UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

UM AMBIENTE VIRTUAL DE APRENDIZAGEM PARA O ENSINO MÉDIO SOBRE TÓPICOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA

Mário César Cunha

SÃO CARLOS

2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

UM AMBIENTE VIRTUAL DE APRENDIZAGEM PARA O ENSINO MÉDIO SOBRE TÓPICOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA

Mário César Cunha

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para a obtenção do Titulo de Mestre Profissional em Ensino de Ciências Exatas. Orientador: Prof. Dr. Paulo Antonio Silvani Caetano.

SÃO CARLOS

2009

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar

C972av

Cunha, Mário César.
Um ambiente virtual de aprendizagem para o ensino médio sobre tópicos de geometria analítica plana / Mário César Cunha. -- São Carlos : UFSCar, 2010.
163 f.
Acompanha CD-ROM

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2010.

1. Matemática - estudo e ensino. 2. Ensino à distância. 3. Ambiente virtual de aprendizagem. 4. Matemática – ensino. I. Título.

CDD: 510.7 (20ª)

Banca Examinadora:

Paulo N. Neto

Prof. Dr. Paulo Antonio Silvani Caetano
DM - UFSCar

Francesco Roberto Pinto Mattos

Prof. Dr. Francisco Roberto Pinto Mattos
IA - UERJ

Prof. Dr. José Antonio Salvador
DM - UFSCar

Para minha esposa Izabel e meus filhos, Débora, Carolina e Mateus que são a razão de minha vida

“O conhecimento torna a alma
jovem e diminui a amargura da velhice.
Colhe, pois, a sabedoria. Armazena
suavidade para o amanhã”
(Leonardo da Vinci)

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus;

À Izabel – minha esposa e a Débora, Mateus e Carolina - meus filhos, por terem sempre me incentivado e sendo privados de minha atenção;

ao Professor Paulo Caetano — meu orientador, por ter me guiado até aqui e por ter aceitado me conduzir com extrema atenção;

a todos os professores que tive até agora;

aos demais amigos de mestrado em especial ao Rodrigo, meu parceiro final desta redação;

à professora Meire, minha colega de trabalho, por ter me auxiliado na revisão deste;

à Rosana – minha diretora e Maria José – minha coordenadora, por terem contribuído na aplicação do meu projeto

e à UFScar por me proporcionar esse momento.

Resumo

Este trabalho apresenta a construção de um ambiente virtual de aprendizagem sobre tópicos de geometria analítica plana e sua aplicação em turmas do ensino médio público da cidade de Barra Bonita, interior de São Paulo. O ambiente, implementado na plataforma Moodle de Educação a Distância, é apoiado em visualizadores geométricos dinâmicos idealizados no GeoGebra. Aborda pontos no plano cartesiano, distância entre dois pontos, ponto médio, baricentro, coeficiente angular, condição de alinhamento de três pontos, equação de uma reta, formas de equação de retas, posições relativas de duas retas e retas perpendiculares. Contém atividades em duas unidades implementadas através das ferramentas do Moodle, entre elas Página WEB, Lição, Fórum e Questionário, sempre buscando embasamento nas teorias de aprendizagem de Piaget, Vygotsky e Ausubel. O ambiente busca a construção do conhecimento através da interatividade com os temas abordados, de forma autônoma e respeitando o ritmo do aluno aprendiz, objetivando sempre a compreensão dos conceitos de forma prática e dinâmica, sem se restringir à disseminação de informações de forma estática pré-definida. Na dinâmica de aplicação as atividades virtuais teóricas são seguidas de questões práticas envolvendo o conteúdo estudado, com avaliações constantes na forma de fóruns de discussão, simulados e “provinhas” com perguntas aleatoriamente escolhidas de um banco de questões auto-corrigíveis do ambiente. Apesar das dificuldades encontradas, a primeira unidade pode ser concluída com sucesso verificando uma aprendizagem significativa a partir da utilização dos simuladores de geometria dinâmica, com os alunos mostrando maior interesse e concentração nos assuntos abordados.

Palavras-chave: Ambiente Virtual de Aprendizagem. Educação a Distância. Ensino de matemática. GeoGebra. Geometria Dinâmica. Moodle. Tecnologias de Informação.

Abstract

This study presents the construction of a virtual learning environment on topics of plane analytic geometry and its application in classrooms of public high schools in the city of Barra Bonita, São Paulo, Brazil. The environment, implemented in Moodle platform of Distance Education is supported by dynamic geometric viewers idealized by GeoGebra. It approaches points in the Cartesian plane, the distance between two points, midpoint, barycentric, angular coefficient, alignment condition of three points, equation of a line, forms of equation of straight lines, relative positions of two straight lines and perpendicular straight lines. This virtual learning environment contains activities in two units implemented using the tools of Moodle, including WEB page, Lesson, Forum and Questionnaire, always founded in the learning theories of Piaget, Vygotsky and Ausubel. All of this seeks a construction of knowledge through the interactivity with the approached topics, in an autonomous way and respecting the self-paced learner. It also aims the understanding of the concepts in a practical and dynamic way, not limited to the dissemination of the information in a pre-defined static way. In the dynamic of such application, the virtual theoretical activities are followed by practical issues incorporating the content studied, with frequent assessments in the form of discussion forums, quizzes and tests with questions randomly selected from a database of the virtual environment. Despite the difficulties, the first unit can be successfully completed verifying a significant learning of the use of dynamic geometry simulators, with the students showing greater interest and focus on the approached issues.

Keywords: Virtual Learning Environment. Distance Education. Mathematics teaching. GeoGebra. Dynamic geometry. Moodle. Information technologies.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Esquema de assimilação e acomodação.. 31
Figura 3.1 – Tela inicial do Moodle.. 42
Figura 3.2 – Tela inicial do sitio www.GeoGebra.org... 43
Figura 3.3 – Vista da área de trabalho do GeoGebra.. 44
Figura 3.4 – Principais áreas da tela de trabalho do GeoGebra........................... 45
Figura 4.1 – Página inicial da apresentação do ambiente.................................... 46
Figura 4.2 – Itens da Unidade 1 do ambiente... 47
Figura 4.3 – Itens da Unidade 3 do ambiente... 48
Figura 4.4 – Visualizador de um ponto sobre o eixo.. 50
Figura 4.5 – Questão para poder prosseguir na lição.. 50
Figura 4.6 – Feedback de uma resposta errada do aluno.................................... 51
Figura 4.7 – Visualizador do sistema cartesiano ortogonal.................................. 52
Figura 4.8 – Problema proposto no material da escola pública no Estado de São Paulo. 52
Figura 4.9 – Mostra os seis triângulos equiláteros congruentes........................... 53
Figura 4.10 – O triângulo eqüilátero sendo formado por dois triângulos retângulos. 53
Figura 4.11 – Mostra o cálculo do comprimento do cateto x do triângulo retângulo. 54
Figura 4.12 – Visualização das medidas para cálculos das coordenadas............. 54
Figura 4.13 – Problema resolvido com as coordenadas dos pontos..................... 54
Figura 4.14 – Primeiro problema da “Lição 1.1” com uso do visualizador............. 55
Figura 4.15 – Alternativas do primeiro problema da “Lição 1.1”........................... 55
Figura 4.16 – Propriedades dos pontos sobre os eixos coordenados.................. 56
Figura 4.17 – Alternativas da questão sobre pontos sobre eixos coordenados.... 56
Figura 4.18 – Feedback da questão anterior quando a resposta está errada....... 57
Figura 4.19 – Atividades solicitadas aos alunos na página 3 da “Lição 1.1”......... 57
Figura 4.20 – Visualizador atendendo a solicitação das atividades da página 3

da “Lição 1.1”. 57
Figura 4.21 – Alternativas da questão referente às atividades da página 3 da “Lição 1.1”. 58
Figura 4.22 – Visualizador da última questão da “Lição 1.1”, como é apresentado ao aluno. 58
Figura 4.23 – Visualizador da última questão da “Lição 1.1”, já resolvida............. 59
Figura 4.24 – Alternativas da última questão da “Lição 1.1”................................. 59
Figura 4.25 – Vista inicial do visualizador sobre a distância entre dois pontos localizados nos eixos.. 60
Figura 4.26 – Vista do visualizador sobre a distância entre dois pontos com o movimento do seletor.. 60
Figura 4.27 – Questão sobre distância entre dois pontos sobre um eixo.............. 61
Figura 4.28 – Justificativa teórica sobre distância de dois pontos paralelos ao eixo das abscissas.. 61
Figura 4.29 – visualizador da distância de dois pontos paralelos ao eixo das abscissas. 62
Figura 4.30 – Questão sobre a distância de dois pontos paralelos ao eixo das abscissas. 62
Figura 4.31 – Questão sobre a distância de dois pontos paralelos ao eixo das abscissas. 63
Figura 4.32 – Introdução sobre a distância entre dois pontos no plano................. 63
Figura 4.33 – Visualizador o desenvolvimento teórico da distância entre dois pontos no plano.. 64
Figura 4.34 – Visualizador o desenvolvimento teórico da distância entre dois pontos no plano. 65
Figura 4.35 – Parte da demonstração da formula da distância entre dois pontos no plano. 65
Figura 4.36 – Demonstração da fórmula da distância entre dois pontos no plano. 66

Figura 4.37 – Exercício sobre a fórmula da distância entre dois pontos no plano. 66

Figura 4.38 – Exercício sobre a fórmula da distância entre dois pontos no plano na Lição1.2.. 67

Figura 4. 39 – o Visualizador e as alternativas do primeiro exercício sobre distância da Lição1.2.. 67

Figura 4.40 – Enunciado, Visualizador e as alternativas do segundo exercício sobre distância da Lição1.2... 68

Figura 4.41 – Alternativas do terceiro exercício sobre distância da Lição1.2........ 69

Figura 4.42 – Enunciado e as alternativas do terceiro exercício sobre distância da Lição1.2. 69

Figura 4.43 – Texto introdutório sobre ponto médio da Teoria 1.3........................ 70

Figura 4.44 – Visualizador da definição de ponto médio da Teoria 1.3................. 70

Figura 4.45 – Primeira parte de demonstração da expressão do ponto médio..... 71

Figura 4.46 – Segunda parte de demonstração da expressão do ponto médio.... 71

Figura 4.47 – Visualizador geral de geometria analítica....................................... 72

Figura 4.48 – Alternativas da questão sobre ponto médioda Teoria 1.3............... 72

Figura 4.49 – Exercício sobre ponto médio da Lição 1.3...................................... 73

Figura 4.50 – Alternativas do exercício sobre ponto médio da Lição 1.3.............. 73

Figura 4.51 – Visualizador geral para solução da questão sobre ponto médio da Lição 1.3.. 74

Figura 4.52 – Enunciado e orientação para solução da questão sobre ponto médio da Lição 1.3. 74

Figura 4.53 – Enunciado da questão sobre ponto médio da página 3 referente à Lição 1.3. 75

Figura 4.54 – Definição de base média de um triângulo na página 1 referente à Teoria 1.4.. 76

Figura 4.55 – Visualizador da base média de um triângulo na página 1 referente à Teoria 1.4... 76

Figura 4.56 – Demonstração do teorema da base média de um triângulo na

página 1 referente à Teoria... 77
Figura 4.57 – Enunciado do teorema do baricentro de um triângulo na página 2 referente à Teoria 1.4.. 77
Figura 4.58 – Demonstração do teorema do baricentro de um triângulo na página 2 referente à Teoria 1.4.. 78
Figura 4.59 – Resultado que se pretende demonstrar sobre baricentro de um triângulo... 78
Figura 4.60 – Visualizador que demonstra como encontrar as coordenadas do baricentro de um triângulo... 79
Figura 4.61 – Parte I da demonstração como encontrar as coordenadas do baricentro de um triângulo... 79
Figura 4.62 – Parte II da demonstração como encontrar as coordenadas e questão sobre do baricentro de um triângulo.. 80
Figura 4.63 – Revisão sobre as coordenadas do baricentro de um triângulo........ 80
Figura 4.64 – solução de um problema sobre as coordenadas do baricentro de um triângulo.. 81
Figura 4.65 – Visualizador com a solução de um problema sobre as coordenadas do baricentro de um triângulo.. 81
Figura 4.66 – Enunciado e alternativas de um problema sobre as coordenadas do baricentro de um triângulo.. 82
Figura 4.67 – Problema e visualizador para solução de um exercício baricentro na página 3 da lição 1.4... 82
Figura 4.68 – Problema e visualizador para solução de um exercício baricentro na página 3 da lição 1.4. 83
Figura 4.69 – Enunciado do problema sobre baricentro na página 4 da lição 1.4.. 83
Figura 4.70 – Visualizador do problema sobre baricentro na página 4 da lição 1.4.. 83
Figura 4.71 – Questão aleatória 1 do simulado... 84

Figura 4.72 – Questão aleatória 2 do simulado.. 84
Figura 4.73 – Questão aleatória 3 do simulado.. 85
Figura 4.74 – Questão aleatória 4 do simulado.. 85
Figura 4.75 – Questão aleatória 5 do simulado.. 86
Figura 4.76 – Questão aleatória 6 do simulado.. 86
Figura 4.77 – Questão aleatória 7 do simulado.. 87
Figura 4.78 – Questão aleatória 8 do simulado.. 87
Figura 4.79 – Questão aleatória 9do simulado.. 88
Figura 4.80 – Questão aleatória 10 do simulado.. 88
Figura 4.81 – Reta no horizonte... 89
Figura 4.82 – retas com inclinações diferentes... 89
Figura 4.83 – Questão sobre retas horizontais.. 89
Figura 4.84- Visualizador sobre ângulo de inclinação.. 90
Figura 4.85 questão sobre ângulo de inclinação.. 90
Figura 4.86 – intuição de coeficiente angular... 91
Figura 4.87 – visualizador conceito de coeficiente angular................................... 92
Figura 4.88 – questão sobre coeficiente angular.. 93
Figura 4.89 – coeficiente angular positivo.. 93
Figura 4.90 – coeficiente angular negativo... 94
Figura 4.91 – coeficiente angular por dois pontos.. 95
Figura 4.92 – Questão sobre o cálculo do coeficiente angular............................. 95
Figura 4.93 – ângulo de inclinação e coeficiente angular..................................... 95
Figura 4.94 – Questão sobre ângulo de inclinação... 96
Figura 4.95 – questão sobre cálculo do coeficiente angular................................. 96
Figura 4.96 – questão sobre cálculo do coeficiente angular................................. 96
Figura 4.97 – Resolução de um exercício sobre coeficiente angular..................... 97
Figura 4.98 – exercício final da lição sobre coeficiente angular............................ 97
Figura 4.99 – indicando s solução do exercício onde b = 8.................................. 98
Figura 4.100 – Visualizador sobre três pontos alinhados..................................... 98

Figura 4.101 – pontos colineares sobre uma reta vertical.................................... 99
Figura 4.102 – Três pontos alinhados sobre reta não vertical.............................. 100
Figura 4.103 – Questão sobre alinhamento de três pontos.................................. 100
Figura 4.104 – visualizador auxiliar a problema sobre alinhamento de três pontos 101
Figura 4.105 – Alternativas da questão sobre alinhamento................................. 101
Figura 4.106 – questão resolvida sobre alinhamento.. 101
Figura 4.107 – visualizador para três pontos alinhados....................................... 102
Figura 4.108 – Alternativas da questão sobre alinhamento.................................. 102
Figura 4.109 – Questão final sobre alinhamento.. 102
Figura 4.110 – Equação fundamental da reta.. 103
Figura 4.111 – Questão sobre equação fundamental da reta............................... 104
Figura 4.112 – Visualizador sobre equação da reta vertical................................. 104
Figura 4.113 – Questão sobre equação fundamental da reta vertical.................. 105
Figura 4.114 – Questão sobre equação fundamental da reta............................... 105
Figura 4.115 – Questão sobre verificação de ponto pertencente a uma reta........ 106
Figura 4.116 – Alternativas de uma questão sobre verificação de ponto pertencente a uma reta.. 106
Figura 4.117 – Visualizador sobre reta por dois pontos....................................... 107
Figura 4.118 – Questão sobre equação de reta por dois pontos.......................... 107
Figura 4.119 – Questão sobre equação de retas paralelas aos eixos cartesianos 107
Figura 4.120 – Questão sobre pontos pertencentes à reta.................................. 108
Figura 4.121 – Visualizador para forma reduzida da equação da reta................. 108
Figura 4.122 – Questão sobre equação reduzida da reta.................................... 109
Figura 4.123 – Visualizador para varias formas da equação da reta.................... 110
Figura 4.124 – Visualizador para equação da reta vertical. 110
Figura 4.125 – Questão sobre equação geral da reta.. 111
Figura 4.126 – Visualizador para equação da reta na forma segmentária........... 112
Figura 4.127 – Questão sobre equação segmentária da reta............................... 112

Figura 4.128 – Questão sobre equação paramétricas da reta.............................. 113
Figura 4.129 – Questão sobre formas de equação da reta.................................. 114
Figura 4.130 – Exemplo de aplicação da forma reduzida da equação da reta...... 114
Figura 4.131 – Questão sobre a forma reduzida da equação da reta................... 115
Figura 4.132 – Questão sobre a forma geral da equação da reta........................ 115
Figura 4.133 – Alternativas da Questão sobre a forma geral da equação da reta 115
Figura 4.134 – Questão sobre a forma segmentária da equação da reta............. 116
Figura 4.135 – Questão sobre a forma paramétrica da equação da reta............. 116
Figura 4.136 – Alternativas da Questão sobre a forma paramétrica da equação da reta 117
Figura 4.137 – Questão sobre a forma de determinantes da equação da reta..... 117
Figura 4.138 – Posições de duas retas no plano.. 118
Figura 4.139 – Visualizador das posições de duas retas no plano na forma reduzida.. 119
Figura 4.140 – Questão sobre posições de duas retas no plano na forma reduzida.. 119
Figura 4.141 – Visualizador das posições de duas retas no plano na forma geral 120
Figura 4.142 – Questão sobre posições de duas retas no plano na forma geral... 121
Figura 4.143 – Visualizador para questão sobre retas paralelas.......................... 122
Figura 4.144 – Questão sobre retas paralelas no plano...................................... 122
Figura 4.145 – Visualizador sobre retas paralelas e perpendiculares.................. 123
Figura 4.146 – Questão sobre posições relativas de retas no plano.................... 123
Figura 4.147 – Questão sobre duas retas paralelas no plano 124
Figura 4.148 – Visualizador sobre intersecção de retas no plano........................ 124
Figura 4.149 – Questão sobre intersecção de retas suporte dos lados de um triângulo.. 125
Figura 4.150 – Questão sobre posições relativas de duas retas no plano........... 125
Figura 4.151 – Visualizador para verificação da condição de perpendicularismo. 126
Figura 4.152 – Visualizador para verificação da recíproca da condição de perpendicularismo.. 126

Figura 4.153 – Questão sobre retas perpendiculares plano................................ 127
Figura 4.154 – Questão sobre retas verticais e horizontais perpendiculares no plano.. 127
Figura 4.155 – Visualizador para solução de exercício sobre a condição de perpendicularismo.. 128
Figura 4.156 – Questão sobre retas perpendiculares passando por dois pontos 128
Figura 4.157 – Visualizador para retas perpendiculares passando por um ponto dado.. 129
Figura 4.158 – Questão sobre reta perpendicular passando um ponto dado........ 129
Figura 4.159 – Visualizador de retas perpendiculares e ponto simétrico............... 130
Figura 4.160 – Questão sobre reta perpendicular e ponto simétrico..................... 130
Figura 4.161 – Questão sobre retas paralelas e perpendiculares no plano........... 131
Figura 4.162 – Questão aleatória 1 da provinha.. 131
Figura 4.163 – Questão aleatória 2 da provinha.. 131
Figura 4.164 – Questão aleatória 3 da provinha.. 132
Figura 4.165 – Questão aleatória 4 da provinha.. 132
Figura 4.166 – Questão aleatória 5 da provinha.. 133
Figura 4.167 – Questão aleatória 6 da provinha.. 133
Figura 4.168 – Questão aleatória 7 da provinha.. 134
Figura 4.169 – Questão aleatória 8 da provinha.. 134
Figura 4.170 – Questão aleatória 9 da provinha.. 135
Figura 4.171 – Questão aleatória 10 da provinha.. 135
Figura 4.172 - As opções do menu indicadas no seletor...................................... 137
Figura 5.1 – Fachada da EE Dr. Geraldo Pereira de Barros................................ 145
Figura 5.2 – Sala de informática da EE Dr. Geraldo Pereira de Barros................. 145
Figura 5.3 – Tela inicial do Moodle.. 147
Figura 5.4 – Como e onde acessar o ambiente.. 148
Figura 6.1 – Relato de um participante da aplicação. 155
Figura 6.2 – Relato de um participante da aplicação... 155

Figura 6.3 – Relato de um participante da aplicação.. 155

Figura 6.4 – Relato de um participante da aplicação.. 155

LISTA DE TABELAS

Tabela 1.1 – Causas de abandono.. 27

Tabela 5.1 – Participantes da aplicação curso... 146

Tabela 5.2 – Participantes com acesso a internet em casa............................ 148

Tabela 5.3 – Participantes da avaliação presencial... 150

Tabela 5.4 – Resumo dos comentários dos alunos... 151

Tabelas 6.1 – Justificativas de não participação na aplicação do ambiente.... 154

Tabelas 6.2 – Aproveitamento dos alunos da segunda série “A”..................... 156

Tabelas 6.3 – Aproveitamento dos alunos da segunda série “B”..................... 156

Tabelas 6.4 – Aproveitamento dos alunos da terceira série “A”....................... 157

LISTA DOS GRÁFICOS

Gráfico 6.1 – Número de alunos que concluíram total ou parcialmente as oito atividades Lições... 153
Gráfico 6.2 – Número de acessos e mensagens durante a aplicação das atividades Lições.. 154
Gráfico 6.3 – Notas dos alunos na provinha da Unidade 1: grupo de 1 a 32 - 2ºA, grupo de 1 a 36 - 2ºB e grupo de 2 a 32-3ºA.. 157
Gráfico 6.4 – Notas dos alunos na prova presencial: grupo de 1 a 32 - 2ºA, grupo de 2 a 36 - 2ºB e grupo de 2 a 31 - 3ºA 158

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO.. 22

1.1 - O que consta no meu trabalho... 22

1.2 - A internet... 24

1.3 – As dificuldades da EaD e com as TICs 26

1.4 – Porque este tema.. 27

CAPÍTULO 2 - REFERENCIAL TEÓRICO... 29

2.1 – O construtivismo e o construcionismo... 29

2.1.1 - Paradigmas educacionais.. 29

2.2 - Piaget.. 30

2.3 – Vygotsky... 32

2.4 – Ausubel... 34

2.4.1 - Aprendizagem significativa... 34

2.4.2 - Aprendizagem mecânica.. 35

2.5 – Embasamento teórico.. 36

CAPÍTULO 3 - MOODLE E GEOGEBRA 38

3.1 – A plataforma Moodle.. 38

3.1.1 - Filosofia do Moodle... 39

3.1.2 – Estrutura do Moodle.. 41

3.2 – O GeoGebra... 42

CAPÍTULO 4 - CONSTRUÇÃO DO AMBIENTE 46
4.1 – Ideia geral.. 46
4.2 – Tipo especial da escrita.. 49
4.2.1- Pontos no plano (Teoria 1.1 do ambiente).................................... 49
4.2.2 - Pontos no plano (Lição 1.1 do ambiente)...................................... 55
4.2.3 - Distância entre dois pontos (Teoria 1.2 do ambiente).................... 59
4.2.4 - Distância entre dois pontos (Lição 1.2 do ambiente)..................... 66
4.2.5 - Ponto médio de um segmento (Teoria 1.3 do ambiente)............... 69
4.2.6 - Ponto médio de um segmento (Lição 1.3 do ambiente)................. 72
4.2.7 - O Baricentro do triângulo (Teoria 1.4 do ambiente)....................... 75
4.2.8 - O Baricentro do triângulo (Lição 1.4 do ambiente).......................... 80
4.2.9 – Simulado e Provinha.. 84
4.2.10 - Coeficiente angular (Teoria 2.1 do ambiente).............................. 88
4.2.11- Coeficiente angular (Lição 2.1 do ambiente)................................. 95
4.2.12 - Condição de alinhamento para três pontos (Teoria 2.2 do ambiente)... 98
4.2.13 - Condição de alinhamento de três pontos (Lição 2.2 do ambiente)... 100
4.2.14 - Equação de uma reta (Teoria 2.3 do ambiente)........................... 103
4.2.15 - Equação de uma reta (Lição 2.3 do ambiente)............................. 105
4.2.16 - Formas da equação da reta (Teoria 2.4 do ambiente).................. 108
4.2.17 - Formas da equação da reta (Lição 2.4 do ambiente).................... 114
4.2.18 - Posições relativas de duas retas (Teoria 2.5 do ambiente).......... 118
4.2.19 - Posições relativas de duas retas (Lição 2.5 do ambiente)............ 121
4.2.20 - Retas perpendiculares (Teoria 2.6 do ambiente)........................... 125
4.2.21 - Retas perpendiculares (Lição 2.6 do ambiente)............................ 127
4.2.22 – Simulado e provinha da unidade 2... 131
4.3 – Os Visualizadores “applets”... 136
4.4 – A integração.. 144

CAPÍTULO 5 - APLICAÇÃO DO AMBIENTE.. 145
5.1 – A escola.. 145
5.2 – Os alunos.. 146
5.3 – Os colaboradores.. 146
5.4 – A aplicação... 146

CAPÍTULO 6 - ANÁLISE DOS RESULTADOS.. 152
6.1 – A participação dos alunos.. 153
6.2 – houve aprendizagem? 155
6.3 – Os resultados inesperados.. 158
6.4 – Objetivo atingido.. 159

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.. 160

CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO

Neste trabalho descrevo e analiso a construção e aplicação de um Ambiente Virtual de Aprendizagem sobre tópicos da geometria analítica plana do Ensino Médio, idealizado no ambiente Moodle[1] e utilizando o software de geometria dinâmica Geogebra.

1.1- O que consta no meu trabalho

Nos dias atuais é inquestionável o progresso das tecnologias de informação e comunicação (TIC), impulsionado pela grande quantidade de mídias disponíveis em nossa sociedade. A transferência destas tecnologias para o ambiente escolar requer mudanças nas práticas de ensino e aprendizagem. Dentro deste contexto são apresentadas grandes perspectivas para a educação a distância (EaD), principalmente nos ambientes virtuais de aprendizagem (AVA) via internet, que se ampliaram e ficaram mais atrativos com a incorporação de novas tecnologias computacionais e de comunicação. A forma de utilização destas tecnologias e a abordagem pedagógica utilizada nos ambientes virtuais podem apresentar uma comunicação diferenciada com maior ou menor interatividade.

Neste trabalho idealizo um ambiente virtual de aprendizagem, no Moodle, sobre tópicos da geometria analítica plana e utilizando o software Geogebra, para aplicação no Ensino Médio. O trabalho busca focar a construção do conhecimento através da interatividade com os temas abordados, de forma autônoma, respeitando o ritmo do aluno aprendiz e objetivando a compreensão dos conceitos envolvidos de maneira prática e dinâmica, sem se restringir à disseminação de informações de forma estática pré-definida. Para garantir a interatividade foram idealizados vários visualizadores e simuladores no Geogebra, possibilitando aos alunos um trabalho no ambiente de forma reflexiva e dinâmica, norteada pela abordagem construtivista e construcionista (proposta por Seymour Papert) onde o professor deve propor aos alunos conteúdos de maneira significativa e onde os mesmos possam descobrir e construir os conhecimentos por si mesmos.

---

[1] "Modular Object-Oriented Dynamic Learnin"

Como diz Valente (2003, p.14) na apresentação de seu projeto de ensino a distância.

> Portanto, o projeto aqui não significa a realização de uma tarefa —o simples fazer — ou uma roupagem para vestir o velho currículo seqüencial. O Projeto tem um caráter interdisciplinar, procurando trazer a vida para a escola e a escola para a vida do aluno. No entanto, para que isso seja possível, o professor tem que saber aproveitar as ações que os alunos desenvolvem na elaboração de seus projetos para explorar e trabalhar os conteúdos disciplinares que estão estipulados no currículo. Não se trata de um Laissez-faire[2] do projeto ou o simples fazer, mas criar oportunidades para que este fazer possa propiciar o compreender e, com isso, o aluno construa novos conhecimentos.

No ambiente os estudantes estarão discutindo, socializando, crescendo e aprendendo por meio de ferramentas virtuais disponíveis no Moodle, a seu tempo e no seu ritmo. Agrada-me essa possibilidade de aprendizagem virtual, uma vez que oferece oportunidade de acesso em diferentes momentos e espaços. Acredito que a discussão dos temas propostos, via fóruns, e as características dos softwares escolhidos podem ampliar o processo de produção e de construção do conhecimento pelos alunos.

Para Scherer (2005, p. 52), "o uso de espaços virtuais e espaços presenciais nas instituições educacionais favorece uma educação mais inteira, conectada aos movimentos que o mundo impulsiona, uma proposta que une mais, que respeita a diversidade." Kenski (2003) diz que as tecnologias ampliam as possibilidades de ensino e de aprendizagem para além do curto e limitado espaço da sala de aula ou da escola.

Uma vertente de meu trabalho é a verificação como os alunos da escola pública reagem a esse tipo de aprendizagem à distância e midiatizada, pois como

---

[2] (observação do autor) **Laissez-faire** é parte da expressão em língua francesa "*laissez faire, laissez aller, laissez passer*", que significa literalmente "deixai fazer, deixai ir, deixar passar".

verificado pelas avaliações externas[3] os alunos de escolas públicas tem um nível de conhecimento muito abaixo das expectativas mínimas, muitas vezes advindo da falta de interesse na aquisição desses conhecimentos. Como muitos deles estão engajados no meio virtual da internet, vamos aproveitar esse interesse para observar como essa ferramenta de aprendizagem atua na construção do conhecimento desses alunos.

Outra vertente do meu trabalho é a aplicação do ambiente virtual de aprendizagem como auxilio na recuperação de alunos com deficiências de aprendizagem nos conteúdos de matemática do ensino médio, pois tenho notado que alguns estudantes apresentam relutância na participação das aulas de recuperação ministradas de forma presencial tradicional.

O maior legado deste trabalho é a construção de um ambiente de aprendizagem que possa ser utilizado a qualquer momento por professores e alunos que disponham de um computador com acesso a internet. Fica ainda a possibilidade do ambiente ser utilizados por iniciativa dos próprios estudantes, como protagonistas do próprio aprendizado, fugindo da forma tradicional, como diz Mecer; Estepa (2001, p. 25)

> Por sua vez, os alunos assumem papéis mais ou menos ativos durante o processo de aprendizagem. Podem, por exemplo, cumprir a função de mero ouvinte ou apenas responder às questões levantadas pelos professores, expressar de modo franco suas confusões ou fazer perguntas ao professor para que os ajude a aprofundar sua compreensão a respeito de um determinado conteúdo, entre outras coisas. Uma boa proposta pedagógica oferecerá aos estudantes as oportunidades e possibilidades de converter-se ativamente em protagonistas de seus próprios processos de aprendizagem.

1.2 - A internet

Seguramente a Internet, ou mais detalhadamente a World Wide Web (WWW), é ou está se tornando uma das mais promissoras formas de uso de computadores no ambiente escolar. É a fonte primordial para onde os estudantes recorrem quando estão necessitados de obter informações ou realizar suas pesquisas escolares. A

---

[3] **PISA** (Programa Internacional de Avaliação de Alunos), **SARESP** (Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo)

Internet alterou o modo de procurarmos a informação e também a maneira de armazená-la. Com ela administramos negócios e respondemos a várias questões em nossa vida. Há pouco tempo atrás era impossível imaginar o impacto extraordinário que a internet provocaria.

Segundo as idéias de Almeida (2003), a leitura de um texto de forma não linear (hipertexto) na tela do computador, que está baseada em indexações, conexões entre idéias e conceitos articulados por meio de links (nós e ligações), conectam informações representadas em diferentes linguagens e formato, tais como palavras, páginas, imagens, animações, gráficos, sons, clips de vídeo, etc. Dessa forma, ao clicar um hipertexto, encontra-se uma nova situação, evento ou outros textos relacionados. Portanto, cada nó pode ser ponto de partida ou de chegada, originar outras redes e conexões, sem que exista um nó fundamental. Esta representação de permite romper com as seqüências estáticas e lineares de caminho único, com início, meio e fim fixados previamente. Diz ainda Almeida (2003, p. 231)

> O hipertexto disponibiliza um leque de possibilidades informacionais que permitem ao leitor interligar as informações segundo seus interesses e necessidades, navegando e construindo suas próprias seqüências e rotas. Ao saltar entre as informações e estabelecer suas próprias ligações e associações, o leitor interage com o hipertexto e pode assumir um papel mais ativo do que na leitura de um texto do espaço linear do material impresso.

Temos que aproveitar a curiosidade do estudante em relação a WWW quando eles têm uma necessidade de informação a preencher. Nesse momento todas as formas de hipertexto devem apoiar a sua aprendizagem construtivista e significativa. Nestas condições é que a internet deve fazer parte das atividades instrutivas em programas de ensino a distância. Portanto a educação a distância deve fornecer um motivo significativo dando razão para procura da informação. É uma necessidade da educação a distância ensinar aos estudantes a lógica e os mecanismos de procura na WWW, maximizando o valor da procura pela informação.

Segundo Marchand (2002, p. 147) falando sobre a utilização das TIC na internet com relação ao processo de aprendizagem

> A ciberaprendizagem é o terreno por excelência das experiências e das atividades pedagógicas inovadoras utilizando a autoformação e inventando abordagens novas em razão das tecnologias utilizadas. Os problemas de

> utilização das TIC para fins pedagógicos existem em escala nacional e mesmo em escala mundial. Essas tecnologias nos oferecem a imagem de um mundo cada vez mais complexo. Aprendizes e professores deverão ajustar-se para fazer frente aos desafios ligados à gestão de novos modos de aprendizagem. ....
> ..... As ferramentas tecnológicas podem ser excelentes auxiliares de ensino, mas, em nenhum caso, concorrerão com o professor. As TIC são bons suportes para os cursos, mas elas têm de continuar se aperfeiçoando pelo acréscimo de mais interatividade; já os novos modos são híbridos.

Vê-se então que professores e alunos deverão ser preparados para participar da aprendizagem midiatizada pela internet. Percebe-se também que pela popularização deste tipo de mídia, muitos alunos já estão preparados muito antes de seus professores.

1.3 – As dificuldades da EaD e com as TICs

De acordo com os três autores Cosme; Maciel, (2005) Tannous; Ropoli (2005) e Vecchione (2006), uma das maiores dificuldades na atualidade enfrentado pelo EaD é o abandono nos estudos, que frustra a expectativa dos criadores do curso. É importante considerar os perfis dos estudantes que irão participar da modalidade à distância, verificando as características desejadas para ingressar neste tipo de curso. Devem ser vista as capacidades para o auto-estudo e motivação, assim como um domínio das habilidades para trabalhar os recursos das TIC, incluindo os ambientes virtuais de aprendizagem. Outros fatores também podem frustrar os estudantes e tutores, tais como: falta de ajuda dos tutores e colegas, instruções mal explicitadas do curso, problemas técnicos independentes das vontades dos participantes, modelo pedagógico inadequado a cognição e problemas pessoais e sociais.

De acordo com Tannous; Ropoli (2005, p. 5)

> Ao analisar os motivos de evasão nos cursos observamos as ocorrências na seguinte ordem:
> - Priorização de outras atividades profissionais não previstas no início do curso;
> - Interesse apenas em conhecer as características do ambiente de EAD sem ter um projeto educacional definido;
> - Falta dos pré-requisitos necessários para acompanhar o curso;
> - Problemas de saúde;
> - Problemas técnicos de acesso, precisamente de conexão.

> Um fato que merece destaque são os participantes que realizaram o curso pela segunda vez, num total de cinco alunos. Apesar da segunda oportunidade, nenhum conseguiu finalizar o curso pela segunda vez, o que nos leva a concluir que estes alunos não possuem o perfil adequado para serem alunos de cursos à distância, pois isso demanda autonomia do aprendiz, disciplina e auto-organização. Apenas a motivação inicial não é suficiente.

Como diz Cosme; Maciel (2005), a tabela abaixo mostra as causas de abandono manifestadas pelos alunos em um curso de ensino a distância no México.

Tabela 1.1 – Causas de abandono

CAUSAS DO ABANDONO	**FREQUÊNCIA (%)**
Falta de tempo	20
Problemas de assessoramento	20
Falta de interesse	11
Distancia entre casa e a cidade	9
Falta de equipamento - computador	6
Problemas de saúde	6
Falta de comunicação entre os colegas	6
Problemas na escolha do tema	6
Outros	17
TOTAL	100

Como veremos na análise da aplicação do ambiente, o principal problema encontrado foi a falta de equipamento (computador) e problemas na conexão com a internet nos computadores da escola, onde estudam os alunos que participaram deste trabalho.

1.4 – Porque este tema

A idéia de fazer um trabalho sobre o ensino da matemática com TIC surgiu no transcorrer do meu curso de mestrado no PPGECE da UFSCar, quando participei da disciplina "Tecnologias da Informação para o Ensino de Ciências e Matemática" no segundo semestre de 2008, ministrada na ocasião pelo Prof. Dr. Paulo Antonio Silvani Caetano e pela Profa. Dra. Ducinei Garcia, e tive contacto com o software Geogebra e o ambiente Moodle. Desde o início notei o grande potencial destes dois programas para o ensino da matemática. Pensando em minha prática didática, principalmente na dificuldade de meus alunos atribuírem significado para aprendizagem da matemática; percebi que o Geogebra facilitaria uma interação instantânea, dando oportunidade ao professor e ao aluno de testar inúmeras hipóteses e fazer generalizações como, por exemplo, na construção de gráficos.

Com o ambiente Moodle, atendendo aos Parâmetros Curriculares Nacionais **(**PCN), pensei em pesquisar novas abordagens metodológicas para o ensino, fazendo com que o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos se tornasse mais agradável e contextualizado, mantendo sempre o rigor matemático, tornando o aluno protagonista desse desenvolvimento e autônomo para caminhar em seu próprio ritmo.

Considerando o texto de Valente (1997), pude formar uma idéia melhor de como deveria ser meu trabalho.

> Isso significa dizer que a análise de um sistema computacional com finalidades educacionais não pode ser feita sem considerar o seu contexto pedagógico de uso. Um software só pode ser tido como bom ou ruim dependendo do contexto e do modo como ele será utilizado. Portanto, para ser capaz de qualificar um software é necessário ter muito clara a abordagem educacional a partir da qual ele será utilizado e qual o papel do computador nesse contexto. E isso implica ser capaz de refletir sobre a aprendizagem a partir de dois pólos: a promoção do ensino ou a construção do conhecimento pelo aluno.
>
> Nesse artigo será defendida a idéia de que o uso inteligente do computador na educação é justamente aquele que tenta provocar mudanças na abordagem pedagógica vigente ao invés de colaborar com o professor para tornar mais eficiente o processo de transmissão de conhecimento. (VALENTE, 1997, p.1-2)

Valente evidencia que não se deve usar o computador como simples transmissor de conhecimento e informação, mas como algo que possa motivar e auxiliar os estudantes a pesquisar sobre seu tema de estudo, onde ele possa construir seu objeto de estudo. Os visualizadores e simuladores idealizados no Geogebra vêm ao encontro desta solicitação.

Quando conheci o ambiente Moodle, vislumbrei a possibilidade de fazer com que os estudantes, através da EaD, tenham maior motivação e concentração no momento do estudo, pois será a sua ação que promoverá sua aprendizagem. Atualmente, no ambiente escolar da sala de aula, a socialização entre os alunos é muito facilitada e desvia a sua atenção nos estudos.

CAPÍTULO 2: REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 – O construtivismo e o construcionismo

2.1.1 Paradigmas educacionais

Segundo Sales (2008), o desenvolvimento e o uso de softwares educativos ou ambientes educacionais requerem paradigmas educacionais que os subsidiem. Um software apoiado em um paradigma instrucionista irá priorizar mecanismos de transmissão de informações e de exercitação de habilidades como memória. Já um software educativo baseado em um paradigma construtivista valoriza principalmente a interação social aluno/professor e aluno/aluno, podendo enriquecer os ambientes de aprendizagem através da mediação propiciada pelo computador, onde o aluno tem chance de construir o seu conhecimento interagindo com os objetos deste ambiente.

Desse modo, a interatividade aluno/computador/software assume papel de fundamental importância no processo de aprendizagem. Nesse paradigma, centrado na aprendizagem, no aluno e na construção do conhecimento, compreende-se o aluno como um ser ativo que gerencia sua própria aprendizagem: pensando, articulando idéias e construindo representações mentais na solução de problemas, tornando-se gerador de seu próprio conhecimento.

Valente (1998, p.30) diz

> ... o computador pode enriquecer ambientes de aprendizagem onde o aluno, interagindo com os objetos desse ambiente, tem a chance de construir seu conhecimento. Nesse caso, o conhecimento não é passado ao aluno. O aluno não é mais instruído, ensinado, mas é o construtor do seu próprio conhecimento. Esse é o paradigma construcionista onde a ênfase está na aprendizagem ao invés de estar no ensino; na construção do conhecimento e não na instrução.

Foi Papert (1986) quem denominou de construcionismo a construção do conhecimento por meio do uso do computador. Ele usou este termo para mostrar outro nível de construção do conhecimento, onde o aluno constrói um objeto de seu interesse, como um programa de computador ou software. O aluno constrói seu próprio conhecimento, ou seja, é o aprendizado através do fazer. O fato de o aluno estar construindo algo de seu interesse e para o qual ele está motivado torna a aprendizagem mais significativa.

Nesta mesma linha de pensamento, Ramos; Mendonça (1991, p.3) afirma que:

> "Percebe-se uma linha divisória clara entre os softwares educacionais, esta linha é definida por concepções educativas bastante distintas. De um lado está o paradigma comportamentalista (modalidade dura e enfoque algorítmico) e do outro lado está o paradigma do construtivismo (modalidade branda e enfoque heurístico)."

Este trabalho será pautado no paradigma da teoria construtivista, considerando que "o fazer" realmente trará a aprendizagem ao aluno, dando mais significado àquilo que está construindo.

Para fundamentar a reflexão no tema considerado nesta dissertação, busquei subsídios teóricos nos seguintes estudiosos: Piaget, Vygotsky e Ausubel.

2.2 - Piaget

Segundo Piaget (1971), a estrutura cognitiva é construída em etapas e cada etapa incorpora as anteriores, dando-se a construção do conhecimento pela ação recíproca e interativa do sujeito com os objetos (meio). A organização da realidade dá-se por meio do pensamento estruturado, que se expressa mediante o processo de adaptação. Assim, a estrutura mental e o conhecimento são construídos em uma relação dialética entre a maturação biológica e o ambiente.

De acordo com Lima (2003), o processo epistemológico descrito por Jean Piaget para compreensão do processo de aprendizagem é chamado de "esquema de assimilação", isto é, como aquele que aprende (organismo) e estabelece as relações com o mundo exterior, transformando o meio e a si mesmo.

Consoante Rosa (2008, p.8) descreve, por meio de um fluxograma, os processos de assimilação e acomodação (Figura 1). O organismo possui um certo esquema (ou conjunto deles) usado para interagir com o meio. Frente a uma situação externa o esquema é aplicado. Se o esquema incorpora a nova informação à estrutura previamente existente e ocorre a manutenção do status quo, não havendo aprendizagem. Por outro lado, se o esquema não consegue absorver a situação externa frente a qual o indivíduo se encontra, então o organismo está em face de um desequilíbrio. Este desequilíbrio pode ser majorante ou não. Por desequilíbrio majorante entendemos aquele desequilíbrio que leva o sujeito a um processo de acomodação da estrutura cognitiva, neste caso houve aprendizagem. Os esquemas de assimilação se modificam de modo a assimilar o novo dado externo. Em contrapartida, se a situação externa está muito longe das possibilidades de assimilação dos esquemas atuais ocorre um desequilíbrio que não é majorante, e o sujeito nega a realidade externa ou simplesmente a ignora, permanecendo assim os esquemas atuais.

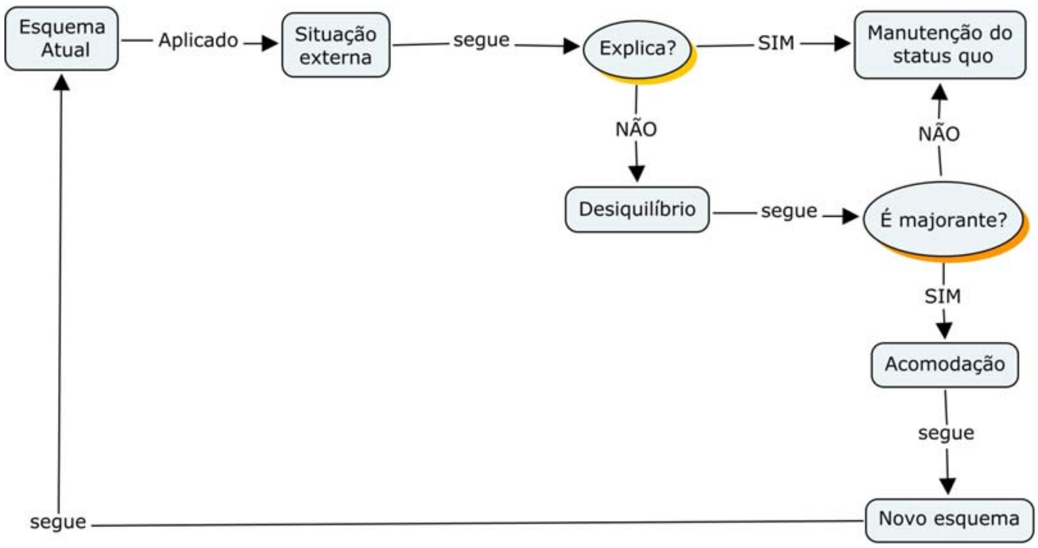


Figura 2.1 - Esquema de assimilação e acomodação

Dessa forma, conforme Varela (2007) conceitua-se aprendizagem como a modificação duradoura (equilibrada) do comportamento, em razão das aquisições decorrentes da experiência. O conhecimento constrói-se em um movimento contínuo de equilibração, daí ser importante que a ação mediadora provoque os usuários, por meio de situações desequilibradoras, dando espaço para que eles possam criar e/ou descobrir as soluções, a partir do próprio esforço para a superação do desequilíbrio.

Essas situações que provocam o desequilíbrio, seguido de equilibração e promovem a acomodação, são efetivadas através do ensino a distância, pelos professores ou tutores, os quais, utilizando-se dos objetos de aprendizagem, questionam o aluno provocando uma reação para que os mesmos superem esse desequilíbrio, efetuando assim a aprendizagem por si mesmo. Assim, as teorias de

Piaget explicariam a estrutura cognitiva para o processo de aprendizagem no sistema de ensino a distância.

2.3 – Vygotsky

A abordagem sócio-histórica de Vygotsky (1984) baseia-se na idéia central de que o ser humano se desenvolve pela interação social, quando o desenvolvimento cognitivo mantém estreita relação com a aprendizagem. O desenvolvimento das funções psíquicas do indivíduo interage continuamente com a aprendizagem, com a apropriação do conhecimento produzido pela humanidade e as relações que estabelece com seu meio. Para Vygotsky, desenvolvimento e aprendizagem constituem uma unidade. A aprendizagem, quando significativa, estimula e desencadeia o avanço para um nível de maior complexidade que, por sua vez, serve de base para novas aprendizagens.

Segundo Oliveira (1997), o desenvolvimento humano, o aprendizado e as relações entre desenvolvimento e aprendizado são temas centrais nos trabalhos de Vygotsky. Sua preocupação com o desenvolvimento do homem está presente em toda sua obra. Ele procura compreender a origem e o desenvolvimento dos processos psicológicos ao longo da história da espécie humana e da história individual.

Vygotsky (1984) enfatiza em sua obra, ao lado de sua preocupação constante com a questão do desenvolvimento, a importância dos processos de aprendizagem. Para ele o aprendizado está relacionado ao desenvolvimento e isso é um aspecto especificamente humano, necessário e universal do processo de desenvolvimento das funções psicológicas culturalmente organizadas.

A Mediação é uma idéia central para a compreensão de suas concepções sobre o desenvolvimento humano como processo sócio-histórico. Enquanto sujeito do conhecimento o homem não tem acesso direto aos objetos, mas acesso mediado, portanto Vygotsky (1991) enfatiza a construção do conhecimento como uma interação mediada por várias relações. A linguagem representa um salto qualitativo na evolução humana e fornece conceitos, formas de organização do real e a mediação entre o sujeito e o objeto do conhecimento.

Segundo Vygotsky (1984) existe um fator que faz a ligação entre um aprendizado não sistematizado e um aprendizado sistematizado. Trata-se de um conceito novo e de excepcional importância sem o qual esse assunto não pode ser resolvido: a zona de desenvolvimento proximal. Este conceito é fundamental para o entendimento das relações entre o desenvolvimento e o aprendizado. A zona de desenvolvimento proximal descreve a distância entre o nível de desenvolvimento real, que constitui aqueles conhecimentos ou funções já completadas pelo estudante em seu desenvolvimento, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado por meio da solução de problemas sobre orientação de um professor ou tutor ou em colaboração com os companheiros mais capacitados. A zona de desenvolvimento proximal permite-nos explorar aquelas funções que ainda não desenvolveram, mas estão em estado embrionário.

Martins (2005) diz que este conceito também nos permite delinear um estado dinâmico de desenvolvimento, pois o que hoje é zona de desenvolvimento proximal será o nível de desenvolvimento real amanhã, isto é, aquilo que o aluno faz hoje com assistência de um professor ou tutor, poderá fazer amanhã sozinho. A partir desse conceito, a relação entre o desenvolvimento e aprendizado toma outra dimensão, ou seja, o aprendizado passa a ser imprescindível para o desenvolvimento humano. Oliveira (2005, p.60) diz ainda que:

> A zona de desenvolvimento proximal refere-se, assim, ao caminho que o indivíduo vai percorrer para desenvolver funções que estão em processo de amadurecimento e que se tornarão funções consolidadas, estabelecidas no seu nível de desenvolvimento real. A zona de desenvolvimento proximal é, pois, um domínio psicológico em constante transformação: aquilo que uma criança é capaz de fazer com a ajuda de alguém hoje, ela conseguirá fazer sozinha amanhã. E como se o processo de desenvolvimento progredisse mais lentamente que o processo de aprendizado; o aprendizado desperta processos de desenvolvimento que, aos poucos, vão tornar-se parte das funções psicológicas consolidadas do indivíduo. Interferindo constantemente na zona de desenvolvimento proximal das crianças, os adultos e as crianças mais experientes contribuem para movimentar os processos de desenvolvimento dos membros imaturos da cultura.

No caso do ensino a distância, o computador com um objeto virtual de aprendizagem terá a função de auxiliar o estudante na zona de desenvolvimento proximal a atingir o nível de desenvolvimento real. Fica claro que esta não será a única forma de aprendizagem, pois o estudante terá outras em formas não tradicionais de ensino ao longo de sua vida.

Outro aspecto nas teorias construtivistas relevante é a mediação. O processo de mediação, através de instrumentos e signos, é fundamental para o desenvolvimento das funções psicológicas superiores:

> "A função do instrumento é servir como um condutor da influência humana sobre o objeto da atividade; ele é orientado externamente [...] O signo, por outro lado, não modifica em nada o objeto da operação psicológica. Constitui um meio da atividade interna" (VYGOTSKY, 1984, p.62).

2.4. Ausubel

A mediação por instrumentos vem da interação entre o ambiente virtual e os softwares educativos e tem por finalidade dotar de significados e mediar a compreensão inicial do problema matemático abordado. Esse problema será transformado posteriormente em signos, os quais auxiliarão na representação mental de modelos matemáticos, necessários à compreensão e aprendizagem dos conceitos estudados. Dentro da proposta construtivista, o presente trabalho adotará o modelo de Ausubel, discutido a seguir.

2.4.1. Aprendizagem significativa

Segundo Sales (2008) e de acordo com a teoria de Ausubel, para que ocorra uma aprendizagem significativa é necessário estabelecer anteriormente uma comparação entre as concepções alternativas que o aluno já possui e o novo conceito a ser apreendido. Para isto, o professor precisa conhecer as estruturas cognitivas prévias do aluno para que possa conduzir seu ambiente de aprendizagem no sentido de conectá-las às estruturas conceituais do problema em estudo. Para Ausubel, este processo envolve a interação da nova informação com uma estrutura de conhecimento específica, existente na estrutura cognitiva do indivíduo. Assim, ele define essas entidades psicológicas como conceitos subsunçores ou simplesmente subsunçor.

Novak (1981, p.57-58) diz que:

> Assim, durante a aprendizagem significativa, a nova informação é assimilada por subsunçores relevantes existente na estrutura cognitiva. Uma nova aprendizagem significativa resulta em crescimento e modificação adicionais de um subsunçor já existentes. Dependendo da experiência prévia do indivíduo, os subsunçores podem ser relativamente grandes bem desenvolvidos, ou quando ser limitados na variedade e quantidade de elementos (conjuntos celulares) que contém.

Segundo Moreira (1999), os subsunçores permitem disponibilizar o material a ser apreendido de maneira mais subjetiva ou relacionável, ou ainda incorporável à estrutura cognitiva do aprendiz de maneira não literal e não arbitrária. Ademais, quando se cria um ambiente propício à aprendizagem, evitando-se a aprendizagem mecânica e fazendo com que a linguagem exerça seu papel de socialização do saber em sala de aula, o aprendiz, numa postura pró-ativa, poderá manifestar uma disposição para relacionar de maneira substantiva o novo material potencialmente significativo à sua estrutura cognitiva.

Tal processo de aprendizagem significativa é definido por Ausubel como assimilação, e sua característica fundamental é o fato de que das interações entre o novo conceito e o subsunçor emerge uma nova idéia semântica ou um "novo conceito” que passa a integrar na estrutura cognitiva do aprendiz. Assim, tanto o conceito de referência, “o subsunçor”, como o novo conceito são transformados ou adaptados para, juntos, fazerem parte de um novo elemento significativo, sem, no entanto, perderem seus significados individuais, caso seja necessário retomá-los.

2.4.2. Aprendizagem mecânica

Diz Novak (1981, p.58-59) que:

> Quando conceitos relevantes não existem, na estrutura cognitiva de um indivíduo, novas informações têm que ser aprendidas mecanicamente. Ou seja, cada unidade de conhecimento tem de ser arbitrariamente armazenada na estrutura cognitiva. Na aprendizagem mecânica, a nova informação não se relaciona a conceitos já existentes na estrutura cognitiva e, portanto, pouca ou nenhuma interação ocorrem entre a nova informação adquirida e aquela já armazenada.

Relacionando esses conceitos com o ensino a distância, espera-se que o aluno apresente predisposição em aprender, e construa os novos conceitos decorrentes das teorias matemáticas já aprendidas na series anteriores. Assim, sem perder seus conceitos clássicos (que, neste caso, são os subsunçores) o aprendiz forma os novos conceitos. Um exemplo desse mecanismo de aprendizagem ocorre nas teorias da função do primeiro grau, cujos conceitos ele já possui e que serão aplicados na modelagem matemática da reta, permanecendo os conhecimentos anteriores.

2.5. Embasamento Teórico

As teorias de educação estão presentes neste projeto e muitas delas podem ser aplicadas para fundamentar esta dissertação, porém foram selecionados apenas três autores por melhor se adaptarem a este estudo: Piaget, Vygotsky e Ausubel.

O fato do estudante estar frente a uma tela de computador não invalida as teorias de aprendizagem desses três autores, que explicam pedagogicamente como a aprendizagem será elaborada.

No caso de Piaget, as atividades, tarefas e questionamentos apresentados pelos objetos de aprendizagem durante o curso serão fatores de desequilíbrio e, mediante a uma equilibração e acomodação, pode-se atingir o objetivo proposto, que é o aprendizado do aluno.

Já em Vygotsky, o objeto de aprendizagem, ou seja, os programas de computadores utilizados farão o papel da zona de desenvolvimento proximal, ligando o nível de desenvolvimento real ao nível de desenvolvimento potencial, fazendo mais uma vez com que o desenvolvimento do aluno seja atingido por meio da aprendizagem efetuada, a qual agora fará parte do nível de desenvolvimento real, completando o ciclo apresentado em sua teoria de aprendizagem.

Considera-se que, das teorias dos autores apresentadas, no referencial teórico, aquela que mais nitidamente se aproxima do trabalho é a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel, pois é de se esperar que, todos os alunos do ensino médio já possuem conhecimentos anteriores que servirão de subsunçores para um novo conhecimento, efetuando-se assim a aprendizagem significativa.

Sendo assim, para que o resultado dessa aprendizagem seja satisfatório, as participações do professor, via fórum ou presencial, será de extrema importância, pois as atividades, questionamentos e problemas apresentados por meio midiatizados, isto é, através de diferentes mídias, têm significados diferentes para os alunos, visto que nem todos têm a mesma formação fundamental.

CAPÍTULO 3: MOODLE E GEOGEBRA

Plataformas de Educação a Distância são sistemas disponíveis na Web gerenciadas por computadores e destinadas ao suporte de atividades mediadas pelas TICs. Elas viabilizam a comunicação entre todas as personagens envolvidas em cursos na modalidade EaD, com características e funcionalidades que permitem gerenciar as diversas atividades desse tipo de curso. Além do armazenamento dos conteúdos e atividades didáticas, as plataformas de Educação a Distância possibilitam o diálogo entre os participantes, a realização de avaliações, a divulgação de mensagens e notícias, a realização de trabalhos e tarefas diversas.

A utilização dessas plataformas geralmente se dá mediante acesso à Internet através de um navegador ou browser instalado no computador do usuário, sem necessidade de grandes requisitos de hardware e software.

3.1 – A plataforma Moodle

Em nosso trabalho utilizamos a plataforma Moodle. Essa plataforma, com estrutura dinâmica, modular e orientada a objeto, permite a criação de cursos e disciplinas online, grupos de trabalho e comunidades de aprendizagem. Sua utilização é feita através de navegadores Web e seu projeto, de desenvolvimento contínuo, é concebido para apoiar uma filosofia construcionista social de educação.

Desenvolvido por Martin Dougiamas, o Moodle é um projeto aberto. A sua primeira versão foi lançada em 2002 e, desde então, foram disponibilizadas uma série de novas versões com novos recursos, melhor escalabilidade[4] e melhor desempenho. Ele possui interface simples, eficiente, compatível, e utilizável pela maioria dos navegadores.

O Moodle é um software livre, regido pela licença pública GNU. Isto significa que é protegido por direito autoral, mas oferece permissões para cópia, utilização e modificações. Estas devem ser feitas oferecendo o código-fonte sem modificar ou remover a licença original e os direitos autorais.

---

[4] *Em telecomunicações e na engenharia de software, escalabilidade é uma característica desejável em todo o sistema, em uma rede ou em um processo, que indica sua habilidade de manipular uma porção crescente de trabalho de forma uniforme, ou estar preparado para crescer. Fonte: Wikipédia, a enciclopédia livre.*

Dougiamas (2009), o criador do Moodle, começou a idealizar o sistema no início dos anos 90, quando era o Webmaster na University of Technology na Austrália e administrador do Learning Management System, sistema de gestão da aprendizagem utilizado pela Universidade naquela época. Ao longo de seu trabalho, ficou frustrado com a tecnologia que ele administrava, pois sentia que era possível simplificar os recursos que a Internet oferecia a fim de que um maior número de pessoas pudesse utilizá-la. Sendo assim, a partir do contato com pequenas instituições de ensino, as quais desejavam mas não sabiam como apropriar-se das inúmeras ferramentas que a web disponibilizava, teve a ideia de criar uma alternativa gratuita que auxiliasse as pessoas a usufruir dessas tecnologias. Dougiamas confiava no potencial ainda não utilizado das possibilidades de uso da Internet na educação, aspecto que o levou a cursar o Mestrado e, posteriormente, Doutorado em Educação. Assim, conciliou a carreira anterior em Ciência da Computação com a recente construção do conhecimento sobre a natureza da aprendizagem e da colaboração.

Atualmente, o Moodle é usado em universidades, escolas secundárias e primárias, organizações sem fins lucrativos, empresas privadas e por professores independentes. Sua comunidade congrega enorme quantidade de usuários, com mais de 90.000 registrados, falando mais de 70 idiomas em cerca de 138 países.

3.1.1 - Filosofia do Moodle

Segundo o portal oficial do Moodle (www.moodle.org), seu desenvolvimento é norteado por uma "pedagogia socioconstrucionista", que contempla o Construtivismo, Construcionismo, Construtivismo Social e Comportamento Conectado e Separado.

Do ponto de vista do Construtivismo, a pessoa constrói novos conhecimentos ativamente, na medida em que interage com o ambiente. Tudo o que lê, vê, escuta, sente e toca é confrontado com seu conhecimento anterior. Se estas experiências forem viáveis dentro de seu mundo mental, formará um novo conhecimento. Este é fortalecido se puder usá-lo sucessivamente no seu ambiente mais amplo. Nesta pedagogia, o indivíduo não é apenas um banco de memória absorvendo informação passivamente, nem o conhecimento lhe pode ser transmitido apenas por ler alguma coisa ou ouvir alguém. Isso não quer dizer que não se aprende nada lendo uma página da web ou assistindo a uma palestra; nesta teoria ocorre mais interpretação do que transferência de informação de um cérebro para outro.

Já no Construcionismo a aprendizagem é particularmente efetiva quando é socializada. Por exemplo, pode-se ler esta página várias vezes e ainda assim esquecê-la; mas se houver a necessidade de explicá-la a outros com as próprias palavras, ou produzir uma apresentação em slides, então se terá uma compreensão melhor e mais integrada do assunto em questão. Esse é o motivo pelo qual as pessoas fazem anotações durante as aulas, mesmo que nunca as leiam novamente.

Em se tratando de Construtivismo Social, as ideias anteriores são estendidas para um grupo social construindo coisas umas para as outras e criando, de forma colaborativa, uma pequena cultura de objetos e significados compartilhados. Quando alguém é introduzido nessa cultura, automaticamente está aprendendo sobre como fazer parte dela.

Agora, no que se refere ao Comportamento Conectado e Separado, analisa-se as motivações das pessoas numa discussão. Comportamento separado é quando alguém tenta permanecer 'objetivo' e 'verdadeiro', e tende a defender suas próprias ideias usando a lógica para encontrar falhas nas de seus oponentes. Comportamento conectado é uma abordagem mais empática que aceita a subjetividade, tentando ouvir e fazer perguntas num esforço para entender o ponto de vista do outro. Esse processo ocorre quando uma pessoa é sensível a ambas as abordagens e é capaz de escolher uma delas como apropriada à situação em que se encontra. Em geral, uma quantidade saudável de comportamento conectado dentro de uma comunidade de aprendizagem é um estimulante poderoso para a aprendizagem, não apenas aproximando as pessoas, mas promovendo reflexões mais profundas e reexame das crenças existentes.

Assim, conforme as informações de www.moodle.org e refletindo sobre estas abordagens de ensino-aprendizagem, pensamos em um ambiente Moodle que permita a passagem de um modelo passivo de ensino para outro mais centrado no aluno, baseado no que ele faz, no seu papel enquanto indivíduo social que aprende com os outros, misturando os papéis de professor e aluno. Esta idéia pode influenciar e se tornar modelo para uma cultura da classe, ligando-se aos alunos de um modo pessoal de forma a detectar as suas necessidades de aprendizagem, facilitar as discussões e atividades, levando-os coletivamente na direção dos objetivos de aprendizagem da classe. O Moodle não força este estilo de comportamento, mas tenta otimizá-lo.

No futuro, à medida que a infraestrutura técnica do Moodle se tornar mais estável, sua principal direção de desenvolvimento certamente será promover avanços de características pedagógicas.

3.1.2 – Estrutura do Moodle

O Moodle possui uma estrutura padrão de usuários, caracterizados como administrador, professor e aluno.

O administrador é encarregado da instalação da plataforma em um portal web. Ele pode criar ambientes, cadastrar e excluir professores e alunos, formatar a aparência do portal, além de várias outras atividades suporte.

O professor ou tutor é o administrador de um ambiente específico, curso ou disciplina. Ele tem controle sobre todos os parâmetros do ambiente na plataforma, como inserção de alunos, escolha do formato (semanal, tópico ou discussão), composição das atividades (fóruns, questionários, pesquisas, tarefas e chats), acompanhamento e rastreamento dos usuários através de relatórios gráficos e estatísticas (último acesso, histórico de acesso, etc...), criação de bibliotecas e publicação de notas.

Os alunos participam do ambiente, curso, disciplina ou módulo acessando as atividades programadas, interagindo com os professores, tutores e colegas, cumprindo as tarefas propostas, enviando arquivos, postando mensagens e e-mails, participando dos fóruns e chats.

A seguir, a título de ilustração, apresentamos a página inicial do ambiente Moodle idealizado neste trabalho.

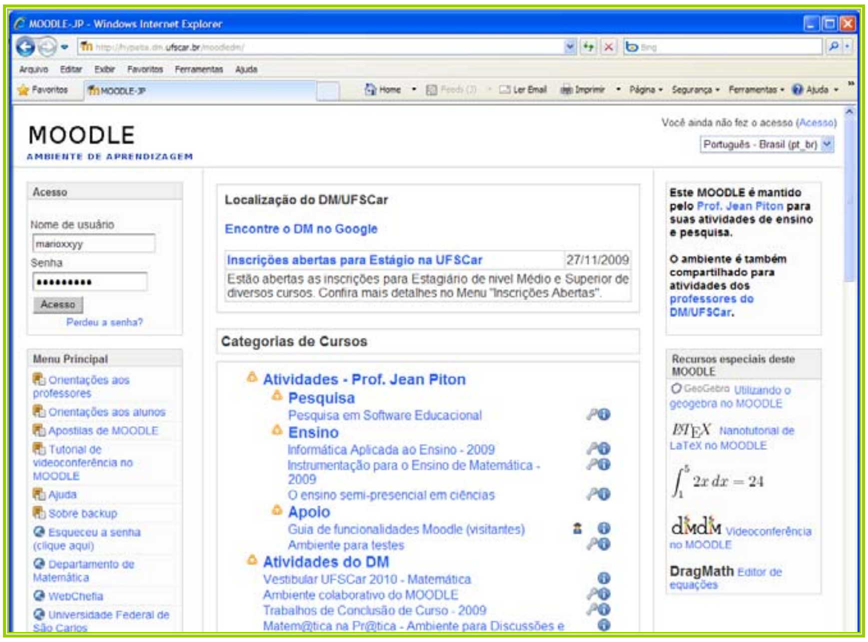


Figura 3.1 – Tela inicial do Moodle

3.2 – <u>O GeoGebra</u>

Atualmente existem muitos softwares de geometria dinâmica que permitem a construção e manipulação de objetos geométricos de forma precisa. Nesses softwares os alunos são estimulados através da visualização e manipulação dinâmica a fazerem conjecturas, descobertas e até mesmo demonstrar algumas proposições geométricas, contribuindo para uma aprendizagem significativa.

De acordo com Alves; Soares (2003 p. 04).

> O termo geometria dinâmica foi inicialmente usado por Nick Jakiw e Steve Rasmussen da Key Curriculum Press, Inc. com o objetivo de diferenciar este tipo de software dos demais softwares geométricos. Comumente ele é utilizado para designar programas interativos que permitem a criação e manipulação de figuras geométricas a partir de suas propriedades, não devendo ser visto como referência a uma nova geometria.
>
> O desenvolvimento destes softwares foi proporcionado pelos avanços nos recursos disponíveis no hardware dos computadores pessoais. Eles apareceram a partir do crescimento na capacidade de memória e na velocidade de processamento das informações dos microcomputadores, além do surgimento do mouse como meio de comunicação do usuário com a interface gráfica.
>
> Além de serem importantes ferramentas para o ensino da geometria euclidiana, estes softwares também costumam ser usados em pesquisas e em outras áreas da geometria, como as geometrias não-euclidianas, geometria analítica e geometria descritiva, assim como podem ser explorados em outras áreas como a física, por exemplo.

> Por realizarem as construções que podem ser feitas com régua e compasso, algumas pessoas referem-se aos programas de geometria dinâmica como “régua e compasso eletrônicos”.

Dentre os vários softwares de geometria dinâmica existentes, o escolhido para este trabalho foi o GeoGebra, e sobre ele faremos algumas considerações.

Segundo sua página na web, o GeoGebra é um software de matemática dinâmica idealizado para professores e alunos de todos os níveis educacionais que trabalha simultaneamente com GEOmetria e álGEBRA, reunindo aritmética, geometria, álgebra e cálculo num mesmo programa.

Figura 3.2 – tela inicial do sitio www.GeoGebra.org

Do ponto de vista da geometria, permite a construção dinâmica com pontos, segmentos, retas, circunferências, curvas e gráficos de funções. Do ponto de vista da álgebra, permite trabalhar com equações e coordenadas na construção de objetos geométricos. No GeoGebra, uma expressão na janela algébrica corresponde a um objeto na janela geométrica e vice-versa.

Idealizado em 2001 pelo jovem austríaco Markus Hohenwarter, o GeoGebra vem sendo atualmente desenvolvido por sua comunidade mundial através da licença pública de software livre, que permite a sua instalação e uso sem fins lucrativos.

Com vários colaboradores brasileiros, o GeoGebra já está totalmente traduzido para o português, facilitando seu uso no Brasil.

A figura a seguir ilustra uma área de trabalho do GeoGebra. onde podem ser observados vários objetos do ponto de vista algébrico (janela à esquerda) e geométrico (janela à direita).

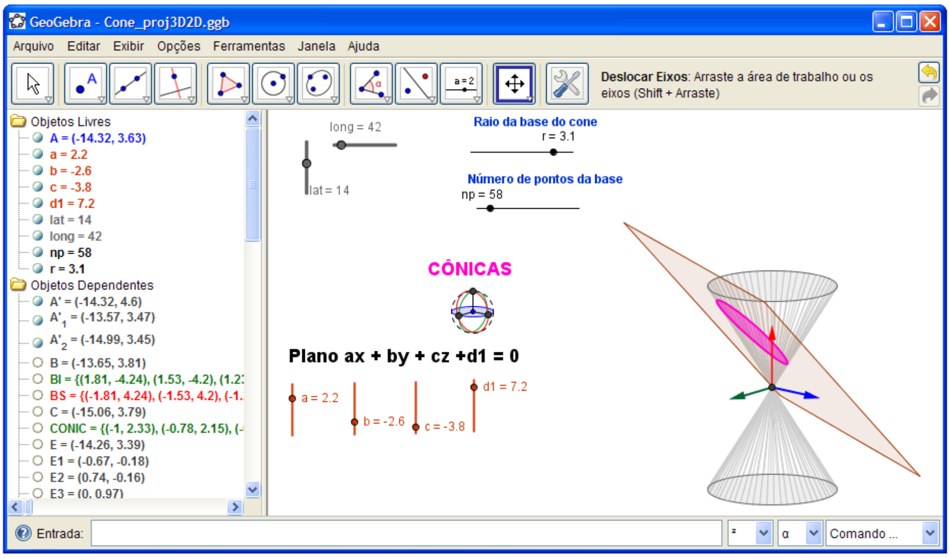


Figura 3.3 – Vista da área de trabalho do GeoGebra

Outro recurso importante é o GeoGebra Pre-Release, onde se tem acesso ao programa on-line sem necessidade de instalação. Como ele é compatível com várias plataformas (browsers), o aluno pode utilizá-lo em qualquer lugar que tenha acesso a um computador conectado à rede; desde que possua o plugin Java instalado. A versão Pre-Realese funciona perfeitamente mesmo estando off-line.

Segundo Bortolossi (2009), na tela inicial do GeoGebra podem ser observadas cinco grandes áreas de trabalho: menu principal, barra de ferramentas, janela de álgebra, janela de visualização e campo de entrada (ver figura a seguir). Enfatizamos que a utilização dos botões da barra de ferramenta disponíveis na parte superior da tela dá acesso ao aspecto geométrico do programa. Por outro lado, na parte inferior, temos o campo de entrada, onde os comandos são informados via teclado; desta forma, pode-se definir variáveis, equações, limites e outras tantas funções matemática, isto é, a parte algébrica do software. Notamos que, desta forma, o mesmo ente matemático pode ser representado de duas maneiras, a geométrica e a algébrica.

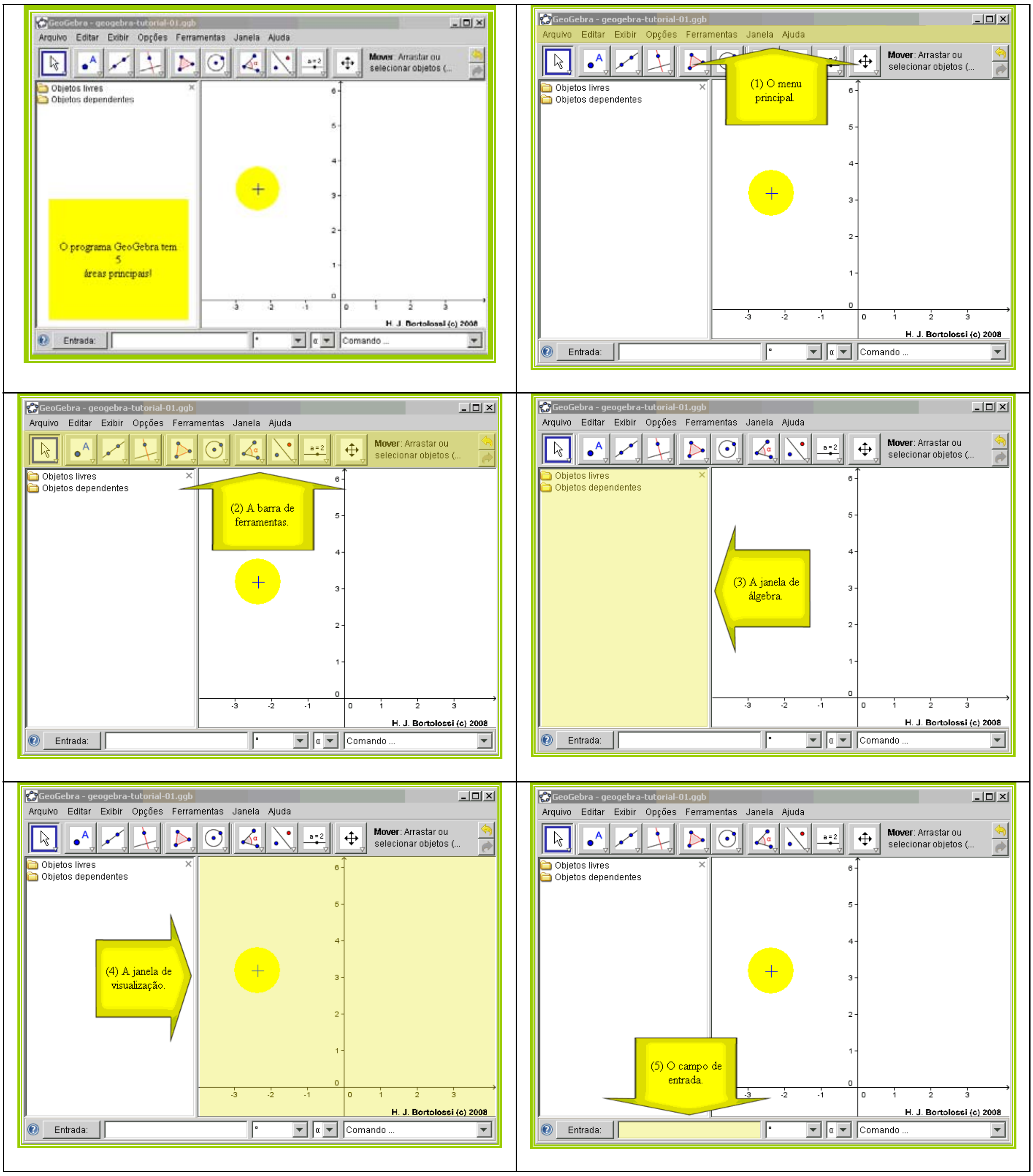


Figura 3.4 – Principais áreas da tela de trabalho do GeoGebra

CAPÍTULO 4 : CONSTRUÇÃO DO AMBIENTE

4.1 – Ideia geral

A ideia geral para a construção do ambiente surgiu nas aulas da disciplina regular “Tecnologias da Informação para o Ensino de Ciências e Matemática” do PPGECE da UFSCar. Durante essa disciplina, vislumbrei a construção de um ambiente virtual no Moodle, onde meus alunos do ensino médio poderiam aprender geometria através da manipulação dinâmica em visualizadores idealizados no Geogebra.

Para que fosse possível concretizar essa ideia de aprendizagem através da EaD, um AVA[5] foi elaborado levando-se em conta a sua utilização pelos meus alunos, por outros alunos e também por outros professores.

O tema escolhido foi Geometria Analítica no plano relativo a pontos e retas.

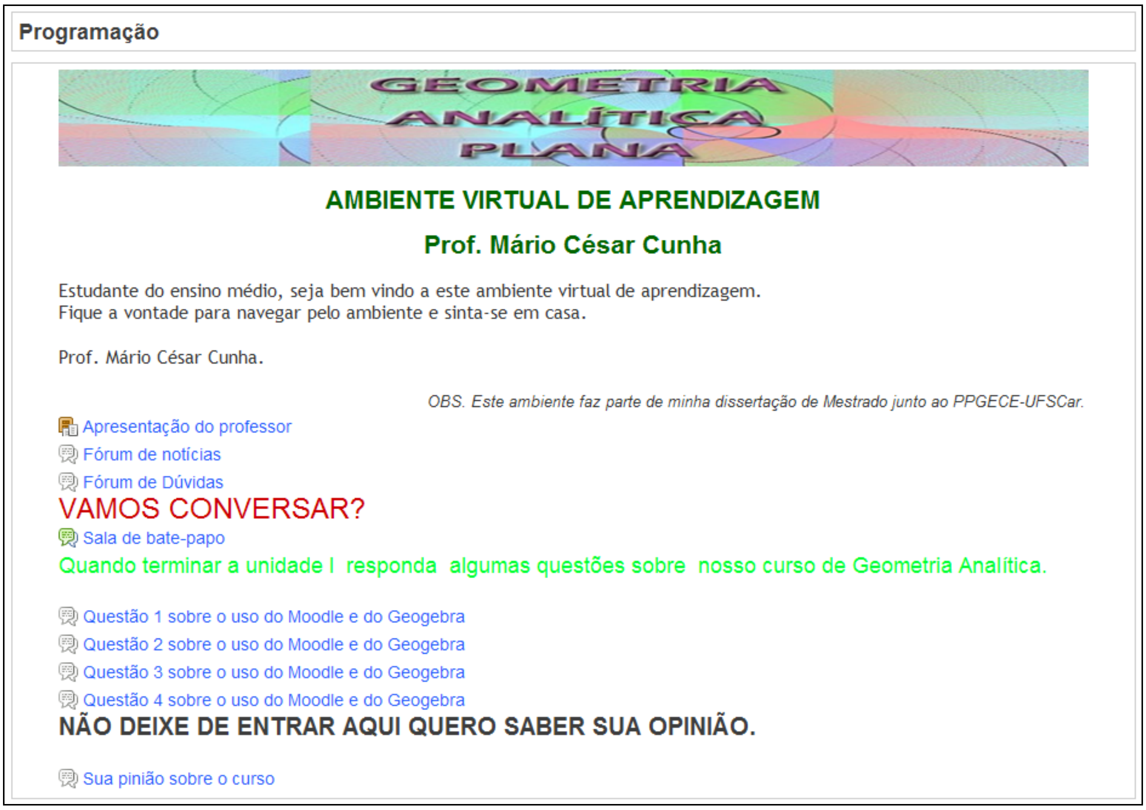


Figura 4.1 – Apresentação do ambiente

---

[5] Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA)

Antes de iniciar as atividades do ambiente, o aluno tem acesso às informação do professor responsável através do texto “Apresentação do Professor”, elaborado através do recurso do Moodle “Criar uma página de WEB”. Em seguida, é apresentado ao aluno dois fóruns de comunicação: o primeiro, de notícias, onde o professor pode enviar mensagens e avisos gerais; o segundo, de dúvidas, onde o aluno pode publicar e compartilhar suas dúvidas com os colegas e, principalmente, com o professor. Este segundo fórum representa uma atividade construcionista, em que outros alunos podem esclarecer as dúvidas de seus colegas, efetivando assim sua aprendizagem. Foi também disponibilizada uma sala de bate papo elaborada através da ferramenta “Chat” do Moodle. Ao término do curso foram disponibilizados vários fóruns para colher opiniões dos alunos sobre o ambiente.

O conteúdo do AVA foi dividido em duas unidades:

- Unidade 1: Pontos no plano, Distância entre pontos, ponto médio e baricentro de um triângulo;
- Unidade 2: Coeficiente angular, Condição de alinhamento de três pontos, Equação de uma reta, Formas da equação da reta, Posições relativas de duas retas e Retas perpendiculares.

1

PPGECE PONTOS NO PLANO CARTESIANO

pontonoplano

Nesta unidade vamos estudar pontos no plano cartesiano através de cinco atividades teóricas acompanhadas de lições.

Você deve começar pela **Teoria 1.1**, passando em seguida para a **Lição 1.1** e repetir este procedimento de estudo para as demais teorias e lições. Não tenha pressa no estudo teórico, pois você só poderá fazer a lição somente após ter se dedicado pelo menos 10 minutos no estudo da teoria correspondente. Faça e refaça a teoria quantas vezes quiser, porém faça a lição com atenção pois você poderá repetí-la no máximo duas vezes. As teorias e as lições são atividades avaliativas, valendo sempre a maior nota das tentativas realizadas.

Após finalizar as teorias e lições, teste seus conhecimentos no simulado. Fique a vontade para fazer e refazer o simulado quantas vezes quiser, pois ele não é avaliativo. Verifique o resultado ao final de cada tentativa, buscando sempre melhorar sua nota.

Por último, faça a provinha. Você poderá fazer duas tentativas para a provinha, valendo sempre a maior nota das tentativas realizadas. Em cada tentativa, o tempo para entrega é de 50 minutos contados a partir de seu início.

O nota final nesta unidade será composta por 10% da média aritmética das notas das teorias, 20% da média aritmética das notas das lições e 70% da nota da provinha.

Bom estudo e boa sorte !!!

UNIDADE - 1

Teoria 1.1 - PONTOS NO PLANO
Lição 1.1 - Pontos no plano
Teoria 1.2 - DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS
Lição 1.2 - distância entre dois pontos
Teoria 1.3 - PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO
Lição1.3 - Ponto médio de um segmento
Teoria 1.4 - O BARICENTRO DO TRIÂNGULO
Lição 1.4 - Baricentro de um triângulo

Simulados e Provinha

Simulado da Unidade 1

Atenção: A provinha só poderá ser feita e refeita duas vezes durante o seguinte período:
INÍCIO : 28/09/2009 as 23:55h
TÉRMINO : 14/11/2009 as 23:55 h

Provinha da unidade 1

Figura 4.2 – Itens da Unidade 1 do ambiente

Figura 4.3 – Itens da Unidade 3 do ambiente

Cada unidade foi composta por uma sequência de teorias e lições, idealizadas a partir da ferramenta “Lição” do Moodle. Na Teoria o conteúdo foi apresentado de forma enfática e na Lição simplesmente se trabalhava com o conteúdo apresentado, sendo ambas atividades avaliativas. Uma particularidade importante é que as teorias eram encadeadas, isto é, a teoria seguinte só era habilitada após o estudo da teoria anterior. Mais ainda, a lição só era habilitada para o aluno após um certo tempo de dedicação na teoria correspondente. Por exemplo, um aluno só faria a Lição 1.1 após ter se dedicado no mínimo 10 minutos na Teoria 1.1, e só faria a Teoria 1.2 se tivesse concluído a primeira. Estas restrições foram pensadas no intuito de organizar o estudo impondo uma certa dedicação, para que o aluno tivesse uma facilidade maior em cumprir os questionamentos práticos solicitados nas lições.

As Teorias e Lições foram idealizadas em várias páginas. Ao final de cada página uma pergunta era apresentada ao aluno, e ele só seguiria em frente se acertasse a resposta; caso contrário, uma mensagem de ajuda era exibida, sempre objetivando o auxílio à aprendizagem, na linha construtivista de Piaget.

Para que o estudante tivesse uma concentração maior, não passando pelas etapas sem muita importância, eram permitidas apenas duas tentativas nas respostas das páginas das lições, e dois erros consecutivos encerravam a lição impondo ao aluno fazê-la novamente desde o início.

Após concluírem as Teorias e Lições os alunos poderiam testar o conhecimento adquirido em um simulado, com questões escolhidas aleatoriamente de um banco de questões com mais de 30 perguntas diferentes. Os simulados não eram avaliativos, e os alunos tinham acesso às notas de cada tentativa ao término da mesma. Os simulados funcionam de modo semelhante às lições de casa em curso presenciais tradicionais.

Ao final de cada unidade os alunos fizeram uma avaliação denominada de “Provinha”, nos mesmos moldes dos simulados, em duas tentativas, permanecendo a nota maior.

A nota final de cada unidade foi composta por 10% da média aritmética das notas das teorias, 20% da média aritmética das notas das lições e 70% da nota da provinha, e a nota final do curso foi a média aritmética da nota de cada unidade.

4.2 - Descrição do ambiente

A linguagem utilizada no ambiente não foi a mesma utilizada em textos impressos. Procuramos uma linguagem mais dialógica, como se alguém estivesse conversando com os estudantes. Assim, algumas vezes, o formalismo das definições foi deixado em segundo plano.

4.2.1 – Pontos no plano (Teoria 1.1 do Ambiente)

Nesta teoria apresentamos o conceito de eixo e abscissa de um ponto. Através de textos e figuras em sequência mostramos a construção de um eixo e localização de pontos no mesmo através de sua abscissa.

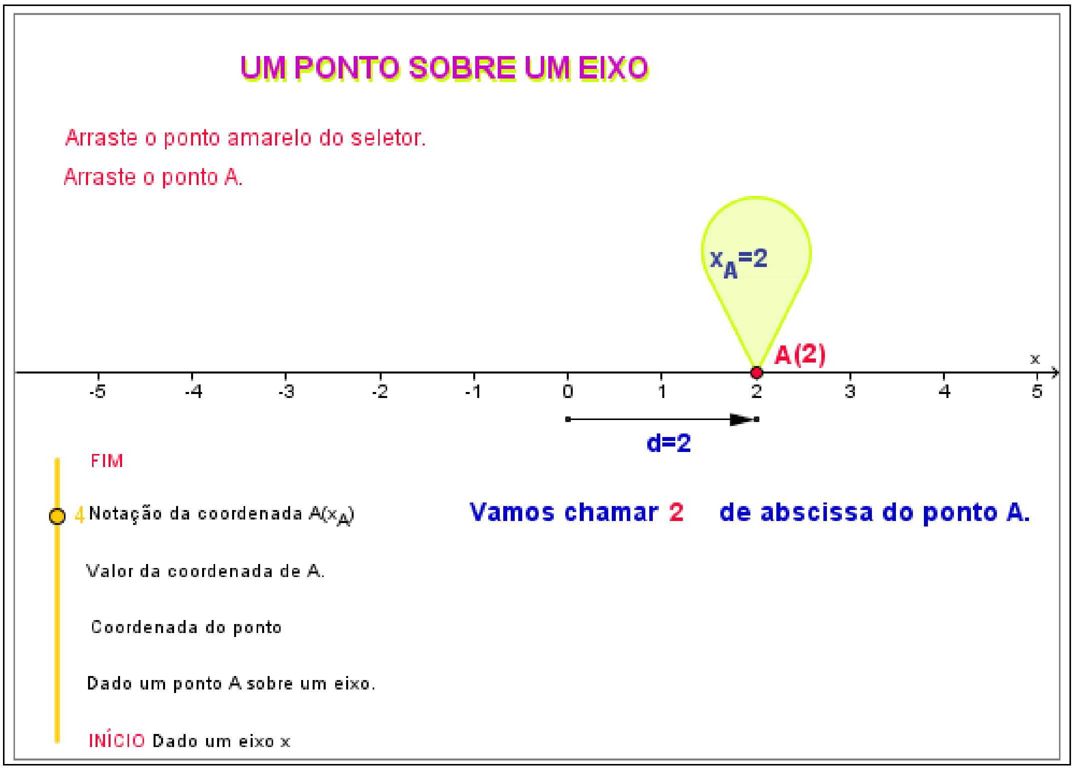
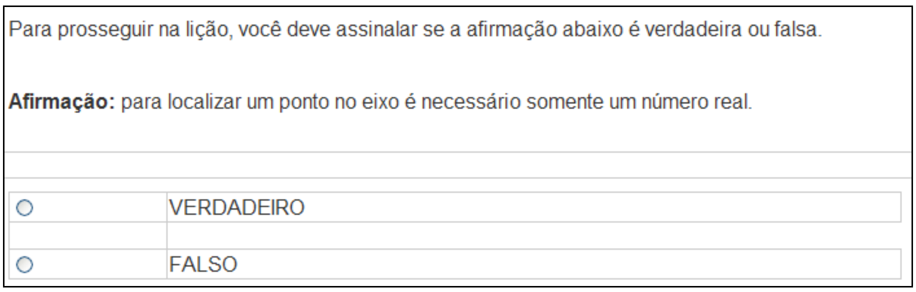


Figura 4.4 – Visualizador de um ponto sobre o eixo

Neste visualizador, através da escolha em um seletor específico, o aluno verificou o procedimento para obter a abscissa de um ponto, passando pela construção do eixo, posição do ponto sobre o eixo, determinação de sua coordenada e notação. Movimentando o ponto em questão o estudante percebeu sua representação no eixo através de sua única coordenada.

Após trabalhar com o visualizador foi feita uma pergunta para que o aluno pudesse prosseguir na lição.


Para prosseguir na lição, você deve assinalar se a afirmação abaixo é verdadeira ou falsa.

Afirmação: para localizar um ponto no eixo é necessário somente um número real.

○	VERDADEIRO
○	FALSO

Figura 4.5 – Questão para poder prosseguir na lição

Como este conteúdo é ministrado na terceira série do ensino médio, o aluno já viu coordenadas e poderia imaginar que a resposta fosse duas coordenadas, respondendo FALSO. Neste caso, o aluno continuaria na mesma página da lição, com a seguinte sugestão:

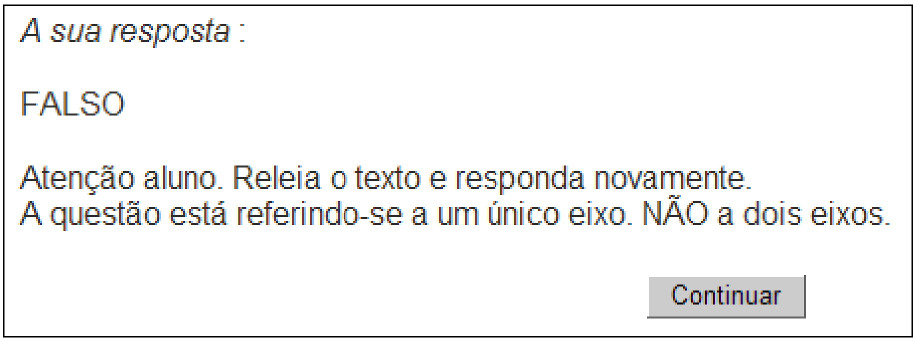


Figura 4.6 – feedback de uma resposta errada do aluno

Na próxima página da lição foi definido o sistema de eixos cartesianos ortogonais e, com isso, conceituou-se também abscissa, ordenada, coordenadas, quadrantes e bissetrizes.

Foi idealizado um visualizador (ver figura 4.7) para que o aluno, através da sua própria ação na movimentação de seletores e ponto, descobrisse e entendesse os conceitos em questão.

No visualizador, estando o seletor fixado em "*mostrar quadrantes*", quando o ponto está no primeiro quadrante aparece o texto PRIMEIRO QUADRANTE e seu fundo fica destacado de verde claro. Ao ser movido para o segundo quadrante, o texto SEGUNDO QUADRANTE será mostrado e este agora terá o fundo verde claro, enquanto o primeiro fica com fundo branco sem o texto. O mesmo ocorre nos demais quadrantes.

Movimentando o seletor para "*mostrar bissetrizes*", no instante em que o ponto A estiver posicionado sobre uma delas, esta será destacada em vermelho, e o texto "*Bissetriz dos quadrantes pares*" ou "*Bissetriz dos quadrantes ímpares*" será mostrado, juntamente com as coordenadas iguais ou simétricas do ponto A.

O aluno também pode visualizar que, quando o ponto está sobre um dos eixos coordenados, uma de suas coordenadas se anula.

Com estas animações e explicações espera-se que o estudante entenda os conceitos de quadrantes, bissetrizes e pontos sobre os eixos de uma forma construtivista, com tais conceitos servindo de subsunçores para uma aprendizagem significativa, como descritos por Ausubel no referencial teórico deste trabalho.

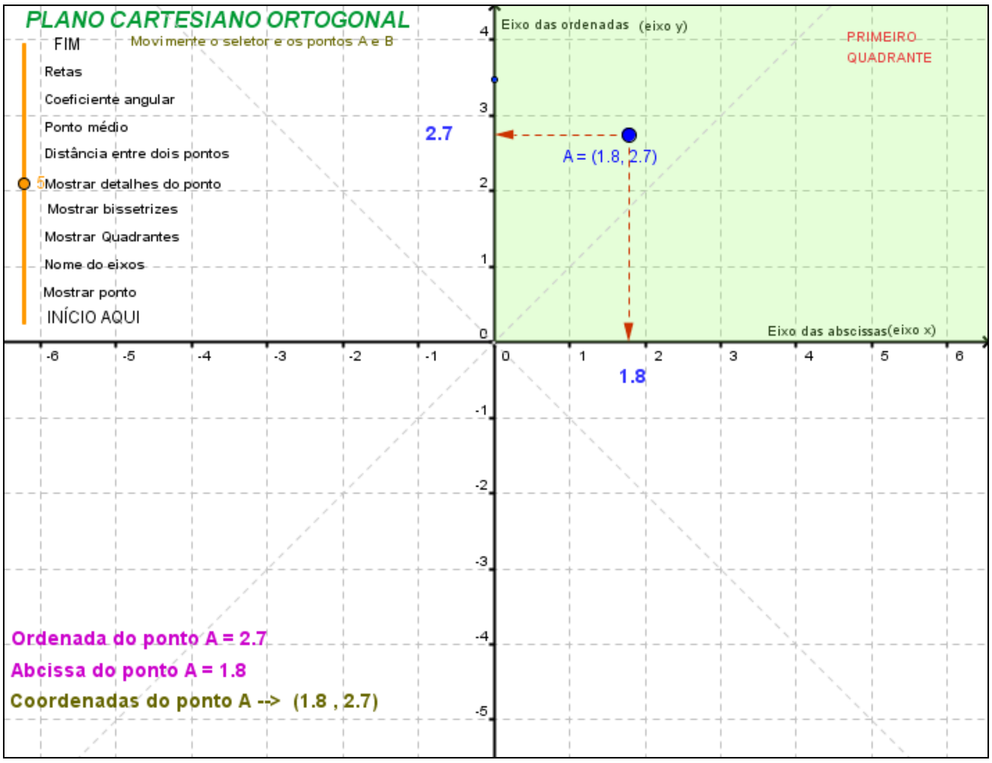


Figura 4.7 – visualizador do sistema cartesiano ortogonal

O Geogebra é muito versátil na resolução de problemas. Por exemplo, segue um problema do caderno do aluno da terceira série do ensino médio da escola pública do Estado de São Paulo em 2009 que exploramos no nosso ambiente.

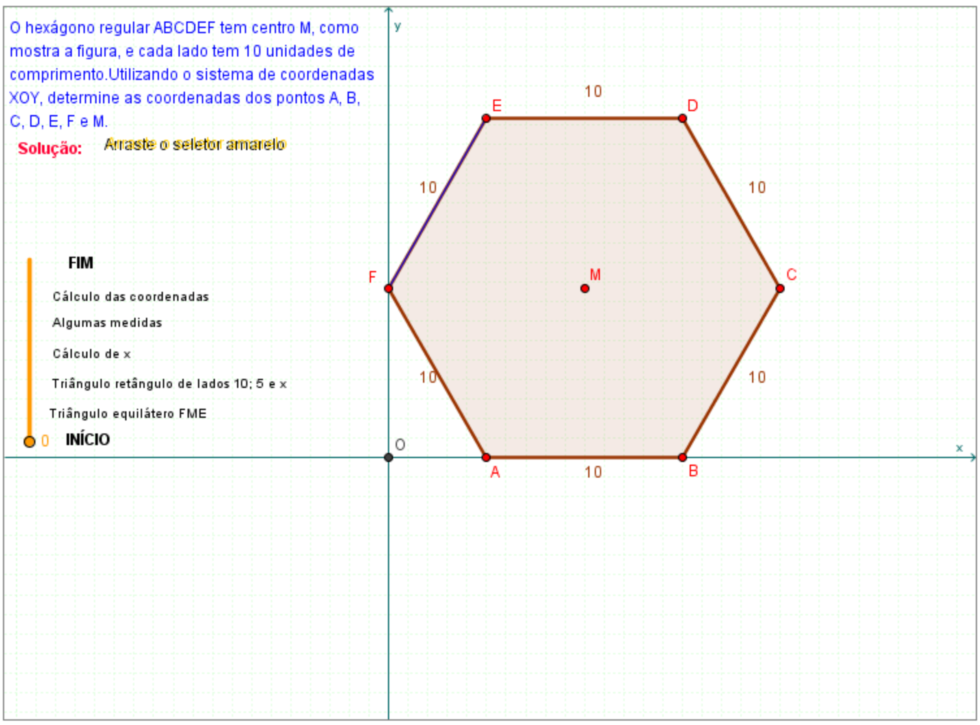


Figura 4.8 – Problema proposto no material da escola pública no Estado de São Paulo.

Os alunos, movimentando o seletor do visualizador, puderam perceber a álgebra e a geometria do problema em questão, repetindo isto tantas vezes quantas fossem necessárias para sua aprendizagem. A cada item do seletor uma modificação foi realizada no hexaedro do Exercício, conforme ilustramos a seguir.

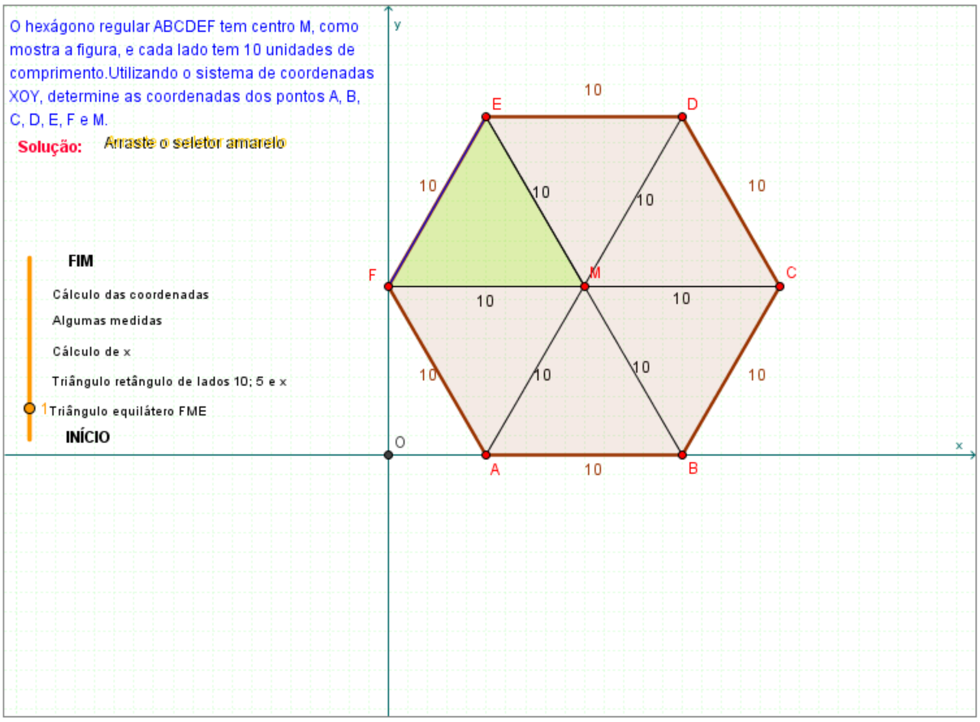


Figura 4.9 – Mostra os seis triângulos equiláteros congruentes.

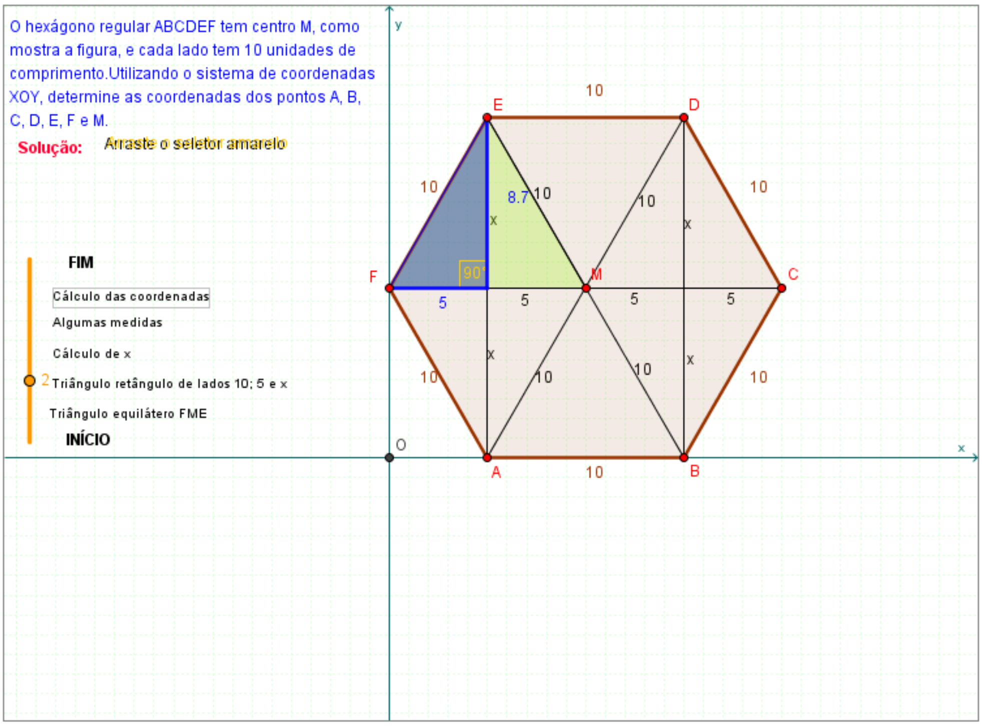


Figura 4.10 – O triângulo eqüilátero sendo formado por dois triângulos retângulos.

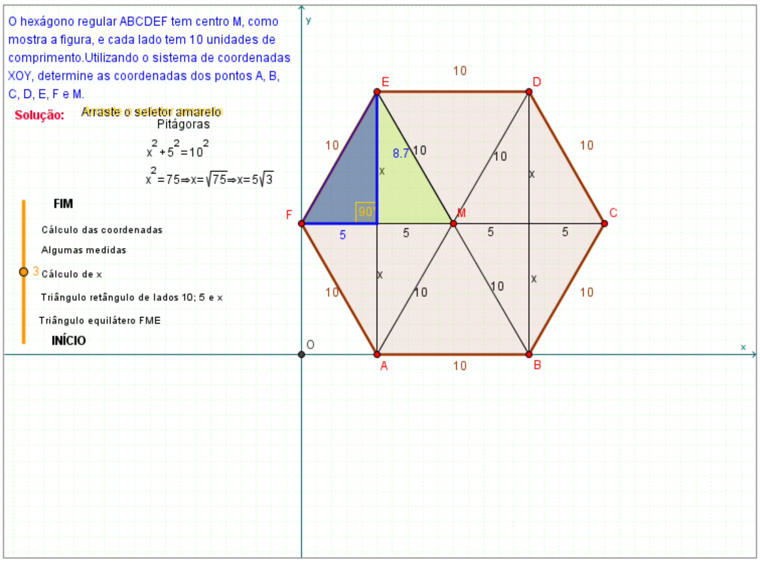


Figura 4.11 – Mostra o cálculo do comprimento do cateto x do triângulo retângulo.

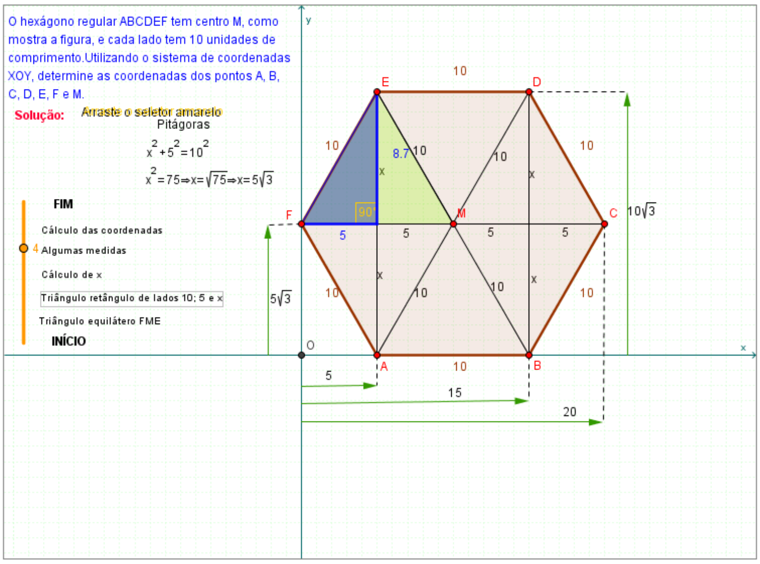


Figura 4.12 – Visualização das medidas para cálculos das coordenadas

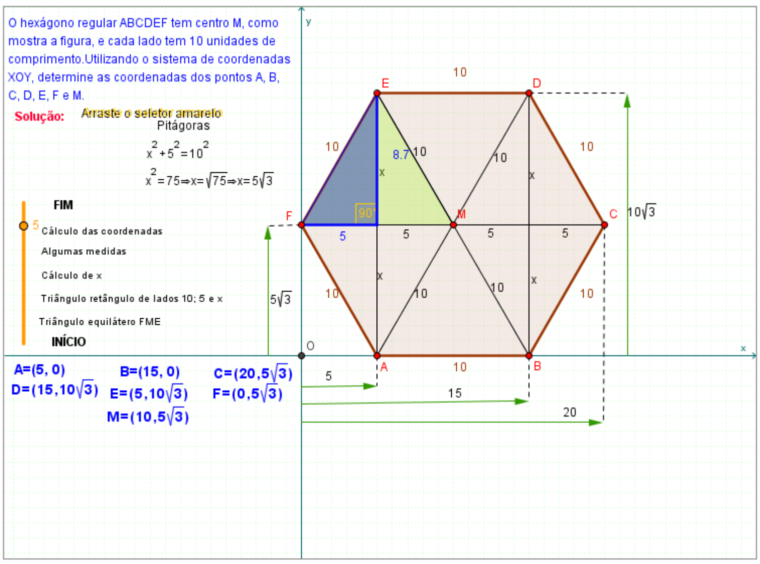


Figura 4.13 – Problema resolvido com as coordenadas dos pontos.

4.2.2 – Pontos no plano (Lição 1.1 do Ambiente)

Na primeira página desta Lição apresentou-se um exercício simples onde o aluno construiu as etapas para sua solução. Não foi somente uma atividade mental da aplicação das propriedades dos quadrantes, pois o aluno teve a ação de mover o seletor até “*mostrar quadrantes*” e movimentando o ponto A verificou a resposta solicitada, ou seja, em que quadrante se encontra o ponto.

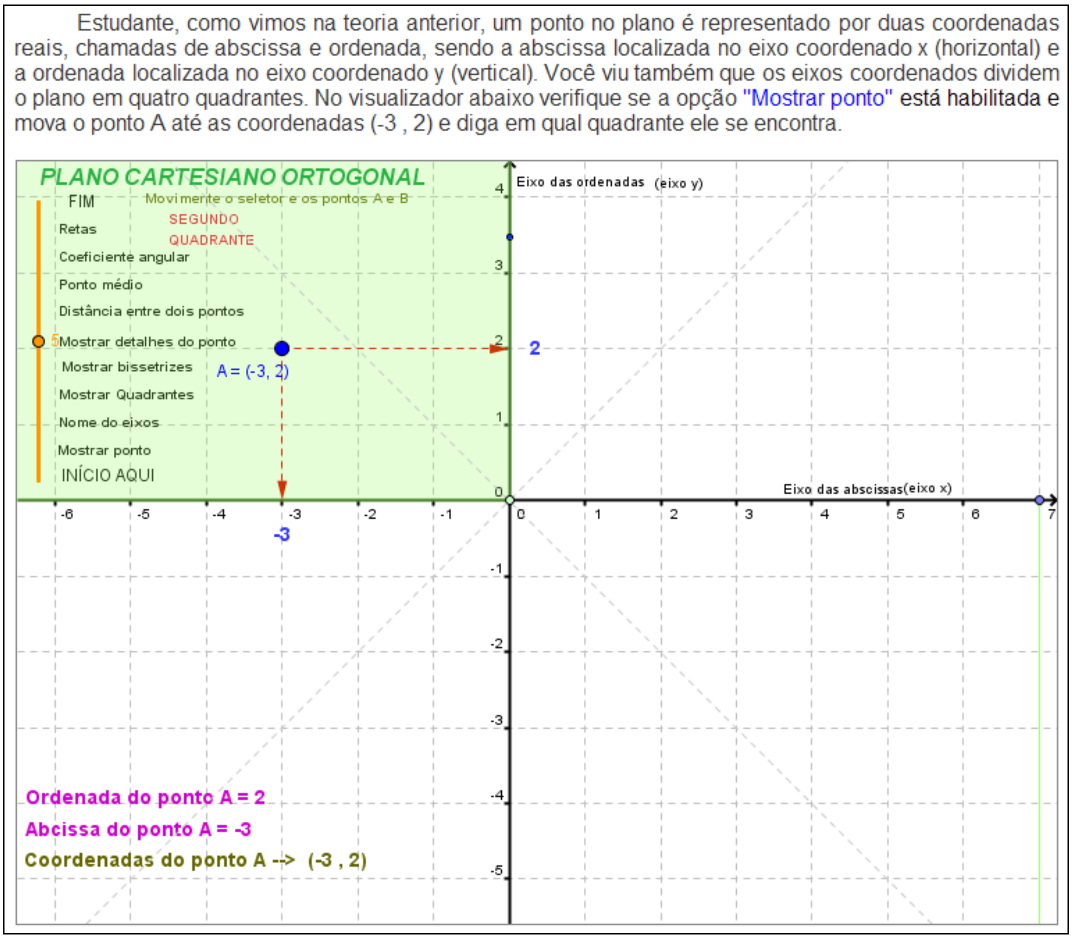


Figura 4.14 – Primeiro problema da “Lição 1.1” com uso do visualizador

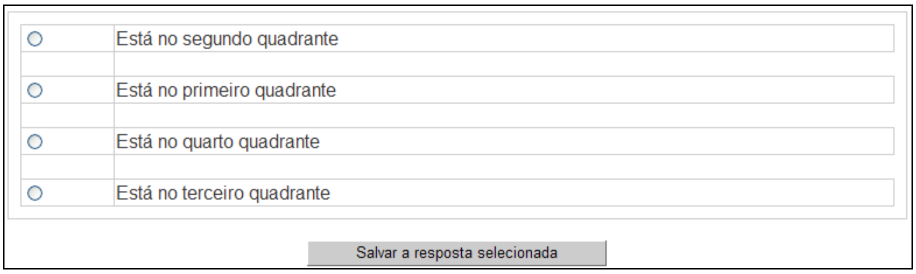


Figura 4.15 – Alternativas do primeiro problema da “Lição 1.1”

Na próxima página é apresentado um “feedback” da questão anterior e um outro exercício simples onde as alternativas força o aluno a reconhecer a propriedade dos pontos sobre os eixos cartesianos vistos no seu estudo teórico. Desta forma, percebe-se como o próprio aluno gera seu aprendizado de maneira construtivista.

Muito bem, estudante, na página anterior você mostrou que sabe sobre as abscissas, ordenadas e quadrantes. Vamos agora ver o que você sabe sobre os eixos coordenados (eixo x e eixo y).

No visualizador abaixo, arraste o seletor até "*Mostrar detalhes do ponto*".

Mova o ponto A sobre os eixos coordenados (eixo x e eixo y), com valores inteiros, observando os valores de suas coordenadas.

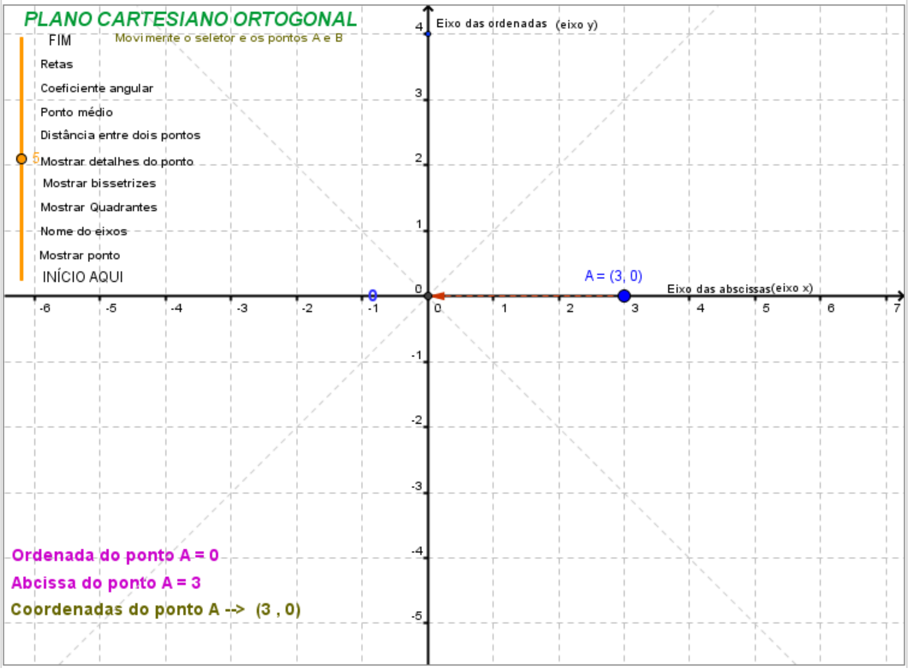


Figura 4.16 – Propriedades dos pontos sobre os eixos coordenados

Assinale a única alternativa que está correta (verifique no visualizador).

- ○ No eixo das abscissas (eixo x) o valor da ordenada é zero e no eixo das ordenadas (eixo y) o valor da abscissa é zero.
- ○ No eixo das ordenadas (eixo y), a ordenada do ponto é zero.
- ○ O ponto O=(0,0) não está em nenhum dos eixos cartesianos
- ○ No eixo das abscissas (eixo x), a abscissa do ponto é zero.

Salvar a resposta selecionada

Figura 4.17 – Alternativas da questão sobre pontos sobre eixos coordenados.

No caso do aluno assinalar uma alternativa errada é dada outra oportunidade solicitando o uso do visualizador. Dessa forma, o aluno aprende pela retificação do próprio erro.

A sua resposta :

Está no terceiro quadrante

Não está correto.
Volte ao visualizador e habilite "mostrar um ponto". Veja os sinais das coordenadas em cada um dos quadrantes.

Continuar

Figura 4.18 – Feedback da questão anterior quando a resposta está errada.

Seguindo ainda nesta lição, na terceira página, o aluno executou as atividades solicitadas respondendo a uma questão sobre bissetrizes dos quadrantes, conforme ilustrado a seguir.

Estudante, está indo muito bem!!! . Na página anterior você aprendeu propriedades dos pontos sobre os eixos cartesianos. Agora vamos ver propriedades dos pontos sobre as bissetrizes dos quadrantes.

No visualizador abaixo, arraste o seletor até "*Mostrar bissetrizes*".

Arraste o ponto A de tal modo que as ordenadas sejam iguais as abscissas, por exemplo (-2,-2), (1,1). Que você notou?

Isso mesmo os pontos com abscissa igual a ordenada estão sobre a bissetriz dos quadrantes impares (primeiro e terceiro).

Arraste o ponto A de tal modo que as ordenadas sejam opostas as abscissas, por exemplo (-3,3) e (1,-1). Que você notou?

Isso mesmo os pontos com abscissa e ordenada simétricos (com sinais opostos) estão sobre a bissetriz dos quadrantes pares (segundo e quarto).

Figura 4.19 – atividades solicitadas ao aluno na página 3 da “Lição 1.1”.

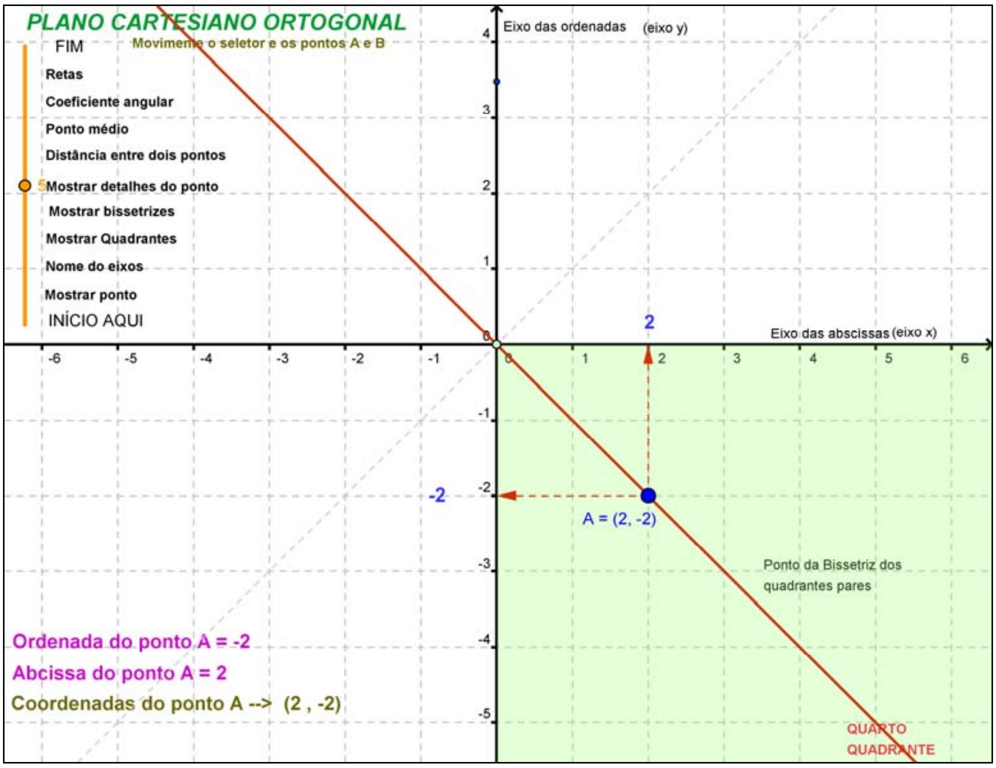


Figura 4.20 – Visualizador atendendo a solicitação das atividades da página 3 da “Lição 1.1”.

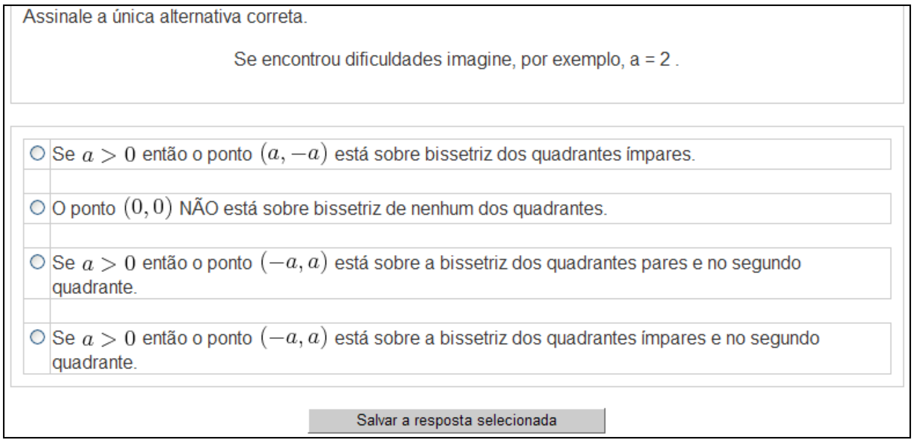


Figura 4.21 – Alternativas da questão referente às atividades da página 3 da “Lição 1.1”.

Na última página dessa lição, uma questão lúdica foi apresentada. Foi solicitado ao aluno que encontrasse a posição correta de três pontos no plano, como ilustrado a seguir. A cada ponto, corretamente localizado, uma mensagem de incentivo foi apresentada e, com isso, encontrou-se a palavra chave “*Legal*”, com a qual se assinalou a alternativa correta. Como a maioria dos jovens já brincou com jogos eletrônicos, esta questão foi encarada como desafio a ser vencido.

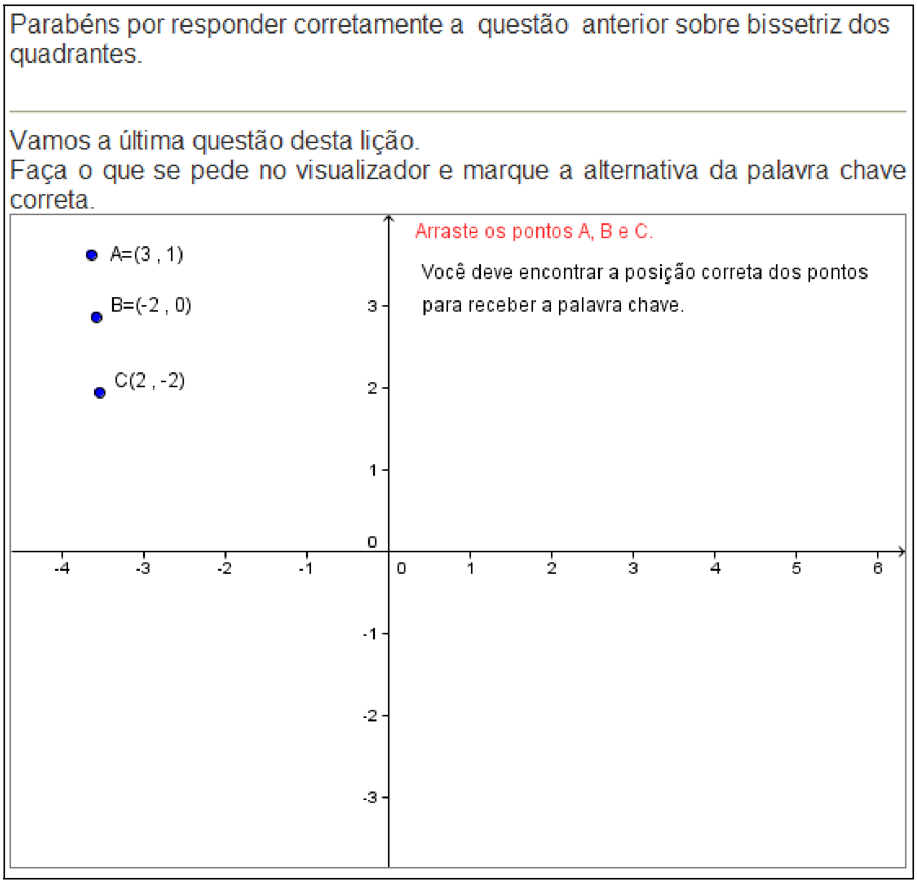


Figura 4.22 – Visualizador da última questão da “Lição 1.1”, como é apresentado ao aluno.

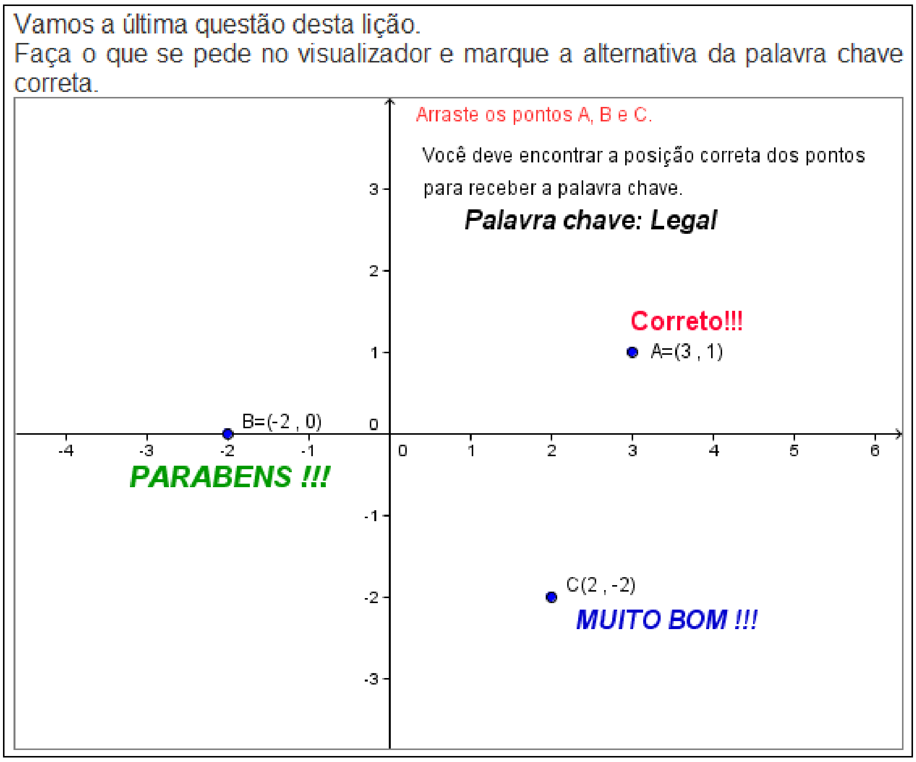


Figura 4.23 – Visualizador da última questão da “Lição 1.1”, já resolvida.

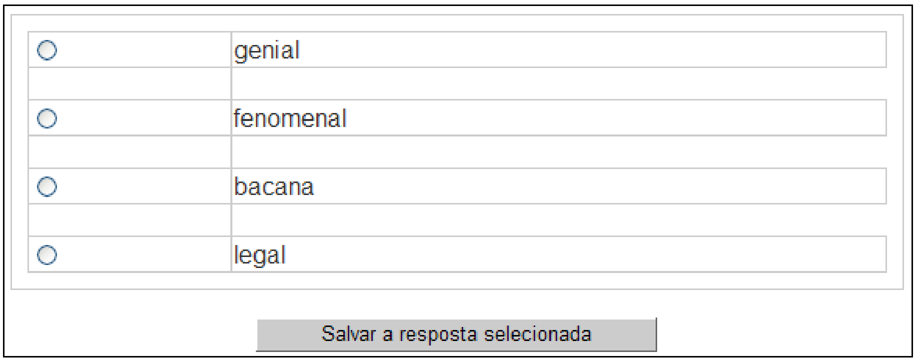


Figura 4.24 – Alternativas da última questão da “Lição 1.1”.

4.2.3 – Distância entre dois pontos (Teoria 1.2 do Ambiente)

Nesta teoria apresentamos o estudo teórico sobre a distância entre dois pontos no plano cartesiano.

A primeira página refere-se ao estudo da distância entre dois pontos sobre um mesmo eixo cartesiano, e inicia-se com um texto solicitando ao aluno imaginar dois pontos sobre um eixo.

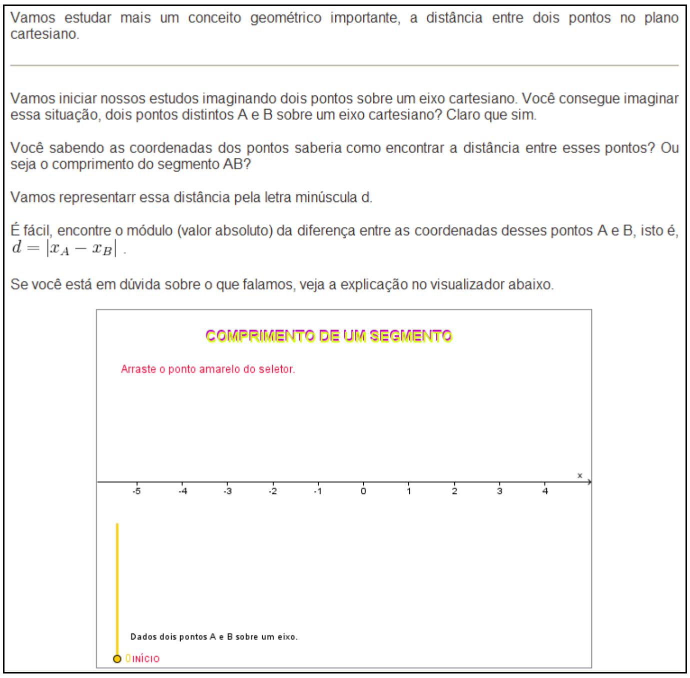


Figura 4.25 – Vista inicial do visualizador sobre a distância entre dois pontos localizados nos eixos.

Logo após o aluno é questionado sobre a distância entre estes pontos e, através de sua própria ação em um seletor específico, passa por diversas fases até que a distância seja calculada. Por fim, movendo os pontos A e B sobre os eixos, o aluno percebe de forma significativa a distância entre os pontos.

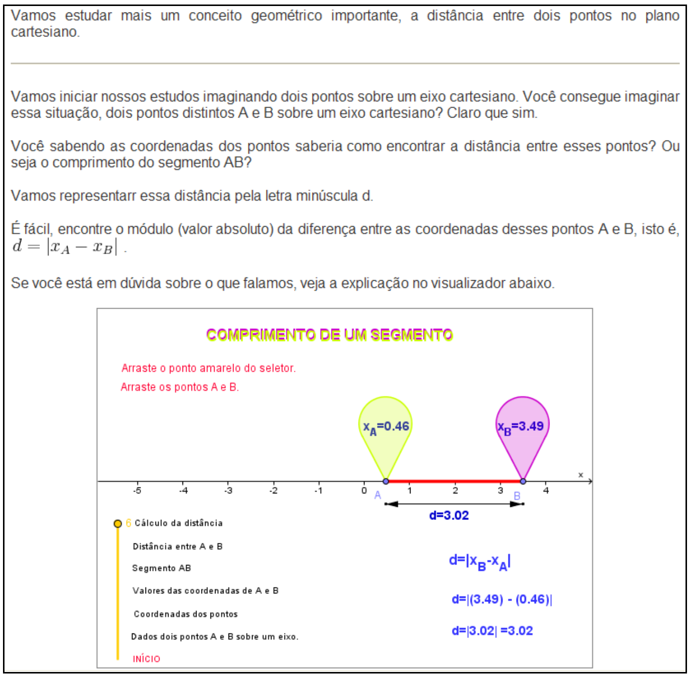


Figura 4.26 – Vista do visualizador sobre a distância entre dois pontos com o movimento do seletor.

Do ponto de vista da teoria de Piaget, quando o texto questiona se o aluno sabe encontrar a distância entre os dois pontos provocamos uma *desequilibração*, e para voltar ao equilíbrio é necessária uma ação mediadora por parte do aluno. Assim um novo conceito é assimilado.

Para se assegurar que o aluno realmente reteve o conhecimento aprendido, uma questão sobre distância é sugerida, com possibilidade de resposta via uso do visualizador.

faça e exercício que se segue.

Dois pontos A e B sobre um eixo tem coordenadas -3 e 2. Qual a distância d entre esses pontos.

- ○ d = -1
- ○ d = 1
- ○ d = 5
- ○ d = -5

Salvar a resposta selecionada

Figura 4.27 – Questão sobre distância entre dois pontos sobre um eixo.

Após o entendimento de como calcular a distância entre dois pontos sobre um eixo coordenado, passou-se ao conceito de distância entre dois pontos sobre qualquer reta paralela aos eixos coordenados, iniciando pelo eixo horizontal das abscissas. A justificativa teórica foi introduzida, mais uma vez questionando o estudante e forçando sua imaginação.

PPGECE

GEOMETRIA ANALÍTICA - pontos e retas
Cunha, Mario Cesar

Caro estudante

Com toda sua dedicação, com certeza, já sabe encontrar a distância entre dois pontos quando estão sobre um eixo.

Vamos encontrar agora a distância entre dois pontos, quando eles estiverem sobre uma reta horizontal, paralela ao eixo x das abscissas, e não sobre os eixos.

Imagine essa situação: Dois pontos $A = (x_A, y_A)$ $B = (x_B, y_B)$ sobre uma reta horizontal. Visualizou?

Note que $y_A = y_B$.

Imagine agora a projeção ortogonal desse pontos sobre o eixo x, horizontal. Esses quatros pontos, A , B e suas projeções ortogonais, formam um retângulo.

Nesse retângulo o comprimento do lado AB e o comprimento do lado sobre o eixo x são iguais. Mas como vimos na página anterior o comprimento do lado sobre o eixo é dada por: $|x_B - x_A|$.

Portanto o comprimento do segmento AB também será:

$$d = |x_B - x_A|$$

Conclusão: a distância entre dois pontos A e B alinhados na horizontal é igual ao valor absoluto da diferença entre suas abscissas, ou seja:

$$AB = |x_B - x_A|$$

Figura 4.28 – Justificativa teórica sobre distância de dois pontos paralelos ao eixo das abscissas.

Através do uso de um visualizador específico, o estudante verifica o embasamento teórico e observa o retângulo formado com os lados paralelos congruentes. Outra informação importante ao aluno é o desenvolvimento algébrico para o cálculo da distância entre os dois pontos, mostrados no canto inferior esquerdo do visualizador. Neste caso, é apresentado o desenvolvimento geométrico e analítico de um problema, justificando o nome Geometria Analítica.

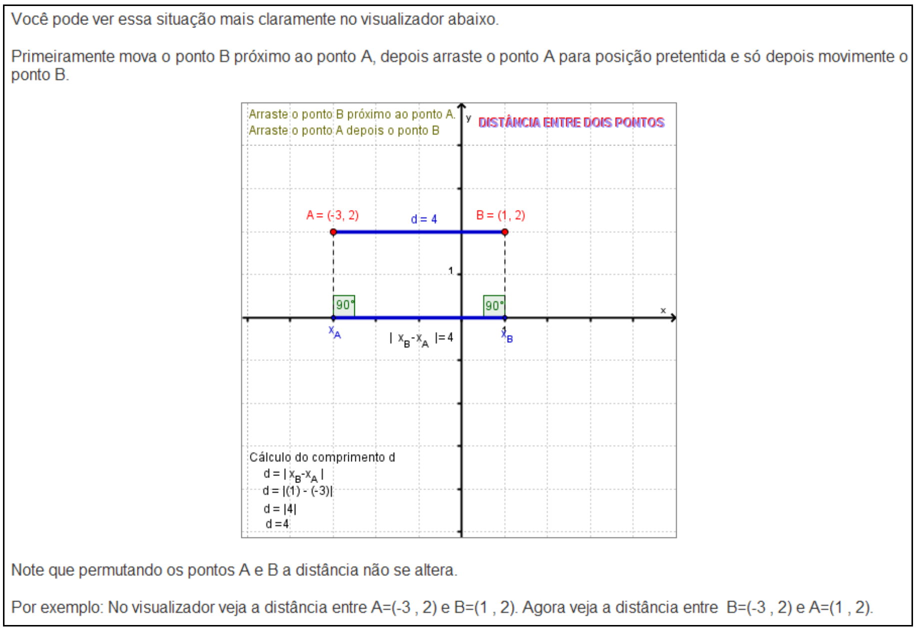


Figura 4.29 – visualizador da distância de dois pontos paralelos ao eixo das abscissas.

Para confirmar o aprendizado, uma questão sobre o tema foi apresentada e, caso o estudante tivesse ainda algumas dificuldades, poderia utilizar-se do visualizador.

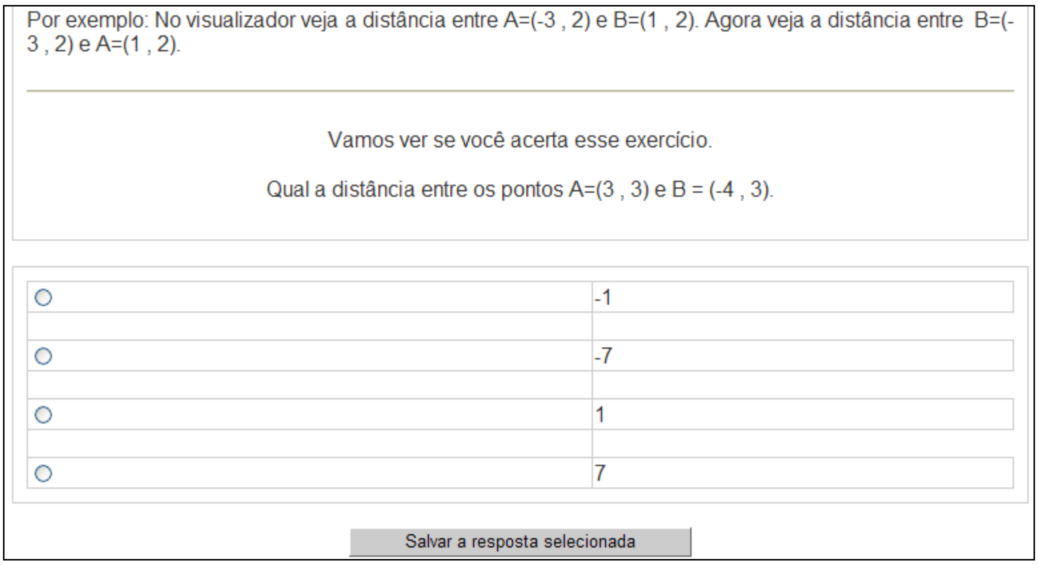


Figura 4.30 – Questão sobre a distância de dois pontos paralelos ao eixo das abscissas.

Um desenvolvimento análogo para pontos sobre retas paralelas ao eixo vertical também foi apresentado, conforme ilustramos a seguir.

Você pode ver essa situação mais claramente no visualizador abaixo.

Primeiramente mova o ponto B próximo ao ponto A, depois arraste o ponto A para posição pretentida e só depois movimente o ponto B.

Note que permutando os pontos A e B a distância não se altera.

Por exemplo: No visualizador veja a distância entre A=(2 , 2) e B=(2 , -3). Agora veja a distância entre B=(2 , 2) e A=(2, -3).

Figura 4.31 – Questão sobre a distância de dois pontos paralelos ao eixo das abscissas.

Entendemos que, segundo a teoria de Ausubel, o conhecimento do cálculo da distância entre dois pontos sobre retas paralelas aos eixos coordenados são subsunçores para a aprendizagem do cálculo da distância entre dois pontos quaisquer do plano.

Continuando, passou-se para o estudo da expressão geral da distância entre dois pontos em qualquer situação no plano. Mais uma vez foi solicitado ao aluno imaginar o problema como se ilustrado a seguir.

PPGECE	**GEOMETRIA ANALÍTICA - pontos e retas** Cunha, Mario Cesar

Estão preparados para continuar os estudos?

Vamos continuar estudando este conceito geométrico importante, a distância entre dois pontos no plano cartesiano.

DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

Imagine dois pontos distintos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ dispostos no plano cartesiano de modo que o segmento $\overline{AB}$ não seja paralelo aos eixos coordenados.

Imagine agora uma reta vertical (paralela ao eixo y) passando pelo ponto A e outra reta horizontal (paralela ao eixo x) passando pelo ponto B. Estas retas se cortam em um ponto, certo ? Vamos chamar este ponto de C.

Imagine o triângulo formado pelos pontos A, B e C. Você percebe que este triângulo é retângulo no ponto C ? Observe este triângulo no visualizador abaixo.

Figura 4.32 – Introdução sobre a distância entre dois pontos no plano.

O visualizador citado na Figura 4.32 mostra as fases utilizadas para o desenvolvimento teórico da expressão em questão a partir do movimento do seletor.

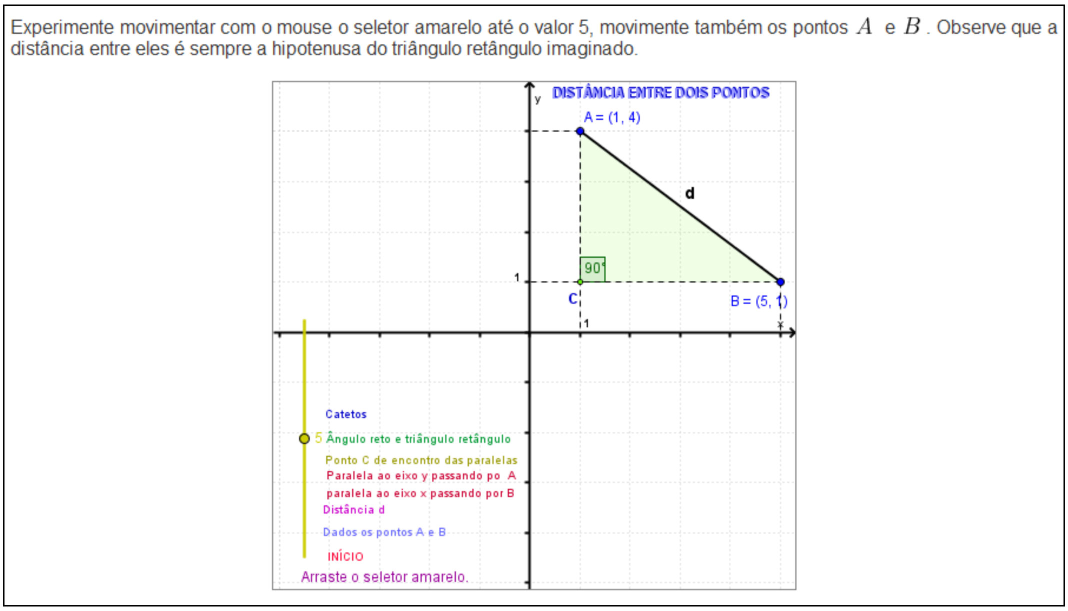


Figura 4.33 – Visualizador o desenvolvimento teórico da distância entre dois pontos no plano.

Ao usufruir de tais recursos, o estudante assume uma postura de sujeito da construção, como se o professor, em uma aula presencial, estivesse desenhando sobre o quadro negro e explicando como encontrar a distância ao seu comando. A seguir ilustramos a sequência de explicações comandadas pelo aluno via seletor. Destaca-se também a importância de refazer a construção após a movimentação dos pontos A e B, em qualquer posição do plano.

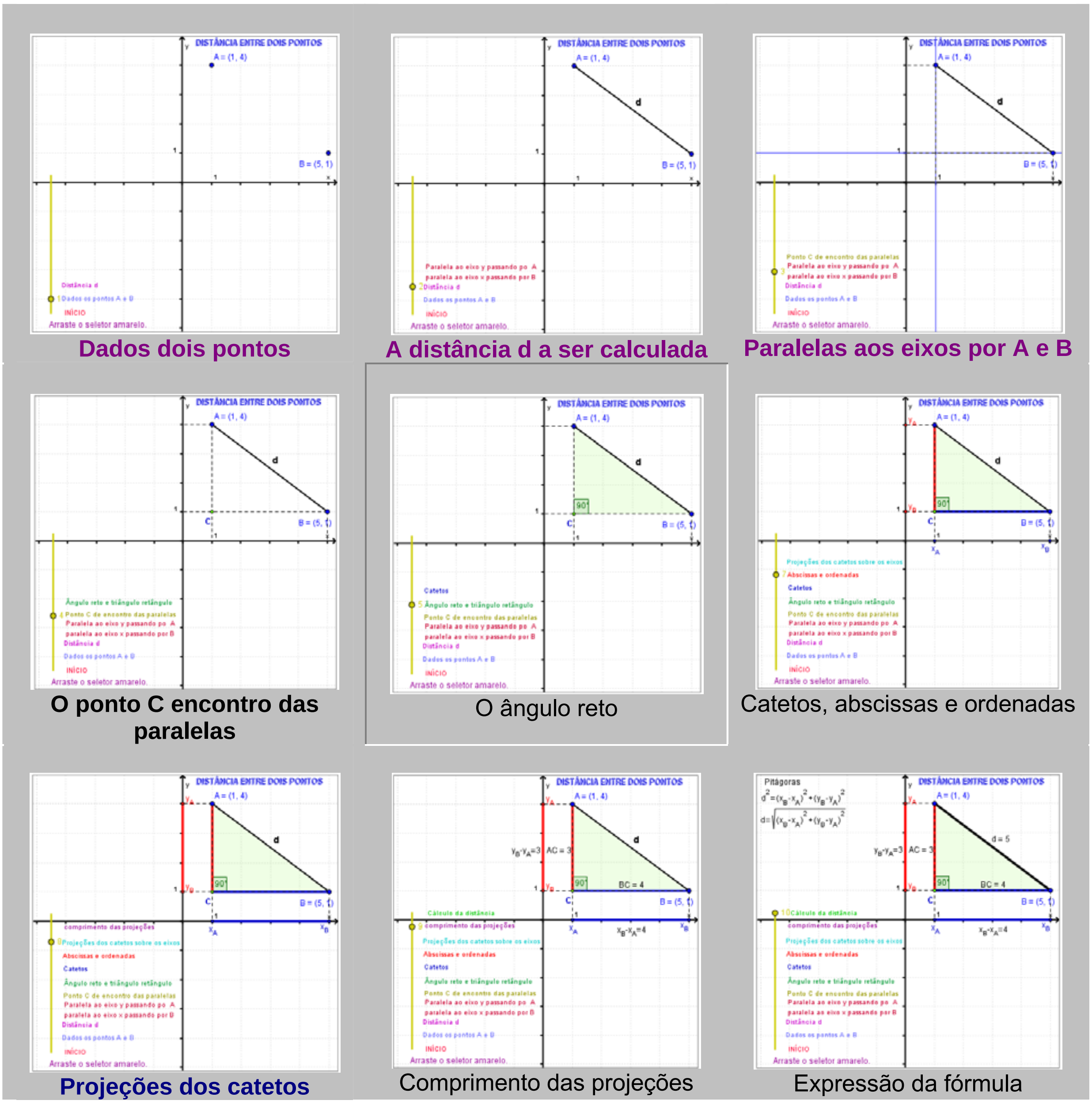
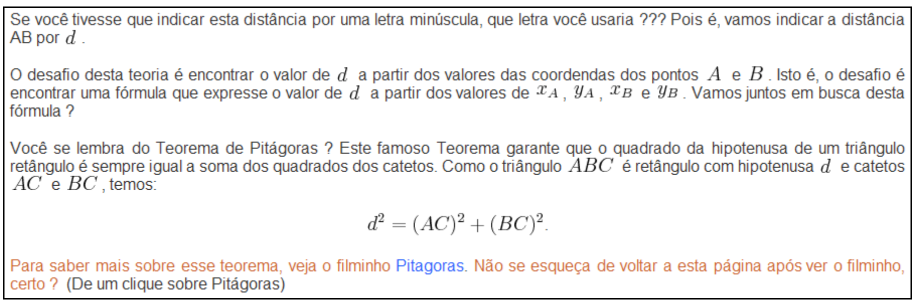


Figura 4.34 – Visualizador o desenvolvimento teórico da distância entre dois pontos no plano.

Após esta atividade de construção da teoria,, um texto sobre a expressão geral da distância entre dois pontos foi apresentado com o formalismo matemático usual, conforme ilustrado a seguir.



Se você tivesse que indicar esta distância por uma letra minúscula, que letra você usaria ??? Pois é, vamos indicar a distância AB por d .

O desafio desta teoria é encontrar o valor de d a partir dos valores das coordendas dos pontos A e B . Isto é, o desafio é encontrar uma fórmula que expresse o valor de d a partir dos valores de x_A , y_A , x_B e y_B . Vamos juntos em busca desta fórmula ?

Você se lembra do Teorema de Pitágoras ? Este famoso Teorema garante que o quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é sempre igual a soma dos quadrados dos catetos. Como o triângulo ABC é retângulo com hipotenusa d e catetos AC e BC , temos:

$$d^2 = (AC)^2 + (BC)^2.$$

Para saber mais sobre esse teorema, veja o filminho Pitagoras. Não se esqueça de voltar a esta página após ver o filminho, certo ? (De um clique sobre Pitágoras)

Figura 4.35 – Parte da demonstração da formula da distância entre dois pontos no plano.

Note que acima foi utilizada uma ferramenta importante em EaD: “link” com outros sítios. Neste caso um filme sobre o teorema de Pitágoras.

A seguir ilustramos a continuação da demonstração da fórmula da distância entre dois pontos no ambiente . Destaca-se uma linguagem dialógica, utilizada para maior clareza e intimidade entre o professor autor deste AVA e os alunos.

Agora vamos utilizar os resultados das páginas anteriores:

- a distância entre dois pontos alinhados na vertical é igual ao valor absoluto da diferença entre suas ordenadas, ou seja:

$$AC = |y_A - y_C|$$

- a distância entre dois pontos alinhados na horizontal é igual ao valor absoluto da diferença entre suas abscissas, ou seja:

$$BC = |x_C - x_B|$$

Como A e C estão alinhados na vertical, suas abscissas coincidem, certo ? Logo $x_A = x_C$.

Como B e C estão alinhados na horizontal, suas ordenadas coincidem, certo ? Logo $y_B = y_C$.

Assim, substituindo $x_A = x_C$ e $y_B = y_C$ nas expressões de BC e AC , respectivamente, temos:

$$AC = |y_A - y_B|$$

$$BC = |x_A - x_B|$$

Você se lembra do desafio desta teoria ? Encontrar uma fórmula que expresse o valor de d a partir dos valores de x_A , y_A , x_B e y_B . Pois é, basta agora substituir as expressões de BC e AC no Teorema de Pitágoras, ou seja:

$$d^2 = |x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2$$

Finalmente, como o quadrado de um número é sempre positivo, podemos desconsiderar o valor absoluto (módulo) na expressão acima, obtendo

$$d^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

Para isolar d basta extrair a raiz quadrada

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Esta expressão também se aplica quando o segmento $\overline{AB}$ for paralelo aos eixos coordenados.

Note também que $(x_B - x_A)^2 = (x_A - x_B)^2$ e $(y_B - y_A)^2 = (y_A - y_B)^2$, isto é a ordem em que forem tomados os pontos não altera a distância.

Figura 4.36 – Demonstração da fórmula da distância entre dois pontos no plano.

Para verificar a aplicação correta da fórmula deduzida, foi proposto o seguinte exercício:

Dados os pontos $A = (a, b)$ e $B = (c, d)$, então a distância d entre A e B é dada por:

$$d = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$$

○	Falso
○	Verdadeiro

Figura 4.37 – Exercício sobre a fórmula da distância entre dois pontos no plano.

Com isso, foi encerrada a teoria sobre distância entre dois pontos.

4.2.4– Distância entre dois pontos (Lição 1.2 do Ambiente)

Esta Lição foi constituída de três exercícios.

Nestes exercícios o aluno aplicou a fórmula aprendida na teoria correspondente e utilizou visualizadores para confirmar suas respostas.

Na primeira página da lição foi solicitado a distância envolvendo três pontos, sendo um deles a origem do sistema cartesiano.

Você já estudou na parte teórica que a fórmula para a distância entre dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ é dada por:

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Considere dois pontos $R = (-1, -1)$ e $S = (2, 3)$.

Para continuar nesta lição você deve usar a fórmula para calcular as distâncias solicitadas e assinalar as respectivas respostas encontradas.

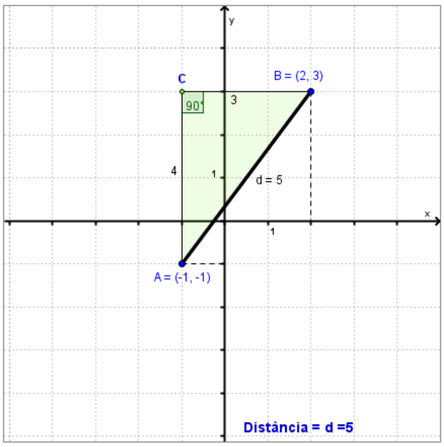
- distância entre R e S;
- distância entre R e a origem;
- distância entre S e a origem.

OBS: a origem é o ponto $O = (0, 0)$.

Figura 4.38 – Exercício sobre a fórmula da distância entre dois pontos no plano na Lição1.2.

Na continuidade do texto da página da lição foi sugerido a utilização do visualizador abaixo. Neste exercício, uma dificuldade deveria ser superada pelo estudante: dois dos resultados não eram números racionais e ele deveria saber os valores aproximados da raiz quadrada de 13 e de 2.

(se quiser pode utilizar o visualizador abaixo)



- 5; $\sqrt{2}$ e $\sqrt{13}$
- 5; 2 e 13
- 7; $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$
- $\sqrt{5}$; $\sqrt{2}$ e $\sqrt{13}$

Figura 4. 39 – o Visualizador e as alternativas do primeiro exercício sobre distância da Lição1.2.

Na segunda página da lição foi solicitada a resolução de um exercício que necessita de um raciocínio diferenciado.

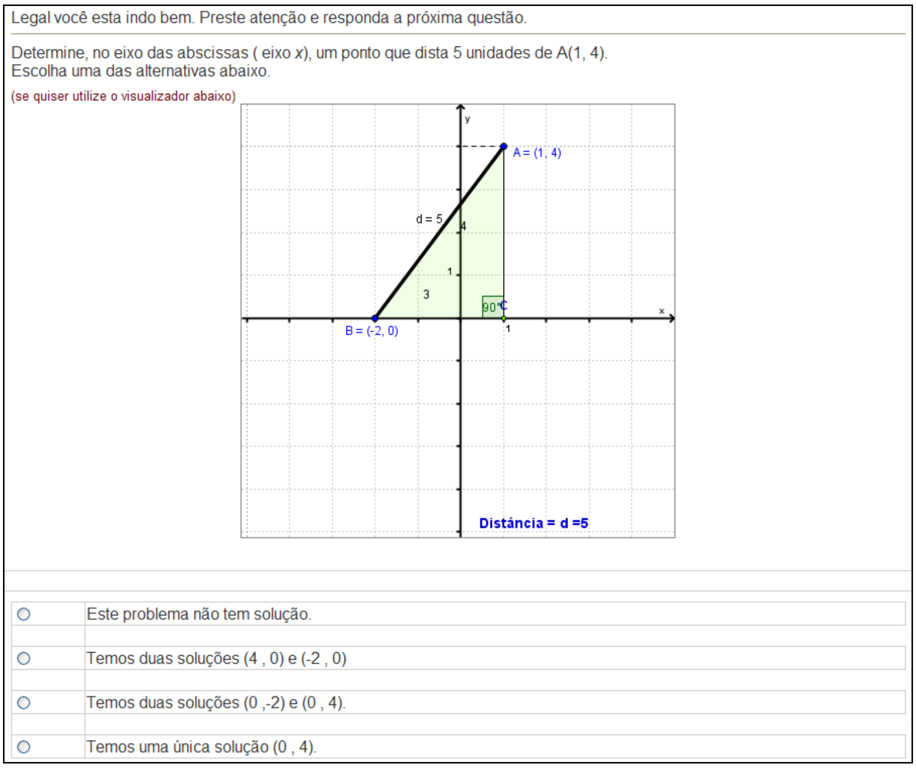


Figura 4.40 – Enunciado, Visualizador e as alternativas do segundo exercício sobre distância da Lição1.2.

O aluno teria que imaginar um ponto sobre o eixo x na forma (x , 0) e impor que a distância entre este ponto e o ponto A=(1 , 4) fosse 5, resolvendo a equação irracional resultante. Nem todos os alunos vislumbraram esta solução. A utilização do visualizador, fixando o ponto A em (1 , 4) e movimentando o ponto B sobre o eixo das abscissas, facilita muito chegar a este raciocínio.

Caso o estudante assinalasse uma única solução como resposta foi possível, através do feedback, mostrar que a solução não era única, efetivando uma aprendizagem através do erro.

Nesta terceira página da lição foi solicitada a resolução um exercício exigindo conhecimentos mais abrangentes, na forma de escolha entre opções ilustradas a seguir.

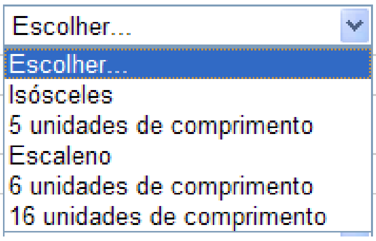


Figura 4.41 – Alternativas do terceiro exercício sobre distância da Lição1.2.

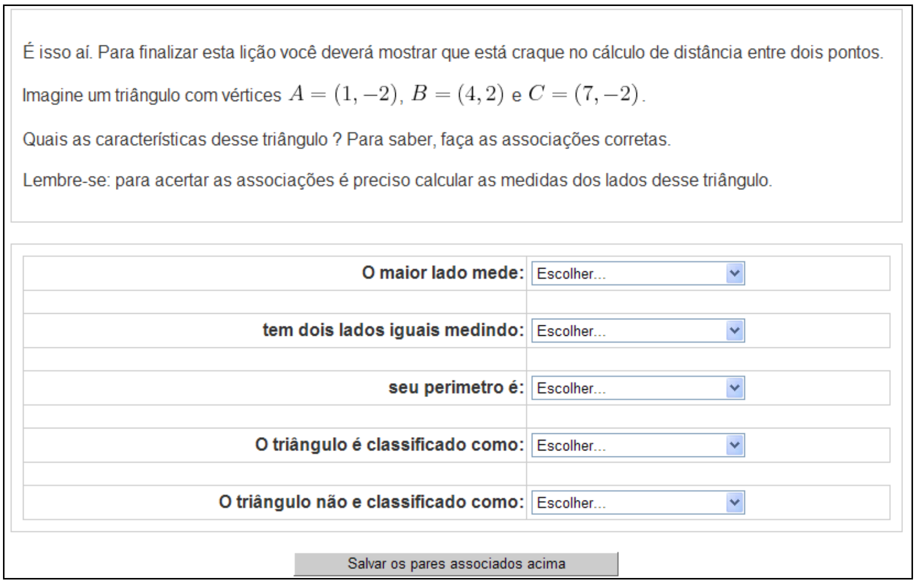


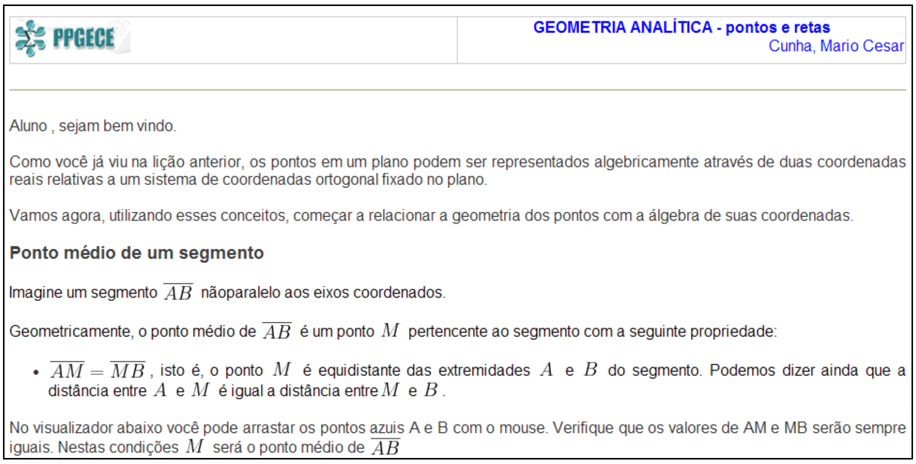
Figura 4.42 – Enunciado e as alternativas do terceiro exercício sobre distância da Lição1.2

Apesar de não ser oferecido um visualizador para a resolução desse exercício, nada impedia que o aluno voltasse a teoria e utilizasse os visualizadores para encontrar as distâncias necessárias. Nosso objetivo porém era que o cálculo fosse efetuado algebricamente.

Com este exercício encerrou-se o estudo de distância entre dois pontos.

4.2.5 – Ponto médio de um segmento (Teoria 1.3 do Ambiente)

A introdução a este conteúdo foi um texto com a definição de ponto médio, como ilustramos a seguir.



PPGECE

GEOMETRIA ANALÍTICA - pontos e retas
Cunha, Mario Cesar

Aluno , sejam bem vindo.

Como você já viu na lição anterior, os pontos em um plano podem ser representados algebricamente através de duas coordenadas reais relativas a um sistema de coordenadas ortogonal fixado no plano.

Vamos agora, utilizando esses conceitos, começar a relacionar a geometria dos pontos com a álgebra de suas coordenadas.

Ponto médio de um segmento

Imagine um segmento $\overline{AB}$ nãoparalelo aos eixos coordenados.

Geometricamente, o ponto médio de $\overline{AB}$ é um ponto M pertencente ao segmento com a seguinte propriedade:

- $\overline{AM} = \overline{MB}$, isto é, o ponto M é equidistante das extremidades A e B do segmento. Podemos dizer ainda que a distância entre A e M é igual a distância entre M e B.

No visualizador abaixo você pode arrastar os pontos azuis A e B com o mouse. Verifique que os valores de AM e MB serão sempre iguais. Nestas condições M será o ponto médio de $\overline{AB}$

Figura 4.43 – Texto introdutório sobre ponto médio da Teoria 1.3

Na sequência do texto, a definição era imediatamente ilustrada em um visualizador específico, com o estudante sendo convidado a movimentar as extremidades do segmento AB e verificar geometricamente a propriedade característica do ponto médio M: AM e MB são sempre congruentes.

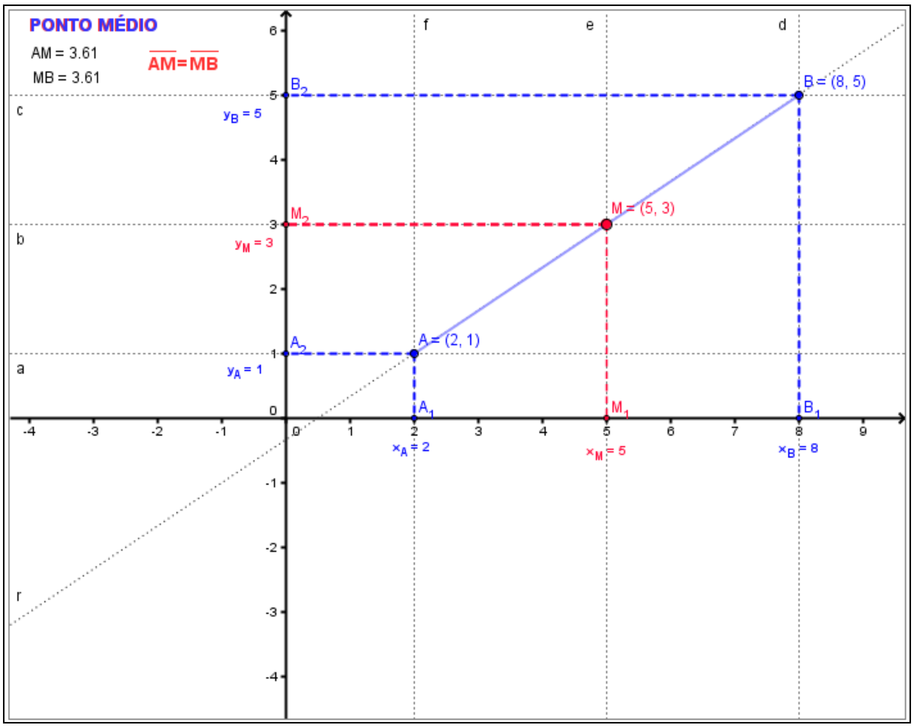


Figura 4.44 – Visualizador da definição de ponto médio da Teoria 1.3

Com o auxilio do visualizador, iniciou-se a demonstração da expressão algébrica que fornecia as coordenadas do ponto médio de um segmento conhecendo suas extremidades, sendo considerado o conhecimento prévio do teorema de Tales.

Você saberia como encontrar as coordenadas do ponto médio de $\overline{AB}$ a partir das coordenadas de A e de B ?

Que contas devemos fazer com as coordenadas de A e B para encontrar as coordenadas do ponto médio de $\overline{AB}$?

Considere dois pontos quaisquer no plano, algebricamente determinados pelas coordenadas $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.

Seja $M(x_M, y_M)$ o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

Observe no visualizador as retas verticais d , e , e f passando respectivamente por B , M , e A . Estas retas cortam o eixo horizontal respectivamente nos pontos B_1 , M_1 , e A_1. Observe também a reta r que contém o segmento $\overline{AB}$ e a reta x determinada pelo eixo horizontal.

As retas d , e , e f são retas paralelas cortadas pelas transversais r e x .

Você se lembra de um resultado que fala de retas paralelas cortadas por transversais ?

Este resultado é o famoso Teorema de Tales, que estabelece as seguintes relações:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{A_1M_1}}{\overline{M_1B_1}}$$

Como $\overline{AM} = \overline{MB}$ segue pela relação acima que

$$\overline{A_1M_1} = \overline{M_1B_1}.$$

Observe agora que se o ponto A está a esquerda de B então

- $\overline{A_1M_1} = x_M - x_A$
- $\overline{M_1B_1} = x_B - x_M$

Logo a igualdade geométrica $\overline{A_1M_1} = \overline{M_1B_1}$ se traduz algebricamente na igualdade

$$x_M - x_A = x_B - x_M$$

Figura 4.45 – Primeira parte de demonstração da expressão do ponto médio.

Trabalhando algebricamente com esta equação temos:

- $x_M - x_A = x_B - x_M$
- $2x_M = x_A + x_B$
- $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$

Por outro lado, se o ponto A está a direita de B então

- $\overline{A_1M_1} = x_A - x_M$
- $\overline{M_1B_1} = x_M - x_B$

Logo a igualdade geométrica $\overline{A_1M_1} = \overline{M_1B_1}$ se traduz algebricamente na igualdade

$$x_A - x_M = x_M - x_B$$

e trabalhando algebricamente com esta equação temos:

- $x_A - x_M = x_M - x_B$
- $-2x_M = -x_A - x_B$
- $2x_M = x_A + x_B$
- $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$

Conclusão: em qualquer situação a coordenada x_M é a média aritmética das coordenadas x_A e x_B .
Média aritmética de dois números é soma-los e dividir o resultado por dois.

O mesmo raciocínio para as retas paralelas a , b e c cortadas pelas transversais r e y (eixo y) determina que $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

Assim

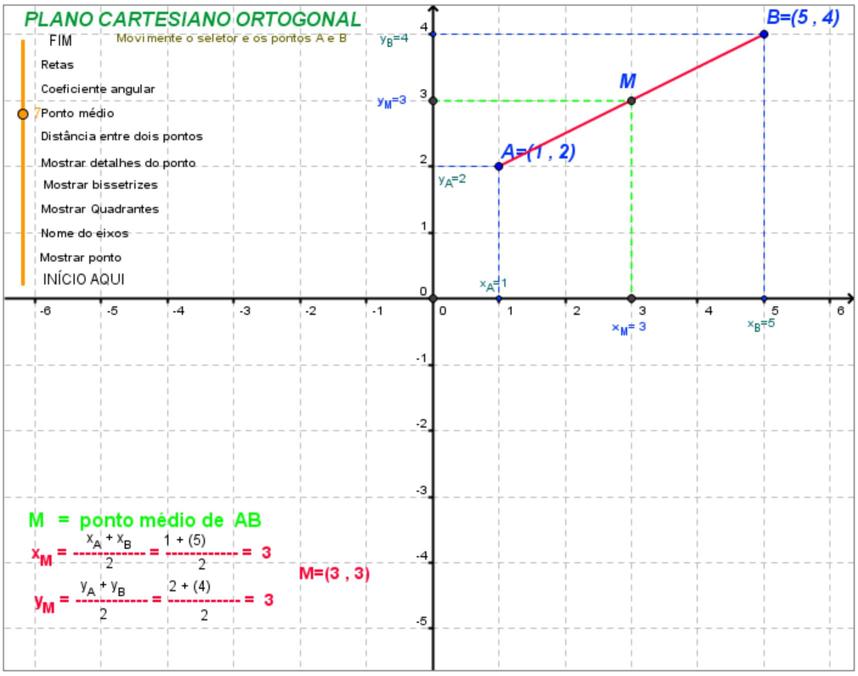
$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Figura 4.46 – Segunda parte de demonstração da expressão do ponto médio.

Para fixar ainda mais o teoria estudada, um exercício simples foi apresentado ao aluno. Para resolvê-lo o aluno podia aplicar a forma algébrica ou utilizar o visualizador apresentado anteriormente. Um dos motivos para retomar o visualizador é que ele inclui vários conceitos da geometria analítica, e o aluno poderia revisá-los percorrendo o seletor.

No visualizador escolha as opções "*ponto médio*" e mova os pontos **A** e **B** com o mouse (você deve arrastar os pontos sobre o plano cartesiano)

Caro aluno, é muito importante você verificar na parte inferior do visualizador como se calcula o ponto médio de AB.



Posicione o ponto A nas coordenadas (1,2) e o ponto B nas coordenadas (5,4).

Assinale as coordenadas do ponto M, ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

Figura 4.47 – Visualizador geral de geometria analítica.

○ (3,3)

○ (4,1)

Salvar a resposta selecionada

Figura 4.48 – Alternativas da questão sobre ponto médio da Teoria 1.3.

4.2.6 – Ponto médio de um segmento (Lição 1.3 do Ambiente)

Na primeira página da lição foi apresentado ao aluno um exercício resolvido, para simples acompanhamento da solução e entendimento das justificativas algébricas.

Olá!!! meu caro estudante.

Vamos praticar nesta lição o cálculo algébrico do ponto médio M de um segmento $\overline{AB}$.

Vamos praticar como encontrar as coordenadas do ponto médio a partir das coordenadas de suas extremidades.

Lembre-se que se M é o ponto médio de $\overline{AB}$ então

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ e } y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Vamos responder a questão abaixo algebricamente utilizando as fórmulas do ponto médio.

QUESTÃO: Quais as coordenadas do ponto B sabendo que M=(2 , 1) é ponto médio de AB onde A=(3 , -1) ?

Observe que $x_A = 3$, $y_A = -1$, $x_M = 2$ e $y_M = 1$.

Para resolver esta questão devemos encontrar x_B e y_B.

Utilizando a fórmula para as abscissas temos:

- $\frac{3+x_B}{2} = 2$ (multiplicando a equação por 2)
- $3 + x_B = 4$ (somando -3 em ambos os lados)
- $x_B = 4 - 3$ (efetuando a subtração)
- $x_B = 1$

Utilizando a fórmula para as ordenadas temos:

- $\frac{-1+y_B}{2} = 1$ (multiplicando a equação por 2)
- $-1 + y_B = 2$ (somando 1 em ambos os lados)
- $y_B = 2 + 1$ (efetuando a adição)
- $y_B = 3$

Você entendeu as contas acima ? Para continuar na lição assinale a alternativa que corresponde ao ponto B.

Figura 4.49 – Exercício sobre ponto médio da Lição 1.3.

○	B=(3 , 3)
○	B=(3 , 1)
○	B=(1 , 1)
○	B=(1 , 3)

Salvar a resposta selecionada

Figura 4.50 – Alternativas do exercício sobre ponto médio da Lição 1.3.

Na segunda página da lição o mesmo problema foi apresentado, mas agora para ser resolvido geometricamente, com auxilio do visualizador. O objetivo destas duas páginas iniciais foi enfatizar a solução analítica e a geométrica de um problema, justificando o nome *Geometria Analítica*.

Muito bom!!! Na lição anterior você entendeu como se resolve uma questão de geometria algebricamente.

Vamos agora resolver a mesma questão geometricamente. Veja se você acha mais fácil entender a solução desta forma.

Antes de responder a pergunta brinque com o visualizador arrastando o seletor para "ponto médio".

Mova o seletor amarelo até "ponto médio" e movimente somente as coordenadas de A e B com mouse.

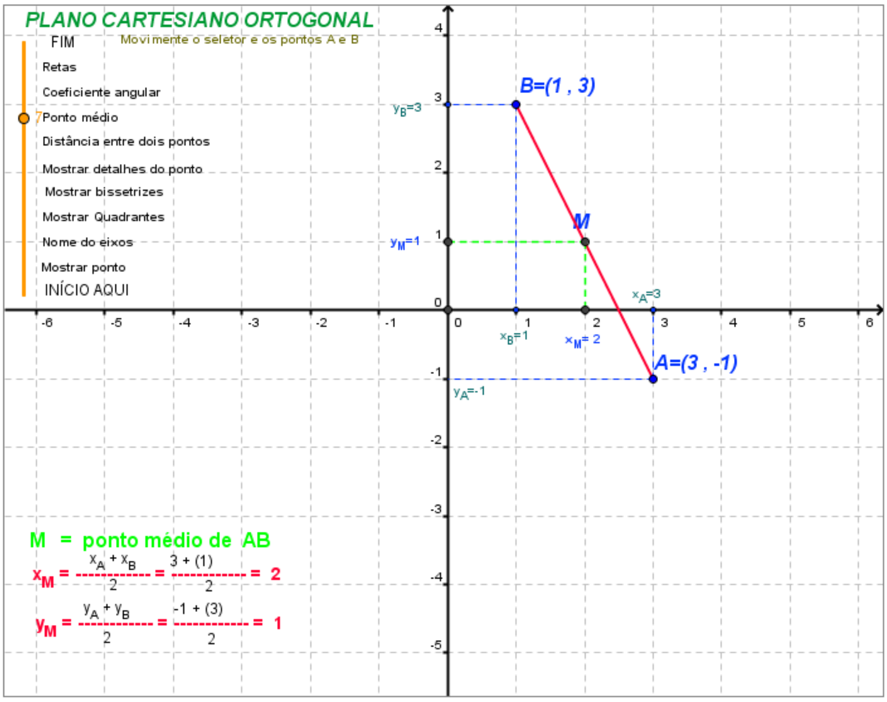


Figura 4.51 – Visualizador geral para solução da questão sobre ponto médio da Lição 1.3.

No visualizador acima encontre as coordenadas de B sabendo que M=(2,1) é ponto medio de AB, sendo A=(3 , -1).
Solução:

No visualizador acima coloque o ponto A com abscissa 3 e ordenada -1.
Arrastando as coordenadas do ponto B, tente colocar o ponto médio M nas coordenadas (2 , 1)
Veja agora quais as coordenadas de B e diga qual a alternativa correta

- ○ B =(1 , 0)
- ○ B =(-3.5 , 0)
- ○ B =(1 , 3)
- ○ B =(0 , 3)

Salvar a resposta selecionada

Figura 4.52 – Enunciado e orientação para solução da questão sobre ponto médio da Lição 1.3.

Finalizando a lição, uma última questão foi proposta. Foi solicitado ao aluno para que utilizasse as fórmulas sobre ponto médio e resolvesse a questão algebricamente. Depois com o auxilio do visualizador, foi solicitado verificar geometricamente se os pontos médios encontrados anteriormente estavam corretos.

Observe que os pontos médios poderiam ser obtidos com a movimentação dos pontos R e S sobre os vértices, como indica o visualizador.

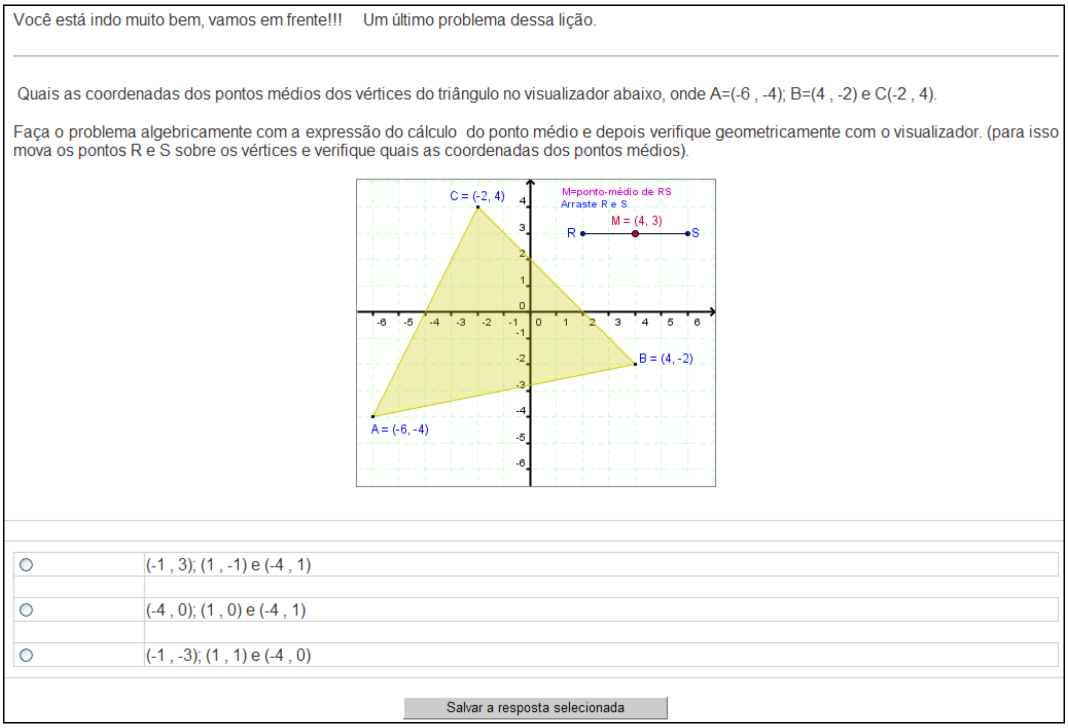


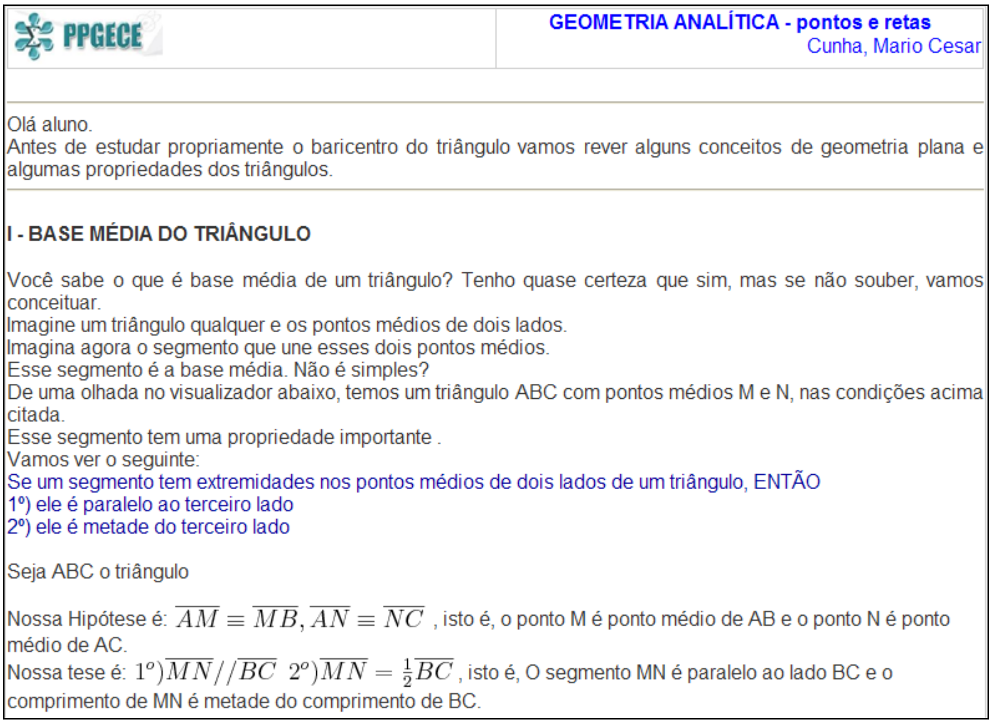
Figura 4.53 – Enunciado da questão sobre ponto médio da página 3 referente a Lição 1.3.

4.2.7– O Baricentro do triângulo (Teoria 1.4 do Ambiente)

Outra teoria que envolve pontos no plano, com muita aplicação em várias áreas do conhecimento, é o baricentro de um triângulo (centro de gravidade ou centro de massa).

Neste caso foi alertado ao aluno que uma revisão teórica de alguns conceitos geométricos seria apresentada para depois prosseguir com a Geometria Analítica propriamente dita. Estes conceitos foram necessários para obtenção da expressão das coordenadas do baricentro de um triângulo a partir das coordenadas de seus vértices.

Esta revisão foi iniciada pelo conceito de base média de um triângulo, demonstrada algebricamente com auxílio de visualizador específico.


PPGECE

GEOMETRIA ANALÍTICA - pontos e retas
Cunha, Mario Cesar

Olá aluno.
Antes de estudar propriamente o baricentro do triângulo vamos rever alguns conceitos de geometria plana e algumas propriedades dos triângulos.

I - BASE MÉDIA DO TRIÂNGULO

Você sabe o que é base média de um triângulo? Tenho quase certeza que sim, mas se não souber, vamos conceituar.
Imagine um triângulo qualquer e os pontos médios de dois lados.
Imagina agora o segmento que une esses dois pontos médios.
Esse segmento é a base média. Não é simples?
De uma olhada no visualizador abaixo, temos um triângulo ABC com pontos médios M e N, nas condições acima citada.
Esse segmento tem uma propriedade importante .
Vamos ver o seguinte:
Se um segmento tem extremidades nos pontos médios de dois lados de um triângulo, ENTÃO
1º) ele é paralelo ao terceiro lado
2º) ele é metade do terceiro lado

Seja ABC o triângulo

Nossa Hipótese é: $\overline{AM} \equiv \overline{MB}, \overline{AN} \equiv \overline{NC}$, isto é, o ponto M é ponto médio de AB e o ponto N é ponto médio de AC.
Nossa tese é: $1^o)\overline{MN}//\overline{BC}\ \ 2^o)\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BC}$, isto é, O segmento MN é paralelo ao lado BC e o comprimento de MN é metade do comprimento de BC.

Figura 4.54 – Definição de base média de um triângulo na página 1 referente a Teoria 1.4

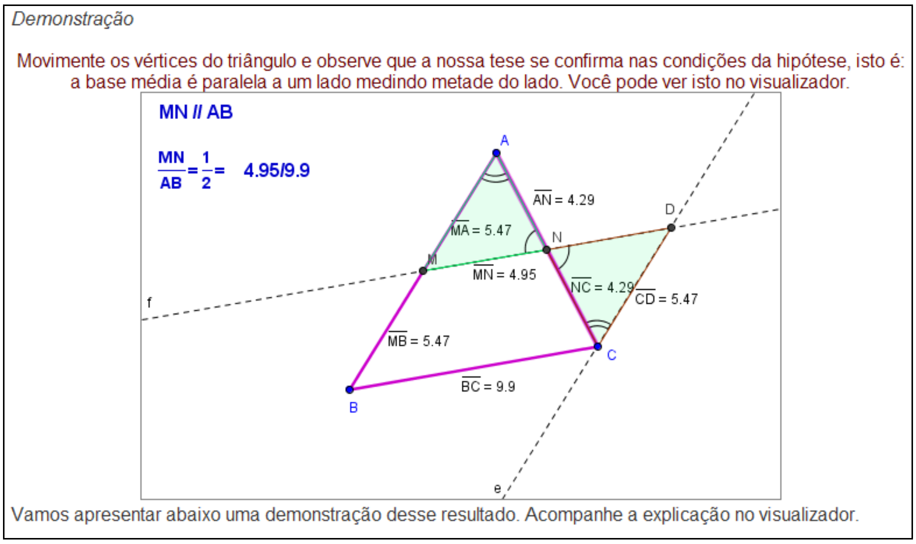


Figura 4.55 – Visualizador da base média de um triângulo na página 1 referente a Teoria 1.4

Após a definição de base média passou-se a demonstração do resultado enunciado. A demonstração foi elaborada em conjunto com o visualizador em que, foi solicitando ao aluno que acompanhasse no visualizador os passos da demonstração. Assim o aluno foi construindo, a partir das hipóteses, a sequência da demonstração até chegar a tese do teorema. Nesta página não foi elaborada nenhuma questão para prosseguir por se tratar de uma revisão onde esse conteúdo já foi visto em séries anteriores.

No triângulo ABC, conduzimos por C uma reta paralela à reta AB e seja D o ponto de intersecção com a reta MN.

Note que os triângulos AMN e CDN (verdinhos) são congruentes pelo caso de congruência A-L-A (ângulo-lado-ângulo). De fato, os ângulos $C\hat{N}D$ e $A\hat{N}M$ são opostos pelo vértice, e portanto possuem a mesma medida; já os lados $\overline{AN}$ e $\overline{CN}$ possuem a mesma medida pois N é, por hipótese, o ponto médio de $\overline{AC}$; finalmente, os ângulos $M\hat{A}N$ e $D\hat{C}N$ também possuem a mesma medida, já que são ângulos alternos internos de uma reta transversal cortando duas retas paralelas.

Note agora que o quadrilátero $BMDC$ é um paralelogramo, pois $\overline{BM}$ é paralelo a $\overline{CD}$ e ambos possuem a mesma medida, já que a medida de $\overline{BM}$ é igual, por hipótese do ponto médio, à medida de $\overline{MA}$, que por sua vez é igual, pela congruência dos triângulos, à medida de $\overline{CD}$.

Já podemos concluir que $\overline{MN}$ é paralelo a $\overline{BC}$ pois lados opostos de um paralelogramo.

Falta, então, mostrar que a medida de $\overline{MN}$ é metade da medida de $\overline{BC}$. Isto decorre dos seguintes fatos:

- $\overline{BC}$ e $\overline{MD}$ tem a mesma medida
- N é, pela congruência dos triângulos, ponto médio de $\overline{MD}$

Logo a medida de $\overline{MN}$ é a metade da medida de $\overline{MD}$ que, por sua vez, é igual à medida de $\overline{BC}$. Portanto $\overline{MN}$ é a metade da medida de $\overline{BC}$

Continuar

Figura 4.56 – Demonstração do teorema da base média de um triângulo na página 1 referente a Teoria 1.4

Na página 2 foi trabalhado um resultado que está diretamente relacionado com a questão do baricentro do triângulo: como ele divide as medianas na razão 2:1. A demonstração deste resultado foi feito com auxílio de visualizador específico para acompanhar as etapas da demonstração. Esta página também não teve questão final para prosseguir no ambiente, por se tratar de uma complementação de teoria geometria de Geometria Analítica.

PPGECE

GEOMETRIA ANALÍTICA - pontos e retas
Cunha, Mario Cesar

Agora vamos mostrar que o baricentro divide a mediana na razão de um para dois (1:2). Para isso vamos utilizar o resultado da pagina anterior.

Apareceram acima duas palavras diferentes: baricentro e mediana.

Dedicado aluno!!!. Você sabe o que estas palavras significam? Se não lembra, vou conceitua-las.

- Mediana é um segmento que possui um extremo no vértice de um triângulo e outro extremo no ponto médio do lado oposto a este vértice. No visualizador observamos três medianas: **AP**, **BN** e **CM**.
- Baricentro é o encontro das três medianas de um triângulo. No visualizador observamos o baricentro **G.**

Se você não lembrava agora recordou, certo ?

Vamos mostrar que o baricentro divide cada mediana em duas partes com a parte maior, de extremidade no vértice, sendo o dobro da outra.

No triângulo ABC vamos assumir que M, N e P são, respectivamente, pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$.

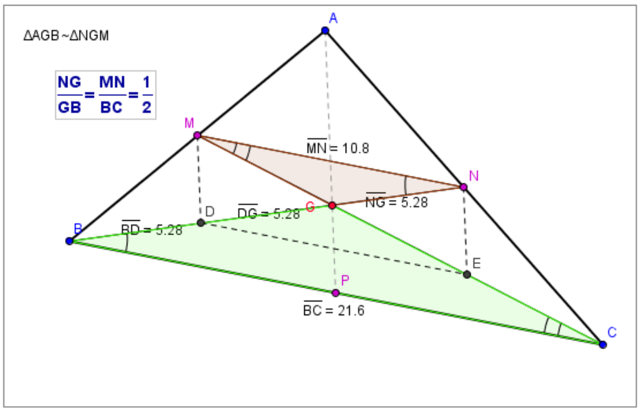
Nossa Hipótese: $\overline{AP}$, $\overline{BN}$, $\overline{CM}$ são medianas.

Nossa Tese: $\overline{AG} = 2\overline{GP}$, $\overline{BG} = 2\overline{GN}$, $\overline{CG} = 2\overline{GM}$.

Figura 4.57 – Enunciado do teorema do baricentro de um triângulo na página 2 referente a Teoria 1.4

Vamos demonstrar somente que $\overline{BG} = 2\overline{GN}$.

Sejam **D** e **E** os pontos médios de $\overline{BG}$ e $\overline{CG}$, respectivamente, como mostra o visualizador abaixo



Basta mostrarms que o quadrilátero $DMNE$ é um paralelogramo. De fato, se tal quadrilátero for relamente um paralelogramo, então $\overline{GN}$ tem a mesma medida de $\overline{DG}$ (pois G é o encontro das diagonais do paralelogramo) que por sua vez tem a mesma medidada de $\overline{DG}$ (pois D é ponto médio de $\overline{BG}$). Assim a medida de $\overline{BG}$ é o dobro da medida de $\overline{GN}$.

O quadrilátero $DMNE$ é um paralelogramo pois os lados $\overline{MN}$ e $\overline{DE}$ são ambos bases médias de triângulos de mesma base $\overline{BC}$; logo, pelo resultado anterior, estes lados são paralelos e possuem a mesma medida.

OBSERVAÇÃO: Trabalhamos nestas duas páginas anteriores conceitos da geometria plana. Vamos agora retornar ao estudo da geometria analítica, aplicando esses resultados.

Continuar

Figura 4.58 – Demonstração do teorema do baricentro de um triângulo na página 2 referente a Teoria 1.4

Na página seguinte foi enunciado o resultado principal de teoria em questão: como encontrar as coordenadas do baricentro de um triângulo conhecendo as coordenadas de seus vértices.

PPGECE

GEOMETRIA ANALÍTICA - pontos e retas
Cunha, Mario Cesar

Aluno, imagine no plano cartesiano um triângulo ABC de vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$.

Vamos chamar de $G(x_G, y_G)$ o seu Baricentro (encontro das medianas).

Nesta lição vamos mostrar que as coordenadas do Baricentro são obtidas a partir das coordenadas dos Vértices através das fórumulas

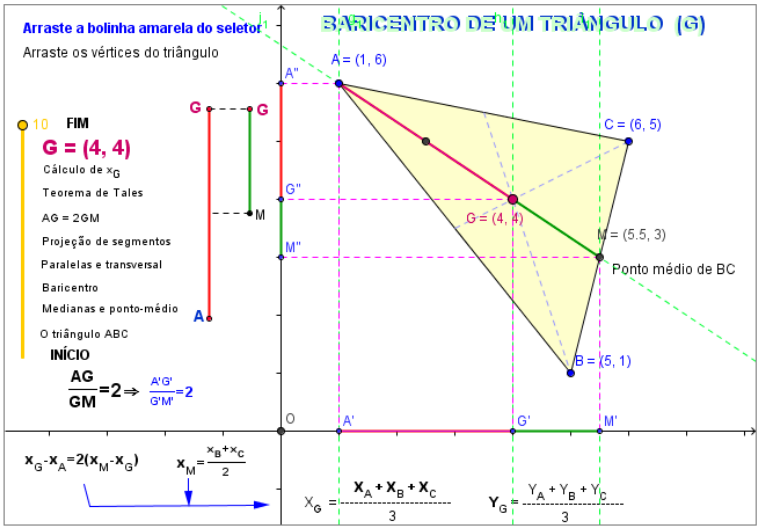
$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Figura 4.59 – Resultado que se pretende demonstrar sobre baricentro de um triângulo

A demonstração passo a passo desse resultado foi feita com auxílio de visualizador específico.

Para entender a demonstração, arreste no visualizador o seletor amarelo vagarosamente até "FIM".



Demonstração: vamos considerar uma situação em que o ponto A está a esquerda do ponto B, que por sua vez está a esquerda do ponto C.

Movimentando os vértices do triângulo ABC para visualizar a situação acima

Figura 4.60 – Visualizador que demonstra como encontrar as coordenadas do baricentro de um triângulo

Como uma das partes importante da demonstração é a aplicação do teorema de Tales, um link para um vídeo sobre esse teorema foi disponibilizado. Ao final da página uma questão simples foi apresentada para aplicação da fórmula e a comprovação do resultado no visualizador.

Temos como hipóteses

- M é o ponto médio de $\overline{BC}$
- $\overline{AM}$ a mediana relativa ao vértice A
- $\overline{AG} = 2\overline{GM}$

Visualize na posição "Paralelas e transversais" as retas verticais trecejadas. Estas retas são paralelas e cortadas por duas retas transversais (reta suporte do segmento $\overline{AM}$ e eixo x). Podemos então aplicar nestas retas o famoso e importantíssimo Teorema de Tales (se você quizer saber mais sobre o teorema de Tales veja um video de 5:30 minutos, clicando AQUI) e obter que:

- $\frac{\overline{GM}}{\overline{GA}} = \frac{\overline{G'M'}}{\overline{G'A'}}$

Como $\frac{\overline{GM}}{\overline{GA}} = \frac{1}{2}$ por hipótese, temos $\frac{\overline{G'M'}}{\overline{G'A'}} = \frac{1}{2}$.

Assim $\overline{G'A'} = 2\overline{G'M'}$ e consequentemente

- $(x_{G'} - x_{A'}) = 2\,(x_{M'} - x_{G'}) \Rightarrow (x_G - x_A) = 2\,(x_M - x_G)$

Usando agora que $x_M = \frac{x_B + x_C}{2}$ vamos encontrar

- $(x_G - x_A) = 2\left(\frac{x_B + x_C}{2} - x_G\right)$
- $x_G - x_A = x_B + x_C - 2x_G$
- $3x_G = x_A + x_B + x_C$
- $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$

Figura 4.61 – Parte I da demonstração como encontrar as coordenadas do baricentro de um triângulo

Conclusão:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

Do forma análoga pode-se mostrar que

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Podemos concluir portanto, que as coordenadas do Baricentro de um triângulo são as médias aritméticas das abscissas de A, B e C e médias aritméticas das ordenadas de A, B e C

Usando o visualizador acima encontre o baricentro do triângulo de vértices A=(1 , 1), B=(5 , 1) e C=(6 ,4).

Arraste os pontos A, B e C para estas coordenadas.

Qual das alternativas abaixo corresponde ao Baricentro

○	G(3 , 1)
○	G(4 , 2)
○	G(5 , 3)
○	G(3 , 3)

Figura 4.62 – Parte II da demonstração como encontrar as coordenadas e questão sobre do baricentro de um triângulo

4.2.8 – O Baricentro do triângulo (Lição 1.4 do Ambiente)

O início da lição 1.4 foi uma pequena revisão das expressões que fornecem as coordenadas do baricentro.

Como vimos, o baricentro G de um triângulo ABC é o ponto de encontro de suas medianas. Se M é o ponto médio do lado $\overline{BC}$ então mostramos que

$$\frac{\overline{GM}}{\overline{AG}} = \frac{1}{2}$$

e, consequentemente,

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{AM}} = \frac{2}{3}$$

Isto signfifica que o encontro das medianas sempre se dá a 2/3 dos vértices do triângulo, sobre qualquer de suas medianas.

Vimos também que as coordenadas do Baricentro podem ser obtidas a partir das coordenadas dos vértices do triângulo pelas fórmulas

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Figura 4.63 – Revisão sobre as coordenadas do baricentro de um triângulo

Na sequência foi apresentada a resolução de um exercício envolvendo a simples aplicação da expressão para o cálculo do baricentro do triângulo.

Vamos resolver agora o problema abaixo:

De um triângulo ABC sabe-se:

- $A = (-1, 1)$
- $B = (1, 2)$
- $G = (0, 0)$ (Baricentro é a origem do sistema cartesiano)

Quais as coordenadas do ponto C ?

Solução: Note que $x_A = -1$, $y_A = 1$, $x_B = 1$, $y_B = 2$, $x_G = 0$ e $y_G = 0$. Queremos encontrar o ponto $C = (x_C, y_C)$. Pela fórmula do Baricentro temos:

$$\frac{-1+1+x_C}{3} = 0 \Longrightarrow 0 + x_C = 0 \Longrightarrow x_C = 0$$

$$\frac{1+2+y_C}{3} = 0 \Longrightarrow 3 + y_C = 0 \Longrightarrow y_C = -3$$

A alternativa correta é portanto:

○	C=(3 ,3)
○	C=(0 , -3)
○	C=(-3 , 0)
○	C=(-3 , -3)

Salvar a resposta selecionada

Figura 4.64 – solução de um problema sobre as coordenadas do baricentro de um triângulo

Na página seguinte foi apresentado ao aluno um visualizador específico para resolver o mesmo problema geometricamente.

Na questão anterior, encontramos as coordenadas do ponto C utilizando a álgebra da teoria do o baricentro de um triângulo ABC.
Lembrando mais uma vez que o baricentro "G" de um triângulo ABC é o ponto de encontro de suas medianas, e que isso se dá a 2/3 dos vértices do triângulo, sobre qualquer de suas medianas. E ainda que mediana é o segmento que tem extremidades no vértice do triângulo e no ponto médio do lado oposto a o vértice, veja no visualizador abaixo, movendo os vértices, que a relação entre os segmentos indicado permanece a mesma, isto é $\frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}$. Veja também que x_G é a média aritmética das abcissas dos vertices e y_G é a média aritmética das ordenadas dos vértices (ver teoria 2).

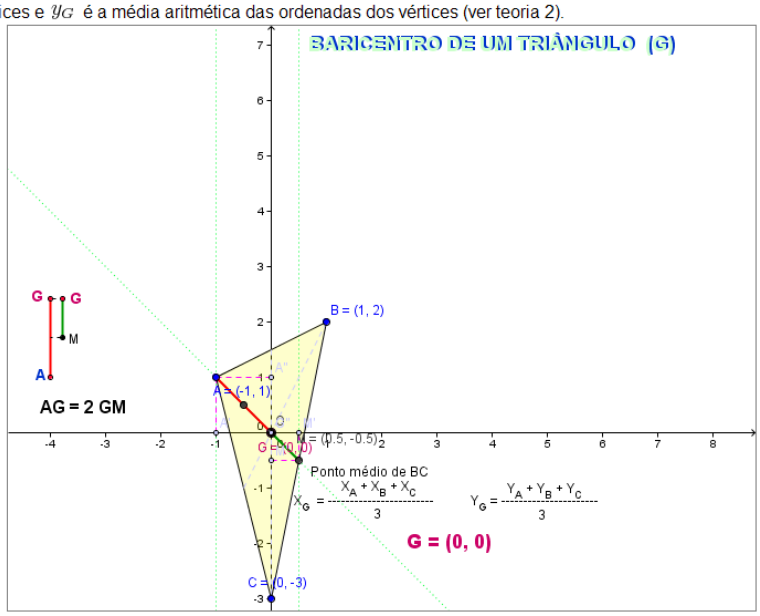
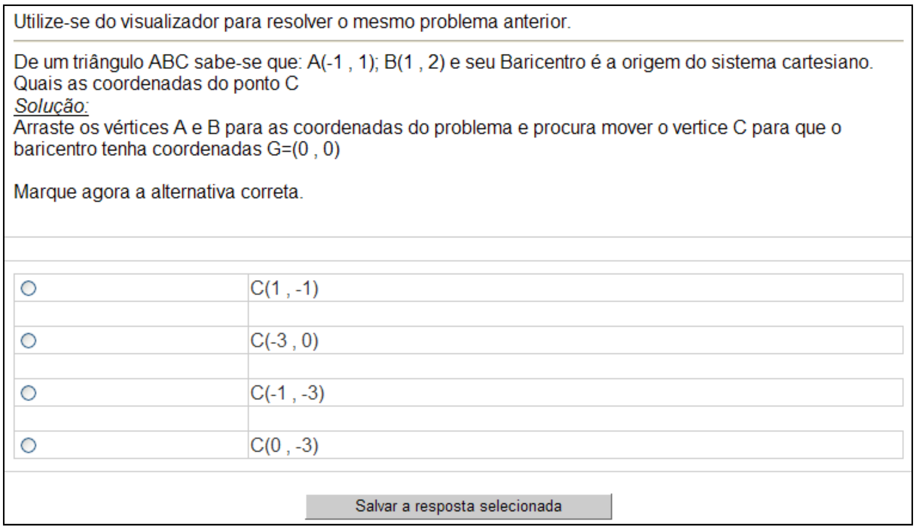


Figura 4. 65 – Visualizador com a solução de um problema sobre as coordenadas do baricentro de um triângulo


Utilize-se do visualizador para resolver o mesmo problema anterior.

De um triângulo ABC sabe-se que: A(-1 , 1); B(1 , 2) e seu Baricentro é a origem do sistema cartesiano. Quais as coordenadas do ponto C

Solução:
Arraste os vértices A e B para as coordenadas do problema e procura mover o vertice C para que o baricentro tenha coordenadas G=(0 , 0)

Marque agora a alternativa correta.

- C(1 , -1)
- C(-3 , 0)
- C(-1 , -3)
- C(0 , -3)

Salvar a resposta selecionada

Figura 4.66 – Enunciado e alternativas de um problema sobre as coordenadas do baricentro de um triângulo

Prosseguindo na lição, um exercício foi proposto ao aluno para ser resolvido com auxilio do visualizador. O exercício envolvia a construção de um triângulo nas condições proposta. A dificuldade inicial, na forma de desafio, remete o aluno a uma desiquibração para, depois, quando a solução é encontrada, haver a equilibração, efetivando assim uma aprendizagem segundo a teoria de Piaget.

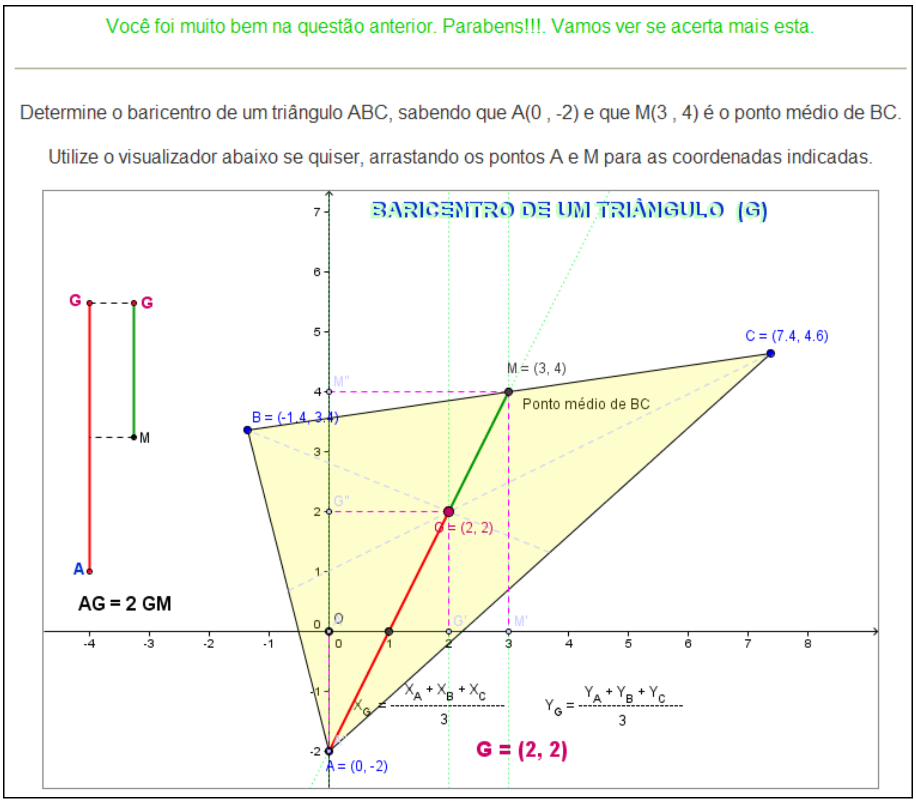


Figura 4.67 – Problema e visualizador para solução de um exercício baricentro na página 3 da lição 1.4.

○	G(-1 , 0)
○	G(1 , 0)
○	G(2 , 2)
○	G(-2 , 0)

Salvar a resposta selecionada

Figura 4.68 – Problema e visualizador para solução de um exercício baricentro na página 3 da lição 1.4.

Na última página desta lição foi proposto um exercício que trata de uma verificação geométrica com uso de visualizador .

Parabéns pela resposta anterior. Você está mesmo aprendendo!!!. Quero ver se acerta esta.

Verifique se a afirmação abaixo é verdadeira ou falsa.

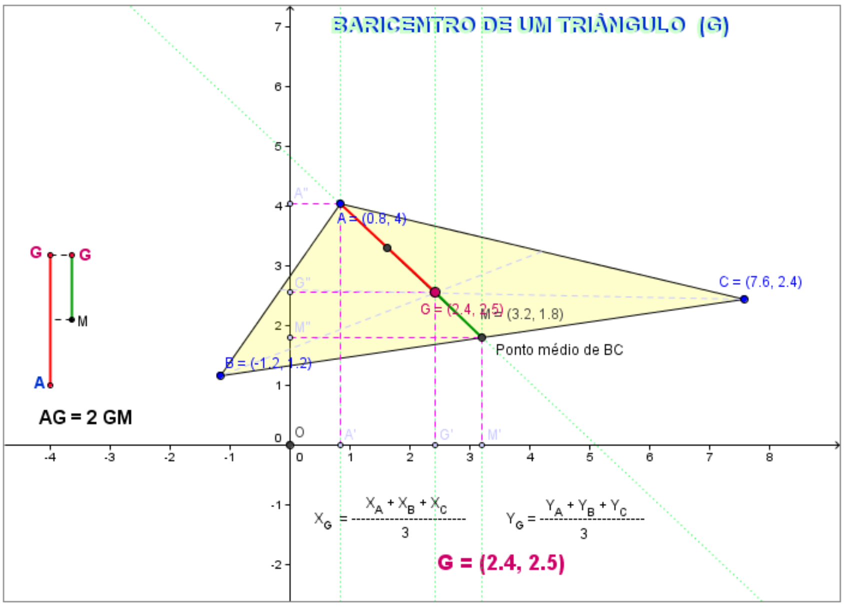
O baricentro de um triângulo de vértices A(-1 , 0) , B(3 , 5) e C(7 , -2) e o baricentro do triângulo formado pelos pontos médios de seus lados são coincidentes.

Sugestão: Fazendo em uma folha separado, encontre os pontos médios P, Q e R dos lados do triânguloc ABC, depois com esse pontos encontre o baricentro do triângulo PQR. Compare agora com o baricentro do triângulo ABC. Eles coincidem???

Para ajuda-lo segue o visualizador:

Figura 4.69 – Enunciado do problema sobre baricentro na página 4 da lição 1.4.

Para ajuda-lo segue o visualizador:



○	VERDADEIRO
○	FALSO

Figura 4.70 – Visualizador do problema sobre baricentro na página 4 da lição 1.4.

4.2.9 – Simulado e Provinha da unidade 1

Após a conclusão das Teorias e Lições foi proporcionado ao aluno atividades de fixação do conhecimento através de Simulado e Provinha.

A plataforma Moodle permite criar uma atividade denominada *questionário*, onde se pode elaborar simulados e avaliações, com exercícios e problemas selecionados aleatoriamente a partir de um banco de questões. Assim o aluno pode refazer o questionário várias vezes, sem repetições de perguntas, porém procedentes de um conjunto de perguntas pré-fixado.

Este recurso foi utilizado no simulado da unidade I deste ambiente, onde cada uma das dez questões aleatórias foi escolhida de um subconjunto de três questões semelhantes. O aluno podia fazer e refazer o simulado quantas vezes desejasse, semelhante ao estudo em casa de alunos do ensino presencial.

A seguir ilustramos um destes simulados.

Questão 1 - Esperava-se nesta questão que o aluno, desenhando o retângulo em um sistema de eixos cartesianos, localizasse os pontos A, B , E e D, e com isso os valores de x e y para efetuar, então, x - y.

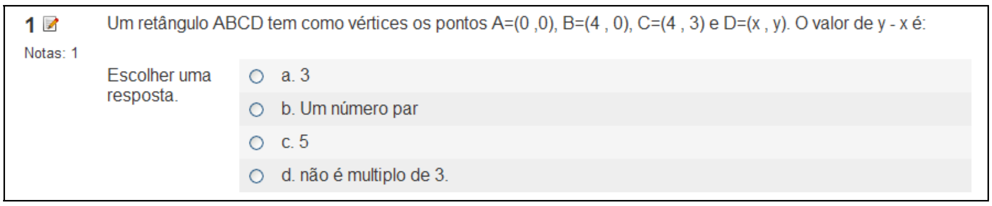


Figura 4.71 – Questão aleatória 1 do simulado

Questão 2 – Esperava-se nessa questão verificar alguns conceitos ministrados durante a aplicação do ambiente, através de associações.

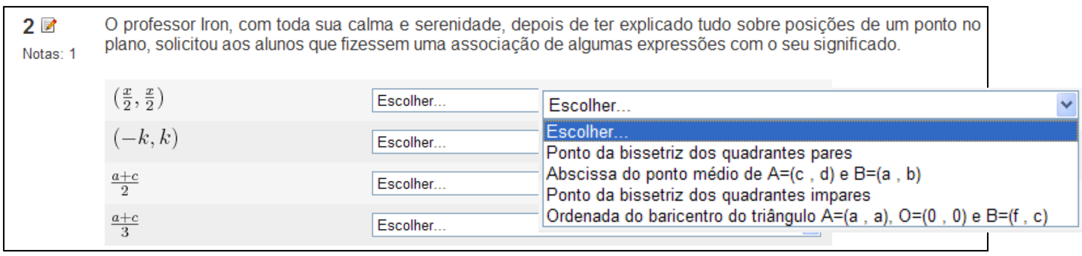


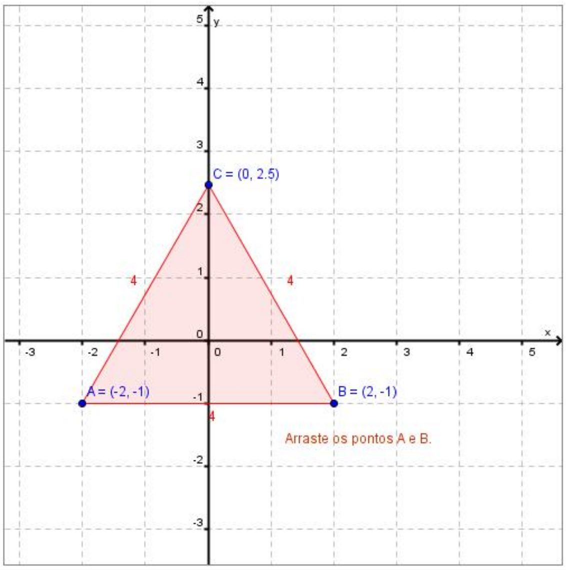
Figura 4.72 – Questão aleatória 2 do simulado

Questão 3 – Esperava-se nessa questão verificar a aprendizagem do aluno em localizar pontos no plano, calcular medida com aplicação do teorema de Pitágoras, ponto médio e notar o quadrante onde se encontra a solução.

3 Notas: 1

Um triângulo equilátero ABC com lados medindo 4 unidades está contido no 1° quadrante, sendo A=(1 , 5) e B=(1 , 1). Quais as coordenadas do ponto C.

OBS: Use o seu caderno para efetuar os cálculos. Para auxilia-lo apresentamos um visualizador do triângulo equilátero.



Escolher uma resposta.

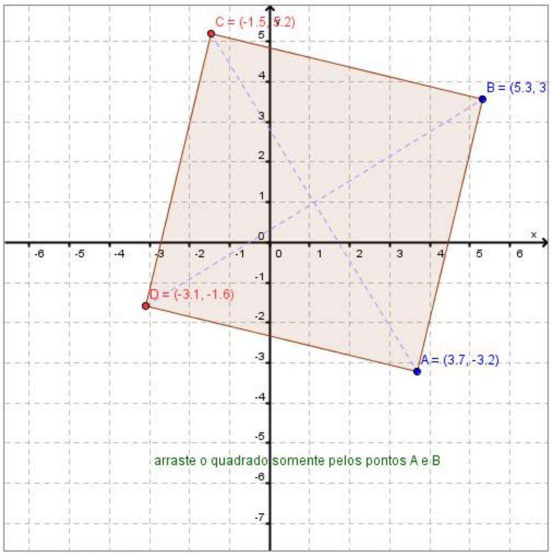
- a. C=$(3, 2\sqrt{3})$
- b. C=$(1+2\sqrt{3}, 3)$
- c. C=$(4\sqrt{3}, 3)$
- d. C=(3 , 3)

Figura 4.73 – Questão aleatória 3 do simulado

4 Notas: 1

Um quadrado ABCD tem o centro na origem do sistema cartesiano com os vértices sobre os eixos coordenados e a medida da diagonal igual a 10 unidades de comprimento. Marque a alternativa correta das coordenadas dos vértices deste quadrado?

Para auxilia-lo segue um visualizador do quadrado. Note que você só pode arrastar os vértices A e B



Escolher uma resposta.

- a.) (0,5); (-5,0); (0,-5) e (5,0)
- b.) (5,5); (-5,5); (-5,-5) e (5,-5)
- c.) $(5\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$; $(-5\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$; $(-5\sqrt{2}, -5\sqrt{2})$ e $(5\sqrt{2}, -5\sqrt{2})$
- d.) (10,0); (0,10); (-10,0) e (0,-10)

Figura 4.74 – Questão aleatória 4 do simulado

Questão 4 – Esperava-se nessa questão avaliar a habilidade do aluno em trabalhar com localização de pontos no plano, de acordo com regras e propriedades, e ainda verificar o conceito de ponto médio como ponto de encontro das diagonais. Como o visualizador permite movimentar somente os pontos A e B e não o centro do quadrado, o estudante deverá perceber que as abscissas ou ordenadas dos pontos extremos das diagonais são simétricas.

Questão 5 – Esperava-se nessa questão avaliar a capacidade do aluno em verificar que as coordenadas de um ponto no plano são únicas, e ainda resolver um sistema linear do primeiro grau.

5
Notas: 1

Sabendo-se que (m + 2n; m - 4) e (3 ; -3) representam o mesmo ponto do plano cartesiano, calcule m - n.

Resposta:

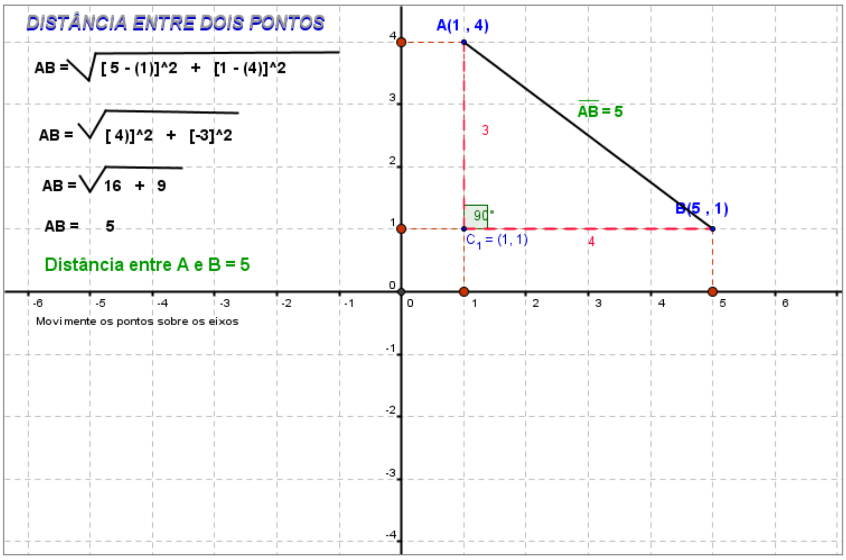
Figura 4.75 – Questão aleatória 5 do simulado

Questão 6 – Esperava-se nessa questão verificar a habilidade do aluno na aplicação da expressão que calcula de distância entre dois pontos no plano ou a aplicação do teorema de Pitágoras, via visualizador.

6
Notas: 1

Marque a alternativa correta que indique qual a distância entre os pontos A=(5 , -1) e B=(2 , 2) .

Para auxilia-lo apresentamos o visualizador abaixo. Arraste os pontos pelas suas coordenadas



Escolher uma resposta.

- a.) $3\sqrt{2}$
- b.) 3
- c.) $2\sqrt{3}$
- d.) $4\sqrt{2}$

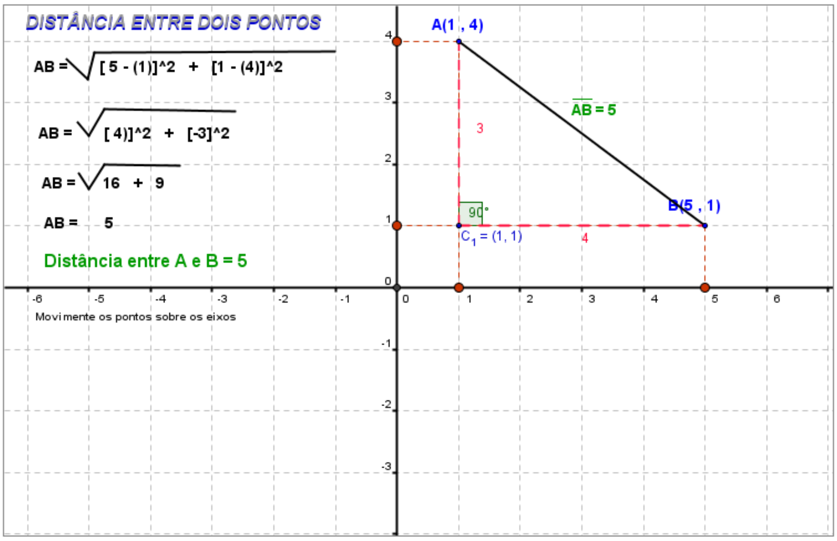
Figura 4.76 – Questão aleatória 6 do simulado

Questão 7 – Trata-se de uma questão cuja solução algébrica demanda conhecimento de equação do segundo grau e ainda propriedades de pontos sobre os eixos coordenados. O visualizador permite verificar o conhecimento do aluno em perceber as duas soluções do problema. Um diferencial neste visualizador e que a movimentação dos pontos no plano e feita através das suas abscissas e ordenadas. O aluno deve notar que o ponto B do plano (que substitui o ponto P) tem ordenada zero.

7
Notas: 1

Marque a alternativa correta que indique um ponto P do eixo x das abscissas cuja distância ao ponto A=(3 , 4) seja igual a 5 unidades .

Para auxilia-lo apresentamos o visualizador abaixo. Arraste os pontos pelas suas coordenadas



Escolher uma resposta.

- a.) P=(0 , 0) ou P=(6 , 0)
- b.) P=(4 , 0) ou P=(2 , 0)
- c.) P=(2 , 0)
- d.) P=(0 , -1)

Figura 4.77 – Questão aleatória 7 do simulado

Questão 8 – Esperava-se nessa questão verificar a habilidade do aluno na aplicação da expressão que calcula o baricentro de um triângulo, como trabalhado durante a execução das lições.

8
Notas: 1

Marque a alternativa correta que indique os valores de α e β para que os pontos A=(α , 7), B=(0 , β) e C= (3 , 1) sejam vértices de um triângulo cujo baricentro é o ponto G=(6 , 11).

Escolher uma resposta.

- a.) $\alpha = 15$ e $\beta = 25$
- b.) $\alpha = 12$ e $\beta = 20$
- c.) $\alpha = 20$ e $\beta = 20$
- d.) $\alpha = 10$ e $\beta = 15$

Figura 4.78 – Questão aleatória 8 do simulado

Questão 9 - Esperava-se nessa questão verificar alguns conceitos ministrados durante a aplicação do ambiente, através de associações.

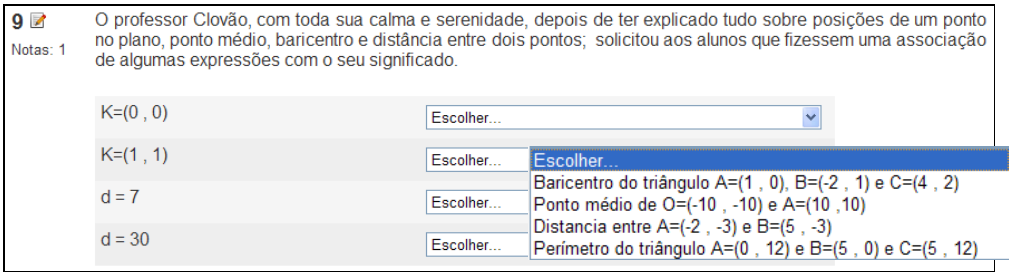


Figura 4.79 – Questão aleatória 9 do simulado

Questão 10 – Esperava-se nessa verificar a habilidade do aluno na aplicação da expressão que calcula a distância entre dois pontos no plano. Neste caso o aluno deve saber a definição de diâmetro e raio de um círculo.

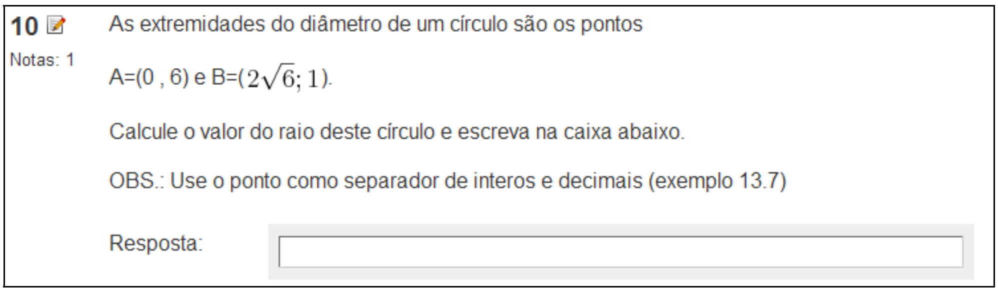


Figura 4.80 – Questão aleatória 10 do simulado

4.2.10 – Coeficiente angular (Teoria 2.1 do Ambiente)

Nesta teoria do ambiente foi explorado o conceito de inclinação de uma reta. Iniciamos com a figura de uma praia, vislumbrando o horizonte, para se observar a ideia de uma reta horizontal, como mostra a figura 4.81. Neste caso foi dito ao estudante que essa inclinação é zero.

Figura 4.81 – Reta no horizonte

A partir desta idéia intuitiva de inclinação nula, o aluno foi questionado sobre como medir outros tipos de inclinação. A partir da figura 4.82, com duas retas inclinadas positivamente, o aluno foi questionado sobre qual delas possui maior inclinação. A ideia foi levar o aluno a intuir que as inclinações estão relacionadas com valores numéricos diferentes.

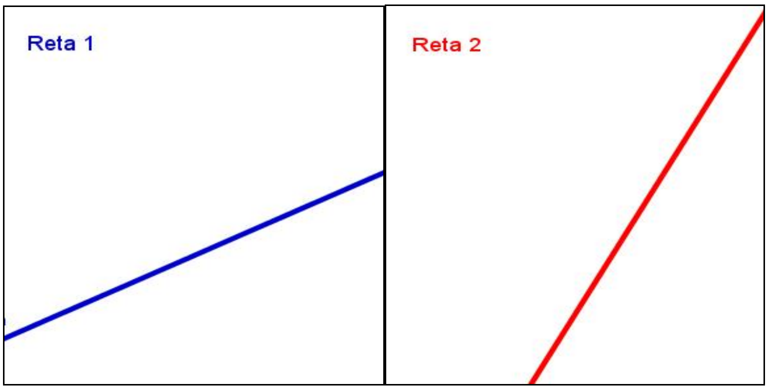


Figura 4.82 – Retas com inclinações diferentes

Para que o aluno pudesse prosseguir na lição uma pergunta foi formulada.

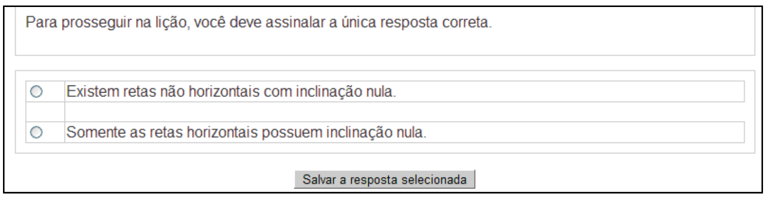


Figura 4.83 – Questão sobre retas horizontais

Após esta introdução intuitiva de inclinação de retas, foi apresentada a definição formal de ângulo de inclinação de uma reta. Para fixar mais esse conceito de inclinação de retas foi elaborado um visualizador sobre esse assunto, como mostra a figura 4.84. No visualizador o aluno pode movimentar os pontos em destaque e verificar que o valor do ângulo de inclinação é sempre maior ou igual a 0° e menor que 180°.

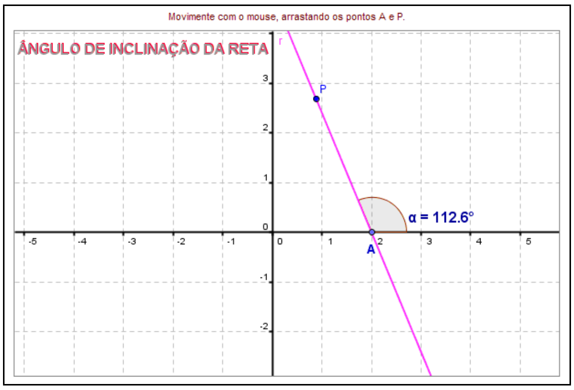


Figura 4.84- Visualizador sobre ângulo de inclinação

Para que o aluno pudesse prosseguir na lição uma questão bem intuitiva sobre ângulo de inclinação foi elaborada como visto na figura 4.85.

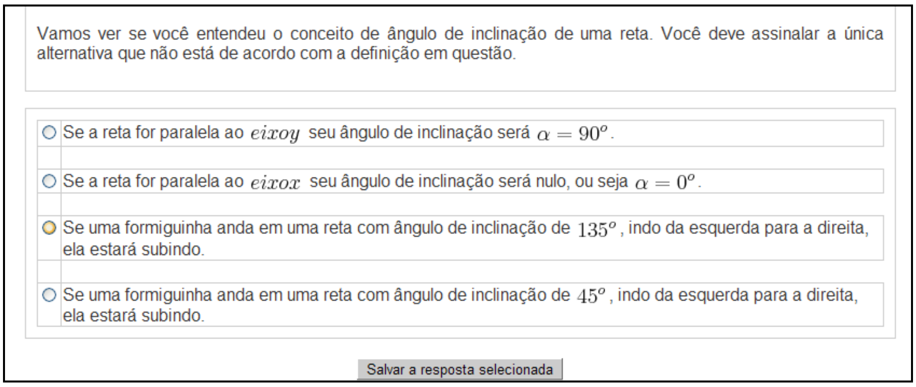


Figura 4.85 Questão sobre ângulo de inclinação

A próxima página desta lição do ambiente inicia-se com um *feedback* positivo sobre a resposta da questão anterior, incentivando o aluno a prosseguir. Após este *feedback* é apresentado ao aluno o coeficiente angular ou inclinação de uma reta como um número real, e não como um ângulo. Para a fixação desse conceito foi construído um visualizador como mostra a figura 4.86. No visualizador o aluno pode arrastar um ponto A com abscissa unitária para cima ou para baixo, observando como se comporta a reta que passa por ele e pela origem, com ênfase no ângulo de inclinação dessa reta. Através de perguntas o aluno é induzido a verificar que, quanto maior o ângulo de inclinação, maior será o valor da ordenada (altura) do ponto em questão, e que esta ordenada está relacionada com o valor do coeficiente angular da reta. A letra **m** foi usada para denominar o coeficiente angular de uma reta.

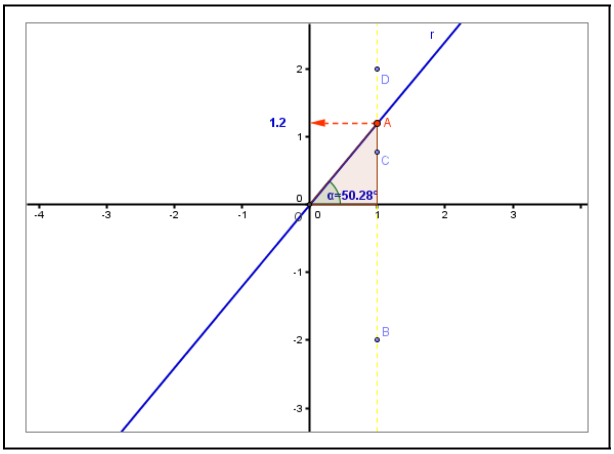


Figura 4.86 – Intuição de coeficiente angular

Para relacionar a altura do ponto A com o ângulo de inclinação a é solicitado ao estudante observar o triângulo retângulo em destaque, com ênfase no cateto oposto ao ângulo de inclinação da reta, para viabilizar a conclusão de que a tangente do ângulo de inclinação é o coeficiente angular da reta. É solicitado ao aluno movimentar o ponto A até o eixo x para observar que a inclinação nula corresponde a uma reta horizontais, como apresentado no início, e portanto **m** = tg 0º = 0. Também foi solicitado movimentar o ponto **A** sobre pontos **B** e **D**, simétricos em relação ao eixo x, para observar a simetria entre os valores dos coeficientes angulares bem como o fato desses ângulos serem suplementares. Para encerrar é solicitado ao aluno movimentar o ponto A e imaginar o valor do coeficiente angular e o ângulo de inclinação no caso do movimento infinito, tanto para cima quanto para baixo, levando-o a concluir que não é possível definir coeficiente angular quando o ângulo de inclinação for reto (90 graus).

Para definir coeficiente angular para uma reta qualquer um novo visualizador foi criado, com mostra a figura 4.87.

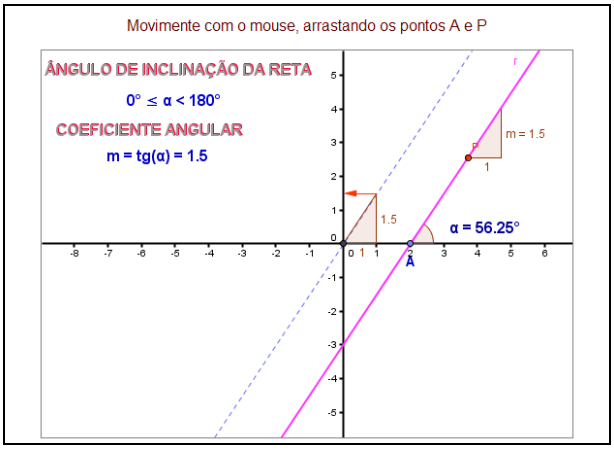


Figura 4.87 – Visualizador conceito de coeficiente angular

O estudante observa nesse visualizador que para qualquer reta do plano sempre existe outra reta paralela passando pela origem, com o mesmo ângulo de inclinação e, portanto, o mesmo coeficiente angular. Assim o coeficiente angular (ou inclinação) de uma reta r ou segmento de reta AB contido na reta é definido com sendo o número real "m" calculado pela tangente do ângulo de inclinação da reta ou do segmento AB, ou seja, m = tga, com a diferente de 90º. O aluno ainda observava claramente no visualizador que, quando a reta não é vertical, temos sempre um triângulo retângulo com o cateto horizontal igual a unidade e o cateto vertical representando o valor do coeficiente angular "m". Mais ainda, o aluno observa que quanto maior for o valor de "m" mais inclinada será a reta, podendo esta inclinação ser negativa ou positiva.

Destacamos que esses visualizadores são muito úteis no entendimento do conceito de coeficiente angular, e podem ser usados independentes do ambiente, em aulas tradicionais.

Finalizando essa teoria, é sugerido ao aluno uma analogia para verificar se o coeficiente angular "m" é positivo ou negativo. A analogia constitui em imaginar uma “formiguinha” movimentando sobre a reta da esquerda para direita: se a formiguinha subir então "m" é positivo; se a formiguinha descer então "m" é negativo.

Para prosseguir, a seguinte questão foi formulada ao aluno.

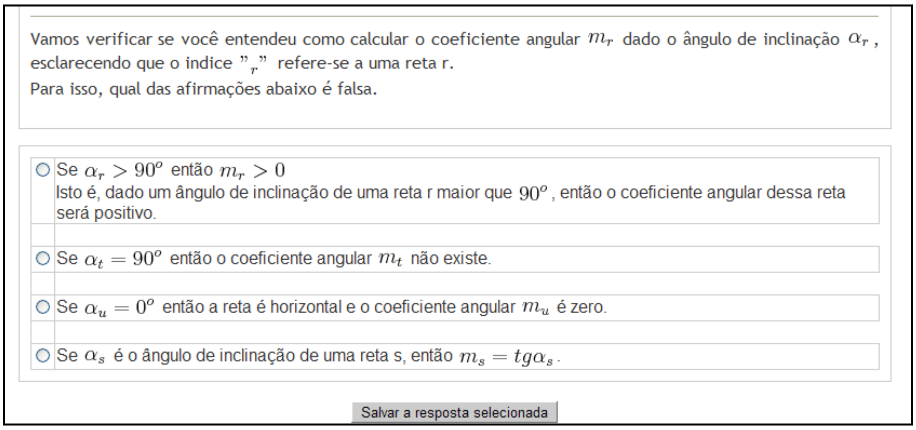


Figura 4.88 – Questão sobre coeficiente angular

Na página subseqüente o estudante vê como encontrar o coeficiente angular de uma reta ou de um segmento a partir de dois pontos, sem conhecer seu ângulo de inclinação. Para introduzir esse conceito é apresentado inicialmente ao aluno que sempre podemos tomar dois pontos distintos A e B em uma reta, e que o coeficiente angular da reta e do segmento AB coincidem. São verificados dois casos separadamente, m > 0 e m < 0, como apresentados nas figuras 4.89 e 4.90.

Para o primeiro caso consideramos um segmento AB com A = (x_A , y_A) e B = (x_B , y_B), não paralelos ao eixo vertical, e α o ângulo de inclinação da reta r que passa por AB.

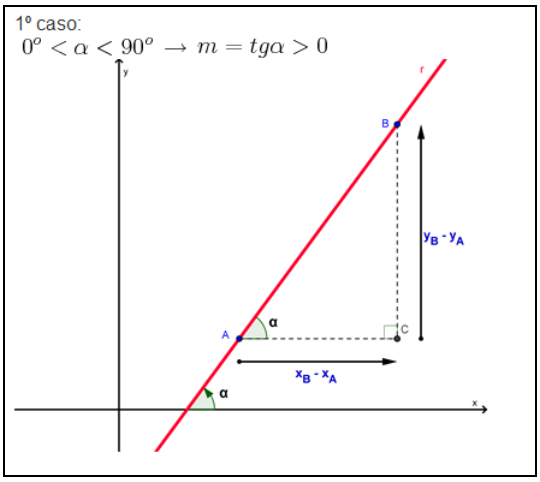


Figura 4.89 – Coeficiente angular positivo

Com o auxilio da trigonometria é mostrado ao estudante através da figura 4.89 que, $m = tg\ \alpha$ e $tg\alpha = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ assim, $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. Para o segundo caso o ângulo de inclinação α está entre 90º e 180º.

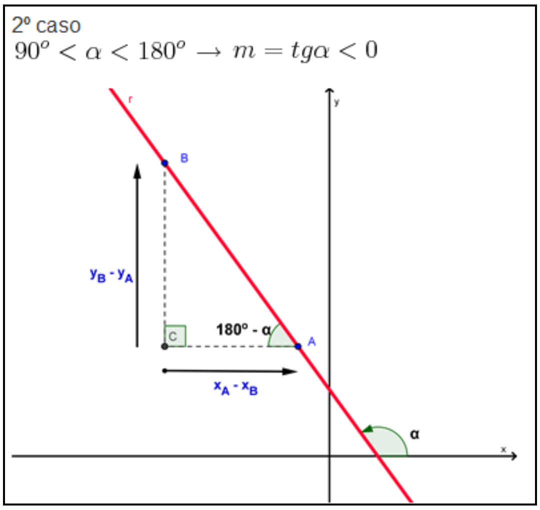


Figura 4.90 – Coeficiente angular negativo

O aluno já viu que nesta situação $m = tg\alpha$ é negativo. É solicitado ao aluno para verificar que o ângulo agudo em destaque no triângulo retângulo é o suplemento de α ou seja, $(180° - \alpha)$, onde o cateto oposto mede $y_B - y_A$, e o cateto adjacente à α mede $x_A - x_B$. Assim, com auxilio da trigonometria, o estudante observa que $tg(180^o - \alpha) = \dfrac{y_B - y_A}{x_A - x_B}$ e portanto $m = tg\alpha = -tg(180^o - \alpha) = -\dfrac{y_B - y_A}{x_A - x_B} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Logo o aluno vê que, para quaisquer que sejam os pontos distintos $A = (x_A , y_A)$ e $B = (x_B , y_B)$ de uma reta não paralela ao eixos y, o valor do coeficiente angular ou declividade ou ainda inclinação é o número real dado por: $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Apresentamos também ao aluno a notação $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, onde $\Delta y = y_A - y_B$ e $\Delta x = x_A - x_B$. Observamos ainda que esta expressão é valida no caso de retas paralelas aos eixo das abscissas. No caso de retas paralelas ao eixo das ordenadas, a expressão em questão é indeterminada, pois o denominador da expressão é nulo. Para que o estudante possa verificar todas as situações descritas acima, o visualizador apresentado na figura 4.91 foi idealizado, onde os pontos A e B podem se movimentar sem restrições.

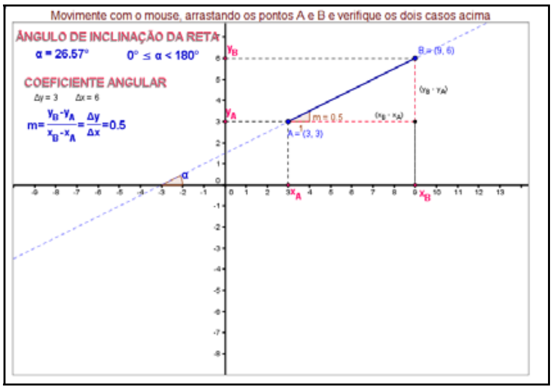


Figura 4.91 – Coeficiente angular por dois pontos

Para prosseguir, a seguinte questão foi formulada ao aluno.

Vamos verificar se você compreendeu o conteúdo desta página.
Para isso marque a alternativa correta.
Dados dois pontos $A = (1, 2)$ e $B = (9, 4)$ seu coeficiente angular m_{AB} será:
(O índice $_{AB}$ refere-se ao segmento AB.)

- ○ $m_{AB} = \frac{2-1}{9-4} = \frac{1}{5}$
- ○ $m_{AB} = \frac{9-4}{2-1} = 5$
- ○ $m_{AB} = \frac{9-1}{4-2} = 4$
- ○ $m_{AB} = \frac{4-2}{9-1} = \frac{1}{4}$

Salvar a resposta selecionada

Figura 4.92 – Questão sobre o cálculo do coeficiente angular

4.2.11- Coeficiente angular (Lição 2.1 do Ambiente)

Na primeira página desta lição o aluno retoma a definição de ângulo de inclinação de uma reta no plano através do visualizador da figura 4.93 sobre ângulo de inclinação.

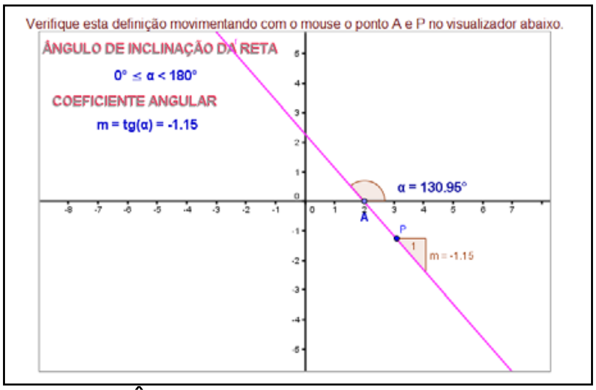


Figura 4.93 – Ângulo de inclinação e coeficiente angular

Em seguida responde a seguinte questão sobre ângulo de inclinação.

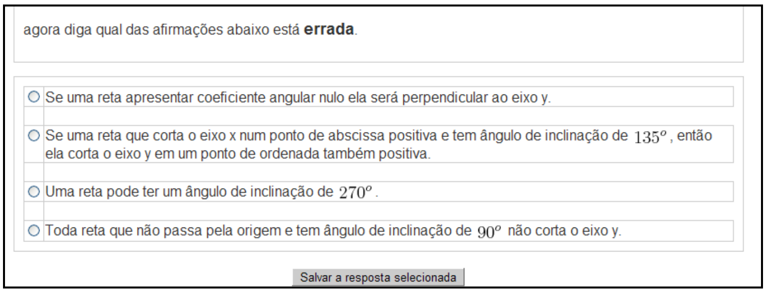


Figura 4.94 – Questão sobre ângulo de inclinação.

A próxima página se inicia com um incentivo por acertar a questão anterior, sendo apresentada ao aluno a seguinte questão para ser respondida com o auxílio do visualizador da figura 4.93.

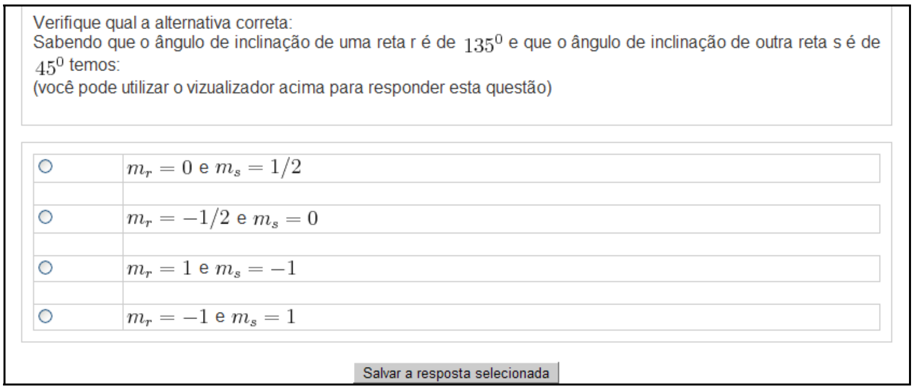


Figura 4.95 – Questão sobre cálculo do coeficiente angular

A lição segue com a apresentação da fórmula para o cálculo do coeficiente angular de uma reta a partir de dois de seus pontos, sendo proposto o seguinte exercício para ser resolvido com auxilio do visualizador da figura 4.91.

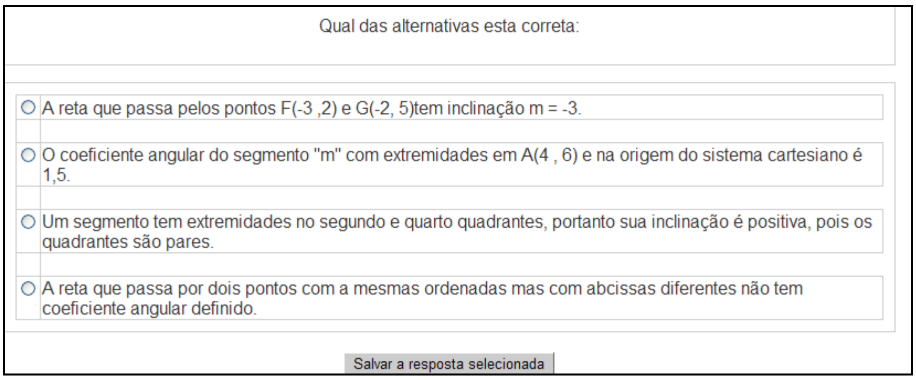


Figura 4.96 – Questão sobre cálculo do coeficiente angular

A última página desta lição apresenta um visualizador com os passos da solução algébrica de um exercício sobre coeficiente angular, como visto na figura 4.97. O aluno tem a oportunidade de acompanhar passo a passo a solução do problema proposto e voltar a qualquer parte da resolução.

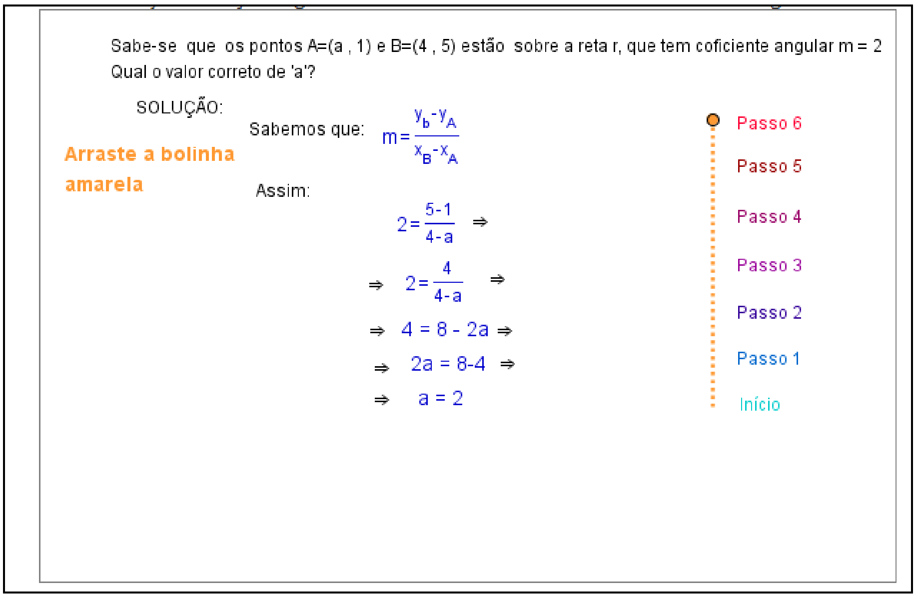


Figura 4.97 – Resolução de um exercício sobre coeficiente angular

A página termina com um exercício (figura 4.98) que pode ser resolvido com auxílio do visualizador na figura 4.99.

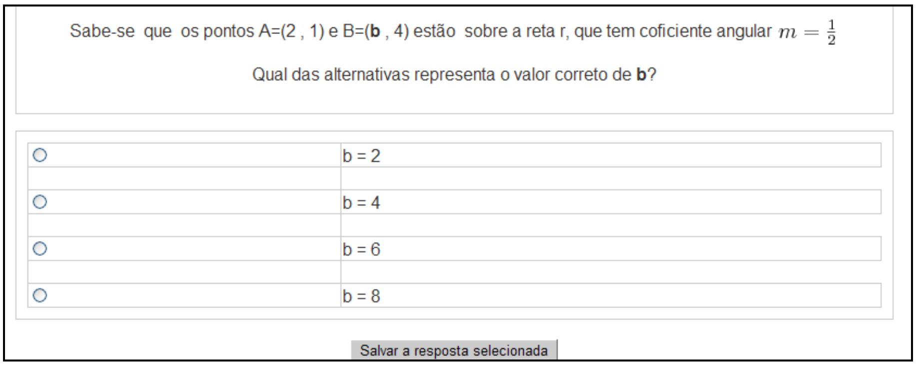


Figura 4.98 – Exercício final da lição sobre coeficiente angular

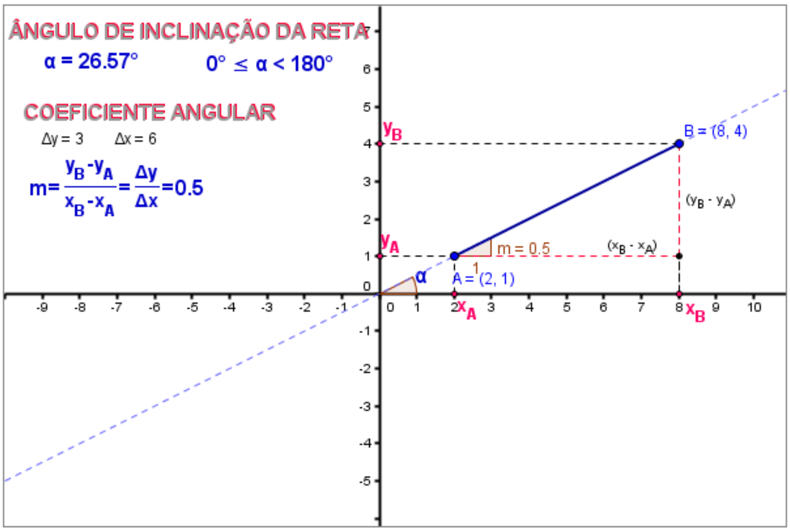


Figura 4.99 – Indicando s solução do exercício onde b = 8

A estratégia nesse caso é localizar o ponto A e arrastar horizontalmente o ponto B até que o valor de m seja 0,5.

4.2.12 - Condição de alinhamento para três pontos (Teoria 2.2 do Ambiente)

No início dessa pagina teórica é enunciado o seguinte axioma de Euclides: *"Dois pontos distintos determinam uma única reta".* Em seguida o aluno é questionado sobre a veracidade do axioma com três pontos, através da seguite pergunta: E três pontos distintos: será que também determinam sempre uma reta? Um visualizador, como mostra a figura 4.100, foi construído para auxiliar o aluno nesse questionamento.

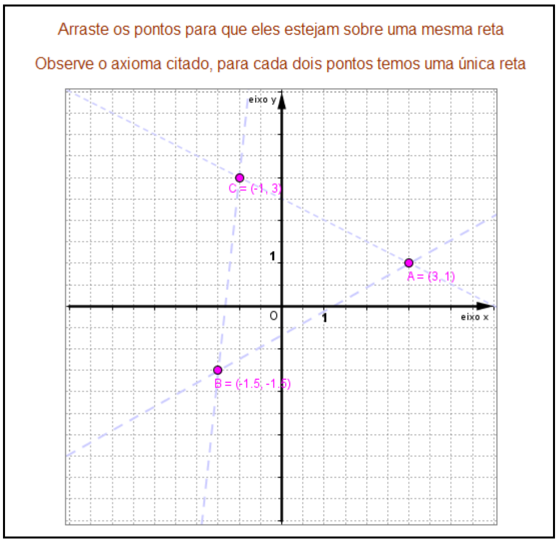


Figura 4.100 – Visualizador sobre três pontos alinhados

O objetivo desta introdução é motivar o aluno a verificar algebricamente quando três pontos A = (x_A , y_A) , B = (x_B , y_B) e C = (x_C , y_C) do mesmo plano estão alinhados. Separamos este estudo, para efeito didático, em dois casos.

<u>Primeiro caso</u> (α = 90°). Foi criado um visualizador, apresentado na figura 4.101, para ilustrar essa situação. No visualizador o aluno observa que a reta que contém os pontos em questão é paralela ao eixo das ordenadas (eixo y), sendo uma reta vertical. Também observa que os pontos têm a mesma abscissa $x_A = x_B = x_C$. É apresentado ao aluno que a recíproca também é verdadeira.

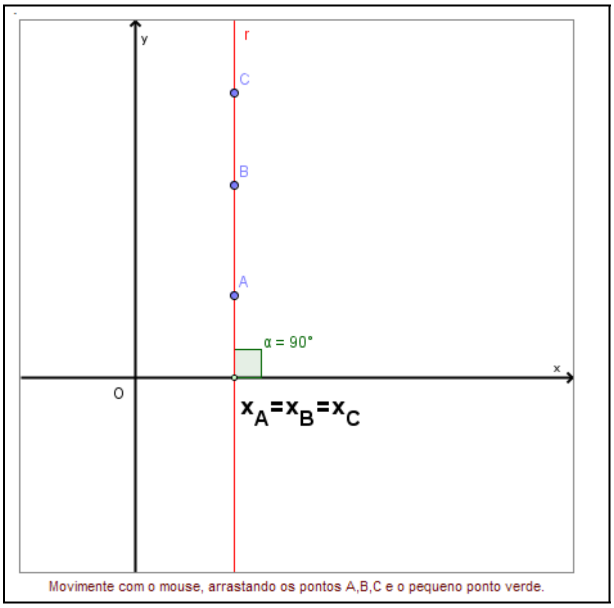


Figura 4.101 – Pontos colineares sobre uma reta vertical

<u>Segundo caso</u> (α ≠ 90°). Neste caso é mostrado ao estudante que reta que contém os pontos não é paralela ao eixo y, sendo sempre possível calcular seu coeficiente angular. Para este caso foi construído o visualizador apresentado na figura 4.102. No visualizador o aluno percebe que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ tem o mesmo ângulo de inclinação α, pois estão sobre uma mesma reta, e portanto possuem o mesmo coeficiente angular $m_{AB}=m_{BC}=\text{tg } \alpha$. Foi também apresentada a recíproca desta afirmação.

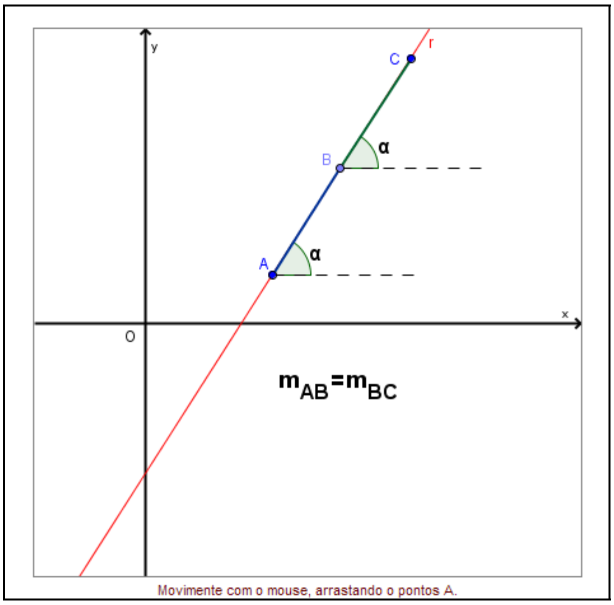


Figura 4.102 – Três pontos alinhados sobre reta não vertical

A seguir um exemplo dessa condição de alinhamento é apresentada, e para encerrar a lição o aluno deve responder corretamente a questão a seguir.

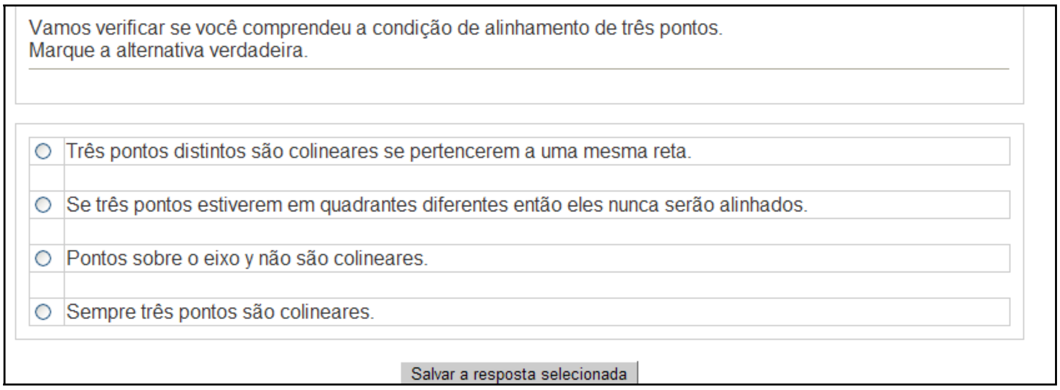


Figura 4.103 – Questão sobre alinhamento de três pontos

4.2.13 - Condição de alinhamento de três pontos (Lição 2.2 do Ambiente)

Nesta lição, após rever conceitos sobre as condições para o alinhamento de três pontos no plano, são apresentados quatro exercícios ao aluno.

O primeiro exercício, dado na figura 4.104, apresenta um visualizador para auxiliar a resolução. A ideia do visualizador é alcançar a solução algébrica a partir da visualização geométrica.

Responda agora algumas questões sobre esse assunto

Quais as coordenadas do ponto C, da bissetriz dos quadrantes impares, sabendo que está alinhado com os pontos $A=(4,5)$ e $B=(4,-3)$.

Aqui está um visualizador para auxilia-lo. Arraste a reta pelo pontinho verde e depois os outros pontos A, B e C.

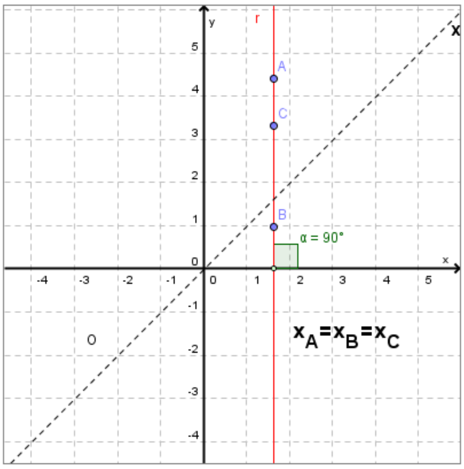


Figura 4.104 – Visualizador para o problema sobre alinhamento de três pontos

- ○ $C=(4,0)$.
- ○ $C=(0,4)$.
- ○ $C=(4,2)$.
- ○ $C=(4,4)$.

Salvar a resposta selecionada

Figura 4.105 – Alternativas da questão sobre alinhamento

No segundo exercício é apresentado uma questão sobre alinhamento de três pontos com auxílio algébrico, conforme vemos na figura 4.106.

Determine o valor e k para que os pontos A=(-2 , 7), B=(-1 , k) e C=(2 , -1) sejam colineares.

Auxilio a solução

Os três pontos serão colineares se existir uma reta que passe por eles. E com o já foi visto $m_{AC}=m_{BC}$, assim:

$$m_{AC}=\frac{-1-7)}{2-(-2)}=-2 \text{ e } m_{BC}=\frac{-1-k}{2-(-1)}$$

logo:

$$\frac{-1-k}{2-(-1)}=-2$$

resolvendo essa equação encontra-se k.

- ○ k = 2
- ○ k = 4
- ○ k = 3
- ○ k = 5

Salvar a resposta selecionada

Figura 4.106 – Questão resolvida sobre alinhamento

No terceiro exercício o exercício anterior é retomado para ser resolvido geometricamente, com auxílio do visualizador na figura 4.107. Com isso o aluno tem a materialização da solução algébrica anterior.

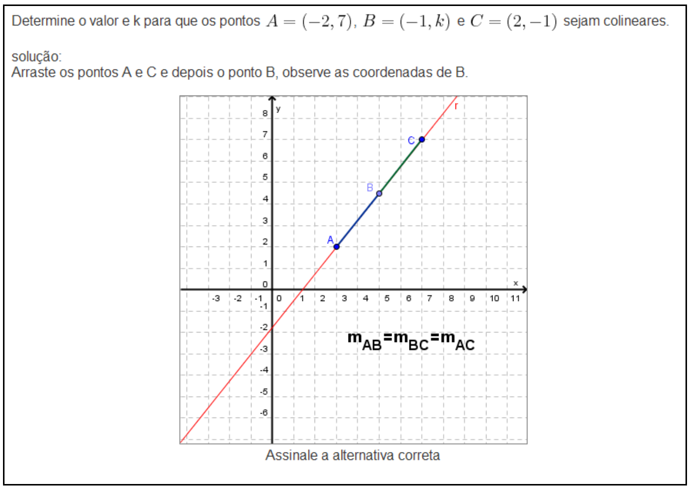


Figura 4.107 – Visualizador para três pontos alinhados

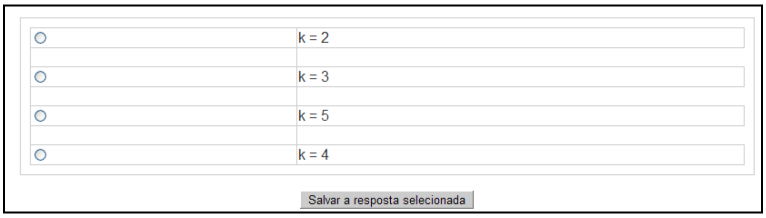


Figura 4.108 – Alternativas da questão sobre alinhamento

Para encerrar, o quarto exercício propõe uma questão com solução algébrica envolvendo alguns conceitos extras de geometria, vista na figura 4.109. A figura desta questão foi gerada no Geogebra.

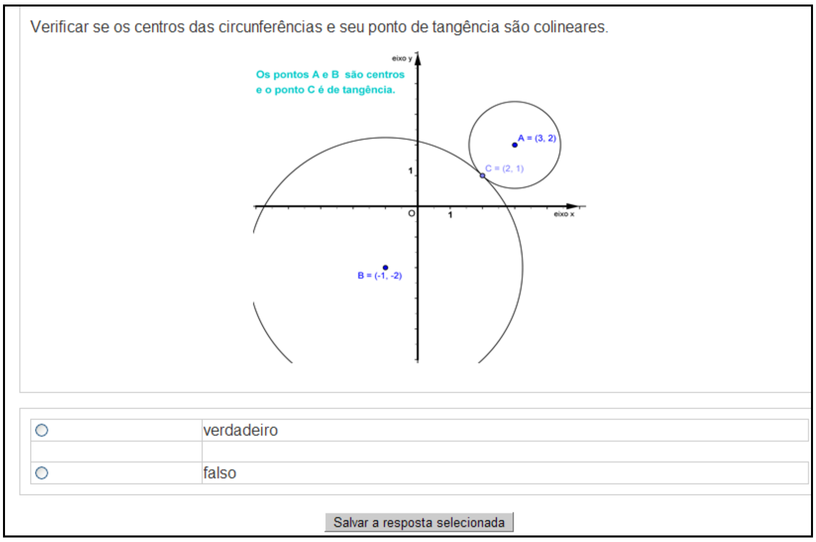


Figura 4.109 – Questão final sobre alinhamento

4.2.14 - Equação de uma reta (Teoria 2.3 do Ambiente)

Como introdução ao estudo das retas, esta teoria do ambiente se inicia conceituando equação de uma reta como uma relação entre as coordenadas x e y dos seus pontos, onde as coordenadas de cada ponto da reta **r** satisfazem essa relação e vice-versa, onde satisfazer essa relação significa encontrar valores de x e y que tornem a relação uma igualdade verdadeira. Em seguida um exemplo de ponto satisfazendo a equação de uma reta é apresentado.

Para encontrar a equação da reta, é solicitado ao aluno que imagine uma reta passando por um ponto A = (x_0 , y_0) com um determinado ângulo de inclinação α em relação ao eixo x, em duas situações distintas: α ≠ 90° e α = 90°. É relembrado ao aluno que o coeficiente angular **m** corresponde à tg α. Um visualizador, apresentado na figura 4.110, auxilia o estudante na visualização dessa reta. No visualizador é possível movimentar o ponto **A** e arrastar o seletor "**m**" modificando seu valor. Assim é possível criar várias retas no plano. Com o movimento do ponto **P** sobre a reta **r,** o aluno observa as coordenadas do ponto restrito à reta.

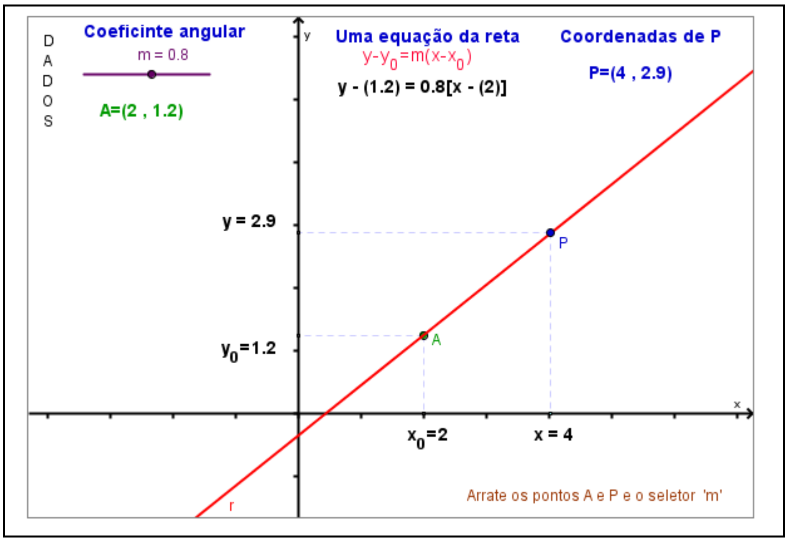


Figura 4.110 – Equação fundamental da reta

Após o uso do visualizador é mostrado ao aluno como encontrar a equação a partir dos pontos A = (x_0 , y_0), P =(x , y) e do coeficiente angular *m*, já que $m = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$ *ou*

$y - y_0 = m(x - x_0)$. O aluno é então informado de que a equação de reta encontrada se denomina "equação fundamental" da reta **r**, ou forma fundamental da equação da reta **r**. Um exemplo analítico com A=(3 , 1) e $m = \sqrt{3}$ é feito. Em seguida é proposto o seguinte exercício para o aluno prosseguir na teoria.

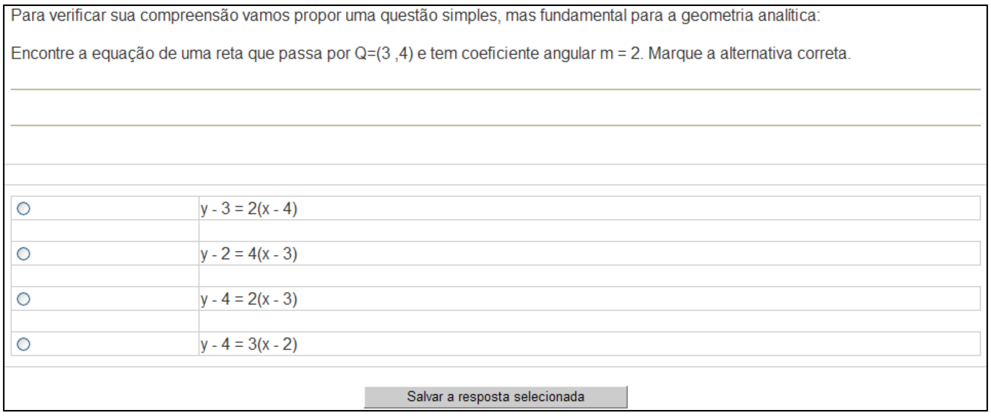


Figura 4.111 – Questão sobre equação fundamental da reta

Para o caso α = 90° é solicitado ao aluno movimentar os pontos A e P do visualizador apresentado na figura 4.112, para a verificação de que as abscissas "x" de A e P são sempre as mesmas.

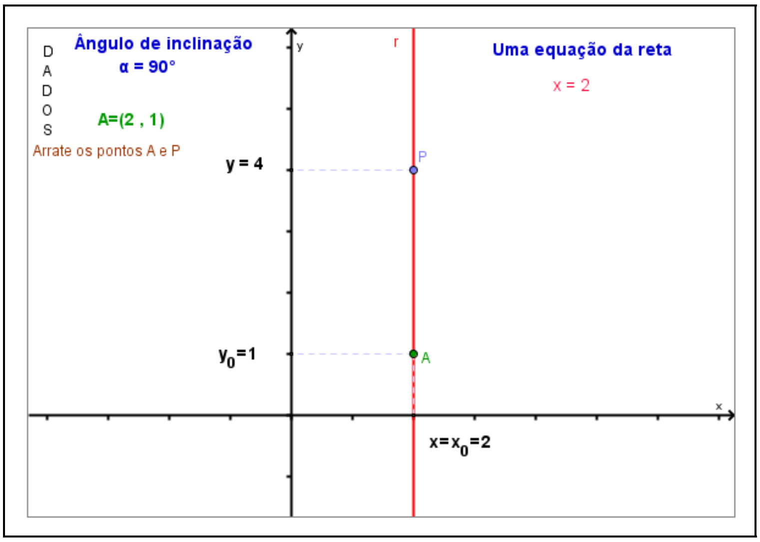


Figura 4.112 – Visualizador sobre equação da reta vertical

Após essa manipulação é solicitado ao aluno imaginar como seriam as coordenadas de um ponto qualquer P=(x , y) da reta em questão, no intuito de chegar a conclusão de que as abscissas de A=(x_0 , y_0) e P=(x , y) são iguais, e portanto, $x = x_0$.

As seguintes observações foram feitas:

- Não existe equação fundamental para retas verticais, pois o coeficiente angular m não é definido.
- Para m = 0, a reta será horizontal e, sua equação fundamental se reduz a $y = y_0$.
- A equação do eixo x é: y = 0. (pois a reta é horizontal passando por O(0,0))
- A equação do eixo y é: x = 0. (pois a reta é vertical passando por O(0,0))

Para encerrar o seguinte exercício é proposto.

Apresentamos uma questão bem facil para verificar sua aprendizagem nesta página:

Marque a alternativa abaixo que representa a reta de equação $x = \sqrt{5}$.

- ○ Uma reta paralela ao eixo x das abscissas, passando pela ordenada $\sqrt{5}$.
- ○ Uma reta com coeficiente angular zero.
- ○ Uma reta com coeficiente angular $m = \sqrt{5}$.
- ○ Uma reta paralela ao eixo y das ordenadas, passando pela abscissa $\sqrt{5}$.

Salvar a resposta selecionada

Figura 4.113 – Questão sobre equação fundamental da reta vertical

4.2.15 - Equação de uma reta (Lição 2.3 do Ambiente)

Nesta lição são propostas algumas questões para o estudo da equação fundamental da reta.

Na primeira questão os passos para a solução de uma tal equação são colocados como alternativas à resposta, indicando a forma algébrica da solução.

Obter a equação da reta que passa pelo ponto P=(1 , 5) e tem coeficiente angular igual a 2.

- ○ $y - 5 = x - 1 \Longrightarrow y = 5 + x - 1 \Longrightarrow y = x + 4$
- ○ $y - 5 = 2\,(x - 1) \Longrightarrow y = 5 + 2x - 2 \Longrightarrow y = 2x + 3$
- ○ $y - 1 = 2\,(x - 5) \Longrightarrow y = 1 + 2x - 10 \Longrightarrow y = 2x - 9$
- ○ $y - 5 = 1\,(x - 2) \Longrightarrow y = 5 + x - 2 \Longrightarrow y = x + 3$

Salvar a resposta selecionada

Figura 4.114 – Questão sobre equação fundamental da reta.

Na segunda questão o mesmo exercício é aproveitado para fazer o aluno verificar se um ponto pertence a uma reta. Além disso, com auxílio de um visualizador, é solicitada a visualização geométrica do problema.

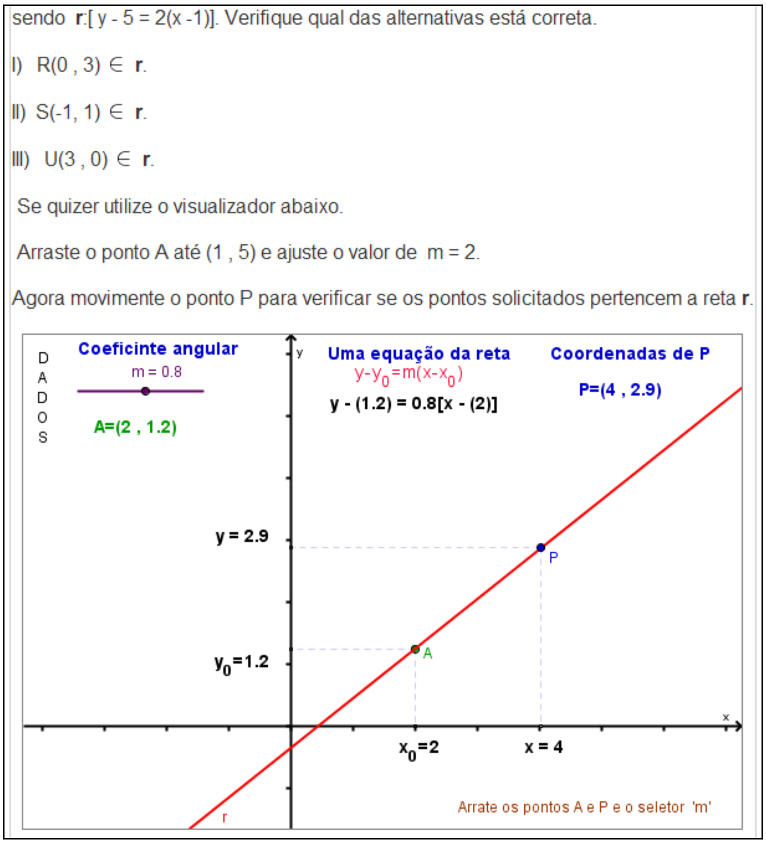


Figura 4.115 – Questão sobre verificação de ponto pertencente a uma reta.

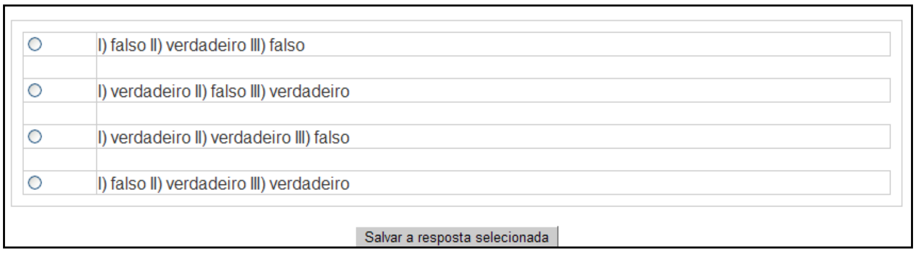


Figura 4.116 – Alternativas de uma questão sobre verificação de ponto pertencente a uma reta.

Na terceira questão o objetivo é encontrar a equação de uma reta que passa por dois pontos dados. Após a apresentação da solução algébrica para a equação da reta que passa por A=(1,2) e B=(5,4), é solicitado ao aluno, com auxílio de visualizador, resolver o problema para os pontos A=(1,3) e B=(2,5).

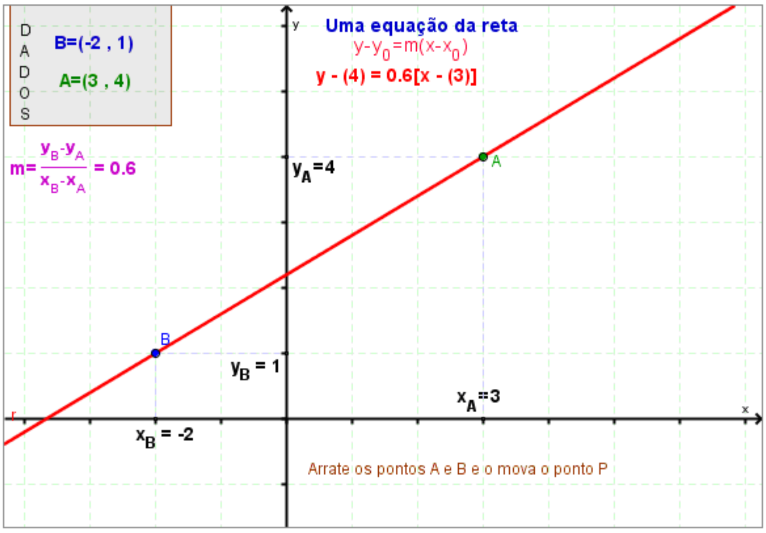


Figura 4.117 – Visualizador sobre reta por dois pontos.

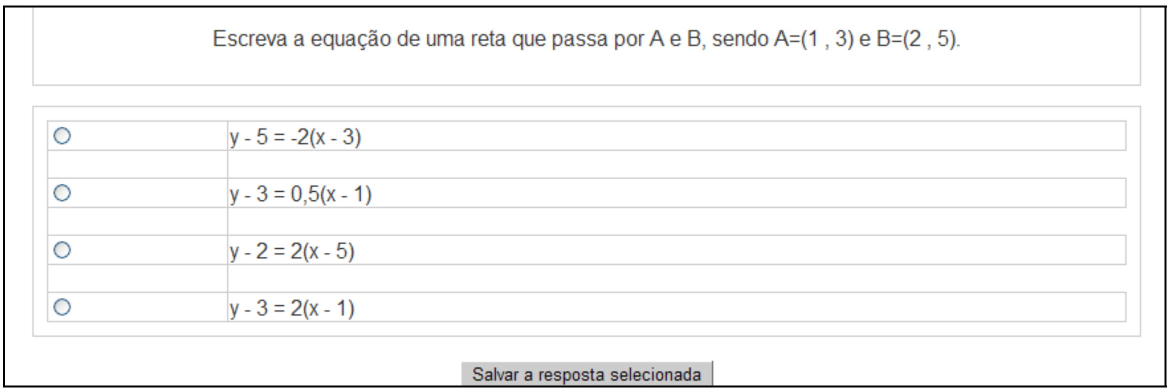


Figura 4.118 – Questão sobre equação de reta por dois pontos.

Na quarta questão é trabalhado o posicionamento de retas paralelas aos eixos coordenados, com auxílio de visualizador da Figura 4.117, na forma de escolha de opções.

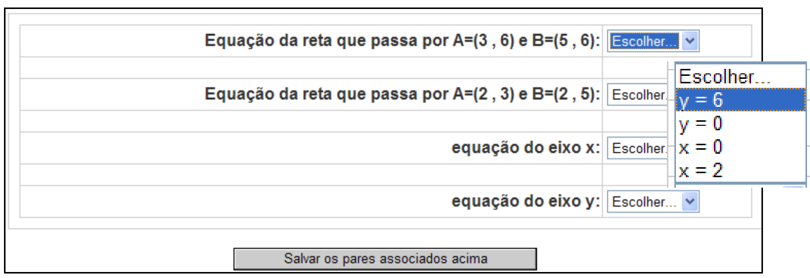


Figura 4.119 – Questão sobre equação de retas paralelas aos eixos cartesianos.

Para encerrar, na quinta questão é proposto o seguinte exercício.

(UFES) O valor de k para que a equação kx - y - 3k + 6 = 0 represente a reta que passa pelo ponto (5 , 0) é:

- ○ 3
- ○ -9
- ○ 9
- ○ -6
- ○ -3

Salvar a resposta selecionada

Figura 4.120 – Questão sobre pontos pertencentes a reta.

4.2.16 - FORMAS DA EQUAÇÃO DA RETA (Teoria 2.4 do ambiente)

Nesta teoria do ambiente são apresentadas outras formas da equação da reta que possuem particularidades importantes em sua representação.

FORMA REDUZIDA

É dito ao aluno que, neste caso, o ponto (0,**q**) onde a reta r corta o eixo y é conhecido, bem como seu coeficiente angular **m**. Em visualizador específico é possível movimentar estes dois dados para obter a equação reduzida.

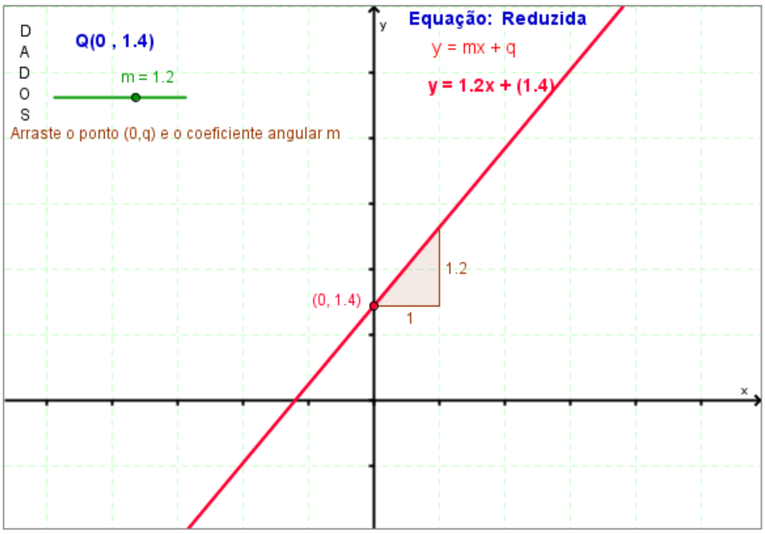


Figura 4.121 – Visualizador para forma reduzida da equação da reta

No desenvolvimento da teoria a equação y = m x + q é obtida a partir da forma fundamental y - q = m (x - 0) isolando y, reforçando que essa nova forma de representação de uma reta é chamada de **equação reduzida** ou **forma reduzida**, sendo o valor **q** denominado de

coeficiente linear correspondente à ordenada do ponto (0 , **q**) onde a reta corta o eixo y. São apresentados também dois exemplos, sendo que um deles mostra a forma de se obter o coeficiente angular isolando y na equação da reta. No final da página, é colocada a seguinte questão.

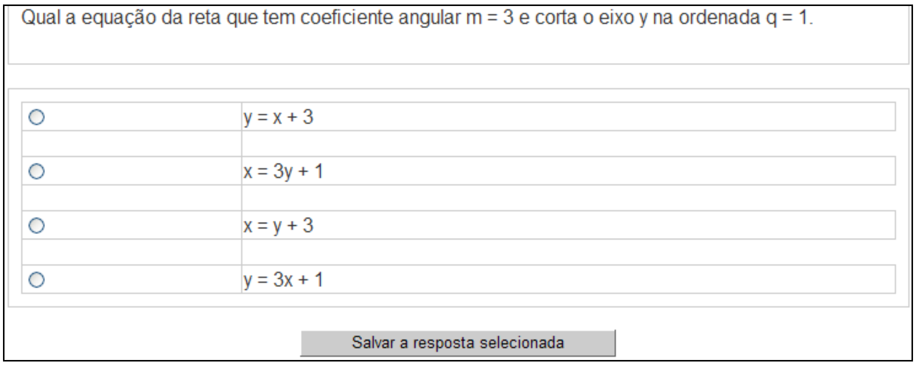


Figura 4.122 – Questão sobre equação reduzida da reta

FORMA GERAL

É apresentado ao aluno a equação da reta na sua forma geral ax + by + c = 0 e como obtê-la a partir de dois de seus pontos. É ressaltado também que agora temos uma equação de reta com três coeficientes **a**, **b** e **c**.

Um visualizador permite a visualização das diferentes formas de equação de reta que passam por dois pontos, como pode ser visto na figura 4.123. No visualizador é possível movimentar os pontos A e B bem como escolher a forma da equação da reta em questão, percebendo-se que a reta é a mesma, independente da forma da equação escolhida.

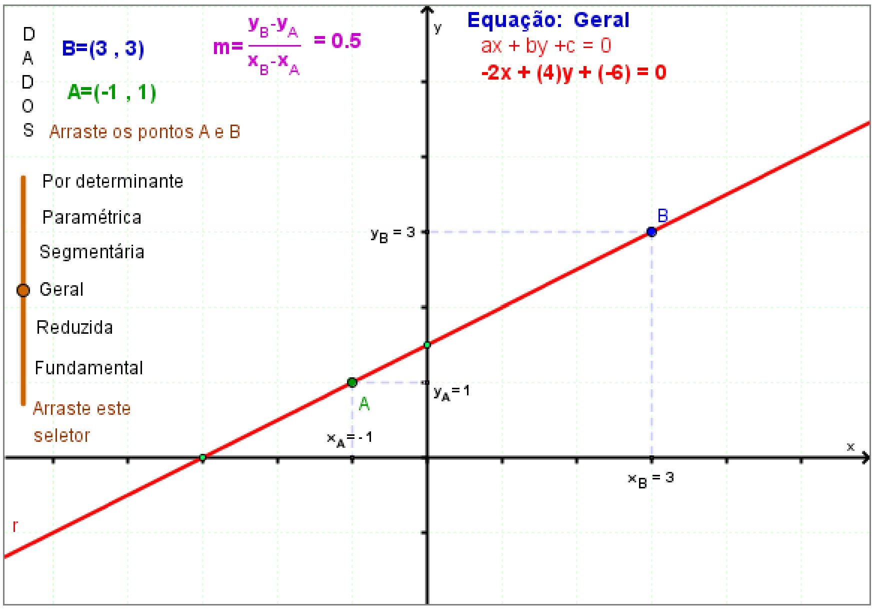


Figura 4.123 – Visualizador para varias formas da equação da reta

É também apresentado o caso da equação geral quando as retas forem verticais, com manipulação no visualizador dado na figura 4.124.

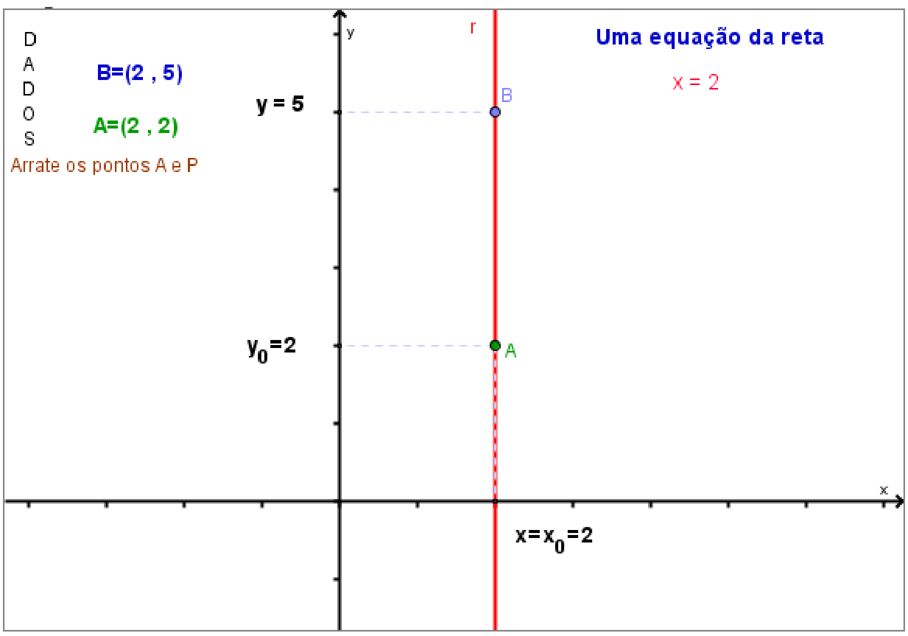


Figura 4.124 – Visualizador para equação da reta vertical.

A teoria com a forma geral de uma reta segue com a resolução dos exemplos a seguir e é finalizada com o exercício mostrado na figura 4.125.

- Exemplo 1- Qual a equação da reta na forma geral que passa por A=(1, -3) e B=(5 , 3).

- Exemplo 2 - Qual a equação da reta na forma geral que passa por A=(3, -3) e B=(3 , 5).
- Exemplo 3 - Transformar a equação 3x + 5y -4 = 0, na forma reduzida e encontrar o seu coeficiente angular m.

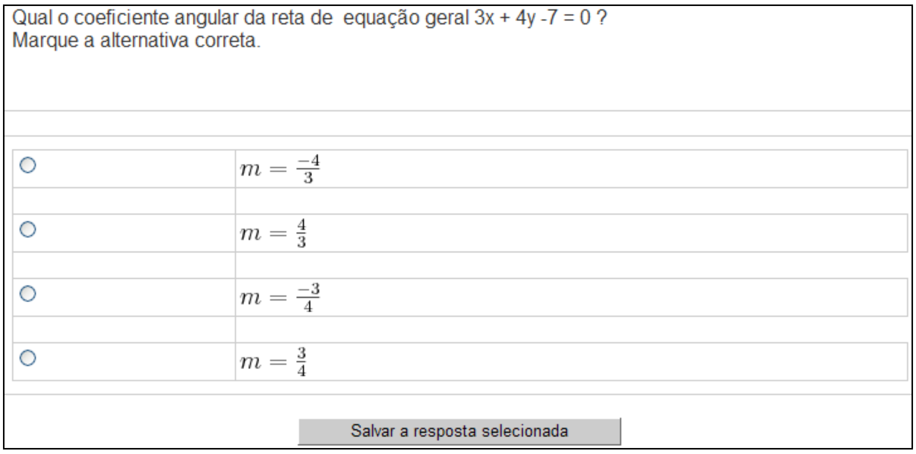


Figura 4.125 – Questão sobre equação geral da reta

FORMA SEGMENTÁRIA

Nesta página do ambiente é apresentada a equação da reta na forma segmentária, ressaltando que esta forma de equação é prática quando são conhecidos os pontos onde a reta corta os eixos coordenados, isto é, o valor da abscissa *x* do ponto onde a reta corta o eixo *x* e da ordenada *y* do ponto onde a reta corta o eixo *y*. A equação segmentária $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ da reta é obtida a partir da equação fundamental e dos pontos (p , 0) e (0 , q), com p ≠0 e q≠0. Um visualizador específico para este caso permite a manipulação dos pontos sobre os eixos coordenados e observação da reta com sua equação segmentária.

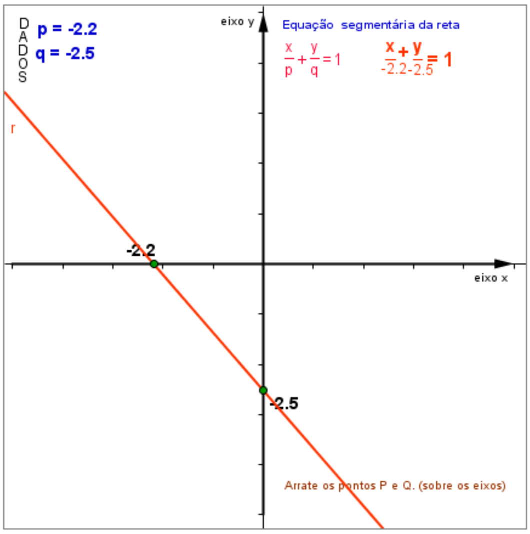


Figura 4.126 – Visualizador para equação da reta na forma segmentária

A teoria com a forma segmentária da equação de uma reta é finalizada com a proposição da seguinte questão.

Marque a alternativa correta que corresponde a equação da reta que corta o eixo x em x=5 e o eixo y em y=2.

- ○ $\frac{x}{2}-\frac{y}{5}=1$
- ○ $\frac{x}{2}+\frac{y}{5}=1$
- ○ $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}=1$
- ○ $\frac{x}{5}-\frac{y}{2}=1$

Figura 4.127 – Questão sobre equação segmentária da reta

EQUAÇÃO PARAMÉTRICA

Nesta página do ambiente é apresentada a equação paramétrica de uma reta, ressaltando que neste caso as variáveis x e y da equação da reta estão em função de uma terceira variável, chamada de parâmetro. É apresentado $x = f(t)$ e $y = g(t)$, onde t é um parâmetro real e f,g são funções específicas, sendo a reta formada por todos os pontos (x , y) que podem ser obtidos a partir da variação do parâmetro t. As equações paramétricas da reta são exibidas na forma de um sistema

$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ $t \in \Re$, e é solicitado o uso do visualizador da figura 4.123 com a escolha da opção "paramétrica". Após a resolução de dois exemplos a é sugerida a seguinte questão.

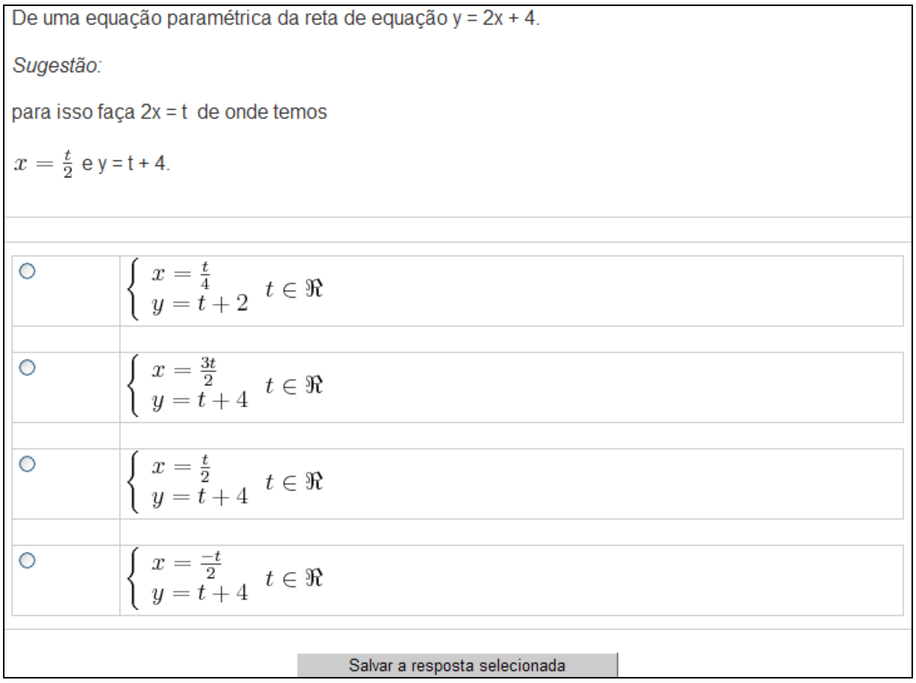


Figura 4.128 – Questão sobre equação paramétricas da reta

FORMA DETERMINANTE

Nesta página do ambiente é apresentada a teoria sobre a forma determinante para a equação de uma reta, ressaltando a necessidade do conhecimento prévio do de como calcular um determinante de ordem 3. A partir de dois pontos distintos A=(x_A , y_A) e B=(x_B , y_B) chega-se ao cálculo do determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

a partir da equação fundamental da reta que passa por A e B, e é solicitado o uso do visualizador da figura 4.123 com a escolha da opção "por determinante". Após resolver um exemplo, a seguinte questão é proposta para ser resolvida algebricamente ou com o auxílio do visualizador.

Qual das alternativas abaixo é **falsa**. (Use o visualizador acima, arraste os pontos A e B para os valores dados e movimente o seletor para cada uma das formas de equação pedida)

A reta r passa por A=(2 , 1) e B=(3 , 4) tem a sua equação dada por:

- ○ $\begin{cases} x = t \\ y = t - 5 \end{cases} \quad t \in \Re$ (forma paramétrica)
- ○ y = 3x - 5 (equação reduzida)
- ○ -3x + y + 5 = 0 (equação geral)
- ○ y - 1 = 3(x - 2) (forma fundamental)

Figura 4.129 – Questão sobre formas de equação da reta

4.2.17 - Formas da equação da reta (Lição 2.4 do Ambiente)

Nesta lição sobre as formas de equação de uma reta são apresentas ao aluno várias questões, após uma revisão teórica sobre cada forma.

EQUAÇÃO REDUZIDA

É solicitado o uso do visualizador da figura 4.121 para recordar como se comporta uma equação na forma reduzida. É então apresentada a solução da questão vista na figura 4.130 e, em seguida, a questão na figura 4.131 é colocada para prosseguimento da lição.

Qual é o coeficiente angular da reta de equação 3x - 4y + 7 = 0.
<u>Resolução:</u>
Basta determinar a forma reduzida da equação da reta isolando a ordenada y. Para isso vamos primeiramente dividir toda equação por 4.

$$\tfrac{3}{4}x - \tfrac{4}{4}y + \tfrac{7}{4} = 0$$

assim,

$$\tfrac{3}{4}x - y + \tfrac{7}{4} = 0$$

isolando y vem

$$y = \tfrac{3}{4}x + \tfrac{7}{4} \quad \text{(forma reduzida)}$$

como o coeficiente angular é o número que multiplica a abscissa x, temos

$$m = \tfrac{3}{4}.$$

Figura 4.130 – Exemplo de aplicação da forma reduzida da equação da reta

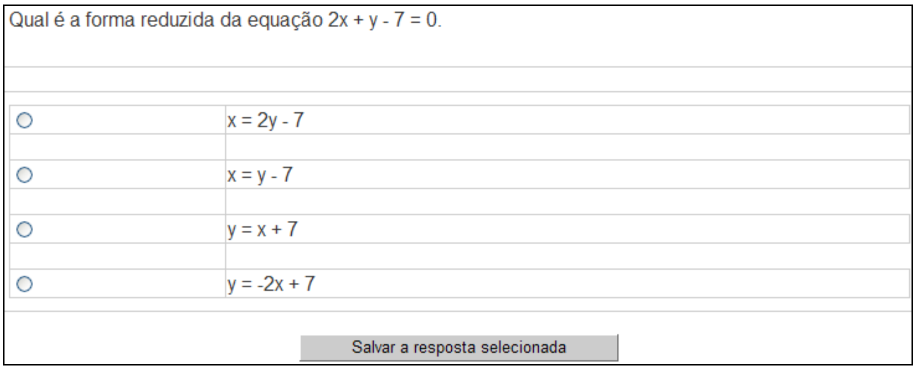


Figura 4.131 – Questão sobre a forma reduzida da equação da reta

EQUAÇÃO GERAL

A pagina se inicia com a resolução algébrica do problema “Qual a equação geral da reta que passa pelos pontos A=(1 , 2) e B=(2 , 6)?“ sendo solicitado em seguida a verificação do resultado no visualizador da figura 4.123. Para prosseguimento na lição é apresentado a questão a seguir para ser resolvida algebricamente ou com auxílio de visualizador.

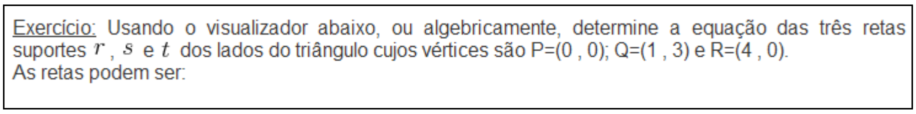


Figura 4.132 – Questão sobre a forma geral da equação da reta

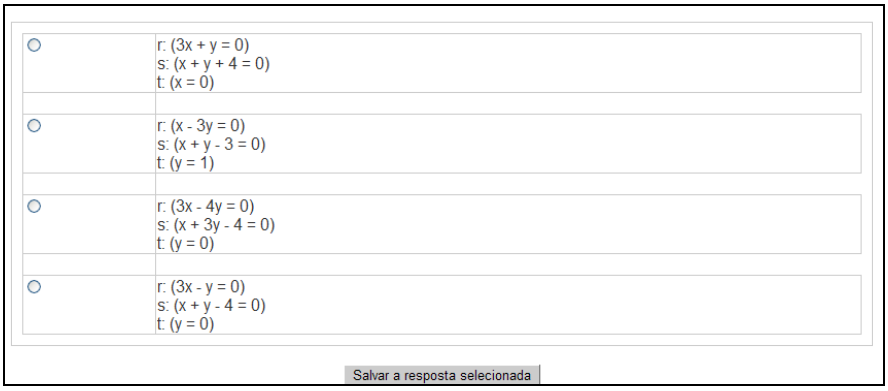


Figura 4.133 – Alternativas da Questão sobre a forma geral da equação da reta.

EQUAÇÃO SEGMENTÁRIA

A página se inicia com um *feedback* positivo sobre a questão da página anterior e uma revisão sobre forma segmentária. É então proposta a seguinte questão.

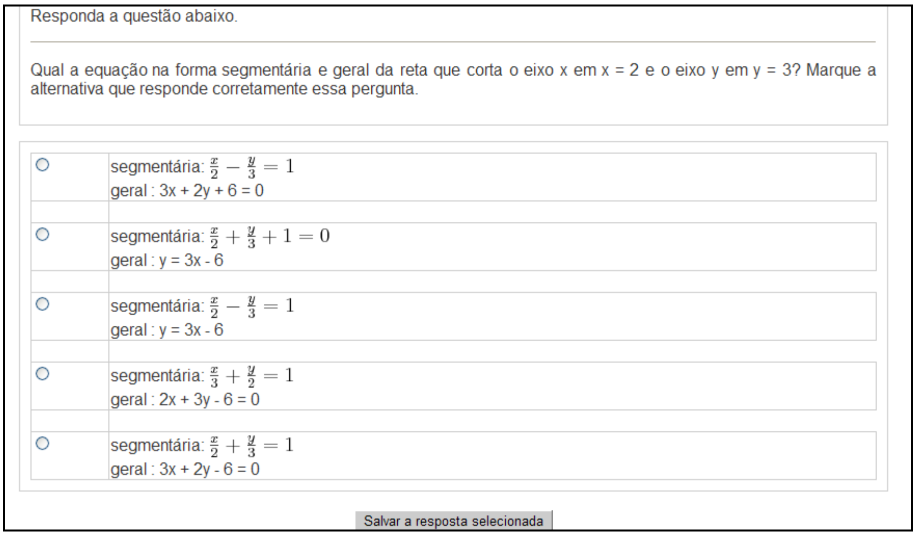


Figura 4.134 – Questão sobre a forma segmentária da equação da reta

FORMA PARAMÉTRICA

Nesta página da lição um exercício lúdico, dado na figura 4.135 e 4.136, é sugerido, incentivando a procura de solução em visualizador específico.

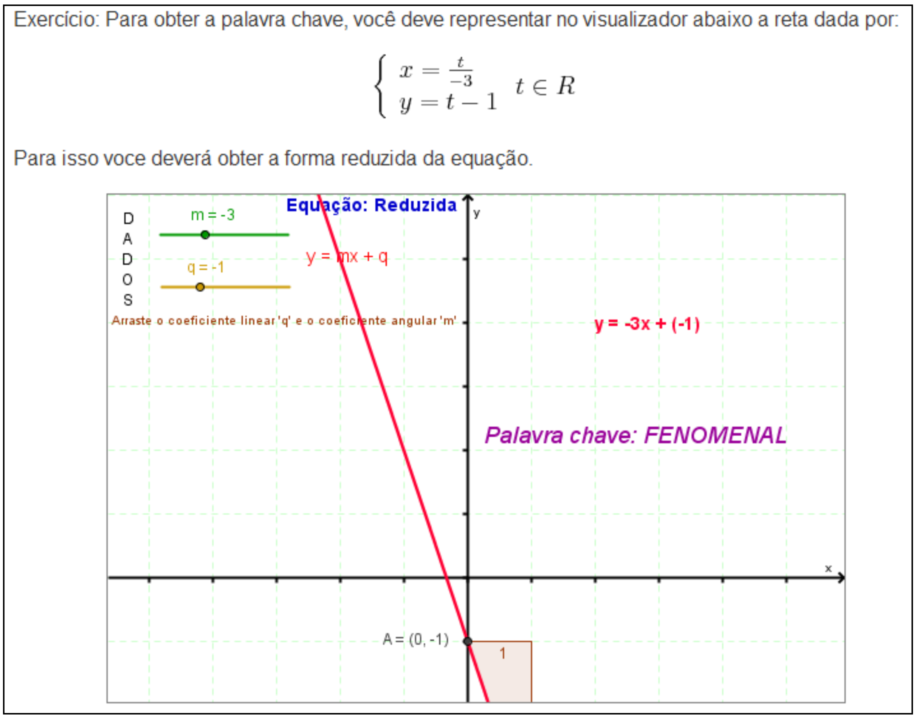


Figura 4.135 – Questão sobre a forma paramétrica da equação da reta

- ORIGINAL
- FENOMENAL
- GENIAL
- LEGAL

Salvar a resposta selecionada

Figura 4.136 – Alternativas da Questão sobre a forma paramétrica da equação da reta.

FORMA DETERMINANTE

Nesta página da lição, após uma revisão sobre forma de determinante, a seguinte questão é proposta com a possibilidade de uso do visualizador da figura 4.123.

Encontre o coeficiente angular 'm' , o coeficiente aliner 'q' e monte a equação na forma do determinante da reta que passa por A=(3 , 5) e B=(-1 , 1). Qual alternativa resolve o problema?

Após resolver algebricamente veja a solução no visualizador, arrastando convenientemente o seletor até as formas de equação da reta .

- $$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$
  m = -1 e q = 2
- $$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$
  m = -1 e q = 2
- $$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$
  m = 1 e q = -2
- $$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$
  m = 1 e q = 2

Figura 4.137 – Questão sobre a forma de determinantes da equação da reta.

4.2.18 - Posições relativas de duas retas (Teoria 2.5 do ambiente)

Esta página de teoria se inicia com um questionamento sobre as posições relativas entre duas retas *r* e *s* no plano cartesiano. Da geometria sabemos que essas retas podem ser:

r e *s* concorrentes $\Leftrightarrow$ um único ponto comum;

r e *s* e paralelas $\Leftrightarrow$ nenhum ponto comum;

r e *s* e coincidentes $\Leftrightarrow$ infinitos ponto comum.

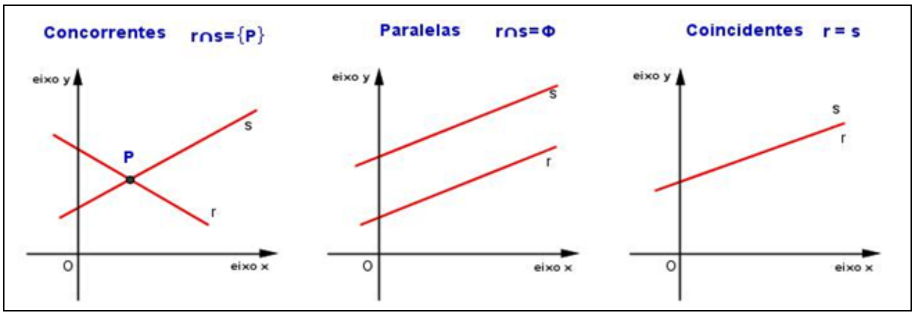


Figura 4.138 – Posições de duas retas no plano

Para determinar algebricamente as posições relativas de duas retas no plano são utilizadas a forma reduzida e forma geral.

I) FORMA REDUZIDA

É solicitado ao aluno imaginar duas retas r e s na forma reduzida: $r : y = m_r x + q_r$ e $r : y = m_s x + q_s$. Através de um visualizador, dado na figura 4.139, pergunta-se: arrastando os seletores você tem as várias retas na forma reduzida, arraste os dois coeficientes m_r e m_s para um mesmo valor e diga que você observa?

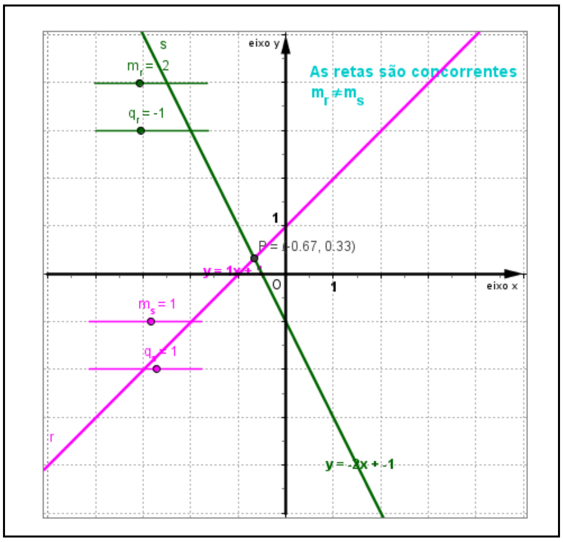


Figura 4.139 – Visualizador das posições de duas retas no plano na forma reduzida

O aluno observa que as retas são paralelas e este fato é explicado. Os demais casos são apresentados e demonstrados, sempre com exemplos e solicitando a verificação no visualizador. Para prosseguimento é proposta a seguinte questão.

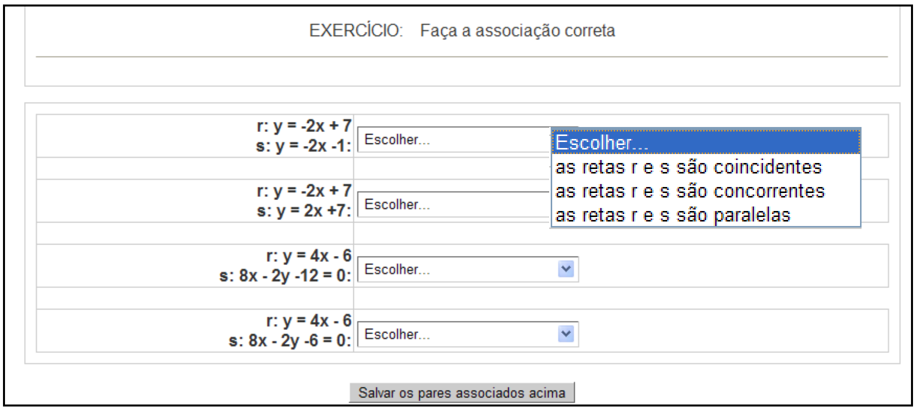


Figura 4.140 – Questão sobre posições de duas retas no plano na forma reduzida

II) FORMA GERAL

É apresentada a forma geral de duas retas r e s como segue: $r: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $s: a_2x + b_2y + c_2 = 0$, que são reduzidas a $r: y = -\frac{a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1} = 0$ e $s: y = -\frac{a_2}{b_2}x - \frac{c_2}{b_2} = 0$. É feito então o estudo e obtenção das condições que determinam a posição relativa entre essas retas, sempre verificando os fatos no visualizador 4.141, conforme sequência a seguir:

$m_r = -\frac{a_1}{b_1}, \quad q_r = -\frac{c_1}{b_1}, \quad m_s = -\frac{a_2}{b_2}, \quad q_s = -\frac{c_2}{b_2}$

II-1) *r* <u>e</u> *s* <u>concorrentes</u> $\Leftrightarrow \quad m_r \neq m_s$. Então: $-\frac{a_1}{b_1} \neq -\frac{a_2}{b_2}$, e $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

II-2) *r* <u>e</u> *s* <u>coincidentes</u> $\Leftrightarrow \quad m_r = m_s \quad e \quad q_r = q_s$. Então $-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}$ e $-\frac{c_1}{b_1} = -\frac{c_2}{b_2}$,

portanto $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ e $\frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, logo $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

II-3) *r* <u>e</u> *s* <u>paralelas</u> $\Leftrightarrow \quad m_r = m_s \quad e \quad q_r \neq q_s$. Então $-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}$ e $-\frac{c_1}{b_1} \neq -\frac{c_2}{b_2}$,

portanto $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ e $\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, logo $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.

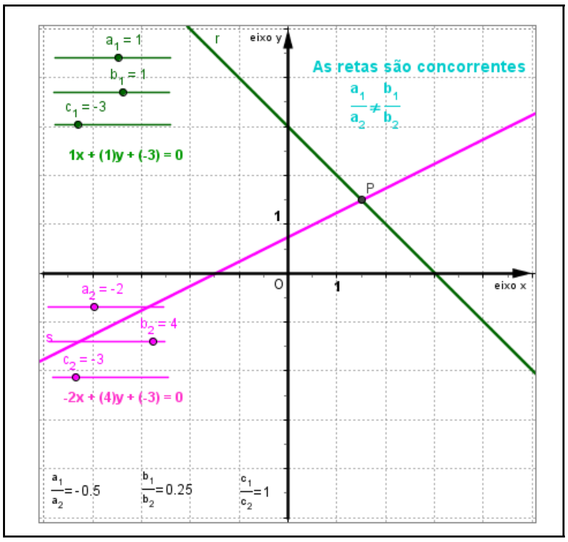


Figura 4.141 – Visualizador das posições de duas retas no plano na forma geral

Com o recurso dos visualizadores é possível enxergar o desenvolvimento algébrico e construir a teoria de cada caso, tornando assim a aprendizagem significativa. Para encerrar é apresentada a seguinte questão.

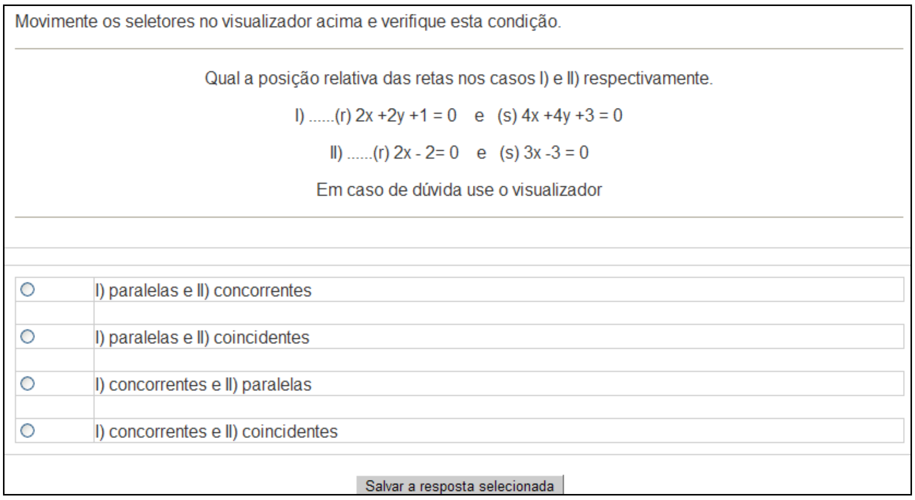


Figura 4.142 – Questão sobre posições de duas retas no plano na forma geral

4.2.19 - Posições relativas de duas retas (Lição 2.5 do Ambiente)

Após uma breve revisão sobre as condições que estabelecem a posição relativa entre duas retas no plano, e como encontrar o coeficiente angular de uma reta, são apresentados alguns exercícios sobre este conteúdo.

No visualizador, mostrado na figura 4.143, é apresentado um exemplo de questão clássica sobre retas paralelas: “Obter uma reta **s** que passa por um ponto **P** (dado), paralela a uma reta **r** (dada, não vertical)”. Exemplo: (s): 2x - 3y + 2 = 0 e P=(1 , 4). Neste visualizador a solução é apresentada ao arrastar o botão do seletor, onde a solução algébrica e geométrica são apresentadas, dando a oportunidade do estudante verificar graficamente a solução.

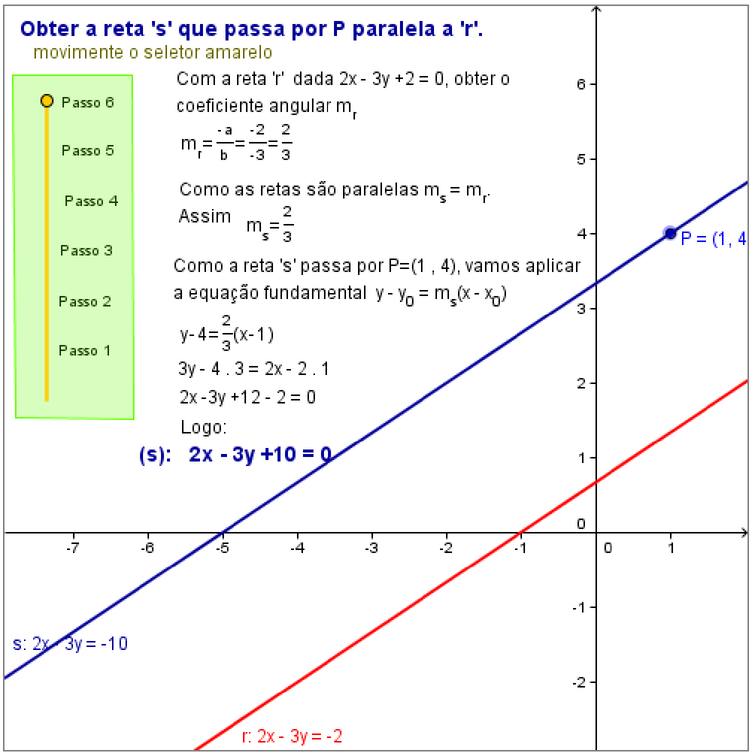


Figura 4.143 – Visualizador para questão sobre retas paralelas

Uma outra questão, vista na figura 4.144, é apresentada. Após resolver a questão algebricamente é possível encontrar a solução graficamente no visualizador de retas paralelas e perpendiculares dado na figura 4.145.

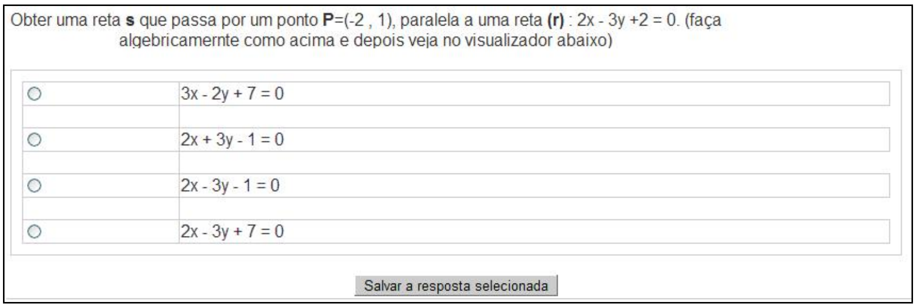


Figura 4.144 – Questão sobre retas paralelas no plano

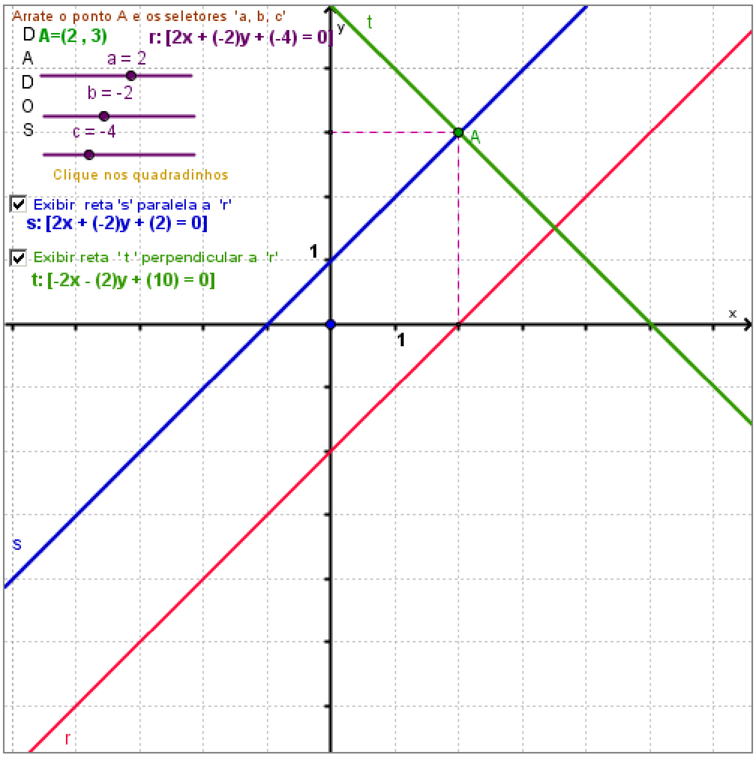


Figura 4.145 – Visualizador sobre retas paralelas e perpendiculares

Prosseguindo na lição uma questão associativa é apresentada.

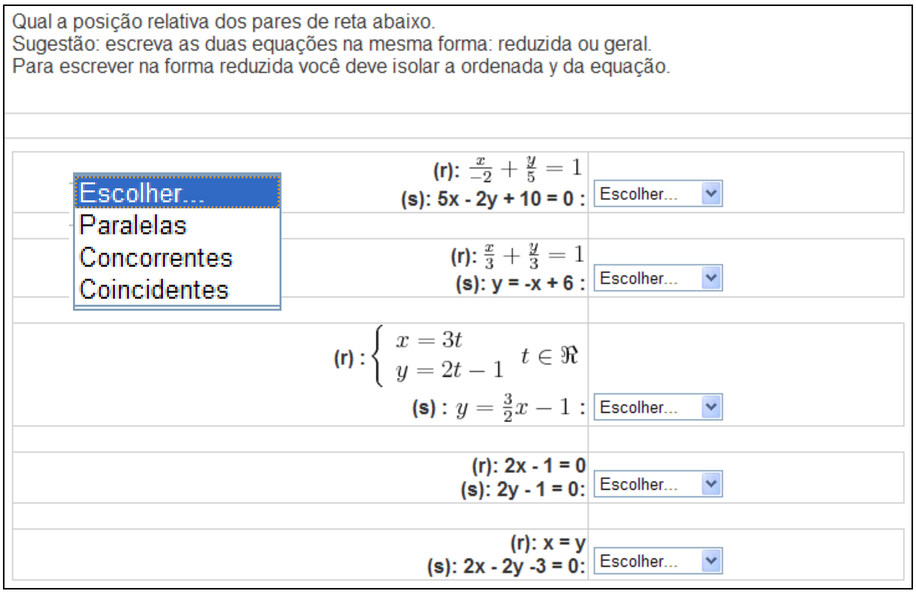


Figura 4.146 – Questão sobre posições relativas de retas no plano

Na sequência, mais uma questão foi apresentada, indicada na figura 4.147, cuja solução pode ser encontrada no visualizador (figura 4.141) fornecido na própria questão. No visualizador, fixando os valores dos coeficientes fornecidos, a solução é encontrada via mudança do parâmetro b até a obtenção de paralelismo.

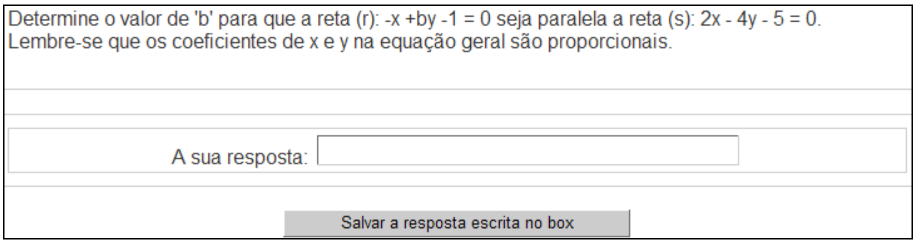


Figura 4.147 – Questão sobre duas retas paralelas no plano

Prosseguindo na lição, é apresentado o seguinte exercício clássico da Geometria Analítica: “Encontrar o ponto de intersecção entre duas retas concorrentes”. Para esse problema foi idealizado o seguinte visualizador.

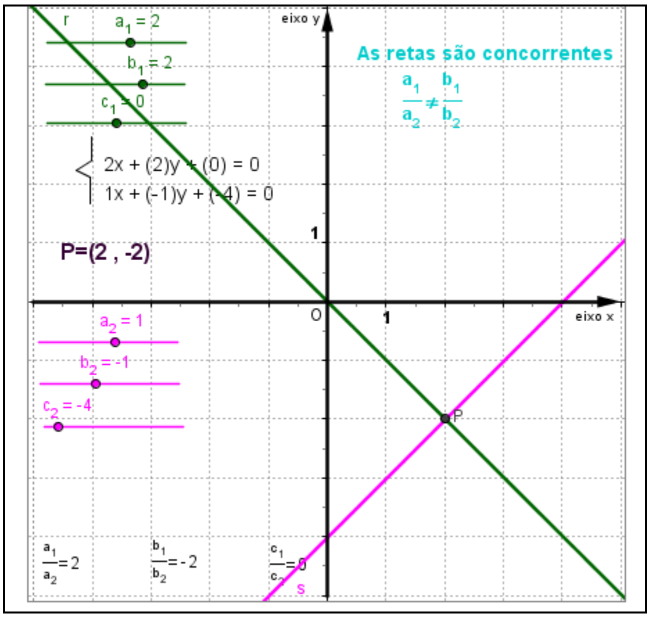


Figura 4.148 – Visualizador sobre intersecção de retas no plano

Após apresentar um exemplo sobre intersecção de retas, a seguinte questão é apresentada.

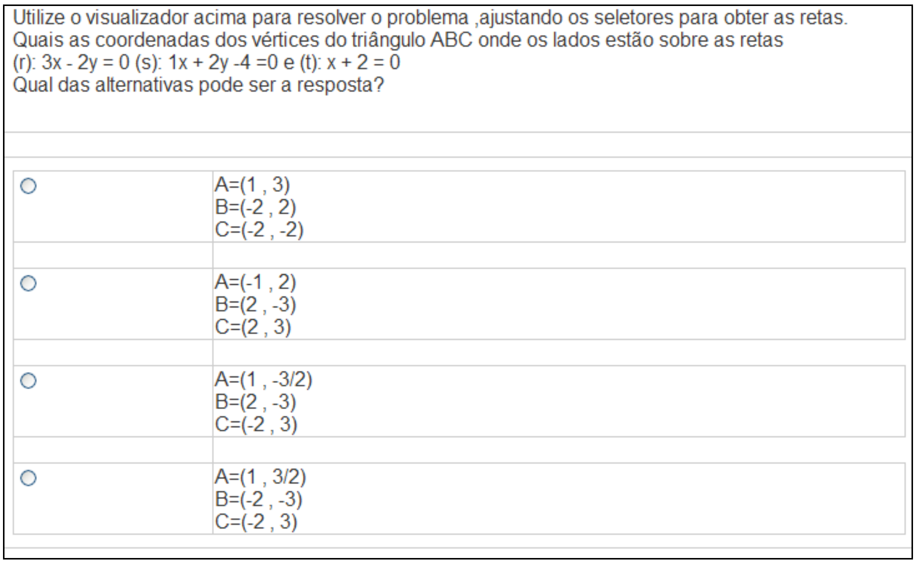


Figura 4.149 – Questão sobre intersecção de retas suporte dos lados de um triângulo

A lição é finalizada com a seguinte questão.

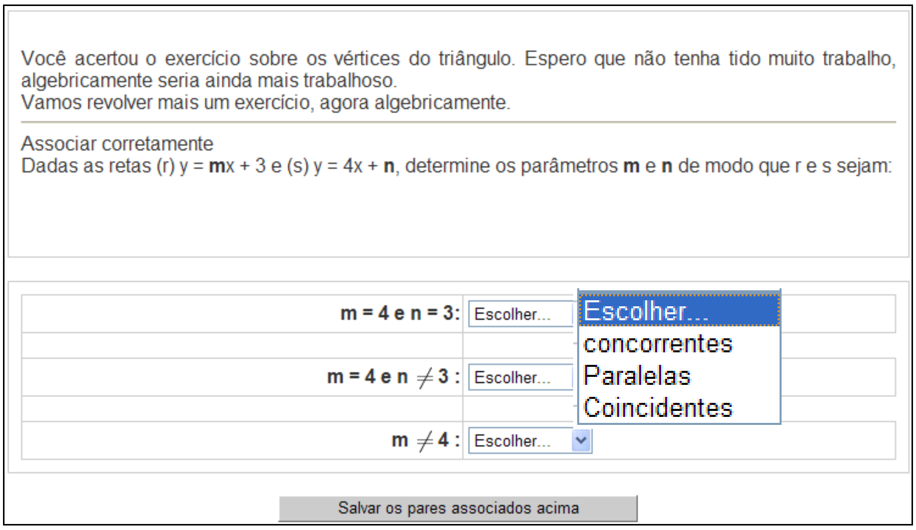


Figura 4.150 – Questão sobre posições relativas de duas retas no plano

4.2.20 – Retas perpendiculares (Teoria 2.6 do Ambiente)

Nesta teoria do ambiente é estudada a condição de perpendicularidade entre duas retas coplanares, dada por $r \perp s \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1$. Após a definição de retas perpendiculares, a demonstração da afirmação acima é apresentada via visualizador na figura 4.151, e sua recíproca " $m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow r \perp s$" na figura 4.152. Nos dois visualizadores é solicitado a marcação nos quadradinhos para acompanhar a demonstração, sendo utilizada a ferramenta “caixa para exibir/esconder objetos” do GeoGebra

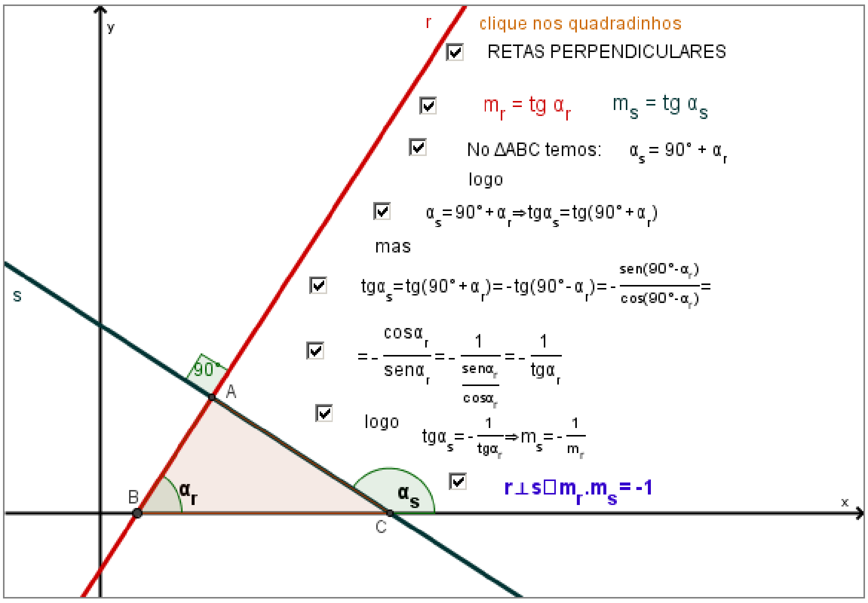


Figura 4.151 – Visualizador para verificação da condição de perpendicularismo

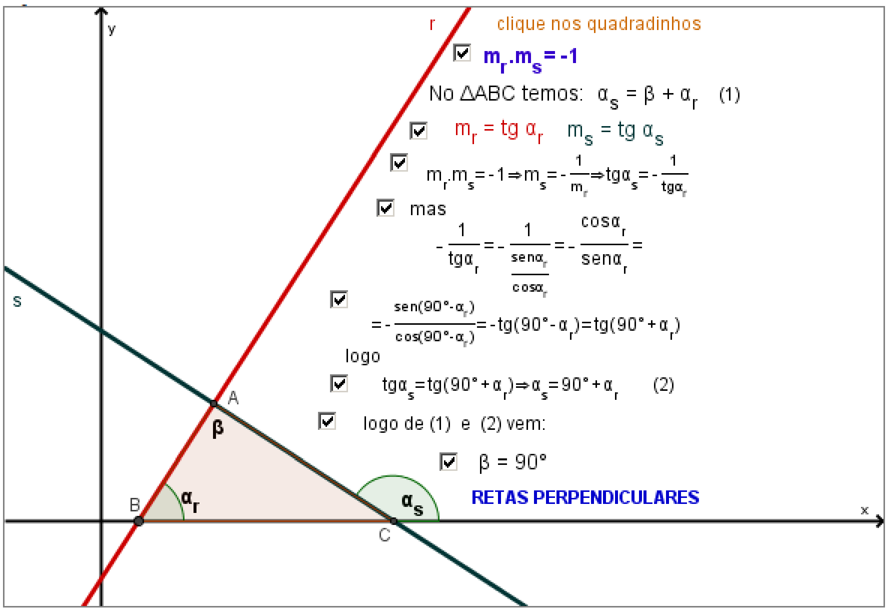


Figura 4.152 – Visualizador para verificação da recíproca da condição de perpendicularismo

É observado o seguinte fato: “Se uma reta for paralela a um dos eixos coordenados, uma outra reta perpendicular a essa será paralela a outro eixo.” Para finalizar são propostos dois exercícios, indicados na figura 4.153 e 4.154

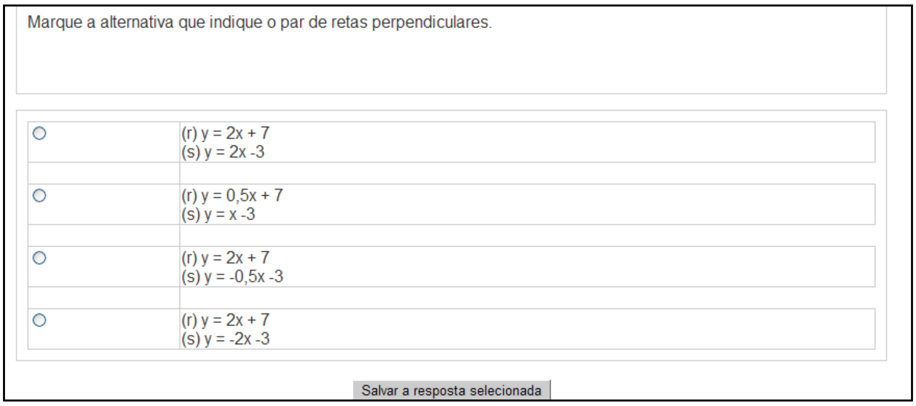


Figura 4.153 – Questão sobre retas perpendiculares plano

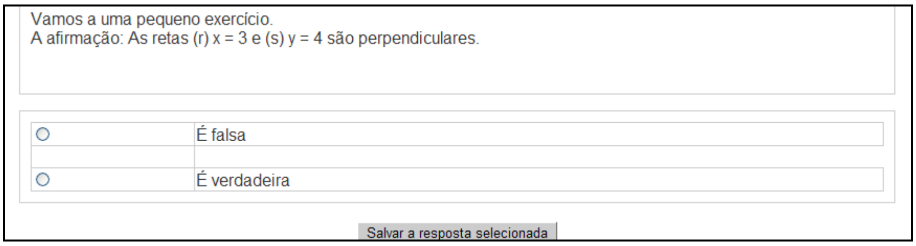


Figura 4.154 – Questão sobre retas verticais e horizontais perpendiculares plano

4.2.21 - Retas perpendiculares (Lição 2.6 do Ambiente)

Nesta última lição da unidade 2 do ambiente são resolvidos alguns exercícios e propostos outros. Antes, porém, é revisada a condição de perpendicularismo $r \perp s \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1$.

Exemplo: Verificar se as retas (r) que passa por (-2 , 1) e (4 , 4) é perpendicular a reta (s) que passa por (-2 , 3) e (1 , -3). É apresentada a solução algébrica como segue: vamos primeiramente encontrar os coeficientes angulares $m_r = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{4-1}{4+2} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ e $m_s = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-3-3}{1+2} = \dfrac{-6}{3} = -2$. Como $m_r \cdot m_s = \dfrac{1}{2} \cdot (-2) = -1$ as retas r e s são perpendiculares. Em seguida é apresentado na figura 4.155 um visualizador para encontrar a solução graficamente, arrastando os pontos para os valores indicados no exercício.

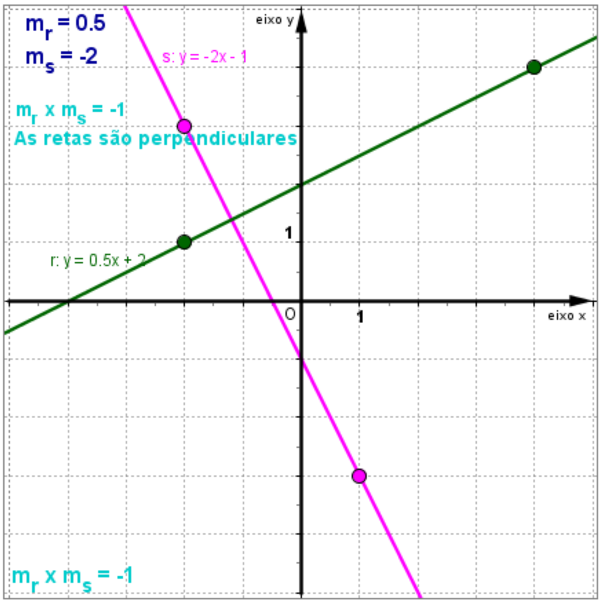
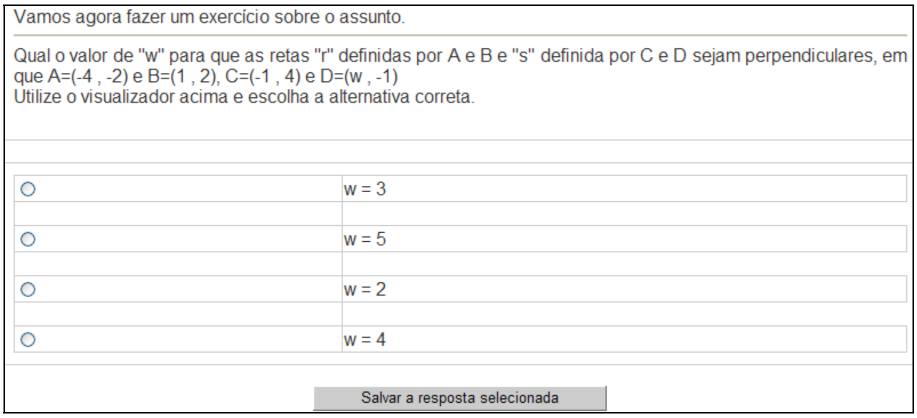


Figura 4.155 – Visualizador para solução de exercício sobre a condição de perpendicularismo

Uma questão indicada na figura 4.156 é apresentada, que poderia ser resolvida também com o visualizador da figura 4.155


Vamos agora fazer um exercício sobre o assunto.

Qual o valor de "w" para que as retas "r" definidas por A e B e "s" definida por C e D sejam perpendiculares, em que A=(-4 , -2) e B=(1 , 2), C=(-1 , 4) e D=(w , -1)
Utilize o visualizador acima e escolha a alternativa correta.

- w = 3
- w = 5
- w = 2
- w = 4

Salvar a resposta selecionada

Figura 4.156 – Questão sobre retas passando por dois pontos e perpendiculares

Prosseguindo na lição, é apresentada uma questão importante que aparece em vários problemas: como obter uma reta **s** que passa por um ponto P dado e é perpendicular a uma reta não horizontal r dada. A questão é apresentada na forma de exercício: “Qual a equação reduzida da reta r que passa por P=(2 , 3) e que é perpendicular a reta (s) x + 6y - 4 = 0”. Na solução, encontra-se o coeficiente angular da reta s, $m_s = \frac{-a}{b} = \frac{-1}{6}$. Como $r \perp s \Rightarrow m_r = \frac{-1}{m_s}$, isto é, m_r é o inverso simétrico de m_s. Assim $m_r = 6$ .Como r passa por P, é utilizada a equação fundamental

$y - y_0 = m_r(x - x_0)$. Logo $y - 3 = 6(x-2)$, $y - 3 = 6x - 12$ e $y = 6x - 9$. Este mesmo exercício pode ser resolvido com auxilio do visualizador da figura 4.157 abaixo, movimentando os seletores e o ponto P.

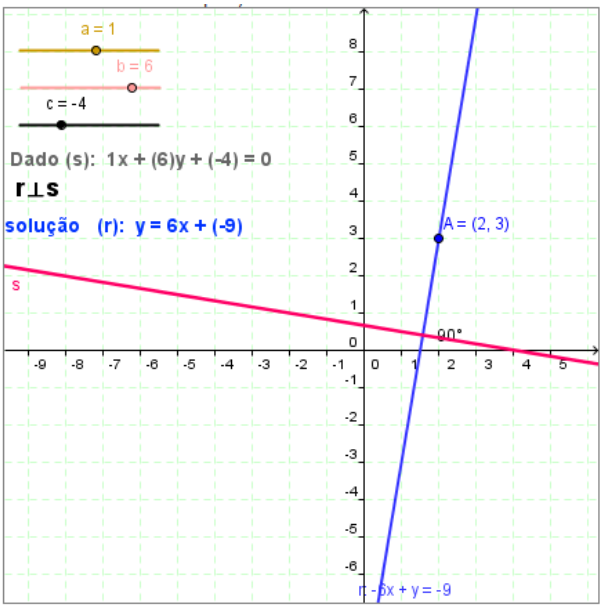
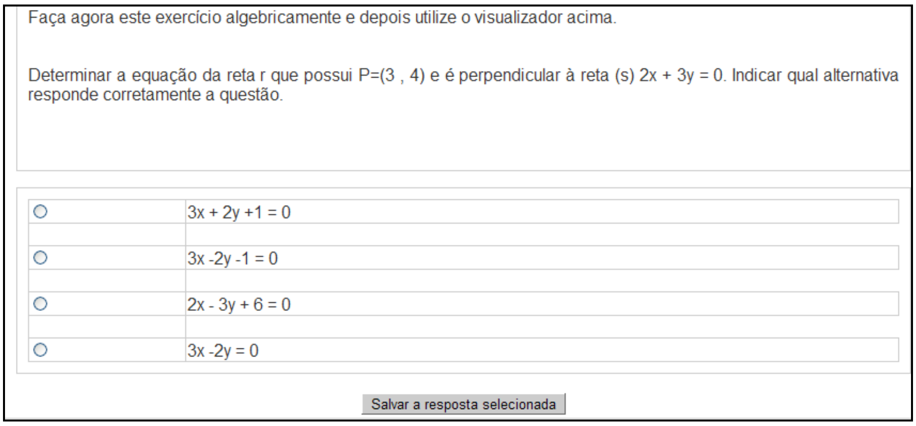


Figura 4.157 – Visualizador para retas perpendiculares passando por um ponto dado

Para dar prosseguimento na lição, é proposto o seguinte exercício.



Faça agora este exercício algebricamente e depois utilize o visualizador acima.

Determinar a equação da reta r que possui P=(3 , 4) e é perpendicular à reta (s) 2x + 3y = 0. Indicar qual alternativa responde corretamente a questão.

- 3x + 2y +1 = 0
- 3x -2y -1 = 0
- 2x - 3y + 6 = 0
- 3x -2y = 0

Salvar a resposta selecionada

Figura 4.158 – Questão sobre reta perpendicular passando um ponto dado

Continuando na lição, um exército semelhante ao anterior é proposto e resolvido algebricamente: Sejam A=(-3 , 1) e (r) 1x + 2y -4 = 0. Obtenha a reta **s** que passa por **A** e é perpendicular a **r**; a projeção ortogonal de **A** sobre **r** (pé da perpendicular) e o ponto simétrico de **A** em relação a **r**. A verificação geometria da solução pode ser feita no visualizador abaixo, dado na figura 4.159, arrastando os seletores para a=1, b=2 e c=-4 e o ponto A(-3 , 1).

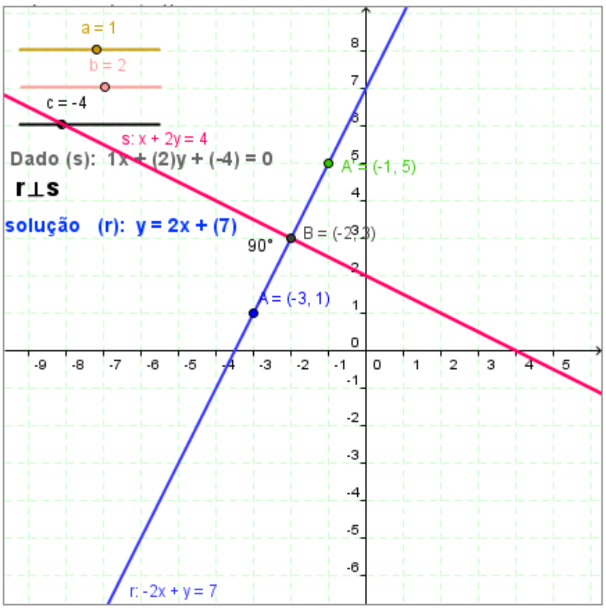
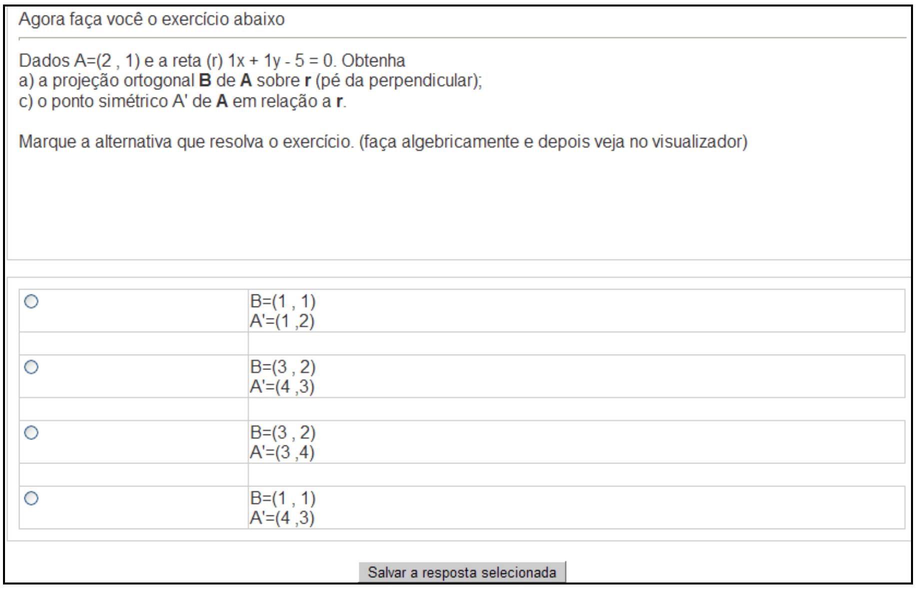


Figura 4.159 – Visualizador de retas perpendiculares e ponto simétrico

Prosseguindo na lição, é proposto o exercício apresentado na figura 4.160, que também poderia ser resolvido pelo visualizador da figura 4.159.



Agora faça você o exercício abaixo

Dados A=(2 , 1) e a reta (r) 1x + 1y - 5 = 0. Obtenha
a) a projeção ortogonal **B** de **A** sobre **r** (pé da perpendicular);
c) o ponto simétrico A' de **A** em relação a **r**.

Marque a alternativa que resolva o exercício. (faça algebricamente e depois veja no visualizador)

○ B=(1 , 1) A'=(1 ,2)

○ B=(3 , 2) A'=(4 ,3)

○ B=(3 , 2) A'=(3 ,4)

○ B=(1 , 1) A'=(4 ,3)

Salvar a resposta selecionada

Figura 4.160 – Questão sobre reta perpendicular e ponto simétrico.

A lição é finalizada com um último exercício sobre retas paralelas e perpendiculares, conforme apresenta a figura 4.161. Nesta questão também é fornecido o visualizador da figura 4.141.

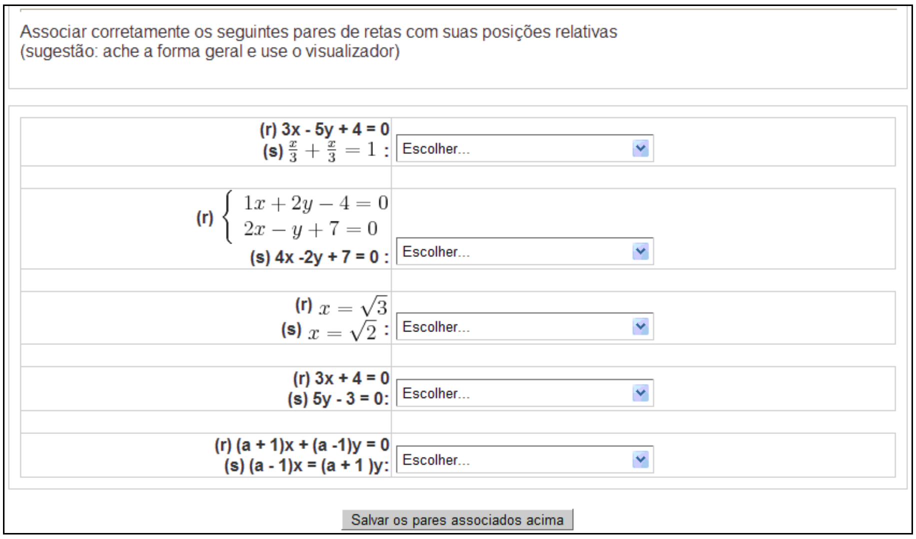


Figura 4.161 – Questão sobre retas paralelas e perpendiculares no plano.

4.2.22 – Simulado e provinha da unidade 2.

São válidas neste caso as mesmas observações sobre i item 2.2.9

Questão 1

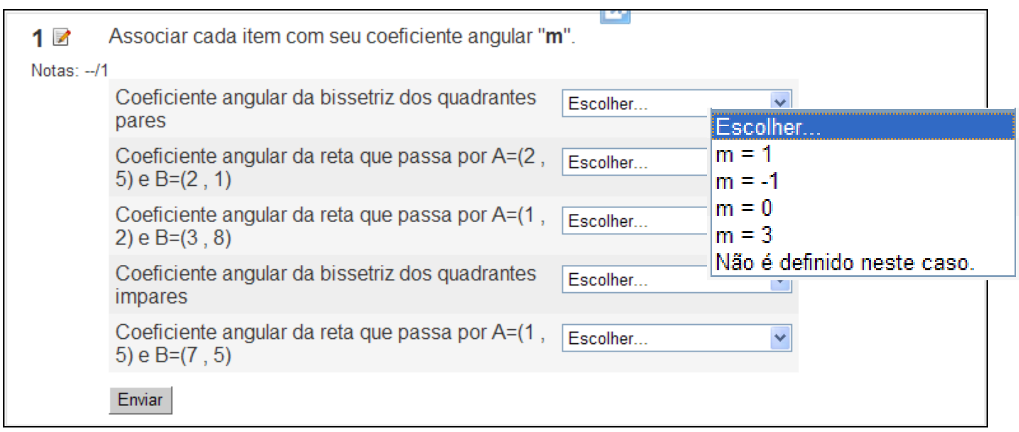


Figura 4.162 – Questão aleatória 1 da provinha.

Questão 2

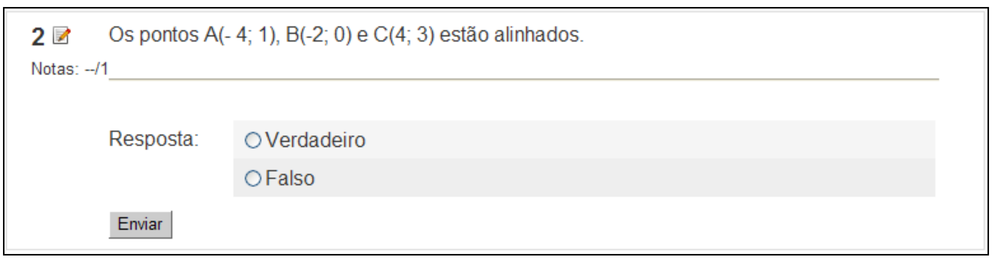


Figura 4.163 – Questão aleatória 2 da provinha.

Questão 3

3 Dar a equação geral da reta **r** que passa por P=(-1 , 4) e tem coeficiente angular $m = \frac{1}{2}$.

Notas: --/1

Escolher uma resposta.

- a.) 2x - y + 9 = 0
- b.) 2x + 2y - 9 = 0
- c.) x - 2y + 9 = 0
- d.) x - 2y - 9 = 0

Enviar

Figura 4.164 – Questão aleatória 3 da provinha.

Questão 4

4 Desenhar as três retas abaixo no visualizador, para isso, mova os dois pontos de cada reta para um local correto.

Notas: --/1

(r): $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$

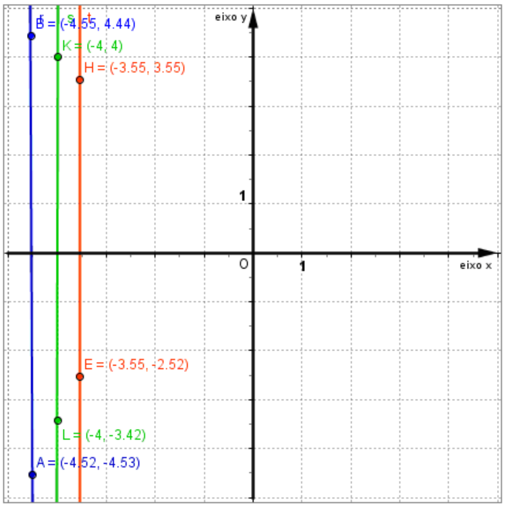
(s): y = 2x + 3 OBS.: Para cada x temos um y e portanto um ponto (x , y). De dois valores para x. Ex. x = 0 e x = -1

(t): $\begin{cases} x = \frac{t}{2} \\ y = t + 1 \end{cases}$ $t \in \Re$ OBS:De dois valores para t e encontre dois pontos da reta

Se você posicionar as três retas corretamente você obterá a palavra secreta, para marcar a alternativa correta

Tempo restante

0:42:21



Escolher uma resposta.

- a. MANGA
- b. LARANJA
- c. AMORA

Figura 4.165 – Questão aleatória 4 da provinha.

Questão 5

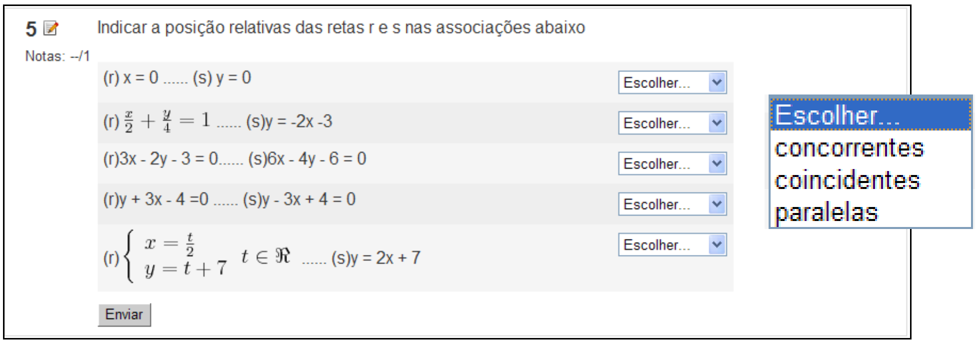


Figura 4.166 – Questão aleatória 5 da provinha.

Questão 6

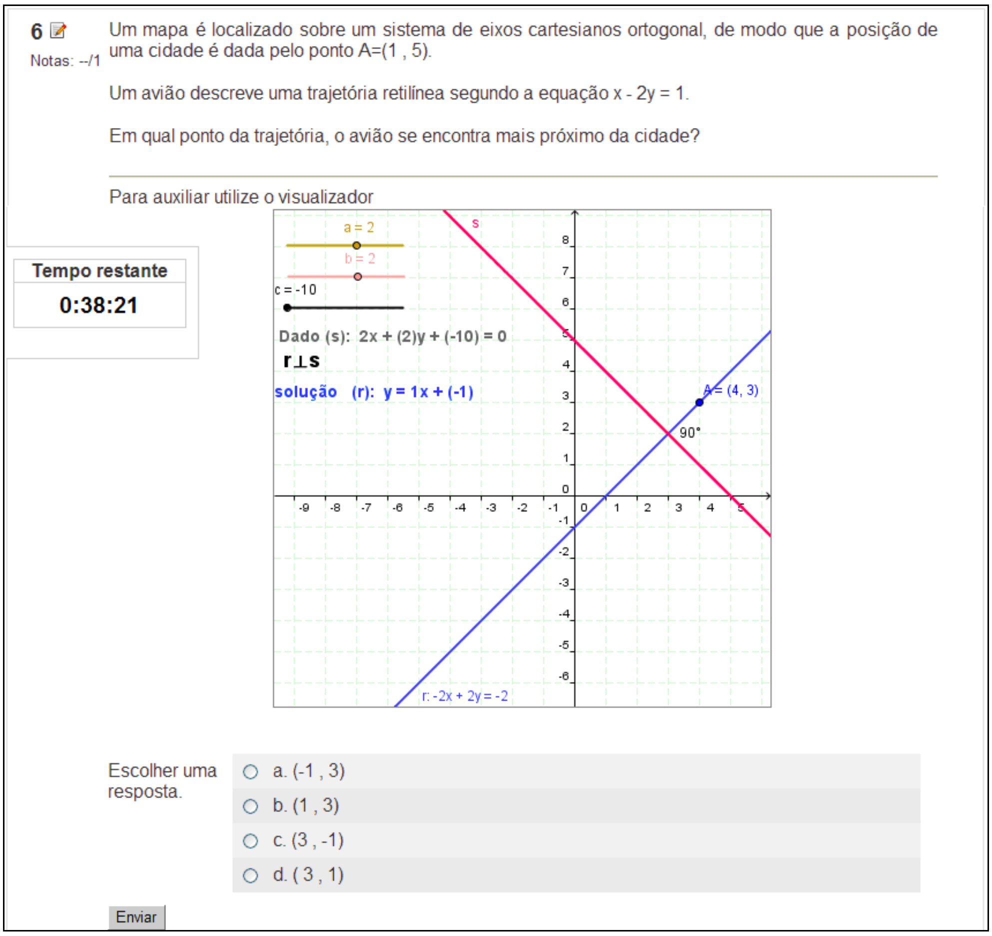


Figura 4.167 – Questão aleatória 6 da provinha.

Questão 7

7
Notas: --/10

Os pontos A=(5 , -5) , B=(3 , -2) e C=(-1 , 4) podem ser vértices de um triângulo ABC.

Faça algebricamente utilizando a inclinação $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ dos segmentos AB e BC, caso sejam iguais, os pontos A, B e C são colineares e não temos possibilidade de construir triângulo.

Resposta:
- ○ Verdadeiro
- ○ Falso

Enviar

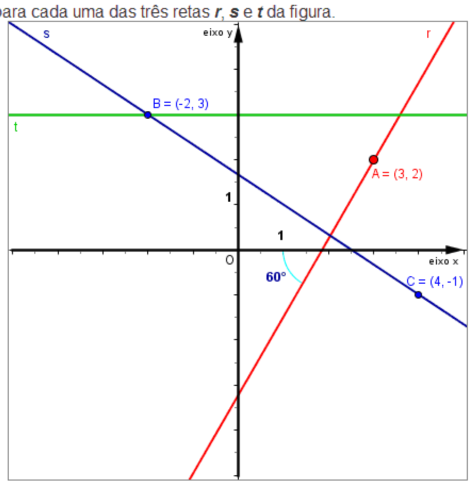
Figura 4.168 – Questão aleatória 7 da provinha.

Questão 8

8
Notas: --/1

Tempo restante
0:36:17

Dar uma equação para cada uma das três retas ***r***, ***s*** e ***t*** da figura.



I) (r) $y - 2 = \sqrt{3}(x - 3)$ ...... (s) -2x + 3y -5 = 0 ......(t) x = 3
II) (r) $y = \sqrt{3}(x - 3)$ ......(s) 2x - 3y -5 = 0 ......(t) y = 3
III) (r) $y + 2 = \sqrt{3}(x + 3)$......(s) 2x + 3y +5 = 0......(t) y = -3
IV) (r) $y - 2 = \sqrt{3}(x - 3)$ ...... (s) 2x + 3y -5 = 0...... (t) y = 3

Escolher uma resposta.
- ○ a. I
- ○ b. II
- ○ c. III
- ○ d. IV

Enviar

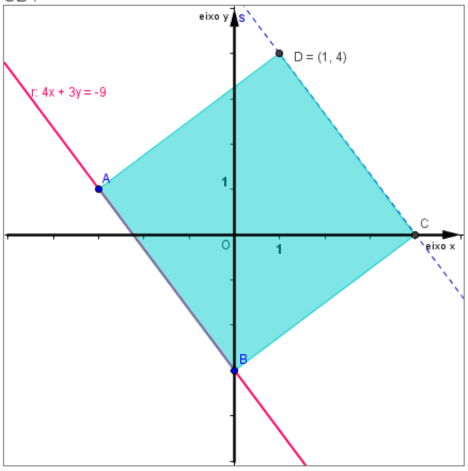
Figura 4.169 – Questão aleatória 8 da provinha.

Questão 9

9 Notas: --/1

O quadrado ABCD da figura abaixo tem o lado AB contido na reta 4x + 3y + 9 = 0, Qual a equação da reta suporte do lado CD .

Tempo restante
0:34:15



Escolher uma resposta.

- a.) 4x - 3y - 16 = 0
- b.) 3x - 4y +16 = 0
- c.) 4x + 3y - 16 = 0
- d.) 3x + 4y +16 = 0

Enviar

Figura 4.170 – Questão aleatória 9 da provinha.

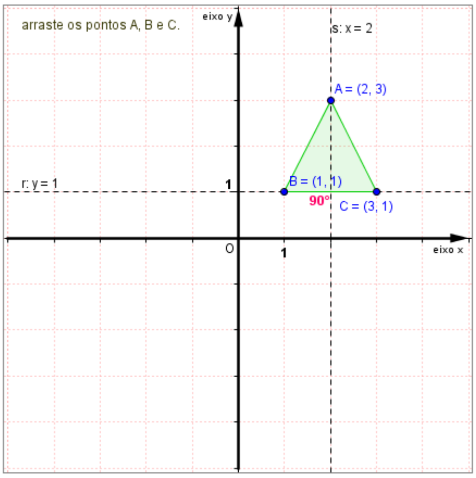
Questão 10

10 Notas: --/1

Os vértices de um triângulo ABC são os pontos A=(2 , 3), B=(3 , -1) e C=(-2, 2).
Qual das alternativas corresponde a equação geral da reta suporte da altura relativa ao lado BC.

Neste simulado apresentaremos um visualizador, mas na provinha não, o exercício deverá ser resolvido algebricamente, aplicando os passos abaixo:

- Calcule m_{BC} ,
- aplique a propriedade da reta perpendicular,
- encontre o coeficiente angular da perpendicular e
- finalmente a equação da reta suporte da altura que passa por A.



Escolher uma resposta.

- a.) 5x - 3y - 1 = 0
- b.) 3 x - 5y + 6 = 0
- c.) 5x - 3y + 1 = 0
- d.) 3x +5y - 4 = 0

Figura 4.171 – Questão aleatória 10 da provinha.

4.3 – Os Visualizadores Idealizados no GeoGebra

Todos os gráficos e visualizadores foram elaborados no software de geometria dinâmica GeoGebra, procurando sempre buscar a compreensão dos conceitos apresentados de forma dinâmica, permitindo ao aluno mudar as coordenadas dos pontos ou valores de variáveis para observar o efeito destas mudanças na geometria das figuras.

Segue a relação dos visualizadores idealizados e construídos para esse trabalho

1 – Visualizador: Pontos sobre um eixo.

Este visualizador, como apresenta a figura 4.4, mostra como localizar um ponto sobre um eixo. A ferramenta seletor do GeoGebra é utilizada como um menu onde percorrendo seus valores inteiros o desenho é completado até se chegue à abscissa do ponto. Há uma correspondência entre o texto e o desenho.

2 – Visualizador: Elementos da Geometria Analítica Plana (GA).

Este visualizador indicado na figura 4.7 pode ser utilizado para diferentes conteúdos dentro da GA como, por exemplo, pontos no plano, denominação dos quadrantes, nomes dos eixos, propriedades das bissetrizes dos quadrantes, notação de um ponto no plano, distância entre dois pontos, ponto médio, coeficiente angular da reta, equação da reta nas formas geral e reduzida, posições relativas de duas retas coplanares. No menu apresentado pelo seletor dos itens 1 ao 5 as imagens são sobrepostas e os itens de 6 a 9 são apresentados individualmente.

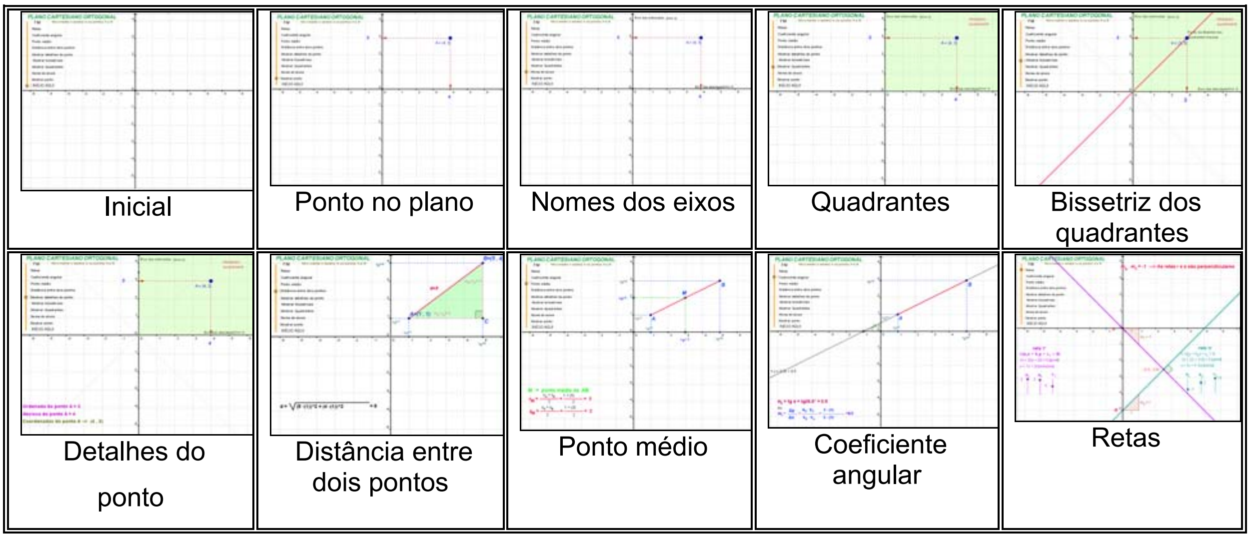


Figura 4.172 - As opções do menu indicadas no seletor.

3 – Visualizador: Um exercício sobre pontos no plano.

Utilizando a versatilidade do GeoGebra é mostrado neste visualizador a resolução de um problema sobre coordenadas cartesianas no plano. As partes gráficas do desenho acompanham os textos do seletor, como indicam as figura 4.9 até figura 4.12.

4 – Visualizador: Um exercício interessante

Este visualizador apresenta um exercício sobre pontos no plano cartesiano, onde o aluno encontra uma senha movendo três pontos para as coordenadas neles indicadas, como se vê na figura 4.22 e figura 4.23.

5– Visualizador: Comprimento de um segmento sobre um eixo.

Este visualizador apresenta a sequência algébrica e gráfica para encontrar a distância entre dois pontos sobre um eixo cartesiano. As figuras 4.25 e 4.26 mostram o momento inicial e a final respectivamente. Pode-se, ainda, movimentando os pontos A e B, verificar a distancia entre esses pontos.

6 – Visualizador: distância sobre uma reta horizontal.

Este visualizador apresenta como encontrar a distância entre dois pontos sobre uma reta paralela ao eixo das abscissas, de forma algébrica e gráfica, como vemos na figura 4-29.

7 – Visualizador: distância sobre uma reta vertical.

Este visualizador apresenta como encontrar a distância entre dois pontos sobre uma reta paralela ao eixo das ordenadas, de forma algébrica e gráfica, como vemos na figura 4.31.

8 – Visualizador: Cálculo da distância entre dois pontos quaisquer sobre um plano.

Neste visualizador apresentam-se os passos para obter a expressão geral do cálculo da distância entre dois pontos do plano cartesiano. O seletor, como menu, foi mais uma vez utilizado e todas as fases podem ser observadas na figura 4.33 e 4.34.

9 – Visualizador: A distância entre dois pontos quaisquer do plano.

Este visualizador é utilizado para encontrar a distância entre dois pontos nos exercícios, indicando o triângulo retângulo formado quando for o caso. Pode ser observado nas figuras 4.39 e 4.40.

10 – Visualizador: Auxiliar para demonstração do cálculo analítico do ponto médio.

Este visualizador, visto na figura 4.44, auxilia no conceito e na obtenção da expressão algébrica que calcula o ponto médio de dois pontos no plano. Notam-se as retas paralelas para aplicação do Teorema de Tales.

11 – Visualizador: Pontos médios dos lados de um triângulo

Este visualizador auxilia a encontrar o ponto médio dos lados de um triângulo. As extremidades do segmento RS podem ser arrastadas para os vértices do triângulo, indicando assim seu ponto médio como pode ser observado na figura 4.53.

12 – Visualizador: Base média de um triângulo

Este visualizador auxilia a demonstração das propriedades da base media de um triângulo. Movimentando os vértices do triângulo, observa-se que a base média é paralela a um lado medindo metade deste lado, como indicado na figura 4.55.

13 – Visualizador: Divisão da mediana pelo Baricentro.

Este visualizador, apresentado na figura 4.58, mostra que o baricentro divide a mediana na razão de um para dois e ainda indica dois triângulos semelhantes utilizados na demonstração do cálculo de suas coordenadas.

14 – Visualizador: Cálculo do baricentro.

Este visualizador apresenta a sequência para demonstrar como as coordenadas do Baricentro são obtidas a partir das coordenadas dos Vértices de um triângulo. Movendo-se o seletor do INÍCIO para o FIM, as fases para o cálculo da expressão das coordenadas do baricentro e os respectivos gráficos são indicados, como se vê na figura 4.60.

15 – Visualizador: Cálculo do baricentro

Este visualizador, indicado na figura 4.65, 4.67 e 4.70, é utilizado para auxiliar os problemas sobre baricentro de triângulo no plano.

16 – Visualizador: Ângulo de inclinação

Visualizador construído para fixar o conceito de ângulo de inclinação da reta. Na figura 4.84 vê-se que o valor do ângulo é maior ou igual a 0° e menor que 180°.

17 – Visualizador: Coeficiente angular de uma reta passando pela origem.

Visualizador indicado para auxiliar a demonstração que o coeficiente angular é o valor da tangente do ângulo de inclinação α, dado na figura 4.86 (podendo ser negativo ou positivo)

18 – Visualizador: Coeficiente angular

Este visualizador, indicado na figura 4.87, mostra que o coeficiente angular de uma reta não vertical é o valor da tangente do ângulo de inclinação α da reta.

19 – Visualizador: Cálculo do coeficiente angular dado dois pontos.

Este visualizador mostra a parte algébrica e gráfica do cálculo do coeficiente angular de uma reta passando por dois pontos dados, como se observa na figura 4.91.

20 – Visualizador: Cálculo do coeficiente angular dado ângulo de inclinação.

Este visualizador, apresentado na figura 4.93, mostra a relação entre o coeficiente angular e a ângulo de inclinação, fazendo seu cálculo algébrico. Mostra ainda que, o coeficiente angular não é definindo quando o ângulo de inclinação é nulo, pois tende ao infinito. Para uma reta r ou um segmento AB, podemos também verificar que o coeficiente angular ou declividade é o acréscimo (deslocamento para cima - positivo) ou decréscimo (deslocamento para baixo - negativo) na ordenada y de um ponto da reta quando deslocamos 1 unidade para direita na direção positiva do eixo x, a partir deste ponto.

21 – Visualizador: Solução de exercício sobre coeficiente angular.

Este visualizador, visto na figura 4.97, mostra passo a passo a solução algébrica de um exercício sobre coeficiente angular.

22 – Visualizador: Pontos colineares

Este visualizador, apresentado na figura 4.100, verifica o axioma "Dois pontos distintos determinam uma única reta", mostrando que quando três pontos estão alinhados a reta é única.

23 – Visualizador: Pontos alinhados verticalmente

Este visualizador mostra a condição de alinhamento de três pontos distintos sobre uma reta vertical, como apresenta a figura 4.101.

24 – Visualizador: Pontos alinhados não verticais.

Este visualizador mostra a condição de alinhamento de três pontos distintos sobre uma reta não vertical, como apresenta a figura 4.102.

25 – Visualizador: Pontos alinhados verticalmente – auxílio a exercícios.

Este visualizador, como mostra a figura 4.104, foi construído para auxiliar na solução de problemas do tipo: Quais as coordenadas do ponto C, da bissetriz dos quadrantes ímpares, sabendo que está alinhado com os pontos A=(5 , 5) e B=(4,-3).

26 – Visualizador: Pontos alinhados não verticais – auxílio a exercícios.

Este visualizador, como mostra a figura 4.107, foi construído para auxiliar na solução de problemas do tipo: Determine o valor e k para que os pontos A=(2 , -7), B=(-1,k) e C=(2 , -1) sejam colineares.

27 – Visualizador: Equação da reta

Este visualizador, visto na figura 4.110, indica como a partir de um coeficiente angular “m” e um ponto A podemos encontrar a equação de uma reta, mostrando ainda as coordenadas dos pontos sobre a reta.

28 – Visualizador: Reta vertical

Visualizador para mostrar como encontrar a equação de uma reta paralela ao eixo das ordenadas quando não temos o coeficiente angular, e ainda mostrar as coordenadas dos pontos sobre a reta, como observado na figura 4.112.

29 – Visualizador: Reta por dois pontos

Visualizador, como indica a figura 4.117, para mostrar a equação da reta dados dois pontos A e B, mostrando o cálculo do coeficiente angular *m*.

30 – Visualizador: Equação reduzida da reta

Visualizador, como indica a figura 4.121, para mostrar como encontrar a equação reduzida de uma reta dados o ponto de intersecção com o eixo das ordenadas e o coeficiente angular.

31 – Visualizador: Formas da equação da reta dados dois pontos.

Este visualizador indica as várias formas da equação de uma mesma reta que passa por dois pontos que podem ser movimentado via seletor, como pode ser visto na figura 4.123.

32 – Visualizador: retas verticais

Este visualizador, indicado na figura 4.124, mostra a forma geral da equação da reta passando por dois pontos, quando paralela ao eixo das ordenadas.

33 – Visualizador: Equação segmentária da reta

Visualizador visto na figura 4.126 que mostra a equação da reta na forma segmentária a partir dos valores onde a reta corta os eixo x e o eixo y.

34 – Visualizador: Equação reduzida dados *m* e *q*

Visualizador, observado na figura 4.135, que apresenta a equação reduzida da reta sendo fornecidos o coeficiente angular m e o coeficiente linear q, usado para auxiliar em um problema sobre reta na forma paramétrica

35 – Visualizador das posições relativas de duas retas na forma reduzida

Este visualizador, apresentado na figura 4.139, mostra as duas retas e seus coeficientes angulares e lineares, os quais podem ser alterados pelo seletor e indica quando as retas são paralelas, concorrentes e coincidentes.

36 – Visualizador das posições relativas de duas retas na forma geral

Este visualizador, apresentado na figura 4.141, mostra as duas retas e os coeficientes de suas equações gerais, os quais podem ser alterados pelo seletor, indicando quando as retas são paralelas, concorrentes e coincidentes.

37 – Visualizador: Reta paralela por um ponto

Visualizador visto na figura 4.143, que mostra passo a passo como obter a equação de uma reta s paralela a uma reta r passando por um ponto P, dados r e P. Cada passo apresenta uma passagem na sequência lógica de cálculo.

38 – Visualizador: Retas paralelas e perpendiculares

Este visualizador da figura 4.145 mostra que as equações das retas s e t, respectivamente paralela e perpendicular a uma reta r dada na forma geral que passa por um ponto A. A reta r é dada através dos seus coeficientes a, b e c em três seletores. Os quadradinhos “Caixa para Exibir/Esconder objetos”, quando clicados, podem apresentar ou esconder a equação e os desenhos das retas paralela ou perpendicular.

39 – Visualizador: Ponto de intersecção de duas retas no plano.

Visualizador, visto na figura 4.148, que mostra a posição relativa de duas retas na forma geral, bem como o sistema linear gerado para calcular o ponto de intersecção das duas retas e suas coordenadas. Apresenta ainda a razão entre os coeficientes das equações gerais das retas.

40 – Visualizador: Demonstração da condição de perpendicularismo de retas

Este visualizador mostra a sequência utilizada na demonstração da condição de perpendicularidade entre duas retas no plano. No início só uma opção é apresentada e sua habilitação exibe novas opções destacando a parte algébrica e geométrica na demonstração correspondentes a elas, como visto na figura 4.151.

41 – Visualizador: Recíproca da demonstração da condição de perpendicularismo de retas.

Este visualizador apresenta a recíproca do teorema anterior, visto na figura 4.152.

42 – Visualizador: Posições relativas de duas retas dadas por dois pontos

Este visualizador apresenta as posições relativas de duas retas onde cada uma delas foi construída por dois pontos, os quais podem ser movimentados. Indica ainda quando forem paralelas, perpendiculares ou coincidentes, como visto na figura 4.155

43 – Visualizador: Reta perpendicular passando por um ponto dado.

Este visualizador fornece a equação reduzida da reta perpendicular à outra reta dada na forma geral que passa por um ponto conhecido. Os coeficientes da reta são fornecidos pelos seletores a, b e c, como visto na figura 4.157

44 – Visualizador: Reta perpendicular passando por um ponto dado e ponto simétrico.

Este visualizador fornece a equação reduzida da reta perpendicular à outra reta dada na forma geral que passa por um ponto conhecido, calculando e mostrando o ponto simétrico do ponto dado em relação a reta dada, como visto na figura 4.159.

45 – Visualizador: Reta suporte da altura de um triângulo.

Este visualizador fornece a equação da reta suporte de um triângulo dado pelos seus três vértices, como mostra a figura 4.171.

4.4 – A integração Geogebra e o Moodle

A integração entre o Geogebra e o Moodle é feita de modo bem prático, pois o Moodle possui filtros que permitem inserir arquivos (visualizadores) gerados no Geogebra como se fossem links a um arquivo qualquer.

CAPÍTULO 5: METODOLOGIA DE APLICAÇÃO

5.1 – A escola

A aplicação do AVA foi realizada na escola pública “EE Dr. Geraldo Pereira de Barros” localizada no município de Barra Bonita no Estado de São Paulo.

Figura 5.1 – Fachada da EE Dr. Geraldo Pereira de Barros

Trata-se de uma Escola de Ensino Fundamental e Médio, localizada na região central da cidade. A escola funciona em prédio de arquitetura moderna, com nove salas de aula, biblioteca, sala de multimídia, quadra coberta e pátio de lazer. Além disso, a instituição possui sala de informática, com onze computadores em rede com acesso à internet.

Figura 5.2 – Sala de informática da EE Dr. Geraldo Pereira de Barros

5.2 – Os alunos

Participaram da atividade alunos do Ensino Médio da segunda e terceira séries do período matutino, num total de 84 inscritos inicialmente e 65 participantes efetivos, assim distribuídos:

Tabela 5.1 – Participantes da aplicação.

Salas do ensino médio	Números de alunos inscritos	Números de alunos participantes
2ª Série "A"	28	26
2ª Série "B"	26	19
3ª Série "A"	30	20

Todos os participantes são alunos do autor desta dissertação, em sua maioria economicamente desfavorecidos. Muitos não entendem a importância da escola para suas vidas, e apresentam grandes dificuldades de concentração. Imediatistas, dificilmente fazem atividades escolares fora da sala de aula. Apesar da facilidade no uso do computador, geralmente usam a informática somente para diversão e lazer.

5.3 – Os colaboradores

A direção e a coordenação da escola contribuíram efetivamente para a aplicação deste trabalho, que contou ainda com o auxílio de vários colegas professores. Destaco a participação da coordenadora pedagógica, que motivou os alunos a participarem das atividades propostas nesta aplicação do AVA.

5.4 – A aplicação

A aplicação aconteceu no segundo semestre de 2009, a partir do dia 08 de setembro de 2009. Antes da aplicação foi colocado para os alunos a grande oportunidade que teriam em participar de um ambiente virtual de aprendizagem, com conteúdos de geometria inéditos ou já estudados. Aqueles que não conheciam o conteúdo (alunos da segunda série do ensino médio) teriam uma grande oportunidade para antecipar a aprendizagem, se preparando para a próxima série. Os que já conheciam o conteúdo (alunos da terceira série do ensino médio) teriam uma grande oportunidade para rever conceitos, se preparando para os vestibulares e o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio). Além disso, todos teriam a oportunidade de adquirir conhecimentos de forma não tradicional, por meio da internet, em seu próprio tempo, em casa ou na sala de informática da escola.

Na semana anterior ao inicio da aplicação do AVA, os alunos foram levados à sala de recursos áudios visuais da escola, onde viram uma apresentação de como seria a participação no ambiente proposto. Neste momento foi apresentado o ambiente. Foi explicado a forma de acesso, com o nome do usuário e senha, que poderia ser alterada após inicio do curso. Tanto o nome do usuário como a senha eram da seguinte forma “marioXXYY” onde XX era sua sala (2A, 2B ou 3C) e YY seu número na lista de chamada.

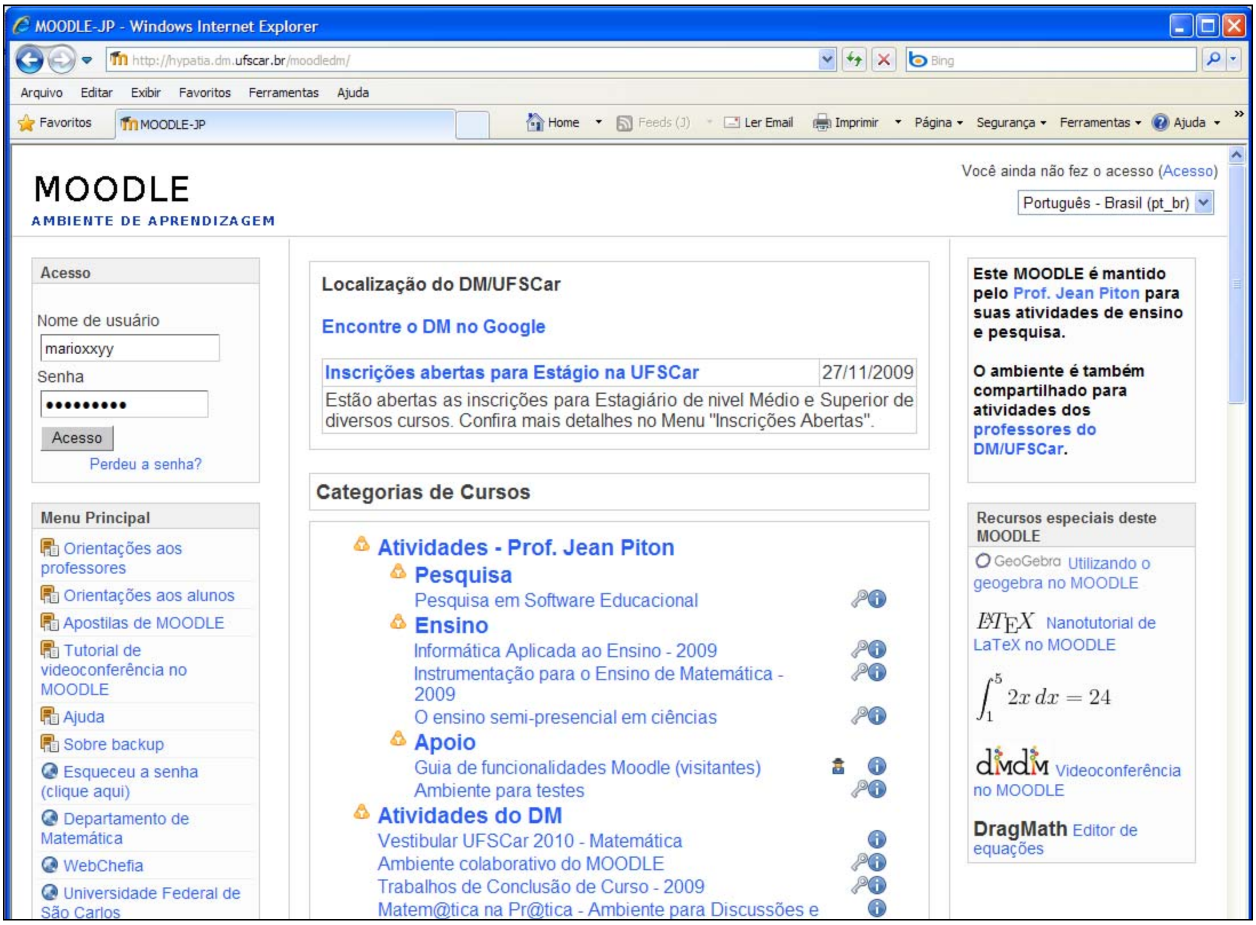


Figura 5.3 – Tela inicial do Moodle

Após a explicação de como se daria o acesso ao ambiente, foi esclarecido como poderiam dirimir suas dúvidas através da utilização do fórum para comunicação direta com o professor. Mostrou-se também como se alterar o perfil e como seria a participação nas atividades “Teoria”, “Lição”, “Simulados” e “Provinha”.

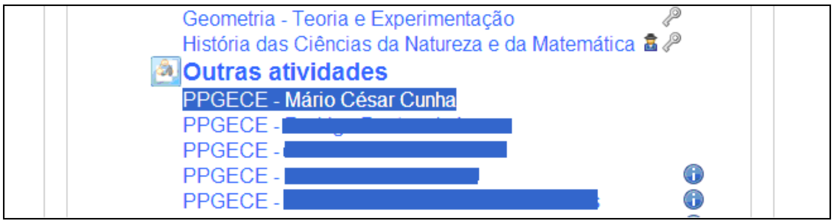


Figura 5.4 – Como e onde acessar o ambiente

Nesta reunião inicial também foi apresentado o Geogebra, e alguns dos visualizadores idealizados. Apesar dos visualizadores serem auto-explicativos, foram passadas informações de como se trabalhar com eles. Buscou-se esclarecer como trabalhar com o mouse, como movimentar os pontos via teclado para melhor precisão, o significado e utilização de um seletor, entre outras informações. Para os alunos que tinham computadores em casa, foi orientado sobre a necessidade de instalação do plugin Java, obtido gratuitamente no site www.java.com. A instalação do plugin Java foi feita em todos os computadores da escola.

Ainda no primeiro semestre foi feita uma pesquisa entre os alunos com a finalidade de verificar quem tinha acesso à internet em casa.

Tabela 5.2 – Participantes com acesso a internet em casa

Classes participantes do ensino médio	Alunos com acesso a internet em casa
2ª Série “A”	82%
2ª Série “B”	58%
3ª Série “A”	73%

A expectativa era que os alunos fossem participar do curso fazendo as lições em casa realmente à distancia. Porém, durante a aplicação do ambiente, alguns alunos disseram que tinham acesso a internet somente nos finais de semana, por pouco tempo; outros, na realidade, não tinham acesso a internet. A grande maioria possuía acesso discado e muito lento. Assim a participação efetiva no ambiente ocorreu na escola, contrariando as expectativas iniciais.

A grande maioria dos alunos utilizou os equipamentos da escola, mas como o número de computadores era reduzido (11 unidades), a possibilidade de que todos os alunos de uma mesma classe participarem simultaneamente da aplicação era praticamente zero. Desta forma, durante as aulas normais, uma parte permanecia na sala de aula e outra na sala de informática, e a cada aula as turmas se revesavam.

A escola não dispõe de um responsável pela sala de informática, assim todo serviço de preparação para a sua utilização foi feita pelo professor.

Os problemas aumentaram quando as máquinas começaram a perder a conexão com a internet. Isto acontecia quando muitas máquinas acessavam o ambiente e os aplicativos GeoGebra ao mesmo tempo. Este problema ocorreu nos primeiros 10 dias. Sem explicação, a conexão ,.voltou a funcionar bem por aproximadamente duas semanas. Depois destas duas semanas sem problemas, a conexão voltou a prejudicar os trabalhos: em todas as máquinas a conexão ao ambiente era perdida após 10 minutos, sendo necessário uma nova conexão, e este problema perdurou até o final da aplicação do ambiente.

A rede computadores da escola e os computadores são terceirizados, e não tínhamos autorização para tentar resolver o problema de conexão. Só os técnicos da empresa responsável poderiam dar a manutenção. Apesar de requisitado com freqüência pela direção da escola, eles não vieram. Quando terminamos nossa aplicação uma reforma geral na sala de informática da escola foi iniciada.

O fórum de dúvidas não foi muito utilizado pelos alunos, pois o professor estava praticamente presente durante a aplicação, e ali as dúvidas eram esclarecidas. A grande maioria das dúvidas dos alunos se resolvia com uma leitura mais detalhada do ambiente e ainda com a comunicação direta com seus colegas que estavam ao seu lado na sala de informática. Muitas perguntas sobre conteúdos das séries anteriores foi feito pelos alunos, como por exemplo “que é um triângulo eqüilátero”, “que é perímetro” e outras deste nível. Isto demonstra a grande falta de pré-requisitos para cursarem a série em que se encontram.

A liberação para que os alunos fizessem a provinha foi em 28 de setembro de 2009, e na segunda semana de outubro de 2009 alguns alunos já haviam encerrado a unidade1, com a provinha.

O problema de acesso a internet pelos computadores da escola comprometeu a unidade 2, e por esse motivo a aplicação se deu apenas com a unidade 1.

Alguns aceitaram participar de uma avaliação presencial sobre o conteúdo visto na unidade 1 após o encerramento de sua aplicação, apenas para verificar a colaboração do AVA na aprendizagem desses alunos. Os resultados obtidos estão na tabela 5.3 abaixo.

Tabela 5.3 – Participantes da avaliação presencial

Classe - ensino médio	Alunos participantes	Alunos avaliados	Média da classe
2ª série A	26	17	8,8
2ª série B	19	11	6,0
3ª série A	20	05	7,6

A avaliação presencial foi voluntária, não sendo obrigatória a participação. Como surpresa os alunos concluintes do terceiro ano tiveram a menor participação entre as três classes.

A sala de informática da escola passa por reforma no momento e não foi possível que os alunos participassem do fórum final com uma avaliação dos participantes sobre o curso. Assim, um questionário foi aplicado aos alunos conforme ilustrado a seguir..

QUESTIONÁRIO SOBRE O CURSO DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA DE GEOMETRIA ANALÍTICA

Curso na plataforma Moodle hospedado no Departamento de Matemática da UFSCar.

OBS. Este curso faz parte de dissertação de Mestrado junto ao PPGECE-UFSCar.

Alunos da EE Dr. GERALDO PEREIRA DE BARROS – BARRA BONITA - SP

*Estudante:*____*nº*____ ___*Série* __

-=-

Gostaria de saber sua opinião sobre sua participação no curso de Geometria Analítica realizado no segundo semestre de 2009. Você aprendeu novos conceitos? Quais? Revisou alguns conceitos? Quais? Quais os prós e os contras do curso? Teve fácil acesso a internet? Usou computador particular ou da escola? Se você não participou do curso poderia dizer o motivo?

Figura 5.4 – Questionário final aos alunos participantes

O quadro abaixo sintetiza os comentários dos alunos em resposta ao questionário.

Tabela 5.4 – Resumo dos comentários dos alunos

	Comentários dos alunos participantes	Respostas
1	Gostei muito do curso de geometria analítica	13
2	A conexão caia todo momento	25
3	Gostei muito de aprender no ambiente da internet	8
4	Não conhecia nada sobre geometria analítica e aprendi	6
5	Acessei a internet de casa e tudo funcionou	9
6	Achei interessante o ensino à distância	4
7	Algumas coisas deveriam ser mais explicadas	2
8	Trabalho diferenciado ajuda o aluno a ganhar vontade de resolver problemas	1
9	Aprendi conceitos novos	5
10	Difícil compreender a teoria	1
11	Gostaria de mais cursos assim	2
12	O que mais gostei foi os gráficos	6
13	Gostei porque não foi cansativo	2
14	Contra: não tem professor para explicar	4
15	É algo novo, não é só para mim e sim para todos	1
16	Recordei alguns conceitos que já tinha estudado.	9
17	Podia fazer em casa a hora que quisesse	1
18	Gostei por ser uma atividade diferente	5
19	Não fiz porque a escola tem poucos computadores	4
20	Não fiz porque não tenho computador em casa	2
21	Não fiz, pois não tinha tempo em casa	2
22	Não fiz o curso porque não gosto de matemática, minha área é outra	5
23	Não estava com vontade de fazer o curso	1

A aplicação do AVA foi aprovada pela maioria dos alunos. O mau funcionamento das máquinas e problemas de acesso à internet foram os maiores problemas encontrados. Ficam claros os benefícios do uso de tecnologias na educação, bem como suas dificuldades que podem ser reduzidas tomando-se alguns cuidados prévios. O mais importante é que esse tipo de tecnologia esta cada vez mais presente no trabalho do professor atual, e os professores do futuro devem estar atentos e preparados para esta nova realidade do ensino.

CAPÍTULO 6: ANÁLISE DOS RESULTADOS DA APLICAÇÃO

Neste capítulo vamos analisar a aplicação do ambiente virtual de aprendizagem na EE Dr Geraldo Pereira de Barros.

De acordo com Mozzaquatro; Medina (2008), a avaliação de um AVA que contemplam variáveis de tecnologia e de aprendizagem deve levar em conta os seguintes aspectos:

- condições em que a aprendizagem se realiza (estrutura);
- modos pelos quais os estudantes são capazes de interagir sendo apoiados nas suas atividades (processos);
- alcance dos objetivos e das metas propostas (resultados).

Os instrumentos de avaliação em AVAs são componentes que permitem dar uma resposta ao professor desenvolvedor sobre os seguintes aspectos:

- usabilidade,
- ergonomia,
- confiabilidade,
- acessibilidade,
- interação e
- aspectos pedagógicos.

A “interface” destes sistemas deve ser amigável e intuitiva, facilitando seu uso e diminuindo o tempo para busca de informação pelo usuário.

Para verificar as variáveis acima foram analisadas as características funcionais e não funcionais do produto educacional deste trabalho: o ambiente virtual de aprendizagem sobre o conteúdo de Geometria Analítica nos tópicos pontos no plano, distâncias entre pontos, ponto médio e baricentro. Observou–se que as formas utilizadas (sequências de aplicação) mostraram–se eficazes para o objetivo proposto ressalvados alguns imprevistos.

Procederei agora a uma análise partimentada dos resultados onde contemplam os aspectos acima citados, que podem ser verificados na descrição do ambiente no capítulo 4

6.1 – A participação dos alunos

Considerando que a participação dos alunos não era obrigatória, pois a aplicação do ambiente não fazia parte do planejamento de ensino da escola, tivemos uma abstenção de 14 dentre os 65 alunos inscritos no ambiente (aproximadamente 22 %), incluindo 3 alunos que deixaram de freqüentar a escola. Nem todos os alunos conseguiram terminar a unidade I, devido principalmente às dificuldades de acesso a internet, motivada pela precariedade da conexão dos computadores da escola. Uma velocidade mais lenta de alguns alunos em prosseguir nas lições foi relacionada ao maior grau de dificuldade de assimilação do conteúdo do ambiente, motivada por falta de pré-requisitos teóricos das séries anteriores.

O gráfico 6.1 a seguir representa a quantidade de atividades da unidade I (Teorias e Lições) completadas pelos 65 alunos inscritos. Observa-se no gráfico que 37 dos 65 inscritos completaram as 8 atividades propostas (4 Teorias e 4 Lições), ou seja, mais da metade dos participantes completaram todas atividades propostas na unidade I.

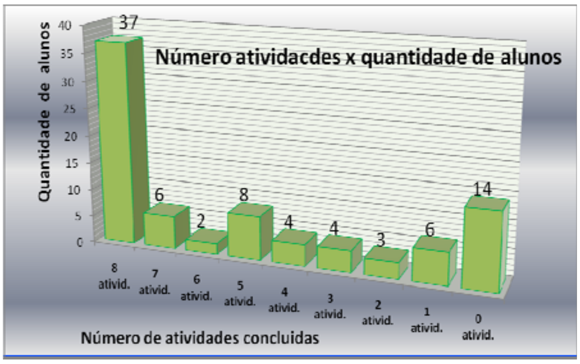


Gráfico 6.1 – Número de alunos que concluíram total ou parcialmente as oito atividades Lições

O gráfico 6.2 a seguir mostra a quantidade de acessos e mensagens publicadas no ambiente durante sua aplicação. Os picos apresentados representam os períodos onde não ocorreram problemas de conexão com a Internet. Observamos-se ainda que o número de mensagens é pequeno devido à presença constante do professor junto aos alunos.

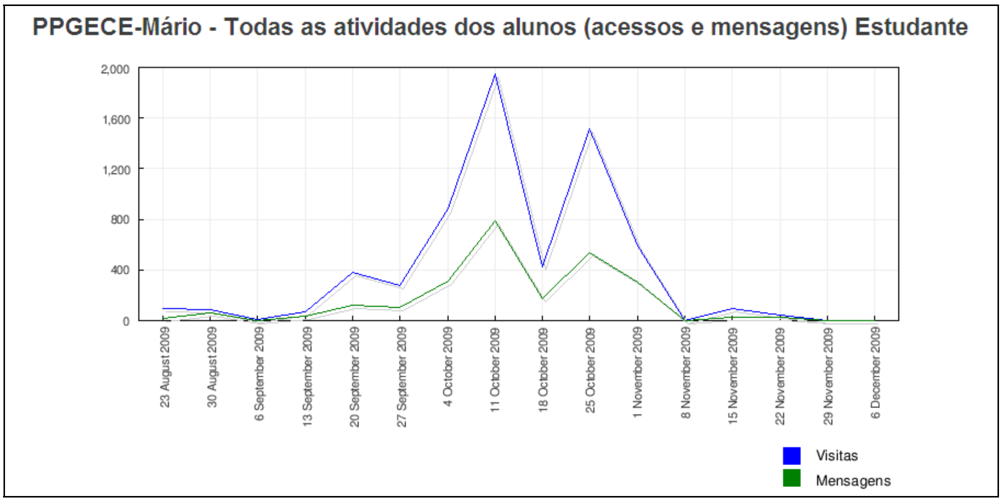


Gráfico 6.2 – Número de acessos e mensagens durante a aplicação das atividades Lições

No questionário final apresentado no capítulo 5, quando perguntado ao aluno por que não participou da aplicação do ambiente, as seguintes respostas indicadas na Tabela 6.1 foram apresentadas.

Tabelas 6.1 – Justificativas de não participação na aplicação do ambiente

Itens	Justificativas dos alunos por não ter participado da aplicação do AVA	Freq. das respostas
1	Não fiz porque a escola tem poucos computadores	4
2	Não fiz porque não tenho computador em casa	2
3	Não fiz, pois não tinha tempo em casa	2
4	Não fiz o curso porque não gosto de matemática, minha área é outra	5
5	Não estava com vontade de fazer o curso	1

Observa-se que quase metade das respostas referia-se ao acesso a Internet. Isso nos alerta sobre a inclusão digital dos alunos na escola. Durante a aplicação outros professores não utilizaram a internet em seus cursos, e caso isto tivesse acontecido os problemas seriam ainda maiores. As outras respostas, justificando a não participação, refletem a falta de motivação e a falta de consciência da aplicação dos conhecimentos matemáticos em sua vida, apesar desses assuntos serem abordados na escola pelos professores. Os motivos de abandono aqui apresentados são compatíveis com aqueles indicados por Cosme; Maciel (2005) manifestado pelos alunos em um curso de ensino a distância no México, vistos no capítulo 2.

Através de alguns relatos recebidos via fórum nota-se o entusiasmo dos alunos na participação deste trabalho.

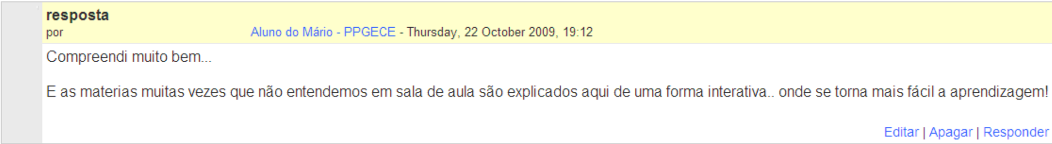


Figura 6.1 – relato de um participante da aplicação.

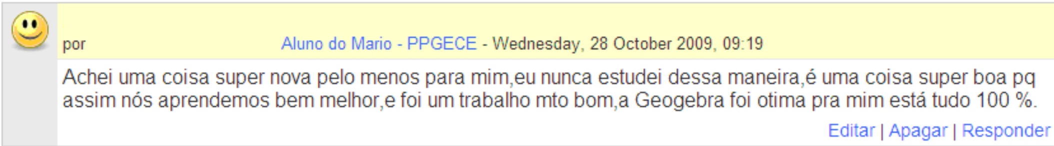


Figura 6.2 – relato de um participante da aplicação

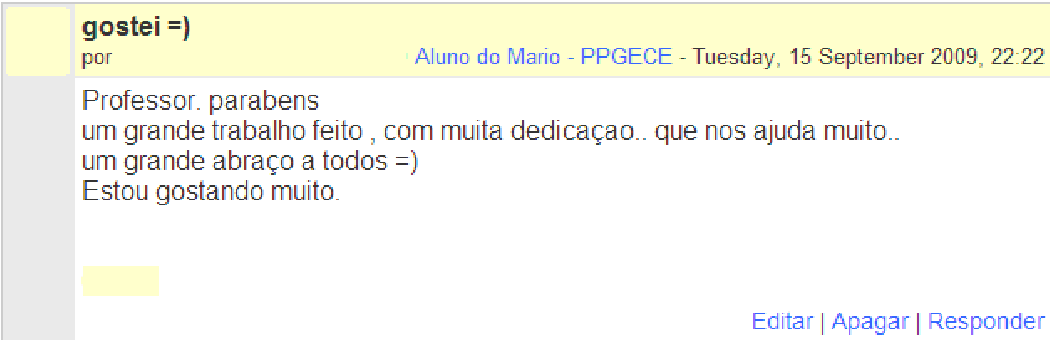


Figura 6.3 – relato de um participante da aplicação

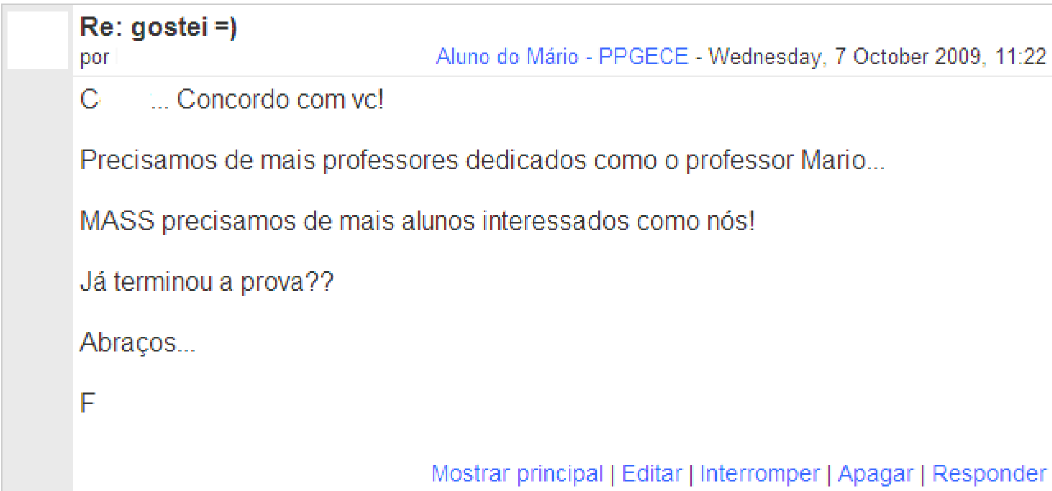


Figura 6.4 – relato de um participante da aplicação.

Concluindo a respeito da participação dos alunos pode-se dizer que foram satisfatórias, prejudicada apenas pela precariedade do acesso a internet.

6.2 – Houve aprendizagem?

Uma maneira de verificar se houve realmente aprendizagem é a avaliação, que pode ocorrer de várias formas. Nesta aplicação do AVA, foram aplicadas duas provas, sendo a primeira a “on line” e outra presencial, em sala de aula. Ambas as avaliações ocorreram após conclusão da unidade I.

Devemos ressaltar aqui que participaram deste projeto alunos do ensino médio da segunda série, onde os conteúdos eram inéditos e alunos da terceira série, que já estudaram estes conteúdos no primeiro bimestre do ano letivo.

Segue abaixo as tabelas com os aproveitamentos dos alunos durante a participação da aplicação do AVA.

Tabelas 6.2 – Aproveitamento dos alunos da segunda série "A"

NÚMERO	CLASSE	Lição: Teoria 1.1 - PONTOS NO PLANO	Lição: Teoria 1.2 - DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS	Lição: Teoria 1.3 - PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO	Lição: Teoria 1.4 - O BARICENTRO DO TRIÂNGULO	nota das teorias da unidade 1	Lição: Lição 1.1 - Pontos no plano	Lição: Lição 1.2 - distância entre dois pontos	Lição: Lição1.3 - Ponto médio de um segmento	Lição: Lição 1.4 - Baricentro de um triângulo	nota das lições da unidade 1	Questionário: Provinha da unidade 1	Questionário: Simulado da Unidade 1	nota da unidade 1
1	2º A	100	100	100	50	8,8	10	10	10	10	10	3,3	8	5,2
3	2º A	100	100	100	100	10	10	10	10	10	10	5	4	6,5
4	2º A	100	100	100	100	10	10	10	10	10	10	6	-	7,2
5	2º A	100	75	-	-	4,4	10	-	-	-	2,5	-	-	0,9
6	2º A	100	100	100	100	10	10	10	10	10	10	5	3,3	6,5
7	2º A	100	25	100	-	5,6	10	10	-	-	5	-	-	1,6
8	2º A	100	100	100	100	10	10	10	10	10	10	5	-	6,5
10	2º A	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	-	1,4
11	2º A	100	75	100	-	6,9	-	-	-	-	-	-	-	0,7
12	2º A	100	100	100	100	10	10	10	10	10	10	3	4	5,1
13	2º A	100	100	100	100	10	10	10	10	-	7,5	-	-	2,5
15	2º A	100	25	100	100	8,1	10	10	10	10	10	6,5	6	7,4
16	2º A	100	100	100	100	10	10	10	10	10	10	2,5	-	4,8
17	2º A	100	50	100	100	8,8	10	10	10	10	10	10	-	9,9
18	2º A	100	100	100	100	10	10	10	10	10	10	10	9,5	10
19	2º A	100	100	100	100	10	10	10	10	10	10	9	-	9,3
20	2º A	100	100	100	100	10	10	10	10	10	10	5,8	5,3	7,1
21	2º A	100	100	50	-	6,3	10	10	-	-	5	-	-	1,6
22	2º A	100	100	100	100	10	10	10	10	10	10	8	-	8,6
23	2º A	100	100	100	100	10	10	10	10	10	10	8,3	-	8,8
24	2º A	100	75	100	100	9,4	10	10	10	10	10	10	10	9,9
25	2º A	100	100	100	100	10	10	10	10	10	10	10	4	10
26	2º A	100	-	-	-	2,5	10	-	-	-	2,5	-	-	0,8
27	2º A	100	100	16,7	100	7,9	10	10	10	10	10	6	-	7
28	2º A	100	50	-	-	3,8	10	10	-	-	5	-	-	1,4
30	2º A	100	100	100	100	10	10	10	10	10	10	6,5	4,5	7,6
31	2º A	100	-	-	-	2,5	-	-	-	-	-	-	-	0,3
32	2º A	100	100	100	100	10	10	10	10	10	10	7	1,8	7,9

Tabelas 6.3 – Aproveitamento dos alunos da segunda série "B"

NÚMERO	CLASSE	Lição: Teoria 1.1 - PONTOS NO PLANO	Lição: Teoria 1.2 - DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS	Lição: Teoria 1.3 - PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO	Lição: Teoria 1.4 - O BARICENTRO DO TRIÂNGULO	nota das teorias da unidade 1	Lição: Lição 1.1 - Pontos no plano	Lição: Lição 1.2 - distância entre dois pontos	Lição: Lição1.3 - Ponto médio de um segmento	Lição: Lição 1.4 - Baricentro de um triângulo	nota das lições da unidade 1	Questionário: Provinha da unidade 1	Questionário: Simulado da Unidade 1	nota da unidade 1
1	2º B	100	100	100	100	10	10	10	10	10	10	8,3	-	8,8
2	2º B	100	100	100	100	10	10	10	10	10	10	-	-	3
5	2º B	100	100	100	100	10	10	10	10	-	7,5	-	-	2,5
6	2º B	100	-	-	-	2,5	-	-	-	-	-	-	-	0,3
7	2º B	100	100	100	100	10	10	-	-	-	2,5	-	-	1,5
8	2º B	100	100	100	-	7,5	-	-	-	-	-	-	-	0,8
9	2º B	100	100	100	100	10	10	10	10	10	10	9,8	7	9,9
10	2º B	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
12	2º B	100	100	100	100	10	10	10	10	-	7,5	1,8	-	3,8
13	2º B	100	-	-	-	2,5	-	-	-	-	-	-	-	0,3
16	2º B	100	75	100	100	9,4	-	10	-	-	2,5	-	-	1,4
17	2º B	100	75	100	-	6,9	10	-	-	-	2,5	-	-	1,2
18	2º B	100	100	100	100	10	10	10	10	10	10	3	-	5,1
21	2º B	100	-	-	-	2,5	10	-	-	-	2,5	-	-	0,8
23	2º B	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
24	2º B	100	75	100	100	9,4	10	10	10	-	7,5	4	-	5,2
25	2º B	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
26	2º B	100	100	100	100	10	10	10	10	10	10	9	10	9,3
27	2º B	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
28	2º B	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
30	2º B	100	-	-	-	2,5	10	-	-	-	2,5	-	-	0,8
32	2º B	100	100	50	-	6,3	10	10	-	-	5	-	-	1,6
33	2º B	100	25	50	50	5,6	10	10	10	10	10	10	7	9,6
34	2º B	100	100	100	-	7,5	-	10	-	-	2,5	-	-	1,3
35	2º B	100	100	100	-	7,5	10	10	-	-	5	-	-	1,8
36	2º B	100	75	100	25	7,5	10	10	10	10	10	-	-	2,8

Tabelas 6.4 – Aproveitamento dos alunos da terceira série "A"

NÚMERO	CLASSE	Lição: Teoria 1.1 - PONTOS NO PLANO	Lição: Teoria 1.2 - DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS	Lição: Teoria 1.3 - PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO	Lição: Teoria 1.4 - O BARICENTRO DO TRIÂNGULO	nota das teorias da unidade 1	Lição: Lição 1.1 - Pontos no plano	Lição: Lição 1.2 - distância entre dois pontos	Lição: Lição1.3 - Ponto médio de um segmento	Lição: Lição 1.4 - Baricentro de um triângulo	nota das lições da unidade 1	Questionário: Provinha da unidade 1	Questionário: Simulado da Unidade 1	nota da unidade 1
1	3º A	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	3º A	100	75	100	100	9,4	10	10	10	10	10	8,5	7	8,9
3	3º A	100	100	100	12,5	7,8	10	10	10	10	10	2,5	3,8	4,5
4	3º A	100	25	100	50	6,9	10	10	10	10	10	6,8	-	7,4
5	3º A	100	100	100	100	10	10	10	-	-	5	-	-	2
6	3º A	100	100	50	50	7,5	10	10	10	10	10	10	-	9,8
7	3º A	100	-	-	-	2,5	-	-	-	-	-	-	-	0,3
8	3º A	100	100	100	50	8,8	10	10	10	10	10	0	-	2,9
9	3º A	100	50	100	100	8,8	10	10	10	10	10	4	4	5,7
10	3º A	100	25	100	-	5,6	10	10	10	10	10	10	-	9,6
11	3º A	100	-	-	-	2,5	-	-	-	-	-	-	-	0,3
13	3º A	100	100	50	100	8,8	10	10	10	10	10	0	-	2,9
14	3º A	100	75	100	100	9,4	10	10	10	10	10	2,8	1,8	4,9
15	3º A	100	100	100	100	10	10	10	10	10	10	9,5	-	9,7
17	3º A	100	100	100	100	10	10	10	10	10	10	0	5,5	3
19	3º A	100	100	50	100	8,8	10	-	10	-	5	-	-	1,9
20	3º A	100	75	100	50	8,1	-	-	-	-	-	-	-	0,8
22	3º A	100	-	-	-	2,5	-	-	-	-	-	-	-	0,3
23	3º A	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
24	3º A	100	50	100	100	8,8	-	-	-	10	2,5	0	10	1,4
25	3º A	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
26	3º A	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
27	3º A	100	100	100	-	7,5	10	10	10	10	10	1,3	5,5	3,7
28	3º A	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
29	3º A	100	100	100	-	7,5	10	10	-	-	5	-	-	1,8
30	3º A	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
31	3º A	100	50	100	-	6,3	-	-	-	-	-	-	-	0,6
32	3º A	100	75	100	100	9,4	10	10	10	10	10	7	-	7,8
33	3º A	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
34	3º A	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Nas três tabelas acima não foi calculada a média e o desvio padrão, pois nem todos os alunos fizeram todas as atividades previstas.

O gráfico abaixo representa as notas obtidas pelos alunos no questionário "provinha da unidade 1" citada no capítulo 4, onde a média aritmética das notas foi 6,7.

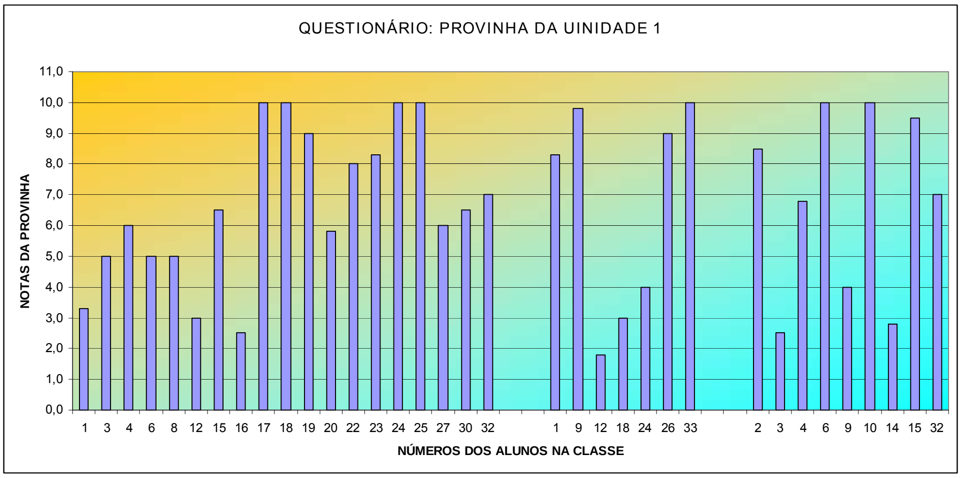


Gráfico 6.3 – Notas dos alunos na provinha da Unidade 1: grupo de 1 a 32 - 2ºA, grupo de 1 a 36 - 2ºB e grupo de 2 a 32 - 3ºA

O gráfico abaixo representa as notas obtidas pelos alunos na avaliação presencial citada no capítulo 4, onde a média aritmética das notas foi 7,5.

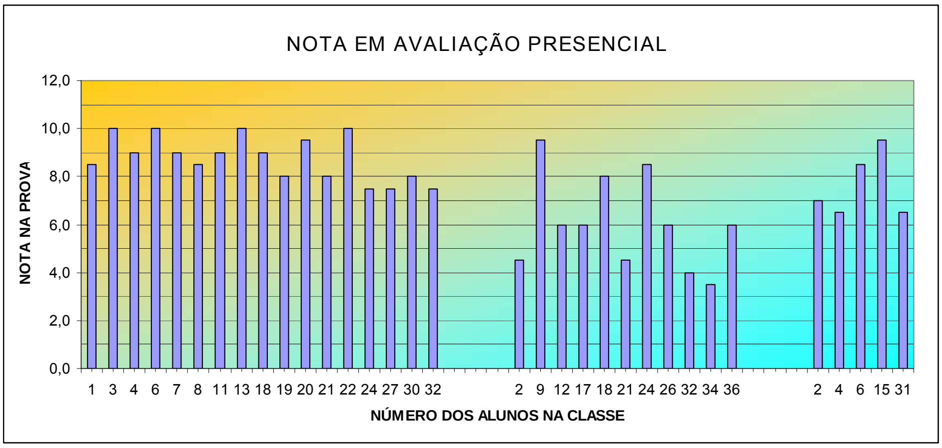


Gráfico 6.4 – Notas dos alunos na prova presencial: grupo de 1 a 32 - 2ºA, grupo de 2 a 36 - 2ºB e grupo de 2 a 31 - 3ºA

Observando as médias aritméticas dos dois instrumentos de avaliação verificamos um valor menor na provinha. Este fato pode ser explicado pela não realização do simulado por parte de alguns, por não ser uma atividade obrigatória, levando a uma dificuldade maior durante a realização da provinha.

Com os resultados obtidos pelos estudantes nas avaliações nota-se que houve uma aprendizagem, neste caso mais significativa, visto que atingiram um conhecimento novo a partir dos anteriores que já possuíam.

6.3 – Os resultados inesperados

Sendo professor dessa turma no ensino médio regular, sei da indiferença que alguns alunos têm pelo estudo. A grande surpresa foi à dedicação desses alunos, onde a todo momento, durante a aplicação, arguiam sobre esclarecimentos do ambiente, demonstrando uma dedicação nunca antes vista em sala de aula.

Outro resultado inesperado foi à falta de dedicação dos alunos da terceira série do ensino médio, vistos que seria uma grande oportunidade de revisão para os exames vestibulares.

Outro saldo positivo foi a participação de um aluno com deficiência auditiva na aplicação do ambiente pois, apesar da não utilização de recursos sonoros na confecção do AVA, este aluno teve uma facilidade de estudo maior comparado com a sala de aula tradicional.

Não esperava também a impossibilidade de aplicar a Unidade II. Este fato foi inevitável visto que os computadores da escola foram retirados para uma reforma da sala de informática e esse era o local onde quase todos os alunos trabalharam durante a aplicação do ambiente aqui apresentado.

6.4 – Objetivo atingido

Mesmo somente com a aplicação da unidade I, o ambiente virtual de aprendizagem mostrou-se uma ferramenta viável e potencialmente importante no ensino da matemática, podendo ainda ter outras aplicações, onde outros professores podem fazer um uso diferenciado, principalmente dos visualizadores elaborados com auxílio do GeoGebra.

A plataforma Moddle também se mostrou uma ferramenta adequada, sendo sua aplicação facilmente compreendida pelos alunos em um processo de EAD e muito útil para o professor que dela faz uso.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, Maria Elizabeth Bianconcini de. **Informática e formação de professores.** Brasília: Ministério da Educação/SEED, 2000, p. 13-26 (Coleção PROINFO, v.09). Disponível em: <http://escola2000.net/eduardo/textos/proinfo/livro09-Elizabeth%20Almeida.pdf>. Acesso em 17 out. 2009.

________. Incorporação da tecnologia de informação e comunicação na escola: vencendo desafios, articulando saberes e tecendo a rede. In: MORAES, Maria Cândida. (Org.). **Educação a distância:** fundamentos e práticas. Campinas, Unicamp/NIED, 2002. p. 71-90.

________. Educação a distância na internet: abordagens e contribuições dos ambientes digitais de aprendizagem. **Educação e pesquisa**: Revista da Faculdade de Educação da USP, São Paulo: v. 29, n. 2, p. 327-340, jul./dez., 2003.

ALVES, George de Souza; SOARES, Adriana Benevides. Geometria dinâmica**:** um estudo de seus recursos, potencialidades e limitações através do *software* Tabulae. In: IX WORKSHOP DE INFORMATICA NA ESCOLA, 09 - Congresso da Sociedade Brasileira de Computação, 23., 2003, Campinas. **Anais...**, Campinas: UNICAMP, 2003. p. 275-286.

COSME, Azahalia Panchí; MACIEL, Francisco Javier Chávez. **Factores relacionados com el abandono de estudios de los alumnos de educación superior a distancia:** *una experiência*. , México: Virtual Educa, 2005. 10 p. Disponível em: <http://e-spacio.uned.es/fez/view.php?pid=bibliuned:19408> Acesso em: 17 out. 2009.

DOUGIAMAS, Martin. **Sobre o Moodle.** Disponível em: <http://docs.moodle.org/pt_br/Sobre_o_Moodle >. Acesso em: 12 de out. 2009.

HOHENWARTER, Markus ; PREINER, Judith. **Ajuda GeoGebra 3.0.** Disponível em: <http://didisurf.googlepages.com/tutorial_geogebra_PT30_antonioribeir.doc>, Acesso em: 12 de out. 2009.

KENSKI, Vani Moreira. **Tecnologias e Ensino Presencial e a Distância.** 6. ed. Campinas - São Paulo: Papirus, 2008, 157 p.

LIMA, Adriana Oliveira. **Fazer escola:** a gestão de uma escola piagetiana (construtivista).1. ed. Petrópolis: Vozes, 2003, 256 p.

MARCHAND, Louise. Características e problemáticas especificas: A formação universitária pela videoconferência. In: AVALA, Séraphin. ***Ciberespaço e formações abertas:*** rumo a novas práticas educacionais?. Porto Alegre: Artmed, 2002, p. 131 -150.

MARTINS, João Batista. ***Vygotsky & a educação***. Belo Horizonte: Autentica, 2005, p.52-56.

MERCER, Neil; ESTEPA, Francisco Gonzáles. A Educação a Distância, o Conhecimento Compartilhado e a Criação de uma Comunidade de Discurso Internacional. In: LITWIN, Edith. **Educação a distância :** temas para o debate de uma nova agenda educativa. Porto Alegre: Artmed, 2001, p. 23 - 37.

MOODLE, **version 1.9 (2007).** Disponível em: < http://moodle.org >. Acesso em: 12 de fev. 2009.

MOODLE – DM – UFSCar. **Tutorial sobre o GeoGebra.** Disponível em: <http://hypatia.dm.ufscar.br/moodledm/mod/resource/view.php?inpopup=true&id=125> Acesso em: 13 de fev. 2009.

MOREIRA, Marco Antonio. **Aprendizagem significativa.** Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1999. 129 p.

MOZZAQUATRO, Patrícia Mariotto ; MEDINA, Roseclea Duarte. Avaliação do Ambiente Virtual de Aprendizagem Moodle sob diferentes visões: aspectos a considerar. **Novas tecnologias na educação:** Revista da UFRGS, Porto Alegre, V. 6, Nº 2, Dezembro, 2008.

NOVAK, Joseph Donald. **Uma teoria de educação**. São Paulo: Pioneira, 1981. 252p.

OLIVEIRA, Marta Kohl de. **Vigotsky:** Aprendizado e desenvolvimento um processo sócio-histórico. 4. ed. Petrópolis: editora Scipione, 111 p.

PAPERT, Seymour. **Construtructionism:** A new opportunity for elementary science education. A proposal to the national Science Foundation, Massachusetts Institute of tecnology, Media laboratory, Epistemology and Learning Group, Cabridge, Massachusetts, 1986.

________. **A Máquina das Crianças:** repensando a escola na era da informática. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994. 210 p. (p. 139-144)

PIAGET, Jean. **A epistemologia genética**. Petrópolis: Vozes, 1971. 110p.

RAMOS, Edla Maria Faust; MENDONÇA, Ivan José. O Fundamental na Avaliação da Qualidade do Software Educacional. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 02,1991, Porto Alegre. Anais..., Porto Alegre: SBC, 1991, p.122-131. Disponível em : < http://www.inf.ufsc.br/~edla/publicacoes/Qualid.pdf> *,* Acesso em: 28 jan. 2010.

RIBEIRO, Elvia Nunes; MENDONÇA, Gilda Aquino de Araújo; MENDONÇA, Alzino Furtado. **A importância dos Ambientes Virtuais de Aprendizagem na busca de novos domínios na EAD**. (2007). Disponível em: < http://www.abed.org.br/congresso2007/tc/4162007104526AM.pdf>. Acesso em: 28 jan. 2010.

ROSA, Paulo Ricardo da Silva. **Instrumentação para o ensino de ciências** – Capítulo 3, Disponível em: <http://www.dfi.ccet.ufms.br/prrosa/Pedagogia/index.htm>. , Acesso em: 28 jan. 2010

SALES, Gilvandenys Leite et al. Atividades de modelagem exploratória aplicada ao ensino de física moderna com a utilização do objeto de aprendizagem pato quântico. **Revista brasileira do ensino de física,** Fortaleza, V. 30, n. 03, 3501/1-3501/13, 2008. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0102-47442008000300017&lng=es&nrm=iso&tlng=es>, Acesso em: 28 jan. 2010

SCHERER, Suely. **Uma estética possível para a educação bimodal:** aprendizagem e comunicação em ambientes presenciais e virtuais. 2005. 240 p. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação: Currículo, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

TANNOUS, Katia; ROPOLI, Edilene. Análise dos aspectos motivacionais relacionados à evasão e à aprovação em um curso de extensão. In: COGRESSO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA, 12*, Florianópolis.* ***Anais... Florianópolis,*** 2005*,* Disponível em: <http://www.abed.org.br/congresso2005/por/pdf/152tcc5.pdf> Acesso em: 28 jan. 2010.

VALENTE, José Armando; PRADO, Maria Elisabette B. Brito; ALMEIDA, Maria Elizabeth Bianconcini de. **Educação a Distância Via Internet.** São Paulo: Avercamp editora, 2003. 204p.

VALENTE, José Armando; O uso inteligente do computador. **Pátio – revista pedagógica**, São Paulo, v. 1, n. 1, p.19-21, mai./jul. 1997. Disponível em:
< http://gladston.menezes.vilabol.uol.com.br/micromundos/Valente.htm
> Acesso em: 28 jan. 2010.

________. **Computadores e conhecimento:** repensando a educação. 2ª ed. Campinas-SP: Unicamp/NIED, 1998.

VARELA, Aida Varela; MARILENE Lobo Abreu Barbosa. Aplicação de teorias cognitivas no tratamento da informação. **Revista Brasileira de Biblioteconomia e Documentação,** São Paulo: v.3, n.2, p.116-128, 2007. Disponível em:
< http://www.febab.org.br/rbbd/ojs-2.1.1/index.php/rbbd/article/viewFile/65/56
> Acesso em: 28 jan. 2010.

VECCHIONE, Cristina Del Mastro. **La formación de tutores en un contexto virtual:** un diseño instrucional para la enseñanza y el aprendizaje estratégicos. 06 Disponível em <http://ihm.ccadet.unam.mx/virtualeduca2006/pdf/13-CDV.pdf> Acesso em 28 out. 2010.

VYGOTSKY, Lev Semenovich. **A formação social da mente**. *4ª ed. Brasileira.* São Paulo: Martins Fontes, 1984. 160p.

________. **Pensamento e linguagem.** 3 ed. São Paulo: Martins Fontes, 1991. 135 p. -- (Coleção Psicologia e Pedagogia. Nova Série)