 e nem níveis adequados de qualidade, como comprovam exames nacionais, dentre eles o ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio.

Acreditamos que uma das possíveis causas dessa realidade seja a falta de uma definição de formato para o Ensino Médio. Os conteúdos parecem sem sentido e muito superficiais, afastando os jovens que deveriam frequentar este nível de ensino.

Por outro lado, as escolas da rede particular estão cada vez mais preocupadas com o ingresso de seus estudantes ao nível superior, e assim assistimos a uma "vestibularização" dos conteúdos. Como as escolas têm autonomia, alteram o currículo de acordo com as exigências dos vestibulares mais concorridos.

2.3 Funções nos documentos oficiais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental apresentam o tema funções como conteúdo mas não o detalham. Por exemplo, (1998, p. 51)

> *Esse encaminhamento dado à Álgebra, a partir da generalização de padrões, bem como o estudo da variação de grandezas possibilita a exploração da noção de função nos terceiro e quarto ciclos. Entretanto, a abordagem formal desse conceito deverá ser objeto de estudo do ensino médio.*

Contudo, espera-se que os estudantes saibam escrever generalizações algebricamente, saibam ler informações de tabelas e gráficos, assim como construir tais representações, saibam identificar significados de letras e também tenham a noção de variável e de dependência.

Já no Ensino Médio o tema passa a ser largamente abordado, inicialmente para explorar qualitativamente relações entre grandezas. O estudo de funções deve seguir baseando-se principalmente em descrições de situações concretas e abordando também os vários tipos possíveis de representações, como tabelas, gráficos e diagramas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2000b, p. 43) afirmam que:

> *Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática.*

A preocupação com o tema funções é uma tendência mundial, como podemos comprovar pelo texto de João Pedro da Ponte (1992, p.1):

> *Há muito se concorda que o tema funções deve ser tomado como um conceito fundamental no Ensino Médio e as orientações curriculares mais recentes enfatizam a importância das funções (NCTM, 1989). Dependendo do ponto de vista matemático dominante, o conceito de*

> *função pode ser considerado de inúmeras maneiras diferentes, cada uma com diferentes implicações educacionais.*

As mais recentes orientações curriculares do National Council of Teachers of Mathematics (2009, s/p) estão divididas em grandes áreas da Matemática. São elas: Números e Operações; Álgebra; Geometria; Medição; Análise de Dados e Probabilidade; Resolução de Problemas; Raciocínio e Demonstrações; Comunicação; Conexões; e Representações. Cada uma dessas área está subdividida em tópicos que são fixos para todos os períodos escolares básicos (equivalente ao Ensino Básico brasileiro).

Na área Álgebra, as subdivisões são:

- Compreender padrões, relações e funções;
- Representar e analisar situações matemáticas e estruturas usando símbolos algébricos;
- Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;
- Analisar variações em diversos contextos.

Para cada uma dessas subdivisões são listadas as expectativas a serem alcançadas e que variam de acordo com os níveis de ensino. Sendo assim, desde os primeiros anos de escolaridade, os estudantes estão em contato com elementos relacionados ao tema funções.

É importante também destacar que o professor, ao ler as orientações já se torna ciente de que, ao estimular as crianças a “separar, classificar e ordenar objetos por tamanho, número e outras propriedades” tem como objetivo futuro a melhor compreensão de função.

Em 2008 o governo do Estado de São Paulo e a secretaria de Educação lançaram o programa “São Paulo faz escola”. O projeto iniciou-se com a distribuição de uma revista destinada aos professores da rede, denominada Revista do Professor, contendo orientações para a programação das cinco primeiras semanas do ano letivo. O material destinado aos estudantes, em forma de “jornal”, continha atividades para todas as disciplinas. Todo esse material deveria servir de revisão de conteúdos das séries anteriores.

O material destinado às 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental não apresentava diretamente o tema funções, mas tratava de vários conteúdos relacionados, que são importantes para o aprendizado futuro deste tópico, como por exemplo: proporcionalidade direta e inversa, interdependência entre quantidades de naturezas diferentes, variação quantitativa, observação e generalização de regularidades e uso de notação algébrica para representar relações entre variáveis.

Já o jornal da 1ª série do Ensino Médio, apesar de apresentar problemas onde eram solicitadas as expressões algébricas que descrevem situações funcionais, nem mesmo nas soluções sugeridas na Revista do Professor tais expressões são escritas com notação de função. As duas últimas aulas do material em questão eram dedicadas à leitura e interpretação de gráficos. Observamos ainda, em todas as aulas, uma grande utilização de expressões algébricas, mas sem mencionar o termo função.

O programa São Paulo faz escola também disponibiliza material conjunto para as 2ª e 3ª séries do Ensino Médio. Nele as cinco primeiras aulas eram destinadas à revisão de conceitos relacionados com o tema funções. Os títulos das aulas eram:

1 – Grandezas diretas e inversamente proporcionais: significado;

2 – Crescimento e decrescimento, proporcionalidade;

3 – Grandezas proporcionais e representações gráficas;

4 – Relacionando e analisando grandezas (tabelas);

5 – Análise e interpretação de gráficos.

As aulas 6, 7, 8 e 9 eram destinadas ao “Estudo da função afim”, as aulas 12 e 13 visavam “Gráficos de funções quadráticas” e 14 e 15 tratavam de “Parábola – simetria e contexto”.

Depois do período de revisão os professores das escolas da rede estadual de São Paulo receberam a “Proposta Curricular” e também o “Caderno do Professor”. A Proposta continha todos os objetivos e metas do programa específicos de cada disciplina. Os cadernos eram específicos para cada série, disciplina e bimestre. Eles sugeriam exercícios e problemas para serem abordados durante os bimestres seguintes.

Listamos a seguir os temas dessas proposta relativos às funções.

No Ensino Fundamental a primeira aparição do conteúdo de funções acontece no segundo bimestre da 8ª série. Os tópicos elencados no documento fornecido aos professores da rede pública são:

- Noções básicas sobre funções;
- A ideia de variação;
- Construção de tabelas e gráficos para representar funções de 1º e 2º graus.

Nos bimestres seguintes o tema desaparece, sendo retomado apenas no segundo bimestre da 1ª série do Ensino Médio, em que são abordados os seguintes tópicos:

- Relação entre duas grandezas;
- Proporcionalidade: direta, inversa, direta com o quadrado;
- Função do 1° grau;
- Função do 2° grau.

No terceiro bimestre temos o estudo de funções exponenciais e logarítmicas, abordando suas definições e propriedades e também um tópico para crescimento populacional.

A 2ª série do Ensino Médio trata de funções apenas no 1° bimestre, onde propõe o estudo das funções trigonométricas. No 3° bimestre da 3ª série é feita uma revisão de vários tópicos relacionados com o tema função, como: gráficos, propriedades, composição, inversa, etc.

Vemos que nessa proposta da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo o tema funções aparece de forma completa.

As atividades elaboradas nessa pesquisa de mestrado se diferem da proposta do Estado, principalmente, no aspecto de dependência das aulas expositivas. O “Caderno do aluno” apresenta apenas pequenos trechos de textos explicativos, em geral de curiosidade ou com algum exemplo de problema resolvido. O nossa proposta visa, dentre outros aspectos, a autonomia dos estudantes.

2.4 Funções em livros didáticos

Vejamos brevemente como os autores de livros didáticos do Brasil apresentam o tema funções.

Ensino Fundamental

Com a leitura de diversos livros didáticos do final do Ensino Fundamental notamos uma forma geral de abordagem do tema funções. Os autores pressupõem que o professor vai fazer uma aula expositiva e para isso o livro traz um texto inicial básico com os primeiros exemplos de funções assim como os termos relativos ao tema. Esses exemplos abordam situações do cotidiano e, através da observação de regularidades, a função é construída. Após isso os autores apresentam uma lista de exercícios. Em um livro típico, em seguida, o estudante tem contato com as funções afins.

Aqui vemos uma primeira diferença em relação à nossa proposta: nela o professor não faz aulas expositivas, mas apresenta folhas de atividades que são resolvidas em grupo pelos estudantes. Outra diferença é que não iniciamos diretamente com a construção de funções definidas por fórmulas, mas fazemos uma sequência didática que, a partir do conceito espontâneo de relação, leva o estudante a construir o conceito de função. Nossa proposta também não apresenta exercícios mas atividades que progridem, aos poucos, em nível de dificuldade.

A análise de livros do Ensino Fundamental, além fornecer ideias para elaboração de atividades da nossa proposta, também permitiu deduzir alguns tópicos que já seriam conhecidos dos estudantes no 1° ano do Ensino Médio.

Analisamos, mais a fundo, dois livros didáticos da 8ª série (9º ano) do Ensino Fundamental, nos quais encontramos propostas interessantes. Ambos apresentam uma grande quantidade de exemplos e problemas sobre funções com situações adequadas para o aprendizado dos estudantes.

Antes de introduzir o plano cartesiano, os livros apresentam situações que envolvem leitura de gráficos com atividades próxima dos estudantes como estudo de mapas e guias.

Nos dois livros encontramos problemas que exigem a construção de uma tabela a partir de uma expressão algébrica e vice-versa. Também oferecem problemas nos quais o estudante deve perceber padrões em sequências de desenhos e obter fórmulas ou preencher tabelas. Esse tipo de atividade é muito interessante, pois permite que o estudante se familiarize com as múltiplas representações de uma mesma situação.

O conceito de função é definido em apenas um dos livros, mas não acreditamos que a definição formal de função é de grande importância nesse momento da aprendizagem.

As funções afim e quadrática são tratadas nos dois livros. As situações onde se obtém como modelo matemático a função afim são interessantes e ao mesmo tempo simples. Portanto acreditamos que esse seja um conteúdo acessível aos estudantes da oitava séria do Ensino Fundamental.

Por outro lado, os enunciados para se obter funções quadráticas são mais elaborados e, geralmente, requerem uma maturidade maior. Mesmo assim, os livros apresentam todo o estudo desse tipo de funções, abordando coeficientes, raízes, gráficos, vértices, máximos e mínimos. A maior parte dos exercícios são muito teóricos e um dos poucos exemplos aplicados são sobre cálculos de áreas.

De maneira geral, a análise dos livros nos permite dizer que o primeiro contato com o tema funções e os assuntos anteriores estão bem distribuídos e variados mas, conforme já observamos, os autores se mantêm no método tradicional que exige menos autonomia do estudante na participação de seu próprio aprendizado.

Ensino Médio

Analisamos cinco livros didáticos da 1ª série do Ensino Médio. A maioria inicia com um capítulo sobre conjuntos numéricos. Em seguida vem o capítulo destinado ao estudo de funções, que sempre começa com situações interessantes que recaem em expressões algébricas. Depois começam as apresentações da definição e de notação.

As definições para o conceito de função encontradas foram:

1 – A **função** é um modo especial de relacionar grandezas. Neste tipo de relação, duas grandezas, **x** e **y**, se relacionam de tal forma que:

- **x** pode assumir qualquer valor em um conjunto **A** dado;
- a cada valor de **x** corresponde um único valor de **y** em um dado conjunto **B**;

- os valores que **y** assume dependem dos valores assumidos por **x**.

2 – Sejam *A* e *B* conjuntos não-vazios. Uma relação *f* de *A* em *B* é função se, e somente se, todo elemento de *A* estiver associado, por meio de *f*, a um único elemento de *B*.

3 – Dados dois conjuntos A e B não-vazios, toda relação que associa cada elemento de A a um, e somente um, elemento de B é uma **função de A em B**.

4 – Dados dois conjuntos não-vazios A e B, uma função de A em B é uma regra que diz como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$.

5 – Em matemática, se x e y são duas variáveis tais que para cada valor atribuído a x existe, em correspondência, um único valor para y, dizemos que y é uma **função** de x.

Nas três primeiras temos o uso da noção de relação para a definição do conceito. A quarta faz uso do termo “regra” e a última usa as palavras “variável” e “correspondência”.

A partir de então todos os livros passam a ser extremamente teóricos, com muitos exercícios e sem nenhuma aplicação. Em apenas um dos livros não é empregado o diagrama de Venn para dar suporte às definições de domínio, imagem e contra-domínio. Apenas um dos livros traz exemplos de não-função e acreditamos que essa seja uma das falhas dos textos analisados, já que, para a compreensão de um novo conceito, a mente humana necessita fazer comparações entre elementos que sejam e que não sejam aquela nova entidade.

A parte histórica do conceito é abordada ao final do capítulo de um dos livros de forma bastante sintética; em outro, ela é apresentada em um único parágrafo como abertura do capítulo e outros apresentam pequenas notas, com ilustrações ou fotos, onde há a descrição de alguma passagem histórica.

A seção destinada a função afim volta a apresentar circunstâncias reais e relevantes mas, em geral, nos exercícios, essas situações são deixadas para o final. Também como desfecho do capítulo são sugeridos ou indicados problemas de vestibulares. Tais questões, em grande parte das vezes, apresentam enunciados instigantes e motivadores.

Novamente observamos que as principais diferenças entre nossa proposta e a dos autores dos livros didáticos que analisamos é que ressaltamos o conceito espontâneo de relação antes de usá-lo como suporte para a definição do conceito de função, proporcionamos uma participação mais ativa dos estudantes em seu aprendizado e propomos o trabalho em grupo em vez de aulas expositivas.

2.5 Funções em artigos, teses e dissertações

A organização da nossa sequência didática exigiu que fizéssemos uma busca de outras pesquisas correlatas. Encontramos trabalhos acadêmicos sobre funções que abordavam o tema de diversas formas. Alguns focavam o ensino, outros os aspectos históricos, outros ainda a formação de professores. Vamos destacar aqui alguns desses trabalhos. A dissertação tem um esquema bem parecido com a nossa e por isso a comentamos. Em seguida analisamos um livro e um artigo que utilizamos como fonte de informação para a elaboração de nossas folhas de atividades. Estudamos também uma tese de doutorado que trata da problemática da linguagem matemática no campo das funções.

A dissertação de Nanci Oliveira, apresentada à Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (OLIVEIRA, 1997), sugere uma sequência didática para o ensino-aprendizagem do conceito de função. Nossos trabalhos percorrem trajetórias bem parecidas: concepção das atividades, análise a priori, aplicação e análise a posteriori. Porém os estudantes que realizaram as atividades dessa pesquisadora já cursavam o primeiro ano de engenharia em uma universidade particular. Outra diferença está no fato de que a sequência construída por Nanci se constitui de problemas, sem textos explicativos e definições. Podemos notar a preocupação da autora com a variação do tipo de representação pois suas atividades solicitam tabelas, gráficos e fórmulas . Nanci concluiu que sua sequência ajudou na concepção do conceito de função dos estudantes. Os principais avanços que observou foram que o trabalho em dupla possibilitou a discussão e a participação na elaboração do conceito, houve a compreensão que um gráfico ou uma tabela podem representar uma função (independente da expressão algébrica), que os estudantes conseguiram realizar as mudanças de registro (fórmula-tabela-gráfico), desenharam gráficos de funções, tiveram contato com exemplos de não-funções, identificaram domínio e contra-domínio e analisaram situações de representação gráfica onde se deveria ou não ligar os pontos.

O material produzido, em 1996, pelo Projeto Fundão, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), com o título "Construindo o conceito de função no 1º grau" (TINOCO, 1996, p.5), é um pequeno livro, de 64 páginas, elaborado por um grupo cujos principais objetivos são:

> *Estudar o processo de aquisição do conceito de função por alunos a partir da 5ª série do 1° grau, sem acesso a computadores; despertar nos professores de 1° e 2° graus a consciência de que, ao longo do trabalho com os tópicos usualmente incluídos nos programas, é possível desenvolver as ideias essenciais à construção do conceito de função; fornecer sugestões de atividades que favoreçam essa construção.*

A obra está dividida em cinco capítulos de acordo com as noções discutidas em cada um deles (todas relacionadas com o conceito de função). O último capítulo trata da formalização da definição do conceito. Todas as atividades propostas são contextualizadas e apresentam observações para o professor sobre sua aplicação. São situações de leitura, interpretação e construção de gráficos e tabelas, obtenção de expressões algébricas para circunstâncias simples do cotidiano, apresentação do plano cartesiano, etc. O material é uma ótima fonte de atividades extras para o professor usar em sala de aula mas ele teria que digitar os enunciados pois existem observações mescladas com o texto das atividades.

O artigo de Suzana L. Cândido, publicado na revista Educação Matemática de junho de 2000, relata uma experiência com professores de ciências que faziam um curso de complementação em Matemática. De acordo com seu relato os professores tinham inicialmente dificuldades referentes às noções básicas de função. A pesquisadora aplicou uma série de atividades abordando os conceitos básicos sobre funções. Essas atividades apresentavam situações para percepção de regularidades e generalizações, usando sequências numéricas e modelos geométricos. Também foram tratadas grandezas discretas e contínuas, funções polinomiais do primeiro e do segundo graus e função exponencial. Em todas as etapas, a pesquisadora menciona várias dificuldades, seja na leitura e interpretação de gráficos, seja na obtenção de expressão algébrica que descreve a função. Lendo as experiências relatadas pela autora nesse artigo constatamos a necessidade de uma formação mais adequada dos futuros professores de Matemática.

A tese de Zuffi, 1999 teve como motivação a dificuldade observada em estudantes universitários (muitas vezes futuros professores) em lidar com a simbologia e a lógica que compõem a linguagem matemática. Foi escolhido o tema funções para pesquisar como os professores do Ensino Médio usam essa linguagem ao expressar suas próprias concepções sobre o assunto e ao tratá-lo com seus estudantes. São eles a principal influência para que os estudantes aprendam a se comunicar em Matemática,

Com a perspectiva de que o bom uso da linguagem (matemática em especial) está no eixo central das preocupações dos educadores e que o professor é mediador dos processos de aquisição e internalização de significados (Vygotsky), foram aplicados questionários aos professores do Ensino Médio, para obter suas concepções pessoais da linguagem matemática utilizada no conteúdo funções. Além disso fez entrevistas e acompanhou as aulas desses professores.

Para fazer a análise de todo o material recolhido ela criou 17 “unidades de significado” de acordo com as concepções observadas nos dados coletados, a partir daí, estabeleceu categorias de análise.

Uma das conclusões da pesquisadora é que a linguagem matemática usada em sala de aula é estática e acabada, características bem distintas do que se espera de linguagens largamente utilizadas e que têm utilidade e significado para seus usuários, isto é, as últimas (muito usadas) são em geral, construídas e reconstruídas socialmente. Além disso, observou também que as definições formais de função são secundárias, apresentadas apenas por exigências externas. Todo o conceito é tratado como “mandam” os livros didáticos e a própria comunidade escolar.

A partir desses e de vários outros trabalhos consultados verificamos e contatamos algumas dificuldades que estão sempre presentes, independente da idade e até do nível de escolaridade, na maioria dos sujeitos quando se estuda o conceito de função. O uso de linguagem algébrica para expressar regularidades e generalizações é a principal delas e podemos citar também a dificuldade de identificar os conjuntos numéricos que fazem sentido no contexto do problema apresentado. Sendo assim, na construção de nossa sequência didática, criamos situações que levam os estudantes a refletir sobre esses e vários outros aspectos do conceito de função.

CAPÍTULO 3

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

3.1 Introdução

No terceiro capítulo dessa dissertação apresentamos, inicialmente, um panorama geral dos pressupostos epistemológicos e pedagógicos que adotamos no trabalho. Depois fazemos comentários específicos sobre cada um deles. Começamos pela metodologia “Ensino da Matemática através de Problemas”, fortemente defendida por George Polya e que tem como foco principal proporcionar ao estudante a oportunidade de aprender a pensar. Seguimos então para uma breve explanação sobre a Engenharia Didática, já que o nosso produto é uma sequência didática, formato que escolhemos para agrupar atividades e textos explicativos de forma sistemática e construir sua validação.

Salientamos também neste capítulo que, para construir o conceito matemático de função, partimos do conceito espontâneo de relação.

No final do capítulo descrevemos o que são as folhas de atividades, explicando seu significado, como devem ser construídas e o que se espera alcançar com sua aplicação.

3.2 Pressupostos epistemológicos e pedagógicos

Até o presente momento desse trabalho discutimos o conceito matemático de função em seus aspectos históricos e sobre sua formulação rigorosa. Expusemos os documentos legais que regem o nível médio de ensino no Brasil e como os parâmetros oficiais a serem seguidos para confecção dos currículos escolares sugerem que deve ser abordado o conceito de função. Além disso analisamos as formas como é tratado o conceito de função em livros didáticos atuais e em pesquisas recentes.

Agora pretendemos justificar as escolhas metodológicas tomadas para a criação desse material que visa auxiliar os estudantes na aprendizagem significativa do conceito de função.

O ponto de partida para a elaboração desse material foi a metodologia “Ensino de Matemática através de Problemas”, pois acreditamos que os benefícios que este tipo de abordagem promove são imprescindíveis para uma aprendizagem significativa. Além disso, um aspecto importante de nossa proposta é construir um material que possa ser utilizado pelo professor em aulas que não são expositivas. Para isso convém utilizar problemas ou atividades seguindo às orientações dessa metodologia.

Tínhamos o desafio de que apenas um problema não seria capaz de motivar o desenvolvimento de um conceito tão amplo e abrangente, como é o caso de funções. Portanto optamos por criar ou selecionar várias atividades e elencá-las de forma a montar uma sequência didática. A elaboração desse plano de ensino é apoiada pela Engenharia Didática. Essa teoria sustenta que a organização de um conteúdo a ser ensinado deve envolver uma análise da situação do objeto de estudo, a construção de uma proposta na forma de uma sequência atividades didáticas, sua aplicação e uma análise dos resultados.

As circunstâncias do momento profissional da pesquisadora não permitiram a elaboração de uma sequência didática que contemplasse todos os conteúdos de funções, visto que a pesquisadora aplicou as folhas de atividades em classes da 1ª série do Ensino Médio de outros colegas professores. Sendo assim, optamos por montar uma sequência didática apenas para o conceito de função e alguns aspectos de suas representações.

Observamos que função é um conceito científico, que não é compreendido sem uma linguagem específica. Para iniciar a construção desse conceito, começamos com alguns noções espontâneas, que são geradas pelo indivíduo através de observações ou de interações sociais. Assim, admitimos que as ideias de conjunto, relação, variação e dependência sejam conceitos espontâneos, conforme discutem Zuffi & Pacca (2002). Dessa forma, ao construir nossa sequência didática começamos com uma atividade que usa conceito espontâneo de relação para dar início aos trabalhos. Com isso optamos por uma abordagem que não segue o desenvolvimento histórico do conceito. Essa aproximação exigiria, no mínimo, o trabalho com observações de fenômenos naturais, a execução de experimentos e a obtenção de medidas. Essa prática demandaria muito tempo, espaços adequados e materiais específicos. Não acreditamos que as escolas, em geral, estejam preparadas para esse tipo de dinâmica de ensino.

Em nossa propostas o professor não dá aulas expositivas. Em vez disso, organiza a classe em grupos e apresenta Folhas de Atividades. São folhas formadas por atividades (problemas) e textos explicativos. Mesclando esses dois ingredientes pretendemos dar mais autonomia aos estudantes que podem ler, interpretar, discutir com seu grupo e assim realizar, sem muita interferência do professor, as atividades propostas. Com esse objetivo em mente formulamos a sequência didática de maneira que houvesse um aumento gradual do nível de abstração e da dificuldade.

Passamos agora a descrever mais detalhadamente esses pressupostos assumidos em nosso trabalho.

3.3 Ensino de matemática através de problemas

Os PCN's do Ensino Fundamental (1998, p.8) trazem como um de seus objetivos que: *“ … os alunos sejam capazes de questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los ...”* e ainda apresenta um tópico totalmente dedicado a discussão da resolução de problemas no ensino e na aprendizado de Matemática. Nesse tópico chamam a atenção sobre os bons usos dessa metodologia e ressaltam seus princípios.

Nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006, p.81) mantêm o Ensino da Matemática através de Problemas como metodologia ideal, sugerindo que: *“… a aprendizagem de um novo conceito dar-se-ia pela apresentação de uma situação-problema ao aluno...”.*

Um dos mais ferrenhos defensores dessa metodologia foi o húngaro George Polya (1887-1985), um matemático que se preocupou também com as questões do ensino. Ele dizia que o ensino não é uma ciência exata e se aproxima mais de uma manifestação artística, já que depende dos personagens envolvidos e do local onde irá ocorrer (POLYA, 1985).

Em seu artigo “O ensino por meio de problemas”, Polya (1985) afirma que não existe um melhor método e que será o melhor sempre. Para se praticar um bom ensino é preciso considerar as necessidades locais da comunidade e então determinar os objetivos, os assuntos a serem ensinados e os métodos a serem utilizados.

Especificamente no ensino da Matemática, muitos objetivos têm sido propostos, mas se condensarmos todos eles, podemos considerar apenas que o foco principal do ensino é fazer o estudante pensar. Esse “pensar” deveria, segundo Polya (1985, 2004), ser próximo do “pensamento matemático” em termos científicos, para isso, devemos observar quais as principais atividades de um matemático profissional. As mais aparentes são descobrir demonstrações rigorosas e construir sistemas axiomáticos. Porém, existem outras, não menos importantes, que são reconhecer e extrair conceitos matemáticos de uma situação concreta, fazer "adivinhações", prever resultados e linhas de demonstração, fazer generalizações a partir de casos observados, ter um raciocínio indutivo e fazer uma argumentação por analogia.

Destacamos que: *"para aprender eficazmente, o aluno deve descobrir, por si só, uma parte tão grande da matéria ensinada quanto possível, dadas as circunstâncias".* (POLYA, 1980b, p.12)

Esse é um dos elementos do "princípio da aprendizagem ativa", no qual os estudantes devem descobrir sozinhos o máximo que for possível. Para proporcionar essa autonomia aos estudantes devemos ter em mente que os primeiros passos não podem ser muito elaborados. Isto é, adivinhar é mais simples que demonstrar e resolver problemas concretos é mais natural que criar estruturas gerais.

Como estamos constantemente envolvidos com resolução de problemas em nossas decisões diárias, sendo que parte deles recaem em questões matemáticas simples, esses problemas podem ser os primeiros enfrentados pelos estudantes de forma natural porém, abstrata.

Já sabemos que existem vários tipos de enunciados que exigem mais ou menos criatividade e raciocínio dos estudantes. Temos exercícios, problemas, questões, perguntas, atividades e vários outros nomes para designar os enunciados, dependendo de suas características. Espera-se que, ao tentar obter as respostas para aquele problema, o estudante atinja algum nível de desenvolvimento intelectual. São várias definições para o termo problema. Neste trabalho vamos usar a distinção sugerida por Polya (2004, p.171). Ele afirma que existem os problemas rotineiros e os que não o são. Nessa primeira classe se enquadram os problemas que requerem, para sua solução, apenas a aplicação de uma regra simples ou se resume a uma verificação de conhecimento de vocabulário específico. Os problemas que não são de rotina demandam alguma dose de criação e de originalidade e esses são os únicos que têm o potencial de contribuir para o desenvolvimento intelectual do estudante.

Outro aspecto de destaque a ser considerado ao usar a metodologia Resolução de Problemas é a escolha de problemas interessantes. O primeiro passo para se resolver um problema é querer saber a resposta. Portanto os enunciados devem considerar os interesses dos sujeitos e a realidade do local onde ele será aplicado.

O papel do professor durante as aulas é de mediação entre os estudantes e o que deve ser aprendido, partindo do pressuposto de que quanto maior a quantidade de conteúdo que o sujeito descobrir sozinho melhor para sua aprendizagem. A mediação do professor deve ser bastante ponderada. Enquanto resolve problemas é comum o estudante ter dúvidas, e Polya (2004, p. 1) afirma que a ajuda deve ser suficiente para que ele avance na resolução, mas sem que a sensação de que ele solucionou o problema seja perdida. Para isso as sugestões dadas pelo professor devem ser do tipo que o estudante teria pensado sozinho. As etapas que apresentamos a seguir servem, também, como sugestões de intervenções apropriadas para o professor utilizar durante as aulas.

Em seu livro, Polya (2004) exibe, com detalhes, as quatro etapas a serem percorridas para resolver um problema, segundo suas concepções. A seguir faremos uma breve descrição dessas etapas, com a livre tradução da autora.

1. Compreensão do problema

   O que queremos saber? Quais são as informações fornecidas? Quais são as condições impostas? Desenhe figuras. Reescreva o problema usando notação adequada.

2. Elaboração de um plano

   Você já viu o mesmo problema com alguma pequena diferença? Você conhece algum problema similar? Tente pensar em um problema com as mesmas variáveis, ou pelo menos parecidas. Você encontrou esse problema análogo resolvido, você poderia usá-lo? Você poderia usar os resultados e/ou os métodos dele? É possível introduzir elementos auxiliares para que se possa usar o problema antigo na resolução do novo? Você pode resolver parte do problema? Você usou todos os dados? Você pode encontrar mais alguma informação que seja relevante para a solução? Você usou todas as condições impostas? Você considerou todos os conceitos envolvidos no problema?

3. Efetivação do plano

   Execute a estratégia estabelecida para solucionar o problema, confira cada passagem. Você pode ver claramente que cada passagem está correta? Você pode provar que estão corretas?

4. Revisão

   Verificação da solução obtida. Você pode conferir todos os resultados? Você pode verificar a argumentação? Você pode obter o resultado de forma diferente? Você poderia usar os resultados, ou o método, para algum outro problema?

Concordamos com Polya (1985, p.16) quando ele afirma que, seguindo os questionamentos destacados anteriormente nas etapas da resolução de problemas o estudante *“Terá adquirido, desse modo, o hábito do pensamento metódico que é o maior benefício a ser tirado das aulas de Matemática por grande parte dos alunos que nunca utilizará a Matemática em sua profissão”.*

Baseados nas observações de Polya optamos pela aplicação de Folhas de Atividades como estratégia para disponibilizar problemas não rotineiros e que fossem atrativos para os estudantes. Julgamos que o formato (textos explicativos e atividades) possibilitava a autonomia dos grupos em relação ao professor e problemas bem selecionados (ou elaborados) gerariam o interesse necessário para a busca da solução.

3.4 Engenharia didática

A expressão “Engenharia Didática” surgiu no início dos anos 80, na França, e, como explica Michèle Artigue (1988, p 283),

> *… para rotular a forma de trabalho didático que é comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apóia sobre conhecimentos científicos, mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar sobre objetos bem mais complexos que os objetos depurados da ciência e, portanto, a enfrentar praticamente,*

> *com todos os meios que dispõe, problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta.*

A Engenharia Didática pode ser usada como estrutura para a concepção de propostas de ensino e, também, como metodologia de pesquisas experimentais. Os dois focos acima citados estão relacionados, por seguirem as mesmas fases de concepção. No nosso caso iremos considerá-la mais fortemente no segundo. Quanto à estrutura da nossa proposta, utilizamos nossa experiência pessoal no ensino de funções, assim como as características das chamadas “folhas de atividades” que comentamos na seção 3.6. Mesmo que as etapas sugeridas na Engenharia Didática possam ser razoavelmente detectadas em nosso processo de elaboração preferimos adotá-la como método de pesquisa.

Essa metodologia tem como principal objetivo a análise de situações didáticas, constituindo assim uma pesquisa empírica, isto é, baseada nos dados extraídos da realidade. Além disso, qualifica-se por ser uma pesquisa qualitativa. As principais características dessa metodologia são, segundo Artigue (1988), a necessidade de uma análise a priori ao invés de, por exemplo, grupos de controle e a validação com base na comparação dos resultados de forma interna.

O processo experimental dessa metodologia de pesquisa inclui quatro fases. Apresentamos aqui um resumo delas já com pequenas modificações da concepção original de Michèle Artigue, citada em Machado (1999), para que fiquem no formato que usamos nesse trabalho:

1ª) Análises prévias:

A primeira fase, de análises prévias, exige a investigação do panorama do quadro didático geral, dos conhecimentos didáticos referentes ao assunto em questão e ainda algumas outras possíveis análises que variam de acordo com a pesquisa realizada e que são citadas por Almouloud & Coutinho (2008):

- análise epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino;
- análise do ensino usual e seus efeitos (livros didáticos, por exemplo);
- análise das concepções dos alunos, das dificuldades e dos obstáculos que

marcam sua evolução;

- estudo das condições e fatores de que depende a construção didática efetiva;
- consideração dos objetivos específicos da pesquisa;
- estudo da transposição didática do saber considerando o sistema educativo no qual se insere o trabalho.

Essas etapas devem sempre ser retomadas e aprofundadas ao longo da pesquisa.

2ª) Construção e análise das situações didáticas:

Esse é o momento de determinar as variáveis de comando ou variáveis didáticas que delimitaram a região de atuação da pesquisa, ou seja, as mudanças que serão possíveis e também desejáveis nas situação de aprendizagem. Tais variáveis devem ser investigadas em três dimensões: epistemológica, cognitiva e didática.

O objetivo dessa análise é determinar de que maneira as escolhas tomadas (as variáveis selecionadas como pertinentes) possibilitam o controle do comportamento dos estudantes e, também, como exprimir o significado desses comportamentos. Para isso são determinadas as hipóteses que pretende-se validar com a análise a posteriori.

3ª) Aplicação de uma sequência didática:

Na fase de aplicação deve-se respeitar o máximo possível as escolhas e as resoluções feitas na análise a priori para que comparação com as hipóteses iniciais seja fiel. Mesmo neste momento podem ocorrer alterações e correções da sequência didática quando qualquer acontecimento, durante a experimentação, identifique essa necessidade. Caso isso ocorra, será preciso também uma complementação da análise a priori.

4ª) Análise a posteriori e a avaliação:

A última fase sugerida pela Engenharia Didática é a análise a posteriori que deve ter como suporte todos os dados colhidos durante a fase anterior, incluindo as produções dos estudantes e as possíveis informações adicionais como entrevistas e questionários.

O objetivo agora é confrontar as hipóteses e as expectativas apontadas a priori com os resultados obtidos a partir da análise dos dados. Assim, validaremos ou não nossas suposições e refletiremos sobre possíveis alterações que acarretaram uma melhoria do material. Além disso devemos considerar a viabilidade de reprodução da situação didática em outros ambientes.

Explicitaremos as variáveis de comando selecionadas como norteadoras do material que construímos. Elas transmitem as questões que merecem destaque no ensino e na aprendizagem do conceito de função e que, em geral, não são adequadamente abordadas em materiais convencionais usados nas escolas. As variáveis são:

- Ter o conceito espontâneo de relação como ponto de partida para a construção do conceito científico de função;
- Familiarizar os estudantes com a linguagem específica necessária para o estudo de funções (notação);
- Apresentar situação para a variação entre algumas representações de funções;
- Utilizar a metodologia de ensino através de problemas;
- Montar folhas de atividades com problemas e textos para que os estudantes, em grupo, busquem soluções com pouca interferência do professor.

Expomos aqui as hipóteses/questões que levantamos após as duas primeiras fases sugeridas pela Engenharia Didática.

- Nossas Folhas de Atividades facilitarão a participação dos estudantes no seu próprio processo de aprendizagem?
- Nossas Folhas de Atividades facilitarão a aprendizagem do conceito matemático de função?
- Nossas Folhas de Atividades facilitarão a compreensão da linguagem científica básica necessária para o estudo das funções?
- Nossas Folhas de Atividades facilitarão a compreensão de algumas das várias formas de representação de uma função?
- Nossas Folhas de Atividades facilitarão a compreensão da passagem do

discreto para o contínuo?

As duas fases finais da Engenharia Didática serão contempladas no Capítulo 6 desse trabalho. Abordaremos a seguir a linha conceitual que seguimos para preparar os estudantes para a compreensão do conceito de função

3.5 Do conceito espontâneo para o científico

O principal objetivo do presente trabalho é facilitar o ensino e a aprendizagem do conceito matemático de função. Zuffi & Pacca (2002) apontam que a formação de um novo conceito, em geral, leva a criação de uma linguagem específica.

Novas linguagens são criadas para explicar e descrever fenômenos observados, porém, como a observação pode ser realizada por sujeitos desprovidos de linguagem formal para descrevê-lo, afirmamos que podem surgir concepções espontâneas acerca de tal fenômeno.

No nosso campo de pesquisa, a Matemática, muitas linguagens já foram criadas, contudo, muitas vezes a motivação maior para essa criação não foi uma situação observável. Dentro dessa ciência é possível criar, elaborar e resolver problemas, por exemplo, inventar um sistema monetário. Portanto concepções espontâneas de conceitos matemáticos são raras, dada que a maioria das situações são completamente abstratas.

O conceito específico de função teve fenômenos observáveis como motivação inicial, como já comentamos no Capítulo 1 deste texto, porém, a evolução sofrida por esse conceito o tornou mais geral que qualquer uma de suas aplicações como modelo. Com funções modelamos problemas do cotidiano e resolvemos questões dentro da própria Matemática que não têm nenhum caráter aplicado.

As ideias de variação e de associação entre grandezas são passíveis de concepções espontâneas, mas concordamos com Zuffi & Pacca (2002), quando elas afirmam que essas noções não são suficientes para caracterizar o conceito de função. Assim, acreditamos que não é possível que os estudantes tenham uma concepção espontânea do conceito matemático de função. E essa pode constar como uma das razões para a dificuldade observada em sua compreensão.

Segundo Vygotsky, citado em Zuffi (1999), existe uma diferenciação entre os conceitos espontâneos e os científicos de tal forma que, os conceitos científicos não permitem a formulação de concepções sem conhecimento culturalmente elaborado. Este tipo de conceito só pode ser analisado quando o sujeito conhece a linguagem matemática para expressá-lo.

A linguagem matemática é formada por um sistema de signos relacionados com um conjunto de regras de manipulação desses signos. O conhecimento adquirido nas escolas, por intermédio principalmente dos professores e dos livros didáticos, é o que permitirá a aprendizagem dessa linguagem e enfim a compreensão do conceito de função.

Para proceder essa aprendizagem é preciso a produção de significado em cima do que se quer transmitir. Temos que lembrar ainda que essa absorção de ideias não é passiva (ZUFFI; PACCA, 2002) e sim um processo de transformação e síntese e o aprendizado e o desenvolvimento do sujeito são processos socioculturais.

Portando, esperamos construir significados para a linguagem matemática que expressa o conceito de função para que os estudantes possam compreender por completo esse conteúdo.

A opção de abordagem que tomamos neste trabalho foi de considerar "relação" como um conceito espontâneo, ou seja, para o qual o sujeito é capaz de formular diversos significados. Desde muito cedo, usando nossa capacidade cognitiva e experimentando diversas situações fenomenológicas e sociais, aprendemos que cada pessoa tem um nome, que cada filho tem uma mãe e também que podemos associar símbolos à quantidade de objetos de um conjunto (quando aprendemos a contar). Assim nasce a concepção espontânea de relação. De maneira análoga, desenvolvemos a ideia de conjunto. Usaremos como alicerce essas duas noções espontâneas para formularmos nossa definição de função.

Outra opção também aceita e muito usada por autores de livros didáticos consiste em tomar o conceito de conjunto como espontâneo, mas não o de relação.

Com isso, define-se relação como um subconjunto de um produto cartesiano para então, depois, escrever a definição de função.

Nas folhas de atividades que estamos propondo, os problemas foram elaborados de forma que o conceito de relação é tomado como conhecimento prévio dos estudantes. O primeiro problema da sequência expõe a relação entre membros de uma mesma família e a representação inicialmente utilizada é uma árvore genealógica, na qual a ideia de relação surge como “relação de parentesco”. A noção de relação que queremos aproveitar não precisa ser necessariamente matemática.

Portanto, a partir dos conceitos espontâneos envolvidos em problemas e atividades cada vez mais elaboradas em termos de conteúdo, esperamos que os estudantes compreendam uma nova linguagem que será usada para lidar com o conceito científico de função.

3.6 Folhas de atividades: o processo de produção

O primeiro passo para prepararmos as Folhas de Atividades foi a escolha dos temas que pretendíamos tratar durante a semana de aplicação. Como o tempo seria muito curto e gostaríamos de falar sobre o conceito matemático de função, isto é, o início do tema, optamos por não avançar no conteúdo e nos mantermos em tópicos prévios ao ensino de funções afins. Escolhemos então tratar das noções de relação, variação e dependência para, em seguida, introduzir o conceito de função. Depois disso focamos nas situações onde era preciso perceber padrões e buscar generalizações e assim, nos concentrar nas possíveis representações: tabelas, gráficos e expressões algébricas e a obtenção de uma a partir de outra.

Algumas das atividades foram criadas, outras foram retiradas de textos já publicados e adaptadas de acordo com a nossa necessidade. Nossas principais fontes foram os livros didáticos analisados, alguns “Activities” (sugestões de sequência de problemas sobre um mesmo conteúdo) publicados no periódico norte americano Mathematics Teacher (NCTM, 1987, 1989) e o material do Projeto Fundão (TINOCO, 1996) já mencionado no Capítulo 2.

A principal característica das folhas é a existência de textos explicativos mesclados com as atividades. O propósito dessa disposição é obter uma maior independência dos estudantes em relação ao professor. Esperamos torná-los assim participantes ativos no processo de aprendizagem, e sobretudo, que eles sejam conscientes desse fato. Sugerimos a aplicação das atividades em pequenos grupos, assim os estudantes têm a possibilidade de discutir tanto as explicações como os problemas, enfatizando ainda mais a autonomia que desejamos que eles criem.

O formato com que montamos as atividades permite que sejam tratadas tanto como questões conceituais quantos técnicas da matemática. O fato de complementar as atividades com textos fazem com que a estrutura suporte o enunciado de definições, bem como a apresentação de exemplos de utilização de uma determinada técnica. Assim criamos sequências construtivas e completas de qualquer tema. Essa sequência pode então seguir o mecanismo psicológico para o desenvolvimento dos conceitos e técnicas que pretendemos tratar, iniciando com perguntas simples que, progressivamente, tornam-se mais complexas e elaboradas, exigindo, a cada vez, o conhecimento adquirido com as atividades e textos anteriores.

Ao todo, montamos três blocos de Folhas de Atividades, divididos por temas. São eles: “Relações e funções”, “Fórmulas e funções” e “Gráficos e funções”. Apresentaremos mais detalhadamente as atividades de cada uma das folhas no capítulo seguinte.

Esperamos que este capítulo tenha demonstrado o embasamento teórico das práticas que realizamos nessa pesquisa. A Engenharia Didática justifica as folhas de atividades, a Resolução de Problemas ampara os tipos de questões (atividades) inseridos nas folhas e as concepções espontâneas e científicas dos conceitos explicam os conteúdos de cada problema. Sendo assim, nossa pesquisa encontra-se inserida em aspectos atuais das produções acadêmicas em Educação Matemática.

CAPÍTULO 4

PREPARAÇÃO DAS FOLHAS DE ATIVIDADES

4.1 Introdução

Iniciamos o presente capítulo com uma justificativa da escolha do tema deste trabalho. Em seguida descrevemos as Folhas de Atividades elaboradas para aplicação em sala de aula nos seus aspectos gerais, dando ênfase aos conceitos.

Apresentamos as Folhas de Atividades por trechos, na mesma ordem em que aparecem nas folhas entregues aos estudantes. Porém, para que a análise seja mais detalhada, mesclamos trechos com comentários explicativos. É possível visualizar as folhas de atividades completas no Apêndice A deste trabalho. As soluções esperadas dessas atividades podem ser consultadas no Apêndice B.

Nos comentários de cada trecho explicamos os conteúdos matemáticos abordados bem como as intenções didáticas ali implícitas. Em cada caso justificamos o formato escolhido na nossa apresentação. Estaremos ainda, sempre atentos para explicar a concatenação entre um trecho e o subsequente.

4.2 Construção da proposta: aspectos gerais

Minha experiência profissional, como professora e plantonista do Ensino Médio, fez com que eu pudesse ver de perto dúvidas e dificuldades dos estudantes desse nível de ensino. Um tema que sempre gerava perguntas, em qualquer série, era o de funções, principalmente para estudantes do 1º ano do Ensino Médio, que já haviam visto o conceito e estavam apenas revisando o que foi aprendido. Eles procuravam o plantão com muitas dúvidas.

Grande parte das perguntas eram dúvidas nos enunciados de exercícios ou ainda sobre a teoria apresentada pelos professores. Alguns exercícios traziam a fórmula de uma função e pediam propriedades, como calcular a função para determinados valores. Outros problemas versavam sobre representação, como obter o gráfico de uma função dada e classificar a função. Havia problemas nos quais os estudantes deveriam interpretar o enunciado e perceber que funções descreviam a situação, e como usar a função para prever situações hipotéticas.

Percebi que os estudantes enfrentavam várias dificuldades. Além de não reterem o vocabulário utilizado pelo professor, como variável dependente e independente, domínio, imagem etc, havia uma grande confusão com a notação. Um episódio que despertou minha atenção foi um estudante perguntar se f(4)= 4f. A partir dessas experiências escolhi funções como tema de estudo dessa dissertação de mestrado.

Ficou claro para mim que, para melhorar o ensino de função, deveria trabalhar profundamente seu conceito, e não apenas abordar técnicas, notação e representações. Propus-me dessa forma construir uma sequência didática abordando todos esses itens mas com especial atenção para a construção do conceito.

No momento da pesquisa para esta dissertação, não dava aulas para estudantes do primeiro ano do Ensino Médio. Conversei com duas professoras e elas concordaram em ceder suas classes para que eu pudesse aplicar minhas atividades. A professora P., da Cooperativa de Araraquara, concedeu-me duas salas com quatro aulas em cada. Já na escola Estadual, a professora F. liberou cinco aulas em duas classes.

Dividi o conteúdo em: Relações e funções, Fórmulas e funções e Gráficos e funções. Os assuntos contemplados começaram com relações e estenderam-se até a representação gráfica de funções lineares, mas sem mencionar classificação de funções.

A aplicação das atividades aconteceu em quatro classes do Ensino Médio, mas gostaríamos de enfatizar que essa é apenas uma das opções para o uso do material aqui apresentado. Os estudantes da série final do Ensino Fundamental poderiam ter o primeiro contato com o conceito de função através dessas atividades. Acreditamos que a introdução desse conteúdo, usando a aproximação aqui sugerida, será sólida e propiciará uma boa base para a construção de todos os conceito envolvidos com esse conteúdo.

Já era esperado que os estudantes tivessem conhecimento prévio dos conceitos de incógnita e de variável e que também conhecessem o sistema de coordenadas cartesianas. As professoras confirmaram que esses pré-requisitos eram minimamente satisfeitos.

4.3 Conceitos e técnicas abordados

O conceito de função foi subdividido em seus principais componentes: relações entre elementos de conjuntos, relações entre grandezas, relação unívoca, formas de representação incluindo notação, regras descritivas, fórmulas, tabelas e gráficos.

Os problemas sugeridos mesclavam os componentes de várias maneiras a fim de propiciar uma aprendizagem significativa.

A seguir um resumo de cada uma das Folhas de Atividades.

FOLHAS DE ATIVIDADES 1 – Famílias, relações e funções

A primeira folha apresenta uma atividade para o estudo do conceito de relação usando árvores genealógicas. Aproveitamos para introduzir uma notação para descrever relações. Abordamos ainda o conceito de composição de relações e de relação inversa.

A segunda folha traz a definição de função e em seguida são sugeridas atividades com relações entre conjuntos numéricos para o estudante distinguir as que são funções. Em uma das atividades o estudante é convidado a construir uma fórmula a partir da análise de regularidades.

A última folha deste conjunto dá continuidade às atividades anteriores (função com descrição e com fórmula) e apresenta a definição de domínio,contra-domínio e imagem de uma função. Retomamos a relação inicial (da árvore genealógica) para que o estudante verifique que ela não representa uma função.

FOLHAS DE ATIVIDADES 2 – Fórmulas para função

As duas primeiras atividades dessa etapa exigem a análise de um enunciado para que se complete uma tabela e, assim, seja possível perceber regularidades que permitirão determinar as fórmulas para as funções.

As três últimas atividades são baseadas na interpretação de figuras. Os desenhos representam os primeiros termos de uma sequência, cuja regularidade pode ser descrita por uma função.

Em cada atividade sugerimos também o estudo de algumas propriedades, bem como o uso de uma notação específica.

FOLHAS DE ATIVIDADES 3 – Gráficos e funções

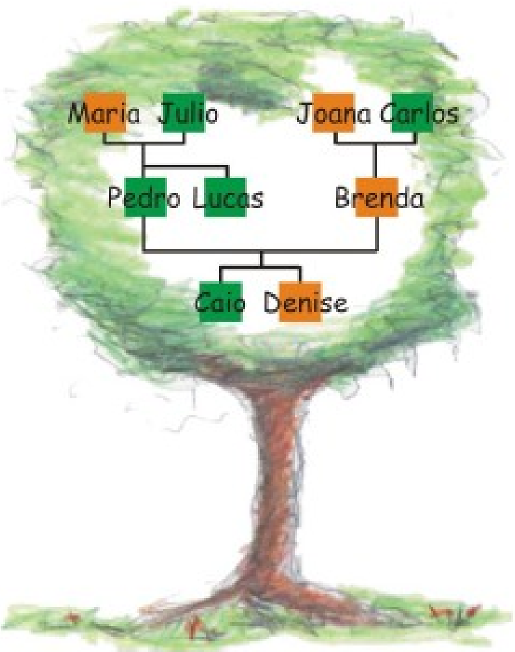
Inicialmente retomamos algumas propriedades do plano cartesiano. Em seguida são propostas três atividades que estudam a representação de funções através de gráficos em sistema cartesianos. Damos início ao estudo do conceito de variável contínua e a exploração dos conceitos de domínio e imagem que estejam de acordo com a situação problema.

Nas seções seguintes faremos uma descrição detalhada de cada item das folhas de atividade, examinando os conteúdos matemáticos abordados e as técnicas utilizadas para apresentá-los aos estudantes. Descreveremos também os objetivos de cada atividade ressaltando o que esperamos observar nas respostas dos estudantes, isto é, quais devem ser os erros e dificuldades encontradas. No Apêndice A temos as folhas na forma em que foram apresentadas para os estudantes. No Apêndice B temos as folhas resolvidas com as respostas esperadas.

4.4 Análise das FOLHAS DE ATIVIDADES 1 – Famílias, relações e funções

1º assunto: Relações e família

A primeira folha apresenta a árvore genealógica de uma família acompanhada de um texto que afirma que este é um diagrama que ilustra um tipo de relação.



Relações e família

Você sabe o que é uma árvore genealógica? É um diagrama que mostra as relações entre membros de uma mesma família! Veja um exemplo na figura.

Observe a notação abaixo que descreve as relações apresentadas nesta árvore :

•m(x) significa "mãe de x", por exemplo m(Pedro) = Maria

•p(x) significa "pai de x", por exemplo p(Brenda) = Carlos

•ia(x) significa "irmã de x"

•io(x) significa "irmão de x"

Figura 1: Folha 1 – Atividade 1 – Primeira árvore genealógica e texto explicativo

A seguir é sugerida uma notação para descrever algumas dessas relações. Escolhemos quatro: “pai de”, “mãe de”, “irmã de” e “irmão de”. Com as duas primeiras é dado um exemplo.

O principal objetivo das atividades desta primeira página é construir o conceito matemático de relação admitindo que o estudante já tem alguma compreensão sobre este conceito gerado espontaneamente, ou seja, formado pelo senso comum. Vamos supor o conceito de relação como postulado, e as atividades serão utilizadas para potencializá-lo. O conceito matemático de relação servirá de base para a definição do conceito de função, que será definido como uma relação que satisfaz condições específicas.

Outro objetivo é que os estudantes tenham contato com a notação mais usual de função, nome (variável) e também com parte do vocabulário que será usado no decorrer das atividades como: “relação” e “diagrama”.

Seguem seis atividades para estimular a interpretação do texto e do diagrama.

A Atividade 1 exige uma análise mais detalhada do diagrama já com a notação sugerida incorporada. Porém os estudantes ainda não escrevem a notação, apenas fazem a sua leitura.

1. De acordo com a árvore acima e os exemplos de notação, complete os itens:

(a) m(Brenda)=	(d) io(Lucas)=
(b) p(Pedro)=	(e) m(Denise)=
(c) p(Lucas)=	(f) ia (Caio)=

Figura 2: Folha 1 – Atividade 1 – Itens de familiarização

A maior dificuldade que esperamos é que os estudantes consigam notar que Brenda casou-se com Pedro e que tiveram dois filhos, Caio e Denise.

A Atividade 2 introduz o conceito de relação composta, com isso a notação ganha mais significado. No enunciado apresentamos um exemplo, que pode ser verificado no diagrama. Nesta ocasião os estudantes já escrevem a notação de função, isso se seguirem a sugestão do exemplo.

2. Você notou que p(m(Denise)) = p(Brenda) = Carlos? Complete os itens a seguir:
(a) m(p(Denise))=
(b) p(ia(Caio)) =
(c) m(m(Caio)) =
(d) p(io(Lucas)) =

Figura 3: Folha 1 – Atividade 2 – Itens de familiarização com a notação usando composição

Além disso, essa atividade tem um nível lógico superior ao da atividade anterior, pois trabalha com composição de relações

Os itens da atividade podem gerar complicações se a notação não estiver bem compreendida, por exemplo, ler "m(p(Denise))" como "mãe e pai de Denise" ao invés de "mãe do pai de Denise". Para contornar essa dificuldade o item c, sugere "m(m(Caio))" que não faz sentido ser interpretado como "mãe e mãe de Caio", e só fará sentido como "mãe da mãe de Caio". Assim esperamos que os estudantes que cometerem o erro já o corrijam.

A Atividade 3 ressalta que a troca da ordem na notação de uma relação composta altera a resposta final. Aqui solicitamos uma resposta discursiva para que o estudante tenha a oportunidade de refletir sobre sua compreensão, porém, é exatamente essa a dificuldade da questão.

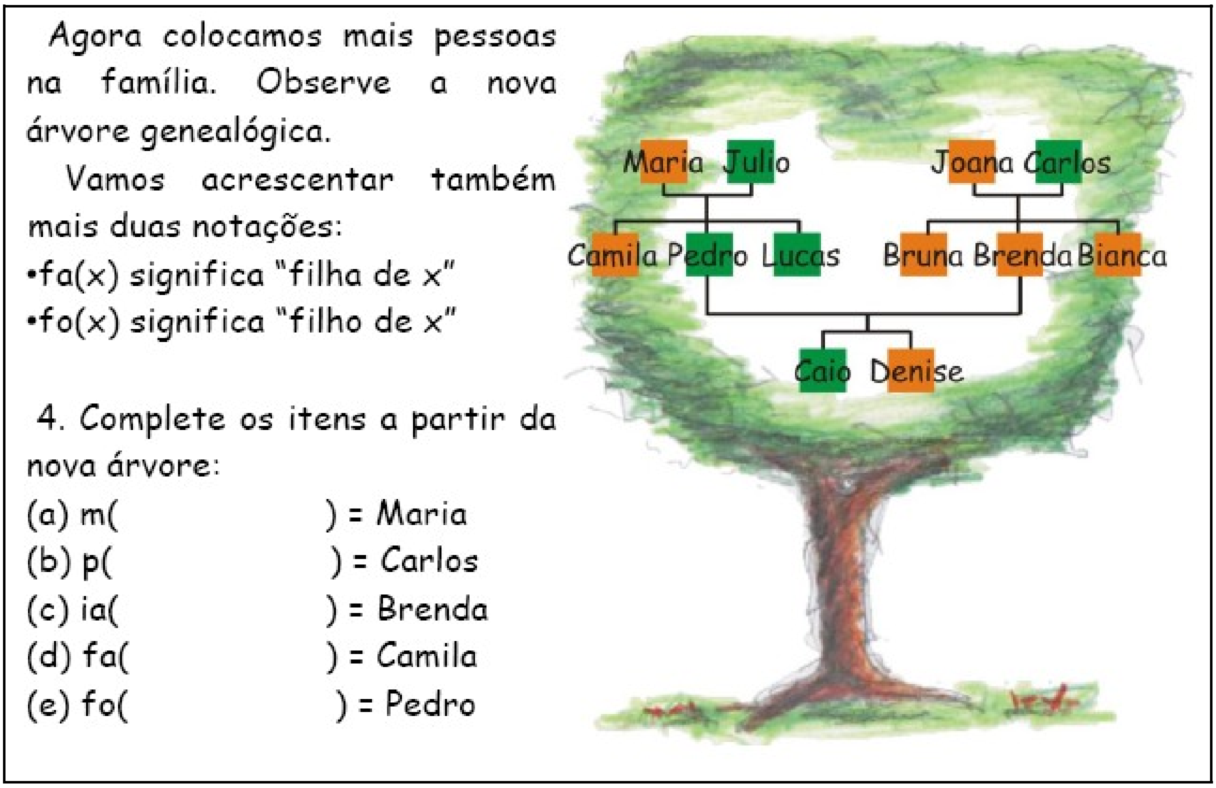
3. Será que io(p(Denise)) = p(io(Denise))? ☐Sim ☐ Não
Como você chegou a essa conclusão?______________________________
____

Figura 4: Folha 1 – Atividade 3 – Questão dissertativa

A seguir é apresentada uma outra árvore genealógica, com mais três personagens, e são introduzidas mais duas notações para relação, "filha de" e "filho de".

Para a Atividade 4 apenas aumentamos alguns nomes na árvore. Além de iniciar com uma representação mais simplificada, desejamos que os estudantes prestem atenção ao universo sobre o qual estamos nos referindo. Ele é a base para suas análises e respostas.

A atividade exige que o estudante perceba a inversa de relações. Esperamos que eles construam a seguinte pergunta para interpretar o item (a): “mãe de quem é Maria?”



Agora colocamos mais pessoas na família. Observe a nova árvore genealógica.

Vamos acrescentar também mais duas notações:

•fa(x) significa “filha de x”

•fo(x) significa “filho de x”

4. Complete os itens a partir da nova árvore:

(a) m( ) = Maria

(b) p( ) = Carlos

(c) ia( ) = Brenda

(d) fa( ) = Camila

(e) fo( ) = Pedro

Figura 5: Folha 1 – Atividade 4 – Texto explicativo, segunda árvore genealógica e relação inversa

A grande dificuldade, além da formulação da pergunta anterior, é o fato de que existe mais de uma resposta certa. Por exemplo, Maria é mãe de Camila, Pedro e Lucas.

As duas últimas atividades da folha sugerem que os estudantes deem exemplos, usando a notação de relações, cuja resposta é a mesma.

5. Liste 10 diferentes maneiras de se chegar à Brenda. Por exemplo: fa(Joana) = Brenda, ia(fa(Joana)) = Brenda.

6. Liste 7 diferentes maneiras de se chegar ao Lucas.

Figura 6: Folha 1 – Atividades 5 e 6 – Interpretação das relações fornecidas pela segunda árvore

A quantidade pedida não pode ser alcançada apenas com relações simples, isto é, será necessário o uso de composição de relações para completar a atividade.

São solicitadas 10 maneiras de se chegar à Brenda e 7 maneiras de se chegar ao Lucas.

As Atividades 5 e 6 exigem do estudante todo conhecimento adquirido previamente acrescentado de um maior desafio lógico. Nosso objetivo com essas atividades é fazer uma avaliação do aprendizado proposto nos itens anteriores. Por opção não fornecemos itens do tipo complete a igualdade, ou seja, para que o estudante escreva as relações por completo, por exemplo: fo(Júlio) = Lucas.

2º assunto: Relações e funções

O principal objetivo dessa seção da Folha de Atividades 1 é definir função. Do ponto de vista epistemológico definimos função tendo postulado o conceito de relação. Para essa primeira abordagem evitamos uma definição formal, e preferimos contextualizar, utilizando na definição o diagrama que adotamos para construir os exemplos.

Optamos por uma representação que deixa claro qual é o conjunto de partida e qual é o conjunto de chegada. Para isso, o conjunto de partida é colocado na linha de cima e o de chegada, na linha de baixo (outra opção seria usar duas colunas, com o conjunto de partida à esquerda e o de chegada à direita). As setas indicam qual a imagem de cada elemento e ajudam a reforçar a ideia anterior.

O pré-requisito principal para as atividades dessa seção é o conhecimento prévio do conjunto dos números inteiros.

Iniciamos essa sequência de atividades com uma breve explicação e um exemplo.

Relações e funções

Existem várias formas de representar relações. A árvore genealógica é uma delas. O quadro abaixo mostra um outro tipo de diagrama que ilustra uma relação entre números:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\ldots & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\
 & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \\
\ldots & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots
\end{array}$$

Figura 7: Folha 1 – Texto explicativo e diagrama de setas

As perguntas iniciais (7 e 8) servem para que os estudantes se familiarizem com a nova representação, inclusive formando relações entre números não representados no quadro.

7. Uma seta partindo do 5 na linha superior iria para qual número da linha inferior? R: ______

8. E partindo de -5? R: ______

Figura 8: Folha 1 – Atividades 7 e 8 – Itens de familiarização com o diagrama de setas

A Atividade 9 requer a percepção de uma regularidade nas relações ilustradas no diagrama. Além disso, inserimos vocabulário geralmente usado para o tema funções, como “regra”; “expressar em palavras”.

Até este ponto não deverá existir dificuldades gerais.

9. Podemos expressar o que diz essa relação em palavras. A regra é somar ____ a cada número da linha superior para encontrar o correspondente na linha inferior.

10. Se existisse um *n* na linha superior, qual seria seu correspondente na linha inferior? R: ________

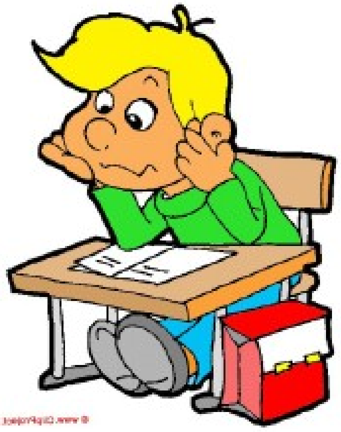


Figura 9: Folha 1 – Atividades 9 e 10 - Itens de familiarização com o diagrama de setas

O item 10 incita a algebrização. Esperamos que os estudantes entendam o uso da letra “n” para representar um valor qualquer da linha superior e, em termos de “n”, descrevam como será o valor da linha inferior ao qual ele está relacionado. Ou seja, usar “n” como uma variável.

Os estudantes que possuírem uma boa compreensão da utilização de letras para representar números não devem encontrar barreiras para as atividades até aqui propostas.

Finalmente apresentamos a definição de função baseada no esquema de números e setas do quadro anterior.

Esta relação tem características muito especiais;

I - Todos os números da linha superior têm relação com algum número da linha inferior.

II - Cada número da linha superior está relacionado com apenas um número da linha inferior.

Este tipo de relação é chamada de FUNÇÃO.

Figura 10: Folha 1 – Texto explicativo, definição de função

Em seguida, sugerimos uma notação (como vista na primeira folha) para representar tal função e solicitamos o cálculo de alguns pares relacionados. Misturamos itens diretos, como $s(278)=\_\_\_$, e itens onde fornecemos o número de chegada da seta, como $s(\_\_)=12$.

Vamos chamar a função acima de s. Complete:

s(3) = 3 + 1 = _____	s(-2) = -2 + 1 = _____
s(-5) = __________ = _____	s(278) = __________ = _____
s(12) = __________ = _____	s(____) = 8 + 1 = 9
s(____) = 12	s(n) = __________

Figura 11: Folha 1 – Itens para praticar a representação da relação do diagrama de setas

O último item convida o estudante a escrever a regra geral da função usando a notação, ou seja $s(n)=n+1$.

Os erros esperados são apenas erros de distração, não acreditamos observar grandes complicações desde que o estudante compreenda que a função $s(n)$ representa a regra dada em palavras nos itens anteriores.

A Atividade 11 (confira na página seguinte) fornece quadros com flechas e, para cada um deles, dá uma notação e uma regra com palavras. É solicitado que se construa as setas, ligando os números que são relacionados pela regra e assim distinguir quais as relações são funções.

No item (a) sugerimos a relação dobro de x , depois de desenhar as setas o estudante deve ler novamente as condições para que uma relação seja uma função e responder adequadamente. Além disso queremos que sejam completadas outras duas questões, uma envolvendo um valor que não aparece no quadro e outra envolvendo composição de funções.

Os obstáculos que os estudantes devem enfrentar provavelmente podem ser superados quando a atividade for feita em grupo e houver a discussão das dúvidas.

No item (b), a relação não é uma função, pois nem todos os números da linha superior estarão ligados com algum número da linha inferior. Provavelmente existirão dúvidas quanto ao enunciado da regra, já que ela demanda extração de raízes quadradas. Mesmo assim, solicitamos a análise de uma composição de relações, $s(r(4))$, e a comparação desta com $r(9)$. Espera-se que eles verifiquem a igualdade de valores e consigam expressar em símbolos ou palavras.

O quadro do item (c), apresenta uma função, porém as setas não ficarão distribuídas uniformemente, podendo causar dúvidas na hora de responder. Solicitamos o cálculo de uma composição de três relações estudadas anteriormente.

11. Em cada um dos problemas seguintes complete com flechas segundo a regra dada, responda e complete o que se pede.

(a) d(x) = o dobro de x.

$$\ldots \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \ldots$$

$$\ldots -6 \quad -5 \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \ldots$$

É função? ☐ Sim ☐ Não. d(7) = _____ d(s(10)) = _____

(b) r(x) = raiz quadrada de x, se este for um número inteiro.

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad \ldots$$

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad \ldots$$

É função? ☐ Sim ☐ Não. s(r(4)) é igual a r(9)? Explique.

____

(c) q(x) = elevar x ao quadrado.

$$\ldots -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \ldots$$

$$\ldots -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad 13 \quad 14 \quad 15 \quad 16 \ldots$$

É função? ☐ Sim ☐ Não. q(s(r(36))) = _____

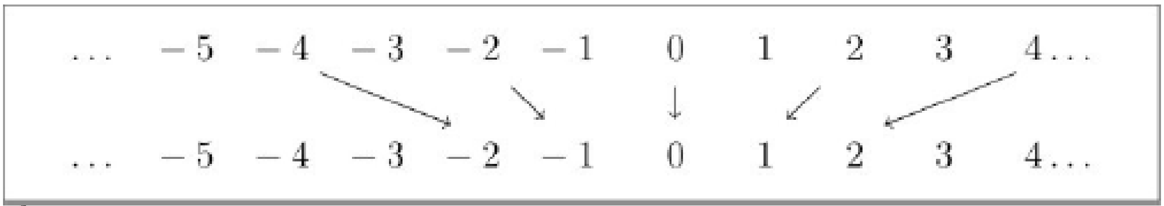
Figura 12: Folha 1 – Atividade 11 – Identificação de funções e construção de diagrama de setas

A Atividade 12 (confira quadro da página seguinte) fornece quadros com conjuntos numéricos e setas já indicando as relações para que se verifique quais são funções. Quando a resposta for afirmativa esperamos que o estudante descreva a regra da função.

As análises sobre o tipo de relação não devem causar dúvidas, porém as regras tendem a gerar discussões, mesmo que só no item (b) seja apresentada uma relação que é função.

12. Verifique se as relações apresentadas nos quadros abaixo são FUNÇÕES, em caso de resposta afirmativa sugira um enunciado que descreva a função.

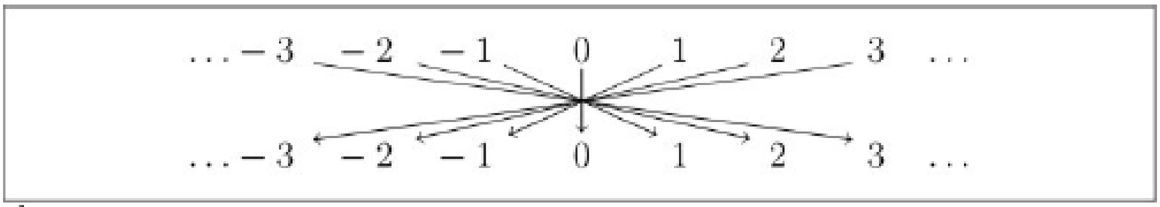
(a) A regra é: metade de x, se esta for inteira.



É função? ☐ Sim ☐ Não.

____

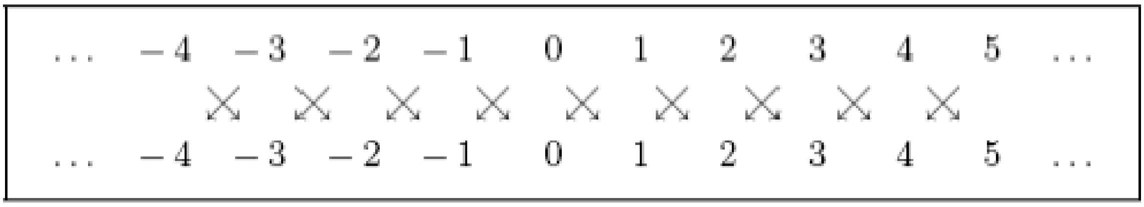
(b)



É função? ☐ Sim ☐ Não.

____

(c)



É função? ☐ Sim ☐ Não.

____

Nesta atividade apresentamos exemplos de relações apenas entre números naturais, $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,4,5,6,...\}$ e inteiros, $\mathbb{Z}=\{...-3,-2,-1,0,1,2,3...\}$. Observe que colocamos "..." para representar que as listas de números continuam!

Figura 13: Folha 1 – Atividade 12 – Identificação de funções e obtenção de expressão

Um pequeno parágrafo final salienta o uso de reticências para representar a continuação das listas de números nos quadros, relembrando também os símbolos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$ para os conjuntos dos números inteiros e naturais respectivamente.

3º assunto: Domínio,contra-domínio e imagem

Domínio, contra-domínio e imagem

Quando uma relação é função chamamos o conjunto dos números da linha superior de *domínio*, o da linha inferior de *contra-domínio* e o conjunto dos números da linha inferior que receberam seta de *imagem*.

Por exemplo, no exercício 11 (a) temos uma função onde:

- Domínio de d(x) é $\mathbb{Z}$
- Contra - domínio de d(x) é $\mathbb{Z}$
- Imagem de d(x) é {...-6,-4,-2,0,2,4,6,...}, isto é, o conjunto dos números pares.

Figura 14: Folha 1 – Texto explicativo - Domínio, contra-domínio e imagem

Iniciamos esta última parte com as definições de domínio, contra-domínio e imagem de uma função. Os enunciados das definições remetem à representação de funções utilizadas nas atividades anteriores.

Apresentamos um exemplo para que fique mais claro. Depois, na Atividade 13 solicitamos que os estudantes determinem domínio,contra-domínio e imagem de todas as relações anteriormente estudadas que são funções.

13. Determine o domínio, o contra-domínio e a imagem de todas as relações que são funções dos exercícios 11 e 12.

____

____

____

Figura 15: Folha 1 – Atividade 13 – Obtenção do domínio, contra-domínio e imagem das funções das atividades anteriores

Acreditamos que muitas respostas os conjuntos solicitados conterão apenas os valores apresentados nos quadros, apesar de que, logo após a atividade 12, explicamos a notação com reticência indica os conjuntos numéricos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$.

Por fim, retomamos o diagrama inicial para que o estudante analise que a relação "filha de" não é uma função e solicitamos um exemplo que comprove esta afirmação. A mesma análise deve ser feita com "irmã de " e "filho de", porém, nestes dois últimos casos não determinamos se são ou não funções.

14. Considere a segunda árvore genealógica da primeira folha desta atividade e responda:

(a) A relação fa(x) não é função. Dê um exemplo que comprove essa afirmação.

(b) A relação ia(x) é função? Por quê?

(c) A relação fo(x) é função? Por quê?

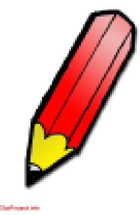


Figura 16: Folha 1 – Atividade 14 – Análise das relações da árvore genealógica

Será necessário que os estudantes percebam que um elemento pode estar ligado a vários outros, ou então que algumas relações não apresentam ligação.

A dificuldade encontra-se no fato de que na árvore genealógica temos mais de uma relação representada e nem todas possuem a disposição linha superior e linha inferior dos quadros numéricos. Porém, com a notação, é possível fazer a análise das relações sugeridas, por exemplo $ia(Bruna)=Brenda$ e $ia(Bruna)=Bianca$. Isso nos diz que Bruna está relacionada com mais de um elemento, o que descaracteriza a relação como função.

Constatamos que este enunciado não atendeu às nossas expectativas, ou seja,não deixou claro para os estudantes que o domínio a ser considerado deveria ser o conjunto formado por todas as pessoas da segunda árvore. Faremos mais comentários na análise a posteriori.

Terminamos assim a análise das Folhas de Atividades 1. No Apêndice A vemos as folhas por inteiro e no Apêndice B as folhas com as soluções.

4.5 Análise das FOLHAS DE ATIVIDADES 2 – Fórmulas para funções

1ª atividade: O varal de camisas

A primeira atividade apresenta a descrição (em palavras) da seguinte situação: camisas devem ser penduradas no varal colocando-se os pregadores de uma determinada maneira. Duas regras descrevem a forma de pendurar as camisas: cada camisa é presa por dois pregadores; cada camisa é ligada à seguinte por um pregador.

1. O varal de camisas

Dona Maria lavou as camisas do time de futebol de seu neto Carlinhos e vai colocá-las para secar da seguinte forma:

- cada camisa é presa por dois pregadores;
- cada camisa é ligada à seguinte por um pregador.

Figura 17: Folha 2 – Atividade 1 – Enunciado e ilustração

Uma figura ilustra o caso para 3 camisas. O item (a) pode ser respondido através da contagem direta na ilustração. O item (b) sugere uma tabela com a quantidade de camisas já preenchido e o estudante deve completar a respectiva quantidade de pregadores necessários.

(a) Quantos pregadores Dona Maria usará para pendurar 3 camisas?
R:_____

(b) Complete a tabela abaixo, onde n a quantidade de camisas e p é a quantidade de pregadores:

n	1	2	3	4	5	6	7
p							

Figura 18: Folha 2 – Atividade 1 – Itens de familiarização e interpretação da situação através do preenchimento da tabela

No item (c) usamos a notação das atividades anteriores, sugerindo p(n) para dizer "pregadores necessários para pendurar n camisas". Os estudantes devem então obter valores que não estão representados na tabela, como "p(21)". Para obter essas respostas esperamos que a regularidade sugerida através da leitura da tabela já tenha sido percebida, isto é, basta somar 1 no número de camisas para obter a quantidade de pregadores necessários.

(c) Usando a notação da atividade anterior, vamos escrever, p(n) para dizer "pregadores necessários para pendurar n camisas".

Complete:

i. p(7) = _____   iii. p(12) = ____

ii. p(8) = _____   iv. p(21) = ____

Figura 19: Folha 2 – Atividade 1 – Uso de notação

O item (d) pede a expressão do número de pregadores para pendurar n camisas. O maior desafio desta atividade é a obtenção da fórmula da função, pois, além de notar a regularidade o estudante deve compreender a notação e usá-la corretamente. Por isso, no texto do enunciado (d), repetimos o significado de p(n).

(d) Complete a expressão que representa o número de pregadores p necessários para pendurar um número n qualquer de camisas, isto é, p(n) = ____________

(e) A expressão que você obteve é uma função! Qual é:

i. Domínio de p(n) =

ii. Imagem de p(n) =

Figura 20: Folha 2 – Atividade 1 – Generalização, domínio e imagem da função

Por fim, afirmamos que a expressão é uma função e solicitamos o respectivo domínio e imagem. Para escrever os conjuntos corretos o estudante poderá comparar a tabela dessa atividade e o quadro das folhas inicias, associando as linhas superior e inferior da tabela com as linhas do quadro, ou ainda perceber que os valores do domínio são os valores de n e os da imagem são os valores de p.

2ª atividade: Chicletes

A segunda atividade também descreve uma situação através de palavras. Porém, diferente da primeira, a descrição é apenas de um caso específico. Isto é, receberemos R$ 1,25 de troco quando compramos 5 chicletes e pagamos com R$ 2,00. Aqui não temos regras gerais para o valor da compra ou para o cálculo do troco.

2. Chicletes

Pedro vai a padaria levando uma nota de R$ 2,00 para comprar seu chiclete favorito. Se comprar cinco chicletes, receberá R$ 1,25 de troco.

(a) Se comprar apenas dois chicletes, quanto receberá de troco? R:______.

(b) E quanto será o troco se comprar quatro chicletes? R:______.

Figura 21: Folha 2 – Atividade 2 – Enunciado e itens de familiarização

Os itens (a) e (b) instigam o estudante a interpretar a situação. Esperamos que eles encontrem o valor de um chiclete, usando a descrição inicial da atividade e assim possam responder ao que foi perguntado.

A obtenção da expressão para o troco traz um elemento novo, pois requer uma subtração na sua formulação, essa operação ainda não figurou entre as expressões estudadas, o que pode gerar dúvidas. Além disso, os estudantes devem notar que a compra sempre é realizada com a nota de dois reais.

(c) Escreva uma expressão que represente o troco quando são comprados n chicletes. Use a notação t(n), isto é, troco para comprar n chicletes.
t(n) = ____________
(d) Qual é a maior quantidade de chicletes que Pedro pode comprar com o dinheiro que tem? R:______

Figura 22: Folha 2 – Atividade 2 – Generalização, expressão algébrica da função e pergunta para a obter o domínio

A questão do item "d" sugere, mais uma vez, a análise da situação. A solução pode ser obtida com tentativas de multiplicações: "0,15 vezes quanto chega mais perto de 2?" ou com divisão: 2 dividido por 0,15. Ou ainda através da expressão obtida no item "c": percebendo que o troco não pode ser negativo.

Oferecemos espaço para criação de uma tabela, dessa vez não determinamos valores (previamente preenchidos na tabela) e não impomos linha específica para cada quantidade. Além disso, propositalmente, a tabela em branco tem mais espaços do que seria necessário para colocar um rótulo na linha e preencher com todos os possíveis valores de quantidade de chicletes comprados com uma nota de dois reais.

Para facilitar a sua resposta no próximo item, sugerimos que você faça uma tabela:

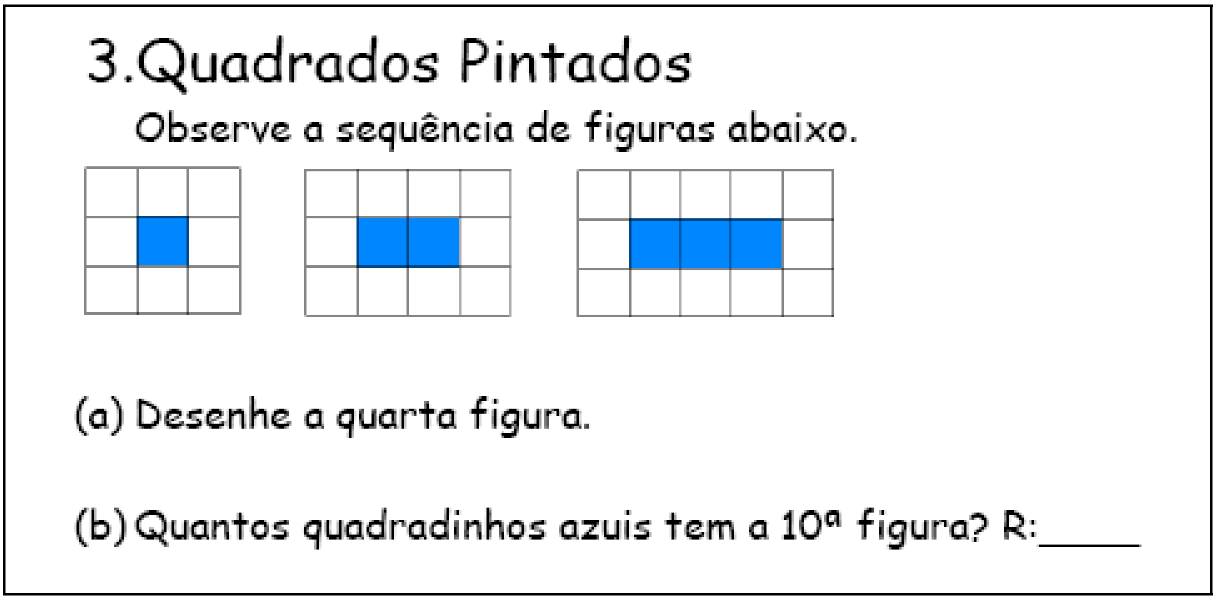
(e) A expressão que você obteve é uma função! Qual é:
i. Domínio de t(n) =
ii. Imagem de t(n) =

Figura 23: Folha 2 – Atividade 2 – Sugestão de tabela, domínio e imagem

A tabela entra como sugestão para auxiliar na obtenção do domínio e da imagem. Supomos que na primeira linha serão colocados os números naturais correspondentes a quantidade de chicletes comprada e na segunda o valor do respectivo troco. Esperamos que aqui possam ocorrer algumas confusões.

3ª atividade: Quadrados pintados

Na Atividade 3, os estudante são convidados a analisar uma sequência de figuras. Uma primeira atividade solicita que a próxima figura seja desenhada, assim o estudante tem a oportunidade de verificar o que é mantido e o que varia quando avança na sequência.


3.Quadrados Pintados

Observe a sequência de figuras abaixo.

(a) Desenhe a quarta figura.

(b) Quantos quadradinhos azuis tem a 10ª figura? R:_____

Figura 24: Folha 2 – Atividade 3 – Enunciado e familiarização

O item (b) aparenta, inicialmente, pular etapas, já que solicita informação da décima figura. Porém pretendemos que o estudante note que a quantidade de quadrados preenchidos é equivalente à posição da figura.

A tabela do próximo item deve ser preenchida com informações da sequência de figuras. Da primeira até a quarta pode-se obter os valores do desenho, da quinta até a oitava o estudante deverá perceber o padrão que segue cada coluna. Por exemplo, o número de quadrados brancos cresce de dois em dois, sendo assim, acreditamos que todos os estudantes sejam capazes de completar até esta linha da tabela.

(c) Complete a tabela abaixo:

Nº de ordem da figura	Nº de ■	Nº de □	Total de quadradinhos
1ª			
2ª			
3ª			
4ª			
5ª			
6ª			
7ª			
8ª			
15ª			
nª			

A última linha da tabela servirá para responder os próximos três itens.

Figura 25: Folha 2 – Atividade 3 – Tabela

Antes de chegar na regra geral, solicitamos as informações da 15ª Figura. O objetivo desse item é levar o estudante a fazer uma generalização, e a superar a recorrência, isto é, dispensar o uso do termo anterior.

A última linha da tabela requer a generalização para a n-ésima figura. As três informações representam funções, todas em termos da posição da figura na sequência. Como a função do número de quadrados azuis é a identidade, uma ideia de solução para expressão do número de quadrado brancos é: o número de quadrados azuis vezes dois (pois existe essa quantidade em cima e em baixo dos azuis) somado com seis (sugestão da Professora P.).

Para o total de quadrados, acreditamos que será simples notar, desde o início, que basta somar as quantidades de azuis e de brancos. Porém, não esperamos que seja feita a simplificação da expressão obtida no caso geral.

Os próximos itens sugerem uma notação para cada informação, número de quadrados azuis, número de quadrados brancos e total de quadrados, sendo apenas necessário reescrever as respostas da última linha da tabela. Além disso solicitamos o cálculo de alguns valores da função, que não se encontram na tabela, instigando o uso da fórmula obtida anteriormente.

(d) Qual é a fórmula que expressa a quantidade A(n) de quadradinhos azuis em função da ordem n da figura?
A(n) = ____________
(e) Calcule:
i. A(11) = _____
ii. A(20) = _____

(f) Qual é a fórmula que expressa a quantidade B(n) de quadradinhos brancos em função da ordem n da figura?
B(n) = ____________
(g) Calcule:
i. B(13) = _____
ii. B(20) = _____

(h) Qual é a fórmula que expressa a quantidade total T(n) de quadradinhos em função da ordem n da figura?
T(n) = ____________
(i) Calcule:
i. T(17) = _____
ii. T(20) = _____

Figura 26: Folha 2 – Atividade 3 – Generalizações

4ª atividade: Triângulo de lápis

As duas últimas atividades continuam fornecendo sequências de figuras que seguem padrões de construção.

Inicialmente, como atividade de familiarização, solicitamos que o estudante desenhe a próxima figura da sequência e observe a quantidade de lápis utilizados. Afim de se obter a regra geral que determine a quantidade de lápis para formar um determinado número de triângulos foram feitas duas perguntas que podem auxiliar na percepção do padrão (não apenas da relação de recorrência).

4. Triângulos de lápis

Observe a sequência de triângulos abaixo:

3 lápis ____ lápis ____ lápis

(a) Desenhe a próxima figura e complete a quantidade de lápis.

(b) Você notou uma regra de formação? Para obter mais um triângulo basta acrescentar sempre mais ______ lápis.

(c) Cada novo triângulo é formado apenas acrescentando mais ______ lápis, porém o primeiro triângulo precisou de _____ lápis, _____ a mais que qualquer outro.

Figura 27: Folha 2 – Atividade 4 – Enunciado e itens de familiarização

No item (d) é solicitado do estudante completar uma tabela, onde foi fornecido o número de triângulos, com os valores relacionados. Até o sétimo termo é possível seguir por recorrência, quando então solicitamos o décimo termo. Além da tabela, sugerimos uma notação para a situação e mais alguns pares de valores triângulo-lápis.

(d) Termine de preencher os valores correspondentes na tabela abaixo, onde T é a quantidade de triângulos formados com L lápis;

Triângulos - T	1	2	3	4	5	6	7	10
Lápis - L								

(e) Usando L(T) para dizer "lápis necessários para formar T triângulos", calcule:

i. L(10) = _____
ii. L(15) = _____
iii. L(22) = _____
iv. L(_____) = 33

(f) Qual poderia ser uma fórmula geral para obter a quantidade L(T) de lápis necessários para construir T triângulos?

L(T) = _____________

Figura 28: Folha 2 - Atividade 4 - Tabela, notação e generalização

Por fim, esperamos que os estudante sejam capazes de formular uma regra geral usando a notação e também determinem o domínio e o contra domínio da função.

(g) A expressão que você obteve é uma função! Qual é seu:

i. Domínio de L(T) =
ii. Imagem de L(T) =

Figura 29: Folha 2 - Atividade 4 - Domínio e imagem

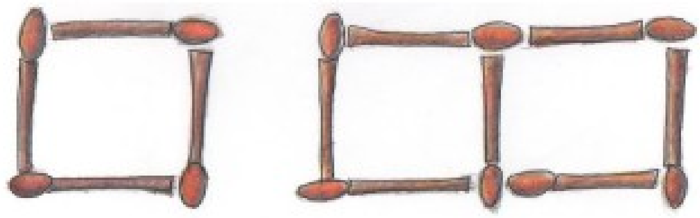
A inserção dessa atividade nas folhas ocorreu na expectativa de causar dúvidas e fazer com que os estantes se sentissem mais desafiados. A regra geral não é simples de ser obtida sem um bom domínio de procedimentos algébricos.

5ª atividade: Quadrados de palitos

A quinta atividade assemelha-se muito com a anterior. Uma sequência de figuras que segue uma lei de formação simples por recorrência. Porém, desta vez, não sugerimos questões que facilitem a percepção do padrão sem o uso de recorrência. Sugerimos o preenchimento da tabela, com uma sugestão de notação, e solicitamos a regra geral, bem como o domínio e a imagem da função obtida.

5. Quadrados de palitos

Observe a sequência de figuras abaixo:



4 palitos ____palitos ____palitos

(a) Desenhe a próxima figura e complete a quantidade de palitos.

(b) Apresente uma fórmula geral para determinar a quantidade de palitos necessária para formar qualquer quantidade de quadrados. Complete a tabela abaixo, ela pode te ajudar:

Q	1	2	3	4	5	6	10	q
P								

Fórmula Geral:

(c) A expressão que você obteve é uma função! Qual é seu:

i. Domínio =

ii. Imagem =

Figura 30: Folha 2 - Atividade 5 - Enunciado e todos os itens da atividade

Essa é a atividade mais aberta de toda a sequência, mesmo tendo um objetivo bem definido. Esperamos encontrar diferentes formas de resolução.

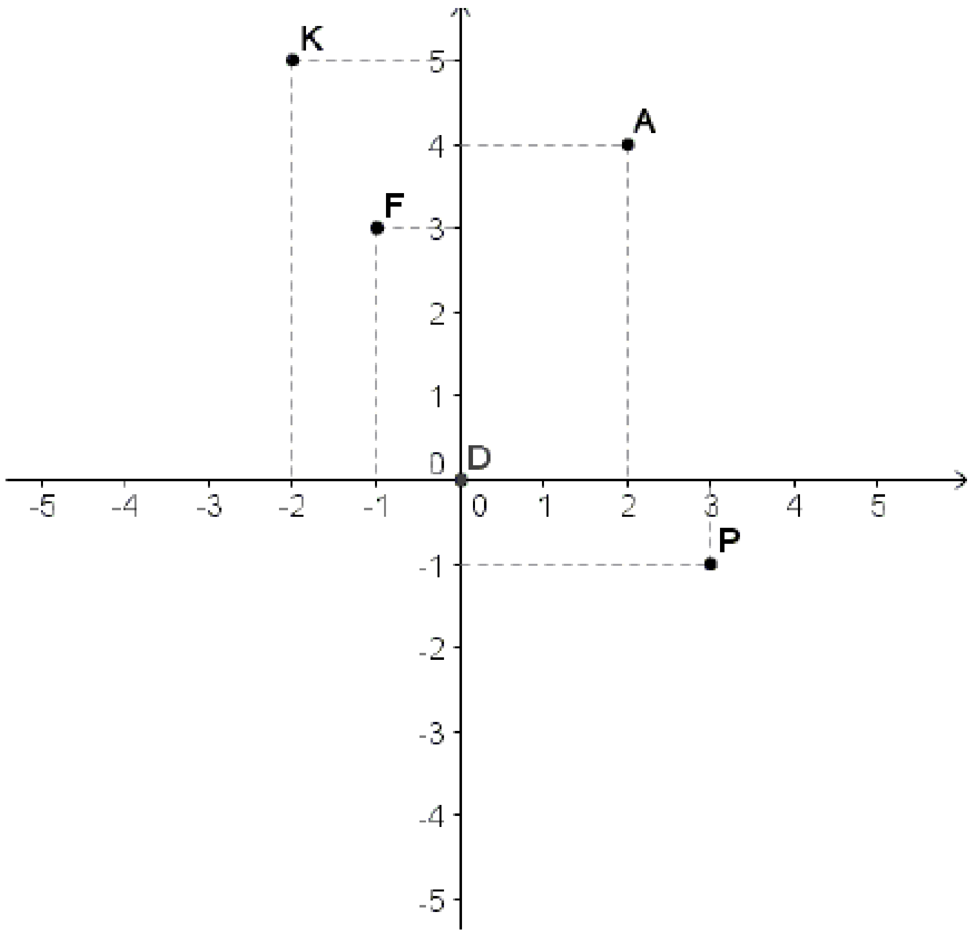
4.6 Análise das FOLHAS DE ATIVIDADES 3 – Gráficos e funções

1ª atividade: Pontos no plano

Você já jogou batalha naval? Já viu um guia de ruas da lista telefônica? Ou já teve que procurar uma cidade num mapa? Estes são exemplos de que, no plano, bastam duas linhas perpendiculares com subdivisões para que possamos determinar uma posição.

1. Pontos no plano

Na matemática, para localizar pontos, também usamos esse método de acordo com a figura abaixo.



1 Gráficos e funções

Figura 31: Folha 3 - Atividade 1 - Texto explicativo

Iniciamos as últimas folhas de atividades recordando algumas propriedades do plano cartesiano. Um texto relembra situações comuns onde este método de localização é usado.

Os primeiros itens solicitam apenas que os estudantes sejam capazes de ler pontos no plano e também de representá-los.

Esse método de localização chama-se *sistema de coordenadas cartesianas.*

(a) Indique que pontos estão nas seguintes posições:
i. Em (2; 4) está o ponto _____
ii. Em (0; 0) - chamado de origem do sistema cartesiano - está o ponto _______
iii. Em (-1; 3) está o ponto _____
iv. Em (3; -1) está o ponto _____
v. Em (-2; 5) está o ponto _____

(b) Agora, marque as posições dos seguintes pontos:
i. (5; 0) como ponto W.
ii. (0; -2) como ponto Y.
iii. (-2; -5) como ponto H.

Podemos usar um sistema de coordenadas cartesianas para representar relações e, em particular, funções. Vejamos alguns exemplos.

Figura 32: Folha 3 - Atividade 1 - Definição e itens de familiarização

2ª atividade: Vamos tomar um suco?

As atividades destas folhas seguem o mesmo estilo das anteriores, porém procuramos acrescentar novos elementos aos problemas. Agora os estudantes interpretarão valores de função como pontos em um sistema de coordenadas cartesianas.

2. Vamos tomar um suco?

Uma garrafa de 500 ml de suco concentrado deve ser dissolvida em 1 litro de água para obtermos o suco reconstituído.

(a) Se utilizarmos todo o suco concentrado de uma garrafa, quantos litros teremos de suco pronto para beber: R:_______

(b) Queremos servir suco no almoço de domingo, com toda a família presente. Quantos litros de suco pronto vamos preparar usando 2 garrafas de suco concentrado? R:_____

(c) Complete a tabela, onde c é o total de garrafas de suco concentrado e L é o total de litros de suco pronto:

c	1	2	3	4	5	6	7
L							

(d) Expresse a quantidade de suco pronto L em função da quantidade c de garrafas de suco concentrado:
L(c) = _____________

Figura 33: Folha 3 - Atividade 2 - Enunciado, itens de familiarização, tabela e generalização

A situação que será analisada sugere que alguém quer fazer suco a partir de suco concentrado. Como informação inicial é dada a quantidade de suco concentrado para 1 litro de água.

Os itens iniciais e a tabela são atividades para a familiarização com o problema. Em seguida solicitamos a expressão da função observada.

Uma provável dificuldade é perceber que a relação estudada deve ser da quantidade de suco pronto (água + concentrado) em função do total de garrafas de suco concentrado.

A partir daí iniciamos o estudo da representação gráfica de funções. Inicialmente explicamos a ideia de par ordenado e de sua possível representação gráfica, usando também um exemplo como ilustração. Assim, solicitamos que os estudantes marquem os outros pares ordenados da tabela no mesmo sistema de coordenadas cartesianas.

(e) Os valores relacionados na tabela podem ser vistos como pares. Com duas garrafas de suco obtemos exatamente 3 litros de suco pronto. Vamos escrever este par como (2; 3) e representá-lo num sistema de coordenadas cartesianas:

Marque os outros pontos que aparecem na tabela no mesmo sistema de coordenadas cartesianas.

(f) Se você continuar a tabela acima e marcar os pontos na figura, o ponto (8;12) vai ser marcado? R: ☐Sim ☐Não

(g) Você não precisa utilizar uma garrafa inteira de suco concentrado. Que ponto seria marcado se você utilizasse apenas meia garrafa? R:___________
Marque este ponto na figura.

Figura 34: Folha 3 - Atividade 2 - Itens para introduzir a utilização do sistema de coordenadas

Apresentamos então um par que não está na tabela para que seja determinada a sua presença ou não no gráfico, isto é, se ele representa um par número de (garrafas; total de suco pronto). Em seguida expomos uma situação diferente: qual seria o par ordenado se fosse utilizada apenas meia garrafa de suco concentrado? Esta questão deve despertar a ideia de existirem outros pontos no gráfico além daqueles que possuem um valor inteiro para a quantidade de garrafas.

(h) Se você marcar na figura outros pontos dados pela função L(c), com valores cada vez mais próximos uns os outros, o que vai aparecendo na figura? R: ______________________________

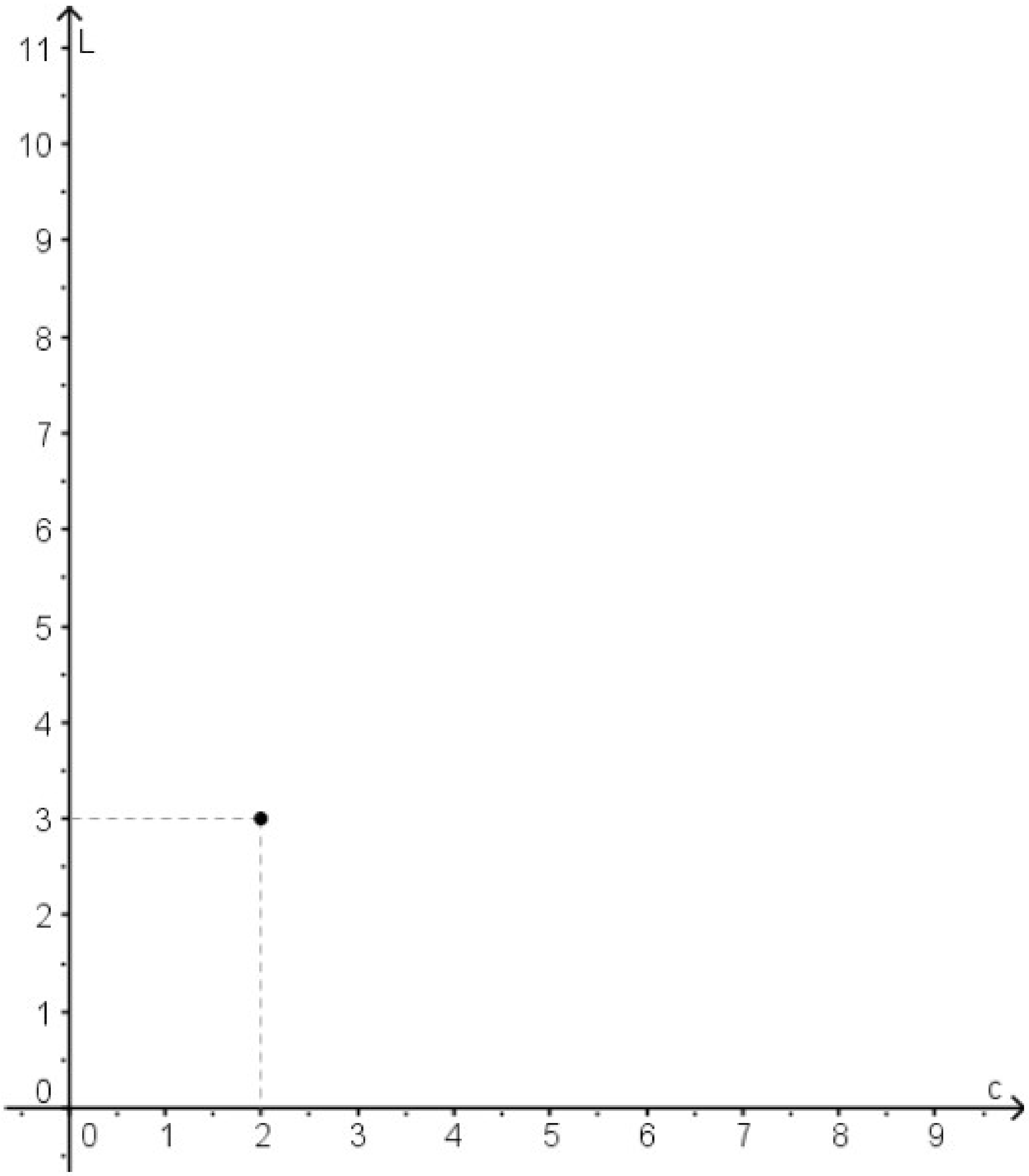


Figura 35: Folha 3 - Atividade 2 - Desenho do sistema de coordenadas

Os estudantes não devem apresentar grandes dificuldades até o presente momento da atividade, porém a resposta discursiva esperada no último item pode não ser muito simples. Eles devem notar que, com valores cada vez mais próximos, os pontos ficaram cada vez mais próximos e assim dando a impressão de uma semirreta ou linha contínua.

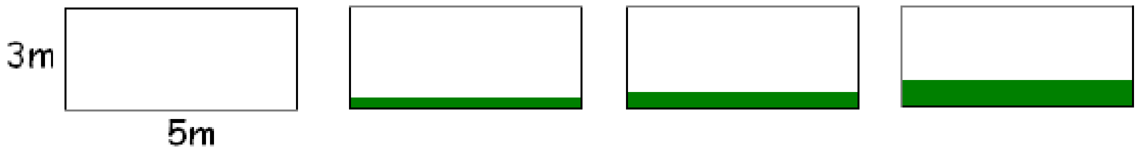
Esperamos que o sistema de coordenadas cartesianas ajude na interpretação, pois ele permitirá a visualização de alguns pontos (8 no mínimo) já com a incitação de que e os pontos estão alinhados.

3ª atividade: Área de retângulos

Esta atividade apresenta mais uma situação de onde podemos abstrair a ideia da continuidade dos valores. Trata-se da pintura de uma parede por faixas como indica a figura. A tabela sugerida apresenta valores de altura da faixa pintada e deve ser preenchida com a área correspondente. Essas alturas são números mais variados do que os vistos até agora, apesar de serem todos racionais com, no máximo, duas casas decimais.

3. Área de retângulos

Na sequência de figuras abaixo, a primeira representa uma parede branca de 3 m de altura por 5 m de largura.



(a) Qual é a área da parede? R: _____

As figuras seguintes representam a pintura que o Sr. Luís está fazendo. Ele usa uma tinta verde e, para pintar, faz faixas horizontais de baixo para cima. Complete a tabela com a área já pintada em determinados momentos.

Altura da parte pintada (m)	0,1	0,35	0,7	1	1,6	2	2,6	h
Área da parte pintada (m^2)								

Figura 36: Folha 3 - Atividade 3 - Enunciado, item de familiarização e tabela

Os estudantes devem perceber que a área pintada corresponde à área de retângulos com base fixa igual a cinco, e altura variável.

(b) Marque esses pontos no sistema de coordenadas cartesianas ao lado.

(c) Monte uma uma fórmula para representar a área A pintada por Sr. Luís, em função da altura h da faixa.
A(h) = ______________________________

Figura 37: Folha 3 - Atividade 3 - Pontos no sistema de coordenadas e generalização

Os pares obtidos com a tabela devem ser representados no sistema de coordenadas cartesianas e, no item (c), pedimos a fórmula da função que representa a área pintada para uma altura h, usando a notação.

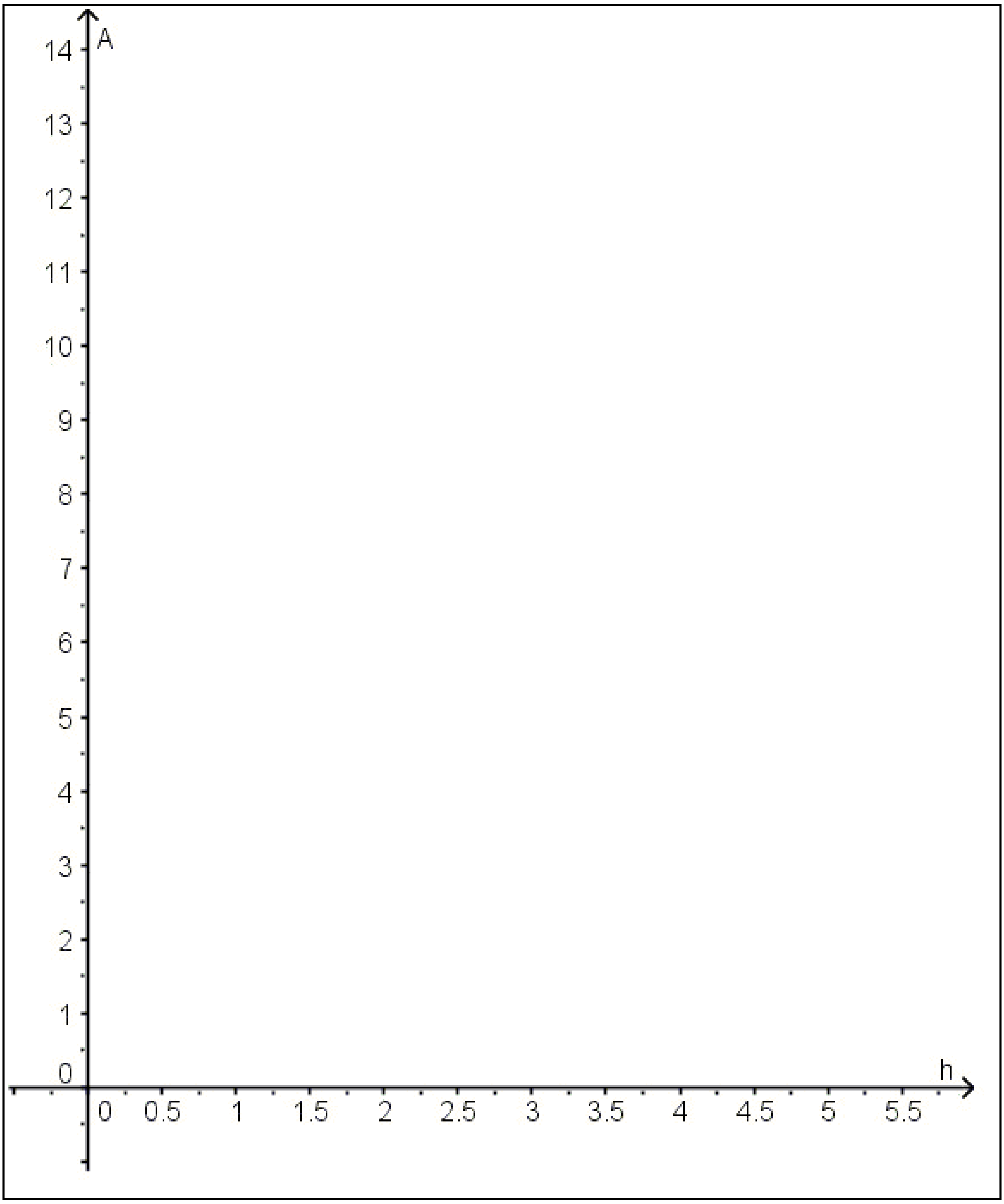


Figura 38: Folha 3 - Atividade 3 - Sistema de coordenadas com altura no eixo horizontal e área pintada no eixo vertical

Os itens (d) e (e) pretendem tratar do domínio e da imagem dessa função, isto é, perceber que eles são intervalos fechados e contínuos de números reais. Para isso, os estudantes terão que julgar se determinados valores podem ser altura da pintura, e também área da parte pintada. Entre os valores dados existem inteiros, racionais (decimais, frações e dízimas) e irracionais. Após responder cada item afirmamos que o intervalo é de números reais e o estudante deve completar quais os extremos desses intervalos.

(d) Na tabela temos alguns exemplos de valores para a altura h.
2,56 m poderia ser um valor de h? ☐ Sim ☐ Não

0,999... m poderia ser um valor de h? ☐ Sim ☐ Não

$\sqrt{2}$ m poderia ser um valor de h? ☐ Sim ☐ Não

4,5 m poderia ser um valor de h? ☐ Sim ☐ Não

π m poderia ser um valor de h? ☐ Sim ☐ Não

$\sqrt{3}$ m poderia ser um valor de h? ☐ Sim ☐ Não

Qual o intervalo de números reais que podem ser a altura desta faixa? R: [0 ;____]

Figura 39: Folha 3 - Atividade 3 - Itens para interpretação do domínio

(e) Na tabela temos também os respectivos valores para a área pintada.

$5\ m^2$ poderia ser um valor de A? ☐ Sim ☐Não

$12\ m^2$ poderia ser um valor de A? ☐Sim ☐Não

$0,75\ m^2$ poderia ser um valor de A? ☐ Sim ☐Não

$\frac{7}{5}\ m^2$ poderia ser um valor de A? ☐ Sim ☐Não

$\sqrt{87}\ m^2$ poderia ser um valor de A? ☐Sim ☐Não

$17\ m^2$ poderia ser um valor de A? ☐ Sim ☐Não

$-2\ m^2$ poderia ser um valor de A? ☐ Sim ☐Não

Qual o intervalo de números reais que podem ser a área desta faixa? R: [____ ; ____]

Figura 40: Folha 3 - Atividade 3- Itens para interpretação da imagem

Em seguida há uma questão sobre a representação gráfica de vários valores, onde esperamos que se perceba que os pontos estão alinhados, formando um segmento de reta. Finalmente, questionamos sobre os conjuntos domínio e imagem.

Se você representar todos esses pares de números no sistema de de coordenadas cartesianas da página anterior, o que vai aparecendo na figura? R:________________________________

(f) Qual é:
i. Domínio de A(h) =
ii. Imagem de A(h) =

Figura 41: Folha 3 - Atividade 3 - Interpretação do gráfico e conjuntos para o domínio e imagem da função

Acreditamos que os estudantes podem ter dificuldades para perceber que um número irracional pode ser a altura de uma faixa pintada. Assim como uma raiz quadrada representar um valor de área. Esperamos que se perceba que esses são simplesmente representações de números e o que determinará sua inclusão no domínio ou na imagem é estar entre [0;3] para a altura e [0;15] para a área.

4ª atividade: Velocidade constante

4. Velocidade constante

Um caminhão percorre uma estrada com velocidade constante igual a 40 km/h.

(a) Qual será a distância percorrida após:

i. 2h. R:_____

ii. 3h. R:_____

iii. 1h e 30min. R:_____

iv. 15 min. R:_____

(b) Escreva a fórmula da distância percorrida d, em função do tempo t.

d(t) = __________________

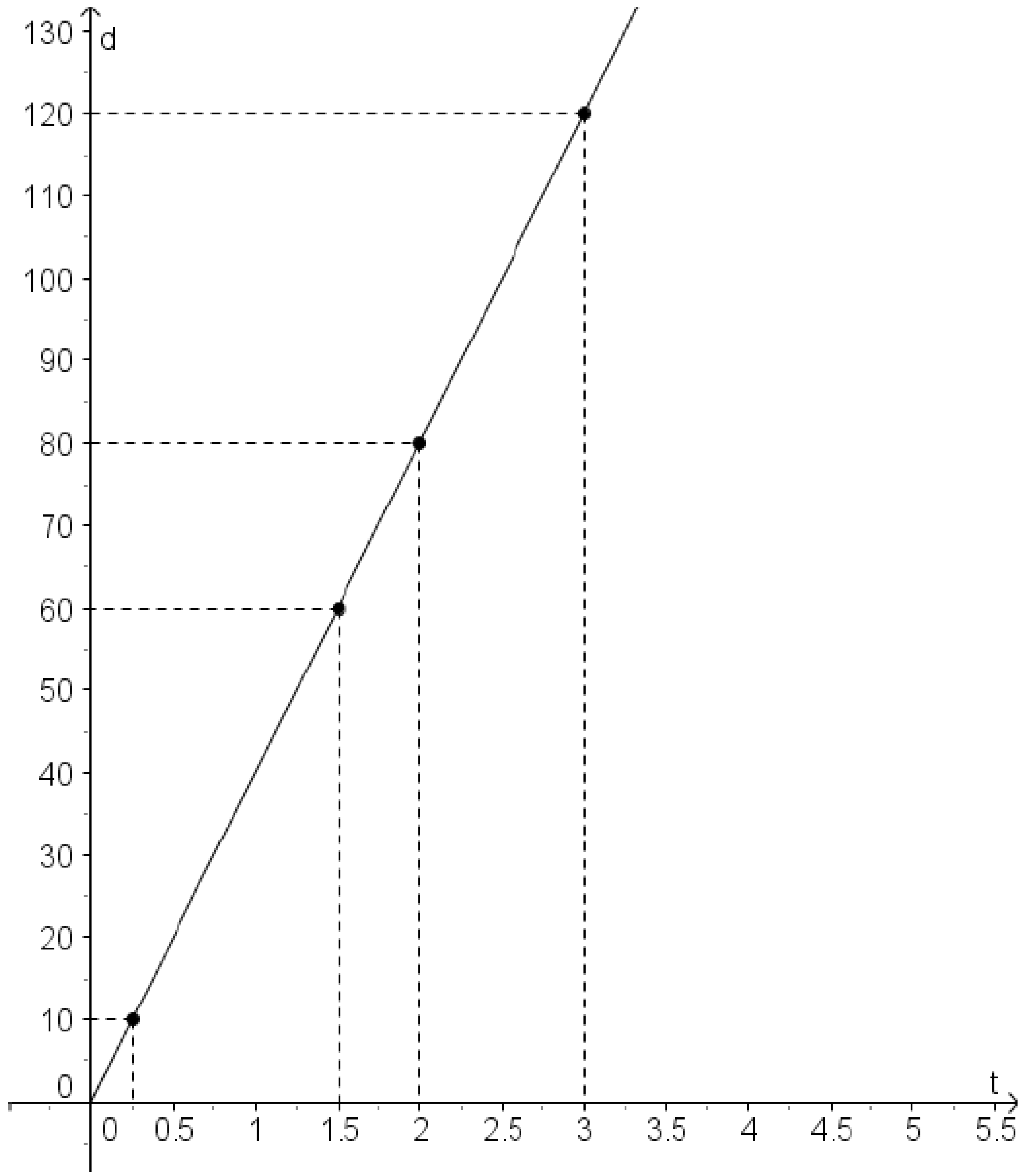
Se fôssemos construir uma tabela com todos os valores de t e marcássemos os pontos em um sistema cartesiano obteríamos uma linha contínua. Esta linha chama-se <u>*gráfico*</u>.

Figura 42: Folha 3 - Atividade 4 - Enunciado, itens de familiarização, generalização e texto explicativo

Como última atividade apresentamos uma situação que envolve um veículo com velocidade constante de 40km/h e desejamos saber a distância percorrida após um certo período de tempo. Depois de um item de familiarização e da obtenção da expressão para a função distância em relação ao tempo, apresentamos o gráfico da função. Os pontos em destaque na semirreta são os mesmos do item inicial da atividade. Colocamos essa atividade , com o gráfico pronto, como um recurso de sedimentação do conhecimento anteriormente trabalhado. Assim, se alguns estudantes ficaram com dúvida, na atividade anterior, que o gráfico é uma linha contínua, esperamos que, com a presente atividade, dirimir essa dúvida.

O último item pede um gráfico para um veículo com velocidade constante de 60 km/h. Aqui os estudantes deverão desenhar inclusive o sistema de coordenadas cartesianas.

Veja como ficaria:



(c) Suponha que o carro ande a uma velocidade de 60 km/h. Faça o gráfico desta situação.

Figura 43: Folha 3 - Atividade 4 - Apresentação do gráfico da função

A dificuldade pode surgir no momento de escolher as escalas para os eixos e no desenho da semirreta, ela pode extrapolar a origem.

4.7 Conclusão da análise a priori

A análise das folhas de atividade proporciona uma maior clareza sobre o processo que desejamos que os estudantes percorram. Além disso, permite esclarecer os pré-requisitos esperados da classe e também os objetivos de cada atividade.

Essa análise serve ainda para que um professor que pretende utilizar o material possa planejar as aulas anteriores e posteriores à aplicação das folhas e até mesmo prever a inserção ou não de aulas com caráter mais teórico entre uma atividade e outra.

Devemos também comparar nossas expectativas aqui relatadas com as observações extraídas da análise das resoluções das folhas pelos estudantes. Assim seremos capazes de detectar alguns pontos sobre o quanto pode-se prever acontecimentos e determinar direções em sala de aula através de atividades em grupo.

CAPÍTULO 5

APLICAÇÃO DAS FOLHAS DE ATIVIDADES

5.1 Introdução

As discrepâncias sociais de nosso país são largamente conhecidas e se fazem notar em vários momentos do dia-a-dia. Um professor do Ensino Médio que leciona na rede privada e na rede pública, provavelmente, se sente transitando entre dois mundos. É óbvio ser impossível prever ou determinar todas as influências que o ambiente causa no indivíduo, mas como isso pode ser muito relevante para o ensino/aprendizado buscamos duas realidades distintas para aplicar as folhas de atividades. Assim pudemos obter impressões de fontes diferentes, sem nunca comparar resultados, pois somos incapazes de prever todas as variáveis dessa complexa rede de influências que é a vida em sociedade.

Neste capítulo vamos apresentar as escolas onde foram aplicadas as atividades, bem como os locais onde cada uma está inserida. Apresentaremos as professoras responsáveis em cada classe e faremos a descrição do momento da aplicação. Analisaremos ainda as respostas dos grupos verificando erros e dificuldades, confrontando-os com o que era esperado na análise a priori. Alguns episódios que considerarmos importantes serão analisados mais detalhadamente.

5.2 Descrição do contexto

As escolas em que aplicamos as Folhas de Atividades não foram selecionadas por nenhum critério, foram escolhidas por questões de ordem prática, sendo assim acreditamos que elas representem uma amostra aleatória do Ensino Médio do interior do Estado de São Paulo. Passamos a descrevê-las.

Escola Estadual – Campinas – SP

Localizada na periferia de Campinas, a Escola Estadual atende a população da própria região. Oferece turmas desde a primeira série do Ensino Fundamental até o terceiro ano do Ensino Médio.

A infra-estrutura é bastante satisfatória, com muitas salas de aula, pátio, cozinha, biblioteca e duas quadras esportivas. O prédio não é novo, mas durante a aplicação das atividades estava passando por reformas.

Os estudantes do Ensino Médio da Escola Estadual são, em geral, de classe média-baixa.

A professora F., que trabalha na escola há 10 anos, leciona também em um colégio da rede municipal de Valinhos e participa das atividades do GDS (Grupo de Sábado) – um subgrupo do PRAPEM-CEMPEM (Prática Pedagógica em Matemática - Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática) da FE/Unicamp que congrega professores de Matemática e docentes da área de Educação Matemática da FE/Unicamp em um ambiente de trabalho colaborativo, para estudar, compartilhar, discutir, investigar e escrever sobre a prática pedagógica nas escolas. A professora F. já tem dois artigos publicados em livros desse grupo.

As folhas de atividades propostas nesta dissertação foram aplicadas em duas classes de 1° ano da escola entre os dias 04 e 07 de maio de 2009, num total de 5 aulas por classe.

Cooperativa – Araraquara – SP

A Cooperativa de Araraquara oferece turmas desde o maternal até o Ensino Médio. É localizada em um bairro afastado do centro de Araraquara, possui uma ótima infra-estrutura, com muitas salas de aula, laboratórios, áreas verdes, biblioteca, sala de vídeo, pátio, quadra esportiva, e um amplo espaço para circulação.

A professora P. leciona matemática na Cooperativa há 8 anos. Atualmente trabalha nas cinco turmas do Ensino Médio, duas do primeiros ano, uma do segundo e uma do terceiro. P. também leciona em uma escola da rede estadual de Araraquara e, na época da aplicação, era mestranda do programa de pós graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos.

As folhas de atividades propostas nesta dissertação foram aplicadas em duas turmas do primeiro ano do Ensino Médio nos dias 23 (quinta-feira) e 24 (sexta-feira), de abril, de 2009, um total de quatro aulas, três no dia 23 e uma no dia 24.

5.3 Aspectos gerais da aplicação

A aplicação das folhas ocorreu de forma bem parecida em cada uma das quatro classes. A pesquisadora se apresentava e explicava como seria a dinâmica daquelas aulas, ou seja:

a) A classe seria dividida em grupos;

b) Os componentes dos grupos deveriam discutir entre si a solução das atividades;

c) Caso não chegassem a um consenso a pesquisadora poderia ser chamada;

d) Tudo deveria ser respondido na própria folha;

e) Os grupos deveriam ser mantidos durante toda a aplicação.

Na Cooperativa os grupos eram predominantemente de três estudantes de acordo com o costume das turmas. Na Escola Estadual formaram-se duplas, por sugestão da professora da escola, pois nesta configuração há uma garantia maior de que os estudantes troquem ideias e não se dispersem.

A primeira utilização das folhas realizada na Cooperativa gerou pequenas alterações antes da aplicação na Escola Estadual, uma delas foi a diminuição das quantidades solicitadas nas atividades 5 e 6 da primeira sequência de folhas.

Durante a primeira aplicação das Folhas de Atividade, na Cooperativa, notamos a necessidade de que cada estudante tivesse uma cópia para acompanhar a leitura dos enunciados. Com isso, não vimos a necessidade de recolher todas as cópias no final da aula. Apenas uma das folhas de cada grupo, deveria der devolvida.

As principais dificuldades encontradas pelos grupos durante a aplicação estão listadas abaixo. Essas foram questões que surgiram nas duas escolas em mais de um grupo em cada classe, justificando assim este relato bem como uma revisão dos respectivos enunciados.

- A ordem da árvore genealógica, quanto mais alto mais velho (folha 1);
- p(m(Denise)) é pai “e” mãe de Denise (atividade 2 da folha 1)?;
- Justificar com palavras a atividade 3 da folha 1;
- Mais de uma solução na atividade 4 da folha 1;
- Muitos casos para completar os itens 5 e 6 da folha 1 (maneiras de chegar em Brenda e em Lucas);
- A questão sobre domínio, contra-domínio e imagem (13 da folha 1);
- As justificativas e exemplos do porque as relações da árvore genealógica não são funções (14 da folha 1);
- Como deveria ser preenchida a tabela sem rótulos e sem valores da atividade do chiclete;
- A n-ésima linha da tabela da atividade dos quadrados pintados;
- Como é a expressão da função da atividade “Vamos tomar um suco?”.

5.4 Análise da aplicação na Escola Estadual

Em cada sala tivemos 5 aulas de 50 min, o que corresponde a todas as aulas de matemática da semana. A pesquisadora foi muito bem recebida pelos estudantes, principalmente por seus ex-alunos, do período em que lecionou nessa escola.

A professora F. esteve presente quase todos os dias, apenas teve que se ausentar na sexta-feira, dia 08/05/09. Mesmo assim a aplicação aconteceu normalmente.

A primeira aplicação foi em uma segunda-feira, na terceira aula do dia. Estavam presentes 25 estudantes do 1EMA (primeiro ano do Ensino Médio A). A classe formou 11 duplas e um trio, formação que não pode ser mantida nas outras aulas, pois muitos estudantes faltavam.

As atividades em grupo requerem naturalmente que os estudantes conversem, além disso, a pesquisadora ficava disponível para ser chamada pelos grupos.

A segunda aplicação, dia 06/05/09, foi assim: duas aulas no 1EMA (primeira e segunda) e duas no 1EMB (quarta e quinta). Neste dia, 28 alunos estavam presentes na turma 1EMA. Formamos 11 duplas e dois trios sendo que uma dupla era nova.

No 1EMB, com 21 estudantes. Formamos 10 duplas. Um aluno preferiu ficar sozinho, apesar de trocar ideias com alguns colegas.

O 1EMB fez menos perguntas que a outra classe, porém os estudantes pareciam ter mais dificuldades. Concluímos assim que são mais tímidos e receosos em mostrar alguma coisa que possa estar errada. Podemos conjecturar também que talvez os estudantes tenham baixa auto-estima.

A aplicação seguinte foi quinta-feira, dia 07/05/09. Neste dia haviam apenas sete estudantes no 1EMB. Devido a uma reunião dos professores e funcionários da escola, os estudantes seriam dispensados após as três primeiras aulas da manhã. Isso fez com muitos nem fossem à escola. Optamos por montar três duplas sendo que uma iria iniciar as folhas neste dia e uma estudante ficou sozinha, sendo orientada bem de perto pela pesquisadora.

Apesar da grande ausência no 1EMB, na sala do 1EMA estava com um total de 19 estudantes. Formamos então as duplas antigas possíveis e misturamos outras. Uma garota iniciou neste dia as folhas e preferiu ficar sozinha.

As duas últimas aulas com aplicação foram na sexta-feira, dia 08/05/09, para as duas turmas. Mesmo sem a professora F. os estudantes se comportaram e se dedicaram à atividade, apesar de esboçarem um certo cansaço daquele estilo de aula.

A ausência em massa no 1EMB propagou-se, e apenas 6 estudantes estavam presentes. Por causa disso, tivemos várias situações: uma dupla que participou de todos os dias da aplicação, outra dupla que fez as folhas na segunda-feira e na terça-feira e outros dois estudantes fariam a atividade pela primeira vez e preferiram ficar sozinhos.

Os estudantes do 1EMA não se ausentaram como na outra sala. Neste último dia tivemos duas aulas, no primeiro horário, com 25 presentes e no quarto horário, com 23 presentes. Os grupos demonstraram cansaço, mas mesmo sem a presença da professora F., dedicaram-se às atividades.

5.4.1 Análise dos resultados das Folhas de Atividades 1

As Folhas de Atividades 1 foram respondidas por um total de 26 grupos.

Atividade 1

Essa é a atividade sobre árvore genealógica. Na Escola Estadual obtivemos um índice de erro de 5,8% considerando 26 grupos e 6 itens nessa atividade.

Um exemplo de erro, cometido pela mesma dupla, foi: m(Brenda) = Maria (deveria ser Joana) e m(Denise) = Maria (deveria ser Brenda). Podemos observar que o grupo errou nos dois únicos itens que se referiam a relação “mãe”, uma possível coincidência ou então o fato do exemplo de m(x) estar deslocado no texto (vide apêndice I).

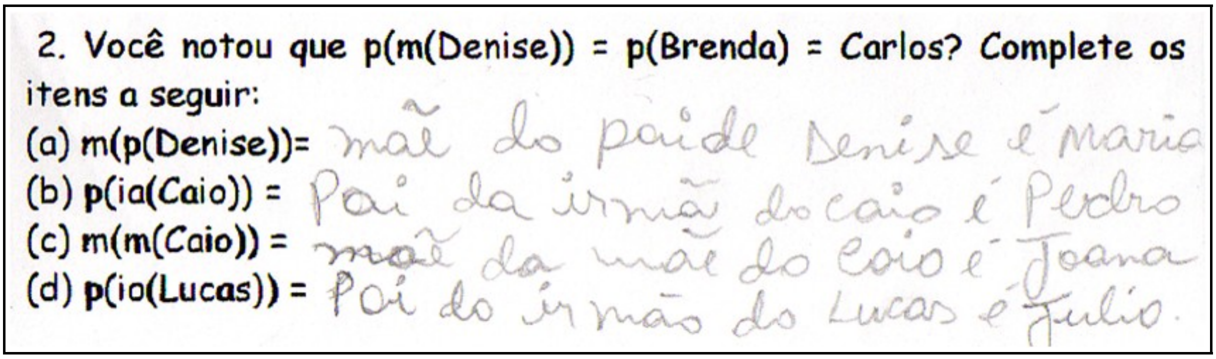
Consideramos que os estudantes compreenderam a proposta da estrutura lógica da árvore genealógica e que começaram a se familiarizar com o diagrama e com a notação. Julgamos que se prepararam para prosseguir nas atividades.

Atividade 2

Essa atividade admite dois tipos de respostas: direta fornecendo apenas o nome final, por exemplo, p(ia(Caio)) = Pedro, ou realizando como sugerido no enunciado, isto é, colocando os nomes intermediários, por exemplo, m(m(Caio)) = m(Brenda) = Joana.

As resoluções usando a forma intermediária foi muito reduzida, 8% e, mesmo assim, um desses grupos não utilizou a notação sugerida, apenas escreveu o passo intermediário separado por barras.

Um grupo escreveu por extenso a notação, como no exemplo abaixo:



2. Você notou que p(m(Denise)) = p(Brenda) = Carlos? Complete os itens a seguir:

(a) m(p(Denise))= mãe do paide Denise é Maria

(b) p(ia(Caio)) = Pai da irmã do caio é Pedro

(c) m(m(Caio)) = mãe da mãe do Caio é Joana

(d) p(io(Lucas)) = Pai do irmão do Lucas é Julio.

Figura 44: Exemplo de solução correta - Folha 1 - Atividade 2

Esse artifício deve ter facilitado o entendimento para obtenção da resposta correta e também para compreensão da notação.

A Atividade 2 apresenta uma dificuldade lógica adicional, a de composição de relações. Conforme previsto na análise prévia, alguns grupos interpretaram m(p(Denise)) como “ mãe e pai de Denise” e responderam “Pedro e Brenda”. O item (c), construído para colocar em cheque essa interpretação, ajudou alguns grupos e outros, não.

Na maior parte dos casos, o erro mencionado acima se propagou para todos os itens da atividade e tivemos 64% de respostas erradas. Sendo assim, imaginamos que o exemplo do enunciado da atividade não foi compreendido, ou os grupos leram sem a devida atenção.

As dificuldades observadas na Escola Estadual nos levaram a tomar duas providências na proposta final para a Folha de Atividades 1:

a) Melhorar a redação do enunciado da Atividade 2;

b) Postergar as Atividades 2 e 3 para depois da Atividade 4.

Atividade 3

Os dois cálculos dessa Atividade são do mesmo tipo da Atividade 2 quando considerados isoladamente. Para responder à pergunta o estudante precisaria concluir que:

io(p(Denise)) = io(Pedro) = Lucas e

p(io(Denise)) = p(Caio) = Pedro

Na Escola Estadual, houve 30% de erro. Dentre os que erraram, quase todos não fizeram o cálculo. Responderam "sim" usando o seguinte raciocínio: "só mudou a posição" ou "é só inverter a posição". Esses grupos usaram justamente o argumento que procurávamos mostrar que não é válido. Pode-se perceber aqui a dificuldade de entender o que é verificar uma identidade.

Dos grupos que acertaram a resposta "não" apenas três mostraram claramente que haviam efetuado os cálculos. Um deles justificou: "pois Pedro e Lucas são irmãos", ferindo a lógica. Os melhores argumentos foram: "Porque no fim do 1º problema o resultado é Lucas e no 2º é Pedro." e "Porque dão resultado diferente." As demais justificativas foram confusas, como "ele é tio dela". Se vê que é necessário empenhar-se muito para que os estudantes se familiarizem com o uso da escrita como recurso para argumentação.

Atividade 4

Interpretamos que cerca de 80% dos itens foram trabalhados corretamente pelos estudantes, ou seja, ficou clara a ideia de inversão. Dentre os que apresentaram respostas incompletas, mas corretas, a maior parte solicitou à pesquisadora ajuda sobre este ponto, alegando que o espaço não era suficiente para mais que um nome. Portanto entendemos que a Atividade alcançou seu objetivo principal.

Atividade 5

Essas atividades representaram um maior desafio lógico, de modo que o índice de acerto total foi baixo: apenas 1 grupo na Escola Estadual. Entretanto nosso objetivo não é examinar a porcentagem de acerto total, mas verificar se os estudantes, neste ponto do trabalho, se sentem seguros sobre a lógica das relações e as notações.

Verificamos a porcentagem de itens corretos. Obtivemos na Escola Estadual, num total de 260 itens, 146 corretos, ou seja 56% de acerto. Consideramos esse um índice razoável. Porém, imaginamos que os estudantes irão apresentar dificuldades não esperadas nas próximas atividades.

Atividade 6

Nessa atividade, fazendo a mesma análise que foi realizada anteriormente obtivemos um índice de 50% de acerto.

Verificando a Atividade por grupo tivemos 20% totalmente corretos, e esse mesmo índice de atividades em branco. 4% acertaram apenas uma relação, 11% acertaram duas, 15% acertaram três, também 15% acertaram quatro relações, mais 11% acertaram 5 e 4% acertaram seis. As porcentagens mostram que houve uma concentração nos valores três e quatro, ou seja, metade do total esperado.

Dos estudantes que não conseguiram escrever as sete relações pudemos detectar dificuldades de uso da notação. Por exemplo: “Maria(m) = Lucas”, “Julio(p)=Lucas”, “fo(Maria e Julio) = Lucas” e M(Maria) = Lucas. Outros itens interessantes, e que foram considerados corretos, foram: “io de {Pedro}” e “io/ia(Pedro)”.

Percebemos então que a notação não foi tão bem compreendida pelos estudantes dessa escola, entretanto veremos na seção 5.5 que os estudantes da escola Cooperativa não tiveram essa dificuldade. Optamos por não modificar as folhas devido a essa ocorrência, além das modificações já comentadas no final da análise da Atividade 2. Pensamos que esse item das folhas de atividade precisam ser mais pesquisados com estudantes de escolas públicas, pois isso pode se decorrência de vários fatores então exatamente devido a estrutura das folhas apresentadas (dificuldades com escrita, primeira vez que fazem um trabalho desse tipo).

Atividades 7, 8 e 9

As respostas dessas três atividades são diretas e dependem da leitura atenta do enunciado bem como da compreensão do diagrama de setas. Considerando todos os três itens obtivemos um índice de 92% de acerto. Sendo assim entendemos que o diagrama foi bem compreendido e este foi o principal objetivo dessa atividade.

Atividade 10

Na primeira pegunta dessa atividade surge a exigência de manipulação algébrica. A letra " n " é apresentada como um valor da linha superior. Na Escola Estadual os grupos tiveram dificuldades em responder " $n+1$ " como sendo o correspondente, observamos respostas como " 1 ", " -1 ", " n " e " $n-1$ ", sendo que 42% responderam corretamente.

Durante a aplicação das folhas já notamos a necessidade de um destaque maior a respeito da notação "s" para representar o primeiro diagrama de setas e, consequentemente, os itens 7, 8 e 9.

Na segunda parte do item 10, onde deveriam completar algumas sentenças com a notação "s", a taxa de acerto da Escola Estadual foi alta, 92%, os erros não foram concentrados em itens específicos, mas vamos salientar algumas observações. 15% dos grupos não seguiram o exemplo, desrespeitando assim a sequência sugerida pelos sinais de igualdade do texto. Por exemplo: $s(12)=\underline{+1}=13$, ou simplesmente $s(12)=13=\underline{\quad}$.

Outra dupla fez mal uso da notação nos quatro primeiros itens, $s(12)=12+1=s(13)$, porém, nos quatro itens finais essa confusão não aconteceu.

Uma aluna, que fez as atividades sozinha, sem solicitar e nem aceitar qualquer ajuda, parece que preencheu os espaços com valores aleatórios; $s(16)=12$; $s(278)=\underline{\ 3\ }=\underline{281}$; $s(n)=\underline{\ 9\ }$.

Atividade 11

Item (a):

Na Escola Estadual obtivemos 58% dos diagramas completos e 11% deixaram de fazer uma ligação (os números que ficaram sem seta foram -1, 0 ou 1). Destes, 69% que tinham o diagrama montado corretamente, todos reconheceram que se tratava de uma função.

O diagrama de 23% das duplas ficou em branco nos três itens (a), (b) e (c). Apesar disso assinalaram uma das alternativas sobre ser ou não função a relação dada, mas vamos desconsiderá-los já que esperávamos que esta resposta fosse com base na verificação do diagrama preenchido.

Ainda tivemos 8% que fizeram a mesma relação apresentada no exemplo, isto é, -4 com -3, -3 com -2 e assim por diante.

No geral, os grupos conseguiram ler a regra e transcrevê-la no diagrama.

A pergunta sobre d(7) não ofereceu dificuldades, e 85% dos estudantes conseguiram a solução correta. Já na pergunta d(s(10)) tivemos 38% de respostas "20" e 30% de respostas "22" (a correta). Podemos inferir que grande parte dos estudantes não estava atento para o papel da letra "s" na composição de função. Porém conseguiram compreender o significado de d(x).

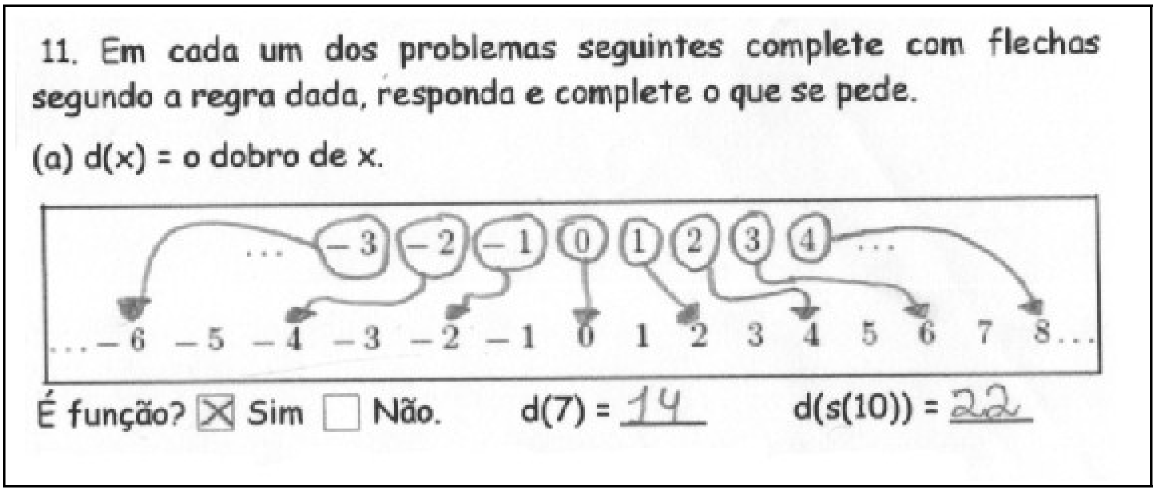


Figura 45: Exemplo de solução correta - Folha 1 - Atividade 11

Item (b):

23% das folhas apresentaram o diagrama completo. 12% só deixaram de fazer a seta do zero. Dessas duplas, com o diagrama praticamente completo, 89% concluíram corretamente que não se tratava de uma função. Sendo assim, acreditamos que o diagrama interferiu positivamente na verificação sobre ser função a relação dada.

Os números 4 e 9 chamam atenção quando se fala em raiz quadrada, pois 61% das duplas apresentaram a ligação do 4 e 2 e também do 9 e 3 (mesmo que de forma trocada).

O enunciado não foi bem compreendido por 12% das duplas já que fizeram a ligação contrária, isto é, ligaram o número ao seu quadrado.

Houve mais uma ocorrência, 4%, com as setas na mesma situação do exemplo e ainda 8% que não apresentaram padrão explícito.

A pergunta “s(r(4)) é igual a r(9)?” foi respondida corretamente em 35% das vezes, sendo que a justificativa com cálculos foi realizada em 55% desses casos. Por exemplo: “Sim pois ambos são 3 $\sqrt{9}=3$, $\sqrt{4}+1=3$ ” e “Sim. Por quê R de 4 é 2 + 1 = 3 e 3.3 = 9”.

Porém, tivemos 30% em branco e, em outros 35%, a solução foi errada, com justificativas incorretas. Por exemplo: “Por 5+4 e igual á 9”, “Pois soma 1, e raiz de 5 não é 9” (somou 1 antes de fazer a raiz) ou “ Não, raiz de 4 é 2 e de 9 é 3”(ignorou o “s” na composição).

Item (c):

Este diagrama foi deixado em branco por 42% da classe. Apenas 8% completaram corretamente todas as ligações. Obtivemos diagramas incompletos, representando 19% do total, sendo que todos eles deixaram pelo menos o zero sem ligação.

Outra particularidade das resoluções foram as duplas que relacionaram apenas os valores positivos, num total também de 19%.

Uma análise sobre cada ligação que deveria ser feita mostra que a percentagem de acerto foi de 37%.

Dos 27% que preencheram minimamente o diagrama, 70% não identificaram a relação como função. Portanto consideramos que o diagrama não se mostrou eficaz na hora de caracterizar a função.

No item da composição de três funções obtivemos 35% de acerto, 42% errados e 23% em branco.

A análise dos três itens nos permite inferir que os estudantes apresentam dificuldades básicas de conteúdos matemáticos e talvez de leitura e interpretação. A disposição do texto, logo abaixo da caixa onde era feito o diagrama, pode ter atrapalhado alguns deles. Se houvesse mais espaço para as respostas, poderia beneficiar o entendimento. Nas folhas de atividades reformuladas procuramos deixar mais espaço para essas respostas com a reformulação do enunciado da Atividade

13.

Atividade 12

Item (a):

Mais da metade da turma, 54%, não identificaram corretamente a relação apresentada. Uma possível fonte de erro pode ser o fato de apresentarmos uma regra que descreve como a relação está sendo feita, isso pode ter levado as duplas a julgarem que já se tratava de uma função.

Item (b):

Observamos que todos os grupos que marcaram corretamente o item anterior acertaram este também. Isso pode nos indicar que tais grupos (46%) usaram e/ou compreenderam as definições fornecidas.

Dos que erraram o item (a), alguns acertaram o (b), gerando assim um índice de 57% de acerto para tal questão. Porém, dos que acertaram na determinação de que o diagrama representa uma função, apenas 30% conseguiram justificar. Por exemplo: " $x-1$ " é uma solução que mostra certo domínio algébrico, já que a varável x não foi citada neste item. A justificativa "multiplicar por -1" pode caracterizar a falta de familiarização com linguagem algébrica.

Observamos ainda uma justificativa que enfatiza o caráter posicional dos números inteiros na reta real: "A regra é: cada número está relacionado com outra posição ou seja onde é negativo liga no positivo vice-versa."

Item (c):

A resposta correta foi marcada por 85% dos grupos.

Mesmo não sendo solicitado no enunciado, alguns grupos deram a regra que determina a relação, por exemplo: "A regra é: x soma 1 para a direita e diminui 1 para a esquerda."

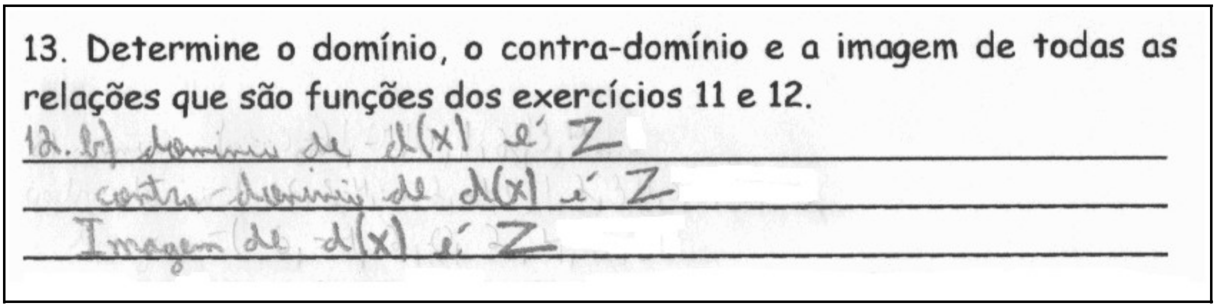
Os que afirmaram que a relação é uma função deveriam ter dado uma descrição, porém isso só ocorreu em 37% das vezes. Algumas delas foram: "Somar 1 e tirar 1", "Esta aumentando 1 e diminuindo 1" e "Regra é: some +1 e -1", observamos então que, apesar de compreenderem qual é a relação, não souberam analisar as características necessárias para ser função.

Concluímos que seria mais interessante para a pesquisa, pedir justificativas das respostas em todos os itens e não apenas a descrição da relação caso ela fosse de fato uma função. Os textos redigidos pelos estudantes ajudam a perceber melhor o raciocínio que os levou às conclusões apresentadas. A escrita também pode ajudar a detectar pontos específicos que geram confusão entre eles. Nas folhas de atividades reformuladas acrescentamos a solicitação de justificativa para os estudantes.

Atividade 13

Apenas 11% dos grupos conseguiram formular resoluções com domínio, contra-domínio e imagem das funções. Além dos 42% que erraram, tivemos outros 42% que escreveram os conjuntos apenas com os valores apresentados nos quadros, sem notar que a lista prosseguia.

Apesar do baixo índice de acerto, a maior parte da classe, 53% (11 + 42), soube distinguir entre domínio, contra-domínio e imagem. Acreditamos que a maior dificuldade foi a notação de conjuntos e a percepção de que as listas de números dentro dos retângulos continuavam indefinidamente. Encaramos esse uma pendência de conteúdo. Assim consideramos a atividade válida, surgindo apenas a ideia de fornecermos mais espaço para a resposta. Isso foi feito na reformulação das folhas.


13. Determine o domínio, o contra-domínio e a imagem de todas as relações que são funções dos exercícios 11 e 12.

12. b) domínio de d(x) é Z

contra-domínio de d(x) é Z

Imagem de d(x) é Z

Figura 46: Exemplo de solução parcialmente correta - Folha 1 - Atividade 14

Atividade 14

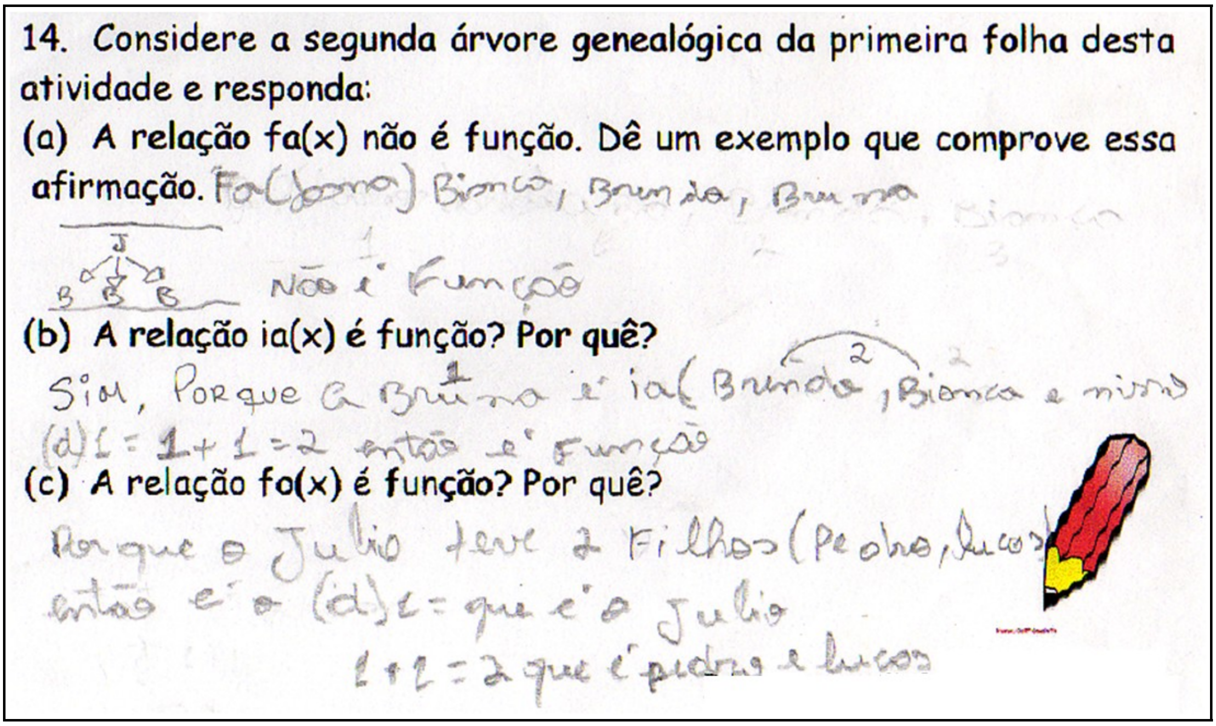
A pesquisadora auxiliou a maior parte dos grupos na justificativa do item (a). E 37% dos grupos deram e usaram a mesma justificativa para os dois itens seguintes. Algumas justificativas foram:

"Por que por exemplo Joana está ligada a 3 filhas então não é função"

"Não é função, pois está relacionado mais de um".

Um caso interessante foi a justificativa correta, com exemplo em todos os itens de uma dupla. O que chama a atenção é a tentativa de relacionar a árvore genealógica com notação " $d()$ ", abaixo temos a imagem do que os estudantes escreveram.

Mesmo com o erro ao afirmar que se trata de uma função, a dupla apresentou um exemplo que mostra que a relação não é função. No geral desta folha a dupla se saiu bem, acertando mais atividades que a maioria da classe, porém é perceptível, no decorrer da folha, a dificuldade em relação à notação.


14. Considere a segunda árvore genealógica da primeira folha desta atividade e responda:

(a) A relação fa(x) não é função. Dê um exemplo que comprove essa afirmação. Fa(Joana) Bianca, Brunda, Bruna

Não é Função

(b) A relação ia(x) é função? Por quê?

Sim, Porque a Bruna é ia(Brunda, Bianca e nisso (d)1 = 1+1=2 então é função

(c) A relação fo(x) é função? Por quê?

Porque o Julio teve 2 Filhos (Pedro, lucas) então é o (d)1 = que é o Julio 1+1=2 que é pedro e lucas

Figura 47: Exemplo de solução correta - Folha 1 - Atividade 14

Uma sugestão para comprovar a compreensão é pedir um exemplo em cada item.

5.4.2 Análise dos resultados das Folhas de Atividades 2

Atividade 1

Essa atividade foi respondida por 16 grupos.

Como já era esperado os itens a, b e c foram completados corretamente por todas as duplas que fizeram a atividade.

Com uma porcentagem de 75% de acertos até o item (d), completar a expressão, acreditamos que a atividade foi proveitosa.

O erro mais frequente observado nas respostas para o domínio e imagem foi não perceber que os conjuntos poderiam continuar além da tabela. Metade dos grupos, que não deixou em branco a questão, cometeu esse mesmo erro. Para estimular essa percepção deixamos uma coluna em branco no final da tabela.

<u>Atividade 2</u>

Ainda com os 16 grupos, os itens (a) e (b) tiveram um alto índice de acerto: 75% para o primeiro e 62% para o segundo. Porém, a obtenção da expressão foi mais complicada, sendo que 31% conseguiram a fórmula correta.

Algumas respostas imprecisas mostraram que os estudantes conseguiam vislumbrar o que deveria ser feito, mas não deviam possuir a intimidade necessária com ferramentas algébricas, por exemplo;

"t(n) = diminuição"

"t(n) = t – 0,15"

"t(n) = n – 2"

"t(n) = 15, n"

Todas essas respostas apresentam algum passo da solução correta.

A maior quantidade de chicletes que Pedro poderia comprar foi obtida por 81% dos grupos.

Esperávamos que a tabela fosse preenchida com a quantidade de chicletes e o troco correspondente e tivemos 38% feitas dessa forma, mesmo que nem todas estivessem completas, apenas 19% do total estavam corretas e com os conjuntos domínio e imagem também corretos. Outros 19% preferiram colocar na tabela os valores a serem pagos, mas estes não conseguiram obter o domínio e a imagem da função.

Esta atividade mostrou uma maior dificuldade dos estudantes em lidar com formas algébricas mais elaboradas e também com números decimais.

Atividade 3

O início desta atividade foi bem resolvido por 93% da classe, até o preenchimento da primeira coluna da tabela, inclusive com a generalização para a quantidade de quadradinhos azuis. Só tivemos 15 grupos que chegaram até este ponto das atividades.

Já a segunda coluna, que fornecia a quantidade de quadradinhos azuis, foi corretamente completada por 80% até a oitava linha. O salto de valores, da 8ª figura para a 15ª, provocou complicações, sendo que 42%, dos que acertaram até a oitava linha, errou este valor.

A expressão para os quadrados brancos ficou correta em 50% das folhas.

A grande maioria percebeu que o total de quadrados seria dado pela soma dos azuis e brancos, mas como muitos valores estavam errados, 50% concluíram o preenchimento dos números da tabela adequadamente. Alguns grupos erraram apenas no valor para a 15ª Figura. A expressão do total aparece correta em 25% dos casos.

Os itens seguintes pretendiam gerar a formalização das expressões gerais como função para o total de quadradinhos. O primeiro deles, para total de quadradinhos azuis, ficou correto para 80% dos grupos, quase que a totalidade dos que preencheram corretamente toda essa coluna da tabela. Esta informação indica que houve uma boa compreensão dos objetivos da atividade. Os outros itens não tiveram muitos acertos pois a informação já não tinha sido obtida na tabela.

Mesmo assim, constatamos que houve uma transferência razoável entre os dados da tabela e a expressão da função, julgamos que foi uma atividade proveitosa para os estudantes.

Atividade 4

A Atividade 4 tem início com uma sequência de figuras e os grupos (15 no total) são solicitados a desenhar a próxima figura, mais da metade (53%) desenharam corretamente. É curioso que 27% deixaram em branco e os outros 20% não tenham feito o desenho esperado. O erro no desenho não significou o não entendimento da atividade, já que a quantidade de lápis necessários para a figura estava correta em 2/3 delas, bem como o preenchimento das lacunas dos itens seguintes.

Podemos constatar que há uma grande necessidade de praticar representações através de imagens, mesmo que os estudantes já estejam no Ensino Médio.

A regularidade dos valores que deveriam ser colocados na tabela era bem simples e foi percebida por 93% dos estudantes. Porém, o salto de 7 para 10 triângulos, passou despercebido para 36% desses grupos. Além disso, é possível notar, pelas marcas de lápis, que 87% dos que acertaram a tabela completa, em algum momento, apagaram o valor errado para 10 triângulos (17) e escreveram o correto (21), comprovando, mais uma vez, a falta de atenção na leitura dos enunciados.

Os itens (e) e (f) ficaram certos em 40% das folhas. 13% dos grupos obtiveram a expressão correta, mesmo tendo errado no item anterior. Isso pode ser indício de que um grupo passou a resposta para outro.

Notamos também que a expressão obtida foi escrita usando-se a letra “n” em 62% dos casos, sendo que a sugestão do enunciado era usar a letra “T”. Consideramos que essa troca ocorreu porque a maioria dos estudantes percebeu a progressão aritmética que formou-se na tabela e a letra usual deste conteúdo é o “n”.

(d) Termine de preencher os valores correspondentes na tabela abaixo, onde T é a quantidade de triângulos formados com L lápis;

Triângulos - T	1	2	3	4	5	6	7	10
Lápis - L	3	5	7	9	11	13	15	21

(e) Usando L(T) para dizer "lápis necessários para formar T triângulos", calcule:

i. L(10) = 21

ii. L(15) = 31

iii. L(22) = 45

iv. L(16) = 33

(f) Qual poderia ser uma fórmula geral para obter a quantidade L(T) de lápis necessários para construir T triângulos?

L(T) = n . 2 + 1

Figura 48: Exemplo de resposta correta, mas com o uso de "n" como variável independente - Folha 2 - Atividade 4

Na obtenção dos conjuntos domínio e imagem, apenas 13% notaram que tais conjuntos poderiam ser ilimitados, outros 40% apenas copiaram os valores da tabela, colocando o domínio {1,2,3,4,5,6,7,10} e a imagem como sendo {3,5,7,9,11,13,15,21}. Inclusive sem considerar o salto entre 7 e 10 e entre 15 e 21, respectivamente.

A associação do conceito de função com progressões aritméticas é um tópico importante e a atividade ajudou nessa ligação.

Atividade 5

Dos 16 grupos que trabalharam na Folha de Atividade 2, dois deles não fizeram essa atividade.

A maioria da classe desenhou a próxima figura da sequência. Desconsiderando a última coluna da tabela (que gerou confusões pois o “q” foi interpretado como 9), 86% dos grupos errou um ou nenhum valor da tabela. Quando houve o erro foi na quantidade de palitos correspondente a 10 quadrados.

As expressões corretas usaram, em 60% das vezes a letra “n” para representar a quantidade de quadrados. E 36% do total obteve uma fórmula correta.

Nenhum grupo escreveu de forma satisfatória os conjuntos domínio e imagem.

Apenas 7% da classe usou corretamente a notação na hora de escrever a fórmula geral. Tendo em vista essas dificuldades, fizemos pequenas alterações nessa atividade.

5.4.3 Análise dos resultados das Folhas de Atividades 3

Atividade 1

O primeiro item fornecia um sistema de coordenadas cartesianas com 5 pontos marcados, a seguir era apresentada uma lista de coordenadas e os estudantes deveriam dizer a qual ponto os valores se referiam. Do total de 13 grupos 54% fizeram a relação dos cinco pontos corretamente. Os erros se deram na maioria dos casos nas coordenadas (-1;3) e (3;-1).

No item seguinte eram dadas três pares ordenados e os grupos deveriam marcar o ponto corresponde no sistema cartesiano. Apenas 8% dos estudantes marcaram todos corretamente. A confusão ficou por conta dos pares (5;0) e (0;2).

Não esperávamos encontrar tantos grupos sem o domínio pleno de identificar e marcar pontos no sistema cartesiano. Provavelmente, as próximas atividades ficaram comprometidas sem esse conceito bem fixado.

A Atividade 1 serviu como diagnóstico deste conteúdo, e mostrou que neste ponto da sequência didática deveríamos ter uma pausa para fazer uma retomada do conteúdo de sistema de coordenadas cartesianas.

É interessante notar que uma falha recorrente entre as respostas observadas é a representada na figura abaixo, onde os pontos que deveriam ficar sobre os eixos ficam apenas próximos.

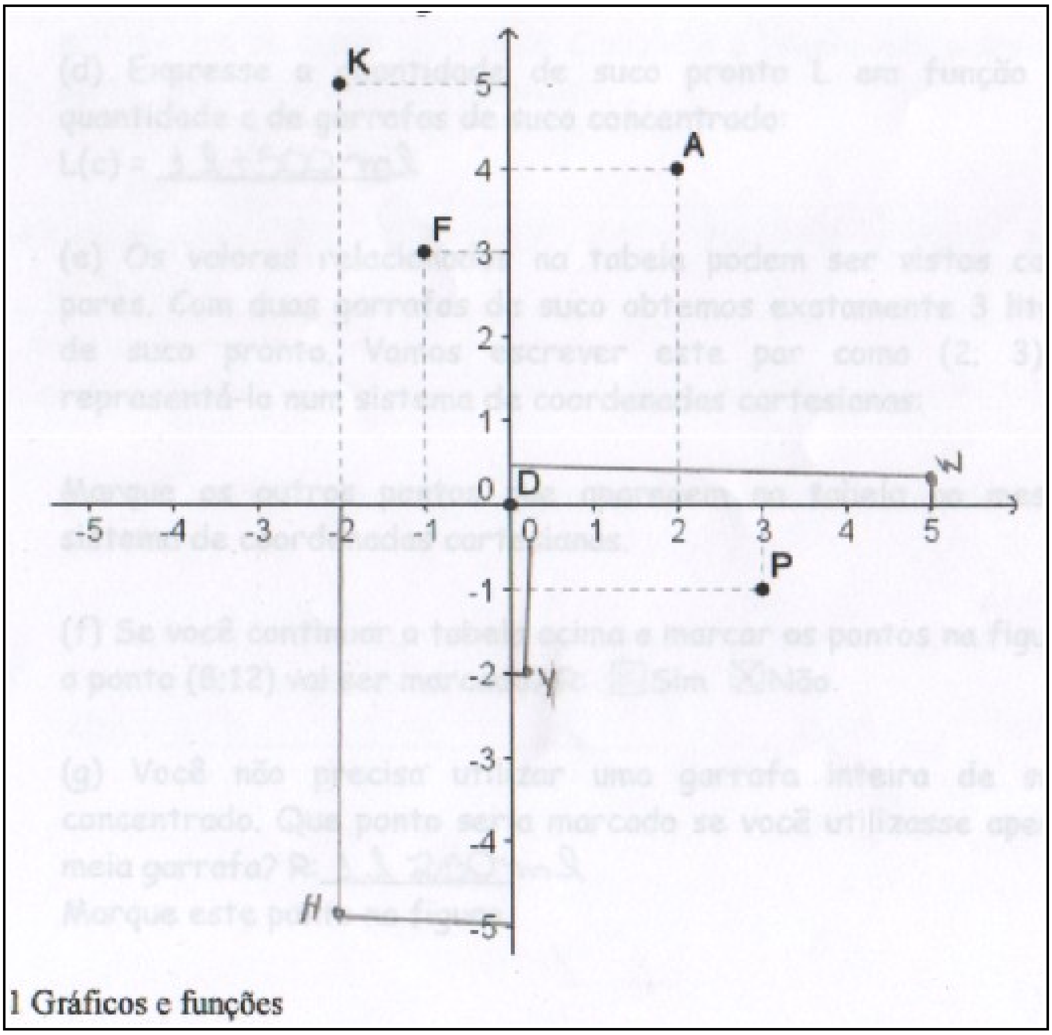


Figura 49: Exemplo de erro recorrente - Folha 3 - Atividade 1

Atividade 2

A atividade gerou dúvidas e vários grupos (12 no todo) não perceberam a regra para diluição do suco. Geralmente se esqueciam de acrescentar o volume do suco concentrado ao volume de água utilizado.

Observamos que 75% completaram o item (a), 58% o item (b) e 50% preencheram toda a tabela corretamente.

A fórmula foi obtida por 50% (não os mesmos que preencheram toda a tabela), sendo que 17% utilizaram claramente, como podemos observar na figura abaixo, a fórmula do termo geral de uma progressão aritmética. Esses grupos não fizeram uso da notação sugerida, usando “n” como a variável ao invés de c.

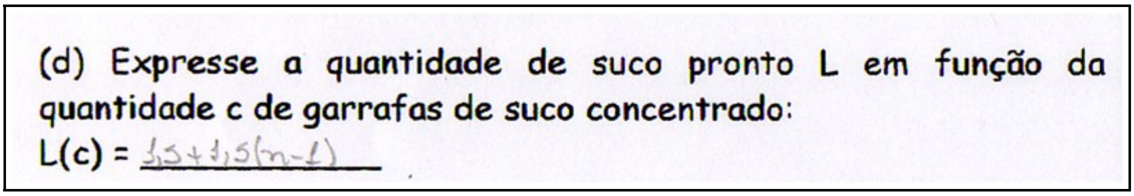

(d) Expresse a quantidade de suco pronto L em função da quantidade c de garrafas de suco concentrado:
L(c) = 1,5+1,5(n-1)

Figura 50: Exemplo de solução correta, porém com o uso da variável "n" ao invés da sugerida "c" - Folha 3 - Atividade 2

Os pares ordenados foram marcados por apenas 33% dos grupos (todos eles haviam completado a tabela). Mas nenhum, destes 33%, afirmou que o par (8;12) seria marcado. Desconsideramos as respostas desse item para os grupos que não conseguiram completar a tabela e nem marcar os pontos. Outros 8% do total trocaram a coordenada horizontal e vertical.

O item foi respondido satisfatoriamente por apenas 8% dos estudantes. Houve respostas “0,25”, “250ml”, “0,5” mas sem mais explicações e sem o ponto no sistema cartesiano.

A pergunta referente ao aumento de pontos no sistema cartesiano ficou em branco em 50% das folhas. Algumas respostas foram: “uma linha”, “Uma linha diagonal”, “mais números” e “Alinhamento”.

Como já esperávamos, depois da análise da Atividade 1 desta folha, houve uma grande dificuldade nas questões referentes a representação geométrica das informações, observamos também muitos erros nos itens algébricos. Acreditamos que a atividade seria mais proveitosa se a classe tivesse mais experiências anteriores com esse tipo de problema.

<u>Atividade 3</u>

Esta atividade só foi iniciada por 54% dos grupos (7 em valor absoluto) que começaram o terceiro bloco de folhas porque os estudantes demoravam bastante para completar as atividades. Os índices aqui reportados se referem aos grupos que tiveram tempo para iniciá-la.

Todos preencheram corretamente os valores numéricos da tabela. E 86% obtiveram a expressão $5 \cdot h$ também na tabela. Um fato interessante é que nem todos esses perceberam que esta fórmula se tratava da função solicitada no item (c), ou seja, o índice de acerto deste item foi de 28%.

Altura da parte pintada (m)	0,1	0,35	0,7	1	1,6	2	2,6	h
Área da parte pintada (m²)	0,5	1,75	3,5	5	8	10	13	h.5

(b) Marque esses pontos no sistema de coordenadas cartesianas ao lado.

(c) Monte uma uma fórmula para representar a área A pintada por Sr. Luís, em função da altura h da faixa.
A(h) = n.5

Figura 51: Exemplo de solução correta, porém com o uso da variável "n" ao invés da sugerida "h" - Folha 3 - Atividade 3

O exemplo acima mostra que o grupo não compreendeu o significado da notação e talvez nem do enunciado.

Observamos também que 57% deixaram em branco o sistema de coordenadas cartesianas, apenas 29% marcaram corretamente.

O item (d) só foi respondido por três grupos e apenas um deles acertou tudo mas errou ao completar o intervalo corresponde à altura: “´[0;3]”.

Apenas dois grupos responderam sobre os possíveis valores para área e nenhum deles marcou corretamente. Portanto, o domínio e a imagem também não foram obtidos.

Atividade 4

Esta última atividade também foi iniciada pelos dois grupos citados anteriormente, ambos acertaram os itens do começo e apenas um deles, que obteve a expressão errada para a distância percorrida num tempo t, construiu o gráfico solicitado.

Concluímos, com essa análise, que a maior parte dos estudantes não estava preparada para completar sozinhos as folhas apresentadas. Nossa sugestão é que, durante a aplicação, o professor faça pausas para fixar, formalizar e complementar os conceitos abordados.

5.5 Análise da aplicação na Cooperativa

A aplicação das Folhas de Atividade na Cooperativa ocorreu em dois dias. Foram quatro aulas em cada uma das duas classes de 1º ano do Ensino Médio, sendo que, duas delas aconteceram no período da tarde. Mesmo que essas aulas fora do horário padrão sejam fixas para o Ensino Médio do colégio, os estudantes demonstraram cansaço e os grupos não renderam tão bem quanto no período da manhã.

A professora P. já havia determinado a divisão dos grupos. Formaram-se quatro trios e dois grupos de quatro estudantes, no 1º EM1, e cinco trios, uma dupla e um grupo de quatro, no 1º EM2. Nos dois dias de aplicação foi possível manter os mesmos 13 grupos com os mesmos componentes.

Os grupos deveriam entregar, ao final das atividades, apenas um conjunto de folhas completo.

5.5.1 Análise dos resultados das Folhas de Atividades 1

<u>Atividade 1</u>

Na Cooperativa os estudantes completaram esta atividade sem dificuldades. Portanto, consideramos que os estudantes compreenderam a proposta da estrutura lógica da árvore genealógica e que começaram a se familiarizar com o diagrama e com a notação.

<u>Atividade 2</u>

Todos os grupos de Araraquara acertaram a questão. Porém, a resolução direta, sem os nomes intermediários, foi adotada por 92% dos grupos.

Aqui também observamos que o item (c) ajudou alguns grupos na percepção do significado da notação. Concluímos que a atividade foi bem executada e todos estavam aptos para prosseguir nas atividades.

Atividade 3

Na Cooperativa, todos os grupos assinalaram a resposta correta e 85% também justificaram com a apresentação dos cálculos de cada caso, ou pelo menos argumentaram de forma satisfatória.

Acreditamos que, o fato de todos terem concluído a Atividade 2 simplificou o entendimento da 3. Porém, se os estudantes tivessem utilizado as respostas completas anteriormente talvez fossem capazes de justificar esse item.

Atividade 4

Todos os grupos analisaram e responderam corretamente todos os itens. Observamos que 54% escreveram todas as respostas possíveis. Afirmamos que, mesmo os estudantes que não escreveram todos os nomes possíveis perceberam que existiam outras opções. Esses grupos questionaram a pesquisadora sobre este ponto, alegando que o espaço não era suficiente para mais de um nome. Entendemos que a Atividade alcançou seu objetivo principal.

Atividades 5

O índice de acertos completos por grupo foi de 46%. Com a contagem de cada resposta correta, na Cooperativa foi solicitado um total de 15 formas de se chegar em Brenda, como foram 13 grupos, deveríamos ter 195 itens corretos para que houvesse 100% de acerto. Analisando cada folha, obtivemos 160 itens corretos, correspondente a 82% de acerto, valor suficientemente alto para inferirmos o bom entendimento dos estudantes.

Atividades 6

Esta atividade é muito parecida com a anterior e alguns estudantes reclamaram, principalmente da quantidade de relações que deveriam escrever. Mesmo assim obtivemos 75% de acerto. Acreditamos que uma das razões para essa menor porcentagem, em comparação com a Atividade 5, seja mesmo a desmotivação pelo tamanho da solução da atividade, por isso, na aplicação da Escola Estadual reduzimos esses valores.

Atividades 7, 8 e 9

As respostas dessas três atividades são diretas e dependem da leitura atenta do enunciado bem como da compreensão do diagrama de setas. Dentre todos os grupos observamos apenas 8% de respostas inesperadas.

Concluímos assim que os erros devem ter sido causados por falta de atenção e, o mais importante, o diagrama está evidente para a grande maioria.

Atividade 10

Apenas 8% dos grupos da Cooperativa não responderam corretamente. Dentre todos os estudantes verificamos somente três erros em itens distintos. Imaginamos que eles não caracterizam dificuldades especificas, constituindo apenas erros de distração. A taxa de acerto no total de itens foi de 97%.

Portanto consideramos que a maioria dos estudantes tem alguma familiaridade com manipulação de letras na matemática.

Atividade 11

Item (a):

Na Cooperativa todos os grupos montaram o diagrama corretamente e todos reconheceram que se tratava de uma função.

A pergunta sobre d(7) foi preenchida corretamente por 100% dos grupos e apenas dois erros foram observados e, no d(s(10)), um grupo escreveu 20 e o outro 40. Porém ninguém apresentou os cálculos passo-a-passo.

Item (b):

A porcentagem de acerto deste diagrama foi de 62%, sendo que os 38% restantes apenas não fizeram a ligação (0;0). Porém 30% responderam que se tratava de uma função, provavelmente assinalaram sem consultar adequadamente o diagrama e as definições fornecidas sobre função.

A pergunta “s(r(4)) é igual a r(9)?” foi bem respondida e explicada em 85% das vezes, mostrando que a turma compreendeu a atividade.

Item (c):

O índice de acerto foi de 92% nas setas do diagrama, porém nem todos reconheceram se tratar de uma função. Foram 69% respondidos corretamente. Ainda sim, acreditamos que o diagrama ajudou a maior parte dos grupos.

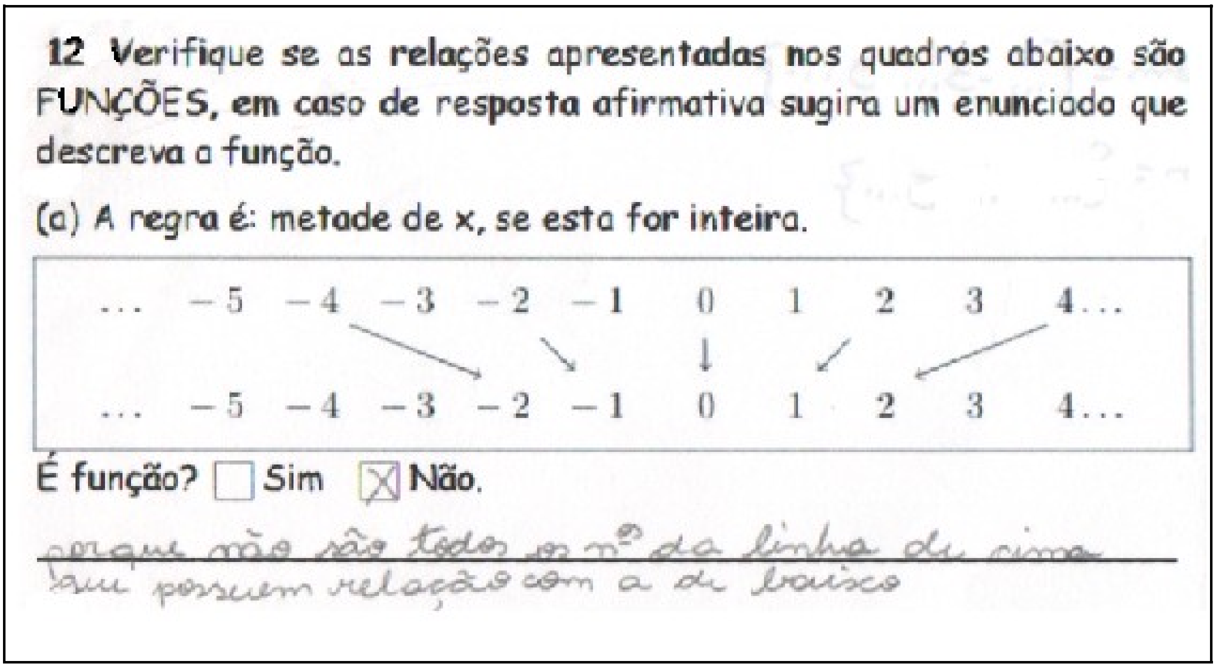
Na composição final tivemos novamente um índice de 92% de acerto.

Ao final da análise dos três itens, consideramos que a atividade foi bem compreendida pelos estudantes.

Atividade 12

Item (a):

A maior parte da turma, 69%, respondeu corretamente, indicando que não se trata de uma função. Mesmo sem ser solicitado, um grupo escreveu a justificativa, a saber:



12 Verifique se as relações apresentadas nos quadros abaixo são FUNÇÕES, em caso de resposta afirmativa sugira um enunciado que descreva a função.

(a) A regra é: metade de x, se esta for inteira.

$\ldots\ -5\ \ -4\ \ -3\ \ -2\ \ -1\ \ 0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ldots$

$\ldots\ -5\ \ -4\ \ -3\ \ -2\ \ -1\ \ 0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ldots$

É função? ☐ Sim ☒ Não.

porque não são todos os nº da linha de cima que possuem relação com a de baixo

Figura 52: Exemplo de solução correta: "Porque não são todos os nº da linha de cima que possuem relação com a de baixo" - Folha 1 - Atividade 12

As justificativas dos que afirmaram que é uma função foram baseadas na regra dada, alguns apenas generalizaram com: “f(x)=x/2”, ou ainda “r(x) = x dividido por 2 se for par.”

Item (b):

Com um índice de 92% de acerto esse item não apresentou complicações. Mesmo as descrições da função foram bastante adequadas. Algumas fizeram uso de notação algébrica e de função, como “p(x) = -x (inverte o sinal)” e outras de palavras como “multiplica-se cada termo por -1”. Apenas um grupo não forneceu uma descrição e apenas justificou o fato de ser função: “porque todos os nº da linha de cima estão relacionados com os de baixo”.

Um detalhe importante das justificativas foi a utilização dos vocábulos “inverso” e “oposto” com o mesmo significado: “O inverso do número (-)x”, “O oposto de seu número” e “-(x) = oposto de x”. Mesmo que “inverso” seja usualmente utilizado para fazer referência a operação de multiplicação consideramos correto o enunciado sugerido pelos estudantes.

Item (c):

No último item da Atividade 12 observamos 77% de acerto, sendo que foram apresentadas até justificativas do por que a relação não é uma função:

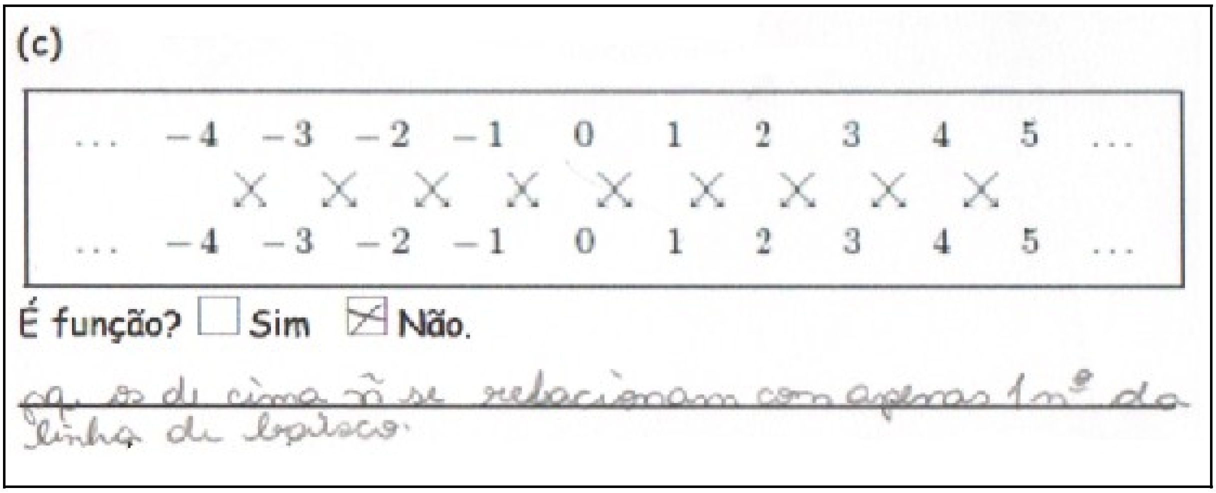


Figura 53: Exemplo de solução correta: “pq os de cima ñ se relacionam com apenas 1 nº da linha de baixo” - Folha 1 - Atividade 12

Dentre os 23% que afirmaram se tratar de uma função, a resposta fornecida apenas descrevia como foi montado o diagrama, por exemplo: “n+1 e n-1”. Uma justificativa desatenta foi: “Se N par adiciona 1. Se N é impar retirar 1.”

Atividade 13

A resolução dessa atividade tem muitos detalhes além de depender de outras duas atividades anteriores. Por isso, foram encontradas pouquíssimas respostas completas. Porém, vamos analisar outros aspectos.

Na Cooperativa, 85% dos estudantes fizeram uso correto da notação de conjunto e dos símbolos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$. Porém, 69% acertaram os três conjuntos de pelo menos uma das funções.

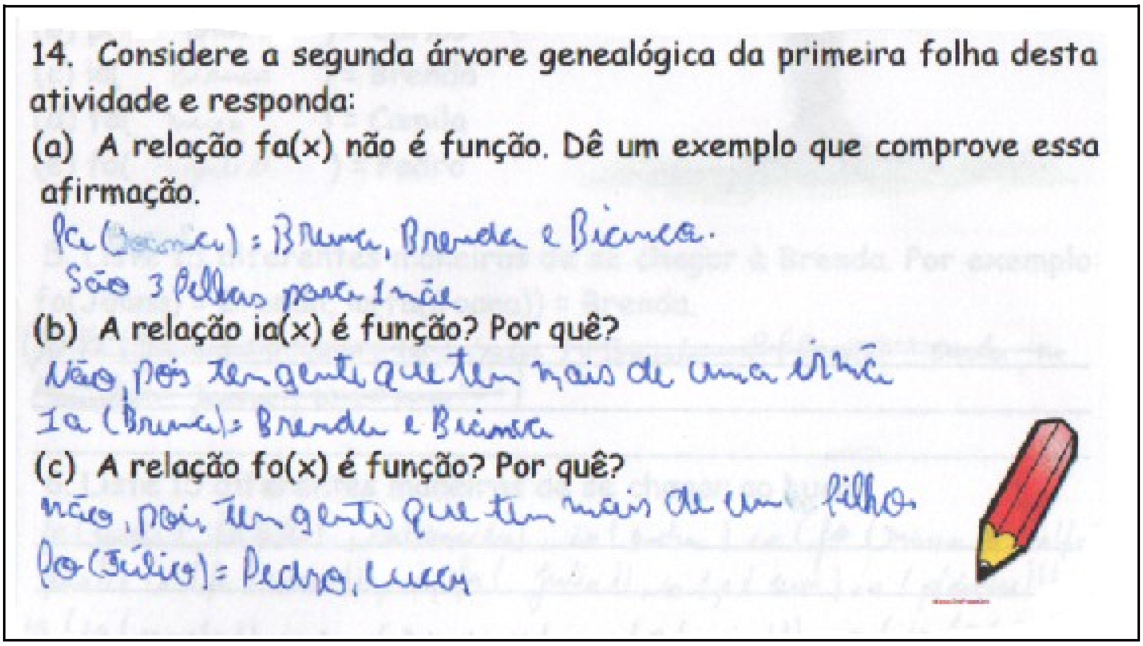
Consideramos que o espaço foi insuficiente e apenas 1 grupo usou a parte de trás da folha, como sugerido pela pesquisadora.

De qualquer forma, a atividade permitiu que os estudantes analisassem conjuntos numéricos, interpretassem as representações, e obtivessem generalizações. Acreditamos que este objetivo foram alcançado.

Atividade 14

O índice de acerto foi de 70%. Dos grupos que acertaram 78% usaram a justificativa de que as relações ligavam uma pessoa a outras duas ou mais, segunda característica para ser função, e tivemos que 22% argumentaram que nem todos tinham ligação quando aplicado aquela relação, primeira característica para ser função. Por exemplo:

- Apresentamos abaixo uma solução com exemplos e explicação:



14. Considere a segunda árvore genealógica da primeira folha desta atividade e responda:

(a) A relação fa(x) não é função. Dê um exemplo que comprove essa afirmação.

fa (Joana) = Bruna, Brenda e Bianca.
São 3 filhas para 1 mãe

(b) A relação ia(x) é função? Por quê?

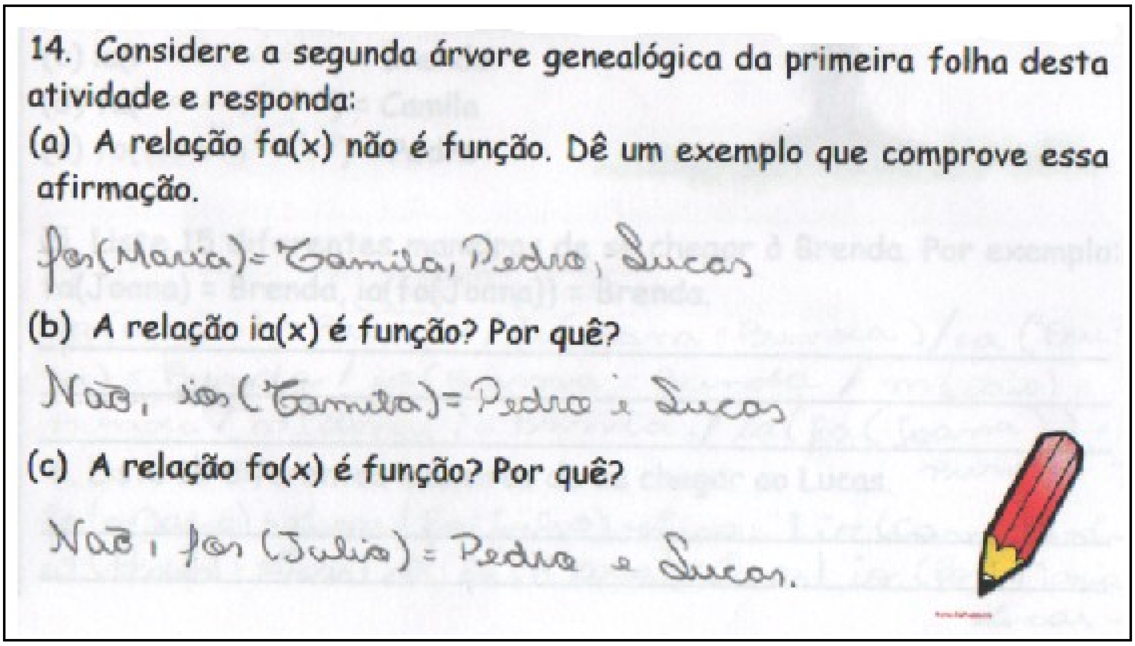
Não, pois tem gente que tem mais de uma irmã
Ia (Bruna) = Brenda e Bianca

(c) A relação fo(x) é função? Por quê?

não, pois tem gente que tem mais de um filho.
fo (Júlio) = Pedro, Lucas

Figura 54: Exemplo de solução correta com explicações - Folha 1 - Atividade 14

- Apresentamos abaixo uma solução apenas com exemplos:


14. Considere a segunda árvore genealógica da primeira folha desta atividade e responda:

(a) A relação fa(x) não é função. Dê um exemplo que comprove essa afirmação.

fa(Maria) = Camila, Pedro, Lucas

(b) A relação ia(x) é função? Por quê?

Não, ia(Camila) = Pedro e Lucas

(c) A relação fo(x) é função? Por quê?

Não, fo(Julia) = Pedro e Lucas.

Figura 55: Exemplo de solução correta apenas com exemplos - Folha 1 - Atividade 14

Acreditamos que a atividade atingiu seu objetivo e gerou discussões interessantes dentro dos grupos.

5.5.2 Análise dos resultados das Folhas de Atividades 2

Atividade 1

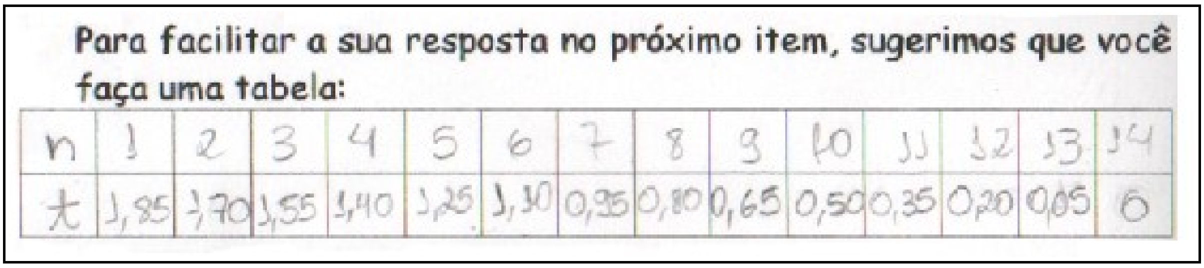
Todos os itens ficaram corretamente preenchidos em 69% dos grupos. Consideramos este valor apesar de algumas pequenas confusões sobre a inclusão ou não do 1 no conjunto imagem.

Apenas 16% confundiram-se com a expressão para a função, invertendo o significado do “p” e do “n” ou trocando o sinal da expressão correta de “+” para “-”.

Mesmo assim, a atividade cumpriu seu papel de iniciar o uso de funções para descrever situações que não são exclusivamente numéricas.

Atividade 2

Todos os grupos acertaram os dois itens iniciais. A expressão ficou correta em 77% das folhas, sendo que metade dessa porcentagem usou a tabela da forma esperada e conseguiu obter os conjuntos domínio e imagem. Como no exemplo abaixo:



Para facilitar a sua resposta no próximo item, sugerimos que você faça uma tabela:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
t	1,85	1,70	1,55	1,40	1,25	1,10	0,95	0,80	0,65	0,50	0,35	0,20	0,05	0

Figura 56: Exemplo de solução correta - Folha 2 - Atividade 2

Outros 38% não obtiveram tais conjuntos. Os erros foram não perceber que se tratava de conjuntos limitados e usar a tabela com o valor a ser pago, causando confusão na escrita da imagem.

Ainda assim, consideramos um bom índice, mostrando que a atividade foi compreendida e bem explorada.

<u>Atividade 3</u>

O padrão do desenho foi facilmente encontrado pelos estudantes, assim como a relação entre o número de quadradinhos azuis da figura e sua posição. Obtivemos 92% de respostas corretas até este ponto da atividade.

A regularidade dos quadradinhos brancos apresenta uma dificuldade adicional, principalmente para a obtenção da expressão. Mesmo assim 69% da classe obteve uma expressão adequada. Foi interessante notar que alguns estudantes trataram a situação claramente como uma progressão aritmética, conteúdo que tinha sido abordado há pouco tempo pela professora da turma.

Os valores corretos da segunda coluna foram obtidos por 85% da turma.

Para calcular o total de quadradinhos bastava apenas fazer a soma dos valores das duas colunas já preenchidas, sendo que os valores corretos foram atingidos pelos mesmos 85% anteriores. E a expressão só foi obtida adequadamente por aqueles que conseguiram também a expressão para os quadradinhos brancos, ou seja 69%.

E 54% dos casos conseguiram fazer a associação da expressão com a função sugerida e obter os valores pedidos. Portanto, consideramos a atividade bastante positiva, pois possibilitou um alto grau de abstração, guiando os estudantes de forma simples, já que mais da metade da turma concluiu completamente a atividade.

- Exemplo de resolução correta:

7ª	7	20	27
8ª	8	22	30
15ª	15	36	51
nª	n	2n+6	3n+6

Figura 57: Exemplo de solução correta - Folha 2 - Atividade 3

- Exemplo de resolução correta com a utilização da ideia de progressão aritmética:

7ª	7	20	27
8ª	8	22	30
15ª	15	36	51
nª	n	8+2(n-1)	n+(8+2[n+1]

Figura 58: Exemplo de solução correta com o uso de progressão aritmética - Folha 2 - Atividade 3

<u>Atividade 4</u>

Os itens iniciais estavam corretos para 77% dos grupos. Verificamos também que 31% dos estudantes não notaram o pulo de 7 para 10, preenchendo com a quantidade incorreta de lápis necessários para formar 10 triângulos.

Ainda assim, 46% obtiveram a fórmula geral correta, bem como os valores solicitados no item (e). Observamos que 83% dos que escreveram a fórmula usaram a notação sugerida de “T” para representar a quantidade de triângulos.

Os conjuntos domínio e imagem foram escritos corretamente por 54% dos estudantes.

Consideramos que esta atividade foi bem executada, sem grandes dificuldades e serviu de um bom exemplo de ligação entre progressão aritmética e função.

Atividade 5

A Atividade 5 ficou em branco para 38% da classe que, por conta do tempo, optou por iniciar uma folha nova a devolver a folha dois para que fosse finalizada porque esta última atividade travava de um caso extremamente parecido com a Atividade 4.

Notamos que o “ q ” apresentado na tabela causou confusões por ser parecido com o algarismo 9.

Dentre os que fizeram esta atividade: 88% errou um ou nenhum valor da tabela. A expressão ficou correta em 63% dos casos, onde 80% usaram a letra Q na formulação, mas apenas metade destes escreveu a expressão completa, ou seja, $P(Q)=3.\mathrm{Q}+1$.

Os conjuntos domínio e imagem foram escritos corretamente por 36% dos estudantes que fizeram a atividade.

Esta atividade, um pouco mais aberta, permitiu verificar a familiaridade dos estudantes com a notação apresentada. Constatamos que a representação do tipo “ $f(x)$ ” precisa ser melhor compreendida pois foi muito pouco utilizada.

5.5.3 Análise dos resultados das Folhas de Atividades 3

Atividade 1

A associação entre os pontos já posicionados no sistema cartesiano e as coordenadas não causou dificuldades entre os grupos. Porém, a marcação de novos pontos só foi bem feita por 77% dos grupos. Houve erros de troca de coordenadas x por y na maior parte das vezes, e também casos de esquecimento do sinal de um dos valores do par ordenado.

De qualquer forma, pudemos constatar que os estudantes conhecem esse tipo de representação e têm a prática tanto de leitura como de posicionamento de novos pontos no sistema de coordenadas cartesianas.

Atividade 2

As questões iniciais dessa atividade deveriam levar os estudantes à compreensão da situação para, em seguida, sugerir uma nova representação para os valores associados na tabela, isto é, o posicionamento do ponto em um sistema de coordenadas cartesianas. Os grupos não tiveram dificuldade até o item (d), onde esperávamos que obtivessem a expressão da função, 92% completaram corretamente todas as perguntas.

Os grupos, (77% do total) efetuaram a marcação correta dos pares ordenados, sendo que 15% desenharam apenas os pontos que possuíam na abscissa um valor par, como no exemplo abaixo. Portanto, faremos uma reescrita do parágrafo explicativo do item (e) pois concluímos que ele confundiu alguns estudantes.

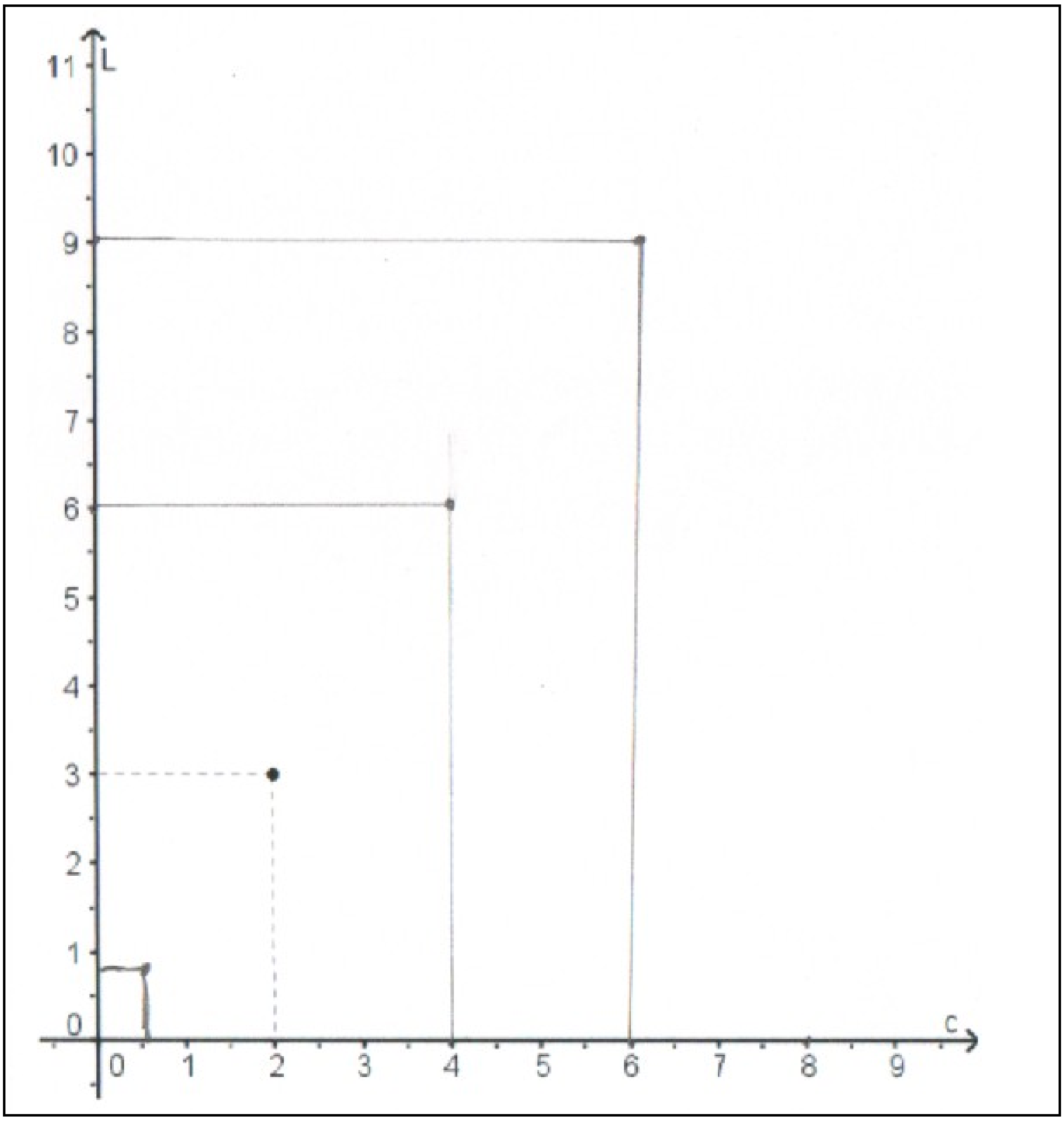


Figura 59: Exemplo de solução incompleta - Folha 3 - Atividade 2

O par ordenado (8;12) foi reconhecido como um ponto pertencente à tabela por 92% da turma. Na questão com apenas meia garrafa de suco 46% escreveram a resposta esperada e marcaram o ponto. Outros 31% não escreveram as coordenadas do ponto mas o desenharam adequadamente no sistema cartesiano.

O último item procurava estimular a imaginação dos estudantes sobre a marcação de outros valores no plano, 77% deles responderam que apareceria uma reta na figura com muitos pontos marcados. Outras respostas para este item foram: “O gráfico continuaria a subir”, provavelmente o grupo não vislumbrou quantidades menores (e fracionárias) de garrafa; em contrapartida, “Valores menores (valores fracionados)", esse grupo percebeu que poderiam ser obtidos valores racionais, porém não imaginou a distância entre eles.

De forma geral essa atividade foi bem realizada. Notamos que, mesmo sem ser solicitado, 31% dos grupos construíram a reta que ligava os pontos marcados na atividade.

Atividade 3

Com apenas algumas imprecisões, 92% dos grupos concluíram adequadamente toda a atividade até o item (c). As imprecisões foram, por exemplo: esquecer de marcar um dos pontos no sistema de coordenadas cartesianas, marcar o valor 0,35 antes de 0,25 na reta numérica, não colocar a unidade de área correta etc.

Metade dos grupos classificou corretamente os valores que poderiam pertencer ao domínio da função (altura) e percebeu que o intervalo seria [0;3]. Notamos que o erro mais frequente foi escolher os números racionais como sendo possíveis valores para a altura, ou ainda, apenas valores com uma casa decimal. Isso nos mostra a necessidade de mais situações problema onde os números irracionais estejam presentes, diferente do que procuramos produzir, questões com números inteiros, contas simples, valores pequenos.

A mesma metade que acertou o item (d) também selecionou adequadamente os valores para área da parte pintada! Porém, só 83% deles preencheram o intervalo corretamente [0;15].

Toda a classe já havia percebido a tendência do desenho, isto é, a formação de uma reta (segmento de reta). Mas apenas 8% conseguiram fazer a associação dos intervalos de altura e área com os conjuntos domínio e imagem da função.

A atividade detectou vários conteúdos que devem ser mais estudados com a classe, servindo assim de diagnóstico para futuras atividades.

Atividade 4

Todos os grupos compreenderam as regras descritas pela informação de que o caminhão trafega a uma velocidade de 40km/h, mesmo que 18% tenham cometido algum erro no cálculo do item (a).

A expressão para a função foi obtida por 91% dos grupos.

Nem todos os estudantes tiveram tempo para terminar o último item desta atividade. Alguns começaram apenas o desenho do sistema de eixos. Daqueles que completaram, todos marcaram corretamente as coordenadas e fizeram, no mínimo quatro pontos. Mas apenas metade deles traçou a semirreta que determina o gráfico.

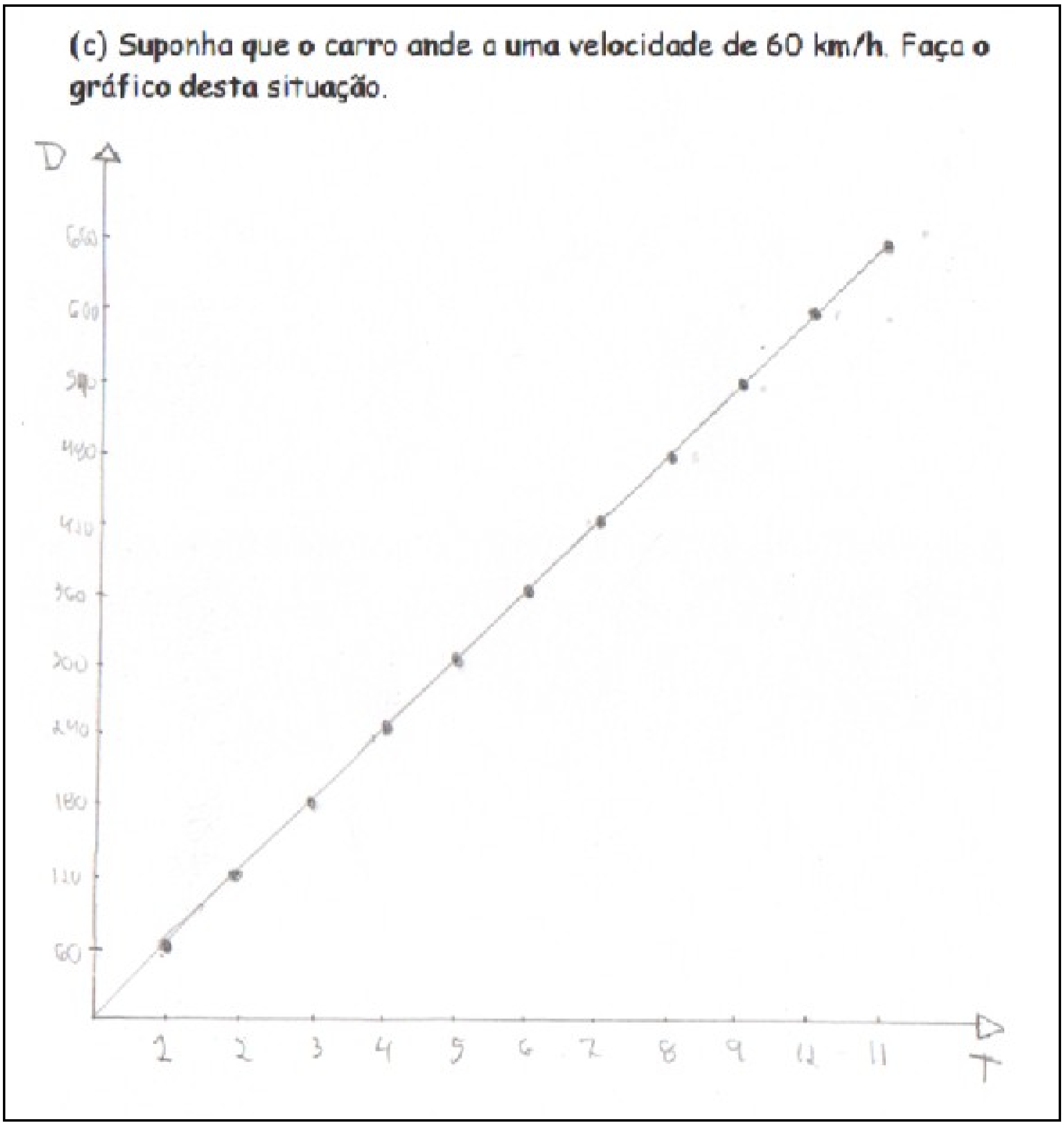


Figura 60: Exemplo de solução correta - Folha 3 - Atividade 4

Esta atividade foi bastante satisfatória, sem muitas dificuldades para os estudantes que só não tiveram um índice maior de acerto por falta de tempo.

No geral, as folhas foram adequadas para a turma e a análise da resolução dos grupos forneceu muitas informações sobre conteúdos onde há maior dificuldade, além de permitir que os grupos discutissem e compartilhassem conhecimento cotidiano e matemático.

5.6 Conclusões da aplicação

Durante a aplicação já surgiram trechos das folhas que podem ser melhorados. Depois da análise das soluções vários outros detalhes foram incluídos na lista de alterações. Essas modificações podem ser encontradas na seção 6.4 dessa dissertação e as Folhas de Atividades reformuladas estão no Apêndice C.

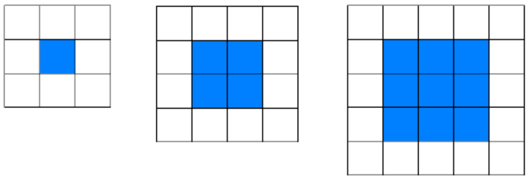
As respostas dos estudantes foram de grande valor para detectar problemas de aprendizagem assim como as questões levantadas durante a aplicação. Por isso, acreditamos ser perfeitamente normal essa necessidade de alterar trechos das atividades. Essa prática pode ser realizada pelo próprio professor da classe de acordo com o desenvolvimento da cada turma específica.

O procedimento de aplicação das folhas mostrou-se bastante satisfatório, a formação de grupos ajuda a promover discussões entre os estudantes e a utilização de um material diferente do livro didático e do caderno é uma boa opção para renovar o interesse e sair da rotina das aulas tradicionais.

Além da análise que fizemos das atividades resolvidas pelos estudantes tivemos a ideia de aplicar uma prova dissertativa, com questões das atividades ou similares a elas. Essa ideia não pode ser realizada totalmente pelo fato de não termos a disponibilidade das professoras. Conseguimos, apenas na Escola Pública, essa avaliação extra.

Os estudantes da Escola Estadual realizaram uma avaliação dois meses depois da aplicação das folhas. Esta avaliação continha questões de todas as disciplinas e a professora F. permitiu que, em matemática, fosse solicitada a resolução de uma atividade parecida com a Atividade dos Quadrados Pintados (Folha de Atividades 2, Atividade 3) realizada para nossa pesquisa. A seguir a atividade da avaliação.

Observe a sequência de figuras abaixo:



(a) Desenhe a próxima figura da sequência.
(b) Quantos quadradinhos azuis terá a 7ª figura?
(c) Complete a tabela:

Nº de ordem da figura	Nº de 	Nº de 	Total de quadradinhos
1ª			
2ª			
3ª			
4ª			
5ª			
6ª			
12ª			
nª			

(d) Qual é a fórmula que expressa a quantidade A(n) de quadradinhos azuis em função da ordem n da figura?

A(n) = ___________

(e) Calcule:

i. A(11) = _____

ii. A(20) = _____

(f) Qual é a fórmula que expressa a quantidade B(n) de quadradinhos brancos em função da ordem n da figura?

B(n) = ___________

(g) Calcule:

i. B(13) = _____

ii. B(20) = _____

(h) Qual é a fórmula que expressa a quantidade total T(n) de quadradinhos em função da ordem n da figura?

T(n) = ___________

(i) Calcule:

i. T(17) = _____

ii. T(20) = _____

Figura 61: Atividade da avaliação dos estudantes da Escola Estadual

O desempenho dos estudantes foi razoável, 30% deles concluíram corretamente até a parte numérica da tabela. Os itens finais foram deixados, em 80% dos casos, em branco. A professora da turma acredita que os estudantes não souberam administrar o tempo, pois não estão acostumados a esse tipo de avaliação (com todas as matérias no mesmo dia).

Sendo assim, confirmamos que os estudantes da Escola Estadual apresentaram algumas defasagens de conteúdo matemático e que, para adquirirem adequadamente o conceito de função, precisariam atividades intermediárias às nossas folhas de atividades.

Na cooperativa, os estudantes tiveram um desempenho muito bom nas folhas aplicadas. Consideramos então que as atividades estavam de acordo com os conhecimentos prévios apresentados pelas classes e também contribuíram para a fixação e elucidação de vários tópicos relacionados ao tema função.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÃO

6.1 Introdução

Apresentamos, nesse último capítulo, as conclusões dos nossos trabalhos. Começamos com a apreciação do método utilizado, isto é, com nossas impressões sobre o formato das folhas, sobre o ensino através de problemas e sobre a engenharia didática. A seguir fazemos a avaliação da aplicação, tomando como base as folhas de atividades resolvidas pelos estudantes do 1° ano do Ensino Médio, considerando os aspectos positivos e negativos da aplicação. Verificamos se as expectativas sugeridas no Capítulo 4 foram atendidas.

Essa análise, das soluções produzidas pelos estudantes, nos permitiu constatar algumas falhas e algumas possíveis melhorias que poderíamos fazer nas formulações dos enunciados e textos, bem como na ordem das atividades. Assim, incorporamos tais alterações e as apresentamos no Apêndice C, com as Folhas de Atividade em seu formato final.

Finalizamos o Capítulo 6 com um breve texto sobre as impressões da autora, formuladas durante as diferentes fases de elaboração deste trabalho. Relatamos, principalmente, sensações captadas durante o contato direto com os estudantes.

6.2 Avaliação do método

As Folhas de Atividades que construímos ao longo dessa pesquisa formam um material diferente do que encontramos nos livros didáticos e em outras propostas. Nosso produto tem 11 páginas e exige cerca de cinco aulas de 50 minutos para ser finalizado. Além disso, sugere que o professor forneça poucas informações fazendo com que os grupos sejam autônomos na elaboração das soluções e, consequentemente, em seu processo de aprendizagem. Esse tipo de aplicação permitiu, entre outras coisas, que fizéssemos o exame dessa dinâmica diferenciada. Vamos discorrer sobre alguns aspectos que verificamos com a experimentação.

As aulas de aplicação exigiram uma dinâmica não tradicional nas classes em que experimentamos nosso material. Mesmo que seja usual a formação de grupos e o uso de materiais alternativos ao livro didático, uma sequência de folhas de atividades tão extensa e que tome tantas aulas não é comum. Logo, essa pode ter sido uma das razões para que a Folha de Atividades 1 tenha sido a mais demorada e a que mais gerou dúvidas (além de ser a que contém mais sutilezas de conteúdo). Verificamos que as folhas seguintes foram resolvidas com mais naturalidade. Depois do primeiro impacto, as turmas se adaptaram ao formato de aula sugerido, fazendo menos perguntas à pesquisadora e discutindo mais com os colegas

Os problemas que integraram as folhas de atividades eram de simples compreensão, mas apresentavam uma situação desafiadora. Apesar das atividades conterem algumas perguntas elementares, a sequência de itens permitiu a estruturação de circunstâncias mais elaboradas a partir das quais os grupos deveriam pensar e discutir para obter uma solução. Deste modo acreditamos que o ensino através de problemas foi uma boa escolha como metodologia para construção das folhas de atividades.

Com a utilização das fases da Engenharia Didática pudemos guiar nossos estudos de forma mais organizada, tendo sempre claros os objetivos, os obstáculos existentes no caminho e as hipóteses que desejávamos validar. Graças às análises prévias formulamos um material diferenciado pois, parte do conceito espontâneo de relação e dá autonomia aos estudantes no seu próprio processo de aprendizagem. Também, sugere problemas que evoluem por etapas, de forma que o conceito de função seja construído gradativamente, sem a necessidade de muitos exercícios mecânicos. Assim, a nosso ver, o material que desenvolvemos atingiu os objetivos.

Na próxima seção vamos tentar responder às questões elaboradas na análise prévia, na construção do material e nas análises didáticas.

6.3 Avaliação da aplicação

Essa seção será inteiramente baseada na apreciação das folhas de atividades resolvidas pelas quatro classes do primeiro ano do Ensino Médio que relatamos no capítulo anterior. As indagações que estamos procurando responder com nossa pesquisa e que foram apresentadas no Capítulo 3 são as seguintes:

- Nossas Folhas de Atividades facilitarão a participação dos estudantes no seu próprio processo de aprendizagem?
- Nossas Folhas de Atividades facilitarão a compreensão da linguagem científica básica necessária para o estudo das funções?
- Nossas Folhas de Atividades facilitarão a compreensão de algumas das várias formas de representação de uma função?
- Nossas Folhas de Atividades facilitarão a compreensão da passagem do discreto para o contínuo?
- Nossas Folhas de Atividades facilitarão a participação dos estudantes no seu próprio processo de aprendizagem?

Vamos comentar separadamente cada uma dessas indagações.

i) Nossas Folhas de Atividades facilitarão a participação dos estudantes no seu próprio processo de aprendizagem?

Avaliamos que em geral atingimos nossos objetivos pois entendemos que os estudantes se interessaram e se dedicaram às tarefas propostas.

Mesmo que os estudantes tivessem dúvidas no decorrer das aplicações, pudemos observar que eles conversavam sobre as atividades propostas. Acreditamos que essa discussão seja o primeiro passo para que o sujeito exercite a tão desejada autonomia acerca de sua própria aprendizagem. Quando os estudantes faziam perguntas, a pesquisadora sempre solicitava que o grupo lesse novamente o enunciado e formulasse perguntas objetivas. Na maioria das vezes as dúvidas desapareciam. Desta maneira, incentivamos o pensamento metódico para a realização das atividades seguintes.

Na Cooperativa de Araraquara, percebemos o comprometimento dos estudantes com a aprendizagem pois se preocupavam em resolver as atividades no tempo previsto. Mesmo que alguns tenham se dispersado, a grande maioria discutiu os problemas, e solicitou ajuda quando necessário. A pesquisadora teve prazer em conversar com os estudantes. As dúvidas mais recorrentes foram apresentadas no Capítulo 5. Pudemos notar que as atividades iniciais geraram mais questionamentos e que a última parte (folha 3) quase não demandou explicações adicionais. Acreditamos que a turma compreendeu a dinâmica das atividades. Alcançamos assim o nosso tão esperado objetivo de autonomia no processo de aprendizagem. Mesmo que o conteúdo tenha sido repetitivo para alguns grupos da Cooperativa, pudemos constatar que vários estudantes esclareceram e relembraram conceitos fundamentais para a continuação da matéria.

Além disso, acreditamos que a diminuição das perguntas foi um indício de que houve a compreensão do conteúdo, à medida que as atividades evoluíam. Os problemas elencados eram variados e possibilitaram o uso da notação em situações diversas. Mesmo observando vários erros nas soluções constatamos que os grupos, em geral, perceberam o uso de letras diferentes de x e y para representar a variável independente e a dependente.

ii) Nossas Folhas de Atividades facilitarão a compreensão da linguagem científica básica necessária para o estudo das funções?

Entendemos que o uso da linguagem científica deve se restringir ao mínimo necessário para proporcionar a precisão da linguagem e uma economia adequada na comunicação. Acreditamos que alcançamos nossos objetivos e que as atividades propostas são suficientes para que o estudantes adquira habilidade nesse quesito.

As dificuldades encontradas se referem a não utilização das letras sugeridas nos enunciados no momento da escrita de expressões, a não utilização de símbolos para abreviar respostas, a falta de familiaridade em combinar expressões que usem símbolos e a interpretação equivocada do sistema de coordenadas cartesianas

iii) Nossas Folhas de Atividades facilitarão a compreensão de algumas das várias formas de representação de uma função?

Nas folhas exploramos a transição da representação em forma de tabela para a forma gráfica em sistema cartesiano, e também da forma de tabela, obtida através da observação de padrões para a forma de expressão algébrica.

As transições entre esses tipos de representações ocorreram de forma satisfatória. Houve dificuldades na escola pública devido ao fato de que os estudantes não tinham um conhecimento prévio adequado do sistema cartesiano.

Observamos que não exploramos todas as transições entre as representações mais usuais, pois tivemos que abreviar nossa pesquisa devido as condições em que ela foi realizada. Em particular faltou explorar a transição da representação gráfica para a descritiva das propriedades da função.

iv) Nossas Folhas de Atividades facilitarão a compreensão da passagem do discreto para o contínuo?

A questão da passagem do discreto para o contínuo constitui um importante obstáculo epistemológico na aprendizagem da matemática no ensino básico. Não tivemos a oportunidade de explorar adequadamente em nossas Folhas de Atividades. Devido as limitações de nossa pesquisa e as dificuldades desse processo de aprendizagem, já sabíamos de antemão que isso iria ocorrer. Listamos aqui essa indagação devido a sua importância, mas sabemos que ela merece uma abordagem mais intensiva.

Em nossas folhas de atividade esse obstáculo foi tratado em alguns momentos da folha 3. Particularmente apreciamos a atividade 2 (Vamos tomar um suco?) e 3 (Área de retângulos).Entendemos que os estudantes apreciaram essas atividades e que lhes foram úteis, principalmente os estudantes da escola Cooperativa, já que na escola pública tivemos poucos grupos que alcançaram essa atividade.

v) Nossas Folhas de Atividade facilitarão a aprendizagem a aprendizagem do conceito matemático de função?

Acreditamos que de modo geral nossas Folhas de Atividade irão facilitar essa aprendizagem. Devido as dificuldades de nossa pesquisa não pudemos fazer uma boa avaliação adicional após a aplicação das Folhas de Atividades. Isso limita nossas conclusões a respeito dessa indagação.

Na aplicação na Escola Estadual observamos muitas dúvidas e problemas com conteúdos anteriores, inclusive com contas simples. Mas acreditamos que as folhas de atividades constituíram uma forma do estudante praticar e aprimorar conteúdos passados, já que a Matemática é uma disciplina que exige que os novos conceitos sejam apoiados nos antigos.

Supomos que as atividades teriam sido mais proveitosas para os estudantes da rede pública se tivéssemos realizado uma pausa no meio das aplicações. Por exemplo, se realizássemos a correção conjunta da Folha de Atividades 1, antes de iniciar a 2. E o curto tempo de duração da fase experimental se tornou um dos pontos negativos da aplicação. O ideal seria acompanhar as classes por períodos mais longos, para que pudéssemos verificar a efetiva contribuição da aplicação das folhas de atividades. Mesmo assim, através do exame das soluções, temos a convicção de que nosso material trouxe benefícios aos estudantes que participaram do trabalho.

6.4 As Folhas de Atividades na forma final

As aplicações em sala de aula permitiram uma análise do material resolvido pelos estudantes. Com isso pudemos notar que algumas alterações deixariam as atividades mais claras e coesas. Apresentamos no Apêndice C as Folhas de Atividades 1, 2 e 3, reformuladas, isto é, com as alterações incitadas pelas soluções dos estudantes e pelas observações durante as aplicações.

Apresentamos agora as alterações realizadas em cada conjunto de folhas:

Folhas de Atividades 1

A primeira modificação realizada na folha 1 foi a eliminação de uma das árvores genealógicas. Durante as aplicações percebemos que o entendimento do diagrama ocorreu de forma bastante satisfatória, sendo assim, para obter mais espaço para as resoluções mantivemos apenas a árvore mais completa. Além disso houve alteração da ordem das atividades 2, 3 e 4. Optamos por deixar como segunda atividade o problema que traz a idea de inversão. Sendo assim pudemos postergar a atividade que trata de composição de relações. Acreditamos que essa troca na ordem dos problemas pode beneficiar o entendimento dos estudantes pois permite que ele passe por mais momentos de interpretação da disposição dos elementos na árvore.

Porém, optamos por não modificar os enunciados das atividades devido aos erros observados na Atividade 2, além das modificações já comentadas (melhorar a redação do enunciado da Atividade 2 e postergar as Atividades 2 e 3 para depois da Atividade 4). Pensamos que esse item das folhas de atividade precisam ser mais pesquisados com estudantes de escolas públicas, pois isso pode se decorrência de vários fatores então exatamente devido a estrutura das folhas apresentadas (dificuldades com escrita, primeira vez que fazem um trabalho desse tipo).

Eliminamos a Atividade 6 pois vimos que ela se tornou repetitiva em relação a Atividade 5. Uma pergunta que surge com relação a essas seis primeiras atividades é a respeito da notação de função “nome(variável) = variável” que foi usada para notação de relação, já que isso não é usual. Nossa conclusão é que esse procedimento está correto e seu uso permite que os estudantes logo se acostumem com notação que vamos precisar posteriormente.

Ao final da Atividade 10 aumentamos o parágrafo explicativo do uso da letra “s” para representar a relação descrita no quadro de setas. Percebemos que a menção anterior era muito breve e não firmava a ideia de que ainda tratávamos da mesma função.

Os três itens da Atividade 11 não atingiram índices muito altos de acerto na escola Estadual, porém na escola Cooperativa a porcentagem foi bem mais alta, por isso optamos por não alterá-los.

Como já mencionamos na seção 5.4, modificamos o enunciado da Atividade 12, solicitando a justificativa das resposta de ser ou não uma função a relação representada em cada um dos diagramas. Na Atividade 13, alteramos o enunciado de forma que o estudante tivesse que apresentar apenas um exemplo de domínio, contra-domínio e imagem. Dessa maneira contornamos o que verificamos ter sido o item complicador do problema, a falta de espaço para a resposta.

O enunciado da Atividade 14 foi modificado para que esclarecesse algumas das dúvidas observadas durante a aplicação. O texto da atividade diz explicitamente quem são os elementos do conjunto que devem ser considerados para a análise solicitada nos itens que se seguem.

Folhas de Atividades 2

O erro mais observado dos estudantes na Atividade 1 dessa folha foi no preenchimento do domínio e da imagem da função, para tentar reforçar a idea de que a tabela poderia continuar acrescentamos uma coluna em branco ao final.

Observamos nas aplicações que as atividades dessa folha foram suficientes para alcançarmos os objetivos desejados. Por isso mantivemos a estrutura da folha sem muitas modificações. Lembramos entretanto que se um professor for aplicar esse material, ele deve adaptá-la às características particulares de seus estudantes. Pode ocorrer a necessidade de ser aplicada uma quantidade maior desse tipo de atividade, em que os estudantes devam construir sozinhos as expressões.

Alteramos, porém, os enunciados das Atividade 4 e 5 para que a regra de formação da sequência de figuras ficasse mais precisa. Trocamos também os rótulos da tabela da atividade Quadrados e palitos, de “Q” para “Quadrados” e de “P” para “palitos”.

Folhas de Atividades 3

Os vários erros observados na marcação de pontos no sistema de coordenadas não nos levaram a fazer modificações nessa atividade pois esperamos que os professores que forem usar as folhas em suas classes façam um trabalho anterior a aplicação com os conteúdos prévios necessários. Observamos também que o próprio professor poderia fazer as modificações que julgar relevantes antes de apresentar o material à classe.

Pudemos verificar que as grandes mudanças aconteceram nas primeiras folhas de atividades. Acreditamos que esse fato seja consequência da maior complexidade conceitual nessa parte do material. É nela que apresentamos grande parte das definições teóricas e onde oferecemos as primeiras oportunidades de manipulação da notação. Além disso, depois do impacto inicial, os grupos já estavam mais familiarizados com essa nova proposta de dinâmica de aula.

6.5 Auto Avaliação e conclusão

A escolha do conteúdo matemático deste trabalho veio da constatação das dificuldades dos estudantes do 1° ano do Ensino Médio com o tema funções. Temos grande satisfação ao estudar um tópico matemático em que transparece tão evidentemente todas as razões de sua importância, isto é, a aplicação em situações práticas e o uso de notação específica da linguagem matemática que simplifica a manipulação dos conteúdos. Porém, ao mesmo tempo, observamos a dificuldade dos estudantes em assimilar os enunciados e a confusão quando tratavam da notação. As conversas nos plantões de dúvida e na sala de aula permitiram ver que qualquer assunto fascinante pode ser devastador e desestimulante quando mal compreendido.

Fomos então em busca de alternativas para o ensino do tema funções. A maior parte das pesquisas encontradas fazem relatos e constatações da situação caótica em que o ensino de funções se apresenta. Por isso iniciamos o desafio de criar um material que apresentasse uma proposta diferente.

Logo no começo da elaboração já enfrentamos as primeiras barreiras, pois não tínhamos disponibilidade de uma classe na qual pudéssemos aplicar uma sequência didática completa. Investigamos qual poderia ser o fator mais relevante para tantas dúvidas. Observamos que todos remetiam à não compreensão plena do conceito matemático de função. Daí nossa escolha por preparar apenas atividades para a construção de tal conceito matemático inicial de função.

Para elaborar nossa proposta consultamos muitas fontes. incluindo textos e artigos. Usamos principalmente nossa própria experiência em ensino e construímos as folhas de atividades. Um aspecto do qual não obtivemos respaldo teórico foi o da apresentação gráfica das atividades. Achamos importante que o estudante tivesse em mãos um material bonito, agradável de se olhar. Por isso usamos figuras coloridas e nos preocupamos com a diagramação de cada página. Atualmente, as editoras possuem profissionais especializados na apresentação dos livros didáticos. Portanto concordamos que nossas folhas de atividades, para fazerem parte da realidade dos estudantes, também deveriam apresentar uma preocupação estética.

Durante a seleção das atividades da folha notamos as muitas sutilezas envolvidas com o ensino de um conceito científico e tivemos dificuldades para montar uma sequência que não exigisse aulas expositivas. Sabemos que não é suficiente o enunciado da definição para que um conceito possa ser, de fato, compreendido. Portanto tivemos que apoiá-lo em outros conceitos mais intuitivos. Baseados no trabalho de Zuffi & Pacca (2002), adotamos o conceito espontâneo de relação para sustentar o conceito científico de função.

As aplicações das folhas de atividades ocorreram de forma bastante agradável e natural. Assimilamos, nas duas turmas, a percepção dos estudantes de que aquelas atividades foram feitas especialmente para eles. O material não era igual ao usado no ano passado por outra classe, era único e exclusivamente deles. Sendo assim, a dedicação e empenho aumentaram. Também o fato de uma pessoa de fora vir acompanhar todas as aulas, durante uma semana inteira e ainda mais com a presença da professora regular, que mesmo não interferindo na aula permanecia na classe, tornou a aplicação um evento importante e sério.

O preparo dessa dissertação proporcionou o contato com muitos materiais, textos, artigos, dissertações, teses, etc. E a contribuição para os conhecimentos próprios da pesquisadora foram inigualáveis. Portanto, esperamos que esse trabalho possa ser uma contribuição também para nossos colegas professores. As folhas de atividades, que constituem nosso produto final, podem ser utilizadas diretamente em sala de aula, eventualmente com pequenas adaptações para cada situação.

Acreditamos que uma possível continuidade dessa pesquisa seria aplicar as folhas de atividades no formato final e comparar os resultados. Outra pesquisa a ser feita seria aplicar essas folhas em classes do Ensino Fundamental, pois em muitas escolas as funções são ensinadas nesse nível de ensino. Seria de grande valia acompanhar por mais tempo as turmas submetidas ao estudo, tanto antes como depois das aplicações, para que as conclusões não fossem influenciadas por aspectos desconhecidos, além da possibilidade de elaboração de uma sequência completa para o estudo do tema funções.

A elaboração desse trabalho foi muito proveitosa e prazerosa, em todas as suas fases. Esperamos que nossa contribuição seja efetiva para os outros colegas professores.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C.Q.S. Engenharia didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANEd. **Revista Eletrônica da Educação Matemática.** Santa Catarina, v. 3, n. 6, p. 62-77, 2008. Disponível em: <http://www.redemat.mtm.ufsc.br/revemat/2008_pdf/revista_2008_06_completo.pdf> . Acesso em: 02 dez. 2009.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. **Recherches em Didactique des Mathématiques.** Paris, v. 9, n. 3, p. 281-308, 1988.

______. Didatical engineering as a framework for the conception of teaching produtcts. In: BIEHLER, R. et al. **Mathematical education library.** Dordrecht: Kluwer Academi Publishers, 1994. p. 27-40.

BECKMANN, C. E. Interpreting graphs. **Mathematics Teacher**. NCTM, p. 353 – 360, maio, 1989.

BIANCHINI, E.; PACCOLA, H. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 2004. v. 1, 246 p.

BIGODE, A. J. L. **Matemática hoje é feita assim**. São Paulo: FTD, 2002. v.4, 335 p.

BOURBAKI, N. **Théorie des ensembles**. 2 ed. Paris: Hermann, 1939. 137 p.

BRASIL. Casa Civil. **Lei de diretrizes e bases da educação nacional.** Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm>. Acesso em: 13 out. 2009.

______. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. **Proposta de experiência curricular inovadora do Ensino Médio.** Brasília, 2009, 22 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/parecer_minuta_cne.pdf>. Acesso em: 13 out. 2009.

______. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio**. Brasília, 2006. v. 2, 135 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso: 15 set. 2009.

______. **Programa**: ensino médio inovador. Brasília, 2009. 29 p. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/documento_orientador.pdf >. Acesso: 18 set. 2009.

______. **Parâmetros curriculares nacionais** : introdução aos parâmetros curriculares nacionais Matemática. Brasília, 1997. 88 p. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf >. Acesso: 12 set. 2009.

______. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais** : ensino médio bases legais. Brasília, 2000a. 109 p. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf >. Acesso: 12 set. 2009.

______. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais**: ensino médio ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, 2000b. 58p. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf >. Acesso: 12 set. 2009.

______. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. **Proposta Curricular**: matemática. São Paulo, 2008, 59 p.

______. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. **Revista São Paulo faz escola**: linguagens da matemática. São Paulo, 2008, 75 p.

CÁNDIDO, S. L. Uma experiência sobre o ensino e a aprendizagem de funções. **Educação Matemática em Revista**, v. 7, n. 8, p. 47-56, 2000.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da Matemática**. Lisboa: Tipografia Matemática, 1958. 318 p.

DANTE, L. R. **Matemática contexto e aplicações**. São Paulo: Ática, 2004. v. 1, 416 p.

EVES, H. I**ntrodução à história da Matemática**. Tradução de Hygino Domingues. Campinas: UNICAMP, 1997. 843 p.

GIOVANNI, J. R.; GIOVANNI, J. R. J. **Matemática**: pensar e descobrir. São Paulo, FTD, 2005. v. 4, 320 p.

GIOVANNI, J. R.; PARENTE, E. **Aprendendo Matemática**. São Paulo: FTD, 2007. v. 4, 288 p.

IEZZI, G. et al. **Matemática ciências e aplicações**. São Paulo: Atual, 2003. v. 1, 432 p.

JOHSTON, A. Inroducing function and its notation. **Mathematics Teacher**. NCTM, p. 559 – 565, out. 1987.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 1, 237 p. (Coleção Professor de Matemática).

MACHADO, S. D. A. Engenharia didática. In _______: **Educação matemática**: uma nova introdução. 3. ed. São Paulo: EDUC, 2008. p. 233 – 248.

MOURA, M. O.; MORETTI, V. D. Investigando a aprendizagem do conceito de função a partir dos conhecimentos prévios e das interações sociais. **Ciência & Educação**, v. 9, n. 1, p.67-82, 2002.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Mathematics Teacher** Disponível em: < http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=4294967313 >. Acesso: 14 jan. 2010.

POLYA, G. **How to solve it**. Princetin: Princeton University Press, 2004. 288 p.

______. O ensino por meio de problemas. **Revista do Professor de Matemática**, n. 7, p. 11-16, 1985.

PONTE, J. P. The history of the concept of function and some educational implications. **The Mathematics Educator**, v. 3, n.2, p. 3-8, 1992.

OLIVEIRA, N., **Conceito de função:** uma abordagem do processo ensino/aprendizagem, 1997. 135 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de

Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 1997.

PAIVA, M. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 2006. v. 3, 46 p.

RIBEIRO, J.; SOARES, E. **Construindo consciências**: matemática. São Paulo: Scipione, v. 4, 2007. 304 p.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática: e**nsino médio. São Paulo: Saraiva, 2005. v.1, 429 p.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

TINOCO, L. A. A. et al. **Construindo o conceito de função no 1° grau.** Rio de Janeiro: UFRJ: Instituto de Matemática, 1996 (Projeto Fundão).

ZUFFI, E. M. **O tema "funções" e a linguagem Matemática dos professores do ensino Médio**: por uma aprendizagem de significados, 1999. 217 p. Tese (Doutorado em Ensino de Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo. 1999.

ZUFFI, E. M.; PACCA, J. L. A. O conceito de função e sua linguagem para os professores de Matemática e de Ciências. **Ciência & Educação,** v. 8, n. 1, p.1-12, 2002.

ZVIA, M.; EYLON, B. S.; BRUCKHEIMER, M. difficulties students have with the function concept. In: COXFORD, A. (Ed.). **The Ideas of Algebra**, K–12, 1988 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. Reston: NCTM, 1988. p. 43–60.

APÊNDICES

Apêndice A – Folhas de Atividades

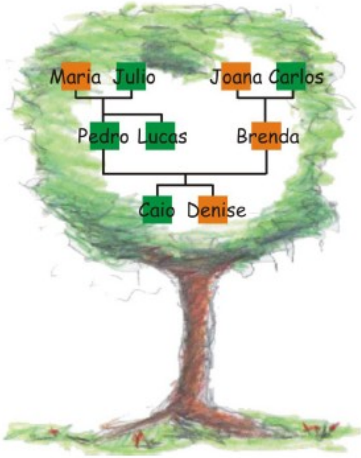
Apresentamos nesse apêndice os três conjuntos de folhas de atividades na forma em que foram aplicadas nas escolas.

Folhas de Atividades 1

Escola:____

Nome:______________________________ Nº:______ Série:________ Data:____________

Famílias, relações e funções



Relações e família

Você sabe o que é uma árvore genealógica? É um diagrama que mostra as relações entre membros de uma mesma família! Veja um exemplo na figura.

Observe a notação abaixo que descreve as relações apresentadas nesta árvore :

•m(x) significa "mãe de x", por exemplo m(Pedro) = Maria

•p(x) significa "pai de x", por exemplo p(Brenda) = Carlos

•ia(x) significa "irmã de x"

•io(x) significa "irmão de x"

1. De acordo com a árvore acima e os exemplos de notação, complete os itens:

(a) m(Brenda)=

(b) p(Pedro)=

(c) p(Lucas)=

(d) io(Lucas)=

(e) m(Denise)=

(f) ia (Caio)=

2. Você notou que p(m(Denise)) = p(Brenda) = Carlos? Complete os itens a seguir:

(a) m(p(Denise))=

(b) p(ia(Caio)) =

(c) m(m(Caio)) =

(d) p(io(Lucas)) =

3. Será que io(p(Denise)) = p(io(Denise))? ☐Sim ☐Não

Como você chegou a essa conclusão?______________________________

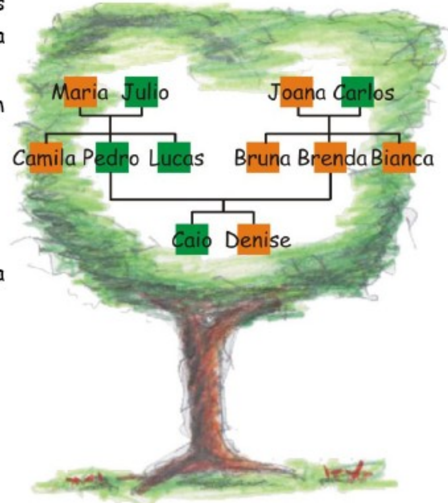
____

Agora colocamos mais pessoas na família. Observe a nova árvore genealógica.

Vamos acrescentar também mais duas notações:

•fa(x) significa "filha de x"

•fo(x) significa "filho de x"



4. Complete os itens a partir da nova árvore:

(a) m(   ) = Maria

(b) p(   ) = Carlos

(c) ia(   ) = Brenda

(d) fa(   ) = Camila

(e) fo(   ) = Pedro

5. Liste 10 diferentes maneiras de se chegar à Brenda. Por exemplo: fa(Joana) = Brenda, ia(fa(Joana)) = Brenda.

____

____

____

6. Liste 7 diferentes maneiras de se chegar ao Lucas.

____

____

Rita Santos Guimarães - UFSCar

Relações e funções

Existem várias formas de representar relações. A árvore genealógica é uma delas. O quadro abaixo mostra um outro tipo de diagrama que ilustra uma relação entre números:

...	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	...
	↘	↘	↘	↘	↘	↘	↘	↘	↘	↘	
...	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	...

7. Uma seta partindo do 5 na linha superior iria para qual número da linha inferior? R: ______

8. E partindo de -5? R: ______

9. Podemos expressar o que diz essa relação em palavras. A regra é somar ____ a cada número da linha superior para encontrar o correspondente na linha inferior.

10. Se existisse um *n* na linha superior, qual seria seu correspondente na linha inferior? R: _______

Esta relação tem características muito especiais;

I - Todos os números da linha superior têm relação com algum número da linha inferior.

II - *Cada* número da linha superior está relacionado com apenas um número da linha inferior.

Este tipo de relação é chamada de FUNÇÃO.

Vamos chamar a função acima de s. Complete:

s(3) = 3 + 1 = _____ s(-2) = -2 + 1 = _____

s(-5) = _________ = _____ s(278) = _________ = _____

s(12) = _________ = _____ s(___) = 8 + 1 = 9

s(___) = 12 s(n) = _________

11. Em cada um dos problemas seguintes complete com flechas segundo a regra dada, responda e complete o que se pede.

(a) d(x) = o dobro de x.

			...	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	...			
...−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8...	

É função? ☐ Sim ☐ Não. d(7) = _____ d(s(10)) = _____

(b) r(x) = raiz quadrada de x, se este for um número inteiro.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...

É função? ☐Sim ☐Não. s(r(4)) é igual a r(9)? Explique.

____

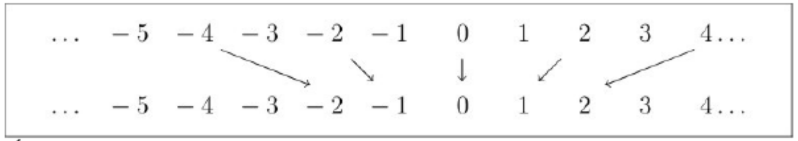
(c) q(x) = elevar x ao quadrado.

				...−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4...					
...−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16...

É função? ☐ Sim ☐ Não. q(s(r(36))) = _____

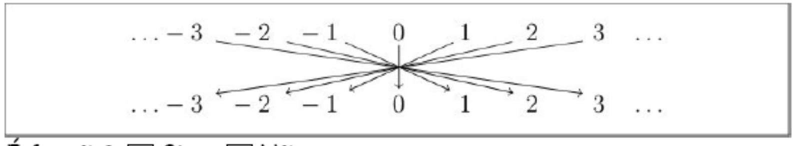
12. Verifique se as relações apresentadas nos quadros abaixo são FUNÇÕES, em caso de resposta afirmativa sugira um enunciado que descreva a função.

(a) A regra é: metade de x, se esta for inteira.



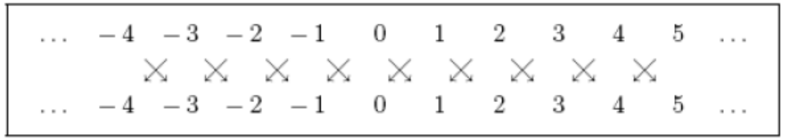
É função? ☐ Sim ☐ Não.

(b)



É função? ☐ Sim ☐ Não.

(c)



É função? ☐ Sim ☐ Não.

Nesta atividade apresentamos exemplos de relações apenas entre números naturais, $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,4,5,6,...\}$ e inteiros, $\mathbb{Z}=\{...-3,-2,-1,0,1,2,3...\}$. Observe que colocamos "..." para representar que as listas de números continuam!

Domínio, contra-domínio e imagem

Quando uma relação é função chamamos o conjunto dos números da linha superior de ***domínio***, o da linha inferior de ***contra-domínio*** e o conjunto dos números da linha inferior que receberam seta de ***imagem***.

Por exemplo, no exercício 11 (a) temos uma função onde:

- Domínio de d(x) é $\mathbb{Z}$
- Contra – domínio de d(x) é $\mathbb{Z}$
- Imagem de d(x) é {...-6,-4,-2,0,2,4,6,...}, isto é, o conjunto dos números pares.

13. Determine o domínio, o contra-domínio e a imagem de todas as relações que são funções dos exercícios 11 e 12.

14. Considere a segunda árvore genealógica da primeira folha desta atividade e responda:

(a) A relação fa(x) não é função. Dê um exemplo que comprove essa afirmação.

(b) A relação ia(x) é função? Por quê?

(c) A relação fo(x) é função? Por quê?

Folhas de Atividades 2

Escola:____

Nome:______________________________ Nº:______ Série:________ Data:____________

Fórmulas para funções

1. O varal de camisas

Dona Maria lavou as camisas do time de futebol de seu neto Carlinhos e vai colocá-las para secar da seguinte forma:

- cada camisa é presa por dois pregadores;
- cada camisa é ligada à seguinte por um pregador.

(a) Quantos pregadores Dona Maria usará para pendurar 3 camisas?
R:_____

(b) Complete a tabela abaixo, onde n a quantidade de camisas e p é a quantidade de pregadores:

n	1	2	3	4	5	6	7
p							

(c) Usando a notação da atividade anterior, vamos escrever, p(n) para dizer "pregadores necessários para pendurar n camisas".

Complete:

i. p(7) = _____
ii. p(8) = _____
iii. p(12) = ____
iv. p(21) = ____

(d) Complete a expressão que representa o número de pregadores p necessários para pendurar um número n qualquer de camisas, isto é, p(n) = ____________

(e) A expressão que você obteve é uma função! Qual é:
i. Domínio de p(n) =
ii. Imagem de p(n) =

2. Chicletes

Pedro vai a padaria levando uma nota de R$ 2,00 para comprar seu chiclete favorito. Se comprar cinco chicletes, receberá R$ 1,25 de troco.

(a) Se comprar apenas dois chicletes, quanto receberá de troco?
R:______.

(b) E quanto será o troco se comprar quatro chicletes? R:______.

(c) Escreva uma expressão que represente o troco quando são comprados n chicletes. Use a notação t(n), isto é, troco para comprar n chicletes.
t(n) = _____________

(d) Qual é a maior quantidade de chicletes que Pedro pode comprar com o dinheiro que tem? R:______

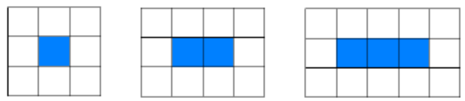
Rita Santos Guimarães - UFSCar

Para facilitar a sua resposta no próximo item, sugerimos que você faça uma tabela:

(e) A expressão que você obteve é uma função! Qual é:
  i. Domínio de t(n) =
  ii. Imagem de t(n) =

3. Quadrados Pintados

Observe a sequência de figuras abaixo.



(a) Desenhe a quarta figura.

(b) Quantos quadradinhos azuis tem a 10ª figura? R:_____

(c) Complete a tabela abaixo:

Nº de ordem da figura	Nº de ■	Nº de □	Total de quadradinhos
1ª			
2ª			
3ª			
4ª			
5ª			
6ª			
7ª			
8ª			
15ª			
nª			

A última linha da tabela servirá para responder os próximos três itens.

(d) Qual é a fórmula que expressa a quantidade A(n) de quadradinhos azuis em função da ordem n da figura?
A(n) = ___________

(e) Calcule:
  i. A(11) = _____
  ii. A(20) = _____

(f) Qual é a fórmula que expressa a quantidade B(n) de quadradinhos brancos em função da ordem n da figura?
B(n) = ___________

(g) Calcule:
  i. B(13) = _____
  ii. B(20) = _____

(h) Qual é a fórmula que expressa a quantidade total T(n) de quadradinhos em função da ordem n da figura?
T(n) = ___________

(i) Calcule:
  i. T(17) = _____
  ii. T(20) = _____

4. Triângulos de lápis

Observe a sequência de triângulos abaixo:

3 lápis ____ lápis ____ lápis

(a) Desenhe a próxima figura e complete a quantidade de lápis.

(b) Você notou uma regra de formação? Para obter mais um triângulo basta acrescentar sempre mais ______ lápis.

(c) Cada novo triângulo é formado apenas acrescentando mais ______ lápis, porém o primeiro triângulo precisou de _____ lápis, _____ a mais que qualquer outro.

(d) Termine de preencher os valores correspondentes na tabela abaixo, onde T é a quantidade de triângulos formados com L lápis;

Triângulos - T	1	2	3	4	5	6	7	10
Lápis - L								

(e) Usando L(T) para dizer "lápis necessários para formar T triângulos", calcule:

i. L(10) = _____
ii. L(15) = _____
iii. L(22) = _____
iv. L(_____) = 33

(f) Qual poderia ser uma fórmula geral para obter a quantidade L(T) de lápis necessários para construir T triângulos?

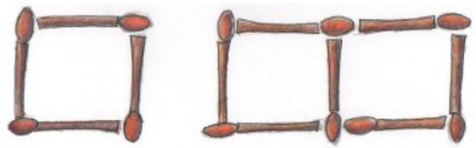
L(T) = _____________

(g) A expressão que você obteve é uma função! Qual é seu:

i. Domínio de L(T) =
ii. Imagem de L(T) =

5. Quadrados de palitos

Observe a sequência de figuras abaixo:



4 palitos ____palitos ____palitos

(a) Desenhe a próxima figura e complete a quantidade de palitos.

(b) Apresente uma fórmula geral para determinar a quantidade de palitos necessária para formar qualquer quantidade de quadrados. Complete a tabela abaixo, ela pode te ajudar:

Q	1	2	3	4	5	6	10	q
P								

Fórmula Geral:

(c) A expressão que você obteve é uma função! Qual é seu:

i. Domínio =
ii. Imagem =

Folhas de Atividades 3

Escola:____

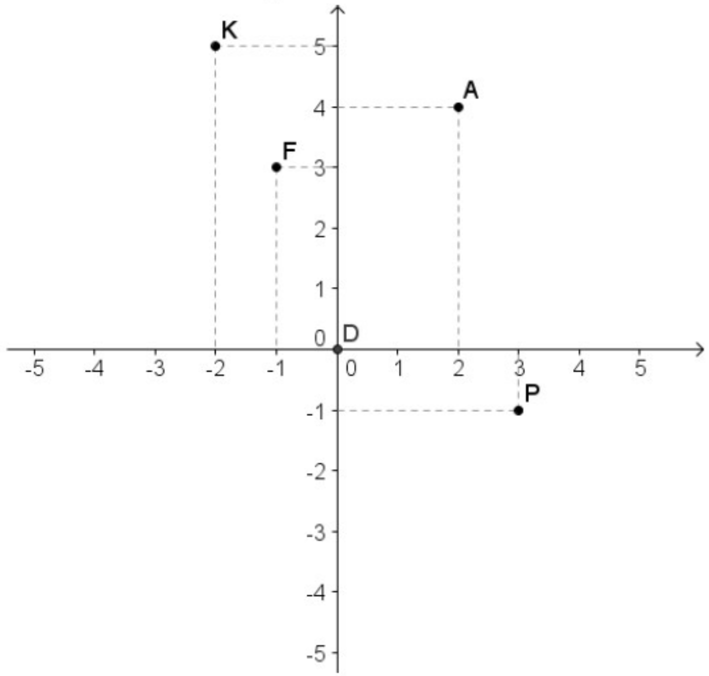
Nome:______________________________ Nº:______ Série:________ Data:______________

Gráficos e funções

Você já jogou batalha naval? Já viu um guia de ruas da lista telefônica? Ou já teve que procurar uma cidade num mapa? Estes são exemplos de que, no plano, bastam duas linhas perpendiculares com subdivisões para que possamos determinar uma posição.

1. Pontos no plano

Na matemática, para localizar pontos, também usamos esse método de acordo com a figura abaixo.



Esse método de localização chama-se ***sistema de coordenadas cartesianas.***

(a) Indique que pontos estão nas seguintes posições:

i. Em (2; 4) está o ponto _____

ii. Em (0; 0) - chamado de origem do sistema cartesiano - está o ponto ______

iii. Em (-1; 3) está o ponto _____

iv. Em (3; -1) está o ponto _____

v. Em (-2; 5) está o ponto _____

(b) Agora, marque as posições dos seguintes pontos:

i. (5; 0) como ponto W.

ii. (0; -2) como ponto Y.

iii. (-2; -5) como ponto H.

Podemos usar um sistema de coordenadas cartesianas para representar relações e, em particular, funções. Vejamos alguns exemplos.

2. Vamos tomar um suco?

Uma garrafa de 500 ml de suco concentrado deve ser dissolvida em 1 litro de água para obtermos o suco reconstituído.

Rita Santos Guimarães - UFSCar

(a) Se utilizarmos todo o suco concentrado de uma garrafa, quantos litros teremos de suco pronto para beber: R:_______

(b) Queremos servir suco no almoço de domingo, com toda a família presente. Quantos litros de suco pronto vamos preparar usando 2 garrafas de suco concentrado? R:_____

(c) Complete a tabela, onde c é o total de garrafas de suco concentrado e L é o total de litros de suco pronto:

c	1	2	3	4	5	6	7
L							

(d) Expresse a quantidade de suco pronto L em função da quantidade c de garrafas de suco concentrado:
L(c) = _____________

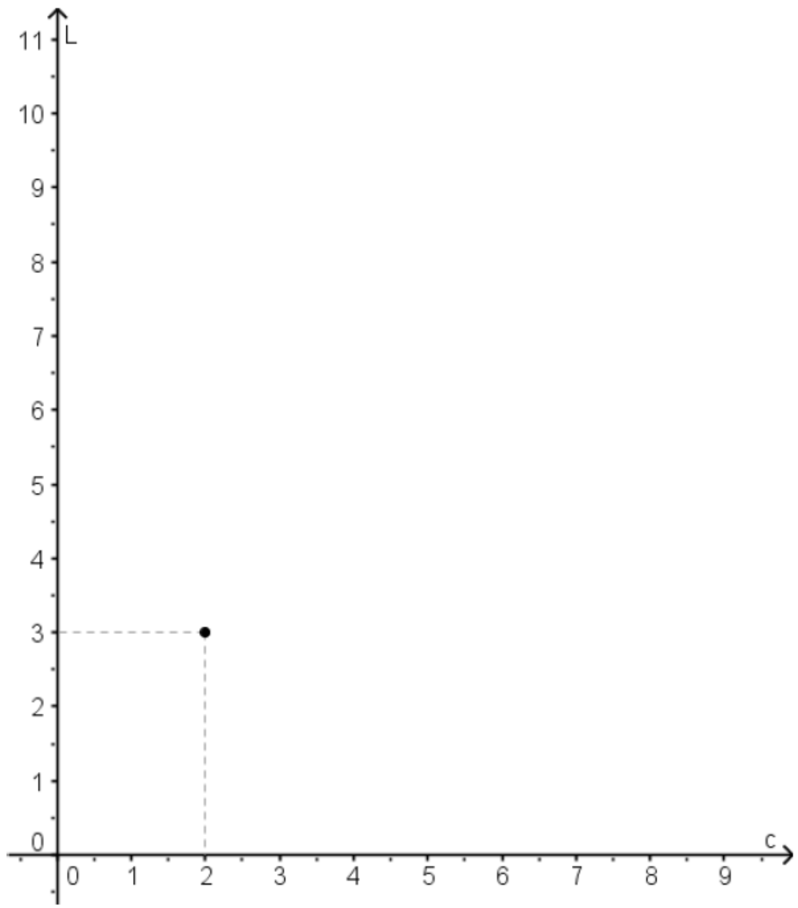
(e) Os valores relacionados na tabela podem ser vistos como pares. Com duas garrafas de suco obtemos exatamente 3 litros de suco pronto. Vamos escrever este par como (2; 3) e representá-lo num sistema de coordenadas cartesianas:

Marque os outros pontos que aparecem na tabela no mesmo sistema de coordenadas cartesianas.

(f) Se você continuar a tabela acima e marcar os pontos na figura, o ponto (8;12) vai ser marcado? R: ☐Sim ☐Não

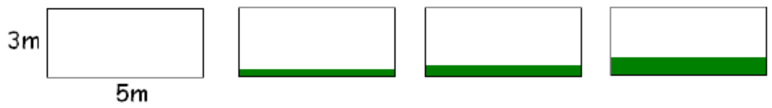
(g) Você não precisa utilizar uma garrafa inteira de suco concentrado. Que ponto seria marcado se você utilizasse apenas meia garrafa? R:__________
Marque este ponto na figura.

(h) Se você marcar na figura outros pontos dados pela função L(c), com valores cada vez mais próximos uns os outros, o que vai aparecendo na figura? R: ____________________________________



3. Área de retângulos

Na sequência de figuras abaixo, a primeira representa uma parede branca de 3 m de altura por 5 m de largura.



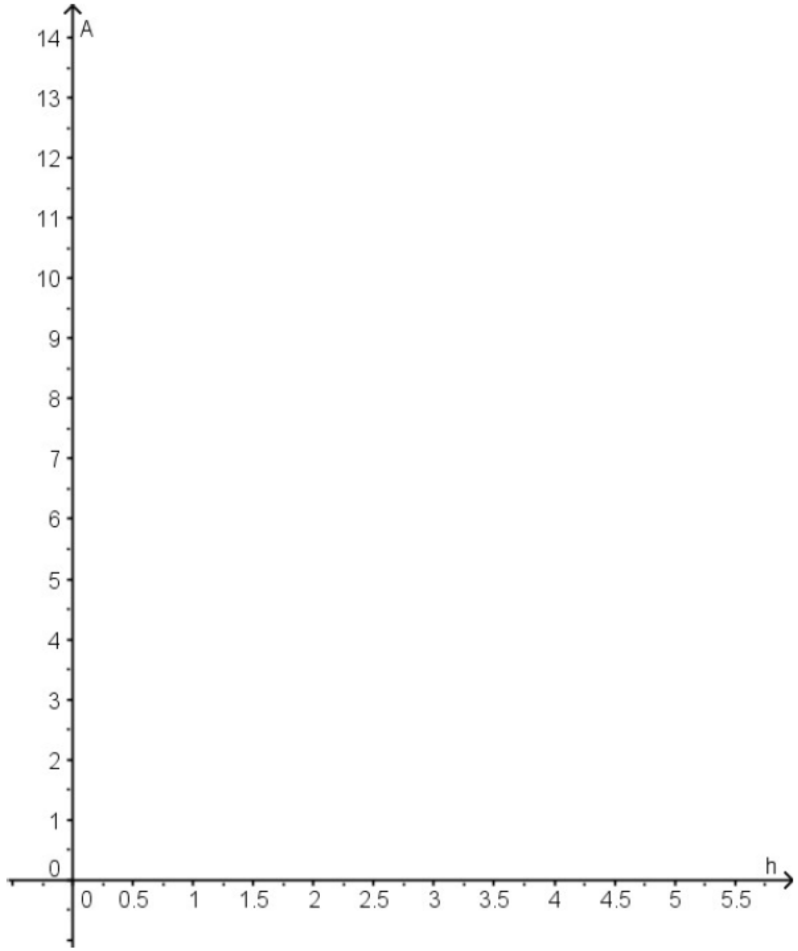
(a) Qual é a área da parede? R: _____

As figuras seguintes representam a pintura que o Sr. Luís está fazendo. Ele usa uma tinta verde e, para pintar, faz faixas horizontais de baixo para cima. Complete a tabela com a área já pintada em determinados momentos.

Altura da parte pintada (m)	0,1	0,35	0,7	1	1,6	2	2,6	h
Área da parte pintada (m^2)								

(b) Marque esses pontos no sistema de coordenadas cartesianas ao lado.

(c) Monte uma uma fórmula para representar a área A pintada por Sr. Luís, em função da altura h da faixa.
A(h) = ____________________________



(d) Na tabela temos alguns exemplos de valores para a altura h.
2,56 m poderia ser um valor de h? ☐ Sim ☐ Não

0,999... m poderia ser um valor de h? ☐ Sim ☐ Não

√2 m poderia ser um valor de h? ☐ Sim ☐ Não

4,5 m poderia ser um valor de h? ☐ Sim ☐ Não

π m poderia ser um valor de h? ☐ Sim ☐ Não

√3 m poderia ser um valor de h? ☐ Sim ☐ Não

Qual o intervalo de números reais que podem ser a altura desta faixa? R: [0 ;____]

(e) Na tabela temos também os respectivos valores para a área pintada.
5 m^2 poderia ser um valor de A? ☐ Sim ☐ Não

12 m^2 poderia ser um valor de A? ☐ Sim ☐ Não

0,75 m^2 poderia ser um valor de A? ☐ Sim ☐ Não

$\frac{7}{5}$ m^2 poderia ser um valor de A? ☐ Sim ☐ Não

$\sqrt{87}$ m^2 poderia ser um valor de A? ☐ Sim ☐ Não

17 m^2 poderia ser um valor de A? ☐ Sim ☐ Não

-2 m^2 poderia ser um valor de A? ☐ Sim ☐ Não

Qual o intervalo de números reais que podem ser a área desta faixa? R: [____ ; ____]

Se você representar todos esses pares de números no sistema de de coordenadas cartesianas da página anterior, o que vai aparecendo na figura? R:______________________________

(f) Qual é:
i. Domínio de A(h) =
ii. Imagem de A(h) =

4. Velocidade constante

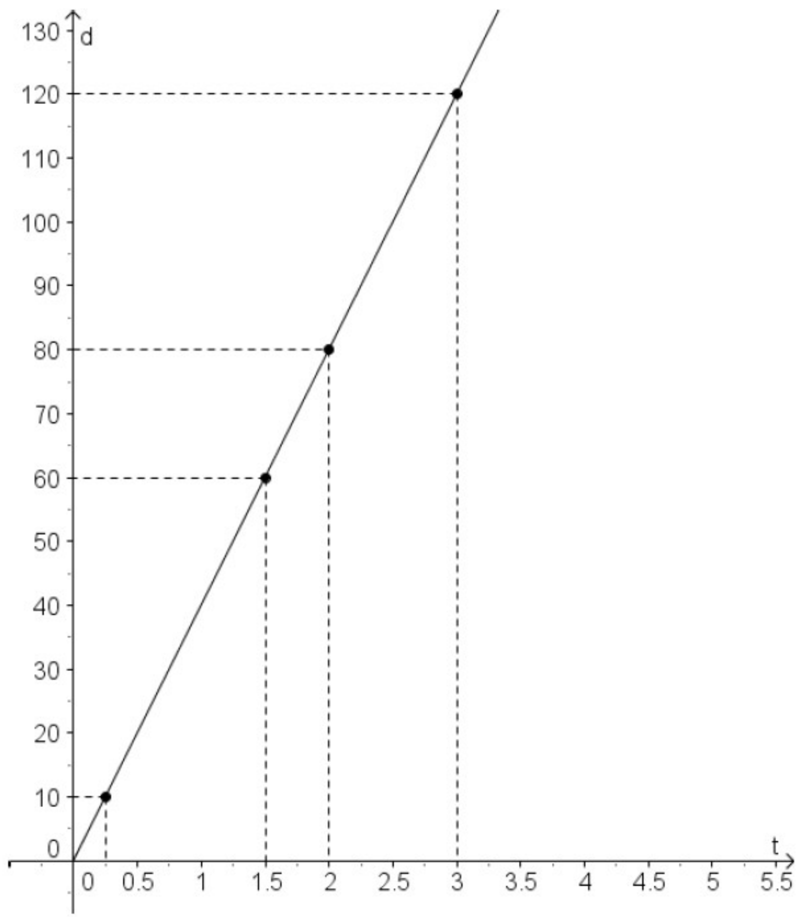
Um caminhão percorre uma estrada com velocidade constante igual a 40 km/h.

(a) Qual será a distância percorrida após:
i. 2h. R:_____
ii. 3h. R:_____
iii. 1h e 30min. R:_____
iv. 15 min. R:_____

(b) Escreva a fórmula da distância percorrida d, em função do tempo t.
d(t) = __________________

Se fôssemos construir uma tabela com todos os valores de t e marcássemos os pontos em um sistema cartesiano obteríamos uma linha contínua. Esta linha chama-se *gráfico*.

Veja como ficaria:



(c) Suponha que o carro ande a uma velocidade de 60 km/h. Faça o gráfico desta situação.

Os meus mais sinceros agradecimentos à vocês, ao seu professor e à sua escola!

Apêndice B – Folhas de Atividades Resolvidas

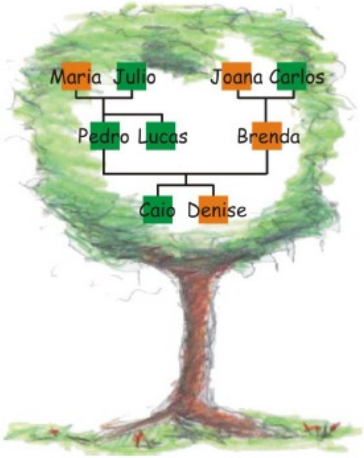
Apresentamos nesse apêndice os três conjuntos de folhas de atividades na forma em que foram aplicadas nas escolas com as soluções esperadas.

Folhas de Atividades 1 - Resolvidas

Escola:____

Nome:______________________________ Nº:______ Série:_______ Data:___________

Famílias, relações e funções



Relações e família

Você sabe o que é uma árvore genealógica? É um diagrama que mostra as relações entre membros de uma mesma família! Veja um exemplo na figura.

Observe a notação abaixo que descreve as relações apresentadas nesta árvore :

•m(x) significa "mãe de x", por exemplo m(Pedro) = Maria

•p(x) significa "pai de x", por exemplo p(Brenda) = Carlos

•ia(x) significa "irmã de x"

•io(x) significa "irmão de x"

1. De acordo com a árvore acima e os exemplos de notação, complete os itens:

(a) m(Brenda)= Joana

(b) p(Pedro)= Júlio

(c) p(Lucas)= Júlio

(d) io(Lucas)= Pedro

(e) m(Denise)= Brenda

(f) ia (Caio)= Denise

2. Você notou que p(m(Denise)) = p(Brenda) = Carlos? Complete os itens a seguir:

(a) m(p(Denise))= m(Pedro) = Maria

(b) p(ia(Caio)) = p(Denise) = Pedro

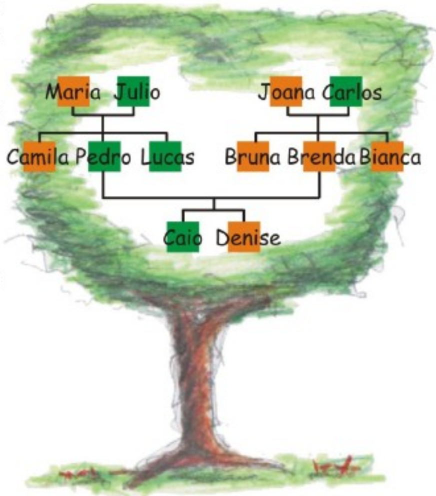
(c) m(m(Caio)) = m(Brenda) = Joana

(d) p(io(Lucas)) = p(Pedro) = Júlio

3. Será que io(p(Denise)) = p(io(Denise))? ☐Sim ■ Não

Como você chegou a essa conclusão? Pois io(p(Denise)) = io(Pedro)= Lucas e p(io(Denise)) = p(Caio) = Pedro, ou seja, não se refere a mesma pessoa

Agora colocamos mais pessoas na família. Observe a nova árvore genealógica.



Vamos acrescentar também mais duas notações:

•fa(x) significa "filha de x"

•fo(x) significa "filho de x"

4. Complete os itens a partir da nova árvore:

(a)m(Camila,Pedro,Lucas) = Maria

(b)p(Bruna,Brenda,Bianca)=Carlos

(c) ia(Bruna, Bianca) = Brenda

(d) fa(Maria, Júlio) = Camila

(e) fo(Júlio, Maria) = Pedro

5. Liste 10 diferentes maneiras de se chegar à Brenda. Por exemplo: fa(Joana) = Brenda, ia(fa(Joana)) = Brenda.

m(Caio); m(Denise); ia(Bruna); ia(Bianca); fa(Carlos); ia(fa(Joana)); ia(ia(Bruna)); ia(ia(Bianca)); m(ia(Caio)); m(ia(Denise)).

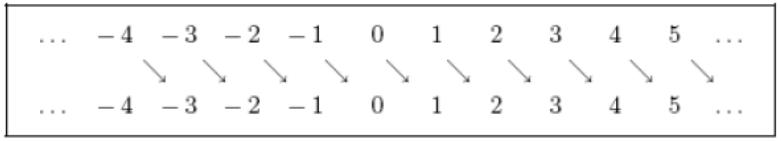
6. Liste 7 diferentes maneiras de se chegar ao Lucas.

io(Camila); io(Pedro); fo(Maria); fo(Júlio); io(p(Caio)); io(p(Denise)); fo(m(Camila).

Rita Santos Guimarães - UFSCar

Relações e funções

Existem várias formas de representar relações. A árvore genealógica é uma delas. O quadro abaixo mostra um outro tipo de diagrama que ilustra uma relação entre números:



7. Uma seta partindo do 5 na linha superior iria para qual número da linha inferior? R: 6

8. E partindo de -5? R: -4

9. Podemos expressar o que diz essa relação em palavras. A regra é somar _1_ a cada número da linha superior para encontrar o correspondente na linha inferior.

10. Se existisse um *n* na linha superior, qual seria seu correspondente na linha inferior? R: n+1

Esta relação tem características muito especiais;

I - Todos os números da linha superior têm relação com algum número da linha inferior.

II - Cada número da linha superior está relacionado com apenas um número da linha inferior.

Este tipo de relação é chamada de FUNÇÃO.

Vamos chamar a função acima de s. Complete:

s(3) = 3 + 1 = 4   s(-2) = -2 + 1 = -1

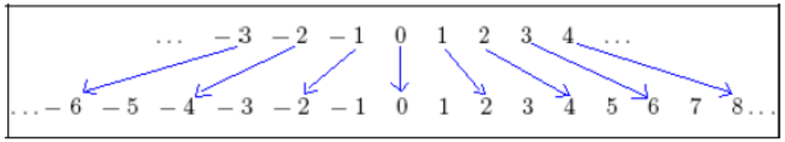
s(-5) = -5 + 1 = -4   s(278) = 278 + 1 = 279

s(12) = 12 + 1 = 13   s(8) = 8 + 1 = 9

s(11) = 12   s(n) = n+1

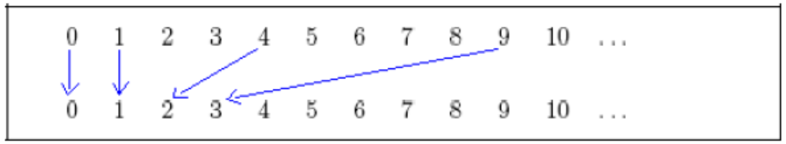
11. Em cada um dos problemas seguintes complete com flechas segundo a regra dada, responda e complete o que se pede.

(a) d(x) = o dobro de x.



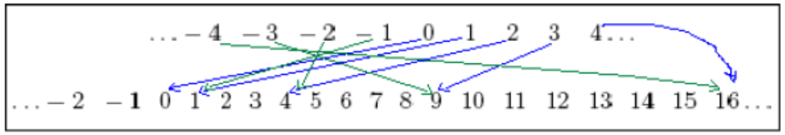
É função? ■ Sim □ Não.   d(7) = 14   d(s(10)) = d(11) = 22

(b) r(x) = raiz quadrada de x, se este for um número inteiro.



É função? □ Sim ■ Não.   s(r(4)) é igual a r(9)? Explique.
Sim, pois s(2) = 3, o mesmo resultado de r(9) = 3

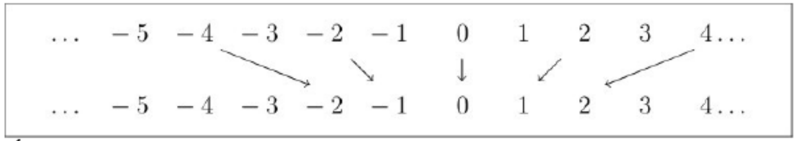
(c) q(x) = elevar x ao quadrado.



É função? ■ Sim □ Não.   q(s(r(36))) = q(s(6)) = q(7) = 49

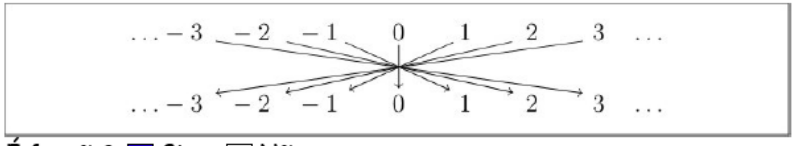
12. Verifique se as relações apresentadas nos quadros abaixo são FUNÇÕES, em caso de resposta afirmativa sugira um enunciado que descreva a função.

(a) A regra é: metade de x, se esta for inteira.



É função? ☐ Sim ■ Não.

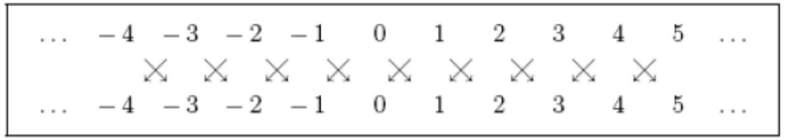
(b)



É função? ■ Sim ☐ Não.

A regra é f(x) = -x, o oposto do valor da linha de cima.

(c)



É função? ☐ Sim ■ Não.

Nesta atividade apresentamos exemplos de relações apenas entre números naturais, $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,4,5,6,...\}$ e inteiros, $\mathbb{Z}=\{...-3,-2,-1,0,1,2,3...\}$. Observe que colocamos "..." para representar que as listas de números continuam!

Domínio, contra-domínio e imagem

Quando uma relação é função chamamos o conjunto dos números da linha superior de <u>*domínio*</u>, o da linha inferior de <u>*contra-domínio*</u> e o conjunto dos números da linha inferior que receberam seta de <u>*imagem*</u>.

Por exemplo, no exercício 11 (a) temos uma função onde:

- Domínio de d(x) é $\mathbb{Z}$
- Contra – domínio de d(x) é $\mathbb{Z}$
- Imagem de d(x) é {...-6,-4,-2,0,2,4,6,...}, isto é, o conjunto dos números pares.

13. Determine o domínio, o contra-domínio e a imagem de todas as relações que são funções dos exercícios 11 e 12.

11c: Dom = Inteiros; CD = Inteiros; Im = Quadrados perfeitos

12b: Dom = Inteiros; CD = Inteiros; Im = Inteiros

14. Considere a segunda árvore genealógica da primeira folha desta atividade e responda:

(a) A relação fa(x) não é função. Dê um exemplo que comprove essa afirmação.

fa(Carlos) = Brenda e fa(Carlos) = Bianca. Carlos está relacionado com duas pessoas diferentes.

(b) A relação ia(x) é função? Por quê?

Não, ia relaciona um mesmo elemento do domínio com mais de um do contra-domínio. Por exemplo: ia(Brenda) = Bruna e ia(Brenda) = Bianca.

(c) A relação fo(x) é função? Por quê?

Não, fo não faz relação com todos os elementos do domínio. Por exemplo: fo(Lucas) não faz relação.

Folhas de Atividades 2 – Resolvidas

Escola:________________________________

Nome:________________________ Nº:______ Série:________ Data:____________

Fórmulas para funções

1. O varal de camisas

Dona Maria lavou as camisas do time de futebol de seu neto Carlinhos e vai colocá-las para secar da seguinte forma:

- cada camisa é presa por dois pregadores;
- cada camisa é ligada à seguinte por um pregador.

(a) Quantos pregadores Dona Maria usará para pendurar 3 camisas? R: 4

(b) Complete a tabela abaixo, onde n a quantidade de camisas e p é a quantidade de pregadores:

n	1	2	3	4	5	6	7
p	2	3	4	5	6	7	8

(c) Usando a notação da atividade anterior, vamos escrever, p(n) para dizer "pregadores necessários para pendurar n camisas".

Complete:

i. p(7) = 8
ii. p(8) = 9
iii. p(12) = 13
iv. p(21) = 22

(d) Complete a expressão que representa o número de pregadores p necessários para pendurar um número n qualquer de camisas, isto é, p(n) = n + 1

(e) A expressão que você obteve é uma função! Qual é:

i. Domínio de p(n) = N - {0}
ii. Imagem de p(n) = N - {0,1}

2. Chicletes

Pedro vai a padaria levando uma nota de R\$ 2,00 para comprar seu chiclete favorito. Se comprar cinco chicletes, receberá R\$ 1,25 de troco.

(a) Se comprar apenas dois chicletes, quanto receberá de troco? R: R\$1,70

(b) E quanto será o troco se comprar quatro chicletes? R: R\$1,40

(c) Escreva uma expressão que represente o troco quando são comprados n chicletes. Use a notação t(n), isto é, troco para comprar n chicletes.
t(n) = 2 - 0,15.n

(d) Qual é a maior quantidade de chicletes que Pedro pode comprar com o dinheiro que tem? R: 13

Para facilitar a sua resposta no próximo item, sugerimos que você faça uma tabela:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
t	1,85	1,7	1,55	1,4	1,25	1,1	0,95	0,8	0,65	0,5	0,35	0,2	0,05	0

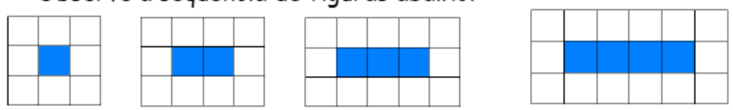
(e) A expressão que você obteve é uma função! Qual é:

i. Domínio de t(n) = N - {0}

ii. Imagem de t(n) = {0; 0,05, 0,2; 0,35; 0,5; 0,65; 0,8; 0,95; 1,1; 1,25; 1,4; 1,55; 1,7; 1,85}

3. Quadrados Pintados

Observe a sequência de figuras abaixo.



(a) Desenhe a quarta figura.

(b) Quantos quadradinhos azuis tem a 10ª figura? R: 10

(c) Complete a tabela abaixo:

Nº de ordem da figura	Nº de ■	Nº de □	Total de quadradinhos
1ª	1	8	9
2ª	2	10	12
3ª	3	12	15
4ª	4	14	18
5ª	5	16	21
6ª	6	18	24
7ª	7	20	27
8ª	8	22	30
15ª	15	36	51
nª	n	2n + 6	3n + 6

A última linha da tabela servirá para responder os próximos três itens.

(d) Qual é a fórmula que expressa a quantidade A(n) de quadradinhos azuis em função da ordem n da figura?

A(n) = n

(e) Calcule:

i. A(11) = 11

ii. A(20) = 20

(f) Qual é a fórmula que expressa a quantidade B(n) de quadradinhos brancos em função da ordem n da figura?

B(n) = 2n + 6

(g) Calcule:

i. B(13) = 2x13 + 6 = 32

ii. B(20) = 2x20 + 6 = 46

(h) Qual é a fórmula que expressa a quantidade total T(n) de quadradinhos em função da ordem n da figura?

T(n) = 3n + 6

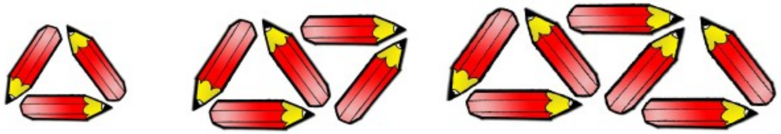
(i) Calcule:

i. T(17) = 3x17 + 6 = 57

ii. T(20) = 3x20 +6 = 66

4. Triângulos de lápis

Observe a sequência de triângulos abaixo:



3 lápis | 5 lápis | 7 lápis

(a) Desenhe a próxima figura e complete a quantidade de lápis.

(b) Você notou uma regra de formação? Para obter mais um triângulo basta acrescentar sempre mais 2 lápis.

(c) Cada novo triângulo é formado apenas acrescentando mais 2 lápis, porém o primeiro triângulo precisou de 3 lápis, 1 a mais que qualquer outro.

(d) Termine de preencher os valores correspondentes na tabela abaixo, onde T é a quantidade de triângulos formados com L lápis;

Triângulos - T	1	2	3	4	5	6	7	10
Lápis - L	3	5	7	9	11	13	15	21

(e) Usando L(T) para dizer "lápis necessários para formar T triângulos", calcule:

i. L(10) = 21
ii. L(15) = 31
iii. L(22) = 45
iv. L(16) = 33

(f) Qual poderia ser uma fórmula geral para obter a quantidade L(T) de lápis necessários para construir T triângulos?

L(T) = 2n + 1

(g) A expressão que você obteve é uma função! Qual é seu:

i. Domínio de L(T) = N - {0}
ii. Imagem de L(T) = {ímpares} - {1}

5. Quadrados de palitos

Observe a sequência de figuras abaixo:

4 palitos | 7 palitos | 10 palitos

(a) Desenhe a próxima figura e complete a quantidade de palitos.

(b) Apresente uma fórmula geral para determinar a quantidade de palitos necessária para formar qualquer quantidade de quadrados. Complete a tabela abaixo, ela pode te ajudar:

Q	1	2	3	4	5	6	10	q
P	4	7	10	13	16	19	31	3q+1

Fórmula Geral:

P(q) = 3q + 1

(c) A expressão que você obteve é uma função! Qual é seu:

i. Domínio = N - {0}
ii. Imagem = $\{P \in \mathbb{N} - \{0\} / P = 3q+1\}$

Folhas de Atividades 3 – Resolvidas

Escola:____

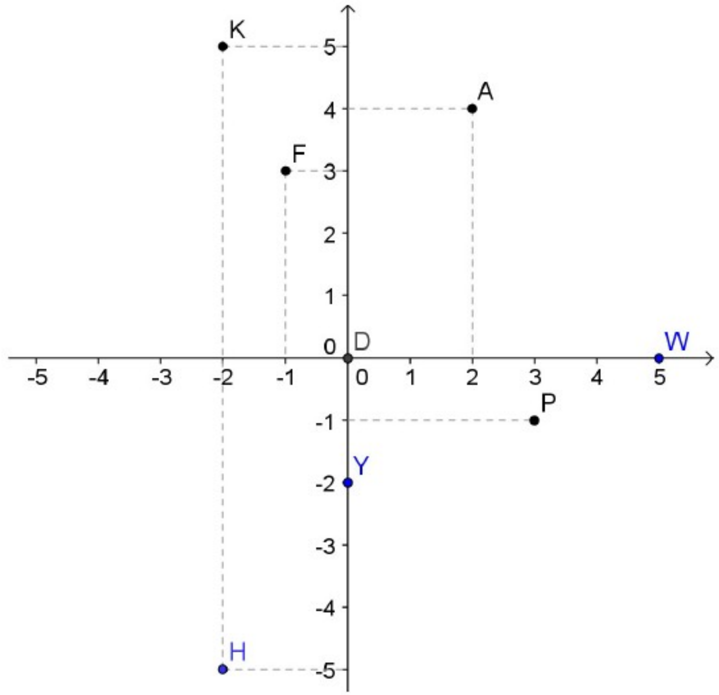
Nome:_______________________________________ Nº:______ Série:________ Data:______________

Gráficos e funções

Você já jogou batalha naval? Já viu um guia de ruas da lista telefônica? Ou já teve que procurar uma cidade num mapa? Estes são exemplos de que, no plano, bastam duas linhas perpendiculares com subdivisões para que possamos determinar uma posição.

1. Pontos no plano

Na matemática, para localizar pontos, também usamos esse método de acordo com a figura abaixo.



Esse método de localização chama-se ***sistema de coordenadas cartesianas.***

(a) Indique que pontos estão nas seguintes posições:

i. Em (2; 4) está o ponto A

ii. Em (0; 0) - chamado de origem do sistema cartesiano - está o ponto D

iii. Em (-1; 3) está o ponto F

iv. Em (3; -1) está o ponto P

v. Em (-2; 5) está o ponto K

(b) Agora, marque as posições dos seguintes pontos:

i. (5; 0) como ponto W.

ii. (0; -2) como ponto Y.

iii. (-2; -5) como ponto H.

Podemos usar um sistema de coordenadas cartesianas para representar relações e, em particular, funções. Vejamos alguns exemplos.

2. Vamos tomar um suco?

Uma garrafa de 500 ml de suco concentrado deve ser dissolvida em 1 litro de água para obtermos o suco reconstituído.

(a) Se utilizarmos todo o suco concentrado de uma garrafa, quantos litros teremos de suco pronto para beber: R: 1,5 litros

(b) Queremos servir suco no almoço de domingo, com toda a família presente. Quantos litros de suco pronto vamos preparar usando 2 garrafas de suco concentrado? R: 3 litros

(c) Complete a tabela, onde c é o total de garrafas de suco concentrado e L é o total de litros de suco pronto:

c	1	2	3	4	5	6	7
L	1,5	3	4,5	6	7,5	9	10,5

(d) Expresse a quantidade de suco pronto L em função da quantidade c de garrafas de suco concentrado:
L(c) = 1,5.c

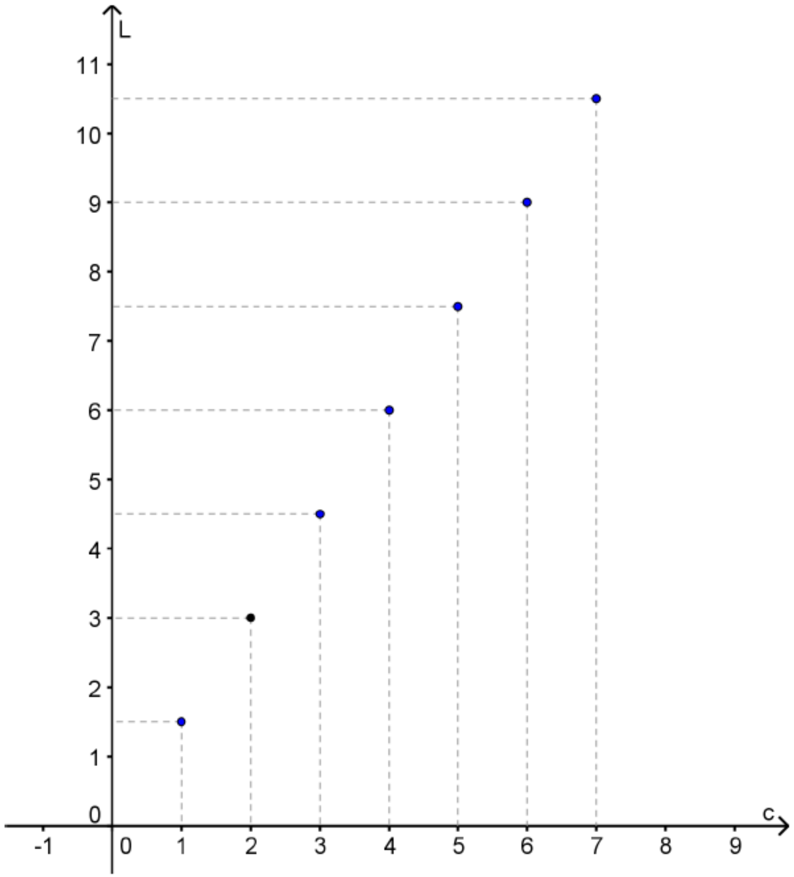
(e) Os valores relacionados na tabela podem ser vistos como pares. Com duas garrafas de suco obtemos exatamente 3 litros de suco pronto. Vamos escrever este par como (2; 3) e representá-lo num sistema de coordenadas cartesianas:

Marque os outros pontos que aparecem na tabela no mesmo sistema de coordenadas cartesianas.

(f) Se você continuar a tabela acima e marcar os pontos na figura, o ponto (8;12) vai ser marcado? R: ■ Sim □ Não

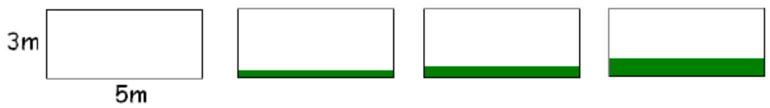
(g) Você não precisa utilizar uma garrafa inteira de suco concentrado. Que ponto seria marcado se você utilizasse apenas meia garrafa? R: (0,5 ; 0,75)
Marque este ponto na figura.

(h) Se você marcar na figura outros pontos dados pela função L(c), com valores cada vez mais próximos uns os outros, o que vai aparecendo na figura? R: Uma reta



3. Área de retângulos

Na sequência de figuras abaixo, a primeira representa uma parede branca de 3 m de altura por 5 m de largura.



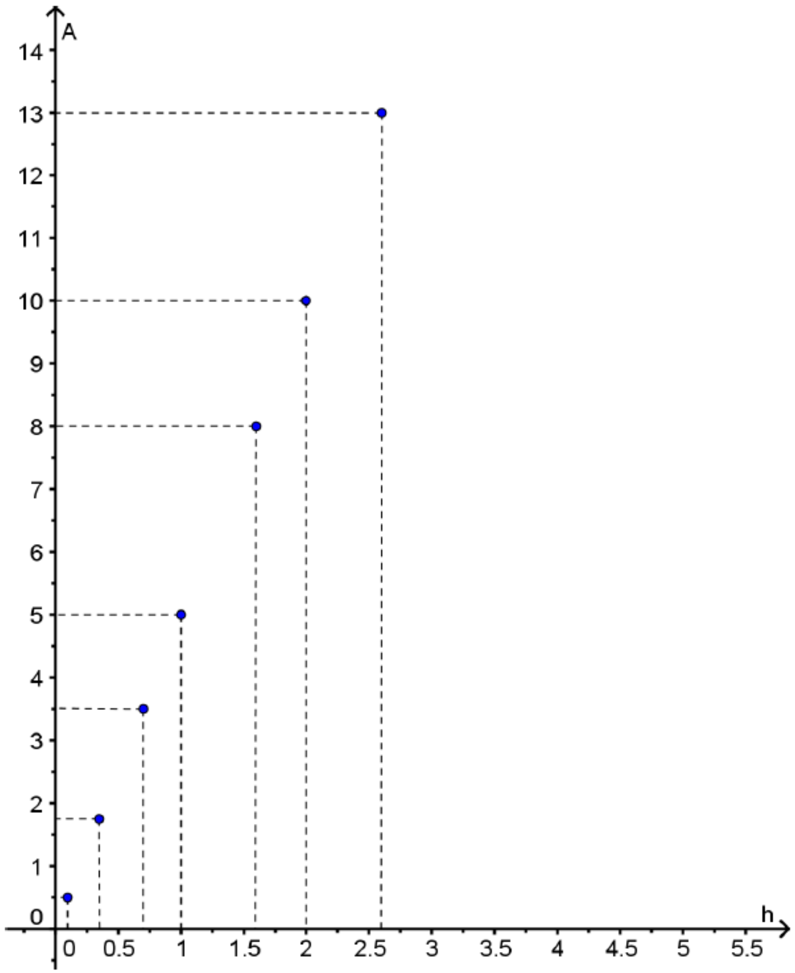
(a) Qual é a área da parede? R: 15 m^2

As figuras seguintes representam a pintura que o Sr. Luís está fazendo. Ele usa uma tinta verde e, para pintar, faz faixas horizontais de baixo para cima. Complete a tabela com a área já pintada em determinados momentos.

Altura da parte pintada (m)	0,1	0,35	0,7	1	1,6	2	2,6	h
Área da parte pintada (m^2)	0,5	1,75	3,5	5	8	10	13	5h

(b) Marque esses pontos no sistema de coordenadas cartesianas ao lado.

(c) Monte uma uma fórmula para representar a área A pintada por Sr. Luís, em função da altura h da faixa.
A(h) = 5h



(d) Na tabela temos alguns exemplos de valores para a altura h.

2,56 m poderia ser um valor de h? ■ Sim ☐ Não

0,999... m poderia ser um valor de h? ■ Sim ☐ Não

$\sqrt{2}$ m poderia ser um valor de h? ■ Sim ☐ Não

4,5 m poderia ser um valor de h? ☐ Sim ■ Não

π m poderia ser um valor de h? ☐ Sim ■ Não

$\sqrt{3}$ m poderia ser um valor de h? ■ Sim ☐ Não

Qual o intervalo de números reais que podem ser a altura desta faixa? R: [0 ; 3]

(e) Na tabela temos também os respectivos valores para a área pintada.

5 m^2 poderia ser um valor de A? ■ Sim ☐ Não

12 m^2 poderia ser um valor de A? ■ Sim ☐ Não

0,75 m^2 poderia ser um valor de A? ■ Sim ☐ Não

$\frac{7}{5}$ m^2 poderia ser um valor de A? ■ Sim ☐ Não

$\sqrt{87}$ m^2 poderia ser um valor de A? ■ Sim ☐ Não

17 m^2 poderia ser um valor de A? ☐ Sim ■ Não

-2 m^2 poderia ser um valor de A? ☐ Sim ■ Não

Qual o intervalo de números reais que podem ser a área desta faixa? R: [0 ; 15]

Se você representar todos esses pares de números no sistema de de coordenadas cartesianas da página anterior, o que vai aparecendo na figura? R: Uma reta

(f) Qual é:

i. Domínio de A(h) = [0 ; 3]

ii. Imagem de A(h) = [0 ; 15]

4. Velocidade constante

Um caminhão percorre uma estrada com velocidade constante igual a 40 km/h.

(a) Qual será a distância percorrida após:

i. 2h. R: 80km

ii. 3h. R: 120km

iii. 1h e 30min. R: 60km

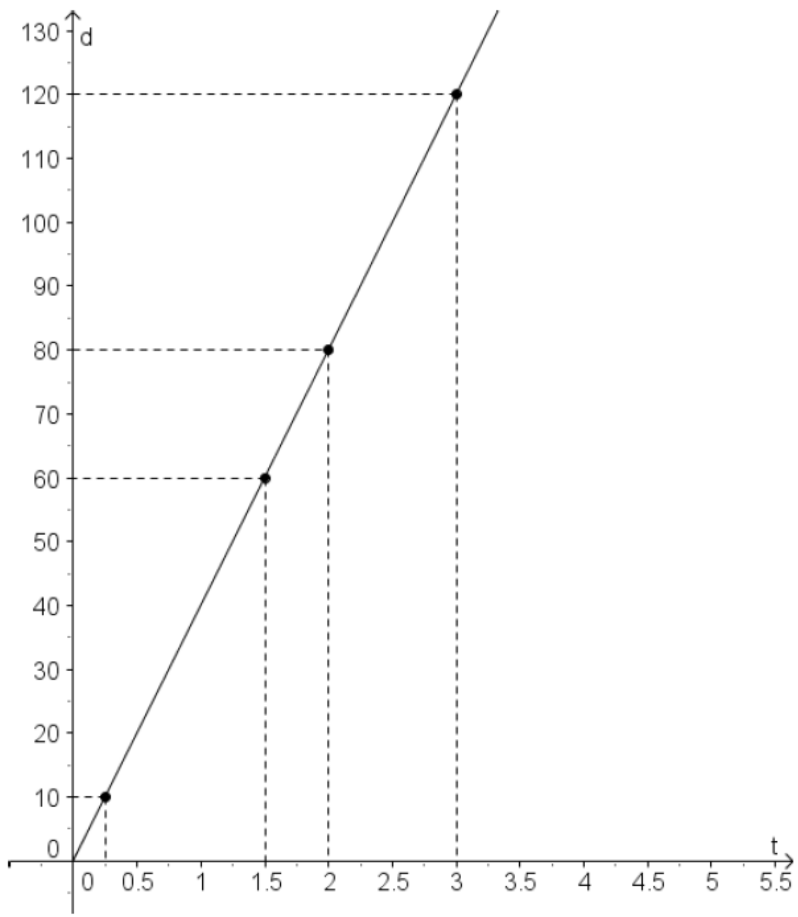
iv. 15 min. R: 10km

(b) Escreva a fórmula da distância percorrida d, em função do tempo t.

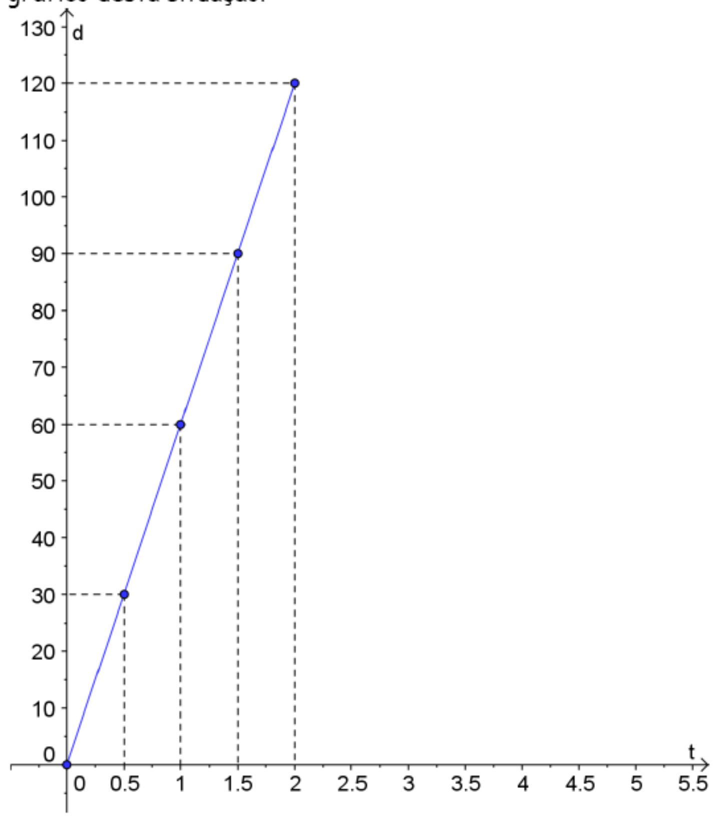
d(t) = 40.t

Se fôssemos construir uma tabela com todos os valores de t e marcarmos os pontos em um sistema cartesiano obteríamos uma linha contínua. Esta linha chama-se *gráfico*.

Veja como ficaria:



(c) Suponha que o carro ande a uma velocidade de 60 km/h. Faça o gráfico desta situação.



Os meus mais sinceros agradecimentos à vocês, à seu professor e à sua escola.

Apêndice C – Folhas de Atividades Reformuladas

Apresentamos nesse apêndice os três conjuntos de folhas de atividades reformuladas após a análise das folhas resolvidas.

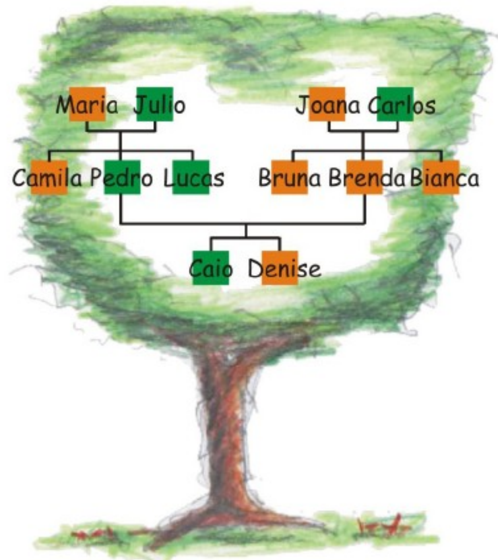
Folhas de Atividades 1 – Reformuladas

Escola:____

Nome:____________________________ Nº:______ Série:________ Data:____________

Famílias, relações e funções

Relações e família



Você sabe o que é uma árvore genealógica? É um diagrama que mostra as relações entre membros de uma mesma família! Veja um exemplo na figura.

Observe a notação abaixo que descreve as relações apresentadas nesta árvore :

•m (x) significa "mãe de x", por exemplo m(Pedro) = Maria

•p(x) significa "pai de x", por exemplo p(Brenda) = Carlos

•ia(x) significa "irmã de x"

•io(x) significa "irmão de x"

1. De acordo com a árvore acima e os exemplos de notação, complete os itens:

(a) m(Brenda)=

(b) p(Pedro)=

(c) p(Lucas)=

(d) io(Lucas)=

(e) m(Denise)=

(f) ia (Caio)=

Vamos acrescentar também mais duas notações:

•fa(x) significa "filha de x"

•fo(x) significa "filho de x"

2. Complete os itens a partir da nova árvore:

(a) fa( ) = Camila

(b) fo( ) = Pedro

(c) m( ) = Maria

(d) p( ) = Carlos

(e) ia( ) = Brenda

3. Podemos juntar duas das relações apresentadas de forma a obter, por exemplo, pai da mãe de Denise, que usando a notação é: p(m(Denise)) = p(Brenda) = Carlos. Complete os itens a seguir:

(a) m(p(Denise))=

(b) p(ia(Caio)) =

(c) m(m(Caio)) =

(d) p(io(Lucas)) =

4. Será que io(p(Denise)) = p(io(Denise))? ☐Sim ☐Não

Como você chegou a essa conclusão?

____

____

5. Liste 10 diferentes maneiras de se chegar à Brenda. Por exemplo: fa(Joana) = Brenda, ia(fa(Joana)) = Brenda.

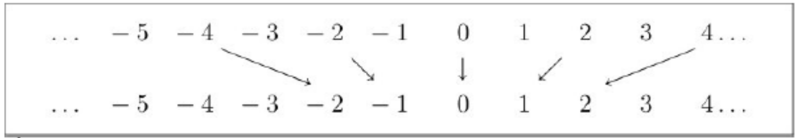
____

____

____

12. Verifique se as relações apresentadas nos quadros abaixo são FUNÇÕES e justifique:

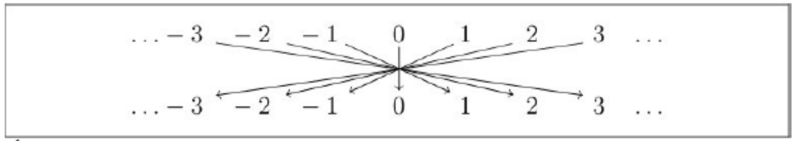
(a) A regra é: metade de x, se esta for inteira.



É função? ☐ Sim ☐ Não.

____

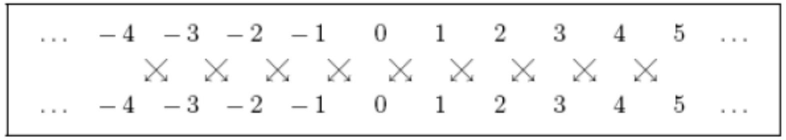
(b)



É função? ☐ Sim ☐ Não.

____

(c)



É função? ☐ Sim ☐ Não.

____

Nesta atividade apresentamos exemplos de relações apenas entre números naturais, $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,4,5,6,...\}$ e inteiros, $\mathbb{Z}=\{...-3,-2,-1,0,1,2,3...\}$. Observe que colocamos "..." para representar que as listas de números continuam!

Domínio, contra-domínio e imagem

Quando uma relação é função chamamos o conjunto dos números da linha superior de ***domínio***, o da linha inferior de ***contra-domínio*** e o conjunto dos números da linha inferior que receberam seta de ***imagem***.

Por exemplo, no exercício 11 (a) temos uma função onde:

- Domínio de d(x) é $\mathbb{Z}$
- Contra - domínio de d(x) é $\mathbb{Z}$
- Imagem de d(x) é {...-6,-4,-2,0,2,4,6,...}, isto é, o conjunto dos números pares.

13. Determine o domínio, o contra-domínio e a imagem de uma relação que seja função do exercício 12.

Domínio____

Contra - domínio_______________________________________

Imagem ____

14. Considere como conjunto a árvore genealógica da primeira folha desta atividade e como seus elementos todas as pessoas da família, responda:

(a) A relação fa(x) não é função. Dê um exemplo que comprove essa afirmação.

(b) A relação ia(x) é função? Por quê?

(c) A relação fo(x) é função? Por quê?

Folhas de Atividades 2 – Reformuladas

Escola:____

Nome:______________________________ Nº:______ Série:________ Data:____________

Fórmulas para funções

1. O varal de camisas

Dona Maria lavou as camisas do time de futebol de seu neto Carlinhos e vai colocá-las para secar da seguinte forma:

- cada camisa é presa por dois pregadores;
- cada camisa é ligada à seguinte por um pregador.

(a) Quantos pregadores Dona Maria usará para pendurar 3 camisas?
R:_____

(b) Complete a tabela abaixo, onde n a quantidade de camisas e p é a quantidade de pregadores:

n	1	2	3	4	5	6	7	
p								

(c) Usando a notação da atividade anterior, vamos escrever, p(n) para dizer "pregadores necessários para pendurar n camisas".

Complete:

i. p(7) = _____ iii. p(12) = ____

ii. p(8) = _____ iv. p(21) = ____

(d) Complete a expressão que representa o número de pregadores p necessários para pendurar um número n qualquer de camisas, isto é, p(n) = ____________

(e) A expressão que você obteve é uma função! Qual é:

i. Domínio de p(n) =

ii. Imagem de p(n) =

2. Chicletes

Pedro vai a padaria levando uma nota de R$ 2,00 para comprar seu chiclete favorito. Se comprar cinco chicletes, receberá R$ 1,25 de troco.

(a) Se comprar apenas dois chicletes, quanto receberá de troco? R:______.

(b) E quanto será o troco se comprar quatro chicletes? R:______.

(c) Escreva uma expressão que represente o troco quando são comprados n chicletes. Use a notação t(n), isto é, troco para comprar n chicletes.
t(n) = _____________

(d) Qual é a maior quantidade de chicletes que Pedro pode comprar com o dinheiro que tem? R:______

 Rita Santos Guimarães - UFSCar

Para facilitar a sua resposta no próximo item, sugerimos que você faça uma tabela:

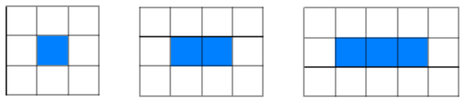
(e) A expressão que você obteve é uma função! Qual é:

i. Domínio de t(n) =

ii. Imagem de t(n) =

3. Quadrados Pintados

Observe a sequência de figuras abaixo.



(a) Desenhe a quarta figura.

(b) Quantos quadradinhos azuis tem a 10ª figura? R:_____

(c) Complete a tabela abaixo:

Nº de ordem da figura	Nº de ■	Nº de □	Total de quadradinhos
1ª			
2ª			
3ª			
4ª			
5ª			
6ª			
7ª			
8ª			
15ª			
nª			

A última linha da tabela servirá para responder os próximos três itens.

(d) Qual é a fórmula que expressa a quantidade A(n) de quadradinhos azuis em função da ordem n da figura?

A(n) = ___________

(e) Calcule:

i. A(11) = _____

ii. A(20) = _____

(f) Qual é a fórmula que expressa a quantidade B(n) de quadradinhos brancos em função da ordem n da figura?

B(n) = ___________

(g) Calcule:

i. B(13) = _____

ii. B(20) = _____

(h) Qual é a fórmula que expressa a quantidade total T(n) de quadradinhos em função da ordem n da figura?

T(n) = ___________

(i) Calcule:

i. T(17) = _____

ii. T(20) = _____

4. Triângulos de lápis

Na sequência de figuras abaixo, cada figura é construída a partir da anterior com o acréscimo de um novo triângulo à direita.

3 lápis ____ lápis ____ lápis

(a) Desenhe a próxima figura e complete a quantidade de lápis.

(b) Você notou uma regra de formação? Para obter mais um triângulo basta acrescentar sempre mais ______ lápis.

(c) Cada novo triângulo é formado apenas acrescentando mais ______ lápis, porém o primeiro triângulo precisou de _____ lápis, _____ a mais que qualquer outro.

(d) Termine de preencher os valores correspondentes na tabela abaixo, onde T é a quantidade de triângulos formados com L lápis;

Triângulos - T	1	2	3	4	5	6	7	10
Lápis - L								

(e) Usando L(T) para dizer "lápis necessários para formar T triângulos", calcule:

i. L(10) = _____
ii. L(15) = _____
iii. L(22) = _____
iv. L(_____) = 33

(f) Qual poderia ser uma fórmula geral para obter a quantidade L(T) de lápis necessários para construir T triângulos?

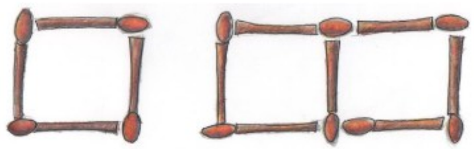
L(T) = _____________

(g) A expressão que você obteve é uma função! Qual é seu:

i. Domínio de L(T) =
ii. Imagem de L(T) =

5. Quadrados de palitos

Na sequência de figuras abaixo, cada figura é construída a partir da anterior com o acréscimo de um novo quadrado à direita.



4 palitos ___palitos ___palitos

(a) Complete desenhando a terceira figura e indique as quantidades de palitos que faltam.

(b) Apresente uma fórmula geral para determinar a quantidade de palitos necessária para formar qualquer quantidade de quadrados. Complete a tabela abaixo, ela pode te ajudar:

Quadros	1	2	3	4	5	6	10	Q
Palitos								

Fórmula Geral:

(c) A expressão que você obteve é uma função! Qual é seu:

i. Domínio =
ii. Imagem =

Folhas de Atividades 3– Reformuladas

Escola:____

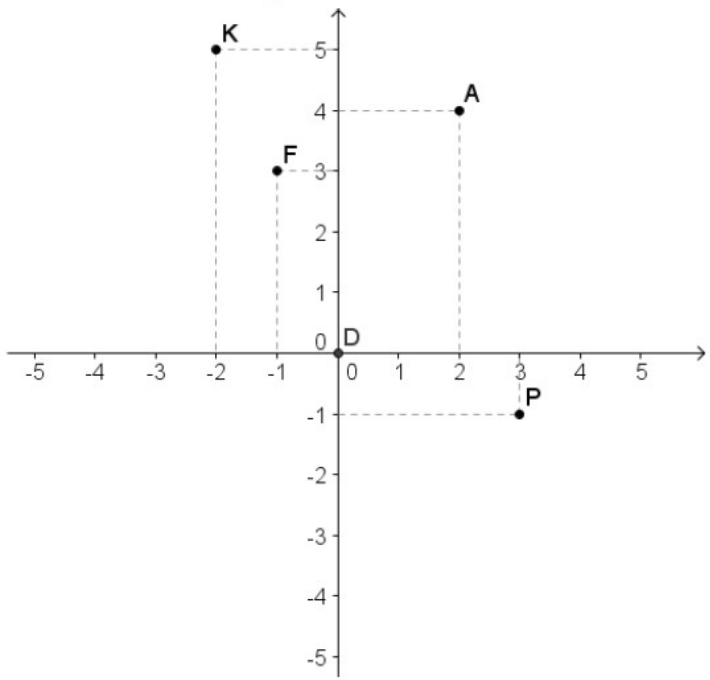
Nome:______________________________ Nº:______ Série:________ Data:______________

Gráficos e funções

Você já jogou batalha naval? Já viu um guia de ruas da lista telefônica? Ou já teve que procurar uma cidade num mapa? Estes são exemplos de que, no plano, bastam duas linhas perpendiculares com subdivisões para que possamos determinar uma posição.

1. Pontos no plano

Na matemática, para localizar pontos, também usamos esse método de acordo com a figura abaixo.



Esse método de localização chama-se *sistema de coordenadas cartesianas.*

(a) Indique que pontos estão nas seguintes posições:
i. Em (2; 4) está o ponto _____
ii. Em (0; 0) - chamado de origem do sistema cartesiano - está o ponto ______
iii. Em (-1; 3) está o ponto _____
iv. Em (3; -1) está o ponto _____
v. Em (-2; 5) está o ponto _____

(b) Agora, marque as posições dos seguintes pontos:
i. (5; 0) como ponto W.
ii. (0; -2) como ponto Y.
iii. (-2; -5) como ponto H.

Podemos usar um sistema de coordenadas cartesianas para representar relações e, em particular, funções. Vejamos alguns exemplos.

2. Vamos tomar um suco?

Uma garrafa de 500 ml de suco concentrado deve ser dissolvida em 1 litro de água para obtermos o suco reconstituído.

Rita Santos Guimarães - UFSCar

(a) Se utilizarmos todo o suco concentrado de uma garrafa, quantos litros teremos de suco pronto para beber: R:_______

(b) Queremos servir suco no almoço de domingo, com toda a família presente. Quantos litros de suco pronto vamos preparar usando 2 garrafas de suco concentrado? R:_____

(c) Complete a tabela, onde c é o total de garrafas de suco concentrado e L é o total de litros de suco pronto:

c	1	2	3	4	5	6	7
L							

(d) Expresse a quantidade de suco pronto L em função da quantidade c de garrafas de suco concentrado:
L(c) = _____________

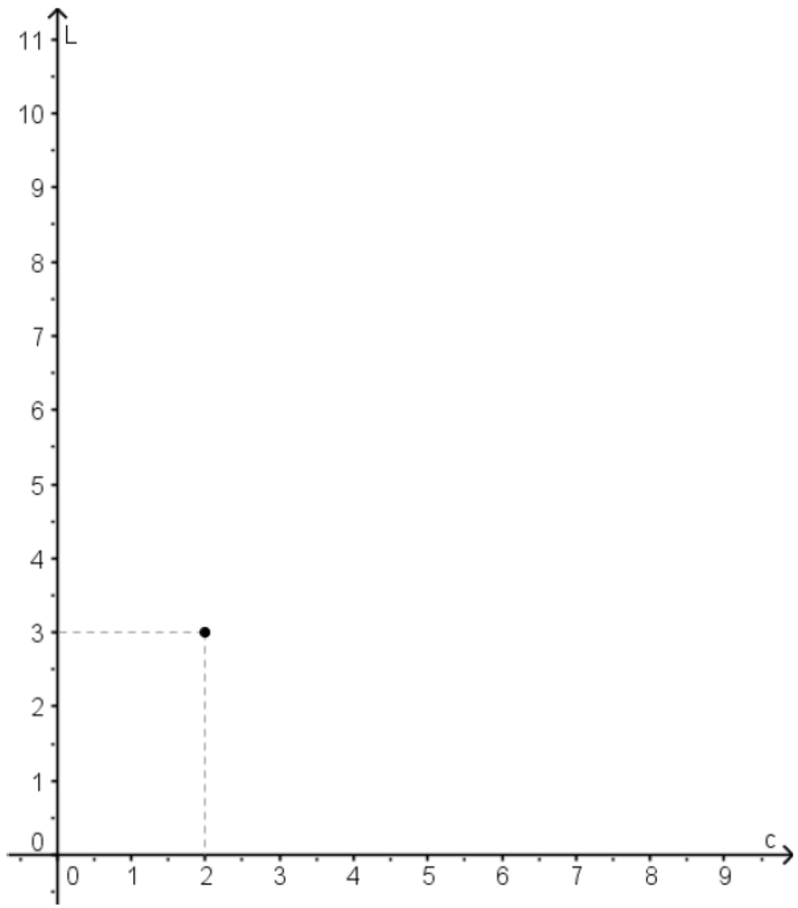
(e) Os valores relacionados na tabela podem ser vistos como pares. Com duas garrafas de suco obtemos exatamente 3 litros de suco pronto. Vamos escrever este par como (2; 3) e representá-lo num sistema de coordenadas cartesianas:

Marque os outros pontos que aparecem na tabela no mesmo sistema de coordenadas cartesianas.

(f) Se você continuar a tabela acima e marcar os pontos na figura, o ponto (8;12) vai ser marcado? R: ☐Sim ☐Não

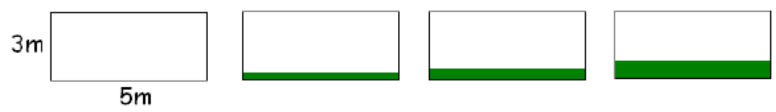
(g) Você não precisa utilizar uma garrafa inteira de suco concentrado. Que ponto seria marcado se você utilizasse apenas meia garrafa? R:__________
Marque este ponto na figura.

(h) Se você marcar na figura outros pontos dados pela função L(c), com valores cada vez mais próximos uns os outros, o que vai aparecendo na figura? R: ___________________________________



3. Área de retângulos

Na sequência de figuras abaixo, a primeira representa uma parede branca de 3 m de altura por 5 m de largura.



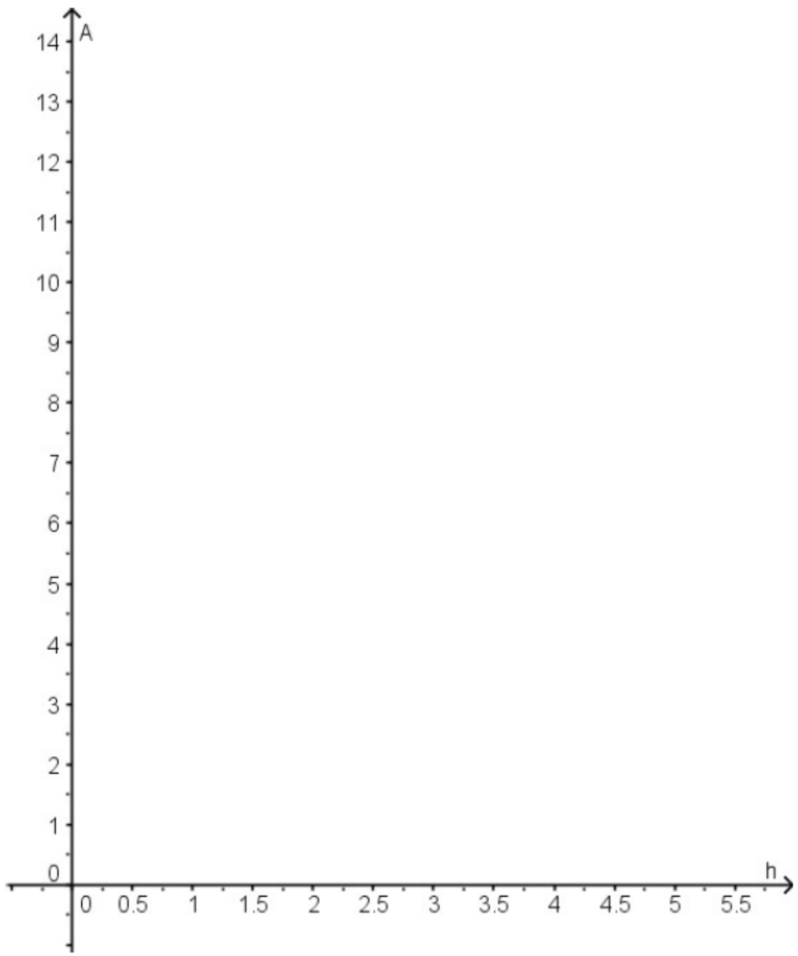
(a) Qual é a área da parede? R: _____

As figuras seguintes representam a pintura que o Sr. Luís está fazendo. Ele usa uma tinta verde e, para pintar, faz faixas horizontais de baixo para cima. Complete a tabela com a área já pintada em determinados momentos.

Altura da parte pintada (m)	0,1	0,35	0,7	1	1,6	2	2,6	h
Área da parte pintada (m^2)								

(b) Marque esses pontos no sistema de coordenadas cartesianas ao lado.

(c) Monte uma uma fórmula para representar a área A pintada por Sr. Luís, em função da altura h da faixa.
A(h) = ___________________________



(d) Na tabela temos alguns exemplos de valores para a altura h.
2,56 m poderia ser um valor de h? ☐Sim ☐Não

0,999... m poderia ser um valor de h? ☐ Sim ☐Não

$\sqrt{2}$ m poderia ser um valor de h? ☐ Sim ☐Não

4,5 m poderia ser um valor de h? ☐ Sim ☐Não

π m poderia ser um valor de h? ☐ Sim ☐Não

$\sqrt{3}$ m poderia ser um valor de h? ☐Sim ☐Não

Qual o intervalo de números reais que podem ser a altura desta faixa? R: [0 ;____]

(e) Na tabela temos também os respectivos valores para a área pintada.
5 m^2 poderia ser um valor de A? ☐ Sim ☐Não

12 m^2 poderia ser um valor de A? ☐Sim ☐Não

0,75 m^2 poderia ser um valor de A? ☐ Sim ☐Não

$\frac{7}{5}$ m^2 poderia ser um valor de A? ☐Sim ☐Não

$\sqrt{87}$ m^2 poderia ser um valor de A? ☐Sim ☐Não

17 m^2 poderia ser um valor de A? ☐ Sim ☐Não

-2 m^2 poderia ser um valor de A? ☐ Sim ☐Não

Qual o intervalo de números reais que podem ser a área desta faixa? R: [____ ; ____]

Se você representar todos esses pares de números no sistema de de coordenadas cartesianas da página anterior, o que vai aparecendo na figura? R:________________________________

(f) Qual é:
i. Domínio de A(h) =
ii. Imagem de A(h) =

4. Velocidade constante

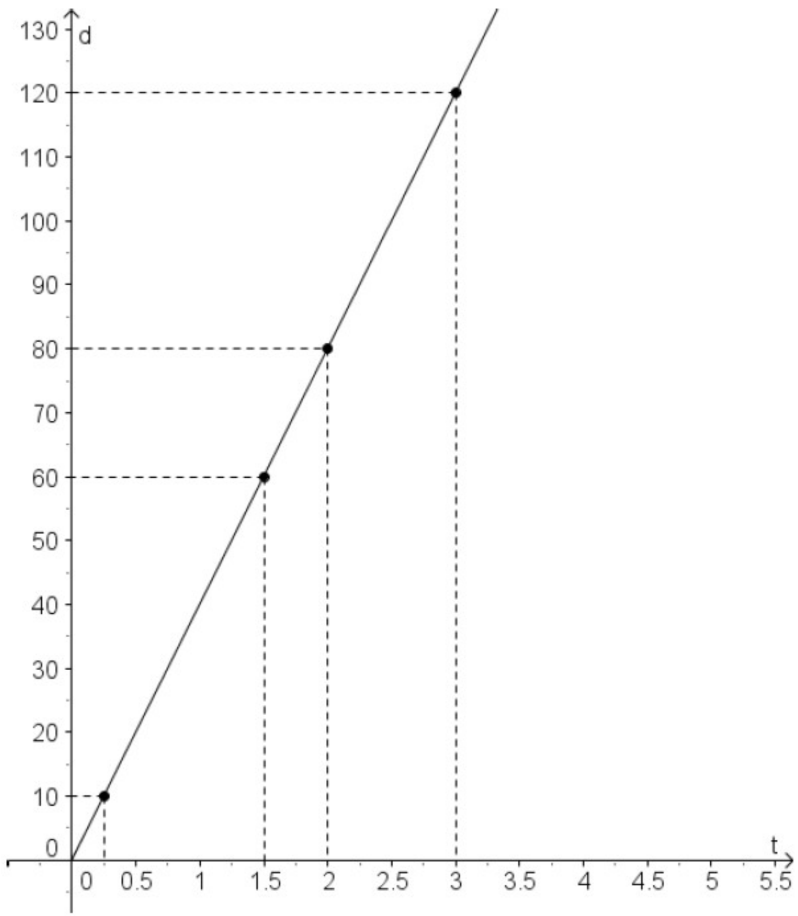
Um caminhão percorre uma estrada com velocidade constante igual a 40 km/h.

(a) Qual será a distância percorrida após:
i. 2h. R:_____
ii. 3h. R:_____
iii. 1h e 30min. R:_____
iv. 15 min. R:_____

(b) Escreva a fórmula da distância percorrida d, em função do tempo t em horas.
d(t) = _________________

Se fôssemos construir uma tabela com todos os valores de t e marcássemos os pontos em um sistema cartesiano obteríamos uma linha contínua. Esta linha chama-se *gráfico*.

Veja como ficaria:



(c) Suponha que o carro ande a uma velocidade de 60 km/h. Faça o gráfico desta situação.

Os meus mais sinceros agradecimentos à vocês, à seu professor e à sua escola.