UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – PPGECE

RENATO SILVA NEVES

O USO DE JOGOS NA SALA DE AULA PARA DAR SIGNIFICADO AO CONCEITO DE NÚMEROS INTEIROS

SÃO CARLOS - SP
2010

RENATO SILVA NEVES

O USO DE JOGOS NA SALA DE AULA PARA DAR SIGNIFICADO AO CONCEITO DE NÚMEROS INTEIROS

Dissertação de Mestrado apresentada à Universidade Federal de São Carlos - UFSCar – Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas – PPGECE para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas.

ORIENTADOR:

PROF. DR. PEDRO LUIZ MALAGUTTI

SÃO CARLOS - SP

2010

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

N518uj

Neves, Renato Silva.
O uso de jogos na sala de aula para dar significado ao conceito de números inteiros / Renato Silva Neves. -- São Carlos : UFSCar, 2011.
100 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2010.

1. Matemática - estudo e ensino. 2. Números inteiros. 3. Jogos educativos. I. Título.

CDD: 510.7 (20ª)

Banca Examinadora:

Pedro Luiz Malagutti

Prof. Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti
DM - UFSCar

Sandra M. S. de Godoy

Profa Dra. Sandra Maria Semensato de Godoy
ICMC – USP

Prof. Dr. Ivo Machado da Costa
DM - UFSCar

AGRADECIMENTOS

Ao **Prof. Dr. Pedro Luiz Malagutti**, pela orientação segura e eficaz, pelo apoio e contínuo incentivo, pelo carinho e paciência com que me auxiliou na elaboração deste trabalho.

A **todos os amigos** que torceram pelo meu sucesso.

Aos **meus alunos e alunas** que, ao cruzarem meu caminho, muito me ensinaram.

Aos **meus pais**, um especial agradecimento pelo muito que me apoiaram e incentivaram a estudar.

RESUMO

Este trabalho foi elaborado a partir da investigação sobre um obstáculo epistemológico bem conhecido: a dificuldade que os alunos têm na assimilação do conceito de número negativo e das operações com tais números. As experiências em sala de aula revelam que essa dificuldade é realmente ampla.

Para investigar as causas e métodos para superar tais obstáculos visando contribuir para o desenvolvimento de estudos ligados à compreensão das regras de sinais dos números inteiros, foram aplicados quatro jogos didáticos: a Atividade das Fichas Positivas e Negativas, o Jogo do Dinossauro, o Jogo do Hexágono e o Jogo Matix.

O trabalho avaliou em quais aspectos esses quatro jogos didáticos auxiliam o professor a desenvolver uma aprendizagem significativa, além de melhorar o desempenho da criatividade, espontaneidade e autonomia dos educandos.

Como produto final deste Mestrado Profissional, as atividades desenvolvidas foram postadas no Portal do Professor criado pelo Ministério da Educação e disponíveis em: http://www.portaldoprofessor.mec.gov.br, um ambiente virtual com recursos educacionais que facilitam e dinamizam o trabalho dos professores. Dessa maneira, buscou-se oferecer alguma contribuição aos estudos ligados aos jogos didáticos de matemática com a sugestão dessas atividades para o Ensino Fundamental.

Palavras-chave: JOGOS. NÚMEROS INTEIROS.

ABSTRACT

This work was elaborated from the research on a well-known epistemological obstacle: the difficulty that the students have in understanding the concept of negative number and operations with such numbers. The experience in the classroom shows that this difficulty is indeed wide.

To investigate the causes and methods to overcome such obstacles to contribute to the development of studies related to the understanding of the rules of signs of integers, four didactic games were applied: the Activity of Positive and Negative Cards, the Dinosaur’s Game, the Hexagon Game and the Matix Game.

This work evaluated in which aspects these four didactic games help the teacher to develop a meaningful learning, in addition to improve the performance of creativity, spontaneity and autonomy of learners.

As the final product of this Professional Master's Degree, the activities developed were posted on the Professor’s Portal created by the Ministry of Education and available on: http://www.portaldoprofessor.mec.gov.br, a virtual environment with educational resources which stimulate and facilitate the work of teachers. Thus, it tried to offer some contribution to studies related to mathematics didactic games with the suggestion of these activities for Primary School.

Keywords: GAMES. NUMBERS.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Ensinar é tarefa complexa e para exercê-la é preciso que se tenha conhecimento e habilidade para compartilhá-los de maneira positiva, fazendo com que os alunos possam aprender. Aprender significa adquirir propriedade sobre conceitos, de maneira contextualizada, estabelecendo relações e construindo autonomia para aquisição de novos conhecimentos.

Desempenhar positivamente a função de professor pressupõe comprometimento com a tarefa de ensinar e envolvimento com os alunos. Isso implica em lidar com aspectos que permeiam as relações entre pessoas – empatia, simpatia, consideração, estima, desconfiança, confiança, autoridade, respeito, desrespeito, crenças e valores, entre outros que apenas quem vive o cotidiano da sala de aula pode com propriedade relatar.

Os jogos didáticos têm despertado muito interesse nos estudos sobre o desenvolvimento no processo de ensino-aprendizagem de conceitos matemáticos novos e a ampliação dos outros já dominados pelos educandos.

Este trabalho está dividido em cinco seções:

- Na **Introdução** é apresentada uma breve descrição de como o trabalho foi elaborado;
- O **Capítulo 1** traz reflexões sobre os referenciais teóricos e sobre a utilização de materiais didáticos a distância (EAD – portal do professor);
- O **Capítulo 2** apresenta a história dos números com fundamentação matemática e gênese das dificuldades na aprendizagem de números inteiros;
- No **Capítulo 3** há o relato das atividades desenvolvidas com os alunos, descrição da atividade das Fichas Positivas e Negativas e dos três jogos: Jogo do Dinossauro, Jogo do Hexágono e o Jogo Matix;
- No **Capítulo 4** são apresentados, discutidos e analisados os resultados obtidos no processo de ensino-aprendizagem dos números relativos através da utilização dos jogos didáticos, com alunos de dez a doze anos de idade. A pesquisa avaliou em quais aspectos eles auxiliam o professor a desenvolver uma aprendizagem significativa acerca dos números inteiros e suas operações.

Este trabalho iniciou-se, no primeiro semestre de 2009, com a formação de um “Clube de Matemática”. O projeto foi realizado com alunos em doze encontros e foi aplicado nas unidades do "Colégio Objetivo de Descalvado". O projeto foi desenvolvido com quinze alunos do Ensino Fundamental – 5ª e 6ª séries, sendo nove das quintas e seis das sextas, que frequentaram essas atividades em período contrário às aulas habituais.

Nesses encontros, utilizaram-se as atividades e jogos didáticos com os objetivos gerais de desenvolver a habilidade de cálculo mental, ampliar o raciocínio lógico, aumentar a atenção e a concentração e desenvolver a criatividade; e com o objetivo específico de trabalhar as quatro operações fundamentais com números inteiros, dando significado e compreensão às regras de sinais nos números inteiros. Assim, o trabalho buscou investigar em quais aspectos os jogos auxiliam o professor a desenvolver uma aprendizagem prazerosa, lúdica e significativa para os alunos acerca dos números inteiros.

Para se alcançar tais objetivos, é necessário mais do que simplesmente jogar um determinado jogo. Sendo assim, os jogos foram aplicados a partir das seguintes etapas: construção e familiarização do material, leitura das regras, compreensão das regras através do jogo, intervenções verbais e escritas com situações-problema ligadas ao jogo e, finalmente, retorno ao jogo para aplicação das estratégias analisadas durante a resolução de problemas.

Verificou-se que o uso de jogos nas aulas de matemática, quando aplicados sob orientação, representa um excelente instrumento de ensino. Com os jogos foi possível observar, analisar e avaliar procedimentos de cálculo mental, tomadas de decisões e elaboração de estratégias vencedoras e, mais importante ainda, foi possível trabalhar com o conceito de números inteiros com significado e compreensão.

Em situações normais de sala de aula é muito difícil para o professor acompanhar todo o raciocínio desenvolvido pelos alunos, utilizando-se apenas dos registros finais para a avaliação. Seguindo as etapas do jogo consideradas nesse projeto, observamos todo o processo de erros e acertos que precedem o registro final. Dessa forma, a avaliação não se restringe a um único momento.

Este trabalho tem como produto do Mestrado Profissional a postagem de quatro aulas desenvolvidas no Portal do Professor criado pelo Ministério da Educação e disponíveis em: http://www.portaldoprofessor.mec.gov.br.

CAPÍTULO 1: REFLEXÕES SOBRE OS REFERENCIAIS TEÓRICOS

> A matemática é parte essencial da bagagem intelectual de todo cidadão que deseja ter uma participação crítica na sociedade. Num mundo cada vez mais complexo, é preciso estimular e desenvolver habilidades que permitam resolver problemas, lidar com informações numéricas, interpretando-as critica e independentemente, para, a partir delas, tomar decisões, fazer inferências, opinar sobre temas que as envolvem, desenvolvendo a capacidade de comunicação e de trabalho coletivo. (MANDARINO e BELFORT; 2006).

As novas tendências de ensino apontam mudanças metodológicas que buscam privilegiar a atividade do aluno, acreditando que ensinar não é transferir conhecimento ao educando. Nessa perspectiva, uma das maiores preocupações do ensino de matemática é que os conceitos sejam construídos a partir de situações-problema do cotidiano, de outras áreas do conhecimento e da própria matemática.

No entanto, não se descarta a necessidade de sistematizar e consolidar os conhecimentos adquiridos por meio de atividades e exercícios que precisam ir além daqueles de aplicação imediata e treino.

Segundo o psicólogo Ausubel (NOVAK, 1981), a aprendizagem é de fato significativa à medida que o novo conteúdo é incorporado às estruturas de conhecimento de um aluno e adquire significado a partir da relação com seu conhecimento prévio. Do contrário, ela se torna mecânica ou repetitiva, uma vez que se produziu menos essa incorporação e atribuição de significado, e o novo conteúdo passa a ser armazenado isoladamente ou por meio de associações arbitrárias na estrutura cognitiva, tornando-se, em pouco tempo, objeto de esquecimento.

A aprendizagem significativa não depende apenas do professor; é necessário que o aluno tenha disposição e motivação para aprender, pois se ele quiser apenas memorizar o conteúdo para simplesmente reproduzi-lo na avaliação, a aprendizagem será mecânica.

Nesta concepção, é também papel do professor motivar o aluno a aprender. Essa motivação pode ser levada pela curiosidade, desejo pelo conhecimento e, também, pode ser estimulada pela família e pela expectativa de benefícios sociais que a aprendizagem pode trazer.

> Motivação é algo que leva os alunos a agirem por vontade própria. Ela inflama a imaginação, excita e põe em evidência as fontes de energia intelectual, inspira o aluno a ter vontade de agir, de progredir. Em suma, motivar é despertar o interesse e o esforço do aluno. É fazer o estudante desejar aprender aquilo que ele precisa. (ZÁBOLI; 1999).

A matemática deve ser ensinada de maneira contextualizada, proporcionando dessa forma uma aprendizagem significativa. Entretanto, os alunos devem perceber que em matemática algumas técnicas devem ser dominadas, a sua linguagem simbólica utilizada de forma adequada e alguns conceitos memorizados, como o exemplo clássico da tabuada. Um exemplo de aprendizagem significativa ocorre quando um aluno aprende a técnica de resolução de equações do 1º. grau utilizando uma balança de dois pratos; ele entende o significado dos princípios aditivo e multiplicativo da igualdade, que posteriormente será feito de forma algébrica para agilizar a resolução das mesmas.

Os conhecimentos matemáticos foram construídos pelo homem e para o homem, na sua relação com o meio em que vive. Então, ao se ensinar matemática, deve-se considerar as experiências e conhecimentos adquiridos pelo aluno, pois desde o seu nascimento, esse já se encontra envolvido em inúmeras relações sociais.

Por outro lado, o que se ensinou anos atrás pode hoje não ser significativo. Por exemplo, o caso das tábuas de logaritmo. Com o surgimento da calculadora científica, um instrumento de fácil acesso, tornou-se desnecessário trabalhar com as tábuas. Entretanto, não se deve descartar a importância do conceito de logaritmo e suas aplicações.

Se acreditarmos que o aluno, ao chegar à escola, não está desprovido de saberes e considerando o avanço da tecnologia, o qual permite que informações de todo o mundo sejam acessadas em frações de segundos, vemos que não se pode mais pensar na matemática fora do contexto social, intelectual e tecnológico do aluno.

Nesse contexto geral, a utilização de jogos pedagógicos favorece a construção do conhecimento matemático por parte dos alunos na perspectiva de uma aprendizagem significativa. Se não houver mera função ilustrativa, esses jogos poderão levá-los a conclusões e/ou questionamentos, uma vez que os mesmos não são simplesmente receptores, mas sim, agentes ativos na construção de seus conhecimentos. É necessário incentivar a experimentação, valorizar as ideias dos educandos e estimulá-los a expô-las.

Porém, se os jogos forem utilizados de maneira errônea, não trarão sentido algum para os alunos, pois segundo Carvalho (1990), na manipulação de recursos didáticos a ênfase não está sobre o objeto, e sim, sobre as operações que com eles se realizam. Se o uso dos jogos pedagógicos é visto apenas na sua concepção lúdica, o aluno permanece passivo, recebendo a informação do professor. Não é o aluno quem pesquisa, mas o professor quem lhe mostra caminhos a percorrer.

Quando a metodologia de ensino com a utilização de jogos é empregada, há melhoria de aprendizagem em matemática, pois, muitas vezes, os alunos motivados em ter um bom desempenho em jogos passam a resolver problemas que antes não resolviam.

A proposta de um jogo pedagógico em sala de aula abre espaço também para os alunos mais tímidos se manifestarem e esclarecerem suas dúvidas.

Os jogos em sala de aula surgem como uma oportunidade de socialização dos alunos, maior participação e busca incessante de elucidar um problema. Mas, para que isso ocorra, é necessário um planejamento e um jogo que motive o aluno a buscar intencionalmente os resultados desejados.

A ideia principal é não deixar o aluno participar da atividade aleatoriamente. Ele não pode pensar no jogo como uma parte da aula que não irá fazer uma atividade escrita ou que não precisará prestar atenção no professor, mas precisa ser conscientizado de que aquele momento é importante para a sua formação educacional, pois usará seus conhecimentos e suas experiências para participar, argumentar e propor soluções na busca dos resultados esperados.

Segundo Huizinga (1971 *apud* MORATORI, 1971, p. 54), as características fundamentais do jogo são:

> Ser uma atividade livre; não ser vida "corrente" nem vida "real", mas antes possibilitar uma evasão para uma esfera temporária de atividade com orientação própria; "ser jogado até o fim" dentro de certos limites de tempo e espaço, possuindo um caminho e um sentido próprio; criar ordem e ser a ordem, uma vez que quando há a menor desobediência a esta, o jogo acaba. Todo jogador deve respeitar e observar as regras, caso contrário ele é excluído do jogo (apreensão das noções de limites); permitir repetir tantas vezes quantas forem necessárias, dando assim oportunidade, em qualquer instante, de análise de resultados; ser permanentemente dinâmico.

Os educadores devem ficar atentos, pois a maneira como se realiza o jogo envolve várias ações que geram sentimentos, tais como: exaltação, tensão, alegria e frustração. Por outro lado, através do jogo, a criança manifesta sua iniciativa e imaginação.

Segundo Lopes (2000), os principais objetivos pedagógicos a serem trabalhados com a criança são: trabalhar a ansiedade, rever os limites, reduzir a descrença na autocapacidade de realização, diminuir a dependência (desenvolvimento da autonomia), aprimorar a coordenação motora, desenvolver a organização espacial, aumentar a atenção e a concentração, desenvolver antecipação e estratégia, ampliar o raciocínio lógico, desenvolver a criatividade e trabalhar o jogo (ensinar a ganhar e perder).

Para Moratori (2003), ao optar por uma atividade lúdica o educador deve ter objetivos bem definidos. Esta atividade pode ser realizada como forma de conhecer o grupo com o qual se trabalha ou pode ser utilizada para estimular o desenvolvimento de determinada área ou promover atividades específicas.

De acordo com seus objetivos, o educador deve propor regras ao invés de impô-las, permitindo que o aluno elabore-as e tome decisões, promover a troca de ideias para chegar a um acordo sobre as regras, permitir julgar qual regra deve ser aplicada a cada situação, motivar o desenvolvimento da iniciativa, agilidade e confiança e contribuir para o desenvolvimento da autonomia. Um jogo, para ser útil no processo educacional, deve promover situações interessantes e desafiadoras para a resolução de problemas, permitindo aos aprendizes uma autoavaliação quanto aos seus desempenhos, além de fazer com que todos os jogadores participem ativamente de todas as etapas, inclusive da construção do jogo.

Para Grando (2000), a intervenção do professor no jogo é um fator determinante na transformação do jogo espontâneo em pedagógico. Entende-se aqui, "jogo pedagógico como aquele adotado intencionalmente de modo a permitir tanto o desenvolvimento de um conceito matemático novo como a aplicação de outro já dominado pela criança." (MOURA, 1992, p.53).

Assim, o objetivo do jogo é definido pelo professor, que pode ser utilizado na construção de um novo conceito ou ainda na fixação ou aplicação/extensão de um conceito já aprendido. É papel do professor determinar o objetivo de sua ação, pela escolha e determinação do momento apropriado para o jogo. Segundo Grando (2000), nesse sentido, o jogo transposto para o ensino passa a ser definido como jogo pedagógico.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) ressaltam a importância dos jogos pedagógicos com o seguinte argumento:

> Nos jogos de estratégia (busca de procedimentos para ganhar) parte-se da realização de exemplos práticos (e não da repetição de modelos de procedimentos criados por outros) que levam ao desenvolvimento de habilidades específicas para a resolução de problemas e os modos típicos do pensamento matemático. (MEC, 1998: p.47)

Dessa forma, as atividades com jogos representam um importante recurso pedagógico, já que:

> Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações. (MEC, 1998: p.47)

Além disso, segundo Grando (2000), os jogos contribuem na formação de posturas didáticas, na construção de uma atitude positiva perante os erros, na socialização, em enfrentar desafios, no desenvolvimento da crítica, da intuição, da criação de estratégias e dos processos psicológicos básicos.

Segundo Moratori (2003, p.39), é fundamental inserir as crianças em atividades que permitam um caminho que vai da imaginação à abstração de estratégias diversificadas de resolução de problemas. O autor afirma que "o processo de criação está diretamente relacionado à imaginação e a estrutura da atividade com jogos permite o surgimento de situações imaginárias". O jogo depende da imaginação e é a partir dessa situação que se chega à abstração, tão importante no processo de ensino-aprendizagem de matemática.

O jogo, em seu aspecto pedagógico, se apresenta como um facilitador da aprendizagem, desenvolvendo nos alunos a capacidade de pensar, refletir, analisar, compreender, levantar hipóteses, testá-las e avaliá-las com autonomia e cooperação. Portanto, situações que propiciem à criança uma reflexão e análise do seu próprio raciocínio, devem ser valorizadas no processo de ensino-aprendizagem e o jogo demonstra ser um instrumento importante desse processo. A competição inerente aos jogos garante-lhes o dinamismo, o movimento, propiciando um interesse e envolvimento natural do aluno e contribuindo para o seu desenvolvimento social, intelectual e afetivo.

Segundo Grando (2000), muitas vezes os educadores utilizam jogos em sala de aula sem entender como dar encaminhamento ao trabalho, depois do jogo em si. Além disso, nem sempre dispõem de subsídios que os auxiliem a explorar as possibilidades dos jogos e avaliar seus efeitos no processo de ensino–aprendizagem do aluno. A grande maioria desenvolve o "jogo pelo jogo", privilegiando apenas o caráter motivacional, que é muito importante, mas não pode ser o único objetivo do jogo pedagógico. Assim, não se estabelece um resgate das ações desencadeadas no jogo, ou seja, análise do jogo, construção e elaboração de estratégias e associação ao conteúdo de matemática trabalhado no mesmo. Trata-se apenas de compreensão e cumprimento das regras, com elaboração informal e espontânea de estratégias, e sem muita contribuição para o processo ensino-aprendizagem da matemática. De acordo com Grando, a correta utilização pedagógica de jogos, passa necessariamente pelas seguintes etapas:

- ✓ reflexão,
- ✓ registro,
- ✓ formalização e
- ✓ sistematização dos conteúdos matemáticos.

Além disso, em seu trabalho de pesquisa, Grando (2000) ressalta:

> ... o paradigma educacional baseado em jogos destaca-se como ferramenta educacional pelos seus aspectos interativos, que proporcionam aos alunos a geração de novos problemas e de novas possibilidades de resolução, constituindo-se, dessa forma, em um suporte metodológico que possibilita ao professor, educador-pesquisador, resgatar e compreender o raciocínio do aluno e, dessa maneira, obter referências necessárias para o pleno desenvolvimento de sua ação pedagógica (avaliação). (GRANDO; 2000).

No desenvolvimento do projeto, que foi base desta dissertação, houve a preocupação em contribuir com os professores de matemática, ajudando-lhes a desenvolver atividades pedagógicas com jogos nas aulas para tornar significativo o processo de aprendizagem do aluno.

Mais especificamente, investigar possibilidades de um trabalho pedagógico baseado em jogos e resolução de problemas para a aprendizagem significativa dos números inteiros. Esse é o principal objetivo desta pesquisa, a fim de proporcionar aos professores subsídios práticos na elaboração e desenvolvimento de estratégias para transformar as atividades lúdicas dos jogos em conhecimentos matemáticos sistematizados em sala de aula.

1.1 O produto do Mestrado Profissional

Este trabalho tem como produto do Mestrado Profissional quatro aulas desenvolvidas (a Atividade das Fichas Positivas e Negativas, o Jogo do Dinossauro, o Jogo do Hexágono e o Jogo Matix) no projeto "Clube de Matemática", realizado no primeiro semestre de 2009, as quais também foram postadas no Portal do Professor criado pelo Ministério da Educação e disponível em: http://www. portaldoprofessor.mec.gov.br, um ambiente virtual com recursos educacionais que facilitam e dinamizam o trabalho dos professores.

Hoje, em busca de soluções para a grave realidade do setor de educação pública ou particular no Brasil, em meio às rodas acadêmicas, a formação continuada do profissional professor está sendo exaustivamente debatida. Trata-se de uma concepção de educação como um processo permanente em que o saber se faz através de uma superação constante e que concebe tanto os professores quanto os alunos como aprendizes contínuos, sujeitos de sua própria educação.

A educação continuada deve ser entendida como a educação que se renova, adequando o exercício da docência às exigências de um mundo que se transforma a cada instante. Assim, a Educação a Distância (EAD) se mostra, sem dúvida, um instrumento valioso para a formação continuada do professor que, por sua vez, tem se mostrado uma boa saída para os problemas educacionais brasileiros.

1.1.1 Aspectos Teóricos

Educação a Distância (EAD), inicialmente, pode ser definida como um processo ensino-aprendizagem, mediado por tecnologias, onde professores e alunos podem se comunicar ao mesmo tempo, de maneira virtual e/ou presencial. Assim, estão separados fisicamente, mas próximos virtualmente, unidos por tecnologias como: a internet, o rádio, a televisão, o vídeo, o CD-ROM, o DVD, o telefone, o fax, o correio e outras tecnologias semelhantes.

A Internet, atualmente, é considerada um dos recursos tecnológicos mais avançados em termos de informação e comunicação. Apesar de não estarem compartilhando os mesmos espaços e tempos, alunos e professores podem estar em contato permanente.

Belloni (2003) definiu a Educação a Distância como uma forma de aprendizagem organizada, baseada na separação física entre os aprendizes e aqueles que estão envolvidos na organização de sua aprendizagem. Essa separação pode aplicar-se a todo o processo de aprendizagem ou apenas a certos estágios. Nela, podem estar envolvidos estudos presenciais e privados, mas sua função será suplementar ou reforçar a interação, predominantemente, a distância. Isso implica em novos papéis para os alunos e para os professores, novas atitudes e novos enfoques metodológicos.

Dessa maneira, as tecnologias interativas vêm evidenciando, na educação a distância, o que deveria ser o cerne de qualquer processo de educação: a interação entre todos os que estão envolvidos nesse processo. Assim, na medida em que avançam as tecnologias de comunicação virtual, podem-se ter professores compartilhando aulas, ou seja, tem-se um maior intercâmbio de saberes, possibilitando que cada professor colabore, com seus conhecimentos específicos, no processo de construção do conhecimento, muitas vezes a distância.

O conceito de curso, de aula também muda. Hoje, ainda se entende por aula um espaço e um tempo determinados. Mas, esse tempo e esse espaço, cada vez mais, serão flexíveis. O professor continuará "dando aula", e enriquecerá esse processo com as possibilidades que as tecnologias interativas proporcionam: para receber e responder mensagens dos alunos, criar listas de discussão e alimentar continuamente os debates e pesquisas com textos, páginas da Internet, até mesmo fora do horário específico da aula. Há uma possibilidade cada vez mais acentuada de todos estarem presentes em muitos tempos e espaços diferentes. Assim, tanto professores quanto alunos estarão motivados, entendendo "aula" como pesquisa e intercâmbio. Nesse processo, o papel do professor vem sendo redimensionado e cada vez mais ele se torna um supervisor, um animador, um incentivador dos alunos na instigante aventura do conhecimento.

Com o alargamento da banda de transmissão, como acontece na TV a cabo, torna-se mais fácil poder ver-nos e ouvir-nos a distância. Muitos cursos já são realizados a distância com som e imagem, principalmente cursos de atualização, de extensão profissional. As possibilidades de interação são diretamente proporcionais ao número de pessoas envolvidas. Já temos aulas a distância com possibilidade de interação *on-line* (ao vivo) e aulas presenciais com interação a distância.

Há instituições educacionais sérias que oferecem cursos de qualidade, integrando tecnologias e propostas pedagógicas inovadoras, com foco na aprendizagem e com uma combinação de uso de tecnologias: ora com momentos presenciais; ora de ensino *on-line* (pessoas conectadas ao mesmo tempo, em lugares diferentes); adaptação ao ritmo pessoal; interação grupal; diferentes formas de avaliação, que poderá também ser mais personalizada e a partir de níveis diferenciados de visão pedagógica; é o caso, por exemplo, do Portal do Professor criado pelo Ministério da Educação e disponível em: http://www. portaldoprofessor.mec.gov.br, um espaço para troca de experiências entre professores do ensino fundamental e médio. É um ambiente virtual com recursos educacionais que facilitam e dinamizam o trabalho dos professores.

1.1.2 Aspectos práticos

O Portal dos Professores oferece modelos de aulas de acordo com cada etapa do ensino e disciplina, recursos multimídia, cursos de formação de professores, um jornal voltado para o dia a dia da sala de aula, *links* diversos, fóruns, *blogs* e várias outras opções. Entre as ferramentas há fotos, mapas, vídeos e animações. Além de assistir às videoaulas, os professores podem comentá-las e até aperfeiçoá-las. Ao final de cada uma, há um espaço para comentários que incentiva o debate metodológico. O espaço virtual é inovador porque reúne educadores do país todo e permite que cada um adapte o conteúdo a sua realidade, com o uso das ferramentas disponíveis. Nele também são oferecidos vídeos da TV Escola, textos e apostilas para orientar o professor e todo o conteúdo de cursos que o Ministério da Educação oferece (Pró-Letramento, Pró infantil, *links* para as rádios e tevês universitárias, comunidades virtuais, *blogs*, *chats* e fóruns). O professor tem acesso gratuito e sem necessidade de senha a todo o conteúdo do portal, exceto o espaço de criação de aulas, onde é preciso registrar-se.

Assim, o Portal do Professor é dividido em seis partes:

- **Espaço da Aula:** é um lugar para criar, visualizar e compartilhar aulas de todos os níveis de ensino. As aulas podem conter recursos multimídia, como vídeos, animações, áudios etc, importados do próprio Portal ou de endereços externos. Qualquer professor pode: criar e colaborar; desenvolver aulas individualmente ou em equipe; pesquisar e explorar o conteúdo das aulas;
- **Jornal do Professor:** esse é um veículo inteiramente dedicado a revelar o cotidiano da sala de aula, trazendo quinzenalmente temas ligados à educação;
- **Recursos Educacionais:** uma coleção de recursos multimídia publicados no Portal para todos os níveis de ensino e em diversos formatos: áudio, vídeo, imagem, experimento, mapa, animação e simulação, hipertexto e *software* educacional;
- **Cursos e Materiais**: *links* com informações de cursos disponíveis no portal do MEC ou de parceiros e contêm dados sobre o seu desenvolvimento, objetivos, público-alvo e materiais de formação; acesse materiais temáticos, módulos de autoaprendizagem, proposições de ensino, parâmetros e referenciais, recursos em diversos formatos para fundamentação e enriquecimento da prática docente;
- **Interação e Colaboração**: acesso às novas ferramentas da *web* 2.0 para interagir com outros professores compartilhando conteúdos, informações, pesquisas e participando dos debates.
- **Links**: *sites* e portais nacionais e internacionais para auxiliar a pesquisa e a formação de professores.

CAPÍTULO 2: A HISTÓRIA DOS NÚMEROS

2.1. Fundamentação Matemática e Gênese das Dificuldades

A noção de número e suas extraordinárias generalizações estão intimamente ligadas à história da humanidade, já que a própria vida está impregnada de matemática: grande parte das comparações que o homem formula alude, conscientemente ou não, a juízos aritméticos e propriedades geométricas. Sem esquecer que a ciência, a indústria e o comércio nos colocam em permanente contato com o amplo mundo da matemática, principalmente agora com a ampla utilização das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC).

Em todas as épocas da evolução humana, mesmo nas mais retrógradas, encontra-se no homem o sentido do número. Essa faculdade nos permite reconhecer que algo muda em uma pequena coleção quando, sem nosso conhecimento direto, um objeto tenha sido retirado ou acrescentado.

Se contar é um atributo exclusivamente humano, algumas espécies de animais parecem possuir um sentido rudimentar do número. Sabe-se, por exemplo, que muitos pássaros têm o sentido do número. Se um ninho contém quatro ovos, pode-se tirar um sem que nada ocorra, mas o pássaro provavelmente abandonará o ninho se faltarem dois ovos. De alguma forma, esse animal pode distinguir dois de três.

As espécies zoológicas com sentido do número são muito poucas (nem mesmo incluem todos os monos e outros mamíferos) e a percepção de quantidade numérica nos animais é de tão limitado alcance que se pode desprezá-la. Contudo, também no ser humano essa percepção intuitiva é limitada a pequenas quantidades. Na prática, quando o homem civilizado precisa distinguir uma quantidade de objetos a qual não está habituado, usa conscientemente ou não artifícios tais como a comparação, o agrupamento ou a ação de contar. O sentido *visual* direto do número possuído pelo homem civilizado raras vezes ultrapassa o número quatro, e o sentido *tátil* é ainda mais limitado.

Os estudos sobre os povos primitivos fornecem uma notável comprovação desses resultados. Os selvagens que não alcançaram ainda o grau de evolução suficiente para contar com os dedos estão quase completamente desprovidos de toda noção de número. Os habitantes da selva da África do Sul, por exemplo, não possuem outras palavras numéricas além de *um*, *dois* e *muitos*, e ainda essas palavras estão desvinculadas de um sentido bem claro de número.

Todas as linguagens européias apresentam traços destas antigas limitações: a palavra inglesa *thrice*, do mesmo modo que a palavra latina *ter*, possui dois sentidos: "três vezes" e "muito". Há evidente conexão entre as palavras latinas *tres* (três) e *trans* (mais além). O mesmo acontece no francês: *trois* (três) e *très* (muito).

Um sentido rudimentar de número, de alcance não maior que o de certos pássaros, foi o núcleo do qual nasceu nossa concepção de número. Todavia, através de uma série de circunstâncias, o homem aprendeu a completar sua percepção limitada de número com um artifício que estava destinado a exercer influência extraordinária em sua vida futura. Esse artifício é a operação de *contar*, e é a ele que se deve, em parte, o progresso da humanidade.

Apesar disso, ainda que pareça estranho, é possível chegar a uma ideia clara e lógica de número sem recorrer à contagem. Por exemplo, em uma sala de cinema, temos diante de nós dois conjuntos: o das poltronas da sala e o dos espectadores. Sem contar, podemos assegurar se esses dois conjuntos têm ou não igual número de elementos e, se não têm, qual é o de menor número. Com efeito, se cada assento está ocupado e ninguém está de pé, sabemos, sem contar, que os dois conjuntos têm igual número. Se todas as cadeiras estão ocupadas e há pessoas em pé na sala, sabemos, sem contar, que há mais pessoas que poltronas.

Esse conhecimento é possível graças a um procedimento chamado *correspondência biunívoca*. Essa consiste em atribuir a cada objeto de um conjunto um objeto de outro, e continuar assim até que um ou ambos os conjuntos se esgotem.

A técnica de contagem, em muitos povos primitivos, se reduz precisamente a tais associações de ideias. Eles registravam o número de suas ovelhas ou de seus soldados por meio de incisões feitas num pedaço de madeira ou por meio de pedras empilhadas.

A correspondência biunívoca resume-se numa operação de "fazer corresponder". Pode-se dizer que a *contagem* se realiza fazendo corresponder a cada objeto da coleção (conjunto), um número que pertence à sucessão natural: 1,2,3...

O ser humano atual, mesmo com conhecimento precário de matemática, poderia começar a sucessão numérica não pelo *um*, mas por *zero*, e escreveria 0,1,2,3,4...

A criação de um símbolo para representar o "nada" constitui um dos atos mais audaciosos da história do pensamento. Essa criação é relativamente recente (talvez pelos primeiros séculos da Era Cristã) e foi devida às exigências da numeração escrita. O *zero* não só permite escrever mais simplesmente os números, como também efetuar as operações com agilidade. Imaginemos uma divisão ou multiplicação em números romanos... E, no entanto, antes ainda dos romanos, tinha florescido a civilização grega, onde viveram alguns dos maiores matemáticos de todos os tempos; e nossa numeração é muito posterior a todos eles.

Para entender os números, o homem necessita representá-los por símbolos. A simbologia talvez tenha começado da seguinte maneira: as asas de um pássaro podiam simbolizar o número dois, as folhas de um trevo o número três, as patas do cavalo o número quatro, os dedos da mão o número cinco. Evidências de que essa poderia ser a origem da representação dos números se encontram em vários registros antigos.

É claro que uma vez criado e adotado, o número se desliga do objeto que o representava originalmente, a conexão entre os dois é esquecida e o número passa por sua vez a ter existência independente do objeto que o simboliza. À medida que o homem foi aprendendo a servir-se cada vez mais da linguagem, o som das palavras que exprimiam os primeiros números foi substituindo as imagens para as quais foi criado. Assim, os modelos concretos iniciais usados para representar números tomaram a forma abstrata dos *nomes* dos números. É impossível saber a idade dessa linguagem numérica falada, mas, sem dúvida, ela precedeu a aparição da escrita.

Como um produto cultural, os vestígios da significação inicial das palavras que designam os números foram perdidos, com a possível exceção de *cinco* (que em várias línguas queria dizer mão, ou mão estendida). Uma possível explicação para isso é que, enquanto alguns nomes dos números se mantiveram invariáveis desde os dias de sua criação, revelando notável estabilidade e semelhança em todos os grupos linguísticos, os nomes dos objetos concretos que lhes deram nascimento sofreram uma metamorfose completa.

2.2 Origem dos Números Negativos

Todas as nações que desenvolveram formas de escrita introduziram o conceito de número natural e desenvolveram um sistema de contagem. Entretanto, para efetuar medições, os números naturais não são suficientes; então, surgiu a necessidade dos números racionais. O desenvolvimento subsequente do conceito de número prosseguiu principalmente devido ao próprio desenvolvimento da Matemática.

Os números negativos aparecem pela primeira vez na China antiga, onde os chineses estavam acostumados a calcular com duas coleções de barras - vermelho para os números positivos e preto para os números negativos. No entanto, não aceitavam a ideia de um número negativo poder ser solução de uma equação. Os matemáticos indianos descobriram os números negativos quando tentavam formular um algoritmo para a resolução de equações quadráticas. São exemplos disso as contribuições de Brahomagupta (589–668 d.C.), pois a aritmética sistematizada dos números negativos encontra-se pela primeira vez na sua obra.

Algumas regras eram já conhecidas através dos teoremas gregos de cunho geométrico, como por exemplo, (a -b).(c -d) = ac +bd -ad -bc, mas os hindus converteram-nas em regras numéricas sobre números negativos e positivos.

A origem da regra dos sinais é, entretanto, atribuída a Diofantes (fim do século III d.C.) por diversos autores como Boyer (1996), Glaeser (1969) e Talavera (2001). No início do livro I da sua aritmética o matemático grego faz referência ao desenvolvimento do produto de duas diferenças, escrevendo:

> O que está em falta multiplicado pelo que está em falta dá o que é positivo; enquanto o que está em falta multiplicado pelo que é positivo, dá o que está em falta. (DIOFANTO *apud* GLAESER, 1969, p.47)

Nos séculos XVI e XVII, muitos matemáticos europeus não apreciavam os números negativos e, se esses números apareciam nos seus cálculos, eles consideravam-nos falsos ou impossíveis. Exemplo deste fato seria Michael Stifel (1487- 1567) que se recusou a admitir números negativos como raízes de uma equação, chamando-lhes de "numeri absurdi". Cardano usou os números negativos embora os chamando de "numeri ficti".

O matemático Simon Stevin (1548-1620) aceitava números negativos como raízes e coeficientes de equações e expressava número como aquilo pelo qual explica quantidade de alguma coisa e proclama: “Concluímos, pois, que não existem números absurdos, irracionais, irregulares, inexplicáveis, ou surdos; e sim, que, entre os números há uma tal excelência e coerência, que temos meios de medir a noite e o dia, em sua admirável perfeição.” Contudo, não afirma nada sobre a existência própria de números negativos.

Stevin também faz a seguinte proposição: as raízes negativas das equações são interpretadas como sendo as opostas das positivas e apresentam um “teorema” do produto de duas diferenças, dizendo:

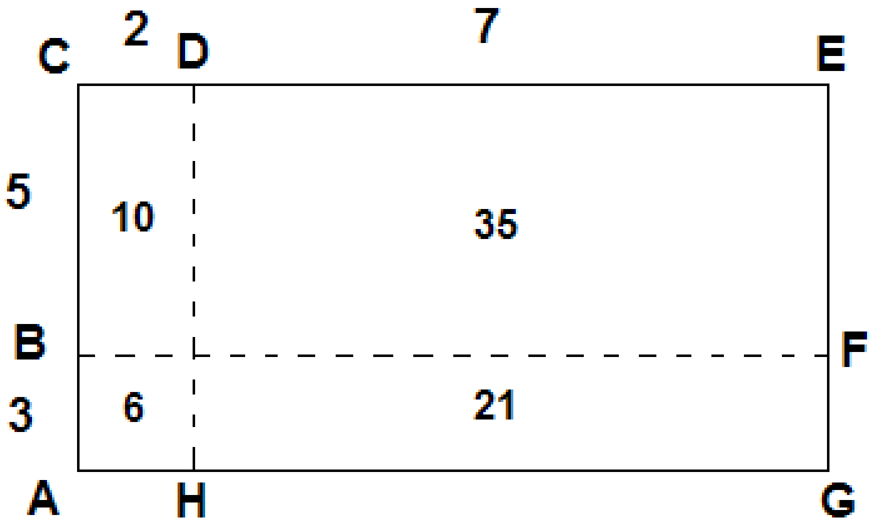
> Mais multiplicado por mais dá produto mais, menos multiplicado por menos, dá produto mais, e mais multiplicado por menos ou menos multiplicado por mais, dá produto menos. (STEVIN *apud* GLAESER, 1969, p.47).

Stevin, explicou esse resultado com a seguinte argumentação:

> Seja 8 – 5 multiplicado por 9 – 7, deste modo: – 7 vezes – 5 faz + 35 (+35, porque, como diz o teorema, – por –, faz +). Depois – 7 vezes 8 faz – 56 (– 56, porque, como diz o teorema, – por +, faz –). E similarmente seja 8 – 5 multiplicado por 9, e darão produtos 72 – 45; depois juntem +72 + 35, fazem + 107. Depois juntem – 56 – 45,

> fazem – 101; e subtraído o 101 de 107 resta 6, para o produto de tal multiplicação. Demonstração: Os fatores da multiplicação são 9 – 7 = 2 e 8 – 5 = 3; multiplicando 2 por 3, o produto é 6, logo, o produto acima também é 6, mas o mesmo é obtido por multiplicação, lá onde dissemos que + multiplicado por +, dá produto +, e – por –, dá produto +, e + por –, ou – por +, dá produto –, portanto o teorema é válido. (STEVIN *apud* GLAESER, 1969, p.48 e p. 49)

Stevin apresenta também uma demonstração geométrica desse resultado:



> Seja AB 8 – 5 (a saber AC é 8 e BC é 5). Depois CD é 9 – 7 (a saber CE é 9 e DE é 7), seu produto será BH; ou ainda de acordo com a multiplicação precedente CG 72 – DG 56 – CF 45 + DF 35, os quais nos mostrarão serem iguais a BH desse modo. Em suma, CG + DF, subtraído de DG e CF, resta BH. Conclusão: Portanto mais multiplicado por mais, dá produto mais. "E menos multiplicado por menos, dá produto mais, e mais multiplicado por menos, ou menos multiplicado por mais, dá produto menos; como queríamos demonstrar. (STEVIN *apud* GLAESER, 1969, p.48 e 49).

Embora Stevin tivesse delineado uma explicação geométrica dos produtos entre números inteiros, a situação mudou de fato, a partir do século XVIII, quando foi introduzida uma interpretação geométrica dos números positivos e negativos como sendo segmentos de direções opostas.

Leonhard Paul Euler (1707-1783), um virtuoso do cálculo, sem levantar questões quanto à legitimidade das suas construções, forneceu uma explicação ou justificação para a regra dos sinais. Consideremos os seus argumentos:

- A multiplicação de uma dívida por um número positivo não oferece dificuldade, pois 3 dívidas de a escudos é uma dívida de $3a$ escudos, logo $(b)\cdot(-a)=-ab$;

- Por comutatividade, Euler deduziu que $(-a)\cdot(b)=-ab$. Desses dois argumentos conclui que o produto de uma quantidade positiva por uma quantidade negativa e vice-versa é uma quantidade negativa;
- Resta determinar qual o produto de $(-a)$ por $(-b)$. É evidente, diz Euler, que o valor absoluto é ab. É, então, necessário decidir-se entre ab ou $-ab$. Mas como $(-a)\cdot(b)=-ab$ só resta como única possibilidade que $(-a)\cdot(-b)=+ab$.

É claro que esse tipo de argumentação vem constatar que qualquer "espírito" mais zeloso não pode ficar satisfeito, pois principalmente o terceiro argumento de Euler (final do último parágrafo) não consegue provar ou mesmo justificar coerentemente que - por - = +. Nota-se que esse tipo de argumentação denota que Euler não tinha ainda conhecimentos suficientes para justificar esses resultados de modo aceitável. Na mesma obra de Euler, pode-se verificar que ele entende os números negativos como sendo apenas uma quantidade que se pode representar por uma letra precedida do sinal - (menos). Euler não compreende ainda que os números negativos sejam quantidades menores que zero.

A criação dos termômetros contribuiu fortemente para a compreensão do número negativo como valor menor que zero. Gabriel Fahrenheit (1686 – 1736), no século XVIII, criou o primeiro termômetro e tomou como origem de sua escala não o ponto de fusão do gelo como fez Réaumur (1683 – 1757) e Celsius (1701 – 1744) que vieram após ele, mas escolheu a temperatura mais baixa que conhecera: o frio do inverno de 1709. Como segundo ponto fixo tomou a temperatura do corpo humano, dividindo o intervalo correspondente em 100 graus.

Seu termômetro foi o primeiro a conter mercúrio como corpo termométrico. Esse mercúrio, anos após seria a causa de grande curiosidade. Um frio na região fez o mercúrio encolher-se na esfera do vidro, descendo abaixo do marco zero da escala, abaixo do começo dela. Fahrenheit foi obrigado a reconhecer a continuação da existência de temperaturas, e defendeu-se criando novas temperaturas: graus de calor e graus de frio.

Segundo Colin Maclaurin (1698 – 1746), o uso do sinal negativo, em álgebra, dá origem a numerosas consequências difíceis de admitir, em princípio, e que propiciam ideias aparentemente sem qualquer fundamento real. Maclaurin enuncia a regra dos sinais, dizendo:

> Poder-se-ia deduzir daí a regra dos sinais tal como se costuma enunciá-la, ou seja, que os sinais iguais nos termos do multiplicador e do multiplicando dão + no produto, e os sinais diferentes dão -. Evitamos esta maneira de apresentar a regra, para poupar aos iniciantes a revoltante expressão – por – dá +, que, todavia, é uma consequência necessária da regra. Pode-se, como fizemos, disfarçá-la, mas não

> anulá-la, nem contradizê-la; o leitor, sem perceber , observou todo o seu sentido nos exemplos precedentes. Familiarizado com a coisa, como iria perturbar-se com as palavras? Se ainda conserva alguma dúvida, que preste atenção à seguinte demonstração, que ataca diretamente a dificuldade: + a – a = 0, assim, multiplicando + a – a por qualquer quantidade, o produto deve ser 0; se multiplico por n, terei como primeiro termo +n.a , portanto o segundo será – n.a , pois é preciso que os dois termos se destruam. Logo sinais diferentes dão – no produto. Se multiplico + a – a por – n, de acordo com o caso precedente, obterei – n.a como primeiro termos; logo terei + n.a como segundo, pois é sempre necessário que os dois termos se destruam. Logo – multiplicado por – dá + no produto. (MACLAURIN *apud* GLAESER, 1969, p. 60 e 61).

Parece que as compreensões dos números negativos desafiaram às mentes matemáticas mais privilegiadas. Além de Euler, D`Alembert (1717 – 1783) também demonstra essa incompreensão como pode-se perceber no seu texto “Negativo”, publicado na enciclopédia Francesa:

> As quantidades negativas são o contrário das positivas: onde termina o positivo, começa o negativo”. Dizer que as quantidades negativas estão abaixo do nada é afirmar uma coisa que não se pode conceber. Os que pretendem que 1 não é comparável a –1 e que a relação (razão) entre 1 e –1 incidem num duplo erro: 1º- porque, todos os dias, nas operações algébricas, dividimos 1 por –1; 2º - a igualdade do produto –1 por –1, e de +1 por +1 revela que 1 está para –1, assim como –1 está para 1.
>
> Considerando a exatidão e a simplicidade das operações algébricas com quantidades negativas, somos levados a crer que a ideia precisa que se deve fazer das quantidades negativas é uma ideia simples, não dedutível, absolutamente, de uma metafísica presumida. Para tentar descobrir a verdadeira noção, deve-se primeiro, notar que as quantidades a que chamamos negativas e que falsamente consideramos como abaixo de zero, são comumente representadas por quantidades reais, como na geometria, onde as linhas negativas só diferem das positivas por sua situação em relação a qualquer linha no ponto comum. Daí é natural concluir que as quantidades negativas encontradas no cálculo são, de fato, quantidades reais, mas quantidades reais a que se deve associar uma ideia diferente daquela que fazíamos. Imaginemos, por exemplo, que estamos procurando o valor de um número x, que somado a 100 perfaça 50. Pelas regras de álgebra, teremos x + 100 = 50 e x = - 50. Isto mostra que a quantidade x é igual a 50 e que, em vez de ser acrescida a 100, ela deve ser retirada.
>
> Enunciaríamos, portanto, o problema desta maneira: encontrar uma quantidade x que, retirada de 100, deixe como resto 50: enunciado assim o problema, teremos 100 – x = 50, e x = 50, e a forma negativa de x não subsistiria mais. Assim, as quantidades negativas, no cálculo, indicam realmente quantidades positivas que supusemos numa falsa posição. O sinal – que encontramos antes de uma quantidade serve para retificar e corrigir um erro que cometemos na hipótese, como o exemplo acima demonstra claramente. Note-se que estamos falando de quantidades negativas isoladas, como – a, outras quantidades a – b, em que b é maior que a; pois, para aquelas em que a – b é positivo, isto é, em que b é menor que a, o sinal não acarreta qualquer dificuldade. Realmente, pois, não existe absolutamente quantidade negativa isolada. –3 tomado abstratamente, não apresentam qualquer ideia ao espírito; mas se digo que um homem deu a outro –3 escudos, isto quer dizer, em linguagem inteligível, que ele lhe tirou 3 escudos.
>
> Eis porque o produto de –a por –b dá + ab; pois o fato de que a e b estejam precedidos, por suposição, do sinal -, é uma indicação de que as quantidades a e b estão misturadas e combinadas com outras às quais nós as comparamos, pois se elas fossem consideradas como sozinhas e isoladas, os sinais – de que fossem precedidas

> nada apresentariam de claro ao espírito. Portanto, essas quantidades – a e – b, só estão precedidas pelo sinal porque há algum erro tácito na hipótese do problema ou da operação; se o problema fosse bem enunciado, essas quantidades a e b deveriam estar com o sinal + e então seu produto seria + ab, o que significa a multiplicação de –a por –b, onde retiramos b vezes a, quantidade negativa – Ora, pela ideia que demos acima das quantidades negativas, acrescentar ou impor uma quantidade negativa e retirar uma positiva; portanto, pela mesma razão, retirar uma negativa é acrescentar uma positiva; e o enunciado simples e natural do problema deve ser, não de multiplicar –a por –b e, sim, +a por +b, o que dá o produto + ab.
> Não é possível desenvolver suficientemente esta ideia em uma obra da natureza desta, mas ela é tão simples, que eu duvido que se possa substituí-la por outra mais clara e mais exata; e creio poder assegurar que, se a aplicarmos a todos os problemas que tivermos de resolver onde apareçam quantidades negativas, jamais lhe atribuiremos falhas. De qualquer modo, as regras das operações algébricas sobre as quantidades negativas são admitidas por todo mundo; e geralmente recebidas como exatas quaisquer ideias que, aliás, possamos atribuir a tais quantidades sobre as ordenadas negativas de uma curva e sua situação em relação às ordenadas positivas. (D`ALEMBERT *apud* GLAESER, 1969, p. 73, 74, 75 e 76).

O leitor mais assíduo de D`Alembert foi Lazare Carnot (1753 – 1823), considerado no seu tempo um dos maiores matemáticos franceses o que se observa nos fragmentos de sua obra a seguir:

> Para obter realmente uma quantidade negativa isolada, seria preciso retirar uma quantidade efetiva do zero, privar o nada de alguma coisa: operação impossível. Como, portanto, conceber uma quantidade negativa isolada? (...) As noções até agora conhecida das quantidades negativas isoladas se reduzem a duas: aquela de que acabamos de falar, saber que são quantidades menores que zero; e aquela que consiste em dizer que as quantidades negativas têm a mesma natureza que as quantidades positivas, mas tomadas em sentido contrário. D`Alembert destrói ambas as noções, inicialmente ele refuta a primeira com um argumento que me parece irreplicável.
> Seja, diz ele, esta proporção + 1: - 1 = - 1: 1; se a noção combatida fosse exata, isto é, se –1 fosse menor que zero, com mais razão ele seria menor que 1; assim , o segundo termo desta proporção deveria ser menor que –1; e assim –1 seria ao mesmo tempo menor e maior que 1, o que é contraditório. É necessário, diz ele, demonstrar essa posição (quantidades negativas em sentido contrário das positivas), na medida em que ela nem sempre acontece. (CARNOT *apud* GLAESER,1969, p.79).

Em algumas de suas conferências pedagógicas, Pierre de Laplace (1749 – 1827), outro “gênio da matemática”, manifestou o mesmo embaraço que seus antecessores, dizendo que a teoria dos números relativos não era considerada matéria fácil:

> A regra dos sinais apresenta algumas dificuldades: custa conceber que o produto de –a por –b seja o mesmo que a por b. Para tornar sensível esta ideia, observaremos que o produto de – a por +b é –ab (porque o produto nada mais é que –a repetido tantas vezes quantas são as unidades existentes em b). Observaremos, a seguir, que o produto de –a por b-b é nulo, pois o multiplicador é nulo; assim já que o produto de –a por +b é –ab, o produto de –a por –b deve ser de sinal contrário ou igual a +ab para destruí-lo. (LAPLACE *apud* GLAESER, 1969, p. 94).

Após a publicação dessa obra de Laplace, apareceu um comentário de um professor de uma Escola Politécnica, dizendo: “Toda demonstração de regras sobre as quantidades negativas isoladas só pode ser uma ilusão, pois não faz nenhum sentido aplicável a operações aritméticas efetuadas com coisas que não são números e não tem existência real”.

Em 1821, Augustin Cauchy (1789 – 1857) publicou seu curso destinado a Escola Politécnica Francesa. No início, ele fez uma nítida distinção entre os números (reais positivos) e quantidades (números relativos), onde expõe que do mesmo modo que se vê a ideia de número nascer da medida de grandezas, adquire-se a ideia de quantidade (positiva ou negativa), se considerar cada grandeza de uma espécie dada capaz de servir para o crescimento ou diminuição de outra grandeza fixa da mesma espécie. Para isso, indicam-se as grandezas que servem para aumentar por números precedidos do sinal +, e as grandezas que servem de diminuição por números precedidos do sinal -.

Assim, os sinais + ou – colocados antes dos números podem-se comparar, segundo a observação feita, a adjetivos colocados junto a seus substantivos. Designam-se os números precedidos do sinal + pelo nome de quantidades positivas, e os números precedidos do sinal -, pelo nome de quantidades negativas.

Aparece, dessa forma, uma confusão entre os sinais (+ ou -) operatórios e predicativos, onde os primeiros designam uma ação (aumentar ou diminuir) e os segundos qualificam um estado (positivo e negativo).

Cauchy passa a recorrer a uma metáfora (positivo = aumento; negativo = diminuir) que apresenta a multiplicação de um modo formal e passa a operar com símbolos (formados por um sinal e um valor absoluto). Esse matemático francês demonstra a composição de sinais apenas para sinais predicativos e depois a aplica aos sinais operatórios, sem chamar atenção para esse abuso:

> Com base nessas convenções, se representamos por A, seja um número, seja uma quantidade qualquer, e se fazemos: $a = +A$, $b = -A$, teremos $+a = +A$, $+b = -A$, $-a = -A$, $-b = +a$. Se, nas quatro últimas equações, atribuirmos a e b seus valores entre parênteses, obtemos as fórmulas:
>
> $$+(+A) = +A, \qquad +(-A) = -A$$
> $$-(+A) = -A, \qquad -(-A) = +A$$
>
> Em cada uma destas fórmulas, o sinal do segundo membro é o que chamamos de produto dos sinais do primeiro. Multiplicar dois sinais é formar seu produto. Daí, surge a regra dos sinais enunciada do seguinte modo: o produto de dois sinais iguais é sempre positivo e o produto de dois sinais opostos é negativo. (CAUCHY *apud* GLAESER, 1969, p. 100).

Finalmente, às vésperas do século XX, o alemão Herman Hankel (1839 – 1873) publica “Teoria dos sistemas complexos”, tendo o propósito de definir a teoria dos números complexos um conceito matemático muito mais recente que o de números negativos – consegue em suas demonstrações desvendar por completo algumas dúvidas relacionadas com os números relativos.

Hankel afirmava que os números não são descobertos e sim inventados, imaginados. Sob essa linha de raciocínio ele abandonou o ponto de vista "concreto" baseado em exemplos práticos passando a adotar uma perspectiva totalmente diversa e mais "formal". O matemático propõe estender a multiplicação de $\mathbf{N}_{+}$ a **Z** respeitando um princípio de permanência. A existência e a unicidade dessa extensão resultam do seguinte teorema: a única multiplicação em **N**, que estende a multiplicação usual em **Z** respeitando a distributividade (à esquerda e à direita), está de acordo com a regra dos sinais.

A demonstração é trivial:

0 = a . 0 = a . (b + oposto de b) = ab + a . (oposto de b)

0 = 0 . (oposto de b) = (a + oposto de a) . (oposto de b) = a . (oposto de b) + (oposto de a) . (oposto de b), logo:

ab + a . (oposto de b) = a . (oposto de b) + (oposto de a) . (oposto de b)

Portanto (oposto de a) . (oposto de b) = ab.

Assim, ao recusar a busca de um bom modelo que justificasse a adição e a multiplicação dos números relativos, Herman Hankel, consegue ultrapassar a barreira de todos os obstáculos dos números relativos.

Apesar de todo o estudo voltado para os números relativos, a sua legitimação poderia ter ocorrido antes, para isso, bastaria que se dispusesse de um bom modelo familiar à época de modo que fosse possível ilustrar todas as principais propriedades do sistema numérico.

Segundo Glaeser (1969), um modelo eficaz deveria satisfazer às seguintes condições:

1 – Explicar simultaneamente a adição e a multiplicação dos números relativos, bem como as interações dessas operações.

2 – Basear-se em operações internas.

3 – Ser suficientemente familiar aos que ainda ignoravam os números relativos.

Observa-se, por exemplo, que o modelo comercial dos ganhos e dívidas é um obstáculo à compreensão das propriedades multiplicativas. Se considerarmos os números negativos como dívidas, tem-se que o produto de duas dívidas daria um lucro. A citação de D'Alembert que revela ser "difícil conceber que o produto de dois números negativos é um número positivo”, demonstra as dificuldades de alguns matemáticos sobre a compreensão do produto dos números negativos. A demonstração formal sobre a regra dos sinais desenvolvida por alguns matemáticos é que permitiu o avanço dos números relativos.

2.3. Obstáculos Vinculados aos Números Relativos

Em 1938, Gaston Bachelard (1884–1962) publica uma de suas obras mais importantes, “A Formação do Espírito Científico”, na qual aborda os mais diversos “obstáculos epistemológicos” que devem ser superados para que se estabeleça e se desenvolva uma mentalidade verdadeiramente científica.

Segundo Bachelard (1970, p. 6), o progresso do conhecimento científico se dá no momento em que esse supera obstáculos para romper o seu estado inercial:

> ... é no próprio ato de conhecer, intimamente, que aparecem por uma espécie de necessidade funcional, lentidões e perturbações. É aí que mostraremos as causas da estagnação e mesmo do regresso; é aí que nós revelaremos as causas da inércia, que nós chamamos de obstáculos epistemológicos.

A noção de obstáculo epistemológico desenvolvida por Bachelard é essencial para o entendimento do processo dinâmico de construção do conhecimento científico. O filósofo francês usou o termo “obstáculos epistemológicos” para referir-se a tudo aquilo que impede, impossibilita o progresso da ciência. Daí a importância em romper os obstáculos epistemológicos dos números relativos e alcançar o progresso do conhecimento científico.

Como exposto, a construção dos números relativos foi um processo lento, que durou mais de 1500 anos – desde Diofanto até Hankel. O professor e historiador Georges Glaeser, da Universidade de Estrasburgo, estudou a construção do conhecimento dos números relativos. O método científico empregado pelo pesquisador foi coletar dados de artigos ou livros já publicados e analisar essas informações para chegar a conclusões acerca dos desafios que se opõem à compreensão completa do problema. Dessa forma, Glaeser deixa claro quais foram os obstáculos que fizeram com que os matemáticos trabalhassem com esse assunto.

Tendo como base de estudo a tentativa de identificar os principais obstáculos para o entendimento completo dos números relativos e os sintomas de negação usados pelos matemáticos para contornar suas inseguranças, o professor Georges Glaeser listou os seis principais obstáculos:

1 – Inaptidão para manipular quantidades isoladas

Esse obstáculo demonstra a rejeição à quantidade negativa. Diofanto de Alexandria é um exemplo, pois no livro I da sua "Aritmética" não faz qualquer referência aos números negativos isolados. Ele simplesmente enuncia que: "O que está em falta multiplicado pelo que está em falta dá o que é positivo; enquanto que o que está em falta multiplicado pelo que é positivo, dá o que está em falta".

2 – Dificuldade em dar um sentido a quantidades negativas isoladas

Apesar de muitos matemáticos do passado utilizarem os números negativos em seus cálculos como elementos intermediários destes, demoraram muito para que as quantidades negativas adquirissem o *status* de números.

Um exemplo é o matemático Stevin, que ao longo de sua obra, trabalha com os números negativos como artifícios de cálculo. O matemático escreve: "Em vez de dizer diminua 3, diga acrescente –3."

3 – Dificuldade em unificar a reta numérica

Segundo Glaeser (1969), esse obstáculo se manifesta quando se insiste nas diferenças qualitativas entre as quantidades negativas e os números positivos, ou quando se descreve a reta como uma justaposição de duas semi-retas opostas com sinais heterogêneos, ou quando não se consideram simultaneamente as características dinâmicas e estáticas dos números. Até o século XVII, o homem comum teve poucas oportunidades de utilizar os números negativos na sua vida cotidiana. Os comerciantes, por exemplo, faziam suas contas onde prevalecia o sistema de créditos e débitos.

Esse obstáculo aparece claramente nos trabalhos de Colin Maclaurin, que em sua obra "Tratado de Álgebra" (1748) apresenta as quantidades negativas escrevendo:

> Chamam-se quantidades positivas, ou afirmativas, as que são precedidas do sinal +, e negativas, as que são precedidas do sinal -. Para se ter uma ideia clara e exata desses dois tipos de quantidades, deve-se notar que toda quantidade pode entrar num cálculo algébrico, acrescentada, ou subtraída, ou seja, como aumento, ou como diminuição; ora a oposição que se observa entre aumento e diminuição ocorre na comparação das quantidades. Por exemplo: entre o valor do dinheiro devido a um homem, e o do dinheiro que ele deve; entre uma linha traçada à direita, e uma linha

> traçada à esquerda; entre a elevação sobre o horizonte e o posicionamento abaixo dele. Assim, a quantidade negativa, longe de ser rigorosamente menor que nada, não é menos real na sua espécie do que a positiva, mas é tomada num sentido oposto; segue-se daí que uma quantidade considerada isoladamente não poderia ser negativa, pois ela só o será por comparação; e que, quando a quantidade que chamamos positiva não tem outra que lhe seja oposta, não se poderia dela subtrair outra maior. "Por exemplo: seria absurdo querer subtrair uma quantidade maior de matéria, de outra menor. (MACLAURIN *apud* GLAESER, 1969, p.60).

4 – A ambiguidade dos dois zeros

Durante séculos, os matemáticos interpretaram o zero como zero absoluto, isto é, abaixo do qual nada se poderia conceber. Com isso, os números negativos eram considerados "absurdos". Como exemplo dessa negação dos números negativos pode-se citar a escala Kelvin de temperatura que adota como ponto de partida (0º K) o zero absoluto.

Contrapondo essa ideia, pode-se imaginar o zero como origem, que é apenas um referencial sobre um eixo orientado.

5 – Estagnações no estágio das operações concretas (em confronto com o estágio das operações formais)

Glaeser define esse obstáculo como a dificuldade de afastar-se de um sentido "concreto" atribuído aos seres numéricos. Ou seja, de querer sempre justificar as operações matemáticas com experiências do mundo real.

6 – Desejos de um modelo unificador

Esse obstáculo indica a intenção de fazer funcionar um "bom" modelo aditivo, igualmente válido para ilustrar o campo multiplicativo, em que esse modelo é inoperante. Como exemplo, podemos citar a frase de Stendhal (1783 – 1843):

> Multiplicando-se 10000 francos de dívida por 500 francos de dívida, como esse homem possuirá, ou conseguirá obter, uma fortuna de 5000000 de francos?" (STENDHAL *apud* GLAESER, p. 46)

Apesar da genialidade incontestável de cada um desses pesquisadores já citados, todos com exceção de Hankel, não conseguiram atingir seus objetivos. Por exemplo, pode-se observar o caso de Maclaurin, que não conseguiu ultrapassar os obstáculos três e quatro, que são, respectivamente, a dificuldade em unificar a reta numérica e a ambiguidade dos dois zeros.

2.4. Axiomas dos Números Inteiros

Vamos apresentar nesta seção a estrutura algébrica do conjunto **Z** dos números inteiros, seguindo a forma de trabalho de Hzenkel. Apresentaremos um conjunto de axiomas que caracterizam o conjunto dos números inteiros **Z**. Esses axiomas serão divididos em três grupos:

- Axiomas de Anel;
- Axiomas de Ordem;
- Axioma da Boa Ordem.

2.4.1. Adição e Multiplicação dos Números Inteiros

Nesta seção, desenvolvemos os aspectos algébricos teóricos que embasam os inteiros e suas propriedades. Primeiramente, discutiremos as suas duas operações habituais: a adição e a multiplicação. Em seguida, a ordem definida no conjunto **Z**, quer dizer: a relação de ordem "menor" e finalmente o axioma da boa ordem nos inteiros positivos. Admitiremos que em **Z** estão definidas duas operações, a adição (denotada por +) e a multiplicação (denotada por **.**):

$$\begin{aligned} + : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} &\rightarrow \mathbf{Z} \\ (a,b) &\mapsto a+b \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} &\rightarrow \mathbf{Z} \\ (a,b) &\mapsto a \cdot b \end{aligned}$$

Sendo que a primeira (+) associa cada par ordenado de inteiros (x; y) a um único inteiro x + y, chamado soma de x e y, e a segunda (**.**) associa cada par de inteiros (x; y) a um único inteiro x ˙ y (denotado também por xy, quando isso não gerar ambiguidade), chamado produto de x e y.

Assumiremos também que as operações adição e multiplicação em **Z** têm as seguintes propriedades de um anel comutativo com unidade:

Para cada x, cada y, e cada z, todos em **Z**, tem-se:

(A1) x + (y + z) = (x + y) + z (isto é, a adição em **Z** é associativa);

(A2) x + y = y + x (a adição em **Z** é comutativa);

(A3) x + 0 = 0 + x = x (isto é, 0 é elemento neutro da adição em **Z**);

(A4) Existe um elemento -x em **Z**, chamado oposto de x ou inverso aditivo de x, ou ainda simétrico de x relativamente à operação adição, satisfazendo $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

(M1) $x.(y.z) = (x.y).z$ (a multiplicação em **Z** é associativa);

(M2) $x.y = y.x$ (a multiplicação em **Z** é comutativa);

(M3) $x.1 = 1.x = x$ (1 é elemento neutro da multiplicação em **Z**);

(D) $x. (y + z) = x.y + x.z$ (a multiplicação é distributiva em relação à adição).

2.4.1.1. Subtração em Z

A subtração em **Z** é definida por $x-y = x + (-y)$. A subtração em **Z** é a operação

$$-: \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$$

que associa cada par ordenado (x; y) a diferença x - y.

Segue da definição que para cada x, cada y e cada z, todos em **Z**, valem as propriedades abaixo:

1. $x + y = x \rightarrow y = 0$ (disto decorre que 0 é o único elemento neutro da adição em **Z**)

2. $x + y = 0 \rightarrow y = -x$ (disto decorre que o oposto de um inteiro x é único);

3. $x + y = x + z \rightarrow y = z$ (lei do cancelamento da adição);

4. $-(-x) = x$;

5. $-(x + y) = -x -y$ (atenção: $-x -y$ significa $(-x) - y$, ou seja, $(-x) + (-y)$);

6. $x.0 = 0$;

7. $(-x).y = -x.y$;

8. $(-x).(-y) = x.y$;

9. $(x - y).z = x.z – y.z$.

De fato, têm-se aqui as demonstrações das propriedades apresentadas:

1. $x + y = x \rightarrow (-x) + (x + y) = (-x) + x$. Pelos axiomas (A1), (A3) e (A4), tem-se, consequentemente, que

$$((-x) + x) + y = 0 \rightarrow 0 + y = 0 \rightarrow y = 0$$

2. Se $x + y = 0$ então $(-x) + (x + y) = (-x) + 0$. Pelos axiomas (A1), (A3) e (A4), tem-se, consequentemente, que

$$((-x) + x) + y = -x \rightarrow 0 + y = -x \rightarrow y = -x$$

3. Se $x + y = x + z$, então $(-x) + (x + y) = (-x) + (x + z)$. Pelo axioma (A1), tem-se que

$$((-x) + x) + y = ((-x) + x) + z \rightarrow 0 + y = 0 + z; \text{ então, pelo axioma (A3), } y = z.$$

4. Pelo axioma (A4) $-(-x) + (-x) = 0$. Logo, $[-(-x) + (-x)] + x = 0 + x$. Aplicando, então, os axiomas (A1) e (A3), deduz-se que:

$$-(-x) + [(-x) + x] = x \rightarrow -(-x) + 0 = x \rightarrow -(-x) = x$$

5. $-(x + y) = -x-y$. Basta provar que $(x+y) + (-x-y) = 0$. Mas o primeiro membro desta igualdade é igual a $(x+(-x))+ (y + (-y)) = 0$ pelas propriedades comutativa, associativa e existência do oposto.

6. Seja $a = x.0$. Então, pelos axiomas (A3) e (D), $a = x \,.\, 0 = x \,.\, (0 + 0) = x.0 + x.0 = a + a$. Logo, $a + a = a + 0$, e então, pelo item 3 provado acima, $a = 0$, ou seja, $x.0 = 0$.

7. Por um lado, tem-se que $[(-x) + x]y = (-x)y + xy$. Por outro, $[(-x) + x]y = 0.y = 0$. Logo, aplicando o resultado do item 2 demonstrado acima, tem-se que

$$(-x)y + xy = 0 \rightarrow -(xy) = (-x)y.$$

8. $(-x).(-y) = x.y$, pelo item 7 já demonstrado: $-(x.(-y)) = (-x).(-y)$. Novamente pelo mesmo item: $-(-(x.y)) = (-x).(-y)$. E, finalmente, pelo item quatro: $x.y = (-x).(-y)$.

9. $[x + (-y)].z = x.z - y.z$. Utilizando-se de (D) tem-se que: $[x + (-y)].z = x.z +(- y).z$. Fazendo-se uso do item 7, o segundo membro desta última igualdade é: $x.z - (y.z)$., de onde segue o resultado.

<u>Observação</u>: Os axiomas listados ainda não são suficientes para caracterizar o conjunto **Z**. Em outras palavras, existem outras estruturas algébricas familiares que também satisfazem as propriedades acima (**Q** por exemplo).

Existem também outras estruturas algébricas "não usuais" satisfazendo os axiomas (A1), (A2), (A3), (A4), (M1), (M2), (M3) e (D).

Por exemplo, o conjunto $\mathbf{Z_2} = \{0; 1\}$, no qual definiremos uma adição e uma multiplicação conforme as tabelas abaixo (Aqui, os números 0 e 1 não são aqueles do conjunto **Z** dos números inteiros.)

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Assim, as operações + e **.** , definidas em $\mathbf{Z}_2$ conforme suas tábuas dadas acima, satisfazem os axiomas (A1), (A2), (A3), (A4), (M1), (M2), (M3) e (D). Note que essa estrutura tem apenas dois elementos.

Em relação à ordem dos números inteiros, temos uma excelente intuição baseada nos números naturais. Obviamente que 3 é menor do que 4, que ambos são menores que 5, e assim por diante; porém, vamos formalizar o tratamento referente a relação de ordem "menor".

2.4.1.2. Relação em um Conjunto

Sendo A um conjunto não vazio, diz-se que R é uma relação em A, se R é um subconjunto do produto cartesiano A x A.

Se S é uma relação em A, e se o par (a; b) faz parte dessa relação, escreve-se (a; b) $\in$ S ou aSb, e diz-se que a está relacionado com b pela relação S. Se (x; y) $\notin$ S, também escreve-se $x \not S y$.

Admitiremos que em **Z** está definida uma relação <, chamada relação menor. Se (x; y) $\in$ <, escreve-se x < y (ou y > x) e diz-se que x é menor que y (ou, respectivamente, que y é maior que x). A relação < em **Z** satisfaz os seguintes axiomas:

Para cada x, cada y e cada z, todos em **Z**,

(O1) Lei da tricotomia. Vale uma e somente uma das afirmações: x < y; x = y; y < x;

(O2) Se x < y e y < z; então x < z (a relação < em **Z** é transitiva);

(O3) Se x < y; então x + z < y + z (a relação < em **Z** é compatível com a adição);

(O4) Se x > 0 e y > 0; então xy > 0 (a relação < em **Z** é compatível com a multiplicação).

Observação: Escreve-se a ≤ b quando a < b ou a = b. Analogamente, escreve-se a ≥ b se a > b ou a = b. Assim, por exemplo, 2 ≤ 4, bem como 3 ≤ 3.

Segue dos axiomas já apresentados algumas propriedades da relação <, a saber, para cada x, cada y, cada z e cada w, todos em Z,

1. x < y se e somente se x - y < 0;

2. x < 0 se e somente se -x > 0;

3. (Lei do Cancelamento para a adição) Se $x + z < y + z$, então $x < y$;

4. Se $x < y$ e $z < w$, então $x + z < y + w$;

5. (Regras de Sinais)

(a) Se $x < 0$ e $y > 0$, então $xy < 0$;

(b) Se $x < 0$ e $y < 0$, então $xy > 0$;

6. Se $x \neq 0$, então $x^2 = xx > 0$;

7. $1 > 0$;

8. (a) Se $x < y$ e $z > 0$ então $xz < yz$;

(b) Se $x < y$ e $z < 0$, então $xz > yz$;

9. Se $x > y > 0$ e $z > w > 0$, então $xz > yw > 0$;

10. (Leis do Cancelamento para a multiplicação)

(a) Se $xz < yz$ e $z > 0$, então $x < y$;

(b) Se $xz < yz$ e $z < 0$, então $x > y$.

A seguir, têm-se as demonstrações das propriedades apresentadas:

1. Se $x < y$, então pelo axioma (O3), $x + (-y) < y + (-y)$, e, portanto $x - y < 0$; reciprocamente se $x - y < 0$ então, por (O3), $x + -y + y < 0 + y$ e portanto $x < y$.

2. Pelo axioma (O3), se $x < 0$, então $x + (-x) < 0 + (-x)$. Assim, $x - x < -x$. Então, $0 < -x$, ou melhor, $-x > 0$; a recíproca é análoga.

3. Pelo axioma (O3), $x + z + (-z) < y + z + (-z)$, dessa forma: $x + z – z < y + z – z$. E, então, $x + 0 = < y + 0$. Finalmente, $x < y$;

4. Se $x < y$, então pelo item um, $x + z < y + z$. Analogamente, $z < w \rightarrow y + z < y + w$. Logo, $x + z < y + z$ e $y + z < y + w$ e, então, pelo axioma (O2), $x + z < y + w$;

5. Se $x < 0$ e $y > 0$, então $-x > 0$ e $y > 0$. Pelo axioma (O4), tem-se $-(xy) = (-x)y > 0$, e, então, pelo item 2, $xy < 0$. Assim, pelo item 2, pode-se afirmar que: se $x < 0$ e $y < 0$, então $–x > 0$ e $–y > 0$. Agora, utilizando-se do axioma (O4): $(-x).(-y) > 0 \rightarrow -[(x).(-y)] > 0 \rightarrow [(x).(-y)] < 0$, essa última passagem pode ser verificada pelo axioma (A4) e pelo item 2. Novamente, $-(x.y) < 0$, ou seja, $x.y > 0$;

6. $x^2 = x.x$, como $x \neq 0$, há duas possibilidades:

$x < 0$: $x.x > 0$, pelo item 5 (b) ou

$x > 0$: $x.x > 0$, pelo axioma (O4).

Nas duas possibilidades temos que $x^2 > 0$;

7. Tem-se que $1 \neq 0$ e que $1^2 = 1.1 = 1$. Daí, pelo item 6, $1 > 0$;

8. Se $x < y$ e $z > 0$, então $x - y < 0$, pelo item 1. Aplicando a propriedade do item 5(a),

$x - y < 0$ e $z > 0 \rightarrow (x - y)z < 0$, de onde $xz - yz < 0$, e, então $xz < yz$;

Se $x < y \rightarrow (x - y) < 0$. Multiplicando a inequação por z, tem-se que $(x - y).z > 0$, pelo item 5 (b). Dessa forma, $x.z – y.z > 0 \rightarrow x.z > y.z$;

9. Se $x > y > 0$ e $z > w > 0 \rightarrow x,y,z,w > 0$ assim, o produto de dois números positivos é positivo, axioma (O4). Dessa forma, já se prova que $x.z > 0$ e $y.w > 0$. Falta ainda provar que $x.z > y.w$. Como $x > y \rightarrow (x - y) > 0$, multiplicando por z ter-se-á: $(x - y).z > 0$, axioma (O4). Efetuando-se a distributiva, $x.z –y.z > 0 \rightarrow x.z > y.z$, mas como $z > w$ é válido $y.z > y.w$ e, portanto, $x.z > y.z > y.w \rightarrow x.z > y.w$;

10. Ambos os itens são consequência direta do item 8. Se $xz < yz$ e $z > 0$, então necessariamente $x < y$, pois, caso contrário, ter-se-á $x > y$ ou $x = y$. Pelo item 8(a), como $z > 0$, tem-se que $xz > yz$ ou $xz = yz$, contrariando nosso dado inicial de que $xz < yz$. Portanto, $xz < yz$ e $z > 0 \rightarrow x < y$.

Dessa mesma forma, chega-se que, se $x.z < y.z$ e $z < 0$ então $x > y$. De fato, se ao contrário, $x<y$, pelo item 8(b), como $z < 0$, teríamos que $x.z > y.z$.

<u>Proposição</u>: Se x e y são inteiros, com $x \neq 0$ e $y \neq 0$, então $xy \neq 0$. Equivalentemente, $xy = 0 \rightarrow x = 0$ ou $y = 0$.

Demonstração: Se $x \neq 0$ e $y \neq 0$ então, pela lei da tricotomia (axioma (O1)), tem-se $x < 0$ ou $x > 0$, bem como também $y < 0$ ou $y > 0$. Daí, aplicando o axioma (O4) ou o item 5, ter-se-á $xy > 0$ ou $xy < 0$, portanto $xy \neq 0$.

O último axioma que **Z** deve satisfazer é o Princípio da Boa Ordem em **N** ou princípio do menor número natural. Este axioma acarretará o Princípio da Indução Finita:

$$A \subset N. \begin{cases} 1)\ 0 \in A \\ 2)\ n \in A \Rightarrow (n+1) \in A, \text{então } A = N \end{cases}$$

No entanto, mostra-se mais prático e formal lapidar algumas ideias a respeito dos números naturais, para então, em seguida, fazermos as devidas considerações acerca dos inteiros.

2.4.1.3. O Conjunto N dos Números Naturais

Chamaremos de números naturais aos elementos do conjunto **N** = $\{x \in \mathbf{Z} \ / \ x \geq 0\}$. Se x e y são números naturais, então, por resultados acima estabelecidos, x+y e xy, também são números naturais. O conjunto **N** é fechado com relação às operações de adição e multiplicação definidas em **Z**, isto é, somando-se ou multiplicando-se elementos de **N**, tem-se o resultado (soma ou produto) sempre em **N**.

Também são utilizadas as notações $\mathbf{Z}_+ = \mathbf{N}$ e $\mathbf{Z}_+^* = \mathbf{N}^* = \{x \in \mathbf{Z} \ / \ x > 0\}$. Os elementos de $\mathbf{N}^*$ são chamados inteiros positivos. Se n é um inteiro e n < 0, então n é chamado um inteiro negativo. O conjunto dos inteiros negativos será denotado por Z_-^* .

Pela lei da tricotomia, tem-se que **Z** decompõe-se como reunião de três partes disjuntas, a saber

$$\mathbf{Z} = Z_-^* \cup \{0\} \cup Z_+^*$$

Axioma da Boa Ordem em N ou Princípio do Menor Número Natural: cada subconjunto não vazio do conjunto **N** possui um menor (ou primeiro) elemento, ou seja, se A é um subconjunto do conjunto **N** e A ≠ Ø, então existe um elemento n_0 em A satisfazendo $n_0 \leq a$ para todo inteiro a do conjunto A.

As propriedades elementares das operações em **Z**, bem como as propriedades da relação <, axiomatizadas ou deduzidas até o presente momento, excetuando-se o Axioma da Boa Ordem em $\mathbf{Z}_+$, são igualmente válidas para os números racionais e para os números reais. Do ponto de vista axiomático, o axioma da boa ordem é o primeiro dos axiomas que é satisfeito pelos inteiros não negativos, mas não é satisfeito pelos racionais não negativos com sua ordem usual, visto que nem todo conjunto de números racionais não negativos possui um primeiro elemento. Admitamos, por um momento, familiaridade com o conjunto **Q** dos números racionais. O conjunto dos números racionais positivos da forma 1/n, com n inteiro positivo, não possui um menor elemento. Se n > 0, então n + 1 > n. No âmbito dos números racionais, é sabido que, então, 0 < 1/(n+1) < 1/n, o que demonstra ser impossível encontrar um primeiro (o menor) racional da forma 1/n, com n inteiro positivo.

Agora, estabeleceremos as primeiras consequências do Princípio do Menor Número Natural, através do seguinte teorema:

Teorema:

1. Não existe um inteiro n tal que $0 < n < 1$;

2. Para cada inteiro m, não existe um inteiro n tal que $m < n < m+ 1$;

3. Se m e n são inteiros com $m < n$ então $m + 1 \leq n$. Reciprocamente, se $m + 1 \leq n$ então $m < n$.

Demonstração:

1. Suponhamos que existe um inteiro n tal que $0 < n < 1$. Tal n é um número natural, e, portanto, o conjunto A de números naturais caracterizado por $A = \{x \in N \ / \ 0 < x < 1\}$ é um conjunto não vazio.

Pelo axioma da boa ordem, A tem um menor elemento n_0. Porém, $0 < n_0 < 1 \rightarrow 0.n_0 < n_0.n_0 < 1.n_0$; ou seja, $0 < n^2{}_0 < n_0$. Tem-se aí uma contradição, pois $0 < n^2{}_0 < 1 \rightarrow n^2{}_0 \in A$, porém n_0 é o menor elemento de A e $n^2{}_0 < n_0$.

2. Sejam m e n dois inteiros e suponhamos que $m < n < m+ 1$. Então, $m - m < n - m < (m + 1) - m$, ou seja, $0 < n - m < 1$, o que é impossível, segundo o item 1 acima.

3. Se $m < n \rightarrow m + 1 < n + 1$. Logo, como não existe nenhum inteiro entre n e n+1 (devido a 2 acima), o máximo valor que m + 1 pode assumir é n. Assim, $m + 1 \leq n$; partindo de $m + 1 \leq n \rightarrow m + 1 - 1 \leq n -1 \rightarrow m \leq n - 1$. Somando 1 a ambos os membros, $m +1 \leq n$.

Definição: Seja agora A um subconjunto não vazio de **Z**,

1. Dizemos que A é limitado inferiormente por um inteiro m se $a \geq m$, para todo a em A;

2. Dizemos que A é limitado superiormente por um inteiro M se $a \leq M$, para todo a em A.

Uma consequência imediata do princípio do menor número natural é a seguinte proposição:

Proposição: **1.** Se A é limitado inferiormente por $m \in$ **Z**, então A possui um primeiro (menor) elemento, isto é, existe a_0 em A tal que $a \geq a_0$ para cada a em A. Tal a_0 é chamado mínimo de A.

2. Se A é limitado superiormente por $M \in \mathbf{Z}$, então A possui um último (maior) elemento, isto é, existe b_0 em A tal que $a \leq b_0$ para cada a em A. (Tal b_0 é chamado máximo de A).

A seguir, têm-se as demonstrações da proposição apresentada:

1. Considere o conjunto a seguir:

$$A` = \{x \in \mathbf{Z} \,/\, x = a - m; \text{ com } a \in A\}$$

Para cada $a \in A$, tem-se a¸ m, logo $a - m \geq 0$, o que implica que cada elemento x de A` é um número natural. Como A` $\subset \mathbf{N}$ e A` $\neq \emptyset$ (pois $A \neq \emptyset$), pelo Axioma da Boa Ordem, existe $n_0 \in$ A` tal que $x \geq n_0$ para cada $x \in$ A`.

Sendo n_0 um elemento de A`, tem-se que $n_0 = a_0 - m$ para algum inteiro $a_0 \in A$. Logo, para cada $x \in$ A`, $x \geq a_0 - m$. Isso significa que para cada $a \in A$, $a - m \geq a_0 - m$, ou seja, $a \geq a_0$.

2. Considere o conjunto a seguir:

$$A`` = \{x \in \mathbf{Z} \,/\, x = -a; \text{ com } a \in A\}$$

Para cada $a \in A$, tem-se $a \leq M$ ou, equivalentemente, $-a \geq -M$. Logo, para cada $x \in$ A``, tem-se $x \geq M$. Pelo item um provado acima, A`` tem um primeiro elemento, ou seja, existe $c_0 \in$ A`` tal que x ¸ $c_0$ para cada $x \in$ A``. Pela caracterização dos elementos de A``, $c_0 = -b_0$ para algum $b_0 \in A$. Daí, $-a \geq -b_0$ para cada $a \in A$, ou seja, $a < b_0$ para cada $a \in A$.

CAPÍTULO 3: RELATO DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS

Neste capítulo serão apresentados, descritos, discutidos e analisados os resultados obtidos com os alunos do Ensino Fundamental – Ciclo II e suas participações com as atividades e os jogos propostos, objetivando melhorar a aprendizagem das operações matemáticas que envolvem os números inteiros.

O projeto foi realizado no primeiro semestre de 2009, de março a junho, totalizando doze encontros. Cada encontro, continha duas aulas de cinquenta minutos e foi aplicado nas unidades do "Colégio Objetivo de Descalvado" conforme Figuras 1e 2, onde a matriz (Unidade 1) situa-se na rua: XV de novembro, 1120 – Centro – Descalvado – SP.

Figura 1: Fachada do Colégio dos Alunos Participantes - Unidade 1

Figura 2: Fachada do Colégio dos Alunos Participantes - Unidade 2

O "Clube de Matemática" foi formado por quinze alunos do Ensino Fundamental - Ciclo II das 5ª e 6ª séries, sendo nove das quintas e seis das sextas, que frequentaram essas atividades das 15h às 16h40min, em período contrário às aulas habituais, todas as terças-feiras nas seguintes datas: 24 e 31 de março, 07, 14 e 28 de abril, 05, 12, 19 e 26 de maio, 02, 09 e 16 de junho.

Essas aulas laboratoriais práticas tiveram como objetivo ajudá-los a fixarem e entenderem as regras de sinais dos números inteiros de uma forma diferente das aulas convencionais. Além de cumprirem com esse propósito, as aulas práticas também ajudaram os alunos a adquirirem habilidades de raciocínios lógicos e mentais.

Sabe-se que os números relativos estão presentes intuitivamente no cotidiano de uma criança, por isso é importante formalizar seus conceitos, pois, dessa forma, os alunos poderão expandir suas habilidades matemáticas e aplicá-las de maneira significativa em suas vidas. Além disso, tal formalização os ajudará a criar uma base matemática e uma melhora significativa em seus rendimentos escolares.

O professor deve tomar muito cuidado em como apresentar aos seus alunos os números relativos, já que para pessoas familiarizadas com os números inteiros tais conceitos podem ser aparentemente fáceis, mas a ideia de número negativo, nunca fora até então formalmente exposta a eles. Exemplos não faltam: o termômetro que mede temperaturas abaixo de zero na escala Celsius ou um saldo devedor que é representado por valores negativos. Por isso, acredita-se que jogos e atividades que incitam os alunos a lidar com números relativos são muito interessantes, pois os ensinam e os fazem praticar de modo muito natural e divertido as operações com números negativos.

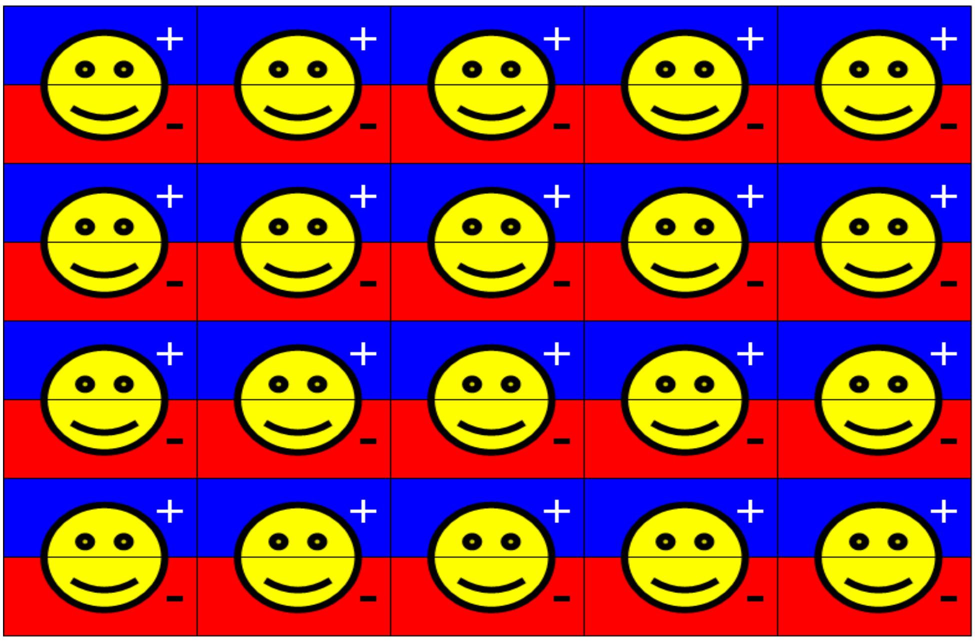
Portanto, a formalização dos conceitos dos números relativos deve vir acompanhada de aplicações, por meio de jogos ou atividades ou qualquer outra metodologia que possa ser inserida no cotidiano do aluno.

3.1. Descrição da Atividade e dos Três Jogos

3.1.1. Atividade das Fichas Positivas e Negativas

Nos primeiros encontros, realizou-se a atividade que consiste na manipulação das fichas positivas e negativas, efetuando operações básicas de adição, subtração e multiplicação, ou seja, operações fundamentais dos números inteiros.

Eis uma amostra de como as fichas podem ser feitas:



Notou-se que essa atividade ajudou-os a compreender exatamente os motivos do por que em uma adição formal de números positivos se deve efetuar uma soma de parcelas e em uma adição formal de um número positivo com um negativo se deve subtrair. Além disso, a atividade das fichas também os ajudou a compreender a multiplicação de dois números inteiros e esclareceu o porquê a multiplicação de dois números negativos resultará em um número positivo (regra de sinais). Assim, o método das fichas é muito interessante, pois torna palpável o cálculo que muitas vezes é mental.

Essa atividade das fichas é muito fácil de ser elaborada, usando apenas cartolina, lápis e régua. E o ganho em praticá-la é inegável. Após a apresentação da atividade e confecção das fichas, os alunos as colocaram em prática para exercitarem e assimilarem o seu processo de funcionamento. Em seguida, resolveram uma série de atividades que serão detalhadas a seguir. No final das seis aulas utilizadas, desde a apresentação até a prática com competência, os alunos se sentiram mais confiantes em resolver as operações do dia a dia de sala de aula, além da resolução de contas mais elaboradas com maior agilidade e acerto.

- **Descrição do Primeiro Encontro (24 de março de 2009)**

Na primeira aula desse encontro, criou-se o "Clube de Matemática" com os alunos participantes e foi exposto o que seria trabalhado e o objetivo das atividades pedagógicas propostas e dos encontros. Explicou-se também que alguns dos jogos iriam ser confeccionados por eles mesmos e outros seriam adquiridos no Centro de Divulgação Científica e Cultural (CDCC) da USP de São Carlos.

Já na segunda aula, foi finalmente iniciada a primeira série de atividades: as Fichas Positivas e Negativas, por serem de simples elaboração e servirem de introdução aos conceitos de números inteiros e suas operações.

✓ **Descrição da Atividade:**

O objetivo didático da atividade das Fichas Positivas e Negativas é desenvolver técnicas de cálculo de modo que o aluno possa visualizar o resultado de uma operação entre dois números inteiros. Essa atividade pode ser proposta tanto individualmente como em duplas.

✓ **Familiarização da Atividade:**

É interessante, pedagogicamente, que os alunos tenham contato com essa atividade no momento em que o professor explica as operações básicas entre dois números inteiros. Desse modo, o aluno treinará as habilidades com as operações que acabou de aprender, além de obter uma visão mais prática do tema. Como a atividade é de fácil elaboração, é interessante que eles mesmos confeccionem suas fichas, isso os ajuda a ter o primeiro contato com a atividade, por isso cada aluno fez suas próprias fichas.

✓ **Confecção da Atividade das Fichas Positivas e Negativas:**

- Cada aluno trouxe duas cartolinas, uma azul e outra rosa;
- Com uma régua e lápis foram desenhadas várias fichas, em formato retangular;
- Com uma tesoura, os alunos recortaram os retângulos;
- Nas fichas de cor azul, ficou padronizado que seriam as fichas positivas, ou seja, marcadas com o sinal de positivo (+);
- Nas fichas de cor rosa, ficou padronizado que seriam as fichas negativas, ou seja, marcadas com o sinal de negativa (-).

Dessa maneira, após o recorte das fichas, o jogo das Fichas Positivas e Negativas já estava pronto para ser utilizado.

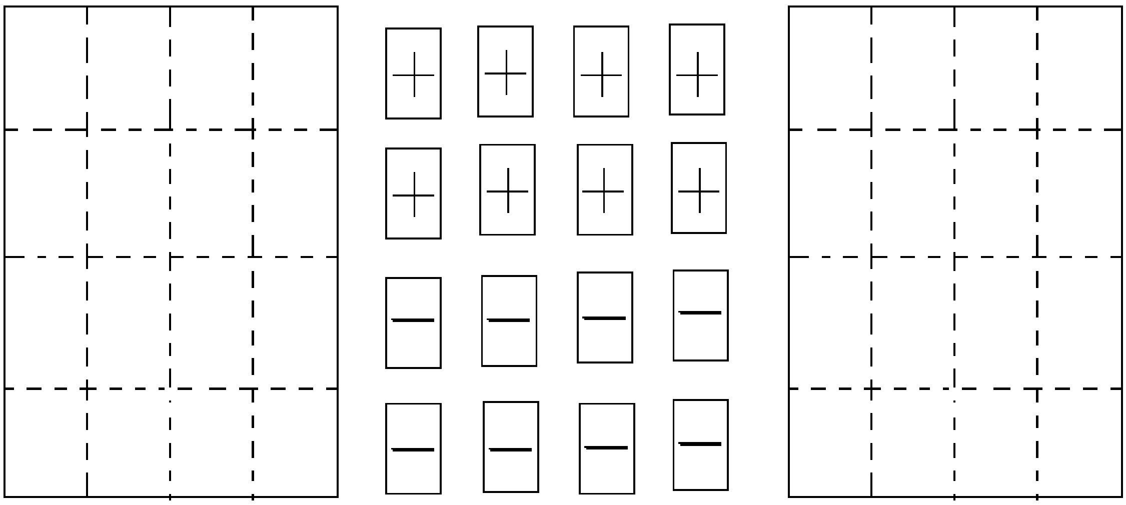


Figura 3: Confecção das Fichas Positivas e Negativas

Após a confecção das fichas, essas foram guardadas em armários dentro da escola para serem utilizadas no próximo encontro. Assim, finalizou-se o primeiro encontro com 100% de presença e excelente participação de todos.

Figura 4: O “Clube de Matemática” confeccionando as Fichas Positivas e Negativas

- **Descrição do Segundo Encontro (31 de março de 2009)**

Na primeira aula desse encontro, iniciou-se a atividade das fichas positivas e negativas com o objetivo de desenvolver a habilidade de cálculo e compreender os conceitos mediante aos números inteiros e suas operações básicas. O primeiro encontro foi retomado brevemente e, após isso, o mecanismo de funcionamento da atividade das fichas positivas e negativas foi explicado com exemplos.

✓ **Explicação dos Fundamentos das Fichas:**

- Uma ficha com um sinal positivo representa uma unidade (+1);
- Duas fichas com sinais positivos representam duas unidades (+2), três fichas com sinais positivos representam três unidades (+3), e assim por diante;
- Uma ficha com um sinal negativo representa o oposto da ficha com um sinal positivo e é chamada ficha negativa (-1);

- Duas fichas negativas são denotadas por (-2), três fichas negativas são denotadas por (-3), e assim por diante;
- Quando uma ficha **positiva encontra uma ficha negativa, ambas se anulam** e podem ser retiradas da mesa.
- Ou seja, cada par de fichas, contendo uma ficha positiva e uma ficha negativa representa um zero, pois uma ficha negativa elimina uma positiva. Por exemplo, abaixo se têm três fichas positivas e uma negativa; pode-se dizer que se tem um total de duas fichas positivas.

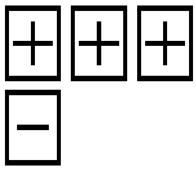


Figura 5: Três Fichas Positivas e Uma Negativa

- Um par formado por uma ficha positiva e uma ficha negativa é chamado de par-zero.

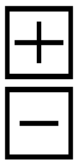


Figura 6: Par-zero

Em seguida, há exemplos de algumas operações para se compreender o exposto:

Adição: (acrescentam-se fichas)

- (+4) + (+3) = (+7). Com quatro fichas positivas, adicionam-se a elas mais três fichas positivas, resultando um total de sete fichas positivas.

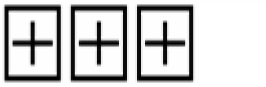


Figura 7: Adição (+4) + (+3) = (+7)

- (+4) + (-3) = (+1). Com quatro fichas positivas, adicionam-se a elas mais três fichas negativas. Como cada par, positivo-negativo, representa o zero, ou seja, um positivo anula um negativo, resta apenas uma ficha positiva e, portanto, o resultado é +1.

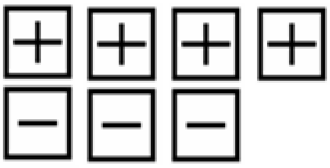


Figura 8: Adição (+4) + (-3) = (+1)

Subtração: (retiram-se fichas)

- (+5) – (+2) = +3. Com cinco fichas positivas, retiram-se duas fichas positivas, restando assim, três fichas positivas;
- (-6) – (-4) = -2. Com seis fichas negativas, retiram-se quatro fichas negativas, restando duas fichas negativas;
- (+4) – (-3) = +7. Para efetuarmos essa subtração, usaremos o recurso de "colocar zeros", ou seja, acrescentar fichas vermelhas e azuis na mesma quantidade.

Veja a situação:

Observe que temos, a priori, que retirar três fichas vermelhas, mas só temos quatro fichas azuis:

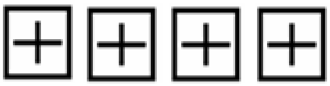


Figura 9: Quatro fichas azuis

Precisamos criar fichas vermelhas. Para isso, devemos criar "zeros", acrescentando fichas azuis e vermelhas na mesma quantidade. Logo, teremos a seguinte situação:

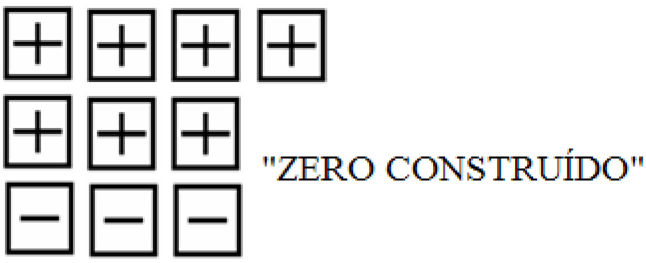


Figura 10: Subtração (+4) – (-3) = +7

Assim, retirando três fichas vermelhas, teremos sete fichas azuis (+7).

- (-5) – (+3) = -8. No grupo inicial de cinco fichas negativas, acrescentaremos fichas positivas e negativas na mesma quantidade.

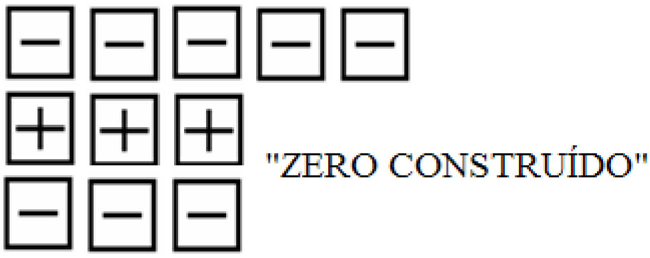


Figura 11: Subtração (-5) – (+3) = -8

Assim, retirando três fichas azuis, teremos oito fichas vermelhas (-8).

Multiplicação:

Para efetuar a multiplicação de dois fatores inteiros, deve-se inserir o seguinte raciocínio lógico: o primeiro fator significa quantas vezes se deve adicionar (se positivo) ou retirar (se negativo) grupos do tamanho e qualidade descrito pelo segundo fator. Exemplos:

- (+2) x (+3) = +6, adicionam-se duas vezes grupos três fichas positivas, ou seja, totalizam seis fichas positivas;
- (+2) x (-3) = -6, adicionam-se duas vezes grupos de três fichas negativas, ou seja, totalizam seis fichas negativas;
- (-3) x (+2) = -6, colocam-se seis pares-zeros, retirando-se, três vezes grupos de duas fichas positivas, restam apenas seis fichas negativas;
- (-2) x (-3) = +6 colocam-se seis pares-zeros, retirando-se duas vezes grupos de três fichas negativas, resultam seis fichas positivas.

Para que os alunos reconhecessem os mecanismos da atividade das fichas, eles mesmos propuseram operações com números inteiros semelhantes às elaboradas acima e tentaram resolvê-las. Dessa forma, os alunos poderiam tirar suas dúvidas e desenvolver técnicas e habilidades de cálculo e compreensão das bases das multiplicações de sinais no conjunto dos números inteiros, objetivos da atividade proposta.

A maior dificuldade por parte dos alunos foi nos exemplos com as operações de multiplicação. Nesse momento, o papel do professor foi sanar as dúvidas individuais e coletivas. Abaixo, tem-se uma das dúvidas que surgiram durante essa aula:

<u>Aluno</u>:

- *"Na multiplicação de dois números negativos, como faço?"*

<u>Professor</u>:

- *"Vou dar um exemplo: (-3) x (-2) = (+6), pois a partir de seis pares-zeros, retiram-se (devido ao -3) por três vezes grupos de duas fichas negativas. Sendo assim, resultarão seis fichas positivas." Repete-se a mesma explicação, só que agora com as fichas em mãos, desta maneira:*

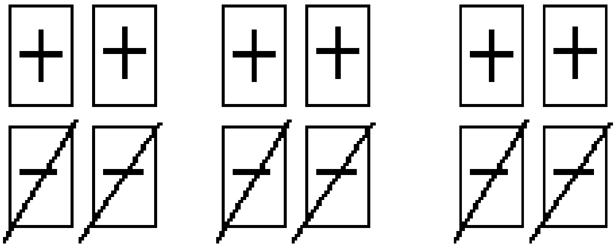


Figura 12: Multiplicação de dois números negativos

Na segunda aula desse encontro, a atividade foi realizada em dupla. Essa atividade foi elaborada pela professora Maria de Fátima da Universidade Estadual do Rio de Janeiro (disponível em: http://www.professorafatima.mat.br/inteiros.pdf), em que se trabalha as operações de adição e subtração, suas propriedades e a noção de oposto. Cada dupla recebeu o conjunto de todas as atividades descritas abaixo que foram trabalhadas nesse encontro e no próximo.

✓ **Curso: Números Inteiros, Frações e Equações por meio de jogos e brincadeiras.**

- **Números inteiros**

1) Uma ficha branca com um sinal positivo negro representa uma unidade:

Figura 13: Sinal positivo negro

2) Duas fichas brancas com um sinal positivo negro representam duas unidades (+2), três fichas brancas com um sinal positivo negro representam três unidades (+3), e assim por diante.

3) Uma ficha negra com um sinal negativo branco representa o oposto da ficha branca com um sinal positivo negro e é chamada ficha negativa.

Figura 14: Sinal negativo

4) Duas fichas negativas são denotadas por (-2), três fichas negativas são denotadas por (-3), e assim por diante.

5) Quando uma ficha positiva encontra uma ficha negativa, ambas desaparecem. Por exemplo, abaixo se têm três fichas positivas e uma negativa, pode-se dizer que se tem um total de duas fichas positivas.

Figura 15: Três fichas positivas e uma negativa

6) Um par formado por uma ficha positiva e uma ficha negativa é chamado de par-zero.

Figura 16: Par-zero

7) A ficha negativa é o oposto da ficha positiva e a ficha positiva é o oposto da ficha negativa.

<u>Atividade 1:</u>

Diga o total de fichas após eliminar todos os pares-zeros possíveis:

Fichas	Total
+ − + + − − − −	(-2)
− − + − − + −	
− + +	(+1)
− − − − +	
− + + − − +	

Figura 17: Atividade 1

Atividade 2:

Obtenha o mesmo saldo de fichas exibido na primeira coluna utilizando o número de fichas indicado. Lembre-se que acrescentar pares-zeros não altera o resultado total.

Total	Com 5 fichas	Com 7 fichas
(+3)	+ + + + −	
(-5)		
(-3)		

Figura 18: Atividade 2

Atividade 3:

Complete a tabela abaixo:

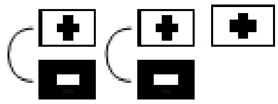
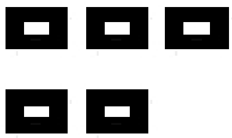
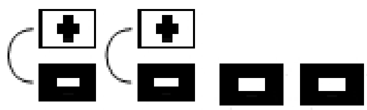
Operação de adição	Representação usando fichas: Na primeira linha representamos a primeira parcela e na segunda linha, a segunda parcela. Em seguida ligamos os pares-zeros.
(+3) + (-2) = (+1)	
(-3) + (-2) = _____	
(+7) + (-3) = _____	
(-5) + (+2) = _____	
	
(+3) + (-3) = _____	

Figura 19: Atividade 3

Dizemos que um número é o ***oposto*** ou ***simétrico*** de outro, quando a soma de ambos resulta em zero. Por exemplo: (+3) é o oposto ou simétrico de (-3) e vice-versa (+3) + (-3) = 0.

Atividade 4:

Resolva as operações abaixo:

a) (+20) + (-5) = _________ (20 somado com o simétrico de 5)

b) (-15) + (-50) = ________ (o oposto de 15 somado com o oposto de 50)

c) (+8) + (-8) = __________ (8 somado com o oposto de 8)

d) (-30) + (+30) = ________ (o simétrico de 30 somado com 30)

Atividade 5:

Preencha a tabela referente à subtração de fichas.

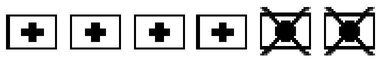
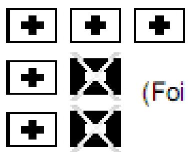
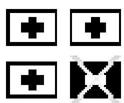
Operação de Subtração	**Representação usando fichas. Desenhamos as fichas representadas na primeira parcela. Se necessário, acrescentamos pares-zeros. Em seguida riscamos o número e o tipo de fichas representados na segunda parcela.**	**Descrição da operação em linguagem corrente**
(+6) - (+2) = (+4)		6 fichas menos duas fichas dão 4 fichas.
(-5) - (-2) = (-3)		5 fichas negativas menos 2 fichas negativas dão 3 fichas negativas.
(+3) - (-2) = (+5)	 (Não temos fichas negativas para retirar) (Foi necessário acrescentar pares zeros,)	3 fichas menos duas fichas negativas dão 5 fichas. Repare não tínhamos inicialmente fichas negativas pra retirar, por isso acrescentamos pares-zeros.
(-4) - (+3) = ____		
(+1) - (-3) = ____		
	 (foi necessário acrescentar 1 par-zero)	
(+3) - (+7) = ____		

Figura 20: Atividade 5

Atividade 6:

Relacionando as operações de adição e subtração. Preencha a tabela conforme o modelo abaixo:

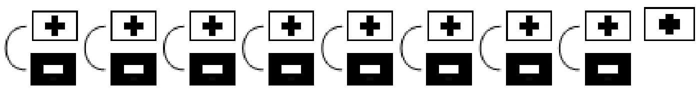
Operações:	**Representação por fichas**	**O que você observa?**
(+8) - (+3) = _____		Subtrair (+3) equivale a somar oposto de (+3). Somar (-3) equivale a subtrair o oposto de (-3).
(+8) + (-3) = _____		
(-2) - (-2) = _____		Subtrair (-2) equivale a somar o oposto de (-2). Somar (+2) equivale a subtrair o oposto de (+2).
(-2) + (+2) = _____		
(+8) - (+7) = _____		
(+8) + (-7) = _____		
(+5) + (-4) = _____		
(+5) - (+4) = _____		

Figura 21: Atividade 6

Conclusão: Subtrair equivale a adicionar o oposto.

Atividade 7:

Complete a tabela abaixo:

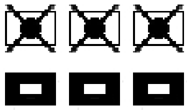
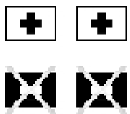
Operações:	Representação por fichas	O que você observa?
-(+3) = -3		-(+3)=_____ = -3
+(-3) = _____		
-(-4) = _____		___= +(+4)= ___
+(+4) = _____		
-(-7) = _____		
+(-7) = _____		
+(+5) = _____		
-(+5) = _____		

Figura 22: Atividade 7

Observação 1: Subtrair três equivale a somar o oposto de três. O resultado dessas operações é o mesmo e pode ser indicado por -3. Em símbolos: - (+3) = +(-3) = -3.

Observação 2: Subtrair (-10) equivale a somar o oposto de (-10). O resultado dessas operações é o mesmo e pode ser indicado por +10. Em símbolos: - (-10) = + (+10) = + 10.

<u>Observação 3:</u> Quando o valor (+3) não vem precedido por nenhum sinal, pode-se escrever (+3) = 3. Logicamente, quando o valor (-10) não vem precedido por nenhum sinal, têm-se (-10) = -10.

<u>Observação 4:</u> Somar (+3) equivale a somar três. O resultado dessas operações é o mesmo e pode ser indicado por três. Em símbolos: +(+3) = +3 = 3.

<u>Atividade 8:</u>

Usando as convenções acima, elimine os parênteses. Dê o resultado das expressões e use as fichas se necessário.

a) (-3) - (-10) =

b) (+4) + (-5) - (-10) =

c) (+10) - (-20) + (-5) + (+4) =

<u>Atividade 9:</u>

Preencha a tabela abaixo:

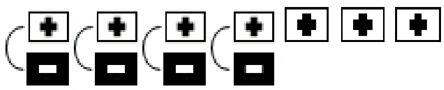
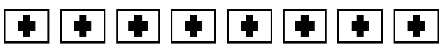
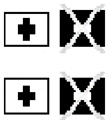
Operação	Descrição eliminando os parênteses.	Representação usando fichas.
(+7) + (-4) = ____	7 - 4 = ____	
(+8) - (-2) = ____		  (Necessário acrescentar pares zeros)
(-2) - (+1) = ____	- 2 - 1 = ____ (Adicionar o oposto de 2 e subtrair 1)	
0 - (-3)= ____		
(-7) - (-5) = ____		

Figura 23: Atividade 9

Atividade 10:

Sabe-se que as fichas escondidas no pote são todas do mesmo tipo, isto é, ou são todas positivas ou todas negativas. Pede-se adivinhar a quantidade e o tipo das fichas escondidas.

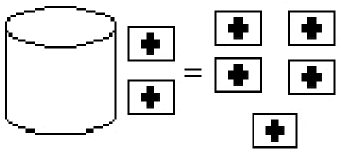
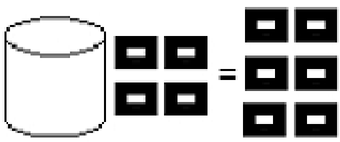
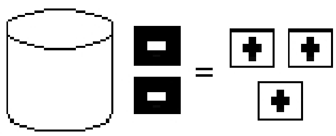
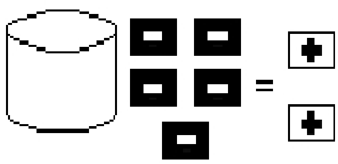
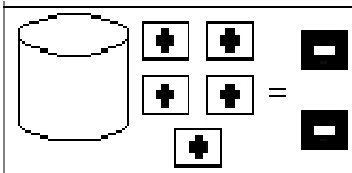
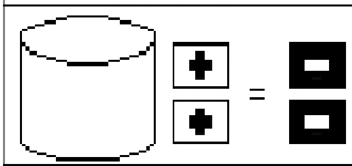
Representação	**Quantidade de fichas escondidas**	**Equação: Usaremos: x-> valor desconhecido**	**Possível raciocínio**	**Solução**
 (3 fichas positivas escondidas)	A quantidade de fichas escondidas é ______	X+2 = 5	Podemos adicionar 2 fichas negativas em cada membro da igualdade. x+2 = 5 x+2 -2 = 5 - 2 x = 3	x=3
 (2 fichas negativas escondidas)	A quantidade de fichas escondidas é -2.	X+(-4) = -6 ou x-4 = -6	Podemos adicionar 4 fichas positivas em cada membro da igualdade. x-4 = -6 x-4+4= -6 + 4 x = -2	x=-2
	A quantidade de fichas escondidas é ______			
	A quantidade de fichas escondidas é ______			
	A quantidade de fichas escondidas é ______			
	A quantidade de fichas escondidas é ______			

Figura 24: Atividade 10

Atividade 11: utilização de dados

Terminadas essas dez atividades citadas, os participantes se dividiram em duplas e iniciaram uma nova sequência de atividades. Cada participante lançou um dado e aquele que obtivesse o maior resultado, deveria subtrair o valor encontrado enquanto que o participante que obtivesse o menor valor deveria somar o resultado. Os dados foram lançados por cinco rodadas consecutivas e o participante "vencedor" foi aquele que obteve o maior valor na soma total dos resultados.

	Resultado Rodada 1	Resultado Rodada 2	Resultado Rodada 3	Resultado Rodada 4	Resultado Rodada 5	Operação	Total
Participante A							
Participante B							

Figura 25: Participantes A e B – Resultados das cinco rodadas em branco (modelo)

Exemplo: Suponha que os participantes A e B lancem os dados e obtenham os seguintes resultados:

	Resultado Rodada 1	Resultado Rodada 2	Resultado Rodada 3	Resultado Rodada 4	Resultado Rodada 5	Operação	Total
Participante A	5	4	3	6	4	(-5)+(-4)+(+3)+(-6)+(+4)	-8
Participante B	1	2	4	5	6	(+1)+(+2)+(-4)+(+5)+(-6)	-2

Figura 26: Participantes A e B – Resultados das cinco rodadas

Observando o resultado das cinco rodadas exemplificadas acima entre os participantes A e B, conclui-se que o vencedor é o B, pois -2 é maior que -8.

Atividade 12:

- **Multiplicação - Somas Sucessivas**

(+3).(+5) = (+5) + (+5) + (+5) = 15

(+4) (+3) = (+3) + (+3) + (+3) + (+3) = (+12)

(+6).(-4) = (-4) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) = -24

- **Propriedade Distributiva**

<u>Exemplo 1:</u> $3 \cdot 10 = 30$

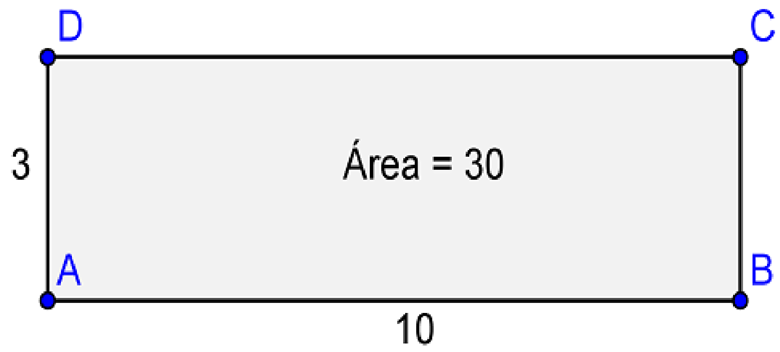


Figura 27: Propriedade Distributiva – exemplo 1

<u>Exemplo 2:</u> $3 \cdot (4+6) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 6 = 30$

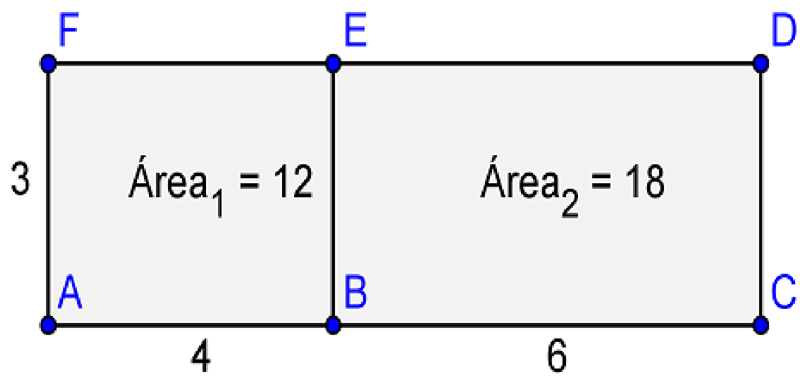


Figura 28: Propriedade Distributiva – exemplo 2

<u>Exemplo 3:</u> $(2+1) \cdot (4+6) = (2+1) \cdot 4 + (2+1) \cdot 6 = 2 \cdot 4 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 6$,

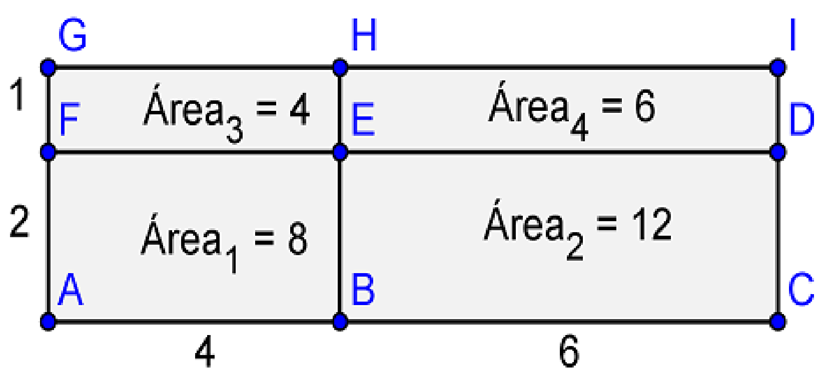


Figura 29: Propriedade Distributiva – exemplo 3

Preenchimento da tabela abaixo:

	Cálculo Direto	**Usando a Propriedade Distributiva**
$(+3)\cdot(5+7)$	$3\cdot 12=36$	$3\cdot 5+3\cdot 7=15+21=36$
$(+6)\cdot(5-2)$		
$(3+2)\cdot(5+1)$		$3\cdot 5+3\cdot 1+2\cdot 5+2\cdot 1=30$
$2\cdot(-5+5)$		
$(+10)\cdot(-7+7)$		
$(-4)\cdot(-3+3)$	$-4\cdot 0=0$	
$(-4)\cdot(-3)$		
$(-5)\cdot(-2+2)$		
$(-5)\cdot(-2)$		
$(-4+7)\cdot(-2+12)$	$3\cdot 10=30$	

Figura 30: Atividade 12

Nessa última aula do segundo encontro, foi possível realizar até a atividade oito. Não houve dúvidas significativas. Em seguida, os alunos guardaram as atividades no armário para que não as perdessem, já que para o próximo encontro precisaríamos terminá-las. Assim, finalizou-se o segundo encontro com 100% de presença e excelente participação de todos.

- **Descrição do Terceiro Encontro (07 de abril de 2009)**

Nesse terceiro encontro do “Clube de Matemática” foram retomados, brevemente, os conceitos básicos da atividade das fichas para que fosse possível realizar o final das atividades propostas na última aula do segundo encontro.

Os alunos não tiveram muitas dificuldades em prosseguir com as atividades: da nona até a décima segunda. Somente a atividade de número dez, por ser um pouco mais complexa, precisou de uma explicação mais cautelosa. Na atividade onze, os alunos jogaram os dados para preencherem a tabela.

Por fim, os alunos entregaram as atividades propostas para correção. O intuito não era avaliá-los por meio de notas e sim ter um *feedback*, ou seja, avaliar se a atividade obteve êxito, se houve compreensão dos conceitos básicos a cerca dos números inteiros. Na segunda aula, foi iniciado o Jogo do Dinossauro que está descrito a seguir.

3.1.2. Jogo do Dinossauro

Após as atividades das fichas, foi proposto aos alunos o Jogo do Dinossauro, pois complementa os fundamentos sobre os números inteiros, trabalhando com a adição e com o conceito de ordenação. Além disso, é útil também para o desenvolvimento de habilidades mentais em que o aluno proponha soluções e as confirme, além de trabalhar o conceito de simetria na multiplicação de um inteiro por (+1) ou (-1).

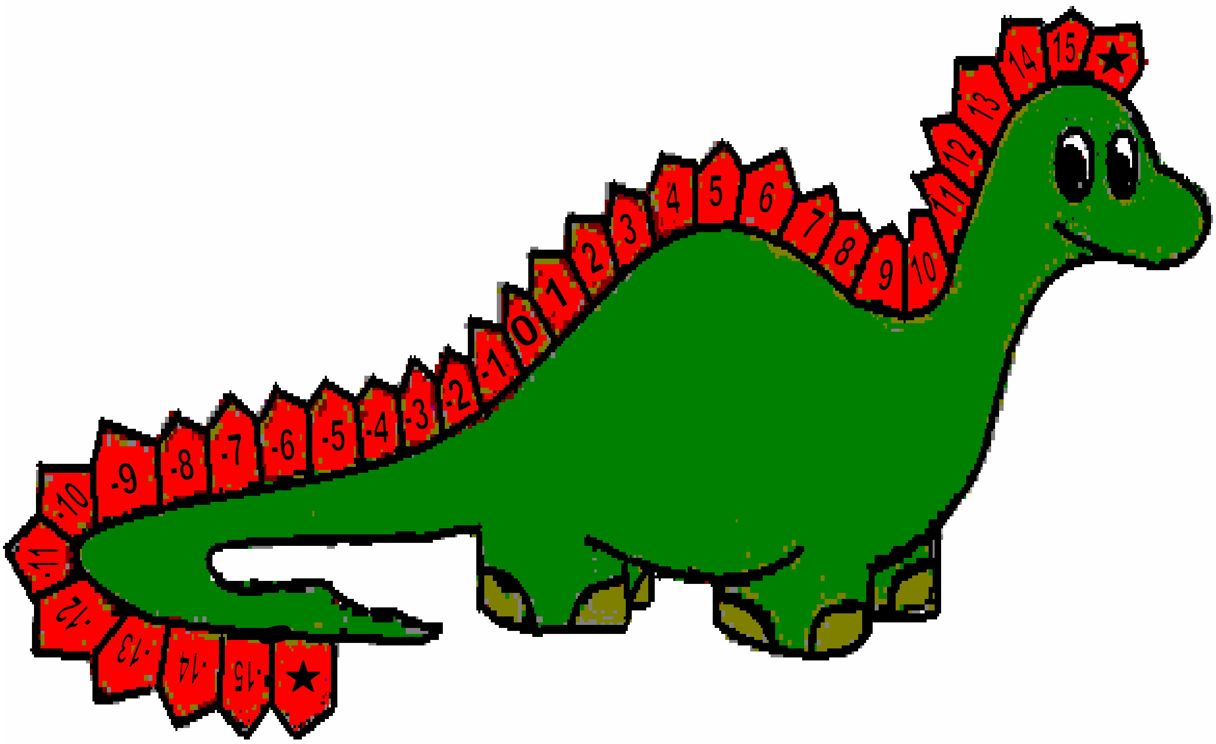


Figura 31: Jogo do Dinossauro 1

É interessante que o professor de matemática peça auxílio ao professor de artes. Como o tabuleiro do jogo do Dinossauro possui um dinossauro (conforme figuras 26.1 e 26.2), o professor de artes pode trabalhar em sala com os alunos ajudando-os na confecção. É importante que o professor de artes tenha um modelo do tabuleiro para norteá-lo. Desse modo, os alunos terão contato com o jogo desde a confecção. E o que é ainda mais interessante, com um ponto de vista não puramente matemático.

Em nossa segunda aula do terceiro encontro, a parceria do professor de artes não foi concretizada infelizmente, por não coincidir um horário adequado. Foi utilizado o jogo do Dinossauro da Experimentoteca do CDCC da USP de São Carlos. Lá há um acervo de jogos, dentre eles o jogo do Dinossauro. O jogo vem em uma espécie de *kit*, conforme a figura 26.2 abaixo:

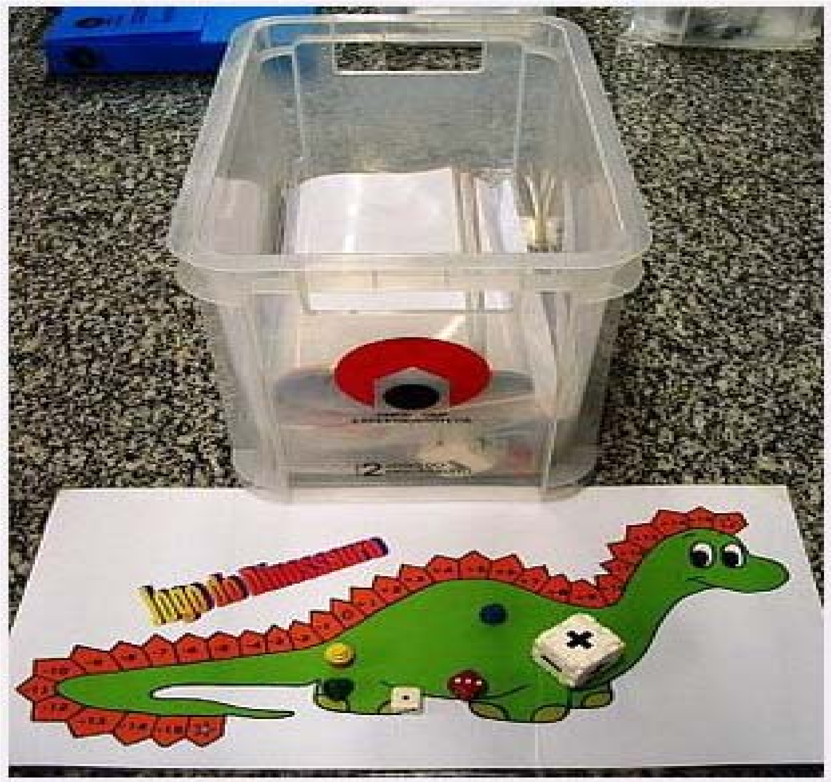


Figura 32: Jogo do Dinossauro 2

Há certo ganho de tempo em adquirir o *kit*, pois para confeccionar o tabuleiro e explicar os mecanismos de funcionamento do jogo levam-se três aulas ou mais. No entanto, ao adquirir o *kit*, gastam-se apenas duas aulas para que os alunos se familiarizem com os materiais do jogo e aprendam a jogá-lo. Mesmo assim, é mais interessante que os alunos façam seu próprio tabuleiro, pois isto aumenta o grau de intimidade do aluno com o jogo e o processo de familiarização com o jogo é mais contundente, além, é claro, da interdisciplinaridade já exposta.

Como nesse encontro houve apenas a segunda aula disponível, foi possível somente a apresentação do *kit* aos alunos, para que esses tivessem um primeiro contato com o tabuleiro e as demais peças, tivessem conhecimento dos mecanismos iniciais do jogo, das “casas” que se encontram na parte superior do Dinossauro, de que havia casas positivas e casas negativas, que a casas que possuíam estrelas significavam vitória, os peões que têm de caminhar pelas casas, dos dados que influenciarão na quantidade de casas a andar e finalmente que o jogo consistia em quatro etapas.

No quadro negro, os alunos copiaram as explicações das quatro etapas do jogo para que tivessem uma visão geral do próximo encontro:

1ª rodada - Para a primeira rodada, deve-se obedecer às seguintes regras:

• O início da partida se dá na casa zero (0) do tabuleiro.

• O dado branco representa a operação de adição e indica quantas casas o peão deverá subir no dinossauro.

• O dado vermelho representa a operação de subtração e indica quantas casas o peão deverá descer no dinossauro. Vence quem chegar ou ultrapassar a casa com a estrela.

2ª rodada - Terminada a primeira rodada, o grupo dará início à segunda etapa. Agora, a regra é um pouco mais elaborada.

Os peões deverão ser posicionados na casa zero (0) para o início do jogo. Os dados serão lançados e os jogadores terão que dizer para qual casa do dinossauro irá, sem mexer no peão. Se errar, o participante continua no mesmo lugar.

Em seguida, exemplificou-se: jogaram-se os dois dados: o branco deu quatro e vermelho deu seis. Então, a casa que eles deveriam ir seria a -2.

3ª rodada - Considere as mesmas regras estabelecidas na 1ª rodada. Os jogadores deverão seguir as instruções naturalmente, sendo que após ser efetuada cada jogada, haverá a utilização do novo dado. Esse dado poderá alterar a posição do peão no dinossauro, dependendo do sinal + (mais) ou – (menos) que será determinado no lançamento do mesmo.

Para exemplificar as novas regras:

Considere que um dos peões esteja na casa (+2) do tabuleiro e seja (–3) o resultado da jogada dos dados brancos e vermelhos. O jogador deverá, então, descer três casas, indo para a casa (–1). O mesmo jogador deverá lançar o dado dos sinais sendo possível ocorrer dois resultados:

• Caso saia o sinal de + (mais) na face do dado, o peão permanecerá na mesma casa do tabuleiro em que se encontra, ou seja, o sinal de + (mais) não interferirá na posição do mesmo.

• Caso saia o sinal de – (menos), o peão deverá se deslocar da casa (–1) em que se encontra para a casa (+1) do tabuleiro. Neste caso, o sinal de – (menos) altera a posição do peão na partida.

Assim o jogo deve prosseguir e vence quem chegar primeiro em uma das casas com a estrela ou ultrapassá-la saindo do tabuleiro.

<u>4ª rodada</u> - O jogo deverá obedecer às mesmas regras estabelecidas na segunda rodada, utilizando o dado dos sinais a cada jogada.

Após a exposição das quatro rodadas que consiste o Jogo do Dinossauro, foram finalizadas as aulas do terceiro encontro, porém, ao contrário dos dois últimos encontros, dois alunos faltaram, um de cada série.

- **Descrição do Quarto Encontro (14 de abril de 2009)**

Nesse quarto encontro do “Clube de Matemática” foram retomadas, brevemente, as exemplificações das regras e as quatro rodadas do Jogo do Dinossauro e, na segunda aula desse mesmo encontro, os alunos iniciaram o jogo na prática.

No CDCC, foram adquiridos seis *kits* do Jogo do Dinossauro, como nesse encontro três alunos faltaram (dois da 5ª série e um da 6ª), o “clubinho” contava, naquele momento, com doze participantes. Então, foram formadas, aleatoriamente, seis duplas.

Para entender melhor as regras e as quatro rodadas, foi proposta uma situação problema:

<u>1ª rodada:</u> Jogando-se os dois dados simultaneamente. O resultado obtido foi: dado vermelho cinco e dado branco três. Nesse caso, o peão desce cinco casas (resultado do dado vermelho) e, em seguida, sobe três casas (resultado do dado branco). A partir da casa em que o peão se encontrava antes da jogada, casa zero. O vencedor será quem chegar primeiro em uma das casas marcada com uma estrela ou ultrapassá-la saindo do tabuleiro.

<u>2ª rodada:</u> Jogando-se os dois dados: o branco deu quatro e vermelho deu seis. Em seguida, os alunos devem responder qual casa o peão deverá ir (casa -2). Eles responderam corretamente. Novamente jogam-se os dois dados e o resultado foi: vermelho um e branco cinco, repete-se a pergunta: em qual casa deverá ir o peão, lembrado-os que o peão está agora na casa -2, sem grandes dificuldades eles responderam corretamente que o peão deveria ir à casa +2.

Alguns alunos podem não se lembrar qual cor de dado significa descer e qual significa subir, ou então, esquecer-se de alguma regra ou rodada. Esses tipos de dúvidas são comuns, pois ainda estão no processo de familiarização do jogo.

<u>3ª rodada:</u> Considere-se agora como exemplo, que um dos peões esteja na casa (+2) do tabuleiro e seja (–3) o resultado da jogada dos dados brancos e vermelhos. O jogador deverá então descer três casas, indo para a casa (–1). O mesmo jogador deve lançar o dado dos sinais sendo possível ocorrer dois resultados:

• Se cair no + (mais), o peão permanece na mesma casa do tabuleiro em que se encontra, ou seja, -1.

• Se cair no – (menos), o peão deverá se deslocar da casa (–1) em que se encontra para a casa (+1) do tabuleiro.

O jogo deve prosseguir e vence quem chegar primeiro em uma das casas com a estrela ou ultrapassá-la saindo do tabuleiro.

4ª rodada: O jogo deverá obedecer às mesmas regras estabelecidas na segunda rodada, utilizando o dado dos sinais a cada jogada.

O aluno deve ficar atento em relação ao conceito de simetria entre os números positivos e negativos. A partir do zero se subirmos três degraus chegamos à casa +3 ou se descermos três casas a partir do zero chegaremos à casa -3; pode-se dizer que o +3 e o -3 são simétricos. Aliás, os alunos já viram esse conceito de simetria ou oposto no terceiro encontro, nas atividades das fichas propostas pela professora Maria de Fátima da UERJ.

> Dizemos que um número é o ***oposto*** ou ***simétrico*** de outro, quando a soma de ambos resulta em zero. Por exemplo: (+3) é o oposto ou simétrico de (-3) e vice-versa (+3) + (-3) = 0.

Com essas explicações e resolução da situação problema proposta, finalizou-se a primeira aula do quarto encontro.

Na aula subsequente, eles jogaram por si só o Jogo do Dinossauro, cumprindo todas as rodadas. A segunda rodada embora exigisse dos alunos que eles propusessem soluções, não houve grandes dificuldades. No início, eles demoravam mais para concretizar o que mentalizaram como resposta, porém com o passar do tempo, respondiam com mais rapidez e acerto. Foi nítida a melhora da destreza dos alunos no cálculo mental dos números inteiros.

A terceira rodada inseriu um novo dado. Esse dado pode alterar a posição do peão no dinossauro, dependendo do sinal + (mais) ou – (menos) que será determinado no lançamento do mesmo. Esse novo conceito reforça o aprendizado de simetria ou oposto além de ajudá-los a raciocinar na multiplicação de sinais nas operações com os números inteiros.

No jogo pelo jogo, não houve problema. Eles se deram muito bem com o dado de sinais. Algo inusitado foi que quando a primeira vez que um aluno jogou o dado de sinais ele estava em uma casa positiva e o dado cai negativo, sendo assim ele teve de ir à casa negativa correspondente e, então, nesse momento, ele foi motivo de *brincadeiras*. Porém, o mesmo aluno foi o primeiro a "saltar" de uma casa negativa a seu oposto. Nesse momento, todos puderam perceber que o sinal negativo pode atrapalhar, mas também pode ajudar! Também é importante ressaltar que há uma casa estrela na parte negativa e que lá também se pode vencer o jogo.

A quarta rodada foi a mais tranquila de todas embora a mais complexa. Era a repetição da segunda rodada com a inserção do dado de sinais. Como eles já estavam bem entrosados com o jogo, tudo ocorreu bem. É claro que, às vezes, um ou outro aluno errava ao mentalizar a posição da casa que deveriam ir, porém eram erros por falta de concentração e não em relação aos conceitos envolvidos.

Todos tiveram uma evolução significativa em relação às operações básicas de soma e subtração com números inteiros e com o conceito de simetria e multiplicação de sinais. Porém, o que mais impressionou foi o crescimento de suas habilidades em lidar mentalmente com os cálculos com os números inteiros. Nas aulas convencionais, a professora responsável pela sala, Renata Neves, notou, nesses alunos, a melhora da compreensão das operações envolvendo soma, subtração e multiplicação de sinais. Sem dúvida o Jogo do Dinossauro ajudou-os no raciocínio mental dos alunos.

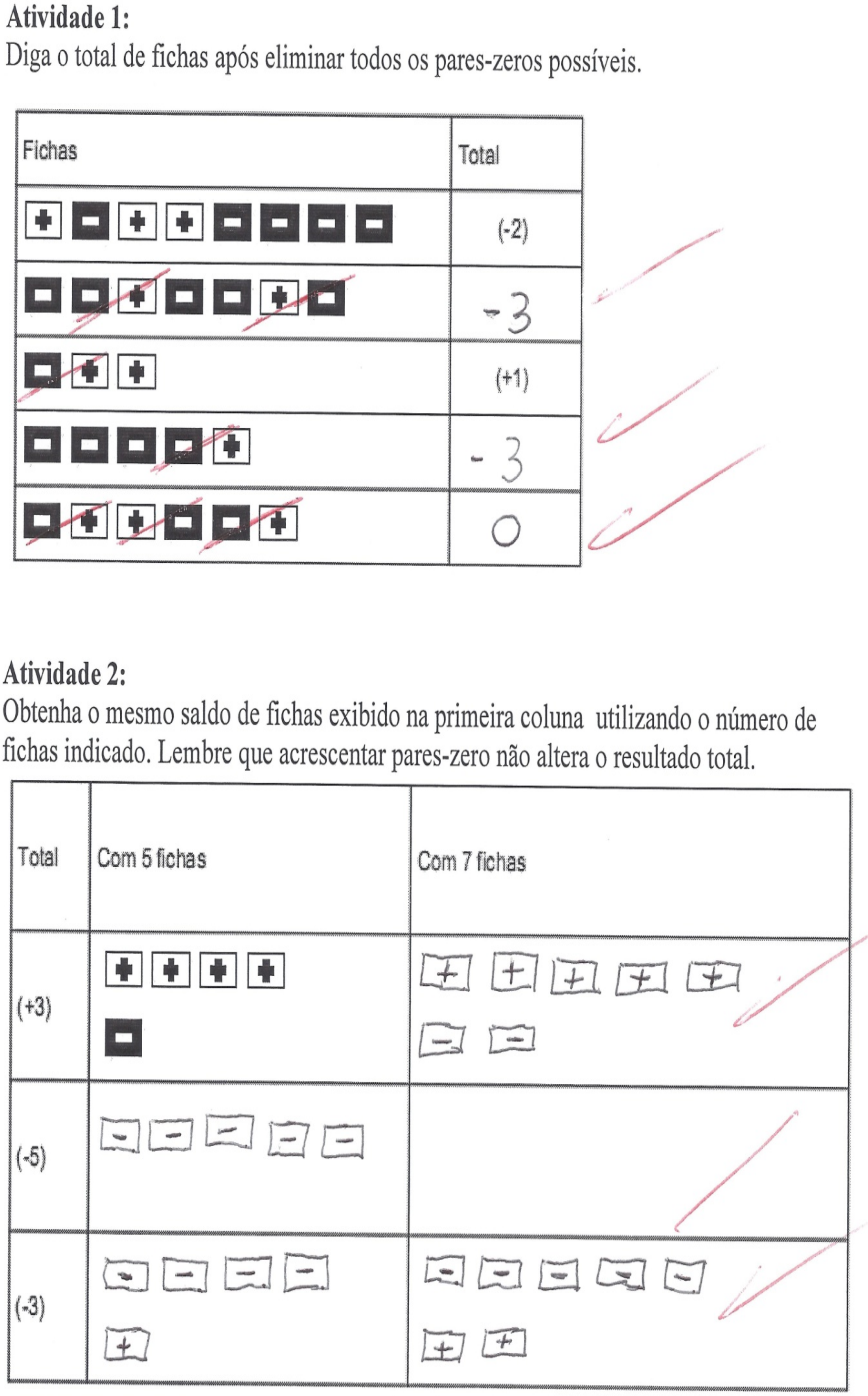
Figura 33: Jogo do Dinossauro na Prática

- **Descrição do Quinto Encontro (28 de abril de 2009)**

Na primeira aula desse quinto encontro do “Clube de Matemática” foram retomados e reforçados os mecanismos de funcionamento das atividades das fichas positivas e negativas, bem como a entrega das atividades propostas no segundo e terceiro encontros. Na segunda aula, os alunos mesmos propuseram operações e as realizaram por meio das fichas.

O objetivo de retomar as atividades das fichas foi a de revisar com os alunos os conceitos básicos das operações com o conjunto dos números inteiros e, consequentemente, aprimorarem ainda mais as técnicas de cálculo. Cada aluno recebeu as atividades das fichas positivas e negativas corrigidas. Houve uma discussão básica da resolução dessas atividades.

A primeira página da atividade serviu de revisão dos mecanismos de funcionamento das fichas positivas e negativas. Cada aluno verificou seus erros e esclareceu suas dúvidas. Nas figuras de 28 até 36 a seguir, há atividades feitas por um aluno que exemplificam muito bem o rendimento da turma. Pode-se verificar que houve poucos erros, aliás, erros muito mais por falta de atenção do que por falhas de conceitos a respeito das operações com números inteiros.



Atividade 1:
Diga o total de fichas após eliminar todos os pares-zeros possíveis.

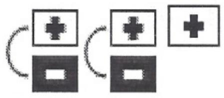
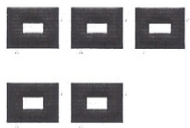
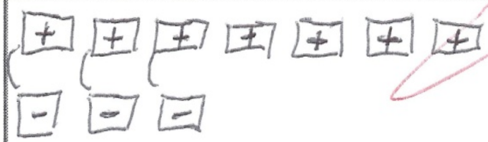
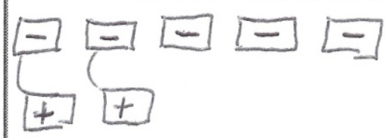
Fichas	Total
+ − + + − − − −	(-2)
− − + − − + −	-3
− + +	(+1)
− − − − +	- 3
− + + − − +	0

Atividade 2:
Obtenha o mesmo saldo de fichas exibido na primeira coluna utilizando o número de fichas indicado. Lembre que acrescentar pares-zero não altera o resultado total.

Total	Com 5 fichas	Com 7 fichas
(+3)	+ + + + −	+ + + + + − −
(-5)	− − − − −	
(-3)	− − − − +	− − − − − + +

Figura 34: Atividades 1 e 2

Atividade 3:
Complete a tabela abaixo.

Operação de adição	Representação usando fichas: Na primeira linha representamos a primeira parcela e na segunda linha, a segunda parcela. Em seguida ligamos os pares-zeros.
(+3) + (-2) = (+1)	
(-3) + (-2) = -5	
(+7) + (-3) = +4	
(-5) + (+2) = -3	

Dizemos que um número é o ***oposto*** ou ***simétrico*** de outro, quando a soma de ambos resulta em zero. Por exemplo: (+3) é o oposto ou simétrico de (-3) e vice-versa (+3) + (-3) = 0.

Atividade 4:
Resolva

a) (+20) + (-5) = +15 (20 somado com o simétrico de 5)
b) (-15) + (-50) = -65 (O oposto de 15 somado com o oposto de 50)
c) (+8) + (-8) = 0 (8 somado com o oposto de 8)
d) (-30) + (+30) = 0 (O simétrico de 30 somado com 30)

Figura 35: Atividades 3 e 4

Atividade 5:

Preencha a tabela referente a subtração de fichas.

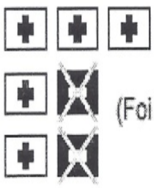
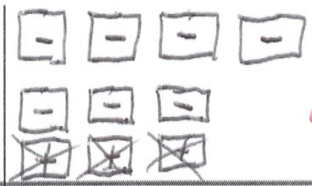
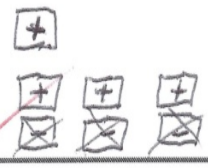
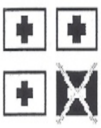
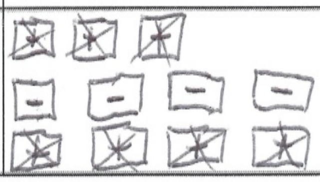
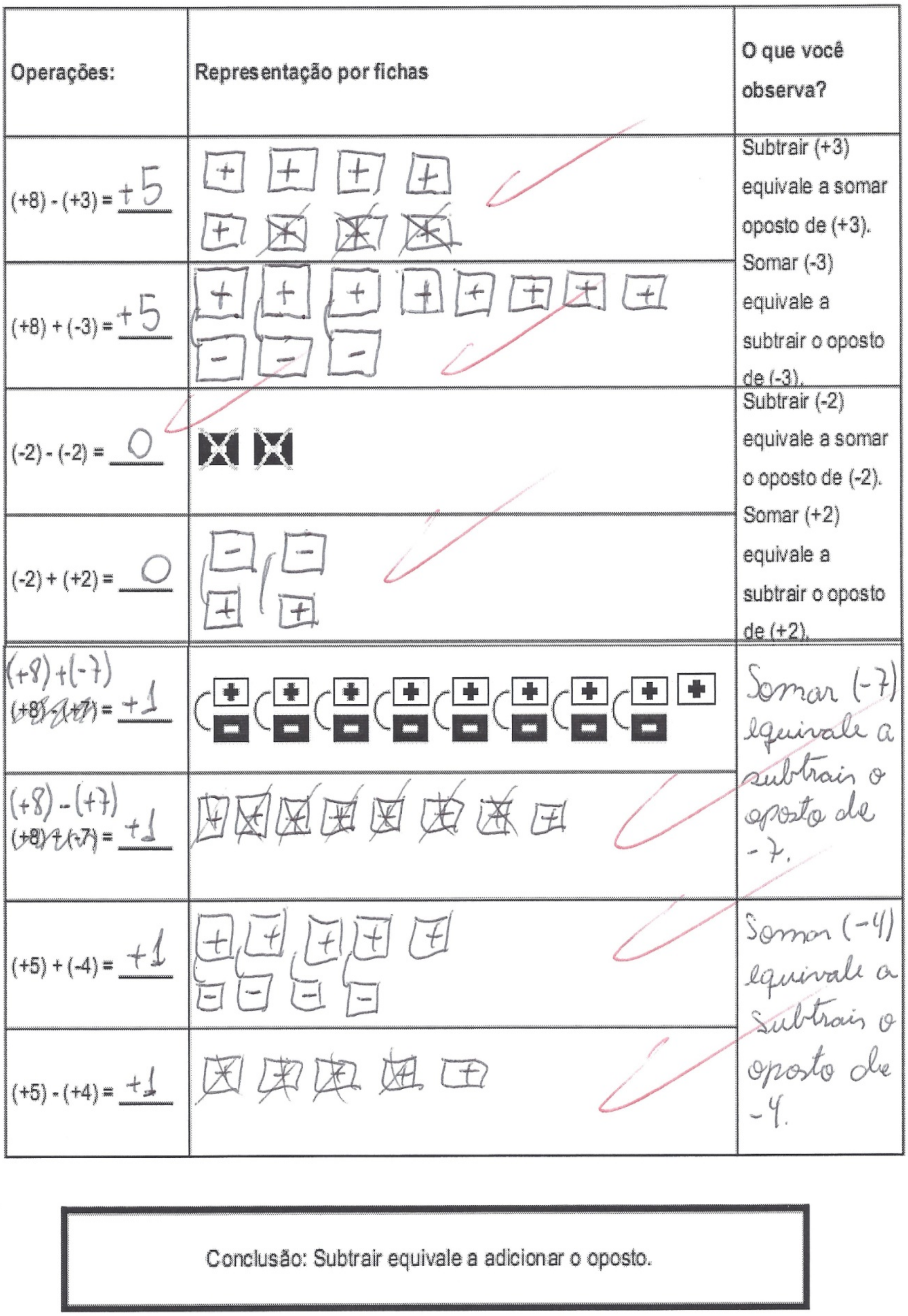
Operação de Subtração	Representação usando fichas. Desenhamos as fichas representadas na primeira parcela. Se necessário, acrescentamos pares-zeros. Em seguida riscamos o número e o tipo de fichas representados na segunda parcela.	Descrição da operação em linguagem corrente
(+6) - (+2) = (+4)		6 fichas menos duas fichas dão 4 fichas.
(-5) - (-2) = (-3)		5 fichas negativas menos 2 fichas negativas dão 3 fichas negativas.
(+3) - (-2) = (+5)	 (Não temos fichas negativas para retirar) (Foi necessário acrescentar pares zeros,)	3 fichas menos duas fichas negativas dão 5 fichas. Repare não tínhamos inicialmente fichas negativas pra retirar, por isso acrescentamos pares-zeros.
(-4) - (+3) = -7		? Faltou preencher...
(+1) - (-3) = +4		?
+2 - (-1) = +3	 (foi necessário acrescentar 1 par-zero)	?
(+3) - (+7) = -4		?

Figura 36: Atividade 5

Atividade 6:

Relacionando as operações de adição e subtração. Preencha a tabela conforme o modelo.

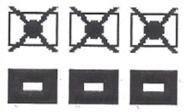
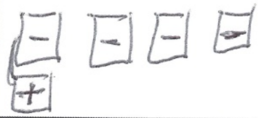
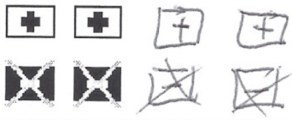
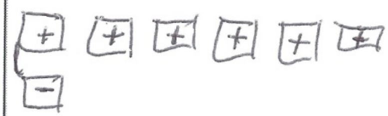
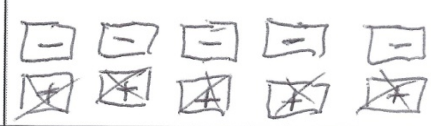


Operações:	Representação por fichas	O que você observa?
(+8) - (+3) = +5		Subtrair (+3) equivale a somar oposto de (+3). Somar (-3) equivale a subtrair o oposto de (-3).
(+8) + (-3) = +5		
(-2) - (-2) = 0		Subtrair (-2) equivale a somar o oposto de (-2). Somar (+2) equivale a subtrair o oposto de (+2).
(-2) + (+2) = 0		
(+8)+(-7) ~~(+8) - (+7)~~ = +1		Somar (-7) equivale a subtrair o oposto de -7.
(+8)-(+7) ~~(+8) + (-7)~~ = +1		
(+5) + (-4) = +1		Somar (-4) equivale a subtrair o oposto de -4.
(+5) - (+4) = +1		

Conclusão: Subtrair equivale a adicionar o oposto.

Figura 37: Atividade 6

Atividade 7:
Complete a tabela

Operações:	Representação por fichas	O que você observa?
-(+3) = -3		-(+3)= +(-3) = -3
+(-3) = -3		
-(-4) = +4		-(-4) = +(+4)= +4
+(+4) = +4		
-(-7) = +7		-(-7) é o oposto do +(-7).
+(-7) = -7		
+(+5) = +5		+(+5) é o oposto do -(+5).
-(+5) = -5		

Leia com Atenção

Observação 1: Subtrair 3 equivale a somar o oposto de 3. O resultado destas operações é o mesmo e pode serindicado por -3. Em símbolos: - (+3) = +(-3) = -3.

Observação 2: Subtrair (-10) equivale a somar o oposto de (-10). O resultado destas operações é o mesmo e pode ser indicado por +10. Em símbolos: - (-10) = + (+10) = + 10.

Observação 3: Quando o valor (+3) não vem precedido por nenhum sinal, podemos escrever (+3) = 3. Logicamente, quando o valor (-10) não vem precedido por nenhum sinal, temos (-10) = -10.

Observação 4: Somar (+3) equivale a somar 3. O resultado destas operações é o mesmo e pode ser indicado por 3. Em símbolos: +(+3) = +3 = 3.

Figura 38: Atividade 7

Atividade 8:

Usando as convenções acima, elimine os parênteses. Dê o resultado das expressões e use as fichas se necessário.

(a) (-3) - (-10) = (-3) + (10) = -3 + 10 = +7

(b) (+4) + (-5) - (-10) = (+4) - 5 + 10 = +4 - 5 + 10 = -1 + 10 = +9

(c) (+10) - (-20) + (-5) + (+4) = (+10) + 20 - 5 + 4 = +10 + 20 - 1 = 29

Atividade 9:

Preencha a tabela abaixo

Operação	Descrição eliminando os parênteses.	Representação usando fichas.
(+7) + (-4) = +3	7 - 4 = +3	
(+8) - (-2) = +10	+8 +2 = +10	(Necessário acrescentar pares zeros)
(-2) - (+1) = -3	- 2 - 1 = -3 (Adicionar o oposto de 2 e subtrair 1)	
0 - (-3)= +3	0 + 3 = +3	
(-7) - (-5) = -2	-7 +5 = -2	

Figura 39: Atividades 8 e 9

Atividade 10:

Sabe-se que as fichas escondidas no pote são todas do mesmo tipo, isto é, ou são todas positivas ou todas negativas. Pede-se adivinhar a quantidade e o tipo das fichas escondidas.

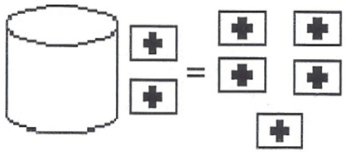
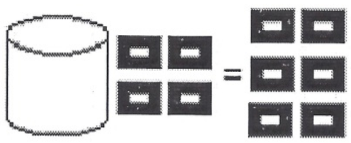
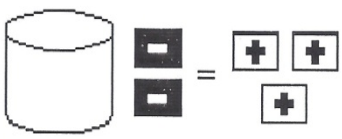
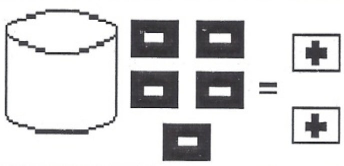
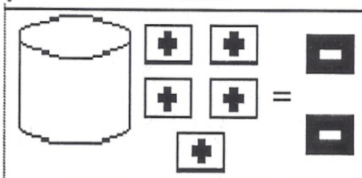
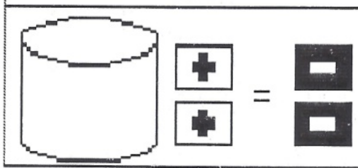
Representação	Quantidade de fichas escondidas	Equação: Usaremos: x-> valor desconhecido	Possível raciocínio	Solução
 (3 fichas positivas escondidas)	A quantidade de fichas escondidas é +3	X+2 = 5	Podemos adicionar 2 fichas negativas em cada membro da igualdade. x+2 = 5 x+2 -2 = 5 - 2 x = 3	x=3
 (2 fichas negativas escondidas)	A quantidade de fichas escondidas é -2.	X+(-4) = -6 ou x-4 = -6	Podemos adicionar 4 fichas positivas em cada membro da igualdade. x-4 = -6 x-4+4= -6 + 4 x = -2	x=-2
	A quantidade de fichas escondidas é +5	X+(-2)=+3	X=+3+2 X=+5	X=+5
	A quantidade de fichas escondidas é +7	X+(-5)=+2	X-5=+2 X=+2+5	X=+7
	A quantidade de fichas escondidas é -7	X+5=-2	X=-2-5	X=-7
	A quantidade de fichas escondidas é -4	X+2=-2	X=-2-2	X=-4

Figura 40: Atividade 10

Atividade 11:
Os participantes deverão se agrupar em duplas. Cada participante deve lançar um dado e aquele que obtiver o maior resultado, deverá subtrair o valor encontrado enquanto que o participante que obtiver o menor valor deverá somar o resultado. Os dados serão lançados por 5 rodadas consecutivas e o participante "vencedor" será aquele que obtiver o maior valor na soma total dos resultados.

Exemplo:

Suponhamos que os participantes A e B lancem os dados e obtenham os seguintes resultados.

	Resultado Rodada 1	Resultado Rodada 2	Resultado Rodada 3	Resultado Rodada 4	Resultado Rodada 5	Operação	Total
Participante A	5	4	3	6	4	(-5)+(-4)+(+3)+(-6)+(+4)	-8
Participante B	1	2	4	5	6	(+1)+(+2)+(-4)+(+5)+(-6)	-2

Vencedor: Participante B, pois -2 é maior que -8.

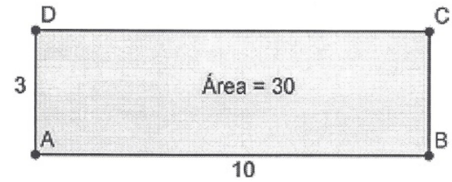
	Resultado Rodada 1	Resultado Rodada 2	Resultado Rodada 3	Resultado Rodada 4	Resultado Rodada 5	Operação	Total
Participante A	3	2	5	2	6	(+3)+(+2)+(-5)+(-2)+(-6)	-8
Participante B	6	3	4	1	3	(-6)+(-3)+(+4)+(+1)+(+3)	-1

Vendedor; B, pois -1 é maior que -8.

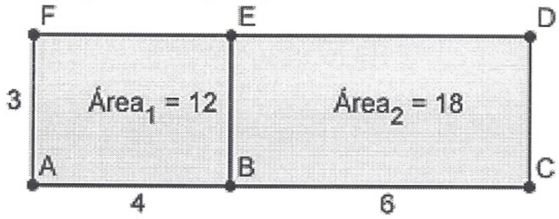
Multiplicação - Somas Sucessivas
(+3).(+5) = (+5) + (+5) + (+5) = 15
(+4) (+3) = (+3) + (+3) + (+3) + (+3) = (+12)
6.(-4) = (-4) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) = -24

Propriedade Distributiva

Exemplo 1: $3 \cdot 10 = 30$



Exemplo 2: $3 \cdot (4+6) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 6 = 30$



Exemplo 3: $(2+1) \cdot (4+6) = (2+1) \cdot 4 + (2+1) \cdot 6 = 2 \cdot 4 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 6$,

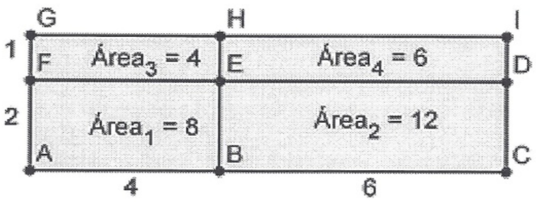


Figura 41: Atividade 11

Atividade 12:
Preencha a tabela.

	Cálculo Direto	Usando a Propriedade Distribuitiva
$(+3)\cdot(5+7)$	$3\cdot 12=36$	$3\cdot 5+3\cdot 7=15+21=36$
$(+6)\cdot(5-2)$	$6.3=18$	$6.5-6.2=30-12=18$
$(3+2)\cdot(5+1)$	$5.6=30$	$3\cdot 5+3\cdot 1+2\cdot 5+2\cdot 1=30$
$2\cdot(-5+5)$	$2.0=0$	$2.(-5)+2.5=-10+10=0$
$(+10)\cdot(-7+7)$	$10.0=0$	$10.(-7)+10.7=-70+70=0$
$(-4)\cdot(-3+3)$	$-4\cdot 0=0$	$-4.(-3)-4.(+3)=12-12=0$
$(-4)\cdot(-3)$	$+12$	$+12$
$(-5)\cdot(-2+2)$	$-5.0=0$	$-5.(-2)-5(+2)=10-10=0$
$(-5)\cdot(-2)$	$+10$	$+10$
$(-4+7)\cdot(-2+12)$	$3\cdot 10=30$	$-4.(-2)-4.(12)+7.(-2)+7.(12)$

$+8-48-14+84$

$-40+70=+30$

Figura 42: Atividade 12

Os próprios alunos propuseram operações dentro do conjunto dos inteiros e as realizaram por meio das fichas, ou seja, praticaram as atividades das fichas a fim de adquirirem competência. Assim, finalizou-se o quinto encontro com 100% de presença e excelente participação de todos.

- **Descrição do Sexto Encontro (05 de maio de 2009)**

Nesse sexto encontro, os alunos revisaram as regras do Jogo do Dinossauro e treinaram suas quatro etapas propostas. Essa etapa foi fácil, pois todos se lembraram muito bem do jogo. Os alunos que faltaram no encontro do jogo também já estavam bem familiarizados com as regras, visto que nos horários convencionais de aula, a professora, Renata Neves, ensinava as regras e o jogo para os alunos que eventualmente faltavam.

Em seguida, como havia quatorze alunos, pois apenas um faltou, formaram-se sete duplas e até o término da segunda aula desse encontro, eles jogaram o jogo.

Assim, os alunos aperfeiçoaram suas habilidades de cálculo mental e destreza em operações com os números inteiros e multiplicação de sinais, brincando com o jogo do Dinossauro.

- **Descrição do Sétimo Encontro (12 de maio de 2009)**

Na primeira aula desse encontro, os alunos conheceram o Jogo do Hexágono e sua importância didática. Já a segunda aula foi utilizada apenas para a familiarização das peças e do tabuleiro do jogo, bem como a explicação de suas regras.

3.1.3. Jogo do Hexágono

Após as atividades das fichas e o Jogo do Dinossauro, os alunos adquiriram uma forte base nas operações mais simples dos números inteiros. Já com o Jogo do Hexágono, o objetivo era fazer com que eles conquistassem um nível mais elevado na realização das operações, visto que o jogo contempla, além das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, as operações de potenciação e radiciação, habilitando o aluno a lidar com os números de modo mais sofisticado, aumentando suas destrezas de cálculo.

✓ **Descrição do Jogo do Hexágono**

O jogo do hexágono tem aparência de um jogo puramente comercial. No entanto, ele tem um intuito claro de melhorar significativamente a destreza dos alunos com as operações com números naturais. Veja o tabuleiro do jogo na figura 43 abaixo:

Figura 43: Modelos de Tabuleiro para o Jogo do Hexágono

É interessante que os alunos tenham contato com o jogo do hexágono desde sua confecção, ou seja, que os próprios alunos façam o tabuleiro; assim, desenvolverão melhor suas habilidades com régua, figura geométrica plana e pintura. Além, é claro, de aumentar o comprometimento do aluno, pois ao confeccioná-lo, o aluno terá uma participação mais íntima com o jogo.

Além do tabuleiro, o jogo do hexágono exige três dados comuns e peões; cada participante será representado por um peão.

O jogo consiste basicamente do seguinte: cada participante joga os três dados simultaneamente e com os valores desses dados ele deve fazer qualquer combinação (com operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação) a fim de "ocupar uma casa" enumerada do tabuleiro. Quem fizer primeiro uma sequência de três casas que se interligam vence o jogo. Desde sua confecção até jogar o Jogo do Hexágono com competência, seis aulas foram utilizadas.

Inicialmente, não foi necessário confeccionar os tabuleiros, pois esses já haviam sido adquiridos antes do encontro. Foi utilizado o modelo da esquerda da figura 43 acima. Foram trazidos para os alunos vários tabuleiros, dados comuns e papéis crepons.

Os alunos copiaram do quadro negro as explicações das regras desse jogo:

- Cada jogador possui peões de mesma cor;
- O ideal é que haja de três a quatro participantes por jogo;
- Cada participante joga os dados e aquele que obtiver maior número começará o jogo;
- O peão que iniciará a partida joga os três dados simultaneamente;
- Por meio de operações de soma, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação com os números jogados devem-se elaborar um número que pertença ao tabuleiro;
- Os outros participantes devem fazer o mesmo;
- Assim deve ser feito por várias rodadas;
- O objetivo é formar uma sequência válida com três casas:
- As sequências válidas são formadas por três casas que se interligam;
- Quem formar a sequência primeiro vence o jogo.

Sugestão:

As casas mais próximas do centro possuem maiores possibilidades de sequências, visto que estão cercadas por mais casas.

O final desse sétimo encontro, deu-se com a cópia pelos alunos das regras expostas acima e com o armazenamento dos materiais do jogo no armário. Nenhum aluno faltou e todos participaram ativamente das atividades propostas.

- **Descrição do Oitavo Encontro (19 de maio de 2009)**

Na primeira aula desse encontro, os alunos fizeram uma releitura das regras do Jogo do Hexágono. Em seguida, foram resgatados do armário os materiais do jogo: tabuleiros, dados e papéis crepons.

Como havia doze alunos presentes, pois faltaram três (sendo dois da 5ª e um da 6ª série), formaram-se quatro grupos de três alunos; cada grupo recebeu um tabuleiro, três dados comuns e alguns papéis crepons de cores variadas. Os papéis foram recortados em pedaços pequenos e amassados; eles serviram de peões para os tabuleiros.

Na segunda aula, uma situação problema foi idealizada com um grupo modelo e os outros alunos ficaram como espectadores, para explicar as regras e objetivos do jogo pelo jogo. Cada participante do grupo modelo jogou os dados e aquele que obteve maior número começou o jogo. A partir de então, o participante que iniciou a partida jogou os três dados simultaneamente, saindo os números 2, 3 e 5. Então, o participante elaborou, por meio de operações de soma, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação com os números jogados um número. No caso, $(2^3 + 3) \times 5 = 55$. Dessa maneira, o jogador posicionou seu peão, cor azul, na casa de número 55. Assim, sua participação na primeira rodada acabou. Após os outros participantes terem feito o mesmo, começou a segunda rodada.

No tabuleiro, o peão que está na casa 55 tem em seu redor as casas 32, 33, 34, 54, 60 e 120. Ao lançar os três dados novamente, esse participante tentou fazer uma combinação semelhante à anterior de modo que ocupasse, com um segundo peão, uma das casas que cercam o 55. O objetivo era formar uma sequência válida com três casas que se interligam. Por exemplo, as sequências: 55-60-64 ou 55-33-12.

Na segunda rodada, o participante que na primeira rodada posicionou um peão na casa 55, ao jogar os dados para a segunda rodada, fêz uma combinação que não ajudou a completar um trio utilizando o 55. Sua combinação resultou o número 40, assim ele posicionou um segundo peão na casa 40.

Observou-se que é possível tentar fazer a sequência em outros locais, ou seja, ele não precisa ficar atrelado apenas ao redor do 55, ele pode ter outros núcleos para tentar executar a sequência, é importante ressaltar que não pode haver dois peões na mesma casa.

Quem conseguir fazer uma sequência válida de três casas primeiro vence o jogo.

O jogo seguiu-se até que um dos jogadores conseguiu formar a sequência. Com a vitória de um dos participantes deu-se o fim do nosso oitavo encontro. Os alunos guardaram o jogo no armário, a fim de preservá-lo, visto que no próximo encontro iriam reutilizá-lo.

- **Descrição do Nono Encontro (26 de maio de 2009)**

Nesse encontro, tanto na primeira aula como na segunda aula, os alunos praticaram o Jogo do Hexágono a fim de adquirirem experiência e ampliarem seu raciocínio lógico e seu cálculo mental.

Os alunos resgataram do armário as peças necessárias ao jogo (tabuleiro, dados e peões). Formaram-se grupos aleatórios de dois a quatro alunos para cada Jogo do Hexágono. E assim, deu-se início ao jogo pelo jogo, que durou todo o encontro. Não houve dificuldade por parte deles. No começo, eles faziam contas mais básicas, como soma e multiplicação. Mas até o final do jogo, todos estavam efetuando operações de potenciação e radiciação.

Foi fácil perceber que o Jogo do Hexágono consegue desenvolver nos alunos a capacidade de efetuar operações com os números naturais das formas mais variadas possíveis. E assim, desenvolver habilidades nas operações, não apenas nas operações básicas (já bem treinadas em atividades anteriores), mas também na potenciação e radiciação. Nesse nono encontro, um aluno da 6ª série faltou.

Figura 38: Jogo do Hexágono

- **Descrição do Décimo Encontro (02 de junho de 2009)**

Nesse encontro, os alunos tiveram uma ideia introdutória do Jogo Matix: como é o jogo e qual a sua importância didática, além da familiarização das peças e do tabuleiro, bem como a explicação de suas regras.

O Jogo Matix foi o último proposto no projeto, ele agiliza o raciocínio e aumenta a capacidade de concentração do aluno. Para jogá-lo, o educando terá que fazer operações de adição e subtração e traçar estratégias a cada rodada, desenvolvendo raciocínio de antecipação por meio de cálculo mental.

3.1.4. Jogo Matix

O jogo Matix é de fácil confecção e de poucas regras e remete o aluno a um raciocínio que o direciona a manipular os números inteiros. Dessa forma, ele ajuda o aluno a se concentrar e tomar decisões em tempo relativamente pequeno. Observações gerais sobre o jogo:

1. Distribui-se as peças aleatoriamente pelas 64 casas do tabuleiro;
2. Escolhe-se como os participantes queiram, quem iniciará o jogo e a direção (horizontal ou vertical) que irá jogar;
3. O objetivo do jogo é retirar as peças do tabuleiro uma a uma, saindo vencedor o jogador que conseguir o maior número de pontos.

PEÇAS DO MATIX COM INTEIROS

15	-	-	-1	-1	-1	-2	-2
-2	-3	-3	-3	-4	-4	-4	-5
-5	-5	7	7	7	8	8	8
10	10	10	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	3	3	3
3	3	4	4	4	4	4	5
5	5	5	5	0	0	0	0
0	6	6	6	6	6	6	☆

Figura 45: Jogo Matix

- ✓ **Familiarização com o material do jogo**

Nessa segunda aula deste encontro, os alunos puderam ter contato com o material desse jogo: dados, peões, tabuleiros e outros. Desse modo, eles tiveram uma boa familiarização com um modelo do jogo para confeccioná-lo nas próximas aulas.

Após o primeiro contato com as peças, deu-se início ao processo de conhecimento das regras do jogo. Os alunos copiaram do quadro negro as seguintes regras:

- Distribuir as peças aleatoriamente pelas 64 casas do tabuleiro;
- Escolher quem iniciará o jogo e a direção (horizontal ou vertical) que irá jogar.
- O objetivo do jogo é retirar as peças do tabuleiro uma a uma, saindo vencedor o jogador que conseguir o maior número de pontos;
- Feita a escolha, cada um dos jogadores alternadamente poderá jogar apenas em uma das direções, se na horizontal o jogador irá retirar a peça situada na linha da horizontal em que estiver a estrela ou na vertical, retirando a peça situada na coluna vertical em que estiver a estrela;
- A estrela é a peça móvel que ambos os jogadores movimentam e colocam, a cada vez, no lugar da peça que retiram;
- O jogo termina quando são retiradas todas as peças do tabuleiro ou, quando um jogador retira a última peça da fileira (horizontal ou vertical) em que se encontra a estrela;
- O vencedor será aquele que tiver feito o maior número de pontos, depois de somados todos os pontos positivos e deles subtraídos os pontos negativos de todas as peças que retirou.

Esse décimo encontro foi finalizado com a cópia das regras listadas acima pelos alunos. Nesse encontro não houve faltas. Todos os alunos participaram ativamente e com muita competência.

- **Descrição do Décimo Primeiro Encontro (09 de junho de 2009)**

Nesse encontro, os alunos confeccionaram, na primeira aula, o tabuleiro e as peças do Jogo Matix e na segunda aula, tiveram o reconhecimento das regras via uma situação problema.

O primeiro contato com o jogo se deu na própria elaboração do tabuleiro e das peças numeradas, assim os alunos treinaram suas habilidades com a régua e com as figuras geométricas planas. Além é claro, de aumentar o comprometimento deles, pois ao confeccionarem o jogo, os alunos tiveram uma participação mais efetiva com o mesmo.

O jogo foi realizado em dupla. O material utilizado e o procedimento para sua confecção foram:

- Um tabuleiro 8 x 8 confeccionado com uma cartolina;
- Régua e lápis para desenhar as sessenta e quatro “casas” do tabuleiro;

Veja abaixo um esquema simplificado desse:

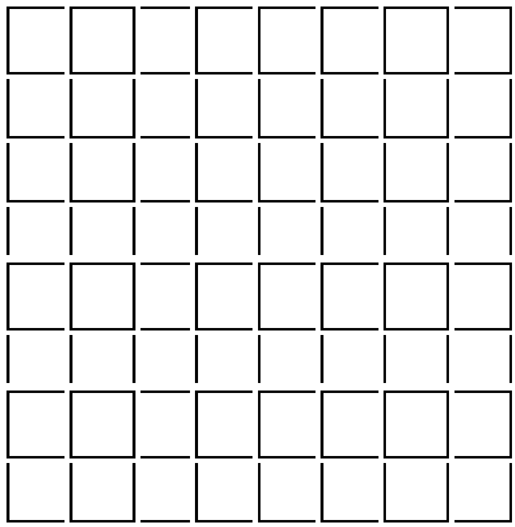


Figura 46: Tabuleiro do Jogo Matix

- 64 peças numeradas do seguinte modo;

Números	**Quantidade de peças**
15	1
-10	2
-5,-4,-3,-2,-1,7,8,10	3
0,1,2,3,4,5	5
6	6
Estrela	1

Figura 47: Peças do Jogo Matix

- As peças também foram feitas por meio de pequenos pedaços em formato quadrado de cartolinas;
- As peças foram enumeradas de acordo com a figura 47 acima.

Com o jogo já confeccionado, deu-se início ao jogo a fim de que os alunos pudessem reconhecer as suas regras.

Com as mesmas duplas formadas para a elaboração do jogo, na primeira aula, todas as duplas partiram inicialmente da mesma jogada. A ideia era que todos tivessem centrado ao mesmo tempo na mesma situação problema. O jogo inicial proposto foi:

0	6	7	-4	2	-3	1	10
-10	2	8	1	-1	-5	6	0
6	5	4	-2	3	0	8	5
-5	1	10	0	15	6	4	2
2	-1	3	4	✳	3	5	1
10	5	6	-5	2	7	-1	4
-3	0	8	5	-10	-4	3	-3
3	-4	-2	4	6	1	-2	7

Figura 48: Jogo Matix inicial

A ideia era simular uma situação de jogo em que todos os alunos acompanhassem as mesmas jogadas para que não houvesse dispersão dos alunos, pois se cada dupla gerasse uma situação de jogo diferente ficaria muito difícil acompanhar todas as duplas.

Então, cada dupla estava visualizando o mesmo jogo acima mostrado. O primeiro de cada dupla que deu início à partida podia mover a casa estrela verticalmente.

Como quem vence esse jogo é aquele que obtém maior resultado, a maioria optou por avançar até a casa 15 e não a casa 2. Então, para todos seguirem juntos, todas as duplas avançaram até a casa de número 15.

Em seguida, o adversário de cada dupla optou por ir até a casa de número 6. Assim foi feito até chegarmos ao fim da partida e revelarmos o campeão fazendo-se as somas e subtrações de cada casa conquistada. Com a situação problema resolvida, os alunos compreenderam melhor as regras e a jogabilidade.

Por fim, os alunos guardaram seus jogos nos seus respectivos armários. Nesse encontro, dois alunos da 5ª série faltaram. Todos os alunos presentes participaram ativamente e com muita competência.

- **Descrição do Décimo Segundo Encontro (16 de junho de 2009)**

Nesse último encontro, tanto na primeira aula como na segunda aula, os alunos praticaram o Jogo Matix, a fim de adquirirem experiência com ele e desenvolverem estratégias de antecipação por meio de cálculo mental, agilizando o raciocínio e aumentando a capacidade de concentração.

Os alunos perceberam que nem sempre é mais vantajoso "comer" uma peça de maior numeração. Pois, às vezes, ao "comer" uma peça de maior numeração pode-se liberar ao adversário uma peça de uma numeração ainda maior. Foi nesse momento que eles puderam perceber a importância da antecipação por meio de cálculo mental e de traçar estratégias.

Os alunos gostaram muito do jogo e puderam desenvolver habilidades de cálculo mental, raciocínio lógico e a capacidade de traçar estratégias de antecipação. Nesse encontro, não houve falta e todos os alunos participaram ativamente e com muita competência.

CAPÍTULO 4: ANÁLISES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo serão apresentadas as análises finais sobre as dificuldades dos alunos em compreender os números relativos, o quanto os jogos e as atividades propostas os auxiliaram nesse processo de ensino-aprendizagem, bem como os resultados avaliativos finais sobre o rendimento escolar desses educandos.

Por fim, têm-se as conclusões finais, tendo em vista os objetivos iniciais propostos, o relato das atividades desenvolvidas e os resultados obtidos.

4.1. Dificuldades no Processo de Ensino-aprendizagem dos Números Relativos

Sabe-se que há certa dificuldade por parte das crianças em compreender os números negativos, uma vez que esses são entendidos por elas como um objeto dotado de substância. Dessa maneira, “como entender os números negativos, visto que são menores do que zero e, consequentemente, como pode haver um objeto menor do que o nada?” Essa é uma formulação muito comum que passa pela mente das crianças, mas que nem sempre são observadas pelos educadores e/ou esclarecidas por eles.

Apesar da dificuldade de uma criança em compreender que existem quantidades menores que zero, observou-se nas atividades descritas no Capítulo 3 que elas conseguem aceitar a existência de negativos e, em contextos de jogos, por exemplo, realizar operações que envolvem números positivos e negativos.

Os alunos das séries finais do Ensino Fundamental – Ciclo I, quando iniciam a aprendizagem formal de números relativos, nas séries iniciais do Ensino Fundamental – Ciclo II, já possuem conhecimentos em algumas dimensões desse conceito. Dessa maneira, torna-se necessário, por parte do professor, uma sondagem sobre quais aspectos já são compreendidos por eles e quais requerem maior atenção. O jogo pode ser utilizado como instrumento de avaliação, auxiliando os professores em um melhor diagnóstico dos conhecimentos iniciais de seus alunos, das dificuldades que persistem após o ensino e quais aspectos dos conceitos merecem especial atenção em sala de aula.

4.2. O Auxílio dos Jogos na Compreensão dos Números Inteiros

As aulas laboratoriais, ou seja, as atividades ou os jogos de referência para este trabalho foram capazes de sondar, diagnosticar, ensinar e desenvolver as habilidades e os conceitos que os alunos têm ou precisam adquirir sobre os números inteiros, seja para a sua vida pessoal ou estudantil.

As atividades desenvolvidas foram importantes para a promoção da aprendizagem dos alunos, além da interação dos mesmos nas aulas convencionais de matemática, despertando-os para o aprendizado.

Notou-se que o trabalho com jogos interfere, positivamente, na relação aluno-professor proporcionando mais diálogo e mais proximidade entre ambos. O uso dos jogos pedagógicos é um excelente recurso didático, o professor pode utilizá-lo no processo de ensino-aprendizagem, pois ele contribui e enriquece o desenvolvimento intelectual e social do aluno.

Ao jogar, o aluno constrói relações quantitativas e lógicas, que se caracterizam pela aprendizagem em raciocinar e demonstrar, questionar o como e o porquê dos erros e acertos, quando da situação-problema ou do jogar com competência. Nesse sentido, o jogo trabalha com questionamentos e deduções, o que implica em uma lógica baseada em um raciocínio dedutivo, capaz de levá-lo a formulações do tipo: qual a melhor estratégia para vencer o jogo, o que é preciso para alcançar o objetivo, quais são as condições favoráveis, quais são os riscos, as probabilidades (mesmo que intuitivamente), a problematizar sobre o jogo, ou seja, produzir conhecimento.

As atitudes e emoções demonstradas pelos alunos, enquanto se pratica algum tipo de jogo pedagógico, são as mesmas desejadas na aquisição do conhecimento escolar, porém, ao jogar, são amplificadas. Os jogos propiciam aos alunos, envolvidos na atividade de ensino, a produção de estratégias sobre a solução de seus problemas. Assim foi a postura dos alunos durante essas aulas interativas. Além disso, a proposta de jogar prevê a identificação das dificuldades apresentadas pelo aluno no ambiente escolar e de “tratamento” de tais dificuldades.

Durante o jogo, o professor, por meio de intervenções, pôde avaliar se o aprendizado de seus alunos em relação aos conceitos matemáticos ensinados foi acontecendo e, se eles foram capazes de construir seu raciocínio buscando novas alternativas e estratégias de jogo.

Nos encontros, os alunos se mostraram mais participativos, totalmente envolvidos no conteúdo trabalhado. Dessa forma, o aprendizado aconteceu naturalmente, *brincando*, e o desenvolvimento das habilidades propostas em cada jogo foi trabalhado à medida que eles começam a buscar novas formas de resolução das atividades (jogar com competência). É de total relevância que os jogos sejam bem adaptados aos conteúdos, à faixa etária e às suas necessidades educacionais.

A cada atividade ou jogo realizado durante os encontros vespertinos, foi notório o consequente progresso nas aulas convencionais. Os jogos aplicados tinham em comum, entre outras coisas, o objetivo de desenvolver habilidades com operações de números inteiros e melhorar a destreza dos alunos com o cálculo. E assim foi constatada pela professora Renata Neves, responsável pelas aulas convencionais. Ela observou que os alunos tornaram-se mais participativos em aula, já durante o processo de aprendizado interativo, que respondiam com mais eficiência às questões em sala e que se mostraram mais ágeis em cálculos.

Este estudo ratificou a importância e necessidade do uso de jogos pedagógicos no ensino e aprendizagem na disciplina de matemática, mais especificamente, na inserção dos números inteiros relativos aos naturais para os alunos das séries finais do Ensino Fundamental – Ciclo I.

4.2.1. Os Jogos Propostos

A sequência de jogos escolhida para a aplicação aos alunos da quinta e sexta séries do Ensino Fundamental – Ciclo II seguiu uma ordem crescente de raciocínio e desenvolvimento de algumas habilidades.

Nos primeiros encontros, os alunos exerceram a atividade das fichas positivas e negativas. É uma atividade de simples confecção e de fácil entendimento e o melhor, os alunos treinaram as operações básicas com os números inteiros e tiveram uma visão mais palpável do tema, pois ao propor uma operação e realizá-la manualmente por meio das fichas os alunos obtiveram a solução com as próprias fichas. Essa atividade ajudou-os na compreensão das operações e possibilitou-lhes uma auto-avaliação.

Os encontros seguintes foram utilizados para aplicação do Jogo do Dinossauro que explorou o cálculo mental e exercitou a concentração dos alunos. Como cada aluno fez cálculos de adição de números inteiros mentalmente, o jogo, então, desenvolveu habilidades mentais e auto-avaliação por parte deles. Dessa maneira, trabalharam com a adição e com os conceitos de ordenação dos números inteiros e de simetria na multiplicação de um inteiro por (+1) ou (-1).

Em seguida, o jogo do hexágono foi apresentado aos alunos. Nesse jogo, eles exercitaram as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação. Sendo assim, eles ampliaram suas competências com números inteiros, já que executaram operações mais sofisticadas (potenciação e radiciação), criando também mais destreza em operações de cálculo.

Por último, o jogo Matix que apesar de ser de fácil confecção e de poucas regras, desafia os alunos a elaborarem estratégias e a organizarem raciocínio para preverem as próximas jogadas (estratégia de antecipação). Esse jogo remeteu-lhes um raciocínio que os direcionava a manipular os números inteiros. Dessa forma, o jogo Matix ajudou-os a se concentrarem e a tomarem decisões em tempo relativamente pequeno.

A atividade das fichas e os três jogos são instrumentos de avaliação que juntos conseguem: diagnosticar as principais dificuldades dos alunos a respeito dos números relativos e suas operações, introduzir o conceito de números inteiros relativos a partir do conjunto dos naturais e, finalmente, desenvolver habilidades e destrezas que os ajudem nas séries subsequentes e em atividades cotidianas.

4.2.2. Diagnósticos das Principais Dificuldades

A maior dificuldade dos alunos foi em efetuar operações, sobretudo de subtração e multiplicação, quando envolviam números relativos. Tal dificuldade deveu-se ao fato deles ainda não terem muito bem formulada a ideia dos números inteiros negativos. Aliás, os jogos tinham por foco principal, introduzir esses conceitos, ou seja, familiarizá-los com os números relativos e suas operações básicas.

A confecção e regra dos jogos não foram problemáticas, pois todas eram de fáceis e acessíveis aos alunos.

A etapa da inserção do conceito de números inteiros relativos a partir do conjunto dos naturais não foi difícil de ser executada, uma vez que os jogos e as atividades foram fundamentais para que os alunos pudessem trabalhar com os números relativos sem traumas. Observou-se que sem o formalismo das aulas convencionais e com a relativa descontração que as aulas laboratoriais proporcionam, os alunos se tornam mais receptivos ao aprendizado.

4.2.3. Desenvolvimento das Habilidades

Após a sondagem das principais dificuldades e da inserção dos números inteiros relativos, pôde-se trabalhar com a ideia de desenvolver habilidades e destrezas sobre o tema. Jogar com competência significa que, após a familiarização e compreensão dos jogos e regras, os alunos conseguem praticar os jogos de modo a desenvolver técnicas e estratégias para vencê-los. E assim, nas aulas laboratoriais desenvolvidas, os alunos aprenderam a lidar e manusear os números relativos de forma mais segura e inteligente.

Sintetizando, a seguir, estão descritas algumas características básicas (confecção, regra, jogabilidade, conjuntos numéricos, operações e objetivos) a respeito dos jogos:

TABELA DE CARACTERÍSTICAS DOS JOGOS				
Características Gerais	**Atividade das Fichas**	**Jogo do Dinossauro**	**Jogo do Hexágono**	**Jogo Matix**
CONFECÇÃO	Fácil	Média	Média a Difícil	Muito Fácil
REGRA	Muito Fácil	Média	Fácil	Fácil
JOGABILIDADE	Alta	Média	Alta	Média
CONJUNTOS NUMÉRICOS	Números Inteiros	Números Inteiros	Números Naturais	Números Inteiros
OPERAÇÕES	Adição, Subtração e Multiplicação	Adição e Multiplicação.	Adição, Subtração, Multiplicação, Divisão,Potenciação e Radiciação	Adição
O QUE EXERCITA	Fundamentos Auto-avaliação Concentração	Cálculo (mental) Auto-avaliação Concentração	Cálculo Concentração	Estratégia de antecipação Concentração
O QUE DESENVOLVE	Cálculo Operações-básicas Auto-confiança	Operações-básicas Simetria Auto - confiança	Cálculo Destreza em operações Raciocínio - lógico	Cálculo Raciocínio-lógico Estratégia Operações-básicas

Tabela 01: Tabela de Características dos Jogos

Para detalhar melhor a tabela acima, explicitam-se sete competências a respeito dos jogos:

- **Confecção**: Esse item avalia a dificuldade de se elaborar cada jogo, ou seja, se a construção de certo jogo pode ser realizada rapidamente, se pode ser realizado pelos próprios alunos, ou se é necessário a intervenção do professor. A atividade das Fichas e o Jogo Matix são confecções fáceis. Ambos precisam basicamente de cartolina, tesoura, régua e lápis. Embora seja necessária a orientação do professor, os próprios alunos são capazes de elaborarem essas atividades. Já o jogo do Dinossauro foi classificado de média confecção. No tabuleiro do jogo, é necessário que se desenhe um grande dinossauro. Se possível, é interessante que o haja uma parceria com o professor de artes para que os alunos o desenhem. A questão é que o dinossauro não pode ser desenhado em estilo livre, como foi visto nas descrições, capítulo IV, há "casas" que se situam na parte superior dele. O jogo mais difícil de ser confeccionado é o do Hexágono. O tabuleiro é constituído por vários hexágonos e possui uma disposição certa para elaboração. Em seguida, dá-se a pintura dos hexágonos que não é aleatória, ou seja, também há uma disposição certa para a pintura dos hexágonos como já descrito no Capítulo 3. Não é necessário que os alunos elaborem o tabuleiro; o próprio professor poderá elaborar um modelo para que eles joguem.

- **Regras**: No conjunto, todos os jogos são formados por regras simples. O Jogo do Dinossauro foi classificado como nível médio de dificuldade de regras, pois possui quatro rodadas e, em cada rodada, as regras sofrem algumas alterações. Dessa forma, o aluno deve estar bem atento às mudanças nas regras do Jogo do Dinossauro.

- **Jogabilidade**: Essa característica representa o grau de liberdade que o jogo proporciona, o quanto o aluno pode variar suas jogadas e o números de possibilidades que o jogo dispõe. Assim, os jogos do Dinossauro e o Matix receberam classificação média. Pois, no caso do Jogo do Dinossauro, o peão só pode subir ou descer e o objetivo é chegar a um dos extremos das casas. Já no jogo do Matix, os participantes só podem se mover horizontal e verticalmente, o que de certa forma restringe o número de possibilidades dos participantes. O Jogo do Hexágono e a atividade das fichas possuem alto grau de liberdade. Os alunos possuem várias possibilidades de jogadas. No caso da atividade das fichas, o aluno ou o professor podem propor qualquer operação básica, desde que não seja de divisão, com os números inteiros. Também não se podem propor operações com números muito altos, pois cada ficha representa apenas uma unidade. Assim, para resolver a operação: 16 + 32 serão necessárias 48 fichas positivas. No entanto, há uma gama enorme de possibilidades. O mesmo ocorre com o Jogo do Hexágono, já que os participantes possuem grande liberdade no momento de efetuarem as operações e também há um grande número de "casas" que podem ser ocupadas e vários núcleos que podem ser construídos em uma sequência válida para vencer o jogo.

- **Conjuntos numéricos e Operações:** Com exceção do Jogo do Hexágono que utiliza somente números naturais, os demais trabalham com o conjunto dos números inteiros. Na atividade das fichas, por exemplo, pode-se propor operações que parta de números relativos tais como (-2) + (-1), que representam a adição de uma ficha negativa a duas fichas negativas; entretanto, pode-se obter o mesmo resultado (-3), partindo-se de números positivos tais como (+1) – (+4), com uma ficha positiva e três pares de fichas, sendo uma negativa e outra positiva; a seguir retiram-se quatro fichas positivas, restando três fichas negativas. No jogo do Dinossauro, o próprio tabuleiro contém os números inteiros negativos. Além disso, em algumas rodadas há a multiplicação por +1 ou -1, e assim, um número pode perambular por entre os conjuntos dos números naturais e dos números inteiros. Algo muito parecido ocorre no jogo do Matix, em que o tabuleiro também contém os números relativos. Já no jogo do Hexágono, os números que darão origem às operações são obtidas por meio dos dados (dado comum), ou seja, números variam entre 1 e 6, além do mais, o tabuleiro não possui números negativos, e sendo assim, os participantes ficam restritos ao conjunto dos naturais. No entanto, os participantes não ficam atrelados apenas às operações básicas da aritmética. Eles podem efetuar operações de potenciação e radiciação também.

- **Exercita e Desenvolve:** Todos os jogos exercitam e, consequentemente, desenvolvem habilidades de concentração, operações básicas de cálculo e raciocínio lógico. A atividade das fichas trabalha com os fundamentos de cálculo e a auto-avaliação, já que os alunos podem propor uma operação e realizá-la por meio das fichas, obtendo, assim, a solução para o problema proposto e, dessa forma, podem verificar se acertaram ou não. Em médio prazo, os alunos desenvolveram habilidades de cálculo mental e melhoraram seus desempenhos, o que valorizou a sua autoconfiança. O Jogo do Dinossauro também trabalha, sob condições muito próximas à da atividade das fichas, a concentração, autoavaliação e autoconfiança, e operações básicas, porém insere a ideia de simetria. O Jogo do Hexágono trabalha com figuras planas, que até então não foram trabalhadas anteriormente por nenhum jogo, ou seja, é uma característica ímpar. Não é a única novidade, pois ele também faz com que os alunos elaborem operações mais sofisticadas, utilizando potenciação e radiciação. Destrezas em operações e raciocínios são bastante cobrados, pois os alunos têm, a partir de três valores sorteados nos dados, que manipulá-los de tal modo a completar uma sequência de três casas. Matix, além de trabalhar as operações básicas de cálculo e raciocínio lógico, insere a estratégia da antecipação, ou melhor, os alunos devem deduzir as próximas jogadas e assim direcionar o jogo para um caminho que lhe pareça mais vantajoso.

Os histogramas que serão vistos a seguir foram inspirados nos valores completados da tabela 01 logo acima. Sendo assim, por exemplo, no grau de dificuldade de se confeccionar o jogo, foi estipulado que o "Muito fácil" recebesse 20 pontos; o fácil recebesse 40 pontos; o médio recebesse entre 40 e 80 pontos e o difícil, 100 pontos. Assim, pode-se comparar uma mesma competência entre os diferentes jogos.

A ordem de aplicação dos jogos para os alunos foi: Atividade das Fichas - Jogo do Dinossauro - Jogo do Hexágono - Jogo Matix. Essa ordenação não foi escolhida por acaso, já que foram dadas prioridades para operações praticadas e habilidades adquiridas, dando ênfase às habilidades adquiridas. Nota-se, nos histogramas, a evolução das fatias desses dois quesitos.

Por meio dos gráficos é possível fazer considerações sob dois aspectos:

- É possível avaliar o grau de relevância que cada competência possui em um jogo, ou seja, avaliar, por exemplo, que jogabilidade ocupa espaço bem maior que regras na atividade das fichas, o que implica que a jogabilidade é mais densa que as regras;
- É possível também comparar as competências entres os jogos. Por exemplo, verificar que habilidades adquiridas pelo jogo Matix têm maior peso do que as adquiridas no Jogo do Dinossauro.

Os jogos que possuem pequenas parcelas de "regras" e grandes parcelas de "jogabilidade" são bem interessantes, pois se caracterizam como jogos de fácil acesso e grande participação dos integrantes. Basicamente, os quatro jogos em questão possuem esses quesitos, mas como esses devem ter uma conotação pedagógica, também é interessante que eles contribuam significativamente para o desenvolvimento de habilidades referentes a algum conteúdo escolar. É também, nesse sentido, que todos eles contribuem para esse processo de ensino-aprendizagem. O maior destaque é o Jogo do Matix, além do cálculo e concentração, ele desenvolve nos alunos, raciocínio lógico e estratégia de antecipação.

Os cinco itens selecionados para a elaboração dos histogramas foram retirados da tabela 01 das características dos jogos e são suficientes para se ter uma avaliação sobre os jogos. Os três primeiros itens: confecção, regras e jogabilidade, caracterizam o jogo do ponto vista da facilidade de elaborá-lo, de explicá-lo e quanto à interatividade entre o jogo e os participantes. Os outros itens referem-se à parte didática do jogo propriamente dita: operações praticadas e habilidades adquiridas avaliam os temas e importâncias trabalhadas pelos jogos.

Confecção, Regras e Jogabilidade: Para estas três primeiras competências, que se referem ao jogo por si só, a pontuação de significância foi distribuída da seguinte forma:

- 20 pontos - Muito Fácil ou Fraco;
- 40 pontos – Fácil ou Baixo;
- 40 a 80 pontos - Médio;
- 100 pontos - Difícil

As pontuações que cada jogo recebeu foram inspiradas na tabela 01 de características dos jogos e ilustradas nos gráficos em forma de Histograma.

- **Confecção**: 40 pontos para as Atividades das Fichas e 20 pontos para o Jogo Matix, visto que na tabela 01 foram avaliadas como fáceis de serem confeccionadas. O Jogo do Dinossauro (60 pontos) e o Jogo do Hexágono (80 pontos) receberam altas pontuações, tendo em vista que foram avaliadas respectivamente como média e média à difícil pela tabela 01.

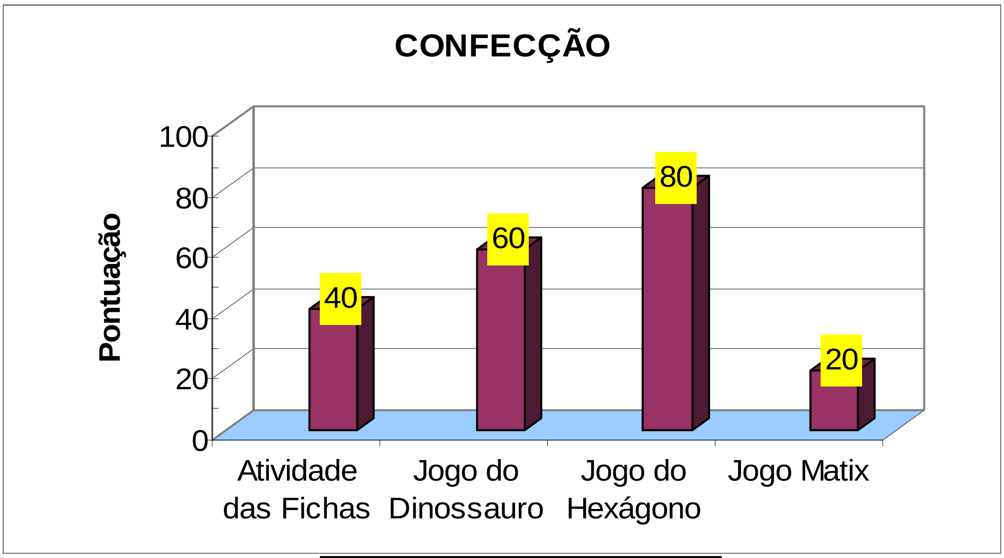


Gráfico 01: Confecção

- **Regras**: Conforme a tabela 01, o Jogo do Dinossauro recebeu 60 pontos, ou seja, grau mediano de elaboração das regras. Isso porque, o jogo consiste em quatro rodadas e a cada rodada as regras se tornam mais elaboradas, embora não sejam difíceis. Os demais jogos foram rotulados entre 20 e 40 pontos, ou seja, de fácil acesso às regras aos alunos.

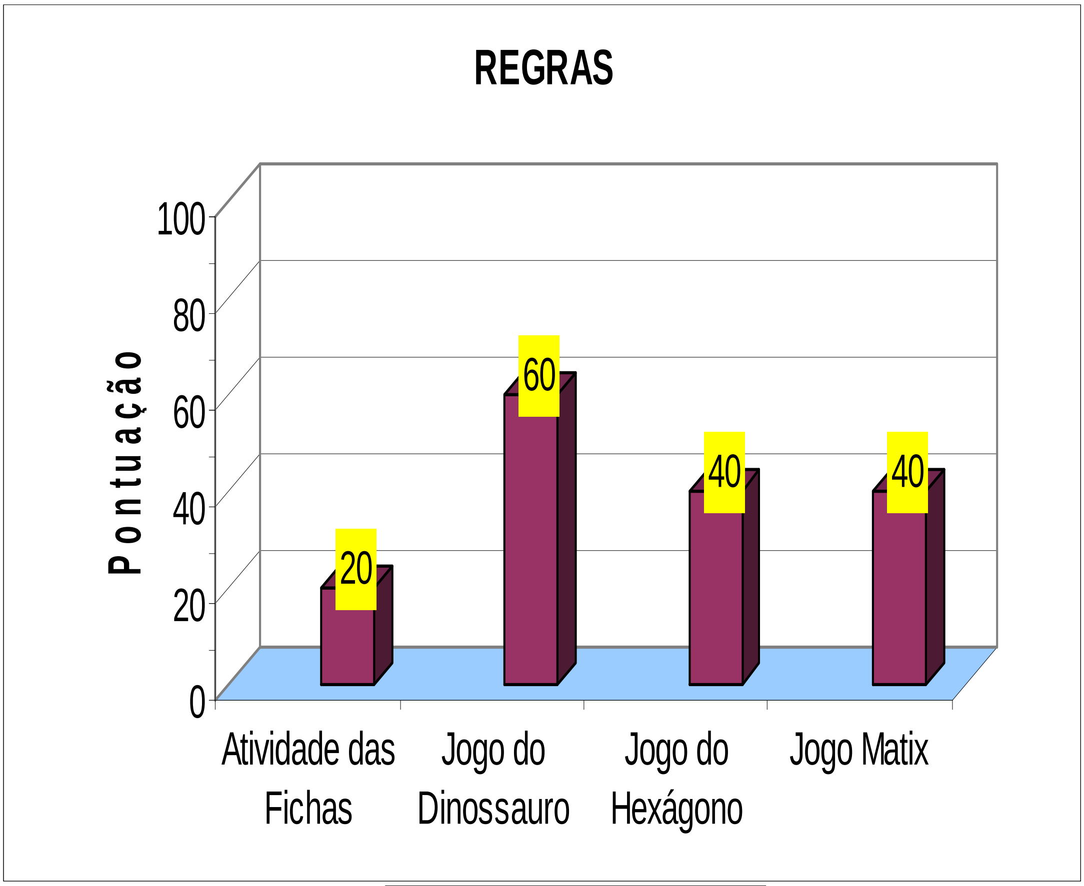


Gráfico 02: Regras

- **Jogabilidade**: De acordo com os dados da tabela 01, a atividade das Fichas e o Jogo do Hexágono receberam 100 pontos, valor máximo estipulado, por proporcionar grande liberdade e possibilidades de jogadas. Já o Jogo do Dinossauro (50 pontos) e Matix (70 pontos), ou seja, considerados mediano. No caso do Jogo do Dinossauro, essa pontuação pode ser atribuída ao fato de peões poderem-se mover apenas para cima ou para baixo e as casas que o participante deverá ocupar a cada rodada depender dos dados. No Jogo Matix, os participantes podem mover-se também apenas horizontal e verticalmente, embora os participantes ainda possam escolher qual casa devem escolher dentre as que lhe são permitidas pelas regras.

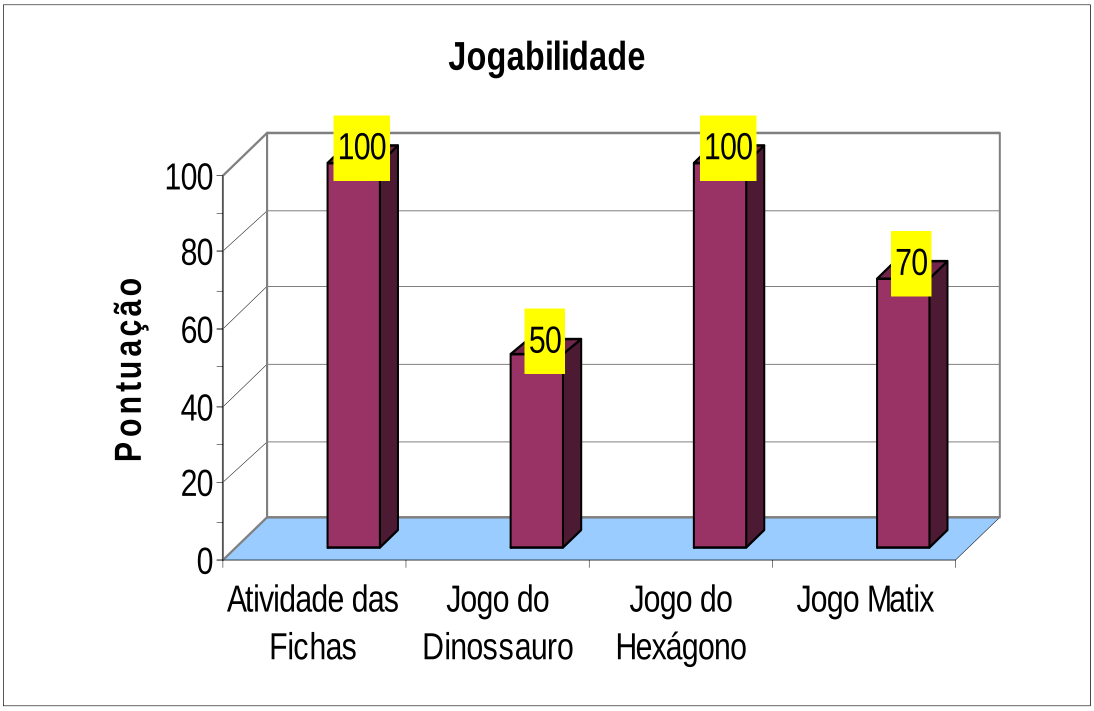


Gráfico 03: Jogabilidade

<u>Operações e Habilidades:</u> referem-se à parte pedagógica dos jogos e também foram inspiradas na tabela 01 de características dos jogos e ilustradas nos gráficos em forma de Histograma.

A pontuação de significância para estas duas competências foi distribuída da seguinte forma:

No caso das Operações Praticadas

- 20 pontos - Adição e Subtração com Naturais;
- 40 pontos – Adição e Subtração com Inteiros;
- 60 pontos – As operações básicas com Naturais;
- 80 pontos – As operações básicas com Inteiros;
- 100 pontos – Além das operações básicas, potenciação e radiciação.

No caso das Habilidades Adquiridas

- 25 pontos – Fundamentos da Álgebra/autoconfiança/concentração;
- 50 pontos – Fundamentos/autoconfiança/concentração/cálculo mental;
- 75 pontos – Operação sofisticada/autoconfiança/concentração/cálculo mental;
- 100 pontos – Autoconfiança/cálculo mental/lógica/estratégia de antecipação.

- **<u>Operações Praticadas:</u>** Segundo a tabela 01, o valor porcentual mínimo foi de 20 pontos e o máximo, 100 pontos. Apenas o jogo Matix recebeu 40 pontos para Operações praticadas, visto que ele de certa forma trabalha apenas com a adição, embora de números inteiros e não apenas no conjunto dos naturais. A Atividade das Fichas e Jogo do Dinossauro obtiveram 60 pontos. Eles trabalham com operações básicas, com exceção da divisão, dos números inteiros. O que se destaca é, sem dúvida, o Jogo do Hexágono, 100 pontos; ele ultrapassa a barreira das operações básicas. Os alunos têm de operar dentro da potenciação e radiciação, além da adição, subtração e multiplicação.

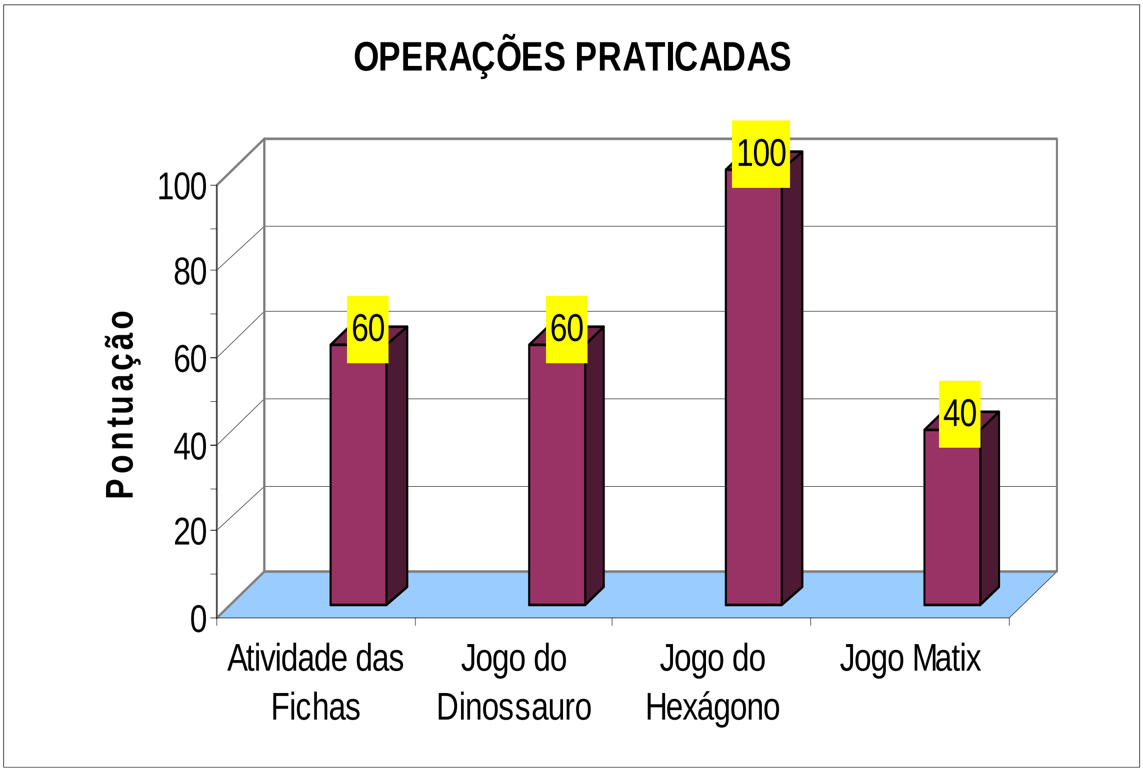


Gráfico 04: Operações Praticadas

- **<u>Habilidades Adquiridas:</u>** A última competência a ser discutida é a habilidades adquiridas. Os menores índices (tabela 01) foram para, Atividade das Fichas, 25 pontos e Jogo do Dinossauro, 50 pontos. Ambos trabalham concentração, autoavaliação, operações básicas e cálculo mental. O jogo do Hexágono, 75 pontos, desenvolve concentração, operações de cálculo mais sofisticadas, raciocínio lógico, figura plana e destreza em cálculo. O destaque em habilidades desenvolvidas é o Jogo Matix, 100 pontos, pois além de trabalhar com concentração, operações básicas, raciocínio lógico, cálculo mental, trabalha também a estratégia de antecipação.

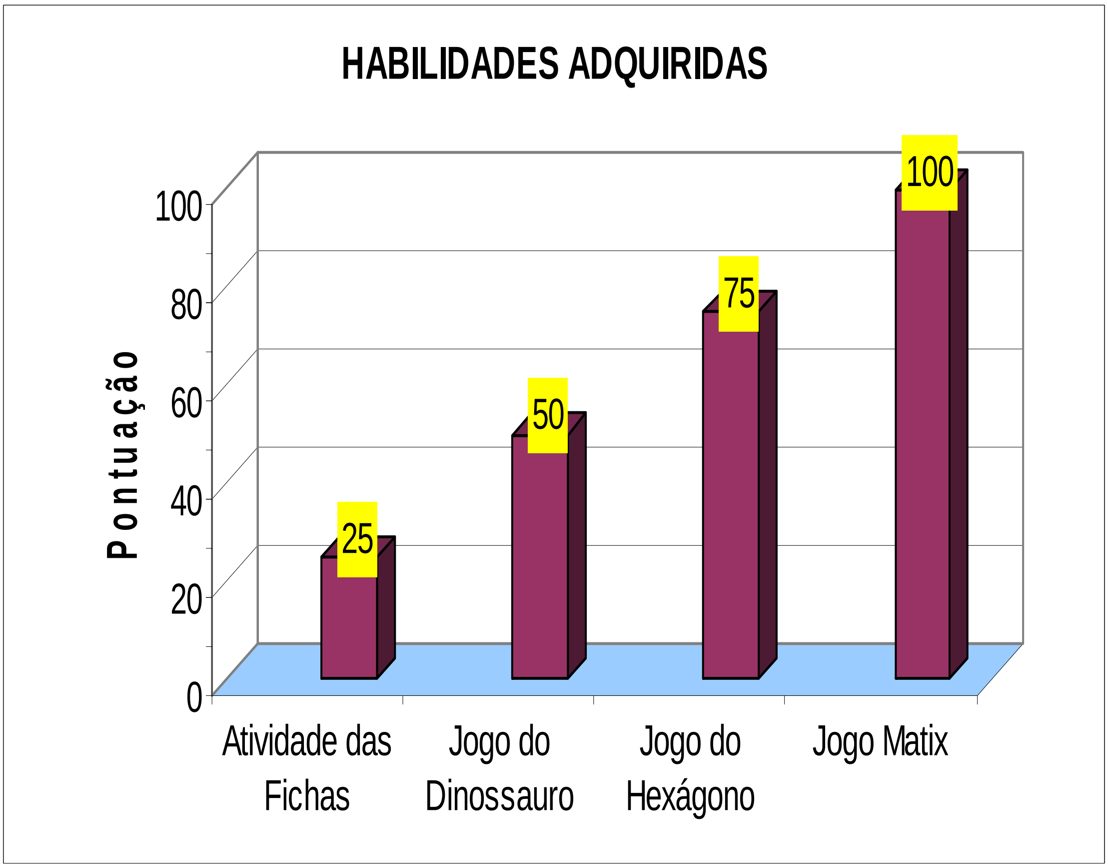


Gráfico 05: Habilidades Adquiridas

4.3. O Processo Avaliativo

Dez testes, com cinco alternativas cada, relacionados aos números inteiros foram aplicados com o objetivo de avaliar a evolução dos alunos à medida que eles participavam dos encontros no "Clube de Matemática". Os testes foram aplicados nos horários convencionais de aula, pela Professora Renata Neves, para as mesmas turmas que participavam dos encontros vespertinos. Esses foram aplicados por cinco vezes durante os períodos de março a junho de 2009, período em que ocorreram os encontros. Como os testes foram repetidamente aplicados, em nenhum momento foi viabilizado o gabarito para os alunos.

Abaixo seguem os testes sobre o conjunto dos números inteiros e raciocínio lógico que serviram para avaliar os alunos:

01) Determine dois números inteiros consecutivos tais que a suas somas dão 21:

a) 07 e 08

b) 08 e 09

c) 09 e 10

d) 10 e 11

e) 11 e 12

02) Maria pediu a seu filho, João, para que ele fosse buscar até o armazém 5 latas de pêssegos. João só é capaz de carregar duas latas por vez. Quantas vezes João deverá ir ao mercado?

a) 5

b) 2

c) 1

d) 4

e) 3

03) Um estudante reparou que em sua régua de 30cm de comprimento havia uma formiga, que se encontrava na marca de 5,0cm. A formiga andou 17,0cm para frente e em seguida voltou 3,0cm, então o estudante pôde observar que a formiga se encontrava na marca?

a) 18cm

b) 19cm

c) 20cm

d) 21cm

e) 22cm

04) Em relação ao conjunto dos números inteiros, a única afirmativa falsa é

a) O conjunto dos números inteiros é mais amplo que o conjunto dos naturais.

b) Um exemplo de um número que pertence ao conjunto dos inteiros é o -1,5.

c) O conjunto dos inteiros engloba: os inteiros negativos, o zero e os inteiros positivos.

d) Um número positivo possui um simétrico, que é negativo.

e) O conjunto dos números inteiros é o conjunto dos números naturais com o zero mais os inteiros negativos.

05) Assinale a falsa:

a) o valor do módulo de -328 é 328.

b) o valor de - (-5) é +5.

c) o valor da soma de 30 com o simétrico de – 80 é 110.

d) o valor da soma entre o absoluto de -29 e 29 é 58.

e) o valor da diferença entre o simétrico de 18 e o 18 é zero.

06) Quantos números inteiros têm valor absoluto menor que 4?

a)1

b)4

c)3

d)7

e)Nenhum

07) Assinale a alternativa que ordena crescentemente os números abaixo:

-2, 4, -7, -3, 5, 0, 8 e 9:

a)-7, -3, -2, 0, 4, 5, 8, 9.

b)-2, -3, -7, 0, 4, 5, 8, 9.

c)0, -2, -3, 4, 5, -7, 8, 9.

d)-2, -3, -7, 0, 9, 8, 5, 4.

e)0, **-7,** -3, -2, 4, 5, 8, 9.

08) Felipe começa a escrever números naturais em uma folha de papel muito grande, uma linha após a outra, como mostrado a seguir:

1										
2	3	4								
3	4	5	6	7						
4	5	6	7	8	9	10				
5	6	7	8	9	10	11	12	13		
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

....

Considerando que Felipe mantenha o padrão adotado em todas as linhas:

Quantos números naturais ele escreverá na 50ª linha:

a)10

b)50

c)51

d)99

e)100

09) O menor número inteiro que devemos adicionar a 987 para que a soma seja positiva é:

a) 986

b) -986

c) 0

d) 988

e) -988

10) Assinale a opção que dê corretamente a solução das operações:

$$\{-2.[(5-7).(14 - 8) – (-3)]\}$$

a)-18

b)16

c)-7

d)18

e)16

A seguir, na tabela 02, há uma tabela que revela a nítida evolução que os alunos obtiveram no decorrer dos encontros, ou seja, conforme eles tinham contato com os jogos e atividades propostas.

TESTES	**Pontuação Média dos Alunos***
Teste I Antes das atividades interativas	**3,4**
Teste II Após a Atividade das Fichas	**5,1**
Teste III Após o Jogo do Dinossauro	**6,3**
Teste IV Após o Jogo do Hexágono	**7,2**
Teste V Após o Jogo do Matix	**8,1**
Observação: Foram 10 testes valendo 1 ponto cada	

Tabela 02: Médias das pontuações dos alunos

A pontuação média foi calculada somando-se todas as pontuações dos alunos e dividindo-se pela quantidade de alunos, portanto, usando-se média aritmética.

Abaixo há o histograma em porcentagem que mostra a evolução dos alunos a cada aplicação dos testes:

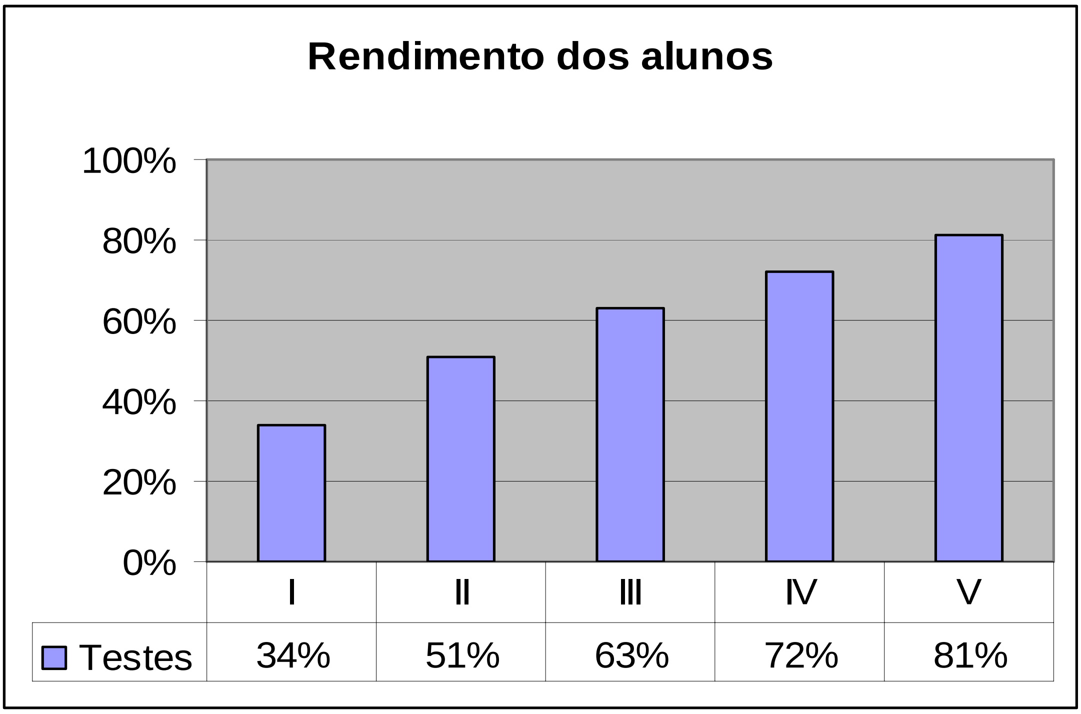


Gráfico 06: Rendimento dos alunos

<u>Legenda do Gráfico 06:</u>

Teste I: Antes das interações com os jogos.

Teste II: Logo após a Atividade das Fichas.

Teste III: Após o Jogo do Dinossauro.

Teste IV: Após o Jogo do Hexágono.

Na primeira vez que os alunos foram avaliados, obtiveram 3,4 (média). As questões que tiveram maior frequência de acertos foram: 03, 07 e 10.

Se houve uma frequência comum de acertos significa que eles realmente já tinham algum grau de conhecimento sobre os números inteiros.

No segundo momento, no teste II, houve uma evolução em que eles alcançaram a metade dos testes. Aumentando a frequência de acerto em mais duas questões, foram elas: 01 e 04.

No terceiro teste, em que os alunos já tiveram acesso ao Jogo do Dinossauro, eles evoluíram até 63%, sendo que muitos, nessa etapa, acertaram a questão de número 05. Aliás, o Jogo do Dinossauro, trabalha o tema proposto pela questão, que é a ideia de simetria.

O quarto teste, que foi aplicado logo após o Jogo do Hexágono, ajudou-os na questão de número 10. Era de se esperar, tendo em vista que o Jogo do Hexágono desenvolviam-nos em destrezas nas operações algébricas.

O último teste, realizado após o Jogo Matix, ajudou-os a resolver a questão de número 08, questão essa que exigia a organização do raciocínio e lógica, principais aspectos desse referido jogo.

As questões 06 e 09 foram as que os alunos obtiveram menos êxito. A questão 06 realmente era um pouco mais complexa que as outras; já a questão de número 09, havia uma expectativa frustrada de que os alunos a resolvesse após o Jogo do Dinossauro, por trabalhar com números opostos.

Dessa maneira, os testes se enquadravam em um modelo bem prático e coerente aos conceitos discernidos nos jogos. Também é notória a evolução dos alunos no decorrer das aplicações dos jogos.

4.4. Considerações Finais

Os resultados obtidos e apresentados na parte final deste estudo permitem fazer algumas avaliações do emprego dos jogos em relação ao processo de ensino-aprendizagem dos números relativos.

Verificou-se que os alunos do “Clube de Matemática” aprenderam e se familiarizaram com os números inteiros relativos de um modo prático, sem traumas. E, assim, melhoraram seus rendimentos em sala de aula.

Dessa maneira, conclui-se que o simples fato de ensinar-lhes os números relativos por meio de jogos e atividades os tornou mais receptivos com a matemática. Eles puderam perceber que a matemática os auxilia de alguma forma nas atividades cotidianas. Aliás, o fato de compreender e manusear os números relativos ajudou-os a conhecer um pouco melhor a Ciência e o Mundo que os cercam.

Com a consciência de que se buscou oferecer alguma contribuição aos estudos ligados a essa área, faz-se o encerramento deste trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AUSUBEL, D. P. A aprendizagem significativa. In: NOVAK, J. D. **Uma teoria de educação.** São Paulo: Pioneiras, 1981. p. 21-34.

BARROS, C. S. G. **Psicologia e construtivismo.** São Paulo: Ática, 1996.

BASSETTI, C. M.; ORTEGA, A. C. ; RODRIGUES M. P. A interação social de crianças no jogo de regras. In: **Arquivos Brasileiros de Psicologia**, p. 28-45, 2005.

BELLONI, M. L. **Educação a Distância.** 3. ed. Campinas: Editora Segmento, 2003.

BORBA, R. E. S. R. **Sondando e intervindo na compreensão de conceitos:** o caso dos números inteiros relativos**.** UFPE. Educação Matemática. Disponível em: < http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_27/sondando.pdf>. Acesso em: 11 de outubro de 2009.

BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas:** uma estratégia para as aulas de matemática**.** 3. ed. São Paulo: IME/USP, 1998.

BRAGA, A. J. et al. **Uso dos jogos didáticos em sala de aula.** Guaíba: ULBRA. Disponível em: <http://www. guaiba.ulbra.tche.br/pesquisas/2007/artigos/letras/242.pdf> Acesso em: 14 de novembro de 2009.

BRASIL. **Dicionário enciclopédico conhecer.** Abril Cultural. Disponível em: http://www.somatematica.com.br/numeros/>. Acesso em: 25 de outubro de 2009.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretária de Educação Básica. **Explorando o ensino de Matemática.** – Brasília: MEC/SEF, 2001.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática/Secretária de Educação Fundamental.** Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRENELLI, R. P. **O jogo como espaço para pensar:** a construção de noções lógicas e aritméticas. Campinas: Papirus, 1996.

CARRIJO, S. M. F. ;MATOS, F. F. M. **A intervenção pedagógica e a utilização de jogos de matemática.** Universidade Federal de Uberlândia/Faculdade de Matemática. **FAMAT em Revista** n. 10, p.211-222, abr. 2008.

CARVALHO, D. L. **Metodologia do ensino da matemática.** São Paulo: Ática, 1999.

D’ AMBROSIO, U. **Educação Matemática:** da teoria à prática**.** 13. ed. Campinas: Papirus, 1996.

GRANDO, R. C. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula.** 2000. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, 2000.

______. **O jogo e a matemática no contexto da sala de aula.** São Paulo: Paulus, 2004.

GROENWALD, C. L. O. ; TIMM, U.T. **Utilizando curiosidades e jogos matemáticos em sala de aula.** Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/artigos/a1/p1.php> Acesso em: 21 de novembro de 2009.

JESUS, M. A. S.; FINI, L. D. T. Uma proposta de aprendizagem significativa de Matemática através de jogos. In: BRITO, Márcia Regina Ferreira. **Psicologia da Educação Matemática: teoria e pesquisa.** Florianópolis: Insular. p. 129-145. 2011

LOPES, M. G. **Jogos na educação:** criar, fazer, jogar. 3. ed. São Paulo: Editora Cortez, 2000.

MACEDO, L. et al. **Aprender com jogos e situações-problema.** Porto Alegre: Artmed Editora, 2000.

MANDARINO, M. C. F.; BELFORT, E. **Matemática nas séries iniciais.** Rio de Janeiro: LIMC, 2006.

MARCO, Fabiana Fiorezi de. **Jogos:** um recurso metodológico para as aulas de matemática**.** Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/erpm2005/anais/m_cur/mc08.pdf>. Acesso em: 10 de outubro de 2009.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Portal do Professor.** Disponível em: <http://www. portaldoprofessor.mec.gov.br>. Acesso em: 12 de julho de 2010.

MORATORI, P. B. **Por que utilizar jogos educativos no processo de ensino aprendizagem?** UFRJ. Rio de Janeiro, 2003. Disponível em: <http://www.nce.ufrj.br/ginape/publicacoes/trabalhos/PatrickMaterial/Trabfinalpatrick2003>. pdfAcesso em: 08 de setembro de 2009.

MOURA, M. O. **A construção do signo numérico em situação de ensino**. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo, Faculdade de Educação, São Paulo, 1992.

______. A séria busca no jogo: do lúdico na matemática. In. KISHIMOTO, Tizuko (Org.). **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação.** São Paulo: Cortez. p. 72-87. 2000.

______. **O jogo e a construção do conhecimento matemático**. São Paulo: FDE, 1991. (Séries Ideias)

PIRES, C.M.C. **Educação matemática:** os desafios de uma área de conhecimento em construção**.** Disponível em:<http:// mariantonia.locaweb.com.br/educacao_matematica.ppt> Acesso em: 08 de setembro de 2009.

QUEIROZ, F. C. **Números relativos:** uma análise de natureza epistemológica de alguns livros didáticos nacionais do terceiro ciclo do ensino fundamental. 2006. 56 f. Monografia (Especialização em Matemática para Professores de Ensino Fundamental e Médio da Universidade Federal Fluminense), Niterói, 2006.

SÁ, P. F. et al. Os números relativos por meio de atividades com calculadoras e jogos de regras. UEPA/UNAMA. Disponível em:<http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/.../CC14551284220T.doc> Acesso em: 11 de outubro de 2009.

SILVA, A. F.; KODAMA, H. M. Y. **Jogos no ensino da Matemática.** Disponível em: <http://www.bienasbn.ufba.br> Acesso em: 10 de outubro de 2009.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. **Centro de Divulgação Científica e Cultural.** <http://www.cdcc.sc.usp.br/>. Acesso em: 12 de julho de 2010.

ZÁBOLI, G. **Práticas de ensino e subsídios para a prática docente.** 10. ed. São Paulo: Ática, 1999.