UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROGRAMA DE POS GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

DANILO EUDES PIMENTEL

METODOLOGIA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO PLANEJAMENTO DE ATIVIDADES PARA A TRANSIÇÃO DA ARITMÉTICA PARA A ÁLGEBRA

SÃO CARLOS/SP

2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIENCIAS EXATAS TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM

METODOLOGIA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO PLANEJAMENTO DE ATIVIDADES PARA A TRANSIÇÃO DA ARITMÉTICA PARA A ÁLGEBRA

Danilo Eudes Pimentel

Orientadora: Prof[a]. Dra. Yuriko Yamamoto Baldin

SÃO CARLOS/SP

2010

METODOLOGIA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO PLANEJAMENTO DE ATIVIDADES PARA A TRANSIÇÃO DA ARITMÉTICA PARA A ÁLGEBRA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino em Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal de São Carlos, como exigência parcial para a obtenção do título de mestre, sob orientação da Professora Doutora Yuriko Yamamoto Baldin.

SÃO CARLOS/SP

2010

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar

P644mr

Pimentel, Danilo Eudes.
Metodologia da resolução de problemas no planejamento de atividades para a transição da Aritmética para a Álgebra / Danilo Eudes Pimentel. -- São Carlos : UFSCar, 2010.
133 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2010.

1. Matemática - estudo e ensino. 2. Álgebra. 3. Aritmética. 4. Resolução de problemas. 5. Dificuldades de aprendizagem. I. Título.

CDD: 510.7 (20ª)

Banca Examinadora:

Yuriko Yamamoto Baldin

Profa. Dra. Yuriko Yamamoto Baldin
DM - UFSCar

Patrocinio

Prof. Dr. Antonio Carlos Patrocínio
IM - UNICAMP

Paterlini

Prof. Dr. Roberto Ribeiro Paterlini
DM - UFSCar

Dedico o presente trabalho a todos os professores que sentem dificuldades no ensino de álgebra e que buscam alternativas para melhorar essa aprendizagem.

A Matemática tem sido sempre sinônimo de dificuldades, de constrangimento, e de saber reservado a pessoas diferentes de nós.

(Baruk, 1985)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, sem ele nada disso seria possível.

À minha orientadora, Professora Doutora Yuriko Yamamoto Baldin, pelo conhecimento transferido.

À minha mãe Zenaide dos Santos Pimentel e ao meu pai Bendito Dirceu Pimentel, pela oportunidade da vida.

À minha irmã Talita Cristina Pimentel.

E a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a elaboração deste trabalho.

RESUMO

As dificuldades na aprendizagem de álgebra constatadas especialmente em alunos do primeiro ano do ensino médio motivaram esta pesquisa, que tem a finalidade de descobrir e entender as origens do problema e estudar propostas para possíveis soluções. O primeiro alvo do presente trabalho é explorar as possíveis causas das dificuldades na transição da aritmética para a álgebra, que deveria ser feita na segunda metade do Ensino Fundamental, porém ocorre com maior destaque no oitavo ano/sétima série. Foram planejadas e aplicadas atividades sob forma de resolução de problemas para detectar estas dificuldades e auxiliar na introdução ao raciocínio algébrico em três turmas de sétima série da Escola Estadual "Professor Euclides de Carvalho Campos", Botucatu, SP. Os objetivos das atividades são: 1 – Pesquisar as etapas do processo de planejamento de atividades matemáticas para o ensino de álgebra; detectar as dificuldades dos estudantes na sua aprendizagem; 2 – Executar as atividades em salas de aula de sétima série; coletar os resultados e analisá-los de forma a subsidiar o trabalho de dissertação; elaborar propostas que contribuam para facilitar a aprendizagem de álgebra. Para isso foi utilizada a metodologia de resolução de problemas, com propostas de problemas contextualizados, envolvendo modelagem de problemas com equações do primeiro grau, sistemas lineares, geometria e contagem. Além de aulas expositivas nas quais se fez a síntese dos resultados obtidos, foi enfatizada a aprendizagem participativa do trabalho em grupo para a execução das atividades. Como resultado, foram detectadas dificuldades no discernimento do papel das incógnitas na resolução de equações, no significado das letras utilizadas como variáveis na modelagem de problemas e a forte tendência em tentar resolver exercícios apenas pela aritmética, especialmente pelo método da tentativa e erro. O presente trabalho analisou as dificuldades detectadas tanto do ponto de vista teórico-conceitual de transição da aritmética para a álgebra, quanto pela ótica contextual da metodologia de resolução de problemas que envolvem o planejamento escolar e o ambiente social.

Palavras chaves: Transição da aritmética para álgebra. Metodologia de resolução de problemas. Dificuldades no ensino da álgebra.

ABSTRACT

Difficulties in learning algebra found on high school, especially among students of the first year have motivated this research, in order to discover and understand the origins of the problem and consider proposals for possible solutions. The first target of the present research was to explore the possible causes of difficulties on the transition from arithmetic to algebra, which should be done in the second half of elementary school but occurs most notably in the eighth year / seventh grade. Activities configured as “problem solving” were planned and implemented to detect problems and to support the introduction to algebraic reasoning on three groups of seventh grade students at Escola Estadual “Professor Euclides de Carvalho Campos”, Botucatu, SP. The objectives of those activities are: 1 – Search the steps involved in planning activities for teaching algebra; find the students’ difficulties in its learning; 2 – Implement classroom activities in the seventh grade; collect and analyze the results in order to support the dissertation work and prepare proposals to assist the learning of algebra. In order to reach it, the problem solving methodology was used with proposals for contextual problems involving modeling problems with first-degree equations, linear systems, geometry and counting. In addition to explanative lessons, in which the results were synthesized, the group work and participatory learning were emphasized. As a result, the students shown their difficulties to discern the role of the unknowns in the equation’s solving, the meaning of characters as variables in modeling problems and also a strong tendency of trying to solve only arithmetic’s exercises, especially through the method of trial and error. The present research examined the difficulties found as by the points of view of the theoretical conceptual transition from arithmetic to algebra as by the contextual problem solving methodology, which involves the school planning and the social environment.

Keywords: Transition from Arithmetic to Algebra. Problem Solving Methodology. Difficulties in teaching Algebra.

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

1 INTRODUÇÃO

O presente capítulo traz indicações, condições e questionamentos que motivaram a realização desse estudo; em seguida se apresentam os objetivos juntamente com as etapas dessa pesquisa e a composição de cada um dos capítulos.

A insatisfação do professor de ensino médio relacionado ao baixo rendimento na aprendizagem de álgebra motivou a realização de uma pesquisa, cuja finalidade é buscar e entender as origens desse problema e, por conseguinte, propor soluções. Ao se analisar as grades curriculares, a Proposta Curricular do Estado de São Paulo (2008) e os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs (BRASIL, 1998) percebe-se que o ensino fundamental é a etapa de aprendizagem mais apropriada para ser examinada, por ser nessa fase da educação básica que se introduz o estudo de álgebra. Especificamente, é no oitavo ano (sétima série) que ocorre a transição da aritmética para a álgebra; nessa trajetória pode estar a chave da problemática diagnosticada no ensino médio.

A introdução à álgebra deve ser realizada de forma que se privilegie a essência do raciocínio e desperte nos estudantes a curiosidade, o espírito investigativo e a necessidade de saber operar uma ferramenta capaz de descrever situações e fenômenos modelizados por fórmulas ou equações matemáticas. A resolução de exercícios de fixação que incluam técnicas de articulações de símbolos é importante, mas deve ser acompanhada de uma exploração prévia de conhecimentos algébricos.

Introduzir a álgebra com séries de repetições de exercícios de fixação apresenta ao estudante um conteúdo que apenas ressalta a memorização de roteiros e, conseqüentemente, não desenvolve maiores significados, isto é, entendimentos a esse aprendizado. Muitos livros didáticos propõem intermináveis listas de exercícios de fixação para introduzir e desenvolver um conteúdo algébrico, técnicas francamente divergentes das idéias propostas nessa dissertação, a qual apresenta como prioridade o entendimento dos conceitos para posteriormente propor exercícios de treinamento e fixação de procedimentos.

O baixo nível apresentado pelos estudantes do ensino médio na aprendizagem de álgebra impulsionou um estudo para se buscar entender essas dificuldades e suas possíveis origens; por sua vez, esse entendimento conduziu às investigações sobre como se realiza a introdução ao raciocínio algébrico e a transição da aritmética para álgebra.

Em pesquisas acerca das dificuldades na aprendizagem de álgebra já realizadas destacam-se autores como Wu (2009), que afirma não haver continuidade entre a aprendizagem da aritmética e a introdução ao raciocínio algébrico em níveis de ensino básico; Kieran (1992), que apresenta formas diferenciadas de se introduzir a álgebra a partir de informações da aritmética (pré-álgebra); e ainda Shulman (1986), que indica a teoria do conhecimento pedagógico do conteúdo como fundamental na prática do professor. Esses autores, juntamente com outras literaturas, proporcionaram conhecimentos fundamentais para a formulação de atividades que contribuem para preencher as lacunas da aprendizagem.

Como forma de organizar e entender as finalidades da aprendizagem de álgebra no campo escolar foram analisados os Parâmetros Curriculares Nacionais e dessa forma se estruturou o trabalho, de acordo com as necessidades da escola básica. A metodologia adotada na proposta das atividades foi a Metodologia da Resolução de Problemas, indicada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, cuja grande potencialidade é o desenvolvimento da autonomia dos estudantes na obtenção de conhecimentos.

Desenvolver o raciocínio indutivo, investigativo e dedutivo faz parte da introdução ao raciocínio algébrico, que proporciona ao estudante condições para o entendimento do que uma letra pode representar em contextos algébricos, tais como em equações do primeiro grau com uma incógnita, sistemas com duas equações e duas incógnitas ou em problemas de contagem.

Com a finalidade de conectar as reflexões originadas pelos estudos sobre a aprendizagem de álgebra com os anseios em relação à prática em sala de aula, o presente trabalho compôs e executou uma seqüência didática de atividades para auxiliar na transição da aritmética para a álgebra.

As pesquisas e estudos realizados contribuíram na organização de atividades que conduzissem ao raciocínio algébrico, com base em conhecimentos aritméticos prévios dos estudantes do oitavo ano do ensino fundamental, anteriormente chamada sétima série. As primeiras atividades aplicadas em sala de aula, de caráter investigativo, foram compostas de exercícios que ou apresentavam materiais concretos e manipulativos ou se baseavam na investigação de tabelas e figuras, como forma de induzir os alunos a desenvolver raciocínios mais abstratos, necessário para álgebra.

As questões foram propostas sob a forma de resolução de problemas, com presença de exercícios contextualizados. Uma das finalidades dessa atividade inicial foi buscar identificar o nível de conhecimento dos estudantes, para a elaboração de atividades posteriores.

As atividades investigativas são referenciais para a realização das atividades desenvolvedoras e são compostas por aulas expositivas, cujo objetivo é desenvolver o raciocínio algébrico e instruir tecnicamente os alunos. Nessa etapa, sua participação ativa na resolução de problemas e exercícios de fixação contribui para a introdução do raciocínio da álgebra; com a apresentação de algumas técnicas algébricas é possibilitada uma ligação entre o concreto dos materiais manipulativos e formas mais abstratas como as estruturas algébricas dos números.

As atividades finalizadoras estabelecem todo o conhecimento algébrico desenvolvido e propõem a retomada de atividades, para mostrar novas formas de resolução de um mesmo problema. Essas atividades indicam que a proposta dessa seqüência didática foi cíclica, pois inicialmente se detectam as dificuldades, se propõem encaminhamentos e instruções e se finaliza com retomadas de atividades anteriormente realizadas, onde se apresentam sínteses relacionadas aos conteúdos desenvolvidos.

Uma descrição do trabalho desenvolvido, o desempenho apresentado pelos alunos e uma análise geral do trabalho desenvolvido compõem a parte final dessa dissertação.

Como produto de uma dissertação de mestrado profissional, as atividades estão compiladas como apêndice destacável que pode ser utilizado por professores licenciados e outros interessados.

Os tópicos a seguir apresentam a motivação, os objetivos e a metodologia adotada pelo presente trabalho, além de uma descrição sucinta dos capítulos que o compõem.

1.1 Motivação

O conteúdo de álgebra no ensino médio é bem extenso. Há necessidade de abstração, manipulação de símbolos matemáticos e especialmente da descrição de situações ou fenômenos utilizando a álgebra como ferramenta. Estudantes que não tenham base sólida em conceitos de álgebra passam por muitas dificuldades. O raciocínio algébrico indutivo e dedutivo, aliados a uma boa agilidade na articulação das técnicas algébricas, por exemplo, para resolver equações e sistemas, são requisitos fundamentais para se obter sucesso na aprendizagem de álgebra nessa etapa da educação básica.

Nota-se que os adolescentes do ensino médio, especialmente no primeiro ano, apresentam muitas dificuldades em álgebra, mostram pouca habilidade no raciocínio e sempre buscam uma espécie de modelo para seguir em atividades e em resoluções de exercícios. Que professor nunca ouviu de seus alunos as seguintes perguntas: “Porque preciso aprender matemática”? “Eu não entendo por que aprender funções”? Ou ainda em resolução de exercícios, após um primeiro exemplo resolvido pelo professor: “é sempre assim que se resolve”? Embora muitos professores não respondam essas perguntas de forma satisfatória, o educador deve saber qual é a principal finalidade da aprendizagem de álgebra e para isso deve analisar sua prática pedagógica, levando em consideração o conteúdo algébrico a ser ensinado e as realidades escolares na qual se envolve a sala.

Segundo Shulman (1986), pensar adequadamente sobre um determinado conteúdo requer conhecimentos que vão além dos conceitos de domínio; deve saber discutir outras formas de manifestar o saber realizando conexões com outras áreas e também propor contextualizações. O professor deve compreender porque determinado conteúdo é ensinado e o que ele poderá auxiliar na formação intelectual e social dos estudantes.

Com relação ao conhecimento pedagógico de conteúdo, Shulman (1986) apresenta três categorias do conhecimento do conteúdo: 1) Conhecimento do conteúdo enquanto disciplina; 2) O conhecimento pedagógico da transmissão do conteúdo; 3) O conhecimento curricular. Diante desses conhecimentos o professor deverá analisar sua prática pedagógica em relação à aprendizagem introdutória de álgebra, pois apenas saber álgebra não indica que o professor terá sucesso no ensino desse conteúdo: é necessário investigar como se procede a aprendizagem introdutória desse assunto.

No ensino de funções, que se dá no primeiro ano do ensino médio, se apresenta um dos maiores problemas, pois é necessário entender a linguagem algébrica, realizar resoluções de equações, fazer inter-relações de valores numéricos, conexões com fórmulas e regras e ainda construir e interpretar gráficos no plano cartesiano. Verifica-se que o conteúdo em si já gera dificuldades; se o estudante não possuir um raciocínio algébrico que lhe permita assimilar essas relações, ou ainda se suas habilidades em desenvolver cálculos não forem satisfatórias, a aprendizagem de funções será um amontoado de instruções e roteiros que valoriza as técnicas e não o poderoso raciocínio algébrico que esse assunto propicia. É sabido que muitos livros e materiais didáticos valorizam roteiros e regras que destacam passo a passo como executar determinada tarefa e ainda com infinitos exercícios de fixação nos quais claramente se percebe a idéia de seguir modelos, já que cada grupo de exercícios possui características tipicamente próprias. Como exemplo dessa valorização dos exercícios de fixação como forma de introduzir o raciocínio algébrico se apresenta na Figura 1.

Resolva as seguintes equações.

a) $7x = 49$ $x = 7$
b) $x + 10 = 18$ $x = 8$
c) $2x - 7 = 15$ $x = 11$
d) $3x + 2 = -1$ $x = -1$
e) $6x + 12 = 54$ $x = 7$
f) $5x - 14 = 31$ $x = 9$
g) $4x + 28 = -24$ $x = -13$
h) $9x - 13 = 95$ $x = 12$
i) $13x + 4 = 69$ $x = 5$

Agora, simplifique e resolva as equações a seguir.

a) $3(m + 4) + 8 = 2 + m$ $m = -9$
b) $6x + 14 + 3x = 2x + 158 - x$ $x = 18$
c) $20x + 19 - 5x = 7x + 31 + 2x$ $x = 2$
d) $27z - 15 - 3z = 18z + 185 - 2z$ $z = 25$
e) $7(m - 14) + 20 = 5(m + 3) - 15$ $m = 39$
f) $11(x + 2) - 410 = 2(2x - 4) + 89$ $x = 67$

Nas equações a seguir, encontre o valor representado por x, quando possível.

a) $\frac{6}{x} - \frac{12}{x} = \frac{3}{5}$ $x = -10$
b) $\frac{3}{x} + \frac{6}{3x} = \frac{1}{5}$ $x = 25$
c) $\frac{4}{x - 4} + 5 = \frac{x}{x - 4}$ não tem solução
d) $\frac{9x}{x - 3} - \frac{6}{x + 3} = \frac{9x^2 + 102}{(x - 3)(x + 3)}$ $x = 4$
e) $\frac{16}{x} - \frac{5}{x - 2} = \frac{9}{x}$ $x = 7$
f) $\frac{4}{12x} + \frac{5}{x} = \frac{1}{2}$ $x = \frac{32}{3}$
g) $\frac{5}{x + 4} - \frac{2}{x - 4} = \frac{x}{x^2 - 16}$ $x = 14$
h) $\frac{3x}{x - 2} - \frac{1}{x + 2} = \frac{3x^2 + 12}{(x - 2)(x + 2)}$ não tem solução

Fonte: Ribeiro; Soares (2005).

Figura 1: Exercícios de Fixação

Notoriamente o desempenho dos alunos na aprendizagem de álgebra é insatisfatório. Pode ser verificado e constatado em sala de aula por professores e é divulgado nas avaliações realizadas por órgãos do governo. Ao se analisar as avaliações, os trabalhos, as perguntas feitas ao professor e as resoluções de exercícios, se constata o baixo nível em relação à aprendizagem de álgebra da maioria dos estudantes. A Figura 2 ilustra a dificuldade enfrentada por um aluno do primeiro ano do ensino médio na simplificação de expressões algébricas.

1) Simplifique as expressões, supondo que o denominador é não nulo.

c) $\frac{4x^2-6x}{4x^2-9} = \frac{x(4x-6)}{4x^2-9} = \frac{x(4x\cancel{-6})}{(2x+\cancel{3})(2x-3)} = \frac{x(2x-3)}{2x+3}$

Fonte: Próprio autor

Figura 2: Aluno do ensino médio simplificando expressões algébricas

O professor precisa buscar alternativas para tentar solucionar esses problemas e, muitas vezes, rever sua prática pedagógica; de acordo com Shulman (1986) o professor deve possuir formas úteis de representação de suas idéias, analogias poderosas, ilustrações, exemplos, explicações, demonstrações e formulações de questões que torne seu conteúdo compreensível para as outras pessoas.

A realização de uma investigação sobre o ensino e a aprendizagem de álgebra para uma melhor compreensão de informações que tornem mais fáceis o ensino é um dos estudos realizados nessa dissertação. Muitas barreiras foram enfrentadas, porém todo o esforço e tempo gasto no preparo de atividades que abordem de forma diferenciada e que facilitem o ensino de álgebra valeram a pena.

1.2 Objetivos

Após a realização de um estudo para identificar as dificuldades encontradas pelos estudantes com relação à aprendizagem de álgebra e suas possíveis origens, foram definidos como os objetivos do presente trabalho:

- Realizar estudos sobre a aprendizagem de álgebra e da transição da aritmética para a álgebra;

- Analisar os Parâmetros Curriculares Nacionais para organizar e estruturar o trabalho de acordo com as necessidades da escola básica;

- Elaborar uma seqüência didática que introduza e desenvolva o raciocínio algébrico. Esse material terá como finalidades:

• Planejar e executar atividades para detectar as dificuldades e as potencialidades e, também, para identificar o conhecimento dos estudantes com relação à álgebra;

• Elaborar atividades que levem à compreensão do conceito de uma letra no contexto algébrico: variável ou incógnita;

• Realizar atividades que levem os estudantes a desenvolver articulações com símbolos algébricos – equações, sistemas e expressões, por exemplo – e seu significado em exercícios contextualizados.

A execução das atividades não se dará de forma isolada, ou seja, haverá uma interação entre elas; inclusive, as informações obtidas com atividades já aplicadas serão referencias para a elaboração de novas atividades. As atividades têm como objetivo essencial minimizar o salto que se verifica na passagem dos conhecimentos aritméticos para os conhecimentos estruturados da álgebra.

1.3 Metodologia

Para elaborar as atividades de introdução e desenvolvimento do raciocínio algébrico foi utilizada como referência a metodologia da resolução de problemas, proposta por Polya (1995) no livro "A arte de resolver problemas" e Vlassis e Demonty (2002), no livro "A álgebra ensinada por situações problemas".

Os Parâmetros Curriculares Nacionais indicam a resolução de problemas como metodologia a ser desenvolvida em sala de aula, pois coloca o estudante como o protagonista de sua aprendizagem, ou seja, proporciona o desenvolvimento da autonomia do estudante na obtenção de seus conhecimentos.

Na metodologia de resolução de problemas são consideradas quatro etapas essenciais, que se resumem em:

1) Compreender o problema;
2) Encontrar conexões entre os dados e propor um plano de resolução;
3) Executar o plano de resolução;
4) Analisar a solução.

Os problemas contextualizados organizados como situações problemas são de grande valia no desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo e incentivam o aprendizado pois, além de inserir os estudantes em situações desafiadoras, apresentam a matemática como ferramenta capaz de resolver problemas práticos e cotidianos.

Atividades organizadas em situações problemas auxiliam os estudantes na criação e obtenção de modelagens que podem ajudá-los no entendimento de conceitos e raciocínios algébricos, pois conectam a forma lúdica do exercício com a forma mais abstrata necessária à álgebra.

O presente trabalho empregou ainda como metodologia aulas expositivas com participação ativa dos estudantes e utilização de material concreto, para lhes fornecer a instrução técnica e possibilitar o desenvolvimento do raciocínio algébrico, como base para a investigação de conceitos que serão descobertos.

1.4 Descrição dos capítulos

A aplicação do material didático em sala de aula, resultados, o desenvolvimento da pesquisa e fundamentações teóricas serão descritos e discutidos nessa dissertação. O desenvolvimento da dissertação está estruturado da seguinte maneira:

Capítulo 1: Apresenta um panorama geral do trabalho e a estrutura dos capítulos. Especifica a motivação, os objetivos e a metodologia do trabalho desenvolvido;

Capítulo 2: Destaca a problemática envolvida na transição da aritmética para a álgebra, com base em estudo dos trabalhos de pesquisadores como Wu (2008), Kieran (1992) e Kaput (1999), bem como aponta as dificuldades enfrentadas por professores e estudantes no ensino e aprendizagem de álgebra. Exemplos de práticas desenvolvidas por professores são analisados e discutidos, especificamente aquelas relacionadas com aritmética e introdução à álgebra. Aritmetização como fator auxiliador na transição para álgebra e metodologias para a introdução ao raciocínio algébrico serão enfocadas nesse capítulo.

O entendimento do significado que uma letra, incógnita ou variável, pode representar em contextos algébricos como equações de primeiro grau e relações numéricas generalizadas é debatido e as principais dificuldades enfrentadas pelos estudantes acerca da compreensão inicial de álgebra, descritas.

Capítulo 3: Descreve a metodologia da resolução de problemas proposta por George Polya (1995) juntamente com as idéias propostas por Vlassis - Demonty (2002), que servem de apoio pedagógico para a elaboração e execução das atividades desenvolvidas. O material didático elaborado se compõe de exercícios contextualizados e materiais manipulativos que auxiliam no processo de aprendizagem.

Foram exploradas as etapas dessa metodologia – compreender, elaborar estratégia, executar e validar – de modo a conectá-las ao processo de algebrização que se realizou em sala de aula e ressaltar o potencial didático que essa metodologia proporciona.

As vantagens de se utilizar essa metodologia, que apresenta o estudante como protagonista do processo de aprendizagem e proporciona condições de desenvolver sua autonomia na busca por conhecimentos, são descritas nesse capítulo.

Descreve ainda os Parâmetros Curriculares Nacionais como o documento oficial que orientou a organização do trabalho.

Capítulo 4: Expõe a estrutura das atividades e descreve o desenvolvimento do material didático elaborado, bem como sua aplicação com estudantes do ensino fundamental de uma escola pública. As seqüências adotadas na aplicação do material e suas finalidades também são comentadas. Descreve ainda os resultados obtidos, as situações vivenciadas em sala de aula e o desempenho dos estudantes nas atividades.

A etapa de aplicação efetiva do material didático em sala de aula foi dividida de acordo à seguinte seqüência:

• Atividades investigativas: São compostas por exercícios contextualizados para os quais os estudantes são divididos em pequenos grupos que devem propor soluções para problemas por meio de raciocínios inerentes à álgebra, utilizando-se para isso de conhecimentos aritméticos. Essas atividades, embasadas na metodologia de resolução de problemas, possuem como principais finalidades observar as dificuldades e potencialidades dos alunos, além de dar suporte para a realização das atividades que seguirão.

• Atividades desenvolvedoras: São aulas com participação ativa dos estudantes, que visam ajustar as dificuldades encontradas na etapa anterior e desenvolver o raciocínio algébrico pela exploração de articulações de símbolos algébricos. As aulas são centradas no entendimento dos conceitos introdutórios de álgebra e no desenvolvimento da autonomia dos estudantes na busca por seu conhecimento. A realização de tarefas extra classe também faz parte dessa etapa do trabalho.

• Atividades finalizadoras: São as que organizam e sintetizam as idéias propostas inicialmente, relacionadas ao conteúdo algébrico desenvolvido. São realizadas retomadas de exercícios em aulas com participação ativa dos estudantes, para mostrar as diversas maneiras de se resolver um problema. Indicar aos estudantes problemas abordados anteriormente e apresentar formas algébricas de resolução finalizam a seqüência de atividades e corrobora a proposta cíclica adotada nessa abordagem introdutória de álgebra.

Na elaboração e estruturação do presente trabalho de pesquisa se destaca a parceria com a Escola Estadual “Professor Euclides de Carvalho Campos”, do município de Botucatu-SP, bem como o auxílio pedagógico da professora Aline Cunha, responsável pelos oitavos anos / sétimas séries onde o trabalho foi desenvolvido e aplicado.

Capítulo 5: Foram realizadas sínteses dos resultados obtidos pela pesquisa desenvolvida, por meio da análise das atividades aplicadas em sala de aula e das metodologias utilizadas. Realizou-se uma avaliação geral da pesquisa, que destaca os pontos de evolução e aponta as principais dificuldades dos estudantes, bem como seus progressos; apresenta ainda uma análise da pesquisa quanto à introdução do ensino de álgebra.

Capítulo 6: A conclusão do presente estudo aponta para o fato de ser a pré-álgebra o componente pedagógico capaz de propiciar a continuidade na transição da aritmética para a álgebra. A pré-álgebra proporciona aos estudantes as condições necessárias para entender as propriedades gerais dos números e para perceber as relações entre grandezas que variam em problemas de contagem, bem como os capacita a explorar e consolidar as propriedades operacionais da aritmética.

Seguinte às Referências Bibliográficas, o presente trabalho oferece um Apêndice que contém todas as atividades elaboradas e aplicadas durante as diversas etapas da realização desse estudo. Trata-se de um material didático pronto para ser utilizado por professores do ensino fundamental que tenham interesse em desenvolver as potencialidades algébricas de seus alunos segundo a metodologia ora proposta.

2 APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA

Esse capítulo analisa o ensino aprendizagem de álgebra em sua fase introdutória, considerando os entraves enfrentados pelos professores em sua prática pedagógica e também as dificuldades que os estudantes apresentam para entendê-la. Interpretações de letras em contextos algébricos como equações do primeiro grau ou relações matemáticas serão debatidas e ainda possíveis encaminhamentos que possam facilitar o entendimento serão indicados.

Análises sobre a prática profissional do professor e a realização de conexões entre o conteúdo algébrico e o aprendizado do estudante serão descritas utilizando como referências o conhecimento pedagógico do conteúdo de Shulman (1986) e os Parâmetros Curriculares Nacionais, PCNs. Estudos sobre as abordagens na transição da aritmética para a álgebra serão realizados, com a finalidade de obter alternativas para facilitar o desenvolvimento do raciocínio algébrico dos estudantes.

-Prática do professor: O professor deve saber qual é a principal finalidade da aprendizagem de álgebra; para isso precisa analisar sua prática pedagógica, levando em consideração o conteúdo algébrico e as realidades escolares identificadas, ou seja, tanto o nível de aprendizagem como a situação social em que se encontram os alunos. A álgebra oferece conteúdos indispensáveis para a formação intelectual dos estudantes, evidenciado pelo PCNs (1998, p. 115) ao relatar que “o estudo de álgebra constitui um espaço significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas”.

Com relação ao conteúdo algébrico a ser ensinado, o professor deve apresentar amplo conhecimento e também organizar uma metodologia que direcione o ensino desse tópico. Possuir conhecimento técnico/algébrico não implica ensinar de forma a transmitir apenas as técnicas: é necessário saber quais são suas finalidades e aplicabilidades e ajustar uma didática que organize todas essas informações. Os pré-requisitos necessários à introdução ao raciocínio algébrico (raciocínios investigativo, indutivo e dedutivo) e os estudos de conjuntos numéricos e suas operações (conhecimentos aritméticos) são fundamentais e necessitam ser bem trabalhados com os estudantes.

Alguns profissionais da área de engenharia, por exemplo, trabalham inicialmente a partir de materiais totalmente brutos e, após certos procedimentos, esse material se transforma em uma obra ou objeto que será útil de alguma forma à sociedade. De forma análoga, o professor age em relação à sua prática pedagógica. Com a posse de conhecimentos algébricos totalmente abstratos, o professor deve ajustá-los e formular ou adaptar metodologias que alcancem os alunos de forma significativa.

Despertar nos estudantes a criatividade, mostrar que o conteúdo algébrico pode ser útil para sua formação intelectual e também em diversos ramos da vida profissional são os grandes desafios do professor em seu cotidiano. Na prática pedagógica o professor deve, constantemente, se certificar de que os conhecimentos trabalhados em sala de aula realmente fornecem condições para a formação intelectual dos alunos e não simplesmente os treinam com atividades repetitivas e sem significados. Ampliar suas informações em relação ao conhecimento técnico, especialmente o pedagógico, fornece condições para articular melhor os conteúdos que são apresentados em sala de aula.

Shulman (1986) indica a necessidade do conhecimento por parte do educador e apresenta três categorias em relação ao conhecimento: 1) o conhecimento do conteúdo; 2) o teor pedagógico do conteúdo e 3) o conhecimento curricular.

1) O conhecimento do conteúdo: é necessário, para o professor, ter ciência de como um saber é constituído, ou seja, compreender sua origem, seu processo de formação, por quais motivos ele é considerado verdadeiro e ainda em que circunstâncias sua veracidade pode ser questionada ou até negada; saber relacionar os conceitos dentro da própria disciplina, indicar sua teoria e apresentar sua prática.

Na apresentação da álgebra aos estudantes o professor deve saber como indicar as melhores analogias e ainda analisar o que representa uma letra dentro do contexto algébrico, tanto em equações como em expressões. Deve também explorar exercícios com contextualizações que auxiliem a apresentação da álgebra em situações práticas, ou seja, mostrar algumas aplicabilidades desse conteúdo.

2) O teor pedagógico do conteúdo: o professor precisa conhecer formas úteis para representar suas idéias, fazer comparações esclarecedoras, ilustrações, exemplos, explicações, demonstrações e formular questões que tornem o conteúdo compreensível para os alunos. Investigar técnicas de ensino que melhorem a compreensão do conteúdo tornará a aprendizagem de temas específicos mais direcionados e com mais chances de sucesso.

Esse conteúdo pedagógico de conhecimentos deve: contemplar as competências ao analisar as concepções erradas dos alunos; encontrar as condições necessárias para superar, instruir e transformar essas concepções; pesquisar a origem de suas dificuldades e analisar com olhos críticos os erros dos estudantes para, posteriormente, propor abordagens mais adequadas.

Em operações com letras em expressões algébricas o professor poderá utilizar o raciocínio indutivo, isto é, indicar exemplos numéricos para induzir os estudantes a deduzirem informalmente o raciocínio com a utilização de letras. Observe o exemplo adaptado de Vlassis e Demonty (2002, p. 36):

Na soma m + m + m pode-se realizar a seguinte comparação:

10 + 10 + 10 = 3x10

21 + 21 + 21 = 3x21

6 + 6 + 6 = 3x6

m + m + m = 3xm

Dessa forma trabalha-se com os estudantes a preciosa idéia de que uma letra seria um número na forma generalizada[1]. Observa-se que este exemplo explora o significado da operação de multiplicação que é de conhecimento prévio do aluno, adquirido em séries elementares. O resultado da operação não é mais o foco, mas sim a estrutura operacional do conjunto dos números, que é estendida para o raciocínio algébrico. Isso faz parte do que é considerado como “pré-álgebra”, pois apresenta as propriedades gerais dos números a partir de conhecimentos operacionais de aritmética prévios dos estudantes.

Importante ressaltar que, para o aluno, o significado de uma letra em expressões ou equações algébricas está sendo formado nessa etapa da aprendizagem, sétimo e oitavo anos do ensino fundamental; desse modo, a preparação do professor para atingi-lo de forma adequada será crucial. Investigar o nível de aprendizagem dos estudantes, especialmente em relação ao conhecimento de aritmética, realizar estudo, com base nos PCNs, sobre o que é importante na aprendizagem de álgebra e organizar sua prática pedagógica dentro da realidade escolar representam requisitos fundamentais para a realização de um ensino com mais entendimentos.O terceiro capítulo dessa dissertação indica os PCNs como o documento oficial norteador da pesquisa realizada.

3) Conhecimento curricular: uma das necessidades do professor é ter um amplo conhecimento da grade curricular, medida que lhe permitirá elaborar alternativas que melhorarão o modo de apresentar um determinado assunto; além disso, o conhecimento curricular engloba a adequação de conteúdos ao contexto intelectual e social do alunado.

---

1 A letra como um número generalizado significa que a letra pode tomar mais do que um valor sem a necessidade de uma ligação entre valores de outras letras (VLASSIS; DEMONTY, 2002, p.23).

Elaborar conexões entre conteúdos programáticos de outras áreas para uma universalização e contextualização do conhecimento demonstra autonomia na adequação da grade curricular e enriquece o ensino. Essa maturidade que o conhecimento sobre a grade curricular proporciona pode facilitar os ajustes do conteúdo à realidade da sala e ainda apontar alguns caminhos para desenvolver interdisciplinaridades.

A organização da introdução ao raciocínio algébrico poderá ser trabalhada em forma de situações problemas, altamente recomendado pelos PCNs e, desse modo, incluir conteúdos de outras áreas. Formas alternativas de articular os conteúdos da grade curricular podem gerar benefícios, à medida que o professor leve em consideração o objetivo principal da aprendizagem: o estudante. O trabalho com problemas contextualizados de contagem, ou ainda a dedução informal de fórmulas geométricas em problemas direcionados podem proporcionar ótimas situações de aprendizagem para a introdução ao raciocínio algébrico.

As três categorias de conhecimentos indicadas por Shulman (1986) são referenciais sobre os quais o professor pode se apoiar para organizar sua prática pedagógica, pois auxiliam nas reflexões a respeito do conhecimento específico do conteúdo e organização de metodologia. A forma de introduzir e desenvolver determinado assunto em sala de aula deve proporcionar discussões e análises por parte dos estudantes, regidos pelo professor. Essas abordagens estão intimamente ligadas ao seu conhecimento e, caso ele não possua essa gama de informações, pode tanto gerar fracassos em sua prática pedagógica quanto a elaboração de aulas que não despertam o interesse dos estudantes, por se tratarem de mera transmissão de conhecimentos prontos e acabados.

2.1 Introdução ao raciocínio algébrico

De forma geral e no âmbito da escola básica, a álgebra relaciona grandezas, é utilizada para construir modelos e propor soluções para determinados problemas. Além disso, ela expressa generalidades e proporciona condições para provar, deduzir e mostrar regras ou teoremas. O raciocínio algébrico é fundamental para a formação intelectual do estudante, pois esse conhecimento proporciona condições para a continuidade dos estudos. Além disso, o cidadão convive com tecnologias e diversas situações de ordem financeira; o raciocínio desenvolvido pela álgebra pode facilitar seus entendimentos e promover melhores condições para planejamentos.

A organização dos conteúdos algébricos e a forma de trabalhá-los em sala de aula devem estar conectadas com a prática pedagógica do professor para direcionar esses conhecimentos. Abordagens de álgebra centradas em técnicas e regras para resolver exercícios, sem a formulação de questionamentos, são metodologias que não atingem a verdadeira essência do raciocínio algébrico. A introdução à álgebra necessita de conhecimento dos conjuntos numéricos (naturais, inteiros e racionais) e das operações aritméticas, além de conhecimentos de propriedades gerais dos números e suas operações.

Kaput (1999) indica a necessidade de uma abordagem diferenciada, pois a forma tradicional de ensinar álgebra está ligada à aprendizagem de regras e manipulações de símbolos, simplificação de expressões algébricas e resolução de equações. Assim, a álgebra escolar tem servido tradicionalmente para ensinar um conjunto de procedimentos que, para os alunos, não têm relação com outros conhecimentos matemáticos nem com o mundo real.

Dessa forma a construção de relações e aplicações para a aquisição do conhecimento não está no âmago tradicional da álgebra. Os estudantes memorizam roteiros, articulam símbolos algébricos e se deparam com exercícios meramente mecânicos.

Kaput (1999) relata que as experiências com álgebra afastam os estudantes da matemática antes mesmo de terem a oportunidade de construir conhecimentos importantes para a sua vida. A importância do desenvolvimento do raciocínio algébrico é superior às articulações de símbolos algébricos e técnicas de resolução de equações. Wu (2009) destaca que existe um grande salto do conhecimento aritmético para a aprendizagem de álgebra na escola básica, o que provoca grandes dificuldades para os alunos, pois a aritmética que conhecem não os prepara para o aprendizado de álgebra.

Alguns fatores fortalecem o processo de algebrização dos estudantes e dessa forma facilitam sua aprendizagem. Kaput (1999, p.3) propõe o que considera “mudanças necessárias” acerca do ensino de álgebra:

> - Começar cedo (partindo dos conhecimentos informais dos alunos);
> - Integrar a aprendizagem da Álgebra com a aprendizagem de outros assuntos (através de extensões e aplicações do conhecimento matemático);
> - Incluir as diferentes formas do pensamento algébrico;
> - Construir nos estudantes competências lingüísticas e cognitivas e,
> - Encorajar uma aprendizagem ativa (e o estabelecimento de conexões), valorizando o “sense-making” e a compreensão.

- Começar cedo, partindo dos conhecimentos informais dos alunos.

O estudo dos números e suas operações propostos em situações problemas com direcionamento indutivo, como forma de conduzir os estudantes ao desenvolvimento do raciocínio dedutivo, pode ser trabalhado em etapas da aprendizagem anteriores à introdução algébrica. Exercícios que despertem especialmente a investigação e a busca por padrões entre números, utilizando os conhecimentos aritméticos, podem chamar a atenção dos estudantes para uma nova forma de analisar a matemática.

- Integrar a aprendizagem da álgebra com a aprendizagem de outros assuntos através de extensões e aplicações do conhecimento matemático.

Realizar estudos de outros campos da matemática ou de outras áreas do conhecimento para poder inserir um contexto algébrico pode ser altamente produtivo no processo de aprendizagem de álgebra. Promover deduções informais de fórmulas de geometria ou ainda algumas situações descritas por fenômenos físicos em problemas contextualizados facilita a integração dos estudantes com álgebra.

- Incluir as diferentes formas do pensamento algébrico.

Em álgebra a letra se apresenta de diversas formas: incógnita, variável e parâmetro entre outras, o que pode gerar muita confusão para os estudantes. Trabalhar a letra com a perspectiva de variável em problemas de contagem ou de incógnita em equações do primeiro grau representa formas diferentes de se pensar algebricamente. É importante destacar e discutir cada uma dessas perspectivas do papel de uma letra isoladamente e em momentos distintos para, posteriormente, mostrar as diferenças entre os dois significados que a letra pode apresentar.

- Construir nos estudantes competências lingüísticas e cognitivas. .

Aproximar a linguagem dos estudantes à linguagem proposta por problemas algébricos pode minimizar algumas dificuldades, pois promove maiores entendimentos da descrição algébrica. Uma abordagem que auxilia esse processo consiste em propor inicialmente a resolução de um exercício sem contextualização e posteriormente solicitar aos alunos que descrevam um problema que se adapte ao exercício resolvido por eles. Dessa forma é possível incentivar a reflexão do aprendizado e promover uma descrição a respeito do que foi assimilado pelos estudantes em relação ao conteúdo ministrado.

- Encorajar uma aprendizagem ativa e o estabelecimento de conexões, valorizando o “sense-making” e a compreensão.

Estimular o estudante a buscar seus conhecimentos e não simplesmente esperá-los de forma passiva é um dos grandes desafios do professor. A metodologia de resolução de problemas, recomendado nos PCNs, contribui de forma significativa para despertar o dinamismo dos alunos na busca pelo conhecimento. Realizar generalizações informais e introduzir maneiras mais abstratas de se pensar e escrever, propor problemas contextualizados embasados nos conhecimentos aritméticos dos estudantes são encaminhamentos que favorecem uma aprendizagem de álgebra mais ampla, por valorizar o raciocínio do estudante.

2.2 Aritmética na aprendizagem de álgebra

O desenvolvimento do raciocínio aritmético, com suas operações e aplicações, tem início na educação infantil com as operações básicas e a utilização de materiais que concretizam e despertam alguns conceitos e atinge sua fase final no surgimento da álgebra. Entender as operações básicas nos números inteiros positivos, operar frações, ampliar os conhecimentos adquiridos à medida que se apresentam novos conjuntos numéricos, de modo geral, são os principais temas trabalhados em aritmética no ensino fundamental.

O modo com que se realiza a abordagem da aritmética influencia na introdução ao raciocínio algébrico, pois este necessita de conhecimentos operacionais aritméticos, além de uma preparação que introduza formas mais abstratas de pensar, especialmente para o entendimento das propriedades gerais dos números.

Para Wu (2009) é necessário, em aritmética, propor abordagens que facilitem posteriormente o entendimento do raciocínio algébrico. No ensino de frações, por exemplo, pode-se trabalhar pequenas generalizações ou ainda inserir as frações em reta numérica para dar conceitos informais de continuidade, informação fundamental no âmbito da álgebra.

Exemplos de resoluções de adições de frações:

$$\frac{5}{6}+\frac{1}{8}=\frac{20+3}{24}$$

$$\frac{8}{21}+\frac{5}{14}=\frac{16+15}{42}$$

Nesses exemplos, identifica-se que os alunos, muitas vezes, ficam presos a procedimentos, tais como tomar um denominador comum para dividir pelo denominador de cada fração e multiplicar pelo respectivo numerador, o que faz com que desenvolva uma aprendizagem mecânica, com pouco sentido para os estudantes. A idéia de frações equivalentes, nesse caso, pouco se manifesta nas resoluções dos estudantes.

Pode-se abordar a soma de frações da seguinte forma:

As frações equivalentes minimizam a memorização de procedimentos

$$\frac{20}{24}=\frac{5}{6}$$

$$\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$$

Então

$\frac{5}{6}+\frac{1}{8}$ Pode ser escrito como $\frac{20}{24}+\frac{3}{24}=\frac{23}{24}$

Ou ainda abordagens com a apresentação de letras.

Abordagens diferenciadas para somar frações. Exemplo adaptado de Wu (2009, p. 17).

Realize a adição:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$$

Como resolução o estudante necessita ajustar as frações para frações equivalentes e, além disso, articular números na forma generalizada, ou seja, manipular letras.

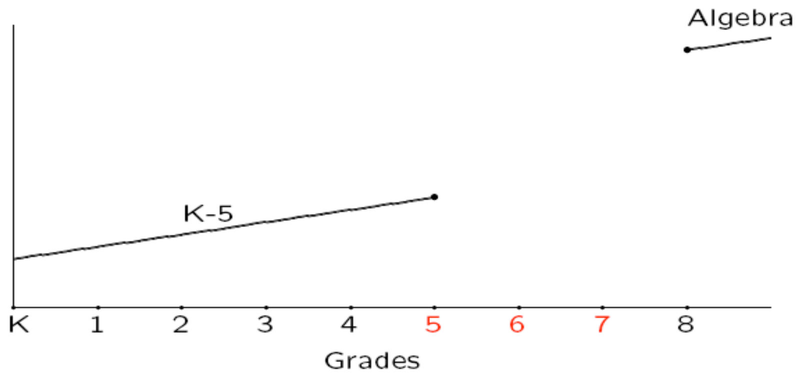
$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

A maneira rotineira de se realizar adição de frações, exposta no primeiro exemplo, pouco desenvolve o raciocínio abstrato, porém propor exercícios de frações com letras promove o pensamento generalizado necessário na álgebra.

Dessa maneira, os estudantes são expostos à utilização de números generalizados (letras) não associam frações somente com divisões de pizzas ou a outras analogias propostas por professores e materiais didáticos que estreitam o conhecimento dos alunos. Segundo Wu (2009) a transição da aritmética para a álgebra não é realizada de forma linear, ou seja, existe um grande buraco nesse processo e dessa forma os estudantes sentem muitas dificuldades para entender o raciocínio que a álgebra necessita.

A Figura 3 representa o ensino da aritmética nas séries iniciais como linear e mostra que há um “salto sobre um abismo” na passagem da aritmética para a álgebra.



Fonte: Wu (2009, p. 5)

Figura 3: Gráfico abismo da transição da aritmética para a álgebra

O gráfico apresentado por Wu (2009) descreve esse abismo que ocorre na transição da aritmética para a álgebra. Segundo o autor, não existe continuidade entre a aritmética que se trabalha no K-5 (ensino elementar) e a álgebra que será abordada no oitavo ano da escolaridade básica.

Kieran (1992) aponta que a pré-álgebra constitui a transição da Aritmética para a Álgebra; é a área da Matemática na qual os estudantes constroem significados dos símbolos, de operações e do raciocínio da Álgebra com base nos seus conhecimentos de Aritmética.

Dois aspectos fundamentais na perspectiva pré-algébrica são: o uso de letras para representar números e o conhecimento explícito dos métodos operacionais matemáticos, simbolizados com o uso de números e de letras (resolução de equações do primeiro grau).

Abordagens diferenciadas da aritmética, com propostas que explorem o raciocínio indutivo, conduzam à dedução informal de relações numéricas e promovam contato com símbolos algébricos, serão importantes para introduzir o raciocínio algébrico e, dessa forma, realizar a transição da aritmética para a álgebra mais adequadamente.

2.3 Abordagens de uma letra

Uma das iniciativas na fase inicial do processo de algebrização é a forma de abordar uma letra, sendo imprescindível atribuir significados aos papéis que uma letra possui, em especial nas equações do primeiro grau ou problemas de contagem. Articular e interpretar a letra, em situações problemas, possibilita maiores entendimentos. Professores, na ânsia de facilitar o aprendizado, delegam alguns significados às letras e isso, posteriormente, pode gerar muitos desencontros. O exemplo adaptado de Vlassis e Demonty (2002, p. 21-22), referente à soma de monômios, ilustra essa situação:

Unir os termos semelhantes (m+m+2p +7m + 3p).

Na tentativa de realizar uma espécie de aplicação o professor comenta aos estudantes que se devem somar maçãs com maçãs e peras com peras, se referindo às letras m e p respectivamente. Dessa forma a resposta será (9m + 5p), indicando nove maçãs e cinco peras. O estudante poderá se perguntar "se não era para somar maçãs com peras, então por que a resposta final é 9m + 5p"? Não está havendo soma de frutas diferentes? Em alguns casos, foram constatadas repostas como 14m ou 14p, indicando claramente que se realizou a soma de frutas, pois, se somarmos nove maçãs com cinco peras teremos quatorze frutas. Ao ministrar uma Palestra que abordava o tema da introdução ao raciocínio algébrico identificou-se que os estudantes do quinto termo do curso de Licenciatura em Matemática apresentavam raciocínios idênticos aos exibidos acima, ou seja, realizavam analogias das letras utilizadas para expressar generalidades com frutas ou objetos. Percebe-se que a introdução ao raciocínio algébrico e a utilização de letras em álgebra deve ser mais bem desenvolvida na formação do professor que irá atuar futuramente na escola básica.

Outras situações exemplificadas por Vlassis e Demonty (2002, p.21-22) mostram as dificuldades em expressões algébricas, pois para (3m + 4) estudantes atribuíam respostas 7 ou ainda 7m e a justificativa seria que três maçãs somadas com 4 – implicitamente quatro maçãs, já que não se somam frutas diferentes – resultam em 7 (maçãs). Essa forma de indicar a soma de termos semelhantes estreita totalmente a idéia que será criada sobre as letras no raciocínio algébrico, já que nesse contexto as letras indicam variáveis.

O professor pode descrever e abordar a letra como um número implícito que não se sabe o valor, em caso de incógnitas, ou que representa quantidades numéricas que podem mudar, no caso de variáveis. Indicar que as letras representariam simplesmente objetos ou frutas, por exemplo, não desenvolve o raciocínio necessário para a aprendizagem de álgebra. Segundos Vlassis e Demonty (2002) atribuir quantidades de objetos, por exemplo, não permite que os alunos evoluam em direção ao significado matemático de uma letra.

A expressão (m + m + m), que tem como resposta (3m), não deve indicar que representa três maçãs, pois assim se estrangula o conceito de generalização, indispensável no desenvolvimento do raciocínio algébrico (VLASSIS e DEMONTY 2002, p. 22).

De forma oposta a essa concepção é possível realizar uma abordagem ressaltando que se m, por exemplo, representa números inteiros, com isso 3m representariam um múltiplo de três. A indução informal pode ser um recurso muito útil nessa abordagem. O exemplo abaixo ilustra essa indução.

$5 + 5 + 5 = 3x5$

$10 + 10 + 10 = 3x10$

$15 + 15 + 15 = 3x15$

$m + m + m = 3xm$

De acordo com o exemplo é possível indicar aos estudantes que 3xm não representa três maçãs, mas sim a soma de três parcelas de mesmo valor, cujo resultado é o triplo da quantidade representada pela letra m. A operação realizada é a mesma, independentemente do valor inteiro de m e estabelece, aos estudantes, a idéia de operar números na forma generalizada; também aponta a propriedade de números múltiplos de três.

De acordo com Wilfried e Wu (2008, p.6):

> Cálculo em expressões com símbolos algébricos deve ser realizado levando em consideração as propriedades e regras que sabemos que são verdadeiras para todos os números. Realizar esses cálculos com números arbitrários (letras) põe em foco o conceito de generalidade e dessa forma exige uma certificação nas propriedades de todos os números em geral.

Em álgebra a forma de raciocinar é mais abrangente e abstrata; busca padrões e generalizações e realiza manipulações de símbolos e números. A utilização de letras para representar a generalização de números é uma característica importante da álgebra.

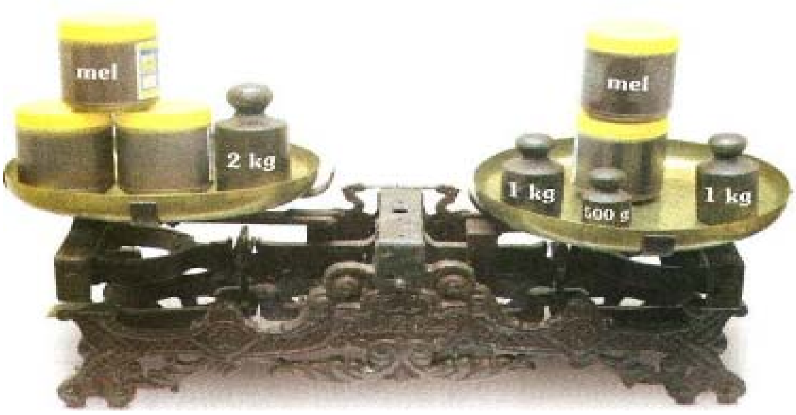
2.4 Introdução ao raciocínio algébrico: A incógnita

Em resoluções de equações de primeiro grau o professor precisa se atentar ao fato de mostrar o significado das operações e símbolos, pois do contrário terá uma série de regras e roteiros sem nenhum significado ao estudante. Para Vlassis e Demonty (2002, p. 18-20) o professor deve conhecer os conceitos de igualdade na aritmética e na álgebra. Para a aritmética a igualdade representa o anúncio de uma resposta, como por exemplo, (6 + 7 = 13), ou seja, o segundo membro representa a resposta do primeiro membro. Esse conceito de igualdade é chamado de fase procedimental e consiste em tratar uma igualdade como uma sucessão de operações a aplicar, com a finalidade de obter uma resposta única e numérica.

Na aprendizagem de álgebra a concepção é totalmente diferente; por exemplo, na equação (3x + 5 = 2x – 2)o segundo membro não pode ser considerado como a resposta do primeiro. A igualdade nesse nível deve ser trabalhada de forma estrutural, destacando suas principais propriedades – reflexiva, simétrica e transitiva – e considerar as expressões como entidades que serão manipuladas como um todo, sem descer aos detalhes.

Em sala de aula professores observam muitos erros dos estudantes em resoluções de equações do primeiro grau. Percebem que os estudantes, ao tentarem memorizar procedimentos acabam por obter entendimentos muito distorcidos acerca de resoluções de equações. Em casos de equações que se apresentam na forma 2x = 4, por exemplo, observam-se freqüentemente respostas como $x = \frac{4}{-2}$, as quais demonstram que se aplicaram regras sem justificativas e que não geraram significado para os alunos.

Elaborar metodologias para que a resolução de equações do primeiro grau não se resuma à memorização de procedimentos favorece a aprendizagem crítica e com maiores entendimentos. Problemas contextualizados ou situações problemas podem auxiliar de forma expressiva na introdução ao desenvolvimento de resoluções de equações do primeiro grau com uma incógnita, pois essas atividades proporcionam um desafio ao estudante que, de forma geral, se motiva e responde ao estímulo. Uma abordagem que pode contribuir para introduzir a resolução de equações do primeiro grau é o problema envolvendo balanças de prato (Figura 4), por exemplo, obter a massa do pote de mel na situação a seguir.



Fonte: ENSINO Fundamental: 7ª série. Positivo: livro de coordenação.

Figura 4: Balança de prato

Para obter a massa do pote de mel no problema das balanças o estudante exercita seu raciocínio para propor uma solução e com isso o professor deve estimular os estudantes a descreverem qual processo foi utilizado. É fundamental montar uma equação que representa a situação ilustrada no problema da balança, indicar que se deseja saber a massa do pote de mel (incógnita) e atribuir uma letra a essa quantidade desconhecida.

O estudante deverá saber que a incógnita não é o mel, mas sim a massa do pote de mel medido em quilos e, dessa forma, somar o número que representa a massa de mel com a massa do contrapeso é possível.

Durante a montagem da equação que representa o problema da obtenção da massa do pote de mel surgem algumas reflexões, tais como:

1) O que se pretende descobrir?

2) Podemos atribuir ao valor desconhecido uma letra?

3) Descreva a expressão que se refere ao prato do lado esquerdo da balança.

4) Descreva a expressão que se refere ao prato do lado direito da balança.

5) Monte a equação que representa a ilustração das balanças com os potes de mel e os demais objetos.

Importante para a aprendizagem de equações do primeiro grau com uma incógnita é primeiramente entender o que representa uma incógnita e como representá-la, para posteriormente montar uma equação. Realizar a conexão entre a descrição realizada pelos estudantes na parte lúdica, na obtenção da massa do pote de mel e os procedimentos exigidos na resolução da equação é fundamental para produzir significados aos procedimentos.

Discutir a forma lúdica de organizar as operações em equações do primeiro grau e posteriormente elaborar as equações que representem a situação descrita para apontar o significado da letra possibilita aos estudantes mais condições para entender os procedimentos mais complexos de resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita.

2.5 Dificuldades dos estudantes

Nobre apud Pesquita (2007, p.41) apresenta algumas dificuldades observadas em nível de 6ª série (ensino brasileiro) quando iniciam o estudo da Álgebra:

> Dificuldade em dar sentido a uma expressão algébrica;
> Não distinguir a adição aritmética (3 + 5) da adição algébrica (x + 3);
> Não ver a letra como a representação de um número;
> Atribuição de um significado concreto às letras;
> Dificuldade para pensar numa variável como significado de um número qualquer;
> Interpretação diferente para ações correspondentes aos símbolos + e = na aritmética;
> Significados distintos para letras: na Aritmética, 3m são 3 metros; em Álgebra é o triplo de m;
> Dificuldade em passar da linguagem natural para a linguagem algébrica.

O entendimento dos erros e dificuldades apresentados pelos estudantes na introdução ao ensino e aprendizagem de álgebra favorece o professor na elaboração de metodologias em sua prática em sala de aula. Para o autor, os estudantes apresentam essas dificuldades por tentarem atribuir aos símbolos algébricos (letras) a mesma exatidão que as operações com números proporcionam.

Os estudantes não conseguem articular os símbolos operacionais e algébricos por não entenderem que letras correspondem a números na forma generalizada e, por isso, devem ser operados segundo as propriedades que são próprias dos números na forma geral.

2.6 Interpretações de letras em equações ou expressões algébricas

Entender o que uma ou mais letras podem representar nos diversos campos da matemática, tais como a álgebra, geometria e trigonometria, faz parte do conhecimento necessário do professor que irá introduzir e desenvolver a álgebra com os estudantes. Esse conhecimento pode indicar quais dúvidas os alunos apresentarão e, assim, definir melhor sua prática pedagógica em direção a essas necessidades.

Usiskin (1988, p. 7) apresenta cinco situações de equações em que todas possuem a mesma forma: o produto de dois números (generalizados) é igual a um terceiro.

1. $A = LW$
2. $40 = 5x$
3. $\sin x = \cos x \tan x$
4. $1 \bullet x = x(1 / x)$
5. $y = kx$

Porém cada uma indica uma sensação diferente: (1) representa uma fórmula, (2) uma equação para resolver, (3) uma identidade, (4) uma propriedade e (5) é uma função.

Destaca-se que em (1) a sensação de representar uma fórmula de área e dessa forma L e W (*length* e *width*) representariam largura e o comprimento respectivamente. Com isso tem-se a sensação que L e W representam valores já identificados e que devem se juntar na fórmula para se obter o valor da área. Não se apresenta L e W como variáveis. Na situação (2) tem-se a tendência de se pensar em x como desconhecido e dessa forma um valor a ser encontrado (incógnita). Na equação (3), x é um ângulo de uma identidade trigonométrica; em (4) representa uma identidade aritmética e finalmente em (5), uma função. Com isso se tem a idéia da variabilidade do valor de x. O professor deve ter o conhecimento das diversas situações – equações – em que as letras representam variáveis, para buscar maneiras de identificar e explorar esse conceito sem ferir as idéias propostas pelo raciocínio algébrico.

Segundo Usiskin (1988), tentar encaixar o conceito de variável em uma concepção única simplifica a idéia e por sua vez, distorce as finalidades da álgebra.

Mas e quando uma letra representa uma incógnita? Como o estudante que iniciou o processo de algebrização consegue discernir variável e incógnita?

O estudante pode se deparar com problemas, pois uma letra poderá ser uma variável (assumindo muitos valores) e ainda ser uma incógnita representando, muitas vezes, um único valor. Vlassis e Demonty (2002, p. 21-24) descrevem uma pesquisa realizada por Kuchemann (1978) com estudantes ingleses de idades entre onze e dezessete anos sobre os diferentes significados de uma letra em expressões e nas equações:

1) A letra é calculada

Essa representação conduz os alunos a atribuírem um valor numérico às letras.

Exemplo: Na soma (m + m + m) estudantes atribuem valores à letra m para encontrar respostas numéricas, tais como (13 + 13 + 13) e encontram “39” como resposta.

2) A letra é ignorada

Os alunos consideram os elementos numéricos das situações propostas.

Exemplo: Em expressões como (3m + 4) os estudantes respondem 7m ou 7.

3) A letra é um objeto

A letra não tem status de número; corresponde à abreviatura de uma palavra.

Exemplo:

No caso de áreas de paralelogramos (A = b.h), a letra A representa a área, b representa a base e h altura, mas não representam variáveis.

4) A letra é uma incógnita

Enquanto as três categorias precedentes encaram a letra de forma concreta, a concepção de incógnita especifica pede aos alunos que sejam capazes de efetuar operações com a letra, que deve ser considerada como um número que não se conhece.

Exemplo:

Resolução de equações do primeiro grau com uma letra (incógnita)

Obter o valor de x no conjunto dos números inteiros que satisfaz a equação

$3x + 4 = 7 + 2x$

5) A letra é um número generalizado

A letra pode ter mais de um valor

Exemplo: Qual o valor de c na equação ($c + d = 10$), se c é menor que d?

6) A letra é uma variável

O conceito de variável implica não apenas que as letras designem um conjunto de valores, mas que, além disso, seja possível realizar uma ligação entre os valores delas.

Exemplo: Na equação ($5a+6v=90$) buscam-se pares ordenados que satisfaçam à igualdade considerando a variação de ambas as letras, tais como (6,10), (12, 5), (0, 15).

As letras devem, inicialmente, ser apresentadas aos estudantes como a representação de valores numéricos que variam – variáveis, ou como um valor desconhecido em equações do primeiro grau – incógnita. Na apresentação das propriedades, como a distributiva da soma em relação à multiplicação, soma de termos semelhantes e fatoração de polinômios, o mestre deve indicar que a letra é uma variável, não um valor a ser descoberto. É preciso mostrar que a letra pode assumir muitos valores e que, em muitos casos, não há necessidade de se obter o seu valor.

Posteriormente, em resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita, há que se ressaltar a idéia de que a letra representa um valor a ser descoberto dentro de uma situação algébrica, destacando que apenas um valor poderia satisfazer a situação.

Concentrar a introdução à álgebra apenas em obter o valor de incógnitas deixa muito estreito o raciocínio algébrico. Os quatro primeiros itens da pesquisa de Kuchemann (1978) servem como referências na preparação de diferentes abordagens, pois indicam ao professor formas como os estudantes analisam o que é uma letra na álgebra e, dessa forma pode-se introduzir uma aprendizagem algébrica mais significativa. Observa-se que os dois últimos itens se referem a conceitos mais abstratos e conseqüentemente necessitam de abordagens prévias com propriedades gerais dos números e suas operações.

As diferentes formas em que os significados que uma letra pode assumir em determinadas expressões e/ou equações deve vir acompanhada de técnicas e atividades que despertem a curiosidade, e dessa forma motive dos alunos. Assim os estudantes entendem o significado de uma letra em equações ou ainda em problemas que utilizem variáveis e também possui maiores condições de compreender e manipular os símbolos operatórios e algébricos.

3 SITUAÇÕES PROBLEMAS

É notório que a maioria dos estudantes, especialmente em aulas de matemática, comporta-se de forma passiva. Esperam que o professor divulgue conhecimentos e informações de forma pronta, sem maiores debates e discussões. Posteriormente, em aulas de exercícios, aguardam por roteiros de procedimentos para poderem seguir.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais indicam a resolução de problemas como uma ferramenta didática para a sala de aula capaz de inserir os estudantes como protagonistas de sua aprendizagem. Com esse recurso didático, os estudantes se comportariam como agentes ativos na construção de seu próprio conhecimento.

Como estratégia para desenvolver a autonomia dos estudantes e visar um aumento do interesse nas aulas de Matemática, o professor pode fazer uso de resoluções de problemas e buscar uma metodologia que se adapte a essas propostas.

3.1 Metodologia da resolução de problemas

A metodologia da resolução de problemas indicada nesse capítulo foi embasada nas idéias e no encaminhamento da metodologia proposta por Polya (1995) no livro “A arte de resolver problemas”. O autor indica que formas mecânicas e rotineiras de se desenvolver a aula podem diminuir o interesse dos estudantes pela Matemática e dessa forma dificultar o desenvolvimento intelectual mais amplo

> Um professor de Matemática tem, assim, uma grande oportunidade. Se ele preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe os desenvolvimentos intelectuais dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, a sua oportunidade. Mas se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos destes e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes certos meios para alcançar este objetivo (POLYA, 1995).

Nota-se nas palavras do autor que a adoção da resolução de problemas como metodologia pode proporcionar ao professor maiores possibilidades de incentivar seus estudantes a participarem de forma ativa no processo de aprendizagem. Quando os estudantes confrontam os conhecimentos que são abordados em sala de aula com informações que já possuem, conseguem atribuir significado à aprendizagem.

A metodologia da resolução de problemas é composta por quatro etapas, nas quais Polya (1995) aponta indagações e procedimentos que o professor deve organizar e adaptar à prática pedagógica. As quatro fases são: 1) Compreensão do problema; 2) Elaboração de um plano de resolução; 3) Execução do plano e 4) Investigação da validade da resposta obtida.

1) Compreensão do problema: nessa fase o aluno deve buscar as informações no corpo do texto do problema e, além disso, atentar para o destaque de dados e características importantes para a resolução. Qual seria a incógnita ou variável? É possível resolver? Quais são os dados fornecidos? Os dados são suficientes para a obtenção da resposta? Esses questionamentos são necessários para que haja o entendimento do exercício.

Importante ressaltar que o professor pode realizar intervenções que os auxiliem na interpretação correta do problema, mas com o cuidado de não indicar a resposta.

2) Elaboração de um plano de resolução: o aluno deve realizar uma conexão entre os conteúdos já estudados e os dados fornecidos pelo problema. Observar se a incógnita ou variável se relaciona com informações obtidas no texto, comparar a situação com problemas correlatos já vistos e discutidos anteriormente e também observar se é possível perceber padrões ou propriedades que auxiliem na resolução do problema. Para se obter um plano de resolução, poderá ser necessário relacioná-lo a problemas auxiliares mais simples, que possam indicar padrões e métodos de resolução que se ajustem ao problema referido.

Nesta fase é necessário estabelecer as justificativas para as ações que serão tomadas para resolver o problema. A estratégia que será adotada na resolução tem que estar bem clara para que o aluno possa entendê-la no momento da execução.

3) Execução do plano: o aluno põe em prática o plano de resolução elaborado. Ao executá-lo, deve verificar os passos e observar se o desenvolvimento conduz para a resolução esperada do problema. A justificativa dos passos adotados na execução do plano de resolução é fundamental para o entendimento.

4) Investigação da validade da resposta obtida: ao encontrar a resposta é necessário verificar sua validade, ou seja, analisar se de fato o valor obtido representa a solução do problema; dessa forma, é conveniente realizar algumas substituições ou verificações para poder concluir. Observar se a reposta obtida está de acordo com o problema proposto e se pode ser comprovada de outras formas.

Ao professor que conduz em suas aulas a metodologia da resolução de problemas cabe ressaltar que:

a) Durante a realização das etapas previstas nessa metodologia é possível obter resultados que não eram solicitados originalmente pelo problema. Tais resultados podem contribuir para o enriquecimento da aprendizagem dos alunos, porém é necessário atentar-se para a solução do problema principal.

b) Caso o estudante não obtenha a resposta esperada, observe em qual etapa houve a falha. Se na primeira, poderá ter sido um erro no entendimento do conceito que permeia o problema; se aconteceu na segunda ou terceira etapas, a falha poderá estar no procedimento de resolução (técnica). Identificado o erro do estudante ficará mais fácil propor, posteriormente, encaminhamentos que ajustem essas deficiências detectadas. A realização de sínteses com as respostas obtidas pelos estudantes é uma forma de retomar os objetivos do conteúdo que foi proposto.

3.2 A prática pedagógica

A forma de desenvolver e executar aulas utilizando-se da metodologia de resolução de problemas propõe que existam ajustes na prática pedagógica do professor e também no estabelecimento de novas regras aos estudantes, pois essa metodologia é diferente de aulas tradicionais e rotineiras que se apóiam em transmissão de técnicas e resolução mecânica de exercícios.

Para Onuchic apud Souza; Nunes (2009, p.6) é fundamental que o professor, ao programar essa metodologia, reflita sobre algumas questões, tais como:

> Isso é um problema? Por quê?
> Que tópicos de matemática precisam ser iniciados (sic) com esse problema?
> Haverá necessidade de se considerar problemas secundários associados a ele?
> Para que séries você acredita ser este problema adequado?
> Que caminhos poderiam ser percorridos para se chegar à sua solução?
> Como observar a razoabilidade das respostas obtidas?
> Você, como professor, teria dificuldade em trabalhar este problema?
> Que grau de dificuldade você acredita que seu aluno possa ter diante desse problema?
> Como relacionar o problema dado com aspectos sociais e culturais?

Uma revisão da prática pedagógica para implantar a metodologia da resolução de problemas é fundamental, pois nessa metodologia o estudante é o agente ativo na obtenção de seu conhecimento e dessa forma o professor deve se preparar para conduzi-lo a essa finalidade. As situações problemas inserem, muitas vezes, o ensino de matemática como uma ferramenta de resolução e com isso existe a necessidade de uma preparação por parte do professor para essa perspectiva. Muitos professores, na ânsia de tentar contextualizar problemas algébricos, trabalham com situações que podem distanciar os estudantes da aprendizagem de álgebra. Vlassis e Demonty (2002, p. 45) afirmam que:

> O ensino por situações problemas dá sentido à aprendizagem matemática, pelo menos em dois pontos de vista. De fato, por um lado, as situações colocam a matemática num contexto onde elas representam uma ferramenta de resolução. Por outro, o trabalho por situações problemas permite aos alunos reinvestir realmente seus conhecimentos anteriores. "O ensino por situações problemas é coerente com a maneira como o aluno aprende". Verifica-se que propor um exercício em forma de situação problema faz com que o estudante veja aplicabilidade da matemática e dessa forma conecta-se o conhecimento totalmente estático apresentado no livro didático e no caderno com um dinamismo presente muitas vezes no mundo real, mostrando que a matemática pode ir além da sala de aula.

3.3 Os Parâmetros Curriculares Nacionais

É importante salientar as contribuições que os Parâmetros Curriculares Nacionais proporcionaram para o desenvolvimento da presente dissertação de mestrado. A organização, o planejamento e o desenvolvimento do trabalho foram referenciados nos PCNs, uma vez que esse documento:

1) Mostra que a aprendizagem de álgebra é fundamental para a formação intelectual e social dos estudantes e, com isso, embasa a realização de uma pesquisa sobre a aprendizagem desse conteúdo;

2) Indica o período escolar na qual se apresenta a transição da aritmética para a álgebra, o que possibilita a realização de um estudo das dificuldades enfrentadas nessa etapa da aprendizagem e, também, contribui na elaboração de um material didático que auxilie a compreensão dos conteúdos introdutórios de álgebra;

3) Apresenta a etapa da escola básica na qual é possível a aplicação do material didático desenvolvido, ou seja, o oitavo ano/sétima série do ensino fundamental é a fase do ensino básico onde ocorre a aprendizagem dos conhecimentos que facilitam a introdução à álgebra. Na p.64 do PCNs está afirmado que nessa série é necessário:

> Reconhecer que representações algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações problemas e favorecer as possíveis soluções;
> Traduzir informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice versa, generalizando regularidades e identificar o significado das letras.

4) Contribui na elaboração do material didático que a auxilia a transição da aritmética para a álgebra, pois apresenta formas de organização de exercícios tais como seqüências numéricas, relações numéricas numa forma generalizada e obtenção de valores desconhecidos em problemas.

5) Propõe uma ferramenta didática capaz de inserir o estudante como agente ativo da construção de seu conhecimento. Aulas que adotam o recurso das situações problemas apresentam o professor como mediador entre o conhecimento e os estudantes e, dessa forma possibilitam maiores condições de identificar as dificuldades dos alunos;

6) Norteia a prática do professor em relação à metodologia da resolução de problemas, com destaque para a autonomia dos estudantes no processo de aprendizagem, a flexibilidade dos conteúdos que serão ministrados e a realidade escolar como um fator que influencia a prática pedagógica do professor.

3.4 Utilização da Metodologia da Resolução de Problemas

Como forma de ajustar as dificuldades enfrentadas na transição da aritmética para a álgebra, discutidas no segundo capítulo dessa dissertação, foi desenvolvido um material composto por atividades a serem executadas na sétima série (oitavo ano) do ensino fundamental da E.E. “Prof. Euclides de Carvalho Campos”, município de Botucatu-SP. As atividades executadas, investigativas, são compostas por exercícios organizados segundo a proposta da metodologia da resolução de problemas.

Pelo fato de o pesquisador/autor do presente trabalho não fazer parte do corpo docente da escola na qual foram desenvolvidas as atividades, os problemas que compõem esse material visam, além de desenvolver a autonomia dos estudantes na busca por conhecimentos, investigar o nível de aprendizagem apresentado por eles. Com a aplicação das atividades investigativas conseguiu-se observar o nível de aprendizagem dos alunos em relação aos conhecimentos operacionais aritméticos e algébricos e também produzir mais adequadamente as atividades posteriores.

A seguir encontra-se descrito o planejamento das atividades investigativas que foram aplicadas, conectadas à metodologia adotada – metodologia da resolução de problemas.

Primeiro Planejamento: Atividade Investigativa

Tema: obter a expressão matemática que descreve a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de x lados.

Material: placa de isopor, folhas de sulfite e percevejos de metal.

Objetivo principal: promover a participação ativa dos alunos na construção de conhecimentos que tragam entendimento da relação entre os números, de forma generalizada.

Objetivo secundário: verificar o nível de aprendizagem dos alunos em relação aos conhecimentos algébricos e suas operações.

Expectativa: entendimento da relação numérica existente na tabela e a descrição dessa relação em uma forma generalizada utilizando a letra x como variável.

Tempo estimado: duas aulas (cem minutos).

Atividade Investigativa

Auxiliar os estudantes a recuperar conhecimentos sobre polígonos convexos com a apresentação das três primeiras questões dessa primeira fase.

Primeira parte

1) Construa figuras geométricas fechadas

2) Desenhe polígonos convexos

3) O que é uma diagonal?

4) Construa polígonos convexos com quatro, cinco, seis, sete e oito lados, utilizando os materiais que serão entregues. Cada grupo de estudantes deverá montar polígono convexo utilizando os percevejos como vértices, colocando-os em uma folha de sulfite que estará apoiada numa placa de isopor e, posteriormente, riscar na folha os lados desse polígono convexo.

Todo polígono convexo deverá apresentar um único vértice (percevejo) de cor diferente. Complete a tabela (abaixo) em suas construções.

Tabela 1: Construção da tabela com elementos geométricos do problema

Número de lados	**Número de vértices**	**Número de diagonais no vértice destacado (cor diferente)**	**Número de triângulos**	**Soma dos ângulos internos**

Fonte: Próprio autor

A Figura 5 mostra os estudantes construindo um quadrilátero convexo utilizando os percevejos, a folha de sulfite e a placa de isopor.

Fonte: Profa. Dra. Yuriko Yamamoto Baldin

Figura 5: Estudantes construindo um quadrilátero.

A construção da tabela constitui a preparação para a segunda etapa da atividade investigativa que iria seguir. Os estudantes entregaram todo o material concreto que estava em seu poder (placa de isopor, folhas de sulfite e os percevejos), em seguida o problema foi exposto e a turma dividida em grupos de três alunos para começar a segunda parte atividade investigativa. As etapas da metodologia da resolução de problemas foram executadas conforme o planejamento descrito a seguir.

Atividade Investigativa

Segunda parte

1) Quantas diagonais podem ser traçadas por um vértice em um polígono convexo de 30 lados? Em quantos triângulos ficará dividido esse polígono convexo?

2) Determine a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de 30 lados

3) Quantas diagonais podem ser traçados por um vértice em um polígono convexo que possui um número de lados igual a x? Em quantos triângulos esse polígono convexo será dividido?

4) Determine a soma dos ângulos internos de um polígono convexo que possui um número de lados igual a x.

1) Entendimento do problema

Os alunos precisam entender o problema. É necessário que façam a leitura e entendam o que os exercícios solicitam. Encaminhamentos relacionados a conhecimentos básicos de geometria, com intenção de auxiliar na construção dos polígonos convexos, devem ser realizados segundo as propostas indicadas por Polya (1995) na referida metodologia. As placas de isopor juntamente com as folhas de sulfite e os percevejos são entregues aos alunos para que possam construir os polígonos convexos e obter as informações necessárias ao preenchimento da tabela.

O entendimento da relação entre os números que compõem a tabela é fundamental para a realização do plano de resolução, pois inicialmente possibilita a articulação dessa relação com valores numéricos e, posteriormente, com a utilização da letra x (variável). Após alguns minutos, necessários para a construção dos polígonos convexos e ao preenchimento da tabela, os materiais manipulativos foram recolhidos. A expectativa inicial para esta fase era de trinta minutos, o que não se concretizou na execução da aula.

2) Estabelecimento de um plano de resolução

Após uma leitura, é necessário que os estudantes retomem as informações observadas na primeira etapa para organizar um plano de resolução. A análise dos números que compõem a tabela é a chave para a proposta de resolução e os encaminhamentos realizados aos grupos serão nesse sentido. A finalidade dessa etapa é que os estudantes entendam a relação existente entre o número de lados do polígono convexo e o número de triângulos no qual o polígono convexo pode ser dividido, segundo as diagonais que são conduzidas pelo vértice destacado (percevejo de cor diferente). Com esse entendimento é possível resolver o problema com o polígono convexo de trinta lados sem a necessidade da construção e, ainda, estender o raciocínio necessário para as questões que envolvam o polígono convexo que possui um número de lados igual a x (generalização). A tabela construída pelos estudantes, na fase dos conhecimentos dos problemas, é utilizada para desenvolver o raciocínio indutivo por meio de investigação de padrões numéricos.

3) Execução do plano

Espera-se que os estudantes executem suas resoluções tendo como alvo estender o raciocínio que envolve as relações numéricas da tabela, inicialmente na forma aritmética, para formas mais gerais e amplas com dedução informal da fórmula algébrica para essa descrição.

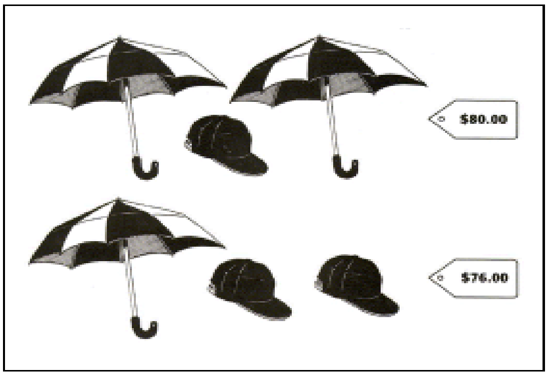
4) Investigação da validade da resposta obtida

Uma síntese que envolva as descrições das resoluções e respostas obtidas pelos estudantes é fundamental para organizar o conhecimento desenvolvido em aula. Essa organização dos conhecimentos apresentados pelos estudantes é embasada em dois aspectos: no entendimento do raciocínio algébrico, ou seja, qual a relação existente entre os números que compunham a tabela e no que representa a letra x nesse problema. Os alunos podem confirmar alguns resultados da tabela verificando a fórmula obtida, como uma atividade de verificação.

Apresentamos outro exemplo do planejamento das atividades investigativas

---

Segundo Planejamento: Atividade Investigativa



Fonte: KIERAN (1992, p.12)

Figura 6: Atividade investigativa 2, o problema dos preços das promoções

A Figura 6 ilustra duas situações de vendas envolvendo guarda-chuvas e bonés e, conseqüentemente, o preço das combinações. Com base nessas informações pede-se:

a) Qual o preço de cada boné e de cada guarda chuva?

b) Monte equações que descrevam a situação descrita

Material: folha com exercícios

Tema: montagem de equações que descrevam a situação ilustrada por figuras em duas promoções de compra de objetos.

Objetivo principal: promover a participação ativa dos estudantes na construção de conhecimentos que envolvem o entendimento de relações entre os números que representam os preços de uma situação de compra.

Objetivo secundário: obter o nível de aprendizagem dos alunos em relação aos conhecimentos algébricos e suas operações.

Expectativa: compreensão das relações existentes entre os preços dos produtos (promoções) e, com utilização da linguagem algébrica, montar as equações que descrevam as situações de compra.

Tempo estimado: uma aula (cinqüenta minutos)

Inicialmente o problema foi exposto aos alunos e a turma dividida em duplas para iniciar a atividade. As etapas da metodologia da resolução de problemas foram planejadas como segue:

1) Entendimento do problema.

Os alunos devem entender como se organizam os dados do problema, ou seja, interpretar a figura que ilustra as promoções para identificar o que representa cada elemento.

A compreensão de que os preços do boné e do guarda chuva representam incógnitas, ou seja, valores a se descobrir e ainda a forma como esses dados se organizam em cada promoção, é fundamental para a elaboração do plano de resolução.

2) Estabelecimento de um plano de resolução

Com base na compreensão do problema proposto, os alunos devem perceber que nas promoções são somados os preços dos bonés e dos guarda chuvas; que para formular as equações que descrevam a situação é necessário entender qual a relação existente entre esses preços. De forma geral devem entender que os preços dos objetos, em cada promoção, serão indicados por letras (incógnitas) e que a articulação dos símbolos operatórios algébricos será a forma de conduzir a resolução. Algumas intervenções, para indicar aos alunos problemas mais simples de montagem de equações do primeiro grau com uma incógnita, podem ser alternativas para auxiliar nessa etapa, caso o professor constate dificuldades nessa fase. O plano de execução pode se apoiar nos problemas correlatos e no estudo da maneira como se organizam os preços dos produtos em cada promoção.

3) Execução do plano

Na execução do plano de resolução se espera que os alunos montem as equações com base nas figuras que ilustram as promoções e também ampliem sua forma de raciocinar em relação à organização de uma equação que apresente duas incógnitas estabelecidas conforme uma regra, no caso a combinação dos preços dos objetos. Nessa fase os alunos precisam dominar o significado das operações algébricas de uma forma mais ampla.

4) Investigação da validade da resposta obtida

O docente deverá realizar uma síntese, apoiada nas respostas obtidas pelos estudantes, com a finalidade de organizar o conhecimento por eles adquirido e assim propor condições para que os mesmos verifiquem suas respostas. A forma como foram executadas as operações algébricas para obter os preços do boné e do guarda chuva, o significado das letras que compõem a equação e a explicação da obtenção das equações servem de ponto de retorno à etapa inicial do problema para a validação da resposta obtida.

Terceiro Planejamento: Atividade Investigativa

Carlos e Luis são dois irmãos que utilizam o mesmo computador. Para não haver problemas entre eles, Carlos colocou uma senha para que Luis não tenha acesso a seus arquivos. A senha funciona da seguinte forma:

O computador emite um número inteiro e a pessoa digita (responde) outro número também inteiro. Esse processo se repete por três vezes. Se as três respostas estiverem certas, os arquivos serão liberados. Luis tentou descobrir a senha; para isso começou a observar como Carlos fazia.

A Tabela 2 mostra algumas anotações feitas por Luis com base nessas observações.

Tabela 2: Aluno tentando descobrir senhas do computador

Computador	1	2	3	6	10	13	20	70	76
Resposta de Carlos	4	7	10	19	31	40	61	211	229

Fonte: Próprio autor

Olhando na tabela é possível constatar, por exemplo, que quando o computador emitiu o número 3 Carlos digitou 10; da mesma forma, quando o computador emitiu o número 13, Carlos respondeu o número 40.

Carlos muitas vezes usava calculadora, então Luis notou que sempre era utilizada a tecla com o número três.

Fonte: Todomercado (2009)

Figura 7: Calculadora básica

Analisando os dados fornecidos, é possível descobrir a senha de Carlos. As instruções abaixo o auxiliarão a obter a senha.

1) Faça a divisão dos números que representam as respostas de Carlos por 3. Compare os resultados dessas divisões com os números emitidos pelo computador.

2) Se o computador emitir o número 346, qual deveria ser a resposta de Carlos?

3) Se Carlos digitar o número 79 qual seria o valor emitido pelo computador?

4) Quando Luis achou que tinha de fato descoberto a senha, foi ao computador e começou a realizar as digitações. Na última emissão, o computador lançou a letra x e pediu uma resposta utilizando a letra x. Qual resposta Luis deveria digitar?

____

Material: folha com exercícios

Tema: descrição de uma relação numérica, observada em uma tabela, na forma generalizada com a utilização de variáveis.

Objetivo principal: promover a participação ativa dos alunos na construção de conhecimentos que envolvem a compreensão da relação entre os números da tabela.

Objetivo secundário: conhecer o nível de aprendizagem dos alunos em relação aos conhecimentos algébricos e suas operações.

Expectativas: entendimento da relação existente entre o número emitido pelo computador e a resposta apontada por Carlos, de forma geral fazendo uso da letra x (variável).

Tempo estimado: uma aula (cinqüenta minutos)

Inicialmente o problema foi exposto aos alunos e a turma dividida em duplas para iniciar a atividade. A resposta da última pergunta representa a descoberta da senha e as demais questões induzem os estudantes ao entendimento do problema. As etapas da metodologia de resolução de problemas estão descritas a seguir.

1) Entendimento do problema

Os alunos devem entender qual a relação existente entre os dados numéricos que compõem a tabela, ou seja, os números emitidos pelo computador e as respostas de Carlos. As três primeiras questões dessa atividade induzem os estudantes a essa compreensão. Encaminhamentos para auxiliar os estudantes no entendimento da relação existente entre os números da tabela podem ser realizados por meio da exploração de mais exemplos além daqueles apresentados na tabela.

2) Estabelecimento do plano

Induzidos pelo raciocínio aritmético proposto pelos três primeiros itens dessa atividade, os estudantes devem organizar um plano de resolução. Percebe-se que o último item exige uma relação geral entre os números que compõem a tabela; dessa forma, o plano de resolução deverá descrever essa generalidade pela utilização da linguagem algébrica. A compreensão do padrão segundo o qual os números são organizados na tabela e a descrição algébrica dessa relação conduzem o estudante à execução correta do plano de resolução.

3) Execução do plano.

Espera-se que os alunos ponham em prática o plano de resolução e elaborem a relação algébrica que organiza os números da tabela. A ferramenta que conduzirá os estudantes à resposta correta é o abandono da forma aritmética de arranjar os números da tabela para um modo generalizado, abstrato, do entendimento da relação entre os números.

4) Investigação da validade da resposta obtida

Os estudantes deverão ter condições de descrever suas resoluções. Uma forma de se conduzir esses depoimentos está na síntese com a participação ativa dos alunos. Essa condução se apóia na regra que associa os elementos numéricos da tabela, no significado da letra x no problema e na relação generalizada obtida como resposta. Devem testar a fórmula em diversos casos e situações diretas e inversas como exemplificado nos itens (b) e (c).

Com as atividades investigativas propostas, aplicadas sob a perspectiva da metodologia de resolução de problemas, a qual prevê uma maior participação dos alunos, espera-se como produto a geração de indicadores mais apurados do processo de aprendizagem nas diferentes etapas, o que possibilitará a identificação de suas dificuldades.

As dificuldades e falhas que os estudantes apresentaram no desenvolvimento dessa atividade foram organizadas e analisadas segundo as necessidades indicadas pela pré-álgebra. A investigação do nível de aprendizagem dos estudantes em relação aos conhecimentos algébricos e aritméticos operacionais faz parte dos objetivos dessas primeiras atividades aplicadas e foram discutidas nos dois últimos capítulos dessa dissertação.

4 DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES

Esse capítulo descreve o preparo do material pedagógico desenvolvido para auxiliar na transição da aritmética para a álgebra, com destaque para as etapas, aplicações, resultados numéricos de desempenho dos alunos e ao relato de acontecimentos ocorridos em sala de aula durante a execução prática desse material.

A realização de estudo para identificar os principais entraves ao ensino e à aprendizagem de álgebra, descrito no primeiro capítulo, identificou como principais objetivos do material didático:

- Elaborar atividades para detectar dificuldades, potencialidades e também para identificar o conhecimento dos estudantes tanto sobre as operações aritméticas como em relação ao raciocínio algébrico;

- Compor atividades que levem à compreensão do significado de uma letra em contexto algébrico, com foco em equações do primeiro grau, para facilitar a compreensão da incógnita; e nas relações numéricas, de uma forma generalizada, para fixar o entendimento do significado de variável;

- Desenvolver atividades que conduzam os estudantes ao entendimento de manipulações com símbolos algébricos em equações, sistemas e expressões com significado em problemas contextualizados e, posteriormente, em exercícios que proporcionem condições para desenvolver habilidades e fundamentem o raciocínio algébrico;

As atividades elaboradas foram executadas junto a três turmas de oitavos anos (sétimas séries) do ensino fundamental da Escola Estadual “Prof. Euclides de Carvalho Campos”, município de Botucatu - SP. O presente trabalho contou com o auxílio pedagógico da professora Aline Claro, responsável pelas turmas selecionadas, na organização e desenvolvimento do material didático.

A elaboração de atividades para a introdução e desenvolvimento do raciocínio algébrico teve como referência a metodologia da resolução de problemas proposto por Polya (1995), descrita no terceiro capítulo dessa dissertação.

O presente trabalho empregou algumas estratégias para a investigação das dificuldades e potencialidades dos alunos, como aulas expositivas com sua participação ativa para a instrução técnica e também o emprego de materiais concretos para a lhes facilitar a obtenção de relações numéricas e equações algébricas.

A disposição das atividades foi efetuada e distribuída conforme as etapas:

a) Atividades Investigativas: compostas por exercícios contextualizados onde os estudantes, distribuídos em duplas ou trios, devem propor soluções por meio do uso de conteúdos de aritmética. Sua finalidade é introduzir o raciocínio algébrico (investigativo, indutivo e dedutivo) e constatar as dificuldades e potencialidades dos alunos. As próximas atividades serão aplicadas com base na análise do desempenho obtido nessa primeira etapa;

b) Atividades Desenvolvedoras: compostas por aulas com participação ativa dos alunos nas resoluções e discussões dos problemas apresentados. Houve a proposta de resolução de exercícios, inclusive com tarefas extraclasse, cuja finalidade foi desenvolver a habilidade na manipulação algébrica de símbolos matemáticos. O objetivo dessas atividades é a introdução de técnicas básicas de resolução de problemas como forma de desenvolver o raciocínio algébrico;

c) Atividades de Finalização: são aulas que intensificam os ensinamentos propostos nas atividades anteriores e têm base na resolução de exercícios. Como fechamento dessa etapa se realizou uma síntese que retoma os principais objetivos dos conteúdos propostos em todas as atividades, os quais apontam para a forma algébrica de raciocinar e também no entendimento de suas técnicas. As evoluções e dificuldades encontradas na realização das atividades, bem como a síntese das atividades aplicadas e seu vínculo com as fundamentações teóricas, se encontram detalhadas no quinto capítulo dessa dissertação.

4.1 Organização das atividades

A distribuição das atividades, as análises de alguns resultados e ainda situações vivenciadas em sala, que ilustram um pouco da realidade escolar, estão descritas nessa etapa da pesquisa. Algumas resoluções apresentadas pelos estudantes foram expostas, para ilustrar sua forma de raciocínio. Em cada turma foram aplicadas seis atividades: duas investigativas, duas desenvolvedoras e duas atividades de finalização.

Em duas dessas turmas, oitavos anos A e C, foram aplicadas as mesmas atividades, pois o objetivo para ambas seria entender o significado de uma incógnita em equações e sistemas com duas equações e duas incógnitas. No oitavo ano B houve apenas uma atividade em comum com as outras duas turmas (primeira atividade investigativa); as outras cinco atividades conduziram para o entendimento do conceito de variável em problemas de contagem. Uma vez compreendido o significado de uma letra (incógnita ou variável) pelos alunos das três turmas, serão oferecidas condições para desenvolver a habilidade em articulações dos símbolos por intermédio de instrução de técnicas algébricas.

4.2 Atividades aplicadas

Seguem expostas as atividades, com síntese do desempenho, dos estudantes dos oitavos anos A e C, com a análise das práticas vivenciadas em sala de aula. Posteriormente se encontra a análise das atividades realizadas junto ao oitavo ano B.

Atividade Investigativa 1 – problema dos polígonos convexos

Material (primeira etapa): placa de isopor, percevejos e folhas de sulfite.

Primeira parte

1) Construa figuras geométricas fechadas

2) Desenhe polígonos convexos

3) O que é uma diagonal?

4) Construa polígonos convexos com quatro, cinco, seis, sete e oito lados utilizando-se dos materiais que serão entregues. Cada grupo de estudantes deverá montar polígono convexo s utilizando os percevejos como vértices, colocando-os em uma folha de sulfite que estará apoiada numa plaquinha de isopor e posteriormente riscar na folha os lados desse polígono convexo.

Todo polígono convexo deverá apresentar um único vértice (percevejo) de cor diferente. Complete a tabela abaixo em suas construções.

Tabela 3: Construção da tabela com elementos geométricos do problema da atividade investigativa

Número de lados	**Número de vértices**	**Número de diagonais no vértice destacado (cor diferente)**	**Número de triângulos**	**Soma dos ângulos internos**

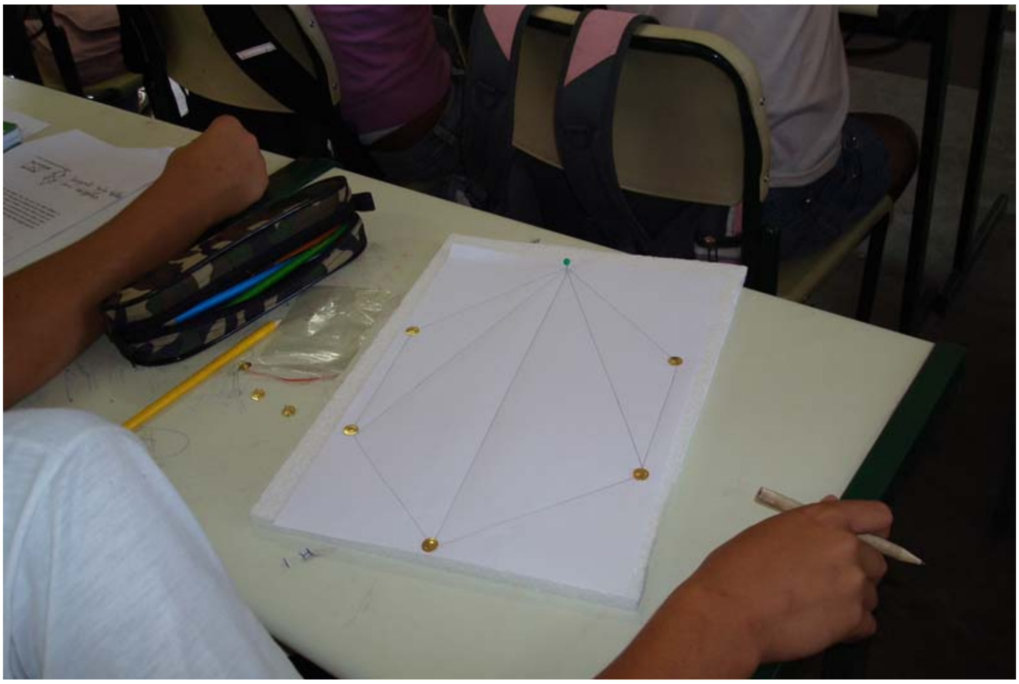
Fonte: Próprio autor

Na figura 8 os alunos estão organizados em grupos para realizar a primeira parte da Atividade Investigativa 1.

Fonte: Profa. Dra. Yuriko Yamamoto Baldin

Figura 8: Atividade Investigativa 1

A figura 9 mostra os estudantes construindo um hexágono utilizando os percevejos, a folha de sulfite e a placa de isopor.



Fonte: Profa. Dra. Yuriko Yamamoto Baldin

Figura 9: Estudantes construindo um hexágono

- Segunda parte

1) Quantas diagonais podem ser traçadas por um vértice em um polígono convexo de 30 lados? Em quantos triângulos ficará dividido esse polígono convexo?

2) Determine a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de 30 lados

3) Quantas diagonais podem ser traçados por um vértice em um polígono convexo que possui um número de lados igual a x? Em quantos triângulos esse polígono convexo será dividido?

4) Determine a soma dos ângulos internos de um polígono convexo que possui um número de lados igual a x.

- Descrição geral

Essa atividade foi aplicada nas três turmas, oitavos anos A, B e C em datas diferentes; seu objetivo principal foi instigar os alunos a encontrar respostas para problemas algébricos utilizando como ferramenta seus conhecimentos aritméticos. Os raciocínios investigativo e dedutivo foram indispensáveis para uma atividade bem sucedida.

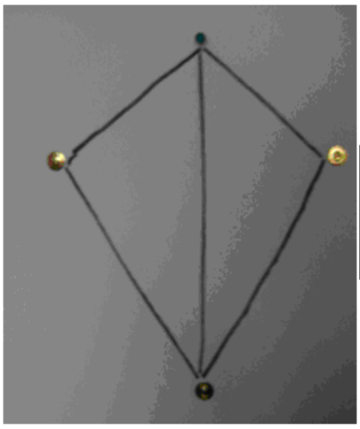
A atividade investigativa 1 foi dividida em duas etapas, sendo que a primeira fez uso exclusivamente de materiais concretos. A segunda etapa somente tem início após o término da primeira.

- Primeira etapa

Essa etapa durou mais que os cinqüenta minutos de uma aula; como se tratava de uma aula dupla, cem minutos, não foi necessário interromper.

De certa forma a quase totalidade dos alunos, em todas as turmas, conseguiu finalizar essa etapa; demonstraram bastante empenho na construção das figuras e retiraram daí as informações necessárias para completar a tabela. Foram percebidas algumas dificuldades na construção das figuras, na identificação de triângulos obtusângulos e na soma dos ângulos internos de um polígono convexo. Dessa forma, algumas indicações foram realizadas para auxiliar os alunos nos três itens iniciais dessa etapa. Vale destacar que o foco dessa atividade não era a geometria e, dessa forma, os auxílios prestados aos estudantes limitaram-se as técnicas para esclarecer as construções dos polígonos convexos

O fato de o próprio estudante realizar a atividade e adquirir as informações para montar a tabela a partir de materiais concretos, é uma forma positiva de se desenvolver autonomia no ambiente de estudos. Na pergunta sobre a construção da tabela, quarta questão da primeira etapa, houve a necessidade da confecção de um exemplo, mostrado na Figura 10, para que os estudantes conseguissem entender a montagem da tabela. Fica evidente a pouca experiência dos alunos em problemas com esse perfil, pois a forma de perguntar e agir do aluno expôs sua passividade em sala de aula, claramente demonstrada pela necessidade de um modelo feito pelo professor para posteriormente imitá-lo.



Número de lados	Número de vértices	Número de diagonais no vértice destacado (cor diferente)	Número de triângulos	Soma dos ângulos internos
4	4	1	2	360º

Fonte: Profa. Dra. Yuriko Yamamoto Baldin

Figura 10: Adaptação do modelo de tabela para auxiliar os estudantes

- Segunda etapa

Muitas perguntas e dúvidas vieram à tona antes que pudessem ser respondidas as quatro questões da segunda etapa da atividade investigativa 1. Estudantes perguntavam “Mas como eu vou contar o número de diagonais de um polígono convexo de trinta lados?”. Houve também indagações sobre o polígono convexo que possui um número de lados igual a x. Nesse caso, foi sugerido que tentassem entender a relação que há entre o número de lados do polígono convexo e o número de diagonais e usar o mesmo raciocínio com a letra x. Ficou nítida a dificuldade para efetuar as operações com uma variável e uma constante, no caso a variável x e o número três.

Na segunda etapa dessa atividade as duas primeiras questões são para despertar o raciocínio dedutivo, a partir das atividades da primeira etapa que estimulam o raciocínio indutivo por meio de manipulação de materiais concretos e da percepção da relação numérica em uma tabela. As duas últimas perguntas dessa segunda etapa exploram um raciocínio mais abstrato, pelo uso da linguagem algébrica. Em relação às duas últimas questões foi observado que houve pouquíssimos acertos e muitas perguntas foram deixadas em branco. Isso se justifica pelo grau de dificuldade que os estudantes associaram às questões, que pedem para descrever a generalização da relação numérica presente na tabela.

Os estudantes apresentaram pouca experiência em atividades com perfil investigativo, fato esse comprovado pela pouca autonomia na busca por informações. O raciocínio lógico dedutivo precisa ser mais desenvolvido e aperfeiçoado, bem como as formas de se expressar relações numéricas na forma generalizada.

Ficaram claras as grandes dificuldades encontradas pelos estudantes para articular e interpretar símbolos algébricos. Utilizar a álgebra como ferramenta para a descrição de generalizações será fundamental para o entendimento das estruturas numéricas e de propriedades gerais dos números que auxiliam a transição da aritmética para a álgebra. A organização de atividades que desenvolvam o raciocínio algébrico e utilizam a aritmética como fonte de conhecimento (pré-álgebra), em associação a materiais concretos, auxiliará os estudantes a realizarem a conexão entre o concreto, ilustrado nos problemas e o raciocínio abstrato das estruturas dos números.

A seguir descrevem-se, de forma específica, as situações particulares de cada turma nas quais se realizou essa atividade investigativa.

Atividade Investigativa: problemas dos polígonos convexos

Serie/Ano: 7ª A (8º A)

Duração: 2 aulas (100 minutos)

Número de estudantes: primeira etapa, 26 alunos; segunda etapa, 24 alunos

Organização: estudantes separados em duplas nas duas etapas da atividade

Material (primeira etapa): placa de isopor, percevejos e folhas de sulfite

---

Por se tratar das duas últimas aulas de uma sexta-feira, havia muita agitação entre os estudantes, fato que comprometeu a dinâmica da aula. Houve a necessidade de se solicitar silêncio e, no início, alguns alunos se recusaram a participar da atividade.

Foram detectadas dificuldades em conceitos de geometria logo na primeira etapa, constatadas pelo diálogo a seguir, em que (A) representa a fala do aluno e (P) representa a resposta do professor:

(A) O que é uma figura fechada?

(P) Construa uma pra vermos

(A) Pode ser um quadrado?

(P) É fechada?

(A) Como explico o que é uma diagonal? Posso desenhar?

(P) Desenhe e tente explicar o seu desenho

(A) Quantos triângulos têm aqui?

(P) Não é possível contar? Olhe a sua figura

(A) Como eu monto um de sete lados?

(P) Ponhas as tachinhas tente distribuí-las no isopor

(A) Como eu faço a soma dos ângulos internos?

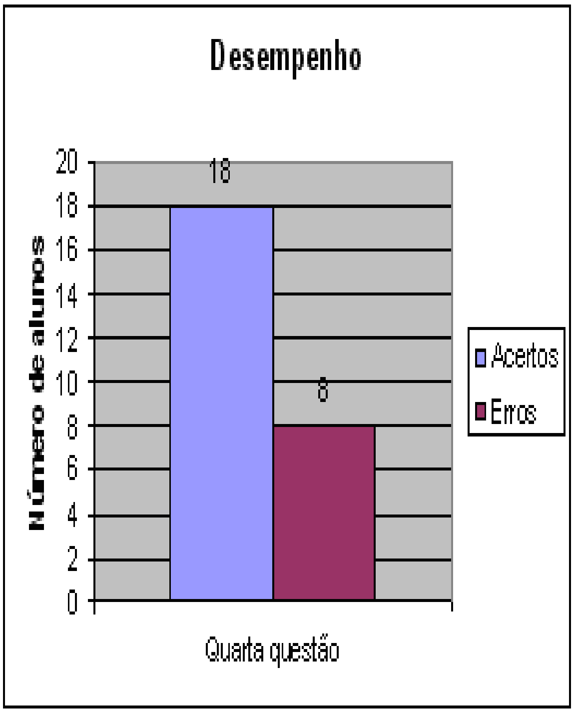
(P) Quantos triângulos têm? Com isso não dá para concluir?

(A) Como é mesmo um triângulo?

(P) Quantos lados ele tem?

A Figura 11 indica o desempenho dos alunos do oitavo ano A em relação à quarta questão da primeira etapa dessa atividade.

	Quarta questão
Acertos	18
Erros	8
Total	26



Fonte: próprio autor

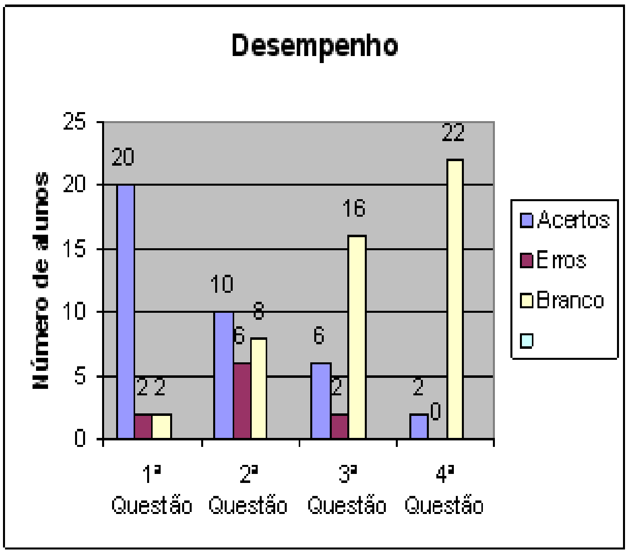
Figura 11: Desempenho dos alunos do 8° A na primeira etapa da atividade investigativa 1

Como demonstra o próximo quadro, a segunda etapa dessa atividade evidencia a dificuldade dos alunos em analisar a tabela preparada anteriormente e obter um padrão para responder as questões que solicitavam o número de diagonais e a soma dos ângulos internos de polígonos convexos com muitos lados.

Em alguns momentos os estudantes chegaram a desistir, sob a alegação de que não tinham o número de percevejos necessário à construção do polígono convexo de trinta lados e, por isso, não conseguiriam responder.

A Figura 12 mostra o desempenho dos alunos do 8° ano A na segunda etapa.

Questões	1ª	2ª	3ª	4ª
Acertos	20	10	6	2
Erros	2	6	2	0
Branco	2	8	16	22
Total	24	24	24	24



Fonte: próprio autor

Figura 12: Desempenho dos alunos da turma do 8° A na segunda etapa da atividade investigativa 1

Atividade Investigativa: problemas dos polígonos convexos

Serie/Ano: 7ª C (8º C)

Duração: 2 aulas (100 minutos)

Número de estudantes: primeira etapa 26 alunos

Organização: estudantes separados em onze duplas, um trio e um sozinho

Material (primeira etapa): placa de isopor, percevejos e folhas de sulfite

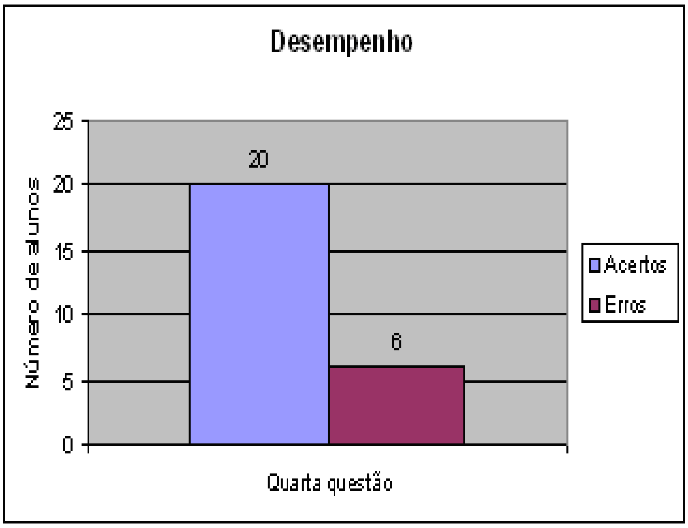
---

Uma situação diferente chamou a atenção nesta classe: alguns estudantes pegaram o livro de matemática adotado pela professora e buscaram figuras de polígonos convexos para construírem nas placas de isopor de forma análoga. Ainda nessa turma houve alunos que tentavam elaborar, com os percevejos, polígonos convexos equiláteros, ou seja, com uma régua tentavam deixar os percevejos equidistantes entre dois vértices consecutivos. Foram feitas intervenções para enfatizar que cada três percevejos consecutivos não poderiam estar alinhados e nem que os lados dos polígonos convexos não precisavam apresentar a mesma medida.

Esta situação demonstra claramente a insegurança dos alunos quanto aos conceitos geométricos e sua falta de autonomia durante a realização das atividades.

O quadro da Figura 13 mostra os acertos e erros dos alunos do oitavo ano C na quarta questão da primeira etapa dessa atividade.

	Quarta questão
Acertos	20
Erros	6
Total	26

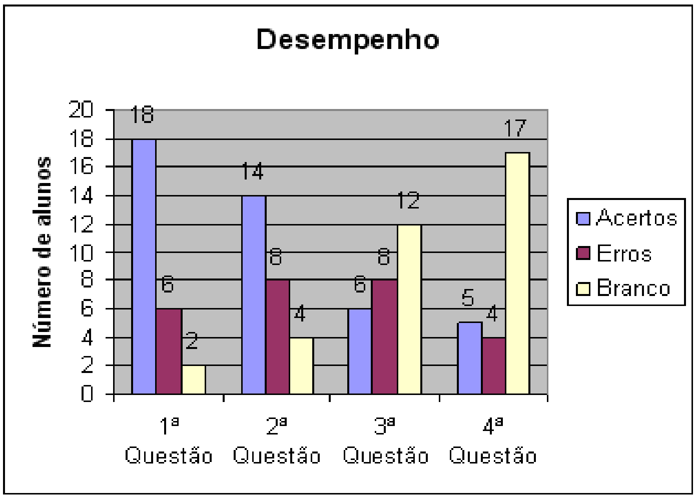


Fonte: próprio autor

Figura 13: Desempenho dos alunos do 8° C na primeira etapa da atividade investigativa 1.

Na segunda etapa, alguns alunos receberam uma pequena ajuda da professora Aline Cunha, que nesse dia estava presente à aula; não fosse isso, alguns resultados seriam diferentes dos obtidos. Nessa turma houve um grupo que se recusou a colaborar com essa segunda etapa e participaram, posteriormente, apenas da resolução da primeira pergunta, com o auxílio da professora Aline. A Figura 14 mostra o desempenho dos alunos na atividade investigativa dos polígonos convexos na segunda etapa.

Questões	1ª	2ª	3ª	4ª
Acertos	18	14	6	5
Erros	6	8	8	4
Branco	2	4	12	17
Total	26	26	26	26



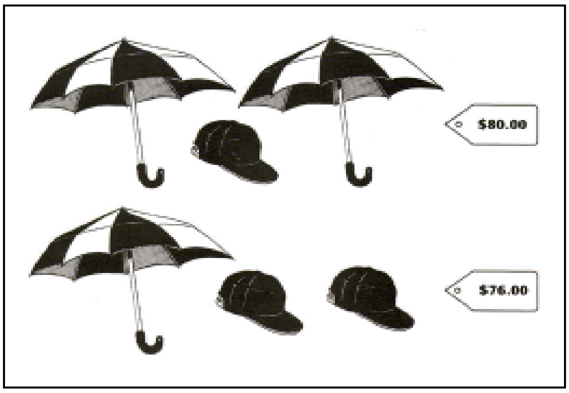
Fonte: próprio autor

Figura 14: Desempenho dos alunos do 8° C na 2ª etapa da atividade investigativa 1

A seguir é apresentada a segunda atividade investigativa, que foi aplicada nas sétimas séries A e C.

Atividade Investigativa 2: problema dos preços das promoções

A Figura 15 ilustra duas situações de vendas envolvendo guarda-chuvas e bonés e conseqüentemente o preço das combinações. Com base nessas informações pede-se:



Fonte: KIERAN (1992, p.12)

Figura 15: Atividade Investigativa 2, problema dos preços das promoções

a) Qual o preço de cada boné e de cada guarda chuva?

b) Monte equações que descrevam a situação descrita

- Descrição Geral

Essa segunda atividade investigativa, aplicada nos oitavos anos A e C, teve como finalidade motivar os estudantes a descobrir os preços do guarda-chuva e do boné, por meio de seus conhecimentos de aritmética.

Os alunos demonstraram pouca habilidade para resolver esse tipo de problema; apresentaram dificuldades inclusive na interpretação das figuras. Em um dialogo em sala de aula foi esclarecido para os alunos que os preços dos objetos são os mesmos nas duas condições de compra apresentada pelo problema. Posteriormente, os alunos ajustaram os valores para os preços dos bonés e guarda-chuvas em situações isoladas, ou seja, para cada promoção preços diferentes para o mesmo produto. Todas as resoluções foram realizadas por tentativa e erro, como esperado; além disso, sua pouca habilidade nos cálculos ficou evidenciada pelo tempo gasto para resolver o primeiro item dessa atividade.

Durante a aplicação do segundo item algumas intervenções foram realizadas na tentativa de se ajustar dificuldades apresentadas pelos estudantes, especialmente na associação de uma letra a um dos objetos da figura. Na montagem das equações percebeu-se que os estudantes não sabiam articular os símbolos algébricos nem atribuir algum sentido a eles, ou seja, não foram capazes de conectar as figura boné e guarda-chuva às equações que descrevessem o preço de ambos. Duas figuras juntas identificariam a soma do preço do boné e o preço do guarda chuva e muitos apenas trocaram o boné por uma letra e o guarda chuva por outra, sem a utilização de símbolos operatórios.

O esperado era que os estudantes conseguissem interpretar o problema e obter os preços do guarda-chuva e do boné fazendo uso das operações aritméticas e que também descrevessem a situação com incógnitas para representar o preço dos objetos. Foi observada uma grande dificuldade dos alunos em representar idéias na forma algébrica; dessa forma será de extrema importância a aplicação de atividades com presença de operações que envolvam símbolos matemáticos, para promover sua compreensão e habilidade em álgebra.

Verificou-se que os alunos não estavam acostumados a trabalhar de forma ativa em sala de aula, limitando-se a copiar as informações da lousa. Atividades que desenvolvam a autonomia dos alunos, seu interesse e os faça participar mais ativamente da aula fazem parte do planejamento das atividades posteriormente aplicadas..

Atividades que unam situações concretas e/ou cotidianas ao desenvolvimento do raciocínio algébrico presente nas relações numéricas dos problemas contextualizados são fundamentais para o desenvolvimento do raciocínio algébrico. Treinar a manipulação de símbolos algébricos faz parte dos objetivos das atividades posteriores, cujo tema é “a letra como incógnita em equações do primeiro grau e em sistemas de duas equações com duas incógnitas”.

A seguir se encontra a síntese das situações ocorridas em cada turma na qual se realizou a atividade investigativa 2.

Atividade Investigativa 2: Problema das promoções

Serie/Ano: 7ª A (8º A)

Duração: 1 aula (50 minutos)

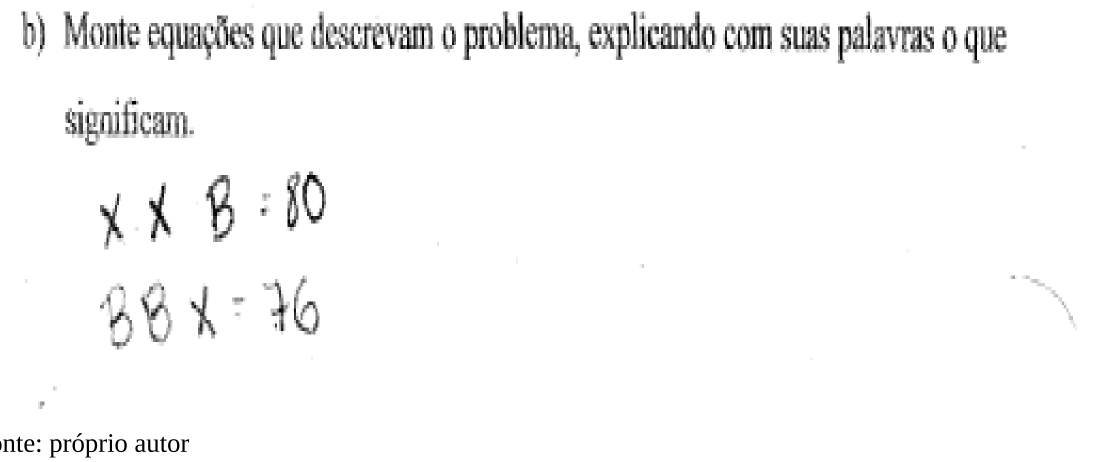
Número de estudantes: 29 alunos

Organização: Os estudantes organizaram-se treze duplas e um trio

---

Na primeira pergunta os estudantes ajustam valores que satisfazem a primeira e a segunda promoção isoladamente, ou seja, experimentam valores distintos para o preço do mesmo objeto em cada promoção de modo a satisfazer as equações independentemente. Observou-se, nessa turma, a insistência por valores de dezenas “cheias”, tais como, dez, vinte, trinta e, após muitas contas, começaram a utilizar outros valores.

Diferentemente do comportamento apresentado na primeira atividade aplicada, desta feita a disciplina da turma foi muito boa. Na resolução apresentada por um dos grupos, reproduzida na Figura 16 nota-se que o símbolo operatório ainda não apresenta significado àqueles estudantes.



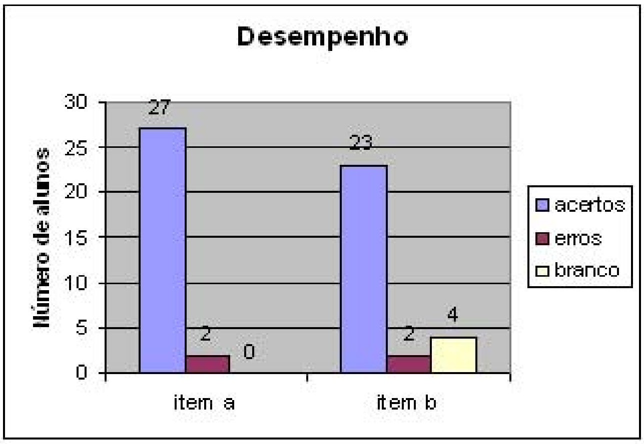
Fonte: próprio autor

Figura 16: Resolução de uma dupla de alunos da turma do 8°A na atividade investigativa 2

Fica claro que os alunos simplesmente substituíram as figuras “boné” e “guarda chuva” por letras, sem relacioná-las ou ainda sem incluir nenhum símbolo algébrico operatório entre as letras x e b, isto é, as letras não possuem significado numérico.

A Figura 17 apresenta o quadro e o gráfico que contém os dados do desempenho dos estudantes dessa turma em relação à segunda atividade investigativa.

	Exercício1 Item a)	Exercício2 Item b)
Acertos	27	23
Erros	2	2
Branco	0	4
Total	29	29



Fonte: próprio autor

Figura 17: Desempenho dos alunos do 8° A na atividade investigativa 2

Atividade Investigativa 2: problema das promoções

Serie/Ano: 7^a C (8^o C)

Duração: 1 aula (50 minutos)

Número de estudantes: 28 alunos

Organização: os estudantes dividiram-se em quatorze duplas

Constatou-se pelas perguntas que os estudantes apresentavam dificuldades em exercícios relacionados a situações problemas. A seguir são reproduzidos diálogos que ilustram essas dificuldades: (A) representa a fala do aluno e (P) a resposta do professor:

(A) O que são essas figuras?

(P) Não dá pra entender o que está sendo realizado? Não é uma promoção?

(A) O preço do guarda-chuva só serve embaixo, em cima não? O que eu faço?

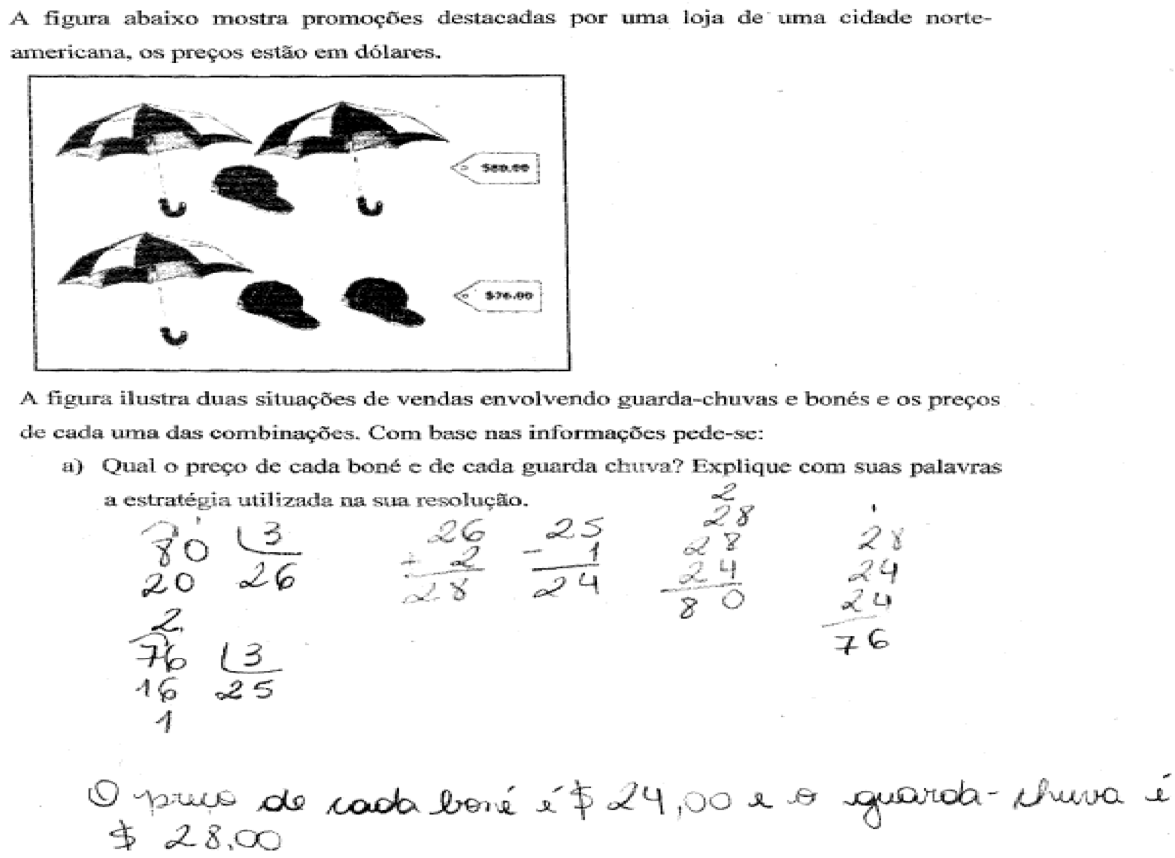
(P) O guarda-chuva não é o mesmo? Ele pode ter preços diferentes?

(A) O que eu faço?

(P) Já entendeu o problema? O que se precisa descobrir?

(A) Posso chutar alguns valores?

Essa turma apresentou uma maior disposição para resolver o problema, inclusive participando mais, perguntando e propondo resoluções. A esquematização apresentada por uma das duplas chamou a atenção por ser elaborada de forma diferente das demais, conforme demonstra a Figura 18.


A figura abaixo mostra promoções destacadas por uma loja de uma cidade norte-americana, os preços estão em dólares.

$80,00

$76,00

A figura ilustra duas situações de vendas envolvendo guarda-chuvas e bonés e os preços de cada uma das combinações. Com base nas informações pede-se:

a) Qual o preço de cada boné e de cada guarda chuva? Explique com suas palavras a estratégia utilizada na sua resolução.

80 | 3
20 26

76 | 3
16 25
1

26 + 2 = 28

25 − 1 = 24

28 + 28 + 24 = 80

28 + 24 + 24 = 76

O preço de cada boné é $ 24,00 e o guarda-chuva é $ 28,00

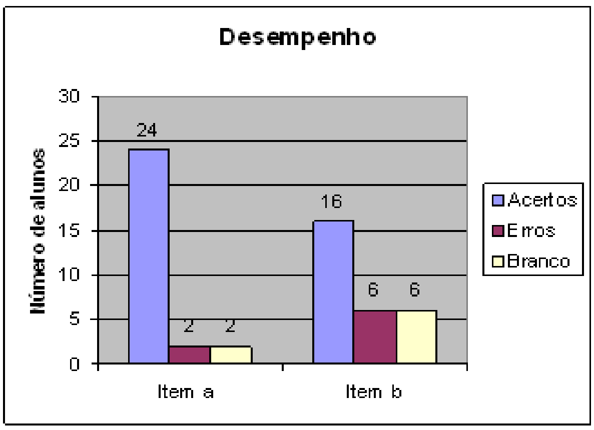
Fonte: próprio autor

Figura 18: Resolução de uma dupla de alunos da turma do 8° C na atividade investigativa 2

Percebe-se que a dupla encarou o problema como se os produtos tivessem preços iguais: fizeram uma divisão por três e em seguida acertos para satisfazer os preços das duas promoções.

O desempenho global dos alunos do oitavo ano C está indicando na Figura 17.

	Exercício 1 Item a)	Exercício 2 Item b)
Acertos	24	16
Erros	2	6
Branco	2	6
Total	28	28



Fonte: próprio autor

Figura 19: Desempenho dos alunos do 8° ano C na atividade investigativa 2

Com o término das atividades investigativas aplicadas nos oitavos anos A e C seguem descritas as atividades desenvolvedoras. Cabe ressaltar que o interesse nessas turmas reside em ensinar-lhes a entender o significado da letra no contexto de equações e sistemas, ou seja, trabalhar o conceito de incógnita, além da introdução sistemática das técnicas básicas de resolução.

Atividade Desenvolvedoras 1: sistemas com duas equações e duas incógnitas

1) Isolar y em cada equação:

a) x + y = 10

b) 2x + y = 8

c) x – y = 7

d) x + 2y = 10

2. Resolva os sistemas de equações abaixo:

a) $\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x+y=12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3x+5y=-2 \end{cases}$

3. Resolva os sistemas de equações abaixo:

a) $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 5x-3y=3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x-2y=1 \\ 4x+3y=33 \end{cases}$

4. Num sitio há perus e porcos num total de 54 cabeças e 178 pés. Quantos são os perus e os porcos?

- Descrição Geral:

Foram ministradas aulas aos oitavos anos A e C com o propósito de introduzir e desenvolver o raciocínio e a técnica algébrica básica, referenciadas nas deficiências detectadas anteriormente durante as atividades investigativas. Resolver sistemas com duas equações e duas incógnitas, entender o que representa uma letra em uma equação (incógnita) e articulá-la foram os elementos estruturadores dessa atividade.

Foi adotado para a resolução dos sistemas o método da substituição. As articulações algébricas necessárias, tais como soma de termos semelhantes e a propriedade distributiva da adição em relação à multiplicação, foram bem exploradas, com destaque na participação ativa dos estudantes. A professora Aline, efetiva das salas, mencionou que equações do primeiro grau com uma incógnita, a propriedade distributiva e a soma de termos semelhantes já havia sido trabalhado previamente com os estudantes; dessa forma as explanações serviram como revisão de conteúdos.

Os alunos demonstraram dificuldades nas articulações algébricas e na montagem das equações do problema dos perus e dos porcos, indicadores da necessidade de mais atividades para desenvolver essa habilidade. A resolução do quarto exercício na forma de tentativa e erro foi considerada, porém os estudantes perceberam a existência de outras maneiras de resolve-lo. No caso, o sistema com duas equações posto que, em geral, o método da tentativa e erro exige um grande tempo e apresenta pouca eficiência.

A seguir descrevem-se algumas situações vivenciadas durante a aplicação da atividade desenvolvedora em cada uma das turmas.

Atividade Desenvolvedora1: sistemas com duas equações e duas incógnitas

Série / ano: 7ª A (8º A)

Tempo: 100 minutos

Organização: individualmente

Objetivo: introdução a um processo de algebrização.

Essa turma novamente apresentou uma grande indisciplina e baixo interesse, que gerou dificuldades em relação à explanação da aula. Muitas intervenções foram realizadas para que se fizesse silêncio e para que tomassem notas das informações propostas. Em momentos destinados para que os estudantes desenvolvessem o que aprenderam resolvendo alguns exercícios, percebeu-se que aproximadamente 50% da sala estavam de fato se exercitando, enquanto os demais não. A idéia de haver um procedimento para resolver o problema foi bem aceito por parte dos estudantes, mas ainda ficou evidenciada pouquíssima habilidade nas articulações de idéias e na memorização de procedimentos e regras, bem como na descrição de seus entendimentos.

Atividade Desenvolvedora 1: sistemas com duas equações e duas incógnitas

Série / ano: 7ª C (8º C)

Tempo: 100 minutos

Organização: individualmente

Objetivo: Introdução a um processo de algebrização.

Diferentemente do oitavo ano A, essa turma se apresentou mais disposta, inclusive solicitando momentos para que pudessem resolver sozinhos alguns exercícios. Um fato extremamente importante foi que uma aluna resolvia os exercícios pelo método da tentativa e erro gastando o mesmo tempo destinado à explicação da resolução do sistema pelo método da substituição. Com isso, essa estudante começou a apresentar empecilhos para empregar o método proposto, justificando que era mais rápido e menos trabalhoso o método usado por ela. A forma de mostrar a essa estudante que o método da substituição poderia ser mais eficaz que o da tentativa e erro foi apresentar um sistema com duas equações e duas incógnitas que apresentasse soluções com números não inteiros, como indicado a seguir.

$$\begin{cases} 3x + y = 7{,}01 \\ x + 2y = 9{,}5 \end{cases}$$

O tempo necessário à resolução desse sistema foi praticamente o mesmo dos anteriores, porém a estudante não conseguiu resolvê-lo no mesmo tempo. Como fechamento da aula, foi destacado que muitas vezes o método da tentativa e erro pode ser eficiente, se bem treinada, porém para alguns casos é inviável pela complexidade das contas.

Segue a descrição da segunda atividade desenvolvedora, que foi realizada em forma de tarefa extraclasse.

Atividade Desenvolvedora 2: tarefa extra classe

1. Resolver os sistemas abaixo:

a) $\begin{cases} y = 3x \\ x + 4y = 13 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 4y = -1 \end{cases}$

- Descrição Geral

A tarefa solicitada aos oitavos anos A e C simplesmente exigia a resolução de sistemas com duas equações e duas incógnitas, com grau de dificuldade mínimo. Essa tarefa extra classe tinha como principal objetivo o treinamento dos procedimentos desenvolvidos em sala de aula para adquirir maior habilidade nas técnicas e dessa forma auxiliar na aprendizagem do raciocínio algébrico, na compreensão do significado das letras e no domínio de técnicas algébricas.

O número de tarefas extra classes devolvidos prontos pelas duas turmas foi muito pequeno, o que indica o pouco comprometimento dos estudantes.

É notório que se o número de encontros fosse maior, seria possível discutir mais casos e identificar mais dificuldades e, com isso, introduzir mais conteúdos. Um professor titular que necessite introduzir conhecimentos de álgebra pode utilizar as informações contidas nessas atividades para enriquecer suas aulas e trabalhar continuamente e com mais tempo essas atividades.

Segue a descrição das observações advindas das tarefas realizadas pelos alunos de uma forma mais específica, ou seja, analisando cada turma separadamente.

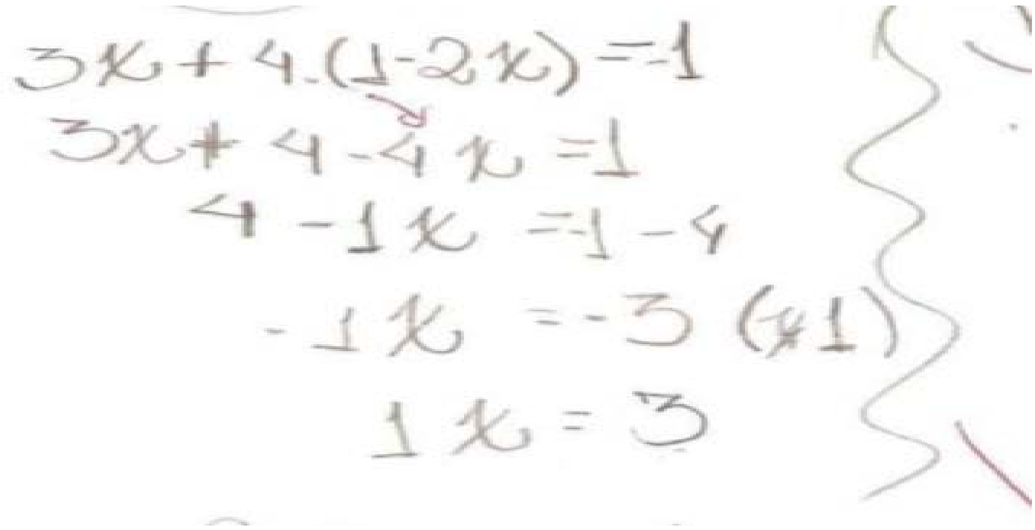
Tarefa atividade desenvolvedora: sistema com duas equações e duas incógnitas

Série / ano: 7ª A (8°A)

Objetivo: manipular símbolos algébricos; entender papel da letra em equações.

Observou-se pouca maturidade e habilidade algébrica para resolver esses exercícios. Os estudantes que realizassem uma comparação de modelos de resolução dos exercícios resolvidos em sala de aula com os propostos na tarefa poderiam obter mais acertos. O exercício do item a é análogo ao realizado nas salas de aula, no entanto o índice de acerto não foi tão bom assim. O problema proposto no item b poderia gerar alguma dúvida, pois o estudante poderia se confundir para isolar uma das incógnitas.

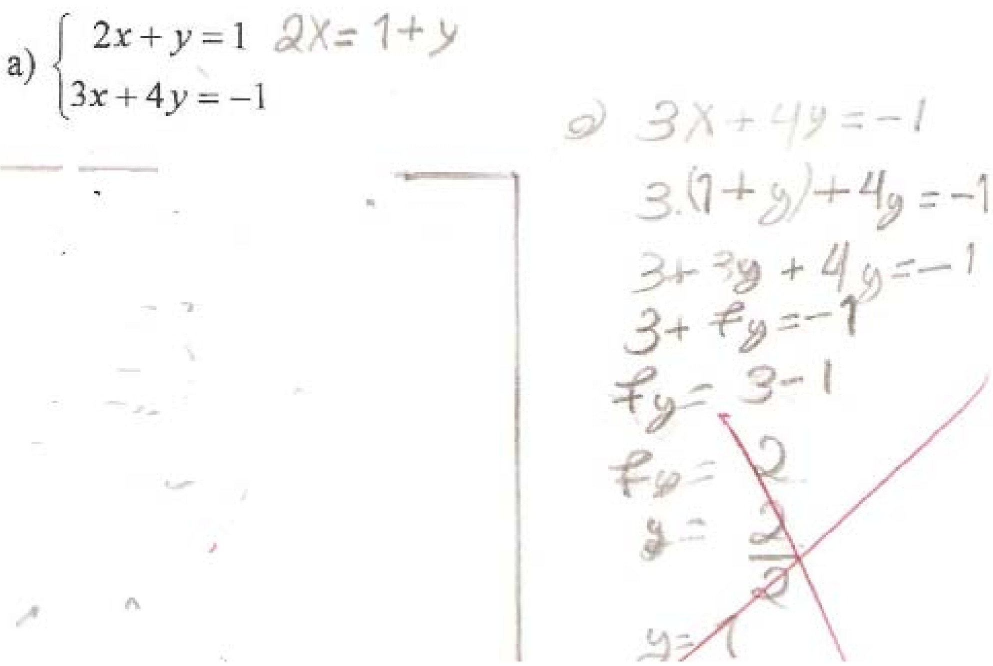
A Figura 20 apresenta um fragmento da resolução desenvolvida por um estudante. Observa-se pouca habilidade operatória, pois apresenta um erro na aplicação da propriedade distributiva e na multiplicação de números inteiros.



Fonte: próprio autor

Figura 20: Resolução articulada por aluno do 8° A da atividade desenvolvedora 2

A Figura 21 mostra que há dois erros: primeiro não se isolou a x, mas sim 2x e com isso substituiu-se no valor de x; segundo, ao isolar x subtrair-se-ia y de ambos os lados, o que resultaria em (– y) no segundo membro, que no caso aparece y (positivo).

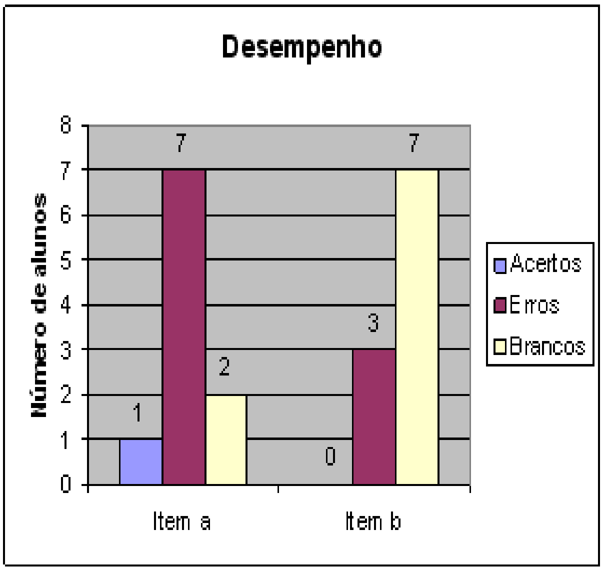


Fonte: próprio autor

Figura 21: Resolução dos estudantes do 8° A da atividade desenvolvedora 2

A Figura 22 apresenta o quadro de acertos e erros das tarefas entregues por dez alunos do oitavo ano A.

	Questão	
	Item a	Item b
Acertos	1	0
Erros	7	3
Brancos	2	7
Total	10	10



Fonte: próprio autor

Figura 22: Desempenho dos alunos do 8° A na tarefa da atividade desenvolvedora

Observou-se um progresso na forma de conduzir as articulações algébricas, conforme mostra a Figura 19, mas com algumas dificuldades. É necessário trabalhar mais intensamente a formulação do conceito de incógnita e também trabalhar exercícios que busquem desenvolver o domínio de técnicas algébricas.

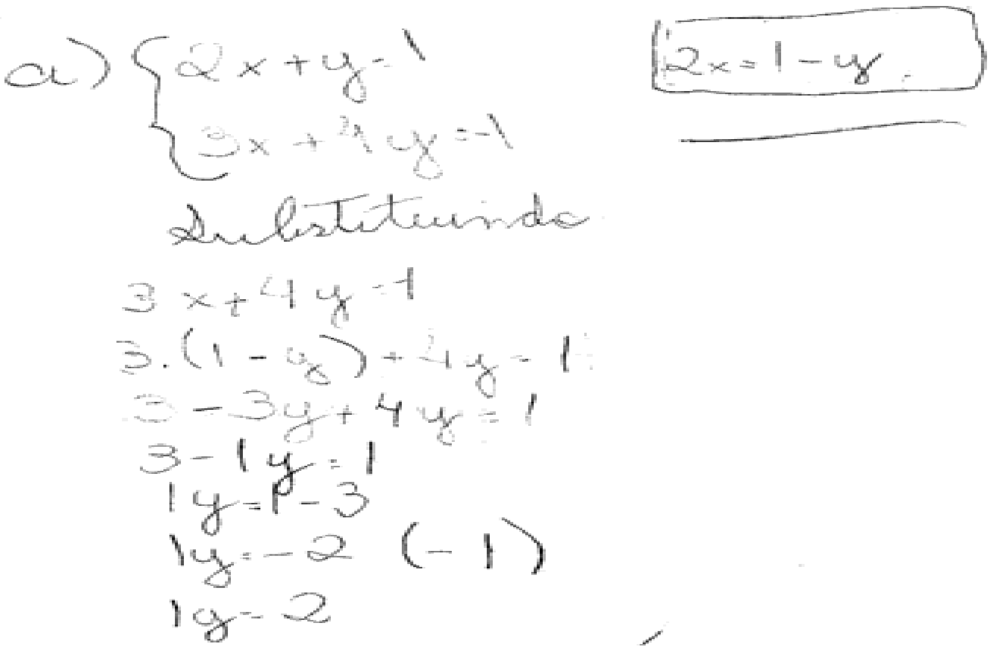
Tarefa atividade desenvolvedora: sistema com duas equações e duas incógnitas

Série / ano: 7ª C (8° C)

Objetivo: manipular símbolos algébricos; entender papel da letra em equações.

Observa-se pouca habilidade em manipulações algébricas e também uma confusão na aplicação das regras básicas para a resolução do sistema, de maneira análoga à apurada no oitavo ano A.

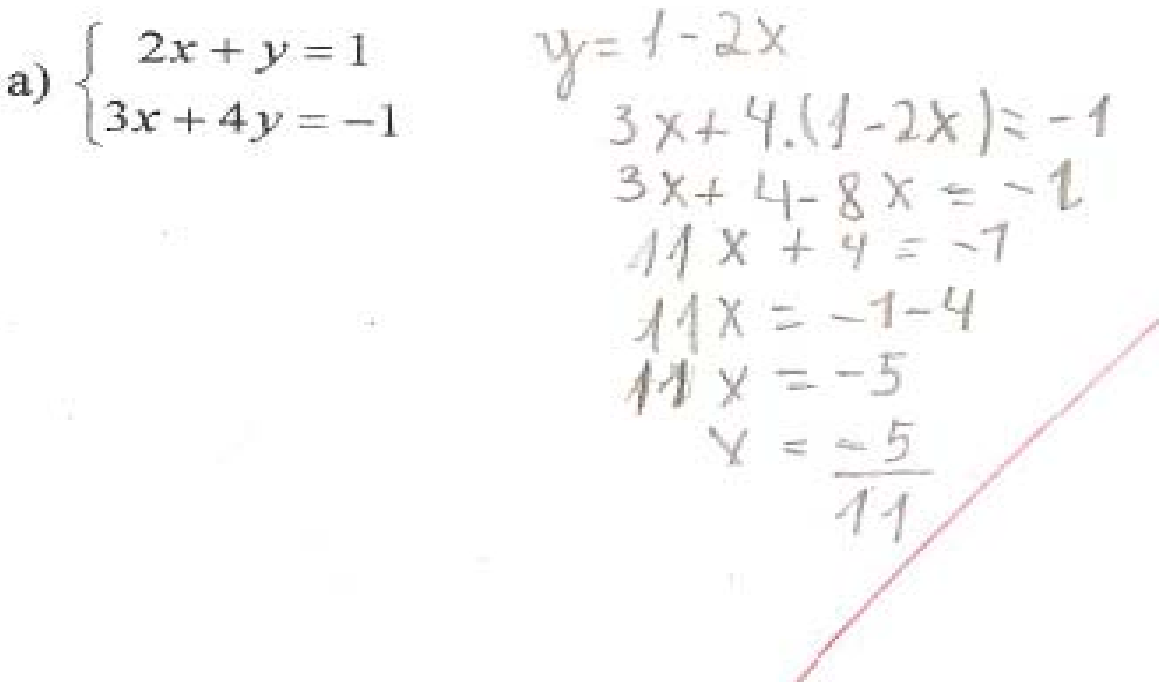
Algumas resoluções propostas pelos estudantes, como a reproduzida na Figura 23, ilustram esse quadro.



Fonte: Próprio autor

Figura 23: Resolução dos alunos do 8° C na tarefa da atividade desenvolvedora.

Nesse caso, observa-se que a idéia de isolar uma incógnita ainda apresenta falha, pois o aluno não isola x e sim 2x e erra ao substituir x na equação.



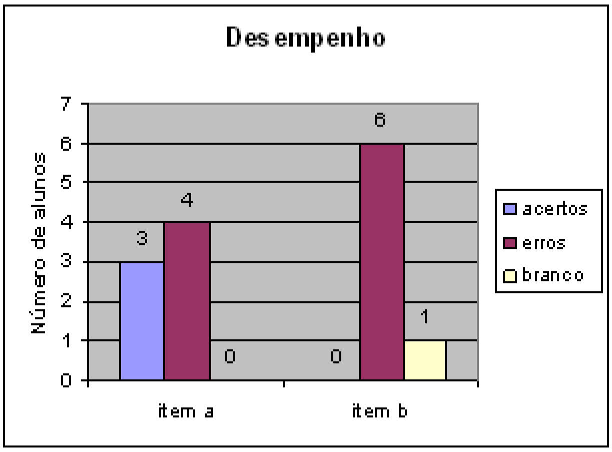
Fonte: Próprio autor

Figura 24: Resolução dos alunos do 8° C na tarefa da atividade desenvolvedora.

No caso da Figura 24, a incógnita foi isolada com sucesso, porém após a substituição observa-se a falha, pois para o aluno 3x somado com – 8x resulta em 11 x. Esse tipo de erro nos indica que ainda existe dificuldade no entendimento e na articulação da incógnita (letra x).

A Figura 25 apresenta o desempenho obtido pelos estudantes do oitavo ano C na tarefa solicitada.

	Questão	
	Item a	Item b
Acertos	3	0
Erros	4	6
Brancos	0	1
Total	7	7



Fonte: Próprio autor

Figura 25: Desempenho dos alunos do 8° C na tarefa da atividade desenvolvedora.

Infelizmente o número de tarefas respondidas é baixo, sete apenas, mas se constata que existe a necessidade de mais atividades que desenvolvam a forma de raciocinar dos estudantes em relação à resolução de sistemas de duas equações e duas incógnitas. Porém nota-se que as falhas são de ordem operacional com elementos que compõem a operação.

Seguem as descrições das atividades finalizadoras nas sétimas A e C.

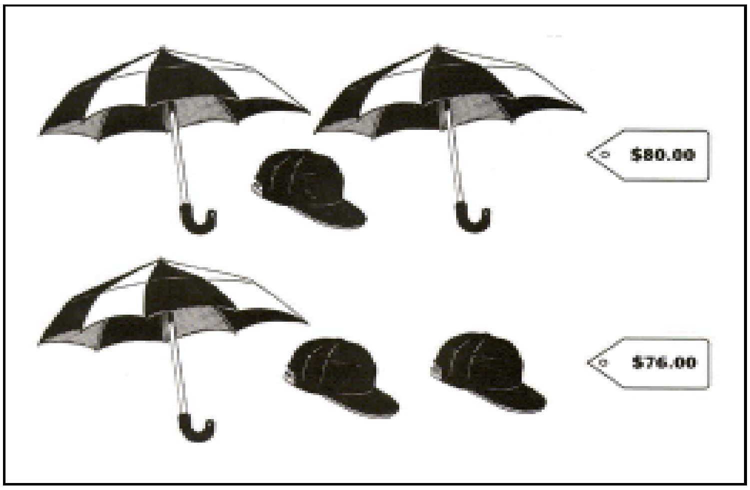
Atividade Finalizadora 1: sistemas com duas equações e duas incógnitas

1. Obter valores de x e de y que resolvem a equação x + y = 6.

2. Resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 80 \\ x + 2y = 76 \end{cases}$$

3. A figura 26 ilustra duas situações de vendas envolvendo guarda-chuvas e bonés e conseqüentemente o preço das combinações.



Fonte: KIERAN (1992, p. 12)

Figura 26: Promoções destacadas por uma loja de uma cidade norte americana

Com base nessas informações obter o preço do boné e do guarda chuva.

4. Resolva os sistemas abaixo.

a) $\begin{cases} x+y=5 \\ x+3y=11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y=7 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$

Descrição Geral

Retomou-se a forma de resolver os sistemas pelo método da substituição, destacando e argumentando seus procedimentos. Um fato de destaque na aula foi a presença do problema dos bonés e dos guarda-chuvas, que dessa vez foi resolvido por álgebra (resolução de sistemas) e não por aritmética (tentativa e erro).

Discutiu-se com os estudantes as duas formas de resolver o problema, o que amplia as vantagens da resolução de sistemas de duas equações e duas incógnitas pelo método da substituição. A relação entre as figuras e a montagem de equações foi debatida, indicando que a letra seria um valor a ser descoberto (incógnita), no caso o preço do boné ou do guarda-chuva, e não simplesmente que representaria o boné ou o guarda-chuva. Uma síntese foi realizada ao final da aula, para explicar o papel que as letras representam em determinadas equações (incógnitas) e também para explicar o uso da álgebra como ferramenta para resolver problemas e expressar raciocínios.

Estão descritas, abaixo, as situações vivenciadas em sala de aula de forma particular, ou seja, realizando descrição de cada turma separadamente.

Atividade Finalizadora: sistemas com duas equações e duas incógnitas

Série: 7ª A (8º A)

Tempo: 100 minutos

Organização: Individualmente

Objetivo: Manipular os símbolos algébricos. Entender o papel da letra em equações. Síntese final

---

A turma do 8° ano A se apresentou muito agitada e dessa forma o andamento da aula foi prejudicado. O fato das aulas serem as duas últimas da sexta feira e da professora efetiva das salas, Aline Claro, não estar presente, contribuiu para esse acontecimento. Houve um número menor de estudantes presentes, que se motivaram a estudar as resoluções dos sistemas. Um ponto a se destacar foi o problema dos bonés e dos guarda-chuvas, que dessa vez foi resolvido por álgebra. Os estudantes perceberam as duas formas de resolver o problema e começaram a discutir sobre ambos. Alguns alunos resolviam os exercícios juntamente com os encaminhamentos da aula e isso indica que houve o entendimento dos procedimentos algébricos.

Atividade Finalizadora: sistemas com duas equações e duas incógnitas

Série/Ano: 7ª C (8º C)

Tempo: 100 minutos

Organização: Individualmente

Objetivo: Manipular os símbolos algébricos. Entender o papel da letra em equações. Síntese final

---

A forma com que os alunos se apresentaram proporcionou uma aula mais tranqüila e com maiores chances de se alcançar os objetivos determinados. Os estudantes se apresentaram mais calmos e com maior disposição para por em prática situações já vivenciadas nas outras atividades.

No problema das promoções envolvendo os preços dos bonés e os guarda-chuvas os estudantes o identificaram, porém desta vez o método adotado para resolvê-lo foi o da substituição, diferentemente do método adotado na atividade investigativa (tentativa e erro). A conexão estabelecida entre a primeira atividade realizada (investigativa 1) com a que ora se apresentava foi o ponto alto da aula, uma vez que se realizou uma comparação: primeiramente, havia um problema, depois uma técnica e finalmente, o mesmo problema para ser resolvido desta vez com a técnica aprendida.

No oitavo ano C a síntese foi realizada exatamente no problema das promoções dos preços dos bonés e guarda chuvas indicando toda a potencialidade da álgebra como ferramenta para resolver alguns problemas de forma prática.

Para efeito de comparação, no oitavo ano A, se realizou a síntese na atividade total, sendo que para cada exercício foi indicado o conteúdo de álgebra necessário e suas propriedades e potencialidades, entre elas a eficácia da utilização de incógnitas. As formas diferentes de se realizar a síntese final se apresentaram de acordo com o comportamento e inquietações (curiosidades) proporcionadas pelos alunos de cada turma.

A seguir está descrita a atividade finalizadora extra classe.

Atividade Finalizadora 2: Tarefa extra classe

1) Resolva os sistemas abaixo

a) $\begin{cases} y = 3x \\ x - y = -6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

2) Observe o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 2x + y = 14 \\ 3x + 4y = 31 \end{cases}$$

Pede-se:

a) Obtenha o valor de x e y

b) Crie um problema que a resolução pode ser feita através do sistema acima

---

- Descrição Geral

Na tarefa solicitada para os oitavos anos A e C foi composta por exercícios análogos aos realizados em sala de aula com exceção do segundo problema que propunha a elaboração de um texto para adequar o exercício. O número de tarefas entregue foi baixo, porém destaca-se que as resoluções foram, de forma geral, distintas, o que indica que houve poucas cópias. Esperava-se que os números de entregas e de acertos fossem superiores ao apurado.

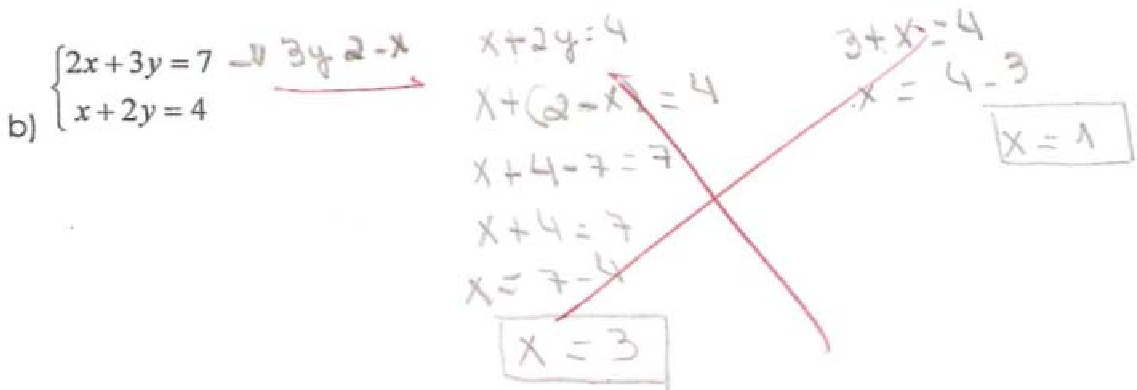
Segue as descrições dessas atividades finalizadoras, de acordo com cada turma.

Tarefa Atividade Finalizadora: sistemas com duas equações e duas incógnitas

Série / ano: 7ª A (8°A)

Objetivo: manipular símbolos algébricos; entender papel da letra em equações.

Percebe-se que, nessa última etapa, não houve nenhum acerto nos dois últimos itens da segunda questão solicitada na tarefa. A aula que antecedeu essa tarefa foi uma das mais agitadas e conseqüentemente pouco produtivas, o que influenciou o baixo desempenho nas tarefas. A Figura 27 reproduz a resolução proposta por um estudante. Observa-se o pouco conhecimento das propriedades gerais dos números e a dificuldade na compreensão do significado de uma letra em equações.



Fonte: Próprio autor

Figura 27: Resolução de aluno do 8° ano A para tarefa da atividade finalizadora

Entender o que representa uma letra em uma equação ainda não ficou claro para esse aluno, nem mesmo como fazer sua articulação.

A Figura 28 demonstra a formulação apresentada por um aluno que não entendeu o problema e muito menos o significado das letras nas equações, no problema que exigia a elaboração de um texto em que a resolução resumisse o sistema.

2) Observe o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 2x + y = 14 \\ 3x + 4y = 31 \end{cases}$$

Pede-se:

b) Crie um problema que a resolução pode ser feita através do sistema acima.

Rodrigo comprou uma camisita do corinthians e uma bandeira e pagou R$16, já Fernando compro duas bandeiras e 1 blusa e pagou 27 Quanto custa a bandeira? E a blusa?

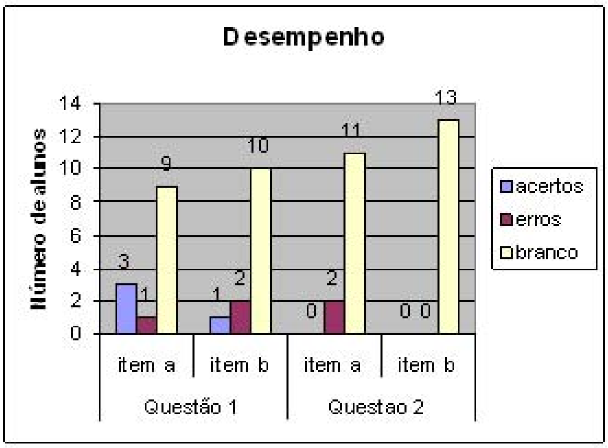
Fonte: Próprio autor

Figura 28: Descrição de um aluno da turma do 8° A em exercício da tarefa da atividade finalizadora

O estudante apresentou como incógnitas o preço da camiseta, da bandeira e da blusa, três no caso, e ainda o valor das combinações de objetos não apresentava nenhuma relação com o sistema indicado no corpo do exercício.

A Figura 29 mostra a tabela e o gráfico com os desempenhos dos alunos do oitavo ano A, referentes à tarefa finalizadora.

	Questão 1		Questão 2	
Questão	Item a	Item b	Item a	Item b
Acertos	3	1	0	0
Erros	1	2	2	0
Branco	9	10	11	13
Total	13	13	13	13



Fonte: Próprio autor

Figura 29: Desempenho dos alunos do 8° A na tarefa da atividade finalizadora

---

Tarefa Atividade Finalizadora: sistemas com duas equações e duas incógnitas

Série / Ano: 7ª C (8°C)

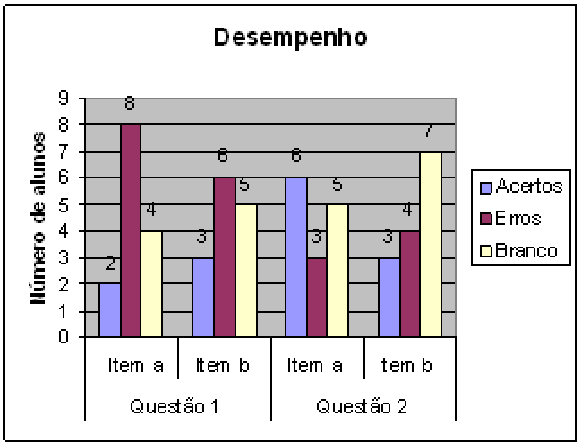
Objetivo: manipular símbolos algébricos; entender papel da letra em equações.

Percebeu-se pouca habilidade nas manipulações algébricas por parte desses estudantes. Isolar incógnitas, bem como aplicar a propriedade distributiva, foram as principais fontes dos erros apresentados pelos estudantes, o que indica que o significado da letra em equações ainda não foi compreendido.

Analogamente ao apurado no oitavo ano A, não houve muitas resoluções idênticas – cópias; em contrapartida foi baixíssimo o número de resoluções propostas para a segunda questão. Essa turma mostrou um maior comprometimento nas aulas, o que refletiu positivamente no desempenho dos exercícios, apesar do baixo número de tarefas apresentado.

A Figura 30 indica o desempenho dos alunos do oitavo ano C.

	Questão 1		Questão 2	
Questão	Item a	Item b	Item a	Item b
Acertos	2	3	6	3
Erros	8	6	3	4
Branco	4	5	5	7
Total	14	14	14	14



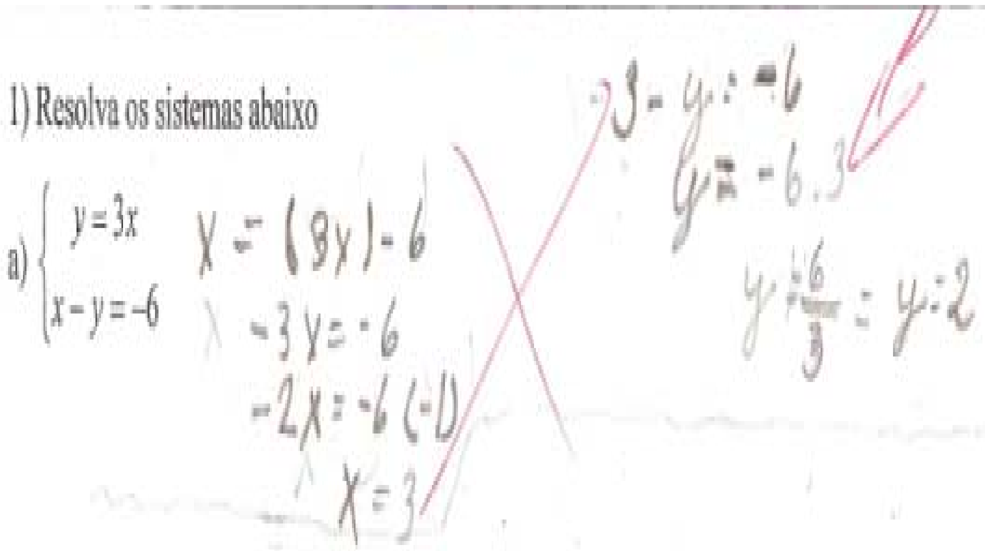
Fonte: Próprio autor

Figura 30: Desempenho dos alunos do 8° C na tarefa da atividade finalizadora

As duas questões, com exceção do item b da questão 2, apresentam a mesma temática: resolução de sistemas com duas equações e duas incógnitas. Este item muda o foco do problema ao solicitar que o estudante discorra sobre um sistema, ou seja, produza um pequeno texto que conecte o sistema de equações a uma situação que ele deve criar.

As ilustrações a seguir, reproduções de exercícios realizados pelos alunos, destacam algumas situações encontradas, que foram analisadas e comentadas brevemente.

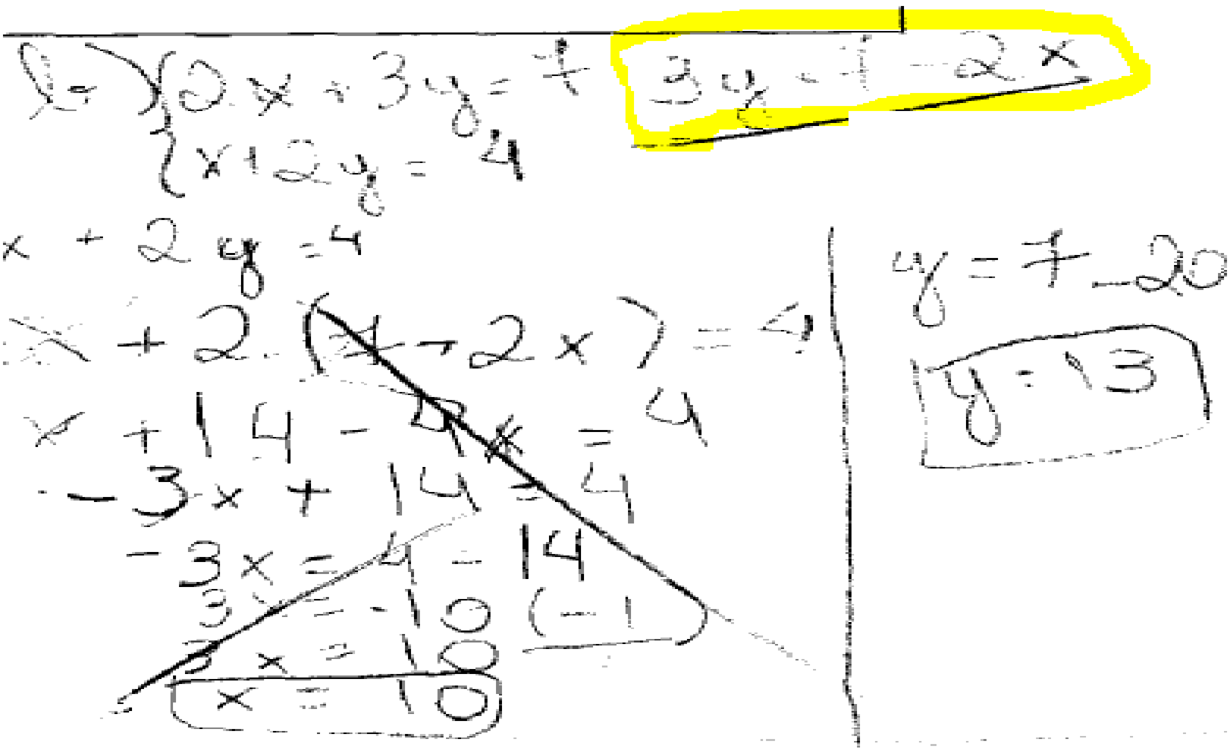
A Figura 31 mostra que o aluno fez tamanha confusão para tentar resolver a equação (3-y = -6), que acabou se perdendo e apresentando resultado errôneo.



Fonte: Próprio autor

Figura 31: Resolução dos alunos do 8° C na tarefa da atividade finalizadora

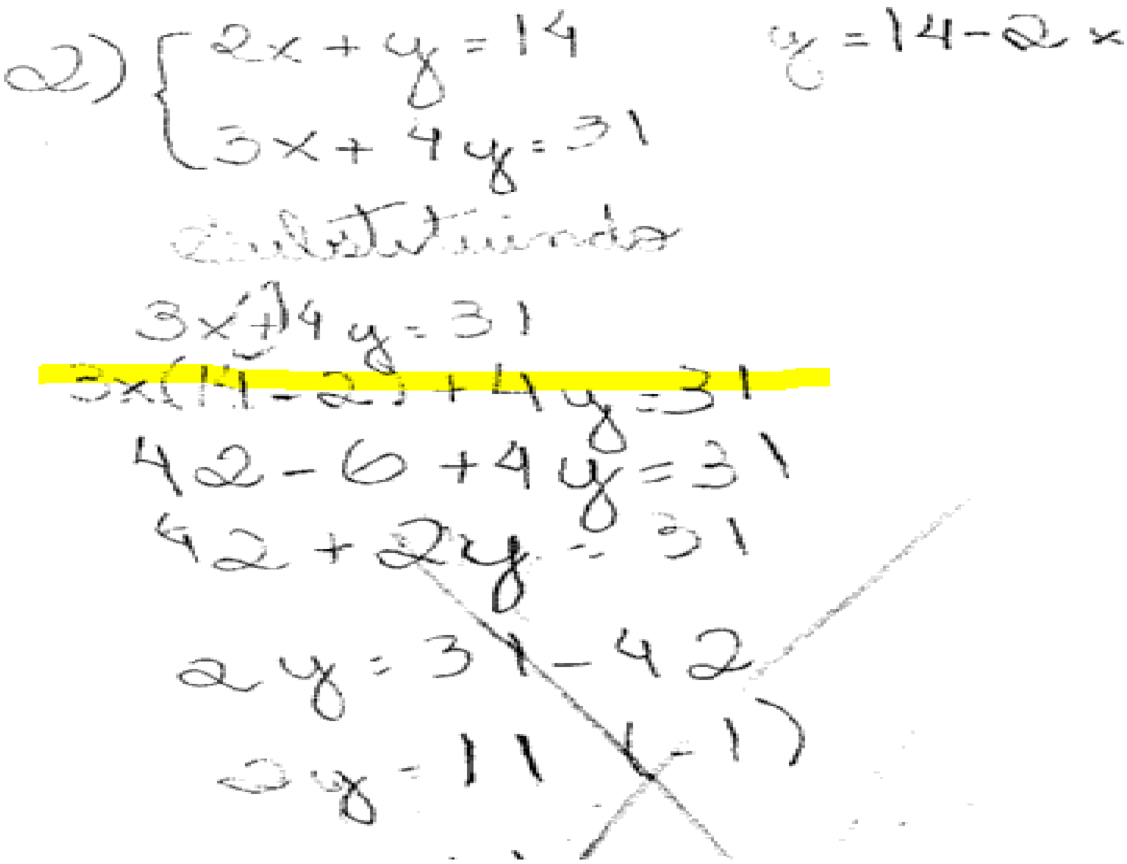
Já na resolução representada pela Figura 32 se observa que o aluno não isolou a incógnita y, mas 3y; isso gerou todo o erro na substituição da outra equação. Nesse caso o estudante isolou adequadamente a incógnita y, mas no momento de substituir e realizar a distributiva ocorreram muitas falhas.



Fonte: Próprio autor

Figura 32: Resolução de um aluno da turma do 8° C na tarefa da atividade finalizadora

A Figura 33 demonstra que novamente os estudantes iniciaram a resolução de maneira correta, porém predominam as falhas nas articulações algébricas. Constata-se a existência de dificuldades para expressar o raciocínio algébrico, pois não possuem o total entendimento do significado da letra nas equações, o que dificulta as manipulações algébricas.

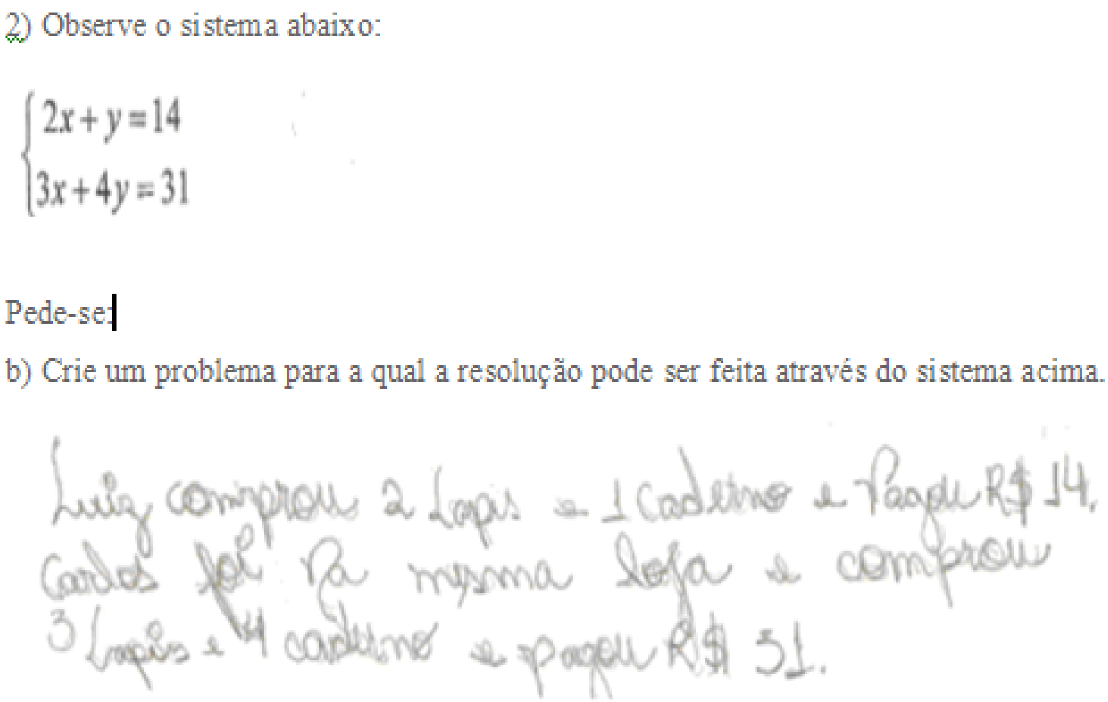


Fonte: Próprio autor

Figura 33: Resolução de tarefa da atividade finalizadora por aluno do 8° C

Na segunda parte da Questão 2, que exige a elaboração de um texto, a formulação apresentada indica que houve o entendimento do problema, ou seja, o significado das letras foi compreendido e contextualizado, conforme esclarece a Figura 34.

Contudo, o aluno não foi capaz de formular uma pergunta, por exemplo, qual o preço do lápis e do caderno. Isso atesta que as atividades realizadas proporcionam ao aluno conexões de raciocínio entre o concreto e o abstrato, elementares nas relações numéricas e equações.



2) Observe o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 2x + y = 14 \\ 3x + 4y = 31 \end{cases}$$

Pede-se:

b) Crie um problema para a qual a resolução pode ser feita através do sistema acima.

Luiz comprou 2 Lapis e 1 Caderno e Pagou R$ 14. Carlos foi Na mesma loja e comprou 3 Lapis e 4 caderno e pagou R$ 31.

Fonte: Próprio autor

Figura 34: Descrição de um aluno da turma do 8° C de um exercício da tarefa da atividade finalizadora.

As atividades aplicadas com os alunos da turma do 8^0B, apresentada a seguir, foram formatadas de maneira diferente daquela proposta e implantada nos demais oitavos anos, o que justifica sua descrição estar isolada das outras duas turmas.

Atividade Investigativa 1: problema dos polígonos convexos

Material (primeira etapa): placa de isopor, percevejos e folhas de sulfite

Primeira parte

1) Construa figuras geométricas fechadas

2) Desenhe polígonos convexos

3) O que é uma diagonal?

4) Construa polígonos convexos com quatro, cinco, seis, sete e oito lados utilizando-se dos materiais que serão entregues.

Cada grupo de estudantes deverá montar polígonos convexos utilizando os percevejos como vértices colocando-os em uma folha de sulfite que estará apoiada numa plaquinha de isopor e posteriormente riscar na folha os lados desse polígono convexo.

Todo polígono convexo deverá apresentar um único vértice (percevejo) de cor diferente. Complete a tabela abaixo em suas construções.

Tabela 4: Preenchimento de dados

Número de lados	**Número de vértices**	**Número de diagonais no vértice destacado (cor diferente)**	**Número de triângulos**	**Soma dos ângulos internos**

Fonte: Próprio autor

- Segunda parte

1) Quantas diagonais podem ser traçadas por um vértice em um polígono convexo de 30 lados? Em quantos triângulos ficará dividido esse polígono convexo?

2) Determine a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de 30 lados

3) Quantas diagonais podem ser traçados por um vértice em um polígono convexo que possui um número de lados igual a x? Em quantos triângulos esse polígono convexo será dividido?

4) Determine a soma dos ângulos internos de um polígono convexo que possui um número de lados igual a x.

Atividade Investigativa 1: Problemas dos polígonos convexos

Serie / Ano: 7ª B /8º B

Duração: 2 aulas (100 minutos)

Número de estudantes: 24 alunos

Organização: os alunos dividiram-se em dez duplas, um trio e um sozinho.

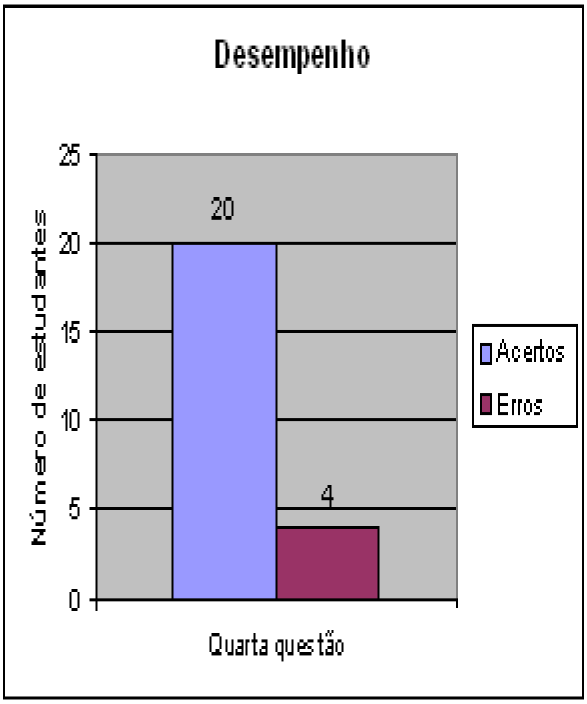
Material (primeira etapa): placa de isopor, percevejos e folhas de sulfite.

Essa turma apresentou comportamento tranqüilo, sem muita algazarra. Não houve recusa por parte dos estudantes em desenvolver as atividades.

A pouca experiência da turma em atividades com perfil investigativo, pode ser comprovada pela pouca autonomia na busca por informações, o que influenciou no tempo necessário para o término da primeira etapa. O raciocínio lógico dedutivo e novas formas de expressar uma relação numérica na forma generalizada precisam ser mais trabalhados, necessidade constatada pela dificuldade dos estudantes na resolução dos exercícios.

A Figura 35 exibe o desempenho dos alunos dessa turma apenas na montagem da tabela, quarta questão da primeira etapa, já que os três primeiros itens dessas atividades investigativas não foram analisados.

	Quarta questão
Acertos	20
Erros	4
Total	24



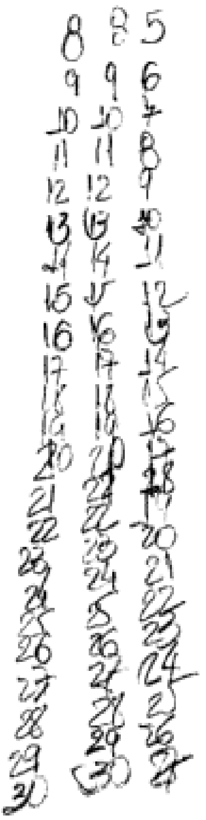
Fonte: Próprio autor

Figura 35: Desempenho dos alunos do 8° B na 1ª etapa Atividade Investigativa 1

Uma resolução chamou a atenção, por exemplificar uma dificuldade unânime dos estudantes: investigar exemplos numéricos para buscar e entender padrões e com isso concluir certas regras. Na primeira pergunta da segunda etapa dessa atividade investigativa, pediu-se o número de diagonais em cada vértice de um polígono convexo de trinta lados; o estudante não conseguiu investigar a relação existente entre os números que compunham a tabela construída e fez a contagem um a um, conforme ilustra a Figura 36.

Segunda parte

1) Quantas diagonais podem ser traçadas por um vértice em um polígono de 30 lados? Em quantos triângulos ficará dividido esse polígono?



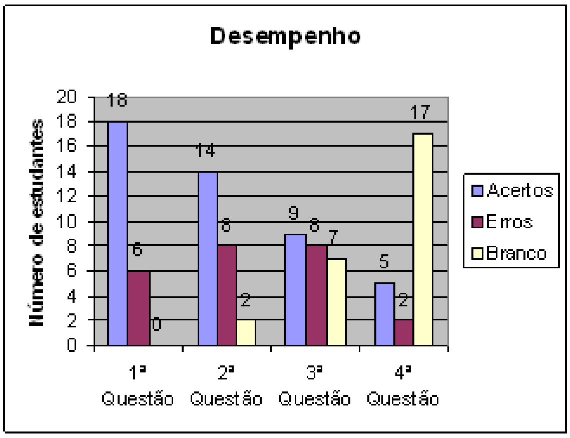
Fonte: Próprio autor

Figura 36: Resolução de um aluno para o exercício da segunda etapa da atividade investigativa 1

Percebe-se que os estudantes não analisaram de forma crítica a tabela da primeira etapa e simplesmente descreveram um a um os números até a obtenção de informações referentes ao polígono convexo de trinta lados. Não houve dedução por parte dos alunos.

A Figura 37 exibe o desempenho dos alunos do oitavo ano B na segunda etapa dessa atividade investigativa.

Questões	1ª	2ª	3ª	4ª
Acertos	18	14	9	5
Erros	6	8	8	2
Branco	0	2	7	17
Total	24	24	24	24



Fonte: Próprio autor

Figura 37: Desempenho dos estudantes do 8° B na 2ª etapa da atividade investigativa 1

Segue a segunda atividade investigativa aplicada no oitavo ano B.

Atividade Investigativa 2

1) Carlos e Luis são dois irmãos que utilizam o mesmo computador. Para não haver problemas entre eles, Carlos colocou uma senha para que Luis não tenha acesso a seus arquivos. A senha funciona da seguinte forma:

O computador emite um número inteiro e a pessoa digita (responde) outro número também inteiro. Esse processo se repete por três vezes. Liberam-se os arquivos se for acertados as três respostas.

Luis tentou descobrir qual era a senha, e com isso começou a observar como Carlos fazia. Observe algumas anotações que Luis fez baseado nessas observações.

Tabela 5: Atividade Investigativa 2 (Problema das senhas do computador)

Computador	1	2	3	6	10	13	20	70	76
Resposta de Carlos	4	7	10	19	31	40	61	211	229

Fonte: Próprio autor

Olhando na tabela podemos constatar, por exemplo, que quando o computador emite o número 3 Carlos digitou (respondeu) 10 e da mesma forma quando o computador emitiu o número 13 Carlos respondeu o número 40.

Carlos muitas vezes usava calculadora, então Luis notou que sempre era utilizada a tecla com o número três.

Fonte: Tudo mercado (2009)

Figura 38: Calculadora Básica

Analisando os dados acima iremos descobrir qual a senha de Carlos. Segue algumas questões.

1) Realize a divisão dos números que representam as respostas de Carlos por 3. Compare os resultados dessas divisões com os números emitidos pelo computador.

2) Se o computador emitir o número 346 qual deveria ser a resposta enviada por Carlos?

3) Se Carlos digitar (responder) o número 79 qual seria a número emitido pelo computador?

4) Quando Luis achou que tinha de fato descoberto a senha foi ate o computador e começou a realizar as digitações. Na ultima emissão, o computador lançou a letra x e pediu uma resposta utilizando a letra x. Qual seria resposta que Luis deveria digitar?

Atividade Investigativa 2: problema das senhas do computador

Serie/Ano: 7ª B (8º B)

Duração: 1 aula (50 minutos)

Número de estudantes: 30 alunos

Organização: Os estudantes organizaram-se treze duplas, um trio e um estudante sozinho.

A principal proposta seria que os estudantes interpretassem os problemas e resolvessem por intermédio da aritmética os três primeiros itens e finalizassem com um item que necessitava expressar uma regra utilizando uma letra (generalização). A seguir os desempenhos dos alunos em cada item dessa atividade.

Primeiro item

Realizar as divisões foi um pouco árduo para maioria, porém houve pouquíssimos erros. Perdeu-se bom tempo na realização das divisões e, posteriormente, quando se solicitou a explicação do que foi descoberto, os alunos apresentaram algumas dificuldades. Duas respostas são destacadas como corretas.

1) O resto das divisões é sempre um

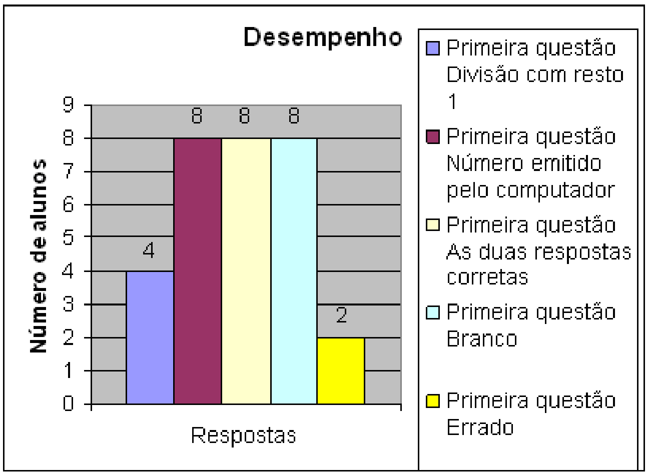
Nesse caso se observa que o estudante percebeu um padrão. Contudo, não realizou uma conexão com a tabela numérica, ou seja, saiu do foco principal do problema: descobrir a senha.

2) O quociente das divisões resulta no número que o computador emite.

Nesse tipo de resposta os estudantes já realizaram a comparação e destacaram uma descoberta que levaria a senha.

A Figura 39 explica o desempenho dos alunos quanto à descoberta da senha.

Primeira Questão					
	Divisão com resto 1	Número emitido pelo computador	Ambas corretas	Branco	Errado
número de estudantes	4	8	8	8	2



Fonte: Próprio autor

Figura 39: Desempenho dos alunos do 8° B no primeiro item da atividade investigativa 2

- Segundo item

O número de acertos foi interessante: mostrou que os estudantes não se deixaram levar pelo fato do exercício anterior pedir que se realizassem divisões. Houve de forma geral um entendimento, constatado em suas respostas. Inicialmente os estudantes demonstraram algumas dúvidas e certa ansiedade, porém pequenas orientações fizeram com que chegassem à resposta.

Destacam-se como falhas dos estudantes nesse segundo item:

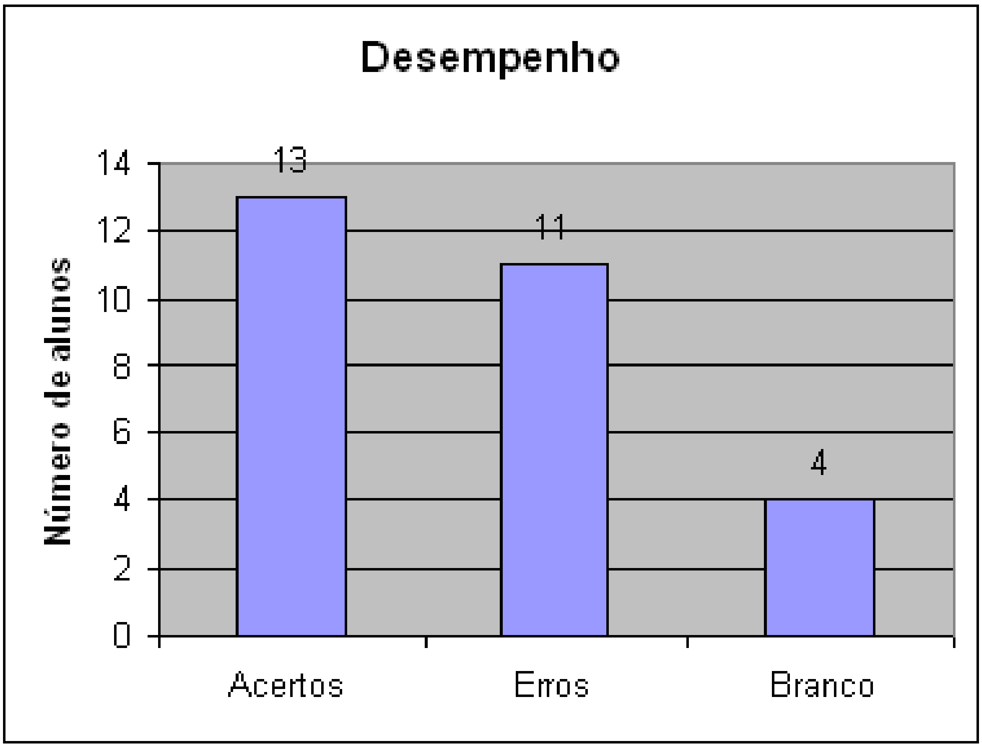
1) Quatro estudantes apenas multiplicaram por três o número emitido pelo computador, porém se esqueceram de somar um;

2) Dois alunos erraram na multiplicação por três;

3) Quatro estudantes dividiram por três o número emitido pelo computador.

A Figura 40 exibe o desempenho dos estudantes em relação a esse item.

Segunda questão			
	Acertos	Erros	Branco
Número de alunos	13	11	4



Fonte: Próprio autor

Figura 40: Desempenho dos alunos do 8° B no segundo item da atividade investigativa 2.

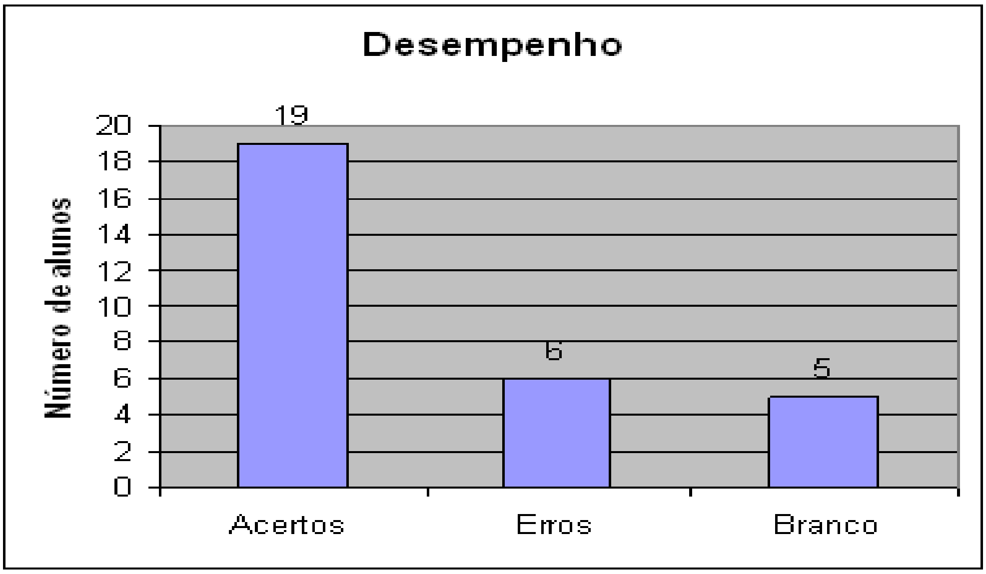
- Terceiro item

Percebe-se que o número de acertos também foi alto, inclusive superior ao número de acertos do segundo item. O fato de se realizarem divisões, análogo ao que foi solicitado no item, pode ter sido um fator que os auxiliou suas respostas.

Para as dúvidas apresentadas foram indicados encaminhamentos que proporcionassem condições para os estudantes superá-las, tais como a recomendação para comparar essa pergunta com as anteriores e tentar perceber as diferenças.

A Figura 41 exibe o desempenho dos estudantes em relação a esse item.

Terceira questão			
	Acertos	Erros	Branco
Número de alunos	19	6	5



Fonte: Próprio autor

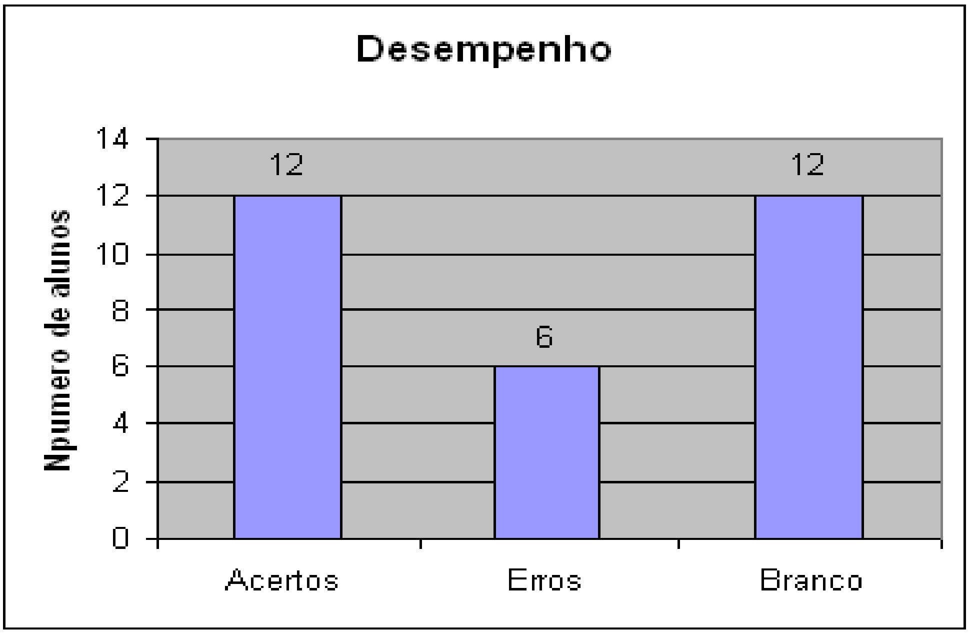
Figura 41: Desempenho dos alunos do 8° B no terceiro item da atividade investigativa 2

- Quarto item

De modo geral o número de acertos foi maior que o esperado, apesar de a professora efetiva da sala ter influenciado nesses números, ao fornecer auxílios que indicavam a resposta. Em alguns casos os estudantes entenderam o problema, porém no momento de se expressar utilizando-se de símbolos algébricos demonstraram pouca habilidade e algumas dificuldades. Trabalhar para exercitar a articulação de símbolos matemáticos seja para expressar uma generalidade ou para resolver uma situação problema será fundamental nas atividades posteriores, pois se percebeu que, para os estudantes, o significado da letra no contexto apresentado no problema (variável) ainda se apresenta dúbio. Alguns alunos se queixaram de não conseguir resolver em virtude do tempo.

A Figura 42 exibe o desempenho dos estudantes em relação a esse item.

Quarta Questão			
	Acertos	Erros	Branco
Número de alunos	12	6	12



Fonte: Próprio autor

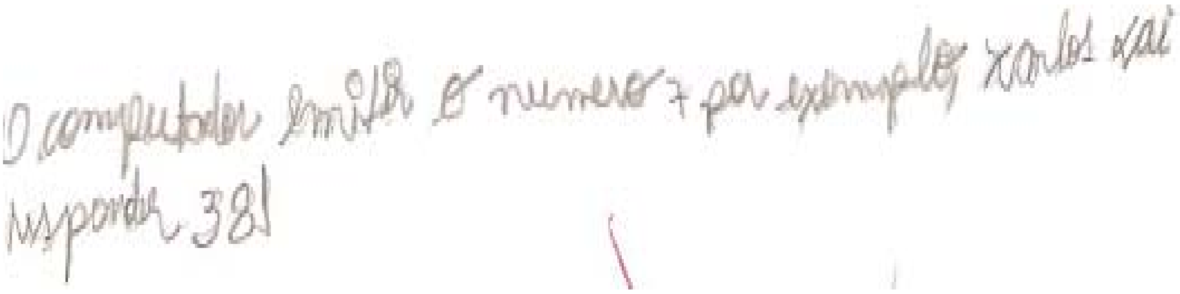
Figura 42: Desempenho dos alunos do 8° B no quarto item da atividade investigativa 2

Preparar os estudantes para poder entender o que representa um número na forma generalizada (variável), será fundamental e para isso será necessário que os alunos compreendam as propriedades que são válidas para todos os números. Inicialmente há que se criar e desenvolver o raciocínio que favoreça o entendimento do que representa esse número generalizado indicado por uma letra para posteriormente operá-lo de forma adequada.

Os exemplos a seguir representam respostas dos estudantes relacionadas com a última pergunta dessa atividade investigativa.

Pergunta:

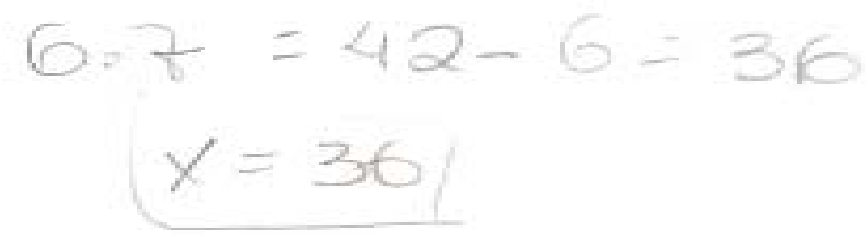
Quando Luis achou que tinha de fato descoberto a senha foi ate o computador e começou a realizar as digitações. Na ultima emissão, o computador lançou a letra x e pediu uma resposta utilizando a letra x. Qual seria resposta que Luis deveria digitar?



Fonte: Próprio autor

Figura 43: Resolução de uma dupla de estudantes da turma do 8° B no quarto item da atividade investigativa 2

No caso exibido pela Figura 44, o estudante atribuiu um valor para x.



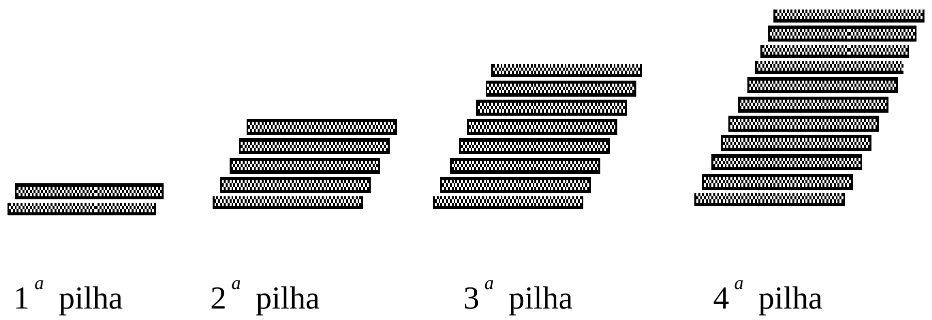
Fonte: Próprio autor

Figura 44: Resolução de uma dupla de estudantes da turma do 8° B no quarto item da atividade investigativa 2

O estudante necessita adquirir o raciocínio de que uma letra nem sempre representa um valor a ser descoberto (incógnita) em numa equação e em operações a letra não necessita apresentar um valor numérico específico.

A seguir descreveremos a primeira atividade desenvolvedora que foi executada na sétima série B.

Observe a figura a seguir.



Fonte: UNESP (2003)

Figura 45: Atividade Desenvolvedora 1 (Problema das pilhas)

A Figura 45 representa pilhas de chapas de madeira em um depósito de uma madeireira. Sabe-se que as chapas são sempre empilhadas nessa forma crescente. Pergunta-se:

1) Quantas chapas de madeira terá a pilha que estiver na décima posição?

2) Uma das pilhas possui 77 chapas de madeira. Em que posição se encontra essa pilha?

3) Quantas chapas ira possuir uma pilha que se encontra na posição x. De sua resposta utilizando também a letra x.

4) Sabe-se que cada chapa de madeira possui 2 cm de espessuras. Determine a altura da 2º pilha. Determine a altura da pilha que ocupa a posição x.

Atividade Desenvolvedora 1: problema das pilhas de madeira

Série / Ano: 7ª B (8ºB)

Tempo: 100 minutos

Organização: Individualmente

Objetivo: Introdução a um processo de algebrização.

A resolução dos exercícios numéricos foi totalmente executada pelos estudantes, com pouquíssimas intervenções. A idéia de resolver o exercício fazendo uso de um raciocínio inverso, ou seja, realizando as operações de forma invertida daquela indicada na proposta do problema também foi absorvida por boa parte dos estudantes. Ressalta-se que houve um pouco de resistência e dificuldades em trabalhar com letras (variáveis). Constatou-se uma evolução em relação à atividade anterior, problema da descoberta da senha, onde eles praticamente pouco responderam e tiveram a ajuda da professora Aline.

Destaca-se que existem dificuldades na compreensão do conceito de número na forma generalizada e pouca habilidade nas manipulações de símbolos matemáticos fato esse detectado pelas resoluções e indagações detectadas no último item dessa atividade. Perguntas como: “O que eu faço com esse x” foram comuns nessa atividade.

Acredita-se que a aplicação de mais atividades com o mesmo objetivo auxiliará a organizar melhor o raciocínio algébrico e entender o conceito de variável.

Segue a descrição da segunda atividade desenvolvedora (extra classe) executada no oitavo ano B, com alguns dados modificados e sem a questão que induzia à obtenção da resposta.

Atividade Desenvolvedora 2: Extra classe

Carlos e Luis são dois irmãos que utilizam o mesmo computador. Para não haver problemas entre eles, Carlos colocou uma senha para que Luis não tenha acesso a seus arquivos. A senha funciona da seguinte forma:

O computador emite um número inteiro e a pessoa digita (responde) outro número também inteiro. Esse processo se repete por três vezes. Liberam-se os arquivos se for acertados as três respostas.

Luis tentou descobrir qual era a senha, e com isso começou a observar como Carlos fazia. Observe algumas anotações que Luis fez baseado nessas observações.

Tabela 6: Senhas do computador

Computador	1	2	3	6	10	13	20	70	76
Resposta de Carlos	6	11	16	31	51	66	101	351	381

Fonte: Próprio autor

Carlos muitas vezes usava calculadora, e Luis notou que a tecla do número cinco era sempre utilizada.

Fonte: Tudo mercado (2009)

Figura 46: Calculadora básica (indicação tecla 5)

Pede-se:

1) Se o computador emitir o número 65, qual deve ser a resposta de Carlos?

2) Carlos respondeu 201, qual foi o número emitido pelo computador.

3) Quando Luis achou que tinha de fato descoberto a senha foi ate o computador e começou a realizar as digitações. Na ultima emissão, o computador lançou a letra X e pediu uma resposta utilizando a letra X. Qual seria resposta que Luis deveria digitar?

Tarefa Atividade Desenvolvedora: problemas das senhas

Série / Ano: 7ª B (8° B)

Objetivo: Manipular os símbolos algébricos. Entender o significado da letra em relações numéricas (variável)

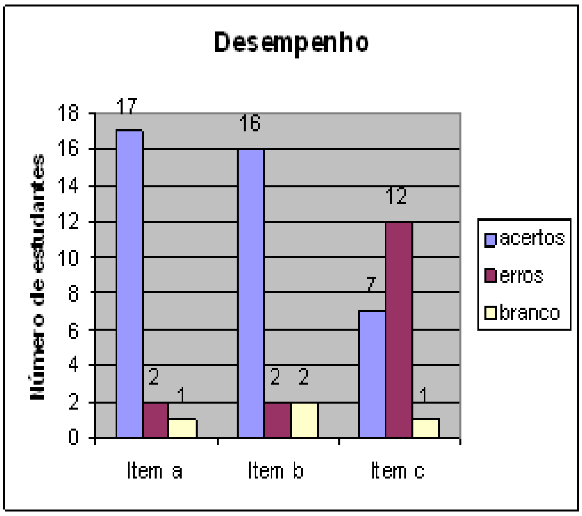
Percebe-se que algumas respostas foram copiadas, pois apresentam a mesma forma de conduzir o exercício, de forma correta ou não: até exemplos iguais foram citados.

O número de erros foi maior na questão que necessitava descrever a senha com a utilização da letra (variável) e dessa forma ficou evidenciado o fato de alguns estudantes ainda apresentarem dificuldades em se expressar utilizando símbolos algébricos e não números. Ressalta-se o fato de muitos estudantes tentarem obter o valor especifico para variável x e não simplesmente representar sua resposta utilizando de expressões com a variável x.

A primeira e a segunda questões apresentaram maior número de acertos provavelmente pelo fato de se tratarem de exercícios aritméticos

A Figura 47 exibe o desempenho dos estudantes em relação a esse item.

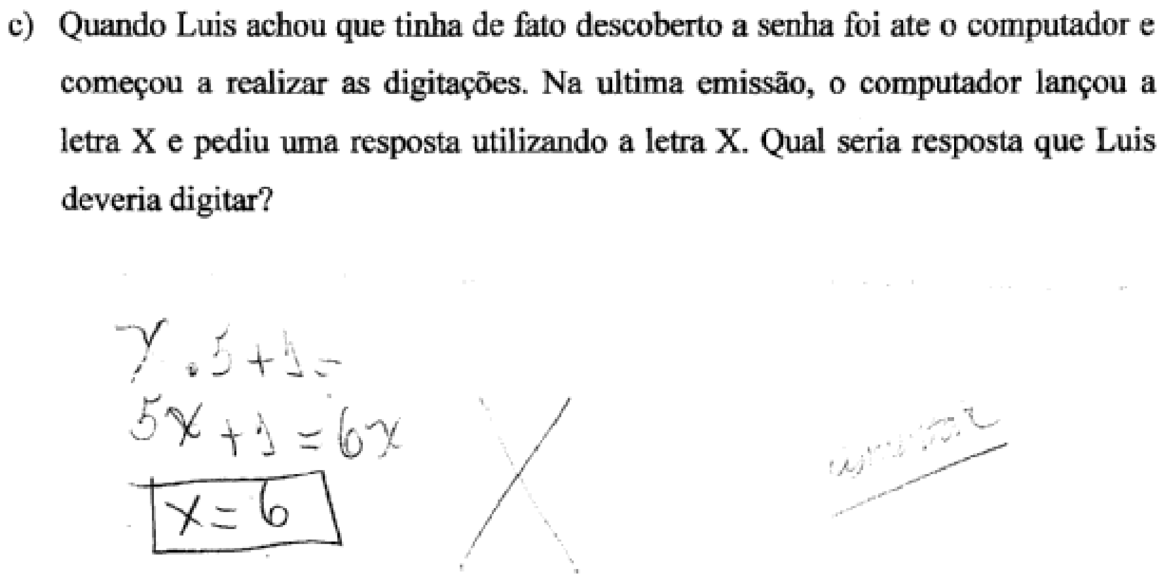
Questão	Item a	Item b	Item c
acertos	17	16	7
erros	2	2	12
branco	1	2	1
total	20	20	20



Fonte: Próprio autor

Figura 47: Desempenho dos alunos do 8°B na atividade desenvolvedora

A Figura 48 apresenta uma resolução proposta por um estudante, onde se evidencia a dificuldade em entender o que representa a letra nesse contexto e como articulá-la.



c) Quando Luis achou que tinha de fato descoberto a senha foi ate o computador e começou a realizar as digitações. Na ultima emissão, o computador lançou a letra X e pediu uma resposta utilizando a letra X. Qual seria resposta que Luis deveria digitar?

Fonte: Próprio autor

Figura 48: Resolução de um aluno da turma do 8° B na atividade desenvolvedora

O fato de realizar 5x +1 = 6x representa pouco entendimento nos conceitos básicos operacionais das propriedades gerais dos números e na compreensão do significado de uma letra em uma expressão e do próprio problema.

O que se percebe com essa atividade é que os estudantes ainda apresentam dificuldades em manipular símbolos algébricos, especialmente letras e números num mesmo contexto e expressar um raciocínio na forma generalizada utilizando-se da álgebra.

Para muitos alunos a letra não representa uma variável, simplesmente um valor a ser descoberto (incógnita). Dessa forma foi constatada a necessidade de desenvolver novas atividades deverão ser executadas com a principal finalidade de proporcionar esse entendimento.

Segue a descrição da atividade finalizadora que foi aplicada na sétima série B

Atividade Finalizadora 1

O preço a ser pago por uma corrida de táxi inclui uma parcela fixa, chamada de bandeirada, e uma parcela que depende da distancia percorrida. Se a bandeirada custa R$ 3,44 e cada quilometro rodado custa R$ 0,86, pede-se:

a) O preço de uma corrida de 11 quilômetros

b) À distância percorrida por um passageiro que pagou R$ 21, 50 pela corrida.

c) Determine o preço pago por um passageiro que percorreu uma distância de x quilômetros. De sua resposta usando x

d) Se um passageiro pagou um valor de y reais por uma corrida determine quantos quilômetros essa pessoa percorreu. De sua resposta usando a letra y

e) Dois amigos irão a uma loja que se localiza a 8 km de onde se encontram.

Sabe-se que um moto taxista cobra apenas o valor de R$ 0,60 reais por quilometro percorrido.

O que seria mais vantajoso para dois amigos: Pegar dois moto taxistas ou ambos pegarem o mesmo táxi e dividirem as despesas?

Atividade Finalizadora: problema dos preços do táxi

Série / Ano: 7ª B (8º B)

Tempo: 100 minutos

Organização: individualmente

Objetivo: Manipular os símbolos algébricos. Entender o papel da letra (variável) em problemas de contagem.

O modo como foi conduzida a aula favoreceu discussões acerca do exercício e proporcionou a realização de uma síntese do trabalho desenvolvido e aplicado nas atividades anteriores. Iniciando pela interpretação do problema, comentando o significado de termos como bandeirada e ainda intensificando que o preço a ser pago dependeria da distância percorrida foram elementos que conduziram a aula para a formulação significativa do conceito de variável. A criação de exemplos e solicitação para que os estudantes expressassem verbalmente e com pequenos cálculos seus entendimentos promoveram um melhor entendimento do exercício pela sala.

A indicação aos estudantes de que uma letra poderia representar muitos valores, dependendo da situação do problema e ainda, que o preço a ser pago pela corrida está associado a um valor fixo denominado bandeirada e da distância a ser percorrida, ilustrou de forma bem clara o que representaria uma constante ou uma variável, bem como a relação entre duas variáveis, no caso, a distância percorrida em quilômetros e o preço a ser pago por essa corrida. Percebeu-se que os estudantes se apresentavam com um grande interesse nessa etapa da atividade investigativa em que se executou a síntese da idéia central das atividades: o entendimento do conceito de uma variável.

Descreve-se, finalmente, a última atividade aplicada no oitavo ano B.

Atividade Finalizadora 2: Tarefa extra classe

1) Uma operadora de celular possui o seguinte plano de telefonia celular:

Plano Brasil 100 minutos:

Esse plano oferece até 100 minutos de ligação pelo preço de R$ 60,00. Caso ultrapasse os 100 minutos, será cobrado R$ 1,20 pra cada minuto ultrapassado.

a) Quanto se gastaria nesse plano uma pessoa usar 80 minutos?

b) Quanto se gastaria no Plano Brasil 100 minutos se uma pessoa usar os mesmos 120 minutos?

c) Uma pessoa gastou R$ 144,00 no plano Brasil 100 minutos. Quantos minutos essa pessoa usou o celular?

d) No plano Brasil 100 minutos foram gastos x minutos. Quanto será pago? De sua resposta usando a letra x

e) No plano Brasil 100 minutos pagou-se uma quantia representada pela letra y (em reais). Quantos minutos foram gastos? Dê sua resposta usando a letra y.

Tarefa Atividade Finalizadora: Problemas da operadora de celular

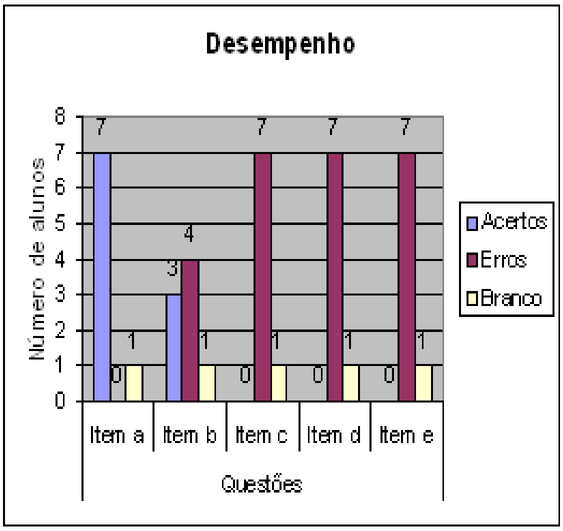
Série / Ano: 7ª B (8º B)

Objetivo: Manipular os símbolos algébricos. Entender o papel da letra em problemas de contagem (variável)

O número de alunos que realizaram as tarefas foi mínimo, totalizando oito entregas. Esperava-se que os itens a, b e c fossem resolvidos com mais facilidades e que os dois últimos itens os estudantes encontrassem maior dificuldades. Percebeu-se também que tivemos algumas respostas idênticas o que nos indica que houve cópias entre eles.

A Figura 49 exibe o desempenho dos estudantes em relação a esse item.

	Questões				
	Item a	Item b	Item c	Item d	Item e
Acertos	7	3	0	0	0
Erros	0	4	7	7	7
Branco	1	1	1	1	1
Total	8	8	8	8	8

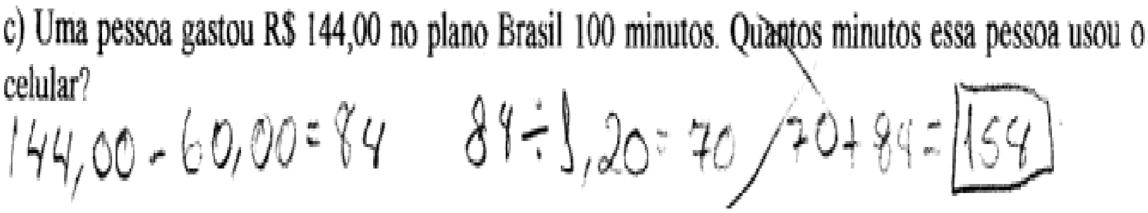


Fonte: Próprio autor

Figura 49: Desempenho dos alunos do 8° B na tarefa da atividade finalizadora

Observou-se que os itens a e b apresentaram alguns acertos, porém o item c não apresentou nenhum acerto. Nota-se que os dois últimos itens, mais difíceis, não apresentaram acerto. Destaca-se ainda que alguns erros encontrados nesses dois últimos itens são característicos de quem nem sequer tentou, ou seja, apenas escreveu algo sem muito sentido ou sem referenciais no corpo do exercício.

A Figura 50 mostra a resolução do item "c" proposta por um aluno que, embora tenha errado o exercício, se mostrou dedicado à tarefa.



Fonte: Próprio autor

Figura 50: Resolução da tarefa da atividade finalizadora por aluno do oitavo ano B

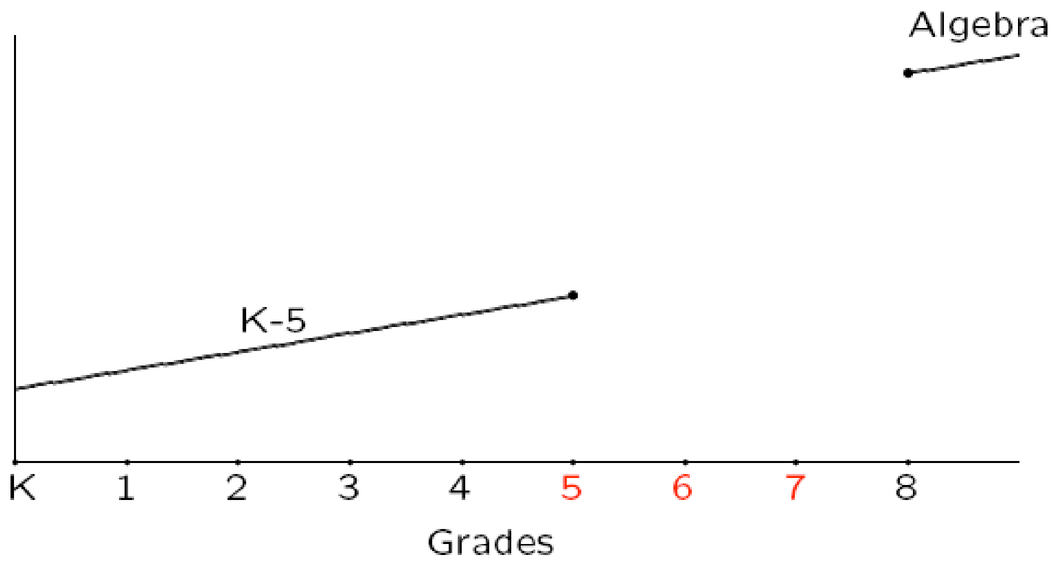
A resolução teve um inicio embasado e correto, contudo no momento de finalizar houve um equívoco, pois o valor encontrado (70) representa o valor que excedeu os 100 minutos e não 84 minutos.

Infelizmente não se obteve um número significativo de tarefas entregues, mas ficou evidente que ainda existem dificuldades em analisar situações problemas e especialmente utilizar-se da álgebra para tentar expressar uma relação numérica na forma generalizada numa situação problema.

5 ANÁLISE DO TRABALHO DESENVOLVIDO

5.1 Descrição Geral

A transição da aritmética para álgebra, no ensino fundamental, deve proporcionar condições para que haja uma continuidade na apresentação dos conteúdos, ou seja, que esta fase de mudança não desperte muitas dificuldades por apresentar formas muito distintas de se raciocinar dentro do ensino aprendizagem de matemática. O gráfico da Figura 51, indicado por Wu (2009), indica que a forma que se trabalha a aritmética no ensino básico não prepara para a aprendizagem de álgebra, a partir da oitava série, e, por conseguinte, observa-se uma ruptura entre o ensino de álgebra e de aritmética no ensino fundamental.



Fonte: Wu (2009)

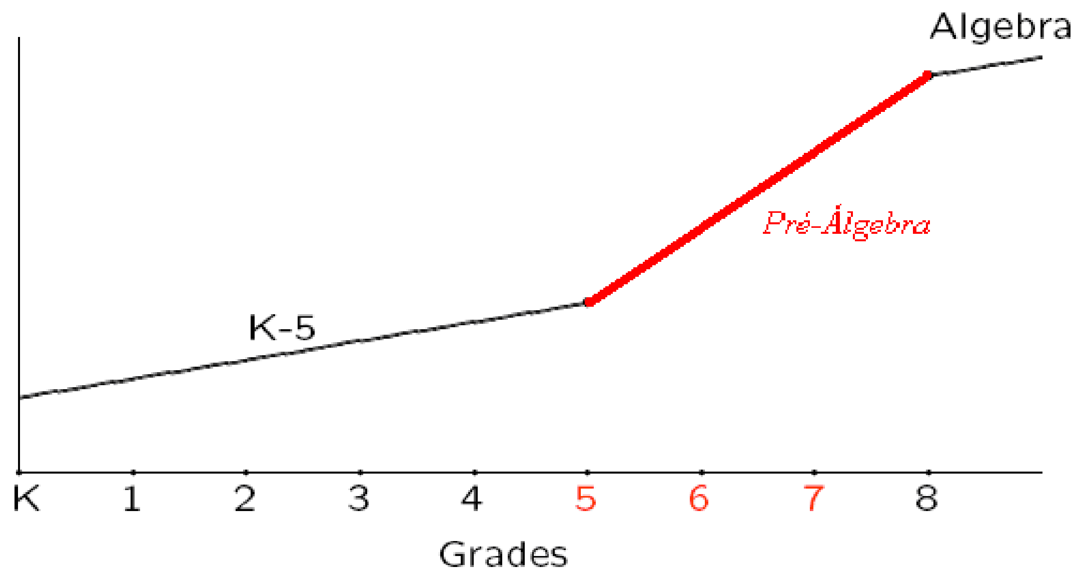
Figura 51: Ensino de aritmética e álgebra na escola básica

No gráfico aparece uma ruptura da continuidade quando se analisa o ensino de aritmética do primeiro ao quinto ano do ensino básico (K-5) e de álgebra registrado no oitavo ano.

Para transformar esse quadro e resolver esse descompasso da transição da aritmética para a álgebra, a pré-álgebra seria uma ponte ou um elo que conseguiria unir essa descontinuidade. Segundo Kieran (1992) a pré-álgebra seria uma abordagem em que os estudantes construiriam significados de operações e raciocínios algébricos baseados em conhecimentos de aritmética. Inicialmente, esse estudo preliminar à álgebra deverá abordar as estruturas dos números e suas propriedades, a compreensão de uma igualdade com destaque em suas finalidades na aritmética e na álgebra e o entendimento do significado de uma letra em equações e expressões (incógnita e variável respectivamente).

Kaput (1999) indica a necessidade de uma abordagem diferenciada, pois a forma tradicional de ensinar Álgebra está ligada à aprendizagem de regras e manipulações de símbolos, simplificação de expressões algébricas e resolução de equações. A pré-álgebra poderá ser organizada segundo realidade intelectual e social dos estudantes com ênfase na exploração do raciocínio algébrico, especialmente na compreensão do significado da letra como forma de generalização ou de representação de um valor desconhecido, em problemas que valorizem o raciocínio e não a mecanização de procedimentos.

Na figura 52 se indica, utilizando como base o gráfico proposto por Wu (2009), o que representaria a pré-álgebra no contexto de ensino aprendizagem de matemática da escola básica.



Fonte: Wu (2009)

Figura 52: Pré-álgebra no contexto de ensino aprendizagem de matemática

A pré-álgebra proporciona uma conexão entre a aritmética e a álgebra no ensino básico, uma vez que apresenta formas abstratas de trabalhar os números com base em formas aritméticas (concretas).

Para haver abordagens mais adequadas em relação aos conhecimentos que a pré-álgebra deve tratar existe a necessidade de uma organização na prática pedagógica do professor, ou seja, devem-se abolir formas rotineiras que se apóiam em apresentação de procedimentos mecânicos para a resolução de exercícios.

5.2 Aspectos específicos: as atividades desenvolvidas

Na aplicação das atividades elaboradas para auxiliar a transição da aritmética para a álgebra analisaram-se dúvidas, perguntas, acertos e erros dos estudantes e foram vivenciadas situações e ações que mostram aspectos específicos da aprendizagem introdutória de álgebra na escola onde foram aplicadas as atividades. Os fatores que influenciaram a análise da aprendizagem dos alunos podem ser destacados como: a autonomia dos estudantes; as deficiências em conteúdos matemáticos e a indisciplina.

- Autonomia

Nas atividades que os estudantes necessitavam obter informações a partir de condições que exploravam a investigação de padrões em tabelas numéricas, construção de figuras e análise de situações, percebe-se sua pouca experiência e, conseqüentemente, muitas dúvidas. Vale destacar que o aluno se comporta em sala de aula de forma passiva em relação à sua aprendizagem e espera que o professor elabore um modelo ou que conduza a resolução do problema. Questionou-se a pouca experiência dos alunos em atividades que explorassem a metodologia de resolução de problemas e, como conseqüência, percebeu-se sua pouca autonomia na busca por informações que desenvolvessem a compreensão de conhecimentos algébricos, pois quando o professor se apresentou como um mediador entre o conhecimento e os alunos, pouca iniciativa foi apresentada.

- Dificuldades em conteúdos

Ficou evidente que grande parte dos estudantes apresenta falhas em conteúdos anteriormente trabalhados, pois alguns erros e dúvidas identificam essas insuficiências. Houve dúvidas em identificações de triângulos, especialmente triângulos obtusângulos, na definição (não formal) de figuras convexas e na construção de polígonos convexos com os materiais manipulativos.

Ressalta-se que os alunos priorizavam a construção de polígonos convexos equiláteros, mesmo não sendo solicitado e não se atentavam ao fato de colocar três vértices consecutivos alinhados, ou seja, para muitos alunos o número de percevejos espetados no isopor indicaria o número de lados do polígono convexo. Observou-se o conhecimento de geometria apresentado pelos estudantes e relacionou-se com a Teoria de Van Hiele, que analisa o desenvolvimento do raciocínio em geometria. Foi constatado que os alunos dos oitavos anos do ensino fundamental da E.E. “Prof. Euclides de Carvalho Campos” se enquadram em níveis baixos.

Segue a reprodução dos dois primeiros níveis de aprendizagem de Geometria, conforme a teoria de Van Hiele (CROWLEY, 1996)

Nível 0: É a fase de reconhecimento da figura por visualização, comparação e nomenclatura das figuras geométricas. Caracteriza-se a identificação por aparências globais e não pelas propriedades apresentadas pela figura.

Nível 1: Análise das figuras em termos de componentes, com reconhecimento de suas propriedades e a utilização dessas propriedades para resolver problemas.

Conforme Crowley (1996) a maioria dos estudantes analisados se enquadraria no nível zero de aprendizagem de Van Hiele o que indica uma defasagem de aprendizagem em relação a esse conhecimento matemático

Destaca-se também que, em relação a conteúdos já trabalhados anteriormente às atividades aplicadas, foram constatadas dificuldades na propriedade distributiva da multiplicação em relação à soma, a pouca habilidade em operações aritmética especialmente multiplicação e divisão entre números inteiros e na soma de termos semelhantes (monômios).

-Indisciplina

Os comportamentos apresentados pelos estudantes em algumas aulas ilustram um quadro que dificulta a aprendizagem. Constata-se nas salas de aula muita conversa, realização de atividades diferentes das propostas pelos professores, estudantes que se recusam a realizar atividades e indiferença. Essa realidade, vivenciada nas salas de aula em que se colocaram em prática as atividades, pode ilustrar também a realidade de diversas outras escolas. A forma agitada e desinteressada de agir de alguns estudantes impede seu progresso na aprendizagem de conteúdos importantes para o seu desenvolvimento intelectual além de desmotivar os professores, que enxergam nisso uma desvalorização de seu trabalho.

5.3 Análises das dificuldades

A importância do papel ativo do estudante é fundamental na construção de seu conhecimento e essa conduta é indicada como uma das propostas dos Parâmetros Curriculares

Nacionais (PCNs), como descrito no quarto capítulo dessa dissertação. Nas atividades desenvolvidas nos oitavos anos percebeu-se que os estudantes apresentam uma forma passiva de comportamento perante o processo de aprendizagem. A necessidade dos estudantes de seguir modelos e seqüências de procedimentos determinadas pelo professor foi uma constante no decorrer da execução das atividades.

Constatou-se que, na primeira atividade investigativa (problema dos polígonos convexos) na qual se solicitava o preenchimento de uma tabela numérica, onde as informações necessárias seriam obtidas com a construção de polígonos convexos com auxilio de materiais manipulativos, os estudantes não apresentaram iniciativa nem autonomia, para construir as figuras, tampouco para o preenchimento da tabela, o que compromete toda a atividade.

Para esclarecer a qual atividade se refere essa observação, seguem as questões.

Atividade Investigativa 1 (Problema dos polígonos convexos)

Primeira parte

1) Construa figuras geométricas fechadas

2) Desenhe polígonos convexos

3) O que é uma diagonal?

4) Construa polígonos convexos com quatro, cinco, seis, sete e oito lados utilizando-se dos materiais que serão entregues. Cada grupo de estudantes deverá montar polígonos convexos utilizando os percevejos como vértices colocando-os em uma folha de sulfite que estará apoiada numa plaquinha de isopor e posteriormente riscar na folha os lados desse polígono convexo. Todo polígono convexo deverá apresentar um único vértice (percevejo) de cor diferente. Complete a tabela abaixo em suas construções.

Tabela 7: Construção da tabela com elementos geométricos do problema

Número de lados	**Número de vértices**	**Número de diagonais no vértice destacado (cor diferente)**	**Número de triângulos**	**Soma dos ângulos internos**

Fonte: Próprio autor

Segunda parte

Quantas diagonais podem ser traçadas por um vértice em um polígono convexo de 30 lados? Em quantos triângulos ficará dividido esse polígono convexo?

Determine a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de 30 lados

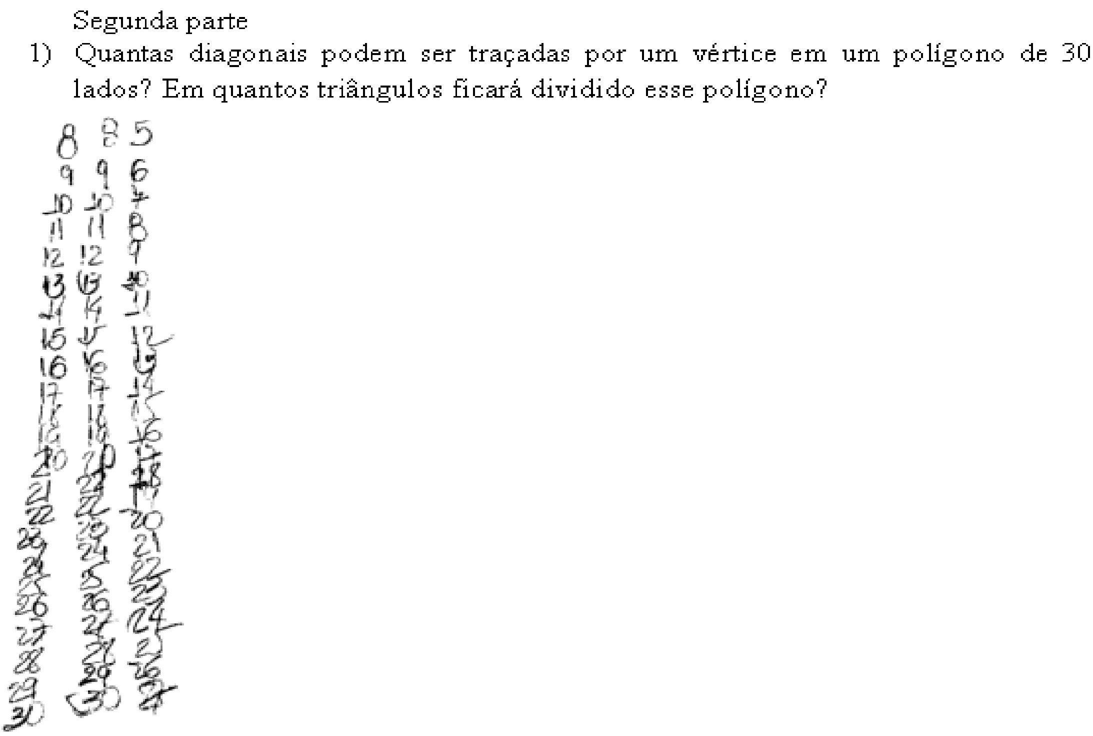
Quantas diagonais podem ser traçados por um vértice em um polígono convexo que possui um número de lados igual a x? Em quantos triângulos esse polígono convexo será dividido?

Determine a soma dos ângulos internos de um polígono convexo que possui um número de lados igual a x.

No quarto exercício da primeira etapa houve a necessidade de se elaborar um modelo para que os estudantes seguissem e, além disso, alguns alunos buscaram em seus livros didáticos ilustrações de polígonos convexos para copiarem.

A pouca autonomia freia o envolvimento do estudante na etapa manipulativa da atividade que, induzia o estudante a raciocinar e investigar os números da tabela e suas possíveis relações. Realizar uma atividade com que os estudantes apenas manipulassem materiais concretos não era o objetivo proposto, mas sim proporcionar ao estudante uma conexão entre o concreto (material manipulativo) e a tabela numérica para auxiliar os alunos a desenvolver um raciocínio mais abstrato e com maior complexidade (raciocínio dedutivo).

As insuficiências que os estudantes apresentaram na primeira etapa dessa atividade se refletiram no desempenho da segunda etapa, fato constatado pelo grande número de alunos que não relacionavam a tabela construída com que se solicitava nas duas primeiras questões da segunda etapa. O desejo dos estudantes em construir os polígonos convexos com trinta lados para poder contar as diagonais aponta para essas dificuldades, ou seja, os alunos não deduziram a relação existente entre os números que compunham a tabela e dessa forma não conseguiam se desvencilhar da dependência da manipulação dos materiais concretos. Para alguns alunos a forma de se obter as informações do polígono convexo de trinta lados fora na contagem, listando um a um conforme indicado na Figura 53.



Fonte: Próprio autor

Figura 53: Resolução dos alunos em sala de aula

Nos dois últimos itens da segunda etapa, que era necessário utilizar-se da letra x (variável) para descrever o raciocínio observado nos dois itens anteriores, os estudantes apresentaram um rendimento bem baixo, provavelmente, pelas dificuldades constatadas nas etapas anteriores. Se não houve o entendimento de como se organizaram os números na tabela, ou seja, se o estudante não constatou em que padrão os números se apresentavam indica que não conseguiu avançar da fase lúdica da atividade. E se o estudante não conseguiu romper a fase de manipular o material concreto implica que não houve a compreensão da relação entre os números da tabela. Posteriormente ele poderá apresentar dificuldades em articular os símbolos algébricos, pois a utilização de letras (variável) representa a generalização da relação numérica existente na tabela e para o estudante ainda não se formou o significado da letra em álgebra.

A Figura 54 indica uma seqüência que pode exemplificar as dificuldades vivenciadas nas salas de aulas de duas turmas do oitavo ano da escola na qual se aplicou as atividades, que se inicia com a pouca autonomia do estudante em buscar seu conhecimento (estudante ativo) e finaliza com dificuldades algébricas.

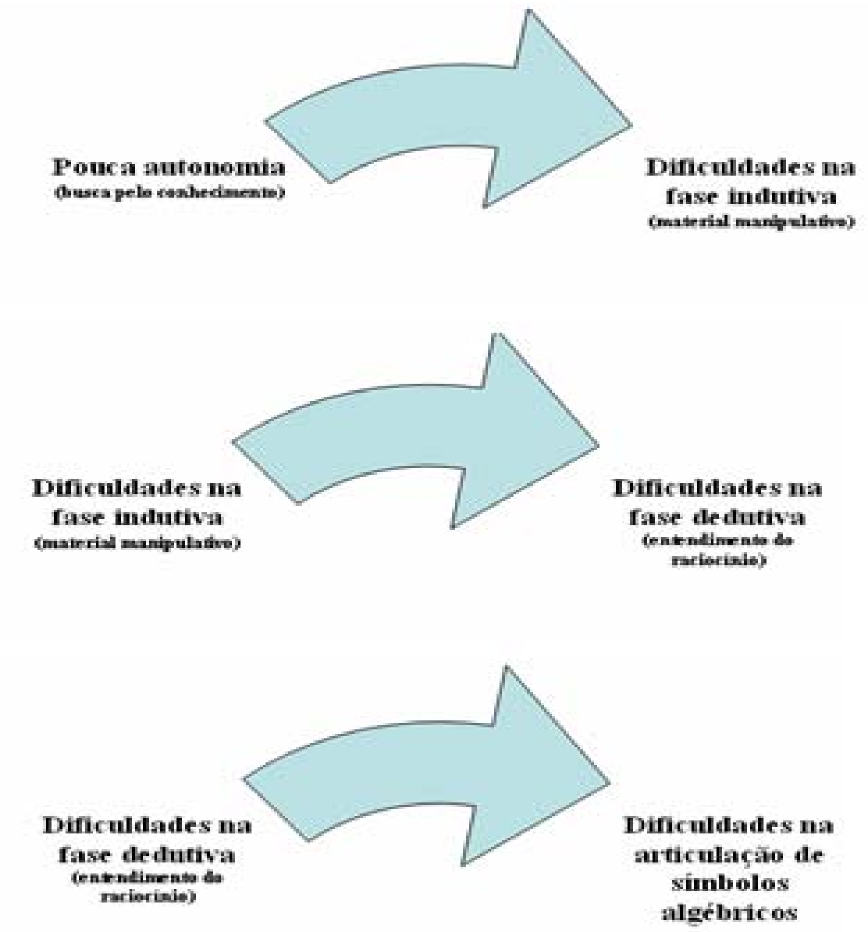


Figura 54: Análises das dificuldades vivenciadas nas salas de aula

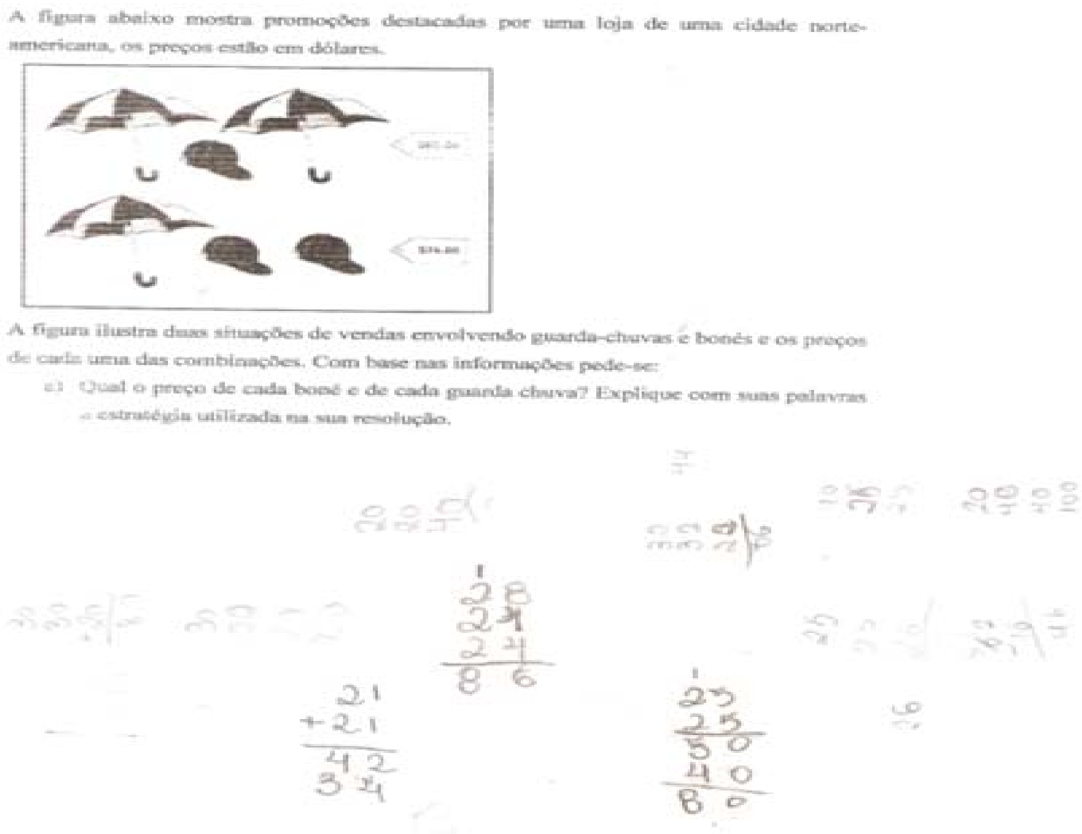
A pré-álgebra realizará uma conexão entre a etapa de manipulação de materiais concretos (figuras ou matérias manipulativos) e o entendimento de uma letra em contextos algébricos, pois auxiliará na compreensão da relação numérica presente nos elementos do material concreto e proporcionará a realização de estudos dessas relações no âmbito dos números. Em abordagens de aritmética, no ensino fundamental, muitos alunos trabalham com atividades lúdicas, mas muitas vezes não existe uma proposta de se desenvolver um raciocínio que conduza para o entendimento de algumas competências importantes para a introdução do raciocínio algébrico.

Na atividade investigativa 1 (problema dos polígonos convexos), a manipulação de materiais concretos auxilia os estudantes na obtenção de informações para o preenchimento da tabela. A exploração da tabela com investigação de padrões dos números que a compõe favorece a criação do raciocínio que deduz uma forma com o qual os números se apresentam nesse contexto. Para a descrição do padrão observado (raciocínio observado) o estudante apresentará uma modelagem que será alicerçada na observação, investigação, indução e dedução desenvolvidas.

A introdução de técnicas algébricas com a utilização da metodologia de resolução de problemas desperta a autonomia dos alunos e dessa forma contribui para o desenvolvimento de uma formação mais ampla que apresente significados dentro da álgebra. Quando o estudante, futuramente, se deparar com um problema algébrico terá condições de buscar uma modelagem que se aplique adequadamente e ainda apresentar uma estrutura (técnica) que possa solucioná-lo.

Em outras atividades investigativas também se constatou a falta de autonomia dos estudantes e a busca por roteiros de resolução de exercícios, já que os estudantes também apresentaram dificuldades no entendimento de um raciocínio mais abstrato e nas articulações de símbolos algébricos.

Na atividade investigativa (problema das promoções) que necessitava da obtenção de preços dos bonés e guarda-chuvas a resolução por tentativa e erro já era esperada, porém o tempo gasto e a forma conduzida pelos estudantes na resolução ressaltam essa imaturidade de se resolver problemas sem auxilio de um roteiro indicativo. Os alunos atribuíam valores diferentes para o boné em cada situação proposta pelo problema, ou seja, em cada combinação dos utensílios o boné apresentava um valor.

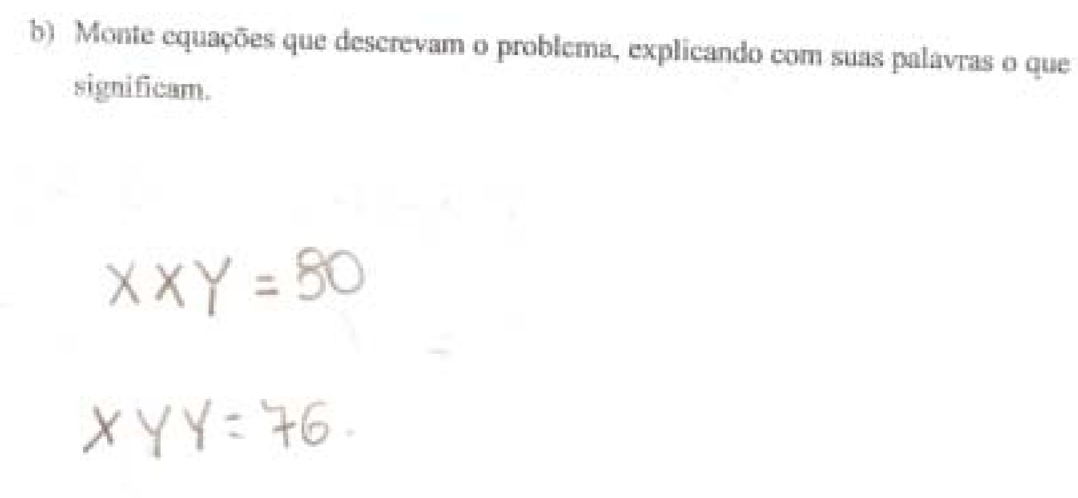


Fonte: Próprio autor

Figura 55: Problema que necessitava da obtenção de preços dos bonés e guarda-chuvas

A aritmética está presente nessa resolução fazendo a conexão do concreto (figuras) para o entendimento do raciocino mais abstrato, onde o estudante realizou alguns cálculos relacionados com uma compreensão mais ampla do exercício. Trabalhar a pré-álgebra como uma generalização das operações aritméticas trará maiores condições de entender o significado de uma letra em contexto algébricos, nesse caso, seriam equações e sistemas e conseqüentemente conseguir articular esses símbolos.

Essa necessidade de realizar uma ponte entre o concreto e o abstrato fica evidente no problema dos bonés e guarda-chuvas no item que solicitava equações que descrevessem a situação. Resoluções idênticas com apresentada a seguir foram comuns e aponta para essa dificuldade.


b) Monte equações que descrevam o problema, explicando com suas palavras o que significam.

XXY = 80

XYY = 76.

Fonte: Próprio autor

Figura 56: Resolução de uma dupla de estudantes

O estudante apenas substituiu as figuras pelas letras x e y sem adotar nenhum símbolo que indicasse alguma operação aritmética, no caso, a soma. Não houve compreensão do problema e também da relação entre as promoções e a montagem de equações. Muitos não conseguiram entender que a figura ilustrativa do boné representava o preço desse produto e não o produto em si, ou seja, o que o estudante deveria entender é que o preço pago por dois bonés e um guarda-chuva seria de oitenta dólares e não simplesmente soma boné mais boné mais guarda-chuva resultaria em oitenta dólares. As letras (incógnitas) representariam o preço pago por um boné e um guarda-chuva e com isso as unidades monetárias podem ser somadas e o resultado seria um valor em unidades monetárias, no caso dólares.

Uma situação que ilustra a dificuldades da utilização da letra no âmbito algébrico está em um artigo da Revista do Professor de Matemática (RPM) n^0 71, p.11 que analisa questões de Matemática da prova do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) que não foi aplicado, em virtude de fraude. O periódico estuda um exercício dessa prova que possui erros no emprego e conseqüentemente no significado da letra no contexto algébrico especifico da questão. Segue o enunciado da questão e posteriormente comentários a respeito de seus equívocos:

> **Questão 83 A empresa WQTU Cosméticos vende um determinado produto x, cujo custo de fabricação de cada unidade é dado por $3x^2 + 232$, e o seu valor de venda é expresso pela função $180x – 116$. A empresa vendeu 10 unidades do produto x, contudo a mesma deseja saber quantas unidades precisa vender para obter um lucro máximo. A quantidade máxima de unidades a serem vendidas pela empresa WQTU para a obtenção do maior lucro é: (A) 10 (B) 30 (C) 58 (D) 116 (E) 232**

Fica evidente que o enunciado dessa questão é muito confuso e que em sua resolução surgem diversas interpretações e, por conseguinte, dúvidas. Destaca-se que esse exercício é uma tentativa mal sucedida de contextualizar um problema algébrico, pois não houve cuidados em sua elaboração, desde o emprego da letra x até quanto à consistência dos dados. No inicio da questão apontada nesse artigo é mencionado que a empresa WQTU vende um produto x e que o custo de cada unidade é de $3x^2 + 232$, nesse caso surge à dúvida: x é a marca do produto ou a quantidade, em unidades, do referido produto?

Percebe-se que essa confusão é idêntica à apresentada na atividade investigativa das promoções dos bonés e guarda chuvas, pois o estudante substitui o boné pela letra x e o guarda chuva por y, não havendo discernimento entre o produto e o preço do produto. Outros problemas nessa questão foram indicados pelos autores do artigo, mas aqui a discussão está centrada na confusão no emprego da letra x.

Deve-se ter muito cuidado na contextualização de problemas algébricos, pois na tentativa de indicar uma aplicabilidade da álgebra pode-se gerar confusão na interpretação e, com isso, afastar os estudantes da aprendizagem de alguns conhecimentos matemáticos. Esse artigo aponta, com esse exercício, a existência de dificuldades na interpretação e aplicação das letras em álgebra, seja para o aluno e até mesmo para o professor. Esse fato destaca que o entendimento da álgebra, especialmente a utilização de letras, é um problema muito comum e que cada vez mais está presente no meio educacional.

Retomando-se as análises das atividades aplicadas em sala de aula sugere-se, como forma de ajustar as dificuldades detectadas, uma estratégia que foi executada da seguinte maneira:

1) Propor um exercício em forma de situação problema;

2) Instruir com técnicas básicas de resolução;

3) Inserir o mesmo exercício da situação problema inicial;

4) realizar uma síntese com a conclusão do conteúdo trabalhado, com destaque ao entendimento do problema, da técnica algébrica e de sua aplicação.

Observou-se que a técnica desenvolvida na resolução de sistemas foi unicamente o método da substituição, porém destaca-se que o tempo disponível para a realização das atividades não proporcionava condições de instruir os estudantes com outras técnicas. Contudo, indica-se que, para professores titulares, a aprendizagem que inclui outros métodos de resolução com suas dúvidas e interpretações de contextos é muito mais rica e proporciona maiores possibilidades de compreensão para os alunos.

A seguir está representado o problema da senha do computador, no qual se constata que muitas resoluções apresentadas tomaram o mesmo formato de raciocínio, ou seja, a mesma elaboração de resolução, o que aponta para a tendência dos estudantes em seguir modelos para resolver exercícios ou problemas.

Atividade Investigativa 2 (Problema das senhas do computador)

1) Carlos e Luis são dois irmãos que utilizam o mesmo computador. Para não haver problemas entre eles, Carlos colocou uma senha para que Luis não tenha acesso a seus arquivos. A senha funciona da seguinte forma:

O computador emite um número inteiro e a pessoa digita (responde) outro número também inteiro. Esse processo se repete por três vezes. Liberam-se os arquivos se for acertados as três respostas.

Luis tentou descobrir qual era a senha, e com isso começou a observar como Carlos fazia. Observe algumas anotações que Luis fez baseado nessas observações.

Tabela 8: Anotações para a descoberta da senha

Computador	1	2	3	6	10	13	20	70	76
Resposta de Carlos	4	7	10	19	31	40	61	211	229

Fonte: Próprio autor

Olhando na tabela podemos contatar, por exemplo, que quando o computador emite o número 3 Carlos digitou (respondeu) 10 e da mesma forma quando o computador emitiu o número 13 Carlos respondeu o número 40.

Carlos muitas vezes usava calculadora, então Luis notou que sempre era utilizada a tecla com o número três.

Fonte: Tudo mercado (2009)

Figura 57: Calculadora básica

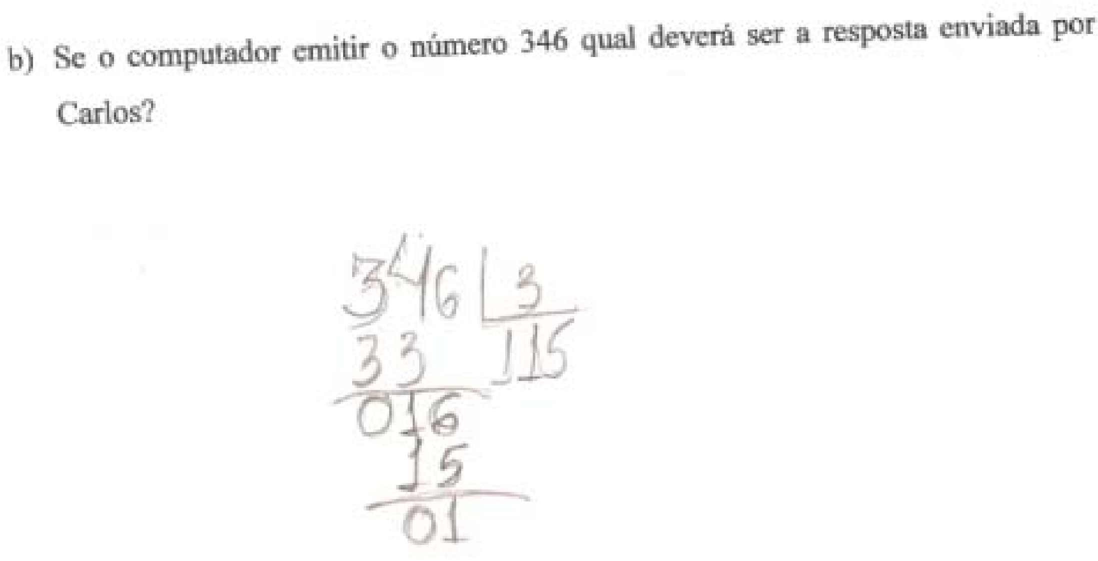
Analisando os dados acima iremos descobrir qual a senha de Carlos. Segue algumas questões.

1) Realize a divisão dos números que representam as respostas de Carlos por 3. Compare os resultados dessas divisões com os números emitidos pelo computador.

2) Se o computador emitir o número 346 qual deveria ser a resposta enviada por Carlos?

3) Se Carlos digitar (responder) o número 79 qual seria a número emitido pelo computador?

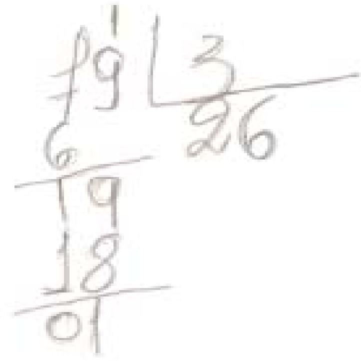
4) Quando Luis achou que tinha de fato descoberto a senha foi ate o computador e começou a realizar as digitações. Na ultima emissão, o computador lançou a letra x e pediu uma resposta utilizando a letra x. Qual seria resposta que Luis deveria digitar?


b) Se o computador emitir o número 346 qual deverá ser a resposta enviada por Carlos?

Fonte: Próprio autor

Figura 58: Resolução dos alunos

c) Se Carlos digitar (responder) o número 79, qual teria sido o número emitido pelo computador?



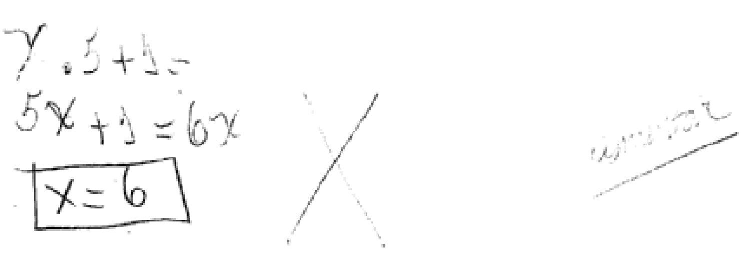
Fonte: Próprio autor

Figura 59: Resolução dos alunos

Os estudantes resolveram os itens “b” e “c” realizando a divisão e, como o primeiro item dessa atividade solicitava a realização de divisões, fica nítido que os alunos acreditavam que esse era o modelo a ser seguido. Percebe-se, nessa resolução, que os estudantes não se atentaram ao entendimento do problema, mas sim na obtenção de um roteiro, o que indica total falta de autonomia na aprendizagem de matemática.

Na tarefa da atividade desenvolvedora da sétima B, foi solicitado um problema idêntico a esse exercício, porém com números diferentes. Uma resolução chamou a atenção pela dificuldade na compreensão do significado da letra x.

c) Quando Luis achou que tinha de fato descoberto a senha foi ate o computador e começou a realizar as digitações. Na ultima emissão, o computador lançou a letra X e pediu uma resposta utilizando a letra X. Qual seria resposta que Luis deveria digitar?

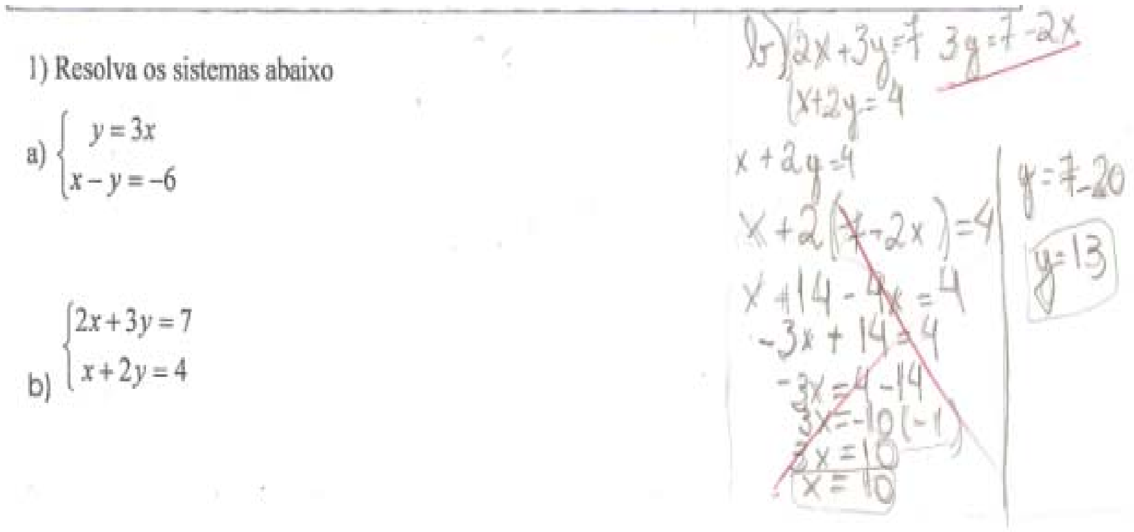


Fonte: Próprio autor

Figura 60: Resolução dos alunos em tarefas

Fica claro pelo início da resolução que o estudante compreendeu a relação numérica presente na tabela, porém a necessidade de se obter um valor numérico para a letra x o conduziu ao erro.

Quando não há o entendimento do que representa uma letra, seja em equações do primeiro grau ou sistemas de duas equações e duas incógnitas ou ainda em representações de grandezas que podem se alterar (variáveis), as articulações dos símbolos algébricos fica sem sentido para os estudantes e muitas falhas surgem, tais como a apresentada na tarefa da atividade desenvolvedora.

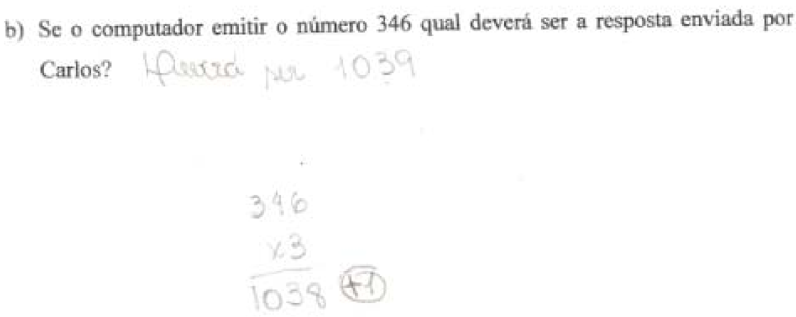


Fonte: Próprio autor

Figura 61: Resolução de sistemas

Constata-se que as letras x e y não tem significado para o estudante, pois foi descrito que 3x = 10 e posteriormente se escreveu x = 10. Alguns procedimentos até foram memorizados, porém se não houver nenhuma compreensão do que representa a letra em uma equação de nada adiantará memorizar algumas regras para se resolver as equações. Percebemos que nem mesmo verificar se a resposta alcançada é realmente correta foi realizado. Ainda se analisa na resolução da tarefa que a forma na qual o estudante isolou a incógnita foi equivocada.

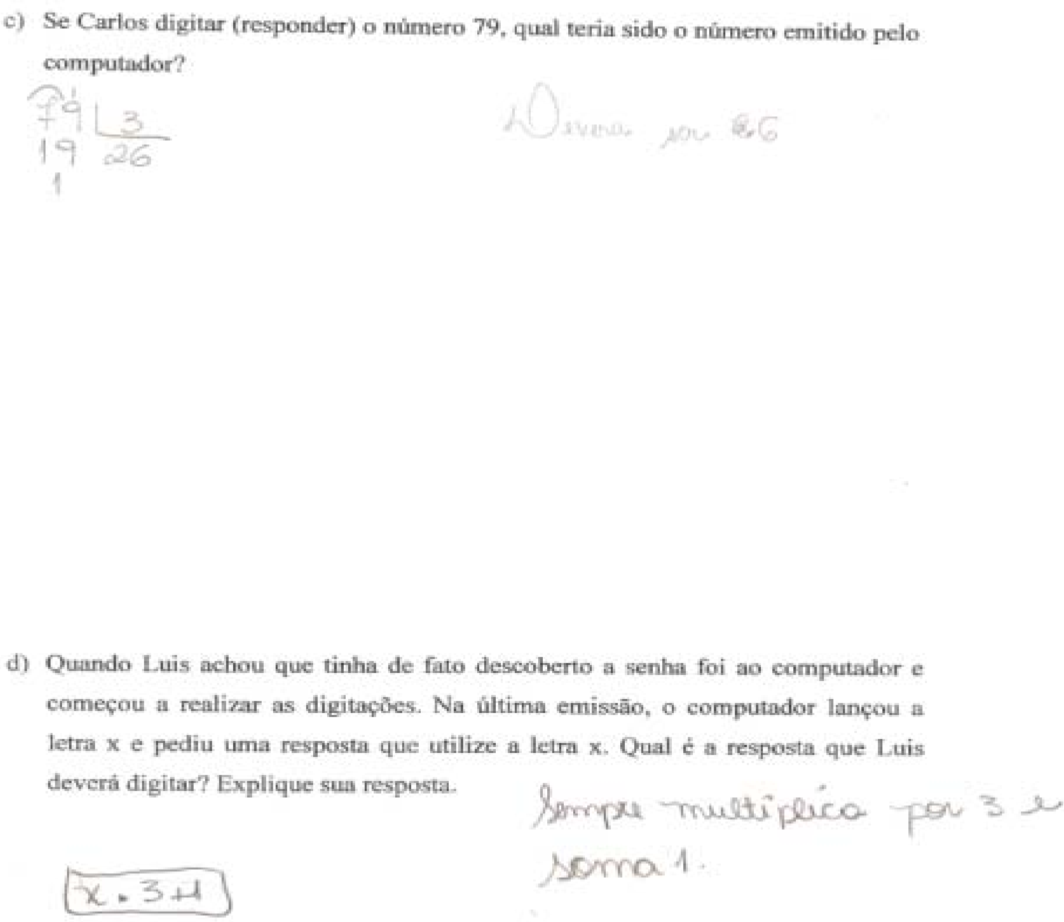
Em contrapartida constata-se alguns progressos proporcionados pela atividade, pois se observou que alguns estudantes conseguiram entender alguns conceitos (incógnita e variável) e até mesmo resolver os sistemas com duas equações e duas incógnitas e os problemas de contagem. Algumas resoluções apresentadas pelos estudantes indicam essa compreensão. Na atividade investigativa 2 (problema da senha do computador) alguns estudantes conduziram suas resoluções como indicado a seguir.



b) Se o computador emitir o número 346 qual deverá ser a resposta enviada por Carlos? Deverá ser 1039

$$\begin{array}{r} 346 \\ \times 3 \\ \hline 1038 \end{array} \ (+1)$$

Figura 62: Resolução da atividade investigativa 2, item b



c) Se Carlos digitar (responder) o número 79, qual teria sido o número emitido pelo computador?

$$\begin{array}{r|l} 79 & 3 \\ \hline 19 & 26 \\ 1 & \end{array}$$

Deverá ser 26

d) Quando Luis achou que tinha de fato descoberto a senha foi ao computador e começou a realizar as digitações. Na última emissão, o computador lançou a letra x e pediu uma resposta que utilize a letra x. Qual é a resposta que Luis deverá digitar? Explique sua resposta.

$\boxed{x \cdot 3 + 1}$

Sempre multiplico por 3 e soma 1.

Fonte: Próprio autor

Figura 63: Resolução da atividade investigativa 2, itens c e d

Observa-se nas Figuras 62 e 63 (exercícios b, c e d) que alguns estudantes entenderam o exercício, pois nos itens b e c resolveram diferentes uma da outra formas (inversas de raciocinar) e ainda conseguiram expressar sua compreensão utilizando suas palavras e com símbolos algébricos. O mesmo se constata na primeira atividade investigativa (problema dos polígonos convexos) quando se solicitava respostas utilizando a letra (variável) x.

A resolução do problema indica que houve o entendimento da relação existente entre os números da tabela, conforme se constata na Figura 64.

3) Quantas diagonais podem ser traçadas por um vértice em um polígono que possui um número de lados igual a x? Em quantos triângulos esse polígono será dividido?

x-3

x-2

4) Determine a soma dos ângulos internos de um polígono que possui um número de lados igual a x.

x-2.180

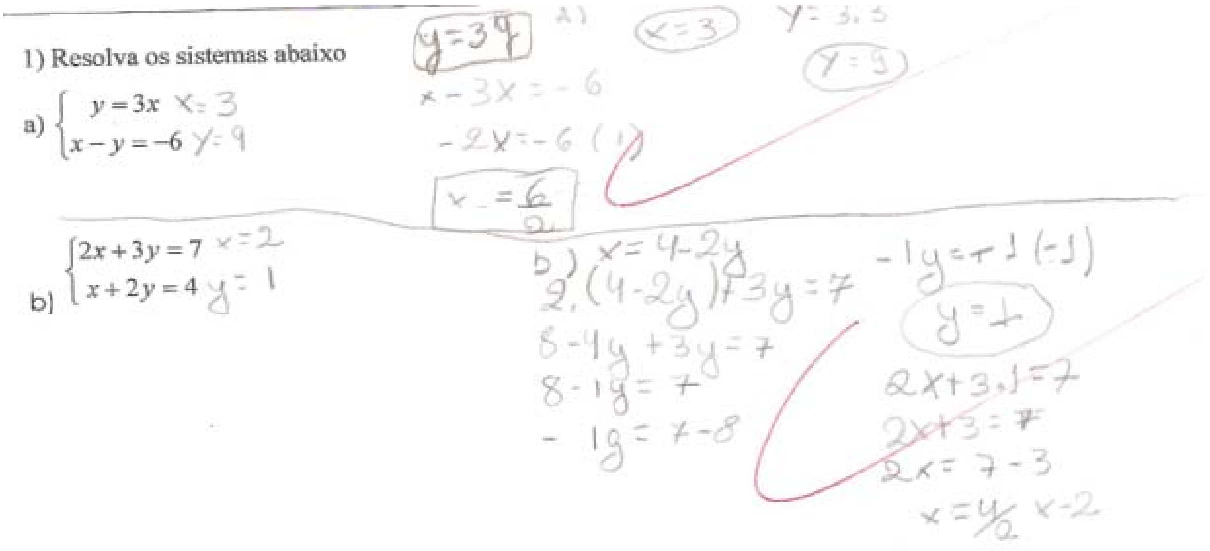
Fonte: Próprio autor

Figura 64: Resolução da atividade investigativa 1

Embora na quarta questão o estudante não tenha colocado os parênteses para indicar que o número 180 multiplicaria x – 2 fica evidente que houve o entendimento.

De forma geral quando há o entendimento nas etapas inicias, ou seja, se o raciocínio algébrico desperta os conhecimentos que a álgebra necessita, o rendimento nos problemas que exigem um raciocínio mais abstrato (dedutivo) é bem melhor e isso se refletirá nas articulações de símbolos algébricos, pois a letra apresentará um significado para o estudante.

A figura 65 mostra resoluções apresentadas por estudantes para a tarefa extra classe referente à atividade desenvolvedora.



Fonte: Próprio autor

Figura 65: Resolução apresentadas por estudantes na tarefa extraclasse

As resoluções apresentadas demonstram que os estudantes memorizaram os procedimentos necessários para a obtenção da resposta de um sistema com duas equações e duas incógnitas, mas também entenderam o que representa a letra em uma equação, ou seja, tem significado as operações algébricas.

A memorização de procedimentos é importante, mas fica claro que se não existir a compreensão do que representa a igualdade em álgebra, do significado de uma letra em contextos algébricos e ainda se o estudante não conseguir realizar a conexão do concreto para o abstrato se alicerçando em algumas modelagens já vistas, de nada servirão essa regras para resolver equações, pois representará um acumulado de roteiros que não terão significado.

5.4 Análises das indisciplinas

Em uma das salas na qual se desenvolveram as atividades constatou-se indisciplina, muita conversa, indiferença por parte dos alunos, baixo rendimento e até formas agressivas de relacionamento. Analisou-se o que pode ser feito para mudar esse quadro e ainda procurou-se saber quais os motivos que levaram os estudantes a se comportar dessa forma. Ao se depararem com graus elevados de indisciplina em sala de aula, muitos professores se sentem pouco motivados a reverter esse quadro, pois alegam serem desrespeitados à medida que o trabalho desenvolvido é desvalorizado pelos alunos. Diante dessas adversidades o professor deverá analisar quais seriam as origens dessa indisciplina e ainda observar qual é a realidade intelectual e social dessa turma.

Os motivos apresentados para o insucesso na aprendizagem de álgebra, na escola básica, são variados e destaca-se a complexidade de alguns conteúdos, a dificuldade do estudante em perceber a necessidade de se compreender determinados assuntos e ainda a falta de pré-requisitos que dêem suporte para a aprendizagem de novos saberes. Os alunos que não compreendem determinados assuntos, com decorrer do tempo, tendem a se desinteressar por eles e uma das conseqüências dessa desistência seria o pouco empenho para uma nova tentativa de entendimento do conteúdo.

Em novas oportunidades de se ampliar à forma de raciocinar do mesmo conteúdo os professores em apresentações de exercícios e problemas, poderá se deparar com alunos que já se encontravam desinteressados e dessa forma existe uma grande chance de não prestarem mais a atenção nas explicações e nos apontamentos gerando um aluno um comportamento de desprezo e indiferença com a aula.

Se o professor, ao se deparar com essa situação, se exaltar e exigir melhor desempenho não será nenhuma surpresa se alguns estudantes reagirem de forma hostil, pois muitos alunos acreditam que a matemática é muito difícil e que o professor deveria levar em consideração essa informação em sua prática na sala de aula. O diagrama a seguir pode explicar as reações dos estudantes de duas turmas do oitavo ano da escola E.E. “Prof. Euclides de Carvalho Campos”, município de Botucatu-SP.

Figura 66: Reações dos estudantes dois oitavos anos

Nessa ótica a origem da indisciplina seria o pouco entendimento do conteúdo ministrado em sala de aula, ou seja, o fato do estudante não entender a aula de matemática desencadearia todo esse processo que implicaria em revolta e até mesmo na abolição, por parte dos estudantes, da aprendizagem do conteúdo matemático. Diante dessas implicações o professor deverá apresentar muito cuidado na elaboração de suas aulas tendo como foco não apenas o conteúdo cientifico a ser ensinado, mas também quais seriam os pontos que os estudantes apresentariam maiores dúvidas e em que nível de aprendizagem os estudantes se encontram. Kaput (1999) relata que "as experiências com álgebra levam os estudantes a se afastarem da matemática antes mesmo de terem a oportunidade de construir conhecimentos importantes para a sua vida".

No planejamento e na execução de suas aulas o professor de matemática poderá se beneficiar com essa visão apresentada pelo autor para que o trabalho desenvolvido em sala de aula contribua para a formação intelectual do estudante.

O nível de aprendizagem apresentado pelos estudantes antes das atividades desenvolvidas não é de responsabilidade do pesquisador / autor do presente trabalho, porém vale indicar que as deficiências em conteúdos matemáticos anteriores à exploração da pré-álgebra pode ter freado a obtenção de novos conhecimentos algébricos para alguns estudantes e isso pode ser um dos responsáveis pela indisciplina em sala de aula.

6 CONCLUSÃO

Na implantação da metodologia da resolução de problemas como forma de abordagem das atividades realizadas nos oitavos anos destacamos que esse recurso oferece um arcabouço de idéias e informações que podem ser ajustadas em sala de aula. Nas atividades investigativas a síntese foi realizada apenas com os grupos que finalizaram os exercícios, já que se fosse realizada para a sala toda poderia interferir nas respostas e, devemos recordar que um dos objetivos dessas atividades seria a investigação dos conhecimentos dos alunos. Posteriormente nas atividades desenvolvedoras a descrição dos entendimentos dos estudantes foi fundamental para que nessa etapa fosse possível inserir as técnicas algébricas como recurso indispensável na aprendizagem de álgebra. Nas atividades finalizadoras foi realizada a síntese com descrição dos entendimentos dos alunos e, além disso, conduziu-se o fechamento com uma pequena explanação acerca do que fora trabalhado em todas as atividades com foco na compreensão de incógnita nos oitavos anos A e C e de variável no oitavo ano C.

A pouca experiência do autor na utilização dessa metodologia pode ter proporcionado algumas dificuldades em sua aplicação, tais como a organização do tempo e algumas interferências nas perguntas dos alunos que conduziam de forma mais direta a obtenção da resposta. Mas analisa-se que a excelência na aplicação dessa metodologia virá com a experiência e que esse recurso é muito rico e por isso deve ser adotado também por profissionais que ainda estão descobrindo essa metodologia.

Como não faz parte do corpo docente da escola na qual as atividades foram desenvolvidas, o nível de aprendizagem apresentado pelos estudantes antes das atividades desenvolvidas não é de responsabilidade do pesquisador / autor do presente trabalho, porém ressalta-se que muitos apresentavam dificuldades em conteúdos aritméticos. O cronograma organizado com a professora efetiva das salas disponibilizava poucas aulas e espaçadas. Diante dessa realidade, não foi possível trabalhar com mais intensidade e freqüência a pré-álgebra. Embora alguns resultados que apontam uma compreensão do significado de uma letra em certos contextos algébricos tenham sido obtidos, ressalta-se que um professor titular poderá realizar a transição da aritmética para a álgebra fazendo uso da pré-álgebra em situações problemas com mais sucesso, já que a convivência freqüente com os estudantes pode indicar necessidades intelectuais da sala e maiores possibilidades de trabalhos contínuos.

A forma de conduzir as primeiras atividades auxilia a formação de padrões de raciocínios nos estudantes. Os materiais concretos auxiliam os estudantes a entenderem regras, relações ou padrões numéricos de modo informal, ou seja, os estudantes conseguem compreender certas relações com as condições apresentadas pelo material. Os estudantes quando entendem as regras e analisam as relações acabam por se separarem dos materiais concretos e começam a articular seus raciocínios no campo dos números, ou seja, começam a abstrair. A abstração induz os estudantes a entenderem o raciocínio algébrico que se encontra na atividade e a forma com a qual vai se expressar essa compreensão dependerá da utilização de letras, sejam variáveis ou incógnitas.

A pré-álgebra conduz ao entendimento das relações numéricas e induz os estudantes a expressarem um raciocínio algébrico utilizando de letras. Para expressar generalizações com a utilização de variáveis ou equações com incógnitas para descrever equações do primeiro grau terá como conseqüência maiores condições de entendimento da linguagem adotada. A compreensão básica da linguagem algébrica proporciona significado nas resoluções de exercícios de aplicação e fixação e dessa forma os estudantes obterão modelos e padrões de resoluções de exercícios que são importantes para a obtenção de novos conhecimentos algébricos.

Como contribuição, o presente trabalho deixa um material que poderá auxiliar a introdução de conceitos de álgebra, não apenas como um roteiro a ser seguido e sim como uma forma de organizar algumas atitudes, buscar origens e respostas para dificuldades que podem ser enfrentadas na aprendizagem de matemática em sala de aula.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1998. 120 p.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** matemática. Brasília: MEC/ SEF, 1998. 146 p.

BLUMENTHAL, G. **Os PCNs e o ensino de matemática fundamental em Matemática**: um avanço ou um retrocesso? Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA, 2004. Disponível em: <http://www.matematicauva.org/disciplinas/semi2/texto02.pdf >. Acesso em: 10 set. 2009.

CROWLEY, M. L. O Modelo de Van Hiele de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico. In: SHULTE, A. P.; LINDQUIST M. M. (Org.). DOMINGOS, H. H. (trad.) Aprendendo e Ensinando Geometria. São Paulo: Atual, 1996.

ENSINO Fundamental: 7ª série. **Positivo**: livro de coordenação, s/d. Apostila.

KAPUT, J. Teaching and learning a new algebra. In: FENNEMA, E.; ROMBERG, T. A. (Ed.). **Mathematics classrooms that promote understanding**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 1999. p. 2-33.

KIERAN, C. The Learning and Teaching of School Algebra. In: GROUWS, D. (Ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**, New York: Mcmillan, 1992. p. 3 – 34.

MELO, S. T; PEREIRA, A. L. ENEM 2009: vazamentos, erros e contextualização. **Revista do Professor de Matemática,** n. 71, Comitê editorial RPM/IME-USP, 2010. p. 11-12.

PESQUITA, I. M. P. **Álgebra e pensamento algébrico de alunos do 8º ano**. 2007. 262 f. Dissertação (Mestrado em Educação - Especialidade de Didáctica de Matemática). Universidade de Lisboa, 2007.

PINO, P. V.; OSTERMANN, F.; MOREIRA, M. A. **Concepções epistemológicas veiculadas pelos parâmetros Curriculares nacionais na área de ciências naturais de 5º a 8º série do ensino fundamental**. UFRGS, Instituto de Física, 2009. Disponível em: <www.fae.ufmg.br/abrapec/revistas/V5N2/v5n2a1.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2009.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

RIBEIRO, J.; SOARES, E. Projeto Radix: matemática: 7ª série. São Paulo: Scipione, 2005. (Coleção Projeto Radix).

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação**. Proposta Curricular do Estado de São Paulo para o ensino de matemática para o ensino fundamental Ciclo II e ensino médio**. Sao Paulo: SE, 2008.

SHULMAN, L. S. Those who understand: Knowledge Growth in Teaching. American Educacional Research Association. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, Fev. 1986. p. 4-14. Disponível em: < http://www.jstor.org/pss/1175860>. Acesso em: 10 out. 2009.

SOUZA, A. C. P.; NUNES, C. B. **Resolução de problemas como metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática em sala de aula**. UNESP, Rio Claro, SP, 2009. Disponível em: < www.sbem.com.br/files/ix_enem/... /MC65873300534T.doc.>. Acesso em: 15 out. 2009.

TUDO Mercado. **Calculadora básica**. Disponível em: <http://www.tudomercado.com.br/Outr. view?id=1246513471349. > . Acesso em: 15 out. 2009.

USISKIN, S. Conceptions of school algebra and uses of variables. In: COXFORD, A. F.; SCHULTE, A. P. (Ed.). **The ideas of algebra.** Reston, VA: NCTM, Yearbook, 1988. p. 6-13.

VLASSIS, J; DEMONTY, I. **A álgebra ensinada por situações problemas**. Universidade de Liège, Instituto Piaget, 2002. p. 215. (Horizontes Pedagógicos).

WILFRID, S.; WU, H. **The Major Topics of School Algebra**, 2008. Disponível em: <math.berkeley.edu/~wu/NMPalgebra7.pdf>. Acesso em: 05 out. 2009

WU, H. **From arithmetic to algebra**. Eugene: University of Oregon, 2009. p. 1-49.

UNESP. **Figura adaptada da primeira questão do vestibular da UNESP área de exatas 2003.** Disponível em: <http://www.unesp.br/vestibular/pdf. > Acesso em: 20 set. 2009.

8 APÊNDICE

Atividades Investigativas (problema dos preços dos bonés e guarda-chuvas)

A figura abaixo mostra promoções de uma loja em uma cidade norte americana.

Fonte: KIERAN (1992, p.12)

Figura 67: Atividades Investigativa 2

A figura ilustra duas situações de vendas envolvendo guarda-chuvas e bonés e conseqüentemente o preço das combinações. Com base nessas informações pede-se:

a) Qual o preço de cada boné e de cada guarda chuva?

b) Monte equações que descrevam a situação descrita

Atividade Investigativa: problema das senhas do computador

1) Carlos e Luis são dois irmãos que utilizam o mesmo computador. Para não haver problemas entre eles, Carlos colocou uma senha para que Luis não tenha acesso a seus arquivos. A senha funciona da seguinte forma:

O computador emite um número inteiro e a pessoa digita (responde) outro número também inteiro. Esse processo se repete por três vezes. Liberam-se os arquivos se for acertados as três respostas.

Luis tentou descobrir qual era a senha, e com isso começou a observar como Carlos fazia. Observe algumas anotações que Luis fez baseado nessas observações.

Tabela 9: Descobertas da senha

Computador	1	2	3	6	10	13	20	70	76
Resposta de Carlos	4	7	10	19	31	40	61	211	229

Fonte: Próprio autor

Olhando na tabela podemos contatar, por exemplo, que quando o computador emite o número 3 Carlos digitou (respondeu) 10 e da mesma forma quando o computador emitiu o número 13 Carlos respondeu o número 40.

Carlos muitas vezes usava calculadora, então Luis notou que sempre era utilizada a tecla com o número três.

Figura 68: Calculadora básica

Fonte: Tudo mercado (2009)

Analisando os dados acima iremos descobrir qual a senha de Carlos. Seguem algumas questões.

a) Realize a divisão dos números que representam as respostas de Carlos por 3. Compare os resultados dessas divisões com os números emitidos pelo computador.

b) Se o computador emitir o número 346 qual deveria ser a resposta enviada por Carlos?

c) Se Carlos digitar (responder) o número 79 qual seria a número emitido pelo computador?

d) Quando Luis achou que tinha de fato descoberto a senha foi ate o computador e começou a realizar as digitações. Na ultima emissão, o computador lançou a letra x e pediu uma resposta utilizando a letra x. Qual seria resposta que Luis deveria digitar?

Atividade Investigativa 3: problema dos polígonos convexos

Primeira parte

1) Construa figuras geométricas fechadas
2) Desenhe polígonos convexos
3) O que é uma diagonal?

4) Construa polígonos convexos com quatro, cinco, seis, sete e oito lados utilizando-se dos materiais que serão entregues.

Cada grupo de estudantes deverá montar polígonos convexos utilizando os percevejos como vértices colocando-os em uma folha de sulfite que estará apoiada numa plaquinha de isopor e posteriormente riscar na folha os lados desse polígono convexo. Todo polígono convexo deverá apresentar um único vértice (percevejo) de cor diferente. Complete a tabela abaixo em suas construções.

Tabela 10: Construção da tabela com elementos geométricos do problema

Número de lados	Número de vértices	Número de diagonais no vértice destacado (cor diferente)	Número de triângulos	Soma dos ângulos internos

Fonte: Próprio autor

Segunda parte

1) Quantas diagonais podem ser traçadas por um vértice em um polígono convexo de 30 lados? Em quantos triângulos ficará dividido esse polígono convexo?

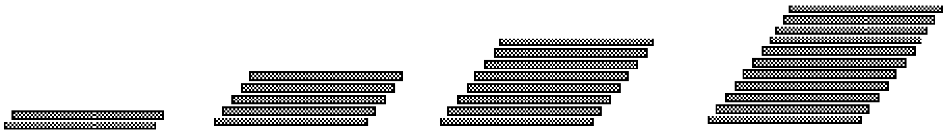
2) Determine a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de 30 lados

3) Quantas diagonais podem ser traçados por um vértice em um polígono convexo que possui um número de lados igual a x? Em quantos triângulos esse polígono convexo será dividido?

4) Determine a soma dos ângulos internos de um polígono convexo que possui um número de lados igual a x.

Atividade desenvolvedora

Observe a figura a seguir.



1^a pilha **2^a pilha** **3^a pilha** **4^a pilha** **...**

Fonte: UNESP (2003)

Figura 69: Pilhas de chapas de madeira

Na figura acima estão representadas pilhas de chapas de madeira no depósito de uma madeireira. Sabe-se que as chapas são sempre empilhadas nessa forma crescente. Pergunta-se:

a) Quantas chapas de madeira terá a pilha que estiver na décima posição?
b) Umas das pilhas possui 77 chapas de madeira. Em que posição está essa pilha?
c) Quantas chapas há numa pilha que se encontra na posição x. Dê sua resposta utilizando também a letra x.
d) Sabe-se que cada chapa de madeira possui 2 cm de espessura. Determine a altura da segunda pilha. Determine a altura da pilha que ocupa a posição x.

Atividade desenvolvedora

1) Isolar y em cada equação:

a) x + y = 10 b) 2x + y = 8 c) x – y = 7 d) x + 2y = 10

2. Resolva os sistemas de equações abaixo:

a) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + y = 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 5y = -2 \end{cases}$

3. Resolva os sistemas de equações abaixo:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 5x - 3y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ 4x + 3y = 33 \end{cases}$

4. Num sitio há perus e porcos num total de 54 cabeças e 178 pés. Quantos são os perus e os porcos?

Tarefa: Atividade desenvolvedora (Extraclasse)

1) Carlos e Luis são dois irmãos que utilizam o mesmo computador. Para não haver problemas entre eles, Carlos colocou uma senha para que Luis não tenha acesso a seus arquivos. A senha funciona da seguinte forma:

O computador emite um número inteiro e a pessoa digita (responde) outro número também inteiro. Esse processo se repete por três vezes. Liberam-se os arquivos se forem acertadas as três respostas.

Luis tentou descobrir qual era a senha, e com isso começou a observar como Carlos fazia. Observe algumas anotações que Luis fez baseado nessas observações.

Tabela 11: Senhas

Computador	1	2	3	6	10	13	20	70	76
Resposta de Carlos	6	11	16	31	51	66	101	351	381

Carlos muitas vezes usava calculadora e Luis notou que a tecla do número ***cinco*** era sempre utilizada.

Figura 70: Calculadora básica

Fonte: Tudo mercado (2009)

Pede-se:

a) Se o computador emitir o número 65, qual deve ser a resposta de Carlos?

b) Carlos respondeu 201, qual foi o número emitido pelo computador.

c) Quando Luis achou que tinha de fato descoberto a senha foi ate o computador e começou a realizar as digitações. Na ultima emissão, o computador lançou a letra X e pediu uma resposta utilizando a letra X. Qual seria resposta que Luis deveria digitar?

Tarefa: Atividade desenvolvedora (Extraclasse)

1. Resolver os sistemas abaixo:

a) $\begin{cases} y = 3x \\ x + 4y = 13 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 4y = -1 \end{cases}$

Atividade Finalizadora

1. Obter valores de x e de y que resolvem a equação x + y = 6.

2. Resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 80 \\ x + 2y = 76 \end{cases}$$

3. A figura abaixo mostra promoções de uma loja de uma cidade norte americana.

Fonte: KIERAN (1992, p.12)

FIGURA 71: Atividades Investigativa 2

A figura ilustra duas situações de vendas envolvendo guarda-chuvas e bonés e conseqüentemente o preço das combinações. Com base nessas informações obter o preço do boné e do guarda chuva.

4. Resolva os sistemas abaixo.

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$

Atividade Finalizadora

O preço a ser pago por uma corrida de táxi inclui uma parcela fixa, chamada de bandeirada, e uma parcela que depende da distancia percorrida. Se a bandeirada custa R$ 3,44 e cada quilometro rodado custa R$ 0,86, pede-se:

a) O preço de uma corrida de 11 quilômetros

b) À distância percorrida por um passageiro que pagou R$ 21, 50 pela corrida.

c) Determine o preço pago por um passageiro que percorreu uma distância de x quilômetros. De sua resposta usando x

d) Se um passageiro pagou um valor de y reais por uma corrida determine quantos quilômetros essa pessoa percorreu. De sua resposta usando a letra y

e) Dois amigos irão a uma loja que se localiza a 8 km de onde se encontram.

Sabe-se que um moto taxista cobra apenas o valor de R$ 0,60 reais por quilometro percorrido.

O que seria mais vantajoso para os dois amigos: Solicitar dois moto taxistas ou ambos pegarem o mesmo táxi e dividirem as despesas?

Tarefa: Atividade Finalizadora (Extraclasse)

1) Resolva os sistemas abaixo

a) $\begin{cases} y = 3x \\ x - y = -6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

2) Observe o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 2x + y = 14 \\ 3x + 4y = 31 \end{cases}$$

Pede-se:

a) Obtenha o valor de x e y

b) Crie um problema que a resolução pode ser feita através do sistema acima

---

Tarefa: Atividade Finalizadora 2 (Extra classe)

1) Uma operadora de celular possui o seguinte plano de telefonia celular:

Plano Brasil 100 minutos:

Esse plano oferece até 100 minutos de ligação pelo preço de R$ 60,00. Caso ultrapasse os 100 minutos, será cobrado R$ 1,20 pra cada minuto ultrapassado.

a) Quanto gastaria nesse plano uma pessoa que use 80 minutos?

b) Quanto se gastaria no Plano Brasil 100 minutos se uma pessoa usar 120 minutos?

c) Uma pessoa gastou R$ 144,00 no plano Brasil 100 minutos. Quantos minutos essa pessoa usou o celular?

d) No plano Brasil 100 minutos foram gastos x minutos. Quanto será pago? De sua resposta usando a letra x

e) No plano Brasil 100 minutos pagou-se uma quantia representada pela letra y (em reais). Quantos minutos foram gastos? De sua resposta usando a letra y.